

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

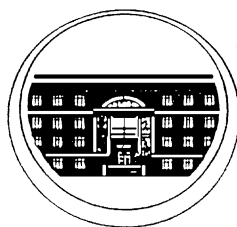
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 18

№ 2

2012



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 18, № 2. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2012. 314 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора В. В. Кабанов

Научные редакторы А. Л. Агеев, А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

А. Г. Бабенко, М. И. Гусев, А. Ф. Клейменов,
А. С. Кондратьев, А. И. Короткий, В. И. Максимов, М. Ю. Хачай

Редакционный совет

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин, акад. РАН А. М. Ильин,
акад. РАН Н. Н. Красовский, чл.-корр. РАН С. В. Матвеев,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин,
чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков, чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов,
чл.-корр. НАН Украины А. А. Чикрий
чл.-корр. НАН Беларуси Л. А. Шеметков

Отв. редактор выпуска А. Р. Данилин

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
Уральского отделения Российской
академии наук, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

К ВОСМИДЕСЯТИЛЕТИЮ АКАДЕМИКА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРЛЕНА МИХАЙЛОВИЧА ИЛЬИНА	5
С. А. Аникин. О статистической устойчивости задач идентификации входов динамических систем	9
Д. И. Борисов. О PT -симметричном волноводе с парой малых отверстий	22
Д. С. Быков, Ю. Ф. Долгий. Оценка точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления системы с запаздыванием	38
Р. Р. Гадыльшин, Е. А. Шишкина. О неравенствах Фридрикса для круга	48
Р. Н. Гарифуллин. Авторезонансное возбуждение солитона нелинейного уравнения Шредингера	62
А. Р. Данилин, О. О. Коврижных. Асимптотическое представление решения сингулярно возмущенной линейной задачи быстрогодействия	67
К. В. Емельянов. Разностная схема подгонки для сингулярно возмущенной задачи с точкой поворота	80
А. А. Ершов. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле с уравнением Лапласа вне тонкого диска	92
С. В. Захаров. Регулярная асимптотика обобщенного решения стационарной системы Навье — Стокса	108
А. Л. Казаков. Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением	114
Л. А. Калякин. Анализ уравнений Блоха для модели ядерной намагниченности	123
О. М. Киселев. Оссциляции около сепаратрисы в уравнении Дюффинга	141
А. И. Короткий, Е. И. Грибанова. Восстановление граничных управлений в гиперболических системах	154
Е. Ф. Леликова. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром при части старших производных	170

В. Ю. Новокшенов. Специальные решения первого и второго уравнений Пенлеве и особенности многообразия данных монодромии	179
А. В. Осипов. О свойствах типа полноты C -компактно-открытой топологии на $C(X)$	191
В. Н. Павленко, Т. А. Петраш. Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью	199
Г. П. Панасенко. Частичная асимптотическая декомпозиция области для уравнения диффузии — дискретной абсорбции	205
В. С. Парфененкова. Исследование стохастических задач математической физики ..	212
В. Г. Пименов, Е. Е. Таширова. Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью.	222
В. М. Селькин. О факторизациях подформаций однопороденных наследственных ω -насыщенных формаций	232
Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров. О последовательных приближениях решений вырожденной задачи Коши	238
Б. И. Сулейманов. Асимптотика универсального специального решения Гуревича — Питаевского уравнения Кортевега — де Вриза при $ x \rightarrow \infty$	245
О. А. Султанов. Устойчивость моделей авторезонанса при постоянно действующих возмущениях	254
Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов. Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом	265
И. А. Цепелев. Аппроксимация негладких решений ретроспективной задачи для модели конвекции-диффузии	281
Г. И. Шишкин. Обусловленность разностной схемы метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии	291
А. Е. Эльберт. Асимптотический анализ уравнения диффузии-поглощения с быстро и сильно осциллирующим коэффициентом поглощения в двумерном случае	305



АРЛЕН МИХАЙЛОВИЧ ИЛЬИН

(К восьмидесятилетию юбилею)

8 января 2012 г. исполнилось 80 лет академику РАН, лауреату Государственной премии Российской Федерации, выдающемуся российскому ученому-математику Арлену Михайловичу Ильину. Ему принадлежат уже ставшие классическими результаты по теории дифференциальных уравнений и по асимптотическим методам в задачах математической физики.

Арлен Михайлович родился в Ленинграде, жил в Улан-Удэ, в Батуми, в Москве, во время войны — в эвакуации в Курганской области, возвратился в Москву, где закончил школу и Московский государственный университет (МГУ); затем последовал переезд на Урал (Свердловск, Уфа, Челябинск).

С 8-го класса А. М. Ильин учился в знаменитой 59-й московской школе, которую окончил в 1949 г. с золотой медалью, и поступил на механико-математический факультет МГУ. Под руководством Ольги Арсеньевны Олейник, ученицы академика И. Г. Петровского, он написал дипломную работу, посвященную сильно вырождающимся эллиптическим уравнениям (именно О. А. Олейник принадлежит идея ввести малый параметр и рассматривать семейство невырожденных эллиптических операторов, зависящих от малого параметра и сходящихся к вырожденному). Результаты дипломной работы А. М. Ильина были опубликованы в ДАН СССР в 1955 г., и в дальнейшем научные достижения Арлена Михайловича были связаны преимущественно с исследованием задач с малым параметром.

С осени 1954 г. он начал преподавательскую деятельность на механико-математическом факультете МГУ, где работал до февраля 1963 г. на кафедре дифференциальных уравнений, которой заведовал академик И. Г. Петровский, ректор университета. Арлен Михайлович занимался исследованием асимптотики решений линейных параболических уравнений второго порядка при больших значениях времени, а также изучал поведение решений нелинейных параболических уравнений. Часть результатов, полученных им в этот период, вошла в обзорную статью о линейных параболических уравнениях, написанную совместно с О. А. Олейник и А. С. Калашниковым¹. Эта публикация остается актуальной до сих пор, о чем свидетельствует ее переиздание в 21-м томе «Трудов семинара им. И. Г. Петровского»².

В 1963 г. Арлен Михайлович переезжает в Свердловск и поступает на работу в только что образованное Свердловское отделение Математического института имени В. А. Стеклова (СОМИ, ныне Институт математики и механики УрО РАН (ИММ)). С этого времени вся дальнейшая трудовая деятельность А. М. Ильина связана с Уралом.

Отдел уравнений математической физики СОМИ, возглавляемый А. М. Ильиным, некоторое время сотрудничал с Институтом океанологии АН СССР, выполняя численные расчеты. Одним из результатов этого сотрудничества стало формирование двух новых научных направлений в теории дифференциальных уравнений и приближенных методов их решения.

¹Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 3. С. 3–146.

²Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 2001. Вып. 21. С. 9–193.

Первое направление — это создание разностных схем, позволяющих эффективно численно находить решения дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных (именно такого типа уравнения, получившие название уравнений с сингулярным возмущением, возникают в математических моделях океанических и атмосферных течений). В этом направлении до сих пор актуальна небольшая заметка, опубликованная Арленом Михайловичем в журнале “Математические заметки” в 1969 г.³

Второе — аналитическое исследование нового, весьма широкого, класса краевых задач с малым параметром (теперь эти задачи называются бисингулярными), характеризующееся тем, что при построении асимптотики решения в виде рядов по степеням малого параметра в коэффициентах рядов обнаруживаются разного типа сингулярности, которых нет в точном решении. Это второе направление также явилось результатом исследования моделей океанических течений. Одна из моделей таких течений описывается краевой задачей для эллиптического уравнения с малым параметром в случае, когда характеристика предельного уравнения первого порядка касается границы области, в которой эта задача рассматривается. Следует отметить, что в этом случае известный метод экспоненциально убывающих пограничных функций не дает исчерпывающего ответа. Для исследования асимптотики решения были использованы идеи, высказанные в начале XX в. Л. Прандтлем, с развитием которых впоследствии был связан термин “matching method”.

Первые работы на эту тему, написанные А. М. Ильиным в Свердловске, были опубликованы в 1975 г. — уже тогда, когда он работал в Уфе в отделе физики и математики Башкирского филиала АН СССР. Здесь Арлен Михайлович возглавил сектор дифференциальных уравнений и полностью переключился на указанную выше тематику. Постепенно под его руководством сложился весьма работоспособный коллектив из выпускников Уральского и Башкирского университетов. К этому периоду относится детальная разработка и обоснование метода согласования применительно к широкому классу бисингулярных задач. Итогом разработки этих идей А. М. Ильиным и его учениками явилось создание математически обоснованного метода, названного методом согласования асимптотических разложений, который был успешно применен к широкому кругу задач, не поддающихся исследованию другими способами. Результаты этих исследований были представлены Арленом Михайловичем в монографии⁴, вышедшей в 1989 г., которая вскоре была переведена на английский язык Американским математическим обществом⁵. (Более подробно с научной тематикой исследований А. М. Ильина можно познакомиться в статье журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН” за 2003 г.⁶)

В марте 1988 г. он вернулся в Свердловск и до 1994 г. преподавал в Уральском политехническом институте, с 1990 г. являясь одновременно ведущим научным сотрудником ИММ УрО РАН, а затем и заведующим отделом уравнений математической физики этого института. В этот период наряду с продолжением исследований бисингулярных краевых задач для уравнений в частных производных Арленом Михайловичем было инициировано изучение ряда новых бисингулярных задач — задач теории оптимального управления, содержащих в своем описании малые параметры. Характерная особенность таких задач — необходимость исследования систем уравнений, что в случае уравнений в частных производных является малоизученной областью.

³Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Vol. 6, вып. 2. P. 237–248.

⁴Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

⁵Il'in A. M. Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems. Providence: AMS, 1992. 281 p. (Trans. Math. Monogr. Vol. 102.)

⁶Арлен Михайлович Ильин (К семидесятилетию юбилею) // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 1. С. 3–9.

Отметим, что даже при рассмотрении задач оптимального управления, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, возникают неожиданные результаты. Так, при исследовании одного класса задач оптимального быстрогодействия (включающего управление материальной точкой с помощью силы, ограниченной по величине) с начальным условием, мало отличающимся от некоторого “критического”, при котором происходит качественная смена оптимального управления, оказалось, что асимптотическое разложение времени быстрогодействия нельзя построить в виде ряда, содержащего только степени малого параметра и логарифма от этого параметра.

В 2002 г. А. М. Ильин переехал на работу в Челябинск, где и работает по настоящее время профессором кафедры вычислительной математики Челябинского государственного университета, оставаясь научным руководителем отдела уравнений математической физики ИММ УрО РАН. В последние годы Арлен Михайлович помимо научной деятельности уделяет много внимания и передаче накопленного опыта новым поколениям исследователей. Им подготовлены и опубликованы в издательстве “Физматлит” монография “Асимптотические методы в анализе”⁷ и учебное пособие “Уравнения математической физики”⁸.

Исследования А. М. Ильина получили признание научного сообщества. В марте 1994 г. он был избран членом-корреспондентом Российской академии наук, а в мае 2000 г. — действительным членом РАН. В 1995 г. ему была присуждена премия имени И. Г. Петровского Российской академии наук за цикл работ “Асимптотические методы в математической физике” (совместно с О. А. Олейник). В 2000 г. Арлену Михайловичу Ильину была присуждена Государственная премия РФ (совместно с В. С. Буслаевым и М. В. Карасевым) за цикл работ “Асимптотические методы исследования уравнений математической физики”.

Много сил и времени Арлен Михайлович отдает педагогической деятельности. В настоящий момент он читает лекции не только в Челябинском государственном университете, но и в Уральском государственном университете (ныне вошедшем в состав Уральского федерального университета). В 2000–2002 гг. Ильин сотрудничал с Бурятским государственным университетом и был в 2001–2002 гг. директором Института математики и информатики Бурятского государственного университета. Где бы ни работал А. М. Ильин, всегда вокруг него создается коллектив молодых исследователей-единомышленников, которые сами с течением времени становятся авторитетными в своей области учеными. Созданная А. М. Ильиным научная школа получила широкое признание как в России, так и за рубежом. Среди его учеников семь докторов наук.

Арлен Михайлович много работает в экспертных советах ВАК и РФФИ, всеми силами способствуя развитию математической науки в России. Он является членом редколлегий и редакционных советов таких математических журналов, как “Успехи математических наук”, “Журнал вычислительной математики и математической физики”, “Труды Института математики и механики УрО РАН”.

Арлен Михайлович пользуется авторитетом и признанием коллег не только за выдающиеся научные достижения. Сочетание требовательности и принципиальности с благожелательным отношением к любому человеку, будь то студент или академик, обеспечивают ему уважение и любовь окружающих его людей.

Коллектив Института математики и механики, редколлегия журнала “Труды Института математики и механики”, коллеги, ученики и друзья сердечно поздравляют Арлена Михайловича с юбилеем и желают крепкого здоровья, новых творческих успехов и благополучия ему и его близким.

Редакционный совет и редколлегия

⁷Данилин А.Р., Ильин А.М. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.

⁸Ильин А.М. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2009. 192 с.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ А. М. ИЛЬИНА⁹

60. О границе применимости регулярной теории возмущений для мембраны с узкой щелью // Докл. РАН. 2001. Т. 380, № 2. С. 172–175 (совм. с Р. Р. Гадыльшиным).
61. On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities // Fund. Different. Equat. 2001. Vol. 8, № 3-4. P. 257–271 (together with S. V. Zakharov).
62. О двух специальных функциях, связанных с особенностями типа сборки // Докл. РАН. 2002. Т. 387, № 2. С. 156–158 (совм. с Б. И. Сулеймановым).
63. Применение метода согласования асимптотических разложений к решению краевых задач // Совр. математика и ее приложения. 2003. Т. 5. С. 33–78 (совм. с А. Р. Данилиным и С. В. Захаровым).
64. Коэффициенты внутреннего разложения при исследовании асимптотики некоторых сингулярных краевых задач // Дальневост. мат. журн. 2003. Т. 4, № 1. С. 78–85.
65. Равномерная асимптотика интеграла, зависящего от двух параметров // Вестн. ЧелГУ. Сер. 3: Математика. Механика. Информатика. 2003. № 2. С. 35–38 (совм. с А. С. Вандановым).
66. Асимптотика решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Докл. РАН. 2004. Т. 396, № 1. С. 23–24 (совм. с О. О. Коврижных).
67. Асимптотика решения вырождающегося дифференциального уравнения 3-го порядка с малым параметром при старшей производной // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 9. С. 1574–1584 (совм. с В. В. Нестеровой).
68. Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 12. С. 27–46 (совм. с Б. И. Сулеймановым).
69. Асимптотика решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при больших значениях времени // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 97–110 (совм. с М. А. Меленцовым).
70. Асимптотика специального решения уравнения Абея, связанного с особенностью сборки // Мат. сб. 2006. Т. 196, № 1. С. 55–70 (совм. с Б. И. Сулеймановым).
71. Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром при условии пересечения линий устойчивости предельного уравнения // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 4. С. 443–445 (совм. с С. Ф. Долбеевой).
72. Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром в случае двух решений предельного уравнения // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 98–108 (совм. с С. Ф. Долбеевой).
73. Асимптотика специального решения уравнения Абея, связанного с особенностью сборки. II. Большие значения параметра ϵ // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 9. С. 81–106 (совм. с Б. И. Сулеймановым).
74. Сингулярная начальная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Докл. РАН. 2008. Т. 422, № 4. С. 455–458 (совм. с О. Ю. Хачаем).
75. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2009. 192 с.
76. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с. (совм. с А. Р. Данилиным).
77. Асимптотика двумерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 116–126 (совм. с А. А. Ершовым).
78. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 6. С. 109–125 (совм. с Е. Ф. Леликовой).
79. Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 1. С. 81–102 (совм. с Ю. А. Леоньевым и О. Ю. Хачаем).
80. On the spectrum of the Neumann problem for Laplace equation in a domain with a narrow slit // Asymptotic Analysis. 2010. Vol. 67, №3, 4. P. 167–189 (together with R. R. Gadylshin).
81. Нелинейное уравнение диффузии и кольца Лизеганга // Докл. РАН. 2011. Т. 440, № 2. С. 1–4 (совм. с Б. А. Марковым).

⁹Продолжение, начало см.: Список научных трудов А. М. Ильина // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 1. С. 6–9.

УДК 517.977, 519.24, 517.983.54

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВХОДОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

С. А. Аникин

Рассматривается некорректно поставленная задача восстановления входа линейной динамической системы по результатам измерения выхода. Вместо традиционной для таких задач детерминированной модели ошибок в задании исходных данных предложена стохастическая модель. А именно предполагается, что в канале измерения выхода присутствуют помехи, которые моделируются реализациями случайного элемента со слабым распределением в пространстве выходов. Для корректного определения погрешности идентификации построено расширение пространства входов динамической системы. Введено понятие линейной обобщенной решающей процедуры. Получены критерии статистической устойчивости задачи (устойчивости псевдообратного оператора "вход-выход" системы по отношению к случайным ошибкам измерения выхода).

Ключевые слова: некорректно поставленные задачи, обратные задачи динамики, статистическая устойчивость.

S. A. Anikin. On the statistical stability of input identification problems for dynamic systems.

An ill-posed problem of the reconstruction of input from measurements of output in a linear dynamic system is considered. Instead of the deterministic model of errors in the specification of input data, which is traditional for such problems, a stochastic model is proposed. More exactly, it is assumed that there is noise in the output measurement channel; the noise is modeled by realizations of a random element with a weak distribution in the space of outputs. To determine correctly the identification error, an extension of the space of outputs of the dynamic system is constructed. The notion of linear generalized solving procedure is introduced. Criteria for the statistic stability of the problem (the stability of the pseudo-inverse "input-output" operator of the system with respect to random errors in output measurements) are obtained.

Keywords: ill-posed problems, inverse problems of dynamics, statistical stability.

Введение

Задачи, в которых требуется по выходу динамической системы восстановить ее вход, являются некорректно поставленными и относятся к классу обратных задач динамики управляемых систем [1–5]. При анализе некорректных задач обычно рассматривают две принципиально различные модели ошибок в задании исходных данных: детерминированную и вероятностную. Некорректные задачи с детерминированной моделью погрешности — хорошо изученный класс задач (см., например, [6; 7]). Вероятностная модель используется при описании ошибок значительно реже детерминированной. Это объясняется тем, что не всегда доступна дополнительная информация о статистических характеристиках распределения случайной погрешности, необходимая для построения вероятностной модели. Однако при наличии этой информации часто удается получить, используя вероятностный подход, более точные решения некорректной задачи, чем при детерминированном подходе. Некорректные задачи с вероятностной моделью погрешности в задании исходных данных наиболее полно изучались в работах [8; 9].

Одним из направлений исследования некорректной задачи с вероятностной моделью погрешности является анализ статистической устойчивости задачи (устойчивости решения задачи по отношению к случайным возмущениям исходных данных). Впервые анализ статистической устойчивости одной некорректной задачи был проведен в работе [10], где рассматривалась

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00672) и в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Динамические системы и теория управления" при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1019).

задача Коши для уравнения Лапласа. Примеры анализа устойчивости других задач можно найти в работах [11; 12]. Данная статья посвящена исследованию статистической устойчивости обратных задач динамики управляемых систем.

В работе используются следующие обозначения: L_2^m — пространство m -мерных функций, интегрируемых по Лебегу с квадратом на отрезке $[0, \vartheta]$; $\text{Im } F$ — образ линейного оператора F ; $\text{Ker } F$ — ядро линейного оператора F ; $\mathcal{D}(F)$ — область определения оператора F ; L^\perp — ортогональное дополнение к подпространству L ; F^+ — оператор, псевдообратный к линейному оператору F [7]; \bar{A} — замыкание множества A ; $R^{1/2}$ — квадратный корень из симметричного положительного оператора R .

1. Постановка задачи

Пусть движение динамической системы на отрезке $[0, \vartheta]$ описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad x(0) = x^0, \quad (1.1)$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент времени $t \in [0, \vartheta]$; x^0 — начальное состояние системы; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — входное воздействие на систему (управление, возмущение и т.д.) в момент времени t ; $A(t)$, $B(t)$ — заданные непрерывные матричные функции. Решения уравнения (1.1) понимаются в смысле Каратеодори.

Рассматривается задача идентификации входа динамической системы по результатам измерения выхода. *Входом* системы будем называть пару: начальное состояние и входное воздействие, т.е. элемент $w = (x^0, u(\cdot))$ гильбертова пространства $W = \mathbb{R}^n \times L_2^m$. Скалярное произведение в пространстве W задается равенством $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle x_1^0, x_2^0 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle u_1(\cdot), u_2(\cdot) \rangle_{L_2^m}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве X ; $w_1 = (x_1^0, u_1(\cdot))$, $w_2 = (x_2^0, u_2(\cdot))$. *Выходом* системы назовем функцию $y(\cdot) \in Y = L_2^p$, связанную с состоянием системы $x = x(t)$ и входным воздействием $u(t)$ при почти всех $t \in [0, \vartheta]$ равенством

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (1.2)$$

где $C(t)$, $D(t)$ — заданные непрерывные матричные функции.

Задача идентификации входа динамической системы сводится к решению операторного уравнения

$$Fw = y, \quad w \in W, \quad y \in Y, \quad (1.3)$$

где $F: W \rightarrow Y$ — (линейный и ограниченный) оператор “*вход-выход*” системы, т.е. оператор, который каждому входу $w = (x^0, u(\cdot)) \in W$ ставит в соответствие выход $y(\cdot) \in Y$ по правилу (1.1), (1.2). Пространство W назовем пространством входов, а пространство Y — пространством выходов.

Пусть при некотором $y = y_* \in Y$ множество решений уравнения (1.3) не пусто. Требуется восстановить *нормальный вход*, совместимый с выходом y_* , т.е. элемент $w_* \in W$ такой, что $\|w_*\| = \min \{\|w\| : Fw = y_*, w \in W\}$.

В отличие от работ [13; 14], в которых для задач идентификации входа систем вида (1.1), (1.2) исследовалась детерминированная модель ошибок измерения выхода, в данной работе предполагаем, что в канале измерения выхода присутствуют *случайные* помехи, которые моделируются реализациями случайного элемента ξ , и вместо точного значения выхода y_* нам известна лишь реализация случайного элемента (результат измерений выхода)

$$\tilde{y} = y_* + \xi. \quad (1.4)$$

Обычно считается, что случайные помехи моделируются реализациями некоторого случайного процесса $\xi(t)$. Такой подход подразумевает наличие возможности измерять значение функции $\tilde{y}(t) = y_*(t) + \xi(t)$ в каждый момент времени $t \in [0, \vartheta]$ без учета значений этой

функции в другие моменты. Однако каждое реальное измерение производится при помощи прибора, имеющего некоторую инерцию. Показания такого прибора дают не значения самой случайной величины $\tilde{y}(t)$ в момент времени t , а некоторое усредненное значение $f(z(\cdot))$, где $z(\cdot)$ — пробная функция, характеризующая измерительный прибор (или процесс измерения), а f — соответствующий $\tilde{y}(\cdot)$ линейный непрерывный функционал над пространством пробных функций $Y_+ \subset Y$ [15]. Поэтому естественно считать, что ошибки измерения выхода моделируются реализациями некоторого обобщенного случайного процесса — случайного элемента в сопряженном пространстве Y_+^* (расширении пространства Y). Типичным примером такого процесса является белый гауссовский шум [16].

Случайный элемент полностью определяется своим вероятностным распределением на бесконечномерном пространстве Y_+^* . Однако число измерений (измерительных приборов) конечно. Поэтому одновременно нам доступен лишь конечный набор значений $f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_k)$, где $z_i \in Y_+$ и, следовательно, имеет смысл говорить лишь о слабом распределении случайного элемента в пространстве Y_+^* , т. е. семействе конечномерных распределений некоторой меры. Далее приводятся основные теоретические положения, касающиеся слабого распределения.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Отношение “ $\zeta_1 = \zeta_2$ почти наверное” есть отношение эквивалентности на множестве случайных величин, определенных на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Через $L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ обозначим множество всех классов эквивалентности, представляющее собой линейное пространство. Метрика в $L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ порождается квазинормой $\|\zeta\|_0 = E \frac{|\zeta|}{1 + |\zeta|}$, $\zeta \in L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, где E — знак математического ожидания. Сходимость в этой метрике равносильна сходимости по вероятности [17]. Пространство $L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ относительно топологии сходимости по вероятности является полным линейным метризуемым топологическим пространством [17].

О п р е д е л е н и е 1 [17]. Слабым распределением случайного элемента ξ в сопряженном пространстве Y_+^* сепарабельного банахова пространства $Y_+ \subset Y_+^{**}$ называется линейный оператор $T_\xi: Y_+ \rightarrow L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$.

Понятие слабого распределения эквивалентно понятию цилиндрической меры. Цилиндрическим множеством, или цилиндром в Y_+^* , называется множество вида

$$C = \{y \in Y_+^*: (\langle y, z_1 \rangle, \langle y, z_2 \rangle, \dots, \langle y, z_k \rangle) \in B\}, \quad (1.5)$$

где B — борелевское множество из \mathbb{R}^k , $\{z_1, z_2, \dots, z_k\} \subset Y_+$. Множество B называется основанием цилиндра (1.5), а z_1, z_2, \dots, z_k — его образующими. Здесь и далее $\langle y, z \rangle$ — значение функционала $y \in Y_+^*$ на элементе $z \in Y_+$.

Пусть \mathfrak{A} — алгебра всех цилиндрических множеств из Y_+^* . Через \mathfrak{A}_L обозначим семейство всех тех цилиндрических множеств из Y_+^* , образующие которых лежат в $L \subset Y_+$. Заметим, что если L — конечномерное подпространство пространства Y_+ , то \mathfrak{A}_L является σ -алгеброй.

О п р е д е л е н и е 2 [18]. Цилиндрической мерой на Y_+^* называется всякая неотрицательная конечно-аддитивная функция μ , определенная на \mathfrak{A} , удовлетворяющая условию $\mu(Y_+^*) = 1$ и счетно-аддитивная на \mathfrak{A}_L для каждого конечномерного подпространства L пространства Y_+ .

Между всеми слабыми распределениями и цилиндрическими мерами существует взаимно однозначное соответствие, определяемое равенством $\mu_\xi(C) = \mathbf{P}\{(T_\xi z_1, T_\xi z_2, \dots, T_\xi z_k) \in B\}$, где μ_ξ — цилиндрическая мера, соответствующая слабому распределению T_ξ , B — основание цилиндрического множества $C \subset Y_+^*$, z_1, z_2, \dots, z_k — его образующие.

Заметим, что слабое распределение может порождаться вероятностным распределением. При этом случайный элемент ξ является измеримым отображением некоторого вероятностного пространства в измеримое пространство (Y_+^*, \mathfrak{B}) , где \mathfrak{B} — σ -алгебра борелевских множеств из Y_+^* . Тогда слабое распределение $T_\xi: Y_+ \rightarrow L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ определяется равенством $T_\xi z = \langle \xi, z \rangle$ и называется оператором, индуцированным случайным элементом ξ [17]. Каждому случайному элементу с вероятностным распределением соответствует борелевская вероятностной мера,

которая является цилиндрической. Обратное не верно, т. е. не всякая цилиндрическая мера может быть продолжена до борелевской вероятностной меры [19].

О п р е д е л е н и е 3 [8;20]. Будем говорить, что случайный элемент ξ :

1) имеет конечный момент первого порядка, если

$$\sup\{E(T_\xi z) : z \in Y_+, \|z\| \leq 1\} < \infty; \quad (1.6)$$

2) имеет конечный момент второго порядка, если

$$\sup\{E(T_\xi z_1 T_\xi z_2) : z_1 \in Y_+, z_2 \in Y_+, \|z_1\| \leq 1, \|z_2\| \leq 1\} < \infty. \quad (1.7)$$

Заметим, что если ξ имеет конечный момент второго порядка, то T_ξ — линейный непрерывный оператор, действующий из Y_+ в гильбертово пространство $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, где $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ есть множество (классов эквивалентности) случайных величин ζ , определенных на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ и таких, что $E\zeta^2 < \infty$. Скалярное произведение в $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ вводится естественным образом: $\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = E(\zeta_1 \zeta_2)$.

Условие (1.6) равносильно существованию элемента $m_\xi \in Y_+^*$ такого, что $E(T_\xi z) = \langle m_\xi, z \rangle$ для всех $z \in Y_+$. Элемент m_ξ называется *средним значением* ξ . Условие (1.7) равносильно существованию линейного симметричного и положительного оператора $R_\xi : Y_+ \rightarrow Y_+^*$ такого, что

$$E(T_\xi z_1 T_\xi z_2) = \langle R_\xi z_1, z_2 \rangle \quad (1.8)$$

для всех $z_1 \in Y_+, z_2 \in Y_+$. Симметричность оператора R_ξ влечет его непрерывность [17]. Оператор R_ξ называется ковариационным. Если $m_\xi = 0$, то оператор R_ξ совпадает с *корреляционным оператором* случайного элемента ξ .

В данной работе ограничимся случаем $Y_+ = Y = Y_+^*$.

Предположение. Случайный элемент ξ , задающий помеху в (1.4), имеет слабое распределение в Y , нулевое среднее значение и конечный момент второго порядка.

Для вероятностной модели погрешности в задании исходных данных, как и для детерминированной модели, при анализе задачи идентификации входа можно выделить два направления. Первое связано с анализом статистической устойчивости задачи (устойчивости обратного оператора F^{-1} по отношению к случайным возмущениям исходных данных). Второе — с построением приближенных решений задачи и получением оценок их погрешностей. Здесь мы ограничимся исследованием задачи идентификации в рамках первого направления. При этом вместо устойчивости обратного оператора рассмотрим более общий вопрос устойчивости псевдообратного оператора F^+ . Область определения этого оператора $\mathcal{D}(F^+) = \text{Im } F + \text{Im } F^\perp$ может не совпадать со всем пространством выходов Y . Поэтому оператор F^+ не может быть использован в качестве решающей процедуры [21;22] для задачи идентификации входа. Однако, используя конструкцию оснащенных гильбертовых пространств [15;23;24], можно обобщить понятие линейной решающей процедуры.

2. Обобщенные линейные решающие процедуры

Линейный оператор $S : Y \rightarrow W$ будем называть *линейной решающей процедурой* для задачи идентификации входов, если область определения $\mathcal{D}(S)$ оператора S плотна в Y , а область определения $\mathcal{D}(S^*)$ сопряженного оператора S^* плотна в W . Заметим, что из плотности области определения оператора S следует однозначность и замкнутость сопряженного оператора S^* [25]. На $\mathcal{D}(S^*) \subset W$ определим скалярное произведение $\langle w_1, w_2 \rangle_+ = \langle w_1, w_2 \rangle + \langle S^* w_1, S^* w_2 \rangle$ и соответствующую норму $\|w\|_+ = \langle w, w \rangle_+^{1/2}$ (норму графика). Линейное многообразие $\mathcal{D}(S^*)$ с новым скалярным произведением превращается в гильбертово пространство, которое будем обозначать через W_+ . Пространство W_+ плотно вложено в W : $W_+ \subset W$, $\overline{W_+} = W$ и $\|w\| \leq \|w\|_+$ для всех $w \in W_+$.

Для любого $w \in W$ формула $f(z) = \langle w, z \rangle$, $z \in W_+$, задает на пространстве W_+ линейный и непрерывный функционал. Непрерывность этого функционала следует из того, что для всех $z \in W_+$ имеем $|\langle w, z \rangle| \leq \|w\| \cdot \|z\| \leq \|w\| \cdot \|z\|_+$. По теореме Рисса об общем виде линейного и непрерывного функционала в гильбертовом пространстве для любого $w \in W$ найдется элемент $Jw \in W_+$ такой, что

$$\langle w, z \rangle = \langle Jw, z \rangle_+ \quad \forall z \in W_+. \quad (2.1)$$

Утверждение 1 [24]. *Линейный оператор $J: W \rightarrow W_+$, задаваемый равенством (2.1), непрерывен, самосопряжен и положителен на пространстве W . Кроме того, $\|J\| \leq 1$, $\overline{\text{Im } J} = W_+$ и $\text{Ker } J = 0$.*

На пространстве W определим скалярное произведение $\langle w_1, w_2 \rangle_- = \langle Jw_1, Jw_2 \rangle_+ = \langle Jw_1, w_2 \rangle$ и соответствующую норму

$$\begin{aligned} \|w\|_- &= \sup\{\langle w, z \rangle : z \in W_+, \|z\|_+ \leq 1\} \\ &= \sup\{\langle Jw, z \rangle_+ : z \in W_+, \|z\|_+ \leq 1\} = \|Jw\|_+ = \langle Jw, Jw \rangle_+^{1/2} = \langle w, w \rangle_-^{1/2}. \end{aligned}$$

Пусть W_- — гильбертово пространство, полученное пополнением пространства W по норме $\|\cdot\|_-$. По построению пространство W плотно вложено в W_- : $W \subset W_-$, $\overline{W} = W_-$ и $\|w\|_- \leq \|w\|$ для всех $w \in W$.

Пусть $\tilde{J}: W_- \rightarrow W_+$ — продолжение по непрерывности оператора $J: W \rightarrow W_+$, задаваемого равенством (2.1), на пространство W_- .

Утверждение 2 [24]. *Линейный оператор $\tilde{J}: W_- \rightarrow W_+$ всюду обратим и изометричен: $\text{Im } \tilde{J} = W_+$, $\text{Ker } \tilde{J} = 0$ и $\|\tilde{J}w\|_+ = \|w\|_-$ для всех $w \in W_-$.*

Для любого $w \in W_-$ формула $f(z) = \langle \tilde{J}w, z \rangle_+$, $z \in W_+$, задает на пространстве W_+ линейный и непрерывный функционал $f \in W_+^*$ с нормой $\|f\| = \|\tilde{J}w\|_+ = \|w\|_-$. С другой стороны, по теореме Рисса для любого линейного и непрерывного функционала $f \in W_+^*$ найдется элемент $\tilde{w} \in W_+$ такой, что $f(z) = \langle \tilde{w}, z \rangle_+$ для всех $z \in W_+$. Положив $w = \tilde{J}^{-1}\tilde{w}$, имеем $\|f\| = \|\tilde{w}\|_+ = \|\tilde{J}w\|_+ = \|w\|_-$. Таким образом, пространства W_- и W_+^* изометрически изоморфны, и можно считать, что $W_- = W_+^*$. Тройку пространств $W_+ \subset W \subset W_- = W_+^*$ принято называть *оснащенным гильбертовым пространством*, а пространства W_+ , W и W_- — пространствами *гладких*, *обычных* и *обобщенных* элементов соответственно [15; 23; 24].

О п р е д е л е н и е 4. Обобщенной линейной решающей процедурой назовем линейный оператор $\hat{S}: Y \rightarrow W_+^*$ такой, что для любого $y \in Y$ линейный непрерывный функционал $\hat{S}y \in W_+^*$ определяется условием [8]:

$$\langle \hat{S}y, z \rangle = \langle y, S^*z \rangle \quad \forall z \in W_+. \quad (2.2)$$

Очевидно, что если $y \in \mathcal{D}(S)$, то $\hat{S}y = Sy \in W$. В отличие от решающей процедуры область определения обобщенной решающей процедуры совпадает со всем пространством Y . Поэтому элемент $\hat{S}\tilde{y}$, где $\tilde{y} = y_* + \xi$ — результат измерений выхода, определен корректно.

Определим условия допустимости решающей процедуры. Во-первых, при отсутствии помех обобщенная решающая процедура должна давать точный результат:

$$\hat{S}y_* = w_*. \quad (2.3)$$

Во-вторых, случайный элемент, определяющий погрешность идентификации входа, должен иметь слабое распределение в пространстве W . Однако согласно (2.2) погрешность $\hat{\eta} = \hat{S}\tilde{y} - w_* = \hat{S}\xi$ имеет слабое распределение в пространстве W_+^* . Распределение $\hat{\eta}$ в W может быть получено путем продолжения по непрерывности линейного оператора $T_{\hat{\eta}} = T_{\xi}S^*: W_+ \rightarrow L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ на пространство W . Напомним, что множество $M \subset L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ называется ограниченным по вероятности (стохастически ограниченным), если оно ограничено, как множество в линейном топологическом пространстве $L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$.

Утверждение 3. Если множество

$$M = \{T_\xi S^* z : z \in W_+, \|z\|_W \leq 1\} \quad (2.4)$$

ограничено по вероятности, то оператор $T_\xi S^* : W_+ \rightarrow L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ можно единственным образом продолжить по непрерывности на все пространство W .

Доказательство. Ограниченность множества (2.4) означает ограниченность на W_+ оператора $T_\xi S^*$, действующего из W в $L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Пространства W и $L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ являются F -пространствами [26]. Для линейных операторов, действующих в F -пространствах, понятия непрерывности и ограниченности эквивалентны [27]. Следовательно, оператор $T_\xi S^* : W \rightarrow L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ непрерывен на W_+ . Доказательство утверждения завершается применением теоремы о продолжении линейного оператора по непрерывности [25].

Определение 5. Решающая процедура называется допустимой, если имеет место (2.3) и множество (2.4) ограничено по вероятности.

Определение 6. Погрешностью идентификации входа будем называть случайный элемент η , задаваемый слабым распределением $T_\eta : W \rightarrow L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, где T_η — продолжение линейного оператора $T_\xi S^* : W_+ \rightarrow L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ по непрерывности на все пространство W .

Поскольку $E(T_\xi S^* z) = 0$ для всех $z \in W_+$, то $E(T_\eta w) = 0$ для всех $w \in W$, т. е. случайный элемент η имеет нулевое среднее значение.

Оценивать погрешность η будем с помощью двух норм оператора $T_\eta : W \rightarrow L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Первая есть обычная операторная норма $\|T_\eta\|_2 = \sup_{\|w\| \leq 1} \{E(T_\eta w)^2\}^{1/2}$. Вторая — норма Гильберта — Шмидта

$$\|T_\eta\|_{HS} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} E(T_\eta w_k)^2 \right\}^{1/2},$$

где $\{w_k\}$ — ортонормированный базис в пространстве W . Значение $\|T_\eta\|_{HS}$ не зависит от выбора базиса [15]. При этом всегда $\|T_\eta\|_2 \leq \|T_\eta\|_{HS}$.

Утверждение 4. Для того чтобы $\|T_\eta\|_{HS} < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы случайный элемент η имел вероятностное распределение такое, что $E\|\eta\|^2 < \infty$. При этом $\|T_\eta\|_{HS}^2 = E\|\eta\|^2$.

Доказательство. Первая часть утверждения следует из [17]. Пусть $\{w_k\}$ — ортонормированный базис в пространстве W . Учитывая конечность $E\|\eta\|^2$ и равенство Парсеваля $\|\eta\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \eta, w_k \rangle^2$ п. н., имеем по теореме Лебега о предельном переходе

$$E\|\eta\|^2 = E \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \langle \eta, w_k \rangle^2 \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} E \langle \eta, w_k \rangle^2 = \sum_{k=1}^{\infty} E(T_\eta w_k)^2 = \|T_\eta\|_{HS}^2. \quad (2.5)$$

Утверждение доказано.

Корреляционный оператор R_ξ помехи ξ ограничен, и поэтому его можно представить в виде

$$R_\xi = \sigma_\xi \tilde{R}_\xi, \quad (2.6)$$

где $\sigma_\xi = \|R_\xi\|$ и $\|\tilde{R}_\xi\| = 1$. Оператор \tilde{R}_ξ характеризует корреляционные связи помехи ξ . Параметр $\sigma_\xi > 0$ будем называть *мощностью помехи* ξ и считать основной характеристикой “малости” погрешности измерения выхода.

Определение 7. Допустимую решающую процедуру будем называть слабо состоятельной, если $\|T_\eta\|_2 \rightarrow 0$ при $\sigma_\xi \rightarrow 0$.

Определение 8. Допустимую решающую процедуру будем называть состоятельной, если $E\|\eta\|^2 = \|T_\eta\|_{HS}^2 \rightarrow 0$ при $\sigma_\xi \rightarrow 0$.

Очевидно, что если решающая процедура состоятельна, то она слабо состоятельна. Полным критерием слабой состоятельности решающей процедуры.

Теорема 1. *Для того чтобы допустимая решающая процедура была слабо состоятельной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha(R_\xi) = \sup\{\langle R_\xi S^* z, S^* z \rangle : z \in W_+, \|z\|_W \leq 1\} < \infty. \quad (2.7)$$

Доказательство. Согласно предположению случайный элемент ξ имеет слабое распределение в Y и конечный момент второго порядка. Поэтому оператор $T_\xi : Y \rightarrow L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ линеен и непрерывен. Тогда с учетом (1.8) и (2.6) имеем

$$E(T_\xi S^* z)^2 = \langle R_\xi S^* z, S^* z \rangle = \sigma_\xi \langle \tilde{R}_\xi S^* z, S^* z \rangle \quad \forall z \in W_+. \quad (2.8)$$

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (2.7), которое означает ограниченность на W_+ оператора $T_\xi S^*$, действующего из W в $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Тогда по теореме о продолжении линейного оператора по непрерывности [25] оператор $T_\xi S^*$ можно продолжить на W с сохранением нормы. Поскольку сходимость случайных величин в $L_2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ влечет сходимость в $L_0(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, то это продолжение совпадает с T_η . Следовательно, $\|T_\eta\|_2^2 = \sup\{E(T_\xi S^* z)^2 : z \in W_+, \|z\|_W \leq 1\}$, что с учетом (2.7) и (2.8) дает $\|T_\eta\|_2^2 = \alpha(R_\xi) = \sigma_\xi \alpha(\tilde{R}_\xi)$. Достаточность условия (2.7) доказана. Докажем его необходимость. Если (2.7) не имеет места, то ввиду (2.8) получаем $\|T_\eta\|_2 = \infty$ при $\sigma_\xi > 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Условия (2.3) и (2.7) обеспечивают допустимость решающей процедуры.

Пусть $R_\xi^{1/2}$ — квадратный корень из симметричного, положительного и ограниченного оператора R_ξ . Оператор $R_\xi^{1/2} : Y \rightarrow Y$ — симметричный, положительный и ограниченный.

Теорема 2. *Для того чтобы допустимая решающая процедура была слабо состоятельной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\text{Im } R_\xi^{1/2} \subset \mathcal{D}(S). \quad (2.9)$$

Доказательство. Условие (2.9) означает, что $\mathcal{D}(SR_\xi^{1/2}) = Y$. Последнее равенство равносильно [25] ограниченности на W_+ оператора $R_\xi^{1/2} S^* : W \rightarrow Y$. Поскольку $\langle R_\xi S^* z, S^* z \rangle = \|\tilde{R}_\xi^{1/2} S^* z\|^2$ для всех $z \in W_+$, то указанная ограниченность эквивалентна (2.7). Применение теоремы 1 завершает доказательство.

Получим критерий состоятельности решающей процедуры.

Теорема 3. *Для того чтобы допустимая решающая процедура была состоятельной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\beta(R_\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\xi S^* w_k, S^* w_k \rangle < \infty, \quad (2.10)$$

где $\{w_k\}$ — ортонормированный базис пространства W такой, что $w_k \in W_+$ для всех k .

Доказательство. Существование ортонормированного базиса $\{w_k\}$ такого, что $w_k \in W_+$ для всех k , следует из того, что во всюду плотном W_+ можно выбрать полную линейно независимую систему и ортонормировать ее. Поскольку $T_\eta w_k = T_\xi S^* w_k$ для всех k , то с учетом (2.5), (2.8), (2.10) имеем $E\|\eta\|^2 = \|T_\eta\|_{HS}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} E(T_\xi S^* w_k)^2 = \beta(R_\xi) = \sigma_\xi \beta(\tilde{R}_\xi)$. Если же (2.10) не имеет места, то $\|T_\eta\|_{HS} = \infty$. Теорема доказана.

3. Критерии статистической устойчивости задачи идентификации

Рассмотрим вопрос состоятельности решающей процедуры $S = F^+$, где F^+ — оператор, псевдообратный к (линейному и ограниченному) оператору $F: W \rightarrow Y$ — оператору "вход-выход" системы (1.1), (1.2). Напомним, что оператор F^+ определяется равенством $\hat{w} = F^+y$, где $\|F\hat{w} - y\| = \min\{\|Fw - y\|: w \in W\}$, $\|\hat{w}\| = \min\{\|w\|: w \in W, \|Fw - y\| = \|F\hat{w} - y\|\}$. Оператор $F^+: Y \rightarrow W$ замкнут [28], и его область определения $\mathcal{D}(F^+) = \text{Im } F + \text{Im } F^\perp$ плотна в Y . Область определения $\mathcal{D}(F^{**}) = \text{Im } F^* + \text{Im } F^{*\perp}$ сопряженного оператора $F^{**} = F^{**}$ также плотна в W . Следовательно, оператор F^+ есть линейная решающая процедура. Заметим, что поскольку $y_* \in \text{Im } F \subset \mathcal{D}(F^+)$, то $F^+y_* = w_*$.

О п р е д е л е н и е 9. Задачу идентификации входов системы (1.1), (1.2) будем называть слабо статистически устойчивой, если решающая процедура F^+ слабо состоятельна.

О п р е д е л е н и е 10. Задачу идентификации входов системы (1.1), (1.2) будем называть статистически устойчивой, если решающая процедура F^+ состоятельна.

Теорема 2 дает критерий слабой статистической устойчивости задачи идентификации входов.

Теорема 4. Для того чтобы задача идентификации входов была слабо статистически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Im } R_\xi^{1/2} \subset \text{Im } F + \text{Im } F^\perp. \quad (3.1)$$

Аналогичный результат получен в работе [8] для инъективного оператора F и линейной решающей процедуры F^{-1} .

З а м е ч а н и е 2. Равенство $F^+y_* = w_*$ и условие (3.1) обеспечивают допустимость решающей процедуры F^+ .

Для доказательства критерия статистической устойчивости задачи идентификации входов нам понадобится

Лемма. Пусть w — собственный вектор оператора F^*F , соответствующий собственному значению λ . Тогда $w \in \mathcal{D}(F^{**})$. Если при этом $\lambda = 0$, то $F^{**}w = 0$. Если же $\lambda > 0$, то $\lambda F^{**}w = Fw$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы $F^*Fw = \lambda w$ и $w \neq 0$. Если $\lambda = 0$, то $F^*Fw = 0$ и, следовательно, $w \in \text{Ker } F^*F$. Поскольку (см., например, [7; 28]) $\text{Ker } F^*F = \text{Ker } F = \text{Im } F^{*\perp} = \text{Im } F^{+\perp} = \text{Ker } F^{**}$, то $w \in \text{Im } F^{*\perp} \subset \mathcal{D}(F^{**})$ и $F^{**}w = 0$. Пусть теперь $\lambda > 0$. Тогда $\lambda w = F^*Fw$. Поэтому $w \in \text{Im } F^* \subset \mathcal{D}(F^{**})$ и $\lambda F^{**}w = F^{**}(\lambda w) = F^{**}F^*Fw = Fw$. Последнее равенство верно, так как оператор $F^{**}F^*$ есть оператор ортогонального проектирования на подпространство $\overline{\text{Im } F}$. Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть оператор F компактен, λ_k ($k = 1, 2, \dots$) — положительные собственные значения оператора F^*F , выписанные в порядке невозрастания с учетом кратности; w_k ($k = 1, 2, \dots$) — соответствующие (нормированные) собственные векторы.

Тогда для того чтобы задача идентификации входа была статистически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle R_\xi F w_k, F w_k \rangle}{\lambda_k^2} < \infty. \quad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условии (2.10) положим $S = F^+$. Поскольку оператор F компактен, то нормированные собственные векторы оператора F^*F образуют ортонормированный базис в пространстве W . При этом по лемме все эти векторы лежат в W_+ . Кроме того, для собственных векторов w_k , соответствующих нулевому собственному значению, $F^{**}w_k = 0$. По той же лемме для собственных векторов w_k , соответствующих положительному собственному значению, $F^{**}w_k = Fw_k/\lambda_k$. Подстановка $F^{**}w_k$ в (2.10) завершает доказательство теоремы.

Теорема 6. Пусть оператор F компактен, λ_k ($k = 1, 2, \dots$) — положительные собственные значения оператора FF^* , выписанные в порядке невозрастания с учетом кратности; y_k ($k = 1, 2, \dots$) — соответствующие (нормированные) собственные векторы.

Тогда для того чтобы задача идентификации входа была статистически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle R_{\xi} y_k, y_k \rangle}{\lambda_k} < \infty. \quad (3.3)$$

Доказательство. Пусть y_k — нормированный собственный вектор оператора FF^* , соответствующий положительному собственному значению λ_k . Простой проверкой убеждаемся, что $w_k = F^* y_k / \sqrt{\lambda_k}$ есть нормированный собственный вектор оператора $F^* F$, соответствующий тому же собственному значению. Подстановка $F w_k = \sqrt{\lambda_k} y_k$ в (3.2) завершает доказательство теоремы.

Если $W = Y$, F и R_{ξ} перестановочны, среди λ_k нет кратных, то из теоремы 6 вытекает критерий из работы [8]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{\lambda_k} < \infty,$$

где r_k ($k = 1, 2, \dots$) — собственные значения оператора R_{ξ} .

Следствие 1. В условиях теоремы 6, для того чтобы задача идентификации входа была статистически устойчивой, необходимо, чтобы корреляционный оператор R_{ξ} был ядерным.

Доказательство. Ядерность корреляционного оператора R_{ξ} , т.е. условие $\sum_{k=1}^{\infty} \langle R_{\xi} y_k, y_k \rangle < \infty$, следует из (3.3).

4. Пример

Рассмотрим задачу идентификации входа $w = (x^0, u(\cdot))$ по результатам измерения выхода $y(\cdot)$ для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(t), & x(0) &= x^0, \\ y(t) &= x(t), & t &\in [0, \vartheta]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для этой задачи укажем вид операторов и пространств, введенных в предыдущих разделах.

Оператор F действует из $W = \mathbb{R} \times L_2[0, \vartheta]$ в $Y = L_2[0, \vartheta]$ по правилу

$$y(t) = F[x^0, u(\cdot)](t) = x^0 + \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \vartheta]. \quad (4.2)$$

Через $H^1[0, \vartheta]$ обозначим пространство Соболева, т.е. пополнение пространства непрерывно дифференцируемых на $[0, \vartheta]$ функций по норме

$$\|y\| = \left(\int_0^{\vartheta} (|y(t)|^2 + |y'(t)|^2) dt \right)^{1/2}.$$

Образ $\text{Im } F$ оператора (4.2) совпадает с пространством $H^1[0, \vartheta]$, плотно вложенным в $L_2[0, \vartheta]$ и, следовательно, $\text{Im } F^{\perp} = \{0\}$.

Решающая процедура $S = F^+$ действует из $L_2[0, \vartheta]$ в $\mathbb{R} \times L_2[0, \vartheta]$ по правилу $Sy = F^+ y = (y(0), \dot{y}(\cdot))$, где $\dot{y}(\cdot)$ — производная $y(\cdot)$ в смысле Соболева, и имеет область определения

$$\mathcal{D}(S) = \text{Im } F = H^1[0, \vartheta]. \quad (4.3)$$

Из равенства

$$\langle Fw, z \rangle_Y = \int_0^\vartheta \left(x^0 + \int_0^t u(\tau) d\tau \right) z(t) dt = x^0 \int_0^\vartheta z(t) dt + \int_0^\vartheta u(t) \int_t^\vartheta z(\tau) d\tau dt = \langle w, F^* z \rangle_W,$$

где $w = (x^0, u(\cdot))$, определяем вид оператора F^* , действующего из $L_2[0, \vartheta]$ в $\mathbb{R} \times L_2[0, \vartheta]$:

$$(x^0, u(\cdot)) = F^* y(\cdot) \Leftrightarrow x^0 = \int_0^\vartheta y(t) dt, \quad u(t) = \int_t^\vartheta y(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, \vartheta]. \quad (4.4)$$

Согласно

$$\langle Sy, w \rangle_W = y(0)x^0 + \int_0^\vartheta \dot{y}(t)u(t) dt = y(0)[x^0 - u(0)] + y(\vartheta)u(\vartheta) + \int_0^\vartheta y(t)(-\dot{u}(t)) dt = \langle y, S^* w \rangle_Y,$$

где $w = (x^0, u(\cdot))$, оператор $S^* = F^{*+}$ действует из $\mathbb{R} \times L_2[0, \vartheta]$ в $L_2[0, \vartheta]$ по правилу

$$S^* w = F^{*+} w = -\dot{u}(\cdot) \quad (4.5)$$

и имеет область определения $\mathcal{D}(S^*) = \text{Im } F^* = \{(x^0, u(\cdot)) : u(\cdot) \in H^1[0, \vartheta], x^0 = u(0), u(\vartheta) = 0\}$. Соответственно, пространство W^+ есть множество $\mathcal{D}(S^*)$ с введенным на нем скалярным произведением

$$\langle w_1, w_2 \rangle_+ = x_1^0 x_2^0 + \int_0^\vartheta u_1(t)u_2(t) dt + \int_0^\vartheta \dot{u}_1(t)\dot{u}_2(t) dt,$$

где $w_1 = (x_1^0, u_1(\cdot))$, $w_2 = (x_2^0, u_2(\cdot))$.

Определим вид оператора $J: W \rightarrow W_+$. Пусть $w_1 = (x_1^0, u_1(\cdot)) \in W$, $w = (x^0, u(\cdot)) = Jw_1 \in W_+$. Тогда согласно (2.1) для всех $z = (v^0, v(\cdot)) \in W_+$ справедливо равенство $\langle w_1, z \rangle_W = \langle w, z \rangle_+$, т. е.

$$x_1^0 v^0 + \int_0^\vartheta u_1(t)v(t) dt = x^0 v^0 + \int_0^\vartheta u(t)v(t) dt + \int_0^\vartheta \dot{u}(t)\dot{v}(t) dt.$$

Интегрируя второй интеграл в правой части последнего равенства по частям, получаем

$$x_1^0 v^0 + \int_0^\vartheta u_1(t)v(t) dt = (x^0 - \dot{u}(0)) v^0 + \int_0^\vartheta (u(t) - \ddot{u}(t)) v(t) dt \quad \forall (v^0, v(\cdot)) \in W_+.$$

Откуда с учетом включения $(x^0, u(\cdot)) \in W_+$ имеем

$$\begin{aligned} u(t) - \ddot{u}(t) &= u_1(t) \quad \text{п. в. } t \in [0, \vartheta], \\ x^0 - \dot{u}(0) &= x_1^0, \\ u(0) &= x^0, \quad u(\vartheta) = 0. \end{aligned}$$

Решая данную краевую задачу, получаем, что равенство $(x^0, u(\cdot)) = J(x_1^0, u_1(\cdot))$ равносильно

$$\begin{aligned} x^0 &= x_1^0 e^{-\vartheta} \text{sh } \vartheta + e^{-\vartheta} \int_0^\vartheta \text{sh}(\vartheta - t) u_1(t) dt, \\ u(t) &= x_1^0 e^{-\vartheta} \text{sh}(\vartheta - t) + \text{sh}(\vartheta - t) \int_0^t e^{\tau - \vartheta} u_1(\tau) d\tau + e^{t - \vartheta} \int_t^\vartheta \text{sh}(\vartheta - \tau) u_1(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, \vartheta]. \end{aligned}$$

Используя явный вид оператора J , можно выписать скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_- = \langle Jw_1, w_2 \rangle_W = x_1^0 x_2^0 e^{-\vartheta} \operatorname{sh} \vartheta + e^{-\vartheta} \int_0^{\vartheta} \operatorname{sh}(\vartheta - t) u_1(t) dt x_2^0 \\ + x_1^0 e^{-\vartheta} \int_0^{\vartheta} \operatorname{sh}(\vartheta - t) u_2(t) dt + \int_0^{\vartheta} \int_0^{\vartheta} K(t, \tau) u_1(t) u_2(\tau) dt d\tau, \end{aligned}$$

где $w_1 = (x_1^0, u_1(\cdot))$, $w_2 = (x_2^0, u_2(\cdot))$, $K(t, \tau) = \begin{cases} e^{t-\vartheta} \operatorname{sh}(\vartheta - \tau), & t \leq \tau; \\ e^{\tau-\vartheta} \operatorname{sh}(\vartheta - t), & t > \tau. \end{cases}$ Гильбертово пространство W_- , полученное пополнением W по норме $\|w\|_- = \langle w, w \rangle_-^{1/2}$, как было показано, изометрически изоморфно пространству W_+^* .

Обобщенной линейной решающей процедурой в нашем случае согласно (4.5) является линейный оператор $\widehat{S} : Y \rightarrow W_+^*$ такой, что для любого $y \in Y$ линейный непрерывный функционал $\widehat{S}y \in W_+^*$ определяется условием $\langle \widehat{S}y, z \rangle = - \int_0^{\vartheta} y(t) \dot{v}(t) dt \quad \forall z = (v^0, v(\cdot)) \in W_+$.

Приведем критерии статистической устойчивости задачи идентификации входов системы (4.1) для случая, когда ошибки измерения выхода моделируются случайным процессом $\xi(t)$ таким, что $E\xi(t) = 0$, $E\xi^2(t) < \infty \forall t \in [0, \vartheta]$. Корреляционная функция $r(t, \tau) = E\xi(t)\xi(\tau)$, $t, \tau \in [0, \vartheta]$, этого случайного процесса — симметричная и положительно определенная функция [17]. Корреляционный оператор $R_\xi : L_2[0, \vartheta] \rightarrow L_2[0, \vartheta]$ есть интегральный оператор с ядром $r(t, \tau) : (R_\xi y)(t) = \int_0^{\vartheta} r(t, \tau) y(\tau) d\tau$, $t \in [0, \vartheta]$. Квадратный корень $R_\xi^{1/2}$ из положительно-го оператора R_ξ будет также интегральным оператором [29]: $(R_\xi^{1/2} y)(t) = \int_0^{\vartheta} r_1(t, \tau) y(\tau) d\tau$, $t \in [0, \vartheta]$. Ядра $r(t, \tau)$ и $r_1(t, \tau)$ связаны равенством $r(t, \tau) = \int_0^{\vartheta} r_1(t, s) r_1(s, \tau) ds$.

Из теоремы 2, включения $\operatorname{Im} R_\xi \subset \operatorname{Im} R_\xi^{1/2}$ и равенства (4.3) легко следуют два утверждения.

Утверждение 5. *Для того чтобы задача идентификации входа системы (4.1) была слабо статистически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Im} R_\xi^{1/2} \subset H^1[0, \vartheta]. \quad (4.6)$$

Утверждение 6. *Для того чтобы задача идентификации входа системы (4.1) была слабо статистически устойчивой, необходимо, чтобы*

$$\operatorname{Im} R_\xi \subset H^1[0, \vartheta]. \quad (4.7)$$

Очевидно, что условия (4.6), (4.7) выполняются, если функции $r_1(t, \tau)$ и $r(t, \tau)$ соответственно непрерывны по совокупности переменных вместе со своими частными производными первого порядка [30].

Для получения критерия статистической устойчивости найдем собственные значения и ортонормированные собственные векторы оператора $FF^* : Y \rightarrow Y$. Для этого из соотношений (4.2), (4.4) получим явный вид оператора FF^* :

$$FF^*[z](t) = \int_0^t (1 + \tau) z(\tau) d\tau + \int_t^{\vartheta} (1 + t) z(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \vartheta].$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что корни λ_k уравнения

$$\sqrt{\lambda} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{\sqrt{\lambda}} \quad (4.8)$$

являются собственными значениями оператора FF^* , а функции

$$y_k(t) = \sqrt{\frac{2(1 + \lambda_k)}{\lambda_k + \lambda_k \vartheta + \vartheta}} \cos \frac{\vartheta - t}{\sqrt{\lambda_k}}$$

— соответствующими нормированными собственными векторами. Корни уравнения (4.8) существуют и удовлетворяют неравенствам

$$\left(\frac{\vartheta}{\pi k + \pi/2} \right)^2 < \lambda_k < \left(\frac{\vartheta}{\pi k} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.9)$$

поскольку на указанных промежутках функция от λ , стоящая в правой части (4.8), непрерывна, строго убывает и имеет область значений $(0, +\infty)$, а в левой — непрерывна и строго возрастает.

Из теоремы 6 получаем следующее

Утверждение 7. *Для того чтобы задача идентификации входа системы (4.1) была статистически устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \int_0^{\vartheta} \int_0^{\vartheta} r(t, \tau) \cos \frac{\vartheta - t}{\sqrt{\lambda_k}} \cos \frac{\vartheta - \tau}{\sqrt{\lambda_k}} dt d\tau < \infty. \quad (4.10)$$

Следствие 2. *Если все частные производные $\frac{\partial^{i+j} r(t, \tau)}{\partial t^i \partial \tau^j}$ до 4-го порядка включительно существуют и непрерывны по совокупности переменных, то задача идентификации входа системы (4.1) статистически устойчива.*

Доказательство. Вычисляя повторный интеграл, входящий в сумму (4.10), два раза по частям по переменной t и два раза по частям по переменной τ с учетом того, что λ_k — корни уравнения (4.8), получаем оценку

$$\left| \int_0^{\vartheta} \int_0^{\vartheta} r(t, \tau) \cos \frac{\vartheta - t}{\sqrt{\lambda_k}} \cos \frac{\vartheta - \tau}{\sqrt{\lambda_k}} dt d\tau \right| \leq Q \lambda_k^2,$$

где Q — положительная константа. Из последней оценки вследствие (4.9) следует (4.10). Следствие доказано.

Согласно следствию 2 случайные процессы с корреляционными функциями, например $r(t, \tau) = \cos(t - \tau)$ или $r(t, \tau) = e^{-(t-\tau)^2/2}$ [31], моделируют ошибки измерения, обеспечивающие статистическую устойчивость задачи идентификации входа системы (4.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О позиционном моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
4. Кирич Н. Е. Методы последовательных оценок в задачах оптимизации управляемых систем. Ленинград: Изд-во Ленинград. гос. ун-та, 1975. 165 с.

5. **Гусев М. И., Куржанский А. Б.** Обратные задачи динамики управляемых систем // Механика и научно-технический прогресс. Т. 1. Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 187–195.
6. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
7. **Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.** Теория линейных некорректных задач ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
8. **Федотов А. М.** Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. 280 с.
9. **Теребиж В. Ю.** Введение в статистическую теорию обратных задач. М.: Физматлит, 2005. 376 с.
10. **Судаков В. Н., Халфин Л. А.** Статистический подход к корректности задач математической физики // Докл. АН СССР, 1964. Т. 157, № 5. С. 1058–1060.
11. **Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С.** Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // Успехи физ. наук. 1970. Т. 102, вып. 3. С. 345–386.
12. **Вайнштейн Л. А.** О численном решении интегральных уравнений первого рода с использованием априорных сведений о восстанавливаемой функции // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 6. С. 1331–1334.
13. **Аникин С. А.** Об оценке погрешности метода регуляризации А.Н.Тихонова в задачах восстановления входов динамических систем // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1997. № 9. С. 1056–1067.
14. **Аникин С. А.** Идентификация входов квазилинейных систем // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 12–30.
15. **Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.** Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Физматгиз, 1961. 472 с.
16. **Галлагер Р.** Теория информации и надежная связь. М.: Сов. радио, 1974. 720 с.
17. **Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.** Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985. 368 с.
18. **Го Х.-С.** Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979. 176 с.
19. **Скорород А. В.** Интегрирование в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975. 232 с.
20. **Балакришнан А. В.** Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 384 с.
21. **Вальд А.** Статистические решающие функции // Позиционные игры. М.: Наука, 1967. С. 300–522.
22. **Ченцов Н. Н.** Статистические решающие правила и оптимальные выводы. М.: Наука, 1972. 520 с.
23. **Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.** Функциональный анализ. Киев: Выща шк., 1990. 600 с.
24. **Арсеньев А. А.** Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009. 500 с.
25. **Треногин В. А.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
26. **Федоров В. М.** Теория функций и функциональный анализ. Ч. 2. М.: Изд-во мат.-мех. фак. МГУ, 2000. 192 с.
27. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.
28. **Мелешко В. И.** Возмущения неограниченных замкнутых псевдообратных операторов // Дифференциальные уравнения 1979. Т. 15, № 4. С. 681–694.
29. **Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский [и др.].** М.: Наука, 1966. 499 с.
30. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970. 800 с.
31. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003. 400 с.

Аникин Сергей Алексеевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: asa@imm.uran.ru

Поступила 12.10.2011

УДК 517.984.5+517.955.8

О \mathcal{PT} -СИММЕТРИЧНОМ ВОЛНОВОДЕ С ПАРОЙ МАЛЫХ ОТВЕРСТИЙ¹

Д. И. Борисов

Рассматривается плоский \mathcal{PT} -симметричный волновод с парой малых отверстий. Волновод моделируется плоской бесконечной полосой, из которой симметричным образом вырезана пара малых отверстий. В качестве оператора выбирается Лапласиан с \mathcal{PT} -симметричным краевым условием на границах полосы и условием Неймана на границах отверстий. Для такого оператора установлена равномерная резольвентная сходимость и получена оценка скорости сходимости. Изучен эффект порождения отверстиями новых собственных значений из границы непрерывного спектра. Получены достаточные условия существования и отсутствия таких собственных значений и вычислены первые члены их асимптотик.

Ключевые слова: \mathcal{PT} -симметричный волновод, малое отверстие, равномерная резольвентная сходимость, асимптотика.

D. I. Borisov. On a \mathcal{PT} -symmetric waveguide with a pair of small holes.

A planar \mathcal{PT} -symmetric waveguide with a pair of small holes is considered. The waveguide is modeled by a planar infinite strip in which a pair of symmetric small holes is cut out. The operator is the Laplacian with \mathcal{PT} -symmetric boundary condition at the edges of the strip and Neumann condition at the boundaries of the holes. For this operator, the uniform resolvent convergence is established and the convergence rate is estimated. The effect of the generation by the holes of new eigenvalues from the boundary of the continuous spectrum is studied. Sufficient conditions for the existence and absence of such eigenvalues are obtained and the first terms of their asymptotic expansions are found.

Keywords: \mathcal{PT} -symmetric waveguide, small hole, uniform resolvent convergence, asymptotics.

А.М. Ильину посвящается

Введение

\mathcal{PT} -симметричные операторы \mathcal{H} определяются как удовлетворяющие условию коммутирования

$$\mathcal{PT}\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{PT}.$$

В качестве оператора \mathcal{H} обычно берется эллиптический дифференциальный оператор в некоторой области, \mathcal{T} — оператор комплексного сопряжения $(\mathcal{T}u)(x) = \overline{u(x)}$, а \mathcal{P} — некоторый оператор симметричного преобразования по пространственной переменной, например $(\mathcal{P}u)(x) = u(-x)$. Исследование подобных операторов в последнее время ведутся весьма интенсивно в связи с интересными свойствами данных операторов и их возможными приложениями в физике. Основное внимание уделяется изучению спектральных свойств \mathcal{PT} -симметричных операторов. Известно, что спектры таких операторов симметричны относительно вещественной оси. Особый акцент при изучении \mathcal{PT} -симметричных операторов делается на выявление случаев, в которых весь или часть спектра вещественны. Интересны также и другие свойства спектров.

Исследования \mathcal{PT} -симметричных операторов начались в конце прошлого века (см. одну из первых работ [9] и обзор [10]). Был найден ряд примеров операторов с вещественным спектром (см., например, [14–17; 19; 21; 25; 26] и библиографию цитированных работ). Отметим, что подавляющая часть имеющихся на сегодняшний день примеров — оператор Шредингера с различными комплексными потенциалами.

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (проект 02.740.11.0612) и грантом FCT (ptdc/mat/101007/2008).

Более сложная по сравнению с изученными ранее \mathcal{PT} -симметричная модель была предложена в работе [12]. Здесь рассматривалась плоская горизонтальная бесконечная прямая полоса Ω , а в ней — Лапласиан с краевым условием

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha\right)u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (0.1)$$

где α — некоторая заданная на границе вещественная функция. Такой оператор \mathcal{PT} -симметричен, если в качестве \mathcal{P} взять преобразование симметрии по поперечной переменной x_2 относительно центра сечения полосы. В [12] исследовался случай, когда коэффициент в граничном условии (0.1) имеет вид

$$\alpha(x_1) = \alpha_0 + \varepsilon\beta, \quad (0.2)$$

где α_0 — некоторая константа, ε — малый положительный параметр, а функция β достаточно гладкая и финитная. Такой выбор означает, что речь идет о малом регулярном возмущении исходного оператора, соответствующего $\varepsilon = 0$. Были исследованы общие свойства такого оператора и его спектра. Основным результатом работы [12] заключался в изучении эффекта возникновения изолированных собственных значений из края существенного спектра при малых ε . Были получены достаточные условия существования и отсутствия таких собственных значений. В случае существования были найдены первые члены их асимптотических разложений. Далее такая модель рассматривалась в работе [20], где проводились численные расчеты спектра в зависимости от значения параметра ε в (0.2), который предполагался конечным. Было показано, что спектр такой модели, как правило, содержит несколько пар комплексно сопряженных собственных значений, поведение которых при возрастании параметра ε весьма причудливо. Отметим также работу [13], где та же модель была перенесена на тонкий многомерный слой и рассматривалась с граничным условием, аналогичным (0.1). Был найден эффективный гамильтониан для такой модели, которым оказался самосопряженный оператор, и доказана равномерная резольвентная сходимость.

В настоящей работе вновь рассматривается описанная выше модель \mathcal{PT} -симметричного волновода с граничным условием (0.1). В таком волноводе вырезается пара малых симметричных отверстий, которые не нарушают \mathcal{PT} -симметричность модели. В отличие от работ [12; 20] такое возмущение является сингулярным. Основные результаты настоящей работы — равномерная резольвентная сходимость для возмущенного оператора и исследование эффекта порождения малыми отверстиями изолированных собственных значений возле края непрерывного спектра. Хотя задачи с малыми отверстиями в ограниченных областях изучены очень хорошо (см. классическую работу [6] и монографии [4, гл. III, § 1; 23, Ch. II, Sec. 2.1–2.4, Ch. V, Sec. 5.1]), насколько нам известно, ранее для них равномерная резольвентная сходимость не доказывалась. Изучение необходимых и достаточных условий возникновения новых собственных значений под порогом существенного спектра при вырезании отверстия в многомерном цилиндре проводилось в работе [7]. В качестве оператора выбирался Лапласиан с краевым условием Дирихле на границе цилиндра и условием Неймана на границе отверстия. В настоящей работе для рассматриваемой \mathcal{PT} -симметричной модели получены схожие результаты, а также выписаны первые члены асимптотического разложения возникающего собственного значения. Обратим внимание, что несамосопряженность предельного оператора существенно влияет на качественный характер результатов по сравнению с самосопряженным случаем в [7] (см. обсуждение результатов теоремы 3 в разд. 1).

В заключение отметим, что при изучении собственных значений, возникающих из края непрерывного спектра, мы используем подход, близкий к технике работы [18]. В последней изучался Лапласиан в многомерном цилиндре с самосопряженными краевыми условиями, тип которых менялся на малом участке границы. При этом сингулярное возмущение, рассмотренное в цитированной работе и нашем случае, делает невозможным применение регулярной теории возмущений, использованной в [12], и требует привлечение аппарата сингулярного асимптотического анализа.

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $x = (x_1, x_2)$ — декартовы координаты в \mathbb{R}^2 , $\Omega := \{x: x_1 \in \mathbb{R}, 0 < x_2 < d\}$ — полоса шириной $d > 0$, $\alpha = \alpha(x_1)$ — функция из $W_\infty^1(\mathbb{R})$. Через ω обозначим ограниченную область в \mathbb{R}^2 с бесконечно дифференцируемой границей, а через ω^* — область, полученную из ω зеркальным отражением относительно вещественной оси.

Пусть x_0 — точка из интервала $(0, d/2)$, $x_0^* := d - x_0$ — симметричная ей относительно $d/2$ точка из $(d/2, d)$. Обозначим $M := (0, x_0)$, $M^* := (0, x_0^*)$, ε — малый положительный параметр. Пусть $\omega_\varepsilon := \tilde{\omega}_\varepsilon \cup \tilde{\omega}_\varepsilon^* = \{x: \varepsilon^{-1}(x - M) \in \omega\} \cup \{x: \varepsilon^{-1}(x - M^*) \in \omega^*\}$ — объединение областей $\tilde{\omega}_\varepsilon$ и $\tilde{\omega}_\varepsilon^*$, полученных из ω и ω^* сжатием в ε^{-1} раз с последующим сдвигом в точки M и M^* . Из полосы Ω вырежем отверстия ω_ε : $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \omega_\varepsilon$.

В работе рассматривается \mathcal{PT} -симметричный оператор $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$, который вводится как Лапласиан в Ω_ε с \mathcal{PT} -симметричным краевым условием (0.1) и условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\omega_\varepsilon. \quad (1.3)$$

Здесь ν — внешняя нормаль к $\partial\omega_\varepsilon$ (направленная внутрь областей ω_ε). Строго оператор $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ вводится равенством $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon u := -\Delta u$ на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon)$, состоящей из функций $u \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих (0.1), (1.3). Целью настоящей работы является изучение сходимости оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, а также исследование поведения его спектра.

В работе мы придерживаемся классификации спектра, описанной в книге [3]. Напомним основные определения. Для замкнутого оператора A в гильбертовом пространстве X спектром называется множество точек, для которых не существует ограниченного обратного оператора $(A - \lambda)^{-1}$, определенного на всем пространстве X . Точечный спектр $\sigma_p(A)$ есть множество собственных значений. Непрерывный спектр $\sigma_c(A)$ состоит из точек λ , для которых существует характеристическая последовательность функций из $\mathcal{D}(A)$. Последняя определяется как ограниченная некомпактная последовательность $u_n \in \mathcal{D}(A)$, такая что $(A - \lambda)u_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$. Остаточным спектром $\sigma_r(A)$ называется множество, определяемое формулой $\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C}: \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*), \lambda \notin \sigma_p(A)\}$. Такая классификация полна в смысле равенства $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$. Множества в правой части последнего равенства могут пересекаться.

Через \mathcal{H}_α^0 обозначим оператор, вводимый аналогично $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$, но без вырезания отверстий ω_ε . Наш первый основной результат описывает общие свойства операторов $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ и \mathcal{H}_α^0 .

Теорема 1. *Операторы $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ и \mathcal{H}_α^0 m -секториальные в $L_2(\Omega)$. Сопряженные к ним определяются равенствами $(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon)^* = \mathcal{H}_{-\alpha}^\varepsilon$, $(\mathcal{H}_\alpha^0)^* = \mathcal{H}_{-\alpha}^0$. Операторы $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ и \mathcal{H}_α^0 являются \mathcal{T} -самосопряженными: $(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon)^* = \mathcal{T}\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon\mathcal{T}$, $(\mathcal{H}_\alpha^0)^* = \mathcal{T}\mathcal{H}_\alpha^0\mathcal{T}$. Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon) \subseteq \Xi_\alpha^\varepsilon, \quad \sigma(\mathcal{H}_\alpha^0) \subseteq \Xi_\alpha^0, \quad \sigma_r(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon) = \sigma_r(\mathcal{H}_\alpha^0) = \emptyset, \\ \Xi_\alpha^\delta := \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq 0, |\operatorname{Im} z| \leq 2\|\alpha\|_{L_\infty(\mathbb{R})}(\sqrt{\operatorname{Re} z} + |d - x_0|^{-1})\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Следующий результат устанавливает равномерную резольвентную сходимость оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ к \mathcal{H}_α^0 при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Теорема 2. *Пусть f — функция из $L_2(\Pi)$, равная нулю в ω_ε . Справедливо неравенство*

$$\|((\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon + 1)^{-1} - (\mathcal{H}_\alpha^0 + 1)^{-1})f\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon| \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (1.5)$$

где константа C не зависит от ε и выбора функции f .

Оставшаяся часть результатов посвящена изучению эффекта порождения новых собственных значений у оператора $\mathcal{H}_{\alpha_0}^\varepsilon$ отверстиями ω_ε и ω_ε^* . Этот эффект будем изучать в предположении, что $\alpha(x_1) \equiv \alpha_0$, где α_0 — некоторая константа, удовлетворяющая условию $\alpha_0 d / \pi \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Аналогично работе [12] доказывается, что непрерывный спектр операторов $\mathcal{H}_{\alpha_0}^0$, $\mathcal{H}_{\alpha_0}^\varepsilon$ имеет вид

$$\sigma_c(\mathcal{H}_{\alpha_0}^\varepsilon) = \sigma_c(\mathcal{H}_{\alpha_0}^0) = [\mu_0^2, +\infty), \quad \mu_0 := \min \left\{ |\alpha_0|, \frac{\pi}{d} \right\}. \quad (1.6)$$

Через $X = X(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, обозначим единственное решение внешней краевой задачи

$$\Delta_\xi X = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, \quad \frac{\partial X}{\partial \nu_\xi} = \cos(\nu_\xi, \xi_2) \text{ на } \partial\omega, \quad X = \mathcal{O}(|\xi|^{-1}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Здесь ν_ξ — нормаль к $\partial\omega$, направленная внутрь ω , $\cos(\nu_\xi, \xi_2)$ — косинус угла между нормалью ν_ξ и осью $O\xi_2$.

Теорема 3. *Обозначим*

$$\begin{aligned} k_2 &:= \frac{\alpha_0^3}{\sin \alpha_0 d} (2|\omega| + \|\nabla_\xi X\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)}^2) \cos \alpha_0(d - 2x_0), & |\alpha_0| < \frac{\pi}{d}, \\ k_2 &:= -\frac{\pi^2}{2d^3 \left(\alpha_0^2 - \frac{\pi^2}{d^2} \right)} \left(\left(\frac{\pi^2}{d^2} + \alpha_0^2 \right) (2|\omega| + \|\nabla_\xi X\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)}^2) \cos \frac{2\pi x_0}{d} \right. \\ &\quad \left. + \left(\alpha_0^2 - \frac{\pi^2}{d^2} \right) \|\nabla_\xi X\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)}^2 \right), & |\alpha_0| > \frac{\pi}{d}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если $k_2 > 0$, то оператор $\mathcal{H}_{\alpha_0}^\varepsilon$ имеет единственное изолированное собственное значение λ_ε , сходящееся к краю непрерывного спектра μ_0^2 при $\varepsilon \rightarrow +0$. Данное собственное значение простое, вещественное и имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = \mu_0^2 - \varepsilon^4 k_2^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^5). \quad (1.9)$$

Если $k_2 < 0$, то оператор $\mathcal{H}_\varepsilon^{\alpha_0}$ не имеет изолированных собственных значений, сходящихся к μ_0^2 при $\varepsilon \rightarrow +0$.

З а м е ч а н и я. 1. Техника настоящей работы позволяет найти и асимптотику собственной функции, соответствующей собственному значению λ_ε . Первые члены такой асимптотики определены в разд. 4, см. (4.15). Мы не выносим эти формулы в теорему 3, чтобы не перегружать ее громоздкими обозначениями.

2. Хотя случай $x_0 = d/2$ формально исключен из рассмотрения, его также можно рассмотреть в рамках подхода настоящей работы. Здесь необходимо лишь предполагать, что область ω симметрична относительно вещественной оси. Утверждения всех теорем остаются без изменений за исключением константы k_2 , которые следует умножить на $1/2$ по сравнению с формулами (1.8).

3. В случае $k_2 = 0$ теорема 3 не дает ответа о существовании у оператора $\mathcal{H}_{\alpha_0}^\varepsilon$ собственного значения, сходящегося к μ_0^2 . Вместе с тем, используя технику доказательства этой теоремы, можно построить полное асимптотическое разложение параметра k_ε из разд. 4. Тем самым определяется знак реальной части этой величины, что и дает исчерпывающий ответ о существовании собственного значения и его асимптотическом поведении.

Обсудим некоторые следствия из теоремы 3. Пусть $0 < |\alpha_0| < \pi/d$. Тогда в силу (1.8) знак числа k_2 совпадает со знаком $\cos \alpha_0(d - 2x_0)$. Последний не зависит от формы отверстия ω , но зависит от x_0 , т. е. от положения отверстий. Если отверстие расположено достаточно близко к середине волновода, а именно при выполнении неравенства $d/2 - x_0 < \pi/(4|\alpha_0|)$, величина $\cos \alpha_0(d - 2x_0)$ положительна и собственное значение λ_ε существует. При выполнении обратного (строгого) неравенства собственное значение отсутствует. В частности, при

$$|\alpha_0| < \frac{\pi}{2d} \quad (1.10)$$

величина $\cos \alpha_0(d - 2x_0)$ положительна для всех возможных значений k_0 и собственное значение всегда возникает. Такая ситуация существенно отличается от случая квантового волновода

с малым отверстием [7], где возникновение собственного значения зависело от положения отверстия и его формы. В нашем случае при выполнении неравенства (1.10) влияние положения и формы отверстия полностью нивелировано.

Случай $\alpha_0 = 0$ прост: здесь оператор $\mathcal{H}_0^\varepsilon$ вовсе не имеет дискретных собственных значений. Действительно, такой оператор неотрицателен, а в силу (1.6) его существенный спектр совпадает с полуосью $[0, +\infty)$.

Обратимся теперь к случаю $|\alpha_0| > \pi/d$. Здесь структура константы k_2 наиболее сложная. Если $\cos(2\pi x_0/d) \geq 0$, т. е. при $x_0 \leq d/4$, собственное значение λ_ε отсутствует, так как $k_2 < 0$. При $x_0 > d/4$ начинает оказывать влияние форма отверстия ω . А именно, собственное значение продолжает отсутствовать при

$$\cos \frac{2\pi x_0}{d} > - \frac{\left(\alpha_0^2 - \frac{\pi^2}{d^2}\right) \|\nabla_\xi X\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)}^2}{\left(\frac{\pi^2}{d^2} + \alpha_0^2\right) (2|\omega| + \|\nabla_\xi X\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)}^2)}$$

и существует при выполнении обратного (строгого) неравенства.

2. m -секториальность, \mathcal{T} -самосопряженность и резольвентная сходимость

В настоящем разделе мы доказываем теоремы 1 и 2. Начнем с первой из теорем. Все утверждаемые свойства оператора \mathcal{H}_α^0 были доказаны в [12]. Проверка аналогичных свойств для оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$, по сути, воспроизводит рассуждения [12, §3]. Поэтому далее мы останавливаемся лишь на основных идеях, использованных в [12, §3], делая акцент лишь на изменениях, необходимых в нашем случае.

Доказательство требуемых свойств оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ основано на анализе соответствующей полуторалинейной формы, которая задана на $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ и вводится формулой

$$\mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon := \mathfrak{h}_{\alpha,r}^\varepsilon + i\mathfrak{h}_{\alpha,i}^\varepsilon, \quad \mathfrak{h}_{\alpha,r}^\varepsilon(u, v) := (\nabla u, \nabla v)_{L_2(\Omega)}, \quad \mathfrak{h}_{\alpha,i}^\varepsilon(u, v) := (\alpha u, v)_{L_2(\Gamma_+)} - (\alpha u, v)_{L_2(\Gamma_-)}, \quad (2.1)$$

где Γ_+ и Γ_- — соответственно, верхняя и нижняя границы полосы Ω . Для любой формы $\mathfrak{h}(u, v)$ обозначаем $\mathfrak{h}[u] = \mathfrak{h}(u, v)$. Искомые утверждения следуют из применения к этой форме теорем VI.33, VI.2.1 и результатов [5, §VI.3.2]. Возможность использования этих теорем в [12] обеспечивают леммы 3.1, 3.2. Поэтому в нашем случае достаточно установить справедливость аналогичных утверждений. Остальные аргументы остаются без изменений. Утверждение, аналогичное лемме 3.1 из [12], в нашем случае выглядит следующим образом.

Лемма 1. *Форма $\mathfrak{h}_{\alpha,i}^\varepsilon$ ограничена относительно формы $\mathfrak{h}_{\alpha,r}^\varepsilon$:*

$$|\mathfrak{h}_{\alpha,i}^\varepsilon[u]| \leq \delta \mathfrak{h}_{\alpha,r}^\varepsilon[u] + \left(\delta^{-1} \|\alpha\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^2 + \frac{4}{d} \|\alpha\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \right) \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

для всех $u \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ и любого $\delta > 0$.

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству, предложенному в статье [12], с единственным отличием: в качестве исходной формулы следует взять соотношение

$$|\mathfrak{h}_{\alpha,i}^\varepsilon[u]| = \left| \int_{\Omega} \alpha(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} |u(x)|^2 \zeta_1(x_2) dx \right| \leq 2 \|\alpha\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \|u\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L_2(\Omega)} + \frac{2}{s} \|\alpha\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \|u\|_{L_2(\Omega)},$$

$$s := \text{dist}(M, \partial\Omega), \quad \zeta_1(x_2) := \begin{cases} \frac{2x_2}{s}, & x_2 \in \left[0, \frac{s}{2}\right), \\ 0, & x_2 \in \left[\frac{s}{2}, d - \frac{s}{2}\right], \\ \frac{2(x_2 - d)}{s} + 1, & x_2 \in \left(d - \frac{s}{2}, d\right]. \end{cases}$$

Аналог леммы 3.2 из [12] в нашем случае утверждает, что любое обобщенное решение уравнения $-\Delta u = f$ в Ω_ε с правой частью из $L_2(\Omega_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям (0.1), (1.3), лежит в $W_2^2(\Omega_\varepsilon)$. Это является одним из вариантов стандартных теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач. Поэтому мы не останавливаемся подробно на деталях доказательства данного стандартного утверждения. Это завершает доказательство теоремы 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть f — функция из $L_2(\Omega)$, равная нулю на ω_ε . В силу вложений из (1.4) точка -1 попадает в резольвентное множество оператора $\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon$ для всех достаточно малых ε , а также в резольвентное множество оператора \mathcal{H}_α^0 . Поэтому резольвенты $(\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon + 1)^{-1}$ и $(\mathcal{H}_\alpha^0 + 1)^{-1}$ определены корректно. Обозначим $u_\varepsilon := (\mathcal{H}_\alpha^\varepsilon + 1)^{-1}f$, $u_0 := (\mathcal{H}_\alpha^0 + 1)^{-1}f$. Эти функции принадлежат пространствам $W_2^2(\Omega_\varepsilon)$ и $W_2^2(\Omega)$ и являются решениями уравнений

$$-\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad -\Delta u_0 + u_0 = f \quad \text{в } \Omega,$$

с краевыми условиями (0.1), (1.3) для функции u_ε и условием (0.1) для функции u_0 . Обозначим $w_\varepsilon := u_\varepsilon - u_0 \in W_2^2(\Omega_\varepsilon)$. Такая функция является решением краевой задачи

$$-\Delta w_\varepsilon + w_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha\right)w_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} = -\frac{\partial u_0}{\partial \nu} \quad \text{на } \partial\omega_\varepsilon.$$

Умножим уравнение в последней задаче на w_ε скалярно в $L_2(\Omega_\varepsilon)$ и проинтегрируем по частям с учетом краевых условий. Это дает следующие равенства:

$$\mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon[w_\varepsilon] + \|w_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}, w_\varepsilon\right)_{L_2(\partial\omega_\varepsilon)} = 0, \quad \mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon[w_\varepsilon] + \|w_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}, w_\varepsilon\right)_{L_2(\partial\omega_\varepsilon)}.$$

Возьмем реальную часть от последнего. Тогда с учетом определения (2.1) формы $\mathfrak{h}_\alpha^\varepsilon$ получим

$$\|w_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \|w_\varepsilon\|_{L_2(\partial\omega_\varepsilon)} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\partial\omega_\varepsilon)}. \quad (2.2)$$

Далее нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 2. *Для любой функции $v \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ верна оценка*

$$\|v\|_{L_2(\partial\omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{1/2} |\ln \varepsilon|^{1/2} \|v\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad (2.3)$$

где константа C не зависит от ε и v . Для любой функции $v \in W_2^2(\Omega)$ верна оценка

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\partial\omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{1/2} |\ln \varepsilon|^{1/2} \|v\|_{W_2^2(\Omega)},$$

где константа C не зависит от ε и v .

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем только для оценки (2.3), так как вторая оценка является ее прямым следствием. Всюду далее через C обозначаем несущественные константы, не зависящие от ε и v . Пусть Q — фиксированный круг, содержащий область ω вместе с ее замыканием. В окрестности точек M, M^* введем растянутые координаты $y = (x - M)\varepsilon^{-1}$, $y^* = (x - M^*)\varepsilon^{-1}$ и воспользуемся стандартной теоремой о принадлежности пространству $L_2(\partial\omega)$ следов на $\partial\omega$ функций из $W_2^1(Q \setminus \omega)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_2(\partial\omega_\varepsilon)}^2 &= \varepsilon \int_{\partial\omega} |v(M + \varepsilon y)|^2 ds + \varepsilon \int_{\partial\omega} |v(M^* + \varepsilon y^*)|^2 ds \leq C\varepsilon \sum_{\sharp=M, M^*} \|v(\sharp + \varepsilon \cdot)\|_{W_2^1(Q \setminus \omega)}^2 \\ &\leq C \sum_{\sharp=M, M^*} (\varepsilon \|\nabla v(\sharp + \cdot)\|_{L_2(\varepsilon Q)}^2 + C\varepsilon^{-1} \|v(\sharp + \cdot)\|_{L_2(\varepsilon Q)}^2) \leq C\varepsilon \|\nabla v\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 + C\varepsilon^{-1} \sum_{\sharp=M, M^*} \|v(\sharp + \cdot)\|_{L_2(\varepsilon Q)}^2. \end{aligned}$$

Пусть $\zeta_2 = \zeta_2(x)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице в фиксированной окрестности множества ω_ε и нулю вне некоторой большей окрестности (которая лежит в Ω_ε). В силу [24, Лм. 3.2] выполнена оценка

$$\|v(\sharp + \cdot)\|_{L_2(\varepsilon Q)}^2 \leq C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \|\nabla(v\zeta_2)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \|v\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \sharp = M, M^*.$$

Утверждение леммы теперь вытекает из последних двух оценок. Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет оценить правую часть (2.2):

$$\|w_\varepsilon\|_{L_2(\partial\omega_\varepsilon)} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\partial\omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon| \|v\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon)} \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}.$$

Из рассуждений доказательства леммы 3.2 в [12] следует, что $\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}$. Неравенство (1.5) вытекает из последних двух оценок. Теорема 2 доказана.

3. Собственные значения: сведение к операторному уравнению

Разделы 3 и 4 посвящены доказательству теоремы 3. Структура доказательства следующая. Вначале исследуется вопрос о существовании и кратности возникающих собственных значений, далее описывается асимптотическое поведение возникающих собственных значений.

Для исследования существования и кратности в настоящем разделе мы сводим исходное уравнение на собственные значения к некоторому другому операторному уравнению. Затем к последнему применяется обобщенная версия метода Бирмана — Швингера, предложенная в [2].

Для сведения исходного уравнения на собственные значения

$$\mathcal{H}_{\alpha_0}^\varepsilon u = \lambda u \tag{3.1}$$

к другому операторному уравнению используется комбинация двух техник. Первая из них — аналитическое продолжение резольвенты предельного оператора $\mathcal{H}_{\alpha_0}^0$ в окрестности края непрерывного спектра по параметру $k := \sqrt{\mu_0^2 - \lambda}$. Вторая техника позволяет переписать влияние малых отверстий ω_ε в терминах некоторых достаточно удобных операторов. Данный подход ранее уже применялся в работах [1; 11], где в качестве упомянутой специальной техники использовалась схема из [8, гл. XVI, § 4; 22]. В нашем случае также возможно применение данной техники. Вместе с тем нам удалось предложить схожий, но более простой метод редукции исходного уравнения. Доказательство теоремы начнем именно с него.

На поперечном сечении полосы Ω рассмотрим собственные функции оператора $-d^2/dx_2^2$ с краевыми условиями $(\partial/\partial x_2 + i\alpha_0)u = 0$ на концах сечения. Данные собственные функции имеют вид [19]

$$\psi_j(x_2) := \cos \mu_j x_2 - i \frac{\alpha_0}{\mu_j} \sin \mu_j x_2, \quad j \geq 0, \quad \mu_1 := \max \left\{ |\alpha_0|, \frac{\pi}{d} \right\}, \quad \mu_j := \frac{\pi j}{d}, \quad j \geq 2, \tag{3.2}$$

а число μ_0 было введено в (1.6). Собственные функции сопряженного оператора даются формулами [19]

$$\phi_j := \overline{A_j \psi_j}, \quad A_{j_0} := \frac{2i\alpha_0}{1 - e^{-2i\alpha_0 d}}, \quad A_{j_1} := \frac{2\pi^2}{(\pi^2 - \alpha_0^2 d^2)d}, \quad A_j := \frac{2\mu_j^2}{(\mu_j^2 - \mu_0^2)d}, \quad j \geq 2, \tag{3.3}$$

где $j_0 := 0$, $j_1 := 1$, если $|\alpha_0| < \pi/d$, и $j_0 := 1$, $j_1 := 0$, если $|\alpha_0| > \pi/d$. Если $\alpha_0 = 0$, то полагаем $A_0 := 1$.

В уравнении (3.1) положим $\lambda = \mu_0^2 - k^2$, где k — комплексный параметр, меняющийся в малой окрестности нуля. Перепишем затем уравнение (3.1) в виде краевой задачи

$$(-\Delta - \mu_0^2 + k^2)u = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha_0 \right) u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\omega_\varepsilon. \tag{3.4}$$

Будем искать нетривиальные решения такой задачи, ведущие себя на бесконечности согласно асимптотике

$$u(x) = c_{\pm}(k)e^{-k|x_1|}\psi_0(x_2) + \mathcal{O}(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\mu_1^2 - \mu_0^2}|x_1|}), \quad x_1 \rightarrow \pm\infty, \quad (3.5)$$

где $c_{\pm}(k)$ — некоторые константы. Если для некоторого k с $\operatorname{Re} k > 0$ такое решение существует, то это решение экспоненциально убывает и является собственной функцией оператора $\mathcal{H}_{\alpha_0}^{\varepsilon}$, соответствующей собственному значению $\lambda = \mu_0^2 - k^2$. Поэтому далее мы будем исследовать вопрос о существовании нетривиальных решений задачи (3.4), (3.5) для малых комплексных значений k .

Возьмем некоторое $b > 0$ и обозначим $\Omega^b := \Omega \cap \{x: |x_1| < b\}$, $\Omega_{\varepsilon}^b := \Omega^{\varepsilon} \cap \{x: |x_1| < b\}$. Число b выберем так, чтобы область $\Omega^{b/2}$ содержала отверстия ω_{ε} . Пусть h — произвольная функция из $L_2(\Omega)$ с носителем в $\overline{\Omega^b}$. Будем исследовать разрешимость краевой задачи

$$(-\Delta - \mu_0^2 + k^2)u = h \quad \text{в } \Omega_{\varepsilon}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha_0\right)u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\omega_{\varepsilon}, \quad (3.6)$$

предполагая, что решение на бесконечности ведет себя согласно (3.5).

Пусть f — произвольная функция из $L_2(\Omega)$ с носителем в $\overline{\Omega^b}$. Определим функцию v как (обобщенное) решение краевой задачи

$$(-\Delta - \mu_0^2 + k^2)v = f \quad \text{в } \Omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha_0\right)v = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (3.7)$$

ведущее себя на бесконечности аналогично (3.5):

$$v(x) = c_{\pm}(k)e^{-k|x_1|}\psi_0(x_2) + \mathcal{O}(e^{-\operatorname{Re}\sqrt{\mu_1^2 - \mu_0^2}|x_1|}), \quad x_1 \rightarrow \pm\infty, \quad (3.8)$$

где $c_{\pm}(k)$ — некоторые константы. Такую задачу можно решить разделением переменных, разлагая на сечении Ω по собственным функциям ψ_j и учитывая доказанное в [19] разложение в ряд Фурье функций из $L_2(0, d)$: $g = \sum_{j=0}^{\infty} (g, \phi_j)_{L_2(0, d)} \psi_j$. Исследование полученного таким образом решения задачи (3.7), (3.8) приводит к следующей лемме, доказанной в [12] (см. лемму 6.1 в указанной работе).

Лемма 3. *Линейный оператор $\mathcal{T}_1(k)$, отображающий функцию f в решение задачи (3.7), (3.8), является ограниченным как оператор из $L_2(\Omega^b)$ в $W_2^2(\Omega^b)$ для всех $b > 0$. Этот оператор мероморфен по малым k и имеет простой полюс в нуле:*

$$\mathcal{T}_1(k)f = \frac{\psi_0}{2k} \int_{\Omega} f \bar{\phi}_0 dx + \mathcal{T}_2(k)f, \quad (3.9)$$

где линейный оператор $\mathcal{T}_2(k): L_2(\Omega^b) \rightarrow W_2^2(\Omega^b)$ ограничен и голоморфен по малым k .

Обозначим $\Gamma^b := \Gamma \cap \partial\Omega^b$, $\gamma^b := \{x: |x_1| = b\} \cap \partial\Omega^b$. Рассмотрим еще одну краевую задачу

$$(-\Delta + 1)w_{\varepsilon} = 0 \quad \text{в } \Omega_{\varepsilon}^b, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha_0\right)w_{\varepsilon} = 0 \quad \text{на } \Gamma^b, \quad w_{\varepsilon} = 0 \quad \text{на } \gamma^b, \quad \frac{\partial w_{\varepsilon}}{\partial \nu} = -\frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \text{на } \partial\omega_{\varepsilon}, \quad (3.10)$$

где v — решение задачи (3.7), (3.8). Согласно лемме 3 функция v лежит в $W_2^2(\Omega^b)$, а потому в силу стандартных теорем о следах функция $\partial v / \partial \nu$ является элементом $L_2(\partial\omega_{\varepsilon})$. Поэтому граничное условие на $\partial\omega_{\varepsilon}$ в (3.10) задано корректно. Задача (3.10) также поставлена корректно и, в частности, однозначно разрешима в $W_2^2(\Omega_{\varepsilon}^b)$. Действительно, Лапласиан в Ω^b с краевыми условиями из (3.10), где условие на $\partial\omega_{\varepsilon}$ берется однородным, является m -секториальным оператором и его числовая область значений лежит во множестве $\Xi_{\alpha}^{\varepsilon}$. Этот факт доказывается совершенно аналогично теореме 1. Поэтому точка -1 попадает в резольвентное множество

данного оператора, что обеспечивает разрешимость задачи (3.10). Более того, линейный оператор, отображающий $\partial v / \partial \nu$, ограничен, как оператор из $L_2(\partial\omega_\varepsilon)$ в $W_2^2(\Omega_\varepsilon^b)$. Следовательно, отображение f в w_ε ограничено, как линейный оператор из $L_2(\Omega_\varepsilon^b)$ в $W_2^2(\Omega_\varepsilon^b)$. Обозначим последний через $\mathcal{T}_3(k, \varepsilon)$. Отметим также, что аналогично доказательству теоремы 2 нетрудно установить следующую оценку для решения задачи (3.10):

$$\|w_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon^b)} \leq C \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\partial\omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon| \|f\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}. \quad (3.11)$$

Пусть $\zeta_2 = \zeta_2(x_1)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $|x_1| < 2b/3$ и нулю при $|x_1| > 5b/6$. Решение задачи (3.6), (3.5) будем строить в виде

$$u(x) = (\mathcal{T}_4(k, \varepsilon)f)(x) = v(x) + \zeta_2(x_1)w_\varepsilon(x). \quad (3.12)$$

Такая функция в силу определения v и w_ε удовлетворяет всем краевым условиям из (3.6), а также ведет себя на бесконечности согласно (3.5). Поэтому, чтобы она была решением задачи (3.6), (3.5), необходимо и достаточно выполнения уравнения из (3.6). Подставим равенство (3.12) в это уравнение и учтем уравнения на функции v и w_ε из задач (3.7), (3.10). Тогда получим следующее уравнение в $L_2(\Omega_\varepsilon^b)$:

$$f + \mathcal{T}_5(k, \varepsilon)f = h, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_5(k, \varepsilon)f &:= (-\Delta - \mu_0^2 + k^2)\zeta_2 w_\varepsilon = w_\varepsilon(-\Delta - \mu_0^2 - 1 + k^2)\zeta_2 - 2\nabla\zeta_2 \cdot \nabla w_\varepsilon \\ &= ((-\Delta - \mu_0^2 + k^2)\zeta_2)\mathcal{T}_3(k, \varepsilon)f - 2\nabla\zeta_2 \cdot \nabla\mathcal{T}_3(k, \varepsilon)f. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В силу описанных выше свойств оператора \mathcal{T}_3 только что введенный оператор $\mathcal{T}_5(k, \varepsilon)$ ограничен, как оператор в $L_2(\Omega_\varepsilon^b)$. Более того, он компактен.

Лемма 4. Уравнение (3.13) эквивалентно задаче (3.6), (3.5). А именно, для каждого решения уравнения (3.13) функция ψ , определенная равенством (3.12), является решением задачи (3.6), (3.5). И наоборот, для каждого решения ψ задачи (3.6), (3.5) существует решение f уравнения (3.13), связанное с ψ равенством (3.12).

Доказательство. Если f — решение уравнения (3.13), то из приведенных выше построений следует, что функция $u = \mathcal{T}_4(k, \varepsilon)f$ — решение задачи (3.6), (3.5).

Пусть теперь задано решение последней задачи. Покажем, как по нему восстановить решение уравнения (3.13). В области Ω^b поставим краевую задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta + q)w_\varepsilon &= 0 \quad \text{в } \Omega^b, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha_0 \right) w_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma^b, \\ w_\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \gamma^b, \quad \left[\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} \right]_{\partial\omega_\varepsilon} = 0, \quad [w_\varepsilon]_{\partial\omega_\varepsilon} = -u. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь q — потенциал, а $[g]_{\partial\omega_\varepsilon}$ — скачок функции на $\partial\omega_\varepsilon$, определяемые формулами

$$q(x) := \begin{cases} 1, & x \in \omega_\varepsilon, \\ -\mu_0^2 + k^2, & x \in \Omega_\varepsilon^b, \end{cases} \quad [g]_{\partial\omega_\varepsilon} := \lim_{\substack{x \rightarrow \partial\omega_\varepsilon \\ x \in \omega_\varepsilon}} g(x) - \lim_{\substack{x \rightarrow \partial\omega_\varepsilon \\ x \in \Omega_\varepsilon^b}} g(x).$$

Задача (3.15) однозначно разрешима. Чтобы убедиться в этом, будем искать ее решение в виде $w_\varepsilon = \psi\zeta_3 + \tilde{v}_\varepsilon$, где ζ_3 — кусочно-гладкая срезающая функция, равная единице в $\Omega_\varepsilon^{b/2}$ и нулю в ω_ε и $\Omega^b \setminus \Omega^{b/2}$. С учетом краевого условия для ψ на $\partial\omega_\varepsilon$ из (3.6) после такой замены задача (3.15) переписывается к следующей:

$$(-\Delta + q)\tilde{v}_\varepsilon = 2\nabla\psi \cdot \nabla\zeta_3 - \psi(-\Delta + q)\zeta_3 \quad \text{в } \Omega^b, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha_0 \right) \tilde{v}_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma^b, \quad \tilde{v}_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \gamma^b.$$

Последняя, как легко убедиться, однозначно разрешима.

Покажем, что решение задачи (3.15) определяет функцию w_ε , соответствующую функции ψ . Определим функцию v формулой

$$v(x) := \begin{cases} \psi(x) - w_\varepsilon(x)\zeta_2(x_1), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ -w_\varepsilon(x), & x \in \omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Теперь решение задачи (3.15) является также и решением задачи (3.10).

В силу краевых условий для w_ε и ψ на $\partial\omega_\varepsilon$ из (3.15), (3.6) вытекает, что $[v]_{\partial\omega_\varepsilon} = \left[\frac{\partial v}{\partial\nu}\right]_{\partial\omega_\varepsilon} = 0$. Поэтому $v \in W_2^2(\Omega^b)$. Теперь выполнение задачи (3.7), (3.8) с правой частью

$$f(x) := \begin{cases} h(x) + (\Delta + \mu_0^2 - k^2)w_\varepsilon(x)\zeta_2(x), & x \in \Omega_\varepsilon^b, \\ 0, & x \in \omega_\varepsilon \end{cases}$$

вытекает из уравнений для функций w_ε и u в (3.15), (3.6). Уравнение (3.13) для функции f следует непосредственно из определения этой функции, определения (3.14) оператора \mathcal{T}_5 и уравнения для w_ε в (3.15). Лемма доказана.

Далее мы применяем обобщенную версию метода Бирмана — Швингера из [2] к уравнению (3.13). Из определения (3.14) оператора \mathcal{T}_5 , оценки (3.11) и леммы 3 выводим, что при k , близких к нулю, справедливо представление

$$\mathcal{T}_5(k) = \frac{(\cdot, \phi_0)_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}}{2k} \Phi_0 + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon), \quad (3.16)$$

где $\mathcal{T}_6(k, \varepsilon)$ — линейный оператор в $L_2(\Omega_\varepsilon^b)$, голоморфный по малым k и удовлетворяющий равномерной по ε и k оценке

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{T}_6}{\partial k}(k, \varepsilon) \right\| + \|\mathcal{T}_6(k, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon|. \quad (3.17)$$

Функция Φ_0 дается формулой $\Phi_0 := (-\Delta - \mu_0^2)\zeta_2\Psi_0$, где Ψ_0 — решение задачи (3.10) с $v = \psi_0$, $k = 0$. Аналогично теореме 2 нетрудно проверить, что

$$\|\Psi_0\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon^b)} \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon|, \quad \|\Phi_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)} \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon|, \quad (3.18)$$

где константа C не зависит от ε .

Подставим представление (3.16) в уравнение (3.13):

$$f + \frac{(f, \phi_0)_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}}{2k} \Phi_0 + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon)f = 0.$$

В силу оценки (3.17) оператор $(I + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon))$ ограниченно обратим. Подействуем обратным на последнее уравнение:

$$f + \frac{(f, \phi_0)_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}}{2k} (I + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon))^{-1} \Phi_0 = (I + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon))^{-1} h. \quad (3.19)$$

Рассмотрим теперь случай $h = 0$, что фактически соответствует задаче (3.4), (3.5). Здесь скалярное произведение $(f, \phi_0)_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}$ в уравнении (3.19) не может обращаться в нуль. Действительно, в противном случае в силу полученного уравнения выполнено $f = 0$, $u = 0$. Последнее равенство для собственной функции невозможно.

Умножим теперь уравнение (3.19) с $h = 0$ на ϕ_0 скалярно в $L_2(\Omega_\varepsilon^b)$, тогда выводим

$$k + \frac{1}{2} ((I + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon))^{-1} \Phi_0, \phi_0)_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)} = 0. \quad (3.20)$$

Полученное уравнение определяет значения k , при которых задача (3.4), (3.5) имеет нетривиальное решение. Последнее в силу леммы 4 и уравнения (3.19) с точностью до умножения на константу дается равенством

$$f = (I + \mathcal{T}_6(k_\varepsilon, \varepsilon))^{-1} \Phi_0, \quad u = \mathcal{T}_4(k_\varepsilon, \varepsilon)(I + \mathcal{T}_6(k_\varepsilon, \varepsilon))^{-1} \Phi_0, \quad (3.21)$$

где k_ε — корень уравнения (3.20).

Функция

$$p(k, \varepsilon) := \frac{1}{2} \left((I + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon))^{-1} \Phi_0, \phi_0 \right)_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)} \quad (3.22)$$

голоморфна по малым k ввиду голоморфности оператора \mathcal{T}_6 . Кроме того, в силу (3.17), (3.18) верна равномерная по ε и k оценка: $|p(k, \varepsilon)| \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon|$. Следовательно, по теореме Руше функция $k \mapsto k - p(k, \varepsilon)$ в малой окрестности нуля имеет столько же нулей, сколько и функция $k \mapsto k$, т. е. ровно один простой нуль. Таким образом, для достаточно малых ε уравнение (3.20) имеет ровно один корень в малой, но фиксированной окрестности нуля. Обозначим этот корень через k_ε . Таким образом, доказана

Лемма 5. *Для достаточно малых ε в малой окрестности нуля существует единственное значение параметра $k = k_\varepsilon$, при котором задача (3.4), (3.5) имеет нетривиальное решение. Данное значение является корнем уравнения (3.20). Соответствующее нетривиальное решение единственно с точностью до умножения на константу и дается формулой (3.21).*

Вычислим функцию v , соответствующую нетривиальному решению u задачи (3.4), (3.5). Для этого воспользуемся формулой (3.21) для функции f и представлением (3.9):

$$v = \frac{p(k_\varepsilon, \varepsilon)}{2k_\varepsilon} \psi_0 + \mathcal{T}_2(k_\varepsilon)(I + \mathcal{T}_6(k_\varepsilon, \varepsilon))^{-1} \Phi_0.$$

Теперь в силу уравнения (3.20), ограниченности операторов \mathcal{T}_2 , \mathcal{T}_6 и соотношений (3.18) следует

$$v = \psi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon |\ln \varepsilon|) \quad \text{в норме} \quad W_2^1(\Omega^b). \quad (3.23)$$

Таким образом, коэффициенты $c_\pm(k_\varepsilon)$ из (3.8) для v удовлетворяют сходимости: $c_\pm(k_\varepsilon) = 1 + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow +0$. Ввиду определения (3.12) оператора \mathcal{T}_4 аналогичная сходимость верна и для коэффициентов $c_\pm(k_\varepsilon)$ из (3.5) для нетривиального решения задачи (3.4), (3.5). Отсюда и из леммы 5 вытекает следующий факт: для того, чтобы корень уравнения (3.20) давал собственное значение оператора $\mathcal{H}_{\alpha_0}^\varepsilon$, соответствующее нетривиальное решение задачи (3.4), (3.5) должно быть элементом $W_2^2(\Omega_\varepsilon^b)$. В силу асимптотики (3.5) это эквивалентно неравенству $\operatorname{Re} k_\varepsilon > 0$. В разд. 4 на основе метода согласования асимптотических разложений мы построим асимптотику корня k_ε и проверим это неравенство. Асимптотика вначале будет построена формально. Для ее строгого обоснования нам понадобятся дополнительные результаты, которые удобно сформулировать в настоящем разделе.

Вернемся к уравнению (3.19). Умножим его скалярно на ϕ_0 в $L_2(\Omega_\varepsilon^b)$ и выразим из полученного равенства скалярное произведение $(f, \phi_0)_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}$:

$$\frac{(f, \phi_0)_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}}{2k} = \frac{\left((I + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon))^{-1} h, \phi_0 \right)_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}}{2k + p(k, \varepsilon)}.$$

Подставим это выражение в (3.19) и найдем тем самым

$$f = - \frac{\left((I + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon))^{-1} h, \phi_0 \right)_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}}{2k + p(k, \varepsilon)} (I + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon))^{-1} \Phi_0 + (I + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon))^{-1} h. \quad (3.24)$$

Предположим теперь, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ и некотором $k = \tilde{k}_\varepsilon$ выполнено $h = h_\varepsilon$, $\|h_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)} \rightarrow 0$, $f = f_\varepsilon$, $\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)} \geq c_0 > 0$, где константа c_0 не зависит от ε . Тогда в силу (3.24), (3.18) имеем

$$|2k + p(\tilde{k}_\varepsilon, \varepsilon)| \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon| \|h\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)},$$

где константа C не зависит от ε . Используя полученное неравенство, (3.17), (3.20), (3.22) и лемму Адамара, выводим

$$\begin{aligned} 2\tilde{k}_\varepsilon + p(\tilde{k}_\varepsilon, \varepsilon) &= 2(\tilde{k}_\varepsilon - k_\varepsilon) + p(\tilde{k}_\varepsilon, \varepsilon) - p(k_\varepsilon, \varepsilon), \quad |p(\tilde{k}_\varepsilon, \varepsilon) - p(k_\varepsilon, \varepsilon)| \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon| |\tilde{k}_\varepsilon - k_\varepsilon|, \\ |2\tilde{k}_\varepsilon + p(\tilde{k}_\varepsilon, \varepsilon)| &= |\tilde{k}_\varepsilon - k_\varepsilon| (1 + \mathcal{O}(\varepsilon |\ln \varepsilon|)) \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon| \|h\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где константа C не зависит от ε . Следовательно, справедливо равномерное по ε неравенство

$$|\tilde{k}_\varepsilon - k_\varepsilon| \leq C\varepsilon |\ln \varepsilon| \|h\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}. \quad (3.26)$$

Таким образом, достаточно построить формальное асимптотическое решение задачи (3.4), (3.5). Соответствующее значение параметра \tilde{k}_ε будет давать асимптотику корня k_ε с точностью до невязки в правой части уравнения.

В заключение отметим, что оценка (3.26) является аналогом классической леммы “о почти собственных векторах”. Аналогичная оценка для соответствующего нетривиального решения задачи (3.4), (3.5) вытекает из (3.24), (3.25):

$$\|f_\varepsilon - (\mathbf{I} + \mathcal{T}_6(k, \varepsilon))^{-1} \Phi_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)} \leq C \|h\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}, \quad \|\mathcal{T}_4(\tilde{k}_\varepsilon, \varepsilon) f_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon^a)} \leq C |k_\varepsilon|^{-1} \|h\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^b)}, \quad (3.27)$$

где $a > 0$ — произвольная константа; C — некоторая константа, не зависящая от ε ; u_ε — нетривиальное решение задачи (3.4), (3.5).

4. Собственные значения: асимптотики

В настоящем разделе мы построим формальные асимптотические решения задачи (3.4), (3.5). А именно, будут построены формальные асимптотические разложения параметра k_ε и соответствующего нетривиального решения ψ_ε . Обоснование формальных асимптотик будет проведено на основе оценок (3.26), (3.27).

В задаче (3.4) сделаем замену $u(x) = e^{-k_\varepsilon \zeta_4(x_1)} u_\varepsilon(x_1)$, где функция $u_\varepsilon(x_1)$ предполагается ограниченной на бесконечности, а $\zeta_4(x_1)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $|x_1| < c/2$ и $|x_1| > c$. Параметр c выбираем фиксированным так, чтобы отверстия ω_ε лежали в $\Omega^{c/2}$. Задача на функцию u_ε имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(-\Delta + 2k_\varepsilon \zeta_4' \frac{\partial}{\partial x_1} - \mu_0^2 + k_\varepsilon^2 (1 - (\zeta_4')^2) - k_\varepsilon \zeta_4'' \right) u_\varepsilon &= 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha_0 \right) u_\varepsilon &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\omega_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Решение этой задачи будем строить методом согласования асимптотических разложений [4]. Схема построения формальных асимптотик для самосопряженных задач с малыми отверстиями известна, см. [4, гл. III, §1; 6; 23, Ch. II, Sec. 2.1–2.4]; случай оператора общего вида в ограниченной области см. в [23, Ch. V, Sec. 5.1]. В нашем случае схема в целом схожа с небольшими отличиями, связанными со спецификой задачи. Поэтому далее мы делаем акцент только на данных отличиях, приводя остальные рассуждения в кратком виде для полноты картины.

Асимптотику параметра k_ε ищем в виде

$$k_\varepsilon = \varepsilon^2 k_2 + \dots \quad (4.2)$$

Асимптотику ограниченного решения задачи (4.1) будем строить как сумму внешнего и внутреннего разложений. Внешнее разложение вводится следующим образом:

$$u_\varepsilon^{\text{ex}}(x) = \psi_0(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (4.3)$$

Выбор функции ψ_0 в качестве главного члена обусловлен равенством (3.23).

Подставим равенства (4.2), (4.3) в задачу (4.1) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Краевыми условиями на $\partial\omega_\varepsilon$ при этом пренебрежем. Тогда получаем следующую краевую задачу для функции u_2 :

$$(-\Delta - \mu_0^2)u_2 = k_2 \zeta_4'' \psi_0 \quad \text{в } \Omega_0 := \Omega \setminus \{M, M^*\}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i\alpha_0\right)u_2 = 0 \quad \text{на } \Gamma_+ \cup \Gamma_-. \quad (4.4)$$

По аналогии с [4, гл. III, §1; 6, 23, Ch. II, Sec. 2.1-2.4; 23, Ch. V, Sec. 5.1] будем строить решение этой задачи со следующим поведением в точках M и M^* :

$$\begin{aligned} u_2(x) &= r^{-1}(a_{-1} \cos \theta + b_{-1} \sin \theta) + a_0 \ln r + b_0 + \mathcal{O}(r), & r \rightarrow +0, \\ u_2(x) &= (r^*)^{-1}(a_{-1}^* \cos \theta^* + b_{-1}^* \sin \theta^*) + a_0^* \ln r^* + b_0^* + \mathcal{O}(r^*), & r^* \rightarrow +0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где (r, θ) , (r^*, θ^*) — полярные координаты с центрами в точках M и M^* , соответствующие переменным $x - M$ и $x^* - M^*$, $x^* := (x_1, -x_2)$, а a_i, b_i, a_i^*, b_i^* — некоторые константы, которые будут найдены ниже во время процедуры согласования с внутренним разложением. Ниже мы покажем, что задача (4.4) с такими условиями разрешима при подходящем выборе константы k_2 .

Внутреннее разложение будем строить в окрестности отверстий ω_ε в растянутых переменных $\xi = (x - M)\varepsilon^{-1}$ для верхнего отверстия в ω_ε и $\xi^* = (x^* - M^*)\varepsilon^{-1}$ для нижнего отверстия. Для обоих отверстий анзац внутреннего разложения предполагается следующим:

$$u_\varepsilon^{\text{in}}(x) = U_0(x) + \varepsilon U_1(\xi) + \varepsilon^2 U_2(\xi, \ln \varepsilon) + \dots, \quad u_\varepsilon^{\text{in},*}(x) = U_0^*(x) + \varepsilon U_1^*(\xi^*) + \varepsilon^2 U_2^*(\xi^*, \ln \varepsilon) + \dots \quad (4.6)$$

Подставим эти анзацы и асимптотику (4.2) в задачу (4.1) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Это даст задачи на коэффициенты внутреннего разложения:

$$\Delta_\xi U_i = 0, \quad \Delta_\xi U_2 = -\mu_0^2 U_0 \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, \quad i = 0, 1, \quad \frac{\partial U_j}{\partial \nu_\xi} = 0 \quad \text{на } \partial\omega, \quad j = 0, 1, 2, \quad (4.7)$$

где ν_ξ — нормаль к $\partial\omega$, направленная внутрь ω . Задачи для функций U_i^* совершенно аналогичны.

Проведем теперь согласование асимптотических разложений. Разложим функцию ψ_0 в окрестности точек M и M^* по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \psi_0(x_0) + y_2 \frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0) - \frac{\mu_0^2}{2} \psi_0(x_0) y_2^2 + \mathcal{O}(y_2^3), & x \rightarrow M, \\ \psi_0(x) &= \psi_0(x_0^*) - y_2^* \frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0^*) - \frac{\mu_0^2}{2} \psi_0(x_0^*) (y_2^*)^2 + \mathcal{O}((y_2^*)^3), & x \rightarrow M^*, \end{aligned}$$

где $y = (y_1, y_2) := (x_1, x_2 - x_0)$, $y^* = (y_1^*, y_2^*) := (x_1, -x_2 + x_0^*)$. Из этих формул и (4.5) следует

$$\begin{aligned} \psi_0(x) + \varepsilon^2 u_{20}(x) &= \widehat{U}_0(\xi) + \varepsilon \widehat{U}_1(\xi) + \varepsilon^2 \widehat{U}_2(\xi, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^3(|\xi|^3 + |\xi|)), & r \rightarrow 0, \\ \psi_0(x) + \varepsilon^2 u_{20}(x) &= \widehat{U}_0^*(\xi^*) + \varepsilon \widehat{U}_1^*(\xi^*) + \varepsilon^2 \widehat{U}_2^*(\xi^*, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^3(|\xi^*|^3 + |\xi^*|)), & r^* \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\widehat{U}_0(\xi) := \psi_0(x_0), \quad \widehat{U}_2(\xi, \varepsilon) := -\frac{\mu_0^2}{2} \psi_0(x_0) \xi_2^2 + a_0 (\ln |\xi| + \ln \varepsilon) + b_0,$$

$$\widehat{U}_0^*(\xi^*) := \psi_0(x_0^*), \quad \widehat{U}_2^*(\xi^*, \varepsilon) := -\frac{\mu_0^2}{2} \psi_0(x_0^*) (\xi_2^*)^2 + a_0^* (\ln |\xi^*| + \ln \varepsilon) + b_0^* \quad (4.9)$$

$$\widehat{U}_1(\xi) := \xi_2 \frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0) + \frac{a_{-1} \cos \theta + b_{-1} \sin \theta}{|\xi|}, \quad \widehat{U}_1^*(\xi^*) := -\xi_2^* \frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0^*) \frac{a_{-1}^* \cos \theta + b_{-1}^* \sin \theta}{|\xi|},$$

где θ, θ^* — полярные углы, соответствующие переменным ξ и ξ^* . Ясно, что они совпадают с введенными ранее полярными углами, соответствующими переменным y и y^* .

В силу метода согласования асимптотических разложений из (4.6), (4.8) вытекает, что функции U_i, U_i^* должны иметь следующие асимптотики на бесконечности:

$$\begin{aligned} U_i(\xi) &= \widehat{U}_i(\xi) + o(1), & i = 0, 2, & \quad U_1(\xi) = \widehat{U}_1(\xi) + o(|\xi|^{-1}), & \xi \rightarrow \infty, \\ U_i^*(\xi^*) &= \widehat{U}_i^*(\xi^*) + o(1), & i = 0, 2, & \quad U_1^*(\xi^*) = \widehat{U}_1^*(\xi^*) + o(|\xi^*|^{-1}), & \xi^* \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Задачи (4.7) для U_0, U_0^* имеют единственное ограниченное решение, которое является постоянным и в силу асимптотик (4.10) выполнено $U_0(\xi) \equiv \psi_0(x_0), U_0^*(\xi^*) \equiv \psi_0(x_0^*)$. Модельное решение $X(\xi)$ задачи (1.7) обладает следующей асимптотикой на бесконечности:

$$X(\xi) = |\xi|^{-1}(\beta_1 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta) + \mathcal{O}(|\xi|^{-2}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Интегрированием по частям в интегралах

$$\int_{\{x:|x|<R\}\setminus\omega} X \Delta X \, d\xi = 0, \quad \int_{\{x:|x|<R\}\setminus\omega} \xi_2 \Delta X \, d\xi = 0$$

с последующим переходом к пределу при $R \rightarrow +\infty$ проверяется, что

$$2\pi\beta_2 = \|\nabla X\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \omega)}^2 + |\omega|. \quad (4.12)$$

В силу (4.11), (4.9), (4.10) получаем

$$\begin{aligned} U_1^*(\xi^*) &= -\frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0^*)(X(\xi) + \xi_2), \\ a_{-1} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0)\beta_1, \quad b_{-1} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0)\beta_2, \quad a_{-1}^* = -\frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0^*)\beta_1, \quad b_{-1}^* = -\frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0^*)\beta_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Решение задачи (4.7) также строится с помощью модельной функции, которая вводится как решение задачи

$$\Delta_\xi X_1 = -1 \text{ в } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\omega}, \quad \frac{\partial X_1}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\omega, \quad X_1(\xi) = -\frac{\xi_2^2}{2} + \frac{|\omega|}{2\pi} \ln |\xi| + \mathcal{O}(|\xi|^{-1}), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Такое решение существует и единственно. Функции u_2, u_2^* выражаются через функцию X_1 следующим образом:

$$\begin{aligned} u_2(\xi, \ln \varepsilon) &= \mu_0^2 \psi_0(x_0) X_1(\xi) + \frac{\mu_0^2 |\omega|}{2\pi} \psi_0(x_0) \ln \varepsilon + b_0, \\ u_2^*(\xi^*, \ln \varepsilon) &= \mu_0^2 \psi_0(x_0^*) X_1(\xi^*) + \frac{\mu_0^2 |\omega|}{2\pi} \psi_0(x_0^*) \ln \varepsilon + b_0^*. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.9) вытекает, что асимптотика (4.10) для u_2, u_2^* будет выполнена, если положить

$$a_0 = a_0^* = \frac{\mu_0^2 |\omega|}{2\pi} \psi_0(x_0). \quad (4.14)$$

Разрешимость задачи (4.4) с требуемой асимптотикой в нуле исследуется на основе леммы 3. А именно, функцию u_0 следует строить в виде

$$\begin{aligned} u_2(x) &= (a_{-1} r^{-1} \cos \theta + b_{-1} r^{-1} \sin \theta + a_0 \ln \rho) \zeta_5(x) \\ &+ (a_{-1}^* (r^*)^{-1} \cos \theta^* + b_{-1}^* (r^*)^{-1} \sin \theta^* + a_0^* \ln \rho^*) \zeta_5^*(x) + \widetilde{u}_2(x), \end{aligned}$$

где ζ_5, ζ_5^* — бесконечно дифференцируемые срезающие функции, равные единице в малых окрестностях точек M и M^* , соответственно, и нулю вне больших окрестностей. Описанная замена приводит к поиску ограниченного решения \tilde{u}_2 из $W_{2,loc}^2(\Omega)$ для задачи (3.7) с $k = 0$ и функцией $h \in L_2(\Omega)$ в правой части. В силу (3.9) условие разрешимости этой задачи — обращение в нуль интеграла $\int_{\Omega} h \bar{\phi}_0 dx$, что и является условием разрешимости задачи (4.4) для u_2 . С помощью несложного интегрирования по частям и формул (4.12), (4.13), (4.14) оно позволяет определить константу k_2 :

$$2k_2 = 2\pi A_0 \left(\psi_0(x_0) a_0 - \frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0) b_{-1} \right) + 2\pi A_0 \left(\psi_0(x_0^*) a_0^* + \frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0^*) b_{-1}^* \right),$$

$$k_2 = \frac{A_0}{2} \left[\mu_0^2 |\omega| (\psi_0^2(x_0) + \psi_0^2(x_0^*)) - (|\omega| + \|\nabla X\|_{L_2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega})}^2) \left(\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x_2}(x_0^*) \right)^2 \right) \right].$$

Подставляя сюда формулы (3.2), (3.3) для A_0 и ψ_0 , приходим к равенствам (1.8).

Пусть $\zeta_6 = \zeta_6(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$. Формальное асимптотическое решение задачи (3.4), (3.5) строим в виде

$$\widehat{\psi}_\varepsilon(x) = e^{-\widehat{k}_\varepsilon \zeta_4(x_1)} \widehat{u}_\varepsilon(x_1), \quad (4.15)$$

$$\widehat{u}_\varepsilon(x_1) = \widehat{u}_\varepsilon^{\text{ex}}(x) (1 - \zeta_6(r\varepsilon^{-\gamma}) - \zeta_6(r^*\varepsilon^{-\gamma})) + \widehat{u}_\varepsilon^{\text{in}}(x) \zeta_6(r\varepsilon^{-\gamma}) + \widehat{u}_\varepsilon^{\text{in},*}(x) \zeta_6(r^*\varepsilon^{-\gamma}),$$

где $\widehat{k}_\varepsilon, \widehat{u}_\varepsilon^{\text{ex}}, \widehat{u}_\varepsilon^{\text{in}}, \widehat{u}_\varepsilon^{\text{in},*}$ — частичные суммы формальных асимптотических рядов для k_ε , внешнего и внутреннего разложений $u_\varepsilon^{\text{ex}}, u_\varepsilon^{\text{in}}, u_\varepsilon^{\text{in},*}$. Путем подстановки функций $\widehat{\psi}_\varepsilon^{\text{ex}}$ и \widehat{k}_ε в задачу (3.4), (3.5) определяем затем малую невязку в правой части уравнения. Применение оценок (3.27) дает обоснование асимптотики

$$k_\varepsilon = \varepsilon^2 k_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (4.16)$$

Вместе с тем построенных анзацев в (4.2), (4.3), (4.6) недостаточно для получения невязки нужного порядка малости. Поэтому в данных анзацах требуется построить дальнейшие члены, что и даст невязку нужного порядка. Схема построения этих членов проста, рутинна и не отличается от приведенной выше для определения первых членов асимптотик (см. также [4, гл. III, § 1; 6; 23, Ch. II, Sec. 2.1–2.4]). Поэтому мы не будем останавливаться на построении данных дополнительных членов, что является заключительным этапом в определении асимптотики параметра k_ε .

Из асимптотики (4.16) следует, что знак реальной части корня k_ε уравнения (3.20) совпадает со знаком величины k_2 . Отсюда, из леммы 5 и асимптотики (3.5) следует утверждение теоремы о существовании и отсутствии собственного значения λ_ε . Асимптотику (1.9) получаем из (4.16) и формулы $\lambda_\varepsilon = \mu_0^2 - k_\varepsilon^2$. Так как оператор $\mathcal{H}_{\alpha_0}^\varepsilon$ является \mathcal{PT} -симметричным, его собственные значения попарно комплексно сопряжены. Отсюда и из единственности собственного значения λ_ε вытекает вещественность последнего. Теорема 3 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Борисов Д.И.** Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном // *Мат. сб.* 2006. Т. 197, № 4. С. 3–32.
2. **Гадыльшин Р.Р.** О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси // *Теорет. мат. физика.* 2002. Т. 132, № 1. С. 97–104.
3. **Глазман И.М.** Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М: Физматлит, 1963. 339 с.
4. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 335 с.
5. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.

6. **Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.** Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 2. С. 347–371.
7. **Назаров С.А.** Вариационный и асимптотический метод поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1086–1101.
8. **Санчес-Паленсия Е.** Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
9. **Bender С.М., Boettcher S.** Real spectra in non-hermitian Hamiltonians having \mathcal{PT} symmetry // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80, no. 24. P. 5243–5246.
10. **Bender С.М.** Making sense of non-Hermitian Hamiltonians // Rep. Prog. Phys. 2007. Vol. 70, no. 6. P. 947–1018.
11. **Borisov D., Exner P., Gadyl'shin R.** Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip // J. Math. Phys. 2002. Vol. 43, no. 12. P. 6265–6278.
12. **Borisov D., Krejčířik D.** \mathcal{PT} -symmetric waveguide // Int. Eqs. Op. Th. 2008. Vol. 62, no. 4. P. 489–515.
13. **Borisov D., Krejčířik D.** The effective Hamiltonian for thin layers with non-Hermitian Robin-type boundary conditions // Asympt. Anal. 2012. Vol. 76, no. 1. P. 49–59.
14. **Caliceti E., Cannata F., Graffi S.** Perturbation theory of \mathcal{PT} -symmetric Hamiltonians // J. Phys. A. 2006. Vol. 39, no. 32. P. 10019–10027.
15. **Caliceti E., Graffi S., Sjöstrand J.** Spectra of \mathcal{PT} -symmetric operators and perturbation theory // J. Phys. A. 2005. Vol. 38, no. 1. P. 185–193.
16. **Caliceti E., Cannata F., Graffi S.** \mathcal{PT} -symmetric schrödinger operators: reality of the perturbed eigenvalues // Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2010. Vol. 6, paper 009. 8 p.
17. **Dorey P., Dunning C., Tateo R.** Spectral equivalences, Bethe ansatz equations, and reality properties in \mathcal{PT} -symmetric quantum mechanics // J. Phys. A. 2001. Vol. 34, no. 28. P. 5679–5704.
18. **Gadyl'shin R.R.** On regular and singular perturbations of acoustic and quantum waveguides // C.R. Mécanique. 2004. Vol. 332, no. 8. P. 647–652.
19. **Krejčířik D., Bíla H., Znojil M.** Closed formula for the metric in the Hilbert space of a \mathcal{PT} -symmetric model // J. Phys. A. 2006. Vol. 39, no. 32. P. 10143–10153.
20. **Krejčířik D., Tater M.** Non-Hermitian spectral effects in a \mathcal{PT} -symmetric waveguide // J. Phys. A. 2008. Vol. 41, no. 24. Id 244013. 14 p.
21. **Langer H., Tretter Ch.** A Krein space approach to \mathcal{PT} -symmetry // Czech. J. Phys. 2004. Vol. 54, no. 10. P. 1113–1120.
22. **Majda A.** Outgoing solutions for perturbation of $-\Delta$ with applications to spectral and scattering theory // J. Diff. Eqs. 1974. Vol. 16, no. 3. P. 515–547.
23. **Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.** Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed problems. Vol. 1. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verlag, 2000. 435 p.
24. **Oleinik O.A., Sanchez-Hubert J., Yosifian G.A.** On vibrations of a membrane with concentrated masses // Bull. Sci. Math. II. Sér. 1991. Vol. 115, no. 1. P. 1–27.
25. **Shin K.C.** On the reality of the eigenvalues for a class of \mathcal{PT} -symmetric oscillators // Commun. Math. Phys. 2002. Vol. 229, no. 3. P. 543–564.
26. **Znojil M.** \mathcal{PT} -symmetric square well // Phys. Lett. A. 2001. Vol. 285, no. 1,2. P. 7–10.

Борисов Денис Иванович

Поступила 12.09.2011

д-р физ.-мат. наук

старший научн. сотрудник Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

профессор

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы

e-mail: borisovdi@yandex.ru

УДК 517.929

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ОПТИМАЛЬНОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ¹

Д. С. Быков, Ю. Ф. Долгий

Для решения задачи оптимальной стабилизации системы дифференциальных уравнений с запаздыванием применяется метод усредняющих аппроксимаций, позволяющий решение исходной задачи аппроксимировать решениями задач оптимальной стабилизации систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей работе найдена скорость сходимости аппроксимирующих управлений к оптимальному.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, оптимальная стабилизация, функциональное пространство состояний, конечномерные аппроксимации.

D. S. Bykov, Yu. F. Dolgii. Error estimate for approximations of an optimal stabilizing control in a delay system.

The method of averaging approximations is used for solving the problem of optimal stabilization of a delay system of differential equations. The exact solution is approximated by solutions of optimal stabilization problems for systems of ordinary differential equations. The rate of convergence of approximating controls to an optimal control is found.

Keywords: delay differential equations, optimal stabilization, functional state space, finite-dimensional approximations.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + Bu, \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, A , A_τ — постоянные матрицы порядка n , B — постоянная матрица размерности $n \times r$.

Требуется найти управление u^0 , формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1) и минимизирует критерий качества переходных процессов

$$J = \int_0^\infty (x^T(t) C_1 x(t) + u^T(t) C_2 u(t)) dt, \quad (2)$$

где C_1 — постоянная неотрицательная матрица, C_2 — постоянная положительно определенная матрица. В работе [1] показано, что для существования единственного решения поставленной задачи, называемого оптимальным стабилизирующим управлением, достаточно, чтобы система (1) была стабилизируема и матрица C_1 была положительно определенной.

В работе [2] предложено в качестве приближений для оптимального стабилизирующего управления системы с запаздыванием выбирать оптимальные стабилизирующие управления для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_0^N}{dt} &= A_0 x_0^N + A_\tau x_N^N + Bu, \\ \frac{dx_i^N}{dt} &= \frac{N}{\tau} (x_{i-1}^N - x_i^N), \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3)$$

¹Работа поддержана программой Президиума РАН “Математическая теория управления” (проект 12-П-1-1019).

где $x_i^N \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, N$, с критериями качества

$$J_N = \int_0^\infty (x_0^{NT}(t) C_1 x_0^N(t) + u^T(t) C_2 u(t)) dt, \quad (4)$$

существующие и единственные при $N \geq N_0$ и надлежащем выборе натурального числа N_0 . Красовский Н.Н. доказал [2], что такие аппроксимирующие управления сходятся к оптимальному стабилизирующему управлению системы с запаздыванием.

Анализ точности аппроксимаций удобно проводить в функциональном пространстве состояний [3], в качестве которого выбираем сепарабельное гильбертово пространство \mathbb{H} со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \mathbf{x}_2^T(0) \mathbf{x}_1(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{x}_2^T(\vartheta) \mathbf{x}_1(\vartheta) d\vartheta$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{H}$. В этом пространстве системе (1) соответствует уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (5)$$

где замкнутый неограниченный оператор \mathbf{A} задается формулами $(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = d\mathbf{x}(\vartheta)/d\vartheta$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $(\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + A_\tau \mathbf{x}(-\tau)$ и имеет область определения $D(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\}$, а конечномерный оператор \mathbf{B} определяется формулами $(\mathbf{B}u)(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$, $(\mathbf{B}u)(0) = Bu$, $u \in \mathbb{R}^r$. При этом критерию качества (2) соответствует критерий

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty (\mathbf{x}_t^T(0) C_1 \mathbf{x}_t(0) + u^T(t) C_2 u(t)) dt = \int_0^\infty (\langle C_1 \mathbf{P}\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle_{\mathbb{H}} + u^T(t) C_2 u(t)) dt, \quad (6)$$

где $\mathbf{P}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ — конечномерный оператор, заданный формулами $(\mathbf{P}\mathbf{x})(0) = \mathbf{x}(0)$, $(\mathbf{P}\mathbf{x})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$.

Оптимальное стабилизирующее управление \mathbf{u}^0 задачи (5), (6) задается формулой

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = -C_2^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad (7)$$

где $\mathbf{B}^*: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r$, $\mathbf{B}^* \mathbf{x} = B^T \mathbf{x}(0)$, а $\mathbf{P}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ — положительный самосопряженный ядерный оператор, удовлетворяющий операторному уравнению Риккати [1; 4].

Введем векторы $X^N = \text{col}(x_0^N, \dots, x_N^N)$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда задачи (3), (4) в векторной форме примут вид

$$\frac{dX^N}{dt} = A_N X^N + B_N u, \quad (8)$$

$$J_N = \int_0^\infty (X^{NT}(t) C_{1N} X^N(t) + u^T(t) C_2 u(t)) dt, \quad N \geq N_0. \quad (9)$$

Оптимальные стабилизирующие управления u_N^0 задач (8), (9) определяются формулами [5, с. 496]

$$u_N^0(X^N) = -C_2^{-1} B_N^T \Pi_N X^N, \quad X^N \in \mathbb{R}^{(N+1)n}, \quad (10)$$

где Π_N — положительно определенные матрицы порядка $(N+1)n$, $N \geq N_0$, удовлетворяющие матричным уравнениям Риккати.

При переходе от пространств состояний $\mathbb{R}^{(N+1)n}$, $N \in \mathbb{N}$, к \mathbb{H} в описании аппроксимирующих задач используем сплайны нулевого порядка

$$\mathbf{x} = \chi_{\{0\}} x^0 + \sum_{k=1}^N \chi_{[-\frac{k}{N}\tau, -\frac{k-1}{N}\tau)} x^k, \quad x^k \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, \dots, N, \quad N \in \mathbb{N},$$

где χ_E — индикатор множества E . Они являются значениями инъективных отображений $\iota_N : \mathbb{R}^{(N+1)n} \rightarrow \mathbb{H}$, области значений которых

$$\mathbb{H}_N = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{H} : \exists \psi^k \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, \dots, N, \quad \mathbf{x} = \psi^0 \chi_{\{0\}} + \sum_{k=1}^N \psi^k \chi_{[-\frac{k}{N}\tau, -\frac{k-1}{N}\tau)} \right\}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Отображения ι_N определяют топологические изоморфизмы пространств $\mathbb{R}^{(N+1)n}$ и \mathbb{H}_N , для которых $\iota_N^{-1} \mathbf{x} = \pi_N \mathbf{x}$ при $\mathbf{x} \in \mathbb{H}_N$, $N \in \mathbb{N}$, где сюръективные отображения $\pi_N : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{(N+1)n}$ определяются с помощью формул

$$\pi_N \mathbf{x} = \text{col} \left(\mathbf{x}(0), \frac{N}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{N}}^0 \mathbf{x}(\xi) d\xi, \dots, \frac{N}{\tau} \int_{-\tau}^{-\tau+\frac{\tau}{N}} \mathbf{x}(\xi) d\xi \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Введенные топологические изоморфизмы позволяют заменить задачи (8), (9) в пространствах $\mathbb{R}^{(N+1)n}$ эквивалентными задачами в пространствах \mathbb{H}_N , $N \geq N_0$. Уравнения (8) переходят в уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_N \mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}_N, \quad (11)$$

где конечномерные операторы $\mathbf{A}_N : \mathbb{H}_N \rightarrow \mathbb{H}_N$ задаются формулами $\mathbf{A}_N = \iota_N \mathbf{A}_N \pi_N$, $N \geq N_0$. Критерии качества (9) переходят в критерии

$$\mathbf{J}_N = \int_0^\infty \left((\pi_N \mathbf{x}_t)^T C_{1N} (\pi_N \mathbf{x}_t) + u^T(t) C_{2N} u(t) \right) dt, \quad N \geq N_0, \quad (12)$$

а управления (10) — в управления

$$\mathbf{u}_N^0(\mathbf{x}) = -C_2^{-1} B_N^T \Pi_N \pi_N \mathbf{x} = -C_2^{-1} B_N^T \iota_N^* \pi_N^* \Pi_N \pi_N \mathbf{x} = -C_2^{-1} \mathbf{B}^* \Pi_N \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}_N. \quad (13)$$

Здесь $\Pi_N : \mathbb{H}_N \rightarrow \mathbb{H}_N$ — положительно определенные конечномерные операторы, определяемые формулами $\Pi_N = \pi_N^* \Pi_N \pi_N$, $N \geq N_0$.

Для дальнейших исследований будет удобно расширить задачи (11), (12) и управления (13) на пространство \mathbb{H} , используя определения операторов π_N . Для расширений оставим прежние обозначения.

Описанные аппроксимации задачи оптимальной стабилизации системы с запаздыванием изучались в работах [2; 4; 6; 7]. В аппроксимационной теории стабилизации систем с запаздыванием линейные сплайны и сплайны высшего порядка использовались в работах [8; 9], а полиномы Лежандра — в [10; 11].

В работе J.S. Gibson [4] доказана теорема о сходимости аппроксимирующих управлений к оптимальному управлению при выполнении гипотезы, справедливость которой обоснована в работе D. Salamon [7].

Теорема 1 [4]. *Если система (1) стабилизируема и матрица C_1 положительно определена, то последовательность аппроксимирующих стабилизирующих управлений $\{\mathbf{u}_N^0\}_{N \geq N_0}$ сходится в равномерной топологии к \mathbf{u}^0 , т. е.*

$$\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_N^0\|_{\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

В настоящей работе получена асимптотическая оценка скорости сходимости аппроксимирующих управлений.

Теорема 2. Если система (1) стабилизируема и матрица C_1 положительно определена, то справедлива асимптотическая оценка

$$\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_N^0\|_{\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r} = O(N^{-\frac{1}{4}}) \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы используется подход, предложенный в работе [12] для уравнения параболического типа при решении аналогичной задачи. Предлагается его модификация для случая, когда последовательность операторов $\{T_N(t) \mathbf{P}_N\}_{N=N_0}^{\infty}$ не сходится в равномерной топологии к $T(t)$ при $t \in (0, \tau)$.

Применяя формулы (7) и (13), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_N^0(\mathbf{x})\|_{\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r} &= \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} |C_2^{-1} \mathbf{B}^* (\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_N) \mathbf{x}| \\ &\leq |C_2^{-1}| |B| \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} |(\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_N) \mathbf{x}(0)| \leq |C_2^{-1}| |B| \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|(\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_N) \mathbf{x}\| \\ &= |C_2^{-1}| |B| \|\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_N\| = |C_2^{-1}| |B| \sup_{\|\mathbf{x}_0\| \leq 1} |(\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_N) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0\rangle_{\mathbb{H}}|. \end{aligned}$$

Используя свойства оптимальных управлений $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}_N^0$ [4], получим

$$\langle (\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_N) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle_{\mathbb{H}} = J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0) - J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0).$$

Однопараметрическое семейство линейных отображений $\mathbf{u}(t, \cdot): \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r, t \in \mathbb{R}^+$, определяет допустимое управление для задачи (5), (6), если для любого решения $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}(t, \mathbf{x}_t) \quad (14)$$

значение критерия качества

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \int_0^{\infty} (\langle C_1 \mathbf{P} \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}), \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \rangle_{\mathbb{H}} + \mathbf{u}^T(t, \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})) C_2 \mathbf{u}(t, \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}))) dt$$

конечно. Аналогично определяется допустимое управление $\mathbf{u}_N(t, \cdot): \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r, t \in \mathbb{R}^+$, для расширенной задачи (11), (12).

Пространство \mathbb{H} является объединением множеств

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_+ &= \{\mathbf{x}_0: \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}, J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0) - J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0) \geq 0\}, \\ \mathbb{H}_- &= \{\mathbf{x}_0: \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}, J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0) - J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0) < 0\}. \end{aligned}$$

Если $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+$, то из оптимальности управления \mathbf{u}^0 имеем

$$0 \leq J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0) - J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0) \leq J(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) - J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0), \quad (15)$$

где $\tilde{\mathbf{u}}_N(t, \mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_N^0(\mathbf{x}_{tN}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0))$ при $t \in [0, \Delta)$, $\tilde{\mathbf{u}}_N(t, \mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_N^0(\mathbf{x})$ при $t \in [\Delta, +\infty)$, Δ — некоторое положительное число, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+$. Из результатов работы [4] следует, что такое управление является допустимым для задачи (5), (6). Здесь $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+$ в управление $\tilde{\mathbf{u}}_N$ входит в качестве параметра.

Если $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_-$, то из оптимальности управления \mathbf{u}_N^0 следует

$$0 \leq J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0) - J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0) \leq J_N(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}_N) - J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0), \quad (16)$$

где $\hat{\mathbf{u}}_N(t, \mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0))$ при $t \in [0, \Delta)$, $\hat{\mathbf{u}}_N(t, \mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{P}_N \mathbf{x})$ при $t \in [\Delta, \infty)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_-$. Управление $\hat{\mathbf{u}}_N$ допустимо для расширения задачи (11), (12). Здесь $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_-$ в управление $\hat{\mathbf{u}}_N$ входит в качестве параметра.

Из (15), (16) следует

$$\begin{aligned} & \sup_{\|\mathbf{x}_0\| \leq 1} |J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0) - J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0)| \\ & \leq \max \left\{ \sup_{\substack{\|\mathbf{x}_0\| \leq 1, \\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+}} (J(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) - J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0)), \sup_{\substack{\|\mathbf{x}_0\| \leq 1, \\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_-}} (J_N(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}_N) - J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0)) \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Значение критерия качества $J(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N)$ при $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+$ определяется формулой

$$J(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) = \int_0^\infty (\langle C_1 \mathbf{P} \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N), \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) \rangle_{\mathbb{H}} + \tilde{\mathbf{u}}_N^T(t, \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N)) C_2 \tilde{\mathbf{u}}_N(t, \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N))) dt.$$

При $t \in [0, \Delta)$ найдем представление управления $\tilde{\mathbf{u}}_N$. Учитывая уравнение (11), формулу (13) и определение $\tilde{\mathbf{u}}_N$, выводим

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = (\mathbf{A}_N - \mathbf{D}\Pi_N) \mathbf{x}_t,$$

где конечномерный оператор $\mathbf{D}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ задается формулой $\mathbf{D} = \mathbf{B}C_2^{-1}\mathbf{B}^*$. Следовательно, $\mathbf{x}_{tN}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0) = S_N(t) \mathbf{x}_0$, $t \geq 0$, где $\{S_N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ — сильно непрерывная полугруппа с инфинитезимальным оператором $\mathbf{A}_N - \mathbf{D}\Pi_N$. В результате имеем $\tilde{\mathbf{u}}_N(t, \mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = -C_2^{-1}\mathbf{B}^*\Pi_N S_N(t) \mathbf{x}_0$, $t \in [0, \Delta)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+$. Для управления $\tilde{\mathbf{u}}_N$ уравнение (14) на $[0, \Delta)$ представим как

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}_t - \mathbf{D}\Pi_N S_N(t) \mathbf{x}_0.$$

Его решение определяется формулой

$$\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) = T(t) \mathbf{x}_0 - \int_0^t T(t-\xi) \mathbf{D}\Pi_N S_N(\xi) \mathbf{x}_0 d\xi = \tilde{S}_N(t) \mathbf{x}_0 \quad (18)$$

и $\tilde{\mathbf{u}}_N(t, \mathbf{x}_{tN}(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) | \mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_N^0(\mathbf{x}_{tN}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0)) = -C_2^{-1}\mathbf{B}^*\Pi_N S_N(t) \mathbf{x}_0$, $0 \leq t < \Delta$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+$.

