

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**Том 18, № 1**

**2012**

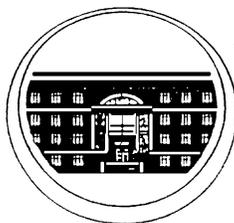
ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 18

№ 1

2012



ЕКАТЕРИНБУРГ

**Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 18, № 1.** Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2012. 336 с.

ISSN 0134-4889

**Главный редактор** акад. РАН В. И. Бердышев

**Зам. гл. редактора** В. В. Кабанов

**Научные редакторы** А. Л. Агеев, А. Р. Данилин

**Редакционная коллегия**

А. Г. Бабенко, М. И. Гусев, А. Ф. Клейменов,  
А. С. Кондратьев, А. И. Короткий, В. И. Максимов, М. Ю. Хачай

**Редакционный совет**

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин, акад. РАН А. М. Ильин,  
акад. РАН Н. Н. Красовский, чл.-корр. РАН С. В. Матвеев,  
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,  
чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин,  
чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков, чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов,  
чл.-корр. НАН Беларуси Л. А. Шеметков

**Отв. редактор выпуска** А. Л. Агеев

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт математики и механики  
Уральского отделения Российской  
академии наук, 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ ВЛАДИМИРА ВАСИЛЬЕВИЧА ВАСИНА.....	5
<b>A. Hasanov.</b> Some new classes of inverse coefficient problems in nonlinear mechanics.....	20
<b>B. Hofmann, P. Mathé.</b> Some note on the modulus of continuity for ill-posed problems in Hilbert space .....	34
<b>Y. F. Wang.</b> Sparse optimization methods for seismic wavefields recovery.....	42
<b>А. Л. Агеев, Т. В. Антонова.</b> О локализации разрывов первого рода для функций ограниченной вариации.....	56
<b>А. С. Апарцин.</b> Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта.....	69
<b>А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин, В. А. Юдин.</b> Одностороннее приближение в $L$ характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами.....	82
<b>А. Б. Бакушинский, М. М. Кокурин, М. Ю. Кокурин.</b> О схеме полной дискретизации некорректной задачи Коши в банаховом пространстве.....	96
<b>М. С. Близорукова, В. И. Максимов.</b> Об одном алгоритме реконструкции траектории и управления в системе с запаздыванием.....	109
<b>В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных.</b> Постановка и решение краевой задачи в классе плосковинтовых векторных полей.....	123
<b>А. М. Денисов.</b> Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент.....	139
<b>С. И. Кабанихин, М. А Шишленин.</b> Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений.....	147
<b>В. В. Кабанов, А. В. Митянина.</b> Реберные точные графы Деза.....	165
<b>А. И. Короткий, Д. О. Михайлова.</b> Восстановление граничных управлений в параболических системах.....	178
<b>А. С. Леонов.</b> Полные вариации высших порядков для функций многих переменных и их применение в теории некорректных задач.....	198
<b>А. М. Липанов, М. Р. Королева, С. Ю. Дадикина.</b> Адаптированные цилиндрические координаты для внутренних объемов элементов конструкции РДТТ.....	213
<b>Д. В. Лукьяненко, А. Г. Ягола.</b> Использование многопроцессорных систем для решения обратных задач, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода.....	222

(Продолжение)

<b>А. А. Махнев, Л. Ю. Циовкина.</b> Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ .....	235
<b>Н. В. Медведев, С. С. Титов.</b> О топологии эллиптических кривых .....	242
<b>И. В. Мельникова, М. А. Альшанский.</b> Обобщенная корректность задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения с мультипликативным шумом .....	251
<b>И. В. Першин.</b> Асимптотика решения уравнения теплопроводности с особенностью на границе .....	268
<b>В. Г. Романов.</b> Двумерная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения электродинамики .....	273
<b>В. П. Танана, А. Б. Бредихина, Т. С. Камалтдинова.</b> Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций .	281
<b>А. П. Хромов, Г. В. Хромова.</b> О сходимости метода М. М. Лаврентьева для интегрального уравнения первого рода с инволюцией .....	289
<b>А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов.</b> Об одной задаче маршрутизации с внутренними работами.....	298
<b>П. А. Чистяков.</b> Многошаговый итерационный метод решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах .....	318
<b>А. Л. Агеев, В. В. Арестов, В. В. Васин.</b> Международная конференция “Алгоритмический анализ неустойчивых задач (ААНЗ-2011)” .....	329



**ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ ВАСИН**

*(К семидесятилетнему юбилею)*

В.В. Васин родился 2 ноября 1941 года в семье служащих в с. Бараново Оренбургской области. В 1956 году он окончил семилетнюю школу в с. Михайловка, куда переехали его родители. Так как десятилетки здесь не было, то среднюю школу ему пришлось оканчивать в соседнем с. Добринка, которое находилось в 10 км от места проживания. В своих воспоминаниях о школьных годах (см. “Наука Урала”, №8(921)) В.В. Васин говорил, что интерес к математике у него возник в старших классах благодаря учителю, выпускнику Казанского университета Ивану Андреевичу Сайфиеву, который умел показать красоту математики и увлечь ею.

В 1959 году В.В. Васин поступает на физико-математический факультет Уральского государственного университета им. А.М. Горького (УрГУ). Свою первую курсовую работу, связанную с задачей о существовании наилучшего приближения в конечномерном подпространстве для элемента счетно-нормированного пространства, он выполнил на 3-м курсе под руководством В.К. Иванова, своего будущего научного руководителя. Как известно, в конце 50-х — начале 60-х годов прошлого столетия в СССР сформировались три лидирующих центра по теоретическим исследованиям и применению методов решения некорректно поставленных задач — нового направления, лежащего на стыке функционального анализа и вычислительной математики. Одним из таких центров являлся Свердловск. Уральский университет, в частности, благодаря работам В.К. Иванова и его учеников занимал ведущие позиции по исследованиям в области обратных задач потенциала и общей теории неустойчивых операторных уравнений. По этой новой тематике на кафедре теории функций и функционального анализа под руководством В.К. Иванова работал семинар, который был доступен и для студентов старших курсов. Тогда же произошло еще одно замечательное событие. Летом 1963 года в новосибирском Академгородке состоялся первый советско-американский симпозиум по уравнениям в частных производных. В это время В.В. Васин проходил 9-месячную производственную практику в Академгородке в Институте ядерной физики Сибирского отделения АН СССР и имел счастливую возможность присутствовать на докладах А.Н. Тихонова — о методе регуляризации некорректных задач, В.К. Иванова — о методе расширяющихся компактов, М.М. Лаврентьева — о регуляризации сдвигом операторных уравнений первого рода.

По-видимому, под впечатлением этих докладов после возвращения в Свердловск Владимир Васильевич попросил у В.К. Иванова тему дипломной работы, разумеется, связанную с теорией некорректных задач. На следующий день он получил от своего научного руководителя перевод (с итальянского) статьи К. Пуччи и пожелание успехов в построении метода регуляризации некорректно поставленной задачи Дирихле для волнового уравнения.

2 ноября 1964 года еще до окончания университета В.В. Васин был приглашен на работу в недавно организованное на Урале Свердловское отделение Математического института (СОМИ) им. В.А. Стеклова (ныне Институт математики и механики УрО РАН) и после обстоятельной беседы с заместителем директора по Свердловскому отделению С.Б. Стечкиным был зачислен в отдел прикладных задач. С.Б. Стечкин — директор-организатор СОМИ, выдающийся математик и основатель уральской школы по теории приближения функций — был

яркой личностью. Он был способен на нестандартные поступки и решения во взаимоотношениях с коллегами и властными структурами, с ним было связано много легенд и удивительных историй. Хотя В.В. Васин не был его учеником, он часто с благодарностью вспоминает С.Б. Стечкина, который сыграл большую роль в его научной судьбе (см. “Наука Урала”, № 8(921)).

В 1965–1966 годах В.В. Васин проходит службу в рядах Советской Армии. После демобилизации он вернулся в институт и в 1968 году поступил в заочную аспирантуру к В.К. Иванову. Естественно, что на этапе становления научные интересы В.В. Васина формировались под влиянием пионерских работ В.К. Иванова — основателя уральской научной школы по теории некорректных задач, который был не только его научным руководителем, но и мудрым наставником. В начале 1971 года В.В. Васин защитил кандидатскую диссертацию “Некорректные задачи в  $V$ -пространствах и их приближенное решение вариационными методами”.

Первые исследования В.В. Васина, выполненные под руководством В.К. Иванова, были связаны с обоснованием сходимости вариационных методов регуляризации (методы Тихонова, невязки, квазирешений). Им был установлен результат о взаимосвязи этих методов, а в совместной с В.П. Тананой работе 1968 года были получены наиболее общие условия на оператор (слабая замкнутость) и пространства (свойство Ефимова — Стечкина), которые гарантируют сильную сходимость регуляризованного семейства приближенных решений, построенных на базе вариационных методов. Это позволило обобщить исследования В.А. Морозова для гильбертовых пространств и усилить результаты А.Н. Тихонова, В.К. Иванова и М.М. Лаврентьева, которые при доказательстве сходимости приближенных решений использовали схему компактного вложения в предположении, что решение принадлежит образу вполне непрерывного оператора. Сформулированные условия, как впоследствии было установлено, при определенных предположениях являются фактически необходимыми и достаточными для сходимости. Кроме того, была развита схема доказательства сходимости вариационных методов, в дальнейшем широко используемая в работах других авторов.

На ранней стадии развития теории некорректных задач устойчивые методы численного дифференцирования зашумленной функции были предметом изучения многих исследователей как с точки зрения построения экстремальных операторов в задаче С.Б. Стечкина о приближении неограниченного оператора ограниченными, так и с позиции разработки регуляризирующих алгоритмов, оптимальных или оптимальных по порядку на классе. Следует сказать, что эти две проблемы тесно связаны. В.В. Васин предложил конструкцию регуляризирующего оператора для задачи дифференцирования, используя интегральные операторы типа свертки с осредняющими ядрами, порождающими  $\delta$ -образные последовательности, и получил мажорантные оценки на классе функций с ограниченной 2-й производной. Этот подход к построению регуляризирующего алгоритма (РА) в задаче дифференцирования был в дальнейшем развит в работах Г.В. Хромовой, Э.В. Колпаковой, Г.Г. Скорика и американского математика Ч. Гретша<sup>1</sup>, который в своей работе обобщил результат на класс функций с ограниченной 3-й производной.

В 1970-е годы В.В. Васин опубликовал несколько работ (две из них написаны в соавторстве с В.П. Тананой) по исследованию проекционных схем конечномерной аппроксимации для вариационных методов регуляризации и доказательству оптимальности по порядку конечномерных приближений регуляризованного семейства приближенных решений для линейных операторных уравнений в общем случае. Некоторые из этих результатов вошли в монографию 1978 года (авторы В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танана), в которой были подытожены исследования В.К. Иванова и его учеников по теории некорректных задач.

В этот период группа сотрудников (Г.Я. Пересторонина, Т.И. Сережникова, О.В. Коковина, Л.Ю. Тимерханова), которой руководил В.В. Васин, выполняла работу по договору с ВНИИТФ (ныне Российский федеральный ядерный центр — ВНИИТФ, г. Снежинск) по построению алгоритмов и созданию пакета программ для расчета напряженно-деформированного

<sup>1</sup>Groetsch C.W. Optimal order of accuracy in Vasin’s method for differentiation of noisy functions // J. Optim. Theory Appl. 1992. Vol. 74, no. 2. P. 373–378.

состояния спецконструкций. Созданный комплекс программ был передан заказчику для использования в производственных расчетах.

В конце 1970-х — начале 1980-х годов В.В. Васин активно занимается разработкой общей схемы дискретной аппроксимации РА (метод Тихонова, метод невязки) для операторных уравнений в банаховых пространствах, бесконечномерных (как по пространству, так и по ограничениям) задач выпуклого программирования и задач вариационного исчисления. В рамках этой общей схемы, в которой не предполагается вложенность аппроксимирующих подпространств, удается обосновать сходимость схем конечномерных аппроксимаций, используемых в приложениях, таких как методы проекционного типа, квадратурные и коллакационные методы. Было установлено, что сформулированные условия сходимости дискретных аппроксимаций для линейных операторных уравнений в гильбертовых пространствах являются необходимыми и достаточными.

В этот период началось сотрудничество с коллегами из Института физики металлов УрО РАН (группа Ю.А. Бабанова) в связи с возникшей у них проблемой решения некорректной задачи при обработке данных физических экспериментов по расшифровке атомной структуры аморфных материалов на основе рентгеноспектральных и дифракционных данных. Из-за неединственности решения базового интегрального уравнения возникли существенные трудности при использовании традиционной схемы регуляризации Тихонова. Успех в решении этой задачи был достигнут благодаря привлечению дополнительной информации об искомом решении и ее использованию непосредственно в алгоритме. Вышла большая серия совместных работ в физических журналах, которые до настоящего времени широко цитируются в зарубежной литературе. На основе созданных алгоритмов был разработан комплекс программ (исполнители А.Л. Агеев, Н.В. Ершов), который был внедрен в ряде отечественных и зарубежных организаций. Эти и другие подобного рода задачи стимулировали исследования по разработке общей методологии решения задач с дополнительными ограничениями на решение. В.В. Васиным предложен оригинальный подход к решению такого класса задач на основе итерационных методов, где оператор шага является суперпозицией некоторого классического итерационного процесса и псевдосжимающего (фейеровского) отображения, отвечающего за априорные ограничения, представимые в виде системы линейных или выпуклых неравенств. В отличие от метрической проекции базовые фейеровские отображения, предложенные И.И. Ереминым, допускают простую реализацию и обладают внутренним параллелизмом. Этому направлению посвящены серия статей и две монографии (одна в соавторстве с А.Л. Агеевым, другая — с И.И. Ереминым), вышедших также в английском издании.

В 1985 году В.В. Васин защищает докторскую диссертацию на тему “Итерационно-аппроксимационные алгоритмы решения неустойчивых задач и их приложения”.

В 1990-е годы научные интересы В.В. Васина были связаны с изучением итерационных процессов для устойчивой аппроксимации решений нелинейных некорректных операторных уравнений, в том числе при наличии дополнительных априорных ограничений на решение. Так, несколько статей были посвящены обоснованию парных монотонных процессов для нелинейных уравнений с изотонным оператором. Эти итерационные схемы порождают монотонные по конусу последовательности, которые образуют двухсторонние аппроксимации для искомого решения, что является весьма привлекательным свойством с точки зрения приложений. Эти методы неплохо зарекомендовали себя при решении обратных задач геофизики и зондирования атмосферы, а также в задачах идентификации параметров для уравнений гиперболического типа. Результаты по монотонным алгоритмам решения коэффициентных задач для гиперболических уравнений вошли в совместную статью (соавторы С.И. Кабанихин, О. Шерцер, Р. Ковар). Другой цикл работ этого периода касается обоснования сходимости различных модификаций методов градиентного типа и метода Левенберга — Марквардта. В этом направлении удалось доказать слабую, а в некоторых случаях и сильную сходимость итераций при условии, что оператор задачи удовлетворяет в окрестности решения условию типа равномерной псевдомонотонности. В дальнейшем в терминах свойств ядра был охарактеризован класс

нелинейных интегральных уравнений, для которых это локальное условие выполнено. Кроме того, для итеративно регуляризованного метода Ньютона был намечен подход для обоснования практической сходимости итераций на основе доказательных вычислений. Сотрудники отдела некорректных задач анализа и приложений (ОНЗАиП), который с 1990 года возглавляет В.В. Васин, в середине 1990-х годов устанавливают тесные связи с коллегами из Института геофизики УрО РАН (отдел П.С. Мартышко) для проведения совместных работ по созданию регулярных параллельных алгоритмов и разработке программных средств на МВС-1000 (исполнители Е.Н. Акимова, Г.Я. Пересторонина, Г.Г. Скорик) для решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии с модельными и реальными геофизическими полями. Совместные исследования, выполненные с геофизиками, в значительной степени стимулировали дальнейшее развитие теории итеративной регуляризации нелинейных проблем с использованием аппарата фейеровских отображений.

Начиная с конца 1990-х годов В.В. Васин занимается исследованием проблемы построения РА для линейных операторных (интегральных) уравнений с негладкими, возможно, разрывными решениями. Им предложен и обоснован метод решения этой проблемы, основная идея которого заключается в использовании тихоновской регуляризации с недифференцируемыми стабилизаторами (Липшиц-норма, обобщенная вариация) и субградиентных методов негладкой минимизации, а в некоторых случаях с дополнительным привлечением прох-алгоритма. Как показали численные эксперименты, выполненные Т.И. Сержниковой, усовершенствованный таким образом алгоритм позволяет надежно восстанавливать негладкие решения различных типов для одномерных и двумерных уравнений Фредгольма первого рода. В традиционном подходе, характерном для многих авторов (Р. Акар и С. Вогель, А.С. Леонов, Д. Герман и С. Янг), негладкий стабилизатор предварительно аппроксимируется семейством дифференцируемых функционалов, что, по-видимому, может приводить к “заглаживанию” тонкой структуры решения. Построенные на основе этого метода алгоритмы нашли применение в обратных задачах радиозондирования ионосферы (проблема волноводов), исследованиями которых В.В. Васин, А.Л. Агеев, Т.В. Антонова занимались в 1996–2002 годах вместе с коллегами (группа В.М. Маркушевича) из Международного института теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН. Итог сотрудничества — несколько совместных статей, в которых было дано решение проблемы волноводов (волновод — участок нарушения монотонного поведения электронной концентрации от высоты), что открыло возможность определения электронной концентрации за волноводом и нахождения меры множеств Лебега волноводов. Эффективность алгоритмов восстановления разрывных решений подтверждена также численными экспериментами в статических и динамических обратных задачах управления, а также при восстановлении зашумленных изображений.

В 2006–2009 годах в рамках контракта с технологической компанией “Шлюмберге” отдел выполнял исследования по разработке регулярных алгоритмов для решения задачи деконволюции, которая возникает в скважинной геофизике. Предложенные В.В. Васиным и его сотрудниками (А.Л. Агеев, Т.В. Антонова, Г.Г. Скорик) эффективные алгоритмы и программные модули, реализующие модифицированные методы Тихонова и Левенберга-Марквардта и учитывающие всю априорную информацию о решении, получили высокую оценку заказчика и составили содержание совместной публикации в зарубежном журнале.

В последние годы весьма успешно развивается сотрудничество специалистов отдела с коллегами из Уральского государственного университета им. А.М. Горького (лаборатория глобальной экологии и спутникового мониторинга, заведующий В.И. Захаров) по решению обратных задач зондирования атмосферы, связанных с определением концентрации парниковых газов по спектрам высокого разрешения, измеренным спектрометрами спутникового и наземного базирования. В этих задачах оказались востребованными методы итеративной регуляризации фейеровского типа, развиваемые В.В. Васиным для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений.

В течение многих лет В.В. Васин читает в Уральском государственном университете (сей-

час Уральский федеральный университет) специальные курсы по теории и методам решения некорректных задач. Основным материалом этих спецкурсов являются монографии, в которых он является соавтором: “Теория линейных некорректных задач и ее приложения” (В.К. Иванов, В.П. Танана), “Некорректные задачи с априорной информацией” (А.Л. Агеев), “Операторы и итерационные процессы фейеровского типа” (И.И. Еремин), а также методические пособия: “Методы решения неустойчивых задач”, “Методы решения плохо обусловленных линейных алгебраических уравнений”. Кроме того, в соавторстве с Ф.А. Шолоховичем им написан учебник “Основы высшей математики” для социально-экономических специальностей, который пользуется широкой популярностью.

В 1987 году по предложению тогдашнего директора Института математики и механики УрО РАН академика Ю.С. Осипова В.В. Васин занял должность его заместителя по научной работе, а после отъезда Юрия Сергеевича в Москву в самые тяжелые перестроечные годы (1992–1994) исполнял обязанности директора.

В.В. Васин опубликовал свыше 200 научных работ, в том числе четыре монографии, три из которых переведены за рубежом. Среди его учеников четыре кандидата и два доктора наук. Он является членом редколлегии трех российских математических журналов и членом программных комитетов многих международных конференций. В 1994 году он был избран членом-корреспондентом РАН по Отделению информатики, вычислительной техники и автоматизации (ныне Отделение математических наук, секция прикладной математики и информатики).

С 1995 года при непосредственном участии В.В. Васина в качестве председателя оргкомитета в Екатеринбурге проводятся всероссийские конференции (с участием зарубежных ученых) по некорректным задачам, посвященные памяти создателя уральской научной школы по теории и методам решения некорректно поставленных задач выдающегося российского математика В.К. Иванова.

Коллеги и друзья отмечают редкостную порядочность и доброжелательность Владимира Васильевича по отношению к окружающим как в научных, так и в бытовых делах. Его обязательность и надежность всем хорошо известна. Владимир Васильевич Васин активно участвует в жизни института. Занимаясь лыжным спортом, он в течение многих лет является постоянным членом основного состава лыжной сборной института.

Сотрудники Института математики и механики УрО РАН, коллеги, ученики и друзья сердечно поздравляют Владимира Васильевича Васина с его славным юбилеем и от всей души желают ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов!

*Коллеги и ученики*

## СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ В.В. ВАСИНА

1. Регуляризация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 12. С. 2268–2274.
2. Приближенное решение операторных уравнений первого рода // Мат. записки / УрГУ. 1968. Т. 6, № 4. С. 27–37. (совм. с В. П. Тананой).
3. Регуляризация задачи численного дифференцирования // Мат. записки / УрГУ. 1969. Т. 7, № 2. С. 29–33.
4. Некорректные задачи в  $B$ -пространствах и их приближенное решение вариационными методами: автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Урал. гос. ун-т. Свердловск, 1970. 14 с.
5. О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач // Мат. заметки. 1970. Т. 7, вып. 3. С. 265–272.
6. Об одном проекционном методе решения некорректных задач // Изв. вузов. Математика. 1971. № 11. С. 28–32.
7. К задаче вычисления значений неограниченного оператора в  $B$ -пространствах // Изв. вузов. Математика. 1972. № 5. С. 22–28.
8. О  $\beta$ -сходимости проекционного метода для нелинейных операторных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 492–497.
9. Об устойчивом вычислении производной в пространстве  $C(-\infty, \infty)$  // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13, № 6. С. 1383–1389.
10. Необходимые и достаточные условия сходимости проекционных методов для линейных неустойчивых задач // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215, № 5. С. 1032–1034 (совм. с В. П. Тананой).
11. О сходимости проекционных методов и равномерной регуляризации некорректных задач // Методы решения некоррект. задач и их применение: тр. Всесоюз. шк. мол. ученых. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1974. С. 117–119.
12. Метод невязки и конечномерная аппроксимация приближенных решений операторных уравнений // Методы решения условно-корректных задач: сб. науч. тр. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1975. Вып. 17. С. 39–52.
13. Конечномерная аппроксимация семейства приближенных решений в методе регуляризации // Мат. записки / УрГУ. 1975. Т. 9, № 2. С. 10–17.
14. Об устойчивости проекционных методов при решении некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 1. С. 19–29 (совм. с В. П. Тананой).
15. Особенности методики решения осесимметричных задач термоупругости на основе вариационно-разностных схем // Числ. методы решения задач теории упругости и пластичности: материалы 4-й Всесоюз. конф. Новосибирск, 1976. Ч. 1. С. 46–53 (совм. с О. В. Коковихиной, Г. Я. Пересторониной, А. Ф. Сидоровым, Т. И. Шабашовой).
16. О регуляризации задачи вычисления значений неограниченного положительного оператора // Методы регуляризации неустойчивых задач: сб. науч. тр. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1976. Вып. 23. С. 9–19.
17. Конечномерная аппроксимация приближенных решений в вариационных методах регуляризации неустойчивых задач // Неклассич. методы в геофизике: материалы Всесоюз. школы. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. С. 154–155.
18. Оптимальность по порядку метода регуляризации для нелинейных операторных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т. 17, № 4. С. 847–858.
19. Оптимальные методы вычисления значений неограниченных операторов: препринт. Киев: Ин-т кибернетики УССР; 77–59 ИК, 1977. 17 с.
20. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с. (совм. с В. К. Ивановым, В. П. Тананой).
21. Устойчивая аппроксимация бесконечномерных задач линейного и выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1978. № 11. С. 23–33.
22. О сходимости обобщенного метода невязки и его дискретных аппроксимаций // Исслед. по мат. анализу: межвуз. темат. сб. Свердловск, 1979. С. 3–18. (Мат. записки / УрГУ; т. 11, № 4) (совм. с А. Л. Агеевым).
23. Общая схема дискретизации регуляризирующих алгоритмов и ее приложения // Тез. докл. Всесоюз. конф. по некорректно поставл. задачам. Фрунзе: ИЛИМ, 1979. С. 29–30.