При $t \in [\Delta, \infty)$ из определения $\tilde{\mathbf{u}}_N$ и формулы (11) получим $\tilde{\mathbf{u}}_N(t, \mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = -C_2^{-1}\mathbf{B}^*\Pi_N \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+$. Для управления $\tilde{\mathbf{u}}_N$ уравнение (14) на промежутке $[\Delta, \infty)$ принимает вид

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{D}\Pi_N) \mathbf{x}_t.$$

Пусть $\{\tilde{S}_N^1(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ — сильно непрерывная полугруппа, порожденная инфинитезимальным оператором $\mathbf{A} - \mathbf{D}\Pi_N$. Тогда имеем $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) = \tilde{S}_N^1(t - \Delta) \tilde{S}_N(\Delta) \mathbf{x}_0$ и $\tilde{\mathbf{u}}_N(t, \mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) | \mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_N^0(\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N)) = -C_2^{-1}\mathbf{B}^*\Pi_N \tilde{S}_N^1(t - \Delta) \tilde{S}_N(\Delta) \mathbf{x}_0$, $t \geq \Delta$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+$.

В результате получим

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) &= \int_0^\Delta (\langle \tilde{S}_N^*(t) C_1 \mathbf{P} \tilde{S}_N(t) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle_{\mathbb{H}} + \langle S_N^*(t) \Pi_N \mathbf{D}\Pi_N S_N(t) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle_{\mathbb{H}}) dt \\ &+ \int_\Delta^\infty (\langle \tilde{S}_N^*(\Delta) \tilde{S}_N^{1*}(t - \Delta) C_1 \mathbf{P} \tilde{S}_N^1(t - \Delta) \tilde{S}_N(\Delta) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle_{\mathbb{H}} \\ &+ \langle \tilde{S}_N^*(\Delta) \tilde{S}_N^{1*}(t - \Delta) \Pi_N \mathbf{D}\Pi_N \tilde{S}_N^1(t - \Delta) \tilde{S}_N(\Delta) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle_{\mathbb{H}}) dt, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+. \end{aligned} \quad (19)$$

Значение критерия качества $J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0)$ определяется формулой

$$J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0) = \int_0^{\infty} (\langle S_N^*(t) C_1 \mathbf{P} S_N(t) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle_{\mathbb{H}} + \langle S_N^*(t) \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N S_N(t) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \rangle_{\mathbb{H}}) dt, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+. \quad (20)$$

Используя (19) и (20), получим

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) - J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0) &= \int_0^{\Delta} \left\langle \left(\tilde{S}_N^*(t) C_1 \mathbf{P} \tilde{S}_N(t) - S_N^*(t) C_1 \mathbf{P} S_N(t) \right) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \right\rangle_{\mathbb{H}} dt \\ &+ \int_{\Delta}^{\infty} \left\langle \left(\tilde{S}_N^*(\Delta) \tilde{S}_N^{1*}(t - \Delta) (C_1 \mathbf{P} + \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N) \tilde{S}_N^1(t - \Delta) \tilde{S}_N(\Delta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - S_N^*(t) (C_1 \mathbf{P} + \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N) S_N(t) \right) \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \right\rangle_{\mathbb{H}} dt, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+. \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим подынтегральные выражения:

$$\begin{aligned} &\left\| \tilde{S}_N^*(t) C_1 \mathbf{P} \tilde{S}_N(t) - S_N^*(t) C_1 \mathbf{P} S_N(t) \right\| \\ &\leq \left\| S_N^*(t) C_1 \mathbf{P} \left(\tilde{S}_N(t) - S_N(t) \right) \right\| + \left\| \left(\tilde{S}_N^*(t) - S_N^*(t) \right) \mathbf{P} C_1 \tilde{S}_N(t) \right\|, \quad t \in [0, \Delta], \\ &\left\| \tilde{S}_N^*(\Delta) \tilde{S}_N^{1*}(t - \Delta) (C_1 \mathbf{P} + \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N) \tilde{S}_N^1(t - \Delta) \tilde{S}_N(\Delta) - S_N^*(t) (C_1 \mathbf{P} + \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N) S_N(t) \right\| \\ &\leq \left\| S_N^*(t) (C_1 \mathbf{P} + \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N) \right\| \left\| \tilde{S}_N^1(t - \Delta) \tilde{S}_N(\Delta) - \mathbf{P}_N S_N(t) \right\| \\ &+ \left\| S_N^*(t) \mathbf{P}_N^* - \tilde{S}_N^*(\Delta) \tilde{S}_N^{1*}(t - \Delta) \right\| \left\| (C_1 \mathbf{P} + \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N) \tilde{S}_N^1(t - \Delta) S_N(\Delta) \right\|, \quad t \in [\Delta, \infty), \end{aligned}$$

при нахождении второй оценки использовались равенства $\mathbf{P} \mathbf{P}_N = \mathbf{P}$, $\mathbf{\Pi}_N = \mathbf{\Pi}_N \mathbf{P}_N = \mathbf{P}_N^* \mathbf{\Pi}_N$.

В [4; 7] показано, что операторы $\{S_N(t) \mathbf{P}_N, t \geq 0\}$ являются равномерно экспоненциально убывающими, т. е. существуют постоянные $M, \omega > 0$ такие, что

$$\|S_N(t) \mathbf{P}_N\| \leq M e^{-\omega t}, \quad t \geq 0, \quad N \geq N_0. \quad (22)$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\Delta = \max\{6\tau, \ln(4M)/\omega\}$. Справедливы леммы, доказательства которых приведены в конце работы.

Лемма 1. *Существуют некоторые постоянные $\tilde{\omega} > 0$, $\tilde{K}_1 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}$ такие, что справедливо неравенство*

$$\left\| \tilde{S}_N^1(t) \right\| \leq \tilde{K}_1 e^{-\tilde{\omega} t}, \quad t \geq 0, \quad N \geq N_1.$$

Лемма 2. *Существуют некоторые постоянные $\tilde{\omega} > 0$, $\tilde{K}_2 > 0$, $N_1 \in \mathbb{N}$ такие, что справедливы формулы*

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \Delta]} \left\| \mathbf{P} \left(\tilde{S}_N(t) - S_N(t) \right) \right\| &= O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right), \quad N \rightarrow \infty, \\ \left\| \tilde{S}_N^1(t - \Delta) \tilde{S}_N(\Delta) - \mathbf{P}_N S_N(t) \right\| &\leq \tilde{K}_2 N^{-\frac{1}{4}} e^{-\tilde{\omega} t}, \quad t \geq \Delta, \quad N \geq N_1. \end{aligned}$$

Применив леммы 1 и 2, имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \tilde{S}_N^*(t) C_1 \mathbf{P} \tilde{S}_N(t) - S_N^*(t) C_1 \mathbf{P} S_N(t) \right\| = O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right), \quad t \in [0, \Delta], \quad N \rightarrow \infty, \\ &\left\| \tilde{S}_N^*(\Delta) \tilde{S}_N^{1*}(t - \Delta) (C_1 \mathbf{P} + \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N) \tilde{S}_N^1(t - \Delta) \tilde{S}_N(\Delta) - S_N^*(t) (C_1 \mathbf{P} + \mathbf{\Pi}_N \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N) S_N(t) \right\| \\ &\leq (|C_1| + \|\mathbf{D}\| \hat{\Pi}^2) \left(\tilde{K}_1 \tilde{K}_3 + M \right) \tilde{K}_2 e^{-\tilde{\omega} t} N^{-\frac{1}{4}}, \quad t \geq \Delta, \quad N \geq N_1. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{K}_3 = \sup_{N \in \mathbb{N}} \max_{t \in [0, \Delta]} \left\| \tilde{S}_N(t) \right\|$.

С учетом полученных оценок из (21) найдем

$$J(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{u}}_N) - J_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_N^0) = O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right) \|\mathbf{x}_0\|^2, \quad N \rightarrow \infty, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_+.$$

Аналогично доказывается, что

$$J_N(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}_N) - J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^0) = O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right) \|\mathbf{x}_0\|^2, \quad N \rightarrow \infty, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}_-.$$

В результате из неравенства (17) следует справедливость теоремы. \square

Доказательство леммы 1. Используя полугрупповое свойство, для любого $t = m\Delta + \xi > 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$, $\xi \in [0, \Delta)$, имеем

$$\left\| \tilde{S}_N^1(t) \right\| = \left\| \tilde{S}_N^1(m\Delta + \xi) \right\| = \left\| \tilde{S}_N^{1m}(\Delta) \tilde{S}_N^1(\xi) \right\| \leq \left\| \tilde{S}_N^1(\Delta) \right\|^m \sup_{N \geq N_0} \max_{\xi \in [0, \Delta]} \left\| \tilde{S}_N^1(\xi) \right\|, \quad N \geq N_0.$$

Покажем, что $\left\| \tilde{S}_N^1(\Delta) \right\| \leq 1/2$ при достаточно больших N .

Используя условие (22), получим неравенство

$$\left\| \tilde{S}_N^1(\Delta) \right\| \leq \left\| \tilde{S}_N^1(\Delta) - S_N(\Delta) \mathbf{P}_N \right\| + \|S_N(\Delta) \mathbf{P}_N\| \leq \left\| \tilde{S}_N^1(\Delta) - S_N(\Delta) \mathbf{P}_N \right\| + \frac{1}{4}. \quad (23)$$

Для оценки первого слагаемого в правой части последнего неравенства используется интегральное уравнение

$$\tilde{S}_N^1(t) - S_N(t) \mathbf{P}_N = G_N(t) - \int_0^t T(t-\xi) \mathbf{D} \Pi_N \left(\tilde{S}_N^1(\xi) - S_N(\xi) \mathbf{P}_N \right) d\xi, \quad (24)$$

где $G_N(t) = T(t) - T_N(t) \mathbf{P}_N + \int_0^t (T_N(t-\xi) - T(t-\xi)) \mathbf{D} \Pi_N S_N(\xi) d\xi$, $t \geq 0$, $N \geq N_0$, для решения которого справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{S}_N^1(\Delta) - S_N(\Delta) \mathbf{P}_N \right\| &\leq \|T_N(\Delta) \mathbf{P}_N - T(\Delta)\| + \Delta \|\mathbf{D}\| \hat{\Pi} M \max_{t \in [0, \Delta]} \|(T_N(t) - T(t)) \mathbf{P}\| \\ &\quad + \Delta L e^{\alpha \Delta} \max_{t \in [0, \Delta]} \left\| \mathbf{D} \Pi_N \left(S_N(t) \mathbf{P}_N - \tilde{S}_N^1(t) \right) \right\|, \quad N \geq N_0, \end{aligned} \quad (25)$$

где L, α таковы, что $\|T(t)\| \leq L e^{\alpha t}$, $t \geq 0$.

В работе [6] доказана равномерная сходимость операторов $T_N(t) \mathbf{P}_N$ к $T(t)$ при $t \geq 5\tau$. Тогда первое слагаемое в правой части (25) сходится к нулю. Из равномерной сходимости операторов $(T_N(t) - T(t)) \mathbf{P}$, $t \in [0, \Delta]$ [4] к нулевому оператору следует сходимость к нулю второго слагаемого в правой части (25).

Учитывая сильную сходимость аппроксимирующих полугрупп $T_N(t)$ к $T(t)$, $t \in [0, \Delta]$, и сильную сходимость проекторов \mathbf{P}_N к тождественному [13], получим, что операторы $G_N(t)$, $t \in [0, \Delta]$, сильно сходятся к нулевому оператору. Тогда, применяя лемму Гроноулла [14, с. 26] для уравнения (24), получим сильную сходимость операторов $\tilde{S}_N^1(t) - S_N(t) \mathbf{P}_N$ к нулевому. Из конечномерности оператора \mathbf{D} следует равномерная сходимость $\mathbf{D} \Pi_N \left(S_N(t) \mathbf{P}_N - \tilde{S}_N^1(t) \right)$, $t \in [0, \Delta]$ к нулю. В результате найдется натуральное число N_1 такое, что при $N \geq N_1$ первое слагаемое в правой части неравенства (23) не будет превосходить $1/4$. \square

Доказательство леммы 2. При фиксированном значении N , учитывая формулу (18) для оператора $\tilde{S}_N(t)$, $t \in [0, \Delta]$, и интегральное уравнение для оператора $S_N(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, имеем

$$\tilde{S}_N(t) - S_N(t) = T(t) - T_N(t)$$

$$+ \int_0^t (T(t-\xi) - T_N(t-\xi)) \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N S_N(\xi) d\xi, \quad t \in [0, \Delta], \quad N \geq N_0. \quad (26)$$

Используя результаты и методы работы [1], можно показать, что

$$\max_{t \in [0, \Delta]} \|\mathbf{P}(T_N(t) - T(t))\| = O(N^{-\frac{1}{4}}), \quad N \rightarrow \infty.$$

Из предыдущего равенства и равенства (26) имеем

$$\|\mathbf{P}(\tilde{S}_N(t) - S_N(t))\| \leq \max_{\xi \in [0, \Delta]} \|\mathbf{P}(T(\xi) - T_N(\xi))\| \left(1 + \Delta \|\mathbf{D}\| \max_{\xi \in [0, \Delta]} \|\mathbf{\Pi}_N S_N(\xi) \mathbf{P}_N\|\right), \quad (27)$$

где $t \in [0, \Delta]$, $N \rightarrow \infty$, откуда следует справедливость первой части леммы 2.

При $t \geq \Delta$ и $N \geq N_0$ выводим

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{S}_N^1(t-\Delta) \tilde{S}_N(\Delta) - \mathbf{P}_N S_N(t) \right\| = \left\| \tilde{S}_N^1(t-\Delta) \tilde{S}_N(\Delta) - \mathbf{P}_N S_N(t-\Delta) S_N(\Delta) \right\| \\ & \leq \|S_N(t-\Delta) \mathbf{P}_N\| \left\| \tilde{S}_N(\Delta) - S_N(\Delta) \mathbf{P}_N \right\| + \left\| \left(\tilde{S}_N^1(t-\Delta) - S_N(t-\Delta) \mathbf{P}_N \right) \tilde{S}_N(\Delta) \right\|. \end{aligned} \quad (28)$$

Для оценки первого слагаемого в правой части предыдущего неравенства, используя (26) и аналогию с выводом формулы (27), определяем

$$\left\| \tilde{S}_N(\Delta) - S_N(\Delta) \mathbf{P}_N \right\| \leq \|T(\Delta) - T_N(\Delta) \mathbf{P}_N\| + \int_0^\Delta \|(T(\Delta-\xi) - T_N(\Delta-\xi)) \mathbf{P}\| \|\mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N S_N(\xi)\| d\xi,$$

где $N \geq N_0$. Используя результаты и методы работы [1], можно показать, что

$$\max_{t \in [0, \Delta]} \|(T_N(t) - T(t)) \mathbf{P}\| = O(N^{-\frac{1}{4}}), \quad N \rightarrow \infty.$$

Тогда с учетом (22) находим оценку первого слагаемого в правой части неравенства (28)

$$\|S_N(t-\Delta) \mathbf{P}_N\| \left\| \tilde{S}_N(\Delta) - S_N(\Delta) \mathbf{P}_N \right\| \leq \tilde{K}_3 e^{-\omega t} N^{-\frac{1}{4}}, \quad N \geq N_0, \quad t \geq 0,$$

для некоторого положительного числа \tilde{K}_3 .

Переходим к оценке второго слагаемого в правой части неравенства (28). В общем случае разность $\tilde{S}_N^1(t) - S_N(t) \mathbf{P}_N$ не стремится к нулю в равномерной топологии в пространстве \mathbb{H} при $t \in [0, \tau]$. Поэтому для оценки второго слагаемого (28) потребуется более детально изучить свойства области значений оператора $\tilde{S}_N(\Delta)$. Если бы область значений оператора $\tilde{S}_N(\Delta)$ принадлежала $\mathcal{D}(\mathbf{A}^2)$, то для оценки второго слагаемого в правой части (28) можно было бы непосредственно применить результаты работы [6]. При доказательстве этой леммы мы модифицировали методику работы [6] в условиях, когда область значений оператора $\tilde{S}_N(\Delta)$ не принадлежит $\mathcal{D}(\mathbf{A}^2)$. Можно показать, что $\tilde{S}_N(\Delta) \mathbf{x} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ при любом $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, $N \geq N_0$, и $\mathbf{A} \tilde{S}_N(\Delta) \mathbf{x} = \mathbf{D} \mathbf{\Pi}_N S_N(\Delta) \mathbf{x} + F_N \mathbf{x}$, причем $F_N \mathbf{x} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ и $\sup_{N \geq N_0} \|\mathbf{A} F_N\| \leq \infty$. При $t \geq 0$ и $N \geq N_1$ имеем

$$\left(S_N(t) \mathbf{P}_N - \tilde{S}_N^1(t) \right) \tilde{S}_N(\Delta) = (\mathbf{P}_N - I) \tilde{S}_N^1(t) \tilde{S}_N(\Delta) + \left(S_N(t) \mathbf{P}_N - \mathbf{P}_N \tilde{S}_N^1(t) \right) \tilde{S}_N(\Delta). \quad (29)$$

Оператор $\mathbf{A} \tilde{S}_N^1(t) \tilde{S}_N(\Delta) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ определен на всем \mathbb{H} и замкнут [15, с. 659]. Тогда по теореме о замкнутом графике он ограничен. Применяя предложение A2 из [6], имеем

$$\left\| (\mathbf{P}_N - I) \tilde{S}_N^1(t) \tilde{S}_N(\Delta) \mathbf{x} \right\| \leq \frac{\tau}{\sqrt{3}N} \left\| \mathbf{A} \tilde{S}_N^1(t) \tilde{S}_N(\Delta) \mathbf{x} \right\|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad N \geq N_0.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| (\mathbf{P}_N - I) \tilde{S}_N^1(t) \tilde{S}_N(\Delta) \right\| \leq \frac{\tau}{\sqrt{3N}} \left\| \mathbf{A} \tilde{S}_N^1(t) \tilde{S}_N(\Delta) \right\| \\ & \leq \frac{\tau}{\sqrt{3N}} \tilde{K}_1 e^{-\tilde{\omega}t} \left(\sup_{N \geq N_0} \left\| \mathbf{A} \tilde{S}_N(\Delta) \right\| + 2 \|\mathbf{D}\| \sup_{N \geq N_0} \|\mathbf{\Pi}_N\| \sup_{N \geq N_0} \left\| \tilde{S}_N(\Delta) \right\| \right), \quad t \geq 0, \quad N \geq N_0. \end{aligned}$$

Основная трудность заключена в оценке второго слагаемого в правой части (29):

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{P}_N \tilde{S}_N^1(t) - S_N(t) \mathbf{P}_N \right) \tilde{S}_N(\Delta) \\ & = \int_0^t S_N(t-\xi) \left(\mathbf{P}_N (\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N) - (\mathbf{A}_N - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N) \mathbf{P}_N \right) \tilde{S}_N^1(\xi) \tilde{S}_N(\Delta) d\xi, \quad t \geq 0, \quad N \geq N_0. \end{aligned}$$

Выберем достаточно большое положительное число μ , принадлежащее регулярным множествам операторов \mathbf{A} и \mathbf{A}_N . Пусть $R(\mu, \mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N)$, $R(\mu, \mathbf{A}_N - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N)$ — значения резольвент операторов $\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N$, $\mathbf{A}_N - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N$ соответственно. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{P}_N \tilde{S}_N^1(t) - S_N(t) \mathbf{P}_N \right) \tilde{S}_N(\Delta) \\ & = \int_0^t S_N(t-\xi) (\mathbf{A}_N - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N - \mu I) g_N(\mu) \tilde{S}_N^1(\xi) (\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N - \mu I) \tilde{S}_N(\Delta) d\xi, \quad t \geq 0, \quad N \geq N_0, \quad (30) \end{aligned}$$

где $g_N(\mu) = \mathbf{P}_N R(\mu, \mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N) - R(\mu, \mathbf{A}_N - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N) \mathbf{P}_N$. Правую часть формулы (30) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{P}_N \tilde{S}_N^1(t) - S_N(t) \mathbf{P}_N \right) \tilde{S}_N(\Delta) = I_1(t) + I_2(t), \\ & I_1(t) = - \int_0^t \left(\mu + \frac{d}{d\xi} \right) S_N(t-\xi) g_N(\mu) \tilde{S}_N^1(\xi) d\xi \left(F_N - \mu \tilde{S}_N(\Delta) \right) \\ & = \left[S_N(t) g_N(\mu) - g_N(\mu) \tilde{S}_N^1(t) + \int_0^t S_N(t-\xi) g_N(\mu) \tilde{S}_N^1(\xi) d\xi (\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N - \mu I) \right], \\ & I_2(t) = \int_0^t S_N(t-\xi) (\mathbf{A}_N - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N - \mu I) g_N(\mu) \tilde{S}_N^1(\xi) d\xi \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N \left(\mathbf{P}_N S_N(\Delta) - \tilde{S}_N(\Delta) \right), \end{aligned}$$

где $t \geq 0$, $N \geq N_0$. Используя результаты леммы 1 для первого интеграла $I_1(t)$, $t \geq 0$, находим асимптотическую оценку

$$\|I_1(t)\| \leq \tilde{K}_4 e^{-\tilde{\omega}t} \|g_N(\mu)\|, \quad t \geq 0,$$

для некоторой постоянной $\tilde{K}_4 > 0$. В [6] доказано, что $\|g_N(\mu)\| = O(N^{-1})$, $N \rightarrow \infty$. Применяя асимптотическую оценку из первой части леммы 2, получим

$$\sup_{t \geq 0} \|I_2(t)\| e^{\tilde{\omega}t} = \|(\mathbf{A}_N - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N - \mu I) g_N(\mu)\| O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right), \quad N \rightarrow \infty.$$

При доказательстве равномерной ограниченности семейства $(\mathbf{A}_N - \mathbf{D}\mathbf{\Pi}_N - \mu I) g_N(\mu)$ учитываются определения и свойства операторов $g_N(\mu)$, $N \geq N_0$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26. С. 39–51.
2. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28. С. 716–724.
3. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
4. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optim. 1983. Vol. 21, no. 1. P. 95–139.
5. **Красовский Н.Н.** Проблемы стабилизации управляемых движений // Дополнение к книге И.Г. Малкина: Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. **Lasiеcka I., Manitius A.** Differentiability and convergence rates of approximating semigroups for retarded functional differential equations // SIAM J. Numerical Anal. 1988. Vol. 25, no. 4. P. 883–907.
7. **Salamon D.** Structure and stability of finite dimensional approximations for functional differential equations // SIAM J. Control Optim. 1984. Vol. 23, no. 6. P. 928–951.
8. **Kappel F., Salamon D.** Spline approximation for retarded systems and the Riccati equation // SIAM J. Control Optim. 1987. Vol. 25, no. 4. P. 1082–1117.
9. **Propst G.** Piecewise linear approximation for hereditary control problems // SIAM J. Control Optim. 1990. Vol. 28, no. 1. P. 70–96.
10. **Ito K., Teglаs R.** Legendre-tau approximations for functional differential equations // SIAM J. Control Optim. 1986. Vol. 28, no. 4. P. 737–759.
11. **Ito K., Teglаs R.** Legendre-tau approximation for functional differential equations Part II: The linear quadratic optimal control problem // SIAM J. Control Optim. 1987. Vol. 25, no. 6. P. 1379–1408.
12. **Kroller M., Kunisch K.** Convergence rates for the feedback operators arising in the linear quadratic regulator problem governed by parabolic equations // SIAM J. Numerical Anal. 1991. Vol. 28, no. 5. P. 1350–1385.
13. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский М.: Наука, 1966. 499 с.
14. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
15. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. М.: ИЛ, 1962. 895 с.

Быков Данил Сергеевич

математик

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: bykovdanila@gmail.com

Поступила 28.11.2011

Долгий Юрий Филиппович

д-р физ.-мат. наук, профессор

вед. науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: yurii.dolgi@usu.ru

УДК 517.956

О НЕРАВЕНСТВАХ ФРИДРИХСА ДЛЯ КРУГА¹

Р. Р. Гадильшин, Е. А. Шишкина

Рассматривается неравенство Фридрихса для функций, определенных в круге единичного радиуса Ω и равных нулю почти на всей границе за исключение дуги γ_ε длиной ε , ε — малый параметр. Методом согласования асимптотических разложений построена и строго обоснована двучленная асимптотика постоянной Фридрихса $C(\Omega, \partial\Omega \setminus \overline{\gamma_\varepsilon})$ для таких функций. Показано, что $C(\Omega, \partial\Omega \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}) = C(\Omega, \partial\Omega) + \varepsilon^2 C(\Omega, \partial\Omega)(1 + O(\varepsilon^{2/7}))$. Вычисление асимптотики постоянной Фридрихса сведено к построению асимптотики минимального значения для оператора $-\Delta$ в круге с граничным условием Неймана на γ_ε и граничным условием Дирихле на остальной части границы.

Ключевые слова: неравенство Фридрихса, малый параметр, собственное значение, асимптотика.

R. R. Gadyl'shin, E. A. Shishkina. On Friedrichs inequalities for a disk.

We consider the Friedrichs inequality for functions defined on a disk of unit radius Ω and equal to zero on almost all boundary except for an arc γ_ε of length ε , where ε is a small parameter. Using the method of matched asymptotic expansions, we construct a two-term asymptotics for the Friedrichs constant $C(\Omega, \partial\Omega \setminus \overline{\gamma_\varepsilon})$ for such functions and present a strict proof of its validity. We show that $C(\Omega, \partial\Omega \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}) = C(\Omega, \partial\Omega) + \varepsilon^2 C(\Omega, \partial\Omega)(1 + O(\varepsilon^{2/7}))$. The calculation of the asymptotics for the Friedrichs constant is reduced to constructing an asymptotics for the minimum value of the operator $-\Delta$ in the disk with Neumann boundary condition on γ_ε and Dirichlet boundary condition on the remaining part of the boundary.

Keywords: Friedrichs inequality, small parameter, eigenvalue, asymptotics.

Посвящается Арлену Михайловичу Ильину

1. Постановка задачи и формулировка основных утверждений

Обозначим через $W_{2,0}^1(\Omega, \gamma)$ подмножество функций из $W_2^1(\Omega)$, равных нулю на $\gamma \subset \Gamma$, где $\Gamma = \partial\Omega$. Известно (см., например, [1, гл. I]), что для элементов пространства $W_{2,0}^1(\Omega, \gamma)$ справедливо неравенство Фридрихса

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C(\Omega, \gamma) \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (1.1)$$

где постоянная $C(\Omega, \gamma)$ не зависит от u . Здесь и далее под $C(\Omega, \gamma)$ понимается минимальная постоянная, при которой неравенство (1.1) будет выполнено. Это число обычно называют постоянной Фридрихса. В случае, когда γ совпадает со всей границей Γ , неравенство (1.1) называется классическим неравенством Фридрихса.

В работе рассматривается случай, когда Ω представляет собой единичный круг с центром в начале координат. Обозначим $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}$, где $\gamma_\varepsilon = \{(r, \varphi) : r = 1, -\varepsilon < \varphi < \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Здесь и далее (r, φ) — полярные координаты точки $x = (x_1, x_2)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо равенство*

$$C(\Omega, \Gamma_\varepsilon) = C(\Omega, \Gamma) + \varepsilon^2 C(\Omega, \Gamma) \left(1 + O(\varepsilon^{\frac{2}{7}})\right).$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 01-09-00350), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-6249.2610.1) и федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (проект 02.740.11.0612).

Из определения $C(\Omega, \gamma)$ вытекает, что

$$C(\Omega, \Gamma) = \sup_{v \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|v\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2} \right\}, \quad C(\Omega, \Gamma_\varepsilon) = \sup_{v \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|v\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2} \right\}. \quad (1.2)$$

С другой стороны, хорошо известно (см., например, [2]), что для минимального собственного значения краевой задачи

$$-\Delta \psi_0 = \lambda_0 \psi_0, \quad x \in \Omega; \quad \psi_0 = 0, \quad x \in \Gamma \quad (1.3)$$

имеет место равенство

$$\lambda_0 = \inf_{v \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|v\|_{L_2(\Omega)}^2} \right\}. \quad (1.4)$$

Здесь и всюду далее под Δ понимается оператор Лапласа по переменной x . Так как в дальнейшем будут рассматриваться и операторы Лапласа по другим переменным y , ξ и t , то для таких операторов Лапласа будем использовать обозначения Δ_y , Δ_ξ и Δ_t соответственно.

Аналогично [2, гл. IV] легко показать, что для минимального собственного значения краевой задачи

$$-\Delta \psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad \psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial r} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad (1.5)$$

справедливо равенство

$$\lambda_\varepsilon = \inf_{v \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|v\|_{L_2(\Omega)}^2} \right\}. \quad (1.6)$$

Из (1.2), (1.4), (1.6) немедленно вытекает, что

$$C(\Omega, \Gamma) = \lambda_0^{-1}, \quad C(\Omega, \Gamma_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon^{-1}. \quad (1.7)$$

Таким образом, для построения асимптотики $C(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$ достаточно построить асимптотику минимального собственного значения задачи (1.5). Поэтому основное содержание работы посвящено доказательству следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть λ_0 — минимальное собственное значение задачи (1.3). Тогда степенная асимптотика по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ собственного значения краевой задачи (1.5), сходящаяся к λ_0 , имеет вид

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 - \varepsilon^2 \lambda_0 \left(1 + O(\varepsilon^{\frac{2}{7}}) \right). \quad (1.8)$$

Из (1.8) немедленно следует справедливость теоремы 1. Действительно, в силу (1.7) и (1.8)

$$C(\Omega, \Gamma_\varepsilon) = \frac{1}{\lambda_0 \left(1 - \varepsilon^2 \left(1 + O(\varepsilon^{\frac{2}{7}}) \right) \right)} = C(\Omega, \Gamma) + \varepsilon^2 C(\Omega, \Gamma) \left(1 + O(\varepsilon^{\frac{2}{7}}) \right).$$

Заметим, что случай, когда область Ω имеет выпрямленный кусок границы, на малой части которого и задается граничное условие Неймана, был рассмотрен в [3]. Отсутствие же такого условия на границу для круга существенно усложняет как построение формальной асимптотики собственного значения, так и его обоснование.

2. Формальная асимптотика минимального собственного значения возмущенной задачи

В [4] показано, что простые собственные значения задачи (1.5) сходятся к простым собственным значениям λ_0 краевой задачи (1.3). Поэтому задачу (1.3) в дальнейшем будем называть предельной, задачу (1.5) — возмущенной, а собственную функцию $\psi_\varepsilon(x)$ естественно искать в виде $\psi_\varepsilon(x) \approx \psi_0(x)$.

Известно, что минимальное собственное значение λ_0 предельной задачи (1.3) простое и является квадратом наименьшего положительного нуля функции Бесселя нулевого порядка $\mathcal{J}_0(z)$, а $\mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_0}r)$ — соответствующая собственная функция. Так как $\int_0^1 r \mathcal{J}_0^2(\mu r) dr = 1/2 \left((\mathcal{J}'_0(\mu))^2 + \mathcal{J}_0^2(\mu) \right)$ (см., например, [5, гл. V]), то нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция предельной краевой задачи (1.3) имеет вид

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\mathcal{J}'_0(\sqrt{\lambda_0}) \right)^{-1} \mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_0}r). \quad (2.1)$$

Однако функция $\psi_0(x)$ не удовлетворяет требуемому граничному условию для возмущенной задачи на γ_ε . Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений [6], собственную функцию возмущенной задачи в окрестности γ_ε будем искать в другом виде. В силу (2.1) в переменных $y = (y_1, y_2)$, $y_1 = \varphi$, $y_2 = 1 - r$, $\tau = |y|$ функция ψ_0 имеет асимптотику

$$\psi_0(x) = K_0 y_2 + \frac{K_0}{2} y_2^2 + O(\tau^3), \quad \tau \rightarrow 0, \quad K_0 = \sqrt{\frac{2\lambda_0}{\pi}}. \quad (2.2)$$

Переписывая (2.2) во внутренних переменных $\xi = \varepsilon^{-1}y$, $\rho = |\xi|$, получаем $\psi_0(x) = K_0 \varepsilon \xi_2 + O(\varepsilon^2 \rho^2)$, $\varepsilon \rho \rightarrow 0$. Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений, собственную функцию возмущенной задачи в окрестности точки $y = 0$ будем искать в виде

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \varepsilon v_1(\xi), \quad (2.3)$$

$$v_1(\xi) = K_0 \xi_2 + o(\rho), \quad \xi_2 > 0, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Переписывая оператор Лапласа в переменных y и разлагая полученные коэффициенты в ряд при $y \rightarrow 0$, выводим

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_y + \sum_{i=-1}^1 L_i^y + y_2^3 H_1(y_2) \frac{\partial}{\partial y_2} + y_2^4 H_2(y_2) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, \\ L_i^y &= -y_2^{i+1} \frac{\partial}{\partial y_2} + (i+3) y_2^{i+2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $H_1, H_2 \in C^\infty[0, \infty)$. Следовательно, во внутренних переменных (2.5) имеет вид

$$\Delta = \varepsilon^{-2} \Delta_\xi + \sum_{i=-1}^1 \varepsilon^i L_i^\xi + \varepsilon^2 \xi_2^3 H_1(\varepsilon \xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \varepsilon^2 \xi_2^4 H_2(\varepsilon \xi_2) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}. \quad (2.6)$$

Пусть $\beta_1 := \{\xi: \xi_1 \notin [-1, 1], \xi_2 = 0\}$, $\beta_2 := \{\xi: \xi_1 \in (-1, 1), \xi_2 = 0\}$. Подставляя (2.3), (2.4), (2.6) в (1.5) и выписывая члены при минимальной степени ε (т.е. при ε^{-1}), получаем краевую задачу на v_1 :

$$\Delta_\xi v_1 = 0, \quad \xi_2 > 0, \quad v_1 = 0, \quad \xi \in \beta_1, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \beta_2. \quad (2.7)$$

В [3] было показано, что функция

$$X(\xi) = \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - 1}, \quad z = \xi_1 + i\xi_2, \quad (2.8)$$

является решением краевой задачи (2.7) и имеет асимптотику

$$X(\xi) = \xi_2 + \frac{\xi_2}{2\rho^2} + \frac{\xi_2^3 - 3\xi_1^2\xi_2}{4\rho^6} + O(\rho^{-5}) \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty.$$

Следовательно, функция

$$v_1 = K_0 X \quad (2.9)$$

является решением краевой задачи (2.7) и имеет требуемую асимптотику (2.4):

$$v_1(\xi) = V_1(\xi) + O(\rho^{-5}), \quad V_1(\xi) = K_0 \left(\xi_2 + \frac{\xi_2}{2\rho^2} + \frac{\xi_2^3 - 3\xi_1^2\xi_2}{4\rho^6} \right), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Переписывая εv_1 в переменных y , получим

$$\varepsilon v_1(\xi) = K_0 \left(y_2 + \varepsilon^2 \frac{y_2}{2\tau^2} + \varepsilon^4 \frac{y_2^3 - 3y_1^2 y_2}{4\tau^6} \right) + O(\varepsilon^6 \tau^{-5}).$$

Отсюда и из (2.3) следует, что собственную функцию возмущенной задачи вне окрестности точки $y = 0$ нужно искать в виде

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \psi_0(x) + \varepsilon^2 \psi_2(x), \quad (2.11)$$

$$\psi_2(x) = K_0 \frac{y_2}{2\tau^2} + o(\tau^{-1}), \quad \tau \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

В соответствии со структурой асимптотики собственной функции (2.11) собственное значение возмущенной задачи (1.5) естественно искать в виде

$$\lambda_\varepsilon \approx \hat{\lambda}_\varepsilon := \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2. \quad (2.13)$$

Подставляя (2.11), (2.13) в (1.5), учитывая (2.12) и выписывая равенства для членов при одинаковых степенях ε , получим при ε^0 предельную краевую задачу (1.3), а при ε^2 — краевую задачу:

$$-\Delta \psi_2 = \lambda_0 \psi_2 + \lambda_2 \psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \psi_2 = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \{(1, 0)\}. \quad (2.14)$$

В следующем разделе будет доказана

Теорема 3. Пусть λ_0 — минимальное собственное значение предельной краевой задачи (1.3). Тогда существует функция $U \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{1, 0\})$, являющаяся решением краевой задачи

$$-\Delta U = \lambda_0 U + \Lambda_2 \psi_0, \quad x \in \Omega; \quad U = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \{(1, 0)\} \quad (2.15)$$

при $\Lambda_2 = -K_0 \pi$ и имеющая дифференцируемую асимптотику при $\tau \rightarrow 0$ следующей структуры:

$$U(x) = \hat{u}(y) + A_2 Y_2(y) + s(y), \quad s(y) = O(\tau^3 \ln \tau), \quad (2.16)$$

$$\hat{u}(y) = \sum_{i=-1}^2 u_i(y),$$

$$u_{-1} = \tau^{-2} Y_1, \quad u_0 = \frac{1}{2} y_2^2 \frac{\partial}{\partial y_2} u_{-1}, \quad (2.17)$$

$$u_1 = -\frac{\lambda_0}{2} Y_1 \ln \tau + \frac{1}{8} y_2^4 \frac{\partial^2 u_{-1}}{\partial y_2^2} + \frac{1}{3} y_2^3 \frac{\partial u_{-1}}{\partial y_2}, \quad (2.18)$$

$$u_2 = \frac{\lambda_0}{4} (\tau^2 - X_2 - \theta Y_2) + \frac{1}{2} y_2^2 \frac{\partial}{\partial y_2} \left(-\frac{\lambda_0}{2} Y_1 \ln \tau \right) + \frac{1}{48} y_2^6 \frac{\partial^3 u_{-1}}{\partial y_2^3} + \frac{1}{6} y_2^5 \frac{\partial^2 u_{-1}}{\partial y_2^2} + \frac{1}{4} y_2^4 \frac{\partial u_{-1}}{\partial y_2}, \quad (2.19)$$

где $Y_k(y) = \tau^k \sin k\theta$, $X_k(y) = \tau^k \cos k\theta$, A_2 — некоторая постоянная.

Из теоремы 3 следует, что функция

$$\psi_2 = \frac{K_0}{2}U \quad (2.20)$$

имеет асимптотику (2.12) и является решением краевой задачи (2.14) при $\lambda_2 = K_0/2 \cdot \Lambda_2$. С учетом последнего равенства в (2.2) имеем $\lambda_2 = -\lambda_0$. Поэтому в силу (2.13) получаем

$$\widehat{\lambda}_\varepsilon = \lambda_0 - \varepsilon^2 \lambda_0. \quad (2.21)$$

3. Доказательство теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 понадобится несколько вспомогательных утверждений. Обозначим через $Z_k(y)$ гармонический полином степени k . Следующие две леммы были доказаны в [6].

Лемма 1 [6]. Для любого целого $k \geq 1$ и $\forall \alpha$ такого, что $(\alpha+2)(\alpha+n+2k) \neq 0$, уравнение $\Delta_y U = \tau^\alpha Z_k$ имеет решение $U = a\tau^{\alpha+2} Z_k$, где $a = ((\alpha+2)(\alpha+n+2k))^{-1}$.

Лемма 2 [6]. Для любого целого $k \geq 1$ и $\forall \alpha$ такого, что $(\alpha+2)(\alpha+n+2k) = 0$, уравнение $\Delta_y U = \tau^\alpha Z_k$ имеет решение $U = b\tau^{\alpha+2} Z_k \ln \tau$, $b = (2\alpha+2+n+2k)^{-1}$.

Лемма 3. Пусть $h_1(t)$ — гармоническая функция. Тогда функции

$$\begin{aligned} h_2(h_1, t) &= \frac{1}{2}t_2^2 \frac{\partial h_1(t)}{\partial t_2}, \quad h_3(h_1, t) = \left(\frac{1}{8}t_2^4 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + \frac{1}{3}t_2^3 \frac{\partial}{\partial t_2} \right) h_1(t), \\ h_4(h_1, t) &= \left(\frac{1}{48}t_2^6 \frac{\partial^3}{\partial t_2^3} + \frac{1}{6}t_2^5 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + \frac{1}{4}t_2^4 \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\lambda_0}{12}t_2^3 \right) h_1(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

удовлетворяют уравнениям $\Delta_t h_i = F_i$, где

$$\begin{aligned} F_2(h_1) &= -L_{-1}^t h_1, \quad F_3(h_1, h_2) = -L_{-1}^t h_2 - L_0^t h_1, \\ F_4(h_1, h_2, h_3) &= -L_{-1}^t h_3 - L_0^t h_2 - L_1^t h_1 - \lambda_0 h_2 - \frac{\lambda_0}{2}t_2 h_1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доказательство. Так как h_1 — гармоническая функция, то, во-первых, для любых натуральных m и k справедливо равенство

$$\Delta_t \left(\frac{1}{2(m+1)} t_2^{m+1} \frac{\partial^{k-1} h_1(t)}{\partial t_2^{k-1}} \right) = t_2^m \frac{\partial^k h_1(t)}{\partial t_2^k} + \frac{m}{2} t_2^{m-1} \frac{\partial^{k-1} h_1(t)}{\partial t_2^{k-1}}, \quad (3.3)$$

а во-вторых,

$$\frac{\partial h_1}{\partial t_1} = -\frac{\partial h_1}{\partial t_2}. \quad (3.4)$$

Из последнего равенства следует, что

$$F_2(h_1) = \left(\frac{\partial}{\partial t_2} + 2t_2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \right) h_1.$$

Поэтому в силу (3.3) получаем справедливость представления для h_2 .

В свою очередь, из вида h_2 и равенства (3.4) вытекает, что F_3 преобразуется к виду

$$F_3(h_1, h_2) = \left(t_2^3 \frac{\partial^3}{\partial t_2^3} + \frac{7}{2}t_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + 2t_2 \frac{\partial}{\partial t_2} \right) h_1.$$

Из последнего равенства и (3.3) выводим справедливость представления для h_3 . Аналогично получаем, что

$$F_4(h_1, h_2, h_3) = \left(\frac{1}{4} t_2^5 \frac{\partial^4}{\partial t_2^4} + \frac{55}{24} t_2^4 \frac{\partial^3}{\partial t_2^3} + \frac{16}{3} t_2^3 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + \frac{6 - \lambda_0}{2} t_2^2 \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\lambda_0}{2} t_2 \right) h_1.$$

Отсюда и из (3.3) следует представление для h_4 . Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть функция \hat{u} определяется равенствами (2.16)–(2.19). Тогда для любого λ_0 существует функция \hat{U} такая, что

$$\hat{U}(y) = \hat{u}(y) + \hat{S}(y),$$

$$\hat{S}(y) = \sum_{i=0}^1 B_i \tau^{-2i+2} Y_{2i+1}(y) \ln \tau + \sum_{i=0}^6 C_i \tau^{-2i+2} Y_{2i+1}(y), \quad (3.5)$$

где B_i, C_i – некоторые постоянные, и справедливы равенства

$$-\Delta \hat{U} = \lambda_0 \hat{U} + w, \quad \hat{U} = 0, \quad y_2 = 0, \quad y \neq 0, \quad (3.6)$$

где $w \in C^1(\bar{\Omega})$, $w(y) = O(\tau^2 \ln \tau)$ при $\tau \rightarrow 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $Y_i(y_1, 0) = 0$, $X_2(y_1, 0) = y_1^2$, то $\hat{U} = 0$ при $y_2 = 0$, $y \neq 0$ в силу (2.17)–(2.19) и (3.5).

Из (2.5) вытекает, что для выполнения первого равенства в (3.6) достаточно, чтобы имели место следующие равенства:

$$\Delta_y u_{-1} = 0, \quad \Delta_y u_0 = F_2(u_{-1}), \quad \Delta_y u_1 = F_3(u_{-1}, u_0) - \lambda_0 u_{-1}, \quad (3.7)$$

$$\Delta_y u_2 = F_4(u_{-1}, u_0, u_1) + \frac{\lambda_0}{2} y_2 u_{-1}, \quad \Delta_y \hat{S} = - \sum_{i=-1}^2 L_i^y u_{1-i} - \lambda_0 u_1, \quad (3.8)$$

где F_i определены в условии леммы 3.

Очевидно, что u_{-1} из (2.17) удовлетворяет первому уравнению из (3.7). Поэтому функция $u_0(y) = h_2(u_{-1}, y)$, во-первых, удовлетворяет второму уравнению из (3.7) в силу леммы 3, а во-вторых, имеет вид из (2.17).

Из леммы 2 выводим, что

$$\Delta_y \left(- \frac{\lambda_0}{2} Y_1 \ln \tau \right) = -\lambda_0 u_{-1}. \quad (3.9)$$

Отсюда и из леммы 3 получаем, что функция

$$u_1(y) = h_3(u_{-1}, y) - \frac{\lambda_0}{2} Y_1(y) \ln \tau \quad (3.10)$$

является решением третьего уравнения из (3.7). В свою очередь, из определения h_3 следует справедливость представления (2.18) для u_1 .

Из определений (2.5), (3.2) оператора L_1^y и F_4 , а также равенств $u_0(y) = h_2(u_{-1}, y)$, (3.9) и (3.10) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_y u_2 &= F_4(u_{-1}, h_2(u_{-1}, y), h_3(u_{-1}, y)) + \frac{\lambda_0}{2} y_2 u_{-1} - L_{-1}^y \left(- \frac{\lambda_0}{2} Y_1 \ln \tau \right) \\ &= F_4(u_{-1}, h_2, h_3) + \frac{5\lambda_0}{2} y_2 u_{-1} + \left(\frac{\partial}{\partial y_2} + 2y_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(- \frac{\lambda_0}{2} Y_1 \ln \tau \right). \end{aligned}$$

Поэтому, если функции $u_2^{(1)}$, $u_2^{(2)}$, $u_2^{(3)}$ — решения уравнений

$$\Delta_y u_2^{(1)} = \left(\frac{\partial}{\partial y_2} + 2y_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(-\frac{\lambda_0}{2} Y_1 \ln \tau \right) + \frac{\lambda_0}{2} y_2 u_{-1}, \quad (3.11)$$

$$\Delta_y u_2^{(2)} = F_4(u_{-1}, h_2, h_3), \quad (3.12)$$

$$\Delta_y u_2^{(3)} = 2\lambda_0 y_2 u_{-1}, \quad (3.13)$$

то функция $u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + u_2^{(3)}$ будет являться решением первого уравнения из (3.8).

С учетом (3.3), (3.9) легко видеть, что функция

$$u_2^{(1)} = \frac{1}{2} y_2^2 \frac{\partial}{\partial y_2} \left(-\frac{\lambda_0}{2} Y_1 \ln \tau \right) + \frac{\lambda_0}{12} y_2^3 u_{-1} \quad (3.14)$$

есть решение (3.11). Из леммы 3 следует, что функция

$$u_2^{(2)}(y) = h_4(u_{-1}, y) \quad (3.15)$$

является решением уравнения (3.12). Так как X_2 и $(X_2 \ln \tau - \theta Y_2) = \operatorname{Re}(z^2 \ln z)$ — гармонические функции, то из лемм 1, 2 вытекает, что

$$u_2^{(3)} = \frac{\lambda_0}{4} \left((\tau^2 - X_2 \ln \tau) - X_2 + (X_2 \ln \tau - \theta Y_2) \right) \quad (3.16)$$

является решением (3.13).

В результате имеем, что функция $u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + u_2^{(3)}$ — решение первого уравнения из (3.8) в силу (3.11)–(3.13); она имеет вид (2.19) согласно (3.1), (3.14)–(3.16).

Подставляя (2.5) и (2.17)–(2.19) в правую часть второго уравнения из (3.8), получаем, что оно имеет вид

$$\Delta_y \widehat{S} = \sum_{i=0}^1 \widehat{B}_i \tau^{-2i} Y_{2i+1}(y) \ln \tau + \sum_{i=0}^6 \widehat{C}_i \tau^{-2i} Y_{2i+1}(y).$$

Отсюда и из лемм 1, 2 вытекает справедливость (3.5). Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Пусть $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, тождественно равная единице при $t < 1$ и нулю при $t > 2$. Будем искать решение задачи (2.15) в виде

$$U(x) = \chi(\tau R^{-1}) \widehat{U}(y) + \tilde{u}(y), \quad (3.17)$$

где \widehat{U} удовлетворяет утверждению леммы 4, \tilde{u} — некоторая достаточно гладкая функция, а u_i определяются из (2.19). Тогда для \tilde{u} получаем краевую задачу

$$-(\Delta + \lambda_0) \tilde{u} = \Lambda_2 \psi_0 + G, \quad x \in \Omega, \quad \tilde{u} = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (3.18)$$

$$G(x) = \widehat{U}(y) \Delta \chi(\tau R^{-1}) + 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \chi(\tau R^{-1})}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \widehat{U}(y) + \chi(\tau R^{-1}) (\Delta + \lambda_0) \widehat{U}(y). \quad (3.19)$$

Из леммы 4 следует, что $G \in C^1(\Omega)$. Так как λ_0 — простое собственное значение предельной задачи, то равенство $(G + \Lambda_2 \psi_0, \psi_0)_{L_2(\Omega)} = 0$ является необходимым и достаточным условием разрешимости краевой задачи (3.18). При этом решение задачи (3.18), во-первых, представимо в виде

$$\tilde{u} = u + \alpha \psi_0, \quad (3.20)$$

где u — некоторое фиксированное решение задачи (3.18), а α — произвольная постоянная, и, во-вторых, $u, \tilde{u} \in C^3(\Omega)$ в силу теорем повышения гладкости (см., например, [2, гл. IV]).

Следовательно, при $\Lambda_2 = -(G, \psi_0)_{L_2(\Omega)}$ существуют решения краевой задачи (2.15), а в силу (3.17) и (3.20) в окрестности $y = 0$ они могут быть определены как

$$U = \widehat{U} + u + \alpha\psi_0. \quad (3.21)$$

Так как $U(x(y)) = \widehat{U}(y) = \psi_0(x(y)) = 0$ при $y_2 = 0$, то и $u(y) = 0$ при $y_2 = 0$. Поэтому α можно выбрать так, что разложение u в ряд Тейлора представимо в виде дифференцируемого равенства

$$\tilde{u} = P_2(y) + O(\tau^3), \quad \tau \rightarrow 0, \quad (3.22)$$

где $P_2(y)$ — полином 2-й степени, причем $P_2(y) = 0$ при $y_2 = 0$. Далее в силу (3.22), (2.5), (3.18), (3.6) и (3.19) последовательно получаем $(\Delta + \lambda_0)P_2(y) = (\Delta + \lambda_0)\tilde{u} + O(\tau) = G + O(\tau) = O(\tau)$.

С другой стороны, непосредственно из (2.5) выводим: $(\Delta + \lambda_0)P_2(y) = \Delta_y P_2(y) + O(\tau)$, а $\Delta_y P_2(y) = O(1)$. Из последних двух равенств следует, что $P_2(y)$ — гармонический полином. То есть $P_2(y) = A_2 Y_2$, где A_2 — постоянная. В силу этого представления, (3.21) и (3.22) очевидно, что $U(x)$ в окрестности $x = (1, 0)$ имеет асимптотику (2.16).

Перейдем теперь к вычислению Λ_2 . Пусть $\mu > 0$ — малый параметр, σ_μ — прообраз круга радиуса μ с центром в точке $y = 0$ в координатах x , $\Omega_\mu = \Omega/\sigma_\mu$, $\omega_\mu = \partial\Omega_\mu \cap \partial\sigma_\mu$. Домножив обе части уравнения из (2.15) на ψ_0 и проинтегрировав по Ω_μ по частям два раза в силу (1.3) и краевого условия для U , получим

$$-\int_{\omega_\mu} \psi_0 \frac{\partial U}{\partial r} ds + \int_{\omega_\mu} U \frac{\partial \psi_0}{\partial r} ds = \Lambda_2 \int_{\Omega_\mu} \psi_0^2 dx = \Lambda_2 + o(1), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (3.23)$$

Учитывая асимптотики (2.2), (2.16) и то, что

$$\frac{\partial}{\partial r} = (-1 + o(1)) \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad ds = \tau(1 + O(\tau)) d\theta \quad \text{при } \tau \rightarrow 0,$$

определяем, что

$$\int_{\omega_\mu} \psi_0 \frac{\partial U}{\partial r} ds = \frac{\pi}{2} K_0 + o(1), \quad \int_{\omega_\mu} U \frac{\partial \psi_0}{\partial r} ds = -\frac{\pi}{2} K_0 + o(1), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (3.24)$$

Подставляя (3.24) в (3.23), переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$, устанавливаем, что $\Lambda_2 = -K_0\pi$. Теорема 3 доказана.

Аналогично доказывается справедливость следующего утверждения.

Лемма 5. *Существует функция $U_1 \in C^\infty(\overline{\Omega}) \setminus \{(1, 0)\}$, являющаяся решением краевой задачи*

$$\Delta U_1 = 0, \quad x \in \Omega; \quad U_1 = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \{(1, 0)\},$$

имеющая дифференцируемую асимптотику

$$U_1 = \tau^{-6} Y_3 + O(\tau^{-1}), \quad \tau \rightarrow 0.$$

4. Доказательство теоремы 2

Для строгого обоснования асимптотики (1.8) нам потребуется использовать более полное, чем (2.2), разложение функции $\psi_0(x)$:

$$\psi_0(x) = K_0 \left(y_2 + \sum_{i=2}^5 K_i y_2^i \right) + O(\tau^6), \quad \tau \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

где

$$K_2 = \frac{1}{2}, \quad K_3 = \frac{1}{6}(-\lambda_0 + 2), \quad K_4 = \frac{1}{12}(-\lambda_0 + 3), \quad K_5 = \frac{1}{120}(\lambda_0^2 - 8\lambda_0 + 24).$$

Это представление вытекает из разложения функции $\mathcal{J}_0(\sqrt{\lambda_0}r)$ в ряд Тейлора при $r \rightarrow 1$ и из уравнения на эту функцию.

Собственную функцию ψ_ε будем искать в виде

$$\psi_\varepsilon \approx \widehat{\psi}_\varepsilon(x) := \psi_0(x) + \varepsilon^2 \psi_2(x) + \varepsilon^4 \psi_4(x), \quad (4.2)$$

где

$$\psi_4 = \frac{K_0}{4} U_1, \quad (4.3)$$

а $U_1(x)$ — из формулировки леммы 5.

Обозначим

$$\widehat{V}_\varepsilon(\xi) = \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i V_i(\xi) + \sum_{i=3}^4 \varepsilon^i \ln \varepsilon V_{i,1}(\xi), \quad (4.4)$$

где V_1 было определено в (2.10), а

$$\begin{aligned} V_2(\xi) &= K_0 K_2 \left(\xi_2^2 + \frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} u_{-1}(\xi) \right), \\ V_3(\xi) &= K_0 \left(K_3 \xi_2^3 + \frac{1}{2} \left(-\frac{\lambda_0}{2} Y_1 \ln \rho + \frac{1}{8} \xi_2^4 \frac{\partial^2 u_{-1}(\xi)}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{3} \xi_2^3 \frac{\partial u_{-1}(\xi)}{\partial \xi_2} \right) \right), \\ V_4(\xi) &= K_0 \left(K_4 \xi_2^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_0}{4} (\rho^2 - X_2 - \theta Y_2) + \frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(-\frac{\lambda_0}{2} Y_1 \ln \rho \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{48} \xi_2^6 \frac{\partial^3 u_{-1}(\xi)}{\partial \xi_2^3} + \frac{1}{6} \xi_2^5 \frac{\partial^2 u_{-1}(\xi)}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{4} \xi_2^4 \frac{\partial u_{-1}(\xi)}{\partial \xi_2} + A_2 Y_2 \right) \right), \\ V_{3,1}(\xi) &= -\frac{K_0 \lambda_0}{4} \xi_2, \quad V_{4,1}(\xi) = -\frac{K_0 \lambda_0}{8} \xi_2^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Перепишывая асимптотику $\widehat{\psi}_\varepsilon(x)$ при $\tau \rightarrow 0$ в переменных ξ , в силу (4.2), (2.20), (2.16)–(2.19), (4.1), (4.3) получаем, что

$$\widehat{\psi}_\varepsilon(x) = \widehat{V}_\varepsilon(\xi) + O(\tau^5 + \varepsilon^2 \tau^3 \ln \tau + \varepsilon^4 \tau^{-2}). \quad (4.6)$$

Далее, следуя методу согласования, выводим, что более полное, чем (2.4), внутреннее разложение собственной функции следует искать в виде

$$\psi_\varepsilon(\xi) \approx \widetilde{v}(\xi) := \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i v_i(\xi) + \sum_{i=3}^4 \varepsilon^i \ln \varepsilon v_{i,1}(\xi), \quad (4.7)$$

где

$$v_1 = V_1 + O(\rho^{-6}), \quad v_i(\xi) = V_i(\xi) + O(\rho^{i-4}), \quad i \geq 2, \quad v_{j,1}(\xi) = V_{j,1}(\xi) + O(\rho^{j-4}), \quad \rho \rightarrow \infty; \quad (4.8)$$

здесь V_1 определена в (2.10), а V_i ($i > 1$) и $V_{j,1}$ — в (4.5). Подставляя (2.6), (2.13), (4.7) в (1.5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем при ε^{-1} краевую задачу (2.7) для v_1 , а при остальных степенях ε — краевые задачи:

$$\varepsilon^{i-1} : \quad -\Delta_\xi v_{i+1} = \sum_{j=0}^{i-1} L_{-1+j}^\xi v_{i-j} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-2}{2} \rfloor} \lambda_{2j} v_{i-1-2j}, \quad i = \overline{0, 3}, \quad \xi_2 > 0, \quad (4.9)$$

$$\varepsilon^{i+1} : \quad -\Delta_\xi v_{i+3,1} = \sum_{j=0}^{i-1} L_{-1+j}^\xi v_{i-1-j,1}, \quad i = \overline{0, 1}, \quad \xi_2 > 0, \quad (4.10)$$

$$v_{i,1} = v_i = 0, \quad \xi \in \beta_1, \quad \varepsilon^{j-1}: \quad \frac{\partial v_{j,1}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial v_j}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \beta_2, \quad (4.11)$$

где $v_i, v_{i,1}$ имеют асимптотики (4.8) на бесконечности.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что в случае выполнения (4.9), (4.10), (4.11) справедливы равенства

$$\begin{aligned} (\Delta + \widehat{\lambda}_\varepsilon)\tilde{v} &= W(\tilde{v}) + \varepsilon^6 \lambda_2 v_4 + \varepsilon^4 \lambda_0 v_4, \\ W(\tilde{v}_\varepsilon) &= \left(\varepsilon^2 \xi_2^3 H_1(\varepsilon \xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \varepsilon^2 \xi_2^4 H_2(\varepsilon \xi_2) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) \tilde{v}_\varepsilon + \varepsilon^3 \lambda_0 v_3 + \lambda_2 \sum_{i=3}^5 \varepsilon^i v_{i-2} \\ &\quad + \ln \varepsilon \sum_{i=3}^4 \varepsilon^i (\lambda_0 v_{i,1} + \varepsilon^2 \lambda_2 v_{i,1}), \\ \tilde{v}_\varepsilon &= 0, \quad \xi \in \beta_1, \quad \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \beta_2. \end{aligned}$$

Лемма 6. *Существуют решения v_1, v_2 и $v_{3,1}, v_{4,1}$ краевых задач (4.9), (4.11) и (4.10), (4.11) соответственно, имеющие на бесконечности асимптотику (4.8).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция v_1 из (2.9) является решением краевой задачи (4.9), (4.11) и имеет требуемую асимптотику (4.8). В свою очередь, из (2.9), (2.10) и леммы 3 следует, что и функции

$$v_2 = \frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} v_1, \quad v_{3,1} = -\frac{K_0 \lambda_0}{4} X, \quad v_{4,1} = \frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} v_{3,1}, \quad (4.12)$$

где $X(\xi)$ определяется из (2.8), являются решениями краевых задач (4.9), (4.10), (4.11). В силу явного представления (4.12), (2.9) и (2.10) функции $v_2, v_{3,1}, v_{4,1}$ имеют требуемые асимптотики (4.8). Лемма доказана.

Лемма 7. *Существует решение v_3 краевой задачи (4.9), (4.11) (при $i = 2$), имеющее на бесконечности асимптотику (4.8).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В обозначениях леммы 3 уравнение (4.9) на v_3 можно представить как

$$\Delta_\xi v_3 = F_3(v_1, v_2) - \lambda_0 v_1. \quad (4.13)$$

Рассмотрим следующие вспомогательные задачи:

$$\Delta_\xi v_3^{(1)} = X, \quad \xi_2 > 0, \quad v_3^{(1)} = 0, \quad \xi \in \beta_1, \quad \frac{\partial v_3^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \beta_2, \quad (4.14)$$

$$\Delta_\xi v_3^{(2)} = F_3(v_1, v_2), \quad v_3^{(2)} = 0, \quad \xi \in \beta_1, \quad \frac{\partial v_3^{(2)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \beta_2. \quad (4.15)$$

В [7] было показано, что функция

$$v_3^{(1)}(\xi) = \frac{1}{4} \operatorname{Im} \left(\bar{z} \int_1^z \sqrt{w^2 - 1} dw \right) + \frac{1}{8} \operatorname{Im} \left(z \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right),$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$, является решением краевой задачи (4.14) и имеет асимптотику

$$v_3^{(1)}(\xi) = \frac{1}{8} \left(\rho^2 Y_1 + 2Y_1 \ln \rho + \frac{1}{3} Y_1 \right) + O(\rho^{-1}), \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

В силу леммы 3 функция

$$v_3^{(2)} = \left(\frac{1}{8} \xi_2^4 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{3} \xi_2^3 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) v_1$$

является решением краевой задачи (4.15) и при $\rho \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$v_3^{(2)}(\xi) = K_0 \left(-\frac{1}{12} Y_3 + \frac{1}{4} \rho^2 Y_1 \right) + O(\rho^1). \quad (4.17)$$

В [3] было показано, что гармоническая при $\xi_2 > 0$ функция $Y(\xi) = \text{Im}(z^2 \sqrt{z^2 - 1})$ удовлетворяет граничным условиям (4.11) и имеет при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотику

$$Y(\xi) = Y_3(\xi) + \frac{1}{2} Y_1(\xi) + O(\rho^{-1}). \quad (4.18)$$

В силу (4.13)–(4.18) функция

$$v_3 = -\lambda_0 K_0 v_3^{(1)} + v_3^{(2)} + \frac{\lambda_0 K_0}{24} \left(Y + \frac{1}{2} X \right) \quad (4.19)$$

является решением краевой задачи (4.9), (4.11) и имеет требуемую асимптотику (4.8). Лемма доказана.

Лемма 8. *Существует функция v_4^* , имеющая при $\rho \rightarrow \infty$ асимптотику $v_4^* = V_4 + O(\rho)$ и являющаяся решением краевой задачи*

$$\begin{aligned} -\Delta_\xi v_4^* &= \sum_{j=0}^2 L_{j-1}^\xi v_{3-j} + \lambda_0 v_2 + Q, \\ v_4^* &= 0, \quad \xi \in \beta_1, \quad \frac{\partial v_4^*}{\partial \xi_2} = P, \quad \xi \in \beta_2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где

$$Q = 2\lambda_0 \xi_2 v_1 - 2\lambda_0 K_0 (\xi_2^2 + \xi_2^2 \tau^{-2}), \quad P = \frac{1}{2} \lambda_0 K_0 \ln |\xi_1| + K_0 A_2 \xi_1. \quad (4.21)$$

З а м е ч а н и е 2. Прежде чем переходить к доказательству, отметим, что для функции

$$\widehat{v}_\varepsilon = \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i v_i + \sum_{i=3}^4 \varepsilon^i \ln \varepsilon v_{i,1} + \varepsilon^4 v_4^* \quad (4.22)$$

в силу этой леммы и замечания 1 справедливы равенства $(\Delta + \widehat{\lambda}_\varepsilon) \widehat{v}_\varepsilon = W(\widehat{v}_\varepsilon) + \varepsilon^6 \lambda_2 v_4^* + \varepsilon^4 \lambda_0 v_4^* - \varepsilon^4 Q$, $\widehat{v}_\varepsilon = 0$, $\xi \in \beta_1$, $\partial \widehat{v}_\varepsilon / \partial \xi_2 = \varepsilon^4 P$, $\xi \in \beta_2$.

Кроме этого, из (4.22), (4.4), лемм 6, 7, 8 следует, что при $\rho \rightarrow 0$

$$(\widehat{v}_\varepsilon - \widehat{V}_\varepsilon) = O\left(\varepsilon \rho^{-5} + \varepsilon^2 \rho^{-2} + \varepsilon^3 \rho^{-1} + \varepsilon^4 \rho + \varepsilon^3 \ln \varepsilon \rho^{-3} + \varepsilon^4 \ln \varepsilon \rho^{-2}\right). \quad (4.23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с обозначениями леммы 3 из (4.12), (4.19) уравнение (4.20) имеет вид

$$\Delta_\xi v_4^* = F_4(v_1, v_2, v_3^{(2)}) + \frac{\lambda_0}{2} \xi_2 v_1 + F_2(M) - L_{-1}^\xi(N) + 2\lambda_0 \xi_2 \left(K_0 \xi_2 + \frac{K_0}{2} u_{-1} - v_1 \right), \quad (4.24)$$

где $M(\xi) = \frac{\lambda_0 K_0}{24} \left(-3 \text{Im}(z \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})) + Y(\xi) + \frac{1}{2} X(\xi) \right)$ — гармоническая функция; $N(\xi) = -\frac{\lambda_0 K_0}{4} \text{Im} \bar{z} \int_1^z \sqrt{w^2 - 1} dw$.

Так как

$$\Delta_\xi N = -\lambda_0 v_1, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} = \Delta_\xi - \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}, \quad (4.25)$$

то в силу определения оператора L_{-1}^ξ из (2.5) получаем

$$L_{-1}^\xi(N) = -\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right)N - 2\lambda_0 \xi_2 v_1. \quad (4.26)$$

Рассмотрим следующие краевые задачи:

$$\Delta_\xi v_4^{(1)} = F_4(v_1, v_2, v_3^{(2)}) + F_2(M), \quad v_4^{(1)} = 0, \quad \xi \in \beta_1, \quad \frac{\partial v_4^{(1)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \beta_2; \quad (4.27)$$

$$\Delta_\xi v_4^{(2)} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\right)N + \frac{\lambda_0}{2}\xi_2 v_1, \quad v_4^{(2)} = 0, \quad \xi \in \beta_1, \quad \frac{\partial v_4^{(2)}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \beta_2; \quad (4.28)$$

$$\Delta_\xi v_4^{(3)} = 2\lambda_0 \xi_2 \left(K_0 \xi_2 + \frac{K_0}{2}u_{-1}\right), \quad v_4^{(3)} = 0, \quad \xi \in \beta_1, \quad \frac{\partial v_4^{(3)}}{\partial \xi_2} = P, \quad \xi \in \beta_2. \quad (4.29)$$

Из леммы 4 и гармоничности M выводим, что функция

$$v_4^{(1)}(\xi) = h_4(v_1, \xi) + h_2(M, \xi) \quad (4.30)$$

есть решение уравнения (4.27). Учитывая равенство (3.3) и первое равенство в (4.25), легко проверить, что функция

$$v_4^{(2)} = \frac{1}{2}\xi_2^2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} N + \frac{\lambda_0}{12}\xi_3 v_1 \quad (4.31)$$

является решением (4.28). Из (3.13), первого выражения из (2.17) и леммы 1 устанавливаем, что функция

$$v_4^{(3)} = \frac{K_0}{2}u_2^{(3)} + \frac{K_0}{2}A_2 Y_2 + \frac{\lambda_0 K_0}{16}\rho^4 - \frac{\lambda_0 K_0}{12}\rho^2 X_2 + \frac{\lambda_0 K_0}{48}X_4 \quad (4.32)$$

— решение уравнения из (4.29), а из (4.32), (3.16) вытекает, что $v_4^{(3)}$ удовлетворяет и граничным условиям из (4.29).

Функция $v_4^* = v_4^{(1)} + v_4^{(2)} + v_4^{(3)}$ в силу (4.27)–(4.29), (4.24) и (4.26) является решением краевой задачи (4.20), а из (4.30), (4.31), (4.32) следует, что при $\rho \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$v_4^* = V_4 + O(\rho). \quad (4.33)$$

Лемма доказана.

Пусть $\chi(s)$ — срезающая функция из $C^\infty(\bar{\Omega})$, равная нулю при $s < 1$ и единице при $s > 2$, δ — любое число из интервала $(0, 1)$. Обозначим

$$\widehat{\Psi}_\varepsilon(x) = \chi(\varepsilon^{-\delta}\tau)\widehat{\psi}_\varepsilon(x) + (1 - \chi(\varepsilon^{-\delta}\tau))\widehat{v}_\varepsilon(\varepsilon^{-1}y(x)). \quad (4.34)$$

Из определения следует, что $\widehat{\Psi}_\varepsilon \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega}) \setminus \{x: r = 1, \theta = \pm\varepsilon\}$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|\widehat{\Psi}_\varepsilon - \psi_0\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (4.35)$$

Лемма 9. Функция $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ является решением задачи

$$\begin{aligned} -\Delta \widehat{\Psi}_\varepsilon &= \widehat{\lambda}_\varepsilon \widehat{\Psi}_\varepsilon + f_\varepsilon, \\ \widehat{\Psi}_\varepsilon &= 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \widehat{\Psi}_\varepsilon}{\partial r} = \phi_\varepsilon, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.36)$$

где

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{6-6\delta} + \varepsilon^{4-3\delta} + \varepsilon^{4\delta}), \quad \|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\gamma_\varepsilon)} = O\left(\varepsilon^{\frac{7}{2}}\right). \quad (4.37)$$

Доказательство. В силу определения (4.34) функции $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ получаем $f_\varepsilon = f_{\varepsilon,1} + f_{\varepsilon,2} + f_{\varepsilon,3} + f_{\varepsilon,4}$, где

$$f_{\varepsilon,1} = -\chi(\varepsilon^{-\delta}\tau)(\Delta + \widehat{\lambda}_\varepsilon)\widehat{\psi}_\varepsilon(x), \quad (4.38)$$

$$f_{\varepsilon,2} = -(1 - \chi(\varepsilon^{-\delta}\tau))(\Delta + \widehat{\lambda}_\varepsilon)\widehat{v}_\varepsilon(\varepsilon^{-1}y(x)), \quad (4.39)$$

$$f_{\varepsilon,3} = -\Delta\chi(\varepsilon^{-\delta}\tau)\left(\widehat{\psi}_\varepsilon(x) - \widehat{v}_\varepsilon(\varepsilon^{-1}y(x))\right), \quad (4.40)$$

$$f_{\varepsilon,4} = -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial\chi(\varepsilon^{-\delta}\tau)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\widehat{\psi}_\varepsilon(x) - \widehat{v}_\varepsilon(\varepsilon^{-1}y(x))\right).$$

Согласно уравнениям (1.3), (2.14) на ψ_0 , ψ_2 , определению (4.3) для ψ_4 и лемме 5 из (4.38)

$$f_{\varepsilon,1} = \varepsilon^4\chi(\varepsilon^{-\delta}\tau)(\lambda_2\psi_2 + \widehat{\lambda}_\varepsilon\psi_4). \quad (4.41)$$

Так как при $\tau \rightarrow 0$ функции $\psi_2 = O(\tau^{-1})$ (см. (2.20) и лемму 3), $\psi_4 = O(\tau^{-3})$ (см. (4.3) и лемму 5), то из (4.41) выводим, что

$$\|f_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{4-3\delta}). \quad (4.42)$$

В соответствии с (4.39) и замечанием 2 имеем

$$f_{\varepsilon,2} = (1 - \chi(\varepsilon^{-\delta}\tau))(W(\widehat{v}_\varepsilon) + \varepsilon^6\lambda_2v_4^* + \varepsilon^4\lambda_0v_4^* - \varepsilon^4Q). \quad (4.43)$$

Из (4.21) следует $Q = O(\rho^2)$ при $\rho \rightarrow \infty$. А так как по построению $v_i = O(\rho^i)$, $v_4^* = O(\rho^4)$, $v_{3,1} = O(\rho)$, $v_{4,1} = O(\rho^2)$ (см. (4.8), (4.33)), то из определения W (см. замечание 1) и (4.43) вытекает, что

$$W(\widehat{v}_\varepsilon) + \varepsilon^6\lambda_2v_4^* + \varepsilon^4\lambda_0v_4^* - \varepsilon^4Q = O(\varepsilon^6\rho^6 + \varepsilon^3\rho^3 + \ln\varepsilon(\varepsilon^3\rho + \varepsilon^4\rho^2)) \quad (4.44)$$

при $\rho \rightarrow \infty$. Так как $\text{supp } f_{\varepsilon,2} \subset \overline{\Omega} \cap \{x: \tau \leq 2\varepsilon^\delta\} = \overline{\Omega} \cap \{x: \rho \leq 2\varepsilon^{\delta-1}\}$, то из (4.44) получаем

$$\|f_{\varepsilon,2}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{4-3\delta} + \varepsilon^{4\delta}). \quad (4.45)$$

Из (4.6) и (4.23) выводим

$$\widehat{\psi}_\varepsilon(x) - \widehat{v}_\varepsilon(\varepsilon^{-1}y(x)) = \left(\widehat{\psi}_\varepsilon(x) - \widehat{V}_\varepsilon(\varepsilon^{-1}y(x))\right) - \left(\widehat{v}_\varepsilon(\varepsilon^{-1}y(x)) - \widehat{V}_\varepsilon(\varepsilon^{-1}y(x))\right)$$

$$= O(\tau^5 + \varepsilon^2\tau^3 \ln \tau + \varepsilon^4\tau^{-2}) + O(\varepsilon\rho^{-5} + \varepsilon^2\rho^{-2} + \varepsilon^3\rho^{-1} + \varepsilon^4\rho + \varepsilon^3 \ln \varepsilon\rho^{-3} + \varepsilon^4 \ln \varepsilon\rho^{-2})$$

при $\tau \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow \infty$. Так как $\text{supp } f_{\varepsilon,3} \subset \overline{\Omega} \cap \{x: \varepsilon^\delta \leq \tau \leq 2\varepsilon^\delta\} = \overline{\Omega} \cap \{\xi: \varepsilon^{\delta-1} \leq \rho \leq 2\varepsilon^{\delta-1}\}$, $\Delta\chi(\varepsilon^{-\delta}\tau) = O(\varepsilon^{-2\delta})$, то отсюда и из (4.40) следует, что

$$\|f_{\varepsilon,3}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{6-6\delta} + \varepsilon^{4-3\delta} + \varepsilon^{4\delta}). \quad (4.46)$$

Аналогично с учетом равенства $\partial/\partial x_i \chi(\varepsilon^{-\delta}\tau) = O(\varepsilon^{-\delta})$ получаем, что

$$\|f_{\varepsilon,4}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{6-6\delta} + \varepsilon^{4-3\delta} + \varepsilon^{4\delta}). \quad (4.47)$$

Из (4.42), (4.45)–(4.47) следует равенство (4.37) для f_ε .

В силу определения (4.34) и замечания 2 функция $\widehat{\Psi}_\varepsilon(x)$ удовлетворяет нулевому граничному условию на Γ_ε и граничному условию $\partial\widehat{\Psi}_\varepsilon(x)/\partial r = \varepsilon^3P$ на γ_ε . Согласно определению (4.21) функции $P(\xi)$ отсюда вытекает равенство (4.37) для ϕ_ε . Лемма 9 доказана.

Интегральные тождества для краевой задачи (1.5) с пробной функцией $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ и для краевой задачи (4.36) с пробной функцией ψ_ε имеют, соответственно, следующий вид:

$$\int_{\Omega} \nabla\psi_\varepsilon \nabla\widehat{\Psi}_\varepsilon dx = \lambda_\varepsilon \int_{\Omega} \psi_\varepsilon \widehat{\Psi}_\varepsilon dx,$$

$$\int_{\Omega} \nabla \widehat{\Psi}_{\varepsilon} \nabla \psi_{\varepsilon} dx - \int_{\gamma_{\varepsilon}} \phi_{\varepsilon} \psi_{\varepsilon} ds = \widehat{\lambda}_{\varepsilon} \int_{\Omega} \widehat{\Psi}_{\varepsilon} \psi_{\varepsilon} dx + \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \psi_{\varepsilon} dx.$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем, что

$$(\widehat{\lambda}_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon}) \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} \widehat{\Psi}_{\varepsilon} dx = \int_{\gamma_{\varepsilon}} \phi_{\varepsilon} \psi_{\varepsilon} ds + \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \psi_{\varepsilon} dx.$$

Отсюда в силу неравенства Коши — Буняковского выводим

$$|\lambda_{\varepsilon} - \widehat{\lambda}_{\varepsilon}| \leq \frac{\int_{\gamma_{\varepsilon}} \phi_{\varepsilon} \psi_{\varepsilon} ds + \int_{\Omega} f_{\varepsilon} \psi_{\varepsilon} dx}{\left| \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} \widehat{\Psi}_{\varepsilon} dx \right|} \leq \frac{\|f_{\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} + \|\phi_{\varepsilon}\|_{L_2(\gamma_{\varepsilon})}}{\left| \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} \widehat{\Psi}_{\varepsilon} dx \right|}. \quad (4.48)$$

В [4] была доказана сходимости $\psi_{\varepsilon} \rightarrow \psi_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$. Исходя из определения (4.34) функции $\widehat{\Psi}_{\varepsilon}$ существует $\alpha > 0$ такое, что $\int_{\Omega} \widehat{\Psi}_{\varepsilon} \psi_0 dx > \alpha$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $\int_{\Omega} \widehat{\Psi}_{\varepsilon} \psi_{\varepsilon} dx \geq \alpha$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда и из (4.48) и (4.37) имеем равенство

$$|\lambda_{\varepsilon} - \widehat{\lambda}_{\varepsilon}| = O(\varepsilon^{6-6\delta} + \varepsilon^{4-3\delta} + \varepsilon^{4\delta} + \varepsilon^{\frac{7}{2}}), \quad (4.49)$$

которое при $\delta = 4/7$ принимает вид

$$|\widehat{\lambda}_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon}| = O(\varepsilon^{\frac{16}{7}}). \quad (4.50)$$

Легко видеть, что при $\delta \in (0, 1)$ это наилучшая оценка, которая получается в (4.49). И, наконец, из (4.50), (2.21) вытекает равенство (1.8). Теорема 2 доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
2. **Михайлов В. П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
3. **Гадыльшин Р. Р.** Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Мат. заметки. 1992. Т. 52, вып. 4. С. 42–55.
4. **Гадыльшин Р. Р.** Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий // Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. С. 3–15.
5. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
6. **Ильин А. М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
7. **Планида М. Ю.** Асимптотики собственных элементов оператора Лапласа со сменой типа граничного условия на узкой уплощенной полосе // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 2. С. 236–252.

Гадыльшин Рустем Рашитович

Поступила 29.09.2011

д-р физ.-мат. наук

профессор

Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акумуллы

e-mail: gadylshin@yandex.ru

Шишкина Елена Алексеевна

ассистент

Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акумуллы

e-mail: shishkina.ea@yandex.ru

УДК 517.955.8

**АВТОРЕЗОНАНСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СОЛИТОНА
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА¹****Р. Н. Гарифуллин**

Исследуется воздействие на солитон нелинейного уравнения Шредингера внешнего параметрического возмущения с медленно изменяющейся частотой. Получены уравнения, описывающие эволюцию во времени параметров возмущенного солитона. Найдены условия захвата фазы солитона, связывающие скорость изменения частоты возмущения, его амплитуду, волновое число и фазу с начальными данными солитона. Рассмотрены случаи, когда начальная амплитуда солитона мала и когда амплитуда солитона является величиной порядка единицы.

Ключевые слова: авторезонанс, возмущение, нелинейное уравнение Шредингера, солитон.

R. N. Garifullin. Autoresonance excitation of a soliton of the nonlinear Schrödinger equation.

The action of an external parametric perturbation with slowly changing frequency on a soliton of the nonlinear Schrödinger equation is studied. Equations for the time evolution of the parameters of the perturbed soliton are derived. Conditions for the soliton phase locking are found, which relate the rate of change of the perturbation frequency, its amplitude, the wave number, and the phase to the initial data of the soliton. The cases when the initial amplitude of the soliton is small and when the amplitude of the soliton is of the order of unity are considered.

Keywords: autoresonance, perturbation, nonlinear Schrödinger equation, soliton.

Введение

Цель данной статьи — развитие подходов, предложенных в [1;2] к анализу явления авторезонанса (автофазировки) в системах, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Постановка исходной задачи сводится к исследованию асимптотики по малому параметру для решений уравнений со специфическими возмущениями. Фактически в работе анализируются возмущения для известного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u + |u|^2 u = -i\beta u + i\alpha F(u, t, x); \quad (1)$$

малые параметры содержатся в правой части: $0 \leq \beta, |\alpha| \ll 1$. В работе существенно используются результаты по теории возмущения солитонов [3].

Под авторезонансом (автофазировкой) принято понимать явление автоматической подстройки фазы собственных колебаний динамической системы под фазу внешнего воздействия. Возникающий таким образом резонанс, удерживаемый в течение долгого времени, приводит к значительному изменению энергии системы при том, что вынуждающая сила (накачка) остается малой. Один из простейших примеров такого рода системы дает физический маятник — твердое тело с закрепленной осью вращения в поле силы тяжести. Эффект авторезонанса для такой системы проявляется в том, что маятник из состояния с малой амплитудой колебаний вблизи устойчивого положения равновесия переводится в состояние с большой амплитудой колебаний при помощи внешней осциллирующей силы, сколь угодно малой по амплитуде. При этом решающую роль играет медленное изменение частоты внешней накачки.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00186-а, 11-02-97003-р_поволжье_а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракт 14.В37.21.0358).

Впервые явление авторезонанса было использовано в ускорителях релятивистских частиц в соответствии с идеей, высказанной В. Векслером и Е. Мак-Милланом в 1944–1945 гг. [4–6]. Позднее эта идея использовалась в экспериментах по разогреву плазмы с теоретическим обоснованием в работах К. Голованевского в начале 1980-х г. [7]. Эффекты, связанные с авторезонансом, обнаруживаются в колебательных системах разной природы [8]. Систематическое исследование математических моделей авторезонанса, представимых в форме дифференциальных уравнений, началось с работы Фридлянда и Меерсона [9]. К настоящему времени значительно проявилась ситуация с конечномерными системами [10–13]. Данная работа посвящена анализу этого явления для бесконечномерных систем на конкретном примере НУШ.

В работе [2] проведено изучение автофазировки солитонных решений НУШ, однако результаты той работы не применимы к автофазировке солитонов с малой амплитудой. На основе статьи [2] была решена оптимизационная задача по максимизация амплитуды солитона [14]. В настоящей работе, кроме того, проводится учет малой диссипации $-\beta u$ на возникновение авторезонанса.

Подобные задачи исследовались в работах [15–17], однако в них начальная амплитуда солитонов была недостаточной для возникновения авторезонансных эффектов.

1. Постановка задачи

Невозмущенное уравнение (1) (при $\alpha = \beta = 0$) имеет решение вида

$$u = \frac{A}{\operatorname{ch} z} \exp(i\Phi), \tag{2}$$

где

$$z = A(x - \xi), \quad \Phi = \frac{V}{A}z + \theta,$$

A — амплитуда солитона, V — скорость, $\xi = Vt + \xi_0$, $\theta = \omega t + \theta_0$, $\omega = (A^2 + V^2)/2$.

Имея в виду структуру невозмущенного решения (2), рассмотрим начальные условия на функцию u в виде солитона:

$$u|_{t=0} = \frac{A_0}{\operatorname{ch}(A_0(x - \xi_0))} \exp(i(V_0(x - \xi_0) + \theta_0)). \tag{3}$$

В работе используется возмущение, которое зависит от начальной скорости солитона V_0 и имеет следующий вид:

$$F(u, t, x) = u^* \exp\left(2i\left(V_0x + \int_0^t \psi(\gamma t') dt'\right)\right), \quad 0 < \gamma \ll 1,$$

где $\psi(\gamma t)$, аналогично другим задачам об авторезонансе, — некоторая медленная функция времени.

Для решение задачи (1),(3) строится адиабатическое приближение

$$u = \frac{A}{\operatorname{ch} z} \exp(i\Phi) + o(1), \quad z = A(x - \xi), \quad \Phi = \frac{V}{A}z + \theta,$$

где предполагается, что A, V, ξ, θ являются функциями времени и на них с использованием результатов [3] выписываются обыкновенные уравнения, определяемые структурой возмущения.

Обозначим разницу между амплитудой и начальной амплитудой солитона: $A - A_0 = \varepsilon R$, где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Ставится задача подобрать фазу возмущения $\psi(\gamma t)$ (ее можно считать линейной функцией) и связь малых параметров $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ так, чтобы у усредненных уравнений существовало богатое семейство решений, в котором функция R неограниченно растет. В работе рассматриваются случаи малой начальной амплитуды $A_0 = O(\varepsilon)$ и конечной начальной амплитуды.

2. Вывод основных уравнений

На скорость солитона V получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^3 z} A \left(\alpha \exp \left(2i \left(\frac{z}{A} (V_0 - V) + V_0 \xi + \Psi - \theta \right) \right) - \beta \right) dz \\ &= \alpha A \Im \exp(2i(V_0 \xi + \Psi - \theta)) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^3 z} \exp \frac{2iz(V_0 - V)}{A} dz \\ &= \alpha A \cos 2(V_0 \xi + \Psi - \theta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch}^3 z} \sin \frac{2z(V_0 - V)}{A} dz. \end{aligned}$$

Из этого уравнения видно, что $V = V_0$ является точкой равновесия. Следовательно, если начальная скорость равна V_0 , то $V(t) \equiv V_0$. Здесь обозначено: $\Psi = \int_0^t \psi(\gamma t') dt'$.

С учетом постоянства скорости на амплитуду солитона получаем уравнение

$$\frac{dA}{dt} = \Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\operatorname{ch}^2 z} (\alpha \exp(2i(V_0 \xi + \Psi - \theta)) - \beta) dz = 2\alpha A \cos 2(V_0 \xi + \Psi - \theta) - 2\beta A.$$

На функцию ξ :

$$\frac{d\xi}{dt} = V + \frac{1}{A^2} \Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Az}{\operatorname{ch}^2 z} (\alpha \exp(2i(V_0 \xi + \Psi - \theta)) - \beta) dz = V.$$

На функцию θ :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{2}(V^2 + A^2) + \frac{1}{A} \Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(1 - z \operatorname{th} z)}{\operatorname{ch}^2 z} (\alpha \exp(2i(V_0 \xi + \Psi - \theta)) - \beta) dz \\ &= \frac{1}{2}(V^2 + A^2) + \alpha \sin 2(V_0 \xi + \Psi - \theta). \end{aligned}$$

Перейдем от переменных θ, A к переменным ϑ, r по формулам $\vartheta = 2(V_0 \xi + \Psi - \theta)$, $r = A^2$, тогда на r, ϑ получим систему

$$\frac{dr}{dt} = 4\alpha r \cos \vartheta - 4\beta r, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = V^2 - r + \psi(\gamma t) - 2\alpha \sin \vartheta \quad (4)$$

со следующими начальными данными:

$$r|_{t=0} = A_0^2, \quad \vartheta|_{t=0} = 2(V_0 \xi_0 - \theta_0). \quad (5)$$

Система уравнений (4) при описании авторезонансных эффектов была получена в работах [1; 18].

3. Случай конечной начальной амплитуды

В случае конечной начальной амплитуды с учетом (5) проведем замену $r = A_0^2 + \varepsilon R(\tau)$, $\vartheta = \phi(\tau)$, $\tau = \delta t$, где τ — медленное время, характеризующее изменение функций R, ϕ . Выберем $\psi(\gamma t) = A_0^2 - V^2 + \gamma t$, тогда на $R(\tau)$, $\phi(\tau)$ получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= \frac{2\alpha}{\varepsilon\delta} (A_0 + \varepsilon R) \cos \phi - \frac{\beta}{\varepsilon\delta} (A_0 + \varepsilon R), \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\gamma\tau}{\delta^2} - \frac{2\varepsilon}{\delta} A_0 R + \frac{\varepsilon^2}{\delta} R^2 - \frac{2\alpha}{\delta} \sin \phi. \end{aligned} \quad (6)$$

Для возникновения эффекта авторезонанса необходимо выбрать

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = O(1), \quad \frac{\alpha}{\varepsilon\delta} = O(1), \quad \frac{\beta}{\varepsilon\delta} = O(1), \quad \frac{\gamma}{\delta^2} = O(1).$$

Выберем $\delta = 2A_0\varepsilon$ и обозначим

$$\frac{2\alpha}{\varepsilon\delta}A_0 = \alpha_0, \quad \frac{\beta}{\varepsilon\delta} = \beta_0, \quad \frac{\gamma}{\delta^2} = \gamma_0,$$

тогда уравнения (6) с точностью до слагаемых порядка ε примут вид

$$R' = \alpha_0 \cos \phi - \beta_0, \quad \phi' = \gamma_0\tau - R. \quad (7)$$

Полученная система интегрируема, действительно она сводится к автономному уравнению второго порядка

$$\phi'' = \gamma_0 + \beta_0 - \alpha_0 \cos \phi. \quad (8)$$

С помощью этого представления доказывается

Теорема 1. *Если $|\gamma_0 + \beta_0| < |\alpha_0|$, то существует двухпараметрическое семейство решений системы (7), для которых $R(\tau) = \gamma_0\tau(1 + o(1))$, $\tau \rightarrow \infty$.*

У системы (7) наряду с решениями, у которых растет $R(\tau)$, есть решения, у которых функция $R(\tau)$ ограничена. Можно показать, что начальные данные, соответствующие растущим решениям, находятся внутри сепаратрисной петли на фазовой плоскости для уравнения (8). Из этого условия находим, что начальные данные должны удовлетворять условиям

$$\alpha_0(\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1) \leq R(0)^2/2 - (\gamma_0 + \beta_0)\phi(0) + \alpha_0 \sin \phi(0) < \alpha_0(\sin \phi_2 - \phi_2 \cos \phi_2),$$

$$\exists k \in \mathbb{Z}: \phi_{12}, \phi(0) \in (2\pi k - \pi, 2\pi k + \pi), \quad \phi_1 \leq \phi(0) < \phi_2.$$

Здесь ϕ_{12} — точки равновесия уравнения (8) — корни уравнения $\gamma_0 + \beta_0 - \alpha_0 \cos \phi = 0$.

4. Случай малой начальной амплитуды

В случае малой начальной амплитуды с учетом (5) проведем замену $r = \varepsilon^2 R(\tau)$, $\vartheta = \phi(\tau)$, $\tau = \delta t$, $0 < \delta \ll 1$ и выберем $\psi(\gamma t) = -V^2 + \gamma t$, тогда уравнения на $R(\tau)$, $\phi(\tau)$ примут вид

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{4\alpha}{\delta} R \cos \phi - \frac{4\beta}{\delta} R, \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\gamma}{\delta^2} \tau - \frac{\varepsilon^2}{\delta} R - \frac{2\alpha}{\delta} \sin \phi.$$

Здесь τ — медленное время, характеризующее изменение функций R, ϕ .

В случае $\beta/\alpha \approx 1$, $\gamma/\alpha^2 \approx 1$, $\varepsilon^2/\alpha \approx 1$ это уравнение оказывается существенно нелинейным и неавтономным. Выберем $\delta = \varepsilon^2$, тогда уравнения приобретают вид

$$\frac{dR}{d\tau} = R(\alpha_1 \cos \phi - \beta_1), \quad \frac{d\phi}{d\tau} = \gamma_1\tau - R - \frac{\alpha_1}{2} \sin \phi, \quad (9)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{4\alpha}{\varepsilon^2}, \quad \beta_1 = \frac{4\beta}{\varepsilon^2}, \quad \gamma_1 = \frac{\gamma}{\varepsilon^4}$$

величины порядка $O(1)$.

Для решений системы (9) верна

Теорема 2 [1]. *Если $\beta_1 < |\alpha_1|$, то существует двухпараметрическое семейство решений системы (9), для которых $R(\tau) = \gamma_1\tau(1 + o(1))$, $\tau \rightarrow \infty$.*

К сожалению система (9) не интегрируема [19] и здесь, по-видимому, невозможно аналитически описать области начальных данных, соответствующих захвату в авторезонанс. С помощью численных экспериментов можно показать, что области захвата имеют спиральную структуру (см. [20]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Калякин Л.А., Гарифуллин Р.Н., Шамсутдинов М.А.** Авторезонансное возбуждение бризера в слабых ферромагнетиках // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 7. С. 1208–1220.
2. **Баталов С.В., Маслов Е.М., Шагалов А.Г.** Автофазировка солитонов // Журн. эксперимент. и теорет. физики. 2009. Т. 135, вып. 5. С. 1021–1028.
3. **Карпман В.И., Маслов Е.М.** Теория возмущений для солитонов // Журн. эксперимент. и теорет. физики. 1977. Т. 73, вып. 2(8). С. 537–559.
4. **Векслер В.И.** О новом методе ускорения релятивистских частиц // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43. С. 346–348.
5. **Векслер В.И.** О новом методе ускорения частиц // Докл. АН СССР. 1944. Т. 44, № 9. С. 393–396.
6. **McMillan E.M.** Resonance acceleration of charged particles // Phys. Rev. 1946. Vol. 70. P. 800.
7. **Голованевский К.С.** Гиромангнитный авторезонанс с переменной частотой // Физика плазмы. 1985. Т. 11, вып. 3. С. 295–299.
8. **Fajans J., and Friedland L.** Autoresonant (non stationary) excitation of a pendulum, Plutinos, plasmas and other nonlinear oscillators // Am. J. Phys. 2001. Vol. 69, no. 10. P. 1096–1102.
9. **Meerson B., Friedland L.** Strong autoresonance excitation of Rydberg atoms: the rydberg accelerator // Phys. Rev. A. 1990. Vol 41. P. 5233–5236.
10. **Калякин Л.А.** Авторезонанс в динамической системе // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 5. С. 79–108.
11. **Kalyakin L.A.** Justification of asymptotic expansions for the principal resonance equations // Proc. Steklov Inst. Math. 2003. Suppl. 1. P. S108–S122.
12. **Гарифуллин Р.Н.** Построение асимптотических решений в задаче об авторезонансе // Докл. РАН. 2004. Т. 398, № 3. С. 306–309.
13. **Калякин Л.А.** Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 3–72.
14. **Эльберт А.Е., Данилин А.Р.** Автофазировка солитонов с оптимизацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Vol. 16, № 2. С. 288–296.
15. **Glebov S.G., Kiselev O.M., Lazarev V.A.** Slow passage through resonance for a weakly nonlinear dispersive wave // SIAM J. Appl. Math. 2005. Vol. 65, no. 6. P. 2158–2177.
16. **Glebov S., Kiselev O., Tarkhanov N.** Weakly nonlinear dispersive waves under parametric resonance perturbation // Stud. Appl. Math. 2010. Vol. 124, no. 1. P. 19–37.
17. **Kiselev O.M., Glebov S.G., Lazarev V.A.** Resonant pumping in nonlinear Klein–Gordon equation and solitary packets of waves. 2004. arXiv:math-ph/0410041v1. 21 p. URL: <http://arxiv.org/pdf/math-ph/0410041v1.pdf>.
18. Авторезонансное параметрическое возбуждение локализованных колебаний намагниченности в ферромагнетике полем переменной частоты / Л.А. Калякин, М.А. Шамсутдинов, Р.Н. Гарифуллин, Р.К. Салимов // Физика металлов и металловедение. 2007. Т. 104, № 2. С. 115–128.
19. **Багдерина Ю.Ю.** Интегрируемые уравнения главного резонанса // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 3. С. 465–468.
20. **Гарифуллин Р.Н.** Исследование роста решений нелинейного уравнения в зависимости от начальных данных // Региональная шк.-конф. для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике: сб. тр. Т. 1: Математика. Уфа, 2003. С. 189–195.

Гарифуллин Рустем Наилевич
 канд. физ.-мат. наук
 ст. науч. сотрудник
 Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
 e-mail: rustem@matem.anrb.ru

Поступила 28.09.2011

УДК 517.977

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ
ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ¹****А. Р. Данилин, О. О. Коврижных**Посвящается А.М. Ильину,
нашему Учителю

Рассматривается задача о быстродействии для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными и гладкими геометрическими ограничениями на управление. Построено и обосновано асимптотическое представление до второго порядка малости оптимального времени быстродействия.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotic representation of a solution to a singular perturbation linear time-optimal problem.

A time-optimal control problem is considered for a linear system with fast and slow variables and smooth geometric constraints on the control. An asymptotic expansion of the optimal time up to the second order of smallness is constructed and validated.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singular perturbation problems, small parameter.

Введение

Рассматривается задача о быстродействии [1–4] для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными [5–9] и гладкими геометрическими ограничениями на управление. Построено и обосновано асимптотическое представление времени быстродействия. В настоящей работе используются методы, развитые в [10–13].

Другие постановки сингулярно возмущенных задач управления даются в [6; 7; 14–16]. Исследуемые в настоящей работе, а также в статьях [14; 15] системы не входят в класс систем, изученных в работе [16], поскольку не удовлетворяют предположениям, сделанным в [16].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями:

$$\begin{cases} \dot{y} = A_0 y + A_{12} z + B_1 u, \\ \varepsilon \dot{z} = -\alpha z + B_2 u, \quad \alpha > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$U: \|u\| \leq 1, \quad (1.2)$$

¹Работа поддержана РФФИ (проект 11-01-00679-а), ФЦП (контракт 02.740.11.0612) и программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математике и физике” (проект 12-П-1-1009).

здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма,

$$y(0) = y^0, \quad z(0) = z^0, \quad (1.3)$$

$$y(\Theta) = 0, \quad z(\Theta) = 0, \quad \Theta \longrightarrow \min, \quad (1.4)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, $m \leq r < n$.

У с л о в и е I. $\text{Ker} B_2^* = \{0\}$ (или $\text{Im} B_2 = \mathbb{R}^m$).

В ы р о ж д е н н а я з а д а ч а (при $\varepsilon = 0$):

$$\dot{y} = A_0 y + B_0 u, \quad U: \|u\| \leq 1, \quad (1.5)$$

$$y(0) = y^0, \quad y(\Theta_0) = 0, \quad \Theta_0 \longrightarrow \min, \quad (1.6)$$

где $B_0 = B_1 + \alpha^{-1} A_{12} B_2$.

У с л о в и е II. $\text{rank} [B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{n-1} B_0] = n$.

Условия I, II обеспечивают вполне управляемость пар $(-\alpha I, B_2)$ и (A_0, B_0) соответственно.

У с л о в и е III. $\text{rank} B_0 = r \in [2, n-1]$.

У с л о в и е IV. Пусть пара (A_0, B_0) такова, что если $B_0^* e^{A_0^* t} r_1 \parallel B_0^* e^{A_0^* t} r_2$ на некотором промежутке, то и $r_1 \parallel r_2$. Здесь * — знак транспонирования матриц.

Отметим, что условие II следует из IV, тем не менее условие II приведено здесь, поскольку оно есть известное условие, при котором принцип максимума является достаточным условием оптимальности управления. Условие IV, как показано в статье [15], обеспечивает единственность представления оптимального управления в вырожденной задаче через начальный вектор сопряженной системы.

У с л о в и е V. Начальный вектор y^0 выбран так, что задача (1.5), (1.6) разрешима.

Введем обозначения

$$x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} y^0 \\ z^0 \end{pmatrix}, \quad A_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_0 & A_{12} \\ 0 & -\frac{\alpha}{\varepsilon} I \end{pmatrix}, \quad B_\varepsilon = \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\varepsilon} B_2 \end{pmatrix},$$

где I — тождественная матрица.

Как показано в [5], при выполнении условий I, II найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ пара $(A_\varepsilon, B_\varepsilon)$ вполне управляема.

В [15] доказано, что при любом рассматриваемом x^0 найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ задача (1.1)–(1.4) разрешима и

$$\Theta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_0, \quad (1.7)$$

где Θ_0 — оптимальное время быстрогодействия в вырожденной задаче (1.5), (1.6).

Обозначим $\vartheta = \vartheta(\varepsilon) = \Theta_\varepsilon - \Theta_0$. Вследствие (1.7) имеем

$$\vartheta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (1.8)$$

В силу полной управляемости системы из (1.5), эквивалентной условию II, и вида ограничений на управление принцип максимума Понтрягина [1] является необходимым и достаточным условием оптимальности управления. Сопряженная система имеет вид $\dot{\psi} = -A_0^* \psi$. Поэтому $\psi_0(t) = e^{A_0^*(\Theta_0-t)} \lambda_0$, где λ_0 — постоянный вектор. Согласно принципу максимума оптимальное управление $u_0(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\langle \psi_0(t), B_0 u_0(t) \rangle = \max_{\|u\| \leq 1} \langle \psi_0(t), B_0 u \rangle = \max_{\|u\| \leq 1} \langle B_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-t)} \lambda_0, u \rangle = \|B_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-t)} \lambda_0\|,$$

здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном пространстве. Тогда при t таких, что $B_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-t)} \lambda_0 \neq 0$, оптимальное управление в вырожденной задаче имеет вид

$$u_0(t) = \frac{B_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-t)} \lambda_0}{\|B_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-t)} \lambda_0\|}. \quad (1.9)$$

О п р е д е л е н и е. Любой из векторов λ_0 , удовлетворяющих (1.9), будем называть вектором, *порождающим оптимальное управление*.

Известно [4, с. 171], что оптимальное управление в задаче (1.5), (1.6) единственно. А из (1.5), (1.6), (1.9) получаем

$$0 = e^{A_0 \Theta_0} y^0 + \int_0^{\Theta_0} \frac{e^{A_0(\Theta_0-t)} B_0 B_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-t)} \lambda_0}{\|B_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-t)} \lambda_0\|} dt, \quad (1.10)$$

после замены переменной интегрирования по формуле $\tau = \Theta_0 - t$ приходим к эквивалентному равенству (1.10) соотношению

$$0 = e^{A_0 \Theta_0} y^0 + \int_0^{\Theta_0} \frac{C_0(\tau) \lambda_0}{\langle C_0(\tau) \lambda_0, \lambda_0 \rangle^{1/2}} d\tau, \quad C_0(\tau) = e^{A_0 \tau} B_0 B_0^* e^{A_0^* \tau}. \quad (1.11)$$

Тем самым вектор λ_0 является вектором, порождающим оптимальное управление тогда и только тогда, когда λ_0 удовлетворяет соотношению (1.11).

Обозначим также $\psi(\tau) = \langle C_0(\tau) \lambda_0, \lambda_0 \rangle$. Как показано в [10], существует такой вектор y^0 , что соответствующее ему оптимальное управление в вырожденной задаче $u_0(t)$ имеет единственную точку разрыва $\bar{t} \in (0, \Theta_0)$, где

$$B_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-\bar{t})} \lambda_0 = 0, \quad B_0^* A_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-\bar{t})} \lambda_0 \neq 0, \quad \text{и} \quad \forall t \neq \bar{t} \quad B_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-t)} \lambda_0 \neq 0. \quad (1.12)$$

В дальнейшем будем считать, что начальный вектор y^0 выбран с условиями (1.12). Отметим, что условие о единственной точке разрыва оптимального управления в вырожденной задаче не является принципиальным. Функция $B_0^* e^{A_0^*(\Theta_0-t)} \lambda_0$ в силу аналитичности может иметь лишь конечное число нулей, рассмотрение оптимального управления с конечным числом точек разрыва не отличается принципиально от случая одной точки разрыва, но технически более сложно.

Обозначим $\bar{\tau} = \Theta_0 - \bar{t}$. Не ограничивая общности, примем, что

$$e^{A_0 \bar{\tau}} B_0 = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times r}, \quad \text{тем самым} \quad Q = C_0(\bar{\tau}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}. \quad (1.13)$$

2. Основные соотношения

Обратимся к исходной задаче (1.1)—(1.4). Соотношения (1.9), (1.10) выполняются и для возмущенной задачи с заменой A_0 на A_ε , B_0 на B_ε , Θ_0 на Θ_ε , y^0 на x^0 , $u_0(t)$ на $u_\varepsilon(t)$, λ_0 на r_ε :

$$0 = e^{A_\varepsilon \Theta_\varepsilon} x^0 + \int_0^{\Theta_\varepsilon} \frac{e^{A_\varepsilon(\Theta_\varepsilon-t)} B_\varepsilon B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(\Theta_\varepsilon-t)} r_\varepsilon}{\|B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(\Theta_\varepsilon-t)} r_\varepsilon\|} dt$$
 или после замены переменной интегрирования по формуле $\tau = \Theta_\varepsilon - t$:

$$0 = e^{A_\varepsilon \Theta_\varepsilon} x^0 + \int_0^{\Theta_\varepsilon} \frac{e^{A_\varepsilon \tau} B_\varepsilon B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* \tau} r_\varepsilon}{\|B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* \tau} r_\varepsilon\|} d\tau. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) положительно однородно относительно вектора r_ε , поэтому будем считать, что $\|r_\varepsilon\| = 1$. В [15] доказана следующая лемма.

Лемма 1 [15]. Пусть для пары (A_0, B_0) выполнено условие IV. Если l_1 и l_2 — векторы, порождающие оптимальное управление в задаче (1.5), (1.6), и $\|l_1\| = \|l_2\| = 1$, то $l_1 = l_2$. \square

Тем самым при выполнении условия IV нормированный вектор r_0 , порождающий оптимальное управление в предельной задаче (1.5), (1.6), единственный и $\|r_\varepsilon\| = 1 \implies r_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} r_0$, $\|r_0\| = 1$,

при этом (см. [15]) если $r_\varepsilon = \begin{pmatrix} r_\varepsilon^{(1)} \\ r_\varepsilon^{(2)} \end{pmatrix}$, $r_0 = \begin{pmatrix} r_0^{(1)} \\ r_0^{(2)} \end{pmatrix}$, то

$$r_0^{(2)} = 0, \quad \|r_0^{(1)}\| = 1 \quad (2.2)$$

и $r_0^{(1)}$ есть вектор, порождающий оптимальное управление в вырожденной задаче (1.5), (1.6). Таким образом, выполняется $u_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0(t)$ равномерно на всех замкнутых множествах, не содержащих точек разрыва предельного управления.

Запишем уравнения (2.1) следующим образом:

$$0 = \bar{y}_\varepsilon + \bar{z}_\varepsilon + \int_0^{\Theta_\varepsilon} \frac{D_\varepsilon(\tau) \left(D_\varepsilon^*(\tau) r_\varepsilon^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* r_\varepsilon^{(2)} \right)}{\left\| D_\varepsilon^*(\tau) r_\varepsilon^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* r_\varepsilon^{(2)} \right\|} d\tau, \quad (2.3a)$$

$$0 = e^{-\alpha \frac{\Theta_\varepsilon}{\varepsilon}} z^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\Theta_\varepsilon} e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2 \frac{D_\varepsilon^*(\tau) r_\varepsilon^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* r_\varepsilon^{(2)}}{\left\| D_\varepsilon^*(\tau) r_\varepsilon^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* r_\varepsilon^{(2)} \right\|} d\tau, \quad (2.3b)$$

где

$$\bar{y}_\varepsilon = e^{A_0 \Theta_\varepsilon} y^0, \quad \bar{z}_\varepsilon = \varepsilon (\alpha I + \varepsilon A_0)^{-1} \left(e^{A_0 \Theta_\varepsilon} - e^{-\alpha \frac{\Theta_\varepsilon}{\varepsilon}} I \right) A_{12} z^0,$$

$$D_\varepsilon(\tau) = e^{A_0 \tau} B_1 + (\alpha I + \varepsilon A_0)^{-1} \left(e^{A_0 \tau} - e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} I \right) A_{12} B_2. \quad (2.4)$$

Будем искать вектор $r_\varepsilon^{(2)}$ в виде

$$r_\varepsilon^{(2)} = \varepsilon (r_0^{(2)} + r^{(2)}(\varepsilon)), \quad r^{(2)}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.5)$$

С учетом формулы (2.4) преобразуем выражение

$$D_\varepsilon^*(\tau) r_\varepsilon^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* r_\varepsilon^{(2)} = B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda_\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\alpha} B_2^* A_{12}^* (\alpha I + \varepsilon A_0^*)^{-1} A_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda_\varepsilon + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu_\varepsilon, \quad (2.6)$$

где $\lambda_\varepsilon = r_\varepsilon^{(1)}$, $\nu_\varepsilon = -A_{12}^* (\alpha I + \varepsilon A_0^*)^{-1} r_\varepsilon^{(1)} + 1/\varepsilon r_\varepsilon^{(2)}$. Заметим, что по λ_ε и ν_ε векторы $r_\varepsilon^{(1)}$ и $r_\varepsilon^{(2)}$ восстанавливаются однозначно. Теперь примем λ_ε и ν_ε за новые неизвестные векторы. Обозначим

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_\varepsilon - \lambda_0, \quad \nu(\varepsilon) = \nu_\varepsilon - \nu_0, \quad (2.7)$$

где $\nu_0 = r_0^{(2)} - 1/\alpha A_{12}^* \lambda_0$. В силу соотношений (2.2), (2.5) имеем $\lambda(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, $\nu(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Задача, таким образом, сводится к нахождению асимптотики $\lambda(\varepsilon)$, $\nu(\varepsilon)$ из (2.7) и $\vartheta(\varepsilon)$ из (1.8) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для этого сначала исследуется асимптотика интегралов в равенствах (2.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$. При разложении соответствующих подынтегральных функций следует учесть погранслоный характер входящих в них величин, а также возникновение особенностей при $\tau = \bar{\tau}$ в (2.3a) вследствие условий (1.12). Имеем

$$D_\varepsilon^*(\tau) r_\varepsilon^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* r_\varepsilon^{(2)} = B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda_0 + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu_0 + B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda(\varepsilon) + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu(\varepsilon) + R(\tau, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)),$$

где $R(\tau, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) = -\varepsilon/\alpha B_2^* A_{12}^* (\alpha I + \varepsilon A_0^*)^{-1} A_0^* e^{A_0^* \tau} (\lambda_0 + \lambda(\varepsilon)) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\tau \in [0, \Theta_1]$, для $\Theta_1 > \Theta_0$. Уравнение (2.3b) запишем в виде

$$0 = e^{-\alpha \frac{\Theta_\varepsilon}{\varepsilon}} z^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\Theta_\varepsilon} e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2 \frac{B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda_0 + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu_0 + B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda(\varepsilon) + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu(\varepsilon) + R(\tau, \varepsilon, \lambda(\varepsilon))}{\left\| B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda_0 + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu_0 + B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda(\varepsilon) + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu(\varepsilon) + R(\tau, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) \right\|} d\tau. \quad (2.8)$$

Для нахождения асимптотики интеграла в равенстве (2.8) применим метод вспомогательного параметра, описанный в [12; 17]. Разобьем интеграл из соотношения (2.8) на сумму двух слагаемых

$$\int_0^{\Theta_\varepsilon} \cdot = \int_0^\mu \cdot + \int_\mu^{\Theta_\varepsilon} \cdot,$$

где μ — малый вспомогательный параметр. Пусть $\mu = \varepsilon^q$, $q \in (0, 1)$. Тогда $\int_\mu^{\Theta_\varepsilon} \cdot = \mathbb{O}$, и из уравнения (2.8) получаем

$$I_1(\varepsilon, \mu) := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\mu e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2 \frac{B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda_0 + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu_0 + B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda(\varepsilon) + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu(\varepsilon) + R(\tau, \varepsilon, \lambda(\varepsilon))}{\left\| B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda_0 + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu_0 + B_0^* e^{A_0^* \tau} \lambda(\varepsilon) + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu(\varepsilon) + R(\tau, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) \right\|} d\tau = \mathbb{O}.$$

Здесь \mathbb{O} — асимптотический нуль относительно степенной асимптотической последовательности, т. е. $\forall \gamma > 0 \quad \mathbb{O} = o(\varepsilon^\gamma) \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$.

Рассмотрим асимптотическое разложение интеграла $I_1(\varepsilon, \mu)$. Сделав в нем замену $\eta = \tau/\varepsilon$, получим

$$I_1(\varepsilon, \mu) = \int_0^{\mu/\varepsilon} e^{-\alpha \eta} B_2 \frac{B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0 + \tilde{R}(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon))}{\left\| B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0 + \tilde{R}(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)) \right\|} d\eta = \mathbb{O}, \quad (2.9)$$

где

$$\tilde{R}(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)) = B_0^* \left(e^{A_0^* \varepsilon \eta} - I \right) \lambda_0 + B_0^* e^{A_0^* \varepsilon \eta} \lambda(\varepsilon) + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu(\varepsilon) + R(\varepsilon \eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)).$$

Обозначим $\delta(\varepsilon) = \|(\lambda(\varepsilon)^T, \nu(\varepsilon)^T, \vartheta(\varepsilon)^T)^T\|$. Тогда $\tilde{R}(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)) = \mathcal{O}(\varepsilon \eta + \delta(\varepsilon) + \varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\eta \in [0, \mu/\varepsilon]$.

Будем искать далее решение системы (2.3) среди векторов $(\lambda(\varepsilon)^T, \nu(\varepsilon)^T, \vartheta(\varepsilon)^T)^T$, для которых выполняется соотношение

$$\delta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (2.10)$$

Определим сначала ν_0 . В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ из равенства (2.9) получаем

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha \eta} B_2 \frac{B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0}{\|B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0\|} d\eta, \quad (2.11)$$

или

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha \eta} d\eta}{\|B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0\|} B_2 B_0^* \lambda_0 + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha \eta} d\eta}{\|B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0\|} B_2 B_2^* \nu_0.$$

Отсюда следует, что найдется $\sigma > 0$ такое, что

$$B_2 B_2^* \nu_0 = -\sigma B_2 B_0^* \lambda_0, \quad (2.12)$$

в частности, умножив равенство (2.12) скалярно на вектор ν_0 , имеем

$$\|B_2^* \nu_0\|^2 = -\sigma \langle B_2 B_0^* \lambda_0, \nu_0 \rangle. \quad (2.13)$$

С другой стороны, умножив скалярно равенство (2.11) на вектор $-\alpha \nu_0$, выводим

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{\langle B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0, -\alpha e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0 \rangle}{\|B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0\|} d\eta. \quad (2.14)$$

Сделав замену $\chi = \|B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0\|^2$ под интегралом в левой части уравнения (2.14), приходим к соотношению

$$0 = \|B_0^* \lambda_0\| - \|B_0^* \lambda_0 + B_2^* \nu_0\|, \quad (2.15)$$

откуда

$$0 = 2 \langle B_2 B_0^* \lambda_0, \nu_0 \rangle + \|B_2^* \nu_0\|^2. \quad (2.16)$$

Таким образом, из соотношений (2.13), (2.16) получаем, что

$$\|B_0^* \lambda_0\|^2 = -2 \langle B_2 B_0^* \lambda_0, \nu_0 \rangle = \frac{2}{\sigma} \|B_0^* \lambda_0 + B_2^* \nu_0\|. \quad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что либо

$$B_2^* \nu_0 = 0, \quad B_2 B_0^* \lambda_0 = 0, \quad (2.18)$$

либо

$$\sigma = 2, \quad \|B_2^* \nu_0\| \neq 0. \quad (2.19)$$

Отметим, что равенство (2.12) имеет вид $B_2(B_2^* \nu_0 + \sigma B_0^* \lambda_0) = 0$. Если $B_2^* \nu_0 + \sigma B_0^* \lambda_0 = 0$, то реализуется случай (2.19) и $B_2^* \nu_0 = -2B_0^* \lambda_0$. Тогда функция $B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0 = B_0^* \lambda_0(1 - 2e^{-\alpha \eta})$ обращается в нуль при $e^{-\alpha \eta} = 1/2$. Будем далее рассматривать случай, когда для любого $\eta \geq 0$ выполняется

$$B_0^* \lambda_0 + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu_0 \neq 0. \quad (2.20)$$

Достаточным условием для выполнения (2.20) будет $B_2^* \nu_0 = 0$, т. е. с учетом (2.18) и условия I имеем $B_2 B_0^* \lambda_0 = 0$, $\nu_0 = 0$. Заметим, что в силу предположения (1.12) выполняется $B_0^* \lambda_0 \neq 0$. Уравнение (2.9) теперь примет вид

$$\int_0^{\mu/\varepsilon} e^{-\alpha \eta} B_2 \frac{\tilde{R}(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon))}{\|B_0^* \lambda_0 + \tilde{R}(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon))\|} d\eta = \mathbb{O}.$$

Имеем

$$\|B_0^* \lambda_0 + \tilde{R}\|^{-1} = \left(\|B_0^* \lambda_0\|^2 + 2 \langle B_0^* \lambda_0, \tilde{R} \rangle + \|\tilde{R}\|^2 \right)^{-1/2} = \|B_0^* \lambda_0\|^{-1} \left(1 - \frac{\langle B_0^* \lambda_0, \tilde{R} \rangle}{\|B_0^* \lambda_0\|^2} + \mathcal{O}(\|\tilde{R}\|^2) \right),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon), \nu(\varepsilon)) &= B_0^* \left(e^{A_0^* \varepsilon \eta} - I \right) \lambda_0 + B_0^* e^{A_0^* \varepsilon \eta} \lambda(\varepsilon) + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu(\varepsilon) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{\alpha} B_2^* A_{12}^* (\alpha I + \varepsilon A_0^*)^{-1} A_0^* e^{A_0^* \varepsilon \eta} (\lambda_0 + \lambda(\varepsilon)) \\ &= \varepsilon \eta B_0^* A_0^* \lambda_0 + B_0^* \lambda(\varepsilon) + e^{-\alpha \eta} B_2^* \nu(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\alpha^2} B_2^* A_{12}^* A_0^* \lambda_0 + \tilde{R}(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)). \end{aligned}$$

При этом $\tilde{R}(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) = \mathcal{O}(\varepsilon^2 \eta^2 + \varepsilon \eta \delta + \varepsilon \delta + \varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\eta \in [0, \mu/\varepsilon]$. Тогда

$$I_1(\varepsilon, \mu) \sim \frac{\varepsilon}{\beta} B_2 B_0^* A_0^* \lambda_0 \int_0^{\mu/\varepsilon} \eta e^{-\alpha \eta} d\eta + \frac{1}{\beta} B_2 B_0^* \lambda(\varepsilon) \int_0^{\mu/\varepsilon} e^{-\alpha \eta} d\eta + \frac{1}{\beta} B_2 B_2^* \nu(\varepsilon) \int_0^{\mu/\varepsilon} e^{-\alpha \eta} d\eta$$

$$-\frac{\varepsilon}{\alpha^2\beta}B_2B_2^*A_{12}^*A_0^*\lambda_0 \int_0^{\mu/\varepsilon} e^{-\alpha\eta} d\eta + \frac{1}{\beta}B_2 \int_0^{\mu/\varepsilon} e^{-\alpha\eta} R^2(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) d\eta,$$

где $\beta = \|B_0^*\lambda_0\|$, $R^2(\eta, \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) = \mathcal{O}(\varepsilon^2\eta^2 + \delta^2 + \varepsilon^2)$.

Таким образом,

$$\frac{\varepsilon}{\alpha^2\beta}B_2B_0^*A_0^*\lambda_0 + \frac{1}{\alpha\beta}B_2B_0^*\lambda(\varepsilon) + \frac{1}{2\alpha\beta}B_2B_2^*\nu(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\alpha^3\beta}B_2B_2^*A_{12}^*A_0^*\lambda_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^2 + \delta^2),$$

или, поскольку $B_0^* = B_1^* + \alpha^{-1}B_2^*A_{12}^*$,

$$\frac{\varepsilon}{\alpha^2\beta}B_2B_1^*A_0^*\lambda_0 + \frac{1}{\alpha\beta}B_2B_0^*\lambda(\varepsilon) + \frac{1}{2\alpha\beta}B_2B_2^*\nu(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^2 + \delta^2).$$

Отсюда, в соответствии с условием I и равенством (2.10), имеем

$$\nu(\varepsilon) = -\frac{2\varepsilon}{\alpha}(B_2B_2^*)^{-1}B_2B_1^*A_0^*\lambda_0 - 2(B_2B_2^*)^{-1}B_2B_0^*\lambda(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.21)$$

Обратимся к уравнению (2.3a) и, учитывая соотношение (2.6), запишем его в виде

$$0 = \bar{y}_\varepsilon + \bar{z}_\varepsilon + \int_0^{\Theta_\varepsilon} \frac{D_\varepsilon(\tau) \left(\Lambda_\varepsilon^*(\tau)\lambda_\varepsilon + e^{-\alpha\frac{\tau}{\varepsilon}}B_2^*\nu_\varepsilon \right)}{\left\| \Lambda_\varepsilon^*(\tau)\lambda_\varepsilon + e^{-\alpha\frac{\tau}{\varepsilon}}B_2^*\nu_\varepsilon \right\|} d\tau, \quad (2.22)$$

где $\Lambda_\varepsilon(\tau) := e^{A_0\tau}B_0 - \frac{\varepsilon}{\alpha}e^{A_0\tau}A_0(\alpha I + \varepsilon A_0)^{-1}A_{12}B_2$, а $D_\varepsilon(\tau)$ определяется формулой (2.4).

Предположим, что векторы $\lambda(\varepsilon)$ и $\nu(\varepsilon)$ таковы, что $\Lambda_\varepsilon^*(\tau)(\lambda_0 + \lambda(\varepsilon)) + e^{-\alpha\frac{\tau}{\varepsilon}}B_2^*\nu(\varepsilon) \neq 0$ при любом $\tau \in [0, \Theta_1]$, $\Theta_1 > \Theta_0$.

Вследствие (1.12) при разложении подынтегральной функции в (2.22) возникнут особенности при $\tau = \bar{\tau}$, а в достаточно малой окрестности нуля следует учесть влияние экспонент, имеющих погранслоный характер. Разобьем интеграл в уравнении (2.22) на сумму двух слагаемых, содержащих точки $\tau = 0$ и $\tau = \bar{\tau}$,

$$\int_0^{\Theta_\varepsilon} \cdot = \int_0^{\tau_1} \cdot + \int_{\tau_1}^{\Theta_\varepsilon} \cdot =: J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon),$$

где $0 < \tau_1 < \bar{\tau}$. Исследуем асимптотическое представление интегралов $J_1(\varepsilon)$ и $J_2(\varepsilon)$ методом введения вспомогательного параметра, описанным в [12; 13; 17]. Пусть

$$J_1(\varepsilon) = \int_0^{\tau_1} \cdot = \int_0^{\mu} \cdot + \int_{\mu}^{\tau_1} \cdot =: J_{1,1}(\varepsilon, \mu) + J_{1,2}(\varepsilon, \mu),$$

где μ — малый вспомогательный параметр, $\mu = \varepsilon^q$, $q \in (0, 1)$. Сделав в интеграле $J_{1,1}(\varepsilon)$ замену $\eta = \tau/\varepsilon$, получим

$$J_{1,1}(\varepsilon, \mu) = \mathcal{F}^1(\varepsilon, \delta, \mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.23)$$

Здесь и далее через $\mathcal{F}^1(\varepsilon, \delta, \mu)$ будут обозначаться суммы конечного числа слагаемых вида $\varphi(\varepsilon)\mu^a \ln^b \mu$ или $\varphi_1(\delta)\mu^a \ln^b \mu$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, $\varphi(\varepsilon) = \mathcal{O}^*(\varepsilon^\gamma)$ для некоторого $\gamma \geq 0$, а $\varphi_1(\delta) = \mathcal{O}(\delta)$, что согласно предположению (2.10) дает $\varphi_1(\delta) = \mathcal{O}(\varepsilon)$. В данном случае запись $\varphi(\varepsilon) = \mathcal{O}^*(\varepsilon^\gamma)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ означает, что $\forall \sigma < \gamma$ $\varphi(\varepsilon) = o(\varepsilon^\sigma)$ [13; 17]. В силу леммы из [17] при получении асимптотики интеграла методом вспомогательного параметра слагаемые такого вида можно не учитывать.

Отметим, что при $\mu = \varepsilon^q$, $0 < q < 1$, в силу равенства (2.4) справедливо соотношение

$$\int_{\mu}^{\Theta_{\varepsilon}} \frac{D_{\varepsilon}(\tau) \left(\Lambda_{\varepsilon}^*(\tau) \lambda_{\varepsilon} + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu_{\varepsilon} \right)}{\left\| \Lambda_{\varepsilon}^*(\tau) \lambda_{\varepsilon} + e^{-\alpha \frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu_{\varepsilon} \right\|} d\tau = \int_{\mu}^{\Theta_{\varepsilon}} \frac{\Lambda_{\varepsilon}(\tau) \Lambda_{\varepsilon}^*(\tau) \lambda_{\varepsilon}}{\left\| \Lambda_{\varepsilon}^*(\tau) \lambda_{\varepsilon} \right\|} d\tau + \mathcal{O}. \quad (2.24)$$

Для интеграла $J_{1,2}(\varepsilon, \mu)$, исходя из представления (2.24), получим

$$J_{1,2}(\varepsilon, \mu) = \int_0^{\tau_1} \frac{C_0(\tau) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\tau)}} d\tau + \int_0^{\tau_1} \frac{L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon))}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} d\tau + \mathcal{F}(\varepsilon, \delta, \mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.25)$$

где

$$L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) = \psi(\tau) (C_0(\tau) \lambda(\varepsilon) + \varepsilon C_1(\tau) \lambda_0) - \frac{\varepsilon}{2} \langle C_1(\tau) \lambda_0, \lambda_0 \rangle C_0(\tau) \lambda_0 - \langle C_0(\tau) \lambda_0, \lambda(\varepsilon) \rangle C_0(\tau) \lambda_0, \\ C_1(\tau) = -\frac{1}{\alpha^2} e^{A_0 \tau} (A_0 A_{12} B_2 B_0^* + B_0 B_2^* A_{12}^* A_0^*) e^{A_0^* \tau}.$$

Отметим, что при $\tau \in [0, \tau_1]$ вследствие условий (1.12) выполняется $\psi(\tau) > 0$.

Соотношения (2.23), (2.25) с учетом леммы из работы [13] при $\mu = \varepsilon^q$, $0 < q < 1$ дают

$$J_1(\varepsilon) = \int_0^{\tau_1} \frac{C_0(\tau) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\tau)}} d\tau + \int_0^{\tau_1} \frac{L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon))}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} d\tau + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.26)$$

Пусть далее

$$J_2(\varepsilon) = \int_{\tau_1}^{\Theta_{\varepsilon}} \cdot + \int_{\tau_1}^{\bar{\tau}-\mu} \cdot + \int_{\bar{\tau}-\mu}^{\bar{\tau}+\mu} \cdot + \int_{\bar{\tau}+\mu}^{\Theta_{\varepsilon}} \cdot =: J_{2,1}(\varepsilon, \mu) + J_{2,2}(\varepsilon, \mu) + J_{2,3}(\varepsilon, \mu),$$

где μ — новый малый вспомогательный параметр, $\mu = \varepsilon^q$, $q \in (0, 1)$.

Согласно условиям (1.12) имеем $\psi(\tau) = (\tau - \bar{\tau})^2 \|B_0^* e^{A_0^* \bar{\tau}} A_0^* \lambda_0\|^2 (1 + (\tau - \bar{\tau}) \psi_1(\tau))$, где $\psi_1(\tau) \in C^{\infty}[\tau_1, \Theta_1]$. Принимая во внимание предположение (1.13), выводим

$$\|B_0^* e^{A_0^* \bar{\tau}} A_0^* \lambda_0\|^2 = \|e^{A_0 \bar{\tau}} B_0 B_0^* e^{A_0^* \bar{\tau}} A_0^* \lambda_0\|^2 = \|Q A_0^* \lambda_0\|^2.$$

Введем обозначения

$$\tilde{\lambda}_0 = Q A_0^* \lambda_0, \quad \hat{\lambda}_0 = \frac{1}{\alpha^2} e^{A_0 \bar{\tau}} B_0 B_2^* A_{12}^* e^{A_0^* \bar{\tau}} A_0^* \lambda_0, \quad \tilde{\lambda}(\varepsilon) = Q \lambda(\varepsilon),$$

$$\tilde{\lambda}(\varepsilon) - \varepsilon \hat{\lambda}_0 = \hat{\rho}(\varepsilon) + l(\varepsilon) \tilde{\lambda}_0, \quad \hat{\rho}(\varepsilon) \perp \tilde{\lambda}_0, \quad l(\varepsilon) \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

При этом $\hat{\rho} \in Q \mathbb{R}^n$, $\tilde{\lambda}_0 \in Q \mathbb{R}^n$. Тогда $\frac{1}{\sqrt{\psi(\tau)}} = \frac{1}{|\tau - \bar{\tau}| \|\tilde{\lambda}_0\|} + \frac{\tau - \bar{\tau}}{|\tau - \bar{\tau}|} \psi_2(\tau)$, где $\psi_2(\tau) \in C^{\infty}[\tau_1, \Theta_1]$.

Рассмотрим сначала интеграл $J_{2,1}(\varepsilon, \mu)$. По аналогии с работой [13] применяя метод регуляризации интегралов, получим при $\mu = \varepsilon^q$, $q \in (0, 1)$

$$J_{2,1}(\varepsilon, \mu) = \int_{\tau_1}^{\bar{\tau}} \frac{C_0(\tau) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\tau)}} d\tau + \int_{\tau_1}^{\bar{\tau}} \frac{L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) - \mathcal{A}_2(L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon)))}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} d\tau \\ + \|\tilde{\lambda}_0\|^2 \hat{\rho}(\varepsilon) \int_{\tau_1}^{\bar{\tau}-\mu} \frac{(\tau - \bar{\tau})^2}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} d\tau + \mathcal{F}(\varepsilon, \delta, \mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

Здесь $\mathcal{A}_2(L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon)))$ — отрезок ряда Тейлора функции $L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon))$ по τ в точке $\bar{\tau}$, содержащий степени $(\tau - \bar{\tau})^i$ при $i \leq 2$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_2(L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon))) \\ &= (\tau - \bar{\tau})^2 \left(\|\tilde{\lambda}_0\|^2 \overset{1}{\rho}(\varepsilon) + \|\tilde{\lambda}_0\|^2 l(\varepsilon) \tilde{\lambda}_0 - \langle \tilde{\lambda}_0, \overset{1}{\rho}(\varepsilon) \rangle \tilde{\lambda}_0 - l(\varepsilon) \langle \tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_0 \rangle \tilde{\lambda}_0 \right) = (\tau - \bar{\tau})^2 \|\tilde{\lambda}_0\|^2 \overset{1}{\rho}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Для интеграла $J_{2,3}(\varepsilon, \mu)$ имеем

$$\begin{aligned} J_{2,3}(\varepsilon, \mu) &= \int_{\bar{\tau}}^{\Theta_0} \frac{C_0(\tau) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\tau)}} d\tau + \vartheta(\varepsilon) \frac{C_0(\Theta_0) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\Theta_0)}} + \int_{\bar{\tau}}^{\Theta_0} \frac{L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon)) - \mathcal{A}_2(L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon)))}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} d\tau \\ &+ \|\tilde{\lambda}_0\|^2 \overset{1}{\rho}(\varepsilon) \int_{\bar{\tau}+\mu}^{\Theta_0} \frac{(\tau - \bar{\tau})^2}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} d\tau + \mathcal{F}(\varepsilon, \delta, \mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Будем далее искать решения, удовлетворяющие при достаточно малых ε следующим условиям:

$$\overset{1}{\rho}(\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \overset{1}{\rho}(\varepsilon) \neq 0, \quad \varepsilon^{1+\gamma} = o(\|\overset{1}{\rho}(\varepsilon)\|) \quad \text{при всех } \gamma > 0. \quad (2.30)$$

При выполнении этих условий найдем асимптотическое представление интеграла $J_{2,2}(\varepsilon, \mu)$ аналогично работе [13]:

$$J_{2,2}(\varepsilon, \mu) = 2l(\varepsilon) \frac{\tilde{\lambda}_0}{\|\tilde{\lambda}_0\|} + \frac{2\overset{1}{\rho}(\varepsilon)}{\|\tilde{\lambda}_0\|} \ln \frac{2\|\tilde{\lambda}_0\|}{\|\overset{1}{\rho}(\varepsilon)\|} + \mathcal{F}(\varepsilon, \delta, \mu) + \mathcal{O}^*(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.31)$$

Принимая во внимание соотношения (2.28), (2.31), (2.29), получаем

$$\begin{aligned} J_2(\varepsilon) &= \int_{\tau_1}^{\Theta_0} \frac{C_0(\tau) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\tau)}} d\tau + \lim_{\gamma \rightarrow +0} \left[\left(\int_{\tau_1}^{\bar{\tau}-\gamma} + \int_{\bar{\tau}+\gamma}^{\Theta_0} \right) \frac{L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon))}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} d\tau + \frac{2 \ln \gamma}{\|\tilde{\lambda}_0\|} \overset{1}{\rho}(\varepsilon) \right] \\ &+ \vartheta(\varepsilon) \frac{C_0(\Theta_0) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\Theta_0)}} + 2l(\varepsilon) \frac{\tilde{\lambda}_0}{\|\tilde{\lambda}_0\|} + \frac{2\overset{1}{\rho}(\varepsilon)}{\|\tilde{\lambda}_0\|} \ln \frac{2\|\tilde{\lambda}_0\|}{\|\overset{1}{\rho}(\varepsilon)\|} + \mathcal{F}(\varepsilon, \delta, \mu) + \mathcal{O}^*(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (2.32)$$

В силу леммы из работы [17] слагаемое $\mathcal{F}(\varepsilon, \delta, \mu)$ можно не учитывать.

3. Нахождение первых членов асимптотики решения

Подставляя соотношения (2.26), (2.32) в уравнение (2.22) и учитывая равенство (1.11), выводим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\varepsilon}{\alpha} e^{A_0 \Theta_0} A_{12} z^0 + \lim_{\gamma \rightarrow +0} \left[\left(\int_0^{\bar{\tau}-\gamma} + \int_{\bar{\tau}+\gamma}^{\Theta_0} \right) \frac{L_1(\tau; \varepsilon, \lambda(\varepsilon))}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} d\tau + \frac{2 \ln \gamma}{\|\tilde{\lambda}_0\|} \overset{1}{\rho}(\varepsilon) \right] \\ &+ 2l(\varepsilon) \frac{\tilde{\lambda}_0}{\|\tilde{\lambda}_0\|} + \frac{2\overset{1}{\rho}(\varepsilon)}{\|\tilde{\lambda}_0\|} \cdot \ln \frac{2\|\tilde{\lambda}_0\|}{\|\overset{1}{\rho}(\varepsilon)\|} + \vartheta(\varepsilon) \left(\frac{C_0(\Theta_0) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\Theta_0)}} + A_0 e^{A_0 \Theta_0} y^0 \right) + \mathcal{O}^*(\varepsilon^2), \\ &\tilde{\lambda}_0^* \overset{1}{\rho}(\varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вектор $\lambda(\varepsilon)$ можно представить в виде $\lambda(\varepsilon) = \tilde{\lambda}(\varepsilon) + \overset{2}{\rho}(\varepsilon)$ так, что $Q \overset{2}{\rho}(\varepsilon) = 0$. Далее, $\lambda(\varepsilon) = \tilde{\lambda}(\varepsilon) - \varepsilon \hat{\lambda}_0 + \overset{2}{\rho}(\varepsilon) + \varepsilon \hat{\lambda}_0 = \overset{1}{\rho}(\varepsilon) + l(\varepsilon) \tilde{\lambda}_0 + \overset{2}{\rho}(\varepsilon) + \varepsilon \hat{\lambda}_0$. Введем в рассмотрение новый неизвестный вектор $\rho(\varepsilon) := \lambda(\varepsilon) - \varepsilon \hat{\lambda}_0$ и представим $\rho(\varepsilon)$ в виде $\rho(\varepsilon) := Q \rho(\varepsilon) + \overset{2}{\rho}(\varepsilon)$. По аналогии с работой [11] можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что*

$$\Lambda_\varepsilon^*(\tau)(\lambda_0 + \rho(\varepsilon) + \varepsilon\tilde{\lambda}_0) + e^{-\alpha\frac{\tau}{\varepsilon}} B_2^* \nu(\varepsilon) \neq 0$$

для всех $\tau \in [0, \Theta_1]$, $\Theta_1 > \Theta_0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $\rho(\varepsilon)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\langle \tilde{\lambda}_0, Q\rho(\varepsilon) \rangle \leq \tilde{\beta} \|\tilde{\lambda}_0\| \|Q\rho(\varepsilon)\|, \quad 0 < \tilde{\beta} < 1, \quad (3.2a)$$

$$Q\rho(\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad \varepsilon^{1+\gamma} = o(\|Q\rho(\varepsilon)\|), \quad \frac{1}{\rho}(\varepsilon) = \mathcal{O}(\|Q\rho(\varepsilon)\|), \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad \forall \gamma > 0. \quad (3.2b)$$

В дальнейшем будем рассматривать ρ , удовлетворяющие условиям (3.2). Заметим, что ограничения (3.2) не противоречат введенным ранее условиям (2.30), а из (3.2) следует, что $\|Q\rho(\varepsilon)\| \neq 0$. Согласно принятым обозначениям $\rho(\varepsilon) = \frac{1}{\rho}(\varepsilon) + l(\varepsilon)\tilde{\lambda}_0 + \frac{1}{\rho}(\varepsilon)$. Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon V_1 = \lim_{\gamma \rightarrow +0} \left[\left(\int_0^{\bar{\tau}-\gamma} + \int_{\bar{\tau}+\gamma}^{\Theta_0} \right) \frac{\psi(\tau) C_0(\tau) \rho(\varepsilon) - \langle C_0(\tau) \lambda_0, \rho(\varepsilon) \rangle C_0(\tau) \lambda_0}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} \|\tilde{\lambda}_0\| d\tau + 2 \ln \gamma \frac{1}{\rho}(\varepsilon) \right] \\ + 2l(\varepsilon) \tilde{\lambda}_0 + 2 \frac{1}{\rho}(\varepsilon) \ln \frac{2\|\tilde{\lambda}_0\|}{\|\frac{1}{\rho}(\varepsilon)\|} + \vartheta(\varepsilon) \left(\frac{C_0(\Theta_0) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\Theta_0)}} + A_0 e^{A_0 \Theta_0} y^0 \right) \|\tilde{\lambda}_0\| + \mathcal{O}^*(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 = -\frac{\|\tilde{\lambda}_0\|}{\alpha} e^{A_0 \Theta_0} A_{12} z^0 \\ - \|\tilde{\lambda}_0\| \int_0^{\Theta_0} \frac{\psi(\tau) (C_1(\tau) \lambda_0 + C_0(\tau) \tilde{\lambda}_0) - \frac{1}{2} \langle C_1(\tau) \lambda_0, \lambda_0 \rangle C_0(\tau) \lambda_0 - \langle C_0(\tau) \lambda_0, \tilde{\lambda}_0 \rangle C_0(\tau) \lambda_0}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} d\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заметим, что подынтегральная функция в последнем равенстве ограничена на $[0, \Theta_0]$.

Дополнительное уравнение, эквивалентное условию однородности уравнения (2.1) относительно вектора r_ε , можно задать по аналогии с [11] так, чтобы матрица линейной части системы (3.3) осталась симметричной:

$$\|\tilde{\lambda}_0\| \left(\frac{C_0(\Theta_0) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\Theta_0)}} + e^{A_0 \Theta_0} A_0 y^0 \right)^* \rho(\varepsilon) = 0.$$

Заметим, что $l(\varepsilon) = \frac{\langle \tilde{\lambda}_0, \rho(\varepsilon) \rangle}{\|\tilde{\lambda}_0\|^2}$, $\frac{1}{\rho}(\varepsilon) = Q\rho(\varepsilon) - l(\varepsilon)\tilde{\lambda}_0 = Q\rho(\varepsilon) - \frac{\langle \tilde{\lambda}_0, \rho(\varepsilon) \rangle \tilde{\lambda}_0}{\|\tilde{\lambda}_0\|^2}$. Запишем систему для нахождения первого приближения ρ_1 , ϑ_1 , ν_1 неизвестных ρ , ϑ , ν :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon V_1^{(1)} \\ \varepsilon V_1^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} & \mathcal{B}_{13} \\ \mathcal{B}_{12}^* & \mathcal{B}_{22} & \mathcal{B}_{23} \\ \mathcal{B}_{13}^* & \mathcal{B}_{23}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1^{(1)} \\ \rho_1^{(2)} \\ \vartheta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1^{(1)} \\ \rho_1^{(2)} \\ \vartheta_1 \end{pmatrix} \ln \frac{\gamma_0}{g(\rho_1^{(1)})}, \quad (3.5)$$

$$\nu_1(\varepsilon) = -2(B_2 B_2^*)^{-1} B_2 B_0^* \rho_1(\varepsilon) + \varepsilon S_1. \quad (3.6)$$

Здесь $\rho_1^{(1)} \in \mathbb{R}^r$, $\rho_1^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-r}$, $\gamma_0 = 4\|\tilde{\lambda}_0\|^2$,

$$\rho_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \rho_1^{(1)} \\ \rho_1^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{13} \\ \mathcal{B}_{23} \end{pmatrix} = \left(\frac{C_0(\Theta_0) \lambda_0}{\sqrt{\psi(\Theta_0)}} + e^{A_0 \Theta_0} A_0 y^0 \right) \|\tilde{\lambda}_0\|,$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{11} & \mathcal{B}_{12} \\ \mathcal{B}_{12}^* & \mathcal{B}_{22} \end{pmatrix} \rho_1 = \lim_{\gamma \rightarrow +0} \left[\left(\int_0^{\bar{\tau}-\gamma} + \int_{\bar{\tau}+\gamma}^{\Theta_0} \right) \frac{\psi(\tau) C_0(\tau) \rho_1(\varepsilon) - \langle C_0(\tau) \lambda_0, \rho_1(\varepsilon) \rangle C_0(\tau) \lambda_0}{\sqrt{\psi^3(\tau)}} \|\tilde{\lambda}_0\| d\tau \right. \\ \left. + 2 \ln \gamma \left(Q \rho_1(\varepsilon) - \frac{\langle \tilde{\lambda}_0, \rho_1(\varepsilon) \rangle \tilde{\lambda}_0}{\|\tilde{\lambda}_0\|^2} \right) \right] + 2 \frac{\langle \tilde{\lambda}_0, \rho_1(\varepsilon) \rangle \tilde{\lambda}_0}{\|\tilde{\lambda}_0\|^2},$$

$$\mathcal{B}_{11} = \mathcal{B}_{11}^*, \quad \mathcal{B}_{22} = \mathcal{B}_{22}^*, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rho_1 = Q \rho_1(\varepsilon) - \frac{\langle \tilde{\lambda}_0, \rho_1(\varepsilon) \rangle \tilde{\lambda}_0}{\|\tilde{\lambda}_0\|^2},$$

$$g(\rho_1^{(1)}) = \rho_1^*(\varepsilon) Q \rho_1(\varepsilon) - \frac{\langle \tilde{\lambda}_0, \rho_1(\varepsilon) \rangle^2}{\|\tilde{\lambda}_0\|^2} = \|\rho_1^{(1)}(\varepsilon)\|^2, \quad (3.7)$$

$$S_1 = -\frac{2}{\alpha} (B_2 B_2^*)^{-1} B_2 B_1^* A_0^* \lambda_0 - 2 (B_2 B_2^*)^{-1} B_2 B_0^* \hat{\lambda}_0.$$

Отметим, что $g(\rho_1^{(1)}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\rho_1^{(1)} \parallel Pr_r \tilde{\lambda}_0$, здесь $Pr_r \tilde{\lambda}_0$ — вектор, полученный из первых r координат вектора $\tilde{\lambda}_0$.

Аналогично работе [11] можно доказать, что система (3.5), (3.6) при всех достаточно малых ε имеет единственное решение

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vartheta_1 \end{pmatrix} = \varepsilon \mathcal{R}_1 V_1 + \mathcal{R}_2 \cdot \text{diag} \left(\varepsilon \ln^{-1} \frac{\gamma_i}{W(\varepsilon)} \right) \mathcal{R}_3 V_1, \quad (3.8)$$

$$\nu_1 = \varepsilon \mathcal{R}_4 V_1 + \varepsilon S_1 + \mathcal{R}_5 \cdot \text{diag} \left(\varepsilon \ln^{-1} \frac{\gamma_i}{W(\varepsilon)} \right) \mathcal{R}_6 V_1. \quad (3.9)$$

Здесь функция $W(\varepsilon)$ — решение некоторого скалярного уравнения, при этом

$$W(\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad W(\varepsilon) \ln \frac{1}{W(\varepsilon)} \sim \varepsilon K_0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0,$$

$$\varepsilon^{1+\gamma} = o(W(\varepsilon)) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0 \quad \text{и всех } \gamma > 0,$$

$K_0 > 0$, γ_i ($i = \overline{1, r-1}$) — постоянные, зависящие только от данных задачи, \mathcal{R}_k ($k = \overline{1, 6}$) — известные постоянные матрицы размерности $(n+1) \times n$, $(n+1) \times (r-1)$, $(r-1) \times n$, $m \times n$, $m \times (r-1)$ и $(r-1) \times n$ соответственно. В классе (3.8), (3.9) есть решение, удовлетворяющее условиям (3.2) при некотором $\tilde{\beta} \in (0, 1)$. Так, если для вектора V_1 (3.4) выполнены соотношения

$$Q V_1 = V_1, \quad \tilde{\lambda}_0^* V_1 = 0, \quad (3.10)$$

то указанное решение системы первого приближения (3.5), (3.6) примет вид

$$\omega_1 := \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vartheta_1 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_2 \cdot \text{diag} \left(\varepsilon \ln^{-1} \frac{\gamma_i}{W(\varepsilon)} \right) \mathcal{R}_3 V_1, \quad (3.11)$$

$$\nu_1 = \varepsilon S_1 + \mathcal{R}_5 \cdot \text{diag} \left(\varepsilon \ln^{-1} \frac{\gamma_i}{W(\varepsilon)} \right) \mathcal{R}_6 V_1. \quad (3.12)$$

В свою очередь выполнение условий (3.10) обеспечивается соответствующим выбором исходных данных задачи: начального вектора z^0 и матрицы A_{12} . Отметим, что каждая компонента вектора $\mathbf{v}_1 := (\rho_1^T, \vartheta_1, \nu_1^T)^T$ есть рациональная функция от ε и $\ln(1/W(\varepsilon))$, а $\|\omega_1\| = \mathcal{O}(W(\varepsilon))$, $\|\nu_1\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

Введя соответствующие обозначения, запишем систему (3.3), (2.21) в виде

$$\varepsilon \tilde{V} = \mathcal{B} \tilde{\rho} + \mathcal{H} \tilde{\rho} \ln \frac{\gamma_0}{\tilde{g}(\tilde{\rho})} + \mathcal{O}^*(\varepsilon^2),$$

$$\nu = b\rho + \varepsilon S_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

где $\tilde{\rho} := (\rho^T, \vartheta)^T$, $\tilde{g}(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}^* \mathcal{H} \tilde{\rho}$. Заметим, что $\tilde{g}(\tilde{\rho}) = g(\rho^{(1)})$ из (3.7).