24. Дискретизация и устойчивая аппроксимация экстремальных задач // Тез. докл. Всесоюз. конф. “Динамическое управление”, Свердловск, 30 мая – 1 июня 1979 г. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1979. С. 52–53.
25. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризирующих алгоритмов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 11–21.
26. Дискретная аппроксимация бесконечномерных задач математического программирования // Методы оптимизации и их прил.: сб. ст. Иркутск: СЭИ, 1979. С. 44–48.
27. Построение регуляризирующих алгоритмов по определению структуры аморфных тел методом рентгеноспектрального структурного анализа // Числ. и аналит. методы решения задач механики сплош. среды: сб. ст. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 3–25 (совм. с А. Л. Агеевым, Ю. А. Бабановым, Н. В. Ершовым).
28. Регуляризация и дискретизация в задачах математического программирования // 2-й симпозиум по методам решения нелинейн. уравнений и задач оптимизации: докл. и сообщ. Таллин: Валгус, 1981. Т. 1. С. 30–35.
29. Проекционно-итерационные методы решения некорректных задач и их приложения // Числ. решение краев. задач и интегр. уравнений: тез. конф. Тарту: Изд-во Тартус. ун-та, 1981. С. 76–78.
30. Общая схема дискретизации регуляризирующих алгоритмов в банаховых пространствах // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 2. С. 271–275.
31. Об одной итерационной схеме решения неустойчивых задач // Методы мат. программирования и их програм. обеспечение: тез. докл. науч.-техн. конф. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1981. С. 31–32.
32. Дискретная аппроксимация и устойчивость в экстремальных задачах // Методы аппроксимации и интерполяции: материалы 4-й Всесоюз. конф. “Вариационно-разност. методы в мат. физике”. Новосибирск, 1981. С. 44–48.
33. Дискретная аппроксимация и устойчивость в задачах оптимизации // Seminarber. Humboldt-Univ., Sek. Math.: proc. 13 Jahrestagung “Math. Optim.”. Berlin, 1981. № 39. S. 239–246.
34. A new interpretation of EXAFS spectra in real space. I. General formalism // Phys. Stat. Sol. 1981. Vol. 105. P. 747–754 (jointly with Yu. A. Babanov, A. L. Ageev, N. V. Ershov).
35. A new interpretation of EXAFS spectra in real space. II. A comparison of the regularization technique with the Fourier transformation method // Phys. Stat. Sol. 1981. Vol. 108. P. 103–111 (jointly with N. V. Ershov, A. L. Ageev, Yu. A. Babanov).
36. Проксимальный алгоритм с проектированием в задачах выпуклого программирования: науч. докл. Препринт / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1982. 47 с.
37. Устойчивая дискретизация экстремальных задач и ее приложения в математическом программировании // Мат. заметки. 1982. Т. 31, вып. 2. С. 269–280.
38. Проекционно-итерационные методы регуляризации линейных некорректных задач // Методы решения некоррект. задач и их прил.: тр. Всесоюз. шк.-семинара (Ноорус, 1981). Новосибирск, 1982. С. 38–46.
39. Дискретная аппроксимация и устойчивость в экстремальных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22, № 4. С. 824–839.
40. Amorphous problem in EXAFS data analysis // Phys. Stat. Sol. 1983. Vol. 117. P. 345–350 (jointly with A. L. Ageev, Yu. A. Babanov, N. V. Ershov, A. V. Serikov).
41. Регулярный алгоритм решения интегральных уравнений 1-го рода и его приложение к задачам спектроскопии // Интеграл. уравнения в прикл. моделировании: тез. докл. Респ. науч.-техн. конф. Киев, 1983. С. 56–57 (совм. с А. Л. Агеевым).
42. Пакет “ПРОЗА” для решения осесимметричных задач термоупругости // Структура и организация ППП. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1983. С. 100–115. (Материалы по мат. обеспечению) (совм. с А. Л. Агеевым, О. В. Коковихиной, Г. Я. Пересторониной, А. Ф. Сидоровым, Л. Ю. Тимерхановой, Т. И. Шабашовой).
43. Пакет программ для решения осесимметричных задач термоупругости “ПРОЗА” // Прикл. проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. Вып. 23. Горький, 1983. С. 163–164 (совм. с А. Л. Агеевым, О. В. Коковихиной, Г. Я. Пересторониной, А. Ф. Сидоровым, Л. Ю. Тимерхановой, Т. И. Шабашовой).
44. О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1983. № 7. С. 13–27 (совм. с А. Ф. Сидоровым).

45. Итерационно-аппроксимационные алгоритмы решения неустойчивых задач // Теория и методы решения некоррект. поставл. задач и их прил.: тез.докл. Всесоюз. шк.-семинара. Новосибирск, 1983. С. 15–22.
46. Исследование вариационно-разностного метода дискретизации в квазистатических задачах термоупругости // Точные и приближ. методы исслед. задач механики сплош. среды. Свердловск, 1983. С. 16–28.
47. Псевдосжимающие отображения и регулярные алгоритмы в задачах выпуклой оптимизации // Методы решения нелинейн. уравнений и задач оптимизации: докл. и сообщ. 3-го симпозиума. Таллин: Валгус, 1984. С. 19–22.
48. Дискретная аппроксимация обобщенной проблемы моментов // Методы мат. программирования и их програм. обеспечение: тез. докл. науч.-техн. конф. Свердловск, 1984. С. 35–36.
49. Regular method in X-ray scattering analysis of amorphous and liquid metals // Phys. Stat. Sol. 1984. Vol. 121. P. 451–460 (jointly with N. V. Ershov, A. L. Ageev, A. V. Serikov, Yu. A. Babanov).
50. Regular solution of a system of integral equations for EXAFS and X-ray scattering // 3rd Intern. EXAFS conf. Stanford, 1984. P. 113–114 (jointly with Yu. A. Babanov, N. V. Ershov, A. L. Ageev).
51. Псевдосжимающие отображения и итерационные методы решения некорректных задач с априорной информацией // Теория и методы решения некорректно поставл. задач и их прил.: тр. Всесоюз. шк.-семинара. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1985. С. 31–32.
52. Дискретизация, итерационно-аппроксимационные алгоритмы решения неустойчивых задач и их приложения: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / ИММ УНЦ АН СССР. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. 30 с.
53. Регулярные алгоритмы в структурных исследованиях многокомпонентных аморфных сплавов // Всесоюз. шк.-семинар “Мат. моделирование в науке и технике”: тез. докл. Пермь, 1986. С. 68–69 (совм. с А. Л. Агеевым [и др.]).
54. A new method of determining partial radial distribution functions for amorphous alloys. I: The quasibinary problem // J. Non-Crystal. Sol. 1986. Vol. 79. P. 1–17 (jointly with Yu. A. Babanov, N. V. Ershov, V. R. Shvetsov, A. V. Serikov, A. L. Ageev).
55. Определение парциальных функций радиального распределения по данным рассеяния и поглощения рентгеновских лучей // Аналит. и числ. методы исслед. задач механики сплош. среды: сб. науч. тр. Свердловск, 1987. С. 40–47 (совм. с А. Л. Агеевым, Ю. А. Бабановым, Н. В. Ершовым, В. Р. Швецовым, А. В. Сериковым).
56. Длина химической связи. Комплекс программ обработки данных рентгеноспектрального анализа: препринт. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1987. 92 с. (совм. с А. Л. Агеевым, Н. В. Ершовым, В. Р. Швецовым, Ю. А. Бабановым).
57. К обоснованию проекционно-сеточного метода и вычислительных процедур для стационарных задач термоупругости // Аналит. и числ. методы исслед. задач механики сплош. среды: сб. науч. тр. Свердловск, 1987. С. 23–39.
58. Итерационные процессы для функциональных уравнений при наличии априорной информации о решении // Всесоюз. конф. по теории и прил. функционально-дифференц. уравнений: тез. докл. Душанбе, 1987. Ч. 1. С. 75.
59. Вариационно-проекционные методы и разрешающие алгоритмы для стационарных задач упругости // Актуал. проблемы вычисл. и прикл. математики: тез. докл. Всесоюз. конф. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1987. С. 45–46.
60. Iterative methods for the approximate solution of ill-posed problems with a priori information and their application // Inverse and ill-posed probl. (Sankt Wolfgang, 1986). Boston, etc.: Acad. Press, 1987. P. 211–229. (Notes and Reports Math., Sci. and Eng.; vol. 4).
61. Валентин Константинович Иванов (К 80-летию со дня рождения) // Изв. вузов. Математика. 1988. № 10. С. 3–4 (совм. с Л. Н. Шевриным, И. В. Мельниковой, В. П. Тананой).
62. Методы решения операторных уравнений с априорной информацией // Числ. методы и оптимизация: материалы 4-го симпозиума. Таллин, 1988. С. 70–80.
63. Итерационные методы решения некорректных задач с априорной информацией в гильбертовых пространствах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 7. С. 971–980.
64. Жить стало интересно: беседа с В. К. Ивановым накануне его 80-летия. // Наука Урала. 1988. № 40 (совм. с В. В. Арестовым, А. В. Кряжимским).
65. Методы решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений: метод, указания к разделу “Линейная алгебра” для студентов всех специальностей. Свердловск: СГИ, 1988. 54 с.