Пусть $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$, $\nu = \nu_1 + \nu_2$, где ρ_1 , ϑ_1 , ν_1 — компоненты решения (3.11), (3.12) системы (3.5), (3.6). Обозначим $\omega = (\rho_2^T, \vartheta_2)^T$, $\mathbf{v} := (\rho_2^T, \vartheta_2, \nu_2^T)^T$. Из результатов работы [11] следует, что $g(\rho_1^{(1)}) = W^2(\varepsilon)$ (3.7). Тогда

$$\ln g^{-1}(\rho^{(1)}) = \ln \frac{1}{W^2(\varepsilon)} - \frac{2\omega_1^* \mathcal{H} \omega}{W^2(\varepsilon)} + \mathcal{O}\left(\frac{\|\omega\|^2}{W^2(\varepsilon)}\right).$$

С учетом того что \mathbf{v}_1 есть решение системы первого приближения, для ω и ν_2 получим следующую систему уравнений:

$$0 = \mathcal{B} \omega + \mathcal{H} \omega \ln \frac{\gamma_0}{W^2(\varepsilon)} - 2\mathcal{H} \omega_1(\varepsilon) \frac{\omega_1^*(\varepsilon) \mathcal{H} \omega}{W^2(\varepsilon)} + \mathcal{O}\left(\frac{\|\omega\|^2}{W(\varepsilon)}\right) + \mathcal{O}^*(\varepsilon^2), \quad (3.13)$$

$$\nu_2 = b\rho_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.14)$$

В результате линейных преобразований, описанных в [11], приходим к системе, эквивалентной (3.13), (3.14):

$$\mathbf{v} = F(\varepsilon, \mathbf{v}), \quad (3.15)$$

где при $\mathbf{v} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\gamma})$ для любого $0 < \gamma < 1$ выполняется

$$F(\varepsilon, \mathbf{v}) = \mathcal{O}\left(\frac{\|\omega\|^2}{W(\varepsilon)}\right) + \mathcal{O}^*(\varepsilon^2) = o(1)\|\omega\| + \mathcal{O}^*(\varepsilon^2) = o(\varepsilon^{1+\gamma}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отметим, что для любого $\varepsilon > 0$ отображение $F(\varepsilon, \mathbf{v})$ непрерывно по \mathbf{v} . Найдем компактное выпуклое множество, образ которого при отображении $F(\varepsilon, \mathbf{v})$ лежит в нем. Тогда по теореме Шаудера — Тихонова [18, с. 628] у $F(\varepsilon, \mathbf{v})$ есть неподвижная точка в этом компакте. Рассмотрим $B[0, K\varepsilon^{1+\gamma}]$ — шар в пространстве \mathbb{R}^{m+n+1} с центром в нуле радиуса $K\varepsilon^{1+\gamma}$. Пусть $\|\omega\| \leq K\varepsilon^{1+\gamma}$. Тогда существует ε_0 такое, что для всех $\varepsilon: \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедливо $\|F(\varepsilon, \mathbf{v})\| \leq K\varepsilon^{1+\gamma}$, а значит, уравнение (3.15) имеет решение $\mathbf{v} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\gamma})$, $0 < \gamma < 1$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Заметим, что любое другое решение системы (3.15) имеет ту же асимптотическую оценку $\mathbf{v} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\gamma})$. Действительно, из уравнения (3.15) следует, что

$$\mathbf{v} = \mathcal{O}\left(\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{W(\varepsilon)}\right) + \mathcal{O}^*(\varepsilon^2)$$

или

$$\|\mathbf{v}\| \leq K \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{W(\varepsilon)} + \mathcal{O}^*(\varepsilon^2)$$

для некоторой постоянной $K > 0$. Разрешим последнее неравенство относительно $\|\mathbf{v}\|$. Принимая во внимание предположение $\|\mathbf{v}\| = o(\|\mathbf{v}_1\|)$, получим $\|\mathbf{v}\| = \mathcal{O}^*(\varepsilon^2) = \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\gamma})$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым справедлива

Теорема. Если выполнены условия I–V, (1.12), (3.10), то время быстрого действия Θ_ε и вектор начальных условий сопряженной системы имеют асимптотическое представление $R_0 + R_1(\varepsilon, \ln(1/W(\varepsilon))) + \mathcal{O}(\varepsilon^{1+\gamma})$, $0 < \gamma < 1$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где R_1 — рациональная вектор-функция своих аргументов и $R_1(\varepsilon, \ln(1/W(\varepsilon))) = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
5. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.
6. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. 1982. Т. 20. С. 3–77. (Мат. анализ.)
7. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
8. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
9. **Гичев Т.Р., Дончев А.Л.** Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстрого действия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
10. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** Асимптотика решения задачи о быстром действии при возмущении начальных условий // Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 96–103.
11. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстрого действия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
12. **Данилин А.Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
13. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
14. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика оптимального времени в сингулярно возмущенной линейной задаче быстрого действия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 63–75.
15. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О зависимости задачи быстрого действия для линейной системы от двух малых параметров // Вестник ЧелГУ. 2011. Т. 242, № 27. С. 46–60. (Математика. Механика. Информатика.)
16. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
17. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
18. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

Данилин Алексей Руфимович

Поступила 20.12.2011

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: koo@imm.uran.ru

УДК 517.9

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПОДГОНКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ С ТОЧКОЙ ПОВОРОТА¹**К. В. Емельянов**

Рассматривается сингулярно возмущенная задача с точкой поворота, решение которой обладает двумя пограничными слоями экспоненциального типа разных порядков в окрестностях граничных точек. Для ее приближенного решения применяется разностная схема экспоненциальной подгонки на сетке с постоянным шагом. Доказывается равномерная по параметру возмущения сходимость решений, полученных по этой схеме, к решению исходной дифференциальной задачи, когда шаг сетки стремится к нулю.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка; асимптотическое разложение; разностная схема.

K. V. Emel'yanov. Difference fitting scheme for a singularly perturbed problem with turning point.

A singularly perturbed problem with turning point is considered. The solution has two exponential type boundary layers of different orders in neighborhoods of boundary points. The problem is solved approximately by means of a difference scheme of exponential fitting on a uniform grid. It is proved that the solutions obtained from this scheme converge uniformly with respect to the perturbation parameter to the solution of the original differential problem as the grid step tends to zero.

Keywords: singularly perturbed problem for second-order ordinary differential equation, asymptotic expansion, difference scheme.

Введение

Численное решение дифференциальных задач с сингулярным возмущением [1, введение] разностными методами вызывает затруднение ввиду наличия особенностей типа пограничного слоя. Если не учитывать эти особенности и использовать традиционные классические разностные схемы, то ошибки решений этих схем по сравнению с точным решением становятся большими, когда параметр возмущения $\varepsilon \rightarrow 0$.

Известны различные подходы построения схем, обладающих ε -равномерной сходимостью на сетках с постоянными, кусочно-постоянными и переменными шагами (см., например, [2–4] и библиографию в них).

В настоящей статье исследуется первая краевая задача для линейного дифференциального уравнения с малым параметром ε при старшей производной и с точкой поворота. (Коэффициент при первой производной обращается в нуль в одной из граничных точек; см., например, [5, гл. VIII].) Решение этой задачи обладает двумя пограничными слоями экспоненциального вида разных порядков в окрестности граничных точек.

Для приближенного решения такой задачи в работе рассматривается разностная схема экспоненциальной подгонки (схема Аллена — Саусвелла — Ильина), предложенная в тезисах [6]. В настоящей статье доказывается, что решения этой разностной схемы u^h сходятся равномерно по ε к решению u_ε изучаемой сингулярно возмущенной задачи, когда шаг сетки $h \rightarrow 0$.

¹Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержана проектом ориентированных фундаментальных исследований УрО РАН “Разработка алгоритмов построения трехмерных сеток для областей, полученных деформированием областей вращения” (проект 12-1-008-ЯЦ).

Доказательство проводится стандартным образом (см., например, [7]) по следующей схеме. Сначала рассматривается частичная сумма \tilde{u}_ε асимптотического при $\varepsilon \rightarrow 0$ разложения решения u_ε дифференциальной задачи. Решения разностной задачи u^h оказываются близкими при малых ε и h к \tilde{u}_ε . Отсюда следует, что u^h также близко к решению u_ε искомой дифференциальной задачи при малых ε и h . Такая оценка пригодна лишь при $\varepsilon \ll h$. Если же $\varepsilon \gg h$, то удобно использовать обычные оценки близости решений разностной и дифференциальной задач, которые приводят к неравенству вида

$$|u^h - u_\varepsilon| \leq M \frac{h^q}{\varepsilon^r}, \quad q > 1, \quad r > 0.$$

Здесь и в дальнейшем посредством M, M_k будем обозначать постоянные, не зависящие от ε и h .

1. Постановка задачи

На отрезке $[-1, 0]$ рассматривается сингулярно возмущенное уравнение

$$Lu_\varepsilon \equiv \varepsilon u_\varepsilon'' + a(x)x^2 u_\varepsilon' - b(x)u_\varepsilon = f(x), \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad (1.1)$$

с краевыми условиями

$$u_\varepsilon(-1) = \mu_{-1}, \quad u_\varepsilon(0) = \mu_0. \quad (1.2)$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq \beta^2 > 0$, кроме того, коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ и правая часть $f(x)$ — достаточно гладкие функции на отрезке $[-1, 0]$, ε — малый положительный параметр. Дополнительно предположим, что $a(x)$ — убывающая на $[-1, 0]$ функция.

Построим на отрезке $[-1, 0]$ сетку $\bar{\omega}_h$ с $N + 1$ узлами и постоянным шагом $h = N^{-1}$ между ними по правилу $\bar{\omega}_h = \{x_i : x_i = -ih, i = \overline{0, N}\}$. На сетке $\bar{\omega}_h$ аппроксимируем задачу (1.1), (1.2) разностной схемой

$$\Lambda u^h \equiv \gamma_1(x_i) \frac{u_{i-1}^h - 2u_i^h + u_{i+1}^h}{h^2} + \gamma_2(x_i) \frac{u_{i+1}^h - u_{i-1}^h}{2h} - b_i u_i^h = f_i, \quad x_i \in \omega_h, \quad u_N^h = \mu_{-1}, \quad u_0^h = \mu_0. \quad (1.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma_1(x_i) = \frac{b_i h^2}{2} \frac{\operatorname{ch} z_0(x_i)}{\operatorname{ch} z(x_i) - \operatorname{ch} z_0(x_i)}; \quad \gamma_2(x_i) = \frac{b_i h \operatorname{sh} z_0(x_i)}{\operatorname{ch} z(x_i) - \operatorname{ch} z_0(x_i)},$$

в свою очередь,

$$b_i = b(x_i), \quad z_0(x_i) = \frac{a_i x_i^2}{2\varepsilon} h, \quad a_i = a(x_i); \quad z(x_i) = \frac{(a_i^2 x_i^4 + 4b_i \varepsilon)^{1/2} h}{2\varepsilon}.$$

Выбор коэффициентов γ_1, γ_2 определяется, как и в работах [2; 8], видом пограничных слоев решения задачи (1.1), (1.2).

Легко проверить, что разностный оператор Λ обладает свойством принципа максимума [9, гл. 1]. Цель настоящей работы — доказать равномерную по ε сходимость решений u^h схемы (1.3) к решению $u_\varepsilon(x)$ задачи (1.1), (1.2) в точках сетки ω_h при $h \rightarrow 0$.

2. Об асимптотике решения дифференциальной задачи

Частичную сумму \tilde{u}_ε асимптотического разложения решения u_ε дифференциальной задачи (1.1), (1.2) ищем в виде

$$\tilde{u}_\varepsilon = R_0(x) + V_0 \left(\frac{x}{\varepsilon^{1/2}} \right) + W_0 \left(\frac{1+x}{\varepsilon} \right).$$

Функция $R_0(x)$ — это внешнее разложение асимптотики u_ε , ее можно найти из уравнения

$$x^2 a(x) R_0'(x) - b(x) R_0(x) = f(x), \quad x \in (-1, 0). \quad (2.1)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$R_0(x) = R(x) \left(\int_{-1}^x \frac{f(\xi)}{a(\xi)\xi^2} \frac{1}{R(\xi)} d\xi + C_0 \right), \quad C_0 = \text{const}, \quad \text{где} \quad R(x) = \exp \left(\int_{-1}^x \frac{\rho(t)}{t^2} dt \right),$$

решение однородного уравнения (2.1), а $\rho(t) = b(t)/a(t)$.

После интегрирования по частям

$$R_0(x) = -\frac{f(x)}{b(x)} + \int_0^x \exp \left(- \int_x^\xi \frac{\rho(t)}{t^2} dt \right) \left(\frac{f(\xi)}{b(\xi)} \right)' d\xi + R(x) C_1, \quad \text{где}$$

$$C_1 \equiv \int_{-1}^0 \exp \left(- \int_{-1}^\xi \frac{\rho(t)}{t^2} dt \right) \left(\frac{f(\xi)}{b(\xi)} \right)' d\xi + \frac{f(-1)}{b(-1)} + C_0.$$

Первые два слагаемых в $R_0(x)$ — гладкие функции при $x \in [-1, 0]$. В то же время $R(x) C_1$ при $x \rightarrow -0$ стремится к бесконечности, если $C_1 \neq 0$. Чтобы функция $R_0(x)$ была гладкая, положим $C_1 = 0$, это возможно за счет выбора постоянной C_0 . Тем самым функция

$$R_0(x) = -\frac{f(x)}{b(x)} + \int_0^x \exp \left(- \int_x^\xi \frac{\rho(t)}{t^2} dt \right) \left(\frac{f(\xi)}{b(\xi)} \right)' d\xi \quad (2.2)$$

по построению является единственным гладким решением уравнения (2.1). Однако это решение не удовлетворяет ни одному из граничных условий (1.2), что приводит к возникновению невязки в граничных условиях (1.2) (см., например, [1, гл. I]). Для ее ликвидации введено так называемое внутреннее разложение $V(x) = V_0(\xi) + W_0(t)$ в переменных $\zeta = x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ в окрестности точки $x = 0$ и $t = (1+x)\varepsilon^{-1}$ в окрестности $x = -1$.

Функция

$$V_0(\zeta) = \bar{\mu}_0 \exp(\beta\zeta), \quad \bar{\mu}_0 = \mu_0 - R_0(0), \quad (2.3)$$

есть решение задачи

$$V_0''(\zeta) - \beta^2 V_0(\zeta) = 0, \quad \beta^2 = b(0), \quad \zeta \in (-\infty, 0), \quad V_0(0) = \bar{\mu}_0, \quad V_0(\zeta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow -\infty.$$

В свою очередь, функция

$$W_0(t) = \bar{\mu}_{-1} \exp(-a_0 t), \quad a_0 \equiv a(-1), \quad \bar{\mu}_{-1} = \mu_{-1} - R_0(-1) \quad (2.4)$$

есть решение задачи

$$W_0''(t) + a_0 W_0'(t) = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad W_0(0) = \bar{\mu}_{-1}, \quad W_0(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Используя функции (2.2)–(2.4) и уравнения, которым они удовлетворяют, нетрудно получить, что $L(\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon) = \varepsilon F_\varepsilon(x) + \varepsilon^{1/2} G_\varepsilon(x) \exp(\beta\zeta) + H_\varepsilon(t) \exp(-a_0 t)$, причем $|F_\varepsilon(x)|, |G_\varepsilon(x)|, |H_\varepsilon(t)| \leq M$, т. е. $L(\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon) \leq \varepsilon^{1/2} M_0 + M_1 \exp(-a_0 t)$.

Отсюда в силу принципа максимума, которым обладает дифференциальный оператор L при сделанных предположениях относительно коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$, легко получить оценку

$$|\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon| \leq M_2 \varepsilon^{1/2}. \quad (2.5)$$

3. Вспомогательные утверждения

Можно показать, исходя из явного вида коэффициентов γ_1, γ_2 и из свойств гиперболических функций, что при любых соотношениях между h и ε , с одной стороны,

$$|\gamma_1(x) - \varepsilon|, |\gamma_2(x) - ax^2| \leq Mh^2\varepsilon^{-1}, \quad (3.1)$$

а с другой стороны,

$$|\gamma_1 - \varepsilon|, |\gamma_2 - ax^2| \leq Mh. \quad (3.2)$$

Кроме того,

$$0 < \gamma_1 \leq M(h + \varepsilon), \quad 0 < \gamma_2 < M. \quad (3.3)$$

Вычислим теперь погрешность $\Lambda u_\varepsilon - Lu_\varepsilon$ разностной аппроксимации на решении u_ε задачи (1.1), (1.2). Имеем $(\Lambda - L)u_\varepsilon = \gamma_1(u_\varepsilon)_{x\bar{x}} - \varepsilon u_\varepsilon'' + \gamma_2(u_\varepsilon)_{\bar{x}} - ax^2 u_\varepsilon' = \gamma_1[(u_\varepsilon)_{x\bar{x}} - u_\varepsilon''] + (\gamma_1 - \varepsilon)u_\varepsilon'' + \gamma_2[(u_\varepsilon)_{\bar{x}} - u_\varepsilon'] + (\gamma_2 - ax^2)u_\varepsilon'$. Здесь $(f)_{x\bar{x}}, (f)_{\bar{x}}$ — стандартные обозначения разностных производных (см., например, [2]). Можно показать, что для решения u_ε дифференциальной задачи справедлива оценка $|u_\varepsilon^{(k)}| \leq M\varepsilon^{-k}$, $0 \leq k \leq 4$. Отсюда и из оценок (3.1)–(3.3) следует неравенство

$$|(\Lambda - L)u_\varepsilon| \leq M\left(\frac{h^2}{\varepsilon^3} + \frac{h^3}{\varepsilon^4}\right).$$

Это неравенство позволяет получить, в силу принципа максимума разностного оператора Λ , соотношение

$$|u_\varepsilon - u^h| \leq M\left(\frac{h^2}{\varepsilon^3} + \frac{h^3}{\varepsilon^4}\right). \quad (3.4)$$

Эта оценка уклонения приближенного решения u^h от точного u_ε пригодна лишь при $\varepsilon \gg h$.

Согласно схеме, сформулированной во введении, покажем близость при малых h и ε решения u^h разностной задачи к частичной сумме $\tilde{u}_\varepsilon = R_0 + V_0 + W_0$ асимптотического представления решения дифференциальной задачи. С этой целью вычислим $\Lambda \tilde{u}_\varepsilon$. Вычисления проведем раздельно для каждого из слагаемых.

1. Имеем $\Lambda R_0(x) = \gamma_1(R_0)_{x\bar{x}} + \gamma_2(R_0)_{\bar{x}} - bR_0 = (\gamma_1 - \varepsilon)(R_0)_{x\bar{x}} + (\gamma_2 - ax^2)(R_0)_{\bar{x}} + \varepsilon((R_0)_{x\bar{x}} - R_0'') + ax^2((R_0)_{\bar{x}} - R_0') + \varepsilon R_0'' + f(x) \equiv f(x) + F(x)$. Из оценок (3.2) и в силу гладкости функции $R_0(x)$ приходим к оценке

$$|F(x)| \leq M_{-1}(h + \varepsilon). \quad (3.5)$$

2. Вычислим далее

$$\Lambda V_0(x_i \varepsilon^{-1/2}) = V_0 b_i \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta \tau_0}{2} \operatorname{ch} z_0 - \operatorname{sh} \beta \tau_0 \operatorname{sh} z_0}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} z_0} - 1 \right), \quad \tau_0 = \frac{h}{\varepsilon^{1/2}}.$$

После тождественных преобразований приходим к равенству

$$\Lambda V_0 = -V_0 \beta_i^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{z + z_0 - \beta \tau_0}{2} \operatorname{sh} \frac{z - z_0 + \beta \tau_0}{2}}{\Gamma(x_i)}, \quad \beta_i^2 = b(x_i).$$

Здесь $\Gamma(x_i) = \operatorname{sh} \frac{z(x_i) + z_0(x_i)}{2} \operatorname{sh} \frac{z(x_i) - z_0(x_i)}{2}$. Для дальнейшего удобно ввести обозначение

$$G(x_i) = \frac{\operatorname{sh} \frac{z + z_0 - \beta \tau_0}{2} \operatorname{sh} \frac{z - z_0 + \beta \tau_0}{2}}{\Gamma(x_i)}.$$

Так как $z_0(0) = 0$, $z(0) = \beta\tau_0$, то $G(0) = 0$. Тогда $G(x_i) = G(0) + G'(\gamma x_i)x_i = G'(\gamma x_i)x_i$, $0 < \gamma < 1$. Отсюда следует, что $\Lambda V_0 = -V_0\beta_i^2 G'(\gamma x_i)\zeta_i \varepsilon^{1/2}$.

Покажем, что

$$|G'(\gamma x_i)| \leq M(1 + |\zeta_i|)^4. \quad (3.6)$$

С этой целью выпишем явный вид $G'(\gamma x_i)$. Имеем $G' = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S_1(\gamma x_i) &= \frac{\operatorname{ch} \frac{z + z_0 - \beta\tau_0}{2} \operatorname{sh} \frac{z - z_0 + \beta\tau_0}{2}}{\Gamma(\gamma x_i)} \cdot \frac{z' + z'_0}{2}; \\ S_2(\gamma x_i) &= \frac{\operatorname{sh} \frac{z + z_0 - \beta\tau_0}{2} \operatorname{ch} \frac{z - z_0 + \beta\tau_0}{2}}{\Gamma(\gamma x_i)} \cdot \frac{z' - z'_0}{2}; \\ S_3(\gamma x_i) &= -\frac{\operatorname{sh} \frac{z + z_0 - \beta\tau_0}{2} \operatorname{sh} \frac{z - z_0 + \beta\tau_0}{2} \operatorname{cth} \frac{z + z_0}{2}}{\Gamma(\gamma x_i)} \cdot \frac{z' + z'_0}{2}; \\ S_4(\gamma x_i) &= -\frac{\operatorname{sh} \frac{z + z_0 - \beta\tau_0}{2} \operatorname{sh} \frac{z - z_0 + \beta\tau_0}{2} \operatorname{cth} \frac{z - z_0}{2}}{\Gamma(\gamma x_i)} \cdot \frac{z' - z'_0}{2}. \end{aligned}$$

Займемся теперь оценкой величин $S_k(\gamma x_i)$, $k = \overline{1, 4}$. Положим

$$\eta_i \equiv \frac{\tilde{a}_i \zeta_i x_i}{2\beta_i} \gamma^2 \leq M(1 + |\zeta_i|), \quad \tilde{a}_i = a(\gamma x_i), \quad \tilde{\beta}_i = (b(\gamma x_i))^{1/2}.$$

Тогда $(z \pm z_0)/2 = Y_i^\pm \tau_0$, где

$$Y_i^\pm \equiv \frac{\tilde{\beta}_i}{2} [(1 + \eta_i^2)^{1/2} \pm \eta_i] \leq M(1 + |\zeta_i|); \quad Y_i^- \leq \frac{\tilde{\beta}_i}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{z \pm z_0}{2} \leq M(1 + |\zeta_i|)\tau_0. \quad (3.7)$$

Нетрудно также показать, что

$$\frac{z' \pm z'_0}{2} \leq M(1 + |\zeta_i|)\tau_0. \quad (3.8)$$

Принимая во внимание введенные обозначения, оценки (3.7), (3.8), приходим к неравенству

$$|S_4| \leq \frac{\operatorname{sh} \left(Y^+ - \frac{\beta}{2}\right) \tau_0 \operatorname{sh} \left(Y^- + \frac{\beta}{2}\right) \tau_0}{\operatorname{sh} Y^+ \tau_0 \operatorname{sh} Y^- \tau_0} \cdot \frac{M(1 + |\zeta_i|)\tau_0}{\operatorname{th} Y^- \tau_0}. \quad (3.9)$$

Функция $\operatorname{sh} y$ при $y \geq 0$ возрастающая, а значение $Y_i^+ \geq Y_i^- - \beta/2 \geq 0$, поэтому

$$\begin{aligned} |S_4| &\leq M \frac{\operatorname{sh} \left(Y_i^- + \frac{\beta}{2}\right) \tau_0}{\operatorname{sh} Y_i^- \tau_0} \cdot \frac{1 + |\zeta_i|}{Y_i^-} \cdot \frac{Y_i^- \tau_0}{\operatorname{th} Y_i^- \tau_0} \\ &= \frac{M(1 + |\zeta_i|)}{Y_i^-} \frac{\operatorname{sh} \left(Y_i^- + \frac{\beta}{2}\right) \tau_0}{\left(Y_i^- + \frac{\beta}{2}\right) \tau_0} \cdot \frac{Y_i^- \tau_0}{\operatorname{sh} Y_i^- \tau_0} \cdot \frac{Y_i^- + \frac{\beta}{2}}{Y_i^-} \cdot \frac{Y_i^- \tau_0}{\operatorname{th} Y_i^- \tau_0}. \end{aligned}$$

В силу того что

$$Y_i^- + \frac{\beta}{2} = \frac{\tilde{\beta}_i}{2 [(1 + \eta_i^2)^{1/2} + \eta_i]} + \frac{\beta}{2} \leq \frac{\tilde{\beta}_i + \beta}{2} \leq \tilde{\beta}_i,$$

а для величины $(Y_i^-)^{-1}$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{Y_i^-} \leq M(1 + |\zeta_i|), \quad (3.10)$$

в частности в силу (3.10), приходим к оценке

$$|S_4| \leq M(1 + |\zeta_i|)^3 \frac{\operatorname{sh}\left(Y_i^- + \frac{\beta}{2}\right)\tau_0}{\left(Y_i^- + \frac{\beta}{2}\right)\tau_0} \cdot \frac{Y_i^- \tau_0}{\operatorname{th} Y_i^- \tau_0},$$

так как функция $y/\operatorname{sh} y$ при $y \geq 0$ убывающая, а при $y = 0$ она равна 1.

Рассмотрим теперь последнее соотношение при $\tau_0 \leq 1$. Поскольку функции $y_0^{-1} \operatorname{sh} y_0$, $y_1 \operatorname{cth} y_1$ от своих аргументов возрастающие, в нашем случае $y_0 = (Y_i^- + \beta/2)\tau_0 \leq \tilde{\beta}_i \tau_0 \leq \tilde{\beta}_i$, а $y_1 = Y_i^- \tau_0 \leq \tau_0 \tilde{\beta}_i/2 \leq \tilde{\beta}_i/2$, то

$$|S_4| \leq M(1 + |\zeta_i|)^3 \operatorname{ch}^2 \frac{\tilde{\beta}_i}{2} \leq M_4(1 + |\zeta_i|)^3 \quad (\tau_0 \leq 1).$$

Пусть теперь $\tau_0 \geq 1$. Неравенство (3.9) представим в виде

$$|S_4| \leq \frac{M(1 + |\zeta_i|)\tau_0}{\operatorname{th} Y_i^- \tau_0} \cdot \frac{\left[1 - \exp\left(-2\left(Y_i^+ - \frac{\beta}{2}\right)\tau_0\right)\right] \left[1 - \exp\left(-2\left(Y_i^- + \frac{\beta}{2}\right)\tau_0\right)\right]}{\left[1 - \exp(-2Y_i^+ \tau_0)\right] \left[1 - \exp(-2Y_i^- \tau_0)\right]}.$$

Отсюда легко видеть, что

$$|S_4| \leq M(1 + |\zeta_i|)^2 \tau_0 \frac{1}{1 - \exp(-\beta)} \cdot \frac{1}{1 - \exp(-2Y_i^- \tau_0)}.$$

Коэффициенты $a, b \leq m$, поэтому

$$2Y_i^- \tau_0 = \frac{\tilde{\beta}_i \tau_0}{(1 + \eta_i^2)^{1/2} + \eta_i} \geq \frac{\beta}{1 + 2\eta_i} \geq \frac{\beta}{1 + m|\zeta_i|\beta_i^{-1}} \geq \frac{\beta^2}{\beta + m|\zeta_i|}. \quad (3.11)$$

В свою очередь,

$$|S_4| \leq M(1 + |\zeta_i|)^3 \left[1 - \exp\left(\frac{-\beta^2}{\beta + m|\zeta_i|}\right)\right]^{-1}, \quad \tau_0 \leq \zeta_i.$$

Рассмотрим это соотношение отдельно при $|\zeta_i| \leq \beta^2/m$ и при $|\zeta_i| \geq \beta^2/m$. В первом случае неравенство для $|S_4|$ примет вид $|S_4| \leq M_5$. Если же выполняется второе неравенство, то, вводя для простоты обозначение

$$\sigma_i = \frac{\beta^2}{\beta + m|\zeta_i|} \leq \frac{\beta}{1 + \beta} \leq 1, \quad (3.12)$$

будем иметь

$$(1 - \exp(-\sigma_i))^{-1} = \sigma_i^{-1} \left(1 - \frac{\sigma_i}{2} \exp(-\theta\sigma_i)\right)^{-1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда

$$|S_4| \leq M(1 + |\zeta_i|)^3 \frac{\beta + m|\zeta_i|}{\beta^2} \left(1 - \frac{\sigma_i}{2}\right)^{-1} \leq M(1 + |\zeta_i|)^4.$$

Следовательно, при всех $|\zeta_i| \in (0, \infty)$ $|S_4| \leq M_4(1 + |\zeta_i|)^4$. Аналогичная оценка имеет место и для S_3 , т.е. $|S_3| \leq M_3(1 + |\zeta_i|)^4$, так как $\operatorname{cth}(z + z_0)/2 \leq \operatorname{cth}(z - z_0)/2$ и выполнено соотношение (3.8).

Слагаемые S_1 и S_2 оцениваются одинаково. Рассмотрим, например, S_2 . Имеем

$$S_2 = \frac{\operatorname{sh}\left(Y_i^+ - \frac{\beta}{2}\right)\tau_0 \operatorname{ch}\left(Y_i^- + \frac{\beta}{2}\right)\tau_0}{\operatorname{sh} Y_i^+ \tau_0 \operatorname{sh} Y_i^- \tau_0} \cdot \frac{z' - z'_0}{2}.$$

Отсюда в силу (3.8) и неравенства $Y_i^+ \geq Y_i^+ - \beta/2 \geq 0$ получим

$$|S_2| \leq M(1 + |\zeta_i|)\tau_0 \frac{\operatorname{ch}\left(Y_i^- + \frac{\beta}{2}\right)\tau_0}{\operatorname{sh} Y_i^- \tau_0} = M(1 + |\zeta_i|) \operatorname{ch}\left(Y_i^- + \frac{\beta}{2}\right)\tau_0 \frac{Y_i^- \tau_0}{\operatorname{sh} Y_i^- \tau_0} \cdot \frac{1}{Y_i^-}.$$

Так как $Y_i^- + \beta/2 \leq \tilde{\beta}_i \leq \sqrt{m}$, а функция $y/\operatorname{sh} y$ при $y \geq 0$ убывающая и имеет место оценка (3.10), то при $\tau_0 \leq 1$

$$|S_2| \leq M(1 + |\zeta_i|)^2 \operatorname{ch} \sqrt{m}\tau_0 \leq M(1 + |\zeta_i|)^2.$$

Пусть теперь $\tau_0 \geq 1$. При таких τ_0 оценку для $|S_2|$ запишем в виде

$$|S_2| \leq M(1 + |\zeta_i|)\tau_0 (1 - \exp(-2Y_i^- \tau_0))^{-2}, \quad \tau_0 \leq |\zeta_i|.$$

Отсюда в соответствии с (3.11) и введенным обозначением в (3.12) приходим к неравенству

$$|S_2| \leq M(1 + |\zeta_i|)^2 (1 - \exp(-\sigma_i))^{-2} \leq M(1 + |\zeta_i|)^4.$$

(См. полученную выше оценку для $|S_4|$.) Тем самым оценка (3.6) установлена. Из нее следует, что

$$\Delta V_0 = g_\varepsilon(x)\varepsilon^{1/2} \equiv -\beta_i^2 V_0 G'(\gamma x_i) \zeta \varepsilon^{1/2} \leq M\varepsilon^{1/2} (1 + |\zeta_i|)^5 \exp(-\beta|\zeta_i|) \leq M\varepsilon^{1/2} \exp\left(\frac{-\beta|\zeta_i|}{2}\right).$$

Таким образом, при всех $0 < \tau_0, |\zeta_i| < \infty$

$$\Delta V_0 = g_\varepsilon(x)\varepsilon^{1/2} \leq M_0 \varepsilon^{1/2}. \quad (3.13)$$

3. Вычислим теперь

$$\Delta W_0 = b_i W_0(t_i) \frac{2 \operatorname{sh}^2 \frac{a_0 \tau}{2} \operatorname{ch} z_0 - \operatorname{sh} a_0 \tau \operatorname{sh} z_0}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} z_0} - b_i W_0\left(\frac{1+x_i}{\varepsilon}\right) \equiv b_i W_0\left(\frac{1+x_i}{\varepsilon}\right) \Lambda_0 - b_i W_0\left(\frac{1+x_i}{\varepsilon}\right).$$

После тождественных преобразований и введения обозначений

$$\frac{z \pm z_0}{2} = \frac{a_0 \tau}{2} X_i^\pm, \quad X_i^\pm \equiv \frac{(a_i^2 x_i^4 + 4b_i \varepsilon)^{1/2} \pm a_i x_i^2}{2a_0}; \quad \tau = \frac{h}{\varepsilon}$$

Λ_0 примет вид

$$\Lambda_0 = \frac{\operatorname{sh} \frac{a_0 \tau}{2}}{\operatorname{sh} \frac{a_0 \tau}{2} X^+} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{a_0 \tau}{2} \delta}{\operatorname{sh} \frac{a_0 \tau}{2} X^-}, \quad \delta = 1 - \frac{ax_i^2}{a_0} \leq 1.$$

Для дальнейшего удобно Λ_0 представить в виде

$$\Lambda_0 = \frac{\operatorname{sh} T_0}{T_0} \cdot \frac{\operatorname{sh} \delta T_0}{\delta T_0} \cdot \frac{\delta}{X^+ X^-} \cdot \frac{T_0 X^+}{\operatorname{sh} T_0 X^+} \cdot \frac{T_0 X^-}{\operatorname{sh} T_0 X^-},$$

где $T_0 = a_0\tau/2$. Так как два последних множителя в правой части Λ_0 не больше единицы, произведение $X^+X^- = \frac{b_i\varepsilon}{a_0^2}$, $\delta = \frac{-a'(\gamma x_i) + a_i(1-x_i)}{a_0}t_i\varepsilon$, $0 < \gamma < 1$, а функция $\text{sh } y/y$ при $y \geq 0$ возрастающая, то

$$\Lambda_0 \leq \left(\frac{\text{sh } T_0}{T_0}\right)^2 \frac{-a'(\gamma x_i) + a_i(1-x_i)}{b_i} a_0 t_i \leq M \left(\frac{\text{sh } \frac{m\tau}{2}}{\frac{m\tau}{2}}\right)^2 t_i.$$

Пусть $\tau \leq 1$, тогда $\Lambda_0 \leq Mt_i$. При $\tau \geq 1$ представим Λ_0 , используя определение функции $\text{sh } z$, тогда

$$\Lambda_0 \leq \frac{1 - \exp(-a_0\tau)}{a_0\tau} \cdot \frac{1 - \exp(-a_0\tau\delta)}{a_0\tau\delta} Mt_i \exp\left[\frac{a_0\tau}{2}(1+\delta)\right].$$

Из явного вида δ получим $\delta \leq \frac{2m}{a_0}t_i\varepsilon$, $(-a', a \leq m)$. В силу малости h можно считать, например, $h \leq a_0\sigma/m$; $0 < \sigma < 1$. Отсюда $(a_0\tau/2)\delta \leq a_0\sigma t_i$, следовательно,

$$\Lambda_0 \leq Mt_i \exp\left(\frac{a_0\tau}{2} + a_0\sigma t_i\right).$$

Используя это неравенство, для ΛW_0 получим оценку

$$\begin{aligned} \Lambda W_0 &\leq Mt_i \exp\left[-a_0(t_i - \tau) - \frac{a_0\tau}{2} + a_0t_i\sigma\right] \leq Mt_i \exp\left[-\frac{a_0}{2}(t_i - \tau) - \frac{a_0\tau}{2} + a_0t_i\sigma\right] \\ &= Mt_i \exp\left[-\frac{a_0}{2}t_i(1-2\sigma)\right]. \end{aligned}$$

Положим $\sigma = 1/6$, тогда

$$\Lambda W_0 \leq Mt_i \exp\left(-\frac{a_0t_i}{3}\right) \leq M_1 \exp\left(-\frac{a_0t_i}{4}\right). \quad (3.14)$$

4. Сходимость разностной схемы

Согласно изложенному во введении плану покажем, что при малых h и ε решения u^h разностной задачи (1.3) близки к частичной сумме \tilde{u}_ε .

Лемма. Пусть \tilde{u}_ε — асимптотическое приближение решения u_ε задачи (1.1), (1.2), а u^h — решение разностной задачи. Тогда в точках разностной сетки ω_h справедливо неравенство

$$|\tilde{u}_\varepsilon - u^h| \leq M(\varepsilon^{1/2} + h). \quad (4.1)$$

Доказательство. Как отмечалось выше, разностный оператор Λ обладает свойством принципа максимума. Применим его для получения выписанной оценки (4.1). С этой целью введем вспомогательную функцию $\Phi(x)$ по правилу

$$\Phi(x) = \gamma_3(\varepsilon^{1/2} + h) + \gamma_4\varepsilon \exp\left[-\frac{a_0(1+x_i)}{6\varepsilon}\right] \pm (\tilde{u}_\varepsilon - u^h),$$

где γ_3, γ_4 — положительные постоянные, которые будут выбраны в дальнейшем. Оценим значение оператора Λ на этой функции. Имеем

$$\begin{aligned} \Lambda\Phi &= -\gamma_3(\varepsilon^{1/2} + h)b_i + \gamma_4\varepsilon\Lambda\left[\exp\left(-\frac{a_0(1+x_i)}{6\varepsilon}\right)\right] \pm [f(x_i) + F(x_i) + g_\varepsilon(x_i)\varepsilon^{1/2} + \Lambda W_0 - f(x_i)] \\ &\leq -\gamma_3\beta^2(\varepsilon^{1/2} + h) + \gamma_4\varepsilon\Lambda\left[\exp\left(-\frac{a_0(1+x_i)}{6\varepsilon}\right)\right] + |F(x_i)| + |g_\varepsilon(x_i)|\varepsilon^{1/2} + \Lambda W_0. \end{aligned}$$

Из оценок (3.5), (3.13), (3.14) следует неравенство

$$\Lambda\Phi \leq -\gamma_3(\varepsilon^{1/2} + h)\beta^2 + M_{-1}(\varepsilon^{1/2} + h) + M_0(\varepsilon^{1/2} + h) + M_1 \exp\left[-\frac{a_0(1+x_i)}{4\varepsilon}\right] + \gamma_4\varepsilon\Lambda\left[\exp\left(-\frac{a_0(1+x_i)}{6\varepsilon}\right)\right].$$

Вычислим и оценим два последних слагаемых правой части этого неравенства, обозначив их посредством s_i . После тождественных преобразований они примут вид

$$s_i \equiv M_1 \exp\left[-\frac{a_0(1+x_i)}{4\varepsilon}\right] - \varepsilon\gamma_4 b_i \exp\left[-\frac{a_0(1+x_i)}{6\varepsilon}\right] \frac{\text{sh } T}{T} \cdot \frac{\text{sh } T|\delta_0|}{T|\delta_0|} \delta_0 \\ \times \frac{6TX_i^+}{\text{sh } 6TX_i^+} \cdot \frac{6TX_i^-}{\text{sh } 6TX_i^-} \cdot \frac{1}{36X_i^+ X_i^-} - \gamma_4\varepsilon b_i \exp\left[-\frac{a_0(1+x_i)}{6\varepsilon}\right],$$

здесь $T = a_0\tau/12$, $\delta_0(x_i) = 6a_i x_i^2/a_0 - 1$. Представим $\delta_0(x_i)$ в виде

$$\delta_0(x_i) = 5 - 6 \frac{-a'(\theta x_i) + a_i(1-x_i)}{a_0} t_i \varepsilon, \quad 0 < \theta < 1,$$

и введем это представление в s_i , учтем, что $X_i^+ X_i^- = b_i \varepsilon/a_0^2$, тогда

$$s_i \leq -\frac{5}{36a_0^2} \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{6}\right) \frac{\text{sh } T}{T} \cdot \frac{\text{sh } T|\delta_0|}{T|\delta_0|} \cdot \frac{6TX_i^+}{\text{sh } 6TX_i^+} \cdot \frac{6TX_i^-}{\text{sh } 6TX_i^-} \\ \times \left[\gamma_4 - M_1 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \frac{a_0^2 36}{5} \cdot \frac{T}{\text{sh } T} \cdot \frac{T|\delta_0|}{\text{sh } T|\delta_0|} \cdot \frac{\text{sh } 6TX_i^+}{6TX_i^+} \cdot \frac{\text{sh } 6TX_i^-}{6TX_i^-} \right] \\ + \gamma_4 \varepsilon a_0 \frac{-a'(\theta x_i) + a_i(1-x_i)}{6} t_i \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{6}\right) \frac{\text{sh } T}{T} \cdot \frac{\text{sh } T|\delta_0|}{T|\delta_0|} \cdot \frac{6TX_i^+}{\text{sh } 6TX_i^+} \cdot \frac{6TX_i^-}{\text{sh } 6TX_i^-}. \quad (4.2)$$

Нетрудно показать, что при $\tau \leq 1$ и всех $x_i \in \omega_h$ величина

$$s_i^0 \equiv \tilde{M}_1 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \frac{T}{\text{sh } T} \cdot \frac{T|\delta_0|}{\text{sh } T|\delta_0|} \cdot \frac{\text{sh } 6TX_i^+}{6TX_i^+} \cdot \frac{\text{sh } 6TX_i^-}{6TX_i^-}, \quad \tilde{M}_1 = \frac{a_0^2 36}{5},$$

ограничена. Действительно, так как $f(z) \equiv z/\text{sh } z$ при $z \geq 0$ — функция убывающая и $f(0) = 1$, то $f(z) \leq 1$. В свою очередь, функция $g(y) = y^{-1} \text{sh } y$ при $y \geq 0$ возрастающая, значит,

$$s_i^0 \leq \tilde{M}_1 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \left(\frac{\text{sh } 6TX_i^+}{6TX_i^+}\right)^2.$$

В нашем случае

$$y = 6TX_i^+ = \frac{a_0\tau}{2} \frac{(a_i^2 x_i^4 + 4b_i \varepsilon)^{1/2} + a_i x_i^2}{2a_0} \\ \leq \frac{\tau}{2} (a_i x_i^2 + \sqrt{b_i} \varepsilon^{1/2}) \leq \frac{\tau(m + \sqrt{m})}{2} \leq \frac{m + \sqrt{m}}{2}, \quad a_i, b_i \leq m.$$

Отсюда получаем, что при $\tau \leq 1$ и всех $x_i \in \omega_h$

$$s_i^0 \leq M_1 M_4. \quad (4.3)$$

Пусть теперь $\tau \geq 1$. Представим s_i^0 при таких τ в виде

$$s_i^0 = \tilde{M}_1 \frac{2T}{1 - \exp(-2T)} \cdot \frac{2T|\delta_0|}{1 - \exp(-2T|\delta_0|)} \cdot \frac{1 - \exp(-12TX_i^+)}{12TX_i^+} \cdot \frac{1 - \exp(-12TX_i^-)}{12TX_i^-} \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right).$$

$$\times \exp T[-1 - |\delta_0| + 6(X_i^+ + X_i^-)].$$

Поскольку функция $f_0(y) = y/(1 - \exp(-y))$ при $y \geq 0$ возрастающая, то $f_0(y) \leq \max_{0 \leq y < \infty} f_0(y)$.

При $y = 2T = a_0\tau/6$ имеем

$$f_0(2T) = \frac{a_0\tau}{6} \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{a_0\tau}{6}\right)} \leq Mt_i \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{a_0}{6}\right)} \leq Mt_i, \quad 1 \leq \tau \leq t_i,$$

а при $y = 2T|\delta_0| \leq 5a_0\tau/6$ выводим

$$f_0(2T|\delta_0|) \leq Mt_i \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{a_0\delta_0}{6}\right)} \leq Mt_i.$$

В свою очередь, функция $g_0(z) = (1 - \exp(-z))/z$ убывающая при $z \in [0, \infty)$, $g_0(0) = 1$, значит $g_0(z) \leq 1$. Отсюда получаем, что

$$s_i^0 \leq \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \exp T[-1 - |\delta_0| + 6(X_i^+ + X_i^-)].$$

Рассмотрим это соотношение при $\delta_0 \geq 0$ и при $\delta_0 \leq 0$. Имеем

$$\delta_0(x_i) = 6 \frac{a(x_i)x_i^2}{a_0} - 1 = 0, \quad x_0^2 = \frac{a_0}{6a(x_0)}, \quad x_0 = -\left(\frac{a_0}{6a(x_0)}\right)^{1/2} \leq -\left(\frac{1}{6}\right)^{1/2}.$$

Итак, при $x_i \leq x_0$ функция $\delta_0(x_i) \geq 0$. Тогда

$$s_i^0 \leq \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \exp \frac{2b_i h}{a_i x_i^2 + (a_i^2 x_i^4 + 4b_i \varepsilon)^{1/2}} \leq \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \exp \frac{mh6}{a(0)},$$

так как $x_i^2 \geq x_0^2 \geq 1/6$, т. е. при $\delta_0(x_i) \geq 0$

$$s_i^0 \leq M_1 M_5. \quad (4.4)$$

Пусть теперь $\delta_0(x_i) \leq 0$, отсюда $|\delta_0(x_i)| = 1 - 6a(x_i)x_i^2/a_0$ при $x_i \geq x_0$. В этом случае

$$\begin{aligned} s_i^0 &\leq \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \exp\left(-\frac{a_0 \tau}{6}\right) \exp \frac{\tau}{2} [a_i x_i^2 + (a_i^2 x_i^4 + 4b_i \varepsilon)^{1/2}] \\ &\leq \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \exp\left(-\frac{a_0 \tau}{6}\right) \exp \tau [a(x_i)x_i^2 + \sqrt{b_i \varepsilon}^{1/2}]. \end{aligned}$$

В силу того, что $0 \geq x_i \geq x_0$, то $a(x_i) \leq a(x_0)$; так как функция $a(x)$ убывающая при $x \in \omega_h$ ($-x_i \leq -x_0$, $x_i^2 \leq x_0^2$), следовательно,

$$s_i^0 \leq \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \exp\left(-\frac{a_0 \tau}{6}\right) \exp \tau [a(x_0)x_0^2 + \sqrt{m\varepsilon}^{1/2}].$$

А поскольку $a(x_0)x_0^2 = a_0/6$, то при $\varepsilon^{1/2} < a_0\sigma/\sqrt{m}$

$$s_i^0 \leq \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \exp\left(-\frac{a_0 \tau}{6}\right) \exp\left(\frac{a_0 \tau}{6}\right) \exp a_0 \sigma \tau, \quad 0 < \sigma < 1,$$

$$s_i^0 \leq \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \exp a_0 \sigma \tau = \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_{i-1}}{12}\right) \exp\left[\left(-\frac{a_0 \tau}{12}\right)(1 - 12\sigma)\right].$$

Положим $\sigma = 1/24$, тогда

$$s_i^0 \leq \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_{i-1}}{24}\right) \exp\left(-\frac{a_0 \tau}{24}\right) = \tilde{M}_1 t_i^2 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{24}\right).$$

Таким образом, и при $\delta_0(x_i) \leq 0$ $s_i^0 \leq M_1 M_6$.

Отсюда и из (4.3), (4.4) вытекает, что при $\tau \in (0, \infty)$ и всех $\delta_0(x_i)$, $x_i \in \omega_h$,

$$s_i^0 \leq M_1 M_7. \quad (4.5)$$

Рассмотрим далее величину

$$s_i^1 \equiv \varepsilon \gamma_4 a_0 \frac{-a'(\theta x_i) + a_i(1 - x_i)}{6} t_i \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{6}\right) \frac{\text{sh } T}{T} \cdot \frac{\text{sh } T |\delta_0|}{T |\delta_0|} \cdot \frac{6T X_i^+}{\text{sh } 6T X_i^+} \cdot \frac{6T X_i^-}{\text{sh } 6T X_i^-}.$$

Нетрудно видеть, что при $\tau \leq 1$

$$s_i^1 \leq M_8 \varepsilon \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right).$$

Если $\tau \geq 1$, то представим s_i^1 в форме

$$\begin{aligned} s_i^1 &\leq \varepsilon \gamma_4 M t_i \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{6}\right) \exp T(1 + |\delta_0| - 6(X_i^+ + X_i^-)) \cdot \frac{1 - \exp(-2T)}{2T} \cdot \frac{1 - \exp(-2T|\delta_0|)}{2T|\delta_0|} \\ &\times \left[\frac{12T X_i^+}{1 - \exp(-12T X_i^+)} \right]^2 \leq \varepsilon \gamma_4 M t_i^3 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{6}\right) \exp T \left[1 + 5 - 6 \frac{(a_i^2 x_i^4 + 4b_i \varepsilon)^{1/2}}{a_0} \right] \\ &\leq \varepsilon \gamma_4 M t_i^3 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{6}\right) \exp \left[\frac{a_0 \tau}{2} \left(1 - \frac{a_i x_i^2}{a_0} \right) \right] \\ &= \varepsilon \gamma_4 M t_i^3 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{6}\right) \exp \frac{\tau}{2} \cdot \left[-a'(\theta x_i) + a_i(1 - x_i) \right] t_i \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \gamma_4 M t_i^3 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{6}\right) \exp \frac{h(m+m)t_i}{2}, \quad |a'_i|, a_i \leq m. \end{aligned}$$

При достаточно малых h , например при $h \leq a_0/(12m)$,

$$s_i^1 \leq \varepsilon \gamma_4 M t_i^3 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{12}\right) \leq M \varepsilon \gamma_4 \exp\left(-\frac{a_0 t_i}{24}\right).$$

Итак, при всех $\tau \in (0, \infty)$

$$|s_i^1| \leq \varepsilon \gamma_4 M_9. \quad (4.6)$$

Из явного вида (4.2) s_i и из оценок (4.5), (4.6) заключаем, что в качестве γ_4 можно взять постоянную $\gamma_4 = 2M_1 M_7$, тогда $s_i \leq \varepsilon 2M_1 M_7 M_9 \equiv \varepsilon M_{10}$. Это соотношение позволяет заключить, что

$$\Lambda \Phi = -(\varepsilon^{1/2} + h) \beta^2 \left(\gamma_3 - \frac{M_{-1} + M_0 + M_{10}}{\beta^2} \right).$$

Отсюда и из явного вида граничных значений $\Phi(-1), \Phi(0)$ нетрудно заключить, что положительную постоянную γ_3 можно выбрать так, чтобы $\Lambda \Phi \leq 0$, а $\Phi(-1), \Phi(0) \geq 0$. Тогда в силу принципа максимума $\Phi(x_i) \geq 0$, $|\tilde{u}_\varepsilon - u^h| \leq M(\varepsilon^{1/2} + h)$, что и завершает доказательство леммы.

Теорема. В точках сетки $\bar{\omega}_h$ для решения u_ε задачи (1.1), (1.2) и решения u^h разностной задачи (1.3) справедлива оценка

$$|u_\varepsilon(x_i) - u^h(x_i)| \leq M h^{\frac{2}{7}}.$$

Доказательство. В силу леммы и неравенств (4.1), (2.5) при всех $x_i \in \bar{\omega}_h$

$$|u_\varepsilon(x_i) - u^h(x_i)| \leq |u_\varepsilon(x_i) - \tilde{u}_\varepsilon(x_i)| + |\tilde{u}_\varepsilon(x_i) - u^h(x_i)| \leq M(\varepsilon^{1/2} + h).$$

Отсюда при $\varepsilon^{1/2} \leq h^{2/7}$ и из (3.4) при $\varepsilon^{1/2} \geq h^{2/7}$ вытекает утверждение теоремы.

В заключение отметим некоторые свойства схемы (1.3):

1) Пусть $a \equiv 0$, а $b = \text{const}$. Тогда

$$\gamma_1 = \frac{bh^2}{4 \text{sh}^2 \frac{b^{1/2}h}{2\varepsilon^{1/2}}}, \quad \gamma_2 \equiv 0$$

и схема (1.3) переходит в схему

$$\Lambda u \equiv \frac{bh^2}{4 \text{sh}^2 \frac{b^{1/2}h}{2\varepsilon^{1/2}}} u_{x\bar{x}} - bu = f.$$

2) Если коэффициент при первой производной в уравнении (1.1) равен $A \equiv \text{const}$, а коэффициент $b \rightarrow 0$, то

$$\lim_{b \rightarrow 0} \gamma_1(b) = \frac{Ah}{2} \text{cth} \frac{Ah}{2\varepsilon}, \quad \text{в то время как} \quad \lim_{b \rightarrow 0} \gamma_2(b) = A.$$

В этом случае схема (1.3) переходит в схему

$$\Lambda u \equiv \frac{Ah}{2} \text{cth} \frac{Ah}{2\varepsilon} u_{x\bar{x}} + Au_{\bar{x}} = f.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
2. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 2. С. 237–248.
3. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992. 232 с.
4. **Бахвалов Н. С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.
5. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1968. 464 С.
6. **Емельянов К.В.** Разностная схема для одной сингулярно возмущенной задачи с точкой поворота // Тез. докл. Всерос. шк.-конф. мол. исследователей и V Всерос. конф. “Актуальные проблемы прикладной математики и механики”, посвящ. памяти ак. А.Ф. Сидорова. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С. 37–39.
7. **Емельянов К.В.** О схеме экспоненциальной подгонки для одной сингулярно возмущенной задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 4. С. 669–676.
8. **Шишкин Г.И., Титов В.А.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при производных // Численные методы механики сплошной среды. 1976. Т. 1, № 2. С. 145–155.
9. **Самарский А.А.** Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.

Емельянов Константин Васильевич

канд. физ.-мат. наук.

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: ekv@imm.uran.ru

Поступила 28.12.2011

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С УРАВНЕНИЕМ ЛАПЛАСА ВНЕ ТОНКОГО ДИСКА¹

А. А. Ершов

Найдена равномерная асимптотика внешней задачи Дирихле с уравнением Лапласа вне тонкого диска в трехмерном пространстве. Малым параметром является толщина диска. Асимптотические коэффициенты с помощью метода согласования были построены с точностью до решения краевых задач, вблизи краев диска они были представлены в виде рядов специальных функций без указания явного вида коэффициентов перед функциями, но доказано, что существуют некоторые коэффициенты, не зависящие от малого параметра.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Лапласа, асимптотическое разложение, тонкий диск.

A. A. Ershov. Asymptotic expansion of the Dirichlet problem with Laplace equation outside a thin disk.

A uniform asymptotic expansion is found for the exterior Dirichlet problem with Laplace equation outside a thin disk in three-dimensional space. The small parameter is the thickness of the disk. The asymptotic coefficients are constructed by means of the matching method up to solutions of boundary value problems. Near the edges of the disk, the coefficients are presented as series of special functions without specifying the explicit form of the coefficients at the functions. However, it is proved that there exist some coefficients independent of the small parameter.

Keywords: boundary value problem, Laplace equation, asymptotic expansion, thin disk.

Введение

Здесь будет рассмотрена внешняя краевая задача для трехмерного уравнения Лапласа вне малой окрестности диска. Заметим, что ранее в [1, гл. III, § 2] была рассмотрена аналогичная задача в двумерном случае. Построение и обоснование асимптотики в обоих случаях довольно похоже, но есть и некоторые отличия. В данной работе сохранена структура доказательства из [1] с указанием отличий трехмерного случая от двумерного; при этом она является обобщением работы [2] на случай, когда обтекаемый диск не является кругом.

1. Постановка задачи

Пусть σ — диск $\{(x_1, x_2, x_3): 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R(\varphi), x_3 = 0\}$ в пространстве \mathbb{R}^3 , $\bar{\sigma}$ — его замыкание, а σ_ε — окрестность диска σ (рис. 1).

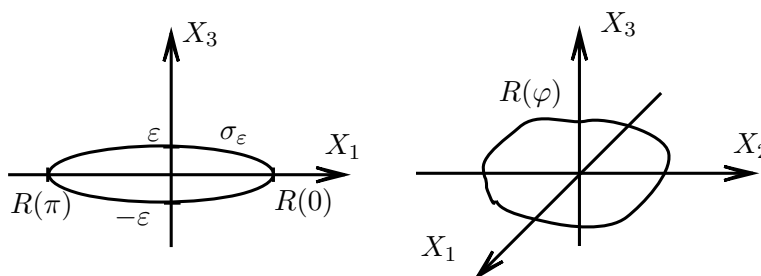


Рис. 1.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-96012-р_урал_a), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-6249.2010.1) и ФЦП-02.740.11.0612.

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий ширину окрестности σ_ε , так что $\bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon = \sigma$. Точный вид σ_ε будет указан ниже. Будем считать, что край диска образует замкнутую кривую $C = \{(x_1, x_2, x_3) : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R(\varphi), x_3 = 0\}$, где φ — полярный угол вектора $(x_1, x_2, 0)$ в плоскости Ox_1x_2 , откладываемый против часовой стрелки от оси Ox_1 , $R(\varphi)$ — 2π -периодическая функция, $R(\varphi) \in C^\infty([0, 2\pi])$, $R(\varphi) > 0$. Всюду в этой статье будут употребляться обозначения $x = (x_1, x_2, x_3)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $r_2 = R(\varphi) - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $r_c = \sqrt{r_2^2 + x_3^2}$. Посредством $u(x, \varepsilon) = u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ будем обозначать функцию из $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \sigma_\varepsilon)$, которая удовлетворяет условиям

$$\Delta u = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \sigma_\varepsilon, \quad (1.1)$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \text{ при } x \in \partial\sigma_\varepsilon, \quad (1.2)$$

$$u(x, \varepsilon) = x_3 + o(1) \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Будем искать асимптотику $u(x, \varepsilon)$ — решения задачи (1.1)–(1.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предварительно уточним вид окрестности σ_ε . Пусть $\sigma_\varepsilon = \{x : 0 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R(\varphi), \varepsilon g_-(r_2, \varphi) < x_3 < \varepsilon g_+(r_2, \varphi)\}$, где $g_\pm(r_2, \varphi) \in C^\infty(\{(x_1, x_2) : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R(\varphi)\})$. Иначе говоря, σ_ε получается из области σ_1 сжатием к плоскости $x_3 = 0$ с коэффициентом ε^{-1} . Вблизи краев диска $\bar{\sigma}$ также будем предполагать поверхность $\partial\sigma_\varepsilon$ гладкой. Это означает, что вблизи кривой C при некотором фиксированном φ уравнение границы σ_1 имеет вид $r_2 = \psi_\varphi(x_3)$, где $\psi_\varphi(x_3) \in C^\infty$. Ясно, что $\psi_\varphi(0) = \psi'_\varphi(0) = 0$, $\psi''_\varphi(0) \geq 0$, и дополнительно предположим, что $\psi''_\varphi(0) > 0$, т.е., в частности, что кривизна кривой $\partial\sigma_1 \cap \{x_2 = 0\}$ в точке $(-1, 0, 0)$ отлична от нуля. С некоторым ограничением общности для упрощения построений будем считать, что $\psi''_\varphi(0) = 2$ вне зависимости от φ . Нетрудно показать, что указанные предположения эквивалентны следующим условиям на $g_\pm(r_2, \varphi)$:

$$g_\pm(r_2, \varphi) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j(\varphi) z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow 0, \quad g_1 = 1. \quad (1.4)$$

Этот ряд, как и большинство последующих рядов, имеет асимптотический характер.

2. Внешнее разложение

Внешнее разложение задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \quad (2.1)$$

$$\text{где } \Delta u_k = 0 \text{ при } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}. \quad (2.2)$$

Условие (1.3) переходит в условие

$$u_0(x) = x_3 + o(1) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

$$u_k(x) = o(1) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad k > 0, \quad (2.4)$$

а граничные условия на σ для функций $u_k(x)$ получаются немного сложнее. Условие (1.2) можно переписать в следующем виде: $u(x_1, x_2, \varepsilon g_\pm(r_2, \varphi)) = 0$. Подставляя сюда ряд (2.1) и разлагая функции по степеням ε , придем к соотношениям

$$\begin{aligned} u_0(x_1, x_2, \pm 0) = 0, \quad u_1(x_1, x_2, \pm 0) + g_\pm(r_2, \varphi) \frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x_1, x_2, \pm 0) = 0, \\ u_k(x_1, x_2, \pm 0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} [g_\pm(r_2, \varphi)]^j \frac{\partial^j u_{k-j}}{\partial x_3^j}(x_1, x_2, \pm 0) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.2) и условий (2.3), (2.5) следует, что $u_0(x) = x_3$. Остальные функции $u_k(x)$ — это гармонические в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}$ функции, удовлетворяющие условиям (2.5) на σ и стремящиеся к нулю на бесконечности. Решение таких задач не представляло бы серьезных трудностей, если бы граничные значения на $\bar{\sigma}$ для функций $u_k(x)$ были непрерывны. Но оказывается, что функции $u_k(x)$ имеют особенности на краях диска $\bar{\sigma}$. Порядок этих особенностей растет с ростом k .

Начнем с изучения функции $u_1(x)$. Граничное условие (2.5) имеет для нее вид

$$u_1(x_1, x_2, \pm 0) = -g_{\pm}(r_2, \varphi), \quad 0 < r_2 \leq R(\varphi(x_1, x_2)). \quad (2.6)$$

Таким образом, $u_1(x)$ — это гармоническая в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}$, стремящаяся к нулю на бесконечности функция, которая удовлетворяет условию (2.6). Решение такой задачи существует и непрерывно всюду, если считать различными разные берега разреза по диску σ (это следует, например, из полноты системы функций $\{\tilde{C}_{j/2}[g(\varphi)](\rho_c, \Theta), \tilde{S}_{j/2}[g(\varphi)](\rho_c, \Theta)\}_{j=0, g \in C^\infty}$ в надрезанном торе $S(\delta)$, которые будут рассмотрены ниже). Пространство \mathbb{R}^3 с разрезом σ будем обозначать Ω .

Удобно ввести естественные обозначения для классов функций. Классы $C(\bar{\Omega})$ ($C^N(\bar{\Omega})$) — это множества функций, определенных в $\bar{\Omega}$ и непрерывных (N раз непрерывно дифференцируемых) всюду, включая границу Ω . При этом точки на разных берегах разреза σ считаются различными точками (т. е. $(x_1, x_2, +0) \neq (x_1, x_2, -0)$ при $0 < r_2 \leq R(\varphi(x_1, x_2))$). Если при этом функции определены лишь при $r_c < \delta$, то такие множества будут обозначаться $C(\bar{\Omega}_\delta)$ ($C^N(\bar{\Omega}_\delta)$). Посредством $C^\infty(\bar{\Omega} \setminus C)$ обозначаются классы функций, бесконечно дифференцируемых всюду, кроме края диска $\bar{\sigma}$, а посредством $C^\infty(\bar{\Omega}_\delta \setminus C)$ — такие же функции, определенные при $r_c < \delta$. При этом берега разреза по-прежнему считаются различными.

Итак, $u_1(x) \in C(\bar{\Omega}) \cup C^\infty(\bar{\Omega} \setminus C)$, но вблизи краев σ функция $u_1(x)$ не является гладкой функцией. Из (1.4) и (2.6) следует, что

$$u_1(x_1, x_2, \pm 0) = -\left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j(\varphi) z^j\right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow +0. \quad (2.7)$$

Исходя из этого граничного условия, можно определить асимптотическое разложение функции $u_1(x)$ при $r_c \rightarrow 0$. Однако, так как в дальнейшем появятся более общие граничные условия, найдем асимптотику при $r_c \rightarrow 0$ для гармонических функций, удовлетворяющих более широкому классу граничных условий.

Лемма 1. Пусть k — целое число, $h_+(r_2, \varphi)$ и $h_-(r_2, \varphi)$ — две функции, заданные при $0 < r_2 \leq \delta$ и такие, что $h_{\pm}(r_2, \varphi) \in C^\infty((0, \delta] \times [0, 2\pi])$,

$$h_{\pm}(r_2, \varphi) = \left(\sum_{j=-k}^{\infty} \hat{d}_j(\varphi) z^j\right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

И пусть это равенство допускает многократное почленное дифференцирование. Тогда существует гармоническая в $\Omega_\varepsilon \setminus C$ функция $u(x)$ такая, что $u(x_1, x_2, \pm 0) = h_{\pm}(r_2, \varphi)$ при $x_3 = 0$, $r_2 \in (0, \delta]$, $u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}_\delta \setminus C)$,

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} \tilde{C}_{j/2}[d_j(\varphi)](x) + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{S}_{j/2}[c_j(\varphi)](x) = \sum_{j=-k}^{\infty} r_c^{j/2} \tilde{\Phi}_k(\Theta, \varphi), \quad r_c \rightarrow 0, \quad (2.9)$$

где Θ — угол, измеряемый для произвольной точки x следующим образом:

- 1) строится перпендикуляр из точки x на плоскость Ox_1x_2 , обозначим его основание x' ;
- 2) пусть x'' — точка пересечения луча Ox' и кривой C (точка O — начало координат);
- 3) $\Theta = \angle xx''O$.

Доказательство. В двумерном случае доказано [1, гл. III, §2, лемма 2.1, следствие], что коэффициенты внешнего разложения разлагаются в ряды вида

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} d_j r^{j/2} \cos \frac{j\Theta}{2} + \sum_{j=-k}^{\infty} c_j r^{j/2} \sin \frac{j\Theta}{2}.$$

Однако эти функции не являются гармоническими в трехмерном случае (если радиус — расстояние до кривой C). Взамен найдем пригодные гармонические функции.

Введем систему криволинейных координат

$$\begin{cases} x_1 = (R(\varphi) - r_c \cos \Theta) \cos \varphi, \\ x_2 = (R(\varphi) - r_c \cos \Theta) \sin \varphi, \\ x_3 = r_c \sin \Theta. \end{cases}$$

В ней уравнение Лапласа примет вид

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{\partial^2 u}{\partial r_c^2} + \left(\frac{1}{r_c} + \frac{(r_c \cos \Theta - R(\varphi)) \cos \Theta}{R'^2(\varphi) + (R(\varphi) - r_c \cos \Theta)^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r_c} + \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2} + \frac{(R(\varphi) - r_c \cos \Theta) \sin \Theta}{r_c (R'^2(\varphi) + (R(\varphi) - r_c \cos \Theta)^2)} \frac{\partial u}{\partial \Theta} \\ & + \frac{1}{R'^2(\varphi) + (R(\varphi) - r_c \cos \Theta)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{R'(\varphi)(r_c \cos \Theta - R(\varphi) - R''(\varphi))}{R'^2(\varphi) + (R(\varphi) - r_c \cos \Theta)^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

Решения этого уравнения будем искать в виде рядов двух типов:

$$\tilde{C}_\alpha[g(\varphi)] = r_c^\alpha g(\varphi) \cos(\alpha\Theta) + \rho_c^{\alpha+1} f_1(\Theta, \varphi) + \rho_c^{\alpha+2} f_2(\Theta, \varphi) + \dots \text{ и}$$

$$\tilde{S}_\alpha[g(\varphi)] = r_c^\alpha g(\varphi) \sin(\alpha\Theta) + \rho_c^{\alpha+1} \tilde{f}_1(\Theta, \varphi) + \rho_c^{\alpha+2} \tilde{f}_2(\Theta, \varphi) + \dots$$

Построение этих рядов схоже, поэтому рассмотрим только первый. Домножим уравнение Лапласа на $R'^2(\varphi) + (R(\varphi) - r_c \cos \Theta)^2$ и подставим в него ряд \tilde{C}_α :

$$\begin{aligned} & (R'^2 + R^2 - 2Rr_c \cos \Theta + r_c^2 \cos^2 \Theta) \\ & \times [\alpha(\alpha - 1)g(\varphi)r_c^{\alpha-2} \cos \alpha\Theta + (\alpha + 1)\alpha r_c^{\alpha-1} f_1 + (\alpha + 2)(\alpha + 1)r_c^{\alpha+1} f_2 + \dots] \\ & + \left(\frac{R'^2 + R^2}{r_c} - 3R \cos \Theta + 2r_c \cos^2 \Theta \right) [\alpha r_c^{\alpha-1} \cos \alpha\Theta + (\alpha + 1)r_c^\alpha f_1 + (\alpha + 2)r_c^{\alpha+1} f_2 + \dots] \\ & + \left(\frac{R'^2 + R^2}{r_c^2} - \frac{2R \cos \Theta}{r_c} + \cos^2 \Theta \right) [-\alpha^2 r_c^\alpha g(\varphi) \cos \alpha\Theta + r_c^{\alpha+1} f''_{1\Theta\Theta} + r_c^{\alpha+2} f''_{2\Theta\Theta} + \dots] \\ & + \left(\frac{R \sin \Theta}{r_c} - \cos \Theta \sin \Theta \right) [-\alpha r_c^\alpha g(\varphi) \sin \alpha\Theta + r_c^{\alpha+1} f'_{1\Theta} + r_c^{\alpha+2} f'_{2\Theta} + \dots] \\ & + 1 \cdot [r_c^\alpha g''(\varphi) \cos \alpha + r_c^{\alpha+1} f''_{1\varphi\varphi} + r_c^{\alpha+2} f''_{2\varphi\varphi} + \dots] \\ & + \left(-\frac{RR' + R'R''}{R'^2 + R^2} + r_c \left(\frac{R' \cos \Theta}{R'^2 + R^2} + \frac{2R \cos \Theta}{(R'^2 + R^2)^2} \right) + \dots \right) [r_c^\alpha g'(\varphi) \cos \alpha + r_c^{\alpha+1} f'_{1\varphi} + r_c^{\alpha+2} f'_{2\varphi} + \dots] = 0. \end{aligned}$$

Затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях: $r_c^{\alpha-2}$: $0 = 0$; $r_c^{\alpha-1}$: $(R'^2 + R^2)(f''_{1\Theta\Theta} + (\alpha + 1)^2 f_1) = \alpha R g \cos(\alpha - 1)\Theta$.

Общим решением является

$$f_1(\Theta, \varphi) = C_1(\varphi) \cos((\alpha + 1)\Theta) + C_2(\varphi) \sin((\alpha + 1)\Theta) + \frac{R}{R'^2 + R^2} \cdot \frac{1}{4} g(\varphi) \cos((\alpha - 1)\Theta).$$

Однако функции $r_c^{\alpha+1} \cos((\alpha + 1)\Theta)$ и $r_c^{\alpha+1} \sin((\alpha + 1)\Theta)$ суть главные члены разложения при $r_c \rightarrow 0$ следующего члена ряда разложения асимптотического коэффициента также при $r_c \rightarrow 0$, коэффициенты перед которыми однозначно определяются из условия согласования, поэтому

с точностью до переобозначения коэффициентов можно положить $C_1 = C_2 = 0$. Заметим, что решение каждого следующего уравнения определено с точностью до двух коэффициентов, зависящих от φ , перед функциями $r_c^{\alpha+k} \cos((\alpha+k)\Theta)$ и $r_c^{\alpha+k} \sin((\alpha+k)\Theta)$, но все их мы положим равными нулю.

$$\begin{aligned} r_c^\alpha : (R'^2 + R^2)(f''_{2\Theta\Theta} + (\alpha+2)^2 f_2) &= \frac{R^2}{R'^2 + R^2} \frac{g(\varphi)}{4} (\alpha-2) \cos(\alpha-2)\Theta \\ &+ \left(\frac{R^2}{R'^2 + R^2} (2\alpha-3) - \frac{\alpha g(\varphi) + 2g''(\varphi)}{2} + \frac{RR' + R'R''}{R'^2 + R^2} g'(\varphi) \right) \cos \alpha\Theta + \frac{\alpha g(\varphi)}{2} \cos(\alpha+2)\Theta, \\ f_2(\Theta, \varphi) &= \left(\frac{R}{R'^2 + R^2} \right)^2 \frac{g(\varphi)}{32} \frac{(\alpha-2)}{\alpha} \cos(\alpha-2)\Theta \\ &+ \left(\frac{R^2}{(R'^2 + R^2)^2} (2\alpha-3) - \frac{\alpha g(\varphi) + 2g''(\varphi)}{2(R'^2 + R^2)} + \frac{RR' + R'R''}{(R'^2 + R^2)^2} g'(\varphi) \right) \\ &\times \frac{1}{4(\alpha+1)} \cos \alpha\Theta + \frac{\alpha g(\varphi)}{4(\alpha+2)(R'^2 + R^2)} \Theta \sin(\alpha+2)\Theta, \\ &\dots \end{aligned}$$

Легко видеть, что в случае бесконечной дифференцируемости функции $g(\varphi)$ такое построение формального асимптотического ряда возможно. Для того чтобы доказать, что построенный таким образом формальный асимптотический ряд является асимптотическим разложением для некоторого существующего решения уравнения Лапласа, воспользуемся следующими утверждениями.

Утверждение 1. Пусть $u = u(x_1, x_2)$, $f \in C^\infty(v(0))$, $\Delta u = f$, $f = O(r^N)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, тогда существует решение уравнения $u = O(r^{N+2})$ при $r \rightarrow 0$. (Здесь $v(0)$ обозначает окрестность начала координат.)

Доказательство утверждения. Поскольку $f \in C^\infty(v(0))$ и $f = O(r^N)$, то при $r \rightarrow 0$ функция f разлагается в следующий ряд Тейлора: $f = P_N(x_1, x_2) + P_{N+1}(x_1, x_2) + \dots$, где $P_k(x_1, x_2)$ — однородные полиномы степени k .

Будем искать интересующую нас функцию в виде сходящегося ряда $u = \tilde{P}_{N+2}(x_1, x_2) + \tilde{P}_{N+3}(x_1, x_2) + \dots$. Действительно, возьмем произвольное слагаемое из ряда для f вида $x_1^n x_2^m$, тогда в ряд для функции u должно войти слагаемое, которое удовлетворяет уравнению $\Delta v = x_1^n x_2^m$. Примем в качестве него

$$v = \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k \frac{\prod_{i=0}^{2k-1} (m-i)}{2k+1 \prod_{j=0}^{n+j}} x_1^{n+2(k+1)} x_2^{m-2k}.$$

Сделаем так с каждым слагаемым из однородного полинома P_N . Тогда абсолютная сумма коэффициентов полинома \tilde{P}_{N+2} увеличится не более чем в $N/2$ раз, поскольку

$$\sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{\prod_{i=0}^{2k-1} (m-i)}{\prod_{j=0}^{n+j}} \leq \frac{m}{2}.$$

Данное изменение коэффициентов не изменяет радиус сходимости степенного ряда, поэтому построенный таким образом ряд Тейлора имеет тот же радиус сходимости, что и ряд Тейлора для f . \square

Отметим, что в трехмерном пространстве аналогично можно доказать соответствующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть $u = u(x_1, x_2, x_3)$, $f \in C^\infty(v(C))$, $\Delta u = f$, $f = O(r_c^N)$, где $v(C)$ — окрестность края диска σ или кривой C . Тогда существует функция $u = O(r_c^{N+2})$ при $r_c \rightarrow 0$.

Доказательство утверждения. В каждой точке кривой C введем систему координат с осями y_1, y_2, y_3 с помощью естественной параметризации. Пусть координата $y_1 = y_1(\varphi)$ будет ответственна за перемещение по кривой C , а координаты y_2, y_3 — за расстояние до кривой C . Будем искать решение, которое равно нулю вдоль кривой C . Тогда $u''_{y_1 y_1} = 0$, а уравнение фактически станет двумерным уравнением Пуассона с параметрами $y_1(\varphi)$ и кривизной кривой C . Остается только воспользоваться утверждением 1. \square

Из последнего утверждения следует, что формальный ряд для $\tilde{C}_\alpha[g(\varphi)]$ является асимптотическим, т. е. для любого $N \in \mathbb{N}$ существует некоторая функция $\tilde{C}_\alpha[g(\varphi)]_N = g(\varphi) \cdot r^\alpha \cos \alpha \Theta + r^{\alpha+1} f_1(\varphi, \Theta) + \dots + r^{\alpha+N} f_N(\varphi, \Theta) + R_{N+1}(r, \varphi, \Theta)$, где $f_i(\varphi, \Theta)$, $i = 1, \dots, N$ — функции, определяемые по нашему алгоритму, а функция $R_{N+1}(r, \varphi, \Theta) = O(r^{N+1})$ при $r \rightarrow 0$. То же самое верно и для ряда $\tilde{S}_\alpha[g(\varphi)]$. Отметим, что при $N \rightarrow \infty$ эти асимптотические ряды могут расходиться, поэтому далее под обозначениями $\tilde{C}_\alpha[g(\varphi)]$ и $\tilde{S}_\alpha[g(\varphi)]$ будем понимать некоторые конечные суммы, необходимое число членов которых определим ниже.

Перейдем к определению коэффициентов $d_j(\varphi)$ и $c_j(\varphi)$ в формуле (2.9). Коэффициенты $d_{-k}(\varphi), \dots, d_{-1}(\varphi)$ последовательно определяются из граничных условий и ряда (1.4).

В трехмерном случае в отличие от двумерного конформные отображения можно построить лишь в нескольких вырожденных случаях, поэтому явное определение коэффициентов $\{c_j, d_j\}_{j=0}^\infty$ тем же методом невозможно. Докажем лишь, что такие коэффициенты существуют, т. е. система функций $\{\tilde{C}_{j/2}[d_j(\varphi)], \tilde{S}_{j/2}[c_j(\varphi)]\}_{j=0}^\infty$ линейно полна в множестве решений задачи Дирихле в области $C^\infty(\bar{\Omega}_\delta \setminus C)$ с краевыми условиями нашего типа, а именно на границе тора $\bar{\Omega}_\delta$ задана некоторая бесконечно дифференцируемая функция с возможным разрывом на линии пересечения с диском σ и на самом краю диска σ ширины δ задана непрерывная функция, разлагающаяся в ряд вида (1.4).

Вначале рассмотрим двумерный случай. Хотя в нем уже все доказано, но мы приведем другое доказательство. В двумерном случае аналогичную задачу можно поставить следующим образом. Надо доказать, что система функций $\{r^{j/2} \cos(j\Theta/2), r^{j/2} \sin(j\Theta/2)\}_{j=0}^\infty$ полна в множестве решений задачи Дирихле в круге с одним вырезанным радиусом, как показано на рис. 2, и фактически с теми же краевыми условиями, только r_2 в ряде (1.4) надо заменить на полярный радиус r .

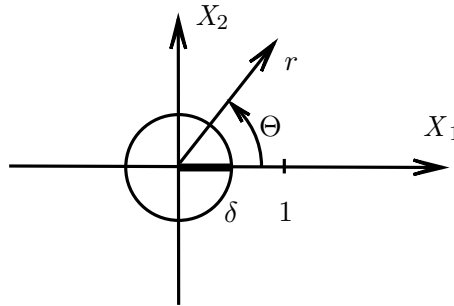


Рис. 2.

Далее, поскольку косинусы $\{\cos(j\Theta/2)\}_{j=0}^\infty$ принимают на вырезанном отрезке значения ± 1 , то можно подобрать коэффициенты перед функциями $\{r^{j/2} \cos(j\Theta/2)\}_{j=0}^\infty$, чтобы выполнялись краевые условия вида (1.4) на вырезанном отрезке с обеих сторон. Заметим, что там же функции $\{r^{j/2} \sin(j\Theta/2)\}_{j=0}^\infty$ тождественно равны нулю, зато система синусов $\{\sin(j\Theta/2)\}_{j=0}^\infty$ полна на отрезке $[0, 2\pi]$, благодаря чему с помощью системы $\{r^{j/2} \sin(j\Theta/2)\}_{j=0}^\infty$ можно выполнить любые непрерывные краевые условия на границе круга при $r = \delta$. Заметим, что они могут быть изменены системой $\{r^{j/2} \cos(j\Theta/2)\}_{j=0}^\infty$.

Вернемся к трехмерному случаю. Заметим, что в нашей системе координат при каждом фиксированном φ краевые условия практически такие же. Доказательство полноты абсолютно аналогично, однако определение коэффициентов более громоздко, поскольку у каждой функции $\tilde{C}_{j/2}$ (или $\tilde{S}_{j/2}$) за первым, “главным”, косинусом (синусом) следует $N + 1$ других слагаемых. Однако, поскольку $\tilde{C}_{j/2}$ и $\tilde{S}_{j/2}$ — это части степенных рядов, то можно найти такое достаточно малое δ (но не зависящее от ε), чтобы норма первого слагаемого $d_j(\varphi)r^{j/2} \cos(j\Theta/2)$ или $c_j(\varphi)r^{j/2} \sin(j\Theta/2)$ превосходила в L_2 (по Θ при $r = \delta$ и любом фиксированном φ) нормы других слагаемых вместе взятых (равномерность выбора δ по j следует из явного вида слагаемых рядов \tilde{C}_α и \tilde{S}_α ; по индукции можно доказать, что максимальная степень α в числителях не превосходит максимальной степени α в знаменателях, как, например, в выражении для $f_2(\varphi, \Theta)$ выше, также необходимо учесть, что коэффициенты $d_j(\varphi)$ и $c_j(\varphi)$ будут являться коэффициентами разложения какой-то одной функции, а число разлагаемых функций для построения асимптотики всей задачи на каждом шаге конечно). В таком случае делаем вывод, что функции $\tilde{C}_{j/2}[d_j(\varphi)]$ и $\tilde{S}_{j/2}[c_j(\varphi)]$ линейно независимы и полны на границе $\partial\Omega_\delta$, учитывая произвольность функций $d_j(\varphi)$ и $c_j(\varphi)$. Однако заметим, что краевые условия на самом разрезе (при $x_3 = \pm 0$) можно удовлетворить только с точностью $O(r^{N+1})$, поэтому N найдем из следующего условия. Если мы будем строить асимптотический ряд всей задачи (1.1)–(1.3) с точностью до $O(\varepsilon^n)$, то N выберем равным $(n \ln \varepsilon)/(\ln \delta) + 1$. При таком выборе N погрешность удовлетворения краевых условий будет асимптотически мала по сравнению с $O(\varepsilon^n)$, а из принципа максимума следует “полнота” такой системы с точностью до $O(\varepsilon^{n+1})$. Таким образом, в дальнейших рассуждениях будем считать, что ряды $\tilde{C}_j[d_j(\varphi)]$ и $\tilde{S}_j[c_j(\varphi)]$ содержат столько слагаемых, сколько нужно, а систему функций, построенную из них, будем считать полной.

Итак, мы нашли гармонические функции, которые пригодны для построения асимптотики в трехмерном случае. Перейдем непосредственно к доказательству леммы. Заметим, что оно практически ничем не отличается от двумерного случая.

Продолжим функции $h_\pm(r_2, \varphi)$ гладко на кольцо $[\delta, \delta_1] \times [0, 2\pi]$ так, чтобы они тождественно равнялись нулю в окрестности кривой $r_2 = \delta_1$, и обозначим $w_N(x) = \sum_{j=-k}^N \tilde{C}_{j/2}[d_j(\varphi)](r_c, \Theta, \varphi)$, где N — достаточно большое число. Очевидно, что можно подобрать коэффициенты $d_j(\varphi)$, чтобы $w_N(x_1, x_2, \pm 0) = h_\pm(r_2) + O(r_2^{(N+1)/2})$, $r_2 \rightarrow 0$, и аналогичные оценки были верны для производных этой разности. Далее построим функцию $v_N(x)$, которая гармонична в Ω_{δ_1} и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} v_N(x_1, x_2, \pm 0) &= h_\pm(r_2, \varphi) - w_N(x_1, x_2, \pm 0), \quad 0 \leq r_2 < \delta_1, \\ v_N|_{r_c=\delta_1} &= -w_N|_{r_c=\delta_1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Очевидно, что решение такой задачи в классе $C(\overline{\Omega}_{\delta_1}) \cup C^\infty(\Omega)$ существует. На краях разреза при $0 < r_2 < \delta_1$ оно остается гладким, и осталось только выяснить поведение функции $v_N(x)$ на кривой C . В двумерном случае это было сделано с помощью конформного отображения, в нашем случае воспользуемся полнотой нашей построенной системы функций, вследствие чего v_N можно представить в следующем виде:

$$v_N(x) = \sum_{j=1}^{N_2} \left(\tilde{C}_{j/2}[\tilde{d}_j(\varphi)] + \tilde{S}_{j/2}[\tilde{c}_j(\varphi)] \right) + O(r_c^{(N_2+1)/2}), \quad (2.11)$$

где N_2 достаточно велико.

Определим функцию $u_N(x) = v_N(x) + w_N(x)$. По построению и в силу (2.10) эта функция гармонична в Ω_{δ_1} , равна $h_\pm(r_2, \varphi)$ при $0 < r_2 \leq \delta_1$ и равна нулю при $r_c = \delta_1$. Так как при достаточно больших N разность $u_N(x) - u_{N+1}(x) \in C(\overline{\Omega}_{\delta_1})$ гармонична и равна нулю на границе $\overline{\Omega}_{\delta_1}$, то, следовательно, $u_N(x)$ не зависит от N . Из вида $w_N(x)$ и асимптотического разложения (2.11) вытекает (2.9). \square

Следствие 1. Пусть выполнены все условия леммы 1 и заданы коэффициенты $c_{-1}(\varphi)$, $c_{-2}(\varphi)$, \dots , $c_{-k}(\varphi)$, $k > 0$. Тогда существует функция $u(x)$, которая удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 1, только вместо асимптотического разложения (2.9) для нее справедливо асимптотическое разложение

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} \tilde{C}_{j/2}[d_j(\varphi)] + \sum_{j=-k}^{\infty} \tilde{S}_{j/2}[c_j(\varphi)], \quad r_c \rightarrow 0, \quad (2.12)$$

Доказательство отличается от доказательства леммы только тем, что в качестве $w_N(x)$ надо взять функцию

$$\sum_{j=-k}^N \tilde{C}_{j/2}[d_j(\varphi)] + \sum_{j=-k}^{-1} \tilde{S}_{j/2}[c_j(\varphi)]. \quad \square$$

Теорема 1. Пусть k — целое число, функции $h_{\pm}(r_2, \varphi) \in C^{\infty}((0, R(\varphi)] \times [0, 2\pi])$, для них справедливы асимптотические разложения (2.8) при $r_2 \rightarrow +0$. В случае $k > 0$ пусть заданы коэффициенты $c_{-1}(\varphi)$, $c_{-2}(\varphi)$, \dots , $c_{-k}(\varphi)$. Тогда существует функция $u(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus C)$, гармоничная в Ω , ограниченная на бесконечности и удовлетворяющая условиям

$$u(x_1, x_2, \pm 0) = h_{\pm}(r_2, \varphi) \quad \text{при } 0 < r_2 \leq R(\varphi). \quad (2.13)$$

При $r_c \rightarrow 0$ для функции $u(x)$ справедливо асимптотическое разложение (2.9) при $k \leq 0$ и асимптотическое разложение (2.12) при $k > 0$.

Доказательство. В соответствии с леммой 1 и ее следствием построим в $\Omega_{\delta} \setminus C$ функцию $\tilde{u}(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega}_{\delta} \setminus C)$, гармоническую в $\Omega_{\delta} \setminus C$, удовлетворяющую условию (2.13) и имеющую асимптотическое разложение (2.9) или (2.12) в зависимости от знака k . Затем построим финитную функцию $\bar{u}(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus C)$, которая в окрестности окружности совпадает с $\tilde{u}(x)$.

Для окончания доказательства осталось построить функцию $v(x)$ такую, что

$$\begin{aligned} \Delta v(x) &= -\Delta \bar{u}(x) \text{ в } \Omega, \\ v(x_1, x_2, \pm 0) &= h_{\pm}(r_2, \varphi) - \bar{u}(x_1, x_2, \pm 0) \quad \text{при } 0 < r_2 \leq R(\varphi), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$v(x) \in C(\bar{\Omega})$, $v(x)$ стремится к нулю на бесконечности. Как известно, такая задача разрешима, поскольку граничная функция в правой части равенства (2.14) непрерывна на диске $\bar{\sigma}$ и, более того, тождественна равна нулю в окрестности его краев. Очевидно, что сумма $v(x) + \bar{u}(x)$ является искомой функцией $u(x)$. В окрестности краев диска σ функция $v(x)$ разлагается в ряд (2.9), где все $d_j(\varphi) \equiv 0$, так что в асимптотическом разложении (2.12) суммы $v(x) + \bar{u}(x)$ по сравнению с тем же асимптотическим разложением функции $\bar{u}(x)$ (или, что то же самое, функции $\tilde{u}(x)$) изменятся лишь коэффициенты $c_j(\varphi)$ при $j > 0$. \square

Итак, согласно теореме 1 и условию (2.7)

$$u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{C}_{j/2}[d_{j,1}(\varphi)] + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{S}_{j/2}[c_{j,1}(\varphi)], \quad r_c \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Граничное условие для функции $u_2(x)$ имеет следующий вид:

$$u_2(x_1, x_2, \pm 0) = -g_{\pm}(r_2, \varphi) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{[g_{\pm}(r_2, \varphi)]^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, \pm 0). \quad (2.16)$$

Если учесть асимптотическое разложение (2.15) и то, что $u_0(x) = x_3$, можно найти условия

$$u_2(x_1, x_2, \pm 0) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} d_{j,2}(\varphi) z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow 0.$$

В соответствии с теоремой 1 построим гармоническую и ограниченную в Ω функцию $u_2(x)$, которая удовлетворяет условию (2.16). Функция $u_2(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus C)$ и

$$u_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{C}_{j/2}[d_{j,2}(\varphi)] + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{S}_{j/2}[c_{j,2}(\varphi)], \quad r_c \rightarrow 0.$$

Граничная функция для решения $u_3(x)$ уже имеет особенности на краях диска σ . Действительно, согласно условию (2.5)

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, \pm 0) &= -g_{\pm}(r_2, \varphi) \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, \pm 0) - \frac{g_{\pm}^2(r_2, \varphi)}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, \pm 0) \\ &- \frac{g_{\pm}^3(r_2, \varphi)}{3!} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_3^3}(x_1, x_2, \pm 0) = \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \tilde{d}_{j,3}(\varphi) z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $u_3(x)$ неограничена около кривой C ; при приближении к краю диска она растет по крайней мере как $r_c^{-1/2}$. В классе таких функций в соответствии с теоремой 1 существует решение $u_3(x)$, определенное с точностью до произвольного коэффициента $c_{-1}(\varphi)$.

Теорема 2. *Существуют функции $u_k(x)$, которые удовлетворяют соотношениям (2.2), (2.4), (2.5) и при $k \geq 1$ имеют асимптотические разложения*

$$u_k(x) = \sum_{j=-k+2}^{\infty} \tilde{C}_{j/2}[d_{j,k}(\varphi)] + \tilde{S}_{j/2}[c_{j,k}(\varphi)] = \sum_{j=-k+2}^{\infty} r_c^{j/2} \Phi_j(\Theta, \varphi), \quad r_c \rightarrow 0.$$

При определении каждой функции $u_k(x)$ для $k \geq 3$ имеются произвольные коэффициенты $c_{-1,k}(\varphi)$, $c_{-2,k}(\varphi)$, \dots , $c_{-k+2,k}(\varphi)$.

Доказательство проводится по индукции и в точности повторяет доказательство аналогичной теоремы в [1], достаточно заменить в том доказательстве x_1 на r_2 , а x_2 на x_3 . \square

3. Внутреннее разложение

Итак задача (1.1)–(1.3), как и предыдущие задачи, бисингулярна: коэффициенты внешнего разложения (2.1) имеют нарастающие особенности около краев диска $\bar{\sigma}$. Ясно, что вблизи этих краев требуется использовать другое асимптотическое разложение. Будем рассматривать подробно окрестность окружности C . Вблизи этой окружности уравнение границы $\partial\sigma_\varepsilon$ имеет вид $x_3 = \varepsilon g_{\pm}(r_2, \varphi) = \varepsilon(\pm\sqrt{r_2} + O(r_2))$. Внутренние, растянутые переменные надо выбрать так, чтобы сохранилось уравнение Лапласа и уравнение границы в главном члене не зависело от параметра ε . Ясно, что внутренние переменные — это $\rho_2 = \varepsilon^{-2}r_2$, угол φ и $\xi_3 = \varepsilon^{-2}x_3$ или $\rho_c = \varepsilon^{-2}r_c$ и те же самые углы Θ и φ . Будем использовать обе системы координат без изменения обозначений функций. Обозначим вектором $\xi = (\rho_2, \varphi, \xi_3)$. Также отметим, что выполняются соотношения $\rho_2 = \rho_c \cos \Theta$, $\xi_3 = \rho_c \sin \Theta$. В переменных ρ_2 , φ и ξ_3 уравнение границы $\partial\sigma_\varepsilon$ выглядит следующим образом:

$$\xi_3 = \pm\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_{\pm}(\rho_2, \varphi, \varepsilon),$$

где

$$\Phi_{\pm}(\rho_2, \varphi, \varepsilon) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+2}(\varphi) \varepsilon^j z^{j+2} \right)_{z=\pm\sqrt{\rho_2}}, \quad \varepsilon\sqrt{\rho_2} \rightarrow 0.$$

Граничное условие (1.2) для функции $v(\rho_2, \varphi, \xi_3, \varepsilon) \equiv u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ переходит в равенство

$$v(\rho_2, \varphi, \pm\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_{\pm}(\rho_2, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) = 0. \quad (3.1)$$

Внутреннее разложение будем искать в виде

$$V = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\rho_2, \varphi, \xi_3). \quad (3.2)$$

Ряд начинается с $i = 2$, так как $u_0|_{x \in C} = 0$, $u_0(x) \in C^{\infty}$.

Подставляя ряд (3.2) в граничное условие (3.1), формально приходим к граничным условиям для $v_i(\rho_2, \varphi, \xi_3)$:

$$v_2(\rho_2, \varphi, \pm\sqrt{\rho_2}) = 0, \quad (3.3)$$

$$v_i(\rho_2, \varphi, \pm\sqrt{\rho_2}) - \left(\sum_{l=2}^{i-1} \sum_{q=1}^{i-l} c_{q,l,i}(\varphi) \frac{\partial^q v_l(\rho_2, \varphi, z)}{\partial \eta^q} z^{i-l+q} \right)_{z=\pm\sqrt{\rho_2}} = 0, \quad i \geq 3. \quad (3.4)$$

Здесь $c_{q,l,i}(\varphi)$ — некоторые коэффициенты, которые выражаются через $g_j(\varphi)$; явный вид этих коэффициентов не играет никакой роли.

Перепишем уравнение Лапласа в координатах ρ_c , Θ и φ :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R'^2 + R^2}{\varepsilon^4} - \frac{2\rho_c R \cos \Theta}{\varepsilon^2} + \rho_c^2 \cos^2 \Theta \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \rho_c^2} + \left(\frac{R'^2 + R^2}{\varepsilon^4 \rho_c} + \frac{3R \cos \Theta}{\varepsilon^2} + 2\rho_c \cos^2 \Theta \right) \frac{\partial v}{\partial \rho_c} \\ & + \left(\frac{R'^2 + R^2}{\varepsilon^4 \rho_c^2} - \frac{2R \cos \Theta}{\varepsilon^2 \rho_c} + \cos^2 \Theta \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} + \left(\frac{R \sin \Theta}{\varepsilon^2 \rho_c} - \cos \Theta \sin \Theta \right) \frac{\partial v}{\partial \Theta} \\ & + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\varepsilon^2 \rho_c R' \cos \Theta - RR' - R'R''}{R'^2 + R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2R\varepsilon^2 \rho_c \cos \Theta - \varepsilon^4 \rho_c^2 \cos \Theta}{R'^2 + R^2} \right)^k \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

Подставим в него ряд $V = \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \varepsilon^4 v_4 + \dots$ и приравняем коэффициенты при равных степенях ε . Получим

$$\varepsilon^{-4}: (R'^2 + R^2) \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial \rho_c^2} + \frac{1}{\rho_c} \frac{\partial v_2}{\partial \rho_c} + \frac{1}{\rho_c^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \Theta^2} \right) = 0 \text{ или } (R'^2 + R^2) \Delta_{\rho_c, \Theta} v_2 = 0, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon^{-3}: \Delta_{\rho_c, \Theta} v_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2}: \Delta_{\rho_c, \Theta} v_2 &= \frac{1}{R'^2 + R^2} \left[2R\rho_c \cos \Theta \frac{\partial^2 v_2}{\partial \rho_c^2} - 3R \cos \Theta \frac{\partial v_2}{\partial \rho_c} + \frac{2R \cos \Theta}{\rho_c} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \Theta^2} \right. \\ & \left. - \frac{R \sin \Theta}{\rho_c} \frac{\partial v_2}{\partial \Theta} \right], \\ \dots & \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{k-4}: \Delta_{\rho_c, \Theta} v_k = F(v_{k-2}, v_{k-4}, \dots, v_{(k \bmod 2)+2}, \rho_c, \Theta, \varphi), \quad (3.6)$$

...

Рассмотрим структуру этих коэффициентов. В качестве v_2 и v_3 можно взять любую двумерную гармоническую функцию (по переменным ρ_c и Θ), удовлетворяющую соответствующим краевым условиям. Например, ее можно искать в виде $v_2 = \sum_{\alpha} d_{\alpha}(\varphi) \rho_c^{\alpha} \cos \alpha \Theta + c_{\alpha}(\varphi) \rho_c^{\alpha} \sin \alpha \Theta$. Коэффициент v_4 является уже решением двумерного уравнения Пуассона (переменную φ можно считать параметром), поэтому его можно представить как сумму решения уравнения Лапласа и частного решения уравнения Пуассона, т. е. $v_4 = \sum_{\beta} d_{\beta}(\varphi) \rho_c^{\beta} \cos \beta \Theta + c_{\beta}(\varphi) \rho_c^{\beta} \sin \beta \Theta + v_{4\text{ч.н.}}$. Причем коэффициенты $d_{\beta}(\varphi)$ и $c_{\beta}(\varphi)$ могут определяться только в зависимости от краевых условий, а $v_{4\text{ч.н.}}$ можно определять только в зависимости от v_2 . Таким образом мы будем определять коэффициенты, а именно, если коэффициент v_2 включает некоторое слагаемое

$d_\alpha(\varphi)\rho_c^\alpha \cos \alpha\Theta$, то мы включим в состав $v_{k\text{ч.н.}}$ коэффициент при ε^k от разложения гармонической функции $w_{\alpha 2} = \tilde{G}_\alpha[d_\alpha(\varphi)](\rho_c, \Theta, \varphi) = \varepsilon^{-2\alpha}\tilde{C}_\alpha[d_\alpha(\varphi)](\varepsilon^2\rho_c, \Theta, \varphi)$, а если коэффициент v_2 включает некоторое слагаемое $c_\alpha(\varphi)\rho_c^\alpha \sin \alpha\Theta$, то мы введем в состав всех $v_{k\text{ч.н.}}$ коэффициент при ε^k от разложения функции $\tilde{w}_{\alpha 2} = \tilde{P}_\alpha[c_\alpha(\varphi)](\rho_c, \Theta, \varphi) = \varepsilon^{-2\alpha}\tilde{S}_\alpha[c_\alpha(\varphi)](\varepsilon^2\rho_c, \Theta, \varphi)$.

Поскольку у нас есть прямая зависимость всех $w_{\alpha 2}$ и $\tilde{w}_{\alpha 2}$ от v_2 , то для удобства процесса согласования может иметь смысл считать все $w_{\alpha 2}$ и $\tilde{w}_{\alpha 2}$ частью v_2 , а $w_{\alpha i}$ и $\tilde{w}_{\alpha i}$ — частью v_i . Тогда одновременно с рядом V можно рассматривать ряд $W = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\rho_c, \Theta, \varphi, \varepsilon)$, коэффициенты которого зависят от ε , но являются гармоническими в трехмерном пространстве и имеют вид $w_i = \sum_\gamma c_\gamma \tilde{G}_\gamma + d_\gamma \tilde{P}_\gamma$, кроме того, ряд W является перегруппировкой ряда V и $A_N V = A_N W + O(\varepsilon^{N+1})$.

Приближенно заменяя границу (1.2) на параболический цилиндр $\xi_3 = \pm\sqrt{\rho_2}$, будем искать функции $v_i(\rho_2, \xi_3, \varepsilon)$ при $\rho_2 < \xi_3^2$. Так же, как и в других бисингулярных задачах, функции $v_i(\xi, \varepsilon)$ растут на бесконечности. К тому же в данном случае решения задач (3.3)–(3.6) не единственны. Можно было бы найти общий вид решений этих задач и установить степень определенности решений. Но удобнее при нахождении $v(\xi, \varepsilon)$ опираться на уже построенные функции $u_k(x)$ и на условие согласования рядов U и V . Поэтому для дальнейшего достаточно установить асимптотику на бесконечности решения уравнения Пуассона с правой частью, быстро стремящейся к нулю. Посредством D будем обозначать область $\{(\rho_2, \varphi, \xi_3) : \rho_2 < \xi_3^2, \xi_3 \in \mathbb{R}^1\}$. Заметим, что введенная область D в новых координатах не круглая, а является внешностью точного параболического цилиндра. При этом будем считать, что φ меняется на всей числовой оси, а все функции, которые от него зависят, 2π -периодические по φ .

Лемма 2. Пусть функция $F(\rho_2, \varphi, \xi_3) \in C^\infty(\bar{D})$ и

$$F(\rho_2, \varphi, \xi_3) = O(\rho_c^{-2N}) \text{ при } \rho_c \rightarrow \infty, \quad N > 0,$$

где $\rho_c = \sqrt{\rho_2^2 + \xi_3^2}$, функции $h_\pm(\xi_3, \varphi) \in C([0, \infty) \times [0, 2\pi])$, $h_-(0, \varphi) = h_+(0, \varphi)$, $h_\pm(\xi_3, \varphi) = O(|\xi_3|^{-2N})$, $v(\rho_2, \varphi, \xi_3)$ — стремящаяся к нулю решение следующей краевой задачи:

$$v(\rho_2, \varphi, \xi_3) \in C^\infty(\bar{D}), \quad v|_{\partial D} = h_\pm(\xi_3, \varphi) + O(\varepsilon),$$

$$\Delta_{\rho_2, \xi_3} v = F(\rho_2, \varphi, \xi_3) \text{ при } (\rho_2, \varphi, \xi_3) \in D.$$

Тогда равномерно в области \bar{D}

$$v(\rho_2, \varphi, \xi_3) = \sum_{j=1}^{2N_1} \left(\tilde{G}_{-j/2}[d_j(\varphi)] + \tilde{P}_{-j/2}[c_j(\varphi)] \right) + O(\rho_c^{-N_1}) + O(\varepsilon\sqrt{\rho_c}), \quad (3.7)$$

где $N_1 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$,

$$\tilde{G}_{-j/2}[d_j(\varphi)] = \varepsilon^j \tilde{C}_{-j/2}[d_j(\varphi)] \stackrel{\text{ac.}}{=} d_j(\varphi)\rho_c^{-j/2} \cos \frac{j\Theta}{2} + \varepsilon^2 \rho_c^{-j/2+1} f_1(\Theta, \varphi) + \dots \text{ при } \varepsilon\sqrt{\rho_c} \rightarrow 0,$$

$$\tilde{P}_{-j/2}[c_j(\varphi)] = \varepsilon^j \tilde{S}_{-j/2}[c_j(\varphi)] \stackrel{\text{ac.}}{=} c_j(\varphi)\rho_c^{-j/2} \sin \frac{j\Theta}{2} + \varepsilon^2 \rho_c^{-j/2+1} \tilde{f}_1(\Theta, \varphi) + \dots \text{ при } \varepsilon\sqrt{\rho_c} \rightarrow 0,$$

и равенство (3.7) можно почленно дифференцировать достаточно большое число раз.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что в постановке этой задачи нигде нет дифференцирования по φ , поэтому переменную φ можно считать параметром. Для доказательства достаточно формально подставить в формулировку аналогичной двумерной леммы [1] вместо $d_j\rho^{-j/2} \cos(j\Theta/2)$ функцию $\tilde{G}_{-j/2}[d_j(\varphi)]$, а вместо $c_j\rho^{-j/2} \sin(j\Theta/2)$ функцию $\tilde{P}_{-j/2}[c_j(\varphi)]$. \square

Лемма 3. Пусть ряд $\tilde{v} = \sum_{j=-k}^{\infty} \rho_c^{-j/2} \psi_j(\Theta, \varphi, \varepsilon)$ является ф. а. р. краевой задачи

$$\Delta_{\rho_2, \xi_3} \tilde{v} = F(\rho_2, \varphi, \xi_3) \text{ в области } D, \quad (3.8)$$

$$\tilde{v}(\xi_3^2, \varphi, \xi_3) = \tilde{\varphi}(\xi_3, \varphi), \quad \xi_3 \in \mathbb{R}^1, \quad (3.9)$$

при $\rho \rightarrow \infty$, где $F(\rho_2, \varphi, \xi_3) \in C^\infty(\overline{D})$, $\tilde{\varphi}(\xi_3, \varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^1 \times [0, 2\pi])$, $\psi_j(\Theta, \varphi) \in C^\infty([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$. Предположим также, что равенства (3.8) и (3.9) допускают дифференцирование любого порядка в том смысле, что правые части этих равенств разлагаются в асимптотические ряды, полученные соответствующим почленным дифференцированием ряда \tilde{v} . Тогда существует функция $v(\rho_2, \varphi, \xi_3) \in C^\infty(\overline{D})$, которая удовлетворяет соотношению (3.8) и с точностью до $O(\varepsilon)$ соотношению (3.9) и такая, что

$$v(\rho_2, \varphi, \xi_3) = \tilde{v} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\tilde{P}_{-j/2}[C_j(\varphi)](\rho_c, \Theta, \varphi) + \tilde{G}_{-j/2}[D_j(\varphi)](\rho_c, \Theta, \varphi) \right), \quad \rho_c \rightarrow \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Переменную φ можно считать некоторым фиксированным параметром. В остальном доказательство практически полностью повторяет соответствующее доказательство в [1], только в качестве w_N надо брать не ограниченное решение, а стремящееся к нулю на бесконечности. \square

4. Согласование

При построении коэффициентов рядов (2.1) и (3.2) — функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ — воспользуемся табл. 1 согласования этих рядов. Второй индекс i берется по номеру раскладываемой функции внутреннего разложения.

Таблица 2 получается из табл. 1 путем перемещения определенных слагаемых из ячеек в ячейки, расположенные левее. В результате такого перемещения в каждой ячейке оказывается гармоническая функция, имеющая известное асимптотическое разложение по ε . Вторая таблица используется для доказательства леммы 4 и иллюстрирует доказательство теоремы.

Построим в соответствии с теоремой 2 функции u_k при $k \geq 1$. При этом функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определены однозначно, а для $k \geq 3$ при определении каждой функции имеется $k - 2$ произвольных коэффициентов $c_{-1,k}(\varphi)$, $c_{-2,k}(\varphi)$, \dots , $c_{-k+2,k}(\varphi)$. Фиксируем пока эти коэффициенты каким-нибудь образом и выпишем в нижних частях клеток каждой строки в табл. 1 асимптотическое разложение функции $\varepsilon^k u_k(x)$ при $r \rightarrow 0$. После перехода к внутренним переменным ρ_2 , φ , ξ_3 (так что $r_c = \varepsilon^2 \rho_c$, а углы φ и Θ сохраняют свое значение) в столбцах табл. 1 появятся ряды $\varepsilon^i V_i$.

Лемма 4. Ряды V_i являются ф.а.р. краевых задач (3.3)–(3.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о получается аналогично доказательству двумерного случая из [1] простой проверкой условий (3.3)–(3.6). \square

Далее, опираясь на лемму 3, можно по асимптотическим рядам V_i построить функции $v_i(\rho_2, \varphi, \xi_3)$ — решения задач (3.3)–(3.6). Если бы ряды V_i являлись асимптотическими рядами для функций $v_i(\rho_2, \varphi, \xi_3)$ при $\rho_c \rightarrow \infty$, то по построению рядов V_i было бы выполнено условие согласования рядов (2.1) и (3.2). Но, как следует из леммы 3, асимптотический ряд для функции $v_i(\rho_2, \varphi, \xi_3)$, вообще говоря, отличается от ряда V_i на ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \rho_c^{-j/2} (c_{j,i}(\varphi) \sin(j\Theta/2) + d_{j,i}(\varphi) \cos(j\Theta/2)) = A_{1,\xi} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\tilde{P}_{-j/2}[c_{j,i}(\varphi)] + \tilde{G}_{-j/2}[d_{j,i}(\varphi)] \right)$. (Так как этот ряд удовлетворяет однородному граничному условию $V_i(\rho_2, \varphi, \pm\sqrt{\rho_2}) = 0$, то $d_{1,i}(\varphi) = 0$.) Поэтому построение функций $v_i(\rho_2, \varphi, \xi_3)$ надо проводить последовательно.

Сначала построим функцию $v_2(\rho_2, \varphi, \xi_3)$ по ряду V_2 . В результате первый столбец в табл. 1 изменится, начиная с члена $\varepsilon^2 \rho_c^{1/2} (d_{1,2}(\varphi) \cos(\Theta/2) + c_{1,2}(\varphi) \sin(\Theta/2))$; изменится $c_{1,2}(\varphi)$. В результате, опираясь на теорему 2, окончательно построим функцию $u_3(x)$.

$U \setminus V$	$\varepsilon^2 v_2(\xi)$	$\varepsilon^3 v_3(\xi)$	$\varepsilon^4 v_4(\xi)$...
$u_0(x)$	$\varepsilon^2 \zeta = \varepsilon^2 \rho_c \sin \Theta$	0	0	...
	$x_3 = r_c \sin \Theta$	0	0	
$\varepsilon u_1(x)$	$\varepsilon^2 \rho_c^{1/2} (d_{1,2}(\varphi) \cos(\Theta/2) + c_{1,2}(\varphi) \sin(\Theta/2))$	$\varepsilon^3 \rho_c (d_{2,3}(\varphi) \cos \Theta + c_{2,3}(\varphi) \sin \Theta)$	$\varepsilon^4 \rho_c^{3/2} (d_{3,4}(\varphi) \cos(3\Theta/2) + c_{3,4}(\varphi) \sin(3\Theta/2) + \frac{R(\varphi)}{R^2 + R^2} (1/4 d_{1,2}(\varphi) \cos(\Theta/2) + 1/4 c_{1,2}(\varphi) \sin(\Theta/2)))$...
	$\varepsilon r_c^{1/2} (d_{1,2}(\varphi) \cos(\Theta/2) + c_{1,2}(\varphi) \sin(\Theta/2))$	$\varepsilon r_c (d_{2,3}(\varphi) \cos \Theta + c_{2,3}(\varphi) \sin \Theta)$	$\varepsilon r_c^{3/2} (d_{3,4}(\varphi) \cos(3\Theta/2) + c_{3,4}(\varphi) \sin(3\Theta/2) + \frac{R(\varphi)}{R^2 + R^2} (1/4 d_{1,2}(\varphi) \cos(\Theta/2) + 1/4 c_{1,2}(\varphi) \sin(\Theta/2)))$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\varepsilon^2 d_{0,2}(\varphi)$	$\varepsilon^3 \rho_c^{1/2} (d_{1,3}(\varphi) \cos(\Theta/2) + c_{1,3}(\varphi) \sin(\Theta/2))$	$\varepsilon^4 \rho_c (d_{2,4}(\varphi) \cos \Theta + c_{2,4}(\varphi) \sin \Theta)$...
	$\varepsilon^2 d_{0,2}(\varphi)$	$\varepsilon^2 r_c^{1/2} (d_{1,3}(\varphi) \cos(\Theta/2) + c_{1,3}(\varphi) \sin(\Theta/2))$	$\varepsilon^2 r_c (d_{2,4}(\varphi) \cos \Theta + c_{2,4}(\varphi) \sin \Theta)$	
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\varepsilon^2 \rho_c^{-1/2} (d_{-1,2}(\varphi) \cos(\Theta/2) + c_{-1,2}(\varphi) \sin(\Theta/2))$	$\varepsilon^3 d_{0,3}(\varphi)$	$\varepsilon^4 \rho_c^{1/2} (d_{1,4}(\varphi) \cos(\Theta/2) + c_{1,4}(\varphi) \sin(\Theta/2) + \frac{R(\varphi)}{R^2 + R^2} (1/4 d_{-1,2}(\varphi) \cos(3\Theta/2) + 1/4 c_{-1,2}(\varphi) \sin(3\Theta/2)))$...
	$\varepsilon^3 r_c^{-1/2} (d_{-1,2}(\varphi) \cos(\Theta/2) + c_{-1,2}(\varphi) \sin(\Theta/2))$	$\varepsilon^3 d_{0,3}(\varphi)$	$\varepsilon^3 r_c^{1/2} (d_{1,4}(\varphi) \cos(\Theta/2) + c_{1,4}(\varphi) \sin(\Theta/2) + \frac{R(\varphi)}{R^2 + R^2} (1/4 d_{-1,2}(\varphi) \cos(3\Theta/2) + 1/4 c_{-1,2}(\varphi) \sin(3\Theta/2)))$	
...

Так как изменение функции $u_3(x)$ влечет за собой изменения в граничных условиях для следующих функций, то все они, вообще говоря, изменятся. Но их главные члены асимптотики, стоящие в первом столбце таблицы, уже окончательно определены. Ряды при $i \geq 3$ также изменятся, но в силу леммы 4 они по-прежнему останутся ф.а.р. задач (3.3)–(3.6). Далее в соответствии с леммой 3 построим функцию $v_3(\rho_2, \varphi, \xi_3)$ по ряду V_3 , стоящему во втором столбце. Теперь этот столбец изменится, начиная с члена $\varepsilon^3 \rho_c^{1/2} (d_{1,3}(\varphi) \cos(\Theta/2) + c_{1,3}(\varphi) \sin(\Theta/2))$. Это дает возможность окончательно определить $u_4(x)$ и т. д.

Таким образом, построены функции $u_k(x)$ — решения задач (2.2)–(2.5) и функции $v_i(\rho_2, \varphi, \xi_3)$ — решения задач (3.3)–(3.6), так что для рядов (2.1) и (3.2) выполнено условие согласования

$$A_{N_1, \xi} A_{N_2, x} U = A_{N_2, x} A_{N_1, \xi} V \quad \forall N_1, N_2.$$

По существу, построение асимптотических разложений решения задачи (1.1)–(1.3) закончено. Надо только отметить, что функции $u_k(x)$ определены в $\bar{\Omega} \setminus C$, т. е. в более широкой области, чем $\Omega \setminus \sigma_\varepsilon$, а функции $v_i(\xi)$ определены только в области D , т. е. при $\rho_2 < \xi_3^2$. Однако даже в окрестности прямой $\rho_c = 0$ (в новых координатах) требуется приблизить решение $u(x, \varepsilon)$ при $-\sqrt{\rho_2} + \varepsilon \Phi_-(\rho_2, \varphi, \xi_3, \varepsilon) \leq \xi_3 \leq \sqrt{\rho_2} + \varepsilon \Phi_+(\rho_2, \varphi, \xi_3, \varepsilon)$, т. е., может быть, в более широкой

Т а б л и ц а 2

$U \setminus W$	$\varepsilon^2 w_2(\xi)$	$\varepsilon^3 w_3(\xi)$...
$u_0(x)$	$\varepsilon^2 \left(\frac{\tilde{S}_1[1](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi)}{\varepsilon^2} \right)$	0	...
	$\tilde{S}_1[1](\rho_c, \Theta, \varphi)$	0	
$\varepsilon u_1(x)$	$\varepsilon^2 \left(\frac{\tilde{C}_{1/2}[d_{1,2}(\varphi)](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi)}{\varepsilon} + \frac{\tilde{S}_{1/2}[c_{1,2}(\varphi)](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi)}{\varepsilon} \right)$	$\varepsilon^3 \left(\frac{\tilde{C}_1[d_{2,3}(\varphi)](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi)}{\varepsilon^2} + \frac{\tilde{S}_1[c_{2,3}(\varphi)](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi)}{\varepsilon^2} \right)$...
	$\varepsilon(\tilde{C}_{1/2}[d_{1,2}(\varphi)](r_c, \Theta, \varphi) + \tilde{S}_{1/2}[c_{1,2}(\varphi)](r_c, \Theta, \varphi))$	$\varepsilon(\tilde{C}_1[d_{2,3}(\varphi)](r_c, \Theta, \varphi) + \tilde{S}_1[c_{2,3}(\varphi)](r_c, \Theta, \varphi))$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\varepsilon^2 d_{0,2}(\varphi)$	$\varepsilon^3 \left(\frac{\tilde{C}_{1/2}[d_{1,3}(\varphi)](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi)}{\varepsilon} + \frac{\tilde{S}_{1/2}[c_{1,3}(\varphi)](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi)}{\varepsilon} \right)$...
	$\varepsilon^2 d_{0,2}(\varphi)$	$\varepsilon^2(\tilde{C}_{1/2}[d_{1,3}(\varphi)](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi) + \tilde{S}_{1/2}[c_{1,3}(\varphi)](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi))$	
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\varepsilon^2(\varepsilon \tilde{C}_{-1/2}[d_{-1,2}(\varphi)](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi) + \varepsilon \tilde{S}_{-1/2}[c_{-1,2}(\varphi)](\varepsilon^2 \rho_c, \Theta, \varphi))$	$\varepsilon^3 d_{0,3}(\varphi)$...
	$\varepsilon^3(\tilde{C}_{-1/2}[d_{-1,2}(\varphi)](r_c, \Theta, \varphi) + \tilde{S}_{-1/2}[c_{-1,2}(\varphi)](r_c, \Theta, \varphi))$	$\varepsilon^3 d_{0,3}(\varphi)$	
...

области, чем в D . Для простоты будем считать, что в некоторой фиксированной окрестности кривой C $g_+(r_2, \varphi) \leq \sqrt{r_2}$ и $g_-(r_2, \varphi) \geq -\sqrt{r_2}$, так что функции $v_i(\xi)$ определены всюду в пересечении этой окрестности с Ω_ε . (Если указанные условия не выполнены, то для построения асимптотики надо продолжить функции $v_i(\xi)$ вне области D . Как указано в [1], в двумерном случае это не влечет за собой существенных трудностей, но этот случай мы не будем рассматривать.)

Обозначим через $S(\delta)$ пересечение области Ω_ε с тором радиуса δ вокруг кривой C . (Множество $S(\delta)$ зависит, конечно, и от ε , но эту зависимость не будем включать в обозначение.)

Введем обозначения

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U + A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U - u(x, \varepsilon),$$

$$R_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U + A_{N,\xi}W - A_{N,x}A_{N,\xi}W - u(x, \varepsilon),$$

где U — ряд (2.1), V — ряд (3.2),

$$W = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i w_i(\xi, \varepsilon), \quad w_i = \sum_{j=-i}^{\infty} (\tilde{G}_{-j/2}[d_{-j,i}(\varphi)] + \tilde{P}_{-j/2}[c_{-j,i}(\varphi)]).$$

Теорема 3. Для всех достаточно больших N всюду в $\bar{\Omega}_\varepsilon$ справедлива оценка $|T_N(x, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{N/2}$, где постоянная M не зависит от x и ε .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений (1.3), (2.3) и (2.4) следует, что

$$A_{N,x}U - u(x, \varepsilon) = o(1) \text{ при } r_c \rightarrow \infty.$$

Поскольку разность $A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U$ занимает клетки таблицы с убывающими функциями, то она также стремится к нулю при $r_c \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$T_N(x, \varepsilon) = o(1) \text{ при } r_c \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Далее докажем, что граничные значения $T_N(x, \varepsilon)$ на $\partial\sigma_\varepsilon$ малы. При $x \in \partial\sigma_\varepsilon \setminus S(\varepsilon)$ функция $A_{N,x}U = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k(x_1, x_2, \varepsilon g_\pm(x_1, x_2)) = O(\varepsilon^{N+1} u_{N+1}(x_1, x_2, \varepsilon g_\pm(r_2))) = O(\varepsilon^{N+1} \cdot r_c^{1-\frac{N+1}{2}}) = O(\varepsilon^{N+1} \cdot \varepsilon^{1-\frac{N+1}{2}}) = O(\varepsilon^{\frac{N+4}{2}})$ в силу условий (2.5) и равномерной гладкости функций $g_\pm(r_2, \varphi)$ на этом участке границы или просто по построению функций u_k .

Из таблицы следует, что

$$\begin{aligned} A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U &= \sum_{i=2}^N \varepsilon^i v_i - A_{N,x} \left(\sum_{i=2}^N \varepsilon^i v_i \right) \\ &= \sum_{i=2}^N \varepsilon^i \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{i,j}(\Theta, \varphi) \rho_c^{\frac{i-j}{2}} - \sum_{i=2}^N \varepsilon^i \sum_{j=1}^N \tilde{\varphi}_{i,j}(\Theta, \varphi) \rho_c^{\frac{i-j}{2}} = \sum_{i=2}^N \varepsilon^i \sum_{j=N+1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{i,j}(\Theta, \varphi) \rho_c^{\frac{i-j}{2}} \\ &= O \left(\sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{\varphi}_{i,N+1}(\Theta, \varphi) \rho_c^{\frac{i-N-1}{2}} \right) = O \left(\sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i \times \varepsilon^{\frac{N+1-i}{2}} \right) = O \left(\varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \right) = O(\varepsilon^{\frac{N+4}{2}}). \end{aligned}$$

Следовательно, при $x \in \partial\sigma_\varepsilon \setminus S(\varepsilon)$

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U = O(\varepsilon^{\frac{N+4}{2}}). \quad (4.2)$$

По построению ряда V , точнее из леммы 2.4, вытекает, что на участке границы $\sigma_\varepsilon \cap S(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} A_{N,\xi}V - u &= O(\varepsilon^{N+1} v_{N+1}(\rho_2, \varphi, \pm\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_\pm(\rho_2, \varphi, \varepsilon))) = O(\varepsilon^{N+1} v_{N+1}) \\ &= O(\varepsilon^{N+1} \cdot \rho_c^{-\frac{1}{2} + \frac{N+1}{2}}) = O(\varepsilon^{N+1} \varepsilon^{\frac{1}{2} - \frac{N+1}{2}}) = O(\varepsilon^{\frac{N+1}{2} + \frac{1}{2}}) = O(\varepsilon^{\frac{N+2}{2}}). \end{aligned}$$

Также благодаря асимптотическому разложению функций u_k при $r_c \rightarrow 0$ выполняется

$$\begin{aligned} A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U &= \sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k - A_{N,\xi} \left(\sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=N+1}^{\infty} f_{k,j}(\Theta, \varphi) \cdot r^{-\frac{k}{2} + \frac{j}{2}} = O \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot \varepsilon^{-\frac{k}{2} + \frac{N+1}{2}} \right) = O(\varepsilon^{\frac{N+2}{2}}). \end{aligned}$$

Соответственно, при $x \in \partial\sigma_\varepsilon \cap S(\varepsilon)$

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N,x}U = O(\varepsilon^{\frac{N+2}{2}}). \quad (4.3)$$

Заметим, что $\Delta T_N \neq 0$, поэтому рассмотрим одновременно с T_N ряд R_N . Он является гармоническим, но также удовлетворяет оценкам (4.1), (4.2) и (4.3). Кроме того,

$$R_N = T_N + O(\varepsilon^{\frac{N+1}{2}}). \quad (4.4)$$

Из оценок (4.1), (4.2), (4.3) и (4.4) вытекает утверждение теоремы. \square

Следствие 2. В области $\Omega_\varepsilon \setminus S(\varepsilon^\gamma)$ ряд (2.1) является равномерным асимптотическим разложением решения задачи (1.1)–(1.3). В области $\Omega_\varepsilon \cap S(\varepsilon^\gamma)$ ряд (3.2) является равномерным асимптотическим разложением той же задачи, где γ – любое число такое, что $0 < \gamma < 2$.

Доказательство. Достаточно проверить, что в области $\Omega_\varepsilon \setminus S(\varepsilon^\gamma)$ равномерно мала разность $A_{N,\xi}V - A_{N,\xi}A_{N,x}U$, а в области $\Omega_\varepsilon \setminus S(\varepsilon^\gamma)$ равномерно мала разность $A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U$. Действительно, в первой области

$$\begin{aligned} |A_{N,\xi} - A_{N,\xi}A_{N,x}U| &\leq M \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon^i |v_i(\xi) - B_{\frac{N-i}{2}} v_i(\xi)| \\ &\leq M \sum_{i=2}^N \varepsilon^i \rho_c^{-\frac{N-1-i}{2}} \leq \sum_{i=2}^N \varepsilon^{i+\frac{N-1-i}{2}(2-\gamma)} \leq M \varepsilon^{(N+1)(1-\frac{\gamma}{2})}, \end{aligned}$$

а во второй области

$$|A_{N,x}U - A_{N,\xi}A_{N,x}U| \leq M \sum_{k=1}^N \varepsilon^k r_c^{\frac{N-k+1}{2}} \leq M \sum_{k=1}^N \varepsilon^{k+\gamma \cdot \frac{N-k+1}{2}} \leq M \varepsilon^{\gamma \frac{N+1}{2}}. \quad \square$$

Автор благодарит академика А. М. Ильина за постановку задачи и полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
2. **Ершов А.А.** Задача об обтекании тонкого диска // Вест. Челяб. гос. ун-та. 2011. № 27 (242). С. 61–78.

Ершов Александр Анатольевич
аспирант
ассистент
Челябинский государственный университет
e-mail: ale10919@yandex.ru

Поступила 29.10.2011

УДК 517.95

РЕГУЛЯРНАЯ АСИМПТОТИКА ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА¹

С. В. Захаров

Построен регулярный асимптотический ряд для обобщенного решения стационарной системы уравнений Навье — Стокса в ограниченной области трехмерного пространства при ограничении на обобщенное число Рейнольдса. Доказана теорема о приближении точного решения однородной краевой задачи частичными суммами найденного ряда с любой степенью точности.

Ключевые слова: система Навье — Стокса, обобщенное решение, асимптотика.

S. V. Zakharov. Regular asymptotics of a generalized solution of the stationary Navier–Stokes system.

A regular asymptotic series is constructed for a generalized solution of the stationary system of Navier–Stokes equations in a bounded domain of three-dimensional space under a constraint on the generalized Reynolds number. A theorem on the approximation to any degree of accuracy of the exact solution of a homogeneous boundary value problem by partial sums of the series is proved.

Keywords: Navier–Stokes system, generalized solution, asymptotics.

1. Введение

Математическое исследование основной модели теоретической гидродинамики — системы уравнений Навье — Стокса — ведется в различных направлениях, включая доказательство разрешимости начально-краевых задач и исследование асимптотических свойств их решений [1–3]. Настоящая работа существенным образом опирается на пионерские результаты О.А. Ладыженской о существовании и единственности обобщенного решения трехмерной стационарной краевой задачи [4].

Рассмотрим систему уравнений Навье — Стокса, описывающую стационарное поле скоростей v^σ вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области Ω трехмерного пространства:

$$v^\rho \partial_\rho v^\sigma - \varepsilon \Delta v^\sigma = -\partial_\sigma p + f^\sigma, \quad (1.1)$$

$$\partial_\sigma v^\sigma = 0, \quad (1.2)$$

где $\partial_\sigma = \partial/\partial x_\sigma$, $\sigma, \rho \in \{1, 2, 3\}$, под повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 1 до 3, $\varepsilon > 0$, Δ — оператор Лапласа. На границе области Ω поставим однородное краевое условие

$$v^\sigma|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.3)$$

Будем считать, что вся потенциальная составляющая внешних сил уже содержится в градиенте давления $\partial_\sigma p$, а соленоидальная составляющая такова, что интеграл $\int_\Omega f^\sigma(x) \Phi^\sigma(x) dx$ определяет ограниченный функционал над Φ в $H(\Omega)$ (для этого будет достаточно потребовать, например, $f^\sigma \in L_{6/5}(\Omega)$) и удовлетворяется следующее ограничение на обобщенное число Рейнольдса:

$$\frac{|f|_{H(\Omega)}}{\mu_1^{1/4} \varepsilon^2} < \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.289, \quad (1.4)$$

¹Работа поддержана РФФИ (проект 11-01-00679-а), ФЦП (контракт 02.740.11.0612) и программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математике и физике” (проект 12-П-1-1009).

где

$$|f|_{H(\Omega)} = \sup_{\|\Phi\|=1} \left| \int_{\Omega} f^{\sigma}(x) \Phi^{\sigma}(x) dx \right|,$$

$\mu_1 = \mu_1(\Omega)$ — наименьшее собственное значение оператора $-\Delta$ с условием (1.3). Здесь и далее используется гильбертово пространство $H(\Omega)$ соленоидальных векторных полей, понимаемое как пополнение пространства финитных соленоидальных вектор-функций со скалярным произведением

$$[U, V] = \int_{\Omega} \partial_{\sigma} U^{\rho}(x) \partial_{\sigma} V^{\rho}(x) dx$$

и нормой

$$\|U\| = \left(\int_{\Omega} \partial_{\sigma} U^{\rho}(x) \partial_{\sigma} U^{\rho}(x) dx \right)^{1/2}.$$

По теореме О.А. Ладыженской [4] существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) с условием (1.4), т.е. такой элемент $v \in H(\Omega)$, что $[A_0 v + F - \varepsilon v, \Phi] = 0$ при всех $\Phi \in H(\Omega)$, где

$$\forall \Phi \in H(\Omega) \quad [A_0 v, \Phi] = \int_{\Omega} v^{\sigma} v^{\rho} \partial_{\sigma} \Phi^{\rho} dx, \quad (1.5)$$

$$F \in H(\Omega): \forall \Phi \in H(\Omega) \quad [F, \Phi] = \int_{\Omega} f^{\sigma} \Phi^{\sigma} dx. \quad (1.6)$$

Причем для этого решения справедлива оценка

$$\|v\| \leq \frac{\mu_1^{1/4} \varepsilon}{2\sqrt{3}}. \quad (1.7)$$

Представляет интерес естественный вопрос о поведении решения $v(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть для поля внешних сил имеет место разложение

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n f_n(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

т.е. $\forall N \geq 2 \exists M_N > 0: |f - \sum_{n=2}^N \varepsilon^n f_n|_{H(\Omega)} \leq M_N \varepsilon^{N+1}$, а коэффициенты f_n обладают теми же свойствами интегрируемости, что и f . В таких предположениях построим асимптотический ряд, приближающий точное решение $v(x, \varepsilon)$ по норме пространства $H(\Omega)$.

Близкую постановку задачи рассматривал В.В. Пухначёв [5], показавший регулярную зависимость решения от числа Рейнольдса в случае неоднородных краевых условий.

2. Формальная асимптотика

Если в уравнениях (1.1) сделаем замену $v = \varepsilon W$, $p = \varepsilon^2 Q$, $f = \varepsilon^2 G$, то для (W, Q) получим систему

$$W^{\rho} \partial_{\rho} W^{\sigma} - \Delta W^{\sigma} = -\partial_{\sigma} Q + G^{\sigma}(x, \varepsilon),$$

в которой $G^{\sigma}(x, \varepsilon)$ раскладывается в ряд по целым неотрицательным степеням ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ясно, что разложение функции $W^{\sigma}(x, \varepsilon)$ должно иметь такой же вид. Поэтому асимптотику решения $v(x, \varepsilon)$ будем искать в виде ряда

$$v(x, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x). \quad (2.1)$$

Для функции (1.6) из разложения (1.8) получаем ряд

$$F(x, \varepsilon) = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n F_n(x), \quad (2.2)$$

т. е. $\forall N \geq 2 \exists K_N > 0: \|F - \sum_{n=2}^N \varepsilon^n F_n\|_{H(\Omega)} \leq K_N \varepsilon^{N+1}$, где

$$F_n \in H(\Omega): \forall \Phi \in H(\Omega) \quad [F_n, \Phi] = \int_{\Omega} f_n^{\sigma}(x) \Phi^{\sigma}(x) dx.$$

Чтобы найти коэффициенты $v_n(x)$, подставим разложения (2.2) и (2.1) в функциональное уравнение $A_0 v + F = \varepsilon v$ и воспользуемся формальным тождеством

$$\left[A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n, \Phi \right] = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\Omega} v_{n-m}^{\sigma} v_m^{\rho} \partial_{\sigma} \Phi^{\rho} dx,$$

которое вытекает из формулы (1.5). В результате приравнивания выражений при одинаковых степенях ε получаем рекуррентную систему уравнений для коэффициентов v_n :

$$A_0 v_1 + F_2 = v_1, \quad (2.3)$$

$$A_1 v_2 + F_3 = v_2, \quad (2.4)$$

.....

$$A_1 v_n + \tilde{F}_{n+1} = v_n, \quad (2.5)$$

где

$$[A_1 w, \Phi] = \int_{\Omega} (v_1^{\sigma} w^{\rho} + v_1^{\rho} w^{\sigma}) \partial_{\sigma} \Phi^{\rho} dx, \quad (2.6)$$

$$[\tilde{F}_{n+1}, \Phi] = [F_{n+1}, \Phi] + \sum_{m=2}^{n-1} \int_{\Omega} v_{n+1-m}^{\sigma} v_m^{\rho} \partial_{\sigma} \Phi^{\rho} dx. \quad (2.7)$$

Теорема 1. *Каждое из уравнений (2.3)–(2.5) разрешимо единственным образом в классе $H(\Omega)$.*

Доказательство. По теореме О.А. Ладыженской [4] уравнение (2.3) имеет единственное решение, поскольку выполнено достаточное условие

$$\|F_2\| < \frac{\mu_1^{1/4}}{2\sqrt{3}}, \quad (2.8)$$

вытекающее из предположения (1.4) и соотношения $|f|_H = \|F\| = \varepsilon^2 \|F_2\| + O(\varepsilon^3)$ с достаточно малым ε . Кроме того, справедлива оценка

$$\|v_1\| \leq \|F_2\|. \quad (2.9)$$

Разрешимость остальных уравнений установим методом Лерэ — Шаудера [6]. Для этого покажем, что оператор A_1 компактен. Рассмотрим последовательность w_r , слабо сходящуюся в $H(\Omega)$. Тогда, дважды применяя неравенство Гёльдера к правой части соотношения

$$[A_1 w_r - A_1 w_s, \Phi] = \int_{\Omega} \{v_1^{\sigma} (w_r^{\rho} - w_s^{\rho}) + v_1^{\rho} (w_r^{\sigma} - w_s^{\sigma})\} \partial_{\sigma} \Phi^{\rho} dx.$$

и пользуясь оценкой² $\|v_1\|_{L_4} \leq C_0\|v_1\|$, получаем $|[A_1w_r - A_1w_s, \Phi]| \leq C_1\|w_r - w_s\|_{L_4} \cdot \|v_1\| \cdot \|\Phi\|$. Полагая $\Phi = A_1w_r - A_1w_s$, заключаем $\|A_1w_r - A_1w_s\| \leq C_2\|w_r - w_s\|_{L_4} \rightarrow 0$, поскольку по соответствующей теореме вложения [7] слабая сходимость в $H(\Omega)$ влечет сильную сходимость в $L_4(\Omega)$ для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Отсюда следует сходимость в $H(\Omega)$ последовательности A_1w_r , а значит компактность оператора A_1 и отображения $v \mapsto A_1v + F_3$.

Следуя методу Лерэ — Шаудера, предположим, что $\forall \lambda \in [0, 1]$ существует решение $\lambda(A_1v_2 + F_3) = v_2$, и найдем априорную оценку для v_2 , т.е. покажем ограниченность решений по совокупности. Из предыдущего уравнения вытекает соотношение $\|v_2\|^2 = \lambda[A_1v_2, v_2] + \lambda[F_3, v_2]$. Используя формулу (2.6), оценку (2.9) и неравенство

$$\left| \int_{\Omega} v^\rho u^\sigma \partial_\sigma u^\rho dx \right| \leq 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4} \|v\| \cdot \|u\|^2, \quad (2.10)$$

а также тождество

$$\int_{\Omega} v^\sigma u^\rho \partial_\sigma u^\rho dx = \int_{\Omega} v^\sigma \partial_\sigma |u|^2 dx = 0 \quad \forall u \in H(\Omega), \quad (2.11)$$

получаем

$$|[A_1w, w]| \leq 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4} \|v_1\| \cdot \|w\|^2 \leq 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4} \|F_2\| \cdot \|w\|^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|v_2\|^2 &\leq 2\sqrt{3}\lambda\mu_1^{-1/4} \|F_2\| \cdot \|v_2\|^2 + \lambda\|F_3\| \cdot \|v_2\|, \\ \|v_2\| &\leq \frac{\lambda\|F_3\|}{1 - 2\sqrt{3}\lambda\mu_1^{-1/4} \|F_2\|} \leq \frac{\|F_3\|}{1 - 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4} \|F_2\|}, \end{aligned}$$

где знаменатель строго больше нуля в силу (2.8). Отсюда по теореме Лерэ — Шаудера вытекает существование решения уравнения (2.4).

Предполагая, что уже найдены решения v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , докажем разрешимость уравнения (2.5). Из компактности оператора A_1 и формулы (2.7) вытекает компактность отображения $v \mapsto A_1v + \tilde{F}_{n+1}$. Допустим, что $\forall \lambda \in [0, 1]$ существует решение уравнения $\lambda(A_1v_n + \tilde{F}_{n+1}) = v_n$. Действуя по той же схеме, получаем

$$\|v_n\|^2 = \lambda[A_1v_n, v_n] + \lambda[F_{n+1}, v_n] + \lambda \sum_{m=2}^{n-1} \int_{\Omega} v_{n+1-m}^\sigma v_m^\rho \partial_\sigma v_n^\rho dx.$$

Тогда

$$\|v_n\|^2 \leq 2\sqrt{3}\lambda\mu_1^{-1/4} \|F_2\| \|v_n\|^2 + \lambda \left(\sum_{m=2}^{n-1} \|v_{n+1-m}\| \|v_m\| + \|F_{n+1}\| \right) \|v_n\|.$$

Следовательно,

$$\|v_n\| \leq \frac{\sum_{m=2}^{n-1} \|v_{n+1-m}\| \|v_m\| + \|F_{n+1}\|}{1 - 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4} \|F_2\|}.$$

Отсюда вытекает существование решения уравнения (2.5).

Теперь докажем единственность решений v_n . Допустим, что уравнение (2.5) имеет решения v_n и \tilde{v}_n . Полагая $w = v_n - \tilde{v}_n$, имеем $A_1w = w$. Умножая скалярно на w , получаем

$$\int_{\Omega} v_1^\sigma \partial_\sigma |w|^2 dx + \int_{\Omega} v_1^\rho w^\sigma \partial_\sigma w^\rho dx = \|w\|^2.$$

²Для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ оператор вложения из $W_{2,1}(\Omega)$ в $L_4(\Omega)$ ограничен.

С учетом (2.10) и (2.11) это дает

$$\|w\|^2 \leq 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4}\|v_1\| \cdot \|w\|^2, \quad \|v_1\| \geq \frac{\mu_1^{1/4}}{2\sqrt{3}},$$

что противоречит неравенствам (2.9) и (2.8):

$$\|v_1\| \leq \|F_2\| < \frac{\mu_1^{1/4}}{2\sqrt{3}}.$$

Теорема 1 полностью доказана, тем самым однозначно построен формальный асимптотический ряд (2.1).

3. Обоснование асимптотики

Теперь покажем, что построенный ряд (2.1) действительно приближает истинное решение задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 2. Пусть $v \in H(\Omega)$ — обобщенное решение краевой задачи (1.1)–(1.3) с условиями (1.4) и (1.8). Тогда для любого $N \geq 2$

$$\left\| v - \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon^n v_n \right\|_{H(\Omega)} < C\varepsilon^N,$$

где $v_1, \dots, v_n \in H(\Omega)$ — решения уравнений (2.3)–(2.5) и $C = C(\Omega, N) > 0$.

Доказательство. Подставим $v = S_N + U_N$, $S_N = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n v_n$ в уравнение $[A_0 v + F - \varepsilon v, \Phi] = 0$. Поскольку

$$[A_0 v, \Phi] = [A_0 S_N, \Phi] + \int_{\Omega} (S_N^\sigma U_N^\rho + v^\rho U_N^\sigma) \partial_\sigma \Phi^\rho dx,$$

$$[A_0 S_N, \Phi] = \sum_{n=2}^N \varepsilon^n \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\Omega} v_{n-m}^\sigma v_m^\rho \partial_\sigma \Phi^\rho dx + \varepsilon^{N+1} \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^n \sum_{k+l=N+1+n} \int_{\Omega} v_k^\sigma v_l^\rho \partial_\sigma \Phi^\rho dx,$$

для остатка U_N получаем соотношение

$$\varepsilon[U_N, \Phi] = \int_{\Omega} v^\rho U_N^\sigma \partial_\sigma \Phi^\rho dx + \varepsilon^{N+1}[Q_N^\varepsilon, \Phi] + \int_{\Omega} S_N^\sigma U_N^\rho \partial_\sigma \Phi^\rho dx.$$

Полагая $\Phi = U_N$ и учитывая, что согласно (2.11)

$$\int_{\Omega} S_N^\sigma U_N^\rho \partial_\sigma U_N^\rho dx = \int_{\Omega} S_N^\sigma \partial_\sigma |U_N|^2 dx = 0,$$

приходим к следующей формуле:

$$\varepsilon\|U_N\|^2 = \int_{\Omega} v^\rho U_N^\sigma \partial_\sigma U_N^\rho dx + \varepsilon^{N+1}[Q_N^\varepsilon, U_N],$$

где $\|Q_N^\varepsilon\| = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Используя (1.7) и (2.10), получаем

$$\varepsilon\|U_N\|^2 \leq 2\sqrt{3}\mu_1^{-1/4}\|v\| \cdot \|U_N\|^2 + \varepsilon^{N+1}\|Q_N^\varepsilon\| \cdot \|U_N\|,$$

$\|v - S_N\| = \|U_N\| < C_N \varepsilon^N$. Теорема 2 доказана.

Автор признателен чл.-кор. РАН Владиславу Васильевичу Пухначёву за проявленное внимание и обсуждение настоящей публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ладыженская О.А.** Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье — Стокса, существование и гладкость // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, № 2. С. 45–78.
2. **Чеботарев А.Ю., Илларионов А.А., Амосова Е.В.** Вариационные неравенства, краевые задачи и оптимальное управление для системы Навье — Стокса // Дальневост. мат. журн. 2008. Т. 8, № 1. С. 121–140.
3. **Вайнбергер Г.Ф., Гилбарг Д.** Асимптотические свойства решений Лере стационарных двумерных уравнений Навье — Стокса // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 2. С. 109–122.
4. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИФМЛ, 1961. 204 с.
5. **Пухначёв В.В.** Лекции по динамике вязкой несжимаемой жидкости. Ч. 1. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1969. 198 с.
6. **Гилбарг Д., Трудингер Н.С.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
7. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1950. 255 с.

Захаров Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: svz@imm.uran.ru

Поступила 26.09.2011

УДК 517.956.45

ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ С ВЫРОЖДЕНИЕМ¹**А. Л. Казаков**

С использованием ранее предложенного автором обобщения известного метода характеристических рядов (А. Ф. Сидоров) исследуются краевые задачи для нелинейных дифференциального уравнения и системы с частными производными параболического типа с вырождением. Доказаны новые теоремы существования решений рассмотренных задач в классе аналитических функций. В том числе обобщены известные решения нелинейного уравнения теплопроводности со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, краевая задача, теорема существования, характеристический ряд.

A. L. Kazakov. Application of characteristic series for constructing solutions of nonlinear parabolic equations and systems with degeneracy.

An extension of the known method of characteristic series (A.F. Sidorov) proposed by the author earlier is used to investigate boundary value problems for a nonlinear differential equation and a nonlinear parabolic system of partial differential equations with degeneracy. New existence theorems for solutions of these problems in the class of analytic functions are proved. In particular, known solutions of the nonlinear heat equation with power dependence of thermal conductivity on temperature are generalized.

Keywords: partial differential equations, boundary value problem, existence theorem, characteristic series.

Введение

Суть метода характеристических рядов состоит в том, что решение с характеристическим разрывом строится в следующем виде (функция $\varphi(t, \mathbf{x}) = 0$ определяет характеристическую поверхность):

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t, \mathbf{x}) \varphi^k, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Первоначально идея данного метода была предложена Р. Курантом (R. Courant) [1] и реализована для линейных уравнений гиперболического типа [2; 3].

На гораздо более трудный и содержательный случай нелинейных уравнений и систем [4] данный подход был перенесен А. Ф. Сидоровым в 60-х годах прошлого века [5]. В дальнейшем метод характеристических рядов, а также разработанный на его основе метод специальных рядов успешно применялись в работах как самого Анатолия Федоровича [5], так и его учеников (см., например, [6–8]). При этом были построены решения различных задач математической физики, которые ранее иными методами решить не удавалось. Подробную библиографию привести здесь не представляется возможным, так как она насчитывает более сотни статей. Удалось также распространить метод характеристических рядов на случай нелинейных [9] параболических уравнений с вырождением [10] (см. также [11; 12]).

Развивая идеи А. Ф. Сидорова, автор ранее [13; 14] предложил для построения решений квазилинейных уравнений и систем, имеющих более одного характеристического разрыва,

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 11-07-00245).

использовать кратные характеристические ряды. Применение данного подхода, в частности, позволило построить решение новой начально-краевой задачи для системы квазилинейных гиперболических уравнений, в том числе доказать аналог теоремы Коши — Ковалевской. Кроме того, предложенный метод был использован при решении некоторых модельных газодинамических задач.

В данной статье подход, примененный [13] для исследования уравнений и систем гиперболического типа, переносится на случай нелинейных уравнений параболического типа с вырождением [15]. Получено новое решение начально-краевой задачи для уравнения нелинейной теплопроводности (фильтрации, диффузии) со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры. Данный подход также распространен на случай системы параболического типа. Для рассмотренных задач доказаны теоремы существования решений в классе аналитических функций, одна из которых обобщает известную теорему о движении тепловой волны по холодному фону [12].

1. Теорема для уравнения нелинейной теплопроводности

Рассмотрим уравнение нелинейной теплопроводности (диффузии, фильтрации) со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры $K(T) = \alpha T^\sigma$

$$T_t = \alpha \operatorname{div}(T^\sigma \nabla T). \quad (1.1)$$

Здесь $T = T(t, \mathbf{x})$ — искомая функция (температура, плотность газа в пористом грунте); t — время; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — вектор пространственных координат; $\operatorname{div}, \nabla$ — операторы дивергенции и градиента по пространственным координатам; $\alpha > 0, \sigma > 0$ — известные константы, которые характеризуют свойства процесса.

Стандартная замена $u = T^\sigma, t' = \alpha t$ приводит уравнение (1.1) к виду

$$u_t = u \Delta u + \frac{1}{\sigma} (\nabla u)^2, \quad (1.2)$$

где Δ — оператор Лапласа по пространственным координатам. В случае, когда $u > 0$, свойства решения уравнения (1.2) качественно такие же, как и у линейного уравнения теплопроводности. В частности, если на любой времени-подобной поверхности задать аналитические данные Коши, то будут выполняться условия теоремы Коши — Ковалевской. Однако при $u = 0$ коэффициент перед старшими производными обращается в нуль и параболический тип уравнения (1.2) вырождается. Этот случай является предметом дальнейшего исследования.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) + \frac{1}{\sigma}(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2), \\ u|_{x_1=a(t)} = f(t, x_1, x_2)|_{x_1=a(t)}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что известные функции $a(t), f(t, x_1, x_2)$ являются аналитическим и удовлетворяют условиям

$$a(0) = 0, \quad a'(0) \neq 0, \quad f(t, a(t), 0) = 0, \quad f_{x_2}(t, a(t), 0) = 0. \quad (1.4)$$

З а м е ч а н и е 1. В случае $f \equiv 0$ получается известная задача о тепловой волне, которая движется по холодному фону [12].

Теорема 1. Если функции $a(t)$ и $f(t, x_1, x_2)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точек $t = 0$ и $(t = 0, x_1 = 0, x_2 = 0)$ соответственно и удовлетворяют условиям (1.4), то задача (1.3) имеет два аналитических решения в некоторой окрестности точки $(t = 0, x_1 = 0, x_2 = 0)$.

Доказательство. Будем строить решение в виде ряда

$$u = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{k,l}(t) \frac{[x_1 - a(t)]^k x_2^l}{k!l!}. \quad (1.5)$$

Для удобства определения коэффициентов ряда (1.5) сделаем в задаче (1.3) замену независимых переменных:

$$\begin{cases} y = x_1 - a(t), \\ z = x_2, \\ \tau = t. \end{cases} \quad (1.6)$$

Якобиан замены (1.6) $J = 1$, т. е. замена (1.6) невырожденная. При такой замене производные меняются как

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -a'(\tau) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

и задача (1.3) примет вид

$$\begin{cases} u_{\tau} - a'(\tau)u_y = u(u_{yy} + u_{zz}) + \frac{1}{\sigma}(u_y^2 + u_z^2), \\ u|_{y=0} = \phi(\tau, z), \end{cases} \quad (1.7)$$

где $\phi(\tau, z) = f(\tau, a(\tau), z)$. Из аналитичности a и f вытекает, что функция $\phi(\tau, z)$ — аналитическая в некоторой окрестности точки $(\tau = 0, z = 0)$, т. е. может быть разложена в сходящийся ряд

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\tau) \frac{z^n}{n!}, \quad \phi_n = \left. \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} \right|_{z=0},$$

причем из (1.4) следует, что $\phi(\tau, 0) = \phi_z(\tau, 0) = 0$, т. е. $\phi_0 = \phi_1 = 0$.

Решение задачи (1.7) будем искать в виде

$$u = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{k,l}(\tau) \frac{y^k z^l}{k!l!}, \quad u_{k,l}(\tau) = \left. \frac{\partial^{k+l} u}{\partial y^k \partial z^l} \right|_{y=0, z=0}. \quad (1.8)$$

Символы $u_{k,l}$ в формулах (1.5) и (1.8) обозначают одни и те же функции (с заменой t на τ).

Коэффициенты ряда (1.8) определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования $n = k + l$. Из граничных условий имеем, что $u_{0,l}(\tau) = \phi_l(\tau)$, $l = 0, 1, \dots$. В том числе

$$u_{0,0} = \phi_0 \equiv 0, \quad u_{0,1} = \phi_1 \equiv 0.$$

Для определения $u_{1,0}(\tau)$, положив в уравнении (1.7) $y = z = 0$, получим уравнение

$$u_{1,0} \left(\frac{1}{\sigma} u_{1,0} + a'(\tau) \right) = 0. \quad (1.9)$$

При нахождении корней (1.9) необходимо рассматривать два случая: $u_{1,0} \equiv 0$ и $u_{1,0} \neq 0$.

1. Рассмотрим сначала случай $u_{1,0} \neq 0$. Тогда решение уравнения (1.9) имеет вид $u_{1,0} = -\sigma a'(\tau)$, все производные первого порядка найдены. Далее найдем вторые производные. Из граничных условий $u_{0,2} = \phi_2$. Для нахождения $u_{1,1}$ продифференцируем уравнение (1.7) по z и положим $z = y = 0$. Подставив известные величины, получим уравнение $-a'(\tau)u_{1,1} = -2a'(\tau)u_{1,1}$, откуда имеем, что $u_{1,1} = 0$. Аналогично, продифференцировав (1.7) по y , положив $y = z = 0$, подставив известные величины и приведя подобные слагаемые, получим, что

$$u_{2,0} = \frac{\sigma(a'' - a'\phi_2)}{(1 + \sigma)a'}.$$

По условию теоремы $a'(0) \neq 0$, а значит, $a'(\tau) \neq 0$ в некоторой окрестности нуля, т. е. знаменатель последней дроби отличен от нуля. Таким образом, все производные второго порядка найдены, база индукции установлена.

Пусть найдены производные до порядка n включительно, т. е. предполагаются известными все $u_{i,k}$ при $i+k=0, \dots, n$. Тогда $u_{0,n+1} = \phi_{n+1}$. Продифференцировав уравнение (1.7) k раз по y , $n-k$ раз по z и положив $z=y=0$, получим соотношение

$$\begin{aligned} u'_{k,n-k} - a'u_{k+1,n-k} &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j} (u_{i+2,j} + u_{i,j+2}) \\ &+ \frac{1}{\sigma} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j (u_{k-i+1,n-k-j} u_{i+1,j} + u_{k-i,n-k-j+1} u_{i,j+1}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

При $k=0$ имеем уравнение $u'_{0,n} - a'u_{1,n} = \frac{2}{\sigma} u_{1,0} u_{1,n} + g_{0,n}$, из которого однозначно определяется $u_{1,n}$:

$$u_{1,n} = -\frac{\phi'_n}{a'} + \frac{g_{0,n}}{a'},$$

где функция

$$g_{0,n} = \sum_{j=0}^{n-2} C_n^j u_{0,n-j} (u_{2,j} + u_{0,j+2}) + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j (u_{1,n-j} u_{1,j} + u_{0,j+1} u_{0,n-j+1})$$

зависит от производных порядка не выше n , которые известны в силу предположения индукции. И так далее: последовательно вычисляются

$$u_{k+1,n-k} = \frac{-k\sigma a' u_{k-1,n-k+2} + g_{k,n-k} - u'_{k,n-k}}{a'(1+k\sigma)}, \quad k=1, \dots, n,$$

где функции

$$\begin{aligned} g_{k,n-k} &= \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \leq n-2}}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j} (u_{i+2,j} + u_{i,j+2}) \\ &+ \frac{1}{\sigma} \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0, \\ i+j \neq n}}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i+1,j} u_{k-i+1,n-k-j} + \frac{1}{\sigma} \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0, \\ i+j \neq n}}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i,j+1} u_{k-i,n-k-j+1} \end{aligned}$$

зависят от величин, которые известны в силу предположения индукции.

Таким образом, для случая $u_{1,0} \neq 0$ формальное решение задачи (1.7) построено.

2. Рассмотрим теперь с л у ч а й $u_{1,0} = 0$. Отметим, что в задаче о движении теплового фронта по холодному фону этот случай приводит к тривиальному решению. Однако, если среди ϕ_n есть хотя бы одна ненулевая функция, решение в этом случае также будет ненулевым.

Процедура построения решения здесь такая же, как и в первом случае. При этом получаются следующие соотношения: $u_{0,2} = \phi_2$, $u_{1,1} = 0$, $u_{2,0} = 0$. Пусть найдены все производные до порядка n включительно. Тогда из (1.10), так как $u_{1,0} = 0$, получаем, что

$$u_{k+1,n-k} = \frac{-g_{k,n-k} + u_{k,n-k}}{a'(\tau)}.$$

Таким образом, оба формальных решения задачи (1.7) построены.

Сходимость построенных рядов доказывается методом мажорант, причем для первого и второго случаев строится одна и та же мажоранта. Подробное доказательство здесь не приводится, поскольку при этом используется стандартная процедура, которая подробно излагается применительно к теореме 2.

Этим завершается доказательство теоремы 1.

З а м е ч а н и е 2. Два найденных аналитических решения задачи (1.7) позволяют строить кусочно-аналитические решения задачи (1.3), непрерывно состыкованные на поверхности $x_1 = a(t)$. В частном случае $f \equiv 0$ одно из этих решений является тривиальным (задача о движении тепловой волны по холодному фону). С этой точки зрения теорема 1 является обобщением теорем 2.1 и 3.1 из работы [12].

2. Задача с краевым режимом для параболической системы

Некоторые из результатов, ранее полученных для уравнения нелинейной теплопроводности [10–12], могут быть перенесены на более общий случай нелинейных систем параболического типа.

В этом разделе объектом исследования будет система вида

$$\begin{cases} u_t = u\Delta u + v\Delta v + \frac{1}{\alpha}(\nabla u)^2, \\ v_t = u\Delta u + v\Delta v + \frac{1}{\beta}(\nabla v)^2, \end{cases} \quad (2.1)$$

где α, β — положительные константы. Подобного рода системы (в линейном случае) иногда называют системами А. В. Лыкова [16], они применяются для описания процессов взаимосвязанного тепло- и массопереноса.

В данном разделе рассматривается следующая краевая задача для системы (2.1) в случае плоской симметрии:

$$\begin{cases} u_t = uu_{xx} + vv_{xx} + \frac{1}{\alpha}u_x^2, \\ v_t = uu_{xx} + vv_{xx} + \frac{1}{\beta}v_x^2, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad v|_{x=a(t)} = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Теорема 2. Если функция $a(t)$ является аналитической в некоторой окрестности точки $t = 0$, то задача (2.2) при условии $a'(0) \neq 0$ имеет в некоторой окрестности точки $(t = 0, x = 0)$ единственное аналитическое решение, удовлетворяющее неравенствам $u_x(0, 0) \neq 0, v_x(0, 0) \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале проведем построение формального решения в виде рядов, а затем докажем их сходимость.

Будем строить решение задачи (2.2) в виде

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \frac{[x - a(t)]^k}{k!}, \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \frac{[x - a(t)]^k}{k!}. \quad (2.3)$$

Для удобства построения коэффициентов рядов (2.3) сделаем в задаче (2.2) замену независимых переменных

$$\begin{cases} z = x - a(t), \\ \tau = t. \end{cases}$$

Легко убедиться, что данная замена является невырожденной, задача (2.2) после этого примет вид

$$\begin{cases} u_\tau - a'(\tau)u_z = uu_{zz} + vv_{zz} + \frac{1}{\alpha}u_z^2, \\ v_\tau - a'(\tau)v_z = uu_{zz} + vv_{zz} + \frac{1}{\beta}v_z^2, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad v|_{z=0} = 0.$$

Ряды (2.3) в новых переменных записываются как

$$u(\tau, z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\tau) \frac{z^k}{k!}, \quad u_k(\tau) = \frac{\partial^k u}{\partial z^k} \Big|_{z=0}; \quad v(\tau, z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\tau) \frac{z^k}{k!}, \quad v_k(\tau) = \frac{\partial^k v}{\partial z^k} \Big|_{z=0}.$$

Из краевых условий следует, что $u_0(\tau) = v_0(\tau) = 0$. Тогда из уравнений системы (2.4) имеем, что

$$\begin{cases} -a'(\tau)u_1(\tau) = \frac{1}{\alpha}u_1^2(\tau), \\ -a'(\tau)v_1(\tau) = \frac{1}{\beta}v_1^2(\tau), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -\alpha a'(\tau), \\ v_1 = -\beta a'(\tau), \end{cases}$$

так как по условию теоремы $u_1(0) = u_z(0, 0) = u_x(0, 0) \neq 0, v_1(0) = v_z(0, 0) = v_x(0, 0) \neq 0$.

Продифференцируем обе части системы (2.4) по z и положим $z = 0$. Получим, что

$$\begin{cases} u'_1 - a'(\tau)u_2 = u_1u_2 + v_1v_2 + \frac{2}{\alpha}u_1u_2, \\ v'_1 - a'(\tau)v_2 = v_1v_2 + u_1u_2 + \frac{2}{\beta}v_1v_2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Подставив сюда выражения для u_1 и v_1 , придем к системе вида

$$\begin{cases} (1 + \alpha)u_2 + \beta v_2 = \frac{\alpha a''}{a'}, \\ \alpha u_2 + (1 + \beta)v_2 = \frac{\beta a''}{a'}. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta_2 = 1 + \alpha + \beta > 0$, решение определяется по формулам

$$v_2 = \frac{a''(-\alpha^2 + \alpha\beta + \beta)}{a'(1 + \alpha + \beta)}, \quad u_2 = \frac{a''(-\beta^2 + \alpha\beta + \alpha)}{a'(1 + \alpha + \beta)}.$$

И так далее. Пусть найдены коэффициенты ряда с номерами до k включительно. Тогда u_{k+1}, v_{k+1} определяются из соотношений

$$\begin{cases} u'_k - a'(\tau)u_{k+1} = ku_1u_{k+1} + kv_1v_{k+1} + \frac{2}{\alpha}u_1u_{k+1} + F_{k+1}, \\ v'_k - a'(\tau)v_{k+1} = ku_1u_{k+1} + kv_1v_{k+1} + \frac{2}{\beta}v_1v_{k+1} + G_{k+1}, \end{cases}$$

где F_{k+1}, G_{k+1} известны в силу предположения индукции,

$$F_{k+1} = \sum_{i=2}^k C_k^i (u_i u_{k+2-i} + v_i v_{k+2-i}) + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i u_{i+1} u_{k+1-i},$$

$$G_{k+1} = \sum_{i=2}^k C_k^i (u_i u_{k+2-i} + v_i v_{k+2-i}) + \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{k-1} C_k^i v_{i+1} v_{k+1-i}.$$

После подстановки известных значений и приведения подобных слагаемых получим следующую систему:

$$\begin{cases} (1 + k\alpha) u_{k+1} + k\beta v_{k+1} = \frac{-u'_k + F_{k+1}}{a'(\tau)}, \\ k\alpha u_{k+1} + (1 + k\beta) v_{k+1} = \frac{-v'_k + G_{k+1}}{a'(\tau)}. \end{cases}$$

Определитель данной системы $\Delta_k = (1 + k\alpha)(1 + k\beta) - k^2\alpha\beta = 1 + k\alpha + k\beta > 0$, т. е. имеет место однозначная разрешимость

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= \frac{1}{\Delta_k a'(\tau)} [(1 + k\beta)(-u'_k + F_{k+1}) - k\beta(-v'_k + G_{k+1})], \\ v_{k+1} &= \frac{1}{\Delta_k a'(\tau)} [-k\alpha(-u'_k + F_{k+1}) + (1 + k\alpha)(-v'_k + G_{k+1})]. \end{aligned}$$

Таким образом, формальное решение задачи (2.4) построено.

Перейдем теперь к доказательству сходимости рядов (2.3). Введем новые искомые функции U и V по формулам

$$u(\tau, z) = u_0 + u_1 z + z^2 U(\tau, z) = -\alpha a'(\tau) z + z^2 U, \quad v(\tau, z) = v_0 + v_1 z + z^2 V(\tau, z) = -\beta a'(\tau) z + z^2 V.$$

Тогда производные искомых функций преобразуются как

$$\begin{cases} u_\tau = -\alpha a'' z + z^2 U_\tau, & \begin{cases} v_\tau = -\beta a'' z + z^2 V_\tau, \\ v_z = -\beta a' + 2zV + z^2 V_z, \\ v_{zz} = 2V + 4zV_z + z^2 V_{zz}, \end{cases} \\ u_z = -\alpha a' + 2zU + z^2 U_z, \\ u_{zz} = 2U + 4zU_z + z^2 U_{zz}, \end{cases}$$

а система (2.4) после приведения подобных и деления обеих частей уравнений на z примет вид

$$\begin{cases} 2(\alpha + 1)U + (1 + 4\alpha)zU_z + \alpha z^2 U_{zz} + 2\beta V + 4\beta zV_z + \beta z^2 V_{zz} \\ = \frac{1}{a'(\tau)} \left\{ \alpha a'' + z \left[2 \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right) U^2 - U_\tau \right] + z^2 \left[4 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) U U_z \right] + z^3 \left[U U_{zz} + \frac{1}{\alpha} U_z^2 \right] \right. \\ \left. + 2zV^2 + 4z^2 V_z + z^3 V V_{zz} \right\}, \\ 2(\beta + 1)V + (1 + 4\beta)zV_z + \beta z^2 V_{zz} + 2\alpha U + 4\alpha zU_z + \alpha z^2 U_{zz} \\ = \frac{1}{a'(\tau)} \left\{ \beta b'' + z \left[2 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) V^2 - V_\tau \right] + z^2 \left[4 \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) V V_z \right] + z^3 \left[V V_{zz} + \frac{1}{\beta} V_z^2 \right] \right. \\ \left. + 2zU^2 + 4z^2 U_z + z^3 U U_{zz} \right\} \end{cases}$$

или (в более компактной форме)

$$\begin{cases} A_1 U + B_1 z U_z + C_1 z^2 U_{zz} + A_2 V + B_2 z V_z + C_2 z^2 V_{zz} = g_0 + z g_1 + z^2 g_2 + z^3 g_3, \\ A_3 U + B_3 z U_z + C_3 z^2 U_{zz} + A_4 V + B_4 z V_z + C_4 z^2 V_{zz} = h_0 + z h_1 + z^2 h_2 + z^3 h_3, \end{cases} \quad (2.6)$$

где A_i, B_i, C_i , $i = 1, \dots, 4$ — положительные константы, а функции g_j, h_j , $j = 0, \dots, 3$ в силу условия теоремы — аналитические.

Будем строить решение системы (2.6) в виде степенных рядов

$$U(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\tau) \frac{z^k}{k!}, \quad V(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(\tau) \frac{z^k}{k!},$$

для их коэффициентов справедливы формулы

$$\begin{cases} [A_1 + B_1 k + C_1 k(k-1)] U_k + [A_2 + k B_2 + k(k-1) C_2] V_k = G_k, \\ [A_3 + B_3 k + C_3 k(k-1)] U_k + [A_4 + k B_4 + k(k-1) C_4] V_k = H_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots$$

Здесь выражения для G_k, H_k получаются при k -кратном дифференцировании правых частей и подстановке $z = 0$. Они зависят только от младших коэффициентов ряда.

Определители данных систем $\Delta(k) = (k+1)^2 [(k+1)\alpha + (k+1)\beta + 1] > 0$.

Теперь построим мажоранту W для функций U и V . Пусть

$$A = \min \{A_1, A_2, A_3, A_4\}, \quad B = \min \{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \quad C = \min \{C_1, C_2, C_3, C_4\},$$

а $G_i, i = 0, \dots, 3$ — мажоранты для функций f_i, h_i , стоящих в правых частях. Тогда если

$$D = \max_k \frac{k(k-1) + 1}{A + kB + k(k-1)C},$$

то W является решением уравнения

$$W_{zz} = D \left[zG_3 + G_2 + \frac{\partial G_1}{\partial z} + \frac{\partial G_1}{\partial W} W_z + \frac{\partial G_1}{\partial W_\tau} W_{z\tau} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial z^2} \right].$$

Если продифференцировать обе части по z и выразить W_{zzz} , то вместе с условиями $W(0, \tau) = W_0(\tau) \gg U_0(\tau), V_0(\tau)$; $W_z(0, \tau) = W_1(\tau) \gg U_1(\tau), V_1(\tau)$; $W_{zz}(0, \tau) = W_2(\tau) \gg U_2(\tau), V_2(\tau)$ получим задачу Коши типа Ковалевской, которая по теореме Коши — Ковалевской имеет единственное аналитическое решение.

Данное решение по построению функции W мажорирует функции U и V , т. е. ряды, задающие эти функции, сходятся. Следовательно, сходятся ряды для функций u и v .

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Случаи $u_1 \equiv 0, v_1 = -\beta a'(t) \neq 0$ и $u_1 = -\alpha a'(t) \neq 0, v_1 \equiv 0$ рассматриваются аналогично и, вообще говоря, приводят к нетривиальным решениям (см. (2.5)). В случае $u_1 \equiv 0, v_1 \equiv 0$ задача (2.2) имеет только тривиальное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
2. **Бабич В.М.** Об элементарных решениях гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1959. Т. 21, № 3. С. 479–481.
3. **Ludvig D.** Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem // Comm. Pure Appl. Math. 1960. Vol. 13, no. 3. P. 473–508.
4. **Дородницын А.А.** Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа // Сб. теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 77–88.
5. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
6. **Рубина Л.И.** Приближенный метод расчета одной задачи об истечении в вакуум с помощью характеристических рядов // Методы решения краевых задач механики сплошной среды / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1978. С. 47–51.
7. **Филимонов М.Ю.** О применении специальных рядов при решении смешанных задач для нелинейных уравнений в частных производных // Аналитические и численные методы исследования задач механики сплошной среды / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1987. С. 124–139.
8. **Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F.** Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special constructions of series // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. Vol. 8, № 2. P. 101–125.
9. **Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-линь.** Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22. С. 667–704.
10. **Сидоров А.Ф.** Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 1. С. 47–51.
11. **Ваганова Н.А.** Построение новых классов решений нелинейного уравнения фильтрации с помощью специальных согласованных рядов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 10–20.
12. **Баутин С.П.** Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 87 с.

13. **Казаков А.Л.** Применение обобщенного метода характеристических рядов при построении решения одной начально-краевой задачи для системы квазилинейных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 91–109.
14. **Казаков А.Л.** Из письма в редакцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 285.
15. **Титов С.С.** Решение уравнений с особенностями в аналитических шкалах банаховых пространств. Екатеринбург: УрГАХА, 1999. 264 с.
16. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.

Казаков Александр Леонидович

д-р физ.-мат. наук

главный науч. сотрудник

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

e-mail: kazakov@icc.ru

Поступила 30.03.2011

Окончательный вариант 26.09.2011

УДК 517.928

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ БЛОХА ДЛЯ МОДЕЛИ ЯДЕРНОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ¹

Л. А. Калякин

Рассмотрена система трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, известная в теории ядерного магнетизма под названием уравнения Блоха. Система содержит четыре безразмерных параметра в качестве коэффициентов. Исследованы положения равновесия и их устойчивость в зависимости от этих параметров. Обнаружена возможность появления двух устойчивых положений равновесия. При отсутствии диссипации уравнения интегрируются. Для задачи с малой диссипацией вдали от равновесия построены приближенные решения методом усреднения.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, равновесие, диссипация, устойчивость, асимптотика, усреднение.

L. A. Kalyakin. Analysis of the Bloch equations for the nuclear magnetization model.

We consider a system of three ordinary first-order differential equations known in the theory of nuclear magnetism as the Bloch equations. The system contains four dimensionless parameters as coefficients. Equilibrium states and the dependence of their stability on these parameters is investigated. The possibility of the appearance of two stable equilibrium states is discovered. The equations are integrable in the absence of dissipation. For the problem with small dissipation far from equilibrium, approximate solutions are constructed by the method of averaging.

Keywords: nonlinear equations, equilibrium, dissipation, stability, asymptotics, averaging.

1. Введение

Постановка задачи. Цель данной статьи — асимптотический анализ уравнений Блоха для модели ядерной намагниченности. Основным объектом исследования является система трех уравнений, описывающая динамику вектора намагниченности [1–3]. Эти уравнения, записанные в цилиндрических координатах, имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -h z \sin \psi - b_2 \rho, & \frac{dz}{dt} &= h \rho \sin \psi - (z - 1)b_1, \\ \rho \left[\frac{d\psi}{dt} - \Omega + z \right] &= -h z \cos \psi; & \rho > 0, & \quad z \in \mathbb{R}, \quad \psi \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Коэффициенты диссипации $b_1, b_2 \geq 0$ считаются неотрицательными по их физическому смыслу. Коэффициент $h \geq 0$ характеризует амплитуду внешнего поля; в случае постоянного значения его можно считать неотрицательным ввиду инвариантности уравнений при замене $h \Rightarrow -h$, $\psi \Rightarrow \psi + \pi$. Величина Ω (произвольного знака) соответствует частоте внешнего поля.

Формально уравнения (1.1) не пригодны при $\rho = 0$ из-за вырождения и должны быть дополнены условиями скачка для угла ψ при переходе через граничное значение $\rho = 0$. Особенность, однако, является фиктивной и обязана использованию цилиндрических координат. В декартовых координатах x, y, z при $x = \rho \cos \psi$, $y = \rho \sin \psi$ уравнения не содержат никаких особенностей:

$$\frac{dx}{dt} = -y(\Omega - z) - b_2 x, \quad \frac{dy}{dt} = -h z + x(\Omega - z) - b_2 y, \quad \frac{dz}{dt} = h y - (z - 1)b_1. \tag{1.2}$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-01-00186, 11-02-97003).

Поэтому условие скачка, соответствующее гладкости траектории, имеет вид

$$|\psi(t+0) - \psi(t-0)| = \pi \quad \text{при} \quad r(t) = 0.$$

Обсуждаемые ниже результаты и форма изложения ориентированы на физиков и вычислителей, имеющих дело с математическими моделями магнитодинамики.

Происхождение уравнений. Основой теории магнитодинамики на уровне макроскопической модели является представление магнитного момента как аналога момента количества движения для классического волчка [5, с. 17]. Такое представление приводит к уравнениям движения для вектора намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{t})$ в виде

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -[\mathbf{M}, \mathbf{H}]. \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{H} — эффективное магнитное поле, задание которого определяет модель рассматриваемого явления. Поскольку это поле зависит от намагниченности, то уравнения оказываются нелинейными. Для моделей ферромагнетиков считается приемлемым использование поля Вейсса с линейной зависимостью от \mathbf{M} ; обычно берется $\mathbf{H} = \Lambda \mathbf{M} + \mathbf{h}$, где $\Lambda = \text{const}$, \mathbf{h} — внешнее поле. Независимо от вида \mathbf{H} уравнения (1.3) имеют первый интеграл — закон сохранения модуля вектора намагниченности $|\mathbf{M}(t)| = \text{const}$. Это позволяет свести систему к паре уравнений первого порядка, например для двух углов в сферических координатах. В итоге математическая модель оказывается нелинейным осциллятором, и почти все движения представляют собой периодические колебания на сфере радиуса $|\mathbf{M}|$ (см. рис. 1, 2).

Современные исследования задач магитодинамики имеют дело с более сложными уравнениями, в которых учитывается диссипация. Учет диссипативных эффектов в феноменологических моделях производится разными способами, в зависимости от представлений о физике явления (см. [5, с. 26; 6]). Одна из наиболее известных диссипативных моделей описывается уравнениями Ландау — Лифшица. В случае изотропного ферромагнетика они имеют вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -[\mathbf{M}, \mathbf{H}] - \frac{\beta}{\mathbf{M}^2}[\mathbf{M}, [\mathbf{M}, \mathbf{H}]], \quad \beta = \text{const} > 0.$$

В такой системе остается первый интеграл $|\mathbf{M}(t)| = \text{const}$. Диссипация ведет к затуханию колебаний вектора $\mathbf{M}(t)$ при сохранении его длины. Асимптотика решений для этой модели анализировалась в [7].

В теории ядерной намагниченности используется другая модель диссипации, предложенная Блохом [1]:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -[\mathbf{M}, \mathbf{H}] - (B \mathbf{M} - \chi \mathbf{h}), \quad (B, \chi = \text{const}). \quad (1.4)$$

В этом случае, как правило, уравнения не имеют первого интеграла. Если, например, B — положительная диагональная матрица, то модуль вектора намагниченности $|\mathbf{M}(t)|$ не сохраняется. При выборе диссипации в такой форме происходит не только затухание колебаний, но и стабилизация величины намагниченности к значению, которое определяется внешним полем. Такая система анализируется в данной работе.

Структура исходных уравнений зависит от выбора вектора \mathbf{H} . Мы рассматриваем модель, принятую для ферромагнетика [2; 3] во внешнем поле, которое определяется вектором $\mathbf{h} = (h_0(\cos \Phi, \sin \Phi), h_3)$. Величины h_0, h_3 задают поперечную и продольную амплитуды поля, а фаза $\Phi = \Phi(t)$ соответствует вращению поперечной компоненты с частотой $\Omega = \Phi'(t)$. Рассматривается случай, когда продольная компонента направлена вдоль оси легкого намагничивания. После подходящей нормировки переменных уравнения (1.4) приводятся к виду (1.1) в цилиндрической системе координат, вращающейся с частотой Ω [4].

Результаты. При отсутствии диссипации и внешнего поля, когда $b_1 = b_2 = 0$ и $h = 0$, система (1.1) становится тривиальной: $\dot{\rho} = 0$, $\dot{z} = 0$, $\dot{\psi} = -z$. Решения этих уравнений

описывают вращение вектора намагниченности вокруг оси $0z$ с частотой $-z = \text{const}$. Слагаемое $-z$ в фазовом уравнении принято называть динамическим сдвигом частоты. Оно описывает зависимость периода собственных колебаний от траектории движения. В теории динамических систем такое свойство (неизохронность) отражает существенную нелинейность системы.

Направление вдоль оси $0z$ при $\rho=0$, $z=1$ соответствует положению равновесия (основному состоянию) $x = y = 0$, $z = 1$. Это будет устойчивое равновесие в диссипативной системе при отсутствии накачки, когда $h = 0$.

Как уже было указано, при отсутствии диссипации, когда $b_1 = b_2 = 0$, имеется первый интеграл — модуль вектора намагниченности: $\mathcal{M} = \sqrt{\rho^2(t) + z^2(t)} = \text{const}$. В автономном случае (при $h, \Omega = \text{const}$) выписывается дополнительный интеграл (энергии). Таким образом, бездиссипативная автономная система полностью интегрируется.

При наличии диссипации уравнения (1.1) не интегрируются. В автономном случае они содержат четыре безразмерных параметра $h, \Omega, b_1, b_2 = \text{const}$. В первой части работы исследуется структура решения в зависимости от этих параметров. В частности, выявляются положения равновесия и анализируется их устойчивость.

Если система не автономная, то коэффициенты содержат дополнительный параметр ε , характеризующий скорость их изменения: $h = h(\varepsilon t)$, $\Omega = \Omega(\varepsilon t)$. Рассматривается обычная для приложений ситуация, когда эта скорость мала по сравнению с собственной (ЯМР) частотой вблизи равновесия: $0 < \varepsilon \ll 1$ и, кроме того, мала диссипация: $b_1 \approx b_2 = \varepsilon$. Для решения строится асимптотика по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$, пригодная до времен $t \approx \varepsilon^{-1}$. Подобная задача для уравнений Ландау — Лифшица была исследована методом усреднения в [7]. Такой способ годится для уравнений Блоха (1.1) и реализуется во второй части работы. При этом анализируются колебания большой амплитуды вдали от равновесия.

2. Теорема существования

Чтобы обсуждаемые в данной статье результаты могли претендовать на математическую строгость, следует установить глобальное существование для любого решения. В рассматриваемой системе доказательство такого свойства опирается на наличие диссипации. Для уравнений в форме (1.2) рассматривается решение, фиксированное начальной точкой (x_0, y_0, z_0, t_0) .

Теорема 1. Пусть коэффициенты $b_1, b_2, h, \Omega(t)$ уравнений (1.2) являются непрерывными функциями на всей оси $t \in \mathbb{R}$. Если коэффициенты диссипации строго положительны: $b_1, b_2(t) \geq m > 0 \forall t$, то любое решение существует глобально на полуоси $t_0 \leq t < \infty$.

Доказательство. Свойство ограниченности амплитуды $\mathcal{M}(t) = \sqrt{\rho^2(t) + z^2(t)}$ на любом конечном отрезке $t \in [t_0, T]$ вдоль рассматриваемой траектории лежит в основе продолжения решения на неограниченный промежуток.

Предположим от противного, что существует возрастающая ограниченная последовательность моментов времени $t_n \uparrow T < \infty$, вдоль которой квадрат амплитуды неограниченно растет: $\mathcal{M}^2(t_n) = \rho^2(t_n) + z^2(t_n) \rightarrow \infty$. Из соображений гладкости траектории без ограничения общности можно считать, что производная в этих точках не отрицательна $d\mathcal{M}^2(t_n)/dt \geq 0$. Если это не так, то момент t_n можно сместить влево, не уменьшая значение $\mathcal{M}^2(t_n)$, так чтобы производная стала неотрицательной.

С другой стороны, в силу дифференциальных уравнений (1.1) имеем тождество $d\mathcal{M}^2/dt = -2b_2\rho^2 - 2b_1z(z-1)$. В частности, в рассматриваемых точках t_n получаем

$$\frac{d\mathcal{M}^2}{dt}(t_n) = -2b_2\rho^2(t_n) - 2b_1z(t_n)[z(t_n) - 1].$$

Если последовательность $z(t_n)$ ограничена, то не ограничена $\rho(t_n)$, и в таком случае

$$\frac{d\mathcal{M}^2(t_n)}{dt} \rightarrow -\infty.$$

Если последовательность $z(t_n)$ не ограничена, то можно считать $|z(t_n)| < z^2(t_n)$, и тогда $dM^2(t_n)/dt \rightarrow -\infty$. Следовательно, в любом случае получается противоречие со свойством $dM^2(t_n)/dt \geq 0$. Это противоречие показывает, что предположение о неограниченности амплитуды не верно. После этого существование глобального решения вытекает из известных результатов [8, с. 13]. Теорема доказана.

3. Интегрирование бездиссипативной системы

При отсутствии диссипации, когда $b_1, b_2 = 0$, система (1.1) имеет первый интеграл $M^2 \equiv \rho^2(t) + z^2(t) = \text{const}$. Поэтому фазовое пространство $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ расслаивается на сферы радиуса M . Если, кроме того, коэффициенты оказываются постоянными $h, \Omega = \text{const}$, то имеется еще один первый интеграл: $E \equiv z^2/2 - \Omega z - h\rho \cos \psi = \text{const}$, который условно можно назвать энергией. В этом случае почти все траектории представляют собой замкнутые кривые, лежащие на различных сферах. Помимо таких траекторий имеются неподвижные точки, которых на каждой сфере может быть от двух до четырех, и, возможно, пара сепаратрисных петель (незамкнутых траекторий), которые выходят из седловой точки (см. рис. 1, 2).

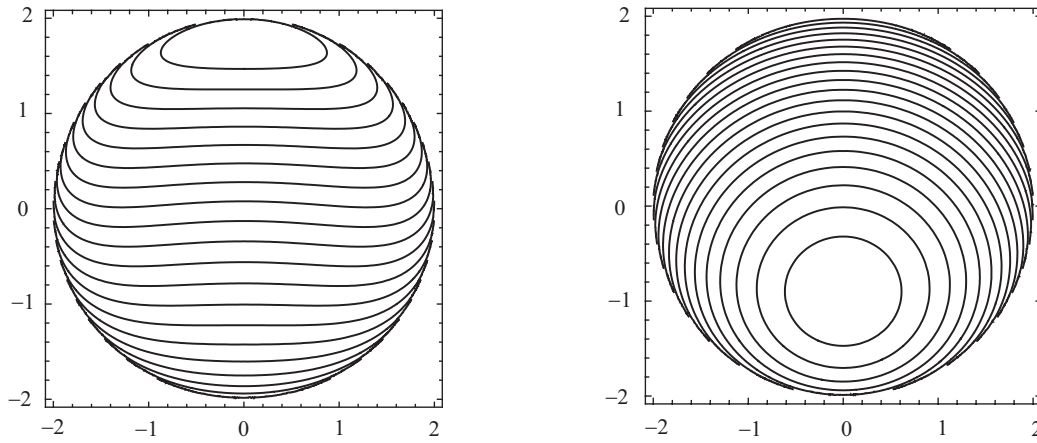


Рис. 1. Проекция фазового портрета бездиссипативной автономной системы на плоскость x, y с верхней и нижней полусферы. При $h = 3.44$, $\Omega = 1.53$, $M = 2$ имеется две неподвижные точки.

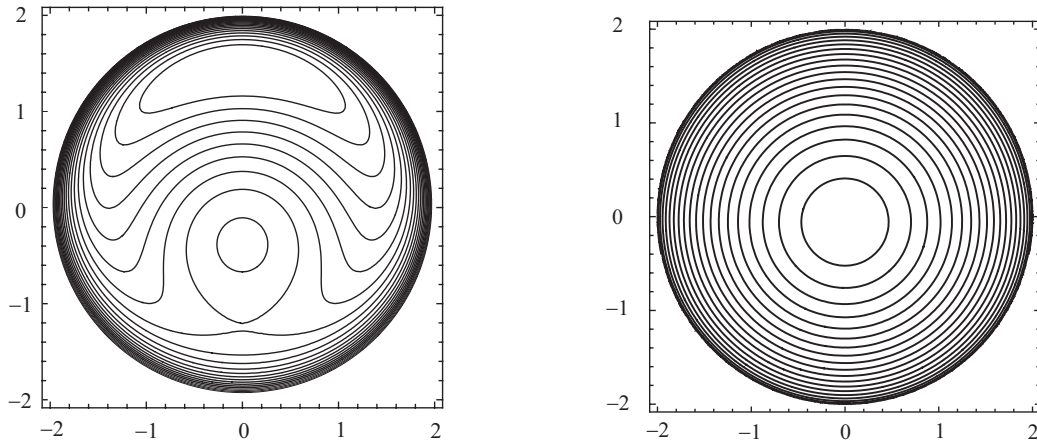


Рис. 2. Проекция фазового портрета бездиссипативной автономной системы на плоскость x, y с верхней и нижней полусферы. При $h = 0.2$, $\Omega = 1.44$, $M = 2$ имеются четыре неподвижные точки и две сепаратрисные петли.

Замкнутые траектории соответствуют трехпараметрическому семейству периодических решений, которые обозначим

$$\rho = \rho_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2), \quad z = z_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2), \quad \psi = \psi_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2), \quad (t_0, E, \mathcal{M}^2 = \text{const}).$$

Ввиду наличия двух интегралов для одной из функций выписывается скалярное уравнение; например,

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{h^2(\mathcal{M}^2 - z^2) - (E + \Omega z - z^2/2)^2}. \quad (3.1)$$

Интегрируя его, получаем соотношение

$$\int_{\zeta_0}^z \frac{d\zeta}{\sqrt{h^2(\mathcal{M}^2 - \zeta^2) - (E + \Omega\zeta - \zeta^2/2)^2}} = \pm(t + t_0), \quad \zeta_0, t_0 = \text{const}, \quad (3.2)$$

которое представляет решение $z = z_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2)$ через обратную функцию. Остальные компоненты ρ, ψ вектора намагниченности выражаются через z из первых интегралов.

При наличии неавтономности либо диссипации никаких представлений для точного решения, хотя бы в виде интегралов, не известно. Ниже обсуждается возможность построения приближенного решения при условии малой диссипации и медленного изменения коэффициентов. Методика получения таких приближений с использованием выписанных невозмущенных периодических решений известна и обычно ассоциируется с термином “усреднение” [9]. В случае гамильтоновых систем такие приближения иногда называют адиабатическими [10].

4. Неподвижные точки

Чтобы отчетливо представлять себе роль диссипативных слагаемых в модели Блоха, полезно проанализировать неподвижные точки полной системы (1.1) и сравнить их с неподвижными точками бездиссипативной системы.

4.1. Неподвижные точки для системы Блоха

Исходные уравнение для неподвижных точек в цилиндрических координатах имеют вид

$$h z \sin \psi + b_2 \rho = 0, \quad h \rho \sin \psi + b_1(1 - z) = 0, \quad (z - \Omega)\rho + h z \cos \psi = 0. \quad (4.1)$$

Здесь коэффициенты считаются постоянными параметрами: $h, \Omega, b_1, b_2 = \text{const}$.

При отсутствии внешнего поля, когда $h = 0$, существует единственное решение $\rho = 0, z = 1$, которое соответствует основному состоянию с компонентами $x = y = 0, z = 1$.

При наличии внешнего поля, когда $h \neq 0$, можно отделить два уравнения для амплитуд:

$$z^2 h^2 = \rho^2 [b_2^2 + (z - \Omega)^2], \quad b_2 \rho^2 = b_1 z(1 - z). \quad (4.2)$$

Здесь при $\rho = 0$ появляется лишний корень с $z = 0$, который не соответствует никакому решению уравнений (4.1). Поэтому система (4.1) рассматривается при $\rho \neq 0$. Посредством (4.2) она приводится к алгебраическому уравнению третьего порядка для координаты z :

$$P(z) \equiv (z - 1)[\varepsilon^2 + \eta + (z - \Omega)^2] + \eta = 0 \quad (4.3)$$

с коэффициентами $\varepsilon = b_2 > 0, \eta = h^2/b > 0$ и $b = b_1/b_2 > 0$. Поскольку полином $P(z) < 0$ при $z \leq 0$ и $P(z) > 0$ при $z \geq 1$, то корни могут быть лишь на промежутке $0 < z < 1$.

Число действительных корней, как известно, определяется знаком дискриминанта $D = (p/3)^3 + (q/2)^2$, где $q = -2(2\Omega + 1)^3/27 + (\varepsilon^2 + \eta + \Omega^2 + 2\Omega)(2\Omega + 1)/3 - \varepsilon^2 - \Omega^2, p = \varepsilon^2 + \eta - (\Omega^2 + \Omega + 1)/3$. Обозначим через z_- и z_+ корни, расположенные левее и правее точки перегиба $z_i = (2\Omega + 1)/3$, в которой $P''(z_i) = 0$. При наличии третьего корня z_0 очевидно имеет место неравенство между корнями $0 < z_- \leq z_0 \leq z_+ < 1$.

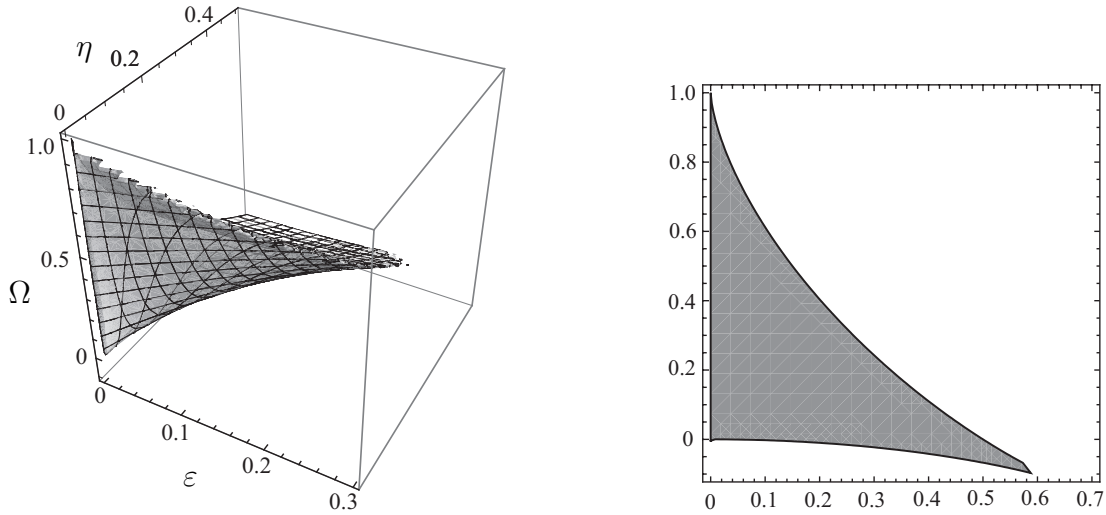


Рис. 3. Слева область в пространстве параметров $\varepsilon, \eta, \Omega$, при которых существуют три неподвижных точки. Справа граница этой области при $\varepsilon = 0$.

Теорема 2. В системе уравнений (1.1) существуют неподвижные точки: либо одна при $D > 0$, либо две при $D = 0$, либо три при $D < 0$. Для любой неподвижной точки координата $z \in (0, 1)$.

Доказательство. Для каждого из корней уравнения (4.3) однозначно вычисляется значение $\rho > 0$ из (4.2) и $\psi \in [0, 2\pi)$ из (4.1).

Следствие 1. В случае $D \neq 0$ все три корня будут простыми и обладают свойствами $P'(z_{\pm}) > 0$, $P'(z_0) < 0$.

Отметим, что в системе (1.1) равновесие может оказаться в точке с любыми значениями координат $z \in (0, 1)$, $\rho > 0$ при подходящем выборе параметров h, Ω, b_1, b_2 .

Условия на число корней в терминах дискриминанта D могут показаться сложными и труднообозримыми (см. рис. 3). Приведем более простые достаточные условия.

Лемма 1. Если для параметров $\varepsilon, \eta, \Omega$ нарушается хотя бы одно из четырех неравенств

$$-\frac{1}{2} < \Omega < 1, \quad -(\Omega^2 + 2\Omega) < \varepsilon^2 + \eta < \frac{(1 - \Omega)^2}{3}, \quad (4.4)$$

то в системе уравнений (1.1) существует лишь одна неподвижная точка с координатой $z = z_-$, либо $z = z_+$.

Доказательство. Соотношения (4.4) выделяются как необходимые условия существования трех корней. Очевидно, одним из таких условий является наличие на промежутке $0 < z < 1$ точки перегиба, в которой $P''(z_i) = 0$. Поскольку $z_i = (2\Omega + 1)/3$, то такое требование приобретает вид $-1/2 < \Omega < 1$.

Помимо того, необходимо существование экстремумов у полинома $P(z)$. Это обуславливает требования

$$P'(0) = \varepsilon^2 + \eta + \Omega^2 + 2\Omega > 0, \quad P'(z_i) = \varepsilon^2 + \eta - \frac{(1 - \Omega)^2}{3} < 0.$$

Еще одно условие выполняется автоматически: $P'(1) = \varepsilon^2 + \eta + (1 - \Omega)^2 > 0$. Нарушение любого из этих неравенств гарантирует единственность корня. Лемма доказана.

Наличие трех корней в уравнении (4.3) эквивалентно свойству, что полином $P(z)$, по крайней мере, дважды меняет знак; например: $P(1/3) > 0$, $P(2/3) < 0$. Требование подобных

неравенств накладывает условия на коэффициенты полинома, и на этой основе можно сформулировать много сравнительно простых достаточных условий существования трех неподвижных точек. Приведем пример такого типа утверждения с указанием области параметров, при которых наименьший корень находится вблизи нуля, а наибольший — вблизи единицы.

Лемма 2. Для $\forall \delta \in (0, 1/2) \exists \Omega_0 > 0$, что для $\forall \Omega \in (0, \Omega_0) \exists \varepsilon_0 > 0$, что при $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists \eta_{\pm} > 0$, что при $\forall \eta \in (\eta_-, \eta_+)$ в системе уравнений (1.1) с указанными ограничениями на параметры $\Omega, \varepsilon, \eta$ существуют три неподвижных точки с координатами $0 < z_- < z_0 < z_+ < 1$, которые обладают свойством: $z_- \in (0, \delta), z_+ \in (1 - \delta, 1)$.

Доказательство сводится к выявлению параметров $\eta, \varepsilon, \Omega$, при которых выполняются неравенства $P(\delta) > 0, P(1 - \delta) < 0$. С учетом вида полинома $P(z)$ эти неравенства эквивалентны требованию

$$\frac{1 - \delta}{\delta}[\varepsilon^2 + (\delta - \Omega)^2] < \eta < \frac{\delta}{1 - \delta}[\varepsilon^2 + (1 - \delta - \Omega)^2].$$

Указанный здесь промежуток для параметра η не пуст, если

$$[(1 - \delta)^2 - \delta^2]\varepsilon^2 < \delta^2(1 - \delta - \Omega)^2 - (1 - \delta)^2(\delta - \Omega)^2.$$

Отсюда следует, что промежуток для параметра ε не пуст, если

$$\delta^2(1 - \delta - \Omega)^2 - (1 - \delta)^2(\delta - \Omega)^2 > 0.$$

Последнее условие эквивалентно требованию $\Omega \in (0, \Omega_0)$ при $\Omega_0 = 2\delta(1 - \delta)(1 - 2\delta)$. Значения $\varepsilon_0, \eta_{\pm}$ вычисляются последовательно через граничные значения в приведенных выше неравенствах. Лемма доказана.

4.2. Неподвижные точки бездиссипативной системы

При отсутствии диссипации, когда $b_1 = b_2 = 0$, уравнения для неподвижных точек принимают форму

$$zh \sin \psi = 0, \quad \rho h \sin \psi = 0, \quad (z - \Omega)\rho - zh \cos \psi = 0. \quad (4.5)$$

Помимо тривиального решения $\rho = 0, z = 0$, которое соответствует $x = y = z = 0$, других решений с $\rho = 0$ не бывает. При $\rho \neq 0$ система (4.5) эквивалентна двум уравнениям

$$\sin \psi = 0, \quad (z - \Omega)\rho - zh \cos \psi = 0. \quad (4.6)$$

В фазовом пространстве (x, y, z) они описывают гиперболу $(z - \Omega)y = hz$, лежащую в плоскости $x = 0$. Таким образом, неподвижные точки заполняют две ветви этой гиперболы.

Надо учесть, что бездиссипативная система имеет первый интеграл $\mathcal{M}^2 = \rho^2 + z^2 = \text{const}$, так что фазовое пространство расслаивается на сферы. Поэтому неподвижные точки можно параметризовать величиной $\mathcal{M}^2 > 0$, отождествляя их с равновесием бездиссипативной системы при фиксированном первом интеграле. В таком подходе для координат неподвижных точек ρ, z получается система

$$\rho^2(z - \Omega)^2 + z^2 h^2 = 0, \quad \rho^2 + z^2 = \mathcal{M}^2, \quad (4.7)$$

эквивалентная уравнению четвертого порядка

$$P_4(z) \equiv (z^2 - \mathcal{M}^2)(z - \Omega)^2 + z^2 h^2 = 0, \quad |z| \leq \mathcal{M}.$$

Характерной величиной здесь является комбинация параметров $D_{\mathcal{M}} = (\Omega/\mathcal{M})^{2/3} + (h/\mathcal{M})^{2/3}$.

В пересечении линии (4.6) со сферой $\rho^2 + z^2 = \mathcal{M}^2, 0 \leq \psi < 2\pi$ существует от двух до четырех точек в зависимости от величины $D_{\mathcal{M}}$ (см. рис. 4).

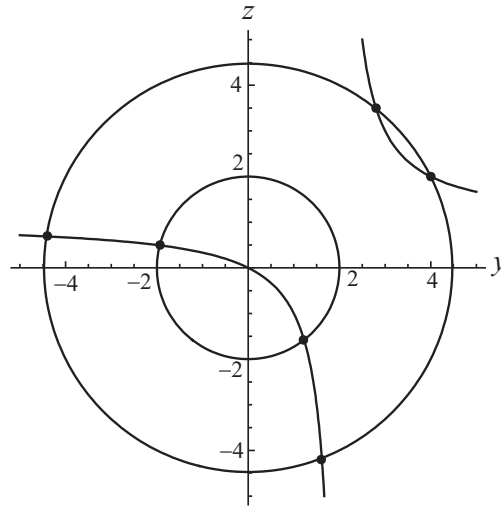


Рис. 4. Неподвижные точки бездиссипативной системы заполняют две ветви гиперболы в плоскости $x = 0$; в примере $h = 2, \Omega = 1$. В пересечении со сферой радиуса M существует от двух до четырех точек.

Лемма 3. *Бездиссипативная система на любой сфере радиуса M имеет неподвижные точки — либо две при $D_M > 1$, либо три при $D_M = 1$, либо четыре при $D_M < 1$. В общем случае две точки имеют координаты z противоположного знака.*

Доказательство. Заметим, что $P_4(0) = -r^2\Omega^2 \leq 0$ и $P_4(\pm r) = h^2 > 0$. Поэтому при $\Omega \neq 0$ существуют два корня противоположного знака $-M < z_1 < 0 < z_2 < M$. По ним восстанавливаются координаты $\rho_{1,2} = \sqrt{M^2 - z_{1,2}^2}$, а также $\psi_{1,2}$ из уравнений неподвижной точки (4.5). Если $D_M \leq 1$, то имеется дополнительная пара корней $z_3, z_4 \in (-M, M)$, по которым восстанавливаются координаты еще двух неподвижных точек. В случае $\Omega = 0$ помимо кратного корня $z_{1,2} = 0$ существуют ненулевые корни $z_{3,4} = \pm\sqrt{M^2 - h^2}$ при $M^2 > h^2$.

4.3. Предел по малой диссипации

Рассмотрим поведение неподвижных точек для системы Блоха (1.1) в пределе малой диссипации, когда $b_1, b_2 \rightarrow 0$.

Напомним, что подобная задача для модели Ландау — Лифшица решается довольно просто. Если уравнения Ландау — Лифшица рассматривать как возмущение бездиссипативной системы, то получаемые ответы соответствуют теории регулярных возмущений. При таком возмущении модуль вектора намагниченности $M = |\mathbf{M}(t)|$ остается первым интегралом. Следовательно, сохраняется расслоение фазового пространства на сферы и любая возмущенная (диссипацией) траектория остается на сфере. Неподвижные точки на каждой сфере при возмущении немного смещаются и меняют свою структуру: вместо центров появляются фокусы либо узлы (устойчивые и неустойчивые). В пределе, когда диссипация стремится к нулю, неподвижные точки на каждой сфере стремятся к предельным положениям, которые соответствуют бездиссипативной системе [7]. В ситуации общего положения таких точек имеется либо две, либо четыре.

Иная ситуация складывается при учете диссипации в форме уравнений Блоха (1.1). Эта система не имеет первых интегралов, модуль вектора намагниченности не сохраняется, и траектория не находится на сфере. Число неподвижных точек может быть от одной до трех. Их координаты ρ, z связаны соотношением (4.2): $\rho^2 = bz(1 - z)$, ($b = b_1/b_2 > 0$), которое вовсе не гарантирует принадлежность трех неподвижных точек одной сфере.

Более того, пределы неподвижных точек по малой диссипации (при $b_1, b_2 \rightarrow 0$) также оказываются на разных сферах. В самом деле, рассмотрим предел уравнений (4.2) при $b_1, b_2 \rightarrow 0$

в случае $\lim(b_1/b_2) = b = \text{const} > 0$:

$$\rho^2(z - \Omega)^2 = z^2 h^2, \quad \rho^2 = bz(1 - z). \quad (4.8)$$

Поскольку первые соотношения в (4.7) и в (4.8) совпадают, то любой корень $\hat{z}, \hat{\rho}$ уравнений (4.8) будет корнем уравнений (4.7) при подходящем выборе радиуса сферы: $\mathcal{M} = \sqrt{(b-1)\hat{z}^2 - b\hat{z}}$. Легко понять, что разные корни \hat{z} , зависящие от двух параметров Ω и $\eta = h^2/b$, в ситуации общего положения дают разные значения \mathcal{M} . Следовательно, пределы неподвижных точек оказываются на разных сферах.

Необходимо иметь в виду, что в пространстве параметров $\eta, \Omega, \varepsilon$ есть область (см. рис. 3), для каждой точки которой уравнения (4.3) имеет три разных корня $z_- < z_0 < z_+$. Пределы этих корней при $\varepsilon \rightarrow 0$ не совпадают, если значения η, Ω лежат на грани, которая представлена на рис. 3 справа. Почти для всех η, Ω из этой области пределы неподвижных точек диссипативной системы оказываются на трех разных сферах. Более того, две предельные точки могут оказаться пределами точек, устойчивых в диссипативной системе, как это выясняется в следующем разделе.

5. Устойчивость неподвижных точек в системе Блоха

При наличии диссипации устойчивость положения равновесия можно определить, используя первый метод Ляпунова. Для этого следует выписать матрицу системы дифференциальных уравнений, линеаризованных вблизи неподвижной точки. С учетом уравнений равновесия (4.1) такую матрицу можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon & -b\varepsilon(z-1)/\rho & -(\Omega-z)\rho \\ -b\varepsilon(z-1)/\rho & -b\varepsilon & b(\Omega-z)(z-1) \\ (\Omega-z)/\rho & -\Omega/z & -\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Здесь ρ, z — координаты неподвижной точки, $\varepsilon = b_2$, $b = b_1/b_2$. Уравнение, которое получается для собственных значений λ , с учетом соотношения $\rho^2 = bz(1-z)$ приводится к виду

$$Q(\lambda; z) \equiv (\lambda + b\varepsilon)[(\lambda + \varepsilon)^2 + (\Omega - z)^2] + b(\lambda + \varepsilon)\frac{1-z}{z}[\varepsilon^2 + \Omega(\Omega - z)] + b\varepsilon(1-z)(\Omega - z) = 0. \quad (5.1)$$

Выписанный здесь характеристический полином по λ третьей степени $Q(\lambda; z)$ зависит от четырех параметров $z, \varepsilon, b, \Omega$. Для краткости указывается явная зависимость лишь от координаты неподвижной точки $z \in (0, 1)$. Имея в виду, что z — один из корней уравнения (4.3), можно заключить, что, в конечном счете, собственные значения λ зависят от четырех параметров $\eta, \Omega, \varepsilon, b$, или, что то же самое, от исходных h, Ω, b_1, b_2 .

В бездиссипативном пределе, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, уравнение (5.1) упрощается:

$$\lambda^3 + \lambda(\Omega - z)\left(\Omega - z + b\Omega\frac{1-z}{z}\right) = 0.$$

Одно из собственных значений оказывается нулевым $\lambda = 0$, а два других легко вычисляются. Однако отсюда никаких утверждений об устойчивости равновесия диссипативной системы сделать невозможно, даже при малой диссипации², когда $0 < \varepsilon \ll 1$.

Дальнейший анализ устойчивости проводится при произвольных значениях параметров $\varepsilon, \eta > 0$, $z \in (0, 1)$, $\Omega \in \mathbb{R}$; в частности, выясняется зависимость от координаты неподвижной точки z . Решение вопроса устойчивости сводится к выяснению знака действительной части собственных значений λ исходя из уравнения (5.1).

²Достаточные условия неустойчивости при малой диссипации можно получить из требования действительности ненулевых корней предельного уравнения.

Теорема 3. При наличии в уравнении (4.3) трех разных действительных корней $z_- < z_0 < z_+$ неподвижная точка со средней координатой $z = z_0$ неустойчива.

Доказательство. Вычисляя значение полинома $Q(\lambda; z)$ в точке $\lambda = 0$, обнаруживаем, что оно пропорционально производной функции, которая определяет z -координату неподвижной точки:

$$\frac{1}{b\varepsilon}Q(0; z) = \varepsilon^2 + \eta + (\Omega - z)^2 + 2(1 - z)(\Omega - z) = P'(z). \quad (5.2)$$

Поскольку согласно следствию леммы 2 $P'(z_0) < 0$, то $Q(0; z_0) < 0$. Учитывая свойство $Q(\lambda; z_0) \rightarrow \infty$ $\lambda \rightarrow \infty$, заключаем, что кубический полином $Q(\lambda; z_0)$ имеет нуль $\lambda = \lambda_0 > 0$ на положительной полуоси. Этот нуль является положительным собственным значением матрицы для системы, линеаризованной в неподвижной точке с координатой $z = z_0$. Следовательно, эта точка неустойчива.

Лемма 4. Если значение z_{\pm} соответствует единственному корню либо простым крайним корням $z_- < z_0 < z_+$ уравнения (4.3), то для неподвижной точки с соответствующей координатой $z = z_{\pm}$ матрица линеаризованной системы имеет по крайней мере одно отрицательное собственное значение $\lambda = \lambda_0^{\pm} < 0$.

Доказательство аналогично предыдущей лемме опирается на соотношение (5.2). Поскольку согласно следствию леммы 2 $P'_3(z_{\pm}) > 0$, то $Q(0; z_{\pm}) > 0$. Отсюда вытекает, что кубический полином $Q(\lambda; z_{\pm})$ имеет нуль $\lambda = \lambda_0^{\pm} < 0$ на отрицательной полуоси.

Отсюда, конечно, не следует устойчивость неподвижной точки с координатой $z = z_{\pm}$, поскольку неизвестны знаки для действительных частей двух оставшихся собственных значений.

Введем комбинацию параметров $\lambda_* = -\varepsilon(2 + b) < 0$.

Теорема 4. Неподвижная точка с координатой $z = z_{\pm}$ асимптотически устойчива, если $Q(\lambda_*; z_{\pm}) < 0$, и неустойчива, если $Q(\lambda_*; z_{\pm}) > 0$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0^{\pm} < 0$ — наименьший отрицательный корень уравнения (5.1) при $z = z_{\pm}$. Характеристический полином из (5.1) представим в виде

$$Q(\lambda; z_{\pm}) = (\lambda - \lambda_0^{\pm})(\lambda^2 + 2a\lambda + c).$$

Коэффициенты a, c выражаются по формулам

$$2a = \varepsilon(b + 2) + \lambda_0^{\pm} = \lambda_0^{\pm} - \lambda_*, \quad c = -\frac{b\varepsilon}{\lambda_0^{\pm}} [\varepsilon^2 + \eta + (\Omega - z)^2 + 2(1 - z_{\pm})(\Omega - z_{\pm})] = -\frac{b\varepsilon}{\lambda_0^{\pm}} P'_3(z_{\pm}).$$

Дополнительная пара собственных значений как нулей полинома $Q(\lambda; z_{\pm})$ выписывается в виде

$$\lambda_1^{\pm} = -a + \sqrt{a^2 - c}, \quad \lambda_2^{\pm} = -a - \sqrt{a^2 - c}. \quad (5.3)$$

Поскольку $\lambda_0^{\pm} < 0$ и $P'_3(z_{\pm}) > 0$, то $c > 0$. Поэтому знак действительной части выражений $\text{sign}(\text{Re}\lambda_{1,2}^{\pm}) = -\text{sign}(a)$ определяется знаком коэффициента $-a$. Следовательно, свойство устойчивости определяется расположением величины λ_* относительно λ_0^{\pm} : если $\lambda_* < \lambda_0^{\pm}$, то равновесие устойчиво, если $\lambda_* > \lambda_0^{\pm}$, то неустойчиво.

В случае, когда λ_0^{\pm} — единственный действительный нуль полинома $Q(\lambda; z_{\pm})$, расположение величины λ_* относительно λ_0^{\pm} соответствует знаку выражения $Q(\lambda_*; z_{\pm})$. Таким образом, теорема доказана для случая комплексных корней $\lambda_{1,2}^{\pm}$.

Рассмотрим случай трех различных действительных корней $\lambda_0^{\pm}, \lambda_{1,2}^{\pm}$. Поскольку $\lambda_0^{\pm} < 0$ и $Q(0; z_{\pm}) > 0$, то оба дополнительных корня $\lambda_{1,2}^{\pm}$ имеют один знак. Если они положительны, то из представления (5.3) следует, что $-a > 0$ и тем самым $\lambda_0^{\pm} < \lambda_*$. Поскольку $\lambda_* < 0$, то

$Q(\lambda_*; z_{\pm}) > 0$. Если оба корня отрицательны $\lambda_{1,2}^{\pm} < 0$, то из представления (5.3) следует, что $-a < 0$ и, тем самым, $\lambda_* < \lambda_0^{\pm}$. Поскольку λ_0^{\pm} — наименьший корень, то $Q(\lambda_*; z_{\pm}) < 0$.

Полученные таким образом соотношения между знаком корней $\lambda_{1,2}^{\pm} < 0$ и знаком величины $Q(\lambda_*; z_{\pm})$ взаимно однозначны. Например, если $Q(\lambda_*; z_{\pm}) < 0$ и от противного предположить $\lambda_{1,2}^{\pm} > 0$, то в силу доказанного утверждения получаем $Q(\lambda_*; z_{\pm}) > 0$. Следовательно, предположение не верно и $\lambda_{1,2}^{\pm} \leq 0$. Однако нулевых корней не бывает, и поэтому $\lambda_{1,2}^{\pm} < 0$. То есть все три корня отрицательны. Теорема доказана.

Доказанное утверждение дает исчерпывающий результат об устойчивости неподвижных точек в системе Блоха, который можно извлечь первым методом Ляпунова. Условия устойчивости в виде условий на знак величины $Q(\lambda_*; z_{\pm})$ даются в терминах корня $z = z_{\pm}(\varepsilon, \Omega, \eta)$ кубического уравнения (4.3). В конечном счете, они представляют собой условия на четыре параметра исходной системы. Используя выражения для $z_{\pm}(\varepsilon, \Omega, \eta)$, можно записать условия устойчивости для каждой из точек с координатой $z = z_{\pm}$. Однако в общем случае они представляются формулами, которые плохо обозримы.

Можно дать более простые достаточные условия устойчивости.

Лемма 5. *Если выполнено хотя бы одно из соотношений: либо $\Omega \notin (0, 1)$, либо $2\varepsilon^2(b+1)^2 + b(b+1)\eta > b^2(b+2)/2(b+1)$, либо $b \leq 2$, то неподвижная с любой из координат $z = z_{\pm}$ асимптотически устойчива.*

Доказательство состоит в анализе знака выражения для $Q(\lambda_*; z)$, которое зависит от четырех параметров:

$$Q(\lambda_*; z) = -2\varepsilon[\varepsilon^2(b+1)^2 + (\Omega - z)^2] - \varepsilon b(b+1) \frac{1-z}{z} [\varepsilon^2 + \Omega(\Omega - z)] + b\varepsilon(1-z)(\Omega - z).$$

Здесь три параметра $\varepsilon, b > 0, \Omega \in \mathbb{R}$ соответствуют исходным. Значение $z \in (0, 1)$ соответствует корню $z = z_{\pm}(\varepsilon, \Omega, \eta)$ уравнения (4.3). Его можно считать четвертым независимым параметром вместо η . Если $\Omega \leq 0$, то легко видеть, что выражение $Q(\lambda_*; z) < 0$ будет отрицательным независимо от значений остальных параметров. Далее анализируются случаи с $\Omega > 0$.

В силу уравнения (4.3) имеет место тождество

$$(1-z)[\varepsilon^2 + (z-\Omega)^2] = z\eta. \tag{5.4}$$

Поэтому выражение для $Q(\lambda_*; z)$ можно привести к виду

$$Q(\lambda_*; z) = -2\varepsilon[\varepsilon^2(b+1)^2 + (\Omega - z)^2] - \varepsilon b(b+1)\eta - \varepsilon b^2(1-z)(\Omega - z). \tag{5.5}$$

Если $\Omega - z \geq 0$, то легко видеть, что это выражение будет отрицательным независимо от значений остальных параметров, в частности при $\Omega \geq 1$. Таким образом, если $\Omega \notin (0, 1)$, то $Q(\lambda_*; z) < 0$. Тем самым с учетом теоремы 4 доказано первое утверждение леммы. Остается проанализировать выражение $Q(\lambda_*; z)$ при $0 < \Omega < z$.

Поскольку в рассматриваемых точках $z = z_{\pm}$ производная положительна $P'(z) > 0$, то с учетом (5.4) получаем неравенство

$$(1-z)P'(z) = (1-z)[\varepsilon^2 + \eta + (z-\Omega)^2 + 2(z-1)(z-\Omega)] = \eta - 2(1-z)^2(z-\Omega) > 0.$$

Выводимая отсюда оценка $-\eta < 2(1-z)^2(\Omega - z)$ позволяет оценить выражение (5.5) следующим образом: $Q(\lambda_*; z)/\varepsilon b < -(b+1)\eta - b(1-z)(\Omega - z) < (1-z)(\Omega - z)[2(b+1)(1-z) - b]$. Поскольку в рассматриваемом случае $\Omega - z < 0$, то при $0 < z \leq (b+2)/2(b+1)$ оказывается $Q(\lambda_*; z) < 0$. Следовательно, неустойчивость в точках с координатами $z = z_{\pm}$ может случаться лишь при $z_{\pm} > (b+2)/2(b+1)$. В таком случае в области параметров $0 < \Omega < z, (b+2)/2(b+1) < z < 1$ для выражения из (5.5) получается неравенство

$$\frac{1}{\varepsilon b} Q(\lambda_*; z) < -2\varepsilon^2(b+1)^2 - b(b+1)\eta + b^2(b+2)/2(b+1),$$

из которого следует доказательство второго утверждения леммы.

Из свойства $P'(z) > 0$ вытекает $-2[\eta + (1 - z)(\Omega - z)] < \varepsilon^2 - \eta + (z - \Omega)^2 < \varepsilon^2 + (z - \Omega)^2$. С учетом этого неравенства для выражения (5.5) можно получить следующую оценку:

$$\frac{1}{\varepsilon}Q(\lambda_*; z) < -2[\varepsilon^2(b + 1)^2 + (\Omega - z)^2] + b^2 \frac{1 - z}{2}[\varepsilon^2 + (z - \Omega)^2].$$

Легко видеть, что при $z > 1/2$ это выражение отрицательно, если $0 < b^2 \leq 4$. Тем самым доказано третье, последнее, утверждение леммы.

Отметим, что в физически реализуемых ситуациях выполняется условие $0 < b = b_1/b_2 < 1$ и поэтому положение равновесия с любой из координат $z = z_{\pm}$ устойчиво независимо от остальных параметров. Напомним, что таких точек может быть либо одна, либо две.

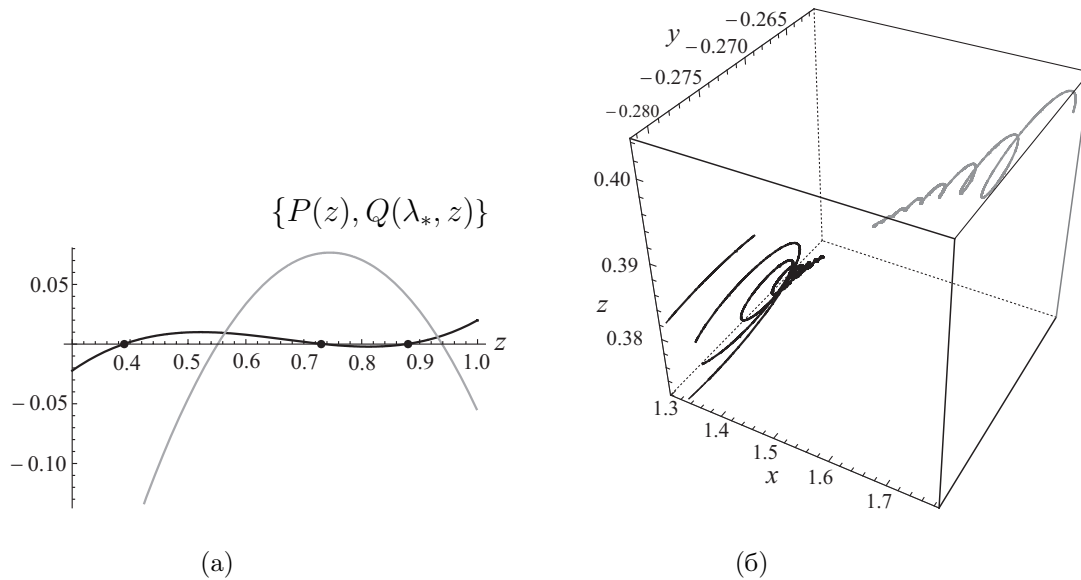


Рис. 5. Наличие двух неустойчивых точек равновесия с координатами $z = z_0 \approx 0.73$, $z = z_+ \approx 0.88$ при $\varepsilon = 0.02$, $\eta = 0.02$, $\Omega = 0.5$, $b = 10$. Почти все траектории притягиваются к единственной устойчивой точке с координатой $z = z_- \approx 0.39$.

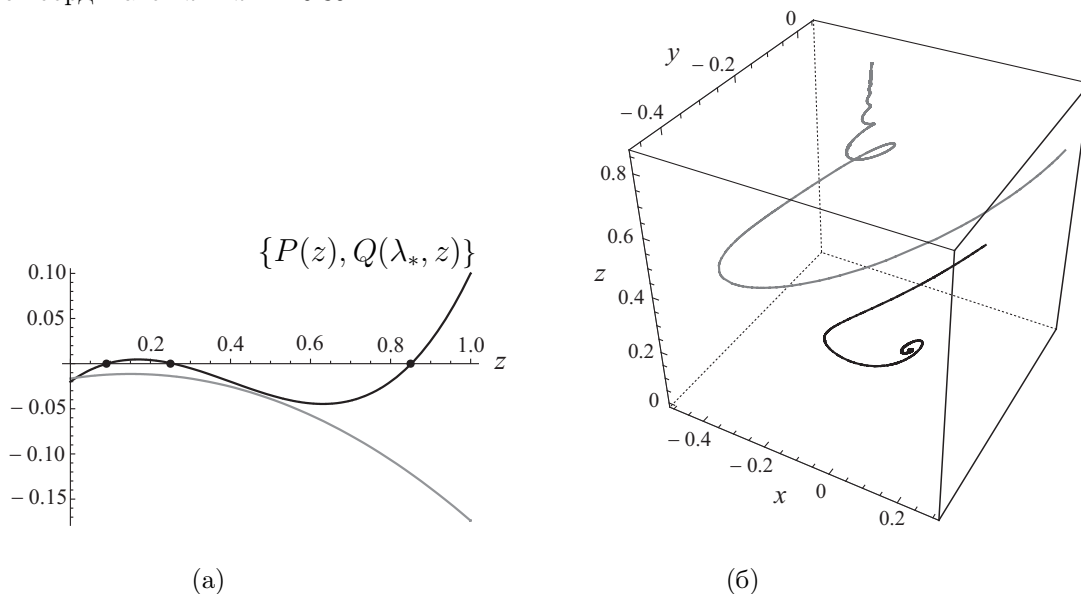


Рис. 6. Наличие одной неустойчивой точки равновесия с координатой $z = z_0 \approx 0.23$ при $\varepsilon = 0.1$, $\eta = 0.1$, $\Omega = 0.1$, $b = 0.5$. Две точки равновесия с координатами $z_- \approx 0.09$ и $z_+ \approx 0.85$ устойчивы, поскольку $Q(\lambda_*, z) < 0$. Разные траектории притягиваются к разным устойчивым точкам.

Если параметр b большой, а ε, η — малы, то в случае трех точек равновесия неустойчивыми могут оказаться две из них³, в том числе (помимо z_0) точка с координатой $z = z_+$. Такой результат можно усмотреть из сравнения графиков полиномов $P(z)$ и $Q(\lambda_*; z)$ как функций от z . Пример такой ситуации приведен на рис. 5 (а). Здесь видно, что в правом нуле $z = z_+$ кубического полинома $P(z)$ значение квадратичного по z полинома $Q(\lambda_*; z)$ положительно, а поэтому соответствующая точка равновесия неустойчива. В этом случае устойчивой будет лишь одна из трех точек равновесия. Примеры фазовых траекторий приведены на рис. 5 (б).

Впрочем, для большей части параметров функция $Q(\lambda_*, z)$ отрицательна на всем отрезке $0 < z < 1$, а поэтому точка равновесия с любой из координат $z = z_{\pm}$ оказывается устойчивой, как это видно на рис. 6 (а). Наличие двух устойчивых точек ведет к разделению фазовых траекторий на два класса; примеры приведены на рис. 6 (б).

6. Усреднение уравнений Блоха

Анализ решений, отличных от неподвижных точек, проводится с использованием малого параметра ε . Принято, что этот параметр содержится множителем в коэффициентах диссипации, так что $b_2 = \varepsilon \ll 1$, $b_1 = b\varepsilon$ при $b = \text{const} > 0$. Кроме того, этот параметр допускается в медленно меняющихся коэффициентах $h(\varepsilon t), \Omega(\varepsilon t)$. Функции $h(\tau), \Omega(\tau)$ считаются гладкими по медленному времени $\tau = \varepsilon t$; в частности, они ограничены на конечном промежутке и $h(\tau) \geq \text{const} > 0$. Задача состоит в построении асимптотики по малому параметру (при $\varepsilon \rightarrow 0$) для общего трехпараметрического решения $\rho, z, \psi(t; \varepsilon)$ равномерно на большом промежутке времени $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

В качестве основы для асимптотических конструкций используется трехпараметрическое решение бездиссипативной системы уравнений с “замороженными” (постоянными) коэффициентами. Ввиду наличия у такой системы двух первых интегралов

$$\mathcal{M}^2 = \rho^2(t) + z^2(t) = \text{const}, \quad E = \frac{1}{2}z^2(t) - \Omega z(t) - h\rho(t) \cos \psi(t) = \text{const}$$

ее интегрирование сводится к решению скалярного уравнения (3.1). Решение зависит от трех констант интегрирования t_0, E, \mathcal{M}^2 и двух параметров h, Ω и выражается из (3.2) через обратную функцию: $z = z_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$. Поскольку почти все фазовые траектории замкнуты, то общее решение представляет собой периодическую функцию с периодом $T = T(E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$, зависящим от четырех параметров⁴. Остальные компоненты вектора намагниченности: $\rho = \rho_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$, $\psi = \psi_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$ — вычисляются из первых интегралов. Компонента $\psi = \psi_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$ не обязана быть периодической, однако функция $\cos \psi_0(t + t_0; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$ будет периодической в силу первого интеграла.

Полученные таким образом (в неявной форме) функции ρ_0, z_0, ψ_0 дают главный член асимптотики по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ для решения полной (возмущенной) системы Блоха (1.1) равномерно на конечном промежутке времени $0 < t < \mathcal{O}(1)$. Однако, чтобы асимптотика была пригодна на большом промежутке времени $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, надо подходящим образом деформировать параметры $E \approx E_0(\varepsilon t)$, $\mathcal{M}^2 \approx \mathcal{M}_0^2(\varepsilon t)$ и быструю фазу $(t + t_0)$. Такие деформации в масштабе медленного времени $\tau = \varepsilon t$ определяются из усредненных уравнений.

Процедура усреднения как реализация одного из вариантов метода двухмасштабных разложений наиболее просто выглядит в переменных типа “действие-угол”. В простейших примерах такими переменными являются полярные координаты, и переход к ним от декартовых координат связан с решением линейного осциллятора: $x = r \cos s$, $y = r \sin s$.

В рассматриваемой задаче переход основан на решениях бездиссипативной “замороженной” системы. При этом удобно использовать 2π -периодические функции, определяемые по

³Значения $b > 1$ не соответствуют известным физически реализуемым ситуациям [5]. Такие системы с двумя неустойчивыми положениями равновесия можно рассматривать как математический казус.

⁴Зависимость от параметра $b = b_1/b_2$ здесь не анализируется.

формулам

$$R, Z, \Psi(S, E, \mathcal{M}^2; h, \Omega) = \rho_0, z_0, \psi_0(S/\omega; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega).$$

Здесь $\omega = \omega(E, \mathcal{M}^2; \tau) = 2\pi/T$ — частота невозмущенного решения, зависящая как от параметров траектории E, \mathcal{M}^2 , так и от параметра τ посредством $h(\tau), \Omega(\tau)$. Введенные таким образом функции зависят от пяти переменных и удовлетворяют тождествам, которые вытекают из исходных уравнений и первых интегралов

$$\omega \partial_S R = -h Z \sin \Psi, \quad \omega \partial_S Z = h R \sin \Psi, \quad R[\omega \partial_S \Psi - \Omega + Z] = -h Z \cos \Psi,$$

$$R^2 + Z^2 = \mathcal{M}^2, \quad \frac{1}{2} Z^2 - \Omega Z - h R \cos \Psi = E.$$

Дифференцирование двух последних тождеств приводит к соотношениям

$$\partial_E(R^2 + Z^2) = 0, \quad \partial_{\mathcal{M}^2}(R^2 + Z^2) = 1,$$

$$\partial_E\left(\frac{1}{2} Z^2 - \Omega Z - h R \cos \Psi\right) = 1, \quad \partial_{\mathcal{M}^2}\left(\frac{1}{2} Z^2 - \Omega Z - h R \cos \Psi\right) = 0.$$

Кроме того, тождества первых интегралов можно дифференцировать по параметрам h, Ω . В усредненных уравнениях фигурирует комбинация таких производных в виде оператора $\hat{\partial}_\tau = h'(\tau)\partial_h + \Omega'(\tau)\partial_\Omega$. Применение этого оператора к тождествам первых интегралов дает соотношения

$$\hat{\partial}_\tau(R^2 + Z^2) = 0, \quad (Z - \Omega)\hat{\partial}_\tau Z - h\hat{\partial}_\tau(R \cos \Psi) = h'(\tau)R \cos \Psi + \Omega'(\tau)Z.$$

Итак, в системе уравнений Блоха (1.1) выполняется замена переменных $(\rho, z, \psi) \Rightarrow (S, E, \mathcal{M}^2)$ по формулам

$$\rho(t) = R(S; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega), \quad z(t) = Z(S; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega), \quad \psi(t) = \Psi(S; E, \mathcal{M}^2; h, \Omega);$$

здесь $h(\varepsilon t), \Omega(\varepsilon t)$ — заданные функции. Якобиан замены вычисляется с учетом полученных выше тождеств

$$\det \frac{\partial(R, Z, \Psi)}{\partial(S, E, \mathcal{M}^2)} = \begin{vmatrix} R_S & R_E & R_{\mathcal{M}^2} \\ Z_S & Z_E & Z_{\mathcal{M}^2} \\ \Psi_S & \Psi_E & \Psi_{\mathcal{M}^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2R\omega}.$$

Уравнения для вектора новых искомым функций $(S, E, \mathcal{M}^2)(t)$ выписываются через матрицу Якоби в виде

$$\frac{\partial(R, Z, \Psi)}{\partial(S, E, \mathcal{M}^2)} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} S \\ E \\ \mathcal{M}^2 \end{pmatrix} = \omega \partial_S \begin{pmatrix} R \\ Z \\ \Psi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R \\ (Z-1)b \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon \hat{\partial}_\tau \begin{pmatrix} R \\ Z \\ \Psi \end{pmatrix}.$$

После приведения системы к нормальной форме уравнения приобретают вид, характерный для задач о возмущении нелинейных колебаний:

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon f(S, E, \mathcal{M}^2; \tau), \quad \frac{d\mathcal{M}^2}{dt} = \varepsilon g(S, E, \mathcal{M}^2; \tau), \quad \frac{dS}{dt} = \omega(E, \mathcal{M}^2; \tau) + \varepsilon \Phi(S, E, \mathcal{M}^2; \tau), \quad (\tau = \varepsilon t).$$

Правые части выражаются через решения невозмущенных уравнений $R, Z, \Psi(S, E, \mathcal{M}^2; h, \Omega)$ и поэтому представляют собой 2π -периодические функции по быстрой переменной S ; в частности,

$$f = h(\tau)R \cos \Psi + b(Z-1)(\Omega - Z) - h'(\tau)R \cos \Psi - \Omega'(\tau)Z, \quad g = -2[R^2 + bZ(Z-1)].$$

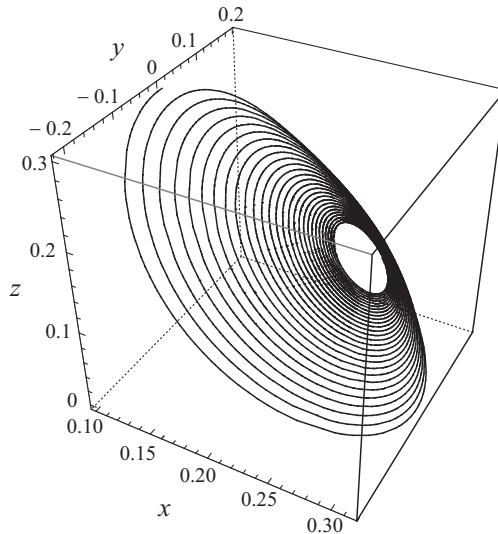


Рис. 7. Траектория решения системы (1.1) при $b_2 = \varepsilon = 0.01$, $b_1 = 0.5\varepsilon$, $h = 0.5$, $\Omega = 0.5$. Асимптотика описывается периодическим функциями с медленно меняющимися параметрами $\mathcal{M}(\varepsilon t)$, $E(\varepsilon t)$.

Таким образом, исходная задача о построении асимптотики по малому параметру для решений уравнений Блоха сводится к классической задаче о возмущении одночастотных колебаний [9], которая решается методом двухмасштабных разложений. В одном из вариантов этого метода можно разделить задачи по построению асимптотики быстрой компоненты $S(t; \varepsilon)$ и медленных компонент $E(t; \varepsilon)$, $\mathcal{M}^2(t; \varepsilon)$, используя анзац

$$E(t; \varepsilon) = E_0(\tau) + \varepsilon E_1(S, \tau) + \dots, \quad \mathcal{M}^2(t; \varepsilon) = \mathcal{M}_0^2(\tau) + \varepsilon \mathcal{M}_1^2(S, \tau) + \dots;$$

$$S(t; \varepsilon) = \varepsilon^{-1} S_{-1}(\tau) + S_0(\tau) + \varepsilon S_1(\hat{S}, \tau) + \dots, \quad \hat{S} = \varepsilon^{-1} S_{-1}(\tau) + S_0(\tau); \quad (\tau = \varepsilon t).$$

Главные члены асимптотики медленных “амплитуд” $E_0(\tau)$, $\mathcal{M}_0^2(\tau)$ находятся из системы усредненных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dE_0}{d\tau} &= h(\tau) \langle R \cos \Psi \rangle + b \langle (Z - 1)(\Omega - Z) \rangle - h'(\tau) \langle R \cos \Psi \rangle - \Omega'(\tau) \langle Z \rangle, \\ \frac{d\mathcal{M}_0^2}{d\tau} &= -2 \langle R^2 + b(Z - 1) \rangle. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначается усреднение по быстрой переменной S известных функций, которые выражаются через $R, Z, \Psi(S, E_0, \mathcal{M}_0^2; h, \Omega)$; например,

$$\langle R^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2(S, E_0, \mathcal{M}_0^2; h, \Omega) dS.$$

Вычисление асимптотики для быстрой фазы $\hat{S} = \varepsilon^{-1} S_{-1}(\tau) + S_0(\tau)$ в членах порядка единицы $S_0(\tau) = \mathcal{O}(1)$, как обычно, требует предварительного вычисления первых поправок амплитуд $R_1, Z_1(S, \tau)$ [12; 13]. Впрочем, если ограничиться грубым ответом — траекторией возмущенной системы в фазовом пространстве (x, y, z) , не интересуясь движением вдоль траектории, то информация о быстрой фазе вовсе не нужна (см. рис. 7).

Вывод. Решения усредненных уравнений $\mathcal{M}_0(\varepsilon t)$, $E_0(\varepsilon t)$ определяют медленную деформацию радиуса сферы и траектории на сфере. Такая деформация используется для приближенного описания траектории системы Блоха (1.1) в главном члене асимптотики

$$\rho, z, \psi(t; \varepsilon) = \rho_0, z_0, \psi_0(\sigma; E_0(\tau), \mathcal{M}_0^2(\tau); h(\tau), \Omega(\tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \sigma = \hat{S}/\omega(E_0(\tau), \mathcal{M}_0^2(\tau); \tau), \quad \tau = \varepsilon t$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на большом промежутке времени $0 < t < \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

7. Анализ усредненной системы

Исследование усредненной системы (6.1) представляет собой отдельную задачу. Отсутствие простых формул для решений “замороженной” бездиссипативной системы не дает возможности выписать усредненные уравнения в явной форме через элементарные функции. По той же причине затруднены численные эксперименты с этими уравнениями. Тем не менее анализ системы (6.1) возможен. В качестве примера приведем два результата.

7.1. Глобальное существование

Теорема 5. *Если функции $h(\tau), \Omega(\tau) \in C^1(\mathbb{R})$ непрерывно дифференцируемые, то любое решение усредненных уравнений (6.1) продолжается на всю ось $\tau \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Из тождества первого интеграла $R^2 + Z^2 = \mathcal{M}^2$ вытекают оценки для квадратов: $R^2 \leq \mathcal{M}^2$, $Z^2 \leq \mathcal{M}^2$, из которых выводятся оценки и для первых степеней:

$$-\frac{\mathcal{M}^2 + 1}{2} \leq R \leq \frac{\mathcal{M}^2 + 1}{2}, \quad -\frac{\mathcal{M}^2 + 1}{2} \leq Z \leq \frac{\mathcal{M}^2 + 1}{2}.$$

Эти неравенства сохраняются для средних значений. Поэтому правые части уравнений (6.1), которые выражаются через $R, Z, \Psi(S, E_0, \mathcal{M}_0^2; h, \Omega)$, мажорируются сверху и снизу линейными функциями $\pm M(1 + \mathcal{M}_0^2)$, $\pm M(1 + E_0)$, ($M = \text{const} > 0$). В таком случае существование глобального решения следует из известных результатов [11, с. 21; 8, с. 13].

7.2. Равновесие

Рассмотрим усредненные уравнения в автономном случае, когда $h, \Omega = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= h\langle R \cos \Psi \rangle + b\langle (Z - 1)(\Omega - Z) \rangle \equiv f(E, \mathcal{M}^2), \\ \frac{d\mathcal{M}^2}{d\tau} &= -2\langle R^2 + bZ(Z - 1) \rangle \equiv g(E, \mathcal{M}^2). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Правые части этих автономных уравнений вычисляются через средние значения периодических функций, т. е. через интегралы вдоль замкнутых фазовых траекторий бездиссипативной системы. Поскольку у такой системы почти все траектории замкнуты, то функции $f(E, \mathcal{M}^2)$, $g(E, \mathcal{M}^2)$ определены на полуплоскости $E \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}^2 > 0$ почти всюду⁵. Для тех значений аргументов E, \mathcal{M}^2 , которые в бездиссипативной системе соответствуют неподвижным точкам типа “центр”, значения функций $f(E, \mathcal{M}^2)$, $g(E, \mathcal{M}^2)$ определяются по непрерывности. В результате для таких E, \mathcal{M}^2 на месте интегралов оказываются значения подынтегральных функций в неподвижной точке. Это позволяет связать равновесие усредненной системы с равновесием невозмущенной (бездиссипативной) системы.

Обозначим через $\hat{\rho}, \hat{z}, \hat{\psi}$ предел по малой диссипации (при $\varepsilon \rightarrow 0$) для одной из неподвижных точек уравнений Блоха (1.1). Такой предел соответствует одному из равновесий бездиссипативной системы при соответствующем значении первого интеграла $\mathcal{M}^2 = (b - 1)\hat{z}^2 - b\hat{z}$. Эта точка равновесия может оказаться либо центром, либо седлом.

Теорема 6. *Если предельная точка $\hat{\rho}, \hat{z}, \hat{\psi}$ является центром бездиссипативной системы, то значения $\hat{\mathcal{M}}^2 = \hat{z}^2 - b\hat{z}(\hat{z} - 1)$, $\hat{E} = \hat{z}^2/2 - \hat{z}\Omega - h\hat{\rho} \cos \hat{\psi}$ определяют неподвижную точку усредненных уравнений (7.1).*

⁵За исключением линии $E = E_s(\mathcal{M}^2)$, которая состоит из точек со значениями первых интегралов (E, \mathcal{M}^2) на сепаратрисных (незамкнутых) траекториях бездиссипативной системы.

Доказательство. Рассмотрим в фазовом пространстве (ρ, z, ψ) линию, определяемую уравнениями (4.8):

$$hz \cos \psi + \rho(z - \Omega) = 0, \quad \rho^2 = bz(1 - z). \quad (7.2)$$

На этой линии находятся как неподвижные точки (4.1), так и их бездиссипационные (при $\varepsilon \rightarrow 0$) пределы $(\hat{\rho}, \hat{z}, \hat{\psi})$. В частности, для предельной точки в силу (7.2) получаем соотношение

$$h\hat{\rho} \cos \hat{\psi} + b(\hat{z} - 1)(\Omega - \hat{z}) = \frac{-\hat{\rho}^2(\hat{z} - \Omega) + b\hat{z}(z_0 - 1)(\Omega - \hat{z})}{\hat{z}} = 0, \quad (7.3)$$

а также $\hat{\rho}^2 - b\hat{z}(1 - \hat{z}) = 0$. Как было показано, эта предельная точка является неподвижной точкой бездисперсионной системы при значении параметра $\mathcal{M}^2 = \hat{\mathcal{M}}^2 = (b - 1)\hat{z}^2 - b\hat{z}$. Соответствующее значение параметра $E = \hat{E}$ вычисляется через выражение первого интеграла в неподвижной точке. С другой стороны, правые части усредненных уравнений, вычисленные при таких значениях параметров $\mathcal{M}^2 = \hat{\mathcal{M}}^2$, $E = \hat{E}$, т. е. при

$$R(S; \hat{E}, \hat{\mathcal{M}}^2) \equiv \hat{\rho}, \quad Z(S; \hat{E}, \hat{\mathcal{M}}^2) \equiv \hat{z}, \quad \Psi(S; \hat{E}, \hat{\mathcal{M}}^2) \equiv \hat{\psi} \quad \forall S,$$

равны нулю в силу (7.2), (7.3). Поэтому $\hat{E}, \hat{\mathcal{M}}^2$ является неподвижной точкой усредненных уравнений (7.1). Теорема доказана.

8. Заключение

В данной работе исследована система трех уравнений (1.1), возникающая в теории ядерной намагниченности при учете диссипации по Блоху. Для случая постоянных параметров выявлены положения равновесия, которых может быть от одного до трех. Обнаружена область параметров, при которых два положения равновесия оказываются неустойчивыми. Равновесие с наименьшим значением координаты $z = z_-$, видимо, устойчиво всегда, но строгое доказательство отсутствует. Остается открытой проблема описания областей притяжения (захвата) к разным устойчивым положениям равновесия.

Показано, что в пределе малой диссипации (при $\varepsilon \rightarrow 0$) неподвижные точки оказываются на разных сферах. Тем самым модель Блоха при наличии трех положений равновесия не переходит в бездиссипативную модель Ландау — Лившица, в которой все неподвижные точки (от двух до четырех) принадлежат одной сфере. За рамками статьи осталось описание свойств единственности и устойчивости неподвижных точек при переходе к бездиссипативному пределу.

Для решений вдали от равновесия построена асимптотика по малому параметру ε . При этом допускается медленная (по времени εt) деформация коэффициентов системы (1.1). Асимптотика в главном члене описывается периодическими функциями, которые представляют собой решение бездиссипативной системы с “замороженными” коэффициентами. Наличие возмущения в виде малой диссипации и медленного изменения коэффициентов проявляется на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$. В асимптотике эти эффекты обнаруживаются в виде медленного изменения параметров (констант интегрирования) невозмущенного решения. Уравнения, описывающие медленную деформацию таких параметров, получаются методом усреднения.

Для усредненной системы доказана глобальная разрешимость и выявлено наличие неподвижных точек. Остается открытым вопрос о числе неподвижных точек и их устойчивости. Численные эксперименты наводят на мысль, что для диссипативных систем типа (1.1) асимптотики, получаемые методом усреднения, пригодны на бесконечном интервале времени $0 < t < \infty$ (см. рис. 7). Однако известные на этот счет результаты, например [14; 15], неприменимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bloch F.** Nuclear Induction // Phys. Rev. 1946. Vol. 70, №7-8. P. 460–474.
2. **Куркин М.И., Туров Е.А.** ЯМР в магнитоупорядоченных веществах и его применения. М.: Наука, 1990. 248 с.
3. Спиновое эхо в системах со связанной ядерно-электронной прецессией / А.С. Боровик-Романов, Ю.М. Буньков, Б.С. Думеш, М.И. Куркин, М.П. Петров, В.П. Чекмарев // Успехи физ. наук. 1984. Т. 142, № 4. С. 537–570.
4. **Калякин Л.А., Султанов О.А., Шамсутдинов М.А.** Асимптотический анализ модели ядерного магнитного авторезонанса // Теорет. мат. физика. 2011. Т. 167, № 3. С. 419–430.
5. **Гуревич А.Г., Мелков Г.А.** Магнитные колебания и волны. М. : Физматлит, 1994. 231 с.
6. **Моносов Я.А.** Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971. 376 с.
7. **Калякин Л.А., Шамсутдинов М.А.** Адиабатические приближения для уравнений Ландау — Лифшица // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т 13, № 2. С. 104–119.
8. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал, 2004. 552 с.
9. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 503 с.
10. **Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейшгадт А.И.** Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 300 с.
11. **Хасьминский Р.З** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях. М.: Наука, 1969. 316 с.
12. **Ажоткин В. Д., Бабич В. М.** О применении метода двухмасштабных разложений к одночастотной задаче теории нелинейных колебаний // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 377–383.
13. **Брюнинг Й., Доброхотов С.Ю., Потеряхин М.А.** Об усреднении для гамильтоновых систем с одной быстрой фазой и малыми амплитудами // Мат. заметки. 2001. Т. 70, вып. 5. С. 660–669.
14. **Арнольд В.И.** О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 758–761.
15. **Ильин А.М.** О методе двух масштабов в задаче о возмущении одночастотного колебания // Теорет. мат. физика. 1999. Т. 118, № 3. С. 383–389.

Калякин Леонид Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
e-mail: klenru@mail.ru

Поступила 10.10.2011

УДК 517.977

ОСЦИЛЛЯЦИИ ОКОЛО СЕПАРАТРИСЫ В УРАВНЕНИИ ДЮФФИНГА¹**О. М. Киселев**

Малое периодическое возмущение приводит к сложной динамике вблизи сепаратрис и седловых точек. Построено двухпараметрическое семейство асимптотических решений, долго находящихся вблизи сепаратрис. Решения из этого семейства негладко зависят от параметра возмущения. Приведен пример, когда значения параметра возмущения для такого семейства решений определяются множеством со структурой типа множества Кантора.

Ключевые слова: теория возмущений, сепаратриса, колебания.

O. M. Kiselev. Oscillations near a separatrix in the Duffing equation.

A small periodic perturbation results in a complicated dynamics near separatrices and saddle points. A two-parameter family of asymptotic solutions staying near separatrices for a long time is constructed. Solutions from this family depend nonsmoothly on the disturbance parameter. An example is given in which the values of the disturbance parameter for this family of solutions are determined by a set with structure of the type of the Cantor set.

Keywords: perturbation separatrix oscillations.

Введение

В работе изучаются свойства асимптотических решений уравнения Дюффинга

$$u'' + 2u - 2u^3 = \varepsilon \cos(\omega t + \Phi_0). \quad (0.1)$$

Здесь t — независимая переменная; ε — малый положительный параметр; ω и Φ_0 — вещественные постоянные.

Цель работы — построить асимптотические решения (0.1), которые длительное время осциллируют вблизи сепаратрис невозмущенного уравнения. Здесь асимптотическим решением называется асимптотический ряд

$$U(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(t), \quad (0.2)$$

который при подстановке в уравнение (0.1) дает невязку $o(\varepsilon^m) \forall m \in \mathbb{N}, \forall t \in (-T_0(\varepsilon), T_1(\varepsilon))$, где $T_i(\varepsilon) \rightarrow \infty, i = 0, 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нуль является предельной точкой множества значений параметра ε . Оказывается, в рассмотренной здесь задаче множество значений параметра ε зависит от параметров решения и устроено сложным образом.

Главный член искомого асимптотического решения — сепаратрисное решение невозмущенного уравнения

$$U_0(t) = \tanh(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (0.3)$$

В ситуации общего положения существует альтернатива при продолжении решения, близкого к сепаратрисе, на большие времена (рис. 1). При $t = O(-\ln(\sqrt{\varepsilon}))$ траектория решения подходит к седловой точке $(1, 0)$. Здесь траектория может повернуть к нижней сепаратрисе и следовать вблизи нее к другой седловой точке $(-1, 0)$. Другая возможность — переход в окрестность сепаратрисы невозмущенного уравнения, проходящей от $(1, 0)$ к $(+\infty, +\infty)$. Такая же альтернатива есть и вблизи седловой точки $(-1, 0)$. Это проиллюстрировано на рис. 1.

¹Работа была поддержана РФФИ (проект 11-01-91330) и DFG TA 289/4-2.

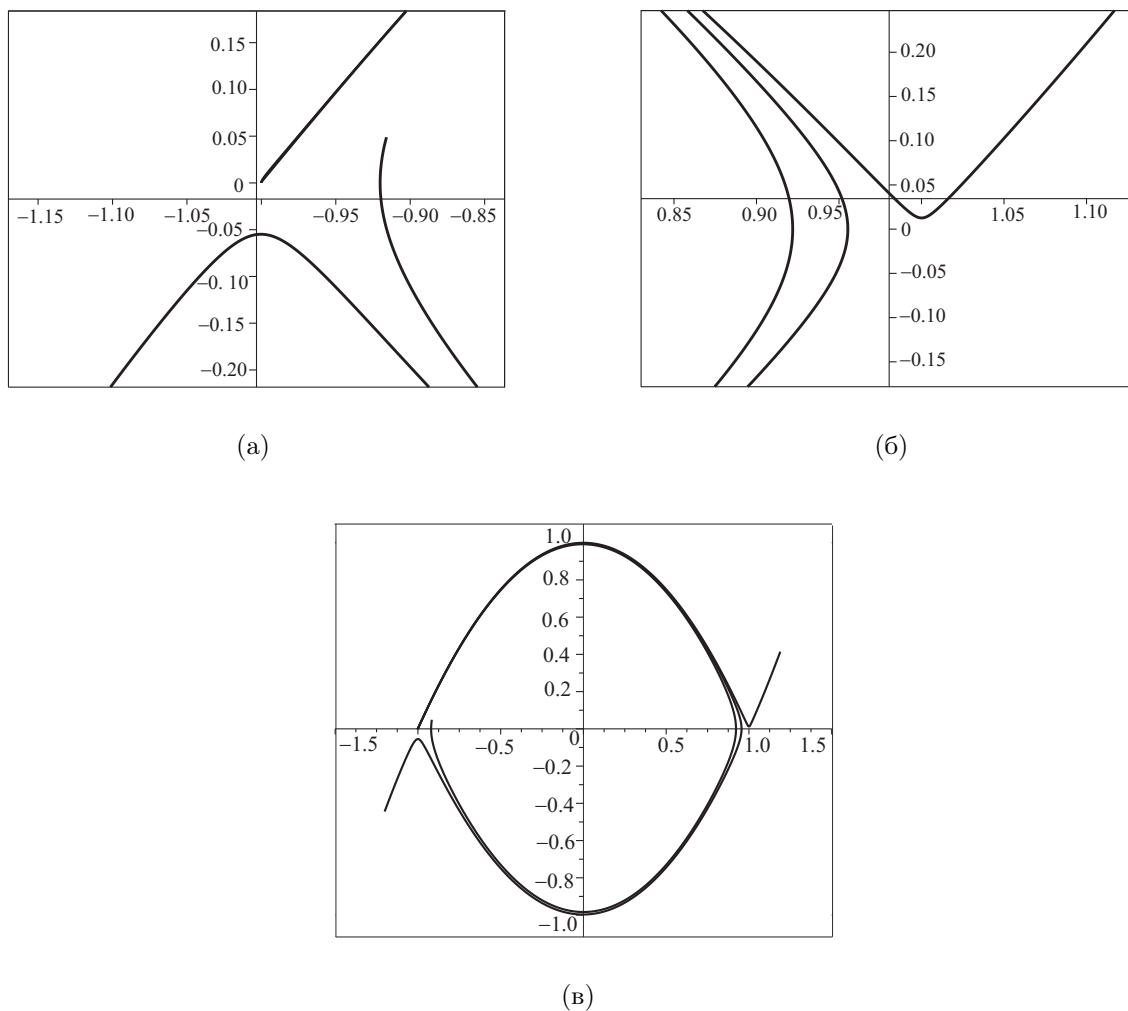


Рис. 1. Решения с начальным условием $(u, u')|_{t=0} = (-1, 0)$ при разных значениях параметра: $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.005$, $\varepsilon = 0.0015$ расходятся вблизи седловых точек на фазовой плоскости (u, u') . На рис. (а) показаны траектории в окрестности точки $(-1, 0)$, на рис. (б) — окрестность точки $(1, 0)$.

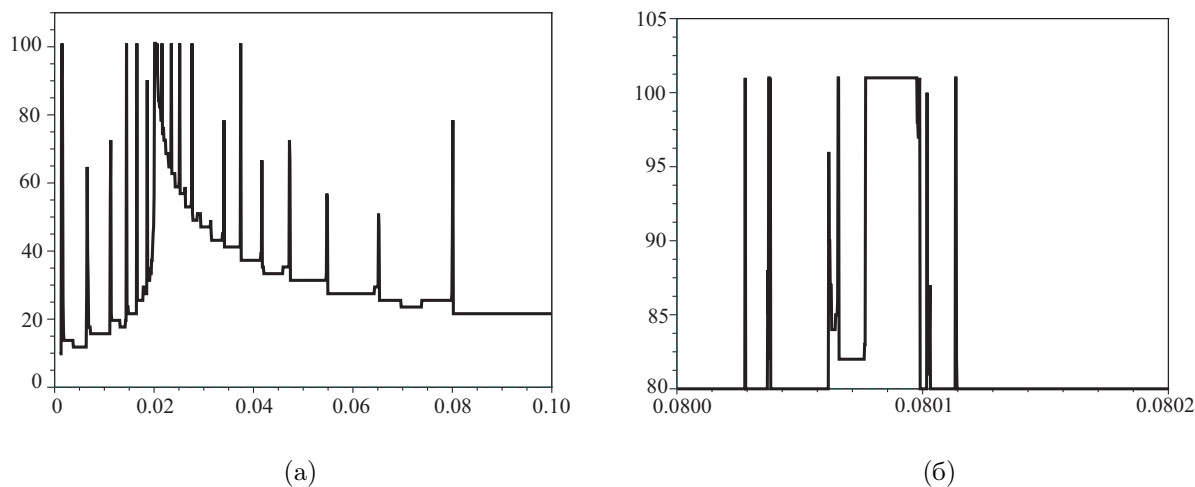


Рис. 2. На рис. (а) показана зависимость «времени жизни» осцилляционных решений от ε для решений задачи Коши $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ (0.1), где $\omega = 1$, $\Phi_0 = \pi$. Эти решения исследовались на интервале $t \in [0, 100]$ для значений параметра возмущения $\varepsilon \in [0.001, 0.1]$ с шагом $\Delta\varepsilon = 0.000099$. На рис. (б) можно видеть растянутую структуру в окрестности пика $\varepsilon = 0.08$ на отрезке $\varepsilon \in [0.08, 0.0802]$ с шагом $\Delta\varepsilon = 0.0000002$. Ступенчатый вид графиков объясняется интерполяцией горизонтальными отрезками участков для значений параметра ε между точками сетки.

Цель работы — исследовать свойства асимптотических решений, траектории которых не уходят на бесконечность, а осциллируют вблизи сепаратрис между седлами $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Для этого нужно найти множество параметров решения и множество, в котором может лежать параметр возмущения ε . Эти множества имеют сложную структуру. Например, можно рассмотреть набор значений параметра возмущения ε , для которого при заданных начальных условиях численное решение осциллирует между седловыми точками, по крайней мере, в течение заданного времени. Результат подобных вычислений приведен на рис. 2. При малых временах $0 < t < -\log(\sqrt{\varepsilon})$ численное решение лежит в окрестности сепаратрисы невозмущенного уравнения на всем промежутке рассматриваемых значений ε . Далее большая часть решений уходит из окрестностей ограниченных сепаратрис. Остаются значения параметра ε , для которых решение ограничено. Такие значения видны на рис. 2(а) в виде пиков. В свою очередь, для части значений параметров из этих пиков траектории уходят из окрестностей сепаратрис на больших временах. Однако есть значения ε , для которых решение ограничено на всем приведенном здесь интервале $t \in [0, 100]$. На рис. 2(б) можно видеть тонкую структуру множества в окрестности пика вблизи $\varepsilon = 0.08$.

Исследование возмущений сепаратрисных решений имеет давнюю историю. Похожие задачи, относящиеся к специальному случаю взаимодействия трех тел, рассматривал А. Пуанкаре [1]. В. К. Мельников вычислил зазор при расщеплении сепаратрис возмущенного уравнения [2]. Результаты о хаотическом поведении решения в задаче трех тел (0.1) случае были получены В. М. Алексеевым [3]. Н. Н. Филоненко, Р. З. Сагдеев и Г. М. Заславский [4] ввели понятие сепаратрисного отображения для канонических переменных гамильтоновых систем. Вывод сепаратрисного отображения основан на анализе первого приближения теории возмущений (см., например, обзор [5]).

Задача о возмущении сепаратрисы занимает важное место при исследовании захвата в резонанс. В работе А. И. Нейштадта [6] вычислена мера траекторий, захватываемых в резонанс после перехода через сепаратрису. А. В. Тимофеев исследовал свойства сепаратрисных решений вблизи седловой точки [7]. Изменение переменных типа действие-угол при переходе через сепаратрису исследовалось, например, в работах [8; 9]. Д. Димини и Р. Хаберман исследовали пересечение сепаратрисы в окрестностях бифуркации седло-центр и бифуркации удвоения [10]. Для задачи о пересечении сепаратрисы около точки седло-центр были получены полные асимптотические разложения в [11; 12].

В этой работе построено полное асимптотическое решение для осциллятора Дюффинга в окрестности ограниченных сепаратрис невозмущенного уравнения. Специфика уравнения здесь используется только при выводе явных формул для асимптотик. Сами формальные построения можно обобщить на гамильтоновы системы с качественно таким же фазовым портретом, как у невозмущенного уравнения (0.1).

Приведенный анализ существенно отличается от подходов, обсуждавшихся в работах [5; 8; 9], во-первых, из-за устройства сепаратрис невозмущенного уравнения (0.2). Здесь сепаратрисы имеют усы, уходящие в бесконечность, а не устроены в виде восьмерки, как в [5; 8; 9]. Часть траекторий возмущенного уравнения из окрестностей ограниченных сепаратрис уходит вдоль усов в бесконечность (см. рис. 1). В результате множество параметров для осцилляций вблизи сепаратрис оказывается сложным, типа множества Кантора. Во-вторых, здесь строится асимптотическое решение в виде ряда по ε . В результате получено описание долговременной динамики возмущенной системы вблизи сепаратрис.

Основной технический прием, используемый в работе, лежит в русле ставшего во многом стандартным метода согласований асимптотических разложений, подробно изложенного в книге А. М. Ильина [13]. Этот прием — построение асимптотических разложений двух типов и последовательное согласование их параметров. Один тип разложений пригоден вблизи сепаратрисы, второй — в малой окрестности седловой точки невозмущенного уравнения. При согласовании часть асимптотик оказывается уходящей в окрестность усов сепаратрис, стремящихся к бесконечности. Таким образом выявляются щели в интервалах параметров, пригодных

для построения осциллирующей асимптотики.

В разд. 1 в формальном виде приведены основная задача и полученные результаты. Раздел 2 содержит вывод формул сепаратрисного отображения для описания траекторий. В разд. 3 обсуждаются следствия из полученных формул.

1. Постановка задачи и результаты

1.1. Затравочная асимптотика

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (0.1)

$$u|_{t=0} = \varepsilon y_0, \quad u'|_{t=0} = 1 + \varepsilon y_1, \quad (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.1)$$

Теорема 1. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует асимптотическое по ε решение задачи (0.1), (1.1) в виде (0.2) и (0.3) при*

$$\frac{1}{2} \ln(\varepsilon) \ll t \ll -\frac{1}{2} \ln(\varepsilon).$$

Высшие поправки в (0.2) при $t \rightarrow -\infty$ можно представить через их асимптотики

$$U_n(t) \sim A_n^- e^{2t} + B_n^- e^{-2t} + W_n^-(t),$$

где $W_n^-(t) = O(\exp(-2nt))$ — ряд из мономов вида $\exp(k_1 t) t^{l_1} \sin(m_1 \omega t)$ и $\exp(k_1 t) t^{l_1} \cos(m_1 \omega t)$, $\{k_i, l_i, m_i\} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, не содержащий слагаемых вида $C \exp(2t)$ и $C \exp(-2t)$, $C = \text{const}$. Такое представление однозначно определяет параметры A_n^- и B_n^- .

Данные задачи Коши (1.1) могут быть восстановлены по параметрам асимптотики

$$A^- = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n A_n^-, \quad B^- = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n B_n^-.$$

В дальнейшем удобно вместо задачи Коши рассматривать асимптотическое решение с заданными параметрами $\{A_n^-\}_1^\infty$ и $\{B_n^-\}_n^\infty$. Асимптотическое представление, определенное в теореме 1, будем называть затравочной асимптотикой.

1.2. Результат

Затравочное асимптотическое решение, определенное в теореме 1, продолжается на большие времена. Продолжение имеет тот же вид асимптотики. Однако, вообще говоря, это возможно не для всех ε . Множество значений параметра ε лежит внутри интервала $(0, \varepsilon_0)$ и имеет сложную структуру. Поправочные члены в окрестности седловой точки невозмущенного уравнения $(u, u') = (1, 0)$ можно представить в виде

$$U_n(t) \sim A_n^+ e^{-2t} + B_n^+ e^{2t} + W_n^+(t), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $W_n^+(t) = O(\exp(2nt))$ — ряд того же вида, что и $W_n^-(t)$ из теоремы 1.

Из рис. 1 видно, что если в $B_1^+ < 0$, тогда асимптотическое решение (0.2), (0.3) продолжается в окрестность нижней сепаратрисы. В этом случае оно ограничено при $1/2 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -\ln(\varepsilon)$ и, если $1 \ll t \ll -\ln(\varepsilon)$, справедливо асимптотическое разложение

$$u(t, \varepsilon) = -\tanh(t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t_1), \quad t_1 = t + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{1}{16} B_1^+\right),$$

где

$$u_n(t_1) \sim a_n^\mp e^{\pm 2t_1} + b_n^\mp e^{\mp 2t_1} + w_n^\mp(t_1), \quad t_1 \rightarrow \mp\infty.$$

Асимптотические свойства $w_n^\mp(t_1)$ те же самые, что и $W_n^\pm(t)$.

Продолжение асимптотического решения на бóльшие времена приводит к необходимости последовательности похожих вычислений.

В следующей теореме сформулированы условия для продолжения затравочного асимптотического решения на N осцилляций между седловыми точками невозмущенного уравнения.

Теорема 2. Для $\forall N \in \mathbb{N}$ существуют множество параметров уравнения $\varepsilon, \omega, \Phi$, в котором $\varepsilon = 0$ является предельной точкой для набора значений ε , и набор параметров асимптотического решения A^-, B^- , при котором затравочное асимптотическое решение из теоремы 1 может быть продолжено на интервал $1/2 \ln(\varepsilon) < t \ll -N \ln(\varepsilon)$. На последовательно интервалах $-(k-1)/2 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -(k+1)/2 \ln(\varepsilon)$, $k = 0, 1, \dots, 2N-1$, асимптотическое решение имеет форму

$$u(t, \varepsilon) = (-1)^k \tanh(t_k) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n^k(t_k), \quad t_0 = t, \quad t_{k+1} = t_k + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \psi(k),$$

где $u_n^k(t_k)$ при $t_k \rightarrow \pm\infty$ представима в виде

$$u_n^k(t_k) \sim \sum_{\kappa=\mp\infty}^{\pm n} e^{2\kappa t_k} \left(\sum_{l=0}^{2n} t_k^l \left[\sum_{m=0}^{n+1} ((\tilde{u}_n^k)_{\kappa,l,m}^\pm \cos(m\omega t_k) + (\tilde{v}_n^k)_{\kappa,l,m}^\pm \sin(m\omega t_k)) \right] \right).$$

Условие продолжения $(-1)^k [B_1(k) + \Delta B_1(k)] < 0$ для $\forall k = 1, \dots, 2N-1$, $N \in \mathbb{N}$, определяет параметры решения A^-, B^- и множество параметров уравнения $\varepsilon, \omega, \Phi$.

Параметр $\Delta\sigma_1(k)$ из теоремы 2 выводится из дискретной динамической системы

$$\Delta B_1(k) = \frac{\pi}{16 \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} \cos(\Phi(k)),$$

где $\Phi(k)$ и $B_1(k)$ определены рекуррентно:

$$\begin{aligned} B_n(0) &= B_n^-, \quad \Phi(0) = \Phi_0, \quad A_n(0) = A_n^-, \\ B_n(k+1) &= -32 \frac{B_{n+1}(k) + \Delta B_{n+1}(k)}{B_1(k) + \Delta B_1(k)}, \\ \Phi(k+1) &= -\frac{\omega}{2} \left(\ln(\varepsilon) + \ln \left[\frac{(-1)^{k+1}}{16} (B_1(k) + \Delta B_1(k)) \right] - \ln(2) \right) + \Phi(k), \\ A_1(k) &= -2, \quad A_n(k+1) = -\frac{1}{32} (B_1(k) + \Delta B_1(k)) (A_{n-1}(k) + \Delta A_{n-1}(k)), \end{aligned}$$

здесь $\Delta B_n(k) = (\tilde{u}_n^k)_{1,0,0}^+ - (\tilde{u}_n^k)_{-1,0,0}^-$, $\Delta A_n(k) = (\tilde{u}_n^k)_{-1,0,0}^+ - (\tilde{u}_n^k)_{1,0,0}^-$.

В теореме 2 приведен вид асимптотического решения в окрестности верхней сепаратрисы невозмущенного уравнения. Похожие формулы верны и для асимптотического решения в окрестности нижней сепаратрисы невозмущенного уравнения.

В теореме 2 упомянуты параметры уравнения $\varepsilon, \omega, \Phi$ и параметры асимптотического решения A^-, B^- . Среди параметров уравнения особую роль в построениях играет параметр ε . Оказывается, что, манипулируя зависимостью параметров затравочного асимптотического решения и набором значений параметра ε , можно построить формальное разложение с произвольным количеством осцилляций около сепаратрисы.

Следствие 1. Главный член асимптотики для $u(t, \varepsilon)$ зависит от B_n^- , $n = 1, \dots, k$ при $t_k = O(1)$. Это означает, что число осцилляций асимптотического решения существенно зависит от малых поправок в затравочной асимптотике.

Следствие 2. Существует множество параметров $\{A_n^-\}_{n=1}^\infty, \{B_n^-\}_{n=1}^\infty$ такое, что асимптотическое решение осциллирует между седловыми точками невозмущенного уравнения, если $\delta = \omega \ln(\varepsilon)$ лежит в множестве со структурой типа множества Кантора.

2. Асимптотическое решение вблизи сепаратрисы

В этом разделе приведено доказательство теоремы 1. Построено асимптотическое решение вблизи сепаратрисы невозмущенного уравнения $u = \pm \tanh(t)$. Построено асимптотическое решение, пригодное около седловых точек $u = \pm 1$. Проведено согласование построенных асимптотик. В результате получено асимптотическое решение, равномерно пригодное как вблизи сепаратрисы, так и около седловых точек.

2.1. Построение затравочной асимптотики

Здесь построена затравочная асимптотика и тем самым доказана теорема 1. Построим асимптотическое решение в виде

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(t). \quad (2.1)$$

Главный член разложения — сепаратрисное решение $U_0 = \tanh(t)$ невозмущенного уравнения $U_0'' + 2U_0 - 2U_0^3 = 0$. Задачи Коши для старших членов асимптотики

$$U_n'' + 2U_n - 6U_0^2 U_n = f_n, \quad U_n|_{t=0} = y_0, \quad U_n'|_{t=0} = y_1, \quad U_n|_{t=0} = U_n'|_{t=0} = 0, \quad n > 1, \quad (2.2)$$

где $f_1 = \cos(\omega t + \phi_0)$, если $n > 1$, тогда f_n — полином третьего порядка по u_j, u_k и u_l при $j + k + l = n$.

Однородная часть уравнения (2.2) $v'' + 2v - 6U_0^2 v = 0$ имеет два линейно независимых решения

$$v_1 = \frac{1}{\cosh^2(t)}, \quad v_2 = \frac{\sinh(4t)}{32 \cosh^2(t)} + \frac{\sinh(2t)}{4 \cosh^2(t)} + \frac{3t}{8 \cosh^2(t)}.$$

Вронскиан этих решений равен единице.

Решения (2.2) могут быть представлены в виде

$$U_1 = v_1(t) \int_0^t d\tilde{t} f_1(t) v_2(\tilde{t}) - v_2(t) \int_0^t d\tilde{t} f_1(t) v_1(\tilde{t}) + y_0 v_1(t) + y_1 v_2(t),$$

$$U_n = v_1(t) \int_0^t d\tilde{t} f_n(t) v_2(\tilde{t}) - v_2(t) \int_0^t d\tilde{t} f_n(t) v_1(\tilde{t}), \quad n > 1. \quad (2.3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть

$$f_n \sim \sum_{k=\mp\infty}^{\pm(n-1)} e^{2kt} \left(\sum_{l=0}^{2(n-1)} t^l \left[\sum_{m=0}^n (F_{k,l,m}^\pm \cos(m\omega t) + H_{k,l,m}^\pm \sin(m\omega t)) \right] \right), \quad t \rightarrow \pm\infty,$$

тогда

$$U_n(t) \sim \sum_{k=\mp\infty}^{\pm n} e^{2kt} \left(\sum_{l=0}^{2n} t^l \left[\sum_{m=0}^{n+1} (\tilde{U}_{k,l,m}^\pm \cos(m\omega t) + \tilde{V}_{k,l,m}^\pm \sin(m\omega t)) \right] \right), \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Для доказательства леммы нужно асимптотику для $v_{1,2}$ и формулу для f_n подставить в (2.3) и проинтегрировать.

Обозначим $A_n^\pm = \tilde{U}_{\mp 1,0,0}^\pm/4$ и $B_n^\pm = 16\tilde{U}_{\pm 1,0,0}^\pm$. Эти параметры определяют решение при больших значениях времени. Изменение параметров за переход по траектории от окрестностей одной седловой точки в окрестность другой седловой точки можно представить как

$$\Delta A_n = A_n^+ - A_n^-, \quad \Delta B_n = B_n^+ - B_n^-.$$

Значение ΔB_1 определяется интегралом Мельникова

$$\begin{aligned} \Delta B_1 &= B_1^+ - B_1^- = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t + \Phi_0)}{\cosh^2(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh^2(t)} (\cos(\omega t) \cos(\Phi_0) - \sin(\omega t) \sin(\Phi_0)) = \cos(\Phi_0) \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Для ΔA_1 справедлива формула

$$\Delta A_1 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left[-\sin(\Phi_0) \left(\int_{-s}^s v_2(t) \sin(\omega t) dt - \frac{2 \sin(\omega s) - \omega \cos(\omega s)}{8(\omega^2 + 4)} e^{2s} \right) \right].$$

Ряд в (0.2) асимптотический при условии $\varepsilon U_{n+1}/U_n \ll 1$. Это условие дает ограничение для независимой переменной $\varepsilon \exp(2t) \ll 1$ или $|t| \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$ и параметров решения A_n^+ и B_n^+ : $A_n^+ \ll \varepsilon$, $B_n^+ \ll \varepsilon \forall n \in N$. Теорема 1 доказана.

2.2. Асимптотическое разложение вблизи седловой точки

Вблизи седловых точек невозмущенного уравнения будем строить асимптотическое разложение в виде

$$u(t, \varepsilon) = \pm 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n/2} u_n^\pm(\tau), \quad \tau = t + \tau_0^\pm. \quad (2.4)$$

Коэффициенты разложения являются решениями уравнения $u_n^{\pm''} - 4u_n^\pm = f_n^\pm$, где $f_1^\pm \equiv 0$, $f_2^\pm = \cos(\omega\tau - \omega\tau_0 + \phi_0) \pm 6(u_1^\pm)^2$ и f_n^\pm — полином 3-го порядка, который определяется коэффициентами асимптотики с индексами j, k, l такими, что $j + k + l = n$ для $n \geq 3$. В общем случае f_n^\pm — конечная сумма по степеням e^τ , синусов, косинусов и независимой переменной τ . Общая формула для n -й поправки:

$$u_n^\pm = \alpha_n^\pm \exp(-2\tau) + \beta_n^\pm \exp(2\tau) + w_n^\pm(\tau). \quad (2.5)$$

Здесь $w_n^\pm(\tau)$ — квазимногочлен, который не содержит слагаемых $C_1 e^{2\tau}$ и $C_2 e^{-2\tau}$ для $\forall C_1, C_2 = \text{const}$.

Сформулируем первую и вторую поправки:

$$\begin{aligned} u_1^\pm &= \alpha_1^\pm \exp(-2\tau) + \beta_1^\pm \exp(2\tau); \\ u_2^\pm &= \alpha_2^\pm \exp(-2\tau) + \beta_2^\pm \exp(2\tau) + \frac{(\alpha_1^\pm)^2}{12} \exp(-4\tau) + \frac{(\beta_1^\pm)^2}{12} \exp(4\tau) \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha_1^\pm \beta_1^\pm - \frac{1}{4 + \omega^2} \cos(\omega\tau + \phi_0 - \omega\tau_0). \end{aligned}$$

Поправка с номером n при больших значениях τ может быть представлена в виде

$$u_n^\pm = O(\exp(\pm 2n|\tau|)), \quad n > 1, \quad \tau \rightarrow \pm\infty.$$

Область пригодности асимптотического разложения вблизи седловой точки определяется неравенством $\varepsilon^{1/2} u_{n+1}^\pm / u_n^\pm \ll 1$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$. Это дает $|\tau| \ll -1/4 \ln(\varepsilon)$.

Сформулируем полученный результат.

Лемма 2. *Существует асимптотическое решение в виде (2.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $u_n(\tau)$ имеет вид (2.5) и $|\tau| \ll -1/4 \ln(\varepsilon)$.*

Согласование затравочной асимптотики и асимптотики вблизи седловой точки в окрестности (1, 0). Согласуем параметры асимптотических решений $U(t, \varepsilon)$ и $u(\tau, \varepsilon)$. Для параметров с четными номерами получим $\alpha_{2n}^+ = 0$, $\beta_{2n}^+ = 0$.

Введем рекуррентные формулы для поправок с нечетными номерами

$$-2 \exp(-2t) = \varepsilon^{1/2} \alpha_1^+ \exp(-2\tau), \quad \alpha_1^+ = -2, \tau = t + \tau_0^+, \quad \tau_0^+ = \frac{1}{4} \ln(\varepsilon).$$

Тогда

$$\frac{1}{16} B_1^+ \exp(2t) = \beta_1^+ \varepsilon^{-1/2} \exp(2\tau), \quad \beta_1^+ = \frac{1}{16} B_1^+.$$

Для высших поправок при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$4A_n^+ \exp(-2t) = \varepsilon^{1/2} \alpha_{2n+1}^+ \exp(-2\tau), \quad \alpha_{2n+1}^+ = 4A_n^+;$$

$$\frac{1}{16} B_n^+ \exp(2t) = \beta_{2n-1}^+ \varepsilon^{-1/2} \exp(2\tau), \quad \beta_{2n-1}^+ = \frac{1}{16} B_n^+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Знак β_1^+ определяется параметром ϕ_0 :

$$\beta_1^+ = \frac{1}{16} B_1^+ = B_1^- + \frac{1}{16} \cos(\phi_0) \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)}.$$

Если $\beta_1^+ > 0$ или, что то же самое, $\cos(\phi_0) > -16B_1^- \cosh(\pi\omega/2)$, то асимптотическое решение (0.1) неограничено, обратно, если $\cos(\phi_0) < -16B_1^- \cosh(\pi\omega/2)$, то асимптотическое решение (0.1) близко к сепаратрисе, которая идет от правого седла к левому.

Отсюда следует

Теорема 3. *Существует асимптотическое решение (0.1) в виде (0.2) при $1/2 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$ и в виде (2.4) при $-1/4 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -3/4 \ln(\varepsilon)$.*

2.3. Асимптотическое решение в окрестности нижней ветви сепаратрисы

Пусть $\beta_1^+ < 0$. Тогда главный член асимптотического решения при $\tau \rightarrow \infty$ — нижняя сепаратриса, проходящая от седла (1, 0) к седлу (-1, 0). Формула для главного члена этого решения $u_0 = -\tanh(t_1)$. Асимптотическое разложение, пригодное около нижней сепаратрисы, опишем как

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t_1) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t_1). \quad (2.6)$$

Нетрудно видеть, что асимптотическое решение (2.6) имеет тот же вид (2.1) с независимой переменной t_1 вместо t .

Приведем уравнение для n -й поправки

$$u_n'' + 3u_n - 6u_0^2 u_n = f_n. \quad (2.7)$$

Здесь f_n — полином третьего порядка относительно u_j, u_k, u_l , где $j + k + l = n$ и

$$f_n \sim \sum_{k=\mp\infty}^{\pm(n-1)} e^{2kt_1} \left(\sum_{l=0}^{2(n-1)} t_1^l \left[\sum_{m=0}^n (F_{k,l,m}^\pm \cos(m\omega t_1) + H_{k,l,m}^\pm \sin(m\omega t_1)) \right] \right), \quad t_1 \rightarrow \pm\infty.$$

Общей формулой для решения уравнения (2.7) является

$$u_n(t_1) \sim \sum_{k=\mp\infty}^{\pm n} e^{2kt_1} \left(\sum_{l=0}^{2n} t_1^l \left[\sum_{m=0}^{n+1} (\tilde{u}_{k,l,m}^{\pm} \cos(m\omega t_1) + \tilde{v}_{k,l,m}^{\pm} \sin(m\omega t_1)) \right] \right), \quad t_1 \rightarrow \pm\infty.$$

Обозначим $a_n^{\pm} = u_{\mp 1,0,0}^{\pm}/4$ и $b_n^{\pm} = \tilde{u}_{\pm 1,0,0}^{\pm}$. Эти параметры определяют параметры решения. Изменение этих параметров во время движения вдоль сепаратрисы опишем как $\Delta a_n = a_n^- - a_n^+$, $\Delta b_n = b_n^- - b_n^+$.

Асимптотическое решение в окрестности нижней сепаратрисы пригодно при $\varepsilon u_{n+1}/u_n \ll 1$, следовательно, $\varepsilon \exp(2t_1) \ll 1$ или $|t_1| \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$. В результате справедлива

Лемма 3. *Существует асимптотическое решение (0.1) в виде (2.6) при $|t_1| \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$.*

2.3.1. Согласование асимптотики вблизи вблизи нижней сепаратрисы и асимптотики вблизи седловой точки в окрестности (1, 0). Согласование асимптотики вблизи седловой точки с асимптотикой в окрестности нижней сепаратрисы (2.6) дает

$$\varepsilon^{1/2} \beta_1^+ \exp(2\tau) = -2 \exp(2t_1) \quad \text{и} \quad \varepsilon^{1/2} \alpha_1^+ \exp(-2\tau) = \varepsilon 4a_1^+ \exp(-2t_1)$$

при $\tau \rightarrow \infty$ и $t_1 \rightarrow -\infty$. Здесь $\beta_1^+ < 0$. В результате

$$2\tau + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \ln(-\beta_1^+) = 2t_1 + \ln 2$$

или

$$t_1 = \tau + \frac{1}{4} \ln(\varepsilon) + \frac{1}{2} \ln(-\beta_1^+) - \frac{1}{2} \ln 2.$$

После подстановки t_1 и упрощений получается формула

$$\frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \ln(\alpha_1^+) - 2\tau = \ln(\varepsilon) + 2 \ln 2 + \ln(a_1^+) - 2\tau - \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) - \ln(-\beta_1^+) - \ln(2),$$

или

$$\alpha_1^+(-\beta_1^+) = 8a_1^+, \quad a_1^+ = \frac{1}{8} \alpha_1^+(-\beta_1^+).$$

Нетрудно видеть, что $\alpha_1^+ = -2$. Последовательные вычисления дают формулы для β_3^+ и b_1^+

$$\varepsilon^{3/2} \beta_3^+ \exp(2\tau) = \frac{1}{16} \varepsilon b_1^+ \exp(2t_1).$$

В результате получим $\ln(\beta_3^+) + 2\tau = -4 \ln 2 + \ln(b_1^+) + 2\tau + \ln(-\beta_1^+) - \ln(2)$ или

$$\beta_3^+ = \frac{1}{32} b_1^+(-\beta_1^+), \quad b_1^+ = 32 \frac{-\beta_3^+}{\beta_1^+}.$$

Для высших поправок $\varepsilon^{(2n+1)/2} \alpha_{2n-1}^+ \exp(-2\tau) = 4\varepsilon^n a_n^+ \exp(-2t_1)$, тогда

$$\alpha_{2n-1}^+(-\beta_1^+) = 8a_n^+, \quad a_n^+ = \frac{1}{8} \alpha_{2n-1}^+(-\beta_1^+).$$

Также $\varepsilon^{(2n+1)/2} \beta_{2n+1}^+ \exp(2\tau) = 1/16 \varepsilon b_n^+ \exp(2t_1)$, тогда

$$\frac{\beta_{2n+1}^+}{(-\beta_1^+)} = \frac{1}{32} b_n^+, \quad b_n^+ = -32 \frac{\beta_{2n+1}^+}{\beta_1^+}.$$

Удобно записать формулы связи для представления асимптотического решения в окрестности верхней и нижней сепаратрис:

$$\begin{aligned} a_1^+ &= \frac{1}{16}(B_1^- + \Delta B_1), & a_{n+1}^+ &= -\frac{1}{32}(A_n^+ + \Delta A_n)(B_1^- + \Delta B_1), \\ b_n^+ &= -32 \frac{B_{n+1}^- + \Delta B_{n+1}}{B_1^- + \Delta B_1}, & n &\in \mathbb{N}; \\ t_1 &= t + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{1}{16}(B_1^- + \Delta B_1)\right) - \frac{1}{2} \ln(2), \\ \phi &= -\frac{\omega}{2} \left[\ln(\varepsilon) + \ln\left(-\frac{1}{16}(B_1^- + \Delta B_1)\right) - \ln(2) \right] + \Phi. \end{aligned}$$

2.3.2. Согласование асимптотики вблизи нижней сепаратрисы и асимптотики вблизи седловой точки в окрестности $(-1, 0)$. Согласование асимптотики вблизи нижней сепаратрисы и асимптотики вблизи седловой точки в окрестности $(-1, 0)$ проводится тем же способом, что согласование асимптотики вблизи нижней сепаратрисы и асимптотики вблизи седловой точки в окрестности $(1, 0)$. Здесь приведены лишь необходимые формулы.

$$\begin{aligned} 2 \exp(-2t_1) &= \varepsilon^{1/2} \alpha_1^- \exp(-2\tau), & \varepsilon \frac{1}{16} b_1^- \exp(2t_1) &= \varepsilon^{1/2} \beta_1^- \exp(2\tau), \\ \varepsilon 4a_1^- \exp(-2t_1) &= \varepsilon^{3/2} \alpha_3^- \exp(-2\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, получены формулы для параметров асимптотики вблизи седловой точки:

$$-2t_1 = \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) - 2\tau, \quad \tau_0^- = \frac{3}{4} \ln(\varepsilon), \quad \alpha_1^- = 2, \quad 4a_1^- = \alpha_3^-, \quad \beta_1^- = \frac{1}{16} b_1^-.$$

Определим формулы для согласования высших поправок

$$\varepsilon^{(2n+1)/2} (\alpha_{2n+1}^- \exp(-2\tau) + \beta_{2n+1}^- \exp(2\tau)) = \varepsilon^n \left(4a_n^- \exp(-2t_1) + \frac{1}{16} b_n^- \exp(2t_1) \right).$$

Они позволяют вывести формулы для параметров $\alpha_{2n-1}^- = 4a_n^-$, $16\beta_{2n+1}^- = b_n^-$.

Изменение коэффициента b_1 за время прохождения вблизи сепаратрисы имеет вид

$$\Delta b_1 = b_1^- - b_1^+ = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} \cos\left(-\frac{\omega}{2}(\ln(\varepsilon) + \ln(-\beta_1^+) - \ln(2)) + \Phi\right).$$

Сформулируем полученное утверждение.

Теорема 4. Если $\beta_1^+ < 0$, тогда существует асимптотическое решение (0.1) в виде (0.2) при $1/2 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$; в виде (2.4) с индексом “плюс” при $-1/4 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -1/2 \ln(\varepsilon)$; в виде (2.6) при $1 \ll t \ll -\ln(\varepsilon)$ и в виде (2.4) с индексом “минус” при $-3/4 \ln(\varepsilon) \ll t \ll -5/4 \ln(\varepsilon)$.

3. Осцилляции около сепаратрис

Рассмотрим асимптотические решения, колеблющиеся около ограниченных сепаратрис невозмущенного уравнения. Каждое колебание можно представить последовательно с помощью четырех асимптотических разложений: асимптотического решения в окрестности верхней сепаратрисы, асимптотического решения вблизи седловой точки в окрестности седла $(1, 0)$, асимптотического решения вблизи нижней сепаратрисы и асимптотического решения вблизи седловой точки в окрестности седла $(-1, 0)$. Параметры асимптотик согласуются в соответствии с полученными выше формулами согласования асимптотик разных типов. В результате получается дискретная динамическая система, отвечающая за преобразование параметров при колебаниях. Исходными параметрами такой динамической системы естественно считать сдвиг Φ_0 и набор параметров A^- и B^- .

Обозначим параметры асимптотического решения

$$t_0 = t, \quad A_n(0) = A_n^-, \quad B_n(0) = B_n^-, \quad \Phi(0) = \Phi_0.$$

Если $B_1^-(0) + \Delta B_1(0) < 0$, тогда асимптотическое решение продолжается в окрестность нижней сепаратрисы. Параметры асимптотики в окрестности нижней сепаратрисы на первом колебании будем обозначать как

$$A_n(1) = a_n^+(1), \quad B(1) = b_n^+, \quad \Phi(1) = \phi.$$

Если $(-1)^k(B_1(k) + \Delta B_1(k)) < 0$ и $k \geq 2$, то параметры асимптотического решения на следующей осцилляции вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= t_m + \frac{1}{2} \ln(\varepsilon) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(-1)^{k+1}}{16} (B_1(k) + \Delta B_1(k)) \right) - \frac{1}{2} \ln(2), \\ B_n(k+1) &= -32 \frac{B_{n+1}(k) + \Delta B_{n+1}(k)}{B_1(k) + \Delta B_1(k)}; \\ A_1(k+1) &= \frac{1}{32} (B_1^-(k) + \Delta B_1(k)), \\ A_n(k+1) &= -\frac{1}{32} (A_{n-1}(k) + \Delta A_{n-1}(k)) (B_1(k) + \Delta B_1(k)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

При заданном значении параметра $\Phi(0)$ получим $\Phi(k+1) = \omega(t_k - t_{k+1}) + \Phi(k)$ или

$$\Phi(k+1) = -\frac{\omega}{2} \left(\ln(\varepsilon) + \ln \left[\frac{(-1)^{k+1}}{32} (B_1(k) + \Delta B_1(k)) \right] \right) + \Phi(k). \quad (3.2)$$

Полученные формулы определяют дискретную динамическую систему. Нелинейность исходного дифференциального уравнения спрятана в членах $\Delta B_n(k), \Delta A_n(k)$.

Значения параметров асимптотик для асимптотического решения с выбранной затравочной асимптотикой можно определить, воспользовавшись дискретной динамической системой. В частности, на N -м колебании значения индекса $k = 2N - 2$ соответствуют асимптотике вблизи верхней сепаратрисы, значения $k = 2N - 1$ — асимптотике в окрестности нижней сепаратрисы, где $b_n^+ = B_n(k), a_n^+ = A_n(k), \phi = \Phi(k)$.

Покажем, что существует набор значений A^- и B^- такой, что $\varepsilon = 0$ является предельной точкой множества значений ε для осциллирующих решений. Для этого рассмотрим переход от первой ко второй осцилляции. Этот переход определяется неравенством

$$B_1(1) + \frac{\pi \cos(\Phi(1))}{16 \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)} > 0. \quad (3.3)$$

Здесь

$$\Phi(1) = \frac{\omega}{2} \left(\ln(\varepsilon) + \ln \left[\frac{1}{32} (B_1(0) + \Delta B_1(0)) \right] \right) + \Phi(0).$$

Величина $B_1(1)$ при заданных значениях $B_1(0)$ и $\Phi(0)$ определяется исходя из значения $B_2(0)$. Это следует из формул для $B_1(1)$. Если $16 \cosh(\pi\omega/2) B_1(1) > 1$, тогда для $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ асимптотическое решение продолжается на времена $t_2 = O(1)$. Если $16 \cosh(\pi\omega/2) B_1(1) < 1$, тогда для $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ асимптотическое решение уходит на бесконечность за времена $t_2 = O(1)$. Пусть $|16 \cosh(\pi\omega/2) B_1(1)| < 1$, тогда для $\forall \varepsilon_0 > 0$ на интервале $(0, \varepsilon_0)$ существуют интервалы значений ε , для которых неравенство (3.3) выполнено. На таких интервалах существует последовательность значений ε , для которой $\varepsilon = 0$ — предельная точка. Такие же рассуждения можно распространить на произвольное число колебаний около сепаратрисы.

Пусть для некоторого номера M существует некоторый набор интервалов значений параметра ε , на котором асимптотическое решение продолжается до времен $t_M = O(1)$. Обозначим

такой набор интервалов \mathcal{E}_M . Покажем, что существует набор значений B_n^- , $N + M + 1 > n > M + 1$ такой, что асимптотическое решение ограничено на временах $t_{M+N} = O(1)$ для $\forall N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon = 0$ будет оставаться предельной точкой некоторой последовательности значений из интервалов ε , для которых выполнены условия продолжения ограниченного асимптотического решения до $t_{M+N} = O(1)$.

Параметры $B_1(k)$ определяются через B_j^- , $j = 0, \dots, k - 1$. Поэтому для $M < k < M + N$ их можно выбрать так, что неравенства $(-1)^k(B_1(k) + \Delta B_1(k)) < 0$ выполняются при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. В этом случае асимптотическое решение остается ограниченным на временах $t_{M+N} = O(1)$, на том же множестве значений $\varepsilon \in \mathcal{E}_{M+N} = \varepsilon \in \mathcal{E}_M$, следовательно, и $\varepsilon = 0$ остается предельной точкой некоторой последовательности из \mathcal{E}_{M+N} .

Таким образом, получена

Лемма 4. *Существует последовательность $\{B_n^-\}_{n=0}^\infty$ такая, что для $\forall \varepsilon_0 = \text{const} > 0$ найдется последовательность значений $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ такая, что неравенство $(-1)^k(B_1(k) + \Delta B(k)) < 0$ выполнено $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Из утверждения леммы вытекает

Теорема 5. *Существует постоянная $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$ такая, что $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует последовательность $\{B_n^-\}_{n=0}^\infty$ такая, что асимптотическое решение осциллирует при $t = O(N \ln(\varepsilon))$ для $\forall N \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2 выводится из теоремы 5 и полученных выше формул для формального асимптотического решения.

3.1. Обобщенный сдвиг Бернулли

Построенное отображение содержит аналог сдвига Бернулли для параметров. Из формул (3.1) и (3.2) видно, что $B_n(k + 1)$ зависит от $B_{n+1}(k)$. Это означает, что n -я поправка в $(N + 1)$ -й осцилляции зависит от $(n + 2)$ -й поправки на N -й осцилляции. Это типичное свойство сдвига Бернулли. В результате происходит потеря точности при использовании конечного числа членов асимптотики.

3.2. Структура множества значений малого параметра

Здесь показано, что структура множества значений параметра ε , в котором лежат осциллирующие решения, в общем случае носит сложный характер.

Условие

$$\cos\left(\Phi(n) - \omega \frac{n-1}{2} \ln(\varepsilon)\right) < -16B_1(n) \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \quad (3.4)$$

определяет продолжимость дискретной динамической системы на следующий, $(n + 1)$ -й, шаг. Пусть $\delta = -\omega \ln(\varepsilon)$, тогда $\delta \in (\delta_0, \infty)$, где $\delta_0 = -\omega \ln(\varepsilon_0)$ и $0 < \varepsilon_0 < 1$. Пусть параметр $\sigma_1(n)$ таков, что

$$\arccos\left[-16\sigma_1(n) \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\right] - \Phi(n) = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

Тогда неравенство (3.4) определяет множество значений параметра δ . При этом значения целочисленного параметра k должны быть такими, что

$$k > K = \left\lceil \frac{\omega(n-1)}{4\pi} \ln(\varepsilon_0) \right\rceil + 1.$$

Рассмотрим значения δ из интервала $\frac{n-1}{2}\delta \in (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$, тогда при $\frac{n-1}{2}\delta < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ и $\frac{n-1}{2}\delta > \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ дискретная динамическая система продолжима на следующий шаг.

Рассмотрим последовательность $\alpha \in \mathbb{N}$ такую, что

$$-16B_1(l) \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) > 1 \quad \text{при } l > n_\alpha, \quad l < 3n_\alpha - 2$$

а при $n_{\alpha+1} = 3n_\alpha - 2$

$$\arccos\left[-16B_1(n_{\alpha+1}) \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\right] - \Phi(n_{\alpha+1}) = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \forall k > \left[\frac{\omega(n_{\alpha+1} - 1)}{4\pi} \ln(\varepsilon_0)\right] + 1. \quad (3.5)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, тогда множество δ , для которого дискретная динамическая система продолжима для $\forall n \in \mathbb{N}$, образует структуру типа канторова множества на интервалах $(-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$ для k из (3.5).

4. Заключение

В работе приведен пример асимптотических построений для задачи, решение которой демонстрирует “детерминированный хаос”. Показано, что структура асимптотического решения в этой задаче существенно зависит как от параметров уравнения, так и от параметров решения. Оказывается, что построение регулярных асимптотик в таких задачах вполне возможно. Однако такие регулярные асимптотики пригодны, вообще говоря, на нерегулярных множествах параметров.

Выражаю признательность проф. Л. А. Калякину и Б. И. Сулейманову за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Poincare H.** *Lés méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* Т. III. Paris: Gauthier-Villars, 1892.
2. **Mel'nikov V.K.** On the stability of the center for time periodic perturbations // Trans. Moscow Math. Soc. 1963. Vol. 12. P. 1–57.
3. **Алексеев В.М.** Квазислучайные динамические системы I, II, III // *Мат. сб.* 1968. Т. 76, № 1. С. 72–134; 1968. Т. 77, № 4. С. 545–601; 1969. Т. 78, № 1. С. 3–50.
4. **Filonenko N.N., Sagdeev R.Z., Zaslavskii G.M.** Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities. Part II // *Nuclear Fusion.* Vol. 7. 1967. P. 253–266.
5. **Пифганкин Г.Н., Трещёв Д.В.** Сепаратрисное отображение в гамильтоновых системах // *Успехи мат. наук.* 2007. Т. 62. С. 3–108.
6. **Neishtadt A.I.** Passage through a separatrix in a resonance problem with a slowly-varying parameter // *J. Appl. Math. Mech.* 1975. Vol. 39, no. 4. P. 594–605.
7. **Timofeev A.V.** On the constancy of an adiabatic invariant when the nature of motion changes // *Soviet Physics JETP.* 1978. Vol. 48. P. 656–659.
8. **Sary J.R., Scodje R.T.** Phase change between separatrix crossing // *Physica D.* 1989. Vol. 36, no. 3. P. 287–316.
9. **Neishtadt A., Vasiliev A.** Phase change between separatrix crossings in slow-fast Hamiltonian systems // *Nonlinearity.* 2005. Vol. 18, no. 3. P. 1393–1406.
10. **Diminnie D.C., Haberman R.** Slow passage through a saddle-center bifurcation // *J. Nonlinear Sci.* 2000. Vol. 10, no. 2. P. 197–221.
11. **Kiselev O.M.** Hard loss of stability in Painleve-2 equation // *J. Nonlinear Math. Phys.* 2001. Vol. 8, no. 1. P. 65–95.
12. **Kiselev O.M., Glebov S.G.** An asymptotic solution slowly crossing the separatrix near a saddle-centre bifurcation point // *Nonlinearity.* 2003. Vol. 16, no. 1. P. 327–362.
13. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

Киселев Олег Михайлович

д-р физ. мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

e-mail: olegkiselev@matem.anrb.ru

Поступила 01.10.2011

УДК 517.9

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ¹

А. И. Короткий, Е. И. Грибанова

Рассматривается обратная задача динамики, состоящая в восстановлении априори неизвестных управлений, порождающих наблюдаемое движение динамической системы. Динамическая система описывается краевой задачей для уравнения с частными производными гиперболического типа, управляющие воздействия находятся на границе объекта. Исходной информацией для решения обратной задачи служат результаты приближенных измерений текущих фазовых положений наблюдаемого движения системы. Задача решается в статическом варианте, когда для решения задачи используется вся совокупность результатов измерений, накопленная в течение какого-либо заданного промежутка времени наблюдения. Рассматриваемая задача некорректна, и для ее решения предлагается воспользоваться методом Тихонова со стабилизатором, содержащим сумму среднеквадратичной нормы и полной вариации по времени допустимого управления. На этом пути удается обосновать не только сходимость регуляризованных приближений в пространствах Лебега, но и кусочно-равномерную сходимость. Это открывает возможность для численной реконструкции тонкой структуры искомого управления. В работе обоснован метод проекции субградиента получения минимизирующей последовательности для функционала Тихонова, описана двухэтапная конечномерная аппроксимация задачи. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: динамическая система, граничное управление, реконструкция, наблюдение, измерение, обратная задача, регуляризация, метод Тихонова, вариация, кусочно-равномерная сходимость.