66. Anomalous x-ray scattering study of amorphous alloys // Nuclear Instruments and Methods Phys. Res. 1989. Vol. A282. P. 646–650 (jointly with Yu. A. Babanov, R. Sh. Sadykova, V. R. Shvetsov, A. V. Serikov, A. L. Ageev).
67. Методы решения неустойчивых задач: учеб. пособие / УрГУ. Свердловск, 1989. 94 с.
68. Метод исследования атомной структуры бинарных аморфных сплавов по данным рассеяния и поглощения рентгеновских лучей / АН СССР, ИФМ. Свердловск, 1989. 34 с. Деп. в ВИНТИ, 13.01.89, № 661–В89 (совм. с В. Р. Швецовым, А. Л. Агеевым, Ю. А. Бабановым, Р. Ш. Садыковой).
69. Об одной вычислительной схеме метода упругих решений для статических осесимметричных упругопластических задач // Числ. и аналит. методы моделирования в механике сплош. среды: сб. науч. тр. Свердловск: УрО АН СССР, 1989. С. 19–25 (совм. с Г. Я. Пересторониной, Л. Ю. Тимерхановой).
70. Априорная информация и итерационные методы решения некорректных задач // Исслед. по топологии и теории операторов. Свердловск, 1990. С. 26–33. (Мат. записки / УрГУ; т. 16, № 4).
71. Катастрофы и парадоксы при решении неустойчивых задач на ЭВМ // Такая разная математика. М.: Знание, 1991. С. 11–25. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика; № 10) (совм. с А. Л. Агеевым).
72. Некорректные задачи и итерационная аппроксимация неподвижных точек псевдосжимающих отображений // Некорректно поставл. задачи в естест. науках: тез. докл. Междунар. конф. М.: Изд-во ИПМ АН СССР, 1991. С. 98.
73. Итерационная аппроксимация решения в конечной проблеме моментов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 5. С. 1042–1045.
74. Аппроксимационно-итерационные алгоритмы решения некорректных задач с априорной информацией // Условно-коррект. задачи мат. физики и анализа: сб. науч. работ / ИМ СО РАН. Новосибирск: Наука, 1992. С. 64–74.
75. Ill-posed problems and iterative approximation of fixed points of pseudo-contractive mappings // Ill-posed probl. in natural sci.: conf. (Moscow, 1991). Utrecht: VSP, 1992. P. 214–223.
76. Combination of EXAFS and differential anomalous x-ray scattering for studying Ni<sub>2</sub>Zr amorphous alloy // Z. Naturforsch. 1992. Bd. 47a, no. 19. S. 1991–1996 (jointly with A. L. Ageev, Yu. A. Babanov, V. R. Shvetsov, A. F. Sidorenko).
77. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ “Наука”, 1993. 262 с. (совм. с А. Л. Агеевым).
78. Валентин Константинович Иванов // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, вып. 5. С. 147–152 (совм. с М. М. Лаврентьевым, Н. Н. Красовским, Ю. С. Осиповым, А. Н. Тихоновым [и др.]).
79. Итерационные алгоритмы решения конечной проблемы моментов // Проблемы теоретической и прикладной математики: тез. докл. 24-й молодеж. конф. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1993. С. 13–14 (совм. с Л. Е. Барашковой).
80. Iterative approximation of solutions of nonlinear unstable problems in a Hilbert space // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 1993. Vol. 8, no. 2. P. 127–144 (jointly with A. V. Smirnova).
81. Регулярные методы расшифровки структуры бинарных сплавов / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1995. 18 с. Деп. в ВИНТИ 28.02.95, № 546–В95 (совм. с А. Л. Агеевым, Т. В. Болотовой, Е. В. Поповой).
82. Методы итеративной регуляризации для некорректных задач // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 69–84.
83. Монотонные итерационные процессы для операторных уравнений 1-го рода в полуупорядоченных пространствах // Алгор. и числ. анализ некоррект. задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург: УрГУ; ИММ УрО РАН, 1995. С. 38–39.
84. Методы итеративной регуляризации для монотонных операторных уравнений в  $K$ -пространствах и их приложения // Методы оптимизации и их прил.: тез. докл. 10-й Байкал. шк.-семинара. Иркутск, 1995. С. 246–247.
85. Итерационная регуляризация монотонных операторных уравнений первого рода в полуупорядоченных  $B$ -пространствах // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 2. С. 151–154.
86. Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 p. (Inverse and ill-posed probl. ser.) (jointly with A. L. Ageev).
87. Iterative processes for monotone operator equations in partially ordered banach spaces // Intern. conf. “Adv. Math., Comput. and Appl.” (AMCA–95): abstr. Kos-Z. Novosibirsk: NCC Publ., 1995. P. 339–340.
88. О радиозондировании ионосферы с волноводами // Теория и практика интерпретации данных электромагнитных геофиз. методов: докл. Рос. конф. Екатеринбург: Наука, Урал. отд-ние, 1996. С. 51–55 (совм. с А. Л. Агеевым, Э. Н. Бессоновой [и др.]).

89. О восстановлении трехмерного рельефа геологической границы по гравитационным данным // Физика Земли. 1996. № 11. С. 58–62 (совм. с И. Л. Пруткиным, Л. Ю. Тимерхановой).
90. Монотонные итерационные процессы для операторных уравнений в полупорядоченных пространствах // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 1. С. 7–9.
91. Monotone iterative methods in nonlinear analysis // Inverse and ill-posed probl. (IPPP-96): abstr. Intern. conf. dedic. memory A. N. Tikhonov. M.: DIALOG-MGU, 1996. P. 188.
92. Monotone iterative processes for nonlinear operator equations and their applications to Volterra equations // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 1996. Vol. 4, no. 4. P. 331–340.
93. Радиозондирование ионосферы на двух частотах. Алгоритмический анализ интегрального уравнения Фредгольма — Стильтеса // Теорет. проблемы в геофизике: сб. науч. тр. М.: Наука, 1997. С. 100–118. (Вычисл. сейсмология; вып. 29) (совм. с А. Л. Агеевым, Э. Н. Бессоновой, В. М. Маркушевичем).
94. Обратная задача радиозондирования ионосферы при наличии волноводов (долин). Единственность решения // Теорет. проблемы в геофизике: сб. науч. тр. М.: Наука, 1997. С. 81–99. (Вычисл. сейсмология; вып. 29) (совм. с Э. Н. Бессоновой, В. М. Маркушевичем, И. В. Савиным, А. Л. Агеевым).
95. Решение обратной задачи гравиметрии о границах раздела трех сред // Физика Земли. 1998. № 3. С. 54–57 (совм. с А. Л. Агеевым, Т. В. Болотовой).
96. Определение электронной концентрации внутри ионосферного волновода по скачку тау-функции на нем // Вопросы геодинамики и сейсмологии: сб. науч. тр. М., 1998. С. 225–233. (Вычисл. сейсмология; вып. 30) (совм. с А. Л. Агеевым, Э. Н. Бессоновой, В. М. Маркушевичем, С. Г. Киселевым).
97. Вторая Всероссийская конференция “Алгоритмический анализ некорректных задач” // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. С. 161–162. (Математика и механика; вып. 1.) (совм. с В. В. Арестовым).
98. Итерационные методы градиентного типа для нелинейных уравнений // Алгорит. анализ некоррект. задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург, 1998. С. 59–60.
99. О сходимости методов градиентного типа для нелинейных уравнений // Докл. РАН. 1998. Т. 359, № 1. С. 7–9.
100. Решение трехмерной задачи гравиметрии о восстановлении поверхности раздела двух сред // Алгорит. анализ некоррект. задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург, 1998. С. 61–62 (совм. с И. Л. Пруткиным, Л. Ю. Тимерхановой).
101. Iterative methods for unstable weakly nonlinear problems // NMA'98: 4th Intern. conf. on numerical methods and appl.: abstr. Sofia, 1998. P. 55.
102. Модифицированные схемы метода Гаусса — Ньютона для нелинейных некорректных задач // Информ. бюл. АМП. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. № 8. С. 60–61.
103. Итерационные процессы типа Ньютона — Чаплыгина // Дифференц. и интегр. уравнения: тез. докл. Междунар. науч. конф. Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 1999. С. 27.
104. Основы высшей математики: учебник для ун-тов. Екатеринбург: УрГУ, 1999. 376 с. (совм. с Ф. А. Шолоховичем).
105. Решение нелинейной задачи гравиметрии методами градиентного типа // Мат. моделирование. 1999. Т. 11, № 10. С. 86–91 (совм. с И. Л. Пруткиным, Л. Ю. Тимерхановой).
106. Наклонное зондирование как метод определения профиля электронной концентрации в долине // Геомагнетизм и аэрономия. 1999. Т. 39, № 3. С. 74–78 (совм. с А. Л. Агеевым, Э. Н. Бессоновой, С. Г. Киселёвым, В. М. Маркушевичем).
107. Параллельные алгоритмы решения трехмерной задачи упругости // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1999. Вып. 3. С. 34–47 (совм. с Е. Н. Акимовой).
108. Использование методов теории некорректно поставленных задач в геофизике // Геофизика и математика: материалы 1-й Всерос. конф. М.: ОИФЗ РАН, 1999. С. 24–27.
109. Discrete approximation in nonlinear infinite programming and application // Workshop on semi-infinite programming and related topics (SIP'99), 1999: abstr. Alicante, 1999. P. 22–23.
110. Итерационные процессы типа Гаусса — Ньютона для некорректных операторных уравнений // Докл. РАН. 2000. Т. 371, № 1. С. 35–37 (совм. с А. А. Мокрушиным).
111. О некоторых подходах к решению обратных задач геофизики // Распредел. системы: оптимизация и прил. в экономике и науках об окружающ. среде: сб. докл. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2000. С. 18–19 (совм. с И. Л. Пруткиным, Л. Ю. Тимерхановой).

112. Наклонное зондирование как метод определения электронной концентрации в ионосфере // Распредел. системы: оптимизация и прил. в экономике и науках об окружающ. среде: сб. докл. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2000. С. 273–276 (совм. с А. Л. Агеевым, Э. Н. Бессоновой, В. М. Маркушевичем).
113. Параллельный алгоритм решения трехмерной задачи упругости в случае смешанных граничных условий // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2000. Вып. 4. С. 63–75 (совм. с Е. Н. Акимовой).
114. Регуляризация и дискретная аппроксимация некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Докл. РАН. 2001. Т. 376, № 1. С. 11–14.
115. Последовательное решение обратных задач гравиметрии и магнитометрии при восстановлении пространственного рельефа геологических границ // Алгорит. анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2001. С. 267–268 (совм. с Г. Я. Пересторониной, Л. Ю. Тимерхановой, И. Л. Пруткиным).
116. Устойчивая аппроксимация решения некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Алгорит. анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2001. С. 23–25.
117. Как корректно решать некорректные задачи? // Наука Урала. 2001. № 6. С. 8.
118. Об одном алгоритме решения уравнения Фредгольма — Стильтьеса // Изв. вузов. Математика. 2001. № 4. С. 3–10 (совм. с Т. И. Серёжниковой).
119. Аппроксимация решений некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Обратные и некорректно поставл. задачи: 7-я конф., посвящ. памяти А. Н. Тихонова: тез. докл. М.: МАКС Пресс, 2001. С. 16.
120. Восстановление рельефа геологических границ в трехслойной среде по гравитационным и магнитным данным // Геофизика и математика: материалы 2-й Всерос. конф. Пермь: Горн. ин-т УрО РАН, 2001. С. 35–42 (совм. с Г. Я. Пересторониной, И. Л. Пруткиным, Л. Ю. Тимерхановой).
121. Iterative methods for solving nonlinear inverse problems and applications to gravimetry and magnetometry // Applied inverse probl.: theoret. and comput. aspects. Montecatini Terme, 2001. P. 151.
122. Numerical comparison of iterative regularization methods for a parameter estimation problem in a hyperbolic PDE // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2001. Vol. 9, no. 6. P. 615–626 (jointly with S. I. Kabanikhin, R. Kowar, O. Scherzer).
123. Алгоритмы решения прямой и обратной задачи наклонного радиозондирования ионосферы // Мат. моделирование. 2002. Т. 14, № 11. С. 23–32 (совм. с А. Л. Агеевым, Т. В. Антоновой, Э. Н. Бессоновой, В. М. Маркушевичем).
124. Решение задачи долин при наклонном зондировании импульсным источником вдоль широты внешнего магнитного поля // Проблемы теорет. сейсмологии и сейсмичности: сб. науч. тр. М.: ГЕОС, 2002. С. 89–99. (Вычисл. сейсмология; вып. 33) (совм. с В. М. Маркушевичем, Э. Н. Бессоновой, С. Г. Киселёвым, А. Л. Агеевым).
125. Всероссийская конференция “Алгоритмический анализ неустойчивых задач” // Изв. Урал. гос. ун-та. 2002. № 22. С. 183–184. (Математика и механика; вып. 4) (совм. с В. В. Арестовым).
126. Параллельный алгоритм решения обратной задачи гравиметрии на основе регуляризованного метода Ньютона // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2002. Вып. 6. С. 51–64 (совм. с Е. Н. Акимовой).
127. Регуляризация и итеративная аппроксимация для линейных некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург, 2002. Т. 8, № 1. С. 189–202. (Пер. на англ.: Regularization and iterative approximation for linear ill-posed problems in the space of functions of bounded variation // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. Suppl. 1. P. S225–S239).
128. Theory of linear ill-posed problems and its applications. Utrecht, etc.: VSP, 2002. 281 p. (Inverse and ill-posed probl. ser.) (jointly with V. K. Ivanov, V. P. Tanana).
129. Regularization and iterative approximation for linear ill-posed problems in the space of functions of bounded variation // Ill-Posed and Inverse Probl. Zeist: VSP, 2002. P. 403–423.
130. Двухэтапный метод аппроксимации негладких решений некорректных задач // Информ. бюл. АМП. Екатеринбург, 2003. № 10. С. 63–64 (совм. с Т. И. Серёжниковой).
131. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойной среды // Мат. моделирование. 2003. Т. 15, № 2. С. 69–76 (совм. с Г. Я. Пересторониной, И. Л. Пруткиным, Л. Ю. Тимерхановой).
132. Основы высшей математики: учебник для гуманитар. и соц.-экон. специальностей и направлений. 2-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: Урал. изд-во, 2003. 416 с. (совм. с Ф. А. Шолоховичем).