A. I. Korotkii, E. I. Gribanova. Reconstruction of boundary controls in hyperbolic systems.

The inverse problem of dynamics consisting in reconstructing of a priori unknown controls generating the observed motion of dynamic system is considered. The dynamic system is defined by a boundary value problem for the equation with private derivatives of the hyperbolic type, controls are on a boundary of the object. The source information for solving the inverse problem is results of approximate measurements of the current phase positions of the observed system's motion. The problem is solved in static case, when to solve the problem, all the cumulative during the definite observation period totality of results of measurements is used. This problem is ill-posed and to solve this problem, Tikhonov's method with a stabilizer containing the sum of root mean square norm and total variation of control in time is used. This way provides not only the convergence of regularized approximations in Lebesgue spaces but piecewise uniform convergence. This permits numerical reconstruction of desired control's subtle structure. In this paper subgradient projection method of the obtaining minimizing sequence for the Tikhonov's functional is justified, two-stage finite-dimensional approximation of the problem is described. Results of numerical experiments are presented.

Keywords: dynamical system, boundary control, reconstruction, observation, measurement, inverse problem, regularization, Tikhonov's method, variation, piecewise uniform convergence.

Введение

В работе рассматривается задача о восстановлении априори неизвестных граничных управлений, функционирующих в управляемой динамической системе, описываемой краевой задачей для уравнения с частными производными гиперболического типа. Управляющие воздействия в динамической системе заранее неизвестны и должны быть определены в результате наблюдений за системой по приближенным измерениям текущих фазовых положений системы. Подобного рода задачи восстановления для динамических систем изучались в различных постановках в теории управления, теории дифференциальных игр, теории оценивания и идентификации [1–10]. Хорошо известно, что рассматриваемая задача некорректна и ее решение требует привлечения методов регуляризации [11–13].

¹Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

Для решения задачи предлагается воспользоваться вариационным методом Тихонова, состоящим в минимизации некоторого подходящего функционала невязки на множестве допустимых управлений. Задача будет решаться в статическом варианте, когда используется вся совокупность результатов измерений, накопленная в течение какого-либо заданного промежутка времени наблюдения за системой.

Известно, что стабилизирующие функционалы, содержащие норму пространств Соболева, обладают сильным регуляризирующим эффектом, что неизбежно приводит к заглаживанию искомой функции и потере ее тонкой структуры. Стабилизирующие функционалы, содержащие нормы пространств Лебега, достаточно часто привлекаются для регуляризации задач, но они обеспечивают довольно грубую аппроксимацию. Поэтому возникает необходимость конструирования стабилизаторов, приспособленных к восстановлению негладких функций и функций с особенностями. К настоящему времени в вариационных методах регуляризации предложено несколько классов стабилизирующих функционалов, которые неплохо зарекомендовали себя как для гладких, так и для негладких восстанавливаемых функций. В случае, когда искомое решение является функцией одной переменной, часто задействуются стабилизаторы, содержащие классическую или обобщенную вариацию в совокупности с какой-нибудь строго выпуклой нормой [14–22]. На этом пути удается получить сходимость в пространствах Лебега, поточечную сходимость, сходимость вариаций, а также кусочно-равномерную сходимость регуляризованных приближений. В случае, когда искомое решение является функцией нескольких переменных, часто используются стабилизаторы, содержащие обобщенную вариацию [23–26]. Здесь можно добиться сходимости в пространствах Лебега, поточечной сходимости и сходимости обобщенных вариаций регуляризованных приближений [15–17; 21–26]. Для получения равномерной аппроксимации непрерывного, но в общем случае недифференцируемого решения привлекаются стабилизаторы в виде нормы пространства Липшица [16; 17]. Обращение к норме пространства Соболева с дробными производными, как стабилизатору, может оказаться полезным для восстановления как непрерывных, так и разрывных искомым функций [14; 17]. Использование многомерных классических вариаций в ряде случаев приводит к поточечному и кусочно-равномерному восстановлению негладкой или разрывной искомой функции нескольких переменных [21; 22; 27; 28]. Упомянутые выше результаты установлены для линейных и нелинейных операторных уравнений первого рода.

В данной работе показано, что при использовании стабилизаторов в виде суммы классической вариации и среднеквадратичной нормы в задаче восстановления управления можно получить поточечную сходимость, сходимость в пространствах Лебега, сходимость классических вариаций и кусочно-равномерную сходимость. Эти результаты открывают возможность для численной реконструкции тонкой структуры искомого управления. В работе обоснован метод проекции субградиента построения минимизирующей последовательности для функционала Тихонова и выполнена двухэтапная конечномерная аппроксимация задачи. На первом этапе методом разделения переменных исходная бесконечномерная задача аппроксимируется более простой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказана соответствующая теорема об аппроксимации. На втором этапе задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений аппроксимируется конечномерной дискретной задачей. Проведены вычислительные эксперименты, показавшие, что разработанные методы и алгоритмы могут применяться для восстановления искомого управления и его тонкой структуры. Приводятся результаты численного моделирования. Работа продолжает исследования [29–35].

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая динамическая система, состояние которой в момент времени t из заданного ограниченного отрезка времени $T = [t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta$) характеризуется парой функций $z[t] = (y[t], y_t[t]) = (y(t, \cdot), y_t(t, \cdot))$, определенных в некоторой области Ω евклидова

пространства \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Эволюция состояний во времени описывается краевой задачей [36–38]:

$$y_{tt} = Ly + f(t, x), \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega, \quad (1.1)$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \quad y_t(t_0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial N} + \sigma y = g(x) u(t), \quad t \in T, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (1.3)$$

где σ — неотрицательная постоянная; y_0 — начальное положение системы; y_1 — начальная скорость системы; f и g — заданные функции; $\partial y/\partial N$ — внешняя кономальная производная, соответствующая оператору L ; $u = (u_1, \dots, u_m)$ — векторная функция управляющего воздействия; L — линейный самосопряженный коэрцитивный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка

$$Ly = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) - a(x)y, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a \geq a_0 = \text{const} > 0.$$

Допустимые текущие значения управления подчинены ограничению $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$, $t \in T$.

Пусть за движением $z = z[t] = (y[t], y_t[t])$, $t \in T$, управляемой динамической системы осуществляется наблюдение в течение промежутка времени T и в соответствующие текущие моменты времени $t \in T$ приближенно измеряются состояния системы, причем результаты этих измерений $z_\delta[t] = (y^{(\delta)}[t], y_t^{(\delta)}[t])$ удовлетворяют условию

$$R(z_\delta, z) = \int_T \|y^{(\delta)}[t] - y[t]\|_{L_2(\Omega)}^2 dt + \int_T \|y_t^{(\delta)}[t] - y_t[t]\|_{W_2^1(\Omega)^*}^2 dt \leq \delta^2, \quad (1.4)$$

где δ — числовой параметр, характеризующий точность измерений, $0 \leq \delta \leq \delta_0$.

Задача восстановления состоит в том, чтобы по результатам приближенных измерений $z_\delta = z_\delta[t]$, $t \in T$, наблюдаемого движения системы $z = z[t]$, $t \in T$, приближенно определить (восстановить) ту функцию управляющего воздействия на динамическую систему $u = u(t)$, $t \in T$, которая порождает наблюдаемое движение системы. При этом результат восстановления $u^{(\delta)} = u^{(\delta)}(t)$, $t \in T$, искомого управляющего воздействия $u = u(t)$, $t \in T$, должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений

$$\int_T \|u^{(\delta)}(t) - u(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Рассматриваемой задаче можно дать следующую содержательную интерпретацию. В некотором теле (области) Ω с границей Γ распространяется возмущение под действием граничных источников с составляющей по времени u . Эта управляющая составляющая u априори неизвестна и недоступна прямому измерению. Процесс распространения возмущений в теле Ω наблюдается в течение некоторого конечного отрезка времени T . По ходу процесса в текущие моменты времени $t \in T$ измеряется с ошибкой δ положение тела $y[t] = y(t, x)$, $x \in \Omega$, и его скорость $y_t[t] = y_t(t, x)$, $x \in \Omega$. Результатом этих измерений в момент времени $t \in T$ является пара функций $z_\delta[t] = (y^{(\delta)}(t, x), y_t^{(\delta)}(t, x))$, $x \in \Omega$, которые в совокупности для всех моментов времени $t \in T$ удовлетворяют оценке (1.4). Требуется по поступившей информации $z_\delta[t]$, $t \in T$, о приближенных состояниях тела на промежутке времени T приближенно восстановить ту управляющую функцию u , которая порождает наблюдаемое движение системы. При этом восстановление должно быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений состояний тела.

Перейдем к математической формализации задачи. Пусть P — выпуклое компактное множество из \mathbb{R}^m ; U — множество всех допустимых управлений в задаче, представляющее собой

множество всех измеримых и интегрируемых с квадратом вектор-функций, которые при почти всех $t \in T$ принадлежат компакту P ,

$$U = \{u \in E : u(t) \in P \text{ п.в. } t \in T\}, \quad E = L_2(T; \mathbb{R}^m).$$

Будем считать, что Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с кусочно-гладкой границей Γ (для дальнейшего достаточно, чтобы область Ω была строго липшицевой [37, с. 30]). Пусть $f \in L_2(Q)$, $g \in L_2^m(\Gamma)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $y_1 \in W_2^1(\Omega)^*$, коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям: $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $a \in L_\infty(\Omega)$, причем существуют такие постоянные $\nu = \text{const} > 0$ и $\mu = \text{const} \geq \nu$, что для любого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in \Omega$ выполняются неравенства

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Известно [38;39], что при указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1)–(1.3) для каждого управления $u \in E$ имеется единственное слабое решение $y = y(t, x) = y(t, x; u)$, $(t, x) \in Q$, этой краевой задачи из пространства $L_2(Q)$ такое, что $y \in C(T; L_2(\Omega))$, $y_t \in C(T; W_2^1(\Omega)^*)$. Пару функций $z = (y, y_t) = (y(\cdot; u), y_t(\cdot; u))$ иногда будем называть движением динамической системы (1.1)–(1.3), порожденным управлением $u \in U$, и будем обозначать его символом $z = z[\cdot; u] = z[t; u] = (y(t, \cdot; u), y_t(t, \cdot; u))$, $t \in T$.

Введем в рассмотрение множество $Z = \{z = z[\cdot; u] : u \in U\}$ всех возможных движений системы (1.1)–(1.3), отвечающих всем возможным управлениям. Для каждого движения $z = (y, y_t) \in Z$ введем множество $U(z) = \{u \in U : z[\cdot; u] = z\}$ всех допустимых управлений, порождающих данное движение, и множество всех возможных измерений этого движения

$$Y_\delta(z) = \{z_\delta \in Y : R(z_\delta, z) \leq \delta^2\}, \quad Y = L_2(T; L_2(\Omega)) \times L_2(T; W_2^1(\Omega)^*).$$

Решение задачи восстановления будем искать в классе алгоритмов, каждый из которых отождествим с семейством отображений (методов)

$$D = \{D_\delta : 0 \leq \delta \leq \delta_0\}, \quad D_\delta : Y \rightarrow E.$$

Для формулировки задачи введем обозначения

$$r_\delta(z) = \sup \{\rho[D_\delta(z_\delta), U(z)] : z_\delta \in Y_\delta(z)\}, \quad z = (y, y_t) \in Z,$$

$$\rho[D_\delta(z_\delta), U(z)] = \min \{\|D_\delta(z_\delta) - v\|_E : v \in U(z)\}.$$

З а д а ч а. Требуется построить алгоритм D , который на любом наблюдаемом движении динамической системы $z \in Z$ обладает регуляризующим свойством

$$r_\delta(z) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются, например, в [36–38].

2. Решение задачи

Отметим некоторые свойства динамической системы и ее движений, которые будут использоваться при обосновании выбранных способов решения задачи восстановления.

Множество U выпукло, ограничено, замкнуто и слабо компактно в E .

Если последовательность управлений $\{u_k\} \subset E$ слабо в E сходится к элементу $u_0 \in E$, то соответствующая последовательности управлений последовательность движений $\{z[\cdot; u_k]\}$ сходится в пространстве $\mathfrak{B} = C(T; L_2(\Omega)) \times C(T; W_2^1(\Omega)^*)$ к движению $z[\cdot; u_0]$.

Отображение $A: E \ni u \rightarrow z[\cdot; u] \in \mathfrak{B}$ линейно и компактно.

Множество Z выпукло и компактно в пространстве \mathfrak{B} .

Для любого $z \in Z$ множество $U(z)$ непусто, выпукло, ограничено, замкнуто и слабо компактно в E , оно содержит в себе единственный элемент $u^*(z)$ минимальной E -нормы.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам подобных утверждений в [29–35; 38]. Укажем, что отображение A не может иметь непрерывного обратного отображения [40, с. 228], поэтому данная задача восстановления некорректна и ее решение требует привлечения методов регуляризации.

Рассмотрим один из вариантов решения задачи. Введем обозначения

$$F_\alpha^*(z) = \min \{F_\alpha(z, u) : u \in U\}, \quad (2.1)$$

$$U_\alpha^*(z) = \{u \in U : F_\alpha(z, u) = F_\alpha^*(z)\}, \quad (2.2)$$

$$F_\alpha = F_\alpha(z, u) = R(z, z[\cdot; u]) + \alpha \|u\|_E^2, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

Отметим некоторые свойства функционала (2.3), экстремальной задачи (2.1) и множества ее решений (множества минимизирующих элементов) (2.2).

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ функционал (2.3) полунепрерывен снизу по u относительно слабой сходимости в E .

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ экстремальная задача (2.1) однозначно разрешима, множество ее решений $U_\alpha^*(z)$ состоит из одного элемента $u_\alpha^*(z) \in U$.

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ всякая минимизирующая последовательность в задаче (2.1) сходится сильно в E к элементу $u_\alpha^*(z)$.

Эти утверждения доказываются так же, как доказываются аналогичные утверждения в [29–35; 40–44].

Построим алгоритм, решающий задачу восстановления. Для $\delta \in [0, \delta_0]$ и $z = (y, y_t) \in Y$ определим реализацию (значение) метода $D_\delta(z)$ по правилу

$$D_\delta(z) = v \in U : F_\alpha^*(z) \leq F_\alpha(z, v) \leq F_\alpha^*(z) + \varepsilon, \quad (2.4)$$

где ε — неотрицательный параметр, характеризующий точность по функционалу решения экстремальной задачи (2.1). Величины α и ε будут являться параметрами метода (параметрами регуляризации), они будут выбираться в зависимости от величины погрешности измерений δ .

Теорема 2.1. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2) \alpha(\delta)^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\delta) \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Тогда алгоритм D , состоящий из методов (2.4), решает задачу восстановления на любом наблюдаемом движении $z = (y, y_t) \in Z$, т.е. $r_\delta(z) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, при любых измерениях $z_\delta \in Y_\delta(z)$ для реализаций $v^{(\delta)} = D_\delta(z_\delta)$ методов (2.4) при $\delta \rightarrow 0$ имеет место сильная в E сходимость $v^{(\delta)} \rightarrow u^*(z)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобного утверждения в [29–35].

Рассмотрим еще один вариант решения задачи восстановления.

Пусть W есть банахово пространство функций ограниченной полной вариации [14; 21; 40]: $W = \{u \in E : V[u] < \infty\}$, $\|u\|_W = \|u\|_E + V[u]$, где $V[u]$ — полная вариация функции $u : T \ni t \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}^m$,

$$V[u] = \sup \left\{ \sum_{i=1}^l \|u(t_i) - u(t_{i-1})\|_{\mathbb{R}^m} : \sigma \in \Sigma \right\};$$

супремум берется по множеству Σ всех конечных разбиений σ отрезка T , $\sigma : t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} < t_l = \vartheta$.

Отметим некоторые свойства пространства W и его нормы.

Пространство W компактно вкладывается в E , т.е. оператор вложения W в E непрерывен и каждое ограниченное множество из W он переводит в предкомпактное множество из E . Всякое замкнутое множество из W замкнуто и в E .

Поточечный предел ограниченной в W последовательности функций также является функцией из W .

Функционал $V[\cdot]$ и норма $\|\cdot\|_W$ полунепрерывны снизу относительно поточечной сходимости аргументов, т.е. если последовательность функций ограниченной вариации $\{v_k\}$ сходится поточечно на T к некоторой функции ограниченной вариации v_0 , то $V[v_0] \leq \liminf V[v_k]$ и $\|v_0\|_W \leq \liminf \|v_k\|_W$.

Функционал $V[\cdot]$ и норма $\|\cdot\|_W$ полунепрерывны снизу относительно сходимости в E ограниченных последовательностей из W , т.е. если $\{v_k\}$ есть ограниченная последовательность из W , которая в E сходится к некоторой функции $v_0 \in E$, то $v_0 \in W$ и $V[v_0] \leq \liminf V[v_k]$, $\|v_0\|_W \leq \liminf \|v_k\|_W$.

Для любого замкнутого шара $S_r[w_0] = \{w \in W: \|w - w_0\|_W \leq r\}$ множество $U \cap S_r[w_0]$ выпукло, замкнуто в E и W , компактно и слабо компактно в E , компактно относительно поточечной сходимости на T .

Эти утверждения обосновываются так же, как обосновываются аналогичные утверждения в [29–31].

Введем обозначения

$$\widehat{F}_\alpha^*(z) = \min \{\widehat{F}_\alpha(z, u): u \in U_W\}, \quad U_W = U \cap W, \quad (2.6)$$

$$\widehat{U}_\alpha^*(z) = \{u \in U_W: \widehat{F}_\alpha(z, u) = \widehat{F}_\alpha^*(z)\}, \quad (2.7)$$

$$\widehat{F}_\alpha = \widehat{F}_\alpha(z, u) = R(z, z[\cdot; u]) + \alpha \Lambda(u), \quad \Lambda(u) = \|u\|_E^2 + V[u]. \quad (2.8)$$

Сформулируем несколько утверждений, которые будут использоваться в дальнейшем.

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ функционал (2.8) полунепрерывен снизу по u относительно сходимости в E ограниченных последовательностей из W .

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ экстремальная задача (2.6) однозначно разрешима, множество ее решений $\widehat{U}_\alpha^*(z)$ состоит из одного элемента $\widehat{u}_\alpha^*(z) \in U_W$.

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ всякая минимизирующая последовательность в задаче (2.6) сходится сильно в E к элементу $\widehat{u}_\alpha^*(z)$.

Пусть для $z \in Z$ множество $S = U(z) \cap W \neq \emptyset$, тогда во множестве S существует единственный (Λ, S) -нормальный элемент $\widehat{u} = \widehat{u}(\Lambda, S)$, т.е. элемент, удовлетворяющий условию $\Lambda(\widehat{u}) = \inf \{\Lambda(u): u \in S\}$.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам подобных утверждений, сформулированных выше.

Построим алгоритм, решающий задачу восстановления. Для $\delta \in [0, \delta_0]$ и $z = (y, y_t) \in Y$ определим реализацию (значение) метода $D_\delta(z)$ по правилу

$$D_\delta(z) = v \in U_W: \widehat{F}_\alpha^*(z) \leq \widehat{F}_\alpha(z, v) \leq \widehat{F}_\alpha^*(z) + \varepsilon. \quad (2.9)$$

Теорема 2.2. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования (2.5). Тогда алгоритм D , состоящий из методов (2.9), решает задачу восстановления на любом наблюдаемом движении $z \in Z_* = \{z \in Z: U(z) \cap W \neq \emptyset\}$, т.е. $r_\delta(z) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, если \widehat{u} есть (Λ, S) -нормальный элемент множества $S = U(z) \cap W$, то при любых измерениях $z_\delta \in Y_\delta(z)$ для реализаций $v^{(\delta)} = D_\delta(z_\delta)$ методов (2.9) при $\delta \rightarrow 0$ имеют место следующие сходимости: 1) $v^{(\delta)} \rightarrow \widehat{u}$ сильно в E ; 2) $v^{(\delta)} \rightarrow \widehat{u}$ в \mathbb{R}^m поточечно на T ; 3) $V[v^{(\delta)}] \rightarrow V[\widehat{u}]$; 4) $v^{(\delta)}(t) \rightarrow \widehat{u}(t)$ в \mathbb{R}^m равномерно по t на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции \widehat{u} .

Доказательство теоремы 2.2 аналогично доказательству подобного утверждения в [29–35].

3. Восстановление распределенных по границе управлений

Рассмотрим случай распределенных по границе управлений $u = u(t, x)$, $t \in T$, $x \in \Gamma_* \subseteq \Gamma$. В этом случае, когда искомая функция является функцией нескольких переменных, полученные выше результаты не переносятся на данную ситуацию непосредственно. Кроме того, для функций нескольких переменных существует около десятка не эквивалентных определений вариации [22; 23; 27; 28]. В этом разделе сформулируем несколько утверждений, близких к теореме 2.2 и использующих то или иное понятие вариации. Пусть для простоты $n = 2$, $m = 1$. Допустим, что некоторая часть Γ_* границы Γ параметризована переменной $s \in [s_1, s_2]$ и допустимые управления сосредоточены на параметризованном участке. Пусть $\Pi = T \times [s_1, s_2]$, $E = L_2(\Pi)$, $U = \{u \in E: u(t, s) \in P \text{ п.в. } (t, s) \in \Pi\}$. В качестве стабилизатора рассмотрим функционал $\Lambda(u) = \|u\|_E^2 + \|u\|_W$, где $\|\cdot\|_W$ — норма в банаховом пространстве W функций двух переменных $u = u(t, s)$, $(t, s) \in \Pi$, с конечной полной вариацией $VH(u, \Pi)$ [22, с. 89]. Повторяя приведенную выше схему решения задачи восстановления и опираясь на результаты [22, с. 89–91], получим следующее утверждение, аналогичное теореме 2.2.

Теорема 3.1. *Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования (2.5). Пусть $z \in Z_*$ и управление \hat{u} — (Λ, S) -нормальный элемент множества $S = U(z) \cap W$, пусть это управление является единственным в существенном [22, с. 90] и непрерывным в области $\Pi_* \subseteq \Pi$ вместе с функцией $\pi(t, x) = VH(\hat{u}, \Pi_{t_0 s_1}^{t, s})$ [22, с. 89]. Тогда алгоритм D , состоящий из методов (2.9), решает задачу восстановления на наблюдаемом движении z , т.е. $r_\delta(z) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, при любых измерениях $z_\delta \in Y_\delta(z)$ для реализаций $v^{(\delta)} = D_\delta(z_\delta)$ методов (2.9) при $\delta \rightarrow 0$ имеют место следующие сходимости: 1) $v^{(\delta)} \rightarrow \hat{u}$ сильно в E ; 2) $v^{(\delta)} \rightarrow \hat{u}$ в \mathbb{R} поточечно на Π ; 3) $VH(v^{(\delta)}, \Pi) \rightarrow VH(\hat{u}, \Pi)$; 4) $v^{(\delta)}(t, s) \rightarrow \hat{u}(t, s)$ в \mathbb{R} равномерно по (t, s) из любой замкнутой подобласти $\Pi^* \subset \Pi_*$.*

Аналогичное утверждение справедливо при замене полной вариации $VH(u, \Pi)$ на вариацию Арцела $VA(u, \Pi)$ [22, с. 89–91]. При этом второе утверждение переформулируется так: 2) $v_\delta \rightarrow \hat{u}$ в \mathbb{R} в точках непрерывности функции \hat{u} .

4. Построение минимизирующих последовательностей

Для приближенного решения задачи (2.6), т.е. для получения ε -оптимальных решений, удовлетворяющих условию (2.9), необходимо уметь строить минимизирующие последовательности для задачи (2.6). Для построения таких последовательностей можно воспользоваться градиентными и субградиентными методами [41–44]. Установим в этом направлении некоторые вспомогательные утверждения. Исследование аналогичных вопросов для задачи (2.1) проще, поскольку в целевом функционале (2.3) отсутствует вариация.

Представим функционал \hat{F}_α в виде суммы соответствующих слагаемых:

$$\hat{F}_\alpha(z, u) = J_1(z, u) + \alpha J_2(u) + \alpha J_3(u),$$

$$J_1(z, u) = R(z, z[\cdot; u]), \quad J_2(u) = \|u\|_E^2, \quad J_3(u) = V[u].$$

Функционалы J_1 и J_2 дифференцируемы по Фреше по переменной u в каждой точке $u \in E$ (как функционалы $E \rightarrow \mathbb{R}$) и в каждой точке $u \in W$ (как функционалы $W \rightarrow \mathbb{R}$), функционал J_3 не является дифференцируемым по Фреше или Гато в каждой точке $u \in W$ (например, он не дифференцируем по Гато в точке $u = 0$). Функционал \hat{F}_α выпуклый и непрерывный на W и поэтому он субдифференцируем по u на W [42]: $\partial_u \hat{F}_\alpha(z, u) = J'_{1u}(z, u) + \alpha J'_2(u) + \alpha \partial J_3(u)$.

Однако практическое применение субградиентных методов для минимизации функционала \hat{F}_α наталкивается на трудности, связанные со сложностью вычисления субдифференциала $\partial J_3(u)$ и описания сопряженного пространства W^* . Некоторые из возможных подходов к

численной реализации задачи минимизации могут быть связаны с аппроксимацией функционала J_3 подходящими дифференцируемыми функционалами [14; 22–26]. В данной работе будет реализован подход [15–20], связанный с заменой пространства W каким-либо гильбертовым пространством, например пространством Соболева $H = W_2^1(T)^m$, которое должно быть вложено в W и достаточно хорошо аппроксимировать его элементы. Это позволит воспользоваться техникой гильбертова пространства и упростить вычисление градиентов и субградиентов целевого функционала.

Рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу

$$F_\alpha^\circ(z) = \inf \{ \widehat{F}_\alpha(z, u) : u \in U_H \}, \quad U_H = U \cap H. \quad (4.1)$$

Как и в [29–31], можно показать, что $F_\alpha^\circ(z) = \widehat{F}_\alpha^*(z)$. Для элемента $u \in H$

$$V[u] = \int_T \| \dot{u}(t) \|_{\mathbb{R}^m} dt. \quad (4.2)$$

Для построения минимизирующих последовательностей в задаче (2.6) воспользуемся методом проекции субградиента [41, гл. 5, § 3; 43]:

$$u^{(k+1)} = Pr(u^{(k)} - \beta_k w_k), \quad \beta_k > 0, \quad w_k \in \partial_u \widehat{F}_\alpha(z, u^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

где $u^{(0)}$ — начальное приближение из U_H ; $Pr(w)$ — проекция точки $w \in H$ на множество U_H (поскольку множество U_H выпукло и замкнуто в H , то проекция существует и единственна [41, гл. 8, § 4]); $\{\beta_k\}$ — параметры метода, подлежащие подходящему выбору.

Теорема 4.1. Пусть в итерационном процессе (4.3) $u^{(0)}$ — произвольное начальное приближение из U_H , w_k — произвольный субградиент из субдифференциала $\partial_u \widehat{F}_\alpha(z, u^{(k)})$, параметры метода $\{\beta_k\}$ удовлетворяют условию

$$\beta_k = 1, \quad \text{если } w_k = 0; \quad \beta_k = \gamma_k / \|w_k\|_H, \quad \text{если } w_k \neq 0; \quad (4.4)$$

$$\gamma_k > 0, \quad \gamma_k \rightarrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty. \quad (4.5)$$

Тогда 1) $\widehat{F}_\alpha(z, u_*^{(k)}) \rightarrow F_\alpha^\circ(z) = \widehat{F}_\alpha^*(z)$, где $\widehat{F}_\alpha(z, u_*^{(k)}) = \min \{ \widehat{F}_\alpha(z, u^{(i)}) : i \in \overline{0, k} \}$; 2) минимизирующая последовательность $\{u_*^{(k)}\} \subset U_H$ задачи (4.1) сходится сильно в E к элементу $u_\alpha^*(z)$; 3) $V[u_*^{(k)}] \rightarrow V[u_\alpha^*(z)]$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 из [33].

5. Аппроксимация задачи

Воспользуемся для аппроксимации задачи методом разделения переменных. Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) представим в виде ряда Фурье

$$y = y(t, x; u) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \omega_i(x), \quad t \in T, \quad x \in \Omega,$$

$$\ddot{y}_i(t) = -\lambda_i y_i(t) + f_i(t) + g^{(i)} u(t), \quad t \in T, \quad y_i(t_0) = y_{0i}, \quad \dot{y}_i(t_0) = y_{1i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$y_i(t) = y_i(t; u) = y_{0i} \cos(\sqrt{\lambda_i}(t - t_0)) + y_{1i} (\lambda_i)^{-1/2} \sin(\sqrt{\lambda_i}(t - t_0))$$

$$+ (\lambda_i)^{-1/2} \int_{t_0}^t f_i(\tau) \sin(\sqrt{\lambda_i}(t - \tau)) d\tau + (\lambda_i)^{-1/2} g^{(i)} \int_{t_0}^t u(\tau) \sin(\sqrt{\lambda_i}(t - \tau)) d\tau,$$

где $y_{0i} = \langle y_0, \omega_i \rangle_{L_2(\Omega)}$; $y_{1i} = \langle y_1, \omega_i \rangle_*$ — значение функционала $y_1 \in W_2^1(\Omega)^*$ на элементе $\omega_i \in W_2^1(\Omega)$; $g^{(i)} = (\langle g_1, \omega_i \rangle_{L_2(\Gamma)}, \dots, \langle g_m, \omega_i \rangle_{L_2(\Gamma)})$; $f_i(t) = \langle f(t, \cdot), \omega_i \rangle_{L_2(\Omega)}$; $\{\lambda_i, \omega_i : i \in \mathbb{N}\}$ — решение в $W_2^1(\Omega)$ спектральной задачи

$$L\omega = -\lambda\omega \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \omega}{\partial N} + \sigma\omega = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \langle \omega, \omega \rangle_{L_2(\Omega)} = 1.$$

Известно [36; 37], что спектральная задача разрешима для счетного набора вещественных положительных чисел $\lambda = \lambda_i$, $i \in \mathbb{N}$, каждое из которых имеет конечную кратность, и их можно упорядочить (с учетом их кратности) в порядке возрастания $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots$, $\lambda_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, соответствующие собственным числам λ_i собственные функции ω_i образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$ и базис в $W_2^1(\Omega)$.

Для любых $t \in T$ и $u \in U$ справедлива оценка со сходящимся мажорирующим рядом [39]:

$$\begin{aligned} & \|y(t, \cdot; u)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|y_t(t, \cdot; u)\|_{W_2^1(\Omega)^*}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2(t; u) + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} \dot{y}_i^2(t; u) \leq 8 \sum_{i=1}^{\infty} y_{0i}^2 \\ & + 8 \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} y_{1i}^2 + 4 \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} \int_T f_i(\tau)^2 d\tau + 8mC_P^2 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j)^{-1} \langle g_i, \omega_j \rangle_{L_2(\Gamma)}^2 \right) < \infty, \\ & C_P = \sup \{ \|w\|_{\mathbb{R}^m} : w \in P \}, \end{aligned}$$

из которой, в частности, следует сходимость остатка ряда $R_p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} R_p &= 8 \sum_{i=p}^{\infty} y_{0i}^2 + 8 \sum_{i=p}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} y_{1i}^2 + 4 \sum_{i=p}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} \int_T f_i(\tau)^2 d\tau \\ &+ 8mC_P^2 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=p}^{\infty} (\lambda_j)^{-2} \langle g_i, \omega_j \rangle_{L_2(\Gamma)}^2 \right). \end{aligned}$$

Фиксируем какое-нибудь $p \in \mathbb{N}$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$\Phi_\alpha^{(p)}(z) = \min \{ F_\alpha^{(p)}(z, u) : u \in U_W \}, \quad (5.1)$$

$$F_\alpha^{(p)} = F_\alpha^{(p)}(z, u) = J_1^{(p)}(z, u) + \alpha \Lambda(u),$$

$$J_1^{(p)}(z, u) = \sum_{i=1}^p \int_T (y_i[t] - y_i(t; u))^2 dt + \sum_{i=1}^p (\lambda_i)^{-1} \int_T (\dot{y}_i[t] - \dot{y}_i(t; u))^2 dt,$$

$$y_i[t] = \langle y[t], \omega_i \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \dot{y}_i[t] = \langle y_t[t], \omega_i \rangle_*, \quad z = (y[\cdot], y_t[\cdot]) \in Y.$$

Экстремальная задача (5.1) имеет единственное решение $u_\alpha^{(p)}(z) \in U_W$, всякая минимизирующая последовательность в задаче (5.1) сходится сильно в E к элементу $u_\alpha^{(p)}(z)$.

Рассмотрим следующий алгоритм для решения исходной задачи реконструкции:

$$D = \{ D_\delta^{(p)} : 0 \leq \delta \leq \delta_0, p \in \mathbb{N} \}, \quad D_\delta^{(p)} : Y \rightarrow E.$$

Для любых $\delta \in [0, \delta_0]$, $p \in \mathbb{N}$, $z \in Y$ определим реализацию метода

$$D_\delta^{(p)}(z) = v \in U_W : \Phi_\alpha^{(p)}(z) \leq F_\alpha^{(p)}(z, v) \leq \Phi_\alpha^{(p)}(z) + \varepsilon, \quad (5.2)$$

где ε — неотрицательный параметр, характеризующий точность по функционалу решения экстремальной задачи (5.1). Величины α , ε , p будут являться параметрами регуляризации, они будут выбираться в зависимости от величины погрешности измерений δ .

Теорема 5.1. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$, $p = p(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2 + R_p(\delta)) \alpha(\delta)^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\delta) \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad p(\delta) \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Тогда алгоритм D , состоящий из методов (5.2), решает задачу восстановления на любом наблюдаемом движении $z \in Z_*$, т.е. $r_\delta(z) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, если \hat{u} есть (Λ, S) -нормальный элемент множества $S = U(z) \cap W$, то при любых измерениях $z_\delta \in Y_\delta(z)$ для реализаций $v^{(\delta)} = D_\delta^{(p(\delta))}(z_\delta)$ методов (5.2) при $\delta \rightarrow 0$ имеют место следующие сходимости: 1) $V[v^{(\delta)}] \rightarrow V[\hat{u}]$; 2) $v^{(\delta)} \rightarrow \hat{u}$ сильно в E ; 3) $v^{(\delta)} \rightarrow \hat{u}$ в \mathbb{R}^m поточечно на T ; 4) $v^{(\delta)}(t) \rightarrow \hat{u}(t)$ в \mathbb{R}^m равномерно по t из любого отрезка, не содержащего точек разрыва функции \hat{u} .

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2.

Укажем способ построения минимизирующих последовательностей в задаче (5.1). Этот способ аналогичен способу, изложенному в разд. 4.

Рассмотрим новую вспомогательную экстремальную задачу

$$\Psi_\alpha^{(p)}(z) = \inf \{F_\alpha^{(p)}(z, u) : u \in U_H\}. \quad (5.3)$$

Можно показать, что $\Psi_\alpha^{(p)}(z) = \Phi_\alpha^{(p)}(z)$, любая минимизирующая последовательность в задаче (5.3) сходится сильно в E к элементу $u_\alpha^{(p)}(z)$.

Функционал $F_\alpha^{(p)} : H \rightarrow \mathbb{R}$ не дифференцируем по переменной u ни по Фреше, ни по Гато во всех точках $u \in H$, но он субдифференцируем в каждой точке $u \in H$:

$$\partial_u F_\alpha^{(p)}(z, u) = J_{1u}^{(p)'}(z, u) + \alpha J_2'(u) + \alpha \partial J_3(u).$$

Для построения минимизирующих последовательностей в задаче (5.3) воспользуемся методом проекции субградиента

$$u^{(k+1)} = Pr(u^{(k)} - \beta_k w_k), \quad \beta_k > 0, \quad w_k \in \partial_u F_\alpha^{(p)}(z, u^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.4)$$

где $u^{(0)}$ — начальное приближение из U_H ; $Pr(w)$ — проекция в H точки $w \in H$ на множество U_H ; w_k — субградиент субдифференциала $\partial_u F_\alpha^{(p)}(z, u^{(k)})$; $\{\beta_k\}$ — параметры метода, подлежащие подходящему выбору.

Теорема 5.2. Пусть в итерационном процессе (5.4) $u^{(0)}$ — произвольное начальное приближение из U_H , w_k — произвольный субградиент из $\partial_u F_\alpha^{(p)}(z, u^{(k)})$, параметры метода $\{\beta_k\}$ удовлетворяют условиям (4.4), (4.5). Тогда 1) $F_\alpha^{(p)}(z, u_*^{(k)}) \rightarrow \Psi_\alpha^{(p)}(z) = \Phi_\alpha^{(p)}(z)$, где $F_\alpha^{(p)}(z, u_*^{(k)}) = \min \{F_\alpha^{(p)}(z, u^{(i)}) : i \in \overline{0, k}\}$; 2) минимизирующая последовательность $\{u_*^{(k)}\} \subset U_H$ задачи (5.3) сходится сильно в E к элементу $u_\alpha^{(p)}(z)$; 3) $V[u_*^{(k)}] \rightarrow V[u_\alpha^{(p)}(z)]$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1.

З а м е ч а н и е. В случае краевых условий первого рода $y = g(x) u(t)$ задача восстановления формализуется с сохранением результатов в пространстве движений $C(T; \overset{\circ}{W}_{2,0}^1(\Omega)^*) \times C(T; W_{2,0}^2(\Omega)^*)$ с функционалом невязки

$$F_\alpha = F_\alpha(z, u) = \int_T \|y[t] - y(t; u)\|_{\overset{\circ}{W}_{2,0}^1(\Omega)^*}^2 dt + \int_T \|y_t[t] - y_t(t; u)\|_{W_{2,0}^2(\Omega)^*}^2 dt + \alpha \Lambda(u).$$

6. Численное моделирование

Проведем численное моделирование задачи восстановления управления в системе

$$\begin{aligned} y_{tt} &= a^2 y_{xx}, \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega, \\ y(0, x) &= y_0(x), \quad y_t(0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega = (0, l), \\ y_x(t, 0) &= u(t), \quad y_x(t, l) = 0, \quad t \in T = [0, \vartheta]. \end{aligned}$$

По условию $y_0 \in L_2(\Omega)$, $y_1 \in W_2^1(\Omega)^*$, $a = \text{const} > 0$. Пусть множество геометрических ограничений на управления P есть отрезок $P = [\mu_1, \mu_2] \subset \mathbb{R}$, $\mu_1 < \mu_2$, приближенное измерение положений динамической системы моделируется соотношением

$$\begin{aligned} y^{(\delta)}(t, x) &= y(t, x; u) + \delta \xi(t, x), \quad \int_T \|\xi(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq 1, \\ y_t^{(\delta)}(t, x) &= y_t(t, x; u) + \delta \eta(t, x), \quad \int_T \|\eta(t, \cdot)\|_{W_2^1(\Omega)^*}^2 dt \leq 1. \end{aligned}$$

В данном случае $\lambda_0 = 0$, $\omega_0(x) = \sqrt{1/l}$, $g^{(0)} = \sqrt{1/l}$,

$$\lambda_i = \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2, \quad \omega_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos(\sqrt{\lambda_i} x), \quad g^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{l}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\ddot{y}_i(t) = -a^2 \lambda_i y_i(t) + g^{(i)} u(t), \quad t \in T, \quad y_i(0) = y_{0i}, \quad \dot{y}_i(0) = y_{1i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$y_0(t) = y_0(t; u) = y_{00} + y_{10} t + g^{(0)} \int_0^t \int_0^\tau u(s) ds d\tau,$$

$$\begin{aligned} y_i(t) &= y_i(t; u) = y_{0i} \cos(at \sqrt{\lambda_i}) + y_{1i} (a^2 \lambda_i)^{-1/2} \sin(at \sqrt{\lambda_i}) \\ &+ (a^2 \lambda_i)^{-1/2} g^{(i)} \int_0^t u(\tau) \sin(a \sqrt{\lambda_i} (t - \tau)) d\tau, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$y = y(t, x) = y(t, x; u) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \omega_i(x), \quad t \in T, \quad x \in [0, l].$$

Далее фиксируем какое-либо натуральное число $p \in \mathbb{N}$ и рассматриваем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{y}_i(t) = -a^2 \lambda_i y_i(t) + g^{(i)} u(t), \quad t \in T, \quad y_i(0) = y_{0i}, \quad \dot{y}_i(0) = y_{1i}, \quad i = 0, \dots, p. \quad (6.1)$$

Дискретизируем задачу (5.3). Фиксируем разбиение Δ отрезка T с равномерным шагом h точками $t_k \in T$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = \vartheta$. На разбиении Δ определим дискретное управление $u_h = (u_0^{(h)}, \dots, u_m^{(h)})$ как элемент евклидова пространства \mathbb{R}^{m+1} , удовлетворяющий геометрическому ограничению $u_h \in P^{m+1} = P_h$. Движение системы (6.1)

$$z^{(p)} = z^{(p)}[t; u] = (y^{(p)}[t; u], \dot{y}^{(p)}[t; u]) = ((y_0(t; u), \dots, y_p(t; u)), (\dot{y}_0(t; u), \dots, \dot{y}_p(t; u))), \quad t \in T,$$

в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{p+1}$, соответствующее управлению $u \in U$, аппроксимируем упорядоченным набором сеточных функций $z_h^{(p)} = z_h^{(p)}[\cdot; u_h] = ((y_{0h}, \dots, y_{ph}), (\dot{y}_{0h}, \dots, \dot{y}_{ph}))$, $y_{ih} = y_{ih}(\cdot; u_h) = (y_{ih}(t_0; u_h), \dots, y_{ih}(t_m; u_h))$, $\dot{y}_{ih} = \dot{y}_{ih}(\cdot; u_h) = (\dot{y}_{ih}(t_0; u_h), \dots, \dot{y}_{ih}(t_m; u_h))$,

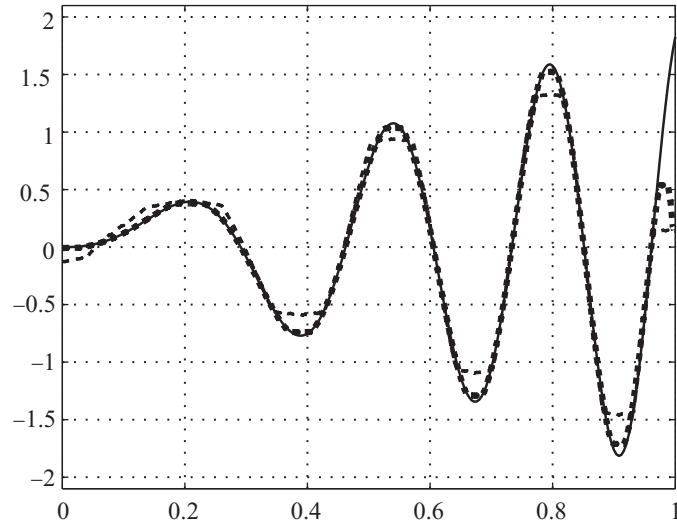


Рис. 1. Восстановление гладкого управления.

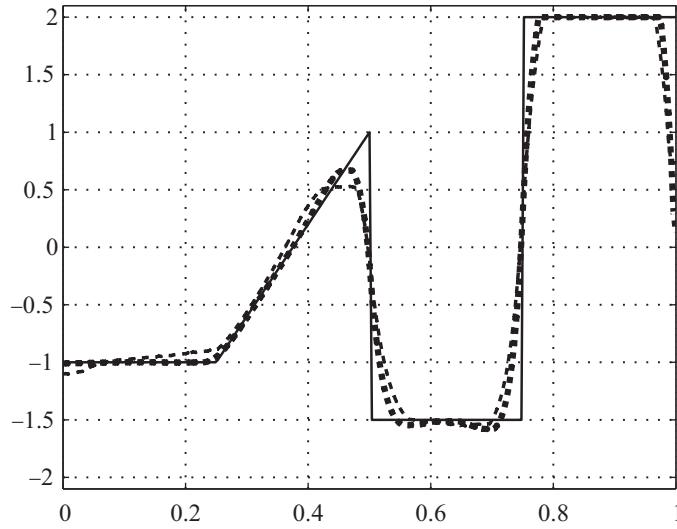


Рис. 2. Восстановление разрывного управления.

$i = 0, \dots, p$, и назовем дискретным движением системы (6.1) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{p+1}$, соответствующим дискретному управлению $u_h \in P_h$. Из (6.1) находим

$$y_{0h}[t_{k+1}; u_h] = y_{0h}[t_k; u_h] + \dot{y}_{0h}[t_k; u_h] h + g^{(0)} u_k^{(h)} (h^2/2), \quad \dot{y}_{0h}[t_{k+1}; u_h] = \dot{y}_{0h}[t_k; u_h] + g^{(0)} u_k^{(h)} h,$$

$$y_{ih}[t_{k+1}; u_h] = y_{ih}[t_k; u_h] \cos(a h \sqrt{\lambda_i}) + \dot{y}_{ih}[t_k; u_h] (a^2 \lambda_i)^{-1/2} \sin(a h \sqrt{\lambda_i}) + g^{(i)} u_k^{(h)} (a^2 \lambda_i)^{-1} (1 - \cos(a h \sqrt{\lambda_i})),$$

$$\dot{y}_{ih}[t_{k+1}; u_h] = -y_{ih}[t_k; u_h] a \sqrt{\lambda_i} \sin(a h \sqrt{\lambda_i}) + \dot{y}_{ih}[t_k; u_h] \cos(a h \sqrt{\lambda_i}) + g^{(i)} u_k^{(h)} (a^2 \lambda_i)^{-1/2} \sin(a h \sqrt{\lambda_i}),$$

$$y_{ih}[t_0; u_h] = y_{0i}, \quad \dot{y}_{ih}[t_0; u_h] = \dot{y}_{1i}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad i = 1, \dots, p.$$

Целевой функционал в (5.3) аппроксимируем конечными суммами

$$F_{\alpha h}^{(p)} = F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h) = J_{1h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h) + \alpha J_{2h}(u_h) + \alpha J_{3h}(u_h),$$

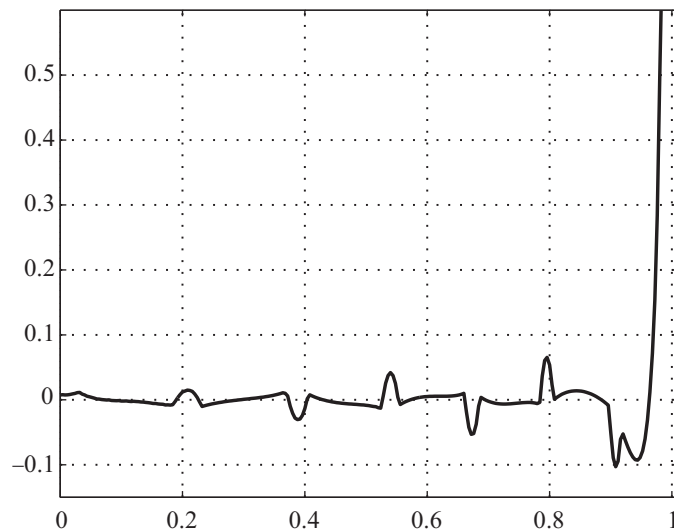


Рис. 3. Погрешность восстановления гладкого управления.

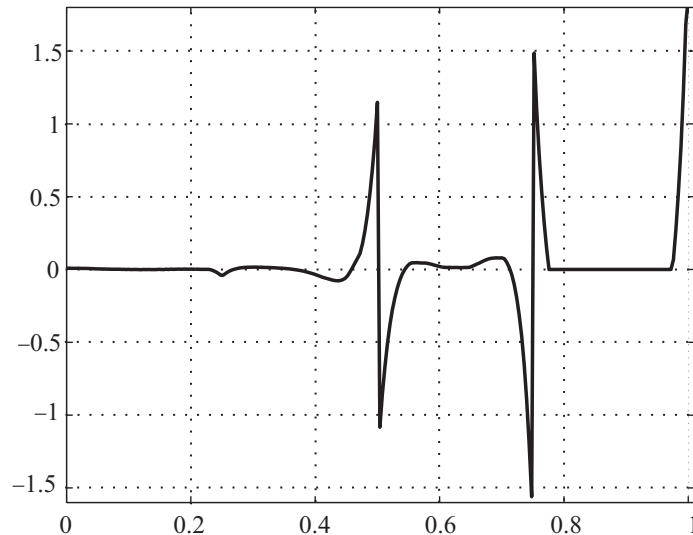


Рис. 4. Погрешность восстановления разрывного управления.

первые две суммы представляют собой соответственно аппроксимацию интегралов $J_1^{(p)}$ и J_2 методом трапеций на разбиении Δ , третья сумма J_{3h} представляет собой аппроксимацию полной вариации $V[u]$ интегральной суммой на разбиении Δ в соответствии с формулой (4.2).

Исходной бесконечномерной экстремальной задаче (5.3) поставим в соответствие конечномерную экстремальную задачу

$$\Psi_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}) = \min \{F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h) : u_h \in P_h\}. \quad (6.2)$$

Решение задачи (6.2) примем за дискретное приближение к решению задачи (5.3). Задача (6.2) разрешима единственным образом, поскольку целевая функция $F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$ непрерывна и строго выпукла на \mathbb{R}^{m+1} , а множество P_h компактно в \mathbb{R}^{m+1} . Первые два слагаемых $J_{1h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$ и $J_{2h}(\cdot)$ функции $F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$ непрерывно дифференцируемы на \mathbb{R}^{m+1} , третье слагаемое $J_{3h}(\cdot)$ не является дифференцируемым во всех точках \mathbb{R}^{m+1} , но оно непрерывно и выпукло на \mathbb{R}^{m+1} и поэтому является субдифференцируемым на \mathbb{R}^{m+1} . Таким образом, функция $F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$ субдифференцируема на \mathbb{R}^{m+1} . Приближенное решение задачи (6.2)

Т а б л и ц а 1

Результаты восстановления гладкого управления

Погрешность δ	Невязка	Относительная погрешность
0.5	0.5147	64.1706
0.1	0.2288	28.5216
0.05	0.1874	23.3683
0.01	0.1668	20.7941
0.005	0.1656	20.6433

Т а б л и ц а 2

Результаты восстановления разрывного управления

Погрешность δ	Невязка	Относительная погрешность
0.5	0.4886	35.5082
0.1	0.3404	24.7384
0.05	0.3061	22.2442
0.01	0.3051	22.1708
0.005	0.3050	22.1660

будем искать методом проекции субградиента в форме $u_h^{[k+1]} = Pr_h(u_h^{[k]} - \beta_k w_h^{[k]})$, $k = 0, 1, \dots$, где $\partial_u F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h^{[k]}) \ni w_h^{[k]}$ — субградиент по переменной u_h целевой функции в точке $u_h^{[k]}$; $Pr_h(w_h)$ — проекция точки $w_h \in \mathbb{R}^{m+1}$ на выпуклое компактное множество P_h ; в качестве начального приближения выбирается какой-нибудь элемент $u_h^{[0]} \in P_h$; $\{\beta_k\}$ — последовательность параметров метода, удовлетворяющая условиям вида (4.4), (4.5).

Субдифференциал $\partial_u F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h)$ целевой функции вычисляется достаточно просто [29–35]. Выпишем только субдифференциал функционала $J_{3h}(u_h)$

$$\partial J_{3h}(u_h) = \partial \left[\sum_{k=0}^{m-1} |u_{k+1}^{(h)} - u_k^{(h)}| \right] = \sum_{k=0}^{m-1} d_k,$$

$d_k = v_k$ при $u_{k+1}^{(h)} > u_k^{(h)}$, $d_k = -v_k$ при $u_{k+1}^{(h)} < u_k^{(h)}$, $d_k = co\{v_k, -v_k\}$ при $u_{k+1}^{(h)} = u_k^{(h)}$, где $v_k = (0, \dots, 0, -1_k, 1_{k+1}, 0, \dots, 0)$ — элемент пространства \mathbb{R}^{m+1} , у которого стоит -1 на месте с номером k и 1 на месте с номером $k+1$; $co\{v_k, -v_k\}$ — замкнутая выпуклая оболочка в \mathbb{R}^{m+1} двух элементов v_k и $-v_k$.

Проекция $Pr_h(v_h) = (w_0, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ элемента $v_h = (v_0, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ на выпуклый компакт P_h вычисляется по правилу: $w_k = v_k$ при $v_k \in P$, $w_k = \mu_1$ при $v_k < \mu_1$, $w_k = \mu_2$ при $v_k > \mu_2$, $k = 0, \dots, m$.

Погрешность измерений для дискретной задачи будем моделировать соотношениями $\xi_{ih} = (\xi_{ih}(t_0), \dots, \xi_{ih}(t_m))$, $\eta_{ih} = (\eta_{ih}(t_0), \dots, \eta_{ih}(t_m))$, $i = 0, \dots, p$; $\xi_{ih}(t_k) = \varkappa_i \sin(\beta_i t_k)$, $\eta_{ih}(t_k) = \varphi_i \sin(\tau_i t_k)$, $k = 0, \dots, m$, $i = 0, \dots, p$, где \varkappa_i , β_i , φ_i , τ_i — вещественные числа; $\vartheta (\varkappa_0^2 + \dots + \varkappa_p^2 + \varphi_0^2 + \dots + \varphi_p^2) \leq 1$.

Численные эксперименты проводились при следующих параметрах задачи: $a = 1$, $\vartheta = 1$, $l = 1$, $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = 2$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $\varkappa_i = \varphi_i = 1/\sqrt{2p}$, $\beta_i = \tau_i = 2$, $i = 0, \dots, p$, $p = 10$.

В качестве модельных восстанавливаемых управлений были выбраны функции:

- 1) $u = u_{(1)}(t) = 2t \sin(20t^{1.5})$ (гладкое управление);
- 2) $u = u_{(2)}(t) = -1$ при $t \in [0, 0.25]$, $u_{(2)}(t) = 8t - 3$ при $t \in (0.25, 0.5)$, $u_{(2)}(t) = -1.5$ при $t \in [0.5, 0.75)$, $u_{(2)}(t) = 2$ при $t \in [0.75, 1]$ (разрывное управление).

Величины γ_k выбирались по формулам: $\gamma_0 = 1$, $\gamma_k = 1/\sqrt{k}$, $k = 1, 2, \dots$. Начальной функцией в методе проекции субградиента служила нулевая сеточная функция. Она достаточно далеко отстоит от модельного управления как по норме, так и по качественному поведению.

Зависимость параметра $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ точности минимизации в задаче (6.2) от погрешности δ в измерении состояний динамической системы напрямую не контролировалась, точность решения задачи (6.2) определялась выбором количества итераций M в методе проекции субградиента и величиной шага h , характеризующего степень дискретизации задачи.

В расчетах полагалось: $h = 0.004$, $\alpha = 10^{-4} \delta$, $M = 500$.

На рис. 1, 2 сплошной линией показано модельное восстанавливаемое управление, пунктирная линия — результат восстановления при $\delta = 0.1$, линия с точками — результат восстановления при $\delta = 0.005$. На рис. 3, 4 показана погрешность восстановления при $\delta = 0.005$ (приводится график разности модельного управления и его реконструкции). На всех рисунках горизонтальная ось — ось времени, вертикальная ось — ось значений управления и погрешности восстановления соответственно. В табл. 1 и 2 приводятся результаты восстановления гладкого и разрывного управлений соответственно при варьировании параметра δ , относительная погрешность указана в процентах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С. и др.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V.** Inverse problems of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. L.: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
5. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 237 с.
6. **Осипов Ю.С., Кряжковский А.В., Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
7. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
8. **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
9. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 304 с.
10. **Крутько П.Д.** Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 332 с.
11. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
12. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
13. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
14. **Агеев А.Л.** Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 4. С. 819–836.
15. **Васин В.В.** Регуляризация и дискретная аппроксимация некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Докл. РАН. 2001. Т. 376, № 1. С. 11–14.
16. **Васин В.В.** Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.
17. **Васин В.В.** Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 64–77.
18. **Vasin V.V., Korotkii M.A.** Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2007. Vol. 15, № 8. P. 853–865.
19. **Васин В.В., Серезникова Т.И.** Об одном алгоритме решения уравнения Фредгольма – Стильтеса // Изв. вузов. Математика. 2001. № 4. С. 3–10.
20. **Васин В.В., Серезникова Т.И.** Двухэтапный метод аппроксимации негладких решений и восстановление зашумленного изображения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 126–135.

21. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 212 с.
22. **Леонов А.С.** Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 326 с.
23. **Giusti E.** Minimal surfaces and functions of bounded variations. Basel: Birkhauser, 1984. 239 p.
24. **Acar R., Vogel C.R.** Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems // *Inverse Problems*. 1994. Vol. 10. P. 1217–1229.
25. **Chavent G., Kunish K.** Regularization of linear least squares problems by total bounded variation control // *Optimization and Calculus of variation*. 1997. Vol. 2. P. 359–376.
26. **Vogel C.R.** Computation methods for inverse problems. Philadelphia: SIAM, 2002. 183 p.
27. **Витушкин А.Г.** О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955. 326 с.
28. **Clarkson J.A., Adams C.R.** On definition of bounded variation for functions of two variables // *Trans. Amer. Math. Soc.*. 1933. Vol. 35(4). P. 824–854.
29. **Короткий М.А.** Восстановление управлений и параметров методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // *Изв. вузов. Математика*. 2009. № 2. С. 76–82.
30. **Короткий М.А.** Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами // *Прикл. математика и механика*. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 39–53.
31. **Короткий М.А.** Метод регуляризации Тихонова с негладкими стабилизаторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 132 с.
32. **Соболева Д.О.** Реконструкция управлений в параболических системах // *Вестн. Бурятского гос. ун-та. Математика и информатика*. 2010. Вып. 9. С. 59–67.
33. **Короткий А.И., Михайлова Д.О.** Восстановление управлений в параболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2010. Т. 16, № 4. С. 211–227.
34. **Короткий А.И., Грибанова Е.И.** Восстановление управлений в гиперболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2010. Т. 17, № 1. С. 99–108.
35. **Короткий А.И., Михайлова Д.О.** Восстановление граничных управлений в параболических системах // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2012. Т. 18, № 1. С. 178–197.
36. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
37. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
38. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
39. **Короткий А.И.** Прямые и обратные задачи управляемых систем с распределенными параметрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1993. 331 с.
40. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
41. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 824 с.
42. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
43. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
44. **Демьянов В.Ф., Васильев В.П.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

Короткий Александр Илларионович

Поступила 21.10.2011

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. отделом

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Грибанова Екатерина Ивановна

магистрант

Уральский федеральный университет

e-mail: egribanova@list.ru

УДК 517.956

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ЧАСТИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ¹

Е. Ф. Леликова

В работе исследуется асимптотическое поведение решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в невыпуклой области с гладкой границей для случая, когда малый параметр входит множителем только при части старших производных, а предельное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением. Несмотря на то что порядок предельного уравнения тот же самый, что и у исходного уравнения, рассматриваемая задача является сингулярно возмущенной. Асимптотическое поведение решения этой задачи исследуется методом согласования асимптотических разложений.

Ключевые слова: малый параметр, асимптотические разложения.

E. F. Lelikova. On the asymptotics of a solution to an equation with a small parameter at some of the highest derivatives.

We study the asymptotic behavior of a solution of the first boundary value problem for a second-order elliptic equation in a nonconvex domain with smooth boundary in the case where the small parameter is a factor at only some of the highest derivatives and the limit equation is an ordinary differential equation. Although the limit equation has the same order as the initial equation, the problem under consideration is singularly perturbed. The asymptotic behavior of a solution of this problem is studied by the method of matched asymptotic expansions.

Keywords: small parameter, asymptotic expansions.

В ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассматривается первая краевая задача для уравнения

$$L_\varepsilon u = \varepsilon(u_{yy} + u_{zz}) + L_0 u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D, \quad (0.1)$$

$$u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma. \quad (0.2)$$

Здесь L_0 — обыкновенный дифференциальный оператор

$$L_0 u = u_{xx} + b_1(x, y, z)u_x + a(x, y, z)u. \quad (0.3)$$

Предполагается, что параметр $\varepsilon > 0$, а все коэффициенты уравнения (0.1) и правая часть бесконечно дифференцируемы.

Предполагается, что граница Γ области D гладкая, но область D невыпуклая.

Предполагается также, что существует ограниченное решение задачи (0.1), (0.2), которое мы будем обозначать через $u_\varepsilon(x, y, z)$, и для него справедлива оценка

$$|u_\varepsilon(x, y, z)| \leq C \max_{(x, y, z) \in \bar{D}} |f(x, y, z)|, \quad (0.4)$$

где постоянная C не зависит от ε . (Это условие выполнено, например, при $a(x, x, z) \leq \alpha < 0$.)

Задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных изучались различными авторами [1–3]. В этих работах рассматривался случай, когда порядок предельного уравнения был меньше порядка допредельного уравнения и этим, в частности, объяснялась сингулярность задачи, т. е. появление нарастающих с увеличением порядка приближения особенностей у коэффициентов стандартного разложения.

¹Работа поддержана РФФИ (проект 11-01-00679-а), ФЦП (контракт 02.740.11.0612) и программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математике и физике” (проект 12-П-1-1009).

Спецификой рассматриваемой задачи является то, что малый параметр входит множителем лишь при части старших производных, так что понижения порядка предельного уравнения не происходит, предельное уравнение в данном случае является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Несмотря на это данная задача является сингулярно возмущенной: коэффициенты стандартного (внешнего) разложения имеют особенности в точках некоторых множеств в области D . В частности, к таким множествам из-за невыпуклости области D относятся множества точек, лежащих на прямых $z = C_1$, $y = C_2$ (параллельных оси x), касающихся границы Γ области D внутри области, т. е. на цилиндрических поверхностях, образующими которых являются прямые, параллельные оси x , а направляющей — кривая, вдоль которой эти прямые касаются границы Γ области D внутри области.

В работе методом согласования асимптотических разложений [4; 5] построено и обосновано асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y, z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в некоторой фиксированной окрестности такой цилиндрической поверхности.

Для двумерного случая, т. е. для уравнения $\varepsilon u_{zz} + u_{xx} + b_1(x, z)u_x + a(x, z)u = f(x, z)$, поведение решений первой краевой задачи для различных областей исследовано в работах [6–8]. В частности, в работе [7] подробно исследовано поведение решения в окрестности прямой, которая параллельна оси x и проходит через точку касания этой прямой с границей области внутри области. В данной работе будут использоваться результаты, полученные в работе [7].

1. Внешнее разложение

Будем считать, что в некоторой фиксированной окрестности начала координат $\{(x, y, z) \in D, x^2 + y^2 + z^2 < \delta_0, \delta_0 > 0\}$ область D совпадает с внешностью параболоида $x^2 + y^2 \leq z$, расположенного в полупространстве $z > 0$. Через D_δ обозначим окрестность оси x : $D_\delta = \{(x, y, z) \in D, |y| < \delta, |z| < \delta^2/2\}$, где δ — любое фиксированное число такое, что $\delta < \delta_0$.

Область D_δ ограничена поверхностью параболоида $P: z = x^2 + y^2$ и частями Γ_δ^+ , Γ_δ^- границы Γ , расположенными в полупространстве $x > 0$ и $x < 0$ соответственно, и плоскостями $y = \pm\delta, z = \delta^2/2$. Будем считать, что уравнение границы Γ_δ^+ имеет вид $x = \gamma^+(y, z)$, а уравнение границы Γ_δ^- имеет вид $x = \gamma^-(y, z)$. Асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y, z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет построено в области D_δ .

Обозначим $D_\delta^{(1)} = \{x, z > 0, y^2 < z, \sqrt{z - y^2} < x < \gamma^+(y, z)\}$, $D_\delta^{(2)} = \{x < 0, z > 0, y^2 < z, \gamma^-(z, y) < x < -\sqrt{z - y^2}\}$, $D_\delta^{(3)} = D_\delta \setminus (D_\delta^{(1)} \cup D_\delta^{(2)})$.

Внешнее разложение

$$U(x, y, z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y, z) \quad (1.1)$$

решения $u_\varepsilon(x, y, z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ — это три различных асимптотических ряда (т. е. $u_k(x, y, z) = u_k^{(j)}(x, y, z)$, $j = 1, 2, 3$), коэффициенты которых в каждой из областей $D_\delta^{(j)}$ удовлетворяют одним и тем же рекуррентным системам уравнений

$$L_0 u_0^{(j)} = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D_\delta^{(j)}, \quad (1.2)$$

$$L_0 u_k^{(j)} = -\Delta_{y,z} u_{k-1}^{(j)}, \quad k \geq 1, \quad (x, y, z) \in D_\delta^{(j)},$$

в то время как граничные условия для каждого j задаются на той части исходной границы Γ , которая совпадает (в фиксированной области D_δ) с границей области $D_\delta^{(j)}$:

$$\begin{aligned} u_k^{(1)}(\gamma^+(y, z), y, z) &= 0, & u_k^{(1)}(\sqrt{z - y^2}, y, z) &= 0; \\ u_k^{(2)}(-\sqrt{z - y^2}, y, z) &= 0, & u_k^{(2)}(\gamma^-(y, z), y, z) &= 0; \\ u_k^{(3)}(\gamma^+(y, z), y, z) &= 0, & u_k^{(3)}(\gamma^-(y, z), y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Очевидно, что в силу определения коэффициенты внешнего разложения $u_k(x, y, z)$ разрывны на тех прямых, параллельных оси x , которые касаются параболоида P . Легко видеть, что касание происходит в точках параболы $z = y^2$ (лежащей в плоскости $x = 0$) и, таким образом, на цилиндрической поверхности Π , направляющая которой совпадает с параболой $z = y^2$, а образующими являются прямые, параллельные оси x , коэффициенты внешнего разложения разрывны. Более того, функции $u_k^{(1)}(x, y, z)$, $u_k^{(2)}(x, y, z)$ имеют особенности в точках данной цилиндрической поверхности.

Образующая цилиндрической поверхности в плоскости $y = y_0$ касается параболы $x^2 = z - y_0^2$. Асимптотика решения рекуррентных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$L_0 u_k = F_k(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$$

в окрестности прямой, касающейся параболы в случае, когда исходная задача рассматривается в двумерной области, была подробно исследована в работе [7]. Исследование асимптотики решений задач (1.2), (1.3) может быть проведено совершенно аналогично, и поэтому мы ограничимся формулировкой соответствующих теорем.

Справедлива

Теорема 1. При $z - y^2 \rightarrow 0$, $\sqrt{z - y^2} \leq x \leq \gamma^+(z, y)$ функции $u_k^{(1)}(x, y, z)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$\begin{aligned} u_0^{(1)}(x, y, z) &= \sum_{j=0}^{\infty} (z - y^2)^{\frac{j}{2}} u_{0j}^+(y), \\ u_k(x, y, z) &= (z - y^2)^{-2k} \sum_{j=1}^{\infty} (z - y^2)^{\frac{j}{2}} u_{kj}^+(y, z), \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Функции $u_{kj}^+(y, z)$ бесконечно дифференцируемы. Ряды (1.4) допускают почленное дифференцирование любого порядка.

Справедлива

Теорема 2. При $z - y^2 \rightarrow 0$, $\gamma^-(z, y) \leq x \leq -\sqrt{z - y^2}$ функции $u_k^{(2)}(x, y, z)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$\begin{aligned} u_0^{(2)}(x, y, z) &= \sum_{j=0}^{\infty} (z - y^2)^{\frac{j}{2}} u_{0j}^-(y), \\ u_k(x, y, z) &= (z - y^2)^{-2k} \sum_{j=1}^{\infty} (z - y^2)^{\frac{j}{2}} u_{kj}^-(y, z), \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Функции $u_{kj}^-(y, z)$ бесконечно дифференцируемы. Ряды (1.5) допускают почленное дифференцирование любого порядка.

2. Внутренние разложения

В окрестности поверхности Π для каждого фиксированного y перейдем к новой, внутренней, переменной $\zeta = (z - y^2)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ и будем строить внутреннее асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y, z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$V(x, \zeta, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{4}} v_k(x, \zeta, y). \tag{2.1}$$

Стандартным образом, а именно, переходя в исходном уравнении (0.1) к переменной ζ , разлагая коэффициенты $b(x, y, z) = b(x, y, y^2 + \sqrt{\varepsilon}\zeta)$, $a(x, y, z) = a(x, y, y^2 + \sqrt{\varepsilon}\zeta)$ и правую часть $f(x, y, z) = f(x, y, y^2 + \sqrt{\varepsilon}\zeta)$ в ряды Тейлора в окрестности цилиндрической поверхности Π , т. е., при $z = y^2$, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , приходим к системе рекуррентных соотношений

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 v_0 = f(x, y, y^2), \quad L_1 v_1 = 0, \\ L_1 v_2 = \frac{\zeta}{1!} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y^2) - \left[4y \frac{\partial^2 v_0}{\partial \zeta \partial y} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial \zeta} \right] - \frac{\zeta}{1!} \left[\frac{\partial b}{\partial z}(x, y, y^2) \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z}(x, y, y^2) v_0 \right], \\ L_1 v_3 = - \left[4y \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta \partial y} + 2 \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \right] - \frac{\zeta}{1!} \left[\frac{\partial b}{\partial z}(x, y, y^2) \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial z}(x, y, y^2) v_1 \right], \\ L_1 v_{2j} = \frac{\zeta^j}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial z^j}(x, y, y^2) - \left[4y \frac{\partial^2 v_{2j-2}}{\partial \zeta \partial y} + 2 \frac{\partial v_{2j-2}}{\partial \zeta} \right] - \frac{\partial^2 v_{2j-4}}{\partial y^2} \\ \quad - \sum_{i=1}^j \frac{\zeta^i}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial z^i}(x, y, y^2) \frac{\partial v_{2j-2i}}{\partial x} + \frac{\partial^i a}{\partial z^i}(x, y, y^2) v_{2j-2i} \right], \\ L_1 v_{2j+1} = - \left[4y \frac{\partial^2 v_{2j-1}}{\partial \zeta \partial y} + 2 \frac{\partial v_{2j-1}}{\partial \zeta} \right] - \frac{\partial^2 v_{2j-3}}{\partial y^2} \\ \quad - \sum_{i=1}^j \frac{\zeta^i}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial z^i}(x, y, y^2) \frac{\partial v_{2j+1-2i}}{\partial x} + \frac{\partial^i a}{\partial z^i}(x, y, y^2) v_{2j+1-2i} \right]. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Здесь обозначено

$$L_1 = (1 + y^2) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x, y, y^2) \frac{\partial}{\partial x} + a(x, y, y^2),$$

т. е. при каждом фиксированном y оператор L_1 — это эллиптический оператор по переменным ζ, x .

Уравнение границы $z = x^2 + y^2$ параболоида P при фиксированном y приобретает вид $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \zeta = x^2$ или, что то же самое,

$$x = \pm \varepsilon^{\frac{1}{4}} \sqrt{\zeta}, \quad \zeta > 0, \quad (2.3)$$

т. е. при фиксированном y граница области P превращается в параболу (2.3) на плоскости (x, ζ) , которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к разрезу $x = \pm 0$, $\zeta > 0$ на этой плоскости.

Уравнения границ $x = \gamma^\pm(z, y)$ принимают вид

$$x = \gamma^\pm(y, z) = \gamma^\pm(y, y^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \zeta) = \gamma^\pm(y, y^2) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^\pm(y) \varepsilon^{\frac{j}{2}} \zeta^j,$$

где $\gamma_j^\pm(y)$ — бесконечно дифференцируемые функции, определяемые значениями функций $\gamma^\pm(y, z)$ и их производных по переменной z на цилиндрической поверхности Π , т. е. при $z = y^2$.

Таким образом, для фиксированного y при $\varepsilon \rightarrow 0$ область, в которой рассматриваются уравнения (2.2), переходит в бесконечную полосу с разрезом вдоль положительной полуоси

$$\Omega(y) = \left(x, \zeta: \gamma^-(y, y^2) < x < \gamma^+(y, y^2), \quad 0 < \theta < 2\pi \right), \quad (2.4)$$

где θ — полярный угол на плоскости (x, ζ) .

Для того чтобы выписать граничные условия для коэффициентов $v_k(x, \zeta, y)$, потребуем, чтобы асимптотический ряд (2.1) формально удовлетворял граничному условию исходной задачи на ветвях параболы (2.3), т. е. при $x = \varepsilon^{\frac{1}{4}} \sqrt{\zeta}$, и $x = -\varepsilon^{\frac{1}{4}} \sqrt{\zeta}$. Получим

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{4}} v_k(\pm \varepsilon^{\frac{1}{4}} \sqrt{\zeta}, \zeta, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{4}} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \varepsilon^{\frac{i}{4}} \frac{\partial^i v_k}{\partial x^i}(\pm 0, \zeta, y) \varepsilon^{\frac{i}{4}} (\pm \sqrt{\zeta})^i \right].$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при степенях ε , получаем на верхней стороне разреза

$$\begin{cases} v_0(+0, \zeta, y) = 0, & v_1(+0, \zeta, y) = -\frac{\partial v_0}{\partial x}(+0, \zeta, y)\sqrt{\zeta}, \\ v_2(+0, \zeta, y) = -\frac{\partial v_1}{\partial x}(+0, \zeta, y)\sqrt{\zeta} - \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}(+0, \zeta, y)\zeta, \dots, \\ v_k(+0, \zeta, y) = -\sum_{l=1}^k \frac{1}{l!}\frac{\partial^l v_{k-l}}{\partial x^l}(+0, \zeta, y)\zeta^{\frac{l}{2}}; \end{cases} \quad (2.5)$$

на нижней стороне разреза

$$\begin{cases} v_0(-0, \zeta, y) = 0, & v_1(-0, \zeta, y) = \frac{\partial v_0}{\partial x}(-0, \zeta, y)\sqrt{\zeta}, \\ v_2(-0, \zeta, y) = -\frac{\partial v_1}{\partial y}(-0, \zeta, y)(-\sqrt{\zeta}) - \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}(-0, \zeta, y)\zeta, \dots, \\ v_k(-0, \zeta, y) = -\sum_{l=1}^k \frac{1}{l!}\frac{\partial^l v_{k-l}}{\partial x^l}(-0, \zeta, y)(-1)^l \zeta^{\frac{l}{2}}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Далее, потребовав, чтобы асимптотический ряд (2.1) формально удовлетворял следующему граничному условию исходной задачи на границах $x = \gamma^\pm(y, z)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{4}} v_k(\gamma^\pm(y, z), \zeta, y) = v_k(\gamma^\pm(y, y^2)) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^\pm(y) \varepsilon^{\frac{j}{2}} \zeta^j \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m v_k}{\partial x^m}(\gamma^\pm(y, y^2)) \left[\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{i}{2}} \zeta^{\frac{i}{2}} \gamma_i^\pm \right]^m(y), \end{aligned}$$

получим граничные условия для коэффициентов $v_k(x, \zeta, y)$ на прямых $x = \gamma^\pm(y, y^2)$:

$$\begin{cases} v_0(\gamma^\pm(y, y^2), \zeta, y) = 0, & v_1(\gamma^\pm(y, y^2), \zeta, y) = 0, \\ v_3(\gamma^\pm(y, y^2), \zeta, y) = -\zeta \gamma_1^\pm(y) \frac{\partial v_1}{\partial x}(\gamma^\pm(y), \zeta, y), \dots, \\ v_k(\gamma^\pm(y, y^2), \zeta, y) = S_k^\pm(\zeta, y), \end{cases} \quad (2.7)$$

где граничная функция $S_k^\pm(\zeta, y)$ имеет вид

$$S_k^\pm(\zeta, y) = \sum_{j,l,s} \beta_{ljs} \frac{\partial^l v_{k-2j}}{\partial x^l}(\gamma^\pm(y), \zeta, y) \zeta^s, \quad j \leq \left[\frac{k}{2} \right], \quad l + s \leq k - 2.$$

Итак, в полосе $\Omega(y)$ (см. (2.4)) необходимо построить функции $v_k(x, \zeta, y)$, которые при каждом фиксированном y являются решениями эллиптических уравнений (2.2) с бесконечно дифференцируемыми по параметру y коэффициентами и правыми частями и на границе этой полосы удовлетворяют условиям (2.5)–(2.7).

Так же, как и в двумерном случае [7, § 2], из-за негладкости границы области $\Omega(y)$ (наличие разреза $x = \pm 0$) функции $v_k(x, \zeta, y)$ начиная с некоторого k будут иметь особенности в вершине разреза $x = \zeta = 0$ при каждом фиксированном y , т.е. на параболы $z = y^2, x = 0$, и порядок этих особенностей будет нарастать с ростом номера k . Поэтому асимптотическое разложение становится непригодным в окрестности этой параболы, и там необходимо строить другое асимптотическое разложение, внутреннее по отношению к разложению (2.1). Кроме того, так же, как в аналогичных задачах (см. [4; 5; 7]) в классе неограниченных функций решения задач (2.2), (2.5)–(2.7) определяются неединственным образом, и поэтому асимптотическое разложение (2.1) может быть построено только после исследования асимптотического поведения решения $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестности параболы $z = y^2, x = 0$.

В окрестности параболы $z = y^2$, $x = 0$, в точках которой прямые, параллельные оси x (вдоль которых интегрируются уравнения для внешнего разложения (1.1)), касаются поверхности параболоида P , для каждого фиксированного y перейдем к новым внутренним переменным $\eta = x/\varepsilon^{1/2}$, $\xi = (z - y^2)/\varepsilon$ и будем строить еще одно, внутреннее, асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$W(\eta, \xi, y, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{\frac{k}{4}} w_k(\eta, \xi, y). \quad (2.8)$$

Для того чтобы получить рекуррентные соотношения для определения коэффициентов $w_k(\xi, \eta, y)$, перепишем коэффициенты $b(x, y, z)$, $a(x, y, z)$ и правую часть $f(x, y, z)$ исходного уравнения (0.1) в виде $b(\varepsilon^{1/2}\eta, y, y^2 + \varepsilon\xi)$, $a(\varepsilon^{1/2}\eta, y, y^2 + \varepsilon\xi)$, $f(\varepsilon^{1/2}\eta, y, y^2 + \varepsilon\xi)$, разложим их в ряды Тейлора в окрестности точки $(0, y, y^2)$ и перейдем в получившихся разложениях к внутренним переменным η, ξ :

$$\begin{aligned} b(x, y, z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{2}} g_j^{(1)}(\eta, \xi; y), \\ a(x, y, z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{2}} g_j^{(2)}(\eta, \xi; y), \\ f(x, y, z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{\frac{j}{2}} g_j^{(3)}(\eta, \xi; y). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Нетрудно проверить, что $g_j^{(p)}(\eta, \xi; y)$ — это полином степени j вида

$$g_j^{(p)}(\eta, \xi; y) = \sum_l \alpha_{jl}^{(p)}(y) \eta^{j-2l} \xi^l, \quad 0 \leq l \leq \left[\frac{j}{2} \right],$$

коэффициенты которого являются бесконечно дифференцируемыми функциями параметра y .

Стандартным образом, т. е. переходя в исходном уравнении (0.1) к внутренним переменным η, ξ , заменяя коэффициенты $b(x, y, z)$, $a(x, y, z)$ и правую часть $f(x, y, z)$ разложениями (2.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим, что коэффициенты $w_k(\eta, \xi, y)$ внутреннего разложения (2.8) должны удовлетворять при каждом фиксированном y системе рекуррентных соотношений

$$\left\{ \begin{aligned} &L_2 w_1 = 0, \quad L_2 w_2 = 0, \\ &L_2 w_3 = -b(0, y, y^2) \frac{\partial w_1}{\partial \eta}, \quad L_2 w_4 = f(0, y, y^2) - b(0, y, y^2) \frac{\partial w_2}{\partial \eta}, \\ &L_2 w_5 = -b(0, y, y^2) \frac{\partial w_3}{\partial \eta} - \frac{\partial b}{\partial x}(0, y, y^2) \eta \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - a(0, y, y^2) w_1 + 2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi}, \\ &L_2 w_6 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, y, y^2) \eta - b(0, y, y^2) \frac{\partial w_4}{\partial \eta} - \frac{\partial b}{\partial x}(0, y, y^2) \eta \frac{\partial w_2}{\partial \eta} - a(0, y, y^2) w_2 + 2 \frac{\partial w_2}{\partial \xi}, \\ &L_2 w_{2m+1} = - \sum_{j=0}^{m-1} g_j^{(1)}(\xi, \eta, y) \frac{\partial w_{2m-1-2j}}{\partial \eta} - \sum_{j=0}^{m-2} g_j^{(2)}(\xi, \eta, y) w_{2m-3-2j} \\ &\quad + 2 \frac{\partial w_{2m-3}}{\partial \xi} + 4y \frac{\partial^2 w_{2m-5}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 w_{2m-7}}{\partial y^2}, \\ &L_2 w_{2m} = g_{m-2}^{(3)}(\eta, \xi; y) - \sum_{j=0}^{m-2} g_j^{(1)}(\xi, \eta, y) \frac{\partial w_{2m-2-2j}}{\partial \eta} - \sum_{j=0}^{m-3} g_j^{(2)}(\xi, \eta, y) w_{2m-4-2j} \\ &\quad + 2 \frac{\partial w_{2m-4}}{\partial \xi} + 4y \frac{\partial^2 w_{2m-6}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 w_{2m-8}}{\partial y^2}. \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

Здесь обозначено

$$L_2 = (1 + y^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Соотношения (2.10) — это эллиптические уравнения по переменным η , ξ , в которых переменная y играет роль параметра. При каждом фиксированном y граница параболоида переходит в параболу $\xi = \eta^2$, и, таким образом, уравнения (2.10) рассматриваются в неограниченной области $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus (\eta, \xi: \xi > 0, \eta^2 < \xi)$ — внешности области, расположенной в полуплоскости $\xi > 0$ и ограниченной параболой $\xi = \eta^2$.

Потребовав, чтобы асимптотический ряд (2.8) удовлетворял краевым условиям исходной задачи, получим краевые условия для функций $w_k(\eta, \xi, y)$:

$$w_k(\eta, \eta^2, y) = 0, \quad k \geq 0. \quad (2.11)$$

Соотношениями (2.10), (2.11) функции $w_k(\eta, \xi, y)$ — решения задач в неограниченной области Ω_1 вообще говоря, не определяются однозначно. Необходимо задать еще некоторые дополнительные условия для этих функций при $\eta^2 + \xi^2 \rightarrow \infty$. Эти условия должны быть получены из условий согласования асимптотических разложений (2.1) и (2.8).

Построение и согласование двух внутренних разложений проводится одновременно. В двумерном случае этот процесс детально рассмотрен в работе [7, § 4–§ 6], и он довольно громоздок. В то же время построение внутренних разложений в данной задаче мало отличается от построения в двумерном случае, поскольку переменная y играет роль параметра и решаемые задачи, по существу, двумерны. Поэтому ограничимся кратким изложением результата.

Но прежде введем некоторые вспомогательные понятия. Пусть s, t — декартовы координаты, а λ, ν — полярный радиус и полярный угол на плоскости (s, t) . Для целых k будем рассматривать функции

$$U_k^{(1)}(s, t) = \lambda^{\frac{k}{2}} \sin \frac{k\nu}{2}, \quad U_k^{(2)}(s, t) = \lambda^{\frac{k}{2}} \cos \frac{k\nu}{2}. \quad (2.12)$$

Функции $U_k^{(j)}(s, t)$ — сопряженные гармонические функции в плоскости (s, t) с разрезом вдоль положительной полуоси s : $\Delta_{st} U_k^{(j)} = 0$.

Из явных формул (2.12) легко получаются соотношения

$$\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial s} = \frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial t} = \frac{k}{2} U_{k-2}^{(2)}, \quad -\frac{\partial U_k^{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial s} = \frac{k}{2} U_{k-2}^{(1)}, \quad (2.13)$$

а также соотношения

$$\begin{aligned} sU_k^{(1)} &= \frac{1}{2}U_{k+2}^{(1)} + \frac{1}{2}\lambda^2 U_{k-2}^{(1)}, & sU_k^{(2)} &= \frac{1}{2}U_{k+2}^{(2)} + \frac{1}{2}\lambda^2 U_{k-2}^{(2)}, \\ tU_k^{(1)} &= \frac{1}{2}U_{k+2}^{(2)} + \frac{1}{2}\lambda^2 U_{k-2}^{(2)}, & tU_k^{(2)} &= \frac{1}{2}U_{k+2}^{(1)} - \frac{1}{2}\lambda^2 U_{k-2}^{(1)}, \end{aligned}$$

которые в общем виде могут записаны следующим образом:

$$s^m t^p U_k^{(j)} = \sum_{q=0}^{m+p} \alpha_q^{(m,p)} U_{k+2m+2p-4q}^{(l)} \lambda^{2q}, \quad (2.14)$$

где $l = j$ при четном p , $l \neq j$ при нечетном p . При этом в случае, когда $U_k^{(j)}$ — гармонический полином, т.е. когда $k = 2n$, $n \geq 0$, те из коэффициентов $\alpha_q^{(m,p)}$ в выписанном соотношении, для которых $k + 2m + 2p - 4q < 0$, следует считать равными нулю.

Пусть τ — некоторый параметр. Будем говорить, что функция $v(s, t; \tau)$ вида $v(s, t; \tau) = \beta(\tau) \lambda^\alpha \Phi(\nu)$, где $\beta(\tau)$ — некоторая функция параметра τ , имеет порядок α .

Множество линейных комбинаций функций вида $v(s, t; \tau) = s^m t^p U_k^{(j)}$, где m, p — целые неотрицательные, а коэффициенты линейных комбинаций являются бесконечно дифференцируемыми функциями параметра τ , будем обозначать через $\mathcal{W}(s, t; \tau)$. Подмножество множества $\mathcal{W}(s, t; \tau)$, все элементы которого имеют фиксированный порядок $q/2$, будем обозначать через $\mathcal{W}_q(s, t; \tau)$.

Из соотношения (2.14) следует, что функция $v(s, t; \tau)$, принадлежащая множеству $\mathcal{W}_q(s, t; \tau)$, имеет вид

$$v(s, t; \tau) = \sum_{m, k, j} \beta_{m, k, j}(\tau) \lambda^{2m} U_k^{(j)}(s, t),$$

где $m \geq 0, 1 \leq j \leq 2, k + 4m = q$.

Далее из соотношений (2.13), (2.14) следует, что если функция $v(s, t; \tau) \in \mathcal{W}_q(s, t; \tau)$, то

$$\frac{\partial v}{\partial s} \in \mathcal{W}_{q-2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathcal{W}_{q-2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \in \mathcal{W}_q, \quad s^m t^p v(s, t; \tau) \in \mathcal{W}_{q+2m+2p}.$$

Вернемся к функциям $v_j(x, y, \zeta), w_j(\eta, \xi, y)$. Справедлива

Теорема 3. *Для любого фиксированного y существуют функции $v_j(x, y, \zeta)$, являющиеся решениями задач (2.2), (2.5)–(2.7), и функции $w_j(\eta, \xi, y)$, являющиеся решениями задач (2.10), (2.11) такие, что для них справедливы асимптотические представления*

$$v_j(x, y, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^{(l)}(\zeta, x; y), \quad x^2 + \zeta^2 \rightarrow 0; \quad (2.15)$$

$$w_j(\xi, \eta, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_j^{(l)}(\xi, \eta; y), \quad \eta^2 + \xi^2 \rightarrow \infty; \quad (2.16)$$

где функция $\omega_j^{(l)}(s_1, s_2; y) \in \mathcal{W}_{j-l}\left(\frac{s_1}{\sqrt{1+y^2}}, s_2; y\right)$.

Функции $v_j(x, \zeta, y), w_j(\xi, \eta, y)$ определяются единственным образом. Представления (2.15), (2.16) допускают почленное дифференцирование.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству [7, теорема 6.1].

Итак, построены три асимптотических ряда: внешнее разложение (1.1), внутреннее разложение (2.1) и внутреннее разложение (2.8), каждый из которых является формальным асимптотическим решением исходной задачи (0.1), (0.2) в соответствующей подобласти рассматриваемой области D_δ : вне окрестности цилиндра $z = y^2$, в окрестности цилиндра $z = y^2$ вне окрестности его образующей — параболы $z = y^2, x = 0$ и в окрестности параболы $z = y^2, x = 0$. Построенные асимптотические ряды согласованы: для рядов (1.1), (2.1) это следует из соотношений (1.4), (1.5), для рядов (2.1), (2.8) это следует из соотношений (2.15), (2.16). Используя частичные суммы этих рядов

$$U_n(x, y, z, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x, y, z), \quad V_{4n}(x, y, \zeta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{4n} \varepsilon^{\frac{k}{4}} v_k(x, y, \zeta),$$

$$W_{4n}(\eta, \xi, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{4n} \varepsilon^{\frac{k}{4}} w_k(\eta, \xi, y),$$

где n — достаточно большое натуральное число, стандартным образом (см. [1; 2]) построим составное разложение, которое будет формальным асимптотическим решением задачи (0.1), (0.2) во всей области D_δ . Для этого рассмотрим функцию $\chi(t) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$ такую, что

$\chi(t) \equiv 1$ при $|t| \leq 1$, $\chi(t) \equiv 0$ при $|t| \geq 2$. Фиксируем некоторое ν такое, что $0 < \nu < 1/2$, и определим функцию $S_n(x_1, x_2, z, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} S^{(n)}(x, y, \varepsilon) = & W^{(4n)}(\eta, \xi, y, \varepsilon) \chi((z - y^2)\varepsilon^{-\nu}) \chi(-(z - y^2)\varepsilon^{-\nu}) \chi(x\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}) \chi(-x\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}) \\ & + V^{(4n)}(x, y, \zeta, y, \varepsilon) \chi((z - y^2)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}) \chi(-(z - y^2)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}) \\ & \times [1 - \chi((z - y^2)\varepsilon^{-\nu}) \chi(-(z - y^2)\varepsilon^{-\nu}) \chi(x\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}) \chi(-x\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}})] \\ & + U^{(n)}(x, y, \varepsilon) [1 - \chi((z - y^2)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}) \chi(-(z - y^2)\varepsilon^{-\frac{\nu}{2}})]. \end{aligned}$$

Теорема 4. Для всех точек области D_δ

$$|u_\varepsilon(x, y, z) - S^{(n)}(x, y, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{n\lambda},$$

где постоянная M не зависит от ε , а λ зависит лишь от ν .

Доказательство теорем такого вида подробно описано в монографии [5, гл. 4, § 5] и здесь не приводится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
2. Треногин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника — Вишика // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 4(154). С. 123–156.
3. Найфэ А. Метод возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 1. С. 107–119.
7. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных // Тр. Моск. мат. об-ва. 2009. Т. 16. С. 187–232.
8. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром // Докл. РАН. 2009. Т. 429, № 4. Р. 447–450.

Леликова Елена Федоровна
д-р физ.-мат. наук, профессор
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: lef@imm.uran.ru

Поступила 17.10.2011

УДК 517.923, 517.928

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ И ОСОБЕННОСТИ МНОГООБРАЗИЯ ДАННЫХ МОНОДРОМИИ¹

В. Ю. Новокшенов

Посвящается 80-летию юбилею моего учителя Арлена Михайловича Ильина

Рассмотрена классификация решений первого и второго уравнений Пенлеве, отвечающих специальному распределению полюсов на бесконечности. Прослежена связь между этим распределением и особенностями двумерного комплексного многообразия данных монодромии, с помощью которого параметризуются решения. Оказывается, что решения уравнений Пенлеве не имеют полюсов в том или ином критическом секторе комплексной плоскости тогда и только тогда, когда их данные монодромии лежат на подмногообразии особенностей. Такие решения относятся к так называемому классу “усеченных” решений (intégrales tronquée) по классификации П. Бутру. Показано, что все известные специальные решения первого и второго уравнений Пенлеве принадлежат этому классу.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, изомонодромные деформации, распределение полюсов, специальные решения, аппроксимации Паде.

V. Yu. Novokshenov. Special solutions of the first and second Painlevé equations and singularities of the monodromy data manifold.

A classification of solutions of the first and second Painlevé equations corresponding to a special distribution of poles at infinity is considered. The relation between this distribution and singularities of the two-dimensional complex monodromy data manifold used for the parameterization of the solutions is analyzed. It turns out that solutions of the Painlevé equations have no poles in a certain critical sector of the complex plane if and only if their monodromy data lie in the singularity submanifold. Such solutions belong to the so-called class of “truncated” solutions (intégrales tronquée) according to P. Boutroux’s classification. It is shown that all known special solutions of the first and second Painlevé equations belong to this class.

Keywords: Painlevé equations, isomonodromic deformations, distribution of poles, special solutions, Padé approximations.

Введение

Все решения уравнений Пенлеве являются мероморфными функциями в комплексной плоскости (или на подходящем ее накрытии). Начиная с работы П. Пенлеве, в которой доказана мероморфность всех решений уравнения Пенлеве первого типа (PI),

$$u'' = 6u^2 - z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (0.1)$$

задача о распределении полюсов стала одной из основных в аналитической теории нелинейных ОДУ. В дальнейшем в работах В. Громака [1] аналогичный результат был доказан для уравнения Пенлеве второго типа (PII)

$$u'' = zu + 2u^3, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (0.2)$$

Исследование асимптотического распределения полюсов при $z \rightarrow \infty$ общих решений уравнений (0.1) и (0.2) (трансцендентов Пенлеве первого и второго типов) было начато около ста лет назад в работах П. Бутру [2]. В этих работах им было установлено следующее:

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00088) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России 2009-2013” (контракт 02.740.11.0612).

1. Все полюсы лежат на гладких кривых (линиях полюсов), которые на бесконечности стремятся к одному из критических лучей Γ_n

$$\Gamma_n = \left\{ z \mid \arg z = \frac{2\pi i}{5}n, \quad n = 1, 2, \dots, 5 \right\} \quad \text{для уравнения PI,}$$

$$\Gamma_n = \left\{ z \mid \arg z = \frac{2\pi i}{6}n, \quad n = 1, 2, \dots, 6 \right\} \quad \text{для уравнения PII.}$$

2. Существуют 1-усеченные решения (intégrales tronquée), которые не имеют линий полюсов на бесконечности вблизи одного из критических лучей Γ_n .

3. Существуют 3-усеченные решения (intégrales tritronquée), которые не имеют линий полюсов на бесконечности вблизи трех последовательных критических лучей $\Gamma_{n-1}, \Gamma_n, \Gamma_{n+1}$.

4. На луче, свободном от полюсов, усеченные решения имеют асимптотику

$$u(z) = \epsilon \sqrt{\frac{z}{6}} + o(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad \epsilon = -1, 0, 1 \quad \text{для уравнения PI,}$$

$$u(z) = \epsilon \sqrt{\frac{z}{2}} + o(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty, \quad \epsilon = -1, 0, 1 \quad \text{для уравнения PII.}$$

В наши дни удалось глубже продвинуться в изучении структуры мероморфных решений в комплексной плоскости. С одной стороны, применение метода изомонодромных деформаций [3] позволило дать эффективное описание асимптотического распределения полюсов трансцендентов Пенлеве PI и PII при $z \rightarrow \infty$. С другой стороны, в конечной области комплексной плоскости удалось посмотреть на поведение полюсов с помощью численных методов. Один из таких методов, описанный в работе [4], оказался достаточно удачным также для понимания асимптотики распределения полюсов. Дадим здесь краткое описание этого метода, поскольку он послужил основанием для формулировки приведенных ниже утверждений и был использован для графических иллюстраций в данной статье.

Этот метод восходит к естественной идее приблизить мероморфное решение с помощью Паде-аппроксимации с полиномами P_n, Q_n

$$u(z) \approx \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}, \quad P_n(z) - u(z)Q_n(z) = O(z^{2n+1}), \quad z \rightarrow \infty,$$

что позволяет найти приближенное решение уравнений PI и PII с заданными начальными условиями $u(0), u'(0)$. Здесь удается избежать традиционного тейлоровского разложения решения в нуле, применяя рекуррентную преобразования Беклунда. Оказывается, что для уравнений Пенлеве эти преобразования, переводящие решение в решение, действуют в точности согласно правилу построения непрерывной дроби. Эта идея реализована с помощью комплексной версии алгоритма Фэйра — Люка [5], применяемого для ОДУ второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Программа на языке пакета Mathematica работает достаточно быстро на обычном персональном компьютере, позволяя вычислить приближение порядка $n = 1000$ за несколько минут. Приближение столь высокого порядка позволяет судить о поведении решения при умеренно больших z , в областях $|z| \approx 15$. В работе [4] было проверено, что при таких z начинают работать асимптотические формулы изомонодромного метода [3], описывающие решение на бесконечности. В частности, визуализация полюсов позволила наблюдать линии полюсов П. Бутру (см. свойство 1 выше, рис. 1 и рис. 2) и их пределы при больших z . Кроме того, удалось выяснить поведение в комплексной плоскости известных решений уравнений PI и PII, применяемых в приложениях, и подтвердить гипотезу о том, что они относятся к классу усеченных решений.

Установленные таким образом экспериментальные факты дают направление аналитического описания усеченных решений. Это описание основано на современном способе интегрирования уравнений Пенлеве — методе изомонодромных деформаций. Он дает параметризацию

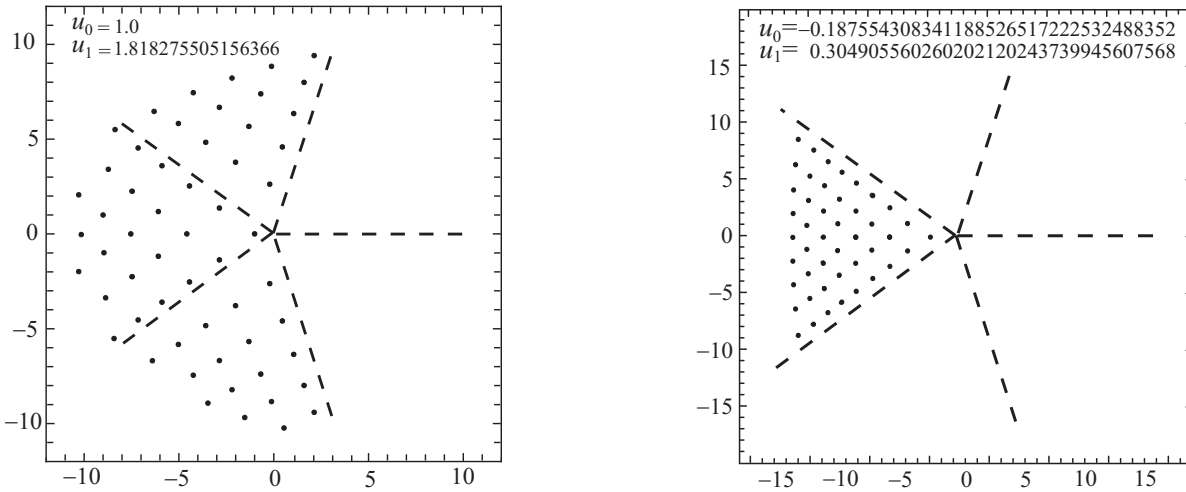


Рис. 1. Полосы 1-усеченного решения (слева) и 3-усеченного решения (справа) уравнения РI. Начальные условия при $z = 0$ показаны сверху; пунктиром изображены критические лучи Γ_n .

общих решений координатами некоторых двумерных комплексных многообразий [3, гл. 5]. Каждая точка на этом многообразии задает два интеграла движения и однозначно определяет решение уравнения Пенлеве. Такие многообразия интегралов движения являются алгебраическими и задаются простыми полиномиальными уравнениями (см. разд. 2). Возникает естественный вопрос об описании усеченных решений Бутру в терминах подмногообразий алгебраических многообразий. В частности, какова размерность подмногообразия 1-усеченных и 3-усеченных решений? Как происходит процесс вырождения общего решения в усеченное аналитически, например, с точки зрения распределения полюсов?

В данной работе сделана попытка дать ответы на указанные вопросы. В частности, дается определение подмногообразия особенностей данных монодромии и доказывается теорема о взаимно однозначном соответствии координат этого подмногообразия и множества усеченных решений (см. разд. 2). При этом множество 1-усеченных решений имеет комплексную размерность единица, а 2- и 3-усеченные решения отвечают дальнейшему вырождению подмногообразия особенностей. В разд. 3 в качестве иллюстрации обсуждаются распределения полюсов известных решений, таких как 3-усеченного решения Бутру (РI), решения Абловица — Сегура (РII), и их комплексных аналогов. Численные результаты позволяют сформулировать гипотезу о локализации полюсов решения Хастингса — МакЛеода, аналогичную гипотезе Б.А. Дубровина о полюсах 3-усеченного решения Бутру.

1. Параметризация полюсов в общем случае

1.1. Изомонодромный метод

Для параметризации всех решений уравнений Пенлеве применяется метод изомонодромных деформаций, изложенный в [3, гл. 5]. Приведем здесь кратко основные формулы метода для уравнений РI и РII, а также выведем новые формулы для асимптотики распределения полюсов в комплексной плоскости на бесконечности. Отметим, что впервые этот подход был применен в [6, гл. 10], где получена асимптотика полюсов при $|z| \rightarrow \infty$ на вещественной оси в терминах данных монодромии. В дальнейшем в статьях [7] и [8] распределение полюсов было найдено в секторах Ω_n в комплексной плоскости.

Уравнение РII. Для уравнения РII процедура интегрирования основана на линейном матричном уравнении Флашки — Ньюэлла [9]

$$\Psi_\lambda = - [i(4\lambda^2 + z + 2u^2)\sigma_3 + 4\lambda u\sigma_2 + 2u_z\sigma_1] \Psi, \quad (1.1)$$

где σ_1, σ_2 и σ_3 — матрицы Паули. Рассматриваются шесть канонических решений Ψ_k , $k = 1, 2, \dots, 6$ уравнения (1.1) с нормировкой

$$\Psi_k(\lambda, z) = \exp \left\{ -i \frac{4}{3} \lambda^3 - iz\lambda \right\} (I + O(\lambda^{-1})), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Sigma_k,$$

в секторах комплексной плоскости λ

$$\Sigma_k = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{3}k < \arg \lambda < \frac{\pi}{3}(k+1) \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Данные монодромии определяются как компоненты матриц Стокса

$$\Psi_{k+1}(\lambda, z) = \Psi_k(\lambda, z) S_k, \quad \lambda \in \Sigma_k \cap \Sigma_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (1.2)$$

где S_k являются треугольными

$$S_{2j} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{2j-1} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2j-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3,$$

и $S_{k+3} = (S_k^T)^{-1}$ ввиду автоморфизма $\lambda \mapsto -\lambda$ в уравнении (1.1).

Данные монодромии s_n не зависят от z если и только если $u = u(z)$ в системе (1.1) является решением уравнения РИ. Циклическое соотношение $S_1 S_2 \dots S_6 = I$ вместе с автоморфизмом $s_{k+3} = -s_k$ влечет $s_1 - s_2 + s_3 + s_1 s_2 s_3 = 0$. Последнее определяет двумерное комплексное многообразие

$$\mathcal{P}_2 = \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C} \mid s_1 - s_2 + s_3 + s_1 s_2 s_3 = 0\}, \quad (1.3)$$

параметризующее все решения уравнение РИ.

Уравнение РИ. Уравнение (0.1) интегрируется с помощью линейного матричного уравнения на функцию $\Psi = \Psi(\lambda, z)$ [3, гл. 5]

$$\Psi_\lambda = \begin{pmatrix} u_z & 2\lambda^2 + 2u\lambda - z + 2u^2 \\ 2(\lambda - u) & -u_z \end{pmatrix} \Psi. \quad (1.4)$$

Канонические решения $\Psi_k(\lambda, z)$ уравнения (1.4) определяются асимптотикой

$$\begin{aligned} \Psi_k(\lambda, z) &\sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda^{1/4} & \lambda^{1/4} \\ \lambda^{-1/4} & -\lambda^{-1/4} \end{pmatrix} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -H \end{pmatrix} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} H^2 & u \\ u & H^2 \end{pmatrix} + O(\lambda^{-3/2}) \right] e^{\theta(\lambda, z)\sigma_3}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Sigma_k, \end{aligned}$$

в секторах

$$\Sigma_k = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \frac{2\pi}{5} \left(k - \frac{3}{2} \right) < \arg \lambda < \frac{2\pi}{5} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь

$$\theta(\lambda, z) = \frac{4}{5} \lambda^{5/2} - z \lambda^{1/2}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \frac{1}{2} u_z^2 - 2u^3 + zu,$$

а разрез λ -плоскости для дробных степеней λ выбирается вдоль отрицательной полуоси.

Матрицы Стокса S_k здесь определяются аналогично (1.2): $\Psi_{k+1}(\lambda, z) = \Psi_k(\lambda, z) S_k$, $\lambda \in \Sigma_k \cap \Sigma_{k+1}$. Они также имеют треугольную форму

$$S_{2k-1} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{2k} & 1 \end{pmatrix}$$

и удовлетворяют соотношениям

$$S_{k+5} = \sigma_1 S_k \sigma_1, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 = i \sigma_1. \quad (1.5)$$

Данные монодромии s_k не зависят от λ и z тогда и только тогда, когда $u(z)$ удовлетворяет уравнению PI (0.1). В силу соотношений (1.5) многообразие данных монодромии имеет вид [10]

$$\mathcal{P}_1 = \{(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) \in \mathbb{C} \mid s_{k+5} = s_k, s_{k+5} = i(1 + s_{k+2}s_{k+3}), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (1.6)$$

Иными словами, многообразие \mathcal{P}_1 , параметризующее решения уравнения PI, задано соотношениями

$$s_1 = \frac{i - s_3}{1 + s_2s_3}, \quad s_4 = \frac{i - s_2}{1 + s_2s_3}, \quad s_5 = i(1 + s_2s_3) \quad \text{при} \quad 1 + s_2s_3 \neq 0, \quad (1.7)$$

$$s_2 = s_3 = i, \quad s_5 = 0, \quad s_1 + s_4 = i \quad \text{при} \quad 1 + s_2s_3 = 0. \quad (1.8)$$

1.2. Распределения полюсов в общем случае

Применяя комплексный метод ВКБ [11] к линейным уравнениям (1.1) и (1.4), можно найти асимптотику решений PI и PII в секторах Ω_n , ограниченных критическими лучами Γ_n и Γ_{n+1} :

$$\Omega_n = \left\{ z \mid \frac{2\pi i}{5}n < \arg z < \frac{2\pi i}{5}(n+1), \quad n = 1, 2, \dots, 5 \right\} \quad \text{для уравнения PI,}$$

$$\Omega_n = \left\{ z \mid \frac{\pi i}{3}n < \arg z < \frac{\pi i}{3}(n+1), \quad n = 1, 2, \dots, 6 \right\} \quad \text{для уравнения PII.}$$

Эти результаты были ранее получены в работах [6–8; 10]. Из них следует асимптотическое распределение полюсов в случае общего положения, т.е. в случае несингулярной точки на многообразии данных монодромии.

Уравнение PII. В случае $1 - s_1s_3 \neq 0$ координаты на многообразии (1.3) можно выбрать в виде

$$\mathcal{P}_2 = \left((s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C} \mid s_2 = \frac{s_1 + s_3}{1 - s_1s_3} \right).$$

Здесь асимптотика решения уравнения PII в секторе Ω_6 имеет вид [7; 8]

$$u(z) = (\lambda_1 - \lambda_3)e^{\frac{2\pi i}{3}}\sqrt{|z|}\operatorname{sn}\left(\frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_3)\left[e^{\frac{2\pi i}{3} - \frac{i\varphi}{2}}z^{3/2} + \chi\right] \mid \varkappa\right), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (1.9)$$

где sn — синус Якоби,

$$\varphi = \arg z, \quad \varkappa = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}, \quad \chi = \frac{i}{2}\Omega_2\mu + i\Omega_1\nu + o(1), \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{3},$$

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \log\left(\frac{1 + s_3^2}{1 - s_1s_3}\right), \quad \nu = \frac{1}{2\pi i} \log\left(-\frac{s_1 + s_3}{1 - s_1s_3}\right), \quad (1.10)$$

$$\Omega_{1,2} = \int_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_3^2)}},$$

а контуры $1/2\mathcal{L}_2 = (-\lambda_1, \lambda_1)$, $\mathcal{L}_1 = (\lambda_3, \lambda_1)$ лежат на верхнем листе эллиптической римановой поверхности $w^2 = (\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_3^2)$ с точками ветвления, удовлетворяющими следующей задаче Бутру:

$$\lambda_1^2 + \lambda_3^2 = -\frac{1}{2}e^{i\varphi + 2\pi i/3},$$

$$\operatorname{Im} \int_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} \sqrt{(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_3^2)} d\lambda = 0, \quad (1.11)$$

$$\lambda_1 \rightarrow 0, \quad \lambda_3 \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}}e^{\pi i/3} \quad \text{при} \quad \varphi \rightarrow 0; \quad \lambda_{1,3} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \varphi \rightarrow \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, распределение полюсов $z_{m,n} = |z_{m,n}|e^{i\varphi}$ в секторе $0 < \varphi < \pi/3$ получается из формулы (1.9)

$$\frac{2}{3}(\lambda_1 + \lambda_3) \left[e^{\frac{2\pi i}{3} - \frac{i\varphi}{2}} z_{m,n}^{3/2} + \chi \right] = 2K n + 2iK' m, \quad n, m \in \mathbb{Z}^+,$$

где $2K(\mathcal{K})n + 2iK'(\mathcal{K})m$ представляет собой решетку полюсов синуса Якоби $\operatorname{sn}(z|\mathcal{K})$. Базисные полупериоды K и K' и фазовый сдвиг χ выражаются через эллиптические интегралы $\Omega_{1,2}$ в (1.10)

$$K(\mathcal{K}) = \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} \Omega_1, \quad K'(\mathcal{K}) = \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} \Omega_2, \quad \chi = \frac{i}{2} \Omega_2 \mu + i \Omega_1 \nu. \quad (1.12)$$

Окончательно асимптотика полюсов $z_{m,n} \rightarrow \infty$ имеет вид

$$z_{m,n} \sqrt{|z_{m,n}|} e^{2\pi i/3} = \left(\frac{3n}{2} - i\nu \right) \Omega_1 + \left(\frac{3mi}{2} - \frac{i\mu}{2} \right) \Omega_2 + o(1), \quad n, m \rightarrow \infty, \quad (1.13)$$

где постоянные μ и ν заданы формулой (1.10).

Уравнение РІ. Рассмотрим для определенности случай $s_5 s_2 \neq 0$ и $z \in \Omega_5$. Тогда окрестность точки $(s_1, s_2, \dots, s_5) \in \mathcal{P}_1$ (1.6) несингулярна. Согласно [10; 12] асимптотика решения РІ имеет вид

$$u(z) = \sqrt{|z|} \wp \left(\frac{4}{5} e^{i\varphi} |z|^{5/4} - \chi \mid g_2, g_3 \right), \quad (1.14)$$

где \wp — функция Вейерштрасса с инвариантами

$$g_2 = -2e^{i\varphi}, \quad g_3 = A(\varphi), \quad (1.15)$$

а фазовый сдвиг определяется как

$$\chi = \frac{1}{2\pi i} \left(\Omega_1 \ln i s_2 + \Omega_2 \ln \frac{s_5}{s_2} \right). \quad (1.16)$$

Здесь Ω_1 и Ω_2 — базисные периоды \wp -функции Вейерштрасса

$$\Omega_{1,2} = \int_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} \frac{d\lambda}{w(\lambda)}.$$

Они определены на эллиптической римановой поверхности $w^2 = \lambda^3 + 1/2 e^{i\varphi} \lambda + A(\varphi) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$, а контуры \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 выбраны в виде $1/2 \mathcal{L}_1 = (\lambda_1, \lambda_2)$, $1/2 \mathcal{L}_2 = (\lambda_3, \lambda_2)$ и лежат на верхнем листе.

Функция $A(\varphi)$, фигурирующая в (1.15) и определении римановой поверхности, задана как решение уравнений

$$\operatorname{Re} \int_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} w(\lambda) d\lambda = 0. \quad (1.17)$$

Уравнения (1.17) представляют собой задачу Бутру, аналогичную (1.11). Они однозначно определяют непрерывную 2π -периодическую функцию $A(\varphi)$ [10, с. 245], причем

$$A(0) = -\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, \quad A(-\varphi) = \bar{A}(\varphi), \quad A\left(\varphi - \frac{2\pi}{5}\right) = A(\varphi) e^{2\pi i/5}.$$

Из асимптотики (1.14) вытекает формула для распределения полюсов $4/5 e^{i\varphi} |z_{m,n}|^{5/4} - \chi = \Omega_1 n + \Omega_2 m$, $n, m \in \mathbb{Z}^+$, или с учетом (1.16)

$$\frac{4}{5} z_{m,n} |z_{m,n}|^{1/4} = \Omega_1 \left(\frac{\ln i s_2}{2\pi i} + n \right) + \Omega_2 \left(\frac{\ln s_2/s_5}{2\pi i} + m \right) + o(1),$$

$$n, m \rightarrow +\infty, \quad n, m \in \mathbb{Z}^+, \quad z_{m,n} \in \Omega_5. \quad (1.18)$$

З а м е ч а н и е 1. Асимптотические формулы (1.13) и (1.18) позволяют уточнить утверждение 1 П. Бутру, указанное во введении. Стремление линий полюсов на бесконечности к критическим лучам Γ_n нужно понимать в следующем смысле. Обозначим через Γ_n^ε лучи, близкие к лучам Γ_n :

$$\Gamma_n^\varepsilon = \left\{ z \mid \arg z = \frac{2\pi i}{5}n + \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots, 5 \right\} \quad \text{для уравнения PI,}$$

$$\Gamma_n^\varepsilon = \left\{ z \mid \arg z = \frac{2\pi i}{6}n + \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots, 6 \right\} \quad \text{для уравнения PII.}$$

Будем говорить, что линия полюсов стремится к лучу Γ_n в секторе Ω_n , если она пересекает луч Γ_n^ε при любом $\varepsilon > 0$.

2. Особенности многообразий \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2

Будем называть особенностями многообразия данных монодромии точки, в которых хотя бы одна координата s_j обращается в нуль или в бесконечность, т.е. подмногообразие особенностей $\tilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ определено как

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{ \mathbf{s} \in \mathcal{P} \mid \{s_j = 0\} \cup \{s_j = \infty\}, \quad \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_j, \dots) \}.$$

Нетрудно проверить, что для уравнения PII в силу (1.3) таким подмногообразием является

$$\tilde{\mathcal{P}}_2 = \{ \{s_1 s_2 = -1\} \cup \{s_1 s_3 = 1\} \cup \{s_2 s_3 = -1\} \cup \{s_j = 0\}, \quad j = 1, 2, 3 \}. \quad (2.1)$$

Аналогично для уравнения PI подмногообразие особенностей определяется соотношениями (1.7)

$$\tilde{\mathcal{P}}_1 = \{ \{s_2 = s_3 = i\} \cup \{s_5 = 0\} \cup \{s_1 + s_4 = i\} \cup \{1 + s_2 s_3 = 0\} \}. \quad (2.2)$$

Теорема. Усеченные решения уравнений PI и PII и только они отвечают подмногообразиям особенностей (2.2) и (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала *необходимость*. Не нарушая общности, можно рассмотреть усеченные решения, не имеющие полюсов в окрестности критического луча $\arg z = \varphi = 0$. В противном случае следует воспользоваться симметриями

$$u(z) \mapsto e^{-\frac{4\pi i}{5}} u\left(e^{\frac{2\pi i}{5}} z\right) \quad \text{для уравнения PI,}$$

$$u(z) \mapsto e^{-\frac{2\pi i}{3}} u\left(e^{\frac{2\pi i}{3}} z\right) \quad \text{для уравнения PII.} \quad (2.3)$$

Пусть, от противного, усеченное решение $u(z)$ уравнения PII отвечает координатам s_1, s_2, s_3 , принадлежащим неособому многообразию \mathcal{P}_2 , так что $1 - s_1 s_3 \neq 0$. Тогда в секторе $0 < \arg z < \pi/3$ имеет место асимптотика (1.9) с асимптотическим распределением полюсов (1.13). Рассмотрим эту асимптотику на луче Γ_6^ε , т.е. при $\arg z = \varepsilon \rightarrow 0$. В этом пределе в силу (1.11) и (1.12) имеем

$$\lambda_1 \rightarrow 0, \quad \lambda_3 \rightarrow \frac{i}{\sqrt{2}} e^{\pi i/3}, \quad \varkappa \rightarrow -1, \quad K \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad K' \rightarrow \ln \frac{4}{\varepsilon}.$$

Тогда, подставляя в асимптотику (1.13), получим

$$z_{m,n} \sqrt{|z_{m,n}|} = -(3m + \mu) \sqrt{2} \ln \frac{4}{\varepsilon} + \left(\frac{3ni}{2} + \nu \right) \pi \sqrt{2} + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Выбирая линию полюсов, заданную точками $z_{m,n}$ при $n = 1, m \rightarrow +\infty$, получаем $\arg z_{m,1} < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом m . Полученное противоречие доказывает необходимость условия теоремы для уравнения PII. Для уравнения PI необходимость доказывается аналогичным предельным переходом с использованием асимптотик (1.17), (1.18).

Достаточность следует из результатов работ [10; 13] и [8]. Сформулируем эти результаты в виде лемм с учетом принятых здесь обозначений.

Лемма 1 [10, теоремы 3,4 и следствие]. Решения уравнения РІ в случае $s_5 = 0$ имеют регулярную асимптотику в секторе $\Omega_4 \cup \Omega_5$:

$$u(z) = \sqrt{\frac{z}{6}} \left(1 + \frac{\theta(\varphi)s_4 - \theta(\varphi)s_2}{\sqrt{10\pi t}} e^{-2t} + O(|z|^{-2}) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad -\frac{2\pi}{5} < \arg z < \frac{2\pi}{5}, \quad (2.4)$$

где

$$t = \frac{8}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} z^{5/4}, \quad \theta(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi < 0, \\ \frac{1}{2}, & \varphi = 0, \\ 1, & \varphi > 0, \end{cases} \quad \varphi = \arg z. \quad (2.5)$$

Лемма 2 [8, теорема 5]. Решения уравнения РІІ в случае $s_2 = 0$ имеют следующую регулярную асимптотику в секторах $\Omega_5 \cup \Omega_6$:

$$u(z) = \frac{i[\theta(-\varphi)s_1 - \theta(\varphi)s_3]}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} (1 + O(|z|^{-3/2})), \quad z \rightarrow \infty, \quad -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3},$$

где $\varphi = \arg z$, а функция θ определена формулой (2.5).

Лемма 3 [8, теорема 6]. Решения уравнения РІІІ в случае $1 + s_2s_3 = 0$ имеют регулярную асимптотику в секторах Ω_3 и Ω_4 , задаваемую формулой (3.1).

Лемма 1 перечисляет все подмногообразия $\tilde{\mathcal{P}}_1$, утверждая существование 1-усеченного решения с отсутствием полюсов вдоль луча $\arg z = 0$. В леммах 2 и 3 указаны 1-усеченные решения для двух равенств, определяющих подмногообразия $\tilde{\mathcal{P}}_2$ (2.1). Остальные равенства (2.1) рассматриваются аналогично с использованием симметрий (2.3).

Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 2. Условия, определяющие 2- и 3-усеченные решения в многообразиях $\tilde{\mathcal{P}}_1$ и $\tilde{\mathcal{P}}_2$, отвечают дальнейшему вырождению этих многообразий. Оно задается двумя уравнениями, перечисленными в определении многообразий $\tilde{\mathcal{P}}_1$ и $\tilde{\mathcal{P}}_2$. Эти уравнения решаются простым перебором, который приводит к формулам для 3-усеченных решений:

$$\begin{aligned} s_{k+1} = s_{k+2} = s_{k+3} = i, \\ s_k = s_{k+4} = 0, \quad s_{k+5} = s_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{для уравнения РІ,} \\ s_1 = s_2 = s_3 = \pm i, \\ s_1 = s_2 = \pm i, \quad s_3 = \mp i, \quad \text{для уравнения РІІ} \end{aligned} \quad (2.6)$$

а также для 2-усеченных решений

$$\begin{aligned} s_1 = 0, \quad s_2 = s_3 = \pm i, \\ s_2 = 0, \quad s_1 = -s_3 = \pm i, \\ s_3 = 0, \quad s_1 = -s_2 = \pm i. \end{aligned} \quad \text{для уравнения РІІІ.}$$

При этом различные комбинации параметров возникают применением дискретных симметрий (2.3) к единственным 0-параметрическим решениям (см. разд. 3).

3. Примеры усеченных решений РІ и РІІ

3.1. 1-усеченные решения

1. Решение Абловица — Сегура [14] имеет следующие данные монодромии [3, гл. 9]:

$$s_1 = -s_3, \quad \text{Im } s_1 = 0, \quad s_2 = 0.$$

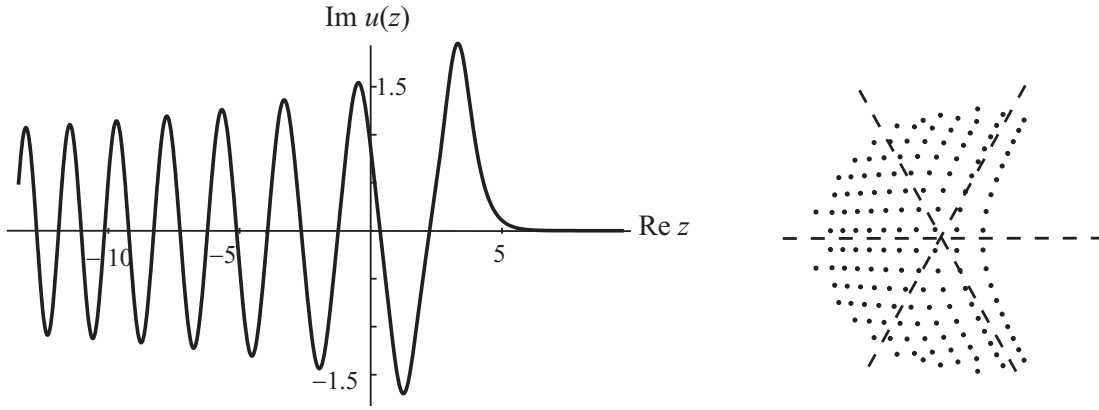


Рис. 2. Решение Абловица — Сегура (слева) и его распределение полюсов (справа) [4] при $s_1 = -s_3 = 1000$, $s_2 = 0$.

На вещественной оси имеют место асимптотики

$$u(z) = \frac{is_1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} (1 + O(|z|^{-3/2})), \quad z \rightarrow +\infty,$$

$$u(z) = \frac{i\alpha}{(-z)^{1/4}} \sin \left\{ \frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{3}{4}\alpha^2 \ln(-z) + \phi \right\} + o((-z)^{-1/4}), \quad z \rightarrow -\infty,$$

где для коэффициентов справедливы формулы связи

$$\alpha^2 = \frac{1}{\pi} \ln(1 + |s_1|^2), \quad \alpha > 0, \quad \phi = \frac{3}{2}\alpha^2 \ln 2 - \frac{\pi}{4} - \arg \Gamma \left(\frac{i\alpha^2}{2} \right) - \arg s_1.$$

2. Комплекснозначные 1-усеченные решения выделены следующим подмножеством $\tilde{\mathcal{P}}_2$:

$$s_1 = \pm i, \quad s_3 = \mp i, \quad s_2 \in \mathbb{C} \text{ — произвольно.}$$

На положительной полуоси эти решения имеют асимптотику [13]

$$u(z) = \sigma \sqrt{\frac{z}{2}} + \frac{\alpha}{z^{1/4}} \exp \left\{ i \frac{2\sqrt{2}}{2} z^{3/2} + i\gamma \ln \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right) \right\} \\ + \frac{\beta}{z^{1/4}} \exp \left\{ -i \frac{2\sqrt{2}}{2} z^{3/2} - i\gamma \ln \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right) \right\} + O(z^{-1+3|\operatorname{Im} \gamma|}), \quad z \rightarrow +\infty,$$

где

$$-\frac{\pi}{6} < \arg(is_2) < \frac{\pi}{6}, \quad \sigma = \pm \alpha\beta = \frac{\gamma}{6\sqrt{2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \ln(is_2), \quad |\operatorname{Im} \gamma| < \frac{1}{6},$$

$$\alpha = \frac{\sigma\pi 2^{1/4}}{(1 + is_2)\Gamma\left(\frac{i\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\gamma}{2}\right)} \exp \left(\frac{\pi\gamma}{2} + i\gamma \ln(6\sqrt{2}) - \frac{i\pi}{4} \right),$$

$$\beta = -\frac{\sigma\pi 2^{1/4}}{(1 - is_2)\Gamma\left(-\frac{i\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\gamma}{2}\right)} \exp \left(\frac{\pi\gamma}{2} - i\gamma \ln(6\sqrt{2}) + \frac{i\pi}{4} \right).$$

На левой полуоси асимптотика имеет вид [3, гл. 11, теорема 11.3]

$$u(z) = \sigma \sqrt{-\frac{z}{2}} - \frac{s_2 + i}{2^{7/4}\sqrt{\pi}} (-z)^{-1/4} e^{-\frac{2\sqrt{2}}{2}(-z)^{3/2}} (1 + o(|z|^{-1/4})), \quad z \rightarrow -\infty. \quad (3.1)$$

Вид этого решения и его распределение полюсов изображены на рис. 3.

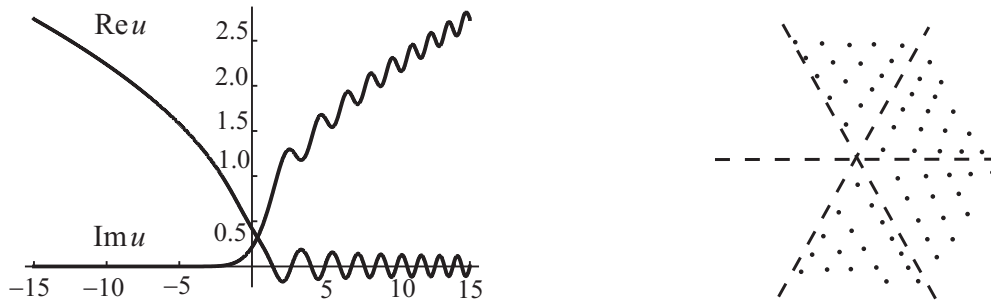


Рис. 3. Комплексное 1-усеченное решение (слева) и его распределение полюсов (справа) при $s_1 = -s_3 = i$ и $s_2 = 1 - 2i$.

3.2. 2-усеченное решение

Это специальное решение, называемое решением Хастингса — МакЛеода, отвечает дополнительному вырождению подмногообразия $\tilde{\mathcal{P}}_2$: $s_1 = \pm i$, $s_2 = 0$, $s_3 = \mp i$. При вещественных z его асимптотики имеют вид [3, гл. 10]

$$u(z) = \mp \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + O(z^{-3/4}), \quad z \rightarrow +\infty, \quad (3.2)$$

$$u(z) = \pm \sqrt{-\frac{z}{2}} \left(1 \mp \frac{1}{9z^3} + \frac{73}{128z^6} + O(|z|^{-9})\right), \quad z \rightarrow -\infty,$$

так что вблизи лучей Γ_3 и Γ_6 нет линий полюсов на бесконечности. Численные эксперименты показывают, что *все* полюсы этого решения лежат в критических секторах Ω_1 и Ω_4 (см. рис. 4). Поэтому имеет место предложение, аналогичное гипотезе Б. А. Дубровина [15] (см. ниже предложение 2).

Предложение 1. *Решение Хастингса — МакЛеода (3.2) уравнения РИ не имеет полюсов в секторах $|\arg z| < \pi/3$ и $2\pi/3 < \arg z < 4\pi/3$.*

Подобно гипотезе Дубровина для РI, это предложение пока не удастся доказать аналитически. Это и другие свойства решения Хастингса — МакЛеода заслуживают строгого обоснования ввиду большого числа приложений. Достаточно указать на теорию случайных матриц и перестановочную комбинаторику [16], где это решение фигурирует в предельных теоремах для представлений группы перестановок S_∞ и функциях распределения собственных значений гауссовского унитарного ансамбля $n \times n$ матриц при $n \rightarrow \infty$.

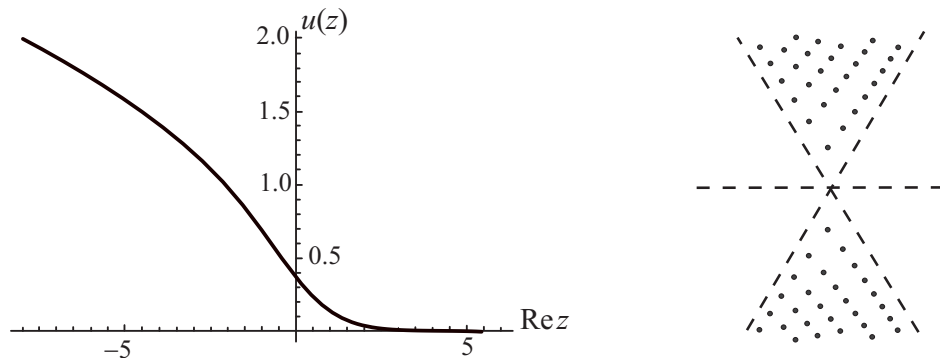


Рис. 4. 2-усеченное решение Хастингса — МакЛеода [17] (слева) и его распределение полюсов (справа) при $s_1 = i$, $s_2 = 0$, $s_3 = -i$.

3.3. 3-усеченные решения

Уравнение PI. Для уравнения PI эти решения отвечают изолированным точкам на $\tilde{\mathcal{P}}_1 \subset \mathcal{P}_1$, т. е. максимальному вырождению подмногообразия данных монодромии. По сути, это единственное решение (с точностью до дискретных симметрий (2.3)), заданное выбором $s_2 = s_3 = s_4 = i$, $s_1 = s_5 = 0$.

Его распределение полюсов изображено на рис. 1 справа. На отрицательной вещественной полуоси это решение сингулярно и имеет счетное множество полюсов. На положительной полуоси и в секторах $\Omega_4, \Omega_5, \Omega_1$ и Ω_2 оно имеет асимптотику

$$u(z) = -\sqrt{\frac{z}{6}} - \frac{1}{48z^2} - \frac{49}{768z^5}\sqrt{\frac{z}{6}} - \frac{1225}{9216z^7} - \frac{4412401}{1179648z^{10}}\sqrt{\frac{z}{6}} + O(z^{-12}), \quad z \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

аналогичную асимптотике (2.4), причем экспоненциальные члены отсутствуют, поскольку $s_2 = s_4$.

Отметим, что асимптотика (3.3) не гарантирует отсутствия полюсов в указанных четырех секторах. Линии полюсов вблизи лучей Γ_3 и Γ_4 могли бы пересечь их в конечной области и попасть в сектора Ω_2 или Ω_4 . Этот эффект наблюдается для решения Абловица — Сегура, что можно видеть на рис. 2 справа. Тем не менее численные эксперименты, проведенные в [4] и [15], показывают, что все полюсы расположены в секторе Ω_3 . Имеет место следующее

Предложение 2 (гипотеза Б. А. Дубровина [15]). *3-усеченное решение уравнения PI, заданное асимптотикой (3.3), не имеет полюсов в секторе $|\arg z| < 4\pi/5$.*

Основная трудность доказательства предложений 1 и 2 состоит в оценке решений обратных задач теории монодромии для уравнений (1.1) и (1.4). Эти задачи не допускают явных решений, а асимптотические приближения возможны лишь для удаленных полюсов $|z_{m,n}| \gg 1$. Эти оценки применены для доказательства лемм 1–3 в статьях [8; 10].

Уравнение PII. Здесь 3-усеченное решение также отвечает дополнительному вырождению подмногообразия $\tilde{\mathcal{P}}_2$, указанному в (2.6). Для случая $s_1 = s_2 = s_3 = \pm i$, на вещественной прямой это решение чисто мнимое и имеет асимптотики [3, теоремы 9.2 и 11.4]

$$u(z) = i\alpha z^{-1/4} \sin \left\{ \frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{3}{4}\alpha^2 \ln(-z) + \phi \right\} + O(z^{-3/4}), \quad z \rightarrow -\infty,$$

$$u(z) = \pm i\sqrt{\frac{z}{2}} \left(1 \mp \frac{1}{8z^3} + \frac{73}{128z^6} + O(|z|^{-9}) \right), \quad z \rightarrow +\infty, \quad (3.4)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}, \quad \phi = \frac{3}{2}\alpha^2 \ln 2 - \frac{\pi}{2} - \arg \Gamma\left(\frac{i\alpha^2}{2}\right) - \arg s_1.$$

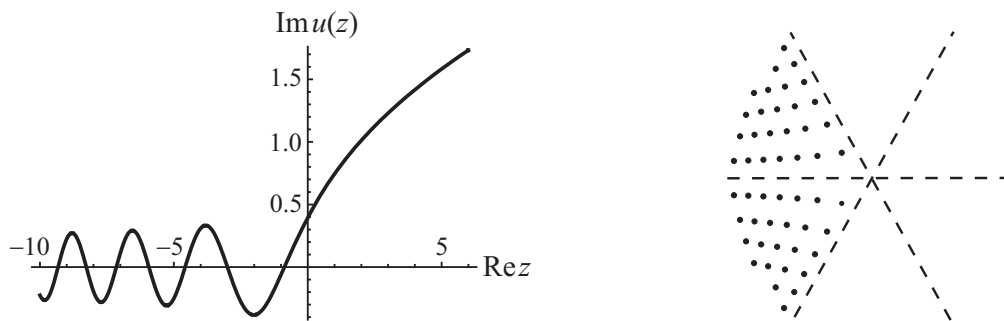


Рис. 5. Чисто мнимое 3-усеченное решение (слева) и его распределение полюсов (справа) при $s_1 = s_2 = s_3 = -i$.

Распределение полюсов, показанное на рис. 5, дает указание на справедливость утверждения, аналогичного предложениям 1 и 2.

Предложение 3. *3-усеченное решение уравнения РII, заданное асимптотикой (3.4), не имеет полюсов в секторе $|\arg z| < 2\pi/3$.*

Доказательство предложений 1–3 представляется важным и трудным вызовом в аналитической теории уравнений Пенлеве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Громак В.И., Лукашевич Н.А.** Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское, 1990. 155 с.
2. **Boutroux P.**, Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du seconde ordre // Ann. École Norm. 1913. Vol. 30. P. 265–375.; Ann.École Norm. 1914. Vol. 31. P. 99–159.
3. Painlevé Transcendents. The Riemann–Hilbert Approach / A.S. Fokas, A.R. Its, A.A. Караев, V.Yu. Novokshenov. Math. Surveys and Monographs. Vol. 128. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. 560 p.
4. **Novokshenov V.Yu.** Padé approximations of Painlevé I and II transcendents // Theor. Math. Phys. 2009. Vol. 159, № 3. P. 852–861.
5. **Fair W., Luke Y.** Rational approximations to the solution of the second order Riccati equation // Math. Comp. 1968. Vol. 20. P. 602–605.
6. **Its A.R., Novokshenov V.Yu.** The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations. Lect. Notes in Math. Vol. 1191. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 313 p.
7. **Novokshenov V.Yu.** The Boutroux ansatz for the second Painlevé equation in the complex domain // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. 1990. Vol. 54, no. 6. P. 1229–1251.
8. **Караев А.А.** Global asymptotics of the second Painlevé transcendent // Phys. Lett. A. 1992. Vol. 167. P. 356–362.
9. **Flaschka H., Newell A.C.** Monodromy- and spectrum-preserving deformations. I // Comm. Math. Phys. 1980. Vol. 76, no. 1. P. 65–116.
10. **Караев А.А., Китаев А.В.** Connection formulae for the first Painlevé transcendent in the complex domain // Lett. Math. Phys. 1993. Vol. 27, no. 4. P. 243–252.
11. **Kawai T., Takei Y.** Algebraic analysis of singular perturbation theory. Math. Monographs. Vol. 227. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2005. 130 p.
12. **Китаев А.В.** Изомонодромная техника и эллиптическая асимптотика первого трансцендента Пенлеве // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. С. 197–211.
13. **Караев А.А.** Quasi-linear stokes phenomenon for the Painlevé first equation // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. Vol. 37, no. 46. P. 11149–11167.
14. **Ablowitz M.J., Segur H.** Asymptotic solutions of the Korteweg-de Vries equation // Stud. Appl. Math. 1977. Vol. 57, no. 1. P. 13–44.
15. **Dubrovin B., Grava T., Klein C.** On universality of critical behaviour in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the tritronquée solution to the Painlevé-I equation // J. Nonlinear. Sci. 2009. Vol. 19, no. 1. P. 57–94.
16. **Tracy C., Widom H.** On orthogonal and symplectic matrix ensembles // Comm. Math. Phys. 1996. Vol. 177, no. 3. P. 727–754.
17. **Hastings S.P., McLeod J.B.** A boundary value problem associated with the second Painlevé transcendent and the Korteweg-de Vries equation // Arch. Rational Mech. Anal. 1980. Vol. 73. P. 31–51.

Новокшенов Виктор Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
e-mail: novik53@mail.ru

Поступила 20.09.2011

УДК 517.982.272+515.122.55

О СВОЙСТВАХ ТИПА ПОЛНОТЫ C -КОМПАКТНО-ОТКРЫТОЙ ТОПОЛОГИИ НА $C(X)$ ¹

А. В. Осипов

Изучаются свойства типа полноты пространства $C_{rc}(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций на тихоновском пространстве X , где пространство функций наделено C -компактно-открытой топологией. Исследуются свойства полной метризуемости, полноты по Чеху, псевдополноты и почти полноты по Чеху.

Ключевые слова: C -компактно-открытая топология, множественно-открытая топология, полнота по Чеху, бэровское пространство, функциональное пространство.

A. V. Osipov. On the completeness properties of the C -compact-open topology on $C(X)$.

The completeness properties of the space $C_{rc}(X)$ of all continuous real-valued functions on a Tikhonov space X are studied, where the function space has the C -compact-open topology. The properties of complete metrizability, Čech completeness, pseudocompleteness, and almost Čech-completeness are investigated.

Keywords: C -compact-open topology, set-open topology, Čech completeness, Baire space, function space.

Введение

На множестве $C(X)$ — непрерывных вещественнозначных функций тихоновского пространства X , по семейству λ — непустых подмножеств пространства X , можно определить множественно-открытую топологию (λ -открытую топологию). Предбазу такой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X) : f(F) \subseteq U\}$, где $F \in \lambda$, а U — открытое подмножество числовой прямой \mathbb{R} . Впервые λ -открытая топология встречается в работе Р. Аренса и Ж. Дугунджи [7]. Топологическое пространство $C(X)$ с множественно-открытой топологией при семействе λ будем обозначать через $C_\lambda(X)$.

Отметим, что множественно-открытая топология и ее свойства зависят от выбранного семейства λ . Так, если в качестве семейства λ взять, например, все конечные, компактные или псевдокомпактные подмножества X , то мы получим достаточно классические топологии: топологию поточечной сходимости, компактно-открытую топологию или псевдокомпактно-открытую топологию на множестве $C(X)$ соответственно. Эти топологии активно изучаются и находят свое приложение в теории меры и функциональном анализе. Конечно, если выбрать семейство λ произвольно, то топологическое пространство $C_\lambda(X)$ может обладать достаточно слабыми свойствами, например, оно может не быть регулярным или даже хаусдорфовым пространством. Особый интерес с точки зрения приложений возникает, когда $C_\lambda(X)$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством (ТВП). В связи с этим выделяются различные “хорошие” семейства λ подмножеств пространства X , которые определяют локально выпуклые ТВП на множестве $C(X)$. Например, к таким “хорошим” семействам λ относятся семейства всех компактных, конечных, метризуемо компактных, секвенциально компактных, счетно компактных, псевдокомпактных или C -компактных подмножеств пространства X (см. [18]). Напомним, что подмножество A пространства X называется C -компактным,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003).

если для любой непрерывной на X вещественнозначной функции f множество $f(A)$ компактно в \mathbb{R} . В случае $A = X$ свойство множества A быть C -компактным совпадает с псевдокомпактностью пространства X . Топологическое пространство $C(X)$ с множественно-открытой топологией на семействе всех C -компактных подмножеств пространства X будем обозначать через $C_{rc}(X)$.

Данная работа является продолжением работы [3] об исследовании топологических свойств пространства $C_{rc}(X)$. Важность исследования C -компактно-открытой топологии на множестве $C(X)$ связана с тем, что любое семейство λ подмножеств пространства X , определяющее локально выпуклую множественно-открытую топологию на множестве $C(X)$, состоит из C -компактных подмножеств пространства X . Более того, если $C_\lambda(X)$ является топологической (даже паратопологической!) группой, то семейство λ состоит из C -компактных множеств.

В работе [19] были найдены характеристики для пространства $C_\lambda(X)$ быть топологической группой, ТВП и локально выпуклым ТВП. Отметим, что при условии совпадения множественно-открытой топологии с топологией равномерной сходимости на семействе λ пространство $C(X)$ является топологической алгеброй.

Напомним, что базу топологии равномерной сходимости на семействе λ (λ -топологии) в точке $f \in C(X)$ образуют все множества вида $\{g \in C(X) : \sup\{|g(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in F\}\}$, где $F \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$. Топологическое пространство $C(X)$ с λ -топологией будем обозначать через $C_{\lambda,u}(X)$.

В работе [19] была доказана

Теорема [19, Theorem 3.3]. *Для любого пространства X следующие утверждения эквивалентны.*

1. $C_\lambda(X) = C_{\lambda,u}(X)$.
2. $C_\lambda(X)$ является топологической группой.
3. $C_\lambda(X)$ является топологическим векторным пространством.
4. $C_\lambda(X)$ является локально выпуклым топологическим векторным пространством.
5. λ — семейство C -компактных подмножеств X и $\lambda = \lambda(C)$, где $\lambda(C) = \{A \in \lambda : \text{для любого } C\text{-компактного подмножества } B \text{ пространства } X \text{ такого, что } B \subseteq A, \text{ множество } [B, U] \text{ открыто в } C_\lambda(X) \text{ для любого открытого } U \text{ пространства } \mathbb{R}\}$.

В работе [3] были изучены такие свойства пространства $C_{rc}(X)$, как метризуемость, сепарабельность, первая аксиома счетности, число Суслина, линделёфовость и другие свойства типа счетности. В этой работе мы исследуем свойства типа полноты. К таким свойствам прежде всего относятся метризуемость полной метрикой, полнота по Чеху, почти полнота по Чеху и свойство Бэра.

Все пространства, рассматриваемые в работе, предполагаем тихоновскими. Элементы стандартных предбаз λ -открытой и λ -топологии будем обозначать следующим образом: $[F, U] = \{f \in C(X) : f(F) \subseteq U\}$, $\langle f, F, \varepsilon \rangle = \{g \in C(X) : \sup\{|g(x) - f(x)| < \varepsilon : x \in F\}\}$.

Если X и Y — два топологических пространства, то запись $X \geq Y$ ($X > Y$, $X = Y$) означает, что X и Y совпадают как множества и топология на X сильнее или равна (строго сильнее, равна) топологии на Y . Символы \mathbb{R} и \mathbb{N} обозначают множества вещественных и натуральных чисел соответственно. Нуль-множеством называется множество, имеющее вид $f^{-1}(0)$ для некоторой функции $f \in C(X)$. Ко-нуль-множеством (или функционально открытым) называется дополнение до нуль-множества. Покрытие называется функционально открытым, если оно состоит из функционально открытых множеств. Если X — топологическое пространство, а $G \subseteq C(X)$, то подмножество $A \subseteq X$ называют G -ограниченным при условии, что $f(A)$ — ограниченное подмножество из \mathbb{R} для любой функции $f \in G$. Если множество A является G -ограниченным при $G = C(X)$, то A называют ограниченным на X . Пространство X называют μ -пространством (иногда гиперизокомпактным или пространством Нахбина — Широта), если каждое замкнутое ограниченное множество является компактом. Замыкание множества A будем обозначать через \bar{A} , символом \emptyset обозначаем пустое множество. Если $A \subseteq X$ и $f \in C(X)$,

то через $f|_A$ обозначаем сужение функции f на множество A . Как обычно, $f(A)$ и $f^{-1}(A)$ — это соответственно образ и полный прообраз множества A при отображении f . Функцию, тождественно равную нулю, будем обозначать через f_0 . Остальные обозначения можно найти в [5].

Очевидно, что любое псевдокомпактное подмножество является C -компактным и любое C -компактное множество является ограниченным по определению. В [5] приведен известный пример пространства Исбела — Фролика — Мрувки, в котором понятия “псевдокомпактность”, “ C -компактность” и “ограниченность” отличаются даже для замкнутых подмножеств. Отметим некоторые важные свойства C -компактных подмножеств (см. [2; 8]).

Подмножество A пространства X является C -компактным тогда и только тогда, когда из любого счетного функционально открытого (в X) покрытия множества A можно выделить конечное подсемейство, замыкание объединения элементов которого содержит множество A . Заметим, что в тихоновских пространствах псевдокомпактность пространства X эквивалентна его слабо компактности (feebly compact), где слабо компактность означает, что из любого счетного открытого покрытия пространства X можно выделить конечное подсемейство, объединение которого будет всюду плотно в X .

Хорошо известно, что замыкание псевдокомпактного (ограниченного) подмножества X будет псевдокомпактным (ограниченным) подмножеством. Это утверждение справедливо и для C -компактных множеств [1].

Для замкнутого подмножества A в нормальном пространстве X следующие свойства эквивалентны (см. [14]).

1. A — счетно-компактное подмножество пространства X .
2. A — псевдокомпактное подмножество пространства X .
3. A — C -компактное подмножество пространства X .
4. A — ограниченное подмножество пространства X .

Напомним, что пространство X называется субметризуемым, если X уплотняется (т. е. взаимнооднозначно и непрерывно отображается) на метризуемое пространство.

Если A — подмножество субметризуемого пространства X , то следующие свойства эквивалентны (см. [4]).