133. Решение одной задачи восстановления изображения методом регуляризации и итеративной аппроксимации // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2003. Вып. 7. С. 21–31 (совм. с Т. И. Серёжниковой, С. В. Шарфом).
134. Retrieval of three-dimensional relief of geological boundary from gravity and magnetic data // Intern. sympos. inverse probl. engineering mech.: abstr. Nagano, 2003. P. 77.
135. Parallelization of algorithms for solving the inverse gravity and magnetometry problems // Proc. 31st Intern. summer school “Adv. probl. in mech.” St. Petersburg, 2003. P. 10–17 (jointly with E. N. Akimova).
136. Parallel algorithms for solving the inverse gravimetry and magnetometry problem // 9th Intern. conf. “Numer. methods in continuum mech.”: abstr. Zilina, 2003. P. 12–14 (jointly with E. N. Akimova).
137. Прямая и обратная задачи наклонного радиозондирования ионосферы при наличии волноводов // Мат. моделирование. 2004. Т. 16, № 3. С. 22–32 (совм. с А. Л. Агеевым, Т. В. Антоновой, Э. Н. Бессоновой).
138. Регуляция в пространстве Соболева и аппроксимация негладких решений некорректных задач // Алгорит. анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. конф. Екатеринбург, 2004. С. 28–29.
139. Двухэтапный метод аппроксимации негладких решений и восстановление зашумленного изображения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 126–135 (совм. с Т. И. Серёжниковой).
140. Параллельные итерационные алгоритмы решения обратной задачи гравиметрии // Теорет. основы и конструирование числ. алгоритмов для решения задач мат. физики: тез. 15-й Всерос. конф. Дюрсо, 2004. С. 5–6 (совм. с Е. Н. Акимовой).
141. Опыт решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе // Декомпозиционные методы в мат. моделировании и информатике: тез. докл. 2-й Моск. конф. М.: ВЦ РАН, 2004. С. 5–7 (совм. с Е. Н. Акимовой, П. С. Мартышко).
142. Распараллеливание и оптимизация при решении задачи восстановления изображения двухэтапным методом // Алгоритмы и програм. средства парал. вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2004. Вып. 8. С. 47–64 (совм. с Т. И. Серёжниковой, С. В. Шарфом).
143. Parallel iterative algorithms for solving the inverse gravity problem // Advanced probl. mech., APM’2004: proc. 32nd Intern. summer school. СПб.: ИПМ РАН, 2004. P. 1–8 (jointly with E. N. Akimova).
144. Methods for solving ill-posed problems with a priori information // Conf. “Modern computational methods in appl. math.”: abstr. Bedlewo: PAN, 2004. P. 47.
145. Ill-posed problems with a priori information: Methods and applications // Intern. conf. “Inverse problems: modeling and simulation”: abstr. (Fethiye, Turkey). Kocaeli, 2004. P. 148–149.
146. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа: теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. 210 с. (совм. с И. И. Ерёминим).
147. Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.
148. О регулярных методах решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе // Вопросы теории и практики геолог. интерпретации гравитац., магнит. и электр. полей. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2005. С. 9–10 (совм. с Е. Н. Акимовой, Г. Я. Пересторониной, Л. Ю. Тимерхановой, П. С. Мартышко).
149. Всероссийская конференция “Алгоритмический анализ неустойчивых задач” // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 38. С. 175–176. (Математика и механика; вып. 8.) (совм. с В. В. Арестовым).
150. Решение обратной задачи магнитометрии с использованием параллельных технологий // Вопросы теории и практики геолог. интерпретации гравитац., магнит. и электр. полей. Екатеринбург, 2006. С. 447–450 (совм. с Е. Н. Акимовой, Г. Я. Пересторониной).
151. Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 1. С. 64–77. (Пер. на англ.: Approximation of nonsmooth solutions of linear Ill-posed problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2006. Suppl. 1. P. S247–S262).
152. Решение обратных задач гравиметрии и магнитометрии на многопроцессорном вычислительном комплексе // Актуал. пробл. прикл. математики и механики: тез. докл. 3-й Всерос. конф. (Абрау-Дюрсо). Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 2006. С. 113–115 (совм. с Е. Н. Акимовой, Г. Я. Пересторониной, Л. Ю. Тимерхановой).
153. Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу: учеб. пособие по спец. курсу. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2006. 164 с. (совм. с Л. Б. Ряшко).
154. Some tendencies in the Tikhonov regularization of ill-posed problems // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2006. Vol. 14, no. 8. P. 813–840.

155. Andrei Nikolaevich Tikhonov 1906.10.30 – 1993.10.07 // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2006. Vol. 14, no. 8. P. 747–749 (jointly with M. M. Lavrentiev [et al.]).
156. Устойчивые приближенные методы нахождения негладких решений обратных задач и их применения // Тихонов и современ. математика: тез. докл. Междунар. конф. Секц. 4. М.: Фак. вычисл. математики и кибернетики МГУ, 2006. С. 203.
157. О сотрудничестве математиков Сибири и Урала // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. А.22–А.27. URL: <http://semr.math.nsc.ru> (совм. с В. И. Бердышевым, А. А. Махнёвым, Ю. Н. Субботиным).
158. Решение обратной задачи магнитометрии на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС–1000 // Материалы 34-й сессии Междунар. семинара им. Д. Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. М.: ИФЗ РАН, 2007. С. 8–11 (совм. с Е. Н. Акимовой).
159. Новые классы негладких стабилизаторов в вариационных методах регуляризации некорректных задач // Информ. бюл. АМП: 13-я Всерос. конф. “Мат. программирование и прил.”: тез. докл. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. № 11. С. 231–232 (совм. с М. А. Коротким).
160. О регулярных методах решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе // Вычисл. методы и программирование. 2007. Т. 8, № 1. С. 107–116 (совм. с Е. Н. Акимовой, Г. Я. Пересторониной, Л. Ю. Тимерхановой [и др.]).
161. О регулярных методах решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе // Парал. вычисл. технологии (ПаВТ’2007): тр. Междунар. науч. конф. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. Т. 1. С. 31–43 (совм. с Е. Н. Акимовой, Г. Я. Пересторониной, Л. Ю. Тимерхановой, П. С. Мартышко, Д. Е. Кокпаровым).
162. О распараллеливании и визуализации при решении некорректных задач методами регуляризации и итерационной аппроксимации на вычислительном комплексе МВС–1000 // Парал. вычисл. технологии (ПаВТ’2007): тр. Междунар. науч. конф. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. Т. 2. С. 227–233 (совм. с Т. И. Серёжниковой, С. В. Шарфом, П. А. Васёвым).
163. К 75-летию академика М. М. Лаврентьева // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. 10, № 3. С. 3–12 (совм. с С. И. Кабанихиным, В. Г. Романовым).
164. Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functionals // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2007. Vol. 15, no. 8. P. 853–865 (jointly with M. A. Korotkii).
165. Pioneering papers by M. M. Lavrentiev // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2007. Vol. 15, no. 5. P. 441–450 (jointly with S. I. Kabanikhin, V. G. Romanov).
166. Some approaches to reconstruction of nonsmooth solutions of linear ill-posed problems // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2007. Vol. 15, no. 6. P. 625–640.
167. Метод квазирешений В. К. Иванова и фейеровские процессы // Алгорит. анализ неустойчивых задач: тез. докл. Междунар. конф. к 100-летию В. К. Иванова. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2008. С. 44–45.
168. Методы решения обратной задачи магнитометрии // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 620–631 (совм. с Е. Н. Акимовой, Г. Я. Пересторониной [и др.]).
169. Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС–1000 на основе регуляризованного метода Ньютона // Материалы междунар. конф. “Мат. методы в геофизике” (ММГ–2008). Новосибирск, 2008. 6 с. (CD-ROM). URL: <http://www.sccc.ru/Conf/mmg2008/index.html> (08.07.2009) (совм. с Е. Н. Акимовой).
170. Решение обратной задачи магнитометрии и гравиметрии о восстановлении разделяющей поверхности сред // Материалы 35-й сессии Междунар. семинара им. Д. Г. Успенского “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей” (Ухта). Сыктывкар, 2008. С. 10–13 (совм. с Е. Н. Акимовой, Г. Г. Скориком).
171. Решение обратных геофизических задач на многопроцессорном вычислительном комплексе // Геофиз. исслед. Урала и сопредел. регионов: материалы Междунар. конф. Екатеринбург: Ин-т геофизики УрО РАН, 2008. С. 4–7 (совм. с Е. Н. Акимовой).
172. Итеративная регуляризация в задаче определения содержания  $CO_2$  в атмосфере по данным спутникового зондирования // Алгорит. анализ неустойчивых задач: тез. докл. Междунар. конф. к 100-летию В. К. Иванова. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2008. С. 119–120 (совм. с К. Г. Грибановым, В. И. Захаровым).
173. Иванов Валентин Константинович // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58. С. 7–23. (Математика. Механика. Информатика; вып. 11.) (совм. с В. Н. Страховым, В. В. Арестовым [и др.]).

174. Международная конференция “Алгоритмический анализ неустойчивых задач” // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58. С. 163–165. (Математика. Механика. Информатика; вып. 11.) (совм. с В. В. Арестовым).
175. Метод квази-решений Иванова и его эффективная реализация // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58. С. 59–77. (Математика. Механика. Информатика; вып. 11.)
176. The method of quasi-solutions by Ivanov is the effective method of solving ill-posed problems // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2008. Vol.16, no. 6. P. 537–552.
177. Piecewise uniform regularization of inverse problems with nonsmooth solutions // Abstr. 4th Intern. conf. “Inverse problems: modeling and simulation”, Fethiye–TURKEY. Istanbul: Literatur, 2008. P. 189–190 (jointly with M. A. Korotkii).
178. Valentin Konstantinovich Ivanov (1908-1992) // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2008. Vol. 16, no. 6. P. 529–536 (jointly with V. N. Strakhov, V. V. Arestov [et al.]).
179. Методы решения интегральных уравнений с априорной информацией и их приложения к обратным задачам зондирования // Сб. тез. конф. “Интегральные уравнения – 2009”. Киев: ИПМЭ им. Г.Е. Пухова НАН Украины, 2009. С. 3–5.
180. Итерационные процессы фейеровского типа в некорректных задачах с априорной информацией // Изв. вузов. Математика. 2009. № 2. С. 3–24.
181. Регулярные методы решения обратной задачи скважинной геофизики // Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 40-й Всерос. молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. С. 76–82 (совм. с Г. Г. Скориком, Е. А. Пимоновым, Ф. Дж. Кучуком).
182. К истории уральской конференции по некорректным задачам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 279–281. (Пер. на англ.: On the history of the Ural conference on Ill-posed problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Suppl. 1. P. S283–S285).
183. Апробация методов итерационной регуляризации в задаче определения содержания метана в атмосфере по данным орбитального сенсора AIRS/AQUA // Актуал. проблемы математики, механики, информатики: сб. ст. конф. Екатеринбург: УРО РАН, 2009. С. 18–23 (совм. с К. Г. Грибановым, В. И. Захаровым).
184. Итерационные процессы фейеровского типа и их приложения // Актуал. проблемы теории устойчивости и упругости: тез. докл. Междунар. конф. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009. С. 44–45 (совм. с И. И. Ерёминным).
185. Модифицированный метод Левенберга — Марквардта для решения задачи деконволюции // Теория и числ. методы решения обрат. и некоррект. задач: тез. докл. молодеж. междунар. науч. шк.-конф. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2009. С. 13–14 (совм. с А. Л. Агеевым, Т. В. Антоновой [и др.]).
186. Регулярные методы решения задачи деконволюции, возникающей в скважинной геофизике // Теория и числ. методы решения обрат. и некоррект. задач: тез. докл. молодеж. междунар. науч. шк.-конф. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2009. С. 29–30 (совм. с Г. Г. Скориком, Е. А. Пимоновым, Ф. Дж. Кучуком).
187. О расчете негладких решений интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // Супервычисления и мат. моделирование: 11-й Междунар. семинар: тез. Саров: ФГУП “РФЯЦ–ВНИИЭФ”, 2009. С. 33 (совм. с Т. И. Серёжниковой).
188. Применение регулярных методов для решения задачи, возникающей при интерпретации данных гидродинамических испытаний скважин // Соврем. проблемы вычисл. математики и мат. физики: тез. докл. Междунар. конф. М.: МГУ; МАКС Пресс, 2009. С. 33–34 (совм. с Г. Г. Скориком, Е. А. Пимоновым, Ф. Дж. Кучуком).
189. Operators and iterative processes of Fejer type: theory and applications. Berlin; New York: Gruyter, 2009. 155 с. (Inverse and ill-posed probl. ser.) (jointly with I. I. Eremin).
190. Iterative methods for solving ill-posed problems with a priori information and its applications // Теория и числ. методы решения обрат. и некоррект. задач: тез. докл. молодеж. междунар. науч. шк.-конф. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2009. С. 121.
191. Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 2. С. 15–23 (совм. с Т. И. Серёжниковой).
192. Итерационные процессы градиентного типа с приложением к нелинейным интегральным уравнениям // Proc. Intern. conf. “Integral equations – 2010”. Lviv: PAIS, 2010. С. 161–164.
193. Об аппроксимации негладких решений неустойчивых задач // Мат. моделирование, числ. методы и комплексы программ: материалы конф. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2010. С. 22–27.