1. A — счетно-компактное подмножество пространства X .
2. A — псевдокомпактное подмножество пространства X .
3. A — секвенциально компактное подмножество пространства X .
4. A — C -компактное подмножество пространства X .
5. A — компактное подмножество пространства X .
6. A — метризуемый компакт.

Отметим, что любое замкнутое ограниченное подмножество полного по Дьедонне пространства является компактным [14].

1. Полнота равномерного пространства $C_{rc}(X)$

Как было отмечено в работе [3], существуют три подхода в определении C -компактно-открытой топологии на $C(X)$.

Первый — рассмотреть предбазу вида $\{[A, V]: A — C\text{-компактное подмножество } X \text{ и } V \text{ открытое подмножество } \mathbb{R}\}$. Второй — определить C -компактно-открытую топологию как топологию равномерной сходимости на C -компактных подмножествах пространства X . Базу такой топологии в точке $f \in C(X)$ образуют все множества вида $\langle f, F, \varepsilon \rangle$, где F — C -компактное подмножество пространства X и $\varepsilon > 0$.

Третий подход — рассмотреть C -компактно-открытую топологию как локально выпуклую топологию на множестве $C(X)$. Для этого для каждого C -компактного подмножества $A \subseteq X$ определим полунорму p_A на $C(X)$: $p_A(f) = \sup\{|f(x)|: x \in A\}$. Положим $V_{A,\varepsilon} = \{f \in C(X): p_A(f) < \varepsilon\}$ и $\Psi = \{V_{A,\varepsilon}: A — C\text{-компактное подмножество пространства } X, \varepsilon > 0\}$.

Тогда для каждой точки $f \in C(X)$ семейство $f + \Psi = \{f + V : V \in \Psi\}$ является базой в точке f .

Так как топология определяется семейством полунорм, она локально выпукла. Поскольку семейство C -компактных множеств является сетью пространства X , локально выпуклое пространство $C_{rc}(X)$ является хаусдорфовым и, следовательно, тихоновским пространством.

Топология равномерной сходимости на C -компактных подмножествах пространства X индуцирована равномерностью равномерной сходимости на этих подмножествах. Напомним (см. [5, теорема 8.3.21]), что равномерное пространство E полно в том и только том случае, если каждый фильтр Коши в E сходится к точке пространства E .

Для характеристики полноты равномерного пространства $C_{rc}(X)$ необходимо определить rc -непрерывные функции и rc_f -пространства.

О п р е д е л е н и е. Функцию $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть rc -непрерывной, если для каждого C -компактного подмножества $A \subseteq X$ существует непрерывная функция $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $g|_A = f|_A$. Пространство X будем называть rc_f -пространством, если каждая rc -непрерывная функция на X является непрерывной.

Теорема 1.1. *Равномерное пространство $C_{rc}(X)$ является полным тогда и только тогда, когда X является rc_f -пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как любое C -компактное подмножество пространства X является ограниченным, то утверждение теоремы является следствием теоремы 4.6 в [14].

2. Метризуемость полной метрикой, полнота по Чеху и другие свойства типа полноты пространства $C_{rc}(X)$

В этом разделе мы изучим различные виды полноты пространства $C_{rc}(X)$. В частности, мы охарактеризуем метризуемость полной метрикой пространства $C_{rc}(X)$ через другие свойства типа полноты.

Напомним, что пространство X называется полным по Чеху, если множество X является G_δ -множеством в стоун-чеховской компактификации βX . Пространство X называется локально полным по Чеху, если каждая точка $x \in X$ имеет полную по Чеху окрестность. Другой вид полноты, который следует из полноты по Чеху, является псевдополнотой. Псевдополное пространство — это пространство, обладающее последовательностью π -баз $\{\mathcal{B}_n : n \in \mathbb{N}\}$ такой, что если для каждого $n \in \mathbb{N}$ $B_n \in \mathcal{B}_n$ и $\overline{B_{n+1}} \subseteq B_n$, то $\bigcap \{B_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ (см. [20]).

В работе [6] было показано, что пространство, имеющее плотное полное по Чеху подпространство, является псевдополным и псевдополное пространство является бэровским пространством.

Пусть \mathcal{F} и \mathcal{U} — два семейства подмножеств пространства X . Тогда семейство \mathcal{F} контролируется семейством \mathcal{U} , если для каждого $U \in \mathcal{U}$ существует $F \in \mathcal{F}$ такое, что $F \subseteq U$. Последовательность $\{U_n\}$ подмножеств пространства X называют полной, если каждый фильтр \mathcal{F} на X , контролируемый последовательностью $\{U_n\}$, имеет предельную точку $x \in X$. Последовательность $\{\mathcal{U}_n\}$ семейств подмножеств пространства X называется полной, если любая последовательность $\{U_n\}$ такая, что $U_n \in \mathcal{U}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ является полной. В работе [11, теорема 2.8.] была доказана эквивалентность следующих утверждений для хаусдорфова пространства X :

- (1) X — G_δ -множество любого хаусдорфова пространства, в которое пространство X плотно вкладывается;
- (2) X имеет полную последовательность из открытых покрытий;
- (3) X полно по Чеху.

Из этого результата следует, что тихоновское пространство X полно по Чеху тогда и только тогда, когда пространство X является G_δ -множеством любого тихоновского пространства, в которое оно плотно вкладывается.

Семейство \mathcal{U} подмножеств пространства X называют почти покрытием X , если $\bigcup \mathcal{U}$ плотно в пространстве X . Пространство X называют почти полным по Чеху, если X имеет полную последовательность из открытых почти покрытий. Заметим, что каждое почти полное по Чеху пространство является бэровским пространством [16, утверждение 4.5.].

Свойство быть бэровским пространством — самое слабое из всех свойств типа полноты, которые мы рассматриваем в этой работе. Так как $C_{rc}(X)$ — локально выпуклое пространство, то $C_{rc}(X)$ является бэровским пространством тогда и только тогда, когда пространство $C_{rc}(X)$ — второй категории. Так как локально выпуклое бэровское пространство является бочечным, найдем необходимое условие для того, чтобы $C_{rc}(X)$ было бочечным. Напомним, что локально выпуклое пространство L называется бочечным, если каждая бочка (замкнутое выпуклое уравновешенное поглощающее множество) в L является замкнутой окрестностью точки 0_L .

Теорема 2.1. Пусть пространство $C_{rc}(X)$ бочечно. Тогда каждое ограниченное подмножество пространства X содержится в C -компактном подмножестве X .

Доказательство. Пусть A — ограниченное подмножество пространства X и пусть $W = \{f \in C(X) : p_A(f) \leq 1\}$. Очевидно, что W — замкнутое выпуклое уравновешенное поглощающее множество, т.е. является бочкой в $C_{rc}(X)$. Так как $C_{rc}(X)$ является бочечным, бочка W — окрестность функции f_0 и, следовательно, существуют замкнутое C -компактное подмножество P пространства X и $\varepsilon > 0$ такие, что $\langle f_0, P, \varepsilon \rangle \subseteq W$. Мы докажем, что $A \subseteq P$. Допустим, от противного, что $x_0 \in A \setminus P$. В силу тихоновости пространства X существует непрерывная функция $f : X \rightarrow [0, 2]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in P$ и $f(x_0) = 2$. Ясно, что $f \in \langle f_0, P, \varepsilon \rangle$, но $f \notin W$. Противоречие. Отсюда следует, что $A \subseteq P$. Теорема доказана.

Если X — μ -пространство, то замыкание любого ограниченного (тем более C -компактного подмножества) является компактным подмножеством пространства X . Следовательно, C -компактно-открытая топология и компактно-открытая топология совпадают на $C(X)$. По замечательной теореме Нахбина — Широга, $C_c(X)$ бочечно тогда и только тогда, когда X — μ -пространство. Отсюда следует, что если пространство X полное по Хьюитту, то $C_{rc}(X)$ бочечно. Например, плоскость Немьцкого L — полная по Хьюитту, следовательно, $C_{rc}(L)$ бочечно.

Приведем пример пространства X такого, что $C_{rc}(X)$ не бочечно.

Пример 1 (плоскость Дьедонне). Пусть $X = [0, \omega_1] \times [0, \omega_0] \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$. Топология τ порождена базой: открытой является каждая точка из множества $[0, \omega_1] \times [0, \omega_0)$, а также все множества вида $U_\alpha(\beta) = \{(\beta, \gamma) : \alpha < \gamma \leq \omega_0\}$ и $V_\alpha(\beta) = \{(\gamma, \beta) : \alpha < \gamma \leq \omega_1\}$.

Пусть $A = \{(\omega_1, n) : 0 \leq n < \omega_0\}$. Возьмем произвольное C -компактное подмножество B пространства X . Так как для любого $\alpha < \omega_1$ множество $\{\alpha\} \times [0, \omega_0]$ открыто-замкнутое (и, следовательно, функционально открытое), то для любого $\beta \leq \omega_0$, множество $([0, \omega_1] \times \{\beta\}) \cap B$ состоит не более чем из конечного числа точек. Отсюда вытекает, что B — компактное подмножество X .

В [14] было доказано, что множество A является замкнутым ограниченным подмножеством X . Так как A не компактное подмножество, а любое C -компактное подмножество X является компактным, то $C_{rc}(X)$ не бочечно.

Напомним, что пространство X называют хеми- C -компактным, если существует последовательность C -компактных подмножеств $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ в X такая, что для любого C -компактного подмножества A из пространства X существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $A \subseteq A_{n_0}$ [3].

В работе [3] была получена характеристика метризуемости пространства $C_{rc}(X)$.

Теорема 2.2. Для любого пространства X следующие утверждения эквивалентны.

1. $C_{rc}(X)$ — метризуемое пространство.
2. $C_{rc}(X)$ обладает первой аксиомой счетности.

3. $C_{rc}(X)$ — пространство счетного типа.
4. $C_{rc}(X)$ — пространство точечно-счетного типа.
5. $C_{rc}(X)$ имеет всюду плотное подмножество точечно счетного типа.
6. $C_{rc}(X)$ — M -пространство.
7. $C_{rc}(X)$ — q -пространство.
8. X — хеми- C -компактно.

В следующей теореме приводится характеристика полной метризуемости пространства $C_{rc}(X)$.

Теорема 2.3. *Для любого пространства X эквивалентны следующие утверждения.*

1. $C_{rc}(X)$ метризуемо полной метрикой.
2. $C_{rc}(X)$ — полно по Чеху.
3. $C_{rc}(X)$ — локально полно по Чеху.
4. $C_{rc}(X)$ — открытый непрерывный образ паракомпактного полного по Чеху пространства.
5. $C_{rc}(X)$ — открытый непрерывный образ полного по Чеху пространства.
6. X — хеми- C -компактное rc_f -пространство.

Доказательство. Ранее было отмечено, что пространство $C_{rc}(X)$ метризуемо полной метрикой тогда и только тогда, когда оно метризуемо и имеет полную равномерность. Таким образом, по теореме 2.2 и по теореме 1.1 следует, что (1) \Leftrightarrow (6). Заметим, что (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) и (1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5). Импликация (3) \Rightarrow (5) следует из [5, утверждение 3.12.19(d)].

(5) \Rightarrow (1). Полное по Чеху пространство является пространством точечно-счетного типа, а свойство быть пространством точечно-счетного типа сохраняется в сторону образа при непрерывных отображениях. Таким образом, $C_{rc}(X)$ является пространством точечно-счетного типа и, следовательно, по следствию 5.2 в [3], $C_{rc}(X)$ метризуемо, а значит $C_{rc}(X)$ — паракомпакт. По теореме Пасынкова [5, теорема 5.5.8.(b)], $C_{rc}(X)$ полно по Чеху. Полные по Чеху метризуемые пространства являются пространствами, метризуемыми полной метрикой. Таким образом, $C_{rc}(X)$ метризуемо полной метрикой. Теорема доказана.

Заметим, что доказательство теоремы 2.3 аналогично теореме 3.3 в [15] о метризуемости полной метрикой пространства $C(X)$ наделенного псевдокомпактно-открытой топологией.

Для изучения псевдополноты и почти полноты по Чеху вложим пространство $C_{rc}(X)$ в некоторое локально выпуклое функциональное пространство. Пусть $RC(X) = \{f \in \mathbb{R}^X : f|_A \text{ непрерывно для каждого } A — C\text{-компактного подмножества } X\}$. Также, как на пространстве $C_{rc}(X)$, на множестве $RC(X)$ определяется C -компактно-открытая топология. При этом $RC(X)$ является локально выпуклым пространством, топология которого порождается семейством полунорм $\{p_A : A — C\text{-компактное подмножество } X\}$, где для $f \in RC(X)$, $p_A(f) = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$.

Обозначим пространство $RC(X)$, наделенное C -компактно-открытой топологией, через $RC_{rc}(X)$. Очевидно, что $C_{rc}(X)$ является подпространством $RC_{rc}(X)$. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Если каждое замкнутое C -компактное подмножество X является C -вложенным в X , тогда $C(X)$ плотно в пространстве $RC_{rc}(X)$.*

Напомним, что пространство X называют σ -пространством, если X содержит σ -локально-конечную сеть. Каждое метризуемое пространство является σ -пространством.

Теорема 2.5. *Для любого пространства X рассмотрим следующие свойства.*

1. $C_{rc}(X)$ метризуемо полной метрикой.
2. $C_{rc}(X)$ — псевдополное σ -пространство.

3. $C_{rc}(X)$ — псевдополное q -пространство.
 4. $C_{rc}(X)$ содержит плотное метризуемое полной метрикой подпространство.
 5. $C_{rc}(X)$ содержит плотное полное по Чеху подпространство.
 6. $C_{rc}(X)$ — почти полное по Чеху.
- Тогда (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Leftrightarrow (6).

Доказательство. Импликации (1) \Rightarrow (2) и (4) \Rightarrow (5) очевидны.

(2) \Rightarrow (3). Бэровское пространство, которое является σ -пространством, имеет плотное метризуемое подпространство [15]. Таким образом, если $C_{rc}(X)$ — псевдополное σ -пространство, то оно содержит плотное метризуемое подпространство. Так как каждое метризуемое пространство является пространством точечно-счетного типа, то по теореме 2.2, пространство $C_{rc}(X)$ является q -пространством.

(3) \Rightarrow (4). Так как $C_{rc}(X)$ является q -пространством, то по теореме 2.2, $C_{rc}(X)$ метризуемо. Метризуемые пространства псевдополные тогда и только тогда, когда содержат плотные метризуемые полной метрикой подпространства [6, следствие 2.4.].

(5) \Leftrightarrow (6) следует из [16, утверждения 4.4, 4.7]. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Существует пример псевдополного пространства $C_{rc}(X)$, которое не является почти полным по Чеху. Рассмотрим одноточечную линделёфикацию несчетного дискрета, т. е. пусть S — несчетное множество, у которого все точки изолированы, кроме одной точки s . У точки s окрестность определяется как любое множество, содержащее s , дополнение до которого счетно [12, 4N].

Легко показать, что S — нормальное P -пространство. Так как каждое C -компактное подмножество S является конечным, C -компактно-открытая топология совпадает с топологией поточечной сходимости на $C(S)$. В силу того что S — несчетное множество, $C_p(S)$ не метризуемое пространство. Пространство $C_p(S)$ является псевдополным, так как каждое счетное подмножество в P -пространстве является замкнутым. В силу того что $C_p(X)$ не является метризуемым [13, теорема 5.7], следует, что $C_p(S)$ не является почти полным по Чеху.

Теорема 2.6. Если каждое замкнутое C -компактное подмножество X является C -вложенным в X , то следующие условия эквивалентны.

1. $C_{rc}(X)$ метризуемо полной метрикой.
2. $C_{rc}(X)$ — почти полное по Чеху пространство.
3. X — хеми- C -компактное rc_f -пространство.

Доказательство. Достаточно доказать только импликацию (2) \Rightarrow (3). Если пространство $C_{rc}(X)$ почти полное по Чеху, то $C_{rc}(X)$ содержит плотное полное по Чеху подпространство G . Так как каждое замкнутое C -компактное подмножество пространства X является C -вложенным в X , множество $C(X)$ плотно в $RC_{rc}(X)$ и, следовательно, множество G плотно в пространстве $RC_{rc}(X)$. В силу того что пространство $RC_{rc}(X)$ содержит плотное бэровское подпространство G , пространство $RC_{rc}(X)$ является бэровским. Так как G полное по Чеху пространство, то G является G_δ -множеством в $RC_{rc}(X)$.

Заметим, что каждая rc -непрерывная функция на пространстве X принадлежит пространству $RC_{rc}(X)$. Для того чтобы подтвердить, что X является rc_f -пространством, мы покажем, что $RC(X) = C(X)$. Так пусть $f \in RC(X)$. Определим отображение $T_f: RC_{rc}(X) \mapsto RC_{rc}(X)$ по правилу $T_f(g) = f + g$ для любого $g \in RC(X)$. Так как $RC_{rc}(X)$ является локально выпуклым пространством, T_f — гомеоморфизм и, следовательно, $T_f(G)$ — плотное G_δ -подмножество пространства $RC_{rc}(X)$. Так как $RC_{rc}(X)$ является бэровским пространством, $G \cap T_f(G) \neq \emptyset$. Пусть $h \in G \cap T_f(G)$. Отсюда следует, что существует $g \in G$ такое, что $h = f + g$. Получаем, что $f = g - h \in C(X)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нохрин С.Э., Осипов А.В.** К вопросу о совпадении множественно-открытой и равномерной топологий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 177–184.
2. **Осипов А.В.** Слабо множественно-открытая топология // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 177–184.
3. **Осипов А.В.** Свойства C -компактно-открытой топологии на пространстве функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 258–277.
4. **Осипов А.В., Косолобов А.В.** О секвенциально-компактно-открытой топологии // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011, № 3. Р. 75–84. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
5. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
6. **Aarts J.M., Lutzer D.J.** Pseudo-completeness and the product of Baire spaces // Pacific. J. Math. 1973. No. 48. P. 1–10.
7. **Arens R., Dugundji J.** Topologies for function spaces // Pacific J. Math. 1951. Vol. 1, no. 1. P. 5–31.
8. **Arhangel'skii A.V., Tkachenko M.** Topological group and related structures. Ser.: Atlantis Stud. Math. Vol. 1. Paris: Atlantis Press, 2008. 800 p.
9. **Aull C.E.** Sequences in topological spaces // Prace Mat. 1968. Vol. 11. 329–336.
10. **Buhagiar D., Yoshioka I.** Sieves and completeness properties // Questions Answers Gen. Topology. 2000. No. 18. P. 143–162.
11. **Frolík Z.** Generalizations of the G_δ -property of complete metric spaces // Czech. Math. J. 1960. No. 10. P. 359–379.
12. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. The university series in higher mathematics. Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Co., Inc., 1960. 300 p.
13. **Kundu S., Garg P.** The pseudocompact-open topology on $C(X)$ // Topology Proc. 2006. Vol. 30. P. 279–299.
14. **Kundu S., Raha A.B.** The bounded-open topology and its relatives // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 1995. Vol. 27. P. 61–77.
15. **Kundu S., Garg P.** Completeness properties of the pseudocompact-open topology on $C(X)$ // Math. Slovaca. 2008. Vol. 58, no. 3. P. 325–338.
16. **Michael E.** Almost complete spaces, hypercomplete spaces and related mapping theorems // Topology Appl. 1991. No. 41. P. 113–130.
17. **Michael E.** Partition-complete spaces are preserved by tri-quotient maps // Topology Appl. 1992. No. 44. P. 235–240.
18. **Osipov A.V.** The set-open topology // Topology Proc. 2011. Vol. 37. P. 205–217.
19. **Osipov A.V.** Topological-algebraic properties of function spaces with set-open topologies // Topology Appl. 2012. No. 159, iss. 3. P. 800–805.
20. **Oxtoby J.C.** Cartesian products of Baire spaces // Fund. Math. 1961. No. 49. P. 157–166.
21. **Taylor A.E., Lay D.C.** Introduction to functional analysis. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1980. 244 p.

Осипов Александр Владимирович
 канд. физ.-мат. наук
 старший науч. сотрудник
 Институт математики и механики УрО РАН
 Уральский федеральный университет
 e-mail: OAB@list.ru

Поступила 12.01.2012

УДК 517.956

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА И ДИРИХЛЕ И РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В. Н. Павленко, Т. А. Петраш

Рассматривается математическая модель колебаний струны под действием силы, разрывной относительно фазовой переменной. Предполагается, что один конец струны закреплен, а другой свободный. Нелинейность имеет подлинейный рост, если ядро оператора, порождаемого линейной частью уравнения с граничными условиями и условием периодичности, нулевое, и она ограниченная в противном случае. Топологическим методом устанавливается существование 2π -периодического обобщенного решения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение колебаний струны, разрывная нелинейность, обобщенные периодические решения, резонансный случай.

V. N. Pavlenko, T. A. Petrash. Periodic solutions of the vibrating string equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions and a discontinuous nonlinearity.

We consider a mathematical model of a vibrating string under a force that is discontinuous with respect to the state variable. It is assumed that one end of the string is fixed while the other is free. If the kernel of the operator generated by the linear part of the equation with boundary conditions and periodicity condition is zero, then the nonlinearity grows sublinearly; otherwise, it is bounded. The existence of a 2π -periodic generalized solution is established by a topological method.

Keywords: nonlinear equation of a vibrating string, discontinuous nonlinearity, generalized periodic solutions, resonance case.

Введение

Пусть $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, $\square = \partial_{tt} - \partial_{xx}$ — оператор Даламбера. Исследуется вопрос о существовании решения нелинейного уравнения колебаний струны

$$\square u(x, t) - \mu u(x, t) + g(x, t, u) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (1)$$

левый конец которой закреплен, а правый свободный

$$u(t, 0) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \in (0, 2\pi), \quad (2)$$

удовлетворяющего условию периодичности

$$u(x, 2\pi) = u(x, 0), \quad x \in (0, \pi). \quad (3)$$

В уравнении (1) μ — вещественный параметр, $f \in L^2(\Omega)$, а нелинейность $g(x, t, u)$ удовлетворяет i -условию:

$i1$) функция $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ борелева (mod 0) [1], что означает существование множества $l \subset \Omega \times \mathbb{R}$, проекция которого на Ω имеет меру нуль, и борелевой на $\Omega \times \mathbb{R}$ функции, совпадающей с $g(x, t, u)$ на $(\Omega \times \mathbb{R}) \setminus l$;

$i2$) для почти всех $(x, t) \in \Omega$ сечение $g(x, t, \bullet)$ имеет на \mathbb{R} разрывы только первого рода, причем

$$g(x, t, u) \in [g_-(x, t, u), g_+(x, t, u)] \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

где

$$g_-(x, t, u) = \liminf_{\eta \rightarrow u} g(x, t, \eta), \quad g_+(x, t, u) = \limsup_{\eta \rightarrow u} g(x, t, \eta).$$

В зависимости от значения параметра μ выделяются два случая:

1) (Нерезонансный) уравнение

$$\square u(x, t) = \mu u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (4)$$

имеет только нулевое решение, удовлетворяющее условиям (2) и (3), и найдутся положительная константа a и функция $b \in L^2(\Omega)$ такие, что для почти всех $(x, t) \in \Omega$

$$|g(x, t, u)| \leq a|u|^\alpha + b(x, t) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$0 < \alpha < 1$ (подлинейный рост $g(x, t, u)$).

2) (Резонансный) уравнение (4) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее условиям (2) и (3), и нелинейность $g(x, t, u)$ ограниченная, т. е. существует $b \in L^2(\Omega)$ такая, что для почти всех $(x, t) \in \Omega$

$$|g(x, t, u)| \leq b(x, t) \quad \forall u \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Известно [2], что собственные значения оператора Даламбера с граничными условиям (2) и условием периодичности (3)

$$\mu_{nm} = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - m^2, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup 0,$$

а соответствующие собственные функции

$$\varphi_{nm}(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \cos mt, \quad \psi_{nm}(x, t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \sin mt \quad \text{для } m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и

$$X_n(x) = \frac{1}{\pi} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x \quad \text{для } m = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Система функций

$$\Lambda = \{\varphi_{nm}(x, t), \psi_{nm}(x, t) \mid n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}\} \cup \{X_n(x) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

является полной ортонормированной в $L^2(\Omega)$. Обозначим через D линейную оболочку Λ .

О п р е д е л е н и е 1. Обобщенным решением задачи (1)–(3) называется функция $u \in L^2(\Omega)$, для которой найдется измеримая на Ω функция $z(x, t) \in [g_-(x, t, u(x, t)), g_+(x, t, u(x, t))]$ для почти всех $(x, t) \in \Omega$ такая, что для любой $\varphi \in D$ верно тождество

$$\int_{\Omega} u(\varphi_{tt} - \varphi_{xx} - \mu\varphi) dx dt = \int_{\Omega} (f(x, t) - z(x, t))\varphi(x, t) dx dt. \quad (7)$$

З а м е ч а н и е 1. Если $g(x, t, u)$ каратеодориева, т. е. для почти всех $(x, t) \in \Omega$ сечение $g(x, t, \bullet)$ — непрерывная на \mathbb{R} функция и для любого $u \in \mathbb{R}$ функция $g(\bullet, \bullet, u)$ измерима на Ω , то в определении 1 функция $z(x, t) = g(x, t, u(x, t))$ и мы приходим к общепринятому определению обобщенного решения задачи (1)–(3) [2].

З а м е ч а н и е 2. Если для $u \in L^2(\Omega)$ и любой $\varphi \in D$ справедливо (7), где $f(x, t) - z(x, t)$ заменено на $\psi \in L^2(\Omega)$, то, как показано в [2], в случае $\mu = 0$ функция $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (теорема о регулярности обобщенного решения), $H^m(\Omega)$ — соболевское пространство $W_2^m(\Omega)$. Отсюда немедленно следует принадлежность обобщенного решения задачи (1)–(3) к $H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ при наших предположениях. Если обобщенное решение u задачи (1)–(3) принадлежит $H^2(\Omega)$, то для любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, производя интегрирование по частям в (7), получим

$$\int_{\Omega} (u_{tt} - u_{xx} - \mu u + z(x, t))\varphi(x, t) dx dt = \int_{\Omega} f(x, t)\varphi(x, t) dx dt.$$

Так как $C_0^\infty(\Omega)$ всюду плотно в $L^2(\Omega)$, то $u_{tt} - u_{xx} - \mu u + z(x, t) = f(x, t)$ почти всюду в Ω .

Основные результаты данной работы — следующие две теоремы.

Теорема 1. В нерезонансном случае задача (1)–(3) имеет обобщенное решение для любой $f \in L^2(\Omega)$.

Теорема 2. В резонансном случае задача (1)–(3) имеет обобщенное решение, если для любой собственной функции $v(x, t)$ оператора \square с условиями (2), (3), отвечающей собственному значению μ , верно неравенство (условие Ландесмана — Лазера)

$$\int_{v>0} \bar{g}_+(x, t)v(x, t)dxdt + \int_{v<0} \underline{g}_-(x, t)v(x, t)dxdt < \int_{\Omega} f(x, t)v(x, t)dxdt,$$

где $\underline{g}_-(x, t, u) = \liminf_{u \rightarrow -\infty} g(x, t, u)$, $\bar{g}_+(x, t, u) = \limsup_{u \rightarrow +\infty} g(x, t, u)$.

Отличие сформулированных теорем от результатов других авторов — в допущении разрывов нелинейности по фазовой переменной.

Задача (1)–(3) с $\mu = 0$ в нерезонансном случае и каратеодориевой нелинейностью линейного роста изучалась в [2]. С помощью принципа Лере — Шаудера в [2] получена теорема существования обобщенного решения, исследуется регулярность обобщенных решений. Проблема существования обобщенных периодических решений уравнения колебаний струны с различными граничными условиями изучалась многими авторами. Укажем работы [3–5]. Заметим, что в [3; 5] рассматривается нерезонансный случай с нелинейностью степенного роста. В [4] изучаются как нерезонансный, так и резонансный случаи для струны с закрепленными концами и монотонной нелинейностью линейного роста. В [6] разрешимость задачи (1)–(3) с разрывной нелинейностью исследуется в резонансном случае и не рассматривается нерезонансный случай.

1. Операторная постановка задачи (1)–(3)

Определим в $L^2(\Omega)$ линейный оператор A_0 с областью определения D равенством $A_0u = \square u$ для произвольного $u \in D$. Его замыкание обозначим через A . В [2] доказывается, что A — самосопряженный оператор в $L^2(\Omega)$ с дискретным спектром $\{\mu_{nm} \mid n, m \in \mathbb{Z}_+\}$ и компактной резольвентой. Заметим, что обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3) принадлежит области определения $D(A)$ оператора A и для почти всех $(x, t) \in \Omega$ удовлетворяет включению $f(x, t) - Au(x, t) - \mu u(x, t) \in [g_-(x, t, u(x, t)), g_+(x, t, u(x, t))]$. Это следует из определения обобщенного решения и самосопряженности оператора A .

Нелинейность $g(x, t, u)$ порождает оператор Немыцкого

$$Gu = g(x, t, u(x, t)) \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

В силу условия *i1*) функция $g(x, t, u)$ суперпозиционно измерима на Ω [1], т.е. для любой измеримой на Ω функции $u(x, t)$ композиция $g(x, t, u(x, t))$ измерима на Ω . Отсюда с учетом неравенств (5) и (6) получим, что G действует в $L^2(\Omega)$ и верны оценки

$$\|Gu\| \leq \tilde{a}\|u\|^\alpha + \|b\| \quad \forall u \in L^2(\Omega), \quad (8)$$

$\tilde{a} = a(\text{mes } \Omega)^{\frac{1-\alpha}{2}}$ в нерезонансном случае и

$$\|Gu\| \leq \|b\| \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (9)$$

в резонансном случае. Здесь и далее $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(\Omega)$.

Пусть G^\square — овыпукление оператора G [1]:

$$G^\square u = \bigcap_{\varepsilon>0} \text{clco}\{z = Gv \mid \|v - u\| < \varepsilon\}$$

для любого $u \in L^2(\Omega)$ (closure B — замыкание выпуклой оболочки множества $B \subset L^2(\Omega)$). Известно [1], что для любого $u \in L^2(\Omega)$ значение

$$G^{\square}u = \left\{ z: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid z \text{ — измеримая на } \Omega \text{ функция и для почти всех } (x, t) \in \Omega \right. \\ \left. z(x, t) \in [g_-(x, t, u(x, t)), g_+(x, t, u(x, t))] \right\}.$$

Таким образом, $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда $u \in D(A)$ и удовлетворяет включению

$$f - Au + \mu u \in G^{\square}u. \quad (10)$$

Неравенства (8), (9) влекут для произвольного $u \in L^2(\Omega)$ и любого $z \in G^{\square}u$ неравенства

$$\|z\| \leq \tilde{a}\|u\|^{\alpha} + \|b\| \quad \text{и} \quad \|z\| \leq \|b\| \quad (11)$$

соответственно.

1.1. Нерезонансный случай

Пусть μ принадлежит резольвентному множеству оператора A . Тогда оператор $(A - \mu I)^{-1}$ (I — тождественный оператор) компактный и включение (10) равносильно включению

$$u \in (A - \mu I)^{-1}(f - G^{\square}u) \equiv T_1u.$$

Повторяя рассуждения из [7, с. 52], можно доказать, что значения отображения T_1 — выпуклые компакты, оно полунепрерывно сверху на $L^2(\Omega)$ и для любого шара $U \subset L^2(\Omega)$ множество $T_1U := \bigcup_{u \in U} T_1u$ предкомпактно.

Таким образом, T_1 — компактное выпуклозначное отображение и существование обобщенного решения задачи (1)–(3) равносильно существованию неподвижной точки у отображения T_1 .

1.2. Резонансный случай

Пусть μ — собственное значение оператора A . Преобразуем включение (10). Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы полуинтервал $(\mu, \mu + \varepsilon]$ не содержал собственных значений оператора A . Добавим к обеим частям (10) $\varepsilon \cdot u$ и запишем его в виде

$$(A - (\mu + \varepsilon)I)u \in f - G^{\square}u - \varepsilon u,$$

что эквивалентно

$$u \in (A - (\mu + \varepsilon)I)^{-1}(f - G^{\square}u - \varepsilon u) \equiv T_2u.$$

Как и в нерезонансном случае, мультиотображение T_2 выпуклозначное и компактное в $L^2(\Omega)$. Неподвижные точки отображения T_2 являются обобщенными решениями задачи (1)–(3).

2. Доказательство основных результатов

Выше доказано, что в обоих случаях (нерезонансном и резонансном) существование обобщенного решения задачи (1)–(3) равносильно наличию неподвижной точки у некоторого выпуклозначного компактного отображения T в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$. Как показано в [8, с. 107], такой оператор будет иметь неподвижную точку, если равномерно ограничено множество решений семейства включений $u \in \tau Tu$, $0 \leq \tau < 1$, в $L^2(\Omega)$.

Доказательство теоремы 1. Допустим, что нарушено условие равномерной ограниченности множества решений семейства включений $u \in \tau T_1 u$, $0 \leq \tau < 1$. Тогда существуют последовательности $(\tau_n) \subset [0, 1)$ и $(u_n) \subset L^2(\Omega)$ с $\|u_n\| > n$ такие, что $u_n \in \tau_n T_1 u_n$ для любого натурального n . Последнее равносильно равенству

$$u_n = (A - \mu I)^{-1}(\tau_n f - \tau_n z_n),$$

где $z_n \in G^{\square} u_n$. Делим обе части последнего равенства на $\|u_n\|$ и полагаем $v_n = u_n \cdot \|u_n\|^{-1}$, в результате получим

$$v_n = (A - \mu I)^{-1}(\tau_n f \|u_n\|^{-1} + \tau_n z_n \|u_n\|^{-1}).$$

Из чего заключаем, что $v_n \rightarrow 0$ в $L^2(\Omega)$, поскольку в силу оценки (11) $z_n \|u_n\|^{-1} \rightarrow 0$ в $L^2(\Omega)$. С другой стороны, $\|v_n\| = 1$. Поэтому сильная сходимость (v_n) к нулю невозможна. Полученное противоречие доказывает существование неподвижной точки у отображения T_1 и, значит, существование обобщенного решения задачи (1)–(3). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Допустим, что нарушено условие равномерной ограниченности множества решений семейства включений $u \in \tau T_2 u$, $0 \leq \tau < 1$. Тогда существуют последовательности $(\tau_n) \subset [0, 1)$ и $(u_n) \subset L^2(\Omega)$, $\tau_n \rightarrow \tau \in [0, 1]$, $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ такие, что $u_n \in \tau_n T_2 u_n$ для любого натурального n . Последнее включение влечет существование $z_n \in G^{\square} u_n$, для которого верно равенство

$$A u_n - \mu u_n - (1 - \tau_n) \varepsilon u_n + \tau_n z_n = \tau_n f. \quad (12)$$

В силу (11) $\|z_n\| \leq \|b\|$ для любого натурального n . Поделим обе части (12) на $\|u_n\|$. Обозначив $\frac{u_n}{\|u_n\|}$ через v_n , получим

$$(A - (\mu + \varepsilon)I) v_n = \tau_n \frac{f}{\|u_n\|} - \tau_n \frac{z_n}{\|u_n\|} - \varepsilon \tau_n v_n. \quad (13)$$

Так как $\|v_n\| = 1$, то можно считать, что $v_n \rightharpoonup v$ в $L^2(\Omega)$. В противном случае нужно перейти к подпоследовательности. Правая часть в (13) слабо сходится к $-\varepsilon \tau v$. Поскольку оператор $(A - (\mu + \varepsilon)I)^{-1}$ компактный, то из (13) следует сильная сходимость (v_n) к v в $L^2(\Omega)$ и равенство $Av = (\mu + (1 - \tau)\varepsilon)v$. Можно считать, что $v_n(x, t) \rightarrow v(x, t)$ почти всюду на Ω , переходя при необходимости к подпоследовательности.

Заметим, что $\|v\| = 1$ и $\tau \in [0, 1]$. Поэтому $\tau = 1$ и v — собственный вектор оператора A , отвечающий собственному значению μ . В противном случае полуинтервал $(\mu, \mu + \varepsilon]$ будет содержать собственное значение оператора A , что противоречит выбору ε .

Умножим обе части (12) на $v(x, t)$ и проинтегрируем по Ω . Учтывая, что

$$\int_{\Omega} (A u_n(x, t) - \mu u_n(x, t)) v(x, t) dx dt = ((A - \mu I) u_n, v) = (u_n, (A - \mu I) v) = 0,$$

получим

$$\left(1 - \frac{1}{\tau_n}\right) \varepsilon \int_{\Omega} u_n(x, t) v(x, t) dx dt + \int_{\Omega} z_n(x, t) v(x, t) dx dt = \int_{\Omega} f(x, t) v(x, t) dx dt.$$

Здесь (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Так как

$$\int_{\Omega} u_n(x, t) v(x, t) dx dt = \|u_n\| \int_{\Omega} v_n(x, t) v(x, t) dx dt \quad \text{и} \quad \int_{\Omega} v_n(x, t) v(x, t) dx dt \rightarrow \int_{\Omega} v^2(x, t) dx dt = 1,$$

то существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n > n_0$ $\int_{\Omega} u_n(x, t)v(x, t)dxdt > 0$. Отсюда следует для $n > n_0$ неравенство

$$\int_{\Omega} z_n(x, t)v(x, t)dxdt > \int_{\Omega} f(x, t)v(x, t)dxdt.$$

Переходя в нем к верхнему пределу, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, t)v(x, t)dxdt &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} z_n(x, t)v(x, t)dxdt \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{v>0} g_+(x, t)v(x, t)dxdt + \int_{v<0} g_-(x, t)v(x, t)dxdt \right) \\ &\leq \int_{v>0} \bar{g}_+(x, t)v(x, t)dxdt + \int_{v<0} \underline{g}_-(x, t)v(x, t)dxdt. \end{aligned}$$

При переходе к пределу под знаком интеграла воспользовались леммой Лебега — Фату [9] с учетом оценки (6) и тем, что $u_n(x, t) \rightarrow +\infty$, если $v(x, t) > 0$, и $u_n(x, t) \rightarrow -\infty$, если $v(x, t) < 0$. Полученное неравенство противоречит условию Ландесмана — Лазера в теореме 2, и на этом ее доказательство завершается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красносельский М.А., Покровский А.В.** Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 272 с.
2. **Рудаков И.А.** Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле // Изв. вузов. 2007. № 2(537). С. 46–55. (Математика.)
3. **Рудаков И.А.** Периодические решения нелинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями // Изв. РАН. 2006. № 1. С. 173–184. (Математика.)
4. **Brezis H., Nirenberg L.** Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems // Ann. Scuola Norm. Pisa. 1978. Vol. 5, № 2. P. 225–325.
5. **Feireisl E.** On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term // Czechosl. Math. J. 1988. Vol. 38, № 1. P. 78–87.
6. **Павленко В.Н., Петраш Т.А.** Периодические решения уравнения колебаний струны с разрывной нелинейностью // Вестн. ЧелГУ. 2011. Вып. 11, № 38(253). С. 61–64. (Физика.)
7. **Павленко В.Н.** Уравнения параболического типа с разрывной нелинейностью степенного роста // Вестн. ЧелГУ. 2008. Вып. 10, № 6(107). С. 49–53. (Математика. Механика. Информатика.)
8. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович [и др.]. М.: КомКнига, 2005. 216 с.
9. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

Павленко Вячеслав Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет
e-mail: pavlenko@csu.ru

Поступила 29.12.2012

Петраш Татьяна Андреевна
аспирант
Челябинский государственный университет
e-mail: ptanushkin@gmail.com

УДК 517.977

**ЧАСТИЧНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ОБЛАСТИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ — ДИСКРЕТНОЙ АБСОРБЦИИ¹****Г. П. Панасенко**

Рассмотрено уравнение диффузии — дискретной абсорбции, которое является приближенной моделью диффузии вещества в растворе, содержащем цепочку клеток, поглощающих это вещество: размеры клеток много меньше расстояний между ними, а эти расстояния h малы по сравнению с длиной цепочки. Уравнение диффузии — дискретной абсорбции содержит стандартное диффузионное слагаемое и дискретную точечную абсорбцию, описываемую суммой большого числа дельта-функций Дирака с носителями на неравномерной сетке, умноженных на неизвестную функцию (концентрацию). Исследуется возможность частичной асимптотической декомпозиции области для уравнения диффузии — дискретной абсорбции: сохранить дискретное описание абсорбции на части области и перейти к континуальному описанию на большей части области. Такое сочетание макроскопического и микроскопического описаний в одной модели характерно для многомасштабного моделирования. Получена оценка погрешности частично континуальной модели по отношению к исходной модели с полностью дискретной абсорбцией.

Ключевые слова: частичная асимптотическая декомпозиция, дискретно-континуальные модели, уравнение диффузии, оценка погрешности.

G. P. Panasenko. Partial asymptotic decomposition of the domain for the diffusion–discrete absorption equation.

We consider the diffusion–discrete absorption equation, which is an approximate model of the diffusion of a substance in a solution containing a chain of cells absorbing the substance; the size of the cells is much smaller than the distance h between them, and this distance is small compared to the length of the chain. The diffusion–discrete absorption equation contains the standard diffusion term and a discrete point absorption, which is described by the sum of a large number of Dirac delta functions with supports on nonuniform grid multiplied by an unknown function (concentration). We study the possibility of a partial asymptotic decomposition of the domain for the diffusion–discrete absorption equation: it is required to preserve the discrete description of the absorption on a part of the domain and pass to a continuous description on the greater part of the domain. This combination of the macroscopic and microscopic descriptions in one model is characteristic of multiscale modeling. We obtain an error estimate for the partially continuous model with respect to the original model with completely discrete absorption.

Keywords: partial asymptotic decomposition, discrete-continuum models, diffusion equation, error estimate.

1. Введение

Уравнение диффузии — дискретной абсорбции описывает стационарную диффузию с точечной абсорбцией. Эта модель дает одномерную аппроксимацию цепочки клеток, поглощающей питательное вещество, растворенное и диффундирующее в окружающей среде. Расстояние между клетками много больше размера самих клеток, но много меньше размеров всей цепочки. На клетки действует сила f_1 , в результате действия которой клетки смещаются: если изначально они распределены равномерно с шагом h , то под действием силы f_1 они распределяются согласно закону $y(x)$. Точечная абсорбция описывается слагаемым с коэффициентом, имеющим вид дельта-функций Дирака с носителем в центрах клеток. Таким образом, модель является гибридной: с континуальной диффузией и дискретной абсорбцией. Насколько нам известно, впервые математическое исследование такого уравнения проводилось в [13], где

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 00–00–00753), РФФИ-CNRS “Математическое моделирование заболеваний крови” (проект 10-01-91055), а также контракта 14.740.11.0875 федеральной целевой программы “Научные кадры инновационной России”.

были доказаны существование и единственность решения уравнения диффузии — дискретной абсорбции. При большом количестве клеток и шаге h , стремящемся к нулю, естественно аппроксимировать такую гибридную модель континуальной. Такое осреднение (точнее, континуализация) также содержится в [13]; показано, что оно приводит к классическому уравнению диффузии — абсорбции с переменным коэффициентом абсорбции; приводится формула для этого коэффициента, доказывается теорема, оценивающая погрешность осреднения; проводятся численные эксперименты, подтверждающие теоретические оценки погрешности. В данной статье исследуется возможность частичной асимптотической декомпозиции области для уравнения диффузии — дискретной абсорбции: сохранить дискретное описание абсорбции на части области и перейти к континуальному описанию на большей части области. Такое сочетание макроскопического и микроскопического описаний в одной модели характерно для многомасштабного моделирования [15]. Заметим, что идея сочетания разных масштабов в рамках одной модели близка к идее использования разномасштабных сеток в разностных схемах. Одной из первых работ в этом направлении была статья Арлена Михайловича Ильина [3], где для сингулярно возмущенных уравнений были предложены и обоснованы разностные схемы с равномерной по малому параметру оценкой сходимости.

Ранее асимптотический анализ дискретных моделей проводился в статье [1], где исследовалась их связь с континуальными моделями. Идея асимптотического вывода уравнений сплошной среды из атомистических моделей обсуждается в книгах [2; 5; 12], в статьях [9; 10]. Этот подход близок к многочисленным работам, обосновывающим численные методы, разностные схемы. Однако в этих работах по численным методам континуальные модели сводятся к дискретным, тогда как при переходе с микроуровня на макроуровень, наоборот, дискретные модели сводятся к континуальным. Осреднение разностных схем проводилось в [1; 4; 11; 14; 17] и [6]. Наконец, гибридные (частично дискретные, частично континуальные) модели рассматривались в [7; 8; 15; 16].

Подчеркнем, что рассматриваемое здесь уравнение диффузии — дискретной абсорбции есть лишь первое приближение к гибридным моделям для реальных задач, например, из гематологии, нестационарных, нелинейных систем с обратной связью. Однако на этой простейшей задаче можно апробировать различные методы решения с теоретическими оценками, в том числе метод осреднения (континуализации) и метод частичной асимптотической декомпозиции области.

2. Постановка задачи

Пусть $R > 0$, $-R < a < b < R$, $f_1 \in C[0, 1]$, $f_2 \in C[-R, R]$, $y : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ — возрастающая функция такая, что

$$\begin{cases} y''(x) = f_1(x), & x \in (0, 1), \\ y(0) = a, \\ y(1) = b. \end{cases} \quad (2.1)$$

Функция y считается далее известной. Обозначим через y^{-1} функцию, обратную y . Положим

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u''(x) - h \sum_{j=0}^k \alpha \delta(x - y(jh))u(x) = f_2(x), & x \in (-R, R), \\ u'(-R) = 0, \\ u(R) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\alpha, h > 0$, α — коэффициент абсорбции, $hk = 1$ и k — целые числа.

Введем пространство Соболева $H_{0R}^1 = \{\varphi \in H^1(-R, R) \mid \varphi(R) = 0\}$.

Определим решение задачи (2.2) как функцию $u \in H_{0R}^1$, которая для всех $\varphi \in H_{0R}^1$ удовлетворяет тождеству

$$-\int_{-R}^R u'(x)\varphi'(x)dx - \sum_{j=0}^k \alpha h u(y(jh))\varphi(y(jh)) = \int_{-R}^R f_2(x)\varphi(x) dx. \quad (2.3)$$

Теорема 1. *Задача (2.3) имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим линейный функционал $\Phi(\varphi) = -\int_{-R}^R f\varphi dx$. Этот функционал непрерывен в $L_2 = L_2(-R, R)$, так как

$$\left| -\int_{-R}^R f\varphi dx \right| \leq \|f\|_{L_2} \|\varphi\|_{L_2}.$$

Кроме того, Φ также непрерывен в норме $\|\varphi'\|_{L_2}$ в силу неравенства Пуанкаре — Фридрихса.

Введем новое скалярное произведение

$$(u, v) = \int_{-R}^R u'v' dx + \alpha h \sum_{j=0}^k u(y(jh))\varphi(y(jh))$$

и, соответственно, норму

$$\|u\|^2 = \|u'\|_{L_2}^2 + \alpha h \sum_{j=0}^k u^2(y(jh)). \quad (2.4)$$

Имеем

$$u(y(jh)) = -\int_{y(jh)}^R u'(x)dx,$$

поэтому $|u(y(jh))| \leq \sqrt{2R}\|u'\|_{L_2}$, и $\|u\|^2 \leq (1 + 2\alpha R)\|u'\|_{L_2}^2$, так как $hk = 1$. Отсюда норма (2.4) эквивалентна норме пространства H_{0R}^1 .

В силу теоремы Рисса — Фреше о представлении линейных непрерывных функционалов в гильбертовом пространстве существует единственная функция $u \in H_{0R}^1$ такая, что

$$\Phi(\varphi) = -\int_{-R}^R u'v' dx - \alpha h \sum_{j=0}^k u(y(jh))\varphi(y(jh)) \quad \forall \varphi \in H_{0R}^1.$$

Таким образом, существует единственная функция $u \in H_{0R}^1$ такая, что

$$-\int_{-R}^R u'\varphi' dx - \alpha h \sum_{j=0}^k u(y(jh))\varphi(y(jh)) = \int_{-R}^R f\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_{0R}^1.$$

Теорема доказана.

Как уже отмечалось выше, в работе [13] обоснована близость решения задачи (2.1), (2.2) к решению следующей задачи:

$$\begin{cases} \tilde{u}''(x) - \alpha \tilde{u}(x)(y^{-1}(x))' \chi_{[a,b]}(x) = f_2(x), & x \in (-R, R), \\ \tilde{u}'(-R) = 0, \\ \tilde{u}(R) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Доказана оценка $\|u - \tilde{u}\|_{H^1} = O(h)$.

Нашей целью в данной статье является обоснование близости решений задачи (2.1), (2.2) к решению следующей гибридной задачи частичной декомпозиции:

$$\begin{cases} \bar{u}''(x) - h \sum_{j=0}^k \alpha \delta(x - y(jh)) \bar{u}(x) = f_2(x), & x \in (-R, R) \setminus [c, d], \\ \bar{u}''(x) - \alpha \bar{u}(x) (y^{-1}(x))' \chi_{[c,d]}(x) = f_2(x), & x \in (c, d), \\ [\bar{u}](c) = 0, \quad [\bar{u}'](c) = 0, \quad [\bar{u}](d) = 0, \quad [\bar{u}'](d) = 0, \\ \bar{u}'(-R) = 0, \\ \bar{u}(R) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Здесь $a < c < d < b$ и c, d не являются значениями $y(jh)$, а $[f](c)$ и $[f](d)$ обозначают скачок функции f в точке c и точке d соответственно.

Существование и единственность решения этой задачи доказываются в полной аналогии с теоремой 1.

3. Сравнение дискретной и частично континуальной моделей

Докажем, что модели (2.1), (2.2) и (2.6) близки при малых h . Для этого сравним интегралы

$$I_1 = \int_c^x h \sum_{j=1}^k \alpha \bar{u}(z) \delta(z - y(jh)) \chi_{[c,d]}(z) dz$$

и

$$I_2 = \int_c^x \alpha \bar{u}(z) (y^{-1}(z))' \chi_{[c,d]}(z) dz$$

при $c \leq x \leq d$, когда $\chi_{[c,d]}(x) = 1$.

Имеем

$$I_1 = h \sum_{j: c \leq y(jh) \leq x} \alpha \bar{u}(y(jh)) = h \sum_{j: y^{-1}(c) \leq jh \leq y^{-1}(x)} \alpha \bar{u}(y(jh)) = \int_{y^{-1}(c)}^{y^{-1}(x)} \alpha \bar{u}(y(\theta)) d\theta + r_h,$$

где

$$r_h = \sum_{j: \frac{y^{-1}(c)}{h} \leq j \leq \frac{y^{-1}(x)}{h}} \int_{jh}^{jh+h} \alpha [\bar{u}(y(jh)) - \bar{u}(y(\theta))] d\theta + \int_{y^{-1}(x)}^{(j_0+1)h} \alpha \bar{u}(y(\theta)) d\theta.$$

Здесь j_0 — целая часть числа $\frac{y^{-1}(x)}{h}$.

Применяя теорему Лагранжа, получаем

$$|\bar{u}(y(jh)) - \bar{u}(y(\theta))| \leq \sup_{\theta \in [0,1]} |\bar{u}'(y(\theta))| |\theta - jh| \leq \sup_{x \in [c,d]} |\bar{u}'(x)| \sup_{\theta \in [0,1]} |y'(\theta)| h,$$

$$\left| \int_{y^{-1}(x)}^{(j_0+1)h} \alpha \bar{u}(y(\theta)) d\theta \right| \leq \alpha \sup_{x \in [c,d]} |\bar{u}(x)| h.$$

Следовательно,

$$|r_h| \leq Mh,$$

где

$$M = \alpha \left(\sup_{x \in [c,d]} |\bar{u}'(x)| \sup_{\theta \in [0,1]} |y'(\theta)| + \sup_{x \in [c,d]} |\bar{u}(x)| \right). \quad (3.1)$$

Производя замену $t = y(\theta)$ в интеграле $\int_{y^{-1}(c)}^{y^{-1}(x)} \alpha \bar{u}(y(\theta)) d\theta$, получаем

$$\int_{y^{-1}(c)}^{y^{-1}(x)} \alpha \bar{u}(y(\theta)) d\theta = \int_c^x \alpha \bar{u}(t) (y^{-1}(t))' dt.$$

Интегрируя уравнения (2.6) и (2.2) от $-R$ до x , имеем

$$\begin{cases} u'(x) - \int_{-R}^x h \sum_{j=0}^k \alpha u(\theta) \delta(\theta - y(jh)) d\theta = \int_{-R}^x f_2(\theta) d\theta, \\ u(R) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \bar{u}'(x) - \int_{-R}^x h \sum_{j=0}^k \alpha \bar{u}(\theta) \delta(\theta - y(jh)) (1 - \chi_{[c,d]}(\theta)) d\theta \\ - \int_{-R}^x \alpha \bar{u}(\theta) (y^{-1}(\theta))' \chi_{[c,d]}(\theta) d\theta = \int_{-R}^x f_2(\theta) d\theta, \\ \bar{u}(R) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Обозначим $w = \bar{u} - u$. Тогда, вычитая (3.2) из (3.3), имеем

$$w'(x) - \int_{-R}^x h \sum_{j=0}^k \alpha w(\theta) \delta(\theta - y(jh)) d\theta + I_1 - \int_c^x \alpha \bar{u}(\theta) (y^{-1}(\theta))' \chi_{[c,d]}(\theta) d\theta = 0.$$

С другой стороны,

$$I_1 - \int_c^x \alpha \bar{u}(t) (y^{-1}(t))' \chi_{[a,b]}(\theta) d\theta = r_h.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} w'(x) - \int_{-R}^x h \sum_{j=0}^k \alpha w(\theta) \delta(\theta - y(jh)) d\theta + r_h = 0, \\ w(R) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Умножая (3.4) на φ' , где $\varphi \in H_{0R}^1$, и интегрируя результат по $(-R, R)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R w' \varphi' dx - \int_{-R}^R \int_{-R}^x h \sum_{j=0}^k \alpha w(\theta) \delta(\theta - y(jh)) d\theta \varphi'(x) dx + \int_{-R}^R r_h(x) \varphi'(x) dx = 0, \\ \int_{-R}^R w' \varphi' dx + h \sum_{j=0}^k \alpha w(y(jh)) \varphi(y(jh)) = - \int_{-R}^R r_h(x) \varphi'(x) dx. \end{aligned}$$

Полагая $\varphi = w$, имеем

$$\|w'\|_{L_2}^2 + h \sum_{j=0}^k \alpha w^2(y(jh)) \leq \|r_h\|_{L_2} \|w'\|_{L_2},$$

$$\|w'\|_{L_2} \leq \|r_h\|_{L_2}.$$

По неравенству Пуанкаре — Фридрихса

$$\|w\|_{H^1} \leq \sqrt{2R^2 + 1} \|w'\|_{L_2} \leq \sqrt{2R^2 + 1} \|r_h\|_{L_2}.$$

Оценим теперь постоянную M (см. (3.1)). Имеем

$$y(x) = \int_0^x \int_0^t f_1(\theta) d\theta dt + a - x \int_0^1 \int_0^t f_1(\theta) d\theta dt + (b-a)x.$$

Следовательно,

$$y'(x) = \int_0^x f_1(\theta) d\theta + (b-a) - \int_0^1 \int_0^t f_1(\theta) d\theta dt.$$

Тогда

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |y'(x)| \leq |b-a| + 2\|f_1\|_{L_1}.$$

Для \bar{u} имеем

$$\|\bar{u}'\|_{L_2}^2 + \alpha \int_{-R}^R \bar{u}^2(x) (y^{-1}(x))' \chi_{[c,d]}(x) dx + h \sum_{j=0}^k \alpha \bar{u}^2(y(jh)) (1 - \chi_{[c,d]}(y(jh))) = - \int_{-R}^R f_2 \bar{u} dx.$$

Следовательно,

$$\|\bar{u}'\|_{L_2} \leq \|f_2\|_{L_2} R \sqrt{2}.$$

$$\|\bar{u}\|_{L_\infty} = \left\| \int_x^R \bar{u}'(t) dt \right\|_{L_\infty} \leq \sqrt{2R} \|\bar{u}'\|_{L_2} \leq 2R^{\frac{3}{2}} \|f_2\|_{L_2}.$$

Пусть

$$K_0 = \min_{x \in [0,1]} \int_0^x f_1(\theta) d\theta + (b-a) - \int_0^1 \int_0^t f_1(\theta) d\theta dt > 0.$$

Тогда

$$\bar{u}' = \int_{-R}^x h \sum_{j=0}^k \alpha \bar{u}(t) \delta(t - y(jh)) (1 - \chi_{[c,d]}(t)) dt + \alpha \int_{-R}^x \bar{u}(t) (y^{-1}(t))' \chi_{[c,d]}(t) dt + \int_{-R}^x f_2(t) dt,$$

откуда

$$\|\bar{u}'\|_{L_\infty} \leq \alpha \|\bar{u}\|_{L_\infty} \left(2R \max_{t \in [a,b]} (y^{-1}(t))' + kh \right) + \|f_2\|_{L_1} \leq \alpha \left(4R^{\frac{5}{2}} \frac{1}{K_0} + 2R^{\frac{3}{2}} \right) \|f_2\|_{L_2} + \|f_2\|_{L_1}.$$

Таким образом,

$$M = \alpha \left[\left(\left(\alpha \left(4R^{\frac{5}{2}} \frac{1}{K_0} + 2R^{\frac{3}{2}} \right) \|f_2\|_{L_2} + \|f_2\|_{L_1} \right) \right) (|b-a| + 2\|f_1\|_{L_1}) + 2R^{\frac{3}{2}} \|f_2\|_{L_2} \right]$$

и справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Справедлива следующая оценка*

$$\|u - \bar{u}\|_{H^1} \leq \sqrt{2R^2 + 1} \sqrt{2RM}h.$$

Эта теорема обосновывает частично осредненную модель (2.6) и возможность применения вычислительной стратегии частичной асимптотической декомпозиции области для уравнения диффузии — дискретной абсорбции: можно его осреднять на большей части отрезка (здесь на интервале (c, d)), а в каких-то местах оставлять дискретным, т. е. сочетать макро- и микро-масштабы (увеличения) в рамках одной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов Н.С.** Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221, № 3. С. 516–519.
2. **Борн М., Хуан Кунь.** Динамическая теория кристаллических решеток. М.: ИЛ, 1958. 488 с.
3. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных // Мат. заметки. Т. 6, № 2. 1969. С. 237–248.
4. **Козлов С.М.** Усреднение разностных схем. // Мат. сб. 1987. Т. 57. С. 351–369.
5. **Назаров С.А., Паукшто М.В.** Дискретные модели и осреднение в задачах теории упругости. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1984.
6. An adaptive finite element approach to atomic-scale mechanics — the quasicontinuum method / V.B. Shenoy, R. Miller, E.B. Tadmor, D. Rodney, R. Phillips, M. Ortiz // J. Mech. Phys. Solids. 1999. Vol. 47, no. 3. P. 611–642.
7. **Bessonov N., Volpert V.** 2006. Dynamic models of plant growth. Mathematics and Mathematical Modelling. Paris: Publibook, 2006. 68 p.
8. **Betoue Etoughe M., Panasenko G.** Partial homogenization of discrete models // Appl. Anal. 2008. Vol. 87, no. 12. P. 1425–1442.
9. **Blanc X., Le Bris C., Lions P.-L.** From molecular models to continuum mechanics // Arch. Ration. Mech. Anal. 2002. Vol. 164, no. 4. P. 341–381.
10. **Blanc X., Le Bris C., Legoll F.** Analysis of a prototypical multiscale method coupling atomistic and continuum mechanics // Math. Model. Numer. Anal.: M2AN. 2005. Vol. 39, no. 4. P. 797–826.
11. **Caillerie D., Muorad A., Raoult A.** Discrete homogenization in graphene sheet modeling // J. Elasticity. 2006. Vol. 84, no. 1. P. 33–68.
12. **Kunin I.A.** Elastic media with microstructure. I. One-dimensional models. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1982. 291 p. (Springer Ser. in Solid-State Sciences, vol. 26); Elastic media with microstructure. II. Three-dimensional models. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1983. 272 p. (Springer Ser. in Solid-State Sciences, vol. 44).
13. **Kurbatova P., Panasenko G., Volpert V.** Asymptotic numerical analysis of the diffusion-discrete absorption equation // Math. Meth. Appl. Sci. 2012. Vol. 35. P. 438–444.
14. **Orive R., Zuazua E.** Finite difference approximation of homogenization problems for elliptic equations // Multiscale Model. Simul. 2005. Vol. 4, iss. 1. P. 36–87 (electronic).
15. **Panasenko G.** Multi-scale modeling for structures and composites. Dordrecht: Springer, 2005. 398 p.
16. **Panasenko G.** The partial homogenization: continuous and semi-discretized versions // Math. Models Methods Appl. Sci. 2007. Vol. 17, no. 8. P. 1183–1209.
17. **Piatnitski A., Rémy E.** Homogenization of elliptic difference operators // SIAM J. Math. Anal. 2001. Vol. 33, no. 1. P. 53–83.

Панасенко Григорий Петрович

Поступила 14.11.2011

д-р физ.-мат. наук, профессор Университет Жан Моннэ,

Университетский Центр “Университеты Лиона” (Сент-Этьен, Франция)

Институт “Камий Жордан” CNRS

Директор Научно-Исследовательского Центра Математического Моделирования МОДМАД (Сент-Этьен, Франция)

УДК 519.21 : 519.635.2 : 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ¹

В. С. Парфененкова

Работа посвящена конструкции приближений броуновского движения в моделях, приводящих к стохастическим дифференциальным уравнениям. Для базовых задач математической физики — задач малых колебаний струны и теплопроводности стержня — показано, как можно определить и формализовать случайные возмущения. Для каждой из этих задач построена последовательность случайных величин, сходящаяся по распределению к броуновскому движению, описывающему случайные возмущения. Построенные приближения позволяют использовать их для нахождения приближенных решений стохастических задач.

Ключевые слова: задача Коши, броуновское движение, приближенные решения, непрерывные модели, биномиальные модели, центральная предельная теорема.

V. S. Parfenenkova. Investigation of stochastic problems of mathematical physics.

The paper is devoted to constructing approximations of the Brownian motion in models leading to stochastic differential equations. For fundamental problems of mathematical physics, namely, for the problem of small vibrations of a string and the problem of heat conduction in a rod, approaches to defining and formalizing random perturbations are shown. For each of these problems, a sequence of random variables is constructed that converges in distribution to the Brownian motion describing random perturbations. The constructed approximations can be used for finding approximate solutions of stochastic problems.

Keywords: Cauchy problem, Brownian motion, approximate solutions, continuous models, binomial models, central limit theorem.

1. Введение

Многочисленные модели в различных областях науки, техники и экономики приводят к дифференциальным уравнениям, коэффициенты и неоднородности которых могут содержать случайные составляющие, называемые шумом. Получаемые таким образом стохастические дифференциальные уравнения зачастую представляют собой более реалистичные математические модели по сравнению с детерминированными и являются важными для исследования.

Для задач такого рода “шум” естественно формализовать некоторым процессом $W(t)$, $t \geq 0$, с независимыми $W(t_i)$ в разные моменты времени. Однако это приводит к значительным трудностям, поскольку не удастся получить даже непрерывности такого процесса по t . Подход Ито к решению стохастических уравнений состоит в формализации слагаемых вида “шум” Δt через приращения некоторого процесса $W(t)$ и по сути сводит дифференциальное уравнение с шумом к интегральному уравнению с интегралом по $dW(t)$. Оказывается, что единственным примером $W(t)$, удовлетворяющим интуитивно понятным условиям непрерывности траекторий, независимости приращений по времени и условию нулевого математического ожидания, является броуновское движение. Среди первых монографий, описывающих подход Ито, следует выделить [2;3], однако наиболее удобным в контексте данной работы является изложение подхода Ито в [15]. Броуновское движение дифференцируемо лишь в обобщенном смысле, его обобщенная производная как раз и будет “шумом”; его называют белым шумом. При этом

¹Работа выполнена при поддержке программы Рособразования (проект 2.1.1/14118) и РФФИ (проект 10-0196003р.)

стохастическое уравнение в пространстве обобщенных функций можно записать в дифференциальной форме (см., например, [1; 13; 14]), но в данной работе мы будем оперировать только понятием броуновского движения и записывать задачи в приращениях.

В настоящей работе рассмотрены модели из математической физики с учетом случайных возмущений, приводящие к стохастическим задачам Коши с броуновским движением. В каждом конкретном случае показана структура броуновского движения, построены последовательности приближений к броуновскому движению и приближенных (по распределению) решений исходной задачи. В работе исследованы задача малых колебаний струны с учетом случайных возмущений и задачи распределения тепла в стержне со случайными возмущениями на границе и на боковой поверхности стержня.

В работе также приведена задача для цены акций в непрерывном времени и доказана теорема о сходимости решений, полученных в биномиальных моделях с учетом ненулевой процентной ставки, к геометрическому броуновскому движению, определяемому формулой Блэка — Шоулса. Несмотря на то что результаты о сходимости биномиальных моделей являются хорошо известными в финансовой математике (например, в [10] данный результат называется мультипликативным вариантом центральной предельной теоремы), важным представляется тот факт, что доказательство сходимости и приближения к броуновскому движению построено в работе таким же образом, как в задачах математической физики. Учитывая, что сам результат о сходимости к геометрическому броуновскому движению является известным, задача для моделирования цены акций рассмотрена в краткой форме. Более подробное изложение, но в случае нулевой процентной ставки, можно найти в [17].

Полученные в работе конкретные приближения к броуновскому движению позволяют использовать их в конструкции приближенных решений задачи Коши для стохастических дифференциальных уравнений наряду с другими численными методами типа модификации методов Эйлера и Монте-Карло для стохастических уравнений [17]. Настоящая работа не нацелена на исследование порядка точности получаемых приближенных решений, отметим лишь, что, как показано в монографии [4], большинство численных методов детерминированных дифференциальных уравнений, адаптированных к стохастическим, в том числе и только что упомянутые, имеют точность порядка $1/2$ (т. е. ошибка пропорциональна \sqrt{h} , корню из шага метода). В данной монографии показано, что для стохастических задач можно построить численные методы, имеющие точность h^γ вплоть до четвертого порядка. Подробное изложение теории численного решения стохастических задач можно найти в [12].

2. Стохастические задачи для процессов математической физики с учетом случайных возмущений

Перед тем как начать исследование указанных во введении задач, необходимо сформулировать основную теорему, на которой будет базироваться доказательство сходимостей, — центральную предельную теорему для серий независимых случайных величин (см., напр., [5]):

Центральная предельная теорема для серий. Пусть $\{\xi_{in}, n = 0, \dots, n_i; i = 0, \dots, \infty\}$ есть последовательность независимых в каждой серии случайных величин. Пусть F_{in} — функция распределения случайной величины ξ_{in} . Если для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и некоторого $\tau > 0$ выполняются условия:

- 1)
$$\sum_{n=0}^{n_i} P(|\xi_{in}| \geq \varepsilon) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0,$$
- 2)
$$\sum_{n=0}^{n_i} \left(\int_{|x| < \tau} x^2 dF_{in}(x) - \left(\int_{|x| < \tau} x dF_{in}(x) \right)^2 \right) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} b^2,$$

$$3) \sum_{n=0}^{n_i} \int_{|x| < \tau} x dF_{in}(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} a,$$

то функции распределения сумм $F_i = \sum_n \xi_{in}$ слабо сходятся² к функции распределения нормальной случайной величины $N(a, b)$.

Перейдем непосредственно к задачам. Постановка задач этого раздела похожа на постановку в работе [7], однако там стохастические уравнения фактически выводятся через уравнение Колмогорова, тогда как в настоящей работе стохастические уравнения получаются с помощью центральной предельной теоремы для серий: этот же подход использован для вывода уравнений финансовой математики и для всех этих моделей решение уравнений с построенным приближенным броуновским движением можно использовать как приближение к решению уравнений в непрерывном времени.

Задача о малых колебаниях струны с учетом возмущений. Рассмотрим задачу о положении струны, попавшей в перпендикулярный струне поток частиц, передающих при ударе импульс γ или $-\gamma$. Обозначим через T модуль силы натяжения, $u(x, t)$ — смещение струны от положения равновесия. Так как струна туго натянута, то речь идет о малых поперечных колебаниях. Тогда на $[x, x + \Delta x]$ имеем $T \sin(\theta_1) \approx T \operatorname{tg}(\theta_1) = -Tu_x(x, t)$, $T \sin(\theta_2) \approx T \operatorname{tg}(\theta_2) = Tu_x(x + \Delta x, t)$.

По второму закону Ньютона сила $F = ma$. При этом $ma(t) = d[mV(t)]/dt \approx (mV(t + \Delta t) - mV(t))/\Delta t$. В детерминированном случае (без учета случайностей) изменение импульса сил ΔI в некотором сечении за время Δt определяется равенством $\Delta I = mV(t + \Delta t) - mV(t) = F\Delta t$.

В случае, когда стержень не подвергается случайным возмущениям, уравнение для положения струны является общеизвестным и представляет собой гиперболическое уравнение в частных производных. Рассмотрим задачу с учетом случайных возмущений. Пусть изменение импульса сил ΔI на участке струны $[x, x + \Delta x]$ за время Δt происходит в соответствии с табл. 1. Здесь λ — константа, отражающая вероятность удара за единицу времени.

Т а б л и ц а 1

Величина изменения импульса	Вероятность изменения
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t + \gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t$
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t - \gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t$
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t$	$1 - 2\lambda\Delta t$

Покажем, что в этом случае в уравнение в частных производных для положения струны добавится стохастическое слагаемое — броуновский лист.

Изменение импульса сил ΔI можно разбить на две составляющие: ΔI_1 , равная $(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t$ с вероятностью единица, и ΔI_2 , равная значению $+\gamma\sqrt{\Delta x}$ с вероятностью $\lambda\Delta t$, значению $-\gamma\sqrt{\Delta x}$ с вероятностью $\lambda\Delta t$ и нулю с вероятностью $(1 - 2\lambda\Delta t)$.

Первая составляющая $\Delta I_1 = \Delta_{[x, x + \Delta x], [t, t + \Delta t]} I_1$ на каждом $([x, x + \Delta x], [t, t + \Delta t])$ является постоянной величиной: $E[\Delta I_1] = (Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t$, $Var[\Delta I_1] = 0$. Исследуем вторую — случайную составляющую ΔI_2 :

$$E[\Delta I_2] = +\gamma\sqrt{\Delta x}\lambda\Delta t - \gamma\sqrt{\Delta x}\lambda\Delta t + 0 \cdot (1 - 2\lambda\Delta t) = 0,$$

$$\begin{aligned} Var[\Delta I_2] &= E[\Delta I - E\Delta I]^2 = E[\Delta I^2] - (E[\Delta I])^2 \\ &= \gamma^2\Delta x\lambda\Delta t + \gamma^2\Delta x\lambda\Delta t + 0 \cdot (1 - 2\lambda\Delta t) - 0^2 = 2\gamma^2\lambda\Delta t\Delta x. \end{aligned}$$

²Под слабой сходимостью F_i к F ($F_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} F$) мы понимаем сходимость $F_i(x)$ к $F(x)$ во всех точках x непрерывности функции $F(x)$.

Покажем, что ΔI_2 распределена по нормальному закону $N(0, \sqrt{2\gamma^2 \lambda \Delta t \Delta x})$. Применим центральную предельную теорему для серий, рассматривая разбиение участка струны $[x, x + \Delta x]$ на i равновеликих полуинтервала. В качестве независимых в каждой серии случайных величин ξ_{in} рассмотрим импульс, приобретенный струной в результате ударов, попавших на n -й полуинтервал за время $[t, t + \Delta t]$:

$$\xi_{in} = \Delta_{[x + \frac{n}{i} \Delta x, x + \frac{n+1}{i} \Delta x], [t, t + \Delta t]} I_2. \quad (1)$$

Для выбранных $\{\xi_{in}, n = 0, \dots, n_i; i = 0, \dots, \infty\}$ все условия центральной предельной теоремы для серий выполнены, поэтому функция распределения от ΔI_2 сходится поточечно к нормальному распределению. Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_{in} = \Delta_{[x, x + \Delta x], [t, t + \Delta t]} I_2 = \Delta_{[x, x + \Delta x], [t, t + \Delta t]} I_2$, значит, функция распределения от $\Delta_{[x, x + \Delta x], [t, t + \Delta t]} I_2$ имеет распределение $N(0, \sqrt{2\gamma^2 \lambda \Delta t \Delta x})$.

Учитывая, что ΔI_1 и ΔI_2 независимы, получим, что функция распределения от $\Delta I = \Delta I_1 + \Delta I_2$ на промежутке $[x, x + \Delta x]$ за время $[t, t + \Delta t]$ совпадает с функцией распределения от $[(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t] + \sqrt{2\gamma^2 \lambda} \eta \sqrt{\Delta t \Delta x}$, где распределение η является стандартным нормальным, т. е. $N(0, 1)$.

Покажем, что при Δt и Δx , сходящихся к нулю, случайные величины $\eta \sqrt{\Delta t \Delta x}$ сходятся к приращению броуновского листа (brownian sheet) $W(x, t)$, определение которого для удобства приведем ниже (см., например, [11]).

О п р е д е л е н и е. Пусть μ — случайная мера на \mathbb{R}_+^2 обладает следующими свойствами:

1) Для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}_+^2$ случайная величина $\mu(A)$ нормально распределена с нулевым математическим ожиданием и вариацией, равной площади множества A , т. е. μ является гауссовой случайной мерой на \mathbb{R}_+^2 .

2) Для непересекающихся множеств A_1 и A_2 случайные величины $\mu(A_1)$ и $\mu(A_2)$ независимы и $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Тогда случайная величина $W(x, t) = \mu([0, x] \times [0, t])$ называется *броуновским листом*.

Известно, что броуновский лист непрерывен по x и по t , однако не дифференцируем ни в одной точке. Заметим, что аналогично можно определить броуновский лист на \mathbb{R}^2 и на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Броуновский лист можно представлять себе как броуновское движение для двумерной случайной величины.

Покажем, что $\eta \sqrt{\Delta t \Delta x}$ стремится к приращению броуновского листа $W(x, t)$. Для этого положим $\tilde{W}(x, t) = \eta \sqrt{t \cdot x}$, тогда можно найти случайную меру $\tilde{\mu}$ со свойствами 1)–2), такую что $\tilde{W}(x, t) = \tilde{\mu}([0, x] \times [0, t])$. Таким образом, по определению $\tilde{W}(x, t)$ является броуновским листом. Имеет место двойное равенство

$$\eta \sqrt{\Delta t \Delta x} = \tilde{W}(\Delta x, \Delta t) = \tilde{\mu}([0, \Delta x] \times [0, \Delta t]).$$

Зафиксируем точки t и x и осуществим сдвиг центра координат из точки $[0, 0]$ в точку $[x, t]$. При этом свойства меры 1)–2) сохраняются. Меру в сдвинутой системе координат обозначим через μ . Имеет место связь между мерами

$$\tilde{\mu}([0, \Delta x] \times [0, \Delta t]) = \mu([x, x + \Delta x] \times [t, t + \Delta t]).$$

Воспользуемся свойством 2) меры, имеем

$$\begin{aligned} \mu([x, x + \Delta x] \times [t, t + \Delta t]) &= \mu([0, x + \Delta x] \times [0, t + \Delta t]) - \mu([0, x] \times [0, t]) \\ &\quad - \mu([0, x] \times [t, t + \Delta t]) - \mu([x, x + \Delta x] \times [0, t]). \end{aligned}$$

Теперь определим случайную величину $W(x, t) = \mu[0, \Delta x] \times [0, \Delta t]$. По определению $W(x, t)$ является броуновским листом. Первые два слагаемых в правой части уравнения превратятся в приращение $W(x, t)$. Покажем, что оставшиеся два слагаемых пойдут к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$. Прделав аналогичные процедуры сдвига начала координат, получим $W_1[x, \Delta t] :=$

$\mu_1([0, x] \times [0, \Delta t]) = \mu([0, x] \times [t, t + \Delta t])$ (сдвиг центра координат из точки $[0, 0]$ в точку $[0, t]$), $W_2[\Delta x, t] := \mu_2([0, \Delta x] \times [0, t]) = \mu([x, x + \Delta x] \times [0, t])$ (сдвиг центра координат из точки $[0, 0]$ в точку $[x, 0]$).

В итоге получаем

$$\eta\sqrt{\Delta t \Delta x} = W(x + \Delta x, t + \Delta t) - W(x, t) - W_1(x, \Delta t) - W_2(\Delta x, t),$$

где $W_1(x, \Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, $W_2(\Delta x, t) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$.

Теперь, учитывая, что импульс равен произведению массы на скорость, получим, что изменение импульса может быть представлено в виде $\Delta I = \rho \Delta x (u_t(x, t + \Delta t) - u_t(x, t))$. Приравнявая полученные представления ΔI , имеем

$$\begin{aligned} \rho \Delta x (u_t(x, t + \Delta t) - u_t(x, t)) &= [(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t] \\ &+ \sqrt{2\gamma^2 \lambda} [W(x + \Delta x, t + \Delta t) - W(x, t)] + d(\Delta x, \Delta t), \end{aligned}$$

где $W(x, t)$ — броуновский лист по двумерной переменной (x, t) , а случайная величина $d(\Delta x, \Delta t)$ стремится к нулю при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$. Отсюда, в предположении существования вторых производных u_{tt} и u_{xx} , получаем следующий результат.

Теорема 1. *Задача Коши для уравнения малых колебаний струны с учетом случайных возмущений, определенных в табл. 1, может быть записана в приращениях следующим образом:*

$$\rho u_{tt}(x, t) dt dx = Tu_{xx}(x, t) dt dx + \sqrt{2\gamma^2 \lambda} dW(x, t), \quad t \geq t_0, \quad u(x, t_0) = u_1(x), \quad u_t(x, t_0) = u_2(x),$$

где $W(x, t)$ — броуновский лист.

Данное уравнение является интегральным уравнением (по t и по x), коротко записанным в форме Ито (в форме приращений). Приращение броуновского листа в уравнении отражает приращение импульса, связанного со случайными силами, вызывающими случайные колебания.

С учетом результатов [8; 18] о представлении броуновского листа $W(x, t)$ в виде произведения броуновских движений по пространственной и временной переменной полученный процесс $W(x, t)$ можно рассматривать как гильбертово-значный винеровский процесс (бесконечномерное броуновское движение) по переменной t (см., например, [1; 16]), т. е. винеровский процесс по переменной t со значениями в пространстве функций, зависящих от x , в данном случае пространств типа соболевских.

З а м е ч а н и е 1. В данной задаче, рассматривая изменение импульса в табл. 1, вывели итоговое уравнение, содержащее броуновский лист. Оно является интегральным по обеим переменным — и по t , и по x . Покажем, что, варьируя значения величины изменения импульса и вероятности, можно получить уравнения с броуновским движением как по переменной t , так и по переменной x и даже просто детерминированные.

Если изменение импульса ΔI распределено как указано в табл. 2, то при помощи аналогичных рассуждений доказываем, что случайная величина $\Delta_{[x, x + \Delta x], [t, t + \Delta t]} I_2 = \Delta I_2$ имеет

Т а б л и ц а 2

Величина изменения импульса	Вероятность изменения
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t + \gamma \Delta x$	$\lambda \Delta t$
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t - \gamma \Delta x$	$\lambda \Delta t$
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t$	$1 - 2\lambda \Delta t$

Т а б л и ц а 3

Величина изменения импульса	Вероятность изменения
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t + \gamma(\Delta x)^2$	$\lambda\Delta t$
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t - \gamma(\Delta x)^2$	$\lambda\Delta t$
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t$	$1 - 2\lambda\Delta t$

Т а б л и ц а 4

Величина изменения импульса	Вероятность изменения
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t + \gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t^2$
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t - \gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t^2$
$(Tu_x(x + \Delta x, t) - Tu_x(x, t))\Delta t$	$1 - 2\lambda\Delta t^2$

распределение $N(0, \sqrt{2\gamma^2\lambda\Delta t\Delta x^2})$ и представима в виде $\Delta I_2 = \sqrt{2\gamma^2\lambda}(\eta\sqrt{\Delta t})\Delta x \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} dW(t)dx$. В итоге приходим к стохастическому уравнению в приращениях

$$\rho u_{tt}(x, t)dt = Tu_{xx}(x, t)dt + \sqrt{2\gamma^2\lambda}dW(t),$$

где $W(t)$ — броуновское движение. Уравнение является интегральным по переменной t .

Если изменение импульса ΔI распределено в соответствии с данными табл. 3, то при помощи аналогичных рассуждений доказываем, что случайная величина ΔI_2 имеет распределение $N(0, \sqrt{2\gamma^2\lambda\Delta t\Delta x^4})$ и представима в виде $\Delta I_2 = \sqrt{2\gamma^2\lambda}(\eta\sqrt{\Delta t})(\Delta x)^2 \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} dW(t)(dx)^2$.

В итоге приходим к стохастическому уравнению в приращениях

$$\rho u_{tt}(x, t)dt = Tu_{xx}(x, t)dt + \sqrt{2\gamma^2\lambda}dW(t)dx,$$

которое является детерминированным дифференциальным уравнением (достаточно сначала зафиксировать Δt и устремить $\Delta x \rightarrow 0$)

$$\rho u_{tt}(x, t) = Tu_{xx}(x, t).$$

Также отметим, что если менять степень по временной переменной, то можно получить уравнение с броуновским движением по пространственной переменной. Например, в соответствии с табл. 4 получим стохастическое уравнение в приращениях

$$\rho u_{tt}(x, t)dx = Tu_{xx}(x, t)dx + \sqrt{2\gamma^2\lambda}dW(x),$$

где $W(x)$ — броуновское движение. Уравнение является интегральным по переменной x .

Задача о теплопроводности стержня с учетом случайных возмущений на боковой поверхности. Рассмотрим задачу о переносе тепла внутри стержня. Каждое сечение стержня считаем изотермическим. Пусть $u(x, t)$ — температура стержня в сечении x в момент времени t . Стержень, подвергаясь случайному тепловому воздействию (аналогично случайным ударам для струны), получает количество тепла γ или $-\gamma$. Здесь можно провести аналогичные предыдущей задаче рассуждения. Прделаем это кратко. По закону изменения количества тепла в стержне за время Δt в сечении x имеем $\Delta Q = cm\Delta u$, где c — удельная теплоемкость, m — масса стержня. Пусть q — количество тепла, переносимого за единицу времени через единичную площадку в положительном направлении. Если направление противоположно, то соответствующее слагаемое берем со знаком минус. По закону Фурье $q = -\mu u_x$. Пусть изменение количества тепла в стержне распределено в соответствии с данными табл. 5, здесь λ — константа, отражающая вероятность теплового воздействия за единицу времени.

Т а б л и ц а 5

Изменение количества тепла	Вероятность изменения
$(\mu u_x(x + \Delta x, t) - \mu u_x(x, t))S\Delta t + \gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t$
$(\mu u_x(x + \Delta x, t) - \mu u_x(x, t))S\Delta t - \gamma\sqrt{\Delta x}$	$\lambda\Delta t$
$(\mu u_x(x + \Delta x, t) - \mu u_x(x, t))S\Delta t$	$1 - 2\lambda\Delta t\Delta x$

Т а б л и ц а 6

Изменение температуры	Вероятность изменения
$\Delta b = -\gamma\sqrt{\Delta t}$	λ
$\Delta b = \gamma\sqrt{\Delta t}$	λ
$\Delta b = 0$	$1 - 2\lambda$

Изменение количества тепла ΔQ может быть записано следующим образом:

$$\Delta Q = c\rho(u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t))S\Delta x.$$

Далее, почти дословно повторяя рассуждения предыдущей задачи, получаем

$$c\rho S(u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t))\Delta x = \mu S(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t))\Delta t + \gamma\sqrt{2\lambda}\eta\sqrt{\Delta t\Delta x},$$

здесь η — случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение. Аналогично предыдущей задаче доказывается, что $\eta\Delta t\Delta x$ стремится к приращению броуновского листа $W(x, t)$ по двумерной переменной $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. В предположении существования u_t и u_{xx} , справедлива

Теорема 2. *Задача Коши для распределения тепла в стержне с учетом случайных возмущений, определенных в табл. 5, может быть записана в приращениях следующим образом:*

$$c\rho S u_t(x, t) dt dx = \mu S u_{xx}(x, t) dt dx + \gamma\sqrt{2\lambda} dW(x, t), \quad t \geq t_0, \quad u(x, t_0) = u_1(x), \quad u_t(x, t_0) = u_2(x),$$

где $W(x, t)$ — броуновский лист.

Заметим, что аналогично задаче о колебаниях струны, варьируя величину изменения количества тепла и вероятности, можно получить уравнения с одномерным броуновским движением по любой из переменных и даже просто детерминированные.

Задача о теплопроводности стержня с учетом случайных возмущений на границе. При исследовании предыдущих двух задач мы не подчеркивали специфику поведения на границе, т. е. считали, что струна или стержень бесконечны. Теперь мы исследуем задачу о распределении тепла в стержне в другой постановке, полагая, что стенки стержня изолированы, и учитывая в качестве внешних воздействия на концах стержня. Без ограничения общности рассматриваем задачу на отрезке $[0, 1]$. Температуру левого конца стержня варьируем, на правом конце поддерживаем нулевую температуру. Покажем, что случайность, в отличие от предыдущей задачи, появится не в самом уравнении, а в граничном условии на левом конце. Воспользовавшись законом изменения количества тепла и законом Фурье, выводим равенство $c\rho S \Delta x (u(\zeta, t + \Delta t) - u(\zeta, t)) = S \Delta t (\mu u_x(x + \Delta x, t) - \mu u_x(x, t))$, где ζ — некоторая промежуточная точка. Перейдем к пределу при Δt и Δx , стремящихся к нулю, получим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$c\rho u_t(x, t) dt dx = \mu u_{xx}(x, t) dt dx, \quad u(x, 0) = \alpha(x), \quad u(0, t) = b(t), \quad u(1, t) = 0,$$

где $b(t)$ — некоторая заданная случайная функция. Первоначальное распределение температуры $\alpha(x)$ в стержне считаем известным. Предположим, что случайная величина $\Delta b = b(t) - b(t - \Delta t)$ имеет распределение, представленное в табл. 6. Тогда $E[\Delta b] = 0$, $Var[\Delta b] = 2\lambda\gamma^2\Delta t$.

Рассмотрим некоторый промежуток времени $[t, t + \Delta t]$. Пусть $\xi_{in} = \Delta_{[t+\frac{n}{i}\Delta t, t+\frac{n+1}{i}\Delta t]}b$. Применим центральную предельную теорему для серий. Проведя аналогичные предыдущим задачам рассуждения, получаем, что стохастическое дифференциальное уравнение для функции изменения температуры на левом конце стержня имеет вид $db(t) = \gamma\sqrt{2\lambda}dW(t)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Распределение тепла в стержне с учетом случайного внешнего воздействия на границу, определенного в табл. 6, может быть записано в виде следующей стохастической системы:*

$$\begin{cases} u_t(x, t)dtdx = \frac{\mu}{c\rho}u_{xx}(x, t)dtdx, \\ u(x, 0) = \alpha(x), \\ u(0, t) = b(t): db(t) = \gamma\sqrt{2\lambda}dW(t), \quad b(0) = b_0 = \alpha(0), \\ u(1, t) = 0, \end{cases}$$

где $W(t)$ — броуновское движение.

В данном случае получено броуновское движение от одномерной переменной $t \in \mathbb{R}_+$, так как рассматриваемая случайность имела зависимость только от временной координаты. Отметим, что в общем случае случайность может входить как в итоговое уравнение, так и в оба граничных условия.

З а м е ч а н и е 2 (о существовании и единственности рассмотренных задач). Единственность решений всех рассмотренных в этом разделе задач вытекает из стандартных рассуждений от противного.

Существование решений для уравнения теплопроводности с броуновским движением по t следует из [6, теорема 1.1]. Существование решений для уравнения колебаний струны с броуновским движением по t получается аналогично через сведение к системе двух уравнений, каждое с производной первого порядка по переменной t . Другой способ доказательства существования дает рассмотрение изучаемых уравнений как абстрактных уравнений первого порядка с оператором A в гильбертовом пространстве H в форме Ито (см., например, [1; 16]) — для уравнения теплопроводности с оператором A , равным оператору дифференцирования d^2/dx^2 в пространстве $H = L_2(\mathbb{R})$, для уравнения колебаний с соответствующим матричным оператором в пространстве $H = L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$. Существование решения в случае броуновского листа можно получить, рассматривая вместо пространства L_2 пространства Иванова [1], которые в случае дифференциального оператора совпадают с соболевскими пространствами.

3. Стохастическая задача Коши для цен акций

Рассмотрим биномиальную модель цены акций (пакета акций) с учетом ненулевой процентной ставки r . Развивая идеи [17], введем понятие риск-нейтрального случайного блуждания, при этом риск-нейтральные вероятности берутся с учетом процентной ставки. Построим приближения к решению задачи Коши для уравнения цены акций в модели непрерывного времени

$$dS(t) = rS(t) + \sigma S(t)dW(t), \quad t \geq 0, \quad S(0) = S_0, \quad (2)$$

по серии биномиальных моделей.

Рассмотрим биномиальную it -периодную модель цены акций на временном промежутке $[0, t]$ с повышающим множителем $u_i = \exp(\sigma/\sqrt{i})$ и понижающим множителем $d_i = -\exp(\sigma/\sqrt{i})$, где σ — положительная константа, которая определяет волатильность³ предельной цены акции. То есть $u_i = \frac{S_1(up)}{S_0} = \frac{S_2(up)}{S_1} = \dots$, $d_i = \frac{S_1(down)}{S_0} = \frac{S_2(down)}{S_1} = \dots$, где событие up означает повышение цены акции на текущем шаге биномиальной модели, $down$ — понижение.

³Статистический показатель, характеризующий тенденцию изменчивости цены, мера риска использования финансового инструмента (акции) за заданный период времени. Чаще всего вычисляется среднегодовая волатильность.

Если $r \geq 0$ — процентная ставка, то r/i — процентная ставка за $1/it$ -ю промежутка $[0, t]$. Для обеспечения безарбитражности модели считаем, что $0 < d < 1+r < u$, и риск-нейтральные вероятности определяем следующим образом:

$$\tilde{p}_i = \frac{1 + \frac{r}{i} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{i}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{i}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{i}}}}, \quad \tilde{q}_i = \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{i}}} - 1 - \frac{r}{i}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{i}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{i}}}}.$$

Тогда имеет место равенство $(1+r)S_0 = \tilde{p}_i S_1(up) + \tilde{q}_i S_1(down)$, что и подтверждает безарбитражность.

Пусть $\omega^{(i)} = (\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \dots, \omega_n^{(i)})$ — случайный вектор, где $\omega_l^{(i)}$ принимает значение 1 или -1 с вероятностями \tilde{p}_i и \tilde{q}_i , соответственно. Можно проверить, что $E[\omega_l^{(i)}] = \tilde{p}_i - \tilde{q}_i$, $Var[\omega_l^{(i)}] = 4\tilde{p}_i\tilde{q}_i$.

Введем $L_n, n = 0, 1, 2, \dots$ — риск-нейтральные случайные блуждания: $L_0 := 0, L_n := \sum_{l=1}^n \omega_l^{(i)}$. Отметим, что приращения L_n по непересекающимся интервалам времени независимы. Воспользовавшись тем, что $E[\omega_l^{(i)} \cdot \omega_j^{(i)}] = (\tilde{p}_i - \tilde{q}_i)$ при $l \neq j$, а $E[(\omega_l^{(i)})^2] = 1$, получаем равенства $E[L_{n_{l+1}} - L_{n_l}] = (\tilde{p}_i - \tilde{q}_i)(n_{l+1} - n_l)$, $Var[L_{n_{l+1}} - L_{n_l}] = 4\tilde{p}_i\tilde{q}_i(n_{l+1} - n_l)$.

Для целых it определим риск-нейтральное масштабированное случайное блуждание $W^{(i)}(t) := L_{it}/\sqrt{i}$: если it не является целым, то значение $W^{(i)}(t)$ определяем как линейную интерполяцию между двумя ближайшими целыми точками is и iu . Приращения $W^{(i)}(t)$ являются независимыми, и имеют место равенства

$$E[W^{(i)}(t) - W^{(i)}(s)] = \sqrt{i}(\tilde{p}_i - \tilde{q}_i)(t - s), \quad Var[W^{(i)}(t) - W^{(i)}(s)] = 4\tilde{p}_i\tilde{q}_i(t - s). \quad (3)$$

Используя введенные случайные процессы и центральную предельную теорему, докажем сходимость решений, полученных в биномиальной модели, к решениям уравнения (2).

Теорема 4. *Цена акций $S_i(t)$, полученная в биномиальной модели с риск-нейтральными мерами \tilde{p}_i, \tilde{q}_i , взятыми с учетом процентной ставки, стремится по распределению при $i \rightarrow \infty$ к геометрическому броуновскому движению $S(t) = S(0) \exp(\sigma W(t) + (r - \sigma^2/2)t)$, которое является ценой акций в модели непрерывного времени, т. е. решением задачи (2).*

Доказательство. Рассмотрим значение цены акций в построенной биномиальной модели при некотором фиксированном значении i . Пусть количество повышений равно U_{it} , а количество понижений равно D_{it} . Тогда $it = U_{it} + D_{it}$, $L_{it} = U_{it} - D_{it}$. Таким образом, $S_i(t) = S(0)u_i^{U_{it}}d_i^{D_{it}} = S(0)e^{\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}}$, где $S(0)$ — начальное значение цены акции. Используя разложение в ряд Тейлора, можно проверить, что $E\left[\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\right] \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$, $Var\left[\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\right] \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sigma^2t$.

Теперь покажем, что $(\sigma/\sqrt{i})L_{it}$ сходятся по распределению к $(\sigma W(t) + (r - \sigma^2/2)t)$, где $W(t)$ — броуновское движение. Для этого воспользуемся центральной предельной теоремой для серий при $\xi_{in} = (\sigma/\sqrt{i})\omega_n^{(i)}$, $n = 1, 2, \dots, it$. В каждой серии (т. е. ξ_{in} , $n = 1, 2, \dots, it$) эти случайные величины независимы, так как определяют поведение в разные промежутки времени. Имеем

$$P(\omega_n^{(i)} = -1) = \frac{1 + \frac{r}{i} - e^{-\sigma/\sqrt{i}}}{e^{\sigma/\sqrt{i}} - e^{-\sigma/\sqrt{i}}}, \quad P(\omega_n^{(i)} = 1) = \frac{e^{\sigma/\sqrt{i}} - 1 - \frac{r}{i}}{e^{\sigma/\sqrt{i}} - e^{-\sigma/\sqrt{i}}}.$$

Можно проверить, что условия центральной предельной теоремы выполнены и

$$E\left[\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\right] \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \quad Var\left[\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\right] \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sigma^2t.$$

Учитывая равенства

$$\sum_{n=0}^{it} \int_{|x|<\tau} x dF_{in}(x) = E\left[\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\right], \quad \sum_{n=0}^{it} \left(\int_{|x|<\tau} x^2 dF_{in}(x) - \left(\int_{|x|<\tau} x dF_{in}(x) \right)^2 \right) = Var\left[\frac{\sigma}{\sqrt{i}}L_{it}\right],$$

получаем, что при каждом $t \geq 0$ случайные величины $(\sigma/\sqrt{i}) \sum_{n=0}^{it} \omega_n^{(i)} = (\sigma/\sqrt{i})L_{it}$ сходятся по распределению к нормально распределенной случайной величине $\sigma W(t)$, сдвинутой на $(r - \sigma^2/2)t$, где $W(t)$ имеет распределение $N(0, \sqrt{t})$. Таким образом, имеет место сходимость $(\sigma/\sqrt{i})L_{it}$ по распределению к $(\sigma W(t) + (r - \sigma^2/2)t)$. Следовательно, $\log(S_i(t)) = \log(S(0)) + (\sigma/\sqrt{i})L_{it}$ при $i \rightarrow \infty$ при каждом $t \geq 0$ сходятся по распределению к $\log(S(t)) = \log(S(0)) + \sigma W(t) + (r - \sigma^2/2)t$, что эквивалентно сходимости по распределению $S_i(t)$ к $S(t) = S(0) \exp(\sigma W(t) + (r - \sigma^2/2)t)$.

Можно проверить, что полученный процесс $W(t)$, $t \geq 0$ является броуновским движением. Итак, решения биномиальной модели с учетом процентной ставки сходятся по распределению к геометрическому броуновскому движению, которое является решением уравнения (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Альшанский М.А., Мельникова И.В.** Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач. // Мат. сб. Т. 202, № 11. 2011. С. 3–31.
2. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 654 с.
3. **Ито К., Маккин Г.** Диффузионные процессы и их траектории / ред. Е.Б. Дынкина. Москва: Мир, 1968. 394 с.
4. **Кузнецов Д.Ф.** Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. СПб: Изд-во С.-петерб. гос. ун-та, 2001. 712 с.
5. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит, 1987. 31 с. (Теория вер. и мат. стат; вып. 39.)
6. **Розовский Б.Л.** О стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных // Мат. сб. 1975. Т. 96(138), № 2. С. 314–341.
7. **Allen E.J.** Derivation of stochastic partial differential equations // Stoch. Anal. Appl. 2008. Vol. 26, no. 2. P. 357–378.
8. **Cabana E.M.** The vibrating theorem forced by white noise // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. 1970. Vol. 15. P. 111–130.
9. **Curtain R.F., Pritchard A.J.** Infinite dimensional linear systems theory. New York: Springer-Verlag, 1978. 297 p. (Lect. Notes in Control and Information Sciences; vol. 8.)
10. **Follmer H., Schied A.** Stochastic finance. An introduction in discrete time. Berlin; New York: Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 2002. 422 p.
11. **Hamza K., Klebaner F.C.** On solutions of first order stochastic partial differential equations // Far East J. Theor. Statist. 2006. Vol. 1, no. 1. P. 13–25.
12. **Milstein G.N., Tretyakov M.V.** Stochastic numerics for mathematical physics. New York: Springer-Verlag, 2004. 594 p.
13. **Melnikova I.V.** Regularized solutions to Cauchy problems well posed in the extended sense // Integral Transforms Spec. Funct. 2006. Vol. 17, no. 2–3. P. 185–191.
14. **Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A.** Abstract stochastic equations II. Solutions in spaces of abstract stochastic distributions. // J. Math. Sci. 2003. Vol. 116, no. 5. P. 3620–3656.
15. **Oksendal B.** Stochastic differential equations: an introduction with applications. 5ed. New York: Springer-Verlag, 2000. 352 p.
16. **Prato G. Da, Zabczyk J.** Stochastic equations in infinite dimensions. New York: Cambridge Univ. Press, 1992. 454 p. (Encycl. Math. Appl.; vol. 45.)
17. **Shreve S.E.** Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models. New York: Springer-Verlag, 2004. 550 p.
18. **Walsh J.B.** An introduction to stochastic partial differential equations // Lect. Notes in Math. Vol. 1180. Berlin: Springer, 1986. P. 265–439.

Парфененкова Валентина Сергеевна
 мл. науч. сотрудник
 аспирант
 Уральский федеральный университет
 e-mail: vika8887@e1.ru

Поступила 13.09.2010

УДК 519.63

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НАСЛЕДСТВЕННОСТЬЮ¹

В. Г. Пименов, Е. Е. Таширова

Сконструировано семейство сеточных методов для численного решения волнового уравнения с запаздыванием общего вида на основе идеи разделения текущего состояния и функции-предыстории. Получена теорема о порядке сходимости методов с помощью вложения в общую разностную схему с последствием. Приводятся результаты расчетов тестовых примеров с постоянным и переменным запаздыванием.

Ключевые слова: численные методы, волновое уравнение, запаздывание, разностные схемы, интерполяция, экстраполяция, порядок сходимости.

V. G. Pimenov, E. E. Tashirova. Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type.

A family of grid methods is constructed for the numerical solution of a wave equation with time delay of general form; the methods are based on the idea of separating the current state and the prehistory function. A theorem on the order of convergence of the methods is obtained by means of embedding into a general difference scheme with aftereffect. Results of calculating test examples with constant and variable time delay are presented.

Keywords: numerical methods, wave equation, time delay, difference schemes, interpolation, extrapolation, order of convergence.

1. Введение. Постановка задачи

Эволюционные уравнения, к числу которых относятся и уравнения гиперболического типа, во многих математических моделях окружающей действительности могут содержать эффекты запаздывания различных видов. Вопросы качественной теории таких уравнений в настоящее время активно изучаются [1]. В то же время численные алгоритмы решения эволюционных уравнений с наследственностью развиты недостаточно. В работе [4] для уравнений параболического типа с запаздыванием общего вида были изучены некоторые разностные схемы. Подход этой работы был основан на применении как общей теории разностных схем [5], так и теории численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений [2; 3]. В настоящей работе идеи статьи [4] распространяются на уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной.

Дано волновое уравнение с эффектом наследственности вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)): t_0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq X, \quad (1.1)$$

с граничными

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(X, t) = g_2(t): t_0 \leq t \leq T \quad (1.2)$$

и начальными условиями

$$u(x, t) = \varphi(x, t): 0 \leq x \leq X, \quad t_0 - \tau \leq t < t_0. \quad (1.3)$$

Здесь $u(x, t)$ — искомая функция, $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t+\xi), -\tau \leq \xi \leq 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t , τ — величина запаздывания; $f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot))$ — функционал, определенный на $[0, X] \times [t_0, T] \times \mathbb{R} \times Q$, $Q = Q[-\tau, 0]$ — множество функций $u(\xi)$,

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00089).

кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{\xi \in [-\tau, 0)} |u(\xi)|$.

Будем предполагать, что функционал f и функции g_1, g_2, φ таковы, что задача имеет единственное решение $u(x, t)$ [1].

2. Разностный метод

Разобьем отрезок $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, где N — некоторое целое число. Введем точки $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$. Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на части с шагом Δ . Будем считать, что $m = \tau/\Delta$ — целое число.

Введем точки $t_j = t_0 + j\Delta$, $j = -m, \dots, M$. Будем обозначать приближение точного решения $u(x_i, t_j)$ через u_i^j .

Введем дискретную предысторию к моменту t_j при каждом фиксированном i : $\{u_i^k\}^j = \{u_i^k : j - m \leq k \leq j\}$.

Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение $I: \{u_i^k\}^j \rightarrow v_{i,j}(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$.

Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности p на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$ и $t \in [t_j - \tau, t_{j+1}]$ выполняется равенство

$$|v_{i,j}(t) - u(x_i, t)| \leq C_1 \max_{j-m \leq k \leq j} |u_i^k - u(x_i, t_k)| + C_2 \Delta^p.$$

Для $0 \leq s \leq 1$ рассмотрим семейство методов с весами

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta^2} &= sa^2 \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_{i-1}^j + u_{i-1}^{j-1}}{h^2} + sa^2 \frac{u_{i+1}^{j-1} - 2u_{i+1}^j + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} \\ &+ (1 - 2s)a^2 \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} + F_i^j(v_{i,j}(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

с граничными $u_0^j = g_1(t_j)$, $u_N^j = g_2(t_j)$ и начальными условиями $u_i^j = \varphi(x_i, t_j)$: $-m \leq j \leq 0$, $F_i^j(v_{i,j}(\cdot))$ — некоторый функционал, определенный на $Q[-\tau, T]$, липшицевый по переменной $v_{i,j}(\cdot)$ с константой L_F и связанный с функционалом $f(x_i, t_j, u_i^j, v_{i,j}(\cdot))$.

При $s = 0$ получается явная схема, при других s , $0 < s \leq 1$, при каждом фиксированном j система является линейной трехдиагональной относительно u_i^{j+1} с диагональным преобладанием, которая эффективно решается методом прогонки.

Невязкой (без интерполяции) метода назовем

$$\begin{aligned} \psi_i^j &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\Delta^2} - sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_{j+1}))}{h^2} \\ &- sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_{j-1}) + u(x_{i+1}, t_{j-1}))}{h^2} \\ &- (1 - 2s)a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} - F_i^j(u_{t_j}(x_i, \cdot)). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок $h^{p_1} + \Delta^{p_2}$, если существует константа C , что $|\psi_i^j| \leq C(h^{p_1} + \Delta^{p_2})$ для всех $i = 1, \dots, N-1$, $j = 0, \dots, M-1$.

Теорема 1. Если для точного решения задачи (1.1)–(1.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно, $F_i^j(v_{i,j}(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_i^j, v_{i,j}(\cdot))$, то для любого $0 \leq s \leq 1$ невязка имеет порядок $h^2 + \Delta^2$.

Доказательство. Невязка определяется равенством

$$\begin{aligned} \psi_i^j = & \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\Delta^2} - sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1}))}{h^2} \\ & - sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_{j-1}) + u(x_{i+1}, t_{j-1}))}{h^2} - (1 - 2s)a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} \\ & - f(t_j, x_i, u(x_i, t_j), u_{t_j}(x_i, \cdot)). \end{aligned}$$

Разложим функцию $u(x, t)$ по формуле Тейлора в окрестности точек (x_i, t_j) , (x_i, t_{j+1}) , (x_i, t_{j-1}) . Тогда получим следующие равенства для значений функции в точках:

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{j+1}) &= u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j)\Delta^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_j)\Delta^3 + O(\Delta^4), \\ u(x_i, t_{j-1}) &= u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j)\Delta^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_j)\Delta^3 + O(\Delta^4), \\ u(x_{i-1}, t_j) &= u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j)h^3 + O(h^4), \\ u(x_{i+1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j)h^3 + O(h^4), \\ u(x_{i-1}, t_{j+1}) &= u(x_i, t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j+1})h^3 + O(h^4), \\ u(x_{i+1}, t_{j+1}) &= u(x_i, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j+1})h^3 + O(h^4), \\ u(x_{i-1}, t_{j-1}) &= u(x_i, t_{j-1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j-1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1})h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j-1})h^3 + O(h^4), \\ u(x_{i+1}, t_{j-1}) &= u(x_i, t_{j-1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j-1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1})h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j-1})h^3 + O(h^4). \end{aligned}$$

Подставив эти соотношения в формулу для ψ_i^j , имеем

$$\begin{aligned} \psi_i^j = & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + O(\Delta^2) - sa^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) + O(h^2) \right) - sa^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1}) + O(h^2) \right) \\ & - (1 - 2s)a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + O(h^2) \right) - f(t_j, x_i, u(x_i, t_j), u_{t_j}(x_i, \cdot)). \end{aligned}$$

Разложим функцию $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ по формуле Тейлора в окрестности точки (x_i, t_j) . В результате получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, t_j)\Delta + O(\Delta^2), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, t_j)\Delta + O(\Delta^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\psi_i^j = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right) - f(t_j, x_i, u(x_i, t_j), u_{t_j}(x_i, \cdot)) + O(\Delta^2 + h^2).$$

В силу уравнения (1.1) $\psi_i^j = O(\Delta^2 + h^2)$.

Теорема доказана.

Обозначим величину погрешности метода в узлах через $\varepsilon_i^j = u(x_i, t_j) - u_i^j$. Будем говорить, что метод сходится, если $\varepsilon_i^j \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$ для всех $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует такая константа C , не зависящая от Δ , h , что выполняется неравенство $|\varepsilon_i^j| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$.

Для исследования сходимости применим аппарат абстрактных разностных схем с последствием.

3. Исследование сходимости

Исследуем схемы семейства (2.1) на сходимость с помощью вложения в общую разностную схему [2–4]. Будем рассматривать задачи с однородными краевыми условиями

$$u(0, t) = u(X, t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

При каждом t_j определим значения дискретной модели вектором $\tilde{y}_j = (u_0^j, u_1^j, u_2^j, \dots, u_{N-1}^j, u_N^j)' \in \tilde{Y}$, где $'$ – знак транспонирования, \tilde{Y} – векторное пространство размерности $N + 1$ с нормой

$$\|\tilde{y}_n\|_{\tilde{Y}}^2 = \sum_{i=0}^N (\tilde{y}_n^i)^2. \quad (3.1)$$

В пространстве \tilde{Y} введем операторы A и \tilde{A} :

$$Aw_i^j = -a^2 \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad Au_0^j = 0, \quad Au_N^j = 0, \quad (3.2)$$

$$\tilde{A} = \Delta^2 A. \quad (3.3)$$

Тогда систему (2.1) можно переписать в виде

$$\frac{\tilde{y}_{j+1} - 2\tilde{y}_j + \tilde{y}_{j-1}}{\Delta^2} + sA\tilde{y}_{j+1} + sA\tilde{y}_{j-1} + (1 - 2s)A\tilde{y}_j = F^j(v(\cdot)), \quad (3.4)$$

где $F^j(v(\cdot)) = (F_0^j(v_0(\cdot)), F_1^j(v_1(\cdot)), F_2^j(v_2(\cdot)), \dots, F_{N-1}^j(v_{N-1}(\cdot)), F_N^j(v_N(\cdot)))'$, $v(\cdot) = I(\{\tilde{y}_k\}_j) \in Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$, $Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$ – пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит $Q[-\tau, \Delta]$.

Воспользуемся тождеством

$$\tilde{y}_{j+1} = 2\tilde{y}_j + \Delta^2 \frac{\tilde{y}_{j+1} - 2\tilde{y}_j + \tilde{y}_{j-1}}{\Delta^2} - \tilde{y}_{j-1}$$

и введем операторы

$$R = \frac{1}{\Delta^2} E + sA, \quad (3.5)$$

$$\tilde{R} = \Delta^2 R = E + s\tilde{A}. \quad (3.6)$$

Заметим, что операторы \tilde{A} (3.3) и \tilde{R} (3.6), в отличие от операторов A (3.2) и R (3.5), зависят не от h и Δ , а лишь от $\sigma = a^2 \Delta^2 / h^2$.

Приведем уравнение (3.4) к виду

$$R(\tilde{y}_{j+1} - 2\tilde{y}_j + \tilde{y}_{j-1}) + A\tilde{y}_j = F^j(v(\cdot)). \quad (3.7)$$

Так как при любом допустимом весе s уравнение (3.7) разрешимо относительно \tilde{y}_{j+1} (существует R^{-1}), то можно привести уравнение (3.7) к явной форме:

$$\tilde{y}_{j+1} = 2\tilde{y}_j - \tilde{y}_{j-1} - R^{-1}A\tilde{y}_j + R^{-1}(F^j(v(\cdot))). \quad (3.8)$$

Введем вектор $y_j = (y_j^1, y_j^2)' = (\tilde{y}_{j-1}, \tilde{y}_j)' \in Y$, где $Y = \tilde{Y} \oplus \tilde{Y}$ – векторное пространство размерности $q = 2(N + 1)$. Считаем, что если в пространстве \tilde{Y} определена норма, то в пространстве Y она определяется следующим образом:

$$\|y\|_Y^2 = \|y^1\|_{\tilde{Y}}^2 + \|y^2\|_{\tilde{Y}}^2. \quad (3.9)$$

Соотношение (3.8) можно переписать в виде $y_{j+1}^1 = y_j^2$, $y_{j+1}^2 = 2y_j^2 - y_j^1 - R^{-1}Ay_j^2 + R^{-1}(F^j(v(\cdot)))$.

В результате получаем разностную схему

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j), \Delta), \quad (3.10)$$

где $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - R^{-1}A \end{pmatrix}$, $\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j), \Delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1}F^j(I(\{y_k^2\}_j))/\Delta \end{pmatrix}$.

Определим функцию точных значений [4] для схемы (3.10) соотношениями $z_j = (z_j^1, z_j^2)' = (\tilde{z}_{j-1}, \tilde{z}_j)'$, $\tilde{z}_j = (u(x_0, t_j), u(x_1, t_j), \dots, u(x_{N-1}, t_j), u(x_N, t_j))'$.

Стартовыми значениями [4] модели назовем функцию $\{t_j = t_0 + j\Delta \in [t_0 - \tau, T], j = -m, \dots, 0\} \rightarrow Y: y(t_j) = y_j$.

Будем говорить, что стартовые значения модели имеют порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, если найдется константа C , не зависящая от z_j , y_j , Δ , h , такая, что $\|z_j - y_j\|_Y \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2})$, $j = -m, \dots, 0$.

Например, можно найти стартовые значения модели (3.10) следующим образом:

$$y_j = z_j = (z_j^1, z_j^2)' = (\tilde{z}_{j-1}, \tilde{z}_j)', \quad \tilde{z}_j = (\varphi(x_0, t_j), \varphi(x_1, t_j), \dots, \varphi(x_N, t_j))', \quad j = -m, \dots, 0.$$

Тогда $p_1 = \infty$, $p_2 = \infty$.

Погрешность аппроксимации (невязки) с интерполяцией в общей разностной схеме [2–4] вычисляется по формуле

$$d_n = (z_{n+1} - Sz_n)/\Delta - \Phi(t_n, I(\{z_i\}_{-m}^n), \Delta), \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (3.11)$$

Будем говорить, что метод имеет порядок погрешности аппроксимации с интерполяцией $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, если существует константа C , не зависящая от d_n , Δ , h , такая, что $\|d_n\| \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2})$, $n = 1, \dots, M$.

Данное определение невязки отличается от введенного ранее определения невязки без интерполяции (2.2). Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть невязка в смысле (2.2) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_i^j липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I имеет порядок погрешности p_0 на точном решении, σ зафиксировано, тогда невязка с интерполяцией в смысле (3.11) имеет одинаковый порядок погрешности по Δ и h , равный $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2\}+1}$.

Доказательство. Рассмотрим нормы координат невязки (3.11):

$$\begin{aligned} \|d_n^1\|_Y^2 &= \|(z_{n+1}^1 - z_n^2)/\Delta\|^2 = \left\| \frac{\tilde{z}_n - \tilde{z}_n}{\Delta} \right\|^2 = 0. \\ \|d_n^2\|_Y^2 &= \left\| (z_{n+1}^2 + z_n^1 - 2z_n^2 + R^{-1}Az_n^2)/\Delta - \frac{1}{\Delta}R^{-1}(F^n(I(\{z_k^2\}_n))) \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} + \tilde{z}_{n-1} - 2\tilde{z}_n}{\Delta} + \frac{1}{\Delta}R^{-1}A\tilde{z}_n - \frac{1}{\Delta}R^{-1}(F^n(I(\{\tilde{z}_k\}_n))) \right\|^2 \\ &= \Delta^2 \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}R^{-1}A\tilde{z}_n - \frac{1}{\Delta^2}R^{-1}(F^n(I(\{\tilde{z}_k\}_n))) \right\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда по определению операторов \tilde{R} (3.6), \tilde{A} (3.3)

$$\begin{aligned} \|d_n^2\|_Y^2 &= \Delta^2 \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}\tilde{R}^{-1}\tilde{A}\tilde{z}_n - \tilde{R}^{-1}(F^n(I(\{\tilde{z}_k\}_n))) \right\|^2 \\ &= \Delta^2 \|\tilde{R}^{-1}\|^2 \left\| \tilde{R} \left(\frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + \frac{1}{\Delta^2}\tilde{A}\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_k\}_n)) \right\|^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тогда по определению нормы в \tilde{Y} (3.1)

$$\begin{aligned}
& \left\| \tilde{R} \left(\frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + \frac{1}{\Delta^2} \tilde{A}\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_k\}_n)) \right\|_{\tilde{Y}}^2 \\
&= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + s\tilde{A} \left(\frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + \frac{1}{\Delta^2} \tilde{A}\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_k\}_n)) \right\|_{\tilde{Y}}^2 \\
&= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2} (s\tilde{A}\tilde{z}_{n+1} + (1-2s)\tilde{A}\tilde{z}_n + s\tilde{A}\tilde{z}_{n-1}) - F^n(I(\{\tilde{z}_k\}_n)) \right\|_{\tilde{Y}}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{u(x_i, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_{n-1}))}{\Delta^2} - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1}))}{h^2} \right. \\
&\quad \left. - (1-2s)a^2 \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2} \right. \\
&\quad \left. - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, t_{n-1}))}{h^2} - F_i^n(I(\{u_i^k\}_n)) \right|^2. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое под знаком суммы в (3.13), используя предположения теоремы:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{u(x_i, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_{n-1}))}{\Delta^2} - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1}))}{h^2} \right. \\
&\quad \left. - (1-2s)a^2 \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2} \right. \\
&\quad \left. - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, t_{n-1}))}{h^2} - F_i^n(I(\{u_i^k\}_n)) \pm F_i^n(u_{t_n}(x_i, \cdot)) \right| \\
&\leq |\psi_i^n| + |F_i^n(u_{t_n}(x_i, \cdot)) - F_i^n(I(\{u_i^k\}_n))| \\
&\leq C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F \|u_{t_n}(x_i, \cdot) - I(\{u_i^k\}_n)\|_Q \leq C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F C_2 \Delta^{p_0}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

В результате из (3.12)–(3.14) получаем

$$\begin{aligned}
\|d_n\|_{\tilde{Y}}^2 &\leq \Delta^2 \|\tilde{R}^{-1}\|^2 \sum_{i=1}^{N-1} (C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F C_2 \Delta^{p_0})^2 = \Delta^2 \|\tilde{R}^{-1}\|^2 (N-1) (C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F C_2 \Delta^{p_0})^2 \\
&\leq \Delta^2 (C_3 \Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + C_4 h^{p_2})^2 = \Delta^2 \left(C_3 \Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + C_4 (a\Delta/\sqrt{\sigma})^{p_2} \right)^2,
\end{aligned}$$

где $C_3 = \|\tilde{R}^{-1}\| \sqrt{N-1} (C_1 + L_F C_2)$, $C_4 = \|\tilde{R}^{-1}\| \sqrt{N-1} C_1$.

То есть справедлива оценка $\|d_n\|_{\tilde{Y}} \leq C \Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2\}+1}$, где $C = C_3 + C_4 (a/\sqrt{\sigma})^{p_2}$.

Теорема доказана.

Для исследования устойчивости схемы применим результаты работ [5; 6]. Для этого рассмотрим однородную разностную схему, соответствующую (3.7):

$$R(\tilde{y}_{j+1} - 2\tilde{y}_j + \tilde{y}_{j-1}) + A\tilde{y}_j = 0. \tag{3.15}$$

Оператор A (3.2) самосопряженный и положительный [5] в смысле скалярного произведения векторов $\tilde{y} = (\tilde{y}^0, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^N) \in \tilde{Y}$, $\tilde{w} = (\tilde{w}^0, \tilde{w}^1, \dots, \tilde{w}^N) \in \tilde{Y}$:

$$(\tilde{y}, \tilde{w}) = \sum_{i=0}^N \tilde{y}^i \tilde{w}^i h.$$

Тогда оператор R (3.5) также самосопряженный и положительный.

В [6] доказано, что если для схемы (3.15) выполняется условие

$$R > \frac{1}{4}A, \quad (3.16)$$

то при любых начальных условиях для решения (3.15) справедливо неравенство

$$\|\tilde{y}_{n+1}\|_* \leq \|\tilde{y}_n\|_*, \quad (3.17)$$

где

$$\|\tilde{y}_n\|_* = \frac{1}{4}(A(\tilde{y}_n + \tilde{y}_{n-1}), \tilde{y}_n + \tilde{y}_{n-1}) + \left((R - \frac{1}{4}A)(\tilde{y}_n + \tilde{y}_{n-1}), \tilde{y}_n + \tilde{y}_{n-1} \right).$$

Теперь рассмотрим однородную схему, соответствующую (3.10):

$$y_{j+1} = S y_j. \quad (3.18)$$

Из неравенства (3.17) следует, что $\|y_{n+1}^1\|_* \leq \|y_n^1\|_*$, $\|y_{n+1}^2\|_* \leq \|y_n^2\|_*$.

Тогда по определению нормы (3.9) в пространстве Y : $\|y_{n+1}\|_Y^2 = \|y_{n+1}^1\|_*^2 + \|y_{n+1}^2\|_*^2 \leq \|y_n^1\|_*^2 + \|y_n^2\|_*^2 = \|y_n\|_Y^2$.

Отсюда $\|y_{n+1}\|_Y \leq \|y_n\|_Y$, что означает выполнение следующей оценки для уравнения (3.18): $\|S\| \leq 1$.

Следовательно, при выполнении условия (3.16) схема (3.10) устойчива в смысле определения, данного в [4].

Используя (3.5), операторное условие устойчивости для исследуемой схемы можно переписать в виде неравенства (см. [6])

$$\frac{1}{\Delta^2}E + \left(s - \frac{1}{4} \right)A > 0,$$

которое означает, что для любого отличного от нуля $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ выполняется

$$\frac{1}{\Delta^2}(\tilde{y}, \tilde{y}) + \left(s - \frac{1}{4} \right)(A\tilde{y}, \tilde{y}) > 0. \quad (3.19)$$

Так как наибольшее собственное значение оператора A (3.2) оценивается сверху величиной $4a^2/h^2$ [6], то

$$(\tilde{y}, \tilde{y}) > \frac{h^2}{4a^2}(A\tilde{y}, \tilde{y}).$$

Значит, неравенство (3.19) будет выполнено, если потребовать

$$\frac{h^2}{4a^2\Delta^2} + s - \frac{1}{4} > 0.$$

Таким образом, схема (3.10) устойчива, если

$$s > \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right), \quad (3.20)$$

где $\sigma = a^2\Delta^2/h^2$.

Например, для явной схемы ($s = 0$) получаем известное условие Куранта $\sigma < 1$, а в случае неявной схемы ($s = 1$) условие устойчивости выполняется при любом соотношении шагов.

Вложение в общую разностную схему с последствием [2–4] проведено, из этого, используя [4, теорема 2], получаем следующие утверждение.

Теорема 3. Пусть выполнено условие устойчивости (3.20), невязка в смысле (2.2) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_i^j липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I липшицев и имеет порядок погрешности p_0 на точном решении, стартовые значения имеют порядок $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$, σ зафиксировано, тогда метод сходится с порядком $\Delta^{\min\{\min\{p_0, p_1, p_2\} + 1, p_3\} + h^{\min\{\min\{p_0, p_1, p_2\} + 1, p_4\}}$.

4. Примеры численных расчетов

Рассмотрим уравнение с постоянным запаздыванием

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \pi^2 e^{-t} \sin \pi x + e^{\tau-2t} \sin^2 \pi x + u(x, t)(1 - u(x, t - \tau)), \quad 0 \leq t \leq 3, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.1)$$

при $\tau = 2$, $a = 1$ с начальными $u(x, t) = e^{-t} \sin \pi x$, $-\tau \leq t \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$ и граничными условиями $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $0 \leq t \leq 3$.

Уравнение имеет точное решение $u(x, t) = e^{-t} \sin \pi x$.

На рис. 1 приведено приближенное решение этого уравнения методом (2.1), для которого $F_i^j(v_{i,j}(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_i^j, v_{i,j}(\cdot))$, с кусочно-линейной интерполяцией [2] при $s = 1$ с числом точек разбиения по x , равным 10, по t , равным 60. На рис. 2 — при $s = 0$ с числом точек разбиения по x , равным 21, по t , равным 60 (в этом случае не выполняется условие устойчивости). В табл. 1 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (4.1), полученные при разных значениях параметра s при разных шагах. Нормы разностей вычислены по формуле

$$\|U\| = \max_{0 \leq j \leq M} \sum_{i=0}^N |u(t_j, x_i) - u_i^j|. \quad (4.2)$$

Рассмотрим уравнение с переменным запаздыванием

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - a^2) \frac{u^2\left(x, t - \frac{t+1}{2}\right)}{e^{x+1}}, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.3)$$

при $a = 2$ с начальными $u(x, t) = e^{x-t}$, $-1 \leq t \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$ и граничными условиями $u(0, t) = e^{-t}$, $u(1, t) = e^{1-t}$, $0 \leq t \leq 2$.

Уравнение имеет точное решение $u(x, t) = e^{x-t}$.

На рис. 3 приведено приближенное решение этого уравнения методом (2.1), для которого $F_i^j(v_{i,j}(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_i^j, v_{i,j}(\cdot))$, с кусочно-линейной интерполяцией [2] при $s = 1$ с числом точек разбиения по x , равным 10, по t , равным 40. На рис. 4 — при $s = 0$ с числом точек разбиения по x , равным 15, по t , равным 40 (в этом случае не выполняется условие устойчивости). В табл. 2 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (4.3), полученные при разных значениях параметра s при разных шагах. Нормы разностей вычислены по формуле (4.2).

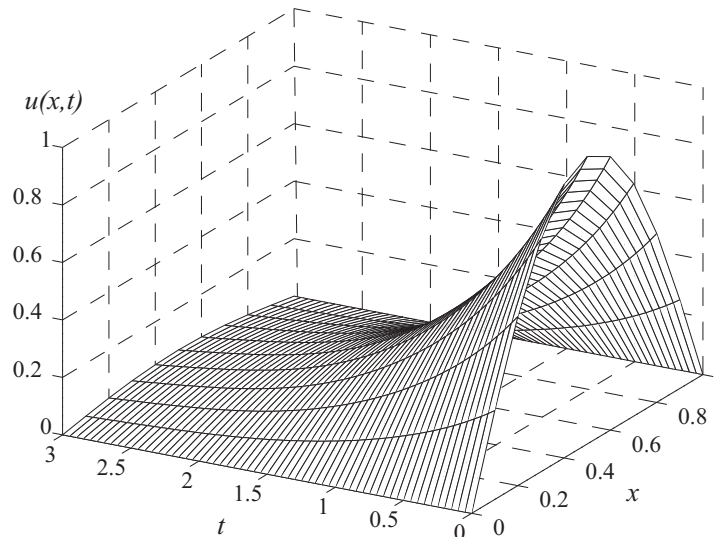


Рис. 1.

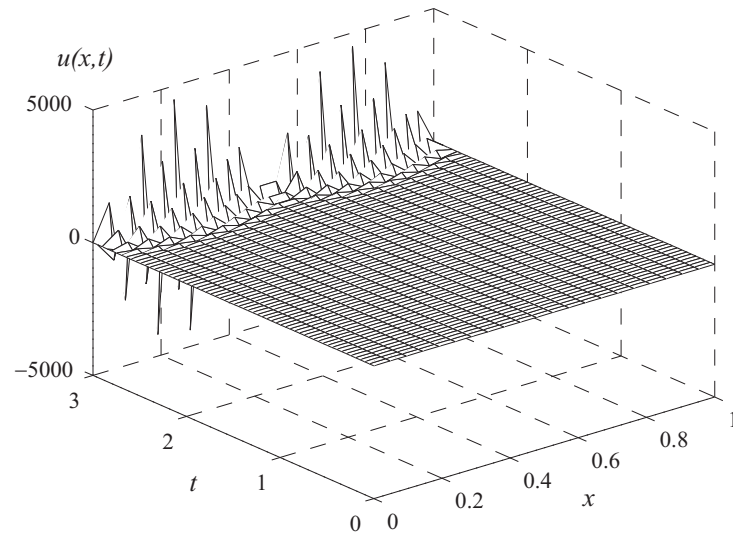


Рис. 2.

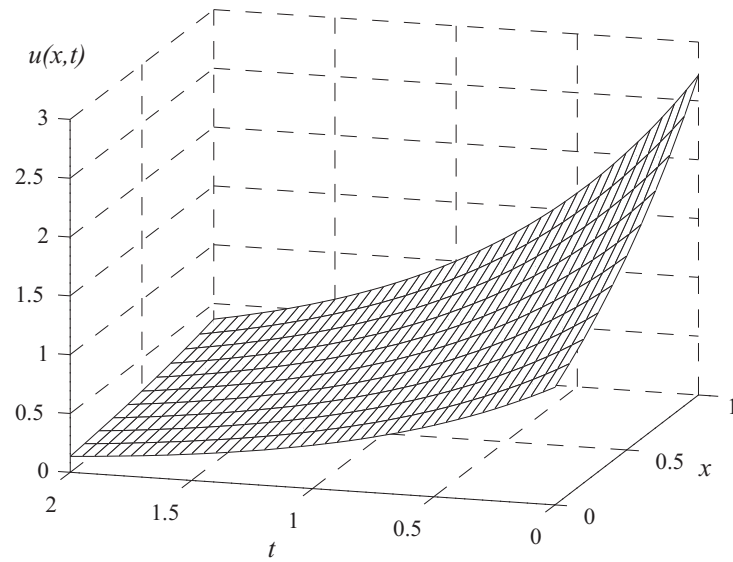


Рис. 3.

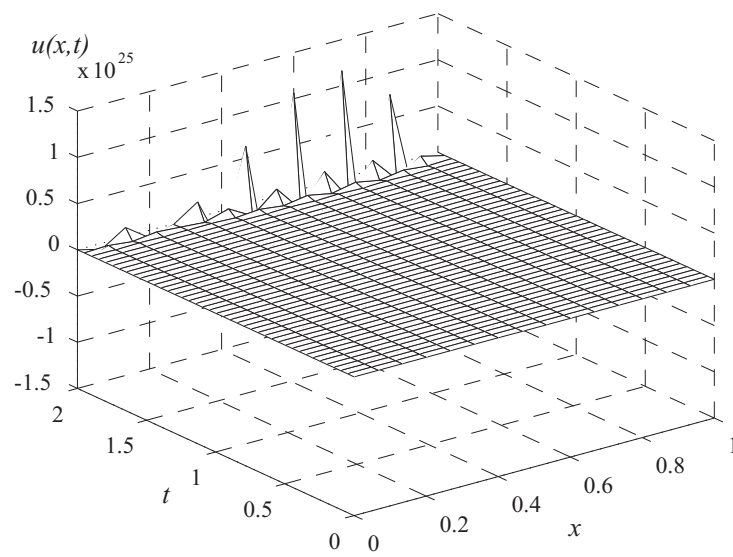


Рис. 4.

Т а б л и ц а 1

**Нормы разностей точного и приближенного решений
уравнения (4.1)**

Шаги метода сеток	N=10	N=10	N=10	N=15	N=21
	M=150	M=90	M=60	M=60	M=60
s=1	0.0502	0.0507	0.0527	0.0118	0.0095
s=1/2	0.0495	0.0488	0.0493	0.0248	0.0087
s=0	0.0488	0.0467	0.0443	0.0378	59952

Как показывает значение при $s = 0$, метод дает большую погрешность в случае $N = 21$, $M = 60$.

Т а б л и ц а 2

**Нормы разностей точного и приближенного решений
уравнения (4.3)**

Шаги метода сеток	N=10	N=10	N=10	N=10	N=15
	M=200	M=100	M=60	M=40	M=40
s=1	0.4626	0.4625	0.4646	0.3265	0.0667
s=1/2	0.4629	0.4629	0.4660	0.3266	0.4670
s=0	0.4631	0.4635	0.4688	0.3276	$7.888610 \cdot 10^{25}$

Как показывает значение при $s = 0$, метод дает большую погрешность в случае $N = 15$, $M = 40$.

Рассмотренные примеры показывают, что при выполнении условия (3.20) метод (2.1) при некоторых выбранных значениях параметра s дает погрешности, сильно зависящие от соотношения шагов. Если условие (3.20) не выполняется, то погрешности резко возрастают (см. рис. 2, 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wu J.** Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996. 428 с.
2. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. 256 с.
3. **Пименов В.Г.** Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С.105–114.
4. **Пименов В.Г., Ложников А.Б.** Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последствием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, Т. 17, № 1, С. 178–189.
5. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
6. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

Пименов Владимир Германович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Уральский федеральный университет
e-mail: Vladimir.Pimenov@usu.ru

Поступила 22.09.2011

Таширова Екатерина Евгеньевна
магистрант
Уральский федеральный университет
e-mail: Linetisa@yandex.ru

УДК 512.542

О ФАКТОРИЗАЦИЯХ ПОДФОРМАЦИЙ ОДНОПОРОЖДЕННЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ ω -НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

В. М. Селькин

Произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} — это класс групп $(G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M})$. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F} = s^{\omega}\text{form}G$ — однопорожденная наследственная ω -насыщенная формация. Доказано, что если \mathfrak{M} и \mathfrak{H} такие формации, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то \mathfrak{M} является разрешимой формацией.

Ключевые слова: однопорожденная наследственная ω -насыщенная формация, произведение формаций, V -спутник.

V. M. Sel'kin. On factorizations of subformations of one-generated hereditary ω -saturated formations.

The product $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ of formations \mathfrak{M} and \mathfrak{H} is the class of groups $(G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M})$. Let $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, where $\mathfrak{F} = s^{\omega}\text{form}G$ is a one-generated hereditary ω -saturated formation. We prove that \mathfrak{M} is a soluble formation if formations \mathfrak{M} and \mathfrak{H} are such that $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$.

Keywords: one-generated hereditary ω -saturated formation, product of formations, V -satellite.

Введение

Все рассматриваемые группы конечны.

Напомним, что формация \mathfrak{F} — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и состоящий из таких групп G , что фактор-группа по наименьшей нормальной подгруппе группы G , обозначаемой через $G^{\mathfrak{F}}$, принадлежит \mathfrak{F} . Эта подгруппа называется \mathfrak{F} -корадикалом группы G . Произведением $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} называется класс групп $(G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M})$. Неединичная формация \mathfrak{F} называется ω -насыщенной, если \mathfrak{F} содержит всякую группу G с $G/(O_{\omega}(G) \cap \Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ [1]. \mathbb{P} -насыщенные формации называются насыщенными формациями. Непустая формация \mathfrak{F} называется разрешимо насыщенной, если \mathfrak{F} содержит всякую группу G с $G/\Phi(R(G)) \in \mathfrak{F}$ (здесь $R(G)$ — разрешимый радикал группы G , т. е. $R(G)$ — это наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G). Пересечение всех ω -насыщенных формаций, содержащих некоторую фиксированную группу G , называется однопорожденной ω -насыщенной формацией. Однопорожденные разрешимо насыщенные формации определяются аналогично.

Известно, что если \mathfrak{M} и \mathfrak{H} — насыщенные формации, то произведение $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ также является насыщенной формацией (Л.А. Шеметков [2]). Обратное утверждение не всегда верно. Первые примеры насыщенных произведений ненасыщенных формаций были найдены В.А. Ведерниковым [3] и Н.Т. Воробьевым [4] (см. также наиболее простой пример 3.2.4 в этом направлении в книге А.Н. Скибы [5]). В связи с этим представляет интерес следующий результат А.Н. Скибы [6]: если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ является однопорожденной насыщенной формацией, где \mathfrak{M} и \mathfrak{H} — формации и $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$, то \mathfrak{M} — насыщенная формация. Этот нетривиальный результат был развит в различных направлениях. В частности, в работе А.Н. Скибы [7] аналогичный результат был получен для разрешимо насыщенных формаций. В работе [8] В. Го доказал, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ разрешимо насыщенная подформация однопорожденной разрешимо насыщенной формации и $(1) \neq \mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$, то \mathfrak{M} — насыщенная формация. Также было доказано, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — однопорожденная p -насыщенная формация (т. е. \mathfrak{F} является ω -насыщенной формацией, где $\omega = \{p\}$) и либо \mathfrak{M} — нормально наследственная формация (А.Н. Скиба, В.Н. Рыжик [9]), либо $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{F}$

(Т.Р. Вишневская [10]), то \mathfrak{M} также является p -насыщенной формацией. В данной работе мы докажем следующий результат в данном направлении.

Пусть ω — непустое множество простых чисел. Функцию f , имеющую вид $f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, называют ω -локальным спутником [1]. Для произвольного ω -локального спутника f символом $LF_\omega(f)$ обозначают класс групп $(G \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G))$. Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторого ω -локального V -спутника f , то формация \mathfrak{F} называется ω -насыщенной, а f — ω -локальный V -спутник этой формации. Пусть \mathfrak{X} — произвольная совокупность групп, тогда символ $s^\omega \text{form}(\mathfrak{X})$ обозначает пересечение всех наследственных ω -насыщенных формаций содержащих \mathfrak{X} .

Теорема. Пусть $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F} = s^\omega \text{form}G$ является однопорожденной наследственной ω -насыщенной формацией. Если \mathfrak{M} и \mathfrak{H} такие формации, что $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то \mathfrak{M} является разрешимой формацией.

Теорема была анонсирована в работе [11]. Аналогичный результат в случае, когда $\mathfrak{F} = l^\omega \text{form}G$ является однопорожденной ω -насыщенной формацией, был доказан в работе [12]. Символ $l^\omega \text{form}G$ обозначает пересечение всех ω -насыщенных формаций, содержащих группу G . Пересечение наследственных ω -насыщенных формаций в общем случае содержит пересечение всех ω -насыщенных формаций собственным образом.

1. Предварительные результаты

Лемма 1 [1, лемма 5]. Пусть \mathfrak{X} — такая непустая совокупность групп, что $\mathfrak{F} = s^\omega \text{form}\mathfrak{X}$ и f — минимальный наследственный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F} . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $f(\omega') = s\text{form}(G/O_\omega(G) \mid G \in \mathfrak{X})$;
- 2) $f(p) = s\text{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \omega$;
- 3) $f(p) = \emptyset$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

Лемма 2 [5, лемма 3.1.9]. Пусть $G = A \wr B = KB$, где $K = \prod_{b \in B} A_1^b$ — база сплетения G и A_1 — первая копия A в K . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если L — минимальная нормальная подгруппа группы G , L_1 — проекция этой подгруппы в A_1 и $L_1 \not\subseteq Z(A_1)$, то $L = \prod_{b \in B} (L \cap A_1)^b$;
- 2) если R — минимальная нормальная подгруппа в A_1 и $R \not\subseteq Z(A_1)$, то $R_1 = \prod_{b \in B} R^b$ — минимальная нормальная подгруппа в G ;
- 3) $\text{Soc} G \subseteq \prod_{b \in B} M^b$, где $M = \text{Soc} A_1$;
- 4) если L — нормальная подгруппа группы G , $L \subseteq K$ и M — проекция этой подгруппы в A_1 , то сплетение $(A_1/M) \wr B$ является гомоморфным образом факторгруппы G/L .

Лемма 3 [5, лемма 3.1.5]. Пусть $A \in s\text{form}G$. Тогда:

- 1) $\text{exp}(A)$ делит $\text{exp}(G)$;
- 2) порядок каждого главного фактора группы A не превосходит максимумов порядков главных факторов группы G ;
- 3) если $H \leq A$, тогда $c(H/H^{\mathfrak{N}}) \leq \max\{c(T/T^{\mathfrak{N}}) \mid T \leq G\}$.

Лемма 4 [5, лемма 3.5.20]. Пусть G — группа и R — минимальная нормальная подгруппа группы G . Если R — элементарная абелева p -группа, то $G \in \text{form}(Z_p \wr (G/R))$.

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{F} = s^\omega \text{form}G$ — однопорожденная наследственная ω -насыщенная формация и $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, где \mathfrak{M} и \mathfrak{H} — неединичные формации. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) все простые группы формации \mathfrak{M} являются абелевыми;

- (2) если для некоторой группы $B \in \mathfrak{H}$ и некоторого простого числа p $p^{|G|}$ делит экспоненту группы B , то $|A| = p$ для всех простых групп $A \in \mathfrak{M}$;
- (3) если существует простая группа $A \in \mathfrak{M}$ такая, что $|A| \notin \omega$, то \mathfrak{H} является абелевой формацией.

Доказательство. Пусть f — минимальный наследственный ω -локальный V -спутник формации \mathfrak{F} . Тогда по лемме 1

$$f(a) = \begin{cases} \text{sform}(G/F_p(G)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(G), \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(G), \\ \text{sform}(G/O_\omega(G)), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Пусть $B = B_1 \times \dots \times B_{|G|}$, где $B_1 \simeq \dots \simeq B_{|G|}$ — неединичные группы, принадлежащие формации \mathfrak{H} .

(1) Пусть A — простая группа из \mathfrak{M} , и пусть $D = A \wr B = [K]B$, где K — база сплетения D . Очевидно, $D \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Следовательно, $D \in \mathfrak{F}$. Предположим, что A — неабелева группа. Тогда по лемме 2 D — монолитическая группа с монолитом K . Пусть $\pi(K) \cap \omega = \emptyset$. Тогда $O_\omega(D) = 1$ и, следовательно, $D/O_\omega(D) \simeq D \in f(\omega') = \text{sform}(G/O_\omega(G))$. Но $|K| = |A|^{|B|^{|G|}} > |G|$, что противоречит п. (2) леммы 1. Значит, $\pi(K) \cap \omega \neq \emptyset$. Пусть $q \in \pi(K) \cap \omega$. Тогда, $F_q(D) = 1$, и поэтому $D/F_q(D) \simeq D \in f(q) = \text{sform}(G/F_q(G))$. Противоречие. Значит, каждая простая группа формации \mathfrak{M} абелева.

(2) Предположим, что $p^{|G|}$ делит экспоненту группы $B \in \mathfrak{H}$ для некоторого простого числа p и $|A| = q \neq p$ для простой группы $A \in \mathfrak{M}$. Пусть $D = A \wr B = [K]B$, где K — база сплетения D . Если $q \notin \omega$, то $O_\omega(D) = 1$ и $D/O_\omega(D) \simeq D \in f(\omega') = \text{sform}(G/O_\omega(G))$, что противоречит п. (1) леммы 4. Следовательно, $q \in \omega$. Согласно предположению $p^{|G|}$ делит экспоненту группы B , тогда группа B обладает собственной циклической подгруппой H такой, что $|H| = p^{|G|}$. Тогда

$$\begin{aligned} H &\simeq H/(KO_q(B) \cap H) \simeq (HKO_q(B))/(KO_q(B)) \leq D/(KO_q(B)) \\ &= D/F_q(D) \in f(q) = \text{sform}(G/F_q(G)). \end{aligned}$$

Поскольку $H \in \text{sform}(G/F_q(G))$, то по п. (1) леммы 3 $\exp(H)$ делит $\exp(G/F_q(G))$. Следовательно, $\exp(H) \leq \exp(G/F_q(G))$ и $p^{|G|} = \exp(H) = |H| \leq |G|$. Ясно, что $|H| = p^{|G|} > |G|$. Противоречие. Тогда $q = p$. Таким образом, как и выше можно показать, что $p \in \omega$.

(3) Ввиду п. (1) имеем $|A| = q$ для некоторого простого числа $q \notin \omega$. Предположим, что q делит $|B|$. Пусть $D = A \wr B = [K]B$. Очевидно, $O_\omega(D) = 1$, и тогда $D \in f(\omega') = \text{sform}(G/O_\omega(G))$. Пусть Q_i — подгруппа порядка q группы B_i , $i = 1, \dots, |G|$. И пусть $T = A \wr (Q_1 \times \dots \times Q_{|G|})$. Тогда по [5, лемма 3.1.7] класс нильпотентности группы T не меньше $|G| + 1$. С учетом [13, А, (18.2)] имеем $T \simeq M \leq D \in \text{sform}(G/O_\omega(G))$, что противоречит п. (2) леммы 3. Следовательно, $q \nmid |B_i|$.

Предположим, что формация \mathfrak{H} неабелева. В этом случае можем считать, что B_1 — неабелева группа. Используя рассуждения [14, лемма 3.16], нетрудно показать, что существует такой простой $\mathbb{F}_q D$ -модуль V , что $\dim_{\mathbb{F}_q}(V) \geq 2^{|G|}$. Пусть $H = [V]D$. Так как $C_H(V) = C_H(V) \cap VD = V(C_H(V) \cap D)$, то

$$\begin{aligned} H/C_H(V) &= (VD)/C_H(V) = (VD)/(VC_H(V) \cap D) \\ &\simeq D/(D \cap V(C_H(V) \cap D)) = D/((C_H(V) \cap D)(D \cap V)) = D/(C_H(V) \cap D). \end{aligned}$$

Если $K \not\subseteq C_H(V)$, то $K \not\subseteq C_H(V) \cap D$. В соответствии с [14, лемма 3.9] $O_q(H/(C_H(V) \cap D)) = 1$. Следовательно,

$$1 \neq K/(K \cap C_H(V) \cap D) \simeq (K(C_H(V) \cap D))/(C_H(V) \cap D)$$

$$\subseteq O_q(H/(C_H(V) \cap D)) = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что $K \subseteq C_H(V)$. Значит, $V \subseteq C_H(K)$ и $K \trianglelefteq VR$. Поэтому $[V]K = V \times K = C_q \times \dots \times C_q \in \mathfrak{M}$. Так как $B \in \mathfrak{H}$, то $H \in \mathfrak{M}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $H \simeq H/O_\omega(H) \in \text{sform}(G/O_\omega(G))$, что противоречит п. (2) леммы 3. Следовательно, \mathfrak{H} является абелевой формацией. Лемма доказана.

Лемма 6 [5, теорема 3.5.21]. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ — произведение неединичных формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} . Допустим, что каждая простая группа формации \mathfrak{M} абелева. Если существуют группа $A \in \mathfrak{M}$ и такое натуральное число n , что для любой группы $B \in \mathfrak{H}$, $|B| \geq n$ и \mathfrak{H} -радикал сплетения $T = A \wr B$ не содержится подпрямо в базе сплетения T , то существуют группа Z_p простого порядка p и группа D , обладающая экспонентой, превосходящей p^n , такая, что $Z_p \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ и $D \in \mathfrak{H}$.

Лемма 7 [12, лемма 3.3]. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где \mathfrak{M} и \mathfrak{H} — формации и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ для некоторого простого числа p . Если A — простая группа, $A \in \mathfrak{M}$ и $|A| = p$, то $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Лемма 8 [12, лемма 3.4]. Пусть p — простое число и $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где каждая простая группа из \mathfrak{M} имеет порядок p . Тогда $G = A^{\mathfrak{H}} \wr (A/A^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$ для всех групп $A \in \mathfrak{F}$.

2. Доказательство теоремы

Так как \mathfrak{F} — наследственная формация, то она обладает ω -локальным V -спутником f таким, что

$$f(a) = \begin{cases} \text{sform}(G/F_p(G)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(G), \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(G), \\ \text{sform}(G/O_\omega(G)), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Пусть \mathfrak{M} — неразрешимая формация и A — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{S}$. Тогда, очевидно, A обладает минимальной нормальной подгруппой P . Ясно, что P — неабелева группа и A/P разрешима. По лемме 5 имеем $P \neq A$. Докажем следующие утверждения:

(1) Для любой группы $B \in \mathfrak{H}$ такой, что $|B| > |G|$, \mathfrak{H} -коррадикал сплетения $T = A \wr B$ не содержится подпрямо в базе сплетения T .

Действительно, пусть $T = A \wr B = [K]B$, где K — база сплетения T . Тогда согласно лемме 2 группа T монолитична и ее монолит L совпадает с $P^{\mathfrak{H}} = \prod_{b \in B} P_1^b$, где P_1 — монолит первой копии A_1 группы A в K . Пусть $T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. Тогда $T \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $\pi = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$. Тогда $\pi(L) \cap \omega = \emptyset$ и поэтому $O_\omega(T) = 1$. Ввиду леммы 1 $T \simeq T/O_\omega(T) \in f(\omega') = \text{sform}(G/O_\omega(G))$. Но группа T имеет минимальную нормальную подгруппу L порядка $|P|^{|B|} > |G|$, что противоречит п. (2) леммы 3. Следовательно, $\pi \neq \emptyset$. Пусть $p \in \pi$. Тогда $F_p(T) = 1$ и поэтому $T \simeq T/F_p(T) \in f(p) = \text{sform}(G/F_p(G))$. Противоречие. Значит, $T \notin \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ и, следовательно, \mathfrak{H} -коррадикал сплетения $T = A \wr B$ не содержится подпрямо в базе группы T .