194. Итерационные методы фейеровского типа // Мат. моделирование, числ. методы и комплексы программ: материалы конф. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2010. С. 27–29 (совм. с И. И. Ерёмным).
195. Inverse Problems with A Priori Information. Chap. 3. // Optimiz. and Regular. for Commutational Inverse Probl. and Appl. / Y. Wang, A. G. Yagola, C. Yang. Berlin, etc.: Springer, 2010. P. 35–64.
196. Iterative processes for nonlinear equations with quasi-monotone operator and its applications to inverse geophysical problems // Inverse problems: developments in theory and appl.: abstr. Workshop IP–TA. Warsaw, 2010. P. 35 (jointly with G. G. Skorik).
197. First ground-based FTIR observations of HDO to H<sub>2</sub>O ratio in the atmospheric water vapour over Ural // Abstracts of Workshop on the isotopologues in the atmosphere. Paris, 2010. URL: <http://www.lmd.ens.fr/wavacs/workshop2010/ABSTRACTS/TALK/> (jointly with K. G. Gribanov, V. I. Zakharov, S. A. Beresnev, R. Imasu, P. A. Chistyakov, G. G. Skorik).
198. Trace gases remote sensing in the atmosphere over Ural // Proc. abstr. 25th Intern. laser radar conf. – ILRC-25 (St. Petersburg). Tomsk: Publ. House of IAO SB RAS, 2010. Vol. 2. P. 871 (jointly with K. G. Gribanov, V. I. Zakharov, S. A. Beresnev, V. A. Poddubny, R. Imasu, P. A. Chistyakov, G. G. Skorik).
199. New regularization algorithms for solving the deconvolution problem in well test data interpretation // Appl. Math. 2010. Vol. 1, no. 5. P. 387–399 (jointly with G. G. Skorik, E. A. Pimonov, F. Kuchuk).
200. Iterative processes of gradient type with applications to gravimetry and magnetometry inverse problems // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2010. Vol. 18, no. 8. P. 855–876 (jointly with G. G. Skorik).
201. Итерационные процессы фейеровского типа для нелинейных операторных уравнений // Информ. бюл. АМП: 14-я Всерос. конф. “Мат. программирование и прил.”: тез. докл. № 12. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. С. 237–238.
202. Carbon and water cycles in pristine peatland and permafrost of subarctic of Western Siberia // Intern. conf. ERA Net RUS. Екатеринбург: УрО РАН, 2011. С. 33. URL: <http://www.uran.ru> (jointly with V. I. Zakharov).
203. Метод Левенберга — Марквардта и его модифицированные варианты для решения нелинейных уравнений с приложением к обратной задаче гравиметрии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 53–61 (совм. с Г. Я. Пересторониной).
204. Методы типа Левенберга — Марквардта для аппроксимации регуляризованных решений // Тезисы докл. междунар. конференции “Алгоритмический анализ неустойчивых задач”, посвящ. памяти В.К. Иванова. Екатеринбург: УрФУ, 2011. С. 29–30 (совм. с Г. Я. Пересторониной).
205. Итерационные методы градиентного типа в обратных задачах гравиметрии и магнитометрии // Тезисы докл. междунар. конференции “Алгоритмический анализ неустойчивых задач”, посвящ. памяти В.К. Иванова. Екатеринбург: УрФУ, 2011. С. 124 (совм. с Г. Г. Скорик).
206. Зондирование HDO/H<sub>2</sub>O в атмосфере Урала методом наземных измерений ИК-спектров солнечного излучения с высоким спектральным разрешением // Оптика атмосферы и океана. 2011. Т. 24. № 2. С. 124–127 (совм. с К. Г. Грибановым, В. И. Захаровым, С. А. Бересневым, Н. В. Рокотьяном, В. А. Поддубным, Р. Имасу, П. А. Чистяковым, Г. Г. Скориком).
207. Modified variant of the Levenberg–Marquardt method for solving irregular nonlinear inverse problems // The 8th Congress of ISAAC. M.: PFUR, 2011. P. 310 (jointly with G. Ya. Perestoronina).

УДК 517.988.68

## SOME NEW CLASSES OF INVERSE COEFFICIENT PROBLEMS IN NONLINEAR MECHANICS<sup>1</sup>

Alemdar Hasanov

The present study deals with the following two types of inverse problems governed by nonlinear PDEs, and related to determination of unknown properties of engineering materials based on boundary/surface measured data. The first inverse problem consists of identifying the unknown coefficient  $g(\xi^2)$  (plasticity function) in the nonlinear differential equation of torsional creep  $-(g(|\nabla u|^2)u_{x_1})_{x_1} - (g(|\nabla u|^2)u_{x_2})_{x_2} = 2\phi$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ , from the torque (or torsional rigidity)  $T(\phi)$ , given experimentally. The second class of inverse problems is related to identification of the unknown coefficient  $g(\xi^2)$  in the nonlinear bending equation  $Au \equiv (g(\xi^2(u))(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}/2))_{x_1 x_1} + (g(\xi^2(u))u_{x_1 x_2})_{x_1 x_2} + (g(\xi^2(u))(u_{x_2 x_2} + u_{x_1 x_1}/2))_{x_2 x_2} = F(x)$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ . The boundary measured data here is assumed to be the deflections  $w_i[\tau_k] := w(\lambda_i; \tau_k)$ , measured during the quasi-static bending process, given by the parameter  $\tau_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , at some points  $\lambda_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ ,  $i = \overline{1, M}$  of a plate. Based on obtained continuity property of the direct problem solution with respect to coefficients, and compactness of the set of admissible coefficients, an existence of quasi-solutions of the considered inverse problems are proved. Some numerical results, useful from the points of view of nonlinear mechanics and computational material science, are demonstrated.

Keywords: inverse coefficient problem, material properties, quasisolution method.

*Dedicated to 70th Birthday of the Corresponding-Member of the RAS, Professor Vladimir Vasin*

### 1. Introduction

Determination of unknown materials properties based on boundary/surface measured data is one of central and actual problems of computational material sciences (see, [4–6; 8–12; 15] and references therein). Mathematical modeling of these problems leads to inverse coefficient problems for nonlinear PDEs of various types [12]. It is known from inverse problems theory that inverse coefficient problems are most difficult in comparison with all other types inverse problems. Moreover, these problems are severely ill-posed [8–12], which means that very close measured output data may correspond to quite different materials (i.e. coefficients).

In view of Materials Theory and Computational Materials Science all these classes of problems can be defined as a *problem of determination of unknown material properties* from boundary/surface measured data. In practice, these measured data can be given in the forms of additional Dirichlet or Neumann types of boundary conditions, or nonlocal additional conditions (i.e. integral operator). From the mathematical theory of inverse problems all the three classes of problems are defined to be as *inverse coefficient problems based on boundary measured output data* [11, 12]. An unknown coefficient is defined to be *an input data*. Introducing the input-output mapping  $\Phi: \mathcal{G} \mapsto \Pi$ ,  $\Phi(\mathcal{G}) \subset \Pi$ , from the *class of admissible coefficients*  $\mathcal{G}$  to the *class of admissible measured output data*  $\Pi$ , we may formulate all the above problems in the form of the operator equation  $\Phi g = \mathcal{P}$ ,  $g \in \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{P} \in \Pi$ . The inverse operator  $\Phi^{-1}: \Phi(\mathcal{G}) \subset \Pi \mapsto \mathcal{G}$  is not continuous which means ill-posedness of inverse problems.

The aim of this work is to generalize various studies, related to determination of unknown properties of engineering materials, from mathematical and engineering literature in order to show

---

<sup>1</sup>Part of the results have been announced at the Satellite Conference of International Congress of Mathematicians, 14-17 August, 2010, Delhi - India.

that, all the above defined classes of inverse/identification problems can be studied from a common mathematical and computational point of view, since they have similar/common distinguished features. Our methodology is based on the variational approach with the monotone potential operator and weak solution theory for PDEs for corresponding nonlinear direct problems. For all inverse problems the quasisolution method, introduced by V.K. Ivanov, V.V. Vasin and V.P. Tanana [13], is applied to obtain an existence of a quasisolution in appropriate class of admissible coefficients.

The paper is organized as follows. In Section 2 physical and mathematical models for each inverse problems are proposed. Mathematical frameworks of ICP1 and ICP2 are given Section 3 and Section 4, accordingly. Some computational results with noise free and noisy data are presented in the final Section 5.

## 2. Physical and mathematical models of the inverse problems

Let us consider the torsion of a homogeneous isotropic beam, whose cross section occupies the domain  $\Omega := (0, l_1) \times (0, l_2)$ ,  $l_i > 0$ , under the load (torque) applied. Torsional rigidity is defined as the torque required for per unit angle of twist  $\phi > 0$  per unit length, when the Young's modulus of the material is set equal to one. In the considered physical model the quasistatic process of torsion is simulated by the monotone increasing values  $0 < \phi_* = \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_m = \phi^*$  of the angle of twist  $\phi \in [\phi_*, \phi^*]$ ,  $\phi_* > 0$ . Hence the torque  $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\phi)$ , whose theoretical value is defined to be as the integral of the Prandtl stress function,  $u = u(x)$  over the domain  $\Omega$ , will be considered as a function of the angle  $\phi > 0$ , i.e.  $T[g] := T[g](\phi)$ . For a given material, i.e. for the given plasticity function  $g = g(\xi^2)$ , the solution of the nonlinear boundary value problem (3), corresponding to a given value  $\phi \in [\phi_*, \phi^*]$  of the angle of twist, will be defined to be as  $u(x) := u(x; g; \phi)$ .

The *inverse coefficient problem* (ICP1) here consists of determining the unknown coefficient  $g = g(\xi^2)$  in the following nonlinear elliptic problem with the nonlocal additional condition, which includes the experimentally given value  $\mathcal{T}(\phi)$  of the torque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{DP} \left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (g(|\nabla u|^2)\nabla u) = 2\phi, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{array} \right. \\ T[g](\phi) := 2 \int_{\Omega} u(x; g; \phi) dx = \mathcal{T}(\phi). \end{array} \right. \quad (1)$$

In this context, for a given angle  $\phi \in [\phi_*, \phi^*]$  and  $g(\xi^2)$ , the above nonlinear elliptic equation with the boundary condition given in (4) will be defined to be as the *direct problem* (subsequently, the DP). The functions  $g = g(\xi^2)$  and  $\mathcal{T}(\phi)$  will be defined to be *input data* and *measured output data*, respectively.

The function  $g = g(\xi^2)$  defined to be the *plasticity function*, describes elastoplastic properties of a homogeneous isotropic material, and  $\xi(u) = [(\partial u / \partial x_1)^2 + (\partial u / \partial x_2)^2]^{1/2}$  is the stress intensity. In view of  $J_2$ -deformation theory of plasticity, this function describes elastoplastic properties of a homogeneous isotropic beam, and satisfies the following conditions (see, [5, 8, 12])

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad 0 \leq c_0 \leq g(\xi^2) \leq c_1, \\ \text{(ii)} \quad g'(\xi^2) \leq 0, \\ \text{(iii)} \quad g(\xi^2) + 2\xi^2 g'(\xi^2) \geq \gamma_0 > 0, \quad \xi \in [\xi_*, \xi^*], \\ \text{(iv)} \quad g(\xi^2) = g_0, \quad \xi \in [\xi_*, \xi_0], \quad \xi_0 \in (\xi_*, \xi^*). \end{array} \right. \quad (2)$$

Here  $g_0 = 1/G$  is defined to be the shear compliance,  $G = E/(2(1+\nu))$  is the elastic shear modulus,  $E > 0$  is the Young's modulus and  $\nu \in (0, 0.5)$  is the Poisson ratio. The value  $\xi_0^2 = \max_{x \in \Omega} |\nabla u(x)|^2$  is assumed to be the elasticity limit of a material. Here and below the Poisson ratio  $\nu > 0$  is assumed to be known.

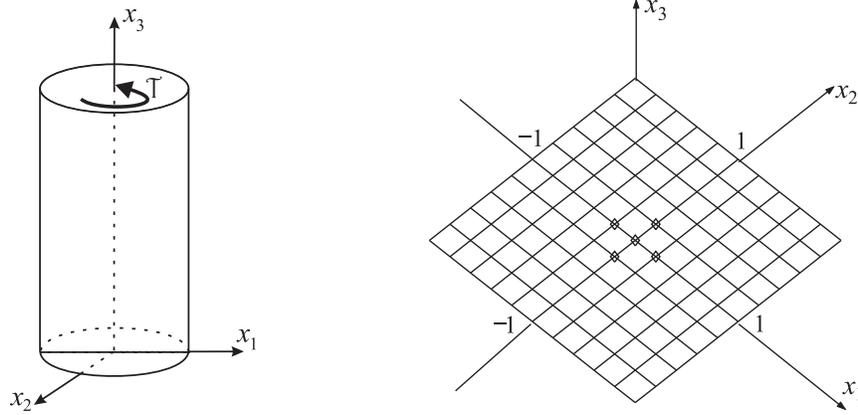


Fig. 1. Geometry of the torsion (left figure) and the bending (right figure).

Consider now the problem of identification of elastoplastic properties of an incompressible bending plate from measured deflections. Let us assume that the coordinate plane  $Ox_1x_2$  is the middle surface of an isotropic homogeneous incompressible plate with thickness  $h > 0$ . According to occupying the square  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: -l < x_1, x_2 < l, l > 0\}$ . Suppose that the measured values  $w_i[\tau_k] := w(\lambda_i; \tau_k)$ ,  $k = \overline{1, K}$ , of deflections at the points  $\lambda_i = (x_{1i}, x_{2i})$ ,  $i = \overline{1, M}$ , correspond to the given values of the external normal load  $q(x; \mathcal{T}) > 0$  to the middle surface of the plate (Figure 1 (right figure)). The loading is assumed to be quasistatic, generating by the increasing values  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_K$  of the loading parameter  $\mathcal{T}$ . Finally, without loss of generality, assume that an experiment is realized under the rigid clamped boundary conditions  $u = \partial u / \partial n = 0$ , where  $n$  is a unit outward normal to the boundary  $\partial\Omega$  of the plate.

Under these conditions the *problem of identification of elastoplastic properties, given by the function  $g(\xi^2(u))$ , of an incompressible bending plate from measured deflections (ICP2)* can be modeled as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{DP} \left\{ \begin{array}{l} Au \equiv (g(\xi^2(u))(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}/2))_{x_1x_1} + (g(\xi^2(u))u_{x_1x_2})_{x_1x_2} \\ + (g(\xi^2(u))(u_{x_2x_2} + u_{x_1x_1}/2))_{x_2x_2} = F(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2; \\ u(x) = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ w_i[\tau_k] := w(\lambda_i; \tau_k), \quad i = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, K}. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3)$$

Here  $F(x) = 3q(x; \mathcal{T})/h^3$ ,  $q(x; \mathcal{T})$  is the intensity (per unit area) of the load.

The process of bending is assumed to be quasistatic, generated by the increasing values of the normal load  $q(x; \mathcal{T})$ , corresponding to the values  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_K$  of the loading parameter  $\mathcal{T}$ . According to  $J_2$ -deformation theory of plasticity the coefficient  $g(\xi^2(u))$  of the nonlinear biharmonic equation (11) depends on the effective value of the plate curvature  $\xi^2(u) = (u_{x_1x_1})^2 + (u_{x_2x_2})^2 + (u_{x_1x_2})^2 + u_{x_1x_1}u_{x_2x_2}$ , which in turns, depends on the deflection function  $u(x)$ , i.e. on the solution of problem (3). The coefficient  $g(\xi^2(u))$ , defined to be as the plasticity function, describes the elastoplastic properties of an increasingly hardening plate and also satisfies conditions (2).

### 3. An analysis of ICP1

Let  $\mathcal{G}_c$  be the above defined compact set of admissible coefficients. Assume that the monotone increasing continuous function  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\phi)$ ,  $\phi \in [\phi_*, \phi^*]$ ,  $\phi_* > 0$ , represents an experimentally given torque. Then the inverse problem (1) (ICP1) can be formulated as a solution of the following

nonlinear functional equation:

$$T[g](\phi) := 2 \int_{\Omega} u(x; g; \phi) dx = \mathcal{T}(\phi), \quad g \in \mathcal{G}. \quad (4)$$

For the given  $g \in \mathcal{G}_c$  the function  $u(x) := u(x; g; \phi) \in \dot{H}^1(\Omega)$  is defined to be the weak solution of the direct problem, i.e. satisfies the following integral identity:

$$\int_{\Omega} g(|\nabla u|^2) \nabla u \cdot \nabla v dx = 2\phi \int_{\Omega} v dx, \quad \forall v \in \dot{H}^1(\Omega), \quad (5)$$

where  $H^1(\Omega)$  is the Sobolev space, and  $\dot{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega\}$  ([1]).

We define the left hand side of (5) as an *input-output map*  $T[\cdot]: \mathcal{G} \mapsto \mathbf{T}$  from the class of *admissible coefficients*  $\mathcal{G}_c$  to the class  $\mathbf{T}$  of output functions  $T[g] \in \mathbf{T}$ . Then ICP1 with the given measured output data  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\phi)$  can be reduced to the solution of the nonlinear operator equation (6), or to inverting the input-output map  $T[\cdot]: \mathcal{G} \mapsto \mathbf{T}$ .

Using the integral identity (5) we may derive some useful properties of a solution of ICP1. Specifically, substituting here  $v = u$  and then using the nonlocal additional condition (4) we obtain the following characterization of a solution of this inverse problem.

**Lemma 3.1.** *If the function  $g \in \mathcal{G}_c$  is a solution of ICP1, then it satisfies the following energy identity:*

$$\int_{\Omega} g(|\nabla u|^2) |\nabla u|^2 dx = \phi \mathcal{T}(\phi), \quad u \in \dot{H}^1(\Omega), \quad \phi \in [\phi_*, \phi^*].$$

Since  $g(\xi^2) \geq c_0 \geq 0$ , the above identity implies the boundedness of the norm  $\|\nabla u\|_0$  of the solution  $u \in \dot{H}^1(\Omega)$  via the measured output data  $\mathcal{T}(\phi)$ :  $\|\nabla u\|_0^2 \leq c_0^{-1} \phi^* \mathcal{T}(\phi^*)$ . Here  $\|\nabla u\|_0$  is the norm in the Sobolev space  $H^0(\Omega)$  which is equivalent to the norm  $\|u\|_1$  of the Sobolev space  $H^1(\Omega)$ , due to the homogeneous Dirichlet condition (1).

To analyze the input-output map  $T[\cdot]: \mathcal{G} \mapsto \mathbf{T}$ , first consider ICP1 for pure elastic torsion. In this case  $g(\xi^2) = 1/G$ , and we may apply the maximum principle to the linear direct problem

$$\begin{cases} -\Delta u = 2G\phi, & x \in \Omega, \\ u(s) = 0, & s \in \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Since the right hand side  $2G\phi$  is positive, we conclude  $u(x; G; \phi) > 0, \forall x \in \Omega$ . Let us now assume that  $G_1 > G_2 > 0$  and denote by  $u_i(x) := u(x; G_i; \phi)$ ,  $i = 1, 2$ , the corresponding solutions of the boundary value problems:

$$\begin{cases} -\Delta u_i = 2G_i\phi, & x \in \Omega; \quad i = 1, 2; \\ u_i(s) = 0, & s \in \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

where  $u_i(x) = u(x; G_i; \phi)$ ,  $i = 1, 2$ . Denoting by  $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$  we conclude that the function  $v(x)$  is the solution of the following problem:

$$\begin{cases} -\Delta v = \tilde{F}(x), & x \in \Omega \\ v(s) = 0, & s \in \Gamma, \end{cases}$$

where  $\tilde{F}(x) = 2G_1\phi - 2G_2\phi > 0$ . By the maximum principle we conclude that  $v(x) > 0, \forall x \in \Omega$  which means  $u_1(x) > u_2(x)$ . Taking into account the definition of the torque we obtain:

$$T[G_1](\phi) := 2 \int_{\Omega} u(x; G_1; \phi) dx > 2 \int_{\Omega} u(x; G_2; \phi) dx := T[G_2](\phi), \quad G_1 > G_2. \quad (6)$$

Thus we get the following lemma.

**Lemma 3.2.** *For pure elastic torsion the input-output map  $T[\cdot]: \mathcal{G} \mapsto \mathbf{T}$  is an isotone one, i.e. monotone increasing and therefore order preserving:  $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ ,  $G_1 > G_2$  implies  $T[G_1](\phi) > T[G_2](\phi)$ ,  $\forall \phi \in [\phi_*, \phi^*]$ .*

This result (i.e. inequality (6)) has a precise physical meaning: for a fixed angle of twist  $\phi \in [\phi_*, \phi^*]$ , an increase of the shear modulus  $G > 0$  leads to an increase of the rigidity of a material, and as a result, leads to increase of the torque.

In addition to the above monotonicity property, one can prove that the input-output map  $T[\cdot]: \mathcal{G} \mapsto \mathbf{T}$  is also continuous. To show this we need the following estimate (see, [9]).

**Lemma 3.3.** *Let  $u_1(x) := u[x; g_1; \phi]$ ,  $u_2(x) = u[x; g_2; \phi] \in \dot{H}^1(\Omega)$  be solutions of the direct problem (1), corresponding to the given functions  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ . Then for the input-output map  $T[\cdot]: \mathcal{G} \mapsto \mathbf{T}$  the following estimate holds:*

$$\|T[g_1] - T[g_2]\|_{C[\xi_*, \xi^*]} \leq 2\alpha^{-1}c_\Omega (\text{meas } \Omega)^{1/2} \|\nabla u_2\|_0 \|g_1 - g_2\|_{C[\xi_*, \xi^*]}, \quad \alpha, c_\Omega > 0. \quad (7)$$

Continuity, given by (7), and monotonicity of the input-output map  $T[\cdot]: \mathcal{G} \mapsto \mathbf{T}$  imply that this mapping is invertible. Therefore, ICP1 has a solution, at least for pure-elastic torsion case.

To prove a strong existence result for ICP1 we need a compactness result for the set of admissible coefficients, obtained in [6].