(2) Существуют группа Z_p простого порядка p и группа B , обладающая экспонентой, превосходящей $p^{|G|}$, такая, что $Z_p \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ и $B \in \mathfrak{H}$.

Ввиду п. (1) леммы 5 полагаем, что любая простая группа формации \mathfrak{M} абелева. Пусть $B \in \mathfrak{H}$ такова, что $|B| > |G|$. И пусть $T = A \wr B = [K]B$, где K является базой сплетения T . Предположим, что $T^{\mathfrak{H}}$ содержится подпрямо в базе K . Так как $A \in \mathfrak{M}$, то $T^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, $T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, что противоречит (1). Значит, $T^{\mathfrak{H}}$ не содержится подпрямо в K . По лемме 6 и утверждению (1) имеем (2).

(3) Для любой группы $T \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ имеем $T^{\mathfrak{H}} \wr (T/T^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$.

Исходя из утверждения (2) и леммы 5 имеем $|H| = p$ для любой простой группы H формации \mathfrak{M} . Следовательно, с учетом леммы 8 утверждение (3) имеет место.

(4) $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{H}$ и B — группа минимального порядка из $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}$, $R = B^{\mathfrak{H}}$ — монолит группы B . Так как $B \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$, то $B^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. Тогда ясно, что R — абелева p -группа. Следовательно, по лемме 4 $B \in \text{form}(Z_p \wr (B/R))$, где Z_p — группа простого порядка p . Поэтому $Z_p \wr (B/R) \notin \mathfrak{H}$. Пусть $T = A \wr (B/R) = [K](B/R)$, где K — база сплетения T . Поскольку P — неабелева группа и P — единственная минимальная нормальная подгруппа группы A , то по п. (2) леммы 2 группа T монолитическая и ее монолит $L = P^{\mathfrak{H}} = \prod_{b \in B/R} P_1^b$, где P_1 — монолит первой копии группы A в K . Согласно лемме 4 и поскольку $A \in \mathfrak{M}$, получаем, что $T^{\mathfrak{H}}$ входит подпрямо в $K \in \mathfrak{M}$. Значит, $T \in \mathfrak{F}$. Пусть $D = T^{|G|} = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_{|G|}$, где $T_1 \simeq T_2 \simeq \dots \simeq T_{|G|} \simeq T$. Тогда ясно, что $D \in \mathfrak{F}$, и согласно утверждению (3) имеем $E = D^{\mathfrak{H}} \wr (D/D^{\mathfrak{H}}) \in \mathfrak{F}$. Очевидно, $D^{\mathfrak{H}} \subseteq T_1^{\mathfrak{H}} \times T_2^{\mathfrak{H}} \times \dots \times T_{|G|}^{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $|D/D^{\mathfrak{H}}| \geq |T/T^{\mathfrak{H}}|^{|G|}$. Так как $Z_p \in \mathfrak{H}$, то $R \neq B$. Это приводит к тому, что $|T/T^{\mathfrak{H}}| > 1$ и поэтому $t = |D/D^{\mathfrak{H}}| > |G|$. Очевидно, $T^{\mathfrak{H}} \neq 1$. Заметим, что $\text{Soc}(D) = L_1 \times L_2 \times \dots \times L_{|G|}$, где L_i — монолит группы T_i .

Покажем теперь, что каждая минимальная нормальная подгруппа группы $D^{\mathfrak{H}}$ неабелева. Действительно, Q — минимальная нормальная подгруппа группы $D^{\mathfrak{H}}$. Допустим, что Q — абелева q -группа. Тогда $O_q(D^{\mathfrak{H}}) \neq 1$. Поскольку $O_q(D^{\mathfrak{H}})\text{char} D^{\mathfrak{H}}$ и $D^{\mathfrak{H}} \trianglelefteq D$, то $O_q(D^{\mathfrak{H}}) \trianglelefteq D^{\mathfrak{H}}$. Поэтому группа D обладает минимально нормальной подгруппой N такой, что $N \subseteq O_q(D^{\mathfrak{H}})$. Противоречие. Таким образом, каждая минимальная нормальная подгруппа группы $D^{\mathfrak{H}}$ неабелева. Следовательно, согласно п. (3) леммы 2 существует минимальная нормальная подгруппа группы E , скажем V , такая, что $|V| > t \geq |G|$.

Пусть $p \in \pi(V) \cap \omega$. Тогда $F_p(E) = 1$. Учитывая E -изоморфизм $V \simeq (VF_p(E))/F_p(E)$, мы заключаем, что $E/F_p(E)$ обладает главным фактором $(VF_p(E))/F_p(E)$ таким, что $|(VF_p(E))/F_p(E)| > t$.

Так как $E \in \mathfrak{F}$, то $E \simeq E/F_p(E) \in f(p) = \text{sform}(G/F_p(G))$. Но $|V| \geq |P|^t > |G|$. Последнее, безусловно, невозможно по п. (2) леммы 3. Тогда $\pi(V) \cap \omega = \emptyset$ и $O_\omega(E) = 1$. Значит, $E \simeq E/O_\omega(E) \in f(\omega') = \text{sform}(G/O_\omega(G))$, что противоречит п. (2) леммы 3. Таким образом, $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Предположим, что G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M}\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда $R = G^{\mathfrak{H}}$ — монолит группы G . Так как $G \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} = R = N_1 \times \dots \times N_t \in \mathfrak{M}$, где $N_1 \simeq \dots \simeq N_t \simeq N$ — простые группы. Значит, $N \in \mathfrak{M}$, и ввиду леммы 5 $|N| = p$. Таким образом, R — p -группа. Следовательно, $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Ввиду леммы 7 $\mathfrak{M}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, что не отвечает условию теоремы. Значит, \mathfrak{M} — разрешимая формация. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеметков Л.А., Скиба А.Н., Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114–147.
2. Шеметков Л.А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 101–103.
3. Ведерников В.А. Локальные формации конечных групп // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 3. С. 32–37.
4. Воробьев Н.Т. Факторизации нелокальных формаций конечных групп // Вопросы алгебры. Вып. 2. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1990. С. 21–24.
5. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.
6. Skiba A.N. On non-trivial factorizations of a one-generated local formations of finite groups // Proceed. Intern. Conf. Algebra. Part 1 (Novosibirsk, 1989). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992. P. 363–374.
7. Скиба А.Н. О факторизациях композиционных формаций // Мат. заметки. 1999, Т. 63, № 3. С. 326–330.
8. Guo W. On a question from Kurovka Notebook // Comm. Algebra. 2000. Vol. 28, № 10. P. 4767–4782.
9. Скиба А.Н., Рыжик В.Н. О факторизациях однопорожденных p -локальных формаций // Вопросы алгебры. Вып. 11. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1997. С. 104–116.
10. Vishnevskaya T.R. On factorizations of one-generated p -local formations // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. 2000. № 3(16). С. 88–92.

11. **Селькин В.М.** Об одном свойстве неединичных формаций // Проблемы физики, математики и техники. 2012. № 1(10). С. 101–104.
12. **Guo W., Shum K.P., Sel'kin V.M.** Factorizations theory of 1-Generated ω -Composition Formations // Communications in Algebra. 2007. Vol. 35, no. 9. P. 2901–2931.
13. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble group. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. 889 p.
14. **Guo W., Shum K.P.** Uncancellative factorizations of Bear-local formations // J. Algebra. 2003. Vol. 267, no. 2. P. 654–672.

Селькин Вадим Михайлович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины
e-mail: vselkin@gsu.by

Поступила 12.01.2012

УДК 517.988.8

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ¹

Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров

Решения задачи Коши для дифференциального уравнения с фредгольмовым оператором в главной части строятся последовательными приближениями, равномерно сходящимися в окрестности алгебраических точек ветвления. Главный член асимптотики строится с помощью аналитической теории ветвления решений операторных уравнений и используется как начальное приближение.

Ключевые слова: задача Коши, фредгольмов оператор, ветвление решений, асимптотика, последовательные приближения.

N. A. Sidorov, D. N. Sidorov. On successive approximations of solutions of a singular Cauchy problem.

Solutions of the Cauchy problem for a differential equation with a Fredholm operator in the main part are constructed by successive approximations, which converge uniformly in a neighborhood of algebraic branch points. The leading term of the asymptotics is constructed with the help of the analytical theory of branching solutions of operator equations. It is employed as the initial approximation.

Keywords: Cauchy problem, Fredholm operator, branching of solutions, asymptotics, successive approximations.

Посвящается 80-летию профессора В.А. Треногина

Введение

Рассмотрим задачу Коши

$$B \frac{du}{dt} = F(u, t), \quad (0.1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (0.2)$$

где B — замкнутый фредгольмов оператор [12, с.219] из E_1 в E_2 с плотной областью определения в E_1 , $\dim N(B) = n \geq 1$, $\{\phi_i\}_1^n$ — базис в $N(B)$, E_1, E_2 — банаховы пространства. Нелинейный непрерывный оператор F действует из E_1 в E_2 , определен в окрестности $\|u\|_{E_1} \leq r$, $0 < |t| \leq \rho$ и имеет в этой окрестности непрерывную производную Фреше по u . Требуется построить непрерывное решение $u \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ задачи (0.1), (0.2).

Хорошо известно, что такая нелинейная задача может иметь несколько решений, но может оказаться и неразрешимой. В обширной литературе (см. библиографию в монографиях [3; 5; 13; 14]), посвященной теории и приложениям дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором в главной части, получено много интересных результатов. Но при этом разработке приближенных методов уделялось мало внимания. Известно, что асимптотику разветвляющихся решений задачи (0.1), (0.2) в аналитическом случае можно строить, используя ряды Ньютона — Пьюизе (см. [12, § 37]) и асимптотический метод неопределенных коэффициентов Некрасова — Назарова [1]. Истоки метода Некрасова — Назарова лежат в теории ветвления решений нелинейных операторных уравнений (см. [12, § 37; 6]). Но метод Некрасова — Назарова имеет принципиальные недостатки: 1) отсутствие способа выбора показателя t

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00377) и при поддержке федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” Минобрнауки (П696 от 30.05.2010).

в разложении решения задачи (0.1), (0.2) в ряд Ньютона — Пьюизе; 2) сложность обоснования; 3) требование аналитичности оператора $F(u, t)$.

В классической теории ветвления решений уравнений с параметрами первая трудность преодолевается путем исследования конечномерной системы разветвления Ляпунова — Шмидта [6; 12, с. 429].

В случае дифференциальных уравнений с вырождением тоже можно строить уравнение разветвления. Но при этом проблема сведется к исследованию сложных нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка [7]. Поэтому при построении асимптотики ветвей решений нелинейных дифференциальных уравнений в нерегулярных случаях привлекают непосредственно асимптотические разложения Ньютона — Пьюизе — Фробениуса [13, § 3.3; 10] по дробным степеням, логарифмам и экспонентам аргумента, а также методы степенной геометрии [2]. Но этот подход недостаточен, так как мало разработан для уравнения (0.1) и не избавляет от указанных выше недостатков.

В силу сказанного представляет несомненный интерес построение свободной от этих недостатков теории последовательных приближений решений задачи Коши (0.1), (0.2). Такая теория для интегральных уравнений Гаммерштейна была предложена в работе [9] и для некоторых классов операторно-интегральных и дифференциальных уравнений — в работах [8; 10; 11]. В данной статье, примыкающей к этому циклу, строится главный член асимптотики решения задачи Коши (0.1), (0.2). Кроме того, предлагается метод последовательных приближений, равномерно сходящихся в окрестности алгебраической точки ветвления. Метод использует редукцию задачи (0.1), (0.2) к регулярной системе (1.10), (1.11), метод диаграмм Ньютона и регуляризатор В.А.Треногина (см. [12, § 21, 37]) в представлении (1.8) искомого решения и выборе начального приближения. В работе используется терминология из [12].

1. Асимптотика решения и последовательные приближения в окрестности алгебраической точки ветвления

Пусть выполнены условия:

А) существуют числа $\nu = r/s, \theta = (r + m)/s$, где r, s, m — натуральные числа, r/s — несократимая дробь, такие, что при $u \rightarrow 0, t \rightarrow 0$

$$\left\| F(u, t) - F(0, t) - \sum_{ir+ks=r+m} F_{ik}(u)t^k \right\|_{E_2} = o\left(\sum_{ir+ks=r+m} \|u\|^i |t|^k \right),$$

где $F_{ik}(u)$ — i -однородные операторы, $i \geq 1$;

В) $\|F(0, t)\|_{E_2} = \mathcal{O}(|t|^{\nu-1})$;

С)

$$|\langle F(0, t), \psi_j \rangle| = \mathcal{O}(|t|^\theta), \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.1}$$

где $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ — базис в дефектном подпространстве $\mathcal{N}^*(B)$.

Предполагается, что функция $F(0, t)$ допускает асимптотическое представление $F(0, t) = \sum_{k=0}^{m-s+1} a_k t^{\frac{r-s+k}{s}} + \mathcal{O}(|t|^\theta)$ при $t \rightarrow 0$.

При этом должны выполняться равенства $\langle a_k, \psi_j \rangle = 0, j = \overline{1, n}, k = \overline{0, m+s-1}$, т. е. линейные уравнения $Bu_k = a_k, k = \overline{0, m+s-1}$ должны быть разрешимы.

Если оператор $F(u, t)$ достаточно гладкий в окрестности нуля, то числа ν, r, s, m и операторы $F_{ik}(u)$ в условии А) легко указать, нанеся на координатную плоскость точки (i, k) , отвечающие ненулевым производным

$$\frac{\partial^{i+k}}{\partial u^i \partial t^k} (F(u, t) - F(0, t)) \Big|_{u=0, t=0},$$

и построив по этим точкам диаграмму Ньютона. Искомое ν полагается равным $tg \gamma$, где γ — угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательным направлением оси i . Соответствующее число $(r + m)/s$, равное ординате точки пересечения этого отрезка с осью k , определяет требуемую гладкость оператора $F(u, t)$ в окрестности нуля. В формуле (1.1) при этом индексы (i, k) у операторов F_{ik} соответствуют точкам, попавшим на выбранный отрезок диаграммы Ньютона.

Так как диаграмма Ньютона может иметь несколько отрезков, то выбор чисел r, s, m и операторов $F_{ik}(u)$ в условии А) может оказаться неоднозначным.

Введем регуляризатор В.А. Треногина (см. [12, с. 221, лемма Шмидта])

$$\Gamma = \left(B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1},$$

где $\langle \phi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $\langle z_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$, $\{\phi_i\}_1^n$ — базис в $\mathcal{N}(B)$, $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в $\mathcal{N}^*(B)$.

Далее будем использовать обозначения $\bar{\Phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)'$, $\bar{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)'$, $c\bar{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$, $c = (c_1, \dots, c_n)'$,

$$\hat{u}_0 = \begin{cases} \frac{s}{r} \Gamma a_0, & \text{если } F(0, t) \sim a_0 t^{\frac{r}{s}-1} \text{ при } t \rightarrow 0; \\ 0, & \text{если } \|F(0, t)\|_{E_2} = \mathcal{O}(|t|^k) \text{ при } t \rightarrow 0, \quad k > \frac{r}{s} - 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Пусть наряду с условиями А), В), С) выполнено условие

Д) Система алгебраических уравнений

$$L_j(c) \equiv \sum_{ir+ks=r+m} \langle F_{ik}(c\bar{\Phi} + \hat{u}_0), \psi_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (1.3)$$

имеет простое решение $c^* \neq 0$, т. е.

$$\det \left\| \frac{\partial L_j(c_1^*, \dots, c_n)}{\partial c_j} \right\|_{i,j=\overline{1, n}} \neq 0$$

в точке c^* .

Проекторы $P = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \phi_i$, $Q = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$ порождают разложения пространств E_1, E_2 в прямые суммы подпространств $E_1 = E_1^n \dot{+} E_1^{\infty-n}$, $E_2 = E_{2,n} \dot{+} E_{2,\infty-n}$. Здесь подпространство $E_1^{\infty-n}$ состоит из тех элементов $u \in E_1$, для которых $\langle u, \gamma_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, n$; $E_{2,\infty-n}$ — из элементов $v \in E_2$, для которых $\langle v, \psi_i \rangle = 0$, $i = \overline{1, n}$, $E_1^n = N(B)$, $E_{2,n} = \text{span}(z_1, \dots, z_n)$. Оператор Γ переводит подпространство $E_{2,\infty-n}$ в подпространство $E_1^{\infty-n}$. Поэтому искомые решения задачи (0.1), (0.2) можно искать в виде

$$u = \Gamma v(t) + \sum_{i=1}^n c_i(t) \phi_i t^\nu \quad (1.4)$$

при условии $\langle v(t), \psi_i \rangle = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Замена (1.4) в силу тождества $B\Gamma v = v$, вытекающего из включения $v(t) \in E_{2,\infty-n}$, сводит уравнение (0.1) к уравнению

$$\frac{dv}{dt} = F(\Gamma v(t) + c\bar{\Phi} t^\nu, t)$$

с условиями $v|_{t=0} = 0$, $\langle F(\Gamma v(t) + c(t)\bar{\Phi} t^\nu, t), \psi_j \rangle = 0$, $j = \overline{1, n}$.

Поэтому при выполнении условий А), В), С) неизвестные $v(t)$ и $c(t)$ в представлении (1.4) искомого решения задачи Коши (0.1), (0.2) можно найти из системы $n + 1$ уравнений

$$v(t) = \int_0^t F(\Gamma v(s) + c(s)\bar{\Phi} s^\nu, s) ds, \quad (1.5)$$

$$t^{-\theta} \langle F(\Gamma v(t) + c(t)\overline{\Phi}t^\nu, t), \psi_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.6)$$

относительно неизвестных $v(t)$, $c(t)$, $c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))'$.

Таким образом, в силу условий А), В), С) замена (1.4) позволяет свести проблему построения решения $u(t)$ с алгебраической точкой ветвления $t = 0$ к отысканию функций $v(t) \sim t^\nu \hat{u}_0$ и $c(t) \sim c^*$ при $t \rightarrow 0$ из системы (1.5), (1.6), где \hat{u}_0 определяется формулой (1.2), c^* — простое решение алгебраической системы (1.3).

На основании неединственности выбора показателя ν в представлении (1.4) и неединственности решения c^* точку $t = 0$ будем называть алгебраической точкой ветвления решений задачи Коши (0.1), (0.2), а решение (1.4) — его ветвью.

Систему (1.5), (1.6) рассмотрим как одно операторное уравнение

$$\Phi(\omega, t) = 0 \quad (1.7)$$

относительно непрерывной вектор-функции $\omega(t) = (v(t), c(t))$ аргумента t со значениями в $E_2 \times \mathbb{R}^n$. Введем банахово пространство X таких вектор-функций с нормой

$$\|\omega\| = \max_{|t| \leq \rho} (\|v(t)\|_{E_2}, |c(t)|_{\mathbb{R}^n}).$$

В пространстве X зададим замкнутый шар $S(\omega_0, r)$, где $\omega_0 = (0, c^*)$. В шаре $S(\omega_0, r)$ выделим замкнутое подмножество $\Omega_{r\rho}$ непрерывных функций $\omega(t) = (v(t), c(t))$, определенных при $|t| \leq \rho$, таких, что $\|v(t)\|_{E_2} = \mathcal{O}(t^\nu)$, $|c(t) - c^*|_{\mathbb{R}^n} = o(1)$ при $t \rightarrow 0$. Покажем, что нелинейное отображение Φ , действующее из $\Omega_{r\rho}$ в $\Omega_{r\rho}$ при достаточно малых $r > 0, \rho > 0$, удовлетворяет всем условиям принципа сжимающих отображений. Действительно, в силу выбора чисел ν, θ, m , вектора c^* и множества $\Omega_{r\rho}$ оператор Φ на этом множестве непрерывен, $\lim_{\Omega \ni \omega \rightarrow \omega_0, t \rightarrow 0} \Phi(\omega, t) = 0$. Более того, оператор $\Phi(\omega, t)$ имеет в $\Omega_{r\rho}$ непрерывную производную Фреше по ω . При этом

$$\Phi_\omega(\omega, t)|_{\omega=\omega_0, t=0} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ l & \mathfrak{A} \end{bmatrix}, \quad \Phi_\omega(\omega_0, 0)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\mathfrak{A}^{-1}l & \mathfrak{A}^{-1} \end{bmatrix},$$

где I — тождественный оператор из E_2 в E_2 , 0 — нулевой оператор из \mathbb{R}^n в E_2 , $l = (l_1, \dots, l_n)'$,

$$l_j = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{ik}(c^*\overline{\Phi} + \hat{u}_0)\Gamma \cdot, \psi_j \right\rangle, \quad j = \overline{1, n},$$

— линейные функционалы, определенные на E_2 ,

$$\mathfrak{A} = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{ik}(c^*\overline{\Phi} + \hat{u}_0)\phi_l, \psi_j \right\rangle, \quad l, j = \overline{1, n},$$

— невырожденная $n \times n$ - матрица.

Справедлива оценка

$$\|\Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0)\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq m.$$

Введем эквивалентное системе (1.7) операторное уравнение

$$\omega = R(\omega, t), \quad (1.8)$$

где оператор $R(\omega, t) = \omega - (\Phi_\omega(\omega_0, 0)^{-1}\Phi(\omega, t))$.

Покажем, что последовательные приближения $\omega_n = R(\omega_{n-1}, t)$, $\omega_0 = (t^\nu \hat{u}_0, c^*)$ сходятся к искомому решению уравнения (1.8) в окрестности точки $t = 0$. В силу условий А), В), С), D) существуют радиусы $r > 0, \rho > 0$, положительные постоянные m, l и непрерывные функции $q_1(\rho) \rightarrow 0, q_2(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, такие, что при любых ω_1, ω_2 из $\Omega_{r\rho}$ выполнены оценки:

- 1) $\|\Phi_\omega(\omega_1, t) - \Phi_\omega(\omega_2, t)\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq l\|\omega_1 - \omega_2\|$;
 2) $m\|\Phi(\omega_0, t)\| \leq q_2(\rho)$, $m\|\Phi_\omega(\omega_0, t) - \Phi_\omega(\omega_0, 0)\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq q_1(\rho)$.

Выбирая $\rho > 0$ достаточно малым, обеспечим выполнение неравенства $2ml < \frac{(1 - q_1(\rho))^2}{q_2(\rho)}$ и положим

$$r = \frac{1 - q_1(\rho) - \sqrt{(1 - q_1(\rho))^2 - 2mlq_2(\rho)}}{ml}. \quad (1.9)$$

Напомним, что в силу условий А) и В) при $\|v(t)\|_{E_2} = \mathcal{O}(t^\nu)$ справедлива оценка

$$\left\| \int_0^t F(\Gamma v(s) + c(s)\Phi s^\nu, s) ds \right\|_{E_2} = \mathcal{O}(t^\nu),$$

гарантирующая для последовательных приближений $\omega_n(t)$ требуемую асимптотическую оценку. С учетом этого нетрудно показать, что оператор $R(\omega, t)$ переводит замкнутое множество $\Omega_{r\rho}$ из шара $S(\omega_0, r)$ банахова пространства X в себя самого и является сжимающим — с коэффициентом сжатия $1 - \sqrt{(1 - q_1(\rho))^2 - 2mlq_2(\rho)} < 1$.

Действительно, при $\|\omega - \omega_0\| \leq r$, где $\omega \in \Omega_{r\rho} \subset S(\omega_0, r)$, в силу неравенств 1) и 2) имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|R(\omega, t) - \omega_0\| &= \left\| \Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0) \left[\Phi_\omega(\omega_0, t)(\omega - \omega_0) - \Phi(\omega, t) + \Phi(\omega_0, t) - \Phi(\omega_0, t) \right. \right. \\ &+ \left. \left. (\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega_0, t))(\omega - \omega_0) \right] \right\| \leq m \left\{ \left\| \int_0^1 (\Phi_\omega(\omega_0, t) - \Phi_\omega(\omega_0 + \theta(\omega - \omega_0), t)) d\theta(\omega - \omega_0) \right\| \right. \\ &\left. + \|\Phi(\omega_0, t)\| + \|\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| \|\omega - \omega_0\| \right\} \leq \frac{1}{2}mlr^2 + q_2(\rho) + q_1(\rho)r = r. \end{aligned}$$

Поэтому существуют $r > 0, \rho > 0$ такие, что оператор $R(\omega, t)$ переводит множество $\Omega_{r\rho}$ в себя самого. Далее при $\omega \in \Omega_{r\rho}$, где r определено выше формулой (1.9) при достаточно малом $\rho > 0$, имеем оценку $\|R_\omega(\omega, t)\| \leq m\|\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega, t) + \Phi_\omega(\omega_0, t) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| \leq m\|\Phi_\omega(\omega_0, 0) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| + m\|\Phi_\omega(\omega, t) - \Phi_\omega(\omega_0, t)\| \leq q_1(\rho) + mlr = 1 - \sqrt{(1 - q_1(\rho))^2 - 2mlq_2(\rho)} < 1$.

Следовательно, оператор $R(\omega, t)$ на множестве $\Omega_{r\rho}$ является сжимающим с коэффициентом сжатия меньшим единицы.

Искомое непрерывное решение $w(t)$ можно найти последовательными приближениями

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \Phi_\omega^{-1}(\omega_0, 0)\Phi(\omega_{n-1}, t), \quad (1.10)$$

где $\omega_0 = (t^\nu \hat{u}_0, c^*)$, $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, справедлива

Теорема. Пусть выполнены условия А), В), С) и D). Тогда существует такое $\rho > 0$, что при $|t| \leq \rho$ задача Коши (0.1), (0.2) имеет непрерывное решение $u(t)$. Более того справедлива асимптотическая оценка

$$u(t) \sim t^\nu(c^*\bar{\Phi} + \hat{u}_0),$$

где c^* — простой корень системы алгебраических уравнений (1.7), функция \hat{u}_0 определяется по формуле (1.6).

Построенная асимптотика может быть использована как начальное приближение при вычислении ветви решения исходной задачи Коши методом последовательных приближений в окрестности точки ветвления $t = 0$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда последовательные приближения $\{u_n\}$, где $u_n = \hat{u}_n + c_n\bar{\Phi}t^\nu$,

$$\check{V}\hat{u}_n = \int_0^t F(u_{n-1}(s), s) ds, \quad (1.11)$$

$$\check{B} = B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z,$$

$$\mathfrak{A}(c_n - c_{n-1}) = - \sum_{ir+ks=s+m} \langle F'_{ik}(c^* \bar{\Phi} + \hat{u}_0)(\hat{u}_n - \hat{u}_{n-1}), \bar{\Psi} \rangle - t^{-\theta} \langle F(u_{n-1}(t), t), \bar{\Psi} \rangle, \tag{1.12}$$

$\bar{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)'$, $n = 1, 2, \dots$, $u_0 = (\hat{u}_0 + c^* \bar{\Phi})t^\nu$, сходятся равномерно в окрестности точки $t = 0$ к решению задачи Коши (0.1), (0.2).

Для доказательства следствия достаточно в итерациях (1.10) выписать конкретный вид оператора $\Phi(\omega, t)$ и построенной выше производной Фреше $\Phi_\omega(\omega_0, 0)$.

Согласно следствию при построении приближений u_n на каждом шаге необходимо решить одно линейное операторное уравнение (1.11) с непрерывно обратимым оператором \check{B} и одну систему линейных алгебраических уравнений (1.12) с невырожденной матрицей \mathfrak{A} . Оператор $\check{B}^{-1} = \Gamma$ является ограниченным согласно [12, с. 221].

При этом мы видим, что точка $t = 0$ оказывается устранимой особой точкой правой части СЛАУ (1.12). Ввиду неизбежных погрешностей вычислений это обстоятельство следует учитывать при практических вычислениях. Регуляризация вычислений в окрестности точки $t = 0$ может быть достигнута заменой множителя $t^{-\theta}$ в правой части (1.12) на $(t + \text{sign } t\alpha)^{-\theta}$, где α — малый положительный параметр, согласованный с погрешностью вычисления δ в соответствии с известной концепцией регуляризации (см., например, [4, разд. 3]).

П р и м е р.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \right) = \sum_{i+k=n} b_{ik}(x) u^i t^k + a_0(x) + a_1(x)t + \dots + a_{n-1}(x)t^{n-1} + r(u, x, t),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0.$$

Функции $b_{ik}(x), a_i(x), r(u, x, t)$ непрерывны при $x \in [0, \pi]$ в окрестности точки $t = 0, u = 0$. Функция $r(u, x, t)$ имеет непрерывную производную по u , а при $u \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ удовлетворяет оценке $|r(u, x, t)| = o(\sum_{i+k=n} |u|^i |t|^k)$. Положим $E_1 = C_{[0, \pi]}^{(2)}$, $E_2 = C_{[0, \pi]}$, $F_{ik}(x) = b_{ik}(x)u^i$. Здесь оператор $B = \partial^2/\partial x^2 + I$ действует из E_1 в E_2 и является фредгольмовым, $\dim \mathcal{N}(B) = 1, \phi(x) = \psi(x) = \sin x$.

Диаграмма Ньютона, построение которой описано выше, в этом примере имеет один отрезок, и он проходит через точки $(0, n), (n, 0)$. Поэтому условие А) выполнено при $r = s = 1, m = n - 1$. Условие В) очевидно выполнено. Условие С) выполняется, если $\int_0^\pi a_i(x) \sin x dx = 0, i = \overline{0, n - 1}$.

Система D) оказывается одним нелинейным алгебраическим уравнением

$$L(c) \triangleq \int_0^\pi \sum_{i+k=n} b_{ik}(x) (c \sin x + \hat{u}_0(x))^i dx = 0,$$

где $\hat{u}_0(x)$ — решение линейной краевой задачи

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = a_0(x), \quad u(0) = u(\pi) = 0.$$

Поэтому в силу теоремы каждому простому корню c^* полинома $L(c)$ отвечает в этом примере решение $u(t, x) \sim t(c^* \sin x + \hat{u}_0)$ при $t \rightarrow 0$.

2. Заключение

В заключение отметим, что результаты теоремы и следствия при дополнительном ограничении на нелинейный оператор $F(u, t)$ сохраняются в случае, когда оператор B не является нормально разрешимым. Действительно, пусть $\dim \mathcal{N}(B) = \dim \mathcal{N}^*(B) = n \geq 1$, но область значений оператора B незамкнута. Тогда указанный выше оператор Γ существует, но будет неограниченным. Пусть при этом область значений непрерывного оператора $F(u, t)$ при любых u, t принадлежит области значений оператора \check{B} . Очевидно, что тогда доказательство теоремы остается справедливым и, более того, можно использовать итерационные формулы следствия, привлекая для решения соответствующих линейных уравнений (1.11) хорошо разработанные методы регуляризации некорректных задач (см. библиографию в [4, разд. 3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахмедов К.Т.** Аналитический метод Некрасова — Назарова в нелинейном анализе // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 4. С. 135–158.
2. **Брюно А.Д.** Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
3. **Демиденко В.Г., Успенский С.В.** Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск : Науч. кн., 1998. 436 с.
4. **Иванов В.К.** Избранные научные труды. Математика. М.: Физматлит, 2008. 552 с.
5. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. М. : Физматлит, 2007. 736 с.
6. Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / ред. В.А. Треногин, А.Ф. Филиппов. М.: Физматлит, 2003. 464 с.
7. **Сидоров Н.А.** О ветвлении решений задачи Коши для одного класса нелинейных интегродифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 9. С. 1592–1601.
8. **Сидоров Н.А., Леонтьев Р.Ю.** О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях. // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 226–237.
9. **Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н.** О решениях интегрального уравнения Гаммерштейна в нерегулярном случае методом последовательных приближений // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 404–409.
10. **Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н.** О малых решениях дифференциальных уравнений в окрестностях точек ветвления // Изв. вузов. 2010. № 5. С. 53–61. (Математика.)
11. **Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н., Красник А.В.** О решении операторно-интегральных уравнений Вольтерры в нерегулярном случае методом последовательных приближений // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 6. С. 874–882.
12. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М.: Наука, 2007. 488 с.
13. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinityn, M. Falaleev. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 568 p.
14. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** Linear Sobolev Type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Tokyo; Keln: VSP, 2003. 216 p.

Сидоров Николай Александрович

Поступила 28.03.2011

д-р физ.-мат. наук, профессор

Институт математики, экономики и информатики Иркутского гос. университета

e-mail: sidorovisu@gmail.com

Сидоров Денис Николаевич

канд. физ.-мат. наук, доцент

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

старший науч. сотрудник

Институт математики, экономики и информатики Иркутского гос. университета

e-mail: dsidorov@isem.sei.irk.ru

УДК 517.9

**АСИМПТОТИКА УНИВЕРСАЛЬНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО
РЕШЕНИЯ ГУРЕВИЧА — ПИТАЕВСКОГО
УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ВРИЗА ПРИ $|x| \rightarrow \infty$ ¹**

Б. И. Сулейманов

Построено и обосновано полное асимптотическое разложение при $x \rightarrow \pm\infty$ универсального специального решения Гуревича — Питаевского уравнения Кортевега—де Вриза $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$. Данное асимптотическое разложение дифференцируемо любое число раз по переменным t и x . Оно, и асимптотические разложения всех его производных по независимым переменным равномерны на любом компактном промежутке изменения времени t .

Ключевые слова: уравнение Кортевега — де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера, изомонодромность, асимптотическое разложение.

B. I. Suleimanov. Asymptotics of the Gurevich–Pitaevskii universal special solution of the Korteweg–de Vries equation as $|x| \rightarrow \infty$.

A complete asymptotic expansion as $x \rightarrow \pm\infty$ of the Gurevich–Pitaevskii universal special solution of the Korteweg–de Vries equation $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$ is constructed and validated. The expansion is infinitely differentiable in the variables t and x and, together with the asymptotic expansions of all its derivatives in independent variables, is uniform on any compact interval of variation of the time t .

Keywords: Korteweg–de Vries equation, nonlinear Schrödinger equation, isomonodromy, asymptotic expansion.

*Дорогому учителю к юбилею***Введение**

Одно из самых тонких аналитических исследований А. М. Ильина (см. [1, гл. IV]) посвящено асимптотике при $\epsilon \rightarrow 0$ решения задачи Коши

$$v_T + g(v)v_X = \epsilon^4 v_{XX}, \quad v(-1, X) = v_0(X). \quad (0.1)$$

Им рассматривался весьма общий начальный монотонный профиль $v_0(X)$ такой, что решение предельной задачи

$$v_T + g(v)v_X = 0, \quad v(-1, X) = v_0(X) \quad (0.2)$$

в точке $T = 0, X = 0$ претерпевает типичную градиентную катастрофу. (Производные v_T и v_X решения предельной задачи (0.2) обращаются в этой точке в бесконечность, хотя при $-1 \leq T < 0$ и $T = 0, X \neq 0$ данное решение предельной задачи (0.2) бесконечно дифференцируемо.) А. М. Ильин, в частности, доказал, что в главном при $\epsilon \rightarrow 0$ порядке решение соответствующей задачи (0.1) в окрестности точки $T = 0, X = 0$ задается решением уравнения Бюргерса

$$\Gamma_t + \Gamma\Gamma_x = \Gamma_{xx} \quad (0.3)$$

(t, x —растянутые переменные), которое представляет собой логарифмическую производную модификации известного интеграла Пирси

$$\Gamma(t, x) = -2[\ln\Lambda(t, x)]'_x, \quad \Lambda(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-(4\lambda x - 2t\lambda^2 + \lambda^4)/8)d\lambda. \quad (0.4)$$

¹Работа выполнена при поддержке ФЦП (контракт 02.740.11.0612).

Это специальное решение уравнения Бюргерса, впервые выписанное в [2], носит универсальный характер — в работах [3–5] показано, что оно в главном порядке описывает влияние малых диссипативных поправок к широкому классу уравнений, являющихся возмущениями уравнений одномерного движения изэнтропического газа

$$h'_T + (hv)'_X = 0, \quad v'_T + vv'_X + \alpha(h)h'_X = 0 \quad (\alpha(h) > 0). \quad (0.5)$$

Настоящая статья посвящена дисперсионному аналогу функции (0.4) — специальному решению Гуревича — Питаевского (ГП) уравнения Кортевега — де Вриза (КдВ)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (0.6)$$

которое, подобно решению (0.4) уравнения Бюргерса (0.3), при $t \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow \pm\infty$ в качестве главного члена асимптотики имеет корень $H(t, x)$ кубического уравнения сборки

$$H^3 - tH + x = 0.$$

Данное решение введено в рассмотрение в [6] в качестве нелинейной специальной функции, универсальным образом описывающей влияние малых дисперсионных добавок на процессы опрокидывания простых волн в нелинейной гидродинамике.

Подобную же универсальную роль данное специальное решение уравнения (0.6) играет не только в случае простых волн — аналогичным образом оно возникает из многих дисперсионных возмущений системы (0.5) в окрестности точек градиентной катастрофы общего положения решений этой системы [3–5] (см. также недавние работы [7–9]).

В статьях [10; 11] было установлено, что решение ГП наряду с уравнением (0.6) одновременно удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$u_{xxxx} + \frac{5}{3}uu_{xx} + \frac{5}{6}u_x^2 + \frac{5}{18}(x - tu + u^3) = 0, \quad (0.7)$$

которое при $t = 0$ рассматривалось в статье [12] при вычислении непертурбативного струнного эффекта в двумерной квантовой теории гравитации. Также в связи с задачами квантовой теории гравитации при $t > 0$ фактически это же решение ГП рассматривалось в [13] — см. [9].

В настоящий момент эта специальная функция изучена уже довольно хорошо. Ее поведение численно промоделировано [9], уточнены и прояснены результаты [6; 14] об ее асимптотиках при больших значениях t и x [3; 9; 11; 15; 16] (в [16] содержатся и строгие обоснования части асимптотик), доказана гладкость данной функции при всех t и x [17]. Но строгие математические обоснования асимптотик при $t^2 + x^2 \rightarrow \infty$ универсального специального решения ГП в работах [16; 17] пока относились лишь к главному порядку.

В данной работе доказывается следующая теорема, которая описывает полное асимптотическое разложение (АР) решения ГП при $x \rightarrow \pm\infty$. (Формальный вид данного АР выведен в [10; 11] с помощью рассуждений и вычислений, которые во многом следуют анализу А. М. Ильина на соответствующей проблеме для задачи (0.1).)

Теорема 1. *Существует единственное совместное решение ОДУ (0.7) и уравнения КдВ (0.6), которое для каждого фиксированного $t = T$ при $x \rightarrow \pm\infty$ в качестве полного АР имеет степенной ряд*

$$u(t, x) = -x^{1/3} - \frac{t}{3x^{1/3}} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{P_j(t)}{x^{j/3}}, \quad (0.8)$$

где $P_j(t)$ — многочлены, однозначно определяемые в результате подстановки данного ряда в ОДУ (0.7). Это АР бесконечное число раз дифференцируемо по переменным t и x .

Узловые моменты доказательства теоремы 1 изложены в работах [11; 18] — оно основано на изомонодромности совместных решений (0.6), (0.7), использовании общей теоремы А. Н. Кузнецова [19] (позволяющей, следуя [18], обосновать существование решения ОДУ (0.7), определенного при $|x| > C > 0$ и имеющего АР (0.8)) и результата [20] о глобальной разрешимости задачи Коши для уравнения (0.6) с гладкими начальными данными, имеющими АР вида (0.8). Результаты последних лет [17] и [21] позволили придать рассуждениям из [11; 18] полную математическую строгость и доказать с их помощью сформулированную выше теорему 1.

Кроме того, в статье доказывается следующее утверждение, означающее равномерность асимптотик из теоремы 1 по переменной t .

Теорема 2. АР (0.8) совместного решения $u(t, x)$ уравнений (0.6) и (0.7), описанного в теореме 1, удовлетворяют оценкам

$$\partial_t^l \partial_x^m \left(u(t, x) + x^{1/3} + \frac{t}{3x^{1/3}} - \sum_{j=2}^n \frac{P_j(t)}{x^{j/3}} \right) = O(|x|^{-(n+1)/3-m})$$

равномерно по $t \in [-T, T]$ для любого положительного T .

1. Доказательства теорем 1 и 2

Совместное решение уравнений (0.6) и (0.7) относится [10; 11] к изомонодромным. Наряду с уравнениями метода обратной задачи [22]

$$\Psi_x = U(\lambda, t, x)\Psi = \begin{pmatrix} -i\lambda & u/6 \\ -1 & i\lambda \end{pmatrix} \Psi, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \Psi_t = V(\lambda, t, x)\Psi = & \left((-4i\lambda^3 + iu\lambda/3 - u_x/6) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & u/6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + i\lambda u_x/3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -u_{xx}/6 - u^2/18 \\ u/3 & 0 \end{pmatrix} \right) \Psi \end{aligned} \tag{1.2}$$

для соответствующих Ψ -функций имеет место еще и линейная система

$$\Psi_\lambda = \frac{1}{5} A(t, x, \lambda)\Psi, \tag{1.3}$$

где матрица $A(t, x, \lambda)$ есть многочлен

$$\begin{aligned} A = & \left[3456i\lambda^6 - 288i\lambda^4 u + 144\lambda^3 u_x + i\lambda^2(-60t + 72(u_{xx} + u^2/2)) - 36\lambda(u_{xxx} + uu_x) \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & + \left[-576\lambda^5 u - 288i\lambda^4 u_x + 144\lambda^3(u_{xx} + u^2/3) + 72i\lambda^2(u_{xxx} + uu_x) \right. \\ & \left. + \lambda(10x + 12uu_{xx} - 6u_x^2 + 4u^3) + 5i \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + [3456\lambda^5 - 288\lambda^3 u + \lambda(72(u_{xx} + u^2/2) - 60t)] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Из [23, гл. IV, §10, §11, §14] следует, что справедлива

Лемма 1. Пусть функция $u(t, x)$ является решением ОДУ (0.7). Существуют аналитические по λ 2×2 матрицы $\Psi_k(\lambda, t, x)$ ($k = 1, \dots, 8$) — решения системы (1.3), (1.4), которые при $\lambda \rightarrow \infty$ в секторах

$$S_k = (\lambda: \pi(k-1)/7 < \arg \lambda < \pi(k+1)/7) \quad k = 1, \dots, 14 \quad (1.5)$$

обладают AP

$$\Psi = \left(I + \sum_{j=1}^{\infty} P_j(t, x) \lambda^{-j} \right) \exp \left(\sum_{j=0, j \neq 7}^{\infty} \frac{\lambda^j B_j(t, x)}{\lambda^j} + B_7(t, x) \ln \lambda \right). \quad (1.6)$$

Здесь матрицы $B_j(t, x)$ диагональны

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{11,j} & 0 \\ 0 & b_{22,j} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \frac{3456i}{35} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_2 = B_3 = B_5 = 0, \\ B_4 = -4it \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_6 = -ix \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

а все матрицы $P_j(t, x)$ антидиагональны

$$P_j = \begin{pmatrix} 0 & p_{12,j} \\ p_{21,j} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & u/6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{u_x}{24} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_3 = \frac{i}{48} \begin{pmatrix} 0 & u_{xx} + u^2/6 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & -u_{xxx}/96 - uu_x/144 \\ u_x/96 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_5 = \frac{i}{3456} \begin{pmatrix} 0 & 5(x-tu) + 12uu_{xx} + 4u^3 \\ -18u_{xx} - 6u^2 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_6 = \frac{1}{6912} \begin{pmatrix} 0 & -6(u_{xxx}u + u_{xx}u_x) - 7u^2u_x + 5tu_x - 5 \\ -18(u_{xxx} + uu_x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Доказательства следующих трех лемм в идейном плане очень близки к доказательствам похожих утверждений в известной работе Г. Фляшки и А. Ньюэлла [24].

Лемма 2. Пусть справедливы условия леммы 1. Тогда матрицы $\Psi_k(\lambda, t, x)$ ($k = 1, \dots, 8$) — решения системы (1.3), (1.4), которые в секторах (1.5) обладают AP (1.6)–(1.8), одновременно являются решениями системы (1.1). Связывающие их формулами

$$M_k(x, t) = \Psi_k^{-1} \Psi_{k+1} \quad (1.9)$$

матрицы Стокса M_k не зависят от x .

Доказательство. После дифференцирования системы (1.3) по x и решения полученного неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных получим соотношение

$$(\Psi_k)'_x(\lambda, t, x) = \Psi_k(\lambda, t, x) \left[(\Psi_k(\lambda_0, t, x))^{-1} (\Psi_k(\lambda_0, t, x))'_x \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\Psi_k(\zeta, t, x))^{-1} (A(\zeta, t, x))'_x \Psi_k(\zeta, t, x) d\zeta \right]. \quad (1.10)$$

При справедливости ОДУ (0.7) системы линейных ОДУ (1.3), (1.4) и (1.1) совместны — выполнено матричное соотношение $(A)'_x = U'_\lambda + UA - AU$. Из него, соотношения (1.10) и матричного соотношения

$$\Psi^{-1}(U'_\lambda + UA - AU)\Psi = (\Psi^{-1}U\Psi)'_\lambda$$

для фундаментальных решений системы (1.3), (1.4) вытекает, что

$$(\Psi_k)'_x(\lambda) = U(\lambda)\Psi_k(\lambda) + \Psi_k(\lambda)(\Psi_k(\lambda_0))^{-1}[\Psi_k(\lambda_0)'_x - U(\lambda_0)\Psi_k(\lambda_0)].$$

Устремляя теперь параметр λ_0 к бесконечности вдоль луча $\arg \lambda = \pi k/7$ сектора (1.5), где при больших λ в силу асимптотики (1.6)

$$(\Psi_k)'_x \Psi_k^{-1} = -i\lambda \left(I + \frac{P_1}{\lambda} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(I - \frac{P_1}{\lambda} \right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) = U + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad (1.11)$$

приходим к выводу, что одновременно матрицы Ψ_k суть решения системы ОДУ (1.1). Дифференцируя далее соотношения (1.9) по x , получаем, что

$$(M_k)'_x = (\Psi_k^1)^{-1} [-(\Psi_k^1)'_x (\Psi_k^1)^{-1} \Psi_{k+1}^1] + (\Psi_k^1)^{-1} (\Psi_{k+1}^1)'_x = -(\Psi_k^1)^{-1} U \Psi_{k+1}^1 + (\Psi_k^1)^{-1} U \Psi_{k+1}^1 = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть фундаментальные решения $\Psi_k(\lambda, t, x)$ ($k = \overline{1, 8}$) системы линейных ОДУ (1.3), (1.4) при $\lambda \rightarrow \infty$ внутри секторов (1.5) имеют AP (1.6)–(1.8), и пусть связывающие их формулами (1.9) матрицы Стокса M_k не зависят ни от x ни от t . Тогда функция $u(t, x)$ является совместным решением уравнения КдВ (0.6) и ОДУ (0.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Постоянство матриц Стокса M_k влечет за собой справедливость соотношений

$$(\Psi_{k+1})'_x (\Psi_{k+1})^{-1} = (\Psi_k)'_x M_k (\Psi_k)^{-1} = (\Psi_k)'_x M_k (\Psi_k M_k)^{-1} = (\Psi_k)'_x (\Psi_k)^{-1}, \quad (1.12)$$

$$(\Psi_{k+1})'_t (\Psi_{k+1})^{-1} = (\Psi_k)'_t (\Psi_k)^{-1}. \quad (1.13)$$

Эти два соотношения гарантируют, что голоморфные матрицы $(\Psi_{k+1})'_x (\Psi_{k+1})^{-1}$ и $(\Psi_{k+1})'_t (\Psi_{k+1})^{-1}$ имеют равномерные AP при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Соотношения (1.11), (1.12) с учетом теоремы Лиувилля позволяют сделать вывод о том, что матрицы $\Psi_k(\lambda, t, x)$ — это решения линейных систем ОДУ (1.1), а значит, функции $u(t, x)$ являются решением ОДУ (0.7).

Из справедливости асимптотик (1.6) следует также справедливость утверждения о том, что для каждого k внутри сектора (1.5)

$$\begin{aligned} (\Psi_k)'_t (\Psi_k)^{-1} &= -4i\lambda^3 \left(I + \frac{P_1}{\lambda} + \frac{P_2}{\lambda^2} + \frac{P_3}{\lambda^3} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(I - \frac{P_1}{\lambda} - \frac{P_2 - P_1^2}{\lambda^2} - \frac{P_3 + P_1^3 - P_1 P_2 - P_2 P_1}{\lambda^3} \right) \\ &+ O(|\lambda|^{-1}) = V + O(|\lambda|^{-1}). \end{aligned}$$

Из этого соотношения, из соотношения (1.13) и из теоремы Лиувилля вытекает справедливость для матриц $\Psi_k(\lambda, t, x)$ равенств (1.2), а значит, и тот факт, что функция $u(t, x)$ есть решение КдВ (0.6). Лемма доказана.

Лемма 4. Существует не более одного решения ОДУ (0.7), соответствующего набору постоянных матриц Стокса M_k ($k = 1, \dots, 8$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что набору матриц $M_k(t)$ соответствуют два различных набора $\Psi_{1,k}^1, \Psi_{2,k}^2$ ($k = 1, \dots, 8$) фундаментальных совместных решений линейных систем (1.3), (1.4), коэффициенты которых зависят от двух разных решений ОДУ (0.7). Согласно соотношениям (1.9)

$$\overline{\Psi_{1,k+1}^1} (\Psi_{2,k+1}^2)^{-1} = \Psi_{1,k}^1 (\Psi_{2,k}^2)^{-1}.$$

Стало быть, аналитическая по λ матрица $\tilde{S} = \Psi_{1,k}^1(\Psi_{2,k}^2)^{-1}$ не зависит от номера k , а значит, из справедливости для каждой из матриц $\Psi_{1,k}^1, \Psi_{2,k}^2$ асимптотик (1.6) в соответствующем секторе (1.5) вытекает, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$ матрица $\tilde{S} - I$ стремится к нулю. Окончание доказательства леммы вновь сводится к применению теоремы Лиувилля.

В недавней работе [17] было доказано, что при любом фиксированном $t = T$ существует бесконечно дифференцируемое вещественное решение уравнения (0.7) такое, что при $x \rightarrow \pm\infty$ данное решение имеет следующие асимптотики:

$$u(t, x) = -x^{1/3} - \frac{t}{3x^{1/3}} + O\left(\frac{1}{|x|}\right). \quad (1.14)$$

При этом из результатов [17] следует также, что данным решениям ОДУ (0.7) соответствует набор совместных решений $\Psi_k(\lambda, t, x)$ системы линейных ОДУ (1.3), (1.4), которые удовлетворяют условиям леммы 3 с одним и тем же набором постоянных матриц Стокса M_k . Использование данных результатов [17] и лемм 2–4 позволяет заключить, что справедлива

Лемма 5. *Существует единственное совместное решение ОДУ (0.7) и уравнения КдВ (0.6), которое для каждого фиксированного $t = T$ при $x \rightarrow \pm\infty$ удовлетворяет оценкам (1.14)*

Согласно общей теореме А. Н. Кузнецова [19] из существования формального степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n y^n$ с постоянными вещественными векторами $U_n \in \mathbb{R}^m$, являющегося формальным решением системы ОДУ

$$y^r U_y' = A(y, U) \quad (U, A \in \mathbb{R}^m, \quad r \in \mathbb{N})$$

с бесконечно дифференцируемым в окрестности точки $y = 0, U = 0$ вектором $A(y, u)$, следует, что для малых вещественных y имеется и бесконечно дифференцируемое решение этой системы, для которого данный степенной ряд есть формальный ряд Тейлора в точке $y = 0$.

Данная теорема А. Н. Кузнецова справедлива как для положительных, так и для отрицательных значений переменной y . Из этого обстоятельства вытекает то, что при $t = 0$ и $|x| > X_*$ существует решение ОДУ (0.7), которое при $x = y^{-3} \rightarrow \pm\infty$ имеет степенное АР (0.8). Мероморфность всех решений данного ОДУ, доказанная Ш. Шимомурой [21], и результаты [17] позволяют сделать вывод о том, что при $t = 0$ решение ОДУ (0.7) из леммы 5 обязательно имеет полное АР (0.8). Рассмотрим данное решение в качестве начального значения для изомодромного решения уравнения КдВ (0.6). Данная задача Коши относится к классу задач, теорема глобального (по переменной t) существования решений которых с заданными асимптотиками при $x \rightarrow \pm\infty$ доказана И. Н. Бондаревой [20].

Воспользовавшись леммами 1–5, заключаем, что теорема 1 доказана.

Следуя статье И. Н. Бондаревой и А. М. Шубина [25], рассмотрим класс $C^\infty([a, b], S^\alpha)$ функций $h(t, x) \in C^\infty([a, b] \times \mathbb{R})$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\partial_t^l \partial_x^m h(t, x) = O(|x|^{\alpha-m})$$

равномерно по $t \in [a, b]$. Из результатов [25] и теоремы 1 сразу вытекает, что специальное решение ГП уравнения Кдв (0.6), рассматриваемое в данной работе, принадлежит классу $C^\infty([-T, T], S^{1/3})$.

Обозначим далее через $u_n(t, x)$ ряд

$$u_n(t, x) = v_{-1}(x) + tv_1(x) + \sum_{j=2}^n P_j(t)v_j(x), \quad (1.15)$$

где многочлены $P_j(t)$ совпадают с многочленами, задающими формальный ряд (0.8), а функции $v_j(x)$ вне некоторого компакта тождественно равны следующим степеням x :

$$v_{-1}(x) = -x^{1/3}, \quad v_1(x) = -\frac{1}{3x^{1/3}}, \quad v_j(x) = \frac{1}{x^{j/3}}.$$

Вне этого компакта ряд (1.15) совпадает с частичной суммой

$$-x^{1/3} - \frac{t}{3x^{1/3}} + \sum_{j=2}^n \frac{P_j(t)}{x^{j/3}} \quad (1.16)$$

формального решения (0.8) уравнения КдВ (0.6). Тогда разность

$$w_n(t, x) = u(t, x) - u_n(t, x) \quad (1.17)$$

между решением $u(t, x)$ уравнения (0.6), описанным в теореме 1, и рядом (1.15) удовлетворяет уравнению

$$(w_n)'_t + w_n(w_n)'_x + (a(t, x)w_n)'_x + (w_n)'''_{xxx} = g. \quad (1.18)$$

Здесь функция $a(t, x) = u(t, x) + u_n(t, x)$, очевидно, принадлежит классу $C^\infty([-T, T], S^{1/3})$, а правая часть уравнения $g(t, x) \in C^\infty([-T, T] \times \mathbb{R})$ удовлетворяет условиям:

для любых натуральных l и m и всех достаточно больших чисел n существуют числа $N(n)$, которые стремятся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$ и такие, что $g(t, x) \in C^\infty([-T, T], S^{-N(n)})$.

Применение результатов статьи [25] к решению задачи Коши для уравнения (1.18) с начальными данными в точке $t = -T$ с учетом справедливости уже доказанной теоремы 1 позволяет заключить, что решение $w_n(t, x)$ этой задачи Коши также принадлежит пространству $C^\infty([-T, T], S^{-N(n)})$. Это означает справедливость утверждения теоремы 2 для всех достаточно больших n . Ее доказательство для оставшихся натуральных n теперь очевидно.

2. Заключение

Аналогичным образом использование общей теоремы А. Н. Кузнецова и упомянутых выше результатов И. Н. Бондаревой и М. А. Шубина (а также их совместных работ [26; 27]) может помочь в описании полных и равномерных АР при $x \rightarrow \pm\infty$ совместных решений уравнений КдВ (0.6) и иерархии ОДУ, теорема глобального существования которых доказана в недавней работе [28].

Теорема А. Н. Кузнецова из статьи [19] вообще представляется весьма полезной в плане ее использования (как в [18] и в данной работе) для описания глобальных свойств решений как самих уравнений Пенлеве (с степенным АР при больших значениях модуля независимой комплексной переменной при ее изменении по нескольким лучам), так и решений их высших аналогов.

В качестве примера последних наряду с упомянутой иерархией решений уравнений КдВ можно указать иерархию специальных изомонодромных решений нелинейного уравнения Шредингера (δ — вещественная постоянная)

$$-iq_t = q_{xx} + 2\delta|q|^2q \quad (2.1)$$

из работы [29], которая для широкого ряда задач описывает влияние малых нелинейностей на высокочастотные асимптотики около перестраивающихся каустик — двумя первыми представителями этой иерархии являются аналог функции Эйри, выражающийся через решения второго уравнения Пенлеве, и решение (2.1) из статьи Р. Сана и Р. Хабермана [30], при $\delta = 0$ совпадающее с интегралом Пирси

$$I(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i(\lambda x + t\lambda^2 + \lambda^4)) d\lambda$$

(по поводу изомонодромности этого универсального решения нелинейного уравнения Шредингера см. [31–33]).

З а м е ч а н и е. Актуальность для многих задач с малым параметром двух иерархий нелинейных ОДУ, частные решения которых рассматривались в [28; 29], исходя из общих соображений, была предсказана А. В. Китаевым в публикации [34].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
2. **Lighthill M.J.** Viscosity effects in sound waves of finite amplitude // *Surveys in Mechanics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1956. P. 250–351.
3. **Kudashev V., Suleimanov B.** A soft mechanism for generation the dissipationless shock waves // *Phys. Lett. A*. 1996. Vol. 221, no. 3,4. P. 204–208.
4. **Кудашев В.Р., Сулейманов Б.И.** Мягкий режим формирования бездиссипативных ударных волн // *Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения*. Т. III: Дифференциальные уравнения. Уфа: Уфимский научный центр РАН, Ин-т математики с ВЦ, 1996. С. 98–108. (URL: http://matem.anrb.ru/e_lib/preprints/BS/bs22.html).
5. **Кудашев В.Р., Сулейманов Б.И.** Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн // *Прикл. математика и механика*. 2001. Т. 65, вып. 3. С. 456–466.
6. **Гуревич А.В., Питаевский Л.П.** Опрокидывание простой волны в кинетике разреженной плазмы // *Журн. эксперимент. и теорет. физики*. 1971. Т. 60, вып. 6. С. 2155–2174.
7. **Dubrovin V.** On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws, II: Universality of critical behaviour // *Commun. Math. Phys.* 2006. Vol. 267. P. 117–139.
8. **Dubrovin V.** On universality of critical behaviour in hamiltonian PDEs // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2*. 2008. Vol. 224. P. 59–109.
9. **Garifullin R., Suleimanov B., Tarkhanov N.** Phase shift in the Whitham zone for the Gurevich–Pitaevskii special solution of the Korteweg–de Vries equation // *Phys. Lett. A*. 2010. Vol. 374, no. 13, 14. P. 1420–1424.
10. **Сулейманов Б.И.** О решении уравнения Кортевега — де Вриза, возникающего вблизи точки опрокидывания в задачах с малой дисперсией // *Письма в журн. эксперимент. и теорет. физики*. 1993. Т. 58, вып. 2. С. 906–910.
11. **Сулейманов Б.И.** Возникновение бездиссипативных ударных волн и “непертурбативная” квантовая теория гравитации // *Журн. эксперимент. и теорет. физики*. 1994. Т. 105, вып. 5. С. 1089–1099.
12. **Bresin E., Marinari E., Parisi G** A nonperturbative ambiguity free solution of a string model // *Phys. Lett. B*. 1990. Vol. 242, no. 1. P. 35–38.
13. **Douglas M., Seiberg N., Shenker S.** Flow and unstability in quantum gravity // *Phys. Lett. B*. 1990. Vol. 244, no. 3, 4. P. 381–385.
14. **Гуревич А.В., Питаевский Л.П.** Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // *Журн. эксперимент. и теорет. физики*. 1973. Т. 65, вып. 2. С. 590–604.
15. **Потемин Г.В.** Алгебро-геометрическое построение решений уравнений Уизема // *Успехи мат. наук*. 1988. Т. 43, вып. 5(263). С. 211–213.
16. **Claeys T.** Asymptotics for a special solutions to the second member of the Painleve I hierarchy // *J. Phys. A*. 2010. Vol. 43, no. 43, 434012. 18 p.
17. **Claeys T., Vanlessen M.** The existence of a reale pole-free solution of the fourth order analogue of the Painleve I equation // *Nonlinearity*. 2007. Vol. 20, no. 5. P. 1163–1184.
18. **Сулейманов Б.И.** Степенные асимптотики решений уравнений типа Пенлеве // *Успехи мат. наук*. 1995. Т. 50, вып. 4. С. 76–77.
19. **Кузнецов А.Н.** Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Функц. анализ и его приложения*. 1972. Т. 6, вып. 2. С. 41–51.
20. **Бондарева И.Н.** Уравнение Кортевега — де Фриза в классах растущих функций с заданной асимптотикой при $|x| \rightarrow \infty$ // *Мат. сб.* 1983. Т. 122, № 2. С. 133–141.
21. **Shimomura S.** A certain expansion of the first Painleve hierarchy // *Proc. Jap. Acad. A*. 2004. Vol. 80, no. 6. P. 105–109.
22. Теория солитонов. Метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. М.: Наука, 1980. 320 с.
23. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
24. **Flashka H., Newell A.** Monodromy- and spectrum-preserving deformations I // *Comm. Math. Phys.* 1980. Vol. 76, no. 1. P. 65–116.
25. **Бондарева И.Н., Шубин М.А.** Уравнения типа Кортевега — де Фриза в классах растущих функций // *Тр. семинара им. И.Г.Петровского*. 1989. Вып. 14. С. 44–56.

26. **Бондарева И.Н, Шубин М.А.** Растущие асимптотические решения уравнения Кортевега — де Фриза и его высших аналогов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 5. С. 1035–1038.
27. **Бондарева И.Н, Шубин М.А.** Об единственности решения задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза в классах растущих функций // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1985. № 3. С. 35–38.
28. **Claeys T.** Pole-free solutions of the first Painleve hierarchy and non-generic critical behavior for the KdV equation // Physica D. 2012. Vol. 241, no. 23–24. P. 2226–2236.
29. **Сулейманов Б.И.** О влиянии малой нелинейности на высокочастотные асимптотики при перестройках каустик // Теорет. мат. физика. 1994. Т. 98, № 2. С. 198–206.
30. **Haberman R., Sun Ren-ji.** Nonlinear cusped caustics for dispersive waves // Stud. Appl. Math. 1985. Vol. 72, no. 1. P. 1–37.
31. **Сулейманов Б.И.** Второе уравнение Пенлеве в одной задаче о нелинейных эффектах вблизи каустики // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1991. Т. 187. С. 110–128.
32. **Сулейманов Б.И.** Изомонодромное явление Стокса и нелинейные эффекты вблизи каустики // Докл. АН СССР. 1992. Т. 323, № 1. С. 40–44.
33. **Kitaev A.V.** Caustics in 1+1 integrable systems // J. Math. Phys. 1994. Vol. 35, no. 6. P. 2934–2954.
34. **Китаев А.В.** Точки поворота линейных систем и двойные асимптотики трансцендентов Пенлеве // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1991. Т. 187. С. 53–74.

Сулейманов Булат Ирекович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН
e-mail: bisul@mail.ru

Поступила 27.09.2011

УДК 517.925.51

УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕЗОНАНСА ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ¹

О. А. Султанов

Работа посвящена исследованию устойчивости растущих решений нелинейных систем, связанных с явлением авторезонанса. Цель работы заключается в нахождении условий, при которых имеет место устойчивость решений при постоянно действующих возмущениях. Основным инструментом здесь является функция Ляпунова. Результаты, полученные для уравнений главного резонанса, обобщаются на общие неавтономные системы, близкие к гамильтоновым.

Ключевые слова: устойчивость, возмущения, функция Ляпунова, нелинейные системы, авторезонанс.

O. A. Sultanov. Stability of autoresonance models under persistent disturbances.

The paper is devoted to investigating the stability of growing solutions of nonlinear systems related to the autoresonance phenomenon. The aim of the paper is to find conditions under which solutions are stable under persistent disturbances. The main tool here is the Lyapunov function. The results obtained for the main resonance equations are extended to general nonautonomous systems close to Hamiltonian systems.

Keywords: stability, perturbations, Lyapunov function, nonlinear systems, autoresonance.

1. Введение

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений, соответствующие моделям авторезонанса:

$$\frac{dr}{dt} = \sin \psi, \quad r \left[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t \right] = b \cos \psi; \quad (1.1)$$

$$\frac{dr}{dt} = r \sin \psi, \quad \frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t = b \cos \psi. \quad (1.2)$$

Здесь $\lambda, b = \text{const} \neq 0$, $\lambda > 0$. Такие уравнения возникают во многих задачах теории колебаний при использовании метода усреднения [1]. Искомые функции $r(t)$, $\psi(t)$ играют роль медленно меняющихся амплитуды и сдвига фазы быстрых гармонических колебаний. В частности, в задачах с медленно меняющейся частотой внешней накачки появляются неавтономные уравнения типа (1.1) либо (1.2). При этом интерес представляют решения с неограниченной амплитудой, которые в приложениях связывают с явлением авторезонанса [2].

Основной целью данной работы является исследование устойчивости таких решений относительно действия возмущений [3]. Их устойчивость соответствует физической реализуемости процесса авторезонанса.

Нетрудно построить асимптотические решения с растущей амплитудой для уравнений (1.1) либо (1.2) в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами

$$r(t) = \sqrt{\lambda t} + r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n t^{-n/2}, \quad \psi(t) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n t^{-n/2}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

На этом пути определяется несколько решений, отличие которых связано с выбором корня алгебраического уравнения: $\sin \psi_0 = 0$: $\psi_0 = 0$ и $\psi_0 = \pi$. Обоснование асимптотик в виде

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00186, 11-02-97003).

степенных рядов с постоянными коэффициентами следует из [4; 5]. Вопрос устойчивости таких решений остается открытым.

Наряду с (1.1) и (1.2) будем рассматривать возмущенные уравнения

$$\frac{dr}{dt} = (1 + f) \sin \psi, \quad r \left[\frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t + \varphi \right] = b(1 + g) \cos \psi; \quad (1.4)$$

$$\frac{dr}{dt} = r(1 + f) \sin \psi, \quad \frac{d\psi}{dt} - r^2 + \lambda t + \varphi = b(1 + g) \cos \psi. \quad (1.5)$$

Предполагается, что возмущения $f(r, \psi, t)$, $g(r, \psi, t)$, $\varphi(r, \psi, t)$ определены в $\Omega_{t_0} = \mathbb{R}^2 \times [t_0, \infty)$, $t_0 = \text{const} > 0$ и имеют такую структуру, что возмущенные уравнения (1.4) и (1.5) удовлетворяют условиям теоремы существования решения на полуоси [6, с. 16; 7, с. 20]. В исходной задаче (до усреднения) функции f и g задают возмущение амплитуды, φ — возмущение фазы накачки. Уравнения (1.1) и (1.2) будем называть невозмущенными.

Обсуждаемый ниже подход во многом похож на приведенный в [8, с. 122]. Он основан на наличии функции Ляпунова для невозмущенной системы. Под эту функцию, которая содержит квадратичную форму, подгоняется допустимая структура возмущения.

Возмущение разбивается на две части. Одна часть используется в конструкции функции Ляпунова, и от нее требуется непрерывная дифференцируемость. Вторая часть не используется в функции Ляпунова, и от нее требуется убывание по времени без требования дифференцируемости. Такой подход соответствует идеям, обсуждавшимся в [8, гл. IV, V]. Предполагается, что возмущения имеют следующий вид:

$$f(r, \psi, t) = \sigma[f_0(t) + f_1(r, \psi, t)], \quad g(r, \psi, t) = \sigma[g_0(t) + g_1(r, \psi, t)] \quad (1.6)$$

$$\varphi(r, \psi, t) = \sigma[\varphi_0(t) + \varphi_1(r, \psi, t)], \quad 0 < \sigma \ll 1.$$

Параметр σ , входящий в возмущения в виде множителя, характеризует их малость, причем функции f_i, g_i, φ_i могут зависеть как от σ , так и от других параметров. При этом все выписываемые ниже оценки будут равномерны по $\sigma \in [0; 1]$ и остальным параметрам в соответствующей области определения. Введение параметра σ оказывается удобным приемом для идентификации малости возмущений в случае, когда от функции возмущений требуется определенная структура асимптотики при $t \rightarrow \infty$.

Мы будем обсуждать устойчивость в окрестности бесконечности, считая, что решение на любом конечном промежутке устойчиво. Для этого случая дадим определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях, которое несколько расширяет определение из [8, с. 120].

О п р е д е л е н и е 1. Решение $r(t), \psi(t)$ невозмущенных уравнений называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если $\forall \varepsilon > 0 \exists T \geq t_0: \forall \tau_0 > T$ существуют $\eta_1(\varepsilon) > 0$ и $\eta_2(\varepsilon, t) > 0$ при всех $t \geq \tau_0$ такие, что при любых начальных данных $\hat{r}(\tau_0), \hat{\psi}(\tau_0)$:

$$|\hat{r}(\tau_0) - r(\tau_0)| \leq \eta_1(\varepsilon), \quad |\hat{\psi}(\tau_0) - \psi(\tau_0)| \leq \eta_1(\varepsilon),$$

и произвольных возмущениях $f(r, \psi, t)$, $g(r, \psi, t)$, $\varphi(r, \psi, t)$, удовлетворяющих в Ω_T оценкам $|f| \leq \eta_2(\varepsilon, t)$, $|g| \leq \eta_2(\varepsilon, t)$, $|\varphi| \leq \eta_2(\varepsilon, t)$, для решения $\hat{r}(t), \hat{\psi}(t)$ возмущенных уравнений имеют место неравенства

$$|\hat{r}(t) - r(t)| < \varepsilon, \quad |\hat{\psi}(t) - \psi(t)| < \varepsilon$$

при всех $t > \tau_0$.

Приведенная здесь модификация в виде зависимости от t в $\eta_2(\varepsilon, t)$ не принципиальна, но оказывается полезной для рассматриваемых уравнений и удобной при анализе структуры возмущений. Отметим, что системы, устойчивые в смысле определения [8, с. 120], будут устойчивы и в смысле определения 1.

В некоторых случаях устойчивость при постоянно действующих возмущениях является следствием асимптотической устойчивости по Ляпунову, равномерной по начальным данным. В частности, для некоторых неавтономных систем достаточной является экспоненциальная устойчивость [8; 9]. Однако в рассматриваемых системах экспоненциальная устойчивость по Ляпунову отсутствует, и из известных результатов устойчивость при постоянных возмущениях не следует. Результаты данной работы опираются на конструкцию функции Ляпунова, приведенную в [10].

Вопрос устойчивости для рассматриваемых уравнений иногда удается решить, опираясь на наличие асимптотики для двухпараметрического семейства решений. В частности, устойчивость по Ляпунову для решений системы (1.1) с растущей амплитудой следует из результатов [11]. Тем же способом можно доказать устойчивость при постоянно действующих возмущениях, если $f, g, \varphi \equiv \text{const}$. Получаемые асимптотики в главном (растущем) члене не зависят от f, g, φ , а остатки стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ равномерно по f, g, φ . Наиболее просто такое свойство обнаруживается для решения, асимптотика которого выписывается в виде рядов с постоянными коэффициентами. Однако если возмущения зависят от t , то построение асимптотики в общем случае невозможно.

Следует отметить, что в оценках, приводимых ниже, появляются линейные по r, ψ слагаемые с множителем σ , которые конкурируют с квадратичными в окрестности равновесия. Поэтому знакоопределенность полной производной гарантируется лишь в кольце. Этого оказывается достаточно для доказательства устойчивости так же, как в [8, с. 122]. Отличие от известных результатов здесь состоит в присутствии убывающих по времени множителей в оценках полной производной.

2. Устойчивость главного резонанса

Для невозмущенных уравнений (1.1) рассматривается решение с асимптотикой (1.3):

$$R_0(t) = \sqrt{\lambda t} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad \Psi_0(t) = \pi - t^{-1/2}\sqrt{\lambda}/2 + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть возмущения $f(r, \psi, t), g(r, \psi, t), \varphi(r, \psi, t)$ представляются в виде (1.6), и справедливы асимптотические оценки для функций f_0, g_0, φ_0 и их производных при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \mathcal{O}(1), & g_0(t) &= \mathcal{O}(1), & \varphi_0(t) &= \mathcal{O}(t^{1/4}); \\ f'_0(t) &= \mathcal{O}(t^{-1}), & g'_0(t) &= \mathcal{O}(t^{-1/2}), & \varphi'_0(t) &= \mathcal{O}(t^{-3/4}); \end{aligned} \quad (2.2)$$

а также для функций f_1, g_1, φ_1 :

$$f_1(r, \psi, t) = \mathcal{O}(t^{-5/4}), \quad g_1(r, \psi, t) = \mathcal{O}(t^{-1/2}), \quad \varphi_1(r, \psi, t) = \mathcal{O}(t^{-1}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

равномерные по $(r, \psi) \in \mathbb{R}^2$. Если в системе (1.1) коэффициент $b > 1/2$, то решение $R_0(t), \Psi_0(t)$ с асимптотикой (2.1) является устойчивым при постоянно действующих возмущениях (1.4).

З а м е ч а н и е 1. Ограничение $b > 1/2$ является существенным, поскольку при $b < 1/2$ решение $R_0(t), \Psi_0(t)$ невозмущенной системы (1.1) не устойчиво по начальным данным. Это утверждение будет доказано в другой публикации.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. В уравнениях (1.4) делается замена переменных

$$r(t) = R_0(t) + R(\tau)/\sqrt{2R_0}, \quad \psi(t) = \Psi_0(t) + \Psi(\tau), \quad \tau = t^{5/4}\lambda^{1/4}4\sqrt{2}/5, \quad (2.4)$$

и для новых функций $R(\tau), \Psi(\tau)$ исследуется задача об устойчивости положения равновесия $(0;0)$ путем построения функции Ляпунова.

Уравнения в новых переменных можно представить в следующей форме:

$$\frac{dR}{d\tau} = -\partial_{\Psi}H + \sigma F_1, \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = \partial_R H + [G + \sigma G_1], \quad (2.5)$$

выделив гамильтониан

$$H(R, \Psi, \tau) = \left[(1 + \sigma f_0)(\cos(\Psi + \Psi_0) - \cos \Psi_0) + \Psi \sin \Psi_0 + \frac{1}{2}R^2 \right] \sqrt{R_0}/(\lambda t)^{1/4} \\ + \frac{1}{6\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}R_0}R^3 - \frac{R'_0}{2\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}R_0}R\Psi - \frac{\sigma\varphi_0}{\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}}R$$

и негамильтоновы компоненты

$$F_1(R, \Psi, \tau) = f_1 \sin(\Psi + \Psi_0) \sqrt{R_0}/(\lambda t)^{1/4}, \\ G(R, \Psi, \tau) = \frac{b}{\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}} \left[\frac{\cos(\Psi + \Psi_0)}{R_0 + R/\sqrt{2}R_0} - \frac{1}{R_0} \cos \Psi_0 \right] + \frac{R'_0}{2\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}R_0} \Psi, \\ G_1(R, \Psi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}} \left[\frac{b(g_0 + g_1) \cos(\Psi + \Psi_0)}{R_0 + R/\sqrt{2}R_0} - \varphi_1 \right].$$

Конструкция функции Ляпунова основана на исследовании асимптотики правых частей уравнений (2.5) в окрестности равновесия (при $\rho = \sqrt{R^2 + \Psi^2} \rightarrow 0$) и на бесконечности (при $\tau \rightarrow \infty$). Все выписываемые ниже асимптотические оценки в виде $\mathcal{O}(\rho^\alpha)$, $\mathcal{O}(\tau^{-\beta})$, ($\alpha, \beta = \text{const} > 0$) являются равномерными по переменным R, Ψ, τ в области

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\rho_0, \tau_0) = \{(R, \Psi, \tau) \in \mathbb{R}^3 : \rho < \rho_0, \tau > \tau_0\}, \quad \rho_0, \tau_0 = \text{const} > 0.$$

Такие функции (остатки) можно сделать сколь угодно малыми при подходящем выборе границ ρ_0 и τ_0 .

Учитывая соотношения

$$\frac{R_0(t)}{(\lambda t)^{1/2}} = 1 + \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad \frac{1}{t^{1/4}R_0(t)} = \mathcal{O}(t^{-3/4}), \quad \frac{R'_0(t)}{t^{1/4}R_0(t)} = \mathcal{O}(t^{-5/4}), \quad t \rightarrow \infty,$$

нетрудно выписать асимптотику производных от гамильтониана, причем удобно удерживать возмущения в явной форме:

$$\partial_R H(R, \Psi, \tau) = R - \sigma\varphi_0\nu\tau^{-1/5} + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-3/5}) + \mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(\tau^{-1}), \quad \nu = (5\lambda)^{-1/5}, \\ \partial_{\Psi} H(R, \Psi, \tau) = (1 + \sigma f_0) \sin \Psi + \mathcal{O}(\tau^{-2/5}) + \mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(\tau^{-4/5}).$$

Заметим, что в силу условия (2.3) функция $F_1(R, \Psi, \tau)$ удовлетворяет оценке: $|F_1(R, \Psi, \tau)| \leq \tau^{-1}M$ равномерно в \mathcal{D} . Здесь и ниже через M обозначаются различные константы, не зависящие от R, Ψ, τ .

В функции G выделим линейную часть по Ψ : $G = A(R, \tau)\Psi + B(R, \Psi, \tau)$,

$$A(R, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}R_0} \left[R'_0 - \frac{2b \sin \Psi_0}{1 + R/R_0\sqrt{2}R_0} \right] = -\gamma\tau^{-1}[1 + \mathcal{O}(\tau^{-2/5})], \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Главный член асимптотики в последнем выражении содержит коэффициент $\gamma = (2b-1)/5 > 0$, положительность которого в дальнейшем определяет устойчивость решения. Из оставшейся части

$$B(R, \Psi, \tau) = \frac{b}{\sqrt{2}(\lambda t)^{1/4}R_0} \left[\frac{\cos(\Psi + \Psi_0) + \Psi \sin \Psi_0}{1 + R/R_0\sqrt{2}R_0} - \cos \Psi_0 \right]$$

выделим слагаемое с медленно убывающим множителем

$$B(R, \Psi, \tau) = \frac{b}{\sqrt{2}(\lambda t)^{3/4}} [1 - \cos \Psi] + \mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(\tau^{-1}).$$

Для функции G_1 можно написать асимптотику при $\tau \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$:

$$G_1(R, \Psi, \tau) = -\left[\varphi_1 + \frac{b(g_0 + g_1)}{\sqrt{\lambda t}} \cos \Psi + \frac{bg_0}{2t} \Psi\right] (4\lambda t)^{-1/4} + \mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(\tau^{-1}) + \mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(\tau^{-6/5}).$$

Таким образом, из последних оценок с учетом (2.3) можно заключить, что сумма $[G + \sigma G_1]$ имеет следующую структуру:

$$[G + \sigma G_1] = -\gamma\tau^{-1}\Psi + a\tau^{-3/5}[1 - (1 + \sigma g_0) \cos \Psi] + \tilde{G}(R, \Psi, \tau), \quad a = 2b/(5\lambda)^{3/5},$$

с оценкой для остатка $|\tilde{G}(R, \Psi, \tau)| \leq M\tau^{-1}[\sigma + \rho^3 + \rho\tau^{-1/5}]$.

Частная производная гамильтониана

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\sigma}{(4\lambda t)^{1/4}} \left[f'_0 \frac{\Psi^2}{2} - \left(\varphi'_0 - \frac{\varphi_0}{4} t^{-1} \right) \frac{R}{(4\lambda t)^{1/4}} + \mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(t^{-5/4}) \right] + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-6/5})$$

при условии (2.2) оценивается $|\partial_\tau H| \leq M\tau^{-1}\rho[\sigma + \rho\tau^{-1/5}]$ при $\tau \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$.

Используя выражение для полной производной $dH/d\tau = \partial_R H \cdot \sigma F_1 + \partial_\Psi H \cdot [G + \sigma G_1] + \partial_\tau H$, можно вычислить ее асимптотику

$$\frac{dH}{d\tau} = a\tau^{-3/5} \partial_\Psi H [1 - (1 + \sigma g_0) \cos \Psi] - \gamma\tau^{-1} [\Psi^2 + \sigma\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\rho^4)] + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-6/5}).$$

Функция Ляпунова строится на основе гамильтониана

$$U(R, \Psi, \tau) = H(R, \Psi, \tau) + V(R, \Psi, \tau) + W(R, \Psi, \tau) \quad (2.6)$$

с дополнительными слагаемыми. Добавки берутся в виде

$$V = a\tau^{-3/5} \left\{ R[1 - (1 + \sigma g_0) \cos \Psi] + \frac{1 + \sigma g_0}{1 + \sigma f_0} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{\sigma \varphi_0 \nu R^2}{2} \tau^{-1/5} \right) \right\}, \quad W = -\frac{\gamma}{2} \tau^{-1} R\Psi.$$

Полная производная от первой добавки с учетом (2.2) имеет следующую асимптотику:

$$\frac{dV}{d\tau} = -a\tau^{-3/5} \partial_\Psi H [1 - (1 + \sigma g_0) \cos \Psi] + \tau^{-1} [\sigma\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\rho^4)] + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-6/5}).$$

Отсюда видно, что добавка V позволяет уничтожить слагаемые порядка $\mathcal{O}(\tau^{-3/5})$ в производной. Производная второй добавки содержит квадратичную форму в главном члене асимптотики

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{\gamma}{2} \tau^{-1} [(\Psi^2 - R^2) + \sigma\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\rho^4)] + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-6/5}).$$

В результате асимптотика полной производной функции Ляпунова (2.6) имеет вид

$$\frac{dU}{d\tau} = -\frac{\gamma}{2} \tau^{-1} [(\Psi^2 + R^2) + \sigma\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\rho^4) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-1/5})].$$

Заметим, что знак величины $\sigma\mathcal{O}(1)$ не определен во всех формулах. Поскольку $\gamma > 0$ и остатки могут быть сделаны сколь угодно малыми, то для $\forall \varepsilon_1 > 0$ существуют ρ_0, τ_0 такие, что $\forall (R, \Psi, \tau) \in \mathcal{D}(\rho_0, \tau_0)$ справедливо неравенство

$$\frac{dU}{d\tau} \leq -\tau^{-1} \left[\frac{\gamma - \varepsilon_1}{2} \rho^2 - \sigma m_1 \right], \quad 0 < m_1 = \text{const} < \infty. \quad (2.7)$$

Легко понять, что полная производная будет отрицательна в кольце, внутренний радиус которого не слишком мал: $\delta_1 = \sqrt{2\sigma m_1 / (\gamma - \varepsilon_1)}$. В самом деле, из оценки (2.7) следует, что для любых $(R, \Psi, \tau) \in \mathcal{K}(\delta_1, \rho_0, \tau_0) = \mathcal{D}(\rho_0, \tau_0) \setminus \mathcal{D}(\delta_1, \tau_0)$ производная $dU/d\tau$ будет отрицательна.

Аналогичные оценки имеет и сама функция Ляпунова $U(R, \Psi, \tau)$: для $\forall \varepsilon_2 > 0$ существуют ρ_0, τ_0 такие, что $\forall (R, \Psi, \tau) \in \mathcal{D}(\rho_0, \tau_0)$ справедливы неравенства

$$\frac{(1 - \varepsilon_2)}{2} \rho^2 - \sigma m_2 \leq U(R, \Psi, \tau) \leq \frac{(1 + \varepsilon_2)}{2} \rho^2 + \sigma m_2, \quad 0 < m_2 = \text{const} < \infty. \quad (2.8)$$

Следовательно, существует $\delta_2 = \sqrt{2\sigma m_2 / (1 - \varepsilon_2)}$ такое, что для любых $(R, \Psi, \tau) \in \mathcal{K}(\delta_2, \rho_0, \tau_0)$ функция U будет положительно определена.

Используя неравенства (2.8), можно переписать оценку для производной (2.7) в следующей форме:

$$\frac{dU}{d\tau} \leq -\tau^{-1} \frac{(\gamma - \varepsilon_1)}{(1 + \varepsilon_2)} U + \tau^{-1} \sigma M_0, \quad M_0 = m_1 + \frac{(\gamma - \varepsilon_1)}{(1 + \varepsilon_2)} m_2.$$

Отсюда вытекает, что функция Ляпунова на траектории в $\mathcal{K}(\delta, \rho_0, \tau_0)$ имеет мажоранту

$$0 < U(R, \Psi, \tau) \leq \sigma \frac{(1 + \varepsilon_2)}{(\gamma - \varepsilon_1)} M_0 + C \tau^{-(\gamma - \varepsilon_1)/(1 + \varepsilon_2)} \leq \delta^2 + C \tau^{-(\gamma - \varepsilon_1)/(1 + \varepsilon_2)}. \quad (2.9)$$

Константа C зависит от выбора траектории, $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$ ($\delta < \varepsilon_0 < \rho_0$), тогда из (2.8) и (2.9) следуют оценки

$$\inf(U(R, \Psi, \tau) \text{ при } \rho = \varepsilon_0) \geq \frac{\varepsilon_0^2}{2} - \sigma m_2 \equiv 2\delta_0^2,$$

$$\sup(U(R, \Psi, \tau) \text{ при } \delta \leq \rho \leq \delta_0) \leq \delta_0^2 + C \tau^{-(\gamma - \varepsilon_1)/(1 + \varepsilon_2)} < 2\delta_0^2.$$

Последняя оценка выполняется при достаточно больших τ .

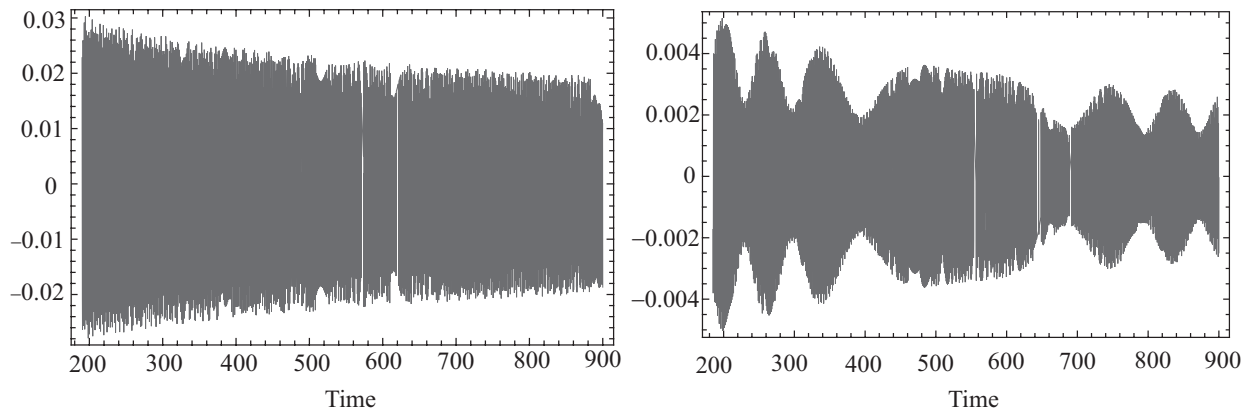
Таким образом, для построенной функции Ляпунова выполняется неравенство

$$\sup(U(R, \Psi, \tau) \text{ при } \delta \leq \rho \leq \delta_0) \leq \inf(U(R, \Psi, \tau) \text{ при } \rho = \varepsilon_0),$$

при всех $\tau > \tau_0$. Поэтому траектория системы (2.5), выпущенная из круга $\rho \leq \delta_0$, не может покинуть ε_0 -окрестность неподвижной точки. Это и означает устойчивость нулевого решения для системы (2.5). Из формул замены (2.4) следует устойчивость решения R_0, Ψ_0 уравнений (1.1). Теорема доказана.

В качестве иллюстраций к утверждению приведем результаты численных расчетов (см. рисунок). Для этого решается задача Коши для систем (1.1) и (1.4), причем начальные данные подбираются таким образом, чтобы амплитуда невозмущенных уравнений росла² как $\sqrt{\lambda t}$ при $t \rightarrow \infty$.

Малое значение разности амплитуд уравнений (1.1) и (1.4) указывает на устойчивость решения при постоянно действующих возмущениях.



Разность амплитуд растущих решений уравнений (1.1) и (1.4) при $\lambda = 1, b = 1, \sigma = 0.5$ (слева), $\sigma = 0.05$ (справа), $f_0(t) = g_0(t) = \sin \ln(t + 0.1)$, $\varphi_0(t) = 0, R(0) = 1, \Psi(0) = 2.78$.

²Надо иметь в виду, что системы типа (1.1), (1.2) имеют много нерезонансных решений, у которых амплитуда ограничена при $t \rightarrow \infty$. Такие решения здесь не обсуждаются.

3. Устойчивость параметрического резонанса

Для невозмущенной системы (1.2) рассматривается решение с асимптотикой (1.3):

$$R_0(t) = \sqrt{\lambda t} + r_1 t^{-1/2} + \mathcal{O}(t^{-1}), \quad \Psi_0(t) = \pi - \frac{t^{-1}}{2} + \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

коэффициент $r_1 = b/2\sqrt{\lambda}$.

Теорема 2. Пусть возмущения $f(r, \psi, t)$, $g(r, \psi, t)$, $\varphi(r, \psi, t)$ представляются в виде (1.6), и справедливы асимптотические оценки для функций f_0 , g_0 , φ_0 и их производных при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \mathcal{O}(1), & g_0(t) &= \mathcal{O}(1), & \varphi_0(t) &= \mathcal{O}(t^{1/2}); \\ f'_0(t) &= \mathcal{O}(t^{-1}), & g'_0(t) &= \mathcal{O}(t^{-1/2}), & \varphi'_0(t) &= \mathcal{O}(t^{-1/2}); \end{aligned} \quad (3.2)$$

и для функций f_1 , g_1 , φ_1 :

$$f_1(r, \psi, t) = \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad g_1(r, \psi, t) = \mathcal{O}(t^{-1}), \quad \varphi_1(r, \psi, t) = \mathcal{O}(t^{-1}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

равномерные по $(r, \psi) \in \mathbb{R}^2$. Если в системе (1.2) коэффициент $b > 1$, то решение $R_0(t)$, $\Psi_0(t)$ с асимптотикой (3.1) является устойчивым при постоянно действующих возмущениях (1.5).

З а м е ч а н и е 2. Наличие условия $b > 1$ в утверждении существенно, поскольку при $b < 1$ решение $R_0(t)$, $\Psi_0(t)$ с асимптотикой (3.1) системы (1.2) не устойчиво. Это будет доказано в отдельной публикации.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. В системе (1.5) проводится замена переменных

$$r = R_0(t) + \frac{R(\tau)}{\sqrt{2}}, \quad \psi = \Psi_0(t) + \Psi(\tau), \quad \tau = \frac{t^{3/2} 2\sqrt{2\lambda}}{3},$$

и для новых функций $R(\tau)$, $\Psi(\tau)$ исследуется задача об устойчивости положения равновесия $(0, 0)$. Уравнения для этих функций можно представить в виде

$$\frac{dR}{d\tau} = -\partial_\Psi H(R, \Psi, \tau) + F(R, \Psi, \tau), \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = \partial_R H(R, \Psi, \tau) + G(R, \Psi, \tau).$$

Здесь гамильтониан задается соотношением

$$H = \frac{(1 + \sigma f_0)}{\sqrt{2\lambda t}} (R + \sqrt{2}R_0) \left[\cos(\Psi + \Psi_0) - \cos \Psi_0 \right] + \frac{R}{\sqrt{2\lambda t}} \left[\frac{R^2}{6} - \sigma \varphi_0 \right] + \frac{R_0}{\sqrt{\lambda t}} \left[\Psi \sin \Psi_0 + \frac{R^2}{2} \right].$$

Негамильтонова часть определяется функциями

$$F(R, \Psi, \tau) = \frac{\sigma f_1}{\sqrt{\lambda t}} \left(R_0 + \frac{R}{\sqrt{2}} \right) \sin(\Psi + \Psi_0),$$

$$G(R, \Psi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda t}} [b(1 + g) - (1 + \sigma f_0)] [\cos(\Psi + \Psi_0) - \cos \Psi_0] + \frac{1}{\sqrt{2\lambda t}} [b \cdot g \cos \Psi_0 - \sigma \varphi_1].$$

Из условия (3.3) следует оценка для F : $|F(R, \Psi, \tau)| \leq \sigma M \tau^{-1} [\rho + \tau^{-1/3}]$, равномерная в области \mathcal{D} .

В функции G выделяется линейная часть по Ψ : $G(R, \Psi, \tau) = A(\tau)\Psi + B(R, \Psi, \tau)$, где

$$A(\tau) = -[b(1 + \sigma g_0) - (1 + \sigma f_0)] \frac{\sin \Psi_0}{\sqrt{2\lambda t}} = -\gamma(\tau) \tau^{-1} [1 + \mathcal{O}(\tau^{-1/3})], \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Здесь главный член асимптотики определяется функцией $\gamma(\tau) = [b(1 + \sigma g_0) - (1 + \sigma f_0)]/3$, которая в силу (3.2) ограничена при $\tau \rightarrow \infty$. Нелинейная добавка

$$B(R, \Psi, \tau) = \frac{3\gamma(\tau)}{\sqrt{2\lambda t}} [\cos(\Psi + \Psi_0) + \Psi \sin \Psi_0 - \cos \Psi_0] + \frac{\sigma}{\sqrt{2\lambda t}} [b(g_0 + g_1) \cos \Psi_0 - \varphi_1]$$

в асимптотике на бесконечности ($\tau \rightarrow \infty$) и в окрестности равновесия имеет следующую структуру:

$$B(R, \Psi, \tau) = \left[\gamma(\tau)(1 - \cos \psi) \left(\frac{9}{\lambda} \right)^{1/3} - \frac{\sigma b g_0}{3\lambda} \right] \tau^{-1/3} + \tilde{G}(R, \Psi, \tau), \quad |\tilde{G}| \leq M\tau^{-1}[\sigma + \rho^3 + \rho^2\tau^{-1/3}].$$

Нетрудно выписать асимптотику производных гамильтониана, причем, как и выше, здесь удобно удерживать возмущения в явной форме:

$$\partial_\Psi H = (1 + \sigma f_0)\Psi[1 + \mathcal{O}(\rho^2) + \mathcal{O}(\tau^{-2/3}) + \mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(\tau^{-1/3})];$$

$$\partial_R H = R[1 + \mathcal{O}(\tau^{-2/3}) + \mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(\tau^{-1/3})] + \sigma\mathcal{O}(\tau^{-1/3}).$$

Отсюда следует, что асимптотика полной производной $dH/d\tau = \partial_R H \cdot F + \partial_\Psi H \cdot G + \partial_\tau H$ имеет вид

$$\frac{dH}{d\tau} = -\gamma(\tau)(1 + \sigma f_0)\tau^{-1}[\Psi^2 + \mathcal{O}(\rho^4) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-1/3})] + \partial_\Psi H \cdot B + \tilde{h}(R, \Psi, \tau),$$

при этом, остаток $\tilde{h} = \partial_R H \cdot F + \partial_\tau H$ удовлетворяет в \mathcal{D} неравенству: $|\tilde{h}(R, \Psi, \tau)| \leq M\tau^{-1}[\sigma + \rho^2\tau^{-1/3}]$.

Функция Ляпунова строится в следующем виде:

$$U(R, \Psi, \tau) = H(R, \Psi, \tau) + V(R, \Psi, \tau) + W(R, \Psi, \tau), \quad W = -\frac{\gamma(\tau)}{2}\tau^{-1}R\Psi.$$

Первая добавка к гамильтониану берется в форме

$$V = R \cdot B(R, \Psi, \tau) + t^{-1} \frac{3b}{8\lambda} \gamma(\tau)(1 + \sigma g_0)(1 - \cos 2\Psi) + \frac{3\gamma(\tau)R^2}{\sqrt{2\lambda}(1 + \sigma f_0)} \left[\frac{R}{3} - \frac{R^2}{8\sqrt{2\lambda t}} - \frac{\sigma\varphi_0}{2\sqrt{2\lambda t}} \right].$$

Полная производная этой функции имеет асимптотику $dV/d\tau = -\partial_\Psi H \cdot B + \sigma\mathcal{O}(1)\mathcal{O}(\tau^{-1}) + \mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(\tau^{-1}) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-4/3})$. Вторая добавка W обеспечивает знакопостоянство полной производной $dU/d\tau$ в главном члене асимптотики:

$$\frac{dU}{d\tau} = -\frac{\hat{\gamma}}{2}\tau^{-1}[(R^2 + \Psi^2) + \sigma\mathcal{O}(1)][1 + \mathcal{O}(\rho^2) + \mathcal{O}(\tau^{-1/5})], \quad \hat{\gamma} = \frac{(b-1)}{3}.$$

Поскольку $\hat{\gamma} > 0$ и остатки могут быть сделаны сколь угодно малыми, то отсюда следует отрицательность производной $dU/d\tau$ в некотором кольце. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 1.

4. Устойчивость общих систем, близких к гамильтоновым

Обобщая полученные результаты, рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = \partial_y H(x, y, t; \sigma) + F(x, y, t; \sigma), \quad \frac{dy}{dt} = -\partial_x H(x, y, t; \sigma). \quad (4.1)$$

Функции $H(x, y, t; \sigma), F(x, y, t; \sigma)$, заданные в области

$$D = D(r_0, t_0) = \{x, y, t : x^2 + y^2 < r_0^2; t > t_0\}, \quad (0 < r_0, t_0 = \text{const} < \infty),$$

предполагаются гладкими вплоть до границы $H, F \in C^1(\bar{D})$. Правые части уравнений непрерывно зависят от параметра σ ($0 < \sigma \ll 1$), который соответствует постоянно действующим возмущениям. Если $\sigma \equiv 0$, то система называется невозмущенной. Предполагается, что невозмущенные уравнения имеют тривиальное решение $x = 0, y = 0$, которое является неподвижной точкой типа центр общего положения для укороченной системы ($F \equiv 0$). Это означает, что гамильтониан $H(x, y, t; 0)$ содержит положительно определенную квадратичную форму в асимптотике при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. Будем предполагать, что возмущенный гамильтониан системы имеет вид

$$H(x, y, t; \sigma) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + h_0(x, y, t) + \sigma h_1(x, y, t). \quad (4.2)$$

Для остатков h_0, h_1 существует константа $M > 0$ такая, что выполняются оценки

$$\begin{aligned} |h_0(x, y, t)| &\leq Mr^2(r^p + t^{-\beta}), & |h_1(x, y, t)| &\leq Mr(1 + t^{-\alpha}), \\ p &\geq 1, & \beta &> 0, & \alpha &> 0 \quad \forall r \leq 1, \quad t \geq 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В негамильтоновой компоненте выделим линейную часть асимптотики при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} F(x, y, t; \sigma) &= g(x, y, t; \sigma) + f(x, y, t; \sigma); & |f(x, y, t; \sigma)| &\leq Mt^{-\mu}r^2, \\ g(x, y, t; \sigma) &= -\gamma t^{-\nu}[x + \sigma\mathcal{O}(r) + r\mathcal{O}(t^{-\omega})], & t &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $\gamma = \text{const} \neq 0$; показатели $\mu, \nu, \omega > 0$.

Ставится вопрос об устойчивости тривиального решения в системе с постоянно действующими возмущениями. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. Пусть гамильтониан системы (4.1) обладает свойствами (4.2), (4.3), и в негамильтоновой части (4.4) линейное слагаемое является главным членом асимптотики по времени, так что $\mu > \nu > 0, \omega > 0$. Если остатки в асимптотике гамильтониана убывают достаточно быстро: $\alpha + 1 > \nu, \beta + 1 > \nu$, то решение $x = 0, y = 0$ невозмущенной системы является устойчивым при постоянно действующих возмущениях при $\gamma > 0$ и $0 < \nu \leq 1$.

Доказательство основывается на построении функции Ляпунова в виде гамильтониана с добавкой:

$$U(x, y, t) = H(x, y, t; \sigma) + V(x, y, t), \quad V = -\frac{\gamma}{2}t^{-\nu}xy.$$

Заметим, что $\forall \varepsilon_1 > 0$ существуют r_1, t_1 такие, что $\forall (x, y, t) \in D(r_1, t_1)$ справедлива оценка:

$$\frac{(1 - \varepsilon_1)}{2}r^2 - \sigma m_1 \leq U(x, y, t) \leq \frac{(1 + \varepsilon_1)}{2}r^2 + \sigma m_1, \quad 0 < m_1 = \text{const} < \infty. \quad (4.5)$$

Если положить $\delta_1 = \sqrt{2\sigma m_1/(1 - \varepsilon_1)}$, то в области $K(\delta_1, r_1, t_1) = D(r_1, t_1) \setminus D(\delta_1, t_1)$ функция U будет положительно определена.

Производная гамильтониана $H(x, y, t; \sigma)$, вычисленная вдоль траекторий системы (4.1), имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = -\gamma t^{-\nu}[x^2 + \phi_1(x, y, t; \sigma)], \quad |\phi_1| \leq \sigma M_1 r [1 + t^{-\mu} + t^{\nu-(\alpha+1)}] + M_2 r^2 [r^p + t^{-\beta} + t^{-\omega} + t^{\nu-\mu}].$$

Полная производная добавки имеет квадратичную форму в главном члене асимптотики

$$\frac{dV}{dt} = -\gamma t^{-\nu} \left[\frac{y^2 - x^2}{2} + \phi_2(x, y, t; \sigma) \right], \quad |\phi_2| \leq \sigma M_3 r [1 + t^{-\alpha}] + M_4 r^2 [r^p + t^{-1} + t^{-\beta} + t^{-\nu}].$$

Здесь $0 < M_j = \text{const} < \infty$, оценки для остатков выполняются при $r \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. В результате полная производная функции Ляпунова $U(x, y, t)$ имеет следующую структуру:

$$\frac{dU}{dt} = -\gamma t^{-\nu} \left[\frac{x^2 + y^2}{2} + \phi_1(x, y, t; \sigma) + \phi_2(x, y, t; \sigma) \right].$$

Поскольку остатки могут быть сделаны сколь угодно малыми, то для любого $\varepsilon_2 > 0$ существуют r_2, t_2 такие, что $\forall (x, y, t) \in D(r_2, t_2)$

$$\frac{dU}{dt} \leq -t^{-\nu} \left[(\gamma - \varepsilon_2) \frac{r^2}{2} - m_2 \sigma \right], \quad 0 < m_2 = \text{const} < \infty.$$

Следовательно, производная будет отрицательна в кольце $K(\delta_2, r_2, t_2)$ с внутренним радиусом $\delta_2 = \sqrt{2\sigma m_2 / (\gamma - \varepsilon_2)}$. С учетом неравенств для функции U в области $K(\delta, r_0, t_0)$, где $\delta = \max(\delta_1, \delta_2)$, $t_0 = \max(t_1, t_2)$, $r_0 = \min(r_1, r_2)$, будет выполняться следующее дифференциальное неравенство:

$$\frac{dU}{dt} \leq -t^{-\nu} \frac{(\gamma - \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_1)} U + t^{-\nu} \sigma M, \quad M = m_2 + \frac{(\gamma - \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_1)} m_1.$$

Отсюда вытекает, что функция Ляпунова на траектории имеет мажоранту (при $\nu < 1$)

$$U \leq \delta^2 + C \exp(-\gamma_0 t^{1-\nu}), \quad \gamma_0 = \frac{(\gamma - \varepsilon_2)}{(1 - \nu)(1 + \varepsilon_1)}. \quad (4.6)$$

Константа C зависит от выбора траектории. Случай $\nu = 1$, соответствующий степенной оценке убывания, был рассмотрен при доказательстве теоремы 1. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$ ($\delta < \varepsilon_0 < r_0$), тогда из оценок (4.5) и (4.6) следуют неравенства:

$$\inf(U(x, y, t) \text{ при } r = \varepsilon_0) \geq \frac{\varepsilon_0^2}{2} - \sigma m_1 \equiv 2\delta_0^2,$$

$$\sup(U(x, y, t) \text{ при } \delta \leq r \leq \delta_0) \leq \delta_0^2 + C \exp(-\gamma_0 t^{1-\nu}) < 2\delta_0^2.$$

Последняя оценка выполняется при достаточно больших t .

Таким образом, построенная функция Ляпунова обладает следующим свойством:

$$\sup(U(x, y, t) \text{ при } \delta \leq r \leq \delta_0) \leq \inf(U(x, y, t) \text{ при } r = \varepsilon_0)$$

при всех $t > t_0$. Из последнего неравенства следует, что траектория системы (4.1), выпущенная из круга $r \leq \delta_0$, не может покинуть ε_0 -окрестность неподвижной точки. Это и означает устойчивость нулевого решения. Теорема доказана.

5. Заключение

Таким образом, получены достаточные условия устойчивости растущих решений уравнений главного и параметрического резонансов. Подход, используемый здесь, можно применять при исследовании систем больших размерностей, опорным пунктом здесь также будет являться функция Ляпунова для невозмущенных уравнений. Более перспективным обобщением данной задачи является включение в систему случайных возмущений. При этом будут возникать значительные трудности, связанные с неограниченностью возмущений. Заметим, что условие малости может быть отброшено при рассмотрении возмущений, ограниченных в среднем [7; 8]. Эта тема требует особого внимания и будет обсуждаться в отдельной публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука. 1974. 408 с.
2. **Калякин Л.А.** Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 3–72.
3. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 432 с.
4. **Кузнецов А.Н.** О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функциональный анализ и его приложения. 1989. Т. 23, вып. 4. С. 63–74.
5. **Козлов В.В., Фурта С.Д.** Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1996. 244 с.
6. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал, 2004. 552 с.
7. **Хасьминский Р.З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 368 с.
8. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959. 211 с.
9. **Малкин И.Г.** К вопросу об обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 2. С. 129–138.
10. **Султанов О.А.** Функции Ляпунова для неавтономных систем близких к гамильтоновым // Уфим. мат. журн. 2010. Т. 2, №. 4. С. 98–108.
11. **Калякин Л.А.** Асимптотическое решение задачи о пороговом эффекте для уравнений главного резонанса // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 731–739.

Султанов Оскар Анварович

Поступила 01.10.2011

студент

Уфимский гос. авиационный технический университет

e-mail: osa-uf@rambler.ru

УДК 517.977

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ¹

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Развивается ранее предложенный геометрический метод исследования нелинейных уравнения в частных производных. Исследуются уравнение теплопроводности, описывающее режимы с обострением, и уравнение для функции тока в пограничном слое. С учетом специфики уравнений предложена модификация метода и показана его применимость в рассматриваемом случае. Найдены классы частных точных решений уравнений; решена краевая задача.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, уравнение теплопроводности, уравнение для функции тока в пограничном слое, точные решения.

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. Solution of nonlinear partial differential equations by the geometric method.

The earlier proposed geometric method of investigation of nonlinear partial differential equations is developed. The heat equation describing blow-up regimes and the equation for the flow function in a boundary layer are studied. We propose a modification of the method based on the specific character of the equations and show its applicability in the case under consideration. Classes of particular exact solutions are found and a boundary value problem is solved.

Keywords: nonlinear partial differential equations, heat equation, equation for the flow function in a boundary layer, exact solutions.

Введение

В статье ранее предложенным геометрическим методом [1] исследуются нелинейные уравнения в частных производных: уравнение теплопроводности, описывающее режимы с обострением [2], и уравнение для функции тока в пограничном слое [3].

Для уравнения теплопроводности рассмотрены различные зависимости между его параметрами β , σ и построена серия точных решений. Для уравнения для функции тока в пограничном слое решена краевая задача, поставленная в [3].

Пусть задано нелинейное уравнение в частных производных

$$L(x_i, u, u_i^{(1)}, u_{ij}^{(2)}, \dots, u_{i_1 \dots i_m}^{(m)}) = 0, \quad (0.1)$$

где $\{x_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) — исходные независимые переменные уравнения, $u \in C^m$ — неизвестная функция (решение уравнения), $u_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)}$ — частные производные функции u (верхний индекс указывает порядок производной, нижние индексы — номера независимых переменных, по которым берется производная), m — порядок уравнения ($1 \leq k \leq m$). Предполагается, что в отмеченном классе функций рассматриваемые уравнения имеют решения, хотя бы локальные, и существует такое преобразование координат

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi,$$

$$\alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1,$$

¹Работа выполнена в рамках программы межрегиональных и межведомственных фундаментальных исследований УРО РАН (проект 12-С-1-1001) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках» (проект 12-П-1-1009) при поддержке УРО РАН.

$$\alpha_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_{n-1},$$

что после перехода к новым переменным получаем $u = u(\psi)$. Тогда $\psi(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$ является поверхностью уровня функции, представляющей решение уравнения [1].

Если в уравнении (0.1) перейти к новым переменным (существование которых пока только предполагаем), то

$$u_i^{(1)} = u' \psi_i, \quad u_{ij}^{(2)} = u'' \psi_i \psi_j + u' \psi_{ij}, \quad \dots$$

$$u_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}^{(m)} = \frac{\partial^{(m-1)}(u' \psi_i)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{m-1}}} = (u' + \psi_i)^{(m-1)}. \quad (0.2)$$

Здесь и далее штрих (t) означает дифференцирование по переменной ψ .

Для широкого класса уравнений (0.1) в новых переменных будем иметь [1]

$$\sum_{k=1}^N A_k(u, u', u'', \dots, u_\psi^{(m)}) B_k(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = 0, \quad u_\psi^{(m)} = \frac{\partial^m u}{\partial \psi^m}, \quad N \neq \infty. \quad (0.3)$$

Исследование уравнения (0.3) зависит от вида функций B_k . В данной статье предполагается подробнее остановиться на случае, когда уравнение (0.3) имеет более двух членов B_k , содержащих производные только первого порядка от функции ψ , и случае, когда все функции B_k содержат производные функции ψ порядка выше первого.

1. Постановка задачи для уравнения теплопроводности

Предположим, что в уравнении (0.3) $B_1 \neq 0$. Поделив все слагаемые на B_1 и проведя те же рассуждения, что описаны в [1, разд. 1], примем, что $B_k/B_1 = f_{k-1}(\psi)$ ($k = 2, 3, \dots, N$), $f_{k-1}(\psi)$ — произвольные функции [1].

Пусть из всех выписанных $N-1$ соотношений ($\nu-1$) соотношений ($\nu > 2$) $B_k/B_1 = f_{k-1}(\psi)$ ($k = 2, 3, \dots, \nu$) выражаются только через первоначальные независимые переменные и первые производные функции ψ и не зависят от производных более высокого порядка этой функции.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка

$$B_k - f_{k-1} B_1 = 0, \quad k = 2, 3, \dots, \nu. \quad (1.1)$$

Получим из системы (1.1) якобиеву систему [4]

$$\psi_k = g_k(x_1, x_2, \dots, x_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n, \psi, \psi_{\mu+1}, \psi_{\mu+2}, \dots, \psi_n), \quad k = 1, 2, \dots, \mu. \quad (1.2)$$

При определенных зависимостях между функциями $f_{k-1}(\psi)$ ($k = 2, 3, \dots, \nu$) система (1.2), полученная из (1.1) разрешением относительно ψ_k ($k = 1, 2, \dots, \nu-1$), будет полной — все скобки Пуассона, составленные из уравнений системы, равны нулю [4]. В общем случае необходимо в эту систему ввести новые соотношения, так чтобы (1.2) стала полной системой, поэтому в общем случае $\mu \neq \nu-1$.

Систему (1.2) можно решить методом Майера для якобиевых систем уравнений [5], положив $x_j = uu_j + c_j$, $j = 1, 2, \dots, \mu$ и сведя систему (1.2) к уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} - \sum_{j=1}^{\mu} u_j g_j(uu_1 + c_1, uu_2 + c_2, \dots, uu_\mu + c_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n, \psi, \psi_{\mu+1}, \psi_{\mu+2}, \dots, \psi_n) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь u — новая переменная, u_j — параметры, $c_j = \text{const}$, $\psi(x_1, \dots, x_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n) = \Psi(uu_1 + c_1, uu_2 + c_2, \dots, uu_\mu + c_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n)$. Выпишем для уравнения (1.3) систему уравнений характеристик [6]. Получим

$$\frac{dx_i}{du} = -S_i, \quad \frac{d\Psi}{du} = \Psi_u - \sum_{i=\mu+1}^n \Psi_i S_i, \quad \text{где} \quad S_i = \sum_{j=1}^{\mu} \left\{ u_j \frac{\partial g_j}{\partial \psi_i} \right\},$$

$$\frac{d\Psi_u}{du} = \sum_{j=1}^{\mu} \left(u_j \frac{\partial g_j}{\partial u} + \Psi_u \frac{\partial g_j}{\partial \psi} \right), \quad \frac{d\Psi_i}{du} = \sum_{j=1}^{\mu} \left(u_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \Psi_i \frac{\partial g_j}{\partial \psi} \right), \quad i = \mu + 1, \dots, n. \quad (1.4)$$

Решение системы (1.4) будет иметь вид

$$x_j = uu_j + c_j, \quad j = 1, 2, \dots, \mu,$$

$$x_k = x_k(u, u_1, \dots, u_\mu, c_1, c_2, \dots, c_n, c_{\mu+1}^o, c_{\mu+2}^o, \dots, c_n^o), \quad k = \mu + 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

$$\Psi = \Psi(u, u_1, \dots, u_\mu, c_1, c_2, \dots, c_n, c_{\mu+1}^o, c_{\mu+2}^o, \dots, c_n^o), \quad \frac{d\Psi}{du} \neq 0, \quad (1.6)$$

$$\Psi_k = \Psi_k(u, u_1, \dots, u_\mu, c_{\mu+1}^o, c_{\mu+2}^o, \dots, c_n^o), \quad (1.7)$$

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n) \equiv \Psi(u, u_1, \dots, u_\mu, c_1, c_2, \dots, c_n, c_{\mu+1}^o, c_{\mu+2}^o, \dots, c_n^o). \quad (1.8)$$

Выразим из (1.6)

$$u = u(\Psi, u_1, \dots, u_\mu, c_1, c_2, \dots, c_n, c_{\mu+1}^o, c_{\mu+2}^o, \dots, c_n^o). \quad (1.9)$$

Будем считать, что в (1.7)–(1.9)

$$c_j = c_j(\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$c_k^o = c_k^o(\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n), \quad k = \mu + 1, \mu + 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

Тогда после подстановки (1.9) и (1.10) в (1.5) будем иметь

$$x_k = x_k \left(\Psi, u_1, \dots, u_\mu, c_1(\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n), c_2(\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n), \dots, c_n(\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n), \right. \\ \left. c_{\mu+1}^o(\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n), c_{\mu+2}^o(\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n), \dots, c_n^o(\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n) \right), \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Если после подстановки (1.11) в (1.8) тождество сохранится, то Ψ и α_j — независимые переменные, следовательно, (1.11) — искомое преобразование координат [1].

Тождество сохранится, если [1]

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \Psi} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} = 0, \quad j = \mu + 1, \mu + 2, \dots, n.$$

Если для уравнения (1.3) выписать расширенную систему характеристик [1; 7] и потребовать, чтобы все соотношения

$$B_k - f_{k-1} B_1 = 0, \quad k = \nu + 1, \nu + 2, \dots, N, \quad (1.12)$$

были первыми интегралами этой системы, то получим зависимости между функциями $f_{k-1}(\psi)$, при которых система уравнений (1.2), (1.12) совместна.

Продемонстрируем описанный выше общий подход на конкретном примере.

2. Исследование уравнения теплопроводности

Рассмотрим уравнение [2]

$$u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta = 0, \quad \beta > (\sigma + 1). \quad (2.1)$$

Сделаем в уравнении (2.1) замену $u^{(\sigma+1)} = v$ и будем считать, что первоначальные независимые переменные уравнения — $\{x, y, t\}$. Тогда функция v удовлетворяет уравнению

$$v^{-\sigma/(\sigma+1)} v_t = v_{xx} + v_{yy} + (\sigma + 1) v^{\beta/(\sigma+1)} \quad (2.2)$$

(нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующей переменной). Уравнение (2.2) содержит слагаемые, которые зависят только от функции v , поэтому сделаем еще одну замену $v = Q_x$, получим уравнение

$$-Q_x^{-\sigma/(\sigma+1)} Q_{xt} + Q_{xxx} + Q_{xyy} + (\sigma + 1) Q_x^{\beta/(\sigma+1)} = 0. \quad (2.3)$$

Далее будем предполагать, что $Q = Q(\psi(x, y, t))$. Тогда $\psi(x, y, t) = \text{const}$ — поверхность уровня для функции Q . Подставив производные функции $Q = Q(\psi)$ в (2.3), получим уравнение вида (0.3)

$$\begin{aligned} & -(Q')^{-\sigma/(\sigma+1)} Q'' \psi_x^{1/(\sigma+1)} \psi_t - (Q')^{1/(\sigma+1)} \psi_x^{-\sigma/(\sigma+1)} \psi_{xt} + Q''' (\psi_x^3 + \psi_x \psi_y^2) \\ & + Q'' (3\psi_x \psi_{xx} + 2\psi_y \psi_{xy} + \psi_x \psi_{yy}) + Q' (\psi_{xxx} + \psi_{xyy}) + (\sigma + 1) (Q')^{\beta/(\sigma+1)} \psi_x^{\beta/(\sigma+1)} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Будем искать такие поверхности уровня для функции $Q(\psi)$, для которых выполняется условие $B_1 = \psi_t \psi_x^{1/(\sigma+1)} \neq 0$.

Обозначим

$$L1 = \psi_x^3 + \psi_x \psi_y^2 - f_1(\psi) \psi_t \psi_x^{1/(\sigma+1)}, \quad L2 = \psi_x^{\beta/(\sigma+1)} - f_2(\psi) \psi_t \psi_x^{1/(\sigma+1)}, \quad L3 = \psi_{xt} - f_3(\psi) \psi_x \psi_t,$$

$$L4 = 3\psi_x \psi_{xx} + 2\psi_y \psi_{xy} + \psi_x \psi_{yy} - f_4(\psi) \psi_t \psi_x^{1/(\sigma+1)}, \quad L5 = \psi_{xxx} + \psi_{xyy} - f_5(\psi) \psi_t \psi_x^{1/(\sigma+1)},$$

где $f_i(\psi)$, ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) — пока произвольные функции. Положим, что (см. (1.1))

$$L1 = 0, \quad L2 = 0, \quad L3 = 0, \quad L4 = 0, \quad L5 = 0, \quad (2.5)$$

тогда уравнение (2.4) можно записать в виде

$$-(Q')^{-\sigma/(\sigma+1)} Q'' - (Q')^{1/(\sigma+1)} f_3 + Q''' f_1 + Q'' f_4 + Q' f_5 + (\sigma + 1) (Q')^{\beta/(\sigma+1)} f_2 = 0. \quad (2.6)$$

Здесь, в отличие от [1;7], левые части двух уравнений системы (2.5) $L1 = 0$ и $L2 = 0$ зависят только от первых производных функции ψ , поэтому прежде всего следует определить, когда эта система из двух уравнений будет совместной. Это приводит нас к необходимости решить вопрос о полноте системы $L1 = 0$ и $L2 = 0$ [4;5].

Выпишем скобку Пуассона для уравнений $L1 = 0$ и $L2 = 0$, предварительно представив их в виде якобиевой системы [4;5]:

$$\psi_t = \frac{1}{f_2} \psi_x^{(\beta-1)/(\sigma+1)}, \quad \psi_y = \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2} \psi_x^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} - \psi_x^2}, \quad f_2 \neq 0, \quad f_1 \neq 0. \quad (2.7)$$

Здесь и далее знак (\pm) перед радикалом означает, что при дальнейших рассмотрениях в соответствующих формулах можно брать как знак $(+)$, так и знак $(-)$.

Получим условия, которым должны удовлетворять функции $f_1(\psi)$ и $f_2(\psi)$, чтобы система (2.7) была полной, т.е. чтобы скобка Пуассона была равна нулю.

Скобка Пуассона в рассматриваемом случае имеет вид

$$[L1, L2] = \left\{ \frac{3\sigma + 3 - \beta}{\sigma + 1} \frac{f_1}{f_2} \left(\frac{1}{f_2} \right)' + \frac{\beta - \sigma - 2}{\sigma + 1} \frac{1}{f_2} \left(\frac{f_1}{f_2} \right)' \right\} \psi_x^{(2\beta-\sigma-2)/(\sigma+1)}.$$

Тогда справедлива

Лемма 1. Система $\{L1 = 0, L2 = 0\}$ — полная, если выполняется одно из условий:

I) $\beta = 3(\sigma + 1)$, $f_1 = A_0 f_2$, $A_0 = \text{const}$, $A_0 \neq 0$.

II) $\beta = (\sigma + 2)$, $f_2 = \text{const}$, $f_2 \neq 0$.

III) $\beta \neq 3(\sigma + 1)$, $\beta \neq (\sigma + 2)$, $f_1 = c_0 f_2^{(2\sigma+1)/[\beta-(\sigma+2)]}$, $c_0 = \text{const}$, $c_0 > 0$. □

Получим условия совместности всей системы (2.5) в каждом случае, указанном в лемме 1.

Чтобы определить вторые производные функции ψ , выпишем сначала дифференциальные следствия системы (2.7) и присоединим к ним уравнение $L3=0$, предварительно обозначив

$$\begin{aligned} L21 &= -\psi_{tx} + \left(\frac{1}{f_2}\right)' \psi_x^{(\beta+\sigma)/(\sigma+1)} + \frac{\beta-1}{f_2(\sigma+1)} \psi_{xx} \psi_x^{(\beta-\sigma-2)/(\sigma+1)}, \\ L22 &= -\psi_{ty} + \left(\frac{1}{f_2}\right)' \psi_y \psi_x^{(\beta-1)/(\sigma+1)} + \frac{\beta-1}{f_2(\sigma+1)} \psi_{xy} \psi_x^{(\beta-\sigma-2)/(\sigma+1)}, \\ L11 &= -\psi_{yx} + 0.5\psi_y^{-1} \left[\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' \psi_x^{\beta/(\sigma+1)} + \frac{\beta-\sigma-1}{\sigma+1} \left(\frac{f_1}{f_2}\right) \psi_x^{(\beta-2\sigma-2)/(\sigma+1)} \psi_{xx} - 2\psi_x \psi_{xx} \right], \\ L12 &= -\psi_{yy} + 0.5\psi_y^{-1} \left[\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' \psi_x^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} \psi_y + \frac{\beta-\sigma-1}{\sigma+1} \left(\frac{f_1}{f_2}\right) \psi_x^{(\beta-2\sigma-2)/(\sigma+1)} \psi_{xy} - 2\psi_x \psi_{xy} \right], \end{aligned}$$

тогда получим систему

$$L21 = 0, \quad L22 = 0, \quad L11 = 0, \quad L12 = 0, \quad L3 = 0. \quad (2.8)$$

Из системы (2.8) можно определить все вторые производные функции ψ , но чтобы формально определенные из системы (2.8) вторые производные на самом деле были бы производными одной функции ψ , надо потребовать, чтобы третьи смешанные производные не зависели от порядка дифференцирования. Это будет иметь место только при определенных зависимостях функции f_3 от f_1 и f_2 . Подставив затем вторые и третьи производные функции ψ в соотношения $L4$ и $L5$, мы определим, при каких условиях система (2.5) будет совместной.

Теорема 1. Система (2.5) совместна, если выполняется одно из условий:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \beta = 3(\sigma + 1), \quad f_1 = A_0 f_2, \quad A_0 = \text{const}, \quad \sigma \neq -0.5, \quad f_2 = f_2(\psi), \\ & f_3 = \frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} \frac{f_2'}{f_2}, \quad f_4 = \frac{3(\sigma + 1)}{2\sigma + 1} A_0 f_2', \quad f_5 = \frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} A_0 f_2 \left[\left(\frac{f_2'}{f_2}\right)' + \frac{2(\sigma + 1)}{2\sigma + 1} \left(\frac{f_2'}{f_2}\right)^2 \right], \\ \text{II)} \quad & \beta = (\sigma + 2), \quad f_2 = \text{const}, \quad f_1 = f_1(\psi), \quad \sigma \neq -0.5, \\ & f_3 = \frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} \frac{f_1'}{f_1}, \quad f_4 = \frac{3(\sigma + 1)}{2\sigma + 1} f_1', \quad f_5 = \frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} \left(f_1'' + \frac{1}{2\sigma + 1} \frac{f_1'^2}{f_1} \right), \\ \text{III)} \quad & \beta \neq 3(\sigma + 1), \quad \beta \neq (\sigma + 2), \quad f_1 = c_0 f_2^{(2\sigma+1)/[\beta-(\sigma+2)]}, \quad c_0 = \text{const}, \quad c_0 > 0, \\ & f_2 = f_2(\psi), \quad f_3 = \frac{\sigma + 1}{\beta - (\sigma + 2)} \frac{f_2'}{f_2}, \quad f_4 = \frac{3(\sigma + 1)}{\beta - (\sigma + 2)} c_0 f_2^{(2\sigma+1)/(\beta-\sigma-2)} \frac{f_2'}{f_2}, \\ & f_5 = \frac{\sigma + 1}{\beta - (\sigma + 2)} c_0 f_2^{(2\sigma+1)/[\beta-(\sigma+2)]} \left[\left(\frac{f_2'}{f_2}\right)' + \frac{2(\sigma + 1)}{\beta - (\sigma + 2)} \left(\frac{f_2'}{f_2}\right)^2 \right]. \quad \square \end{aligned}$$

3. Преобразование координат для уравнения теплопроводности

Для каждого из отмеченных в теореме 1 случаев будем искать анонсированное во введении преобразование координат и опишем, как получать вид поверхности уровня и решение уравнения (2.1).

С л у ч а й I) $\beta = 3(\sigma + 1)$, $f_1 = A_0 f_2$, $A_0 = \text{const}$.

Выпишем для этого случая систему уравнений вида (2.7)

$$\psi_t = \frac{\psi_x^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)}}{f_2}, \quad \psi_y = \pm \psi_x \sqrt{(A_0 - 1)}, \quad A_0 > 1. \quad (3.1)$$

Второе уравнение системы имеет решение $\psi = \psi(x \pm y\sqrt{(A_0 - 1)})$, поэтому, перейдя в системе (3.1) к независимым переменным $z = x \pm y\sqrt{(A_0 - 1)}$ и t , получим одно уравнение

$$\psi_t - \frac{\psi_z^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)}}{f_2} = 0. \quad (3.2)$$

Выпишем для уравнения (3.2) систему уравнений характеристик [6]

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dz}{ds} = -\frac{3\sigma + 2}{(\sigma + 1)f_2} \psi_z^{(2\sigma+1)/(\sigma+1)}, \quad \frac{d\psi}{ds} = -\frac{2\sigma + 1}{(\sigma + 1)f_2} \psi_z^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)}, \\ \frac{d\psi_t}{ds} = \left(\frac{1}{f_2}\right)' \psi_t \psi_z^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)}, \quad \frac{d\psi_z}{ds} = \left(\frac{1}{f_2}\right)' \psi_z \psi_z^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)}. \end{aligned}$$

Полагая, что $\psi_z \neq 0$, выберем в системе уравнений характеристик в качестве независимой переменной ψ . Получим

$$\frac{dt}{d\psi} = -\frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} f_2 \psi_z^{-(3\sigma+2)/(\sigma+1)}, \quad \frac{dz}{d\psi} = \frac{3\sigma + 2}{2\sigma + 1} \psi_z^{-1}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\psi_t}{d\psi} = \frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} \frac{f_2'}{f_2} \psi_t, \quad \frac{d\psi_z}{d\psi} = \frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} \frac{f_2'}{f_2} \psi_z.$$

Решив последние два уравнения системы (3.3), получим

$$\psi_t = c^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)} f_2^{(\sigma+1)/(2\sigma+1)}, \quad \psi_z = c f_2^{(\sigma+1)/(2\sigma+1)}, \quad c > 0, \quad (3.4)$$

Подставим (3.4) в первые уравнения системы (3.3) и выпишем решения этих уравнений

$$t = -\frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} c^{-(3\sigma+2)/(\sigma+1)} w + c_1, \quad z = \frac{3\sigma + 2}{2\sigma + 1} c^{-1} w + c_2, \quad w = \int f_2^{-(\sigma+1)/(2\sigma+1)} d\psi. \quad (3.5)$$

Здесь $f_2(\psi)$, $c(\alpha)$, $c_i(\alpha)$ ($\alpha = 1, 2$) — произвольные функции, удовлетворяющие соотношению [1]:

$$c^{(2\sigma+1)/(\sigma+1)} \frac{dc_1}{d\alpha} + \frac{dc_2}{d\alpha} = 0. \quad (3.6)$$

Если функции $c(\alpha)$, $c_i(\alpha)$ ($\alpha = 1, 2$) обращают в тождество уравнение (3.6), то (3.5) — искомое преобразование координат.

Исключив из (3.5) переменную α , получим $w = w(z, t) = w(x, y, t)$. Будем считать, например, что $c_1 = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$. Тогда функция c — произвольная. Исключив ее из (3.5), для w получим выражение

$$w = \left[\left(\frac{c_1 - t}{\sigma + 1} \right)^{-(\sigma+1)} \left(\frac{z - c_2}{3\sigma + 2} \right)^{(3\sigma+2)} (2\sigma + 1) \right]^{1/(2\sigma+1)}.$$

Выпишем уравнение вида (2.6), которому в этом случае удовлетворяет функция Q . Подставив в (2.6) функции f_i ($i = 1, 2, 3, 4$) (см. теорему 1, п. I), получим

$$\begin{aligned} -(Q')^{-\sigma/(\sigma+1)} Q'' - \frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} \frac{f_2'}{f_2} (Q')^{1/(\sigma+1)} + A_0 f_2 Q'' \\ + \frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} A_0 f_2 \left[\left(\frac{f_2'}{f_2} \right)' + \frac{2(\sigma + 1)}{2\sigma + 1} \left(\frac{f_2'}{f_2} \right)^2 \right] Q' + (\sigma + 1) f_2 Q^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Выберем в (3.7) в качестве независимой переменной w . Тогда

$$Q' = Q_w f_2^{-(\sigma+1)/(2\sigma+1)}, \quad Q'' = Q_{ww} f_2^{-2(\sigma+1)/(2\sigma+1)} - \frac{\sigma + 1}{2\sigma + 1} Q_w f_2^{-(3\sigma+2)/(2\sigma+1)} f_2',$$

$$\begin{aligned}
 Q''' &= Q_{www} f_2^{-3(\sigma+1)/(2\sigma+1)} - \frac{3(\sigma+1)}{2\sigma+1} Q_{ww} f_2^{-(4\sigma+3)/(2\sigma+1)} f_2' \\
 &- \frac{\sigma+1}{2\sigma+1} Q_w \left(-\frac{3\sigma+2}{2\sigma+1} f_2^{-(5\sigma+3)/(2\sigma+1)} f_2'^2 + f_2^{-(3\sigma+2)/(2\sigma+1)} f_2'' \right). \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Подставив (3.8) в (3.7), получим

$$-Q_w^{-\sigma/(\sigma+1)} Q_{ww} + A_0 Q_{www} + (\sigma+1) Q_w^3 = 0. \quad (3.9)$$

Положим в (3.9) $Q_w = p$, тогда имеем

$$-p^{-\sigma/(\sigma+1)} p_w + A_0 p_{ww} + (\sigma+1) p^3 = 0. \quad (3.10)$$

В выражении (3.10), считая, что $p_w \neq 0$, т. е. у $p = p(w)$ существует обратная функция, ищем $p_w = q(p)$. Тогда уравнение для определения $q(p)$ имеет вид

$$-p^{-\sigma/(\sigma+1)} q + A_0 q q_p + (\sigma+1) p^3 = 0. \quad (3.11)$$

В уравнении (3.11) введем новую независимую переменную $r = p^{1/(\sigma+1)}$, в результате придем к уравнению

$$\frac{A_0}{\sigma+1} q q_r = q - (\sigma+1) r^{4\sigma+3} = 0. \quad (3.12)$$

Выпишем решение уравнения (3.12) при $\sigma = -3/4$: $r = B_0 + 4A_0 q + A_0 \ln |4q - 1|$ ($q \neq 1/4$). Тогда $\beta = 3/4$ и условие $\beta > (\sigma+1)$ выполняется. Отсюда следует

$$\begin{aligned}
 Q_w = p &= [B_0 + 4A_0 q + A_0 \ln(4q - 1)]^{1/4}, \quad Q_{ww} = q, \quad dw = dp/q, \quad w = \int \left(\frac{dp}{dq} \frac{1}{q} \right) dq, \\
 dQ &= p(q) dw, \quad Q = \int p(q) \left(\frac{dp}{dq} \frac{1}{q} \right) dq. \\
 Q &= \int \frac{\left[4A_0 + \frac{A_0}{(4q-1)} \right] dq}{4q [B_0 + 4A_0 q + A_0 \ln(4q-1)]^{1/2}}, \quad w = \int \frac{\left[4A_0 + \frac{A_0}{(4q-1)} \right] dq}{4q [B_0 + 4A_0 q + A_0 \ln(4q-1)]^{3/4}}. \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Соотношения (3.13) представляют решение уравнения (3.9) в параметрическом виде, когда $\sigma = -3/4$.

Если $q = 1/4$, то $Q_w = p = w/4 + A_1$, откуда $Q = w^2/8 + A_1 w + B_1$, где $A_1 = \text{const}$, $B_1 = \text{const}$.

Очевидно, в общем случае, решив уравнение (3.9) и вместо w подставив его значение, которое получим, когда из (3.5) исключим независимую переменную α , мы будем иметь $Q = Q(x, y, t)$, а следовательно и $u(x, y, t) = v^{1/(\sigma+1)} = Q_x^{1/(\sigma+1)}$. Эти выкладки возможны, если известен вид функций c_i , ($i = 1, 2, 3$). Вид функций известен при постановке начальной или краевой задачи (см. [1; 7]).

С л у ч а й II) $\beta = \sigma + 2$, $f_2 = \text{const}$.

Выпишем вид системы (2.7) в этом случае:

$$\psi_t = \frac{\psi_x}{f_2}, \quad \psi_y = \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2} \psi_x^{1/(\sigma+1)} - \psi_x^2}. \quad (3.14)$$

Первое уравнение системы (3.14) имеет решение $\psi = \psi(t + f_2 x)$. Перейдем во втором уравнении системы (3.14) к переменным $z = t + f_2 x$ и y . Тогда будем иметь уравнение

$$\psi_y = \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2} (\psi_z f_2)^{1/(\sigma+1)} - \psi_z^2 f_2^2}. \quad (3.15)$$

Выпишем для уравнения (3.15) систему уравнений характеристик, выбрав в качестве независимой переменной ψ :

$$\frac{dy}{d\psi} = \frac{2(\sigma+1)}{2\sigma+1} f_1^{-1} f_2^{\sigma/(\sigma+1)} \psi_z^{-1/(\sigma+1)} \psi_y, \quad \frac{dz}{d\psi} = -\frac{1}{2\sigma+1} \psi_z^{-1} + \frac{2(\sigma+1)}{2\sigma+1} f_1^{-1} f_2^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)} \psi_z^{\sigma/(\sigma+1)}, \quad (3.16)$$

$$\frac{d\psi_y}{d\psi} = \frac{\sigma+1}{2\sigma+1} \frac{f_1'}{f_1} \psi_y, \quad \frac{d\psi_z}{d\psi} = \frac{\sigma+1}{2\sigma+1} \frac{f_1'}{f_1} \psi_z.$$

Решив систему (3.16), получим

$$\psi_z = c f_1^{(\sigma+1)/(2\sigma+1)}, \quad \psi_y = \pm f_1^{(\sigma+1)/(2\sigma+1)} \sqrt{c^{1/(\sigma+1)} f_2^{-\sigma/(\sigma+1)} - f_2^2 c^2},$$

и далее

$$y = \pm \frac{2(\sigma+1)}{2\sigma+1} c^{-1/(\sigma+1)} \sqrt{c^{1/(\sigma+1)} f_2^{\sigma/(\sigma+1)} - c^2 f_2^{2(2\sigma+1)/(\sigma+1)}} w + c_1, \quad (3.17)$$

$$z = \frac{1}{2\sigma+1} [2(\sigma+1) f_2^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)} c^{\sigma/(\sigma+1)} - c^{-1}] w + c_2, \quad w = \int f_1^{-(\sigma+1)/(2\sigma+1)} d\psi.$$

Здесь $f_2 = \text{const}$, $f_1(\psi)$ — произвольная функция, $c = c(\alpha)$, $c_1 = c_1(\alpha)$, $c_2 = c_2(\alpha)$ — функции, которые должны обращать в тождество соотношение [1]

$$c \frac{dc_2}{d\alpha} \pm \sqrt{c^{1/(\sigma+1)} f_2^{-\sigma/(\sigma+1)} - f_2^2 c^2} \frac{dc_1}{d\alpha} = 0 \quad (3.18)$$

и могут использоваться для удовлетворения начальных или краевых условий.

Если функции $c = c(\alpha)$, $c_1 = c_1(\alpha)$, $c_2 = c_2(\alpha)$ обращают в тождество уравнение (3.18), то (3.17) — искомое преобразование координат.

В этом случае если в уравнении (2.6) выбрать в качестве независимой переменной w , то получим, что $Q = Q(w)$ — решение уравнения

$$-Q_w^{-\sigma/(\sigma+1)} Q_{ww} + Q_{www} + (\sigma+1) f_2 Q_w^{(\sigma+2)/(\sigma+1)} = 0. \quad (3.19)$$

Положив в (3.19), как и в (3.9), сначала $Q_w = p$, а затем $p_w = q(p)$ и заменив независимую переменную p на независимую переменную $r = (\sigma+1)p^{1/(\sigma+1)}$, приходим к уравнению $qq_r - q + (\sigma+1)^{-(2\sigma+1)} f_2 r^{2(\sigma+1)} = 0$. Отсюда, если $\sigma = -2$, будем иметь решение в параметрическом виде (τ — параметр):

$$p(\tau) = -\frac{1}{2a\tau^{4/3} Z^2 U_2^{-1}}, \quad q(\tau) = \pm 3ar^{-2/3} Z^{-1} U_2^{-1} U_3, \quad Z = Z_{1/3}, \quad a = \left[-\frac{f_2}{36}\right]^{1/3},$$

$$U_1 = \tau Z'_\tau + \frac{Z}{3}, \quad U_2 = U_1^2 \pm \tau^2 Z^2, \quad U_3 = \pm 2\tau^2 \frac{Z^3}{3} - 2U_1 U_2, \quad Z_\nu = C_1 I_\nu(\tau) + C_2 K_\nu(\tau).$$

Здесь I_ν , K_ν — модифицированные функции Бесселя, $C_1 = \text{const}$, $C_2 = \text{const}$.

$$Q_w = p(\tau), \quad q(\tau) = \frac{dp}{d\tau}, \quad w(\tau) = \int \frac{dp}{d\tau} \frac{1}{q(\tau)} d\tau, \quad Q(\tau) = \int \frac{dp}{d\tau} \frac{p(\tau)}{q(\tau)} d\tau.$$

Если в выражении (3.17) известен вид функций $c(\alpha)$, $c_1(\alpha)$, $c_2(\alpha)$, удовлетворяющий условию (3.18) (он может быть определен, если задано начальное или краевое условие), то, исключив из соотношений (3.17) переменную α , мы определим $w = w(x, y, t)$ и, сопоставляя это значение с решением уравнения (3.19) в записи через параметр t , найдем $Q = Q(x, y, t)$, а затем получим решение уравнения (2.1) $u(x, y, t) = v^{1/(\sigma+1)} = Q_x^{1/(\sigma+1)}$.

Пусть известно, что $c_1 = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$. Такие функции c_1 , c_2 удовлетворяют условию (3.18) при любой функции $c(\alpha)$. Перепишем (3.17) в виде

$$(y - c_1) = \frac{2(\sigma + 1)}{2\sigma + 1} c^{-1/[2(\sigma+1)]} f_2^{\sigma/[2(\sigma+1)]} w \sqrt{1 - c^{(2\sigma+1)/(\sigma+1)} f_2^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)}},$$

$$(c_2 - z) = \frac{2(\sigma + 1)}{2\sigma + 1} c^{-1} w \left[\frac{1}{2(\sigma + 1)} - c^{(2\sigma+1)/(\sigma+1)} f_2^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)} \right].$$

Отсюда получим $\frac{c_2 - z}{y - c_1} \lambda^{1/2} = \frac{f_2 \{1/[2(\sigma + 1)] - \lambda\}}{\sqrt{1 - \lambda}}$, $\lambda = c^{(2\sigma+1)/(\sigma+1)} f_2^{(3\sigma+2)/(\sigma+1)}$,

а возведя в квадрат полученное выражение и решив квадратное уравнение относительно λ , имеем

$$\lambda = \frac{[f_2^2/(\sigma + 1) + h^2] \pm \sqrt{D}}{2(f_2^2 + h^2)}, \quad h = \frac{c_2 - z}{y - c_1}, \quad D = h^2 \left[h^2 - \frac{(2\sigma + 1)f_2^2}{(\sigma + 1)^2} \right].$$

Тогда, исключив $c(\alpha)$ из соотношения для $(c_2 - z)$, найдем, что

$$w = \frac{(2\sigma + 1)c(c_2 - z)}{2(\sigma + 1) \left\{ \frac{1}{2(\sigma + 1)} - \lambda \right\}}, \quad z = t + f_2 x, \quad f_2 = \text{const}, \quad c = \lambda^{(\sigma+1)/(2\sigma+1)} f_2^{-(3\sigma+2)/(2\sigma+1)},$$

С л у ч а й III) $\beta \neq 3(\sigma + 1)$, $\beta \neq (\sigma + 2)$, $f_1 = c_0 f_2^{(2\sigma+1)/[\beta-(\sigma+2)]}$.

Выпишем вид системы (2.7) для этого случая

$$\psi_t - \frac{\psi_x^{(\beta-1)/(\sigma+1)}}{f_2} = 0, \quad \psi_y \mp \sqrt{c_0 f_2^{[3(\sigma+1)-\beta]/[\beta-(\sigma+2)]} \psi_x^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} - \psi_x^2} = 0. \quad (3.20)$$

Применим к системе (3.20) метод Майера [5], положив $t = uu_1$, $y = uu_2$. Получим уравнение

$$\Psi_u - u_1 \frac{\Psi_x^{(\beta-1)/(\sigma+1)}}{f_2} - u_2 \sqrt{c_0 f_2^{[3(\sigma+1)-\beta]/[\beta-(\sigma+2)]} \Psi_x^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} - \Psi_x^2} = 0. \quad (3.21)$$

Выпишем систему уравнений характеристик для уравнения (3.21):

$$\frac{du}{ds} = 1,$$

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{(\beta - 1)u_1}{(\sigma + 1)f_2} \Psi_x^{(\beta-\sigma-2)/(\sigma+1)} - u_2 \frac{\frac{\beta - \sigma - 1}{\sigma + 1} c_0 f_2^{[3(\sigma+1)-\beta]/[\beta-(\sigma+2)]} \Psi_x^{[\beta-2(\sigma+1)]/(\sigma+1)} - 2\Psi_x}{2\sqrt{c_0 f_2^{[3(\sigma+1)-\beta]/[\beta-(\sigma+2)]} \Psi_x^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} - \Psi_x^2}},$$

$$\frac{d\Psi}{ds} = -\frac{[\beta - (\sigma + 2)]u_1}{(\sigma + 1)f_2} \Psi_x^{(\beta-1)/(\sigma+1)} + u_2 \frac{\frac{3(\sigma + 1) - \beta}{\sigma + 1} c_0 f_2^{[3(\sigma+1)-\beta]/[\beta-(\sigma+2)]} \Psi_x^{[\beta-(\sigma+1)]/(\sigma+1)}}{2\sqrt{c_0 f_2^{[3(\sigma+1)-\beta]/[\beta-(\sigma+2)]} \Psi_x^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} - \Psi_x^2}},$$

$$\frac{d\Psi_u}{ds} = \Psi_u \left\{ u_1 \Psi_x^{(\beta-1)/(\sigma+1)} \frac{f_2'}{f_2} - u_2 \frac{\frac{3(\sigma + 1) - \beta}{\sigma + 1} c_0 f_2^{[4(\sigma+1)-2\beta]/[\beta-(\sigma+2)]} f_2' \Psi_x^{[\beta-(\sigma+1)]/(\sigma+1)}}{2\sqrt{c_0 f_2^{[3(\sigma+1)-\beta]/[\beta-(\sigma+2)]} \Psi_x^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} - \Psi_x^2}} \right\},$$

$$\frac{d\Psi_x}{ds} = \Psi_x \left\{ u_1 \Psi_x^{(\beta-1)/(\sigma+1)} \frac{f_2'}{f_2} - u_2 \frac{\frac{3(\sigma + 1) - \beta}{\sigma + 1} c_0 f_2^{[4(\sigma+1)-2\beta]/[\beta-(\sigma+2)]} f_2' \Psi_x^{[\beta-(\sigma+1)]/(\sigma+1)}}{2\sqrt{c_0 f_2^{[3(\sigma+1)-\beta]/[\beta-(\sigma+2)]} \Psi_x^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} - \Psi_x^2}} \right\}.$$

Решив данную систему, получим

$$\Psi_x = c f_2^{-(\sigma+1)/(\sigma+2-\beta)}, \quad \Psi_u = \left[u_1 c^{(\beta-1)/(\sigma+1)} + u_2 \sqrt{c_0 c^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} - c^2} \right] f_2^{-(\sigma+1)/(\sigma+2-\beta)},$$

$$x = \left[\frac{1-\beta}{\sigma+1} c^{(\beta-\sigma-2)/(\sigma+1)} \right] uu_1 - \frac{uu_2 \left[\frac{\beta-\sigma-1}{2(\sigma+1)} c_0 c^{[\beta-2(\sigma+1)]/(\sigma+1)} - c \right]}{\sqrt{c_0 c^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} - c^2}} + a,$$

$$w = -\frac{\beta-\sigma-2}{\sigma+1} c^{(\beta-1)/(\sigma+1)} uu_1 + \frac{3(\sigma+1)-\beta}{2(\sigma+1)} c_0 c^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} uu_2 + A, \quad a = \text{const}, \quad A = \text{const}.$$

Отсюда определяем, что в первоначальных переменных

$$w = tc^{(\beta-1)/(\sigma+1)} + y\sqrt{c_0 c^{(\beta-\sigma-1)/(\sigma+1)} - c^2} + c(x-a) + A,$$

$$c = \text{const}, \quad A = \text{const}, \quad a = \text{const}, \quad w = \int f_2^{(\sigma+1)/(\sigma+2-\beta)} d\Psi.$$

Уравнение (2.6) после перехода к независимой переменной w будет иметь вид

$$-Q_w^{-\sigma/(\sigma+1)} Q_{ww} + c_0 Q_{www} + (\sigma+1) Q_w^{\beta/(\sigma+1)} = 0. \quad (3.22)$$

Выполнив для уравнения (3.22) преобразования, описанные для уравнения (3.9), придем к уравнению $c_0 q q_r / (\sigma+1) = q - (\sigma+1) r^{(\beta+\sigma)}$. Положив $\beta = -\sigma$, выпишем решение этого уравнения через параметр q : $r = c_0 q / (\sigma+1) + c_0 \ln |q - (\sigma+1)| - M$, $q \neq (\sigma+1)$. Тогда $Q_w = p = [c_0 q / (\sigma+1) + c_0 \ln |q - (\sigma+1)| - M]^{(\sigma+1)} = G(q)$, $q = dp/dw$, следовательно,

$$w = \int \frac{c_0 \left[\frac{c_0 q}{\sigma+1} + c_0 \ln |q - (\sigma+1)| - M \right]^\sigma}{q - (\sigma+1)} dq, \quad M = \text{const},$$

$$Q = \int \frac{c_0 \left[\frac{c_0 q}{\sigma+1} + c_0 \ln |q - (\sigma+1)| - M \right]^{2\sigma+1}}{q - (\sigma+1)} dq.$$

Если $q = (\sigma+1)$, то $Q = 0.5(\sigma+1)w^2 + A_1 w + B_1$, $A_1 = \text{const}$, $B_1 = \text{const}$. Если $\sigma < -0.5$, то выполняется условие $\beta > (\sigma+1)$.

З а м е ч а н и е 1. В рассмотренных выше случаях решений уравнения (2.3) функция ψ_x не является функцией, зависящей только от переменной ψ ($\psi_x \neq \psi_x(\psi)$), если $c \neq \text{const}$. Поэтому функция u — решение уравнения (2.1) будет зависеть от двух переменных: $u = u(\psi, \psi_x)$ так как $u = Q_x^{1/(\sigma+1)} = [Q'(\psi)\psi_x]^{1/(\sigma+1)}$.

З а м е ч а н и е 2. Если в уравнении (2.4) снять ограничение $\psi_t \psi_x^{1/(\sigma+1)} \neq 0$ и, обозначая $L1 = \psi_x^{1/(\sigma+1)} \psi_t$, $L2 = \psi_x^3 + \psi_x \psi_y^2$, $L3 = \psi_x$, положить, что $L1 = g_1(\psi)$, $L2 = g_2(\psi)$, $L3 = g_3(\psi)$, то система уравнений в частных производных первого порядка $L1 = g_1$, $L2 = g_2$, $L3 = g_3$ будет полной, когда $\psi_x = g_3(\psi)$, $\psi_y = r(\psi)$, $\psi_t = h(\psi)$ и выполняются зависимости: $r(\psi) = C g_3(\psi)$, $h(\psi) = C_1 g_3(\psi)$, где $C = \text{const}$, $C_1 = \text{const}$. Отсюда получаем, что $\psi = \psi(z)$, $z = x + C y + C_1 t$ и, следовательно, $Q = Q(z)$ определяется из уравнения $-C_1 Q_z^{-\sigma/(\sigma+1)} Q_{zz} + (1 + C^2) Q_{zzz} + (\sigma+1) Q_z^{\beta/(\sigma+1)} = 0$. В этом случае, так как $\psi_x = g_3(\psi)$, будем иметь, что решение уравнения (2.1) $u = Q_x^{1/(\sigma+1)} = [Q'(\psi)\psi_x(\psi)]^{1/(\sigma+1)}$ зависит от одной переменной ψ .

З а м е ч а н и е 3. Снятие ограничения $f_1 \neq 0$ (см. (2.7)) приводит к тому, что при $f_1 = 0$ имеем $\psi = \psi(z, t)$, $z = x + iy$, i — мнимая единица. В этом случае уравнение (2.3) имеет вид $Q_{zt} = (\sigma+1) Q_z^{(\beta+\sigma)/(\sigma+1)}$. Отсюда окончательно получаем, считая, что z — параметр в выписанном уравнении, и полагая $Q(z) = p$: $Q_z = [(1-\beta)t + a(z)]^{(\sigma+1)/(1-\beta)}$, $u = Q_x^{1/(\sigma+1)} = Q_z^{1/(\sigma+1)} = [(1-\beta)t + a(z)]^{1/(1-\beta)}$. Здесь $a(z)$ — произвольная функция.

4. Некоторые выводы для уравнения теплопроводности

В работах [1;7] рассмотрены предлагаемым геометрическим методом уравнения, в которых функция, являющаяся поверхностью уровня для решения уравнения, удовлетворяет только одному уравнению в частных производных первого порядка (после того как предполагается, что одно соотношение не обращается в ноль). Особенность уравнения (2.1), исследованного в данной работе, состоит в том, что функция, которая является поверхностью уровня решения исходного уравнения, удовлетворяет нескольким уравнениям первого порядка даже после предположения, что одно соотношение не обращается в ноль.

Для таких функций (поверхностей уровня) прежде всего следует решить вопрос о полноте системы уравнений первого порядка. Наличие произвольных функций f_i , ($i = 1, \dots, N - 1$) как правило, позволяет получить условия, которые следует наложить на функции f_i , чтобы рассматриваемая система уравнений была полной. В любом случае необходимо пополнить систему уравнений первого порядка новыми уравнениями и, далее, устанавливать условия совместности всей системы. Иногда после перехода к новым переменным (см. например, случаи I, II в разд. 3) получается одно уравнение первого порядка и соответствующее преобразование координат, существование которого предполагалось во введении (см. (3.5), (3.17)). В других случаях (например, случай III в разд. 3) решение строится с использованием метода Майера. Но в рассматриваемых случаях зависимость поверхности уровня от первоначальных независимых переменных определяется (иногда выписывается ее вид через параметры).

В оптике хорошо известно явление конической рефракции [8]. Имеется математическое объяснение, когда такое явление возникает [9]. Причина в том, что направление движения возмущения, вызванного лучом, совпадает с направлением характеристики, удовлетворяющей нескольким характеристическим уравнениям одновременно. В результате возмущение распространяется не по одномерному многообразию, а по многообразию большей размерности. Аналогично при исследовании уравнения (2.1) поверхность уровня удовлетворяет не одному уравнению первого порядка, а нескольким, что, вероятно, объясняет какие-то особенности процессов, которые описывает уравнение (2.1).

5. Постановка задачи для уравнения для функции тока в погранслое

Рассмотрим уравнение, которому удовлетворяет функция тока в погранслое [3]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = 0. \quad (5.1)$$

Будем предполагать, что $\psi = \psi(\varphi(x, y))$, тогда $\varphi(x, y) = \text{const}$ — поверхность уровня для функции ψ . Вычислив соответствующие производные, получим уравнение вида (0.3)

$$-\psi''' \varphi_y^3 + \psi'^2 (\varphi_y \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_{yy}) - 3\psi'' \varphi_y \varphi_{yy} - \psi' \varphi_{yyy} = 0. \quad (5.2)$$

Здесь штрих ($'$) обозначает дифференцирование по переменной φ .

Ищем такие поверхности уровня для функции $\psi(\varphi)$, для которых выполняется условие $B_1 = \varphi_y^3 \neq 0$ (см. введение). Введем обозначения $L_1 = (\varphi_y \varphi_{xy} - \varphi_x \varphi_{yy}) - f_1(\varphi) \varphi_y^3$, $L_2 = \varphi_{yy} - f_2(\varphi) \varphi_y^2$, $L_3 = \varphi_{yyy} - f_3(\varphi) \varphi_y^3 = 0$, где $f_i(\varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) — пока произвольные функции. Положим, что (см. (0.4))

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0. \quad (5.3)$$

Тогда уравнение (5.2) можно записать в виде

$$-\psi''' + \psi'^2 f_1 - 3\psi'' f_2 - \psi' f_3 = 0. \quad (5.4)$$

Здесь, в отличие от [1; 7], в системе (5.3) нет ни одного уравнения первого порядка. Рассмотрим два уравнения второго порядка $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ и получим условия совместности этих соотношений. Найдем из этих уравнений вторые производные

$$\varphi_{yy} = f_2 \varphi_y^2, \quad \varphi_{xy} = f_2 \varphi_x \varphi_y + f_1 \varphi_y^2. \quad (5.5)$$

Чтобы производные (5.5) были производными одной функции, необходимо и достаточно равенство их смешанных третьих производных $\varphi_{yyx} = \varphi_{xyy}$. Это условие выполняется, если $f_1' + f_1 f_2 = 0$. Кроме того, соотношение L_3 приводит к зависимости $f_3 = f_2' + 2f_2^2$. Тогда справедлива

Теорема 2. Система (5.3) совместна, если выполняется одно из условий:

I1) $f_1 = 0$, $f_2(\varphi)$ — произвольная функция, $f_3 = f_2' + 2f_2^2$.

I2) $f_1 = \text{const}$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $f_1 \neq 0$.

I3) $f_1(\varphi)$ — произвольная функция, $f_2 = -\frac{f_1'}{f_1}$, $f_3 = -\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)' + 2\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^2$. □

6. Точные решения уравнения для функции тока в пограничном слое

Для каждого из отмеченных в теореме 2 случаев будем искать анонсированное во введении преобразование координат и решения уравнения (5.1).

С л у ч а й I1) $f_1 = 0$.

Нетрудно заметить, что в этом случае (см. (5.2), выражение для L_1 и (5.3)) не нужно даже переходить к новым независимым переменным, так как $\psi_{yyy} = 0$, следовательно

$$\psi(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x). \quad (6.1)$$

После подстановки решения в виде (6.1) в уравнение (5.1) находим, что $aa_x = 0$, и $bb_x - 2ac_x = 0$. Отсюда получаем два решения:

$$\psi(x, y) = ay^2 + b(x)y + \left[\frac{b^2(x)}{4a}\right] + k, \quad a = \text{const}, \quad a \neq 0, \quad k = \text{const}, \quad b = b(x),$$

$$\psi(x, y) = by + c(x), \quad a = 0, \quad b = \text{const}, \quad c = c(x),$$

Здесь $c(x)$ и $b(x)$ — произвольные функции. Случай, когда $a = 0$, $b = 0$ приводит к зависимости решения от одной переменной и из рассмотрения исключается.

С л у ч а й I2) $f_1 = A = \text{const}$, $A \neq 0$.

Уравнение (5.2) в этом случае имеет вид

$$A\psi'^2 - \psi''' = 0. \quad (6.2)$$

Положив $\psi' = p(\varphi)$, получим $p'' = Ap^2$. Пусть $p' \neq 0$, тогда положим $p' = q(p)$ и придем к уравнению $(q^2)_p = 2Ap^2$.

$$\text{Отсюда} \quad q = \sqrt{\frac{2A}{3}p^3 + A_0}, \quad \varphi = \int \frac{dp}{\sqrt{\frac{2Ap^3}{3} + A_0}} + B_0, \quad A_0 = \text{const}, \quad B_0 = \text{const}.$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) $p'' = Ap^2$ — функция Вейерштрасса $p(\varphi) = \wp(\varphi\sqrt{A/6} + C_0)$, $C_0 = \text{const}$. Для функции Вейерштрасса имеем следующие инварианты и нули [10]:

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -\frac{6A_0}{A}, \quad e_1 = -K_0, \quad K_0 = \left(\frac{3A_0}{2A}\right)^{1/3},$$

$$e_2 = 0.5K_0 \mp 0.5\sqrt{-3K_0^2}, \quad e_3 = 0.5K_0 \pm 0.5\sqrt{-3K_0^2}.$$

Тогда $\psi(\varphi)$ — дзета-функция Вейерштрасса

$$\psi = \int \wp\left(\varphi\sqrt{\frac{A}{6}} + C_0\right)d\varphi + C_1 = -\sqrt{\frac{6}{A}}\zeta\left(\varphi\sqrt{\frac{A}{6}} + C_0\right) + C_1, \quad C_1 = \text{const.} \quad (6.3)$$

Выпишем также частное решение ОДУ (6.2):

$$\psi = -\frac{6}{A\varphi} + D, \quad D = \text{const.} \quad (6.4)$$

Поскольку в этом случае $f_2 = 0$, следовательно $\varphi_{yy} = 0$, можно сразу выписать вид функции $\varphi = \varphi(x, y)$: $\varphi(x, y) = N(x)y + M(x)$. После подстановки этого выражения в уравнение $L_1 = 0$ окончательно получим

$$\varphi(x, y) = M(x) - \frac{y}{Ax + c_0}, \quad c_0 = \text{const}, \quad M(x) - \text{произвольная функция.} \quad (6.5)$$

Подставив (6.5) в (6.3), (6.4), получим решения уравнения (5.1) в первоначальных переменных.

С л у ч а й 13) $f_1 \neq \text{const}$.

Перепишем уравнение $L_1 = 0$ в следующем виде: $(\varphi_x/\varphi_y - f(\varphi))_y = 0$, где $f_1(\varphi) = f'(\varphi)$. Из этого соотношения получим уравнение первого порядка, дифференциальным следствием которого является уравнение $L_1 = 0$, $(\varphi_y \neq 0)$:

$$\varphi_x - (f(\varphi) + V(x))\varphi_y = 0, \quad V(x) - \text{произвольная функция.} \quad (6.6)$$

На самом деле, продифференцировав (6.6) по переменной y и заменив в полученном соотношении выражение $(f + V)\varphi_y$ на φ_x , получим $L_1 = 0$. Условие (6.6) достаточное, но не необходимое. Дифференциальные следствия полученного уравнения первого порядка содержат условие (лишнее требование), которое не обязано выполняться для нашего исходного уравнения: $\varphi_{xx} - (f(\varphi) + V(x))\varphi_{yx} = f'\varphi_x\varphi_y + V_x\varphi_y$. Тем не менее посмотрим, к какому решению уравнения (5.1) приведет этот подход.

Выпишем систему уравнений характеристик для уравнения (6.6) [6]:

$$\frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dy}{ds} = -(f(\varphi) + V(x)), \quad \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \frac{d\varphi_x}{ds} = (f'\varphi_x + V_x)\varphi_y, \quad \frac{d\varphi_y}{ds} = f'\varphi_y^2. \quad (6.7)$$

Если в системе (6.7) в качестве независимого переменного выбрать x , то ее решение имеет вид

$$\varphi_y = -\frac{1}{f_1(\varphi)x + c(\varphi)}, \quad \varphi_x = -\frac{f(\varphi) + V(x)}{f_1(\varphi)x + c(\varphi)}, \quad y = -f(\varphi)x - \int V(x)dx + c_1(\varphi). \quad (6.8)$$

Соотношения (6.8) должны удовлетворять условиям [1]

$$\varphi_x x_\varphi + \varphi_y y_\varphi = 1, \quad \varphi_x x_x + \varphi_y y_x = 0. \quad (6.9)$$

Нетрудно проверить, что второе из соотношений (6.9) выполняется тождественно, а первое соотношение выполняется, если $c'_1 = c$. Также нетрудно убедиться, что соотношение $L_2 = 0$ является первым интегралом расширенной системы характеристик [1] для уравнения (6.6), если $f_2 = -f'_1/f_1$ и $c(\varphi) = 0$. Тогда $c_1 = \text{const}$. Получаем окончательно

$$y = -f(\varphi)x - \int V(x)dx + c_1, \quad \varphi_y = -\frac{1}{f_1(\varphi)x}, \quad \varphi_x = -\frac{f(\varphi) + V(x)}{f_1(\varphi)x}. \quad (6.10)$$

Для любой функции $f_1(\varphi)$ из (6.10) получаем, что $\varphi = \varphi((y - c_1)/x + M(x))$, где $M(x)$ — произвольная функция. Но тогда $\psi = \psi((y - c_1)/x + M(x))$. Подставив это выражение в уравнение (5.1), приходим к уравнению

$$\psi_z^2 + \psi_{zzz} = 0, \quad z = \frac{y - c_1}{x} + M(x). \quad (6.11)$$

Решение уравнения (6.11) аналогично решению уравнения (6.2). Выпишем его окончательный вид: $\psi = -\sqrt{6}\zeta(z\sqrt{1/6} + C_1) + C_2$, $C_1 = \text{const}$, $C_2 = \text{const}$.

Если $f_3 = A$, $A = \text{const}$, то

$$f_2 = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}} \text{th}[\sqrt{2A}(\varphi + B)], \quad B = \text{const}, \quad f_1 = \frac{D}{\sqrt{\text{ch}[\sqrt{2A}(\varphi + B)]}}, \quad D = \text{const}.$$

Подставляя в (5.4) полученные функции, получаем ОДУ для определения $\psi = \psi(\varphi)$:

$$\psi'^2 \frac{D}{\sqrt{\text{ch}[\sqrt{2A}(\varphi + B)]}} - A\psi' - 3\psi'' \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}} \text{th}[\sqrt{2A}(\varphi + B)] - \psi''' = 0.$$

Остановимся на уравнении $L_2 = 0$ в (5.3). Можно считать, что переменная x в выражении L_2 является параметром, оно имеет вид $\varphi_{yy} - \sqrt{A} \text{th}[\sqrt{2A}(\varphi + B)]\varphi_y^2/\sqrt{2} = 0$. Полагая, что $\varphi_y \neq 0$, введем $p(\varphi) = \varphi_y$, тогда получаем

$$p_\varphi = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{2}} \text{th}[\sqrt{2A}(\varphi + B)]p, \quad p = \varphi_y = N(x)\{\text{ch}[\sqrt{2A}(\varphi + B)]\}^{1/2},$$

$$N(x)y + M(x) = \frac{1}{\sqrt{A}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\text{ch}[\sqrt{2A}(\varphi + B)] - 1}{\text{ch}[\sqrt{2A}(\varphi + B)]}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (6.12)$$

где $F(\alpha, k)$ — эллиптический интеграл первого рода, $N(x), M(x)$ — произвольные функции. Из (6.12) следует, что $\varphi = \varphi(z)$, $z = N(x)y + M(x)$. После подстановки $\varphi(z)$ в уравнение $L_1 = 0$ получаем, что

$$z = -\frac{y}{Hx + H_1} + M(x), \quad H = \text{const}, \quad H_1 = \text{const},$$

$$\frac{\sqrt{A}}{D}(Hz + K) = F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\text{ch}[\sqrt{2A}(\varphi + B)] - 1}{\text{ch}[\sqrt{2A}(\varphi + B)]}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad K = \text{const}.$$

Но если $\varphi = \varphi(z)$, а $\psi = \psi(\varphi)$, то можно считать, что $\psi = \psi(z)$. Подставляем такую функцию ψ в (5.1), получаем уравнение $\psi_{zzz} - H\psi_z^2 = 0$. Таким образом, снова пришли к уравнению вида (6.2), решением которого является дзета-функция Вейерштрасса

$$\psi = -\sqrt{\frac{6}{H}}\zeta(z\sqrt{H/6} + C_0) + C_1, \quad C_0 = \text{const}, \quad C_1 = \text{const}. \quad (6.13)$$

7. Решение краевой задачи уравнения для функции тока в погранслое

В [3] для уравнения (5.1) поставлена краевая задача

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \psi_x(x, 0) = 0, \quad \psi_y(x, 0) = 0, \quad (7.1)$$

$$\psi_y(x, y) \rightarrow \text{const}, \quad y \rightarrow \infty. \quad (7.2)$$

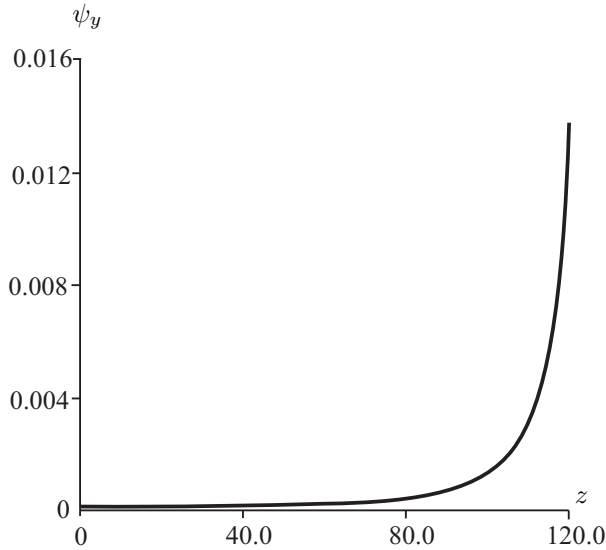


Рис. 1.

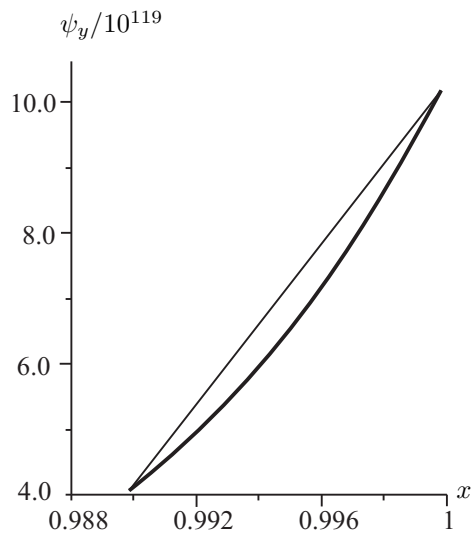


Рис. 2.

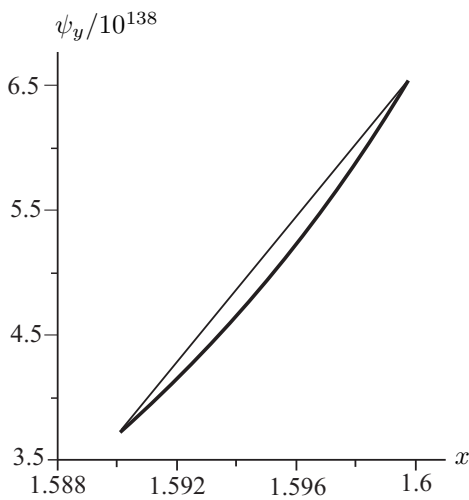


Рис. 3.

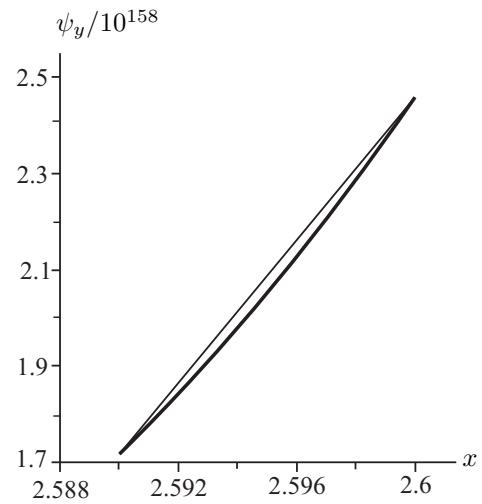


Рис. 4.

и предлагается вид функции для решения задачи, полученный из физических соображений. Мы будем для решения поставленной задачи использовать решение (6.13). Покажем, что подбором произвольных постоянных и произвольных функций можно удовлетворить поставленным краевым условиям.

Полагаем $M(x) = \text{const}$, тогда

$$z = \frac{y}{Hx + H_1} + M, \quad \psi_x(x, 0) = 0,$$

$$\psi(x, 0) = -\sqrt{\frac{6}{H}}\zeta\left(M\sqrt{\frac{H}{6}} + C_0\right) + C_1 = 0, \quad \psi_y(x, 0) = \frac{\wp\left(M\sqrt{\frac{H}{6}} + C_0\right)}{Hx + H_1} = 0.$$

Для вычисления функции Вейештрасса используем ее представление в виде ряда [11]. Полагаем $H = 2$, тогда условие (7.1) будет выполнено, когда $C_0 \approx 127.4$, $g_3 = 6H/10^{-12}$, $M = 0$, $C_1 = \sqrt{6/H}\zeta(M\sqrt{H/6} + C_0)$. На рис. 1 изображена $\psi_y(x, 0)$ в окрестности $z = 0$, что эквивалентно $y = 0$. Видно, что $\psi_y(x, 0) = 0$.

Одновременно, как показывают рис. 2–4, выполняется условие (7.2). При $y \rightarrow \infty$ имеем $z \rightarrow \infty$. На рис. 2–4 $x = z/5000$. Из рисунков видно, что при увеличении z на равных интервалах по z ψ_y все меньше отклоняется от прямой. Таким образом, при выбранных постоянных решение (6.13) удовлетворяет заданным краевым условиям (7.1), (7.2).

8. Заключение

В работе продемонстрировано, как геометрический метод исследования нелинейных уравнений в частных производных позволяет “изнутри” взглянуть на уравнение, получить точные решения для уравнений (2.1), (5.1), отличающихся от ранее рассмотренных нелинейных уравнений. В некоторых случаях с помощью этого метода можно решать краевые задачи [1, (5.1)], задачи о примыкании разных типов течений [7] и ряд других задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рубина Л.И., Ульянов О.Н. Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 209–225.
2. Куркина Е.С., Никольский И.М. О режимах с обострением в уравнениях $u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta$ // Дифференц. уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: тез. докл. Междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. Новосибирск, 2008. С. 512.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1957. 784 с.
4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. М.: Гос. изд-во тех.-теорет. лит., 1951. 810 с.
5. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. 260 с.
6. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
7. Рубина Л.И., Ульянов О.Н. О решении уравнения потенциала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 130–145.
8. Ludwig D. Conical refraction in cristal optics and hidromagnetics // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 14, no. 2. P. 113–124.
9. Рубина Л.И. О распространении слабых разрывов для квазилинейных систем // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 3. С. 435–443.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962. 1100 с.
11. Ломкаци Ц.Д. Таблицы эллиптической функции Вейерштрасса. Теоретическая часть / под ред. В.М. Белякова, К.А. Карпова. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 88 с.

Рубина Людмила Ильинична
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: rli@imm.uran.ru

Поступила 8.09.2011

Ульянов Олег Николаевич
канд. физ.-мат. наук
ученый секретарь института
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: uon@imm.uran.ru

УДК 519.6

АППРОКСИМАЦИЯ НЕГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ¹

И. А. Цепелев

Исследуется ретроспективная задача о восстановлении априори неизвестного начального состояния динамической системы по ее известному финальному состоянию. Эволюция системы во времени описывается нелинейной краевой задачей для неоднородного уравнения Бюргера. Изучаемая задача, как и другие подобные задачи, некорректна. Для решения задачи предлагается использовать вариационный метод Тихонова, состоящий в минимизации некоторого подходящего функционала невязки на множестве допустимых решений задачи. Чтобы охватить случай разрывного решения, привлекаются стабилизаторы с нормой пространства Соболева $W_p^\gamma([0, l])$ с дробными производными. Для решения экстремальных задач предлагаются и обосновываются итерационные методы, позволяющие свести исходную неустойчивую задачу к серии корректных задач. Проводится численное исследование эффективности различных стабилизаторов и приводятся результаты численных расчетов.

Ключевые слова: динамическая система, уравнение Бюргера, обратная ретроспективная задача, метод регуляризации Тихонова, классическая вариация, градиентный метод, субградиент.

I. A. Tsepelev. Approximation of nonsmooth solutions of a retrospective problem for an advection–diffusion model.

A retrospective problem, which consists in recovering an a priori unknown initial state of a dynamical system from its known final state, is investigated. The time evolution of the system is described by a nonlinear boundary value problem for the inhomogeneous Burgers equation. This problem, as well as other similar problems, is ill-posed. We propose to solve the problem by Tikhonov's variational method, which consists in minimizing some suitable residual functional on the set of admissible solutions of the problem. The case of a discontinuous solutions is covered by employing stabilizers with the norm of the Sobolev space $W_p^\gamma([0, l])$ with fractional derivatives. For solving the extremal problems, iterative methods are proposed and justified, which reduce the initial unstable problem to a series of well-posed problems. A numerical investigation of the effectiveness of various stabilizers is carried out and the results of numerical calculations are presented.

Keywords: dynamical system, Burgers equation, inverse retrospective problem, Tikhonov's regularization method, classical variation, gradient method, subgradient.

1. Постановка задачи

Пусть динамика некоторого процесса описывается неоднородным уравнением Бюргера

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} + f, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.1)$$

и граничными условиями

$$u(t, 0) = 0 = u(t, l), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad (1.2)$$

где $u(t, x)$ — состояние системы в момент времени $t \in (t_0, \vartheta)$, в точке $x \in [0, l]$ числовой прямой \mathbb{R} , ν — некоторая заданная положительная константа, f — определенная на $[t_0, \vartheta] \times [0, l]$ функция. Состояние системы на промежутке $[0, l]$ в момент времени ϑ характеризует функция $\chi_\delta = \chi_\delta(\cdot)$

$$\|\chi_\delta(\cdot) - \chi(\cdot)\|_{L^2(0, l)} \leq \delta, \quad \delta > 0, \quad (1.3)$$

которая служит результатом измерения финального состояния динамической системы

$$u(\vartheta, x) = \chi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.4)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке программы межрегиональных и межведомственных фундаментальных исследований Уральского отделения РАН (проект 12-С-1-1001) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

Требуется определить состояние системы $u(t_0, \cdot)$ на промежутке $[0, l]$ в момент времени t_0 . С содержательной точки зрения ретроспективная задача состоит в определении состояния среды в прошлом по ее состоянию в настоящем по доступному прямому измерению состояния системы χ_δ в момент времени ϑ . С математической точки зрения задача состоит в нахождении решения задачи (1.1)–(1.4).

Поставленная ретроспективная задача (1.1)–(1.4) некорректна, она разрешима не для всякой функции χ . Даже в том случае, когда задача оказалась разрешимой при каком-либо χ , она может быть неустойчивой относительно малых возмущений наблюдаемого финального состояния χ_δ . Исследование задачи существенно отягощается ее нелинейностью. Все это исключает простое аналитическое решение рассматриваемой задачи, и численное моделирование требует привлечения методов регуляризации некорректных задач [1–3].

Для решения задачи предлагается использовать вариационный метод Тихонова, состоящий в минимизации некоторого подходящего функционала невязки на множестве допустимых решений задачи. Известно, что для линейных некорректных задач классическая тихоновская регуляризация, использующая в качестве стабилизаторов нормы пространств Соболева, дает высокое качество восстановления для гладких искомым функций, однако не позволяет качественно восстанавливать недифференцируемые функции, которые могут содержать изломы, близкие пики, разрывы и другие особенности. В данной работе, чтобы охватить случай разрывного решения, привлекаются стабилизаторы с нормой пространства Соболева $W_p^\gamma([0, l])$ с дробными производными [4]. Для разработки численных алгоритмов решения поставленной задачи предлагается использовать итерационные методы решения линейных операторных уравнений [5].

Уравнение (1.1) включает в себя описание двух процессов: конвекции и диффузии. Функции $u(\cdot)$ в содержательных задачах придают смысл скорости движения среды, температуры, давления, концентрации какого-либо вещества в среде [6–9]. Методы решения задачи, описываемые в работе в одномерной постановке, допускают обобщения на случай двух и более пространственных переменных. Работа продолжает исследования [10].

2. Экстремальная задача, ее регуляризация и дискретная аппроксимация в пространствах Соболева $W_p^\gamma([0, l])$

Введем в рассмотрение некоторое подходящее множество U состояний системы в начальный момент времени t_0 . Чтобы показать зависимость решений краевой задачи (1.1), (1.2) от начальных данных $u_0 \in U$, это решение обозначим символом $u = u(\cdot, \cdot; u_0)$. Если о решении задачи нет априорной информации, которая позволит определить множество U , то это множество совпадает со всем пространством $L^2(0, l)$ возможных состояний системы в начальный момент времени. Рассмотрим некоторый подходящий функционал невязки J , определенный на U . Ожидается, что элемент или один из элементов, минимизирующих функционал J на множестве U , доставляет решение рассматриваемой задачи, т. е. $u(\vartheta, \cdot; \operatorname{argmin}\{J(w) : w \in U\}) = \chi$. Исходную ретроспективную задачу можно рассматривать как вариационную задачу, состоящую в нахождении элемента из множества U , минимизирующего функционал J

$$J(w) \rightarrow \min : w \in U.$$

Определим пространство $W_p^\gamma([0, l])$ с нормой

$$\|u\|_{W_p^\gamma([0, l])}^p = \int_0^l |u(x)|^p dx + \int_0^l |D_{+0}^\gamma u(x)|^p dx,$$

где

$$D_{+0}^\gamma u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(\xi)}{(\xi-x)^\gamma} d\xi,$$

левосторонняя производная Римана — Лиувилля порядка γ , $0 < \gamma < 1$ [11, с. 41] и $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Зададим разбиения отрезка времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, \dots, M-1, \quad \tau = (\vartheta - t_0)/M, \quad M \in \mathbb{N}, \quad t_0 = 0, \quad t_M = \vartheta,$$

и пространственной области

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad h = l/N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad N \geq 2, \quad x_0 = 0, \quad x_N = l.$$

где τ и h — диаметры разбиения отрезка времени и пространственной области, M — число шагов во времени. Символами u^n , u_i будем обозначать значение соответствующей сеточной функции u в момент времени t_n и в узле x_i разбиения пространственной области. В сеточном гильбертовом пространстве H введем скалярное произведение и норму соотношениями

$$\langle u, v \rangle = h \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i, \quad \|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}.$$

Для всякого дискретного оператора $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* > 0$ определим сеточное гильбертово пространство $H_{\mathbf{B}}$

$$\langle u, v \rangle_{\mathbf{B}} = \langle \mathbf{B}u, v \rangle, \quad \|u\|_{\mathbf{B}} = \langle u, u \rangle_{\mathbf{B}}^{1/2}.$$

Для дискретизации краевой задачи (4.1), (4.2) выпишем двухслойную неявную схему аппроксимации конвективного (**C**) и диффузионного (**D**) слагаемых

$$(\mathbf{E} + \tau u^n \mathbf{C} + \tau \mathbf{D})u^{n+1} = u^n + \tau f^n, \quad n = 0, \dots, M-1, \quad u^0 = w, \quad (2.1)$$

и двухслойную неявную схему аппроксимации диффузионного и явную нелинейную схему аппроксимации конвективного $\mathbf{C}(u^n)$ членов

$$(\mathbf{E} + \tau \mathbf{D})u^{n+1} = (\mathbf{E} - \tau u^n \mathbf{C}(u^n))u^n + \tau f^n, \quad n = 0, \dots, M-1, \quad u^0 = w, \quad (2.2)$$

где \mathbf{E} — единичный оператор. Для краевой задачи (1.1), (1.2) могут быть использованы различные способы аппроксимации дифференциальных операторов, но такие, чтобы в дискретной задаче сохранялись все физические законы, которые лежат в основе модели. Более подробно эти вопросы рассмотрены в работе [12]. Определение однопараметрического семейства решений, зависящих от параметра w , реализуется в прямом времени. Для корректного разрешения задач (2.1) и (2.2) введем ограничения на шаг по времени

$$\tau < \tau_0. \quad (2.3)$$

В работе [13] подробно исследуются вопросы корректной разрешимости задачи (2.1), (2.2) в зависимости от конкретного способа аппроксимации диффузионного и конвективного слагаемых. Установив значение τ_0 в (2.3), из системы линейных алгебраических уравнений в (2.1), (2.2) можно корректно выразить u^{n+1}

$$u^{n+1} = \mathbf{A}_n u^0, \quad n = 0, \dots, M-1,$$

где

$$\mathbf{A}_n w = \prod_{i=0}^n (\mathbf{E} + \tau u^i \mathbf{C} + \tau \mathbf{D})^{-1} w + \tau \sum_{i=0}^n \prod_{m=0}^i (\mathbf{E} + \tau u^m \mathbf{C} + \tau \mathbf{D})^{-1} f^m, \quad w \in H,$$

для задачи (2.1) и

$$\mathbf{A}_n w = \prod_{i=0}^n (\mathbf{E} + \tau \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{E} - \tau u^i \mathbf{C}(u^i)) w + \tau \sum_{i=0}^n \prod_{m=0}^i (\mathbf{E} + \tau \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{E} - \tau u^m \mathbf{C}(u^m)) f^m, \quad w \in H,$$

для задачи (2.2). Поставим в соответствие задачам (2.1) и (2.2) сопряженные задачи

$$(\mathbf{E} - \tau u^n \mathbf{C} + \tau \mathbf{D})\psi^{n-1} = \psi^n, \quad n = M, \dots, 1, \quad \psi^M = 2(u^M - \chi), \quad (2.4)$$

и

$$(\mathbf{E} + \tau \mathbf{D})\psi^{n-1} = (\mathbf{E} + \tau u^n \mathbf{C}(u^n))\psi^n, \quad n = M, \dots, 1, \quad \psi^M = 2(u^M - \chi), \quad (2.5)$$

соответственно. Учитывая (2.3), системы линейных алгебраических уравнений в (2.4), (2.5) можно корректно решить относительно ψ^{n-1}

$$\psi^{n-1} = 2\mathbf{A}_n^*(u^M - \chi), \quad n = M - 1, \dots, 0,$$

где

$$\mathbf{A}_n^* w = \prod_{i=n}^0 (\mathbf{E} - \tau u^i \mathbf{C} + \tau \mathbf{D})^{-1} w, \quad w \in H,$$

для задачи (2.4) и

$$\mathbf{A}_n^* w = \prod_{i=n}^0 (\mathbf{E} + \tau \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{E} + \tau u^i \mathbf{C}(u^i)) w, \quad w \in H,$$

для задачи (2.5).

Дискретизируем оператор дифференцирования $\mathbf{D}^\gamma: H \rightarrow H$ по формуле Грюнвальда — Летникова аппроксимации левосторонней дробной производной порядка γ , $0 < \gamma < 1$, [11, с. 289]:

$$D_{+0}^\gamma w(x_i) \approx \mathbf{D}^\gamma w_i = h^{-\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(\gamma - j + 1)} w_{i-j}, \quad w \in H. \quad (2.6)$$

Учитывая краевые условия (1.2), элементы матрицы $\mathbf{D}^\gamma = (d_{ij})$ вычисляются по формуле

$$d_{ij} = h^{-\gamma} \begin{cases} b_{i-j} - b_{i+j}, & i \geq j, j > 0, \\ -b_{i+j}, & i < j, \\ b_i, & j = 0, \end{cases} \quad b_k = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\gamma - k + 1)}.$$

Соответственно полагаем

$$\mathbf{D}^1 w_i = h^{-1}(w_{i+1} - w_i), \quad \mathbf{D}^0 = \mathbf{E}.$$

Сравнение формул численного дифференцирования целых и дробных порядков показывает существенное различие между ними. Так, нахождение первой производной функции по методу конечных разностей требует использования только двух значений функции независимо от шага сетки h . Что касается формулы численного дифференцирования дробного порядка Грюнвальда — Летникова, то здесь наблюдается эффект “памяти” предыдущих значений функции. Однако коэффициенты b_j , определяемые соответствующими биномиальными коэффициентами, резко затухают с увеличением аргумента j , что позволяет отказаться от учета большого числа слагаемых в сумме (2.6).

3. Градиентные методы решения ретроспективной задачи

В гильбертовом пространстве H рассмотрим функционал

$$J_H(\varphi) = \|\mathbf{A}_{M-1}\varphi - \chi\|^2 + \alpha\|\varphi\|^2. \quad (3.1)$$

Для минимизации функционала (3.1) воспользуемся градиентными методами (см., например, [14–16]). Заметим, функционал J_H строго выпуклый при $\alpha > 0$ и дифференцируем по Фреше в точке $w \in H$ и $J'_H(w) = \Psi w$. Необходимые условия разрешимости задачи (3.1) имеют вид

$$\Psi w = \mathbf{A}_0^*(\mathbf{A}_{M-1}w - \chi) + \alpha w = 0. \quad (3.2)$$

Выполнены и достаточные условия разрешимости экстремальной задачи (3.1)

$$\langle \Psi w, w \rangle > 0 \quad \forall w \in H, \quad w \neq 0.$$

Для решения операторного уравнения (3.2) воспользуемся неявным двухслойным итерационным методом [17, с. 116]:

$$\mathbf{B} \frac{\varphi^* - \varphi^{(k)}}{\beta^{(k)}} = -\mathbf{A}_0^*(\chi - \mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k)}) + \alpha\varphi^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

$$\varphi^{(k+1)} = \text{Pr}_U(\varphi^*),$$

$$\varphi^{(0)} = 0.$$

Здесь $\text{Pr}_U(\varphi)$ — оператор проекции элемента $\varphi \in H$ на множество U . Параметр $\beta^{(k)}$ в (3.3) будет выбираться методом скорейшего спуска [17, с. 119], решением экстремальной задачи:

$$\beta^{(k)} = \operatorname{argmin} \left\{ \|\varphi^* - u^0\|_{\mathbf{B}}^2 : \beta^{(k)} \in (0, +\infty) \right\}$$

или методом минимальных поправок [17, с. 118]:

$$\beta^{(k)} = \operatorname{argmin} \left\{ \|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k+1)} - \chi\|_{\mathbf{B}}^2 + \alpha\|\varphi^{(k+1)}\|_{\mathbf{B}}^2 : \beta^{(k)} \in (0, +\infty) \right\}.$$

Оператор \mathbf{B} оказывает влияние на скорость сходимости итерационного процесса (3.3). Построение его в виде $\mathbf{B} = \mathbf{E} + (\mathbf{D}^\gamma)^*\mathbf{D}^\gamma$, $0 < \gamma \leq 1$, обеспечит сходимость итерационного процесса в соответствующем дискретном пространстве Соболева $W_2^\gamma([0, l])$. Другими словами, удастся добиться сходимости не только самих аппроксимаций, но и их производных. Отметим, что выбор $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ не гарантирует устойчивости итерационного процесса в случае сильного влияния погрешностей измерений во входных данных, о чем свидетельствуют результаты моделирования соответствующей тестовой задачи в работе [18].

Построение итерационной последовательности фактически сведется к решению серии корректно поставленных дискретных задач (2.1) и (2.4). В результате вычисляется последовательность приближений $\{\varphi^{(k)}\}$ и $\|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k+1)} - \chi\|_{\mathbf{B}} \leq \|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k)} - \chi\|_{\mathbf{B}}$. Расчет следует прекратить, когда $\|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(N)} - \chi\| = \varepsilon\|\chi\|$, значение параметра ε согласуется с точностью расчета задач (2.1), (2.4) и погрешностью измерения начальных данных δ .

В гильбертовом пространстве H рассмотрим функционал

$$J_W(\varphi) = \|\mathbf{A}_{M-1}\varphi - \chi\|^2 + \alpha\|\varphi\|_{W_1^\gamma([0, l])}. \quad (3.4)$$

Для минимизации данного функционала на множестве U воспользуемся методом субградиентов [14, с. 258]. Заметим, что функционал J_W строго выпуклый при $\alpha > 0$, и для всякого достаточно малого $\delta > 0$ его субградиент $\partial J_W(w) = \Psi_w w$ может быть определен:

$$\Psi_w w = \mathbf{A}_0^*(\mathbf{A}_{M-1}w - \chi) + \alpha \left[(\mathbf{D}^\gamma)^* \frac{\mathbf{D}^\gamma w}{|\mathbf{D}^\gamma w| + \delta} + \frac{w}{|w| + \delta} \right].$$

Чтобы решить операторное уравнение $\Psi_W w = 0$, воспользуемся явным двухслойным итерационным методом:

$$\frac{\varphi^* - \varphi^{(k)}}{\beta^{(k)}} = -\mathbf{A}_0^*(\chi - \mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k)}) + \alpha \left[(\mathbf{D}^\gamma)^* \frac{\mathbf{D}^\gamma \varphi^{(k)}}{|\mathbf{D}^\gamma \varphi^{(k)}| + \delta} + \frac{\varphi^{(k)}}{|\varphi^{(k)}| + \delta} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

$$\varphi^{(k+1)} = \text{Pr}_U(\varphi^*),$$

$$\varphi^{(0)} = 0.$$

Выбор параметра итерационного процесса $\beta^{(k)}$ в (3.5) можно осуществить решением экстремальной задачи

$$\beta^{(k)} = \operatorname{argmin} \left\{ \|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k+1)} - \chi\|^2 + \alpha \|\varphi^{(k+1)}\| : \beta^{(k)} \in (0, +\infty) \right\}.$$

Такое определение, однако, не гарантирует справедливость неравенства $\|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^* - \chi\| \leq \|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k)} - \chi\|$. Построение последовательности приближений фактически сведется к решению корректно поставленных дискретных задач (2.1) и (2.4). В результате определяются аппроксимации решения $\{\varphi^{(k)}\}$ и $\|\varphi^{(k)} - \chi\| \rightarrow 0$ в дискретном аналоге пространства $W_1^\gamma([0, l])$ [4]. Расчет следует прекратить, когда $\|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(N)} - \chi\| = \varepsilon \|\chi\|$, значение параметра ε согласуется с точностью расчета задач (2.1), (2.4) и погрешностью измерения начальных данных δ .

4. Численные расчеты модельных примеров

Пример 1. Рассмотрим ретроспективную задачу, состоящую в восстановлении непрерывной кусочно-гладкой функции состояния системы (1.1), (1.2) в начальный момент времени $t_0 = 0$:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 2/3, \\ 6(x/2 - 1/3), & 2/3 \leq x < 1, \\ -6(x/2 - 2/3), & 1 \leq x < 4/3, \\ 0, & 4/3 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Пусть ее динамика описывается краевой задачей

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad (4.1)$$

с граничными условиями

$$u(t, 0) = 0 = u(t, 2), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.2)$$

Для аппроксимации уравнения (4.1) использовалась неявная монотонная схема

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{u_i^n + |u_i^n|}{2h} u_{i-1}^{n+1} + \frac{|u_i^n|}{h} u_i^{n+1} + \frac{u_i^n - |u_i^n|}{2h} u_{i+1}^{n+1} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2(1 + 0.5|u_i^n| h \nu^{-2})}, \quad (4.3)$$

$$u_i^0 = u_0(x_i), \quad u_0^n = 0 = u_N^n.$$

Вопросы устойчивости и сходимости этого конечно-разностного метода рассматривались, например, в [19]. Определим функцию $\chi_\delta(x) = \chi(x) + \delta\chi'(x)$, $0 \leq x \leq 2$, где $\chi(\cdot) = u(1, \cdot; u_0)$ — состояние системы в момент времени $t = 1$, вычисленное по формуле (4.3). Функция $\chi' : [0, 2] \rightarrow [-1, 1]$ — равномерно распределенные случайные величины. Сопряженная краевая задача аппроксимировалась на той же самой сетке подобным образом. В расчетах приняты $\tau = 0.001$, $h = 2/300$, $\delta = \varepsilon = 10^{-4}$, $\alpha = 10^{-6}$.

При решении ретроспективной задачи вариационным методом (3.1) выбор управляющего параметра $\beta^{(k)}$ в градиентном итерационном процессе (3.3) подчинялся условию наискорейшего спуска [14, с. 236]:

$$\beta^{(k)} = \frac{\langle J'_H(\varphi^{(k)}), \mathbf{B}^{-1} J'_H(\varphi^{(k)}) \rangle}{\langle \mathbf{A}_{M-1} \mathbf{B}^{-1} J'_H(\varphi^{(k)}), \mathbf{B}^{-1} J'_H(\varphi^{(k)}) \rangle}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{E} + (\mathbf{D}^\gamma)^* \mathbf{D}^\gamma.$$

На рис. 1(a) изображены приближения $J_2^\gamma = \|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k)} - \chi\|$ при $\gamma = \{0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$. На рис. 1(b) демонстрируются функции $u_0(\cdot)$ и $\varphi^{(3500)}$ при выборе $\gamma = \{0.25, 0.75\}$.

При решении ретроспективной задачи методом (3.4) параметр $\beta^{(k)}$ в субградиентном итерационном процессе (3.5) определялся

$$\beta^{(k)} = \frac{\langle \Psi_w(\varphi^{(k)}), \Psi_w(\varphi^{(k)}) \rangle}{\langle \mathbf{A}_{M-1} \Psi_w(\varphi^{(k)}), \Psi_w(\varphi^{(k)}) \rangle}.$$

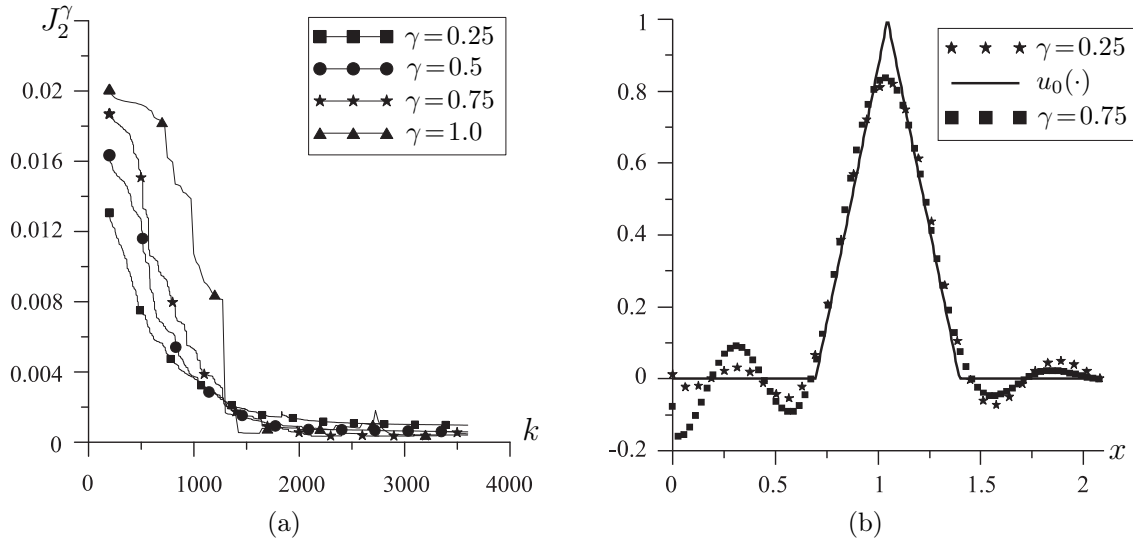


Рис. 1.

На рис. 2(a) демонстрируются функции $u_0(\cdot)$ (сплошная линия) и $\varphi^{(3500)}$ (пунктирная линия) при значениях $\gamma = 0.5$ и $\alpha = 10^{-5}$. На рис. 2(b) изображены значения функционала $J_1^\alpha = \|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k)} - \chi\|$ при значении $\gamma = 0.25$ для значений параметра регуляризации $\alpha = \{10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$. На рис. 2(c) представлены значения функционала $J_1^\gamma = \|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k)} - \chi\|$ для $\gamma = \{0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$ и параметра регуляризации $\alpha = 10^{-5}$. На рис. 2(d) показаны значения функционала $G_1^\gamma = \|u^0 - \varphi^{(3500)}\|$ для $\gamma = \{0.25, 0.5, 0.75, 1.0\}$ и параметра регуляризации $\alpha = 10^{-5}$.

Пример 2. Рассмотрим ретроспективную обратную задачу, состоящую в восстановлении разрывной характеристики среды, задаваемой в начальный момент времени $t_0 = 0$ функцией $u_0 = u_0(x)$, $0 \leq x \leq 2$, $u_0(x) = 1$ при $2/3 \leq x \leq 4/3$ и $u_0(x) = 0$ в остальных точках отрезка $0 \leq x \leq 2$.

С учетом того факта, что в окрестности момента времени t_0 градиент искомой функции неограничен, для аппроксимации конвективного члена в уравнении (4.1) используется TVD (Total Variation Diminishing) схема [20]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^- y_i &= \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, & \mathbf{C}^+ y_i &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \\
 \mathbf{D} y_i &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, & \mathbf{D}^+ y_i &= \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}, & \mathbf{D}^- y_i &= \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2}, \\
 \mathbf{C}_{TVD} y_i &= \frac{1}{2} (y_i + |y_i|) \chi^+ y_i \mathbf{C}^- y_i + \frac{1}{2} (y_i - |y_i|) \chi^- y_i \mathbf{C}^+ y_i, \\
 \chi^+ y &= 1 + \frac{h}{2} \frac{[\theta \mathbf{D} y + (1 - \theta) \mathbf{D}^- y] \mathbf{C}^- y}{|\mathbf{C}^- y|^2 + \omega^2 h^2 [\theta \mathbf{D} y + (1 - \theta) \mathbf{D}^- y]^2}, \\
 \chi^- y &= 1 - \frac{h}{2} \frac{[\theta \mathbf{D} y + (1 - \theta) \mathbf{D}^+ y] \mathbf{C}^+ y}{|\mathbf{C}^+ y|^2 + \omega^2 h^2 [\theta \mathbf{D} y + (1 - \theta) \mathbf{D}^+ y]^2}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\omega > 0$, и этот коэффициент выступает в качестве параметра регуляризации. В предельном случае $\omega = 0$ мы приходим к нелинейной аппроксимации конвективного члена второго или третьего (при $\theta = 2/3$) порядка. Монотонность схемы обеспечивается выбором коэффициента $\omega > 1/4$. Отметим, что нет простых соображений в пользу того или иного однозначного выбора параметра θ . На тестовых расчетах для одномерной задачи показано, что параметр влияет на перемещение профиля с большей или меньшей скоростью по сравнению с точным решением тестовой задачи. Поэтому его связывают с дисперсионными характеристиками разностной схемы. Тестовые эксперименты показали, что в данном случае оптимальным является значение $\theta = 1/2$.

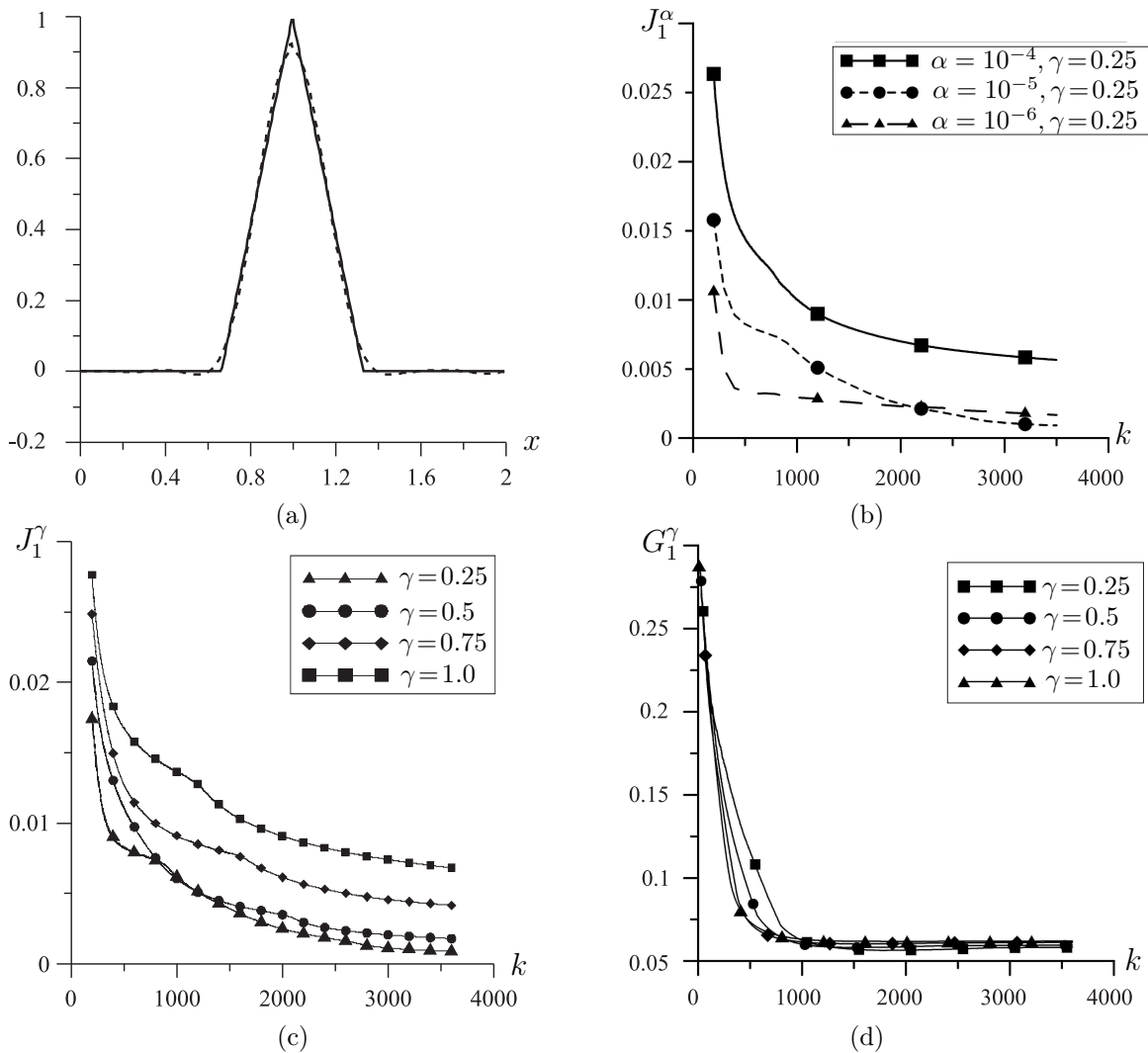


Рис. 2.

Функция $\chi_\delta(x)$, $0 \leq x \leq 2$, и сопряженная краевая задача вычисляются аналогично, как в примере 1. Тестовый пример был рассчитан при значениях параметров $\tau = 0.001$, $h = 2/300$, $\omega = 1/2$, $\theta = 1/2$, $\varepsilon = \delta = 10^{-4}$.

На рис. 3(a) изображены функции u_0 (сплошная линия) и $\varphi^{(6000)}$ (пунктирная линия); на рис. 3(b) показаны приближения $J^\gamma = \|\mathbf{A}_{M-1}\varphi^{(k)} - \chi\|$ для оператора \mathbf{D}^γ при $\gamma = 0.25$ и параметра регуляризации $\alpha = \{10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$.

З а м е ч а н и е 1. В демонстрационных примерах дискретизация в (4.1) осуществляется методом конечных разностей. В рамках данного исследования проводились расчеты тестовых примеров для случаев, когда дискретизация строилась методом конечных объемов в пакете инженерных вычислений OpenFOAM [21; 22]. Используемый для реализации пакет OpenFOAM располагает широким набором эффективных процедур дискретизации дифференциальных операторов в пространственных областях с различной геометрией и решателей систем алгебраических уравнений для них. Эксплуатация его ориентирована на современные параллельные вычислительные системы. Основное преимущество заключается в том, что скорость внесения изменений и дополнений в программную реализацию на порядок выше, чем это удастся выполнить, создавая соответствующие процедуры самостоятельно. Испытания показали, что результаты работы программных кодов дают качественное совпадение искомых решений задачи с учетом того, что коды OpenFOAM менее точно решают системы линейных алгебраических уравнений на тех же самых размерностях дискретных задач.

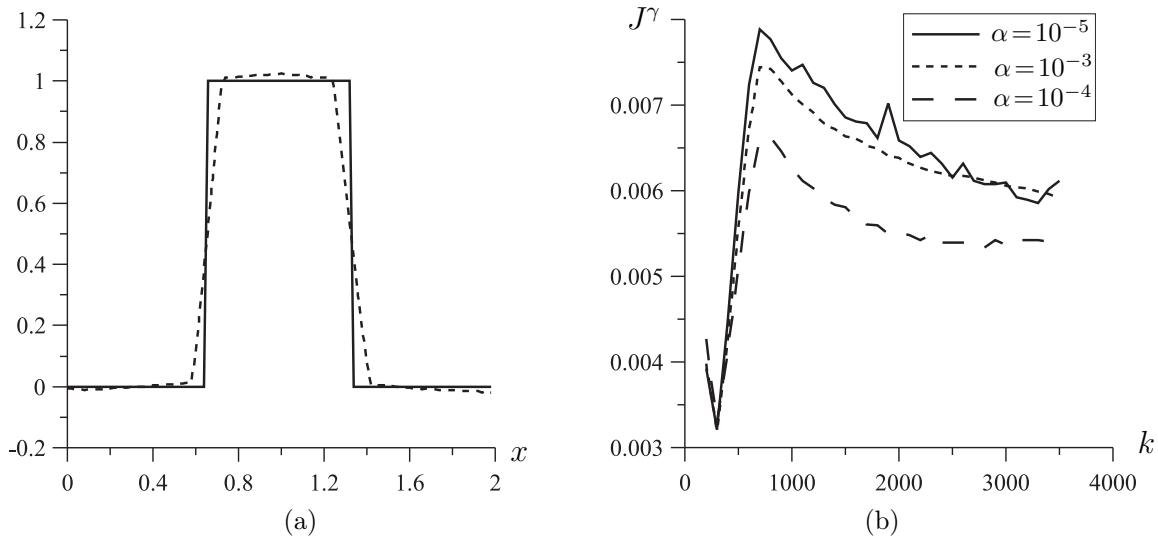


Рис. 3.

З а м е ч а н и е 2. Параметр итерационного метода в (3.3) также вычислялся методом минимальных поправок:

$$\beta^{(k)} = \frac{\langle \mathbf{A}_{M-1} \mathbf{B}^{-1} J'_H(\varphi^{(k)}), \mathbf{B}^{-1} J'_H(\varphi^{(k)}) \rangle}{\langle \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{M-1} \mathbf{B}^{-1} J'_H(\varphi^{(k)}), \mathbf{A}_{M-1} \mathbf{B}^{-1} J'_H(\varphi^{(k)}) \rangle}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{E} + (\mathbf{D}^\gamma)^* \mathbf{D}^\gamma.$$

Расчеты показали, что существенных изменений скорости сходимости итераций и качественных различий полученных аппроксимаций решения ретроспективной задачи нет.

5. Заключение

В работе построен алгоритм решения ретроспективной задачи о восстановлении априори неизвестного начального состояния динамической системы по ее известному финальному состоянию. Обоснована его устойчивость к погрешностям измерения входных данных и погрешностям численного метода. Для решения задачи использовался вариационный метод Тихонова, состоящий в минимизации некоторого подходящего функционала невязки на множестве допустимых решений задачи. Чтобы охватить случай разрывного решения, были использованы стабилизаторы, содержащие норму пространства Соболева $W_p^\gamma([0, l])$, $0 < \gamma < 1$. Описаны способы конечномерной аппроксимации рассмотренной задачи.

Расчеты тестовых примеров показали, что сходимость аппроксимаций в $W_2^\gamma([0, l])$ обеспечивает устойчивость метода, но имеет крайне низкую скорость. Стабилизаторы, содержащие норму $W_1^\gamma([0, l])$, также обеспечивают устойчивость итерационного процесса, имеют более высокую скорость сходимости аппроксимаций и позволяют более качественно восстанавливать кусочно-гладкие и разрывные решения задачи.

Описанные в работе методы решения задачи допускают естественное обобщение на случай двух и более пространственных переменных. Использование библиотек прикладных программ, решающих данную задачу в прямом времени, значительно сокращает время реализации описанных алгоритмов на ЭВМ и позволяет легко адаптировать их для решения конкретных прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

3. **Лаврентьев М.М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1962. 92 с.
4. **Васин В.В.** Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 64–77.
5. **Бек Дж., Блэкуэлл Б., Сент-Клэр Ч. (мл.)** Некоторые обратные задачи теплопроводности. М.: Мир, 1989. 312 с.
6. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. 204 с.
7. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
8. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
9. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
10. **Korotkii A.I., Tsepelev I.A.** Solution of a Retrospective Inverse Problem for One Nonlinear Evolutionary Model // Proc. Steklov Inst. Math. 2003. Suppl. 2. P. 80–94.
11. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
12. **Wang Y., Hutter K.** Comparisons of numerical methods with respect to convectively dominated problem // Int. J. Numer. Meth. Fluid. 2001. Vol. 37. P. 721–745.
13. **Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990. 384 с.
14. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
15. **Сea Ж.** Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.
16. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
17. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы М.: Наука, 1989. 432 с.
18. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Васильев В.И.** Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности // Мат. моделирование. 1997. Т. 9, № 5. С.119–127.
19. **Самарский А.А.** О регуляризации разностных схем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 1. С. 62–93.
20. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Нелинейные монотонные схемы для уравнения переноса // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 1. С. 21–23.
21. OpenFOAM User guide. URL: <http://foam.sourceforge.net/doc/Guides-a4/UserGuide.pdf> (дата обращения: 10.08.2011).
22. OpenFOAM Programmer's Guide. URL: <http://foam.sourceforge.net/doc/Guides-a4/ProgrammersGuide.pdf> (дата обращения: 10.08.2011).

Цепелев Игорь Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: tsepelev@imm.uran.ru

Поступила 01.09.2011

УДК 519.624

ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ¹

Г. И. Шишкин

Исследуется обусловленность разностной схемы метода декомпозиции решения для задачи Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения конвекции-диффузии. В этой схеме используется декомпозиция сеточного решения на регулярную и сингулярную компоненты, являющиеся решениями сеточных подзадач — классических разностных аппроксимаций, рассматриваемых на равномерных сетках. Схема сходится в равномерной норме ε -равномерно со скоростью $\mathcal{O}(N^{-1} \ln N)$; ε — возмущающий параметр при старшей производной, $\varepsilon \in (0, 1]$, $N + 1$ — число узлов используемых сеток. Показано, что схема метода декомпозиции — в отличие от стандартной схемы на равномерной сетке — ε -равномерно хорошо обусловлена и устойчива к возмущению данных сеточной задачи; число обусловленности схемы — величина порядка $\mathcal{O}(\delta^{-2} \ln \delta^{-1})$, где δ — точность сеточного решения.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная краевая задача, уравнение конвекции-диффузии, схема метода декомпозиции решения, равномерные сетки, ε -равномерная сходимость, равномерная норма, ε -равномерная устойчивость схемы, ε -равномерная хорошая обусловленность разностной схемы.

G. I. Shishkin. Conditioning of a difference scheme of the solution decomposition method for a singularly perturbed convection–diffusion equation.

Conditioning of a difference scheme of the solution decomposition method is studied for a Dirichlet problem for a singularly perturbed ordinary differential convection–diffusion equation. In this scheme, we apply a decomposition of the discrete solution into the regular and singular components, which are solutions of discrete subproblems, i.e., classical difference approximations considered on uniform grids. The scheme converges ε -uniformly in the maximum norm at the rate $\mathcal{O}(N^{-1} \ln N)$; ε is a perturbation parameter multiplying the high-order derivative in the equation, $\varepsilon \in (0, 1]$, and $N + 1$ is the number of nodes in the grids used. It is shown that the solution decomposition scheme, unlike the standard scheme on uniform grid, is ε -uniformly well conditioned and stable to perturbations in the data of the discrete problem; the conditioning number of the scheme is a value of order $\mathcal{O}(\delta^{-2} \ln \delta^{-1})$, where δ is the accuracy of the discrete solution.

Keywords: singularly perturbed boundary value problem, convection–diffusion equation, difference scheme of the solution decomposition method, uniform grids, ε -uniform convergence, maximum norm, ε -uniform stability of the scheme, ε -uniform well conditioning of the scheme.

1. Введение

Методы, использующие специальные сетки, сгущающиеся в пограничных слоях, в частности кусочно-равномерные сетки, получили достаточно широкое распространение ввиду их простоты и удобства в использовании (см., например, [1–6] и библиографию там же). К недостаткам этих численных методов относится необходимость решать сеточные уравнения на сетках, шаг которых резко изменяется в окрестности пограничного слоя.

Отметим, что методы подгонки (см., например, [7], а также [3–6] и библиографию там же) имеют преимущество в простоте используемых равномерных сеток. В этих методах коэффициенты сеточных уравнений зависят от явного вида главного члена сингулярной компоненты решения. По этой причине методы подгонки имеют ограниченную область применения при построении ε -равномерно сходящихся численных методов.

Таким образом, в случае сингулярно возмущенных задач возникает интерес к разработке подходов к построению специальных ε -равномерно сходящихся численных методов на равномерных сетках, коэффициенты сеточных уравнений которых не зависят от явного вида сингулярных компонент решений, а также к исследованию этих подходов. Схемы на равномерных

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00726).

сетках используются, например, при аппроксимации задач для уравнений переноса с малой искусственной вязкостью [8; 9].

В работах [10–12] для задач реакции-диффузии разработан новый подход на основе метода декомпозиции сеточного решения, в котором используются классические сеточные аппроксимации задач для регулярной и сингулярной компонент решения, рассматриваемые на *равномерных сетках*. Построенные схемы метода декомпозиции сеточного решения сходятся ε -равномерно в равномерной норме.

В настоящей работе для модельной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения конвекции-диффузии на основе метода декомпозиции сеточного решения строится специальная схема, сходящаяся ε -равномерно; устанавливается ε -равномерная хорошая обусловленность и устойчивость таких схем к возмущению данных сеточной задачи. Показано, что классическая разностная схема на *равномерной сетке* для задачи конвекции-диффузии, при условии ее сходимости, не является ε -равномерно хорошо обусловленной, как и не является ε -равномерно устойчивой к возмущению данных (см. утверждения теорем 6, 7 и замечание 5 в разд. 5). Возможность исследования обусловленности схем метода декомпозиции решения для задач конвекции-диффузии ранее не рассматривалась. Обусловленность схем на кусочно-равномерных сетках изучалась в [13; 14] (см. также [6, гл. 12] и библиографию там же).

Постановка краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии и цель исследования приводятся в разд. 2. Стандартная схема на равномерной сетке приводится в разд. 3. В разд. 4 строится разностная схема метода декомпозиции решения и устанавливается ее ε -равномерная сходимость. Обусловленность классической разностной схемы на равномерной сетке рассматривается в разд. 5. Обусловленность строящейся схемы и ее устойчивость к возмущению данных изучаются в разд. 6.

2. Постановка задачи. Цель работы

На множестве \bar{D}

$$\bar{D} = D \cup \Gamma, \quad D = (0, d) \quad (2.1)$$

рассмотрим задачу Дирихле для обыкновенного сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии

$$L u(x) \equiv \left\{ \varepsilon a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx} - c(x) \right\} u(x) = f(x), \quad x \in D, \quad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.2)$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 и Γ_2 — левая и правая части границы Γ ; функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ предполагаются достаточно гладкими на \bar{D} , причем¹

$$a_0 \leq a(x) \leq a^0, \quad b_0 \leq b(x) \leq b^0, \quad c_0 \leq c(x) \leq c^0, \quad x \in \bar{D}; \quad a_0, b_0, c_0 > 0;$$

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in \bar{D}; \quad |\varphi(x)| \leq M, \quad x \in \Gamma;$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$. При малых значениях параметра ε в окрестности множества Γ_1 появляется регулярный пограничный слой.

Наша цель — для сингулярно возмущенной краевой задачи (2.2), (2.1) на основе техники метода декомпозиции решения на регулярную и сингулярную компоненты построить ε -равномерно сходящуюся разностную схему, использующую сеточные аппроксимации компонент решения на соответствующих равномерных сетках. Для схемы метода декомпозиции решения требуется исследовать ε -равномерную обусловленность схемы и ее устойчивость к возмущениям данных разностной схемы.

¹ Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра ε . В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

3. Классическая разностная схема на равномерной сетке

Приведем разностную схему, строящуюся на основе классической аппроксимации задачи (2.2), (2.1). На множестве \bar{D} введем равномерную сетку

$$\bar{D}_h = \bar{D}_h^u, \quad (3.1)$$

где \bar{D}_h^u — равномерная сетка на отрезке $[0, d]$ с шагом $h = d/N$, где $N + 1$ — число узлов $x = x^i$ сетки \bar{D}_h^u , $i = 0, 1, \dots, N$. Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем разностной схемой [9]:

$$\Lambda z(x) \equiv \{\varepsilon a(x) \delta_{\bar{x}\hat{x}} + b(x) \delta_x - c(x)\} z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \quad z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \quad (3.2)$$

Здесь $D_h = D \cap \bar{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \bar{D}_h$, $\delta_{\bar{x}\hat{x}} z(x)$ — центральная разностная производная второго порядка на равномерной сетке, $\delta_{\bar{x}\hat{x}} z(x) = h^{-1} [\delta_x z(x) - \delta_{\bar{x}} z(x)]$, $x = x^i \in D_h$, $i = 0, 1, \dots, N$; $\delta_x z(x)$ и $\delta_{\bar{x}} z(x)$ — разностные (вперед и назад) производные первого порядка.

Схема (3.2), (3.1) монотонна [9] ε -равномерно. С использованием принципа максимума для решения схемы получаем оценку

$$|u(x) - z(x)| \leq M (\varepsilon + N^{-1})^{-1} N^{-1}, \quad x \in \bar{D}_h. \quad (3.3)$$

Схема (3.2), (3.1) сходится при неухудшаемом условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon). \quad (3.4)$$

Оценка (3.3) выполняется в случае априорной оценки

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right| \leq M \varepsilon^{-k}, \quad x \in \bar{D}, \quad k \leq K, \quad K = 3. \quad (3.5)$$

Теорема 1. Пусть для решения $u(x)$ задачи (2.2), (2.1) выполняется оценка (3.5). Тогда разностная схема (3.2), (3.1) сходится при условии (3.4); для решения разностной схемы справедлива оценка (3.3).

З а м е ч а н и е 1. В соответствии с условием сходимости (3.4) для сходимости классической схемы (3.2), (3.1) требуется использовать сетки с числом узлов, удовлетворяющим условию $N \gg \varepsilon^{-1}$, неограниченно растущим при $\varepsilon \rightarrow 0$.

4. Схема метода декомпозиции решения

С использованием техники декомпозиции решения дифференциальной задачи (2.2), (2.1) построим ε -равномерно сходящуюся разностную схему метода декомпозиции сеточного решения, в котором сеточные регулярная и сингулярная компоненты решения вычисляются на равномерных сетках. Построение схемы метода декомпозиции для задачи конвекции-диффузии (2.2), (2.1) и обоснование ее сходимости проводятся подобно построениям из [10] для задачи реакции-диффузии.

4.1. Приведем декомпозицию решения задачи (2.2), (2.1). Решение задачи представим в виде суммы

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (4.1a)$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — регулярная и сингулярная компоненты решения. Функцию $U(x)$ представим в виде

$$U(x) = U_0(x) + v_U(x), \quad x \in \bar{D}. \quad (4.1b)$$

Здесь $U_0(x)$ — главный член “разложения” регулярной компоненты, $v_U(x)$ — остаточный член. Функции $U_0(x)$ и $U(x)$ — решения задач

$$L_{(4.2)}U_0(x) = f(x), \quad x \in \overline{D} \setminus \Gamma_2, \quad U_0(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_2, \quad (4.2a)$$

$$L_{(2.2)}U(x) = f(x), \quad x \in D, \quad U(x) = \begin{cases} U_0(x), & x \in \Gamma_1, \\ \varphi(x), & x \in \Gamma_2; \end{cases} \quad (4.2b)$$

здесь $L_{(4.2)}$ есть оператор $L_{(2.2)}$ при $\varepsilon = 0$: $L_{(4.2)} \equiv b(x) \frac{d}{dx} - c(x)$, $x \in \overline{D} \setminus \Gamma_2$.

Функция $V(x)$, $x \in \overline{D}$ — решение задачи

$$L_{(2.2)}V(x) = 0, \quad x \in D, \quad V(x) = \varphi(x) - U(x), \quad x \in \Gamma. \quad (4.3)$$

Для компонент из представления (4.1a) получаются оценки

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} U(x) \right| \leq M [1 + \varepsilon^{2-k} + \varepsilon^{1-k} \exp(-m \varepsilon^{-1} x)], \quad (4.4a)$$

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} V(x) \right| \leq M \varepsilon^{-k} \exp(-m \varepsilon^{-1} x), \quad x \in \overline{D}, \quad k \leq K, \quad (4.4b)$$

где m — произвольная постоянная из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = \min_{\overline{D}}[a^{-1}(x)b(x)]$; $K = 3$. Для компонент из (4.1b) имеем оценки

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} U_0(x) \right| \leq M, \quad k \leq K + 1, \quad (4.5)$$

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} v_U(x) \right| \leq M [\varepsilon + \varepsilon^{2-k} + \varepsilon^{1-k} \exp(-m \varepsilon^{-1} x)], \quad k \leq K, \quad x \in \overline{D}, \quad K = 3.$$

Теорема 2. Пусть для данных краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется условие $a, b, c \in C^1(\overline{D})$, $f \in C^1(\overline{D})$, $l_1 = 3$. Тогда для компонент из представлений (4.1a) и (4.1b) справедливы оценки (4.4) и (4.5) соответственно.

4.2. Аппроксимируя задачи (4.2), (4.3), построим схему для краевой задачи (2.2), (2.1).

При не слишком малых значениях параметра ε , а именно при условии

$$\varepsilon \geq \varepsilon_0(N), \quad \varepsilon_0(N) = m d \ln^{-1} N, \quad (4.6)$$

где $m = m_{(4.4)}$, $N = N_{(3.1)}$, для решения задачи (2.2), (2.1) используем стандартную разностную схему (3.2) на равномерной сетке (3.1).

При достаточно малых значениях параметра ε , а именно при условии

$$\varepsilon < \varepsilon_0(N) \quad (4.7)$$

задачи (4.2) для компонент $U_0(x)$ и $U(x)$ из представления (4.1b) аппроксимируем схемами на равномерной сетке (3.1), а задачу (4.3) для сингулярной компоненты $V(x)$ из (4.1a) — схемой на равномерной сетке, строящейся на подобласти \overline{D}^σ из \overline{D} , примыкающей к границе Γ_1 , где

$$\overline{D}^\sigma = D^\sigma \cup \Gamma^\sigma, \quad D^\sigma = (0, d^\sigma). \quad (4.8)$$

Здесь $d^\sigma = \sigma$, $\sigma = \sigma(\varepsilon, N) = \min [d, m^{-1} \varepsilon \ln N]$, $m = m_{(4.6)}$, $N = N_{(4.6)}$, $\varepsilon = \varepsilon_{(4.7)}$.

4.2.1. Рассмотрим схему при условии (4.7).

Дифференциальную задачу (4.2а), (2.1) аппроксимируем разностной схемой на сетке (3.1)

$$\Lambda_{(4.9)} z_{U_0}(x) = f(x), \quad x \in \overline{D}_h \setminus \Gamma_{2h}, \quad z_{U_0}(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_{2h}; \quad (4.9)$$

здесь $\Lambda_{(4.9)} \equiv b(x) \delta_x - c(x)$, $x \in \overline{D}_h \setminus \Gamma_{2h}$. Задачу (4.2б), (2.1) аппроксимируем разностной схемой

$$\Lambda_{(3.2)} z_U(x) = f(x), \quad x \in D_h, \quad z_U(x) = \begin{cases} z_{U_0}(x), & x \in \Gamma_{1h}, \\ \varphi(x), & x \in \Gamma_{2h}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Через $\overline{z}_U(x)$, $x \in \overline{D}$ обозначим интерполянт — линейный интерполянт, строящийся по значениям $z_U(x)$ в узлах сетки \overline{D}_h на элементарных разбиениях множества \overline{D} , порождаемых сеткой \overline{D}_h . Функцию $z_U(x)$, $x \in \overline{D}_h$, а также ее интерполянт $\overline{z}_U(x)$, $x \in \overline{D}$ назовем решениями (сеточным и континуальным) разностной схемы $\{(4.9), (4.10), (3.1); (4.7)\}$, аппроксимирующей дифференциальную задачу (4.2), (2.1) при условии (4.7).

Построим аппроксимацию задачи (4.3), (2.1). На множестве $\overline{D}_{(4.8)}^\sigma$ введем равномерную сетку

$$\overline{D}_h^\sigma = \overline{D}_h^{\sigma u}, \quad (4.11)$$

где $\overline{D}_h^{\sigma u}$ — сетка на $\overline{D}_{(4.8)}^\sigma$ с шагом $h^\sigma = d^\sigma N^{-1}$, $N + 1$ — число узлов сетки $\overline{D}_h^{\sigma u}$, $N = N_{(4.6)}$; $\overline{D}_h^\sigma = D_h^\sigma \cup \Gamma_h^\sigma$. На сетке \overline{D}_h^σ решаем сеточную задачу

$$\Lambda_{(3.2)} z_V(x) = 0, \quad x \in D_h^\sigma, \quad z_V(x) = \begin{cases} \varphi_V(x), & x \in \Gamma_{1h}^\sigma \\ 0 & x \in \Gamma_h^\sigma \setminus \Gamma_{1h}^\sigma \end{cases}, \quad x \in \Gamma_h^\sigma, \quad (4.12)$$

где $\varphi_V(x) = \varphi(x) - z_U(x)$, $x \in \Gamma_{1h}^\sigma$. По функции $z_V(x)$, $x \in \overline{D}_h^\sigma$ построим интерполянт $\overline{z}_V(x)$, $x \in \overline{D}^\sigma$. Функции $z_V(x)$ и $\overline{z}_V(x)$ вне множества \overline{D}^σ считаем равными нулю. Функции $z_V(x)$, $x \in \overline{D}_h^\sigma$ и $\overline{z}_V(x)$, $x \in \overline{D}^\sigma$ — аппроксимации (сеточная и континуальная) решения задачи (4.3), (2.1) при условии (4.7).

Функцию

$$\overline{z}_u(x) = \overline{z}_U(x) + \overline{z}_V(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \text{при условии (4.7)} \quad (4.13а)$$

назовем решением разностной схемы $\{(4.9), (4.10), (3.1); (4.12), (4.11)\}; (4.7)\}$, аппроксимирующей краевую задачу (2.2), (2.1) при условии (4.7).

4.2.2. В случае условия (4.6) используем разностную схему (3.2), (3.1); интерполянт

$$\overline{z}_u(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \text{при условии (4.6)}, \quad (4.13б)$$

строющийся по решению разностной схемы $\{(3.2), (3.1)\}$, назовем решением разностной схемы $\{(3.2), (3.1); (4.6)\}$, аппроксимирующей краевую задачу (2.2), (2.1) при условии (4.6).

Таким образом построенная функция $\overline{z}_u_{(4.13а,б)}(x)$, $x \in \overline{D}$ аппроксимирует решение краевой задачи (2.2), (2.1). Эту функцию $\overline{z}_u_{(4.13а,б)}(x)$, $x \in \overline{D}$, как и сеточные компоненты $z_{U_0}(x)$, $z_U(x)$, $x \in \overline{D}_h$ и $z_V(x)$, $x \in \overline{D}_h^\sigma$, назовем соответственно континуальным решением и сеточными компонентами решения разностной схемы $\{(3.2), (3.1)\}; \{(4.9), (4.10), (3.1); (4.12), (4.11)\}$ — *схемы метода декомпозиции сеточного решения* или, короче, *схемы метода декомпозиции решения*.

Для схемы метода декомпозиции решения справедлив принцип максимума.

4.3. Оценим $u(x) - \overline{z}_u(x)$, $x \in \overline{D}$, предполагая справедливость оценок (4.4), (4.5).

В случае условия (4.7) получаем оценку $|U_0(x) - z_{U_0}(x)| \leq M N^{-1}$, $x \in \overline{D}_h$. С учетом этой оценки устанавливается оценка $|U(x) - z_U(x)| \leq M N^{-1}$, $x \in \overline{D}_h$. И наконец, используя последнюю оценку, а также априорную оценку (4.4б), находим оценку $V(x) - z_V(x)$. Из этих оценок получаем оценку $u(x) - \overline{z}_u_{(4.13а)}(x)$ при условии (4.7).

Оценивая $u(x) - \overline{z}_u_{(4.13б)}(x)$ при условии (4.6), используем оценку (3.3), где $\varepsilon \geq \varepsilon_0(N)$.

В результате для решения разностной схемы метода декомпозиции решения выводим оценку

$$|u(x) - \bar{z}_u(x)| \leq M N^{-1} \min[\varepsilon^{-1}, \ln N], \quad x \in \bar{D}, \quad (4.14)$$

а также ε -равномерную оценку

$$|u(x) - \bar{z}_u(x)| \leq M N^{-1} \ln N, \quad x \in \bar{D}. \quad (4.15)$$

Теорема 3. Пусть для компонент решения краевой задачи (2.2), (2.1) из представления (4.1) выполняются оценки теоремы 2. Тогда решение схемы метода декомпозиции решения сходится ε -равномерно со скоростью $O(N^{-1} \ln N)$. Для решения разностной схемы справедливы оценки (4.14), (4.15).

5. Обусловленность разностной схемы (3.2), (3.1)

Обсудим обусловленность стандартной схемы и приведем оценки для возмущений сеточного решения, вызываемые возмущениями данных сеточной задачи.

5.1. Рассмотрим обусловленность матрицы разностной схемы для задачи (2.2), (2.1). Пусть $N + 1$ компонентам функции $z(x)$ в узлах $x \in \bar{D}_h$ отвечает $(N + 1)$ -мерный вектор Y . Упорядочив элементы $z(x)$, $x \in \bar{D}_h$, в схеме (3.2), (3.1), приходим к системе

$$AY = F. \quad (5.1)$$

Здесь A — трехдиагональная $(N + 1) \times (N + 1)$ -матрица (a_{ij}) ; Y и F — вектора из пространства \mathbb{R}^{N+1} с равномерной вектор-нормой $\|\cdot\|$. Компоненты матрицы A и векторов Y и F определяются соотношениями

$$a_{i,i-1} = -\varepsilon h^{-2} a(x_i), \quad a_{ii} = 2\varepsilon h^{-2} a(x_i) + h^{-1} b(x_i) + c(x_i), \quad a_{i,i+1} = -\varepsilon h^{-2} a(x_i) - h^{-1} b(x_i),$$

$2 \leq i \leq N$; $Y_i = z(x_i)$, $1 \leq i \leq N + 1$; $F_1 = \varphi(x_1)$, $F_i = -f(x_i)$, $2 \leq i \leq N$, $F_{N+1} = \varphi(x_{N+1})$; здесь $x_{i(5.1)} = x_{(3.1)}^{i+1}$, $x^i \in \bar{D}_h$, h — шаг равномерной сетки \bar{D}_h . Матрица A — M -матрица с нестрогим диагональным преобладанием (при $c(x) \geq 0$) и строгим преобладанием по первой и последней строке.

Для нормы матрицы $A_{(5.1)}$ и ее числа обусловленности $\kappa(A)$, где

$$\kappa(A) = \kappa_M(A) = \|A\| \|A^{-1}\|,$$

на сетке $\bar{D}_{h(3.1)}$ получается наилучшая оценка (см. [6, гл. 12] и библиографию там же):

$$\|A(\bar{D}_{h(3.1)})\|, \quad \kappa_M(A; \bar{D}_{h(3.1)}^u) \leq M N (1 + \varepsilon N). \quad (5.2)$$

Эти переменные ε , N назовем *примитивными*.

З а м е ч а н и е 2. Число обусловленности матрицы A на равномерной сетке $\bar{D}_{h(3.1)}$, записанное в примитивных переменных ε , N , оказывается ε -равномерно ограниченным, причем неограниченно растущим степенным образом с ростом N . Однако разностная схема (3.2), (3.1) сходится с оценкой (3.3) и лишь при условии (3.4), т. е. при $N^{-1} \ll \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1]$.

Таким образом, оценка (5.2) числа обусловленности матрицы A в переменных ε , N не информативна, поскольку не дает связи между числом обусловленности матрицы и сходимостью схемы (3.2), (3.1), в частности, с точностью решения разностной схемы.

Оценим число обусловленности матрицы A для схемы (3.2), (3.1), при условии ее сходимости, в зависимости от величины δ — точности решения разностной схемы (3.2), (3.1), и величины параметра ε . Переменные δ , ε назовем *информативными переменными*.

Путь решения разностной схемы (3.2), (3.1) сходится с оценкой (3.3)

$$|u(x) - z(x)| \leq M \delta, \quad x \in \bar{D}_h, \quad (5.3)$$

где $\delta = \delta(\varepsilon, N) = (\varepsilon + N^{-1})^{-1} N^{-1}$. Тогда для матрицы A и ее числа обусловленности получается неулучшаемая (по вхождению величин ε, δ) оценка

$$\|A(\bar{D}_{h(3.1)})\|, \kappa_M(A; \bar{D}_{h(3.1)}) \leq M \varepsilon^{-1} \delta^{-2}. \quad (5.4)$$

Таким образом, для схемы на равномерной сетке, сходящейся с оценкой (5.3), число обусловленности матрицы A в переменных ε, δ не является ε -равномерно ограниченным.

О п р е д е л е н и е 1. В том случае, когда число обусловленности $\kappa_M(A; \bar{D}_h)$ матрицы A , записанное в информативных переменных ε, δ , ε -равномерно ограничено при $\delta = o(1)$, будем говорить, что матрица A в информативных переменных ε -равномерно хорошо обусловлена или, короче, матрица A ε -равномерно хорошо обусловлена. В противном случае будем говорить, что матрица A не является ε -равномерно хорошо обусловленной.

В силу оценки (5.4) матрица A не является ε -равномерно хорошо обусловленной.

Теорема 4. Пусть для решения разностной схемы (3.2), (3.1) выполняется оценка (3.3). Тогда для числа обусловленности $\kappa_M(A)$ матрицы A , соответствующего схеме (3.2), (3.1), справедливы оценки (5.2) и (5.4) в примитивных и информативных переменных соответственно; матрица A не является ε -равномерно хорошо обусловленной.

З а м е ч а н и е 3. Подход к анализу ε -равномерной устойчивости схемы на равномерных сетках к возмущению ее данных на основе числа обусловленности матрицы не позволяет выявить ε -равномерную устойчивость к возмущениям схемы метода декомпозиции решения. Таким образом, зависимость возмущений решения стандартной схемы (3.2), (3.1) от возмущения данных требует дополнительного исследования, в частности, на основе анализа обусловленности схемы (3.2), (3.1) (см., например, [15, гл. 6, § 13] и [16, гл. 6, § 11] в случае регулярных краевых задач).

5.2. Обсудим влияние возмущения данных разностной схемы (3.2), (3.1) на возмущение ее решения. Рассмотрим возмущенную задачу, соответствующую задаче (5.1)

$$A^* Y^* = F^*. \quad (5.5)$$

Здесь A^* — возмущенная матрица (a_{ij}^*) , Y^* и F^* — возмущенные векторы,

$$A^* = A + \delta A, \quad Y^* = Y + \delta Y, \quad F^* = F + \delta F.$$

Возмущения коэффициента $a(x_i)$, входящего в компоненты a_{ij} , $j = i-1, i, i+1$, $i = 2, \dots, N$ матрицы A , вообще говоря, различаются; обозначим эти возмущения в компонентах a_{ij} через δa_{ij}^j . Подобным образом возмущения коэффициента $b(x_i)$ в компонентах b_{ij} , $j = i, i+1$ и возмущения коэффициента $c(x_i)$ в компоненте c_{ii} обозначим через δb_i^j и δc_i^i соответственно. Считаем, что компоненты, равные нулю и единице, а также величины ε и h , не возмущаются. Таким образом, в покомпонентной записи матрицы δA и векторов δF и δY имеем

$$\delta a_{i,i-1} = -\varepsilon h^{-2} \delta a_i^{i-1}, \quad \delta a_{ii} = 2\varepsilon h^{-2} \delta a_i^i + h^{-1} \delta b_i^i + \delta c_i^i, \quad (5.6)$$

$$\delta a_{i,i+1} = -\varepsilon h^{-2} \delta a_i^{i+1} - h^{-1} \delta b_i^{i+1}, \quad 2 \leq i \leq N;$$

$$\delta F_1 = \delta \varphi(x_1), \quad \delta F_i = -\delta f(x_i), \quad 2 \leq i \leq N, \quad \delta F_{N+1} = \delta \varphi(x_{N+1}); \quad \delta Y_i = \delta z(x_i), \quad 1 \leq i \leq N+1.$$

Оценим величину δY — возмущение решения задачи (5.1). Пусть в возмущенной задаче (5.5) возмущение матрицы δA достаточно мало; пусть выполняется условие

$$\|A^{-1}\| \|\delta A\| \leq m; \quad (5.7a)$$

эта оценка эквивалентна оценке $\|\delta A\| \leq m$. Тогда для возмущения δY находим оценку

$$\|\delta Y\| \leq M (\|\delta F\| + \|\delta A\|). \quad (5.76)$$

Принимая во внимание (5.6), (5.7), для возмущения $z^*(x) - z(x)$ получаем оценку

$$\|z^* - z\| \leq M [\varepsilon N^2 \max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| + N \max_{i,j} |\delta b_i^j| + \max_i \widehat{\psi}_i^i], \quad (5.8)$$

$$\max_i \widehat{\psi}_i^i = \max [\max_{i;i=1, N+1} |\delta a_i^i|, \max_i |\delta c_i^i|, \max_i |\delta f_i|, \max_i |\delta \varphi_i|];$$

оценка неуллучшаема по ε, N .

Принимая во внимание оценки (3.3) и (5.8), для $z^*(x)$ получаем неуллучшаемую оценку

$$|u(x) - z^*(x)| \leq M [(\varepsilon + N^{-1})^{-1} N^{-1} + \varepsilon N^2 \max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| + N \max_{i,j} |\delta b_i^j| + \max_i \widehat{\psi}_i^i], \quad x \in \overline{D}_h. \quad (5.9)$$

Возмущенной задаче (5.5) соответствует следующая возмущенная разностная схема:

$$\Lambda^* z^*(x) \equiv \{\varepsilon a^*(x) \delta_{\overline{x}\overline{x}} + b^*(x) \delta_x - c^*(x)\}$$

$$z^*(x) = f^*(x), \quad x \in D_h, \quad z^*(x) = \varphi^*(x), \quad x \in \Gamma_h. \quad (5.10)$$

Здесь $x = x^i$, $x^i \in \overline{D}_{h(3.1)}$, и в соотношениях ниже $x_i = x_{(3.1)}^{i-1}$, $x^i \in \overline{D}_{h(3.1)}$:

$$a^*(x_i) = a(x_i) + \delta a_i^{i-1}, \quad b^*(x_i) = b(x_i) + \delta b_i^{i+1} + \varepsilon h^{-1} (-\delta a_i^{i-1} + \delta a_i^{i+1}),$$

$$c^*(x_i) = c(x_i) + \delta c_i^i - \varepsilon h^{-2} (\delta a_i^{i-1} - 2\delta a_i^i + \delta a_i^{i+1}) + h^{-1} (\delta b_i^i - \delta b_i^{i+1}),$$

$$f^*(x_i) = f(x_i) + \delta f_i, \quad \varphi^*(x_i) = \varphi(x_i) + \delta \varphi_i.$$

Из оценки (5.9) вытекает, что с ростом N решение возмущенной схемы (5.10), (3.1) сходится к решению схемы (3.2), (3.1) и, следовательно, к решению задачи (2.2), (2.1) при условии

$$\varepsilon^{-1} N^{-1} = o(1), \quad \max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| = o(\varepsilon^{-1} N^{-2}), \quad \max_{i,j} |\delta b_i^j| = o(N^{-1}), \quad (5.11)$$

$$\max_{i;i=1, N+1} |\delta a_i^i|, \quad \max_i |\delta c_i^i|, \quad \max_i |\delta f_i|, \quad \max_i |\delta \varphi_i| = o(1); \quad N \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \in (0, 1].$$

Теорема 5. *Условие (5.11) в примитивных переменных ε, N , накладываемое на возмущения схемы (3.2), (3.1), является необходимым и достаточным для сходимости возмущенной схемы (5.10), (3.1) при $N \rightarrow \infty$. Для решения $z^*(x)$ справедлива оценка (5.9).*

5.3. Для стандартной разностной схемы рассмотрим ее обусловленность в информативных переменных ε, δ . Для возмущения решения $z^*(x) - z(x)$ с учетом оценки (5.8) имеем

$$\|z^* - z\| \leq M \left[\varepsilon^{-1} \delta^{-2} \max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| + \varepsilon^{-1} \delta^{-1} \max_{i,j} |\delta b_i^j| + \max_i \widehat{\psi}_i^i \right], \quad (5.12)$$

где $\max_i \widehat{\psi}_i^i = \max_i \widehat{\psi}_i^i(5.8)$, $\delta = \delta(5.3)(\varepsilon, N)$. Оценка неуллучшаема по вхождению величин ε, δ .

О п р е д е л е н и е 2. Неуллучшаемую оценку (5.12) в информативных переменных ε, δ запишем в виде оценки *относительной ошибки* $\|\delta z_u\|_{\overline{D}_h} / \|z_u\|_{\overline{D}_h}^{-1}$ через *относительные возмущения* данных сеточной задачи в матричной форме (5.5):

$$\|\delta z_u\|_{\overline{D}_h} / \|z_u\|_{\overline{D}_h} \leq \varkappa_P(A; \overline{D}_h) (\|\delta F\| / \|F\| + \|\delta A\| / \|A\|).$$

Величину $\varkappa_P(A; \overline{D}_h)$ назовем *числом обусловленности сеточной задачи* — разностной схемы (3.2), (3.1) (см. обсуждения обусловленности матрицы и задачи в [15; 16] для регулярных краевых задач).

С учетом оценки (5.12) при условии

$$m\varepsilon \leq d \leq M \quad (5.13a)$$

получается оценка $\varkappa_P(A; \overline{D}_h)$ в информативных переменных

$$\varkappa_P(A; \overline{D}_h) \leq M d \varepsilon^{-1} \delta^{-2}. \quad (5.13б)$$

Таким образом, разностная схема (3.2), (3.1) не является ε -равномерно хорошо обусловленной.

Теорема 6. Пусть для решения разностной схемы (3.2), (3.1) выполняется оценка (3.3). Тогда для числа обусловленности $\varkappa_P(A)$ разностной схемы, сходящейся со скоростью $\mathcal{O}(\delta)$, справедлива оценка (5.13).

5.4. Обсудим устойчивость разностной схемы (3.2), (3.1) к возмущению ее данных в зависимости от информативных переменных ε , δ .

О п р е д е л е н и е 3. Пусть в случае схемы (3.2), (3.1) для $\|z^* - z\|$ выполняется оценка

$$\|z^* - z\| \leq M \lambda \left(\varepsilon^{-\alpha_1} \delta^{-\beta_1} \max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j|, \varepsilon^{-\alpha_2} \delta^{-\beta_2} \max_{i,j} |\delta b_i^j|, \max_i \widehat{\psi}_i^i \right), \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geq 0, \quad (5.14)$$

где $\lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow 0$ при $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \rightarrow 0$; $\max_i \widehat{\psi}_i^i = \max_i \widehat{\psi}_i^i(5.8)$. Будем говорить, что схема (3.2), (3.1) ε -равномерно устойчива к возмущению данных, если в оценке (5.14) $\alpha_1, \alpha_2 = 0$; при $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ будем говорить, что схема (3.2), (3.1) не является ε -равномерно устойчивой к возмущению данных.

В силу оценки (5.12) схема (3.2), (3.1) не является ε -равномерно устойчивой к возмущению данных, в частности, к возмущениям при вычислениях.

Из неулучшаемой оценки (5.9) следует оценка

$$\max_{\overline{D}_h} |u(x) - z^*(x)| \leq M \left[\delta + \varepsilon^{-1} \delta^{-2} \max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| + \varepsilon^{-1} \delta^{-1} \max_{i,j} |\delta b_i^j| + \max_i \widehat{\psi}_i^i \right]. \quad (5.15)$$

Из оценки (5.15) вытекает, что условие, накладываемое на возмущения

$$\max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| = o(\varepsilon \delta^2), \quad \max_{i,j} |\delta b_i^j| = o(\varepsilon \delta), \quad (5.16)$$

$$\max_{i;i=1, N+1} |\delta a_i^i|, \max_i |\delta c_i^i|, \max_i |\delta f_i|, \max_i |\delta \varphi_i| = o(1),$$

где $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$, является необходимым и достаточным для сходимости возмущенной разностной схемы (5.10), (3.1) при $\delta \rightarrow 0$.

Теорема 7. Условие (5.16) в информативных переменных ε , δ , накладываемое на возмущения разностной схемы (3.2), (3.1), является необходимым и достаточным для сходимости возмущенной разностной схемы (5.10), (3.1) при $\delta \rightarrow 0$. Для решения возмущенной разностной схемы справедлива оценка (5.15).

З а м е ч а н и е 4. В случае условия (4.6) в силу оценки (5.13) схема (3.2), (3.1) ε -равномерно устойчива, причем для числа обусловленности $\varkappa_P^u(A; \overline{D}_h)$ схемы $\{(3.2), (3.1); (4.6)\}$ выполняется оценка

$$\varkappa_P^u(A; \overline{D}_h) = \varkappa_P^u(A; \overline{D}_h, \varepsilon \geq \varepsilon_{0(4.6)}(N)) \leq M \delta^{-2} \ln \delta^{-1}. \quad (5.17)$$

З а м е ч а н и е 5. Отсутствие ε -равномерной устойчивости к возмущениям схемы (3.2), (3.1) весьма ограничивает ее применимость, так как при решении задачи на компьютере с фиксированной длиной машинного слова точность вычисляемого решения падает с уменьшением параметра ε до полной потери точности при достаточно малых значениях ε (при $t = \mathcal{O}(\ln \varepsilon^{-1})$, где t – число разрядов машинного слова).

Для того чтобы получить сеточное решение с требуемой точностью при $\varepsilon \rightarrow 0$, необходимо проводить вычисления на компьютере с неограниченно растущим числом разрядов машинного слова.

6. Обусловленность разностной схемы метода декомпозиции решения

Исследуем обусловленность разностной схемы $\{(3.2), (3.1)\}; \{(4.9), (4.10), (3.1); (4.12), (4.11)\}$ метода декомпозиции решения. Так как обусловленность разностной схемы $\{(3.2), (3.1); (4.6)\}$ уже известна (см. оценку (5.17)), нам достаточно рассмотреть обусловленность схемы $\{(4.9), (4.10), (3.1); (4.12), (4.11)\}; (4.7)\}$; для этого нам потребуется рассмотреть схемы $\{(4.9), (4.10), (3.1); (4.7)\}$ и $\{(4.12), (4.11); (4.7)\}$ (см. пп. 6.1. и 6.2. соответственно). Построения в этом разделе подобны приводимым в разд. 5.

6.1. Рассмотрим обусловленность разностной схемы $\{(4.9), (4.10), (3.1); (4.7)\}$. Заметим, что разностная схема $\{(4.9), (3.1); (4.7)\}$ аппроксимирует дифференциальную задачу (4.2а), (2.1), являющуюся регулярной, а разностная схема $\{(4.10), (3.1); (4.7)\}$ отличается от разностной схемы $\{(3.2), (3.1); (4.7)\}$ (т.е. классической схемы (3.2), (3.1) при условии (4.7)) лишь граничным условием на границе Γ_{1h} .

6.1.1. Разностные схемы (4.9), (3.1) и (4.10), (3.1) запишем в матричном представлении

$$B_{U_0} Y_{U_0} = F_{U_0}, \quad A_U Y_U = F_U. \quad (6.1)$$

Здесь B_{U_0} — двухдиагональная $(N+1) \times (N+1)$ -матрица (b_{ij}) и A_U — трехдиагональная $(N+1) \times (N+1)$ -матрица (a_{ij}) , Y_{U_0} , F_{U_0} и Y_U , F_U — $(N+1)$ -мерные векторы. Компоненты матрицы A_U и векторов Y_U , F_U , а также матрицы B_{U_0} и векторов Y_{U_0} , F_{U_0} выписываются через данные разностных схем (4.10), (3.1) и (4.9), (3.1), и их решения аналогичны матрице A и векторам Y , F из системы (5.1).

Задачам (6.1) сопоставим возмущенные задачи

$$B_{U_0}^* Y_{U_0}^* = F_{U_0}^*, \quad A_U^* Y_U^* = F_U^*. \quad (6.2)$$

Здесь $B_{U_0}^*$, A_U^* — возмущенные матрицы (b_{ij}^*) , (a_{ij}^*) и $Y_{U_0}^*$, $F_{U_0}^*$, Y_U^* , F_U^* — возмущенные векторы,

$$B_{U_0}^* = B_{U_0} + \delta B_{U_0}, \quad Y_{U_0}^* = Y_{U_0} + \delta Y_{U_0}, \quad F_{U_0}^* = F_{U_0} + \delta F_{U_0};$$

$$A_U^* = A_U + \delta A_U, \quad Y_U^* = Y_U + \delta Y_U, \quad F_U^* = F_U + \delta F_U.$$

В покомпонентной записи матрицы δB_{U_0} и векторов δF_{U_0} и δY_{U_0} имеем

$$\delta b_{ii} = h^{-1} \delta b_i^i + \delta c_i^i, \quad \delta b_{i,i+1} = -h^{-1} \delta b_i^{i+1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \delta b_{N+1,N+1} = 0; \quad (6.3)$$

$$\delta F_i = -\delta f(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad \delta F_{N+1} = \delta \varphi(x_{N+1}); \quad \delta Y_i = \delta z_{U_0}(x_i), \quad i = 1, \dots, N+1.$$

6.1.2. Оценим величину δY_{U_0} — возмущение решения задачи (6.1), вызываемое возмущениями матрицы B_{U_0} и вектора F_{U_0} , а также ошибку $U_0(x) - z_{U_0}^*(x)$, где $U_0(x)$ — решение задачи (4.2а), (2.1), а $z_{U_0}^*(x)$ есть возмущенная функция $z_{U_0}(x)$ — решение сеточной задачи (4.9), (3.1).

Пусть в возмущенной задаче (6.2) возмущение матрицы δB_{U_0} достаточно мало:

$$\| B_{U_0}^{-1} \| \| \delta B_{U_0} \| \leq m, \quad (6.4а)$$

где $m < 1$; эта оценка эквивалентна оценке $\| \delta B_{U_0} \| \leq m$. С учетом ограниченности $\| Y_{U_0} \|$ находим оценку

$$\| \delta Y_{U_0} \| \leq M (\| \delta F_{U_0} \| + \| \delta B_{U_0} \|). \quad (6.4б)$$

Принимая во внимание соотношения (6.3), (6.4), для возмущения сеточного решения $z_{U_0}^*(x) - z_{U_0}(x)$, где $z_{U_0}^*(x^i) - z_{U_0}(x^i) = \delta Y_{U_0 i+1}$, $x^i \in \overline{D}_h$, получаем оценку

$$\| z_{U_0}^* - z_{U_0} \| \leq M [N \max_{i,j} |\delta b_i^j| + \max_i \widehat{\psi}_i^i], \quad \max_i \widehat{\psi}_i^i = \max [\max_i |\delta c_i^i|, \max_i |\delta f_i|, \max_i |\delta \varphi_i|], \quad (6.5)$$

где δf_i — возмущения $\delta f(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ и $\delta \varphi_i$ — возмущения $\delta \varphi(x_i)$, $i = N + 1$. Оценка неулучшаема по вхождению величины N .

Принимая во внимание оценку

$$|U_0(x) - z_{U_0}(x)| \leq M N^{-1}, \quad x \in \overline{D}_h,$$

а также оценку (6.5), для функции $z_{U_0}^*(x)$ — решения возмущенной разностной схемы, соответствующей матричной записи (6.2) для вектора $Y_{U_0}^*$, получаем оценку

$$|U_0(x) - z_{U_0}^*(x)| \leq M [N^{-1} + N \max_{i,j} |\delta b_i^j| + \max_i \widehat{\psi}_i^i], \quad x \in \overline{D}_h, \quad (6.6a)$$

неулучшаемую по вхождению величины N ; $\widehat{\psi}_i^i = \widehat{\psi}_i^i(6.5)$. В информативных переменных имеем оценку

$$|U_0(x) - z_{U_0}^*(x)| \leq M [\delta + \delta^{-1} \max_{i,j} |\delta b_i^j| + \max_i \widehat{\psi}_i^i], \quad x \in \overline{D}_h; \quad \delta = \delta(N) = N^{-1}. \quad (6.6b)$$

Возмущенной задаче (6.2) для вектора $Y_{U_0}^*$ соответствует следующая возмущенная разностная схема:

$$\Lambda^* z^*(x) \equiv \{b^*(x) \delta_x - c^*(x)\} z^*(x) = f^*(x), \quad x \in \overline{D}_h \setminus \Gamma_{2h}, \quad z^*(x) = \varphi^*(x), \quad x \in \Gamma_{2h}. \quad (6.7)$$

Здесь $z^*(x) = z_{U_0}^*(x)$, $b^*(x_i) = b(x_i) + \delta b_i^{i+1}$, $c^*(x_i) = c(x_i) + \delta c_i^i + h^{-1}(\delta b_i^i - \delta b_i^{i+1})$,

$x^{i-1} \in \overline{D}_h \setminus \Gamma_{2h}$; $f^*(x_i) = f(x_i) + \delta f_i$, $x^{i-1} \in \overline{D}_h \setminus \Gamma_{2h}$; $\varphi^*(x_i) = \varphi(x_i) + \delta \varphi_i$, $x^{i-1} \in \Gamma_{2h}$.

Из оценки (6.6) вытекает, что при возмущениях данных, стремящихся к нулю с ростом N , решение возмущенной разностной схемы (6.7), (3.1) сходится к решению невозмущенной разностной схемы (4.9), (3.1) и, следовательно, к главному члену $U_0(x)$ регулярной компоненты решения краевой задачи (2.2), (2.1) при неулучшаемом условии

$$\max_{i,j} |\delta b_i^j| = o(N^{-1}), \quad \max_i |\delta c_i^i|, \quad \max_i |\delta f_i|, \quad \max_{i,i=N+1} |\delta \varphi_i| = o(1); \quad N \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \in (0, 1]; \quad (6.8a)$$

это же условие выписывается в информативных переменных

$$\max_{i,j} |\delta b_i^j| = o(\delta), \quad \max_i |\delta c_i^i|, \quad \max_i |\delta f_i|, \quad \max_{i,i=N+1} |\delta \varphi_i| = o(1); \quad \delta = o(1), \quad \varepsilon \in (0, 1]. \quad (6.8b)$$

С учетом оценки (6.6) для числа обусловленности $\varkappa_P^{U_0}(B; \overline{D}_h)$ схемы (4.9), (3.1) при условии (4.7) (т. е. схемы $\{(4.9), (3.1); (4.7)\}$) имеет место оценка в информативных переменных

$$\varkappa_P^{U_0}(B; \overline{D}_h(3.1), \varepsilon < \varepsilon_{0(4.6)}(N)) \leq M \delta^{-1}. \quad (6.9)$$

Теорема 8. Пусть выполняется условие (4.7) и пусть для компонент решения краевой задачи (2.2), (2.1) из представления (4.1) имеют место оценки теоремы 2. Условие (6.8), накладываемое на возмущения разностной схемы (3.2), (3.1), является необходимым и достаточным для сходимости решения $z^*(x) = z_{U_0}^*(x)$ возмущенной разностной схемы (6.7), (3.1) к функции $U_0(x)$ при $N \rightarrow \infty$. Для решения возмущенной разностной схемы (6.7), (3.1) справедлива оценка (6.6); для числа обусловленности $\varkappa_P^{U_0}(B; \overline{D}_h)$ разностной схемы $\{(4.9), (3.1); (4.7)\}$ выполняется оценка (6.9).

6.1.3. Пусть выполняется условие (4.7). Оценим ошибку $U(x) - z_U^*(x)$, где $U(x)$ — решение задачи (4.2б), (2.1), $z_U^*(x)$ — решение сеточной задачи $\{(5.10), (3.1); (4.7)\}$ при условии $z^*(x) = z_{U_0}^*(x)$, $x \in \Gamma_{1h}$, $z^*(x) = \varphi^*(x)$, $x \in \Gamma_{2h}$.

С учетом оценки (6.6) получаем оценку в переменных ε, N

$$|U(x) - z_U^*(x)| \leq M \left[N^{-1} + \varepsilon N^2 \max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| + N \max_{i,j} |\delta b_i^j| + \max_i \widehat{\psi}_{U_i}^i \right], \quad x \in \overline{D}_h, \quad (6.10a)$$

$$\max_i \widehat{\psi}_{U_i}^i = \max \left[\max_{i;i=1, N+1} |\delta a_i^i|, \max_i |\delta c_i^i|, \max_i |\delta f_i|, \max_{i,i=1, N+1} |\delta \varphi_i| \right],$$

неулучшаемую по вхождению величин ε, N . В переменных ε, δ имеем неулучшаемую оценку

$$|U(x) - z_U^*(x)| \leq M \left[\delta_U + \varepsilon \delta_U^{-2} \max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| + \delta_U^{-1} \max_{i,j} |\delta b_i^j| + \max_i \widehat{\psi}_{U_i}^i \right], \quad (6.10б)$$

$$x \in \overline{D}_h; \quad \delta_U = N^{-1}.$$

С учетом оценки (6.10) для числа обусловленности $\varkappa_P^U(\{A, B\}; \overline{D}_h)$ разностной схемы $\{(4.9), (4.10), (3.1); (4.7)\}$ справедлива оценка в информативных переменных

$$\varkappa_P^U(\{A, B\}; \overline{D}_h(3.1), \varepsilon < \varepsilon_{0(4.6)}(N)) \leq M \delta^{-2}. \quad (6.11)$$

Таким образом, разностная схема $\{(4.9), (4.10), (3.1); (4.7)\}$ (т.е. задача (6.1) в матричной записи) ε -равномерно хорошо обусловлена.

Теорема 9. Пусть выполняются условия теоремы 8. Тогда для решения разностной схемы $\{(4.9), (4.10), (3.1); (4.7)\}$ и ее числа обусловленности $\varkappa_P^U(\{A, B\}; \overline{D}_h)$ выполняются оценки (6.10) и (6.11) соответственно.

6.2. Рассмотрим обусловленность разностной схемы $\{(3.2), (3.1)\}; \{(4.9), (4.10), (3.1); (4.12), (4.11)\}$ — схемы метода декомпозиции решения.

6.2.1. Приведем оценку числа обусловленности разностной схемы $\{(4.12), (4.11); (4.7)\}$.

Оценка ошибки $V(x) - z_V^*(x)$ при условии (4.7), где $V(x)$ — решение задачи (4.3), (2.1), $z_V^*(x)$ — возмущенная функция $z_V(x)$, являющаяся решением схемы $\{(4.12), (4.11); (4.7)\}$, проводится подобно оценке ошибки $u(x) - z_u^*(x)$ при условии (4.6). С учетом оценки (6.10) для функции $z_V^*(x)$ — решения возмущенной разностной схемы, получаем оценку

$$|V(x) - z_V^*(x)| \leq M \left[(\varepsilon + d^\sigma N^{-1})^{-1} d^\sigma N^{-1} + (d^\sigma)^{-1} \varepsilon N^2 \max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| + N \max_{i,j} |\delta b_i^j| + d^\sigma \max_i |\delta c_i^i| + \max_{i,i=1, N+1} \delta \varphi_i, \quad x \in \overline{D}_h^\sigma \right], \quad (6.12)$$

неулучшаемую по вхождению величин d^σ, ε, N . В переменных $d^\sigma, \varepsilon, \delta$ имеем оценку

$$|V(x) - z_V^*(x)| \leq M \left[\delta + d^\sigma \varepsilon^{-1} \delta^{-2} \max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| + d^\sigma \varepsilon^{-1} \delta^{-1} \max_{i,j} |\delta b_i^j| + d^\sigma \max_i |\delta c_i^i| + \delta \max_{i,i=1, N+1} \varphi_i \right], \quad x \in \overline{D}_h^\sigma, \quad (6.13)$$

неулучшаемую по $d^\sigma, \varepsilon, \delta$. Здесь $\delta = \delta(\varepsilon, N, d^\sigma) = (\varepsilon + d^\sigma N^{-1})^{-1} d^\sigma N^{-1}$, $d^\sigma = d_{(4.8)}^\sigma$, $\varepsilon \in (0, 1]$.

Для числа обусловленности $\varkappa_P^V(A; \overline{D}_h^\sigma)$ сеточной задачи $\{(4.12), (4.11); (4.7)\}$, в силу (6.13), находим ε -равномерную оценку (неулучшаемую по δ)

$$\varkappa_P^V(A; \overline{D}_h^\sigma, \varepsilon < \varepsilon_{0(4.6)}(N)) \leq M \delta^{-2} \ln \delta^{-1}. \quad (6.14)$$

6.2.2. Для числа обусловленности $\varkappa_P^u(\{A, B\})$ разностной схемы $\{(3.2), (3.1)\}; \{(4.9), (4.10), (3.1); (4.12), (4.11)\}$ — схемы метода декомпозиции решения, с учетом оценок (5.17),

(6.11), (6.14) для чисел обусловленности соответствующих подзадач, получается неулучшаемая оценка

$$\kappa_P^u(\{A, B\}) \leq M \delta^{-2} \ln \delta^{-1}; \quad (6.15)$$

схема метода декомпозиции решения хорошо обусловлена ε -равномерно.

Таким образом, схема метода декомпозиции решения $\{\{(3.2), (3.1)\}; \{(4.9), (4.10), (3.1); (4.12), (4.11)\}\}$ ε -равномерно устойчива к возмущению данных.

Из оценки (5.12) при условии (4.6), а также оценок (6.10), (6.13) вытекает, что условие, накладываемое на возмущения

$$\max_{i,j;i \neq 1, N+1} |\delta a_i^j| = \mathcal{O}(\delta^3 \ln^{-1} \delta^{-1}), \quad \max_{i,j} |\delta b_i^j| = \mathcal{O}(\delta^2 \ln^{-1} \delta^{-1}), \quad (6.16)$$

$$\max_{i;i=1, N+1} |\delta a_i^i|, \quad \max_i |\delta c_i^i|, \quad \max_i |\delta f_i|, \quad \max_i |\delta \varphi_i| = \mathcal{O}(\delta); \quad \delta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \in (0, 1],$$

является необходимым и достаточным для ε -равномерной сходимости *разностной схемы* $\{\{(3.2), (3.1)\}; \{(4.9), (4.10), (3.1); (4.12), (4.11)\}\}$ с возмущенными данными с оценкой для возмущенного решения

$$|u(x) - \bar{z}_u^*(x)| \leq M \delta, \quad x \in \bar{D}, \quad (6.17)$$

где $\delta = N^{-1} \ln N$, $\bar{z}_u^*(x)$ — интерполянт, строящийся по компонентам $z_{u(5.9)}^*(x)$, $z_{U_0(6.5)}^*(x)$, $z_{U(6.10)}^*(x)$, $z_{V(6.12)}^*(x)$ подобно интерполянту $\bar{z}_{u(4.13a,b)}^*(x)$.

Теорема 10. Пусть для компонент решения краевой задачи (2.2), (2.1) из представления (4.1) выполняются оценки теоремы 2. Тогда схема метода декомпозиции решения $\{\{(3.2), (3.1)\}; \{(4.9), (4.10), (3.1); (4.12), (4.11)\}\}$ ε -равномерно хорошо обусловлена и ε -равномерно устойчива к возмущению данных; для числа обусловленности $\kappa_P^u(\{A, B\})$ схемы метода декомпозиции выполняется оценка (6.15). Условие (6.16), накладываемое на возмущения данных схемы декомпозиции, является необходимым и достаточным для ε -равномерной сходимости возмущенного решения с оценкой (6.17).

7. Выводы

7.1. Для задачи Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения конвекции-диффузии построена разностная схема *метода декомпозиции сеточного решения*, сходящаяся ε -равномерно со скоростью $\mathcal{O}(N^{-1} \ln N)$ (см. оценку (4.15) из теоремы 3 в разд. 4). В этой схеме регулярная и сингулярная компоненты являются решениями классических аппроксимаций подзадач на *равномерных сетках*.

7.2. Разностная *схема метода декомпозиции* решения ε -равномерно хорошо обусловлена (число обусловленности схемы — величина порядка $\mathcal{O}(\delta^{-2} \ln \delta^{-1})$, где δ — ошибка сеточного решения, $\delta = \mathcal{O}(N^{-1} \ln N)$); *схема ε -равномерно устойчива* к возмущению данных (см. утверждение теоремы 10 в разд. 6).

7.3. Стандартная разностная схема на равномерной сетке не является ε -равномерно хорошо обусловленной (число обусловленности схемы — величина порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1} \delta^{-2})$, $\delta = \mathcal{O}((\varepsilon + N^{-1})N^{-1})$); схема не является ε -равномерно устойчивой к возмущению данных (см. оценки (5.13) и (5.15), а также теоремы 6, 7 в разд. 5). При использовании этой схемы для решения краевой задачи с требуемой точностью при $\varepsilon \rightarrow 0$ необходимо неограниченно увеличивать *число узлов сетки* и, кроме того, *число разрядов машинного слова* (см. замечания 1 и 4 в разд. 3 и 5 соответственно).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.
2. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. 233 с.
3. **Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Singapore: World Scientific, 1996. 166 p.
4. Robust computational techniques for boundary layers / P.A. Farrell, A.F. Hegarty, J.J.H. Miller, E. O’Riordan., G.I. Shishkin. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000. 254 p.
5. **Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.** Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion-reaction and flow problems. Springer series in computational mathematics. Vol. 24. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 604 p.
6. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** Difference methods for singular perturbation problems. Chapman & Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics. Vol. 140. Boca Raton: CRC Press, 2009. 408 p.
7. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 2. С. 237–248.
8. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
9. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
10. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Улучшенная разностная схема метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного (обыкновенного дифференциального) уравнения реакции-диффузии // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 255–271.
11. **Shishkin G.I.** Difference scheme of the solution decomposition method for a singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equation // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2010. Vol. 25, no. 3. P. 261–278.
12. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Схема Ричардсона метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 12. С. 2113–2133.
13. **Шишкин Г.И.** Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных уравнений с конвективными членами при возмущении данных // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 5. С. 692–707.
14. **Шишкин Г.И.** Обусленность разностных схем для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 5. С. 813–830.
15. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. М.: Наука, 1973. 632 с.
16. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. 632 с.

Шишкин Григорий Иванович

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: Grigorii@shishkin.ural.ru

Поступила 19.05.2011

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ-ПОГЛОЩЕНИЯ С БЫСТРО И СИЛЬНО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОГЛОЩЕНИЯ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ¹

А. Е. Эльберт

Рассматривается уравнение Гельмгольца с быстро осциллирующим коэффициентом поглощения и постоянным коэффициентом отражения. Оно моделирует поглощение света в средах, содержащих периодическое множество тонких сосудов крови. Предполагается, что поглощение происходит только внутри этих сосудов. Коэффициент отражения предполагается постоянным, в то время как коэффициент поглощения предполагается малым везде, кроме множества периодических тонких полос, моделирующих сосуды крови, где коэффициент поглощения равен большому параметру ω . В задаче имеются два других параметра: ε — отношение расстояния между осями сосудов к характерному макроскопическому размеру, и δ — отношение толщины тонких сосудов к периоду. Оба параметра ε и δ предполагаются малыми. Основным результатом — построение асимптотического решения.

Ключевые слова: асимптотика, уравнение Гельмгольца, осреднение.

A. E. El'bert. Asymptotic analysis of the diffusion-absorption equation with fast and strongly oscillating absorption coefficient in the two-dimensional case.

The Helmholtz equation with fast oscillating absorption coefficient and constant reflection coefficient is considered. The equation models light absorption in a medium containing a periodic set of fine blood vessels. It is assumed that the absorption takes place only inside the vessels. It is also assumed that the reflection coefficient is constant whereas the absorption coefficient is small everywhere except for a set of periodic thin strips modeling blood vessels, where the absorption coefficient equals a large parameter ω . There are two other parameters in the problem: ε is the ratio of the distance between the vessel axes to a characteristic macroscopic size, and δ is the ratio of the width of the fine vessels to the period. Both parameters ε and δ are assumed to be small. The main result is the construction of an asymptotic solution.

Keywords: asymptotics, Helmholtz equation, averaging.

Поглощение света в тканях обычно моделируется уравнением Гельмгольца с двумя постоянными параметрами — коэффициентами отражения и поглощения. Известно, что при поглощении в диапазонах красных и инфракрасных волн основным поглотителем является гемоглобин, присутствующий только в крови. Таким образом, коэффициент поглощения сильно меняется и равен нулю везде кроме периодического множества тонких параллельных полос, моделирующих кровеносные сосуды, в которых коэффициент поглощения равен большому параметру ω . Через ε обозначим отношение расстояния между осями сосудов к макроскопическому размеру, а через δ обозначим отношение толщины тонких сосудов к периоду. Оба параметра — ε и δ — предполагаются малыми.

В [1] была рассмотрена одномерная постановка задачи в предположении, что поле не зависит от продольной переменной вдоль сосудов:

$$-u'' + q\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u = f(x), \quad \xi = \frac{x}{\varepsilon},$$

$$q(\xi) = \begin{cases} \omega, & 0 < \xi < \frac{\delta}{2}, \\ 0, & \frac{\delta}{2} < \xi < 1 - \frac{\delta}{2}, \\ \omega, & 1 - \frac{\delta}{2} < \xi < 1. \end{cases}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00679) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (контракт 02.740.11.0612).

В [2] были исследованы три постановки задачи: на всей оси \mathbb{R} , с периодическими граничными условиями и краевая задача Дирихле.

В настоящей работе исследуется двумерная постановка. Рассматривается двумерное уравнение Гельмгольца с потенциалом q , зависящим только от одной переменной x_1/ε :

$$\mathcal{L}u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + q\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)u = f(x_1, x_2), \quad \xi = \xi_1 = \frac{x_1}{\varepsilon}, \quad (1)$$

$$(x_1, x_2) \in S_1 = (0, 1) \times (0, 1), \quad f \in H^{4K+2}(S_1). \quad (2)$$

Анализируются два варианта граничных условий.

1. Предполагается, что правая часть $f(x_1, x_2)$ 1-периодична по обоим переменным x_1, x_2 . Ставится задача построения решения уравнения (1), 1-периодичного по переменным x_1 и x_2 .

2. Задается краевая задача

$$u(0, x_2) = u(1, x_2) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=1} = 0. \quad (3)$$

Основной результат данной работы — построение асимптотического решения.

1. Анзац

Через $D^{k,l}f(x_1, x_2)$, как обычно, обозначим частные производные $\frac{\partial^{k+l}f(x_1, x_2)}{\partial^k x_1 \partial^l x_2}$.

Асимптотическое решение ищется в следующем виде:

$$u = \frac{v(x_1, x_2)}{\omega} + \sum_{k,j=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2j} N_{k,2j}(\xi) D^{k,2j}v(x_1, x_2). \quad (4)$$

Имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= -\frac{D^{2,0}v(x_1, x_2)}{\omega} - \sum_{k,j=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2j-2} N''_{k,2j}(\xi) D^{k,2j}v(x_1, x_2) \\ &- \sum_{k,j=0}^{\infty} 2\varepsilon^{k+2j-1} N'_{k,2j}(\xi) D^{k+1,2j}v(x_1, x_2) - \sum_{k,j=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2j} N_{k,2j}(\xi) D^{k+2,2j}v(x_1, x_2), \\ -\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= -\frac{D^{0,2}v(x_1, x_2)}{\omega} - \sum_{k,j=0}^{\infty} \varepsilon^{k+2j} N_{k,2j}(\xi) D^{k,2j+2}v(x_1, x_2). \end{aligned}$$

После подстановки (4) в (1) получаем уравнение для v

$$-\frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) + v = f(x_1, x_2) \quad (5)$$

и уравнения для $N_{k,2j}$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} N''_{0,0}(\xi) + q(\xi) N_{0,0}(\xi) &= 1 - \frac{q(\xi)}{\omega}, \\ -N''_{k,2j} + \varepsilon^2 q N_{k,2j} &= 2N'_{k-1,2j} + N_{k-2,2j} + N_{k,2(j-1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для уравнения (5) в случае периодической задачи ставится задача построения 1-периодического по обоим переменным x_1, x_2 решения. Такое решение можно получить с помощью разложения правой части в ряд Фурье.

Функции $N_{k,2j}$ ищутся в виде 1-периодичных по ξ функций.

$$N_{k,2j} = \begin{cases} \sum_{i \geq 0} c_{k,2j,a(i)} \xi^{a(i)} \operatorname{ch} \varepsilon \sqrt{\omega} \xi + \sum_{i \geq 0} s_{k,2j,b(i)} \xi^{b(i)} \operatorname{sh} \varepsilon \sqrt{\omega} \xi, & 0 < \xi < \frac{\delta}{2}, \\ \sum_{i=-1}^{[k/2]+j} d_{k,2j,k+2j-2i} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^{k+2j-2i}, & \frac{\delta}{2} < \xi < 1 - \frac{\delta}{2}, \\ \sum_{i \geq 0} c_{k,2j,a(i)} (\xi - 1)^{a(i)} \operatorname{ch} \varepsilon \sqrt{\omega} (\xi - 1) \\ + \sum_{i \geq 0} s_{k,2j,b(i)} (\xi - 1)^{b(i)} \operatorname{sh} \varepsilon \sqrt{\omega} (\xi - 1), & 1 - \frac{\delta}{2} < \xi < 1, \end{cases} \quad (7)$$

$$a(i) = k - 2i + 2 \left[\frac{j}{2} \right], \quad b(i) = k - 2i + 1 + 2 \left[\frac{j-1}{2} \right], \quad i = 0, 1, \dots, \text{ пока } a(i) \geq 0 \text{ или } b(i) \geq 0.$$

После подстановки (7) в (6) при соответствующих степенях ξ и множителях $\operatorname{ch} \varepsilon \sqrt{\omega} \xi$ или $\operatorname{sh} \varepsilon \sqrt{\omega} \xi$ получаем уравнения для коэффициентов $c_{k,2j,a(i)}$, $s_{k,2j,b(i)}$:

$$\xi^{a(i)-2} \operatorname{ch} \varepsilon \sqrt{\omega} \xi : a(i)(a(i) - 1)c_{k,2j,a(i)} + 2(a(i) - 1)c_{k-1,2j,a(i)-1} + c_{k-2,2j,a(i)-2} + c_{k,2j-2,a(i)-2} = 0, \quad (8)$$

$$\xi^{b(i)-2} \operatorname{sh} \varepsilon \sqrt{\omega} \xi : b(i)(b(i) - 1)s_{k,2j,b(i)} + 2(b(i) - 1)s_{k-1,2j,b(i)-1} + s_{k-2,2j,b(i)-2} + s_{k,2j-2,b(i)-2} = 0, \quad (9)$$

$$\xi^{a(i)-1} \operatorname{sh} \varepsilon \sqrt{\omega} \xi : 2a(i)\varepsilon\sqrt{\omega} \cdot c_{k,2j,a(i)} + 2\varepsilon\sqrt{\omega} \cdot c_{k-1,2j,a(i)-1} + s_{k-2,2j,a(i)-1} + s_{k,2(j-1),a(i)-1} = 0, \quad (10)$$

$$\xi^{b(i)-1} \operatorname{ch} \varepsilon \sqrt{\omega} \xi : 2b(i)\varepsilon\sqrt{\omega} \cdot s_{k,2j,b(i)} + 2\varepsilon\sqrt{\omega} \cdot s_{k-1,2j,b(i)-1} + c_{k-2,2j,b(i)-1} + c_{k,2(j-1),b(i)-1} = 0. \quad (11)$$

Если j — четное число, то $a(i) = b(i) + 1$ и далее используется следующий алгоритм построения коэффициентов c , s :

1. Находим $c_{k,2j,a(0)}$, подставляя $i = 0$ в (10).
2. Находим $s_{k,2j,b(0)}$, подставляя $i = 0$ в сумму (8) и (11).
3. Находим $c_{k,2j,a(2)}$, суммируя (9) при $i = 0$ и (10) при $i = 1$.
4. Повторяем предыдущие пункты для остальных $i \geq 0$ при $b(i) \neq 0$.

Если j — нечетное число, то $a(i) = b(i) - 1$ и используется аналогичный алгоритм:

1. Находим $s_{k,2j,b(0)}$, подставляя $i = 0$ в (11).
2. Находим $c_{k,2j,a(0)}$, подставляя $i = 0$ в сумму (9) и (10).
3. Находим $s_{k,2j,b(2)}$, суммируя (8) при $i = 0$ и (11) при $i = 1$.
4. Повторяем предыдущие пункты для остальных $i \geq 0$ при $a(i) \neq 0$.

Кроме того, при $\xi \in (\delta/2, 1 - \delta/2)$ получаем уравнения для $d_{k,2j,k+2j-2i}$:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^{k+2j-2i-2} : (k+2j-2i)(k+2j-2i-1)d_{k,2j,k+2j-2i} + 2(k-1+2j-2i)d_{k-1,2j,k+2j-2i-1} + d_{k-2,2j,k+2j-2i-2} + d_{k,2j-2,k+2j-2i-2} = 0. \quad (12)$$

Коэффициенты $c_{k,2j,0}$, $s_{k,2j,0}$, $d_{k,2j,0}$, $d_{k,2j,1}$ находятся из условий непрерывности и непрерывной дифференцируемости функции $N_{k,2j}$.

Обозначим

$$\eta = \max \left\{ \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{\omega\delta}} \right\}, \quad \varphi = \frac{\varepsilon\sqrt{\omega}\delta}{2}.$$

Теорема 1. Коэффициенты функций $N_{k,2j}$ имеют следующие асимптотики:

$$c_{0,0,0} = \frac{(1-\delta)\varepsilon}{2\sqrt{\omega} \operatorname{sh} \varphi} = e^{-\varphi} O(\eta^2), \quad c_{k,2j,a(i)} = c_{0,0,0} \varepsilon^{a(i)-k-2j} O(\eta^{k+2j-a(i)}), \quad (13)$$

$$s_{k,2j,b(i)} = \frac{\varepsilon^{b(i)-k-2j}}{\sqrt{\omega} e^\varphi} O(\eta^{k+2j-b(i)+1}), \quad d_{k,2j,k+2j-2i} = \varepsilon^{-2i} O(\eta^{2i+2}). \quad (14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение для $N_{0,0}$ совпадает с уравнением для N_0 в [2], и его коэффициенты равны

$$c_{0,0,0} = \frac{(1-\delta)\varepsilon}{2\sqrt{\omega} \operatorname{sh} \varphi} = e^{-\varphi} O(\eta^2), \quad d_{0,0,2} = -\frac{\varepsilon^2}{2}, \quad d_{0,0,0} = \frac{(1-\delta)\varepsilon}{2\sqrt{\omega}} \operatorname{cth} \frac{\varepsilon\sqrt{\omega} \delta}{2} + \frac{\varepsilon^2(1-\delta)^2}{8}.$$

Далее коэффициенты $c_{k,2j,a(i)}$, $s_{k,2j,b(i)}$, $d_{k,2j,k+2j-2i}$ строятся по индукции. Пусть построены все функции $N_{k,2j}$ при $k < \bar{k}$, $j \leq \bar{j}$ и $k \leq \bar{k}$, $j < \bar{j}$, и они имеют асимптотики (13), (14). Тогда из уравнения (10) асимптотика $c_{\bar{k},2\bar{j},a(i)}$ такая же, как у $c_{\bar{k}-1,2\bar{j},a(i)-1}$, которая равна $c_{0,0,0} \varepsilon^{a(i)-\bar{k}-2\bar{j}} O(\eta^{\bar{k}+2\bar{j}-a(i)})$. Аналогично из уравнения (11) асимптотика $s_{\bar{k},2\bar{j},a(i)}$ равна $\frac{\varepsilon^{b(i)-\bar{k}-2\bar{j}}}{\sqrt{\omega} e^\varphi} O(\eta^{\bar{k}+2\bar{j}-b(i)+1})$ и из уравнения (12) асимптотика $d_{\bar{k},2\bar{j},\bar{k}+2\bar{j}-2i}$ равна $\varepsilon^{-2i} O(\eta^{2i+2})$.

Далее для нахождения $c_{\bar{k},2\bar{j},0}$, $s_{\bar{k},2\bar{j},0}$ следует решить систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} N_{\bar{k},2\bar{j}}\left(\frac{\delta}{2} - 0\right) = N_{\bar{k},2\bar{j}}\left(\frac{\delta}{2} + 0\right), \\ N'_{\bar{k},2\bar{j}}\left(\frac{\delta}{2} - 0\right) = N'_{\bar{k},2\bar{j}}\left(\frac{\delta}{2} + 0\right) \end{cases}$$

относительно $c_{\bar{k},2\bar{j},0}$, $d_{\bar{k},2\bar{j},0}$ при четных \bar{k} и относительно $s_{\bar{k},2\bar{j},0}$, $d_{\bar{k},2\bar{j},1}$ при нечетных \bar{k} . При этом соответствующие уравнения в точке $\xi = 1 - \delta/2$ выполняются автоматически из-за четности коэффициентов в $N_{\bar{k},2\bar{j}}$ при четных \bar{k} (и нечетности коэффициентов при нечетных \bar{k}).

Таким образом, общая асимптотика для $N_{\bar{k},2\bar{j}}$ имеет вид $\varepsilon^{\bar{k}+2\bar{j}} N_{\bar{k},2\bar{j}} = O(\eta^{\bar{k}+2\bar{j}+2})$.

2. Периодическая постановка задачи

Таким образом строится асимптотический ряд, частичная сумма

$$\hat{u} = \frac{v(x_1, x_2)}{\omega} + \sum_{k=0}^{2K} \sum_{j=0}^K \varepsilon^{k+2j} N_{k,2j}(\xi) D^{k,2j} v(x_1, x_2) \quad (15)$$

которого приближенно удовлетворяет уравнению (1). Здесь K соответствует степени гладкости правой части f (2). Аналогично [2] имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\hat{u} - f &= -\frac{\Delta v}{\omega} - \sum_{k=0}^{2K} \sum_{j=0}^K \left(-q(\xi) \varepsilon^{k+2j} N_{k,2j}(\xi) D^{k,2j} v(x_1, x_2) + \varepsilon^{k+2j-2} N''_{k,2j}(\xi) D^{k,2j} v(x_1, x_2) \right. \\ &\quad + 2\varepsilon^{k+2j-1} N'_{k,2j}(\xi) D^{k+1,2j} v(x_1, x_2) + \varepsilon^{k+2j} N_{k,2j}(\xi) D^{k+2,2j} v(x_1, x_2) \\ &\quad \left. + \varepsilon^{k+2j} N_{k,2j}(\xi) D^{k,2j+2} v(x_1, x_2) \right) + \frac{q(\xi)v(x_1, x_2)}{\omega} - f(x_1, x_2) \\ &= - \sum_{j=0}^K \left(2\varepsilon^{k+2j-1} N'_{k,2j}(\xi) D^{k+1,2j} v(x_1, x_2) \Big|_{k=2K} \right) \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon^{k+2j} N_{k,2j}(\xi) D^{k+2,2j} v(x_1, x_2) \Big|_{k=2K, k=2K-1} - \sum_{k=0}^{2K} \varepsilon^{k+2j} N_{k,2j}(\xi) D^{k,2j+2} v(x_1, x_2) \Big|_{j=K}.$$

$$\|\mathcal{L}\hat{u} - f\|_{L_2(S_1)} \leq \|v\|_{H^{4K+2}(S_1)} O(\eta^{2K+1}).$$

Если функция $v(x_1, x_2)$ периодична по обоим переменным, то \hat{u} также будет 1-периодичной. Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 2. *Функция (15) является асимптотическим решением задачи (1) с периодическими условиями 1 (см. с. 306).*

3. Краевая задача

Функция \hat{u} (15), вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям (3), поэтому построим соответствующие поправки.

Сначала построим поправки, позволяющие удовлетворить условию $u(0, x_2) = u(1, x_2) = 0$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + q\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) u = 0, \\ u(0, x_2) = g(x_2), \quad u(1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Продолжим $g(x_2)$ на отрезок $[-1, 1]$ как C^∞ 2-периодическую функцию. Раскладываем ее в ряды Фурье

$$g(x_2) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \pi k x_2 + b_k \sin \pi k x_2).$$

Ищем $u(x_1, x_2)$ в виде

$$u(x_1, x_2) = \frac{a_0 u_0(x_1)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k u_k(x_1) \cos \pi k x_2 + b_k u_k(x_1) \sin \pi k x_2).$$

Для функций u_k получается краевая задача

$$-u_k'' + (q(\xi) + \pi^2 k^2) u_k = 0, \quad u_k(0) = 1, \quad u_k(1) = 0. \quad (16)$$

Ее частный случай при $k = 0$ был исследован в [2]. Обозначим $\alpha = \pi k$, $\kappa = \sqrt{\omega + \alpha^2}$. Делаем замену

$$z = \frac{u_k'}{u_k}. \quad (17)$$

Уравнение (16) принимает вид $z' + z^2 = q + \alpha^2$. Его решение выглядит следующим образом:

$$z = \begin{cases} \kappa \operatorname{th} \kappa \left(x - y_i + \frac{1}{\kappa} \operatorname{arcth} \frac{z(y_i)}{\kappa} \right), & y_i < x < x_{i+1}, \\ \alpha \operatorname{cth} \alpha \left(x - x_i + \frac{1}{\alpha} \operatorname{arccth} \frac{z(x_i)}{\alpha} \right), & x_i < x < y_i. \end{cases}$$

Запишем условие периодичности решения \bar{z} :

$$\forall i \quad \bar{a} = \bar{z}(x_i), \quad \bar{b} = \bar{z}(y_i);$$

$$\begin{cases} \operatorname{arcth} \frac{\bar{a}}{\kappa} = \kappa \varepsilon \delta + \operatorname{arcth} \frac{\bar{b}}{\kappa}, \\ \operatorname{arccth} \frac{\bar{b}}{\alpha} = \alpha \varepsilon (1 - \delta) + \operatorname{arccth} \frac{\bar{a}}{\alpha}. \end{cases}$$

Обозначим

$$\mu_1 = \operatorname{th} \kappa \varepsilon \delta, \quad \mu_2 = \operatorname{cth} \alpha \varepsilon (1 - \delta).$$

Имеем

$$\frac{\bar{a}}{\kappa} = \frac{\mu_1 + \frac{\bar{b}}{\kappa}}{1 + \frac{\mu_1 \bar{b}}{\kappa}}, \quad \frac{\bar{b}}{\alpha} = \frac{1 + \frac{\mu_2 \bar{a}}{\alpha}}{\mu_2 + \frac{\bar{a}}{\alpha}}.$$

$$(\kappa + \alpha \mu_1 \mu_2) \bar{a}^2 + (\alpha^2 - \kappa^2) \mu_1 \bar{a} - \alpha \kappa (\kappa \mu_1 \mu_2 + \alpha) = 0.$$

$$\bar{a} = \frac{\omega + \sqrt{(\alpha^2 + \kappa^2)^2 + 4 \alpha \kappa \mu_1 \mu_2 (\kappa^2 + \alpha \kappa \mu_1 \mu_2 + \alpha^2)}}{2(\kappa + \alpha \mu_1 \mu_2)}.$$

Возвращаемся к функции u_k (17). Заметим, что

$$(\ln \operatorname{ch} \kappa x)' = \kappa \operatorname{th} \kappa x, \quad (\ln \operatorname{sh} \alpha x)' = \alpha \operatorname{cth} \alpha x;$$

$$\operatorname{ch} \kappa \left(x - y_i + \frac{1}{\kappa} \operatorname{arth} \frac{\bar{b}}{\kappa} \right) = \left(1 - \frac{\bar{b}^2}{\kappa^2} \right)^{-1/2} \left(\operatorname{ch} \kappa (x - y_i) + \operatorname{sh} \kappa (x - y_i) \cdot \frac{\bar{b}}{\kappa} \right);$$

$$\operatorname{sh} \alpha \left(x - x_i + \frac{1}{\alpha} \operatorname{arccth} \frac{\bar{a}}{\alpha} \right) = \left(\frac{\bar{a}^2}{\alpha^2} - 1 \right)^{-1/2} \left(\operatorname{ch} \alpha (x - x_i) + \operatorname{sh} \alpha (x - x_i) \cdot \frac{\bar{a}}{\alpha} \right).$$

Обозначим

$$\mu_3 = \operatorname{ch} \kappa \varepsilon \delta + \frac{\bar{b}}{\kappa} \operatorname{sh} \kappa \varepsilon \delta, \quad \mu_4 = \operatorname{ch} \alpha \varepsilon (1 - \delta) + \frac{\bar{a}}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha \varepsilon (1 - \delta).$$

Выпишем два решения уравнения (16): “возрастающее” $u_{+\alpha}$ и “убывающее” $u_{-\alpha}$:

$$u_{+\alpha} = \begin{cases} (\mu_3 \mu_4)^i \left(\operatorname{ch} \alpha (x - x_i) + \operatorname{sh} \alpha (x - x_i) \cdot \frac{\bar{a}}{\alpha} \right), & x_i < x < y_i \\ (\mu_3 \mu_4)^i \mu_3 \left(\operatorname{ch} \kappa (x - y_i) + \operatorname{sh} \kappa (x - y_i) \cdot \frac{\bar{b}}{\kappa} \right), & y_i < x < x_{i+1}. \end{cases}$$

$$u_{-\alpha} = \begin{cases} (\mu_3 \mu_4)^{-i-1} \left(\operatorname{ch} \alpha (x - x_i) - \operatorname{sh} \alpha (x - x_i) \cdot \frac{\bar{a}}{\alpha} \right), & x_i < x < y_i \\ (\mu_3 \mu_4)^{-i-1} \mu_3 \left(\operatorname{ch} \kappa (x - y_i) - \operatorname{sh} \kappa (x - y_i) \cdot \frac{\bar{b}}{\kappa} \right), & y_i < x < x_{i+1}. \end{cases}$$

Таким образом решением краевой задачи (16) является линейная комбинация $u_{+\alpha}$ и $u_{-\alpha}$, $\alpha = \pi k$.

Теперь рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + q\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = g(x_1), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=1} = 0, \end{cases} \quad (18)$$

с помощью ее решений будет можно удовлетворить граничным условиям для (1) при $x = 0$ и $x = 1$. Разложим $g(x_1)$ в ряд Фурье:

$$g(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x_1),$$

где $\varphi_k(x)$ — собственные функции задачи

$$-\varphi_k'' + q(x/\varepsilon) \varphi_k = \lambda_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0.$$

Тогда решение задачи (18) можно найти в виде

$$u(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x_1) h_k(x_2).$$

Имеем

$$h_k''(x_2) = \lambda_k h_k(x_2), \quad h_k'(0) = 1, \quad h_k'(1) = 0.$$

$$h_k(x_2) = -\frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda_k}(x_2 - 1)}{\sqrt{\lambda_k} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_k}}.$$

Заметим, что $u(0, x_2) = u(1, x_2) = 0$.

Таким образом, для удовлетворения граничных условий (3) фиксируются значения сокращенного анзаца (15) при $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$:

$$g_0(x_2) = \hat{u}(0, x_2), \quad g_1(x_2) = \hat{u}(1, x_2).$$

Построим поправки $u_{cor\ 0}$, $u_{cor\ 1}$, удовлетворяющие

$$-\Delta u_{cor\ 0} + q\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) u_{cor\ 0} = -\Delta u_{cor\ 0} + q\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) u_{cor\ 0} = 0,$$

$$u_{cor\ 0}(0, x_2) = -g_0(x_2), \quad u_{cor\ 1}(1, x_2) = -g_1(x_2).$$

Далее получаем

$$g_2(x_1) = \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2=0}, \quad g_3(x_1) = \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|_{x_2=1}.$$

Построим поправки $u_{cor\ 2}$, $u_{cor\ 3}$, удовлетворяющие

$$-\Delta u_{cor\ 2} + q\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) u_{cor\ 2} = -\Delta u_{cor\ 3} + q\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) u_{cor\ 3} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u_{cor\ 2}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = -g_2(x_1), \quad \left. \frac{\partial u_{cor\ 3}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = -g_3(x_1).$$

Таким образом, функция

$$U = \hat{u} + u_{cor\ 0} + u_{cor\ 1} + u_{cor\ 2} + u_{cor\ 3} \tag{19}$$

удовлетворяет уравнению (1) с малой невязкой, а граничные условия (3) выполняются точно.

Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 3. *Функция U (19) является асимптотическим решением задачи (1) с граничными условиями 2 (см. с. 306).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Mottin S., Panasenko G., Ganesh S.S.** Multiscale modeling of light absorption in tissues: limitations of classical homogenization approach // PLoS ONE. 2010. Vol. 5, iss. 12. P. 1–9.
URL: <http://www.plosone.org/article/info:doi/10.1371/journal.pone.0014350>.
2. **Elbert A., Panasenko G.** Asymptotic analysis of the one-dimensional diffusion-absorption equation with rapidly and strongly oscillating absorption coefficient // SIAM J. Math. Anal. 2012. Vol. 44, iss. 3.

Эльберт Александр Евгеньевич

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: aee@imm.uran.ru

Поступила 12.01.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18

№ 2

2012

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TeX-редактор Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 17.05.12. Формат 60 × 84¹/₈. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 36,5. Уч.-изд. л. 30,6. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226