**Lemma 3.4.** *Let  $\mathcal{G}$  be the set of admissible coefficients  $\mathcal{G}$  satisfying conditions (i)-(iii) of (2). Assume that, in addition,  $g'(\xi^2) \in \mathcal{G}$  are monotone decreasing (or increasing) functions. Then this set is compact in  $H^1[\xi_*, \xi^*]$ .*

Now we introduce the cost functional

$$I_1(g) := \left| 2 \int_{\Omega} u(x; g; \phi) dx - \mathcal{T}(\phi) \right|, \quad \phi \in [\phi_*, \phi^*]. \quad (8)$$

and consider the following minimization problem:

$$I_1(g_*) := \min_{g \in \mathcal{G}_c} I_1(g). \quad (9)$$

**Theorem 3.1.** *Let conditions of Lemma 3.4 hold, and  $\mathcal{G}_c$  be the compact set of admissible coefficients. Then the minimization problem (9) for the functional (8) has at least one solution.*

**Proof.** We first use the estimate  $\|\nabla u\|_C := \max_{\bar{\Omega}} |\nabla u| \leq \eta^*$ ,  $\eta^* > 0$ , to obtain (see [9, Lemma 3.1]):

$$\alpha \|\nabla(u_1 - u_2)\|_0 \leq \eta^* \|g_1 - g_2\|_0, \quad \eta^*, \alpha > 0. \quad (10)$$

Now we estimate the difference  $|I_1(g_m) - I_1(g_*)|$ , assuming that  $\{g_m\} \subset \mathcal{G}_c$  is the sequence of coefficients converging to  $g_* \in \mathcal{G}_c$  in  $H^1$ -norm. We have:

$$\begin{aligned} |I_1(g_m) - I_1(g_*)| &= \left| \left| 2 \int_{\Omega} u(x; g_m; \phi) dx - \mathcal{T}(\phi) \right| - \left| 2 \int_{\Omega} u(x; g_*; \phi) dx - \mathcal{T}(\phi) \right| \right| \\ &\leq 2 \left| \int_{\Omega} u(x; g_m; \phi) dx - \int_{\Omega} u(x; g_*; \phi) dx \right| = 2 \left| \int_{\Omega} [u(x; g_m; \phi) - u(x; g_*; \phi)] dx \right|. \end{aligned}$$

Applying to the right hand side the Poincaré inequality we obtain:

$$|I_1(g_m) - I_1(g_*)| \leq 2(\text{meas } \Omega)^{1/2} \|\nabla(u(\cdot; g_m; \phi) - u(\cdot; g_*; \phi))\|_0.$$

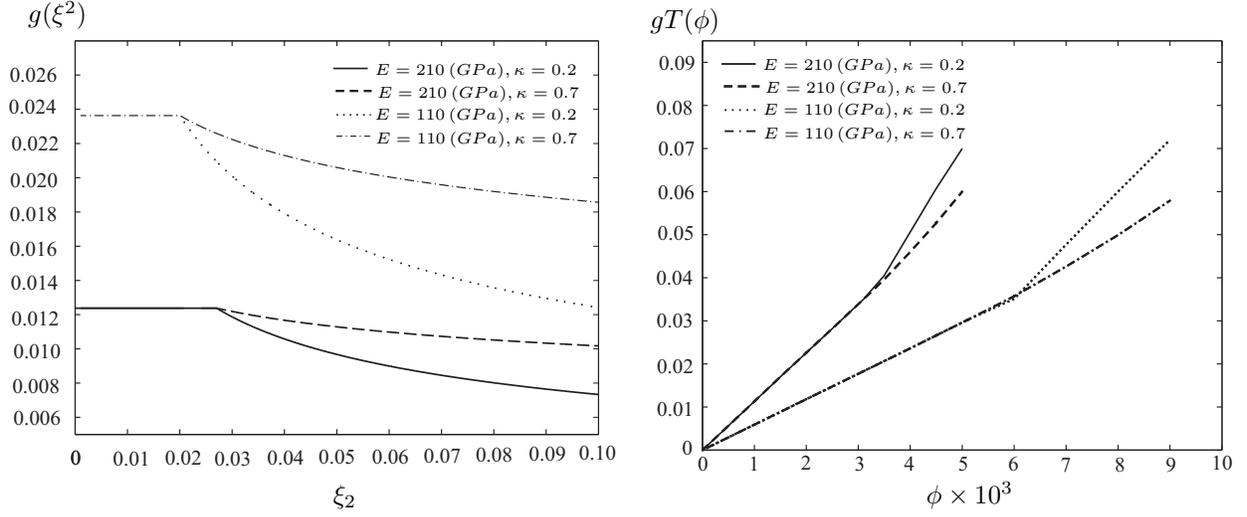


Fig. 2. Plasticity functions for stiff and soft steel materials (left figure) and the corresponding outputs (torques) (right figure).

This, with (10), implies:

$$|I_1(g_m) - I_1(g_*)| \leq 2\alpha^{-1}\eta^*(\text{meas } \Omega)^{1/2}\|g_m - g_*\|_0, \quad \eta^*, \alpha > 0,$$

$\forall \phi \in [\phi_*, \phi^*]$ . Thus, if the sequence of coefficients  $\{g_m\} \subset \mathcal{G}_c$  converges to  $g_* \in \mathcal{G}_c$  in  $H^1$ -norm, then the numerical sequence  $\{I_1(g_m)\}$  converges to  $I_1(g_*)$ . By Lemma 3.4 and the Weierstrass theorem this concludes the proof.  $\square$

Although the above results assert strict monotonicity and continuity of the input-output map  $T[\cdot]: \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{T}$ , this mapping is not continuously invertible. To show this let us assume that  $g(\xi^2)$  is given by the formula

$$g(\xi^2) = \begin{cases} 1/G, & \xi^2 \leq \xi_0^2, \\ 1/G (\xi^2/\xi_0^2)^{0.5(\kappa-1)}, & \xi_0^2 < \xi^2, \quad \kappa \in (0, 1], \end{cases} \quad (11)$$

which corresponds to the well-known Ramberg-Osgood curve  $\sigma_i = \sigma_0(e_i/e_0)^\kappa$  with the strain hardening exponent  $\kappa \in [0, 1]$  [10]. Evidently, this function satisfies all conditions (2).

**Example 3.1. Ill-posedness of ICP1.** Two class of (stiff and soft) materials described by (11), with elastic parameters ( $\langle E = 210(\text{GPa}); \xi_0^2 = 0.027 \rangle$ ) and ( $\langle E = 110(\text{GPa}); \xi_0^2 = 0.020 \rangle$ ), are considered. For each class of materials the following two values  $\kappa_1 = 0.2$  and  $\kappa_2 = 0.7$  of the hardening parameter  $\kappa \in [0, 1]$  are taken in the considered example. The plasticity functions  $g_r = g_r(\kappa_i)$ ,  $g_s = g_s(\kappa_i)$ ,  $i = 1, 2$ , for these materials, with the above data, are shown in the left Figure 2. In order to generate the synthetic data  $T[g_r]$ ,  $T[g_s]$ , the nonlinear direct problem (5) is numerically solved for the above given plasticity functions. Then approximate values of the corresponding synthetic data  $T[g_r]$ ,  $T[g_s]$  are obtained by applying to (4) the numerical integration trapezoidal formula. Results obtained for the two stiff and two soft materials are plotted in the right Figure 2.

These figures show that, for each class of materials the outputs  $T[g_r(\kappa_1)]$  and  $T[g_r(\kappa_2)]$  (as well as the outputs  $T[g_s(\kappa_1)]$  and  $T[g_s(\kappa_2)]$ ) are close enough, although the plasticity functions of these materials, corresponding to each class, are quite different ( $\kappa_1 = 0.2$  and  $\kappa_2 = 0.7$ ). For the values  $\kappa_1 = 0.2$  and  $\kappa_2 = 0.3$  the corresponding the outputs are close enough, especially in the beginning of plastic deformations. This shows the ill-posedness of ICP1.  $\square$

The above example shows that even for noise free measured output data ICP1 is ill-conditioned, although, in practice the output data  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\phi)$  can only be given with some measurement error. Thus, the exact fulfillment of the equality in (4) is not possible, and use of the quasisolution approach by introducing the auxiliary functional (8) is necessary.

#### 4. An analysis of ICP2

Let us define the weak solution of the direct problem (3) in  $H^2(\Omega)$ . For this aim we define the subspace  $\mathring{H}^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : u(x) = \partial u(x)/\partial n = 0, x \in \partial\Omega\}$ , taking into account the homogeneous Dirichlet conditions. Then multiplying the both sides of the biharmonic equation (3) by  $v \in \mathring{H}^2(\Omega)$ , integrating on  $\Omega$  and using the Dirichlet conditions we obtain the following integral identity:

$$\langle Au, v \rangle := \int_{\Omega} g(\xi^2(u))H(u, v)dx = \int_{\Omega} F(x)v(x)dx := l(v), \quad \forall v \in \mathring{H}^2(\Omega). \quad (12)$$

Here  $H(u, v) = u_{x_1x_1}v_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}v_{x_2x_2} + u_{x_1x_2}v_{x_1x_2} + (u_{x_1x_1}v_{x_2x_2} + u_{x_2x_2}v_{x_1x_1})/2$  is a bilinear differential form defined on  $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ . Evidently  $H(v, v) = \xi^2(v)$ .

An existence of the weak solution  $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$  defined by (12) has been proved in [8].

To study the inverse coefficient problem, as well as to apply any numerical method, one needs to perform a linearization of the nonlinear direct problem (12). For this aim we will use so-called convexity argument for nonlinear monotone potential operators introduced in [7]. For clarity, we will explain here the convexity argument in its abstract form.

Let  $A: H \mapsto H^*$  be a strongly monotone potential operator defined on the abstract Hilbert space  $H$ , and  $a(u; \cdot, \cdot)$  be the corresponding bounded, symmetric continuous and coercive tri-linear form (functional):  $a(u; u, v) := \langle Au, v \rangle$ ,  $u, v \in H$ , and

$$\begin{cases} \langle Au - Av, u - v \rangle \geq \gamma_1 \|u - v\|_H^2, & \gamma_1 > 0; \\ |a(u; u, v)| \leq \gamma_2 \|u\|_H \|v\|_H, & \gamma_2 > 0, \quad \forall u, v \in H. \end{cases} \quad (13)$$

Assume that the functional  $J(u)$ ,  $u \in H$  is the potential of the operator  $A$ :  $\langle J'(u), v \rangle = a(u; u, v)$ .

**Definition 4.1.** *The monotone potential operator  $A: H \rightarrow H^*$  defined on the Hilbert space  $H$  is said to be satisfy the convexity argument if the following inequality holds:*

$$\frac{1}{2}a(u; v, v) - \frac{1}{2}a(u; u, u) - J(v) + J(u) \geq 0, \quad \forall u, v \in H. \quad (14)$$

Consider the following variational problem

$$a(u; u, v) = l(v), \quad v \in H, \quad (15)$$

which defines the weak solution  $u \in H$  of the abstract operator equation  $Au = F$ , where  $l(v)$  is the linear functional defined by the element  $F \in H^*$ . Denote by  $\Pi(u)$  the potential of the operator equation  $Au = F$ .

Let us linearize the nonlinear variational problem (15) as follows:

$$a(u^{(n-1)}; u^{(n)}, v) = l(v), \quad \forall v \in H, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

where  $u^{(0)} \in H$  is an initial iteration. The function  $u^{(n)} \in H$  is defined to be an approximate solution of the abstract variational problem (15). Evidently, for each  $n$  the variational problem (16) is a linear one, since  $u^{(n-1)}$  is known from previous iteration. The iteration scheme (16) is defined to be *the abstract iteration scheme* for the monotone potential operator  $A$ .

**Theorem 4.1** [7]. *Let  $A: H \mapsto H^*$  be a strongly monotone potential operator defined on the Hilbert space  $H$ , and  $a(u; \cdot, \cdot)$  be the corresponding bounded, symmetric continuous and coercive tri-linear form. If the convexity argument (14) holds, then*

(a1) *the sequence of potentials  $\{\Pi(u^{(n)})\} \subset \mathbb{R}$ , corresponding to the sequence of solutions  $\{u^{(n)}\} \subset H$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , of the linearized problem (16), is a monotone decreasing one;*

(a2) *the sequence of approximate solutions  $\{u^{(n)}\} \subset H$  defined by (16) converges to the solution  $u \in H$  of the nonlinear problem (15) in the norm of the space  $H$ ;*

(a3) for the rate of convergence the following estimate holds:

$$\|u - u^{(n)}\| \leq (\sqrt{2}\gamma_2/\gamma_1^{3/2}) \left[ \Pi(u^{(n-1)}) - \Pi(u^{(n)}) \right]^{1/2}, \quad (17)$$

where  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$  are the constants defined in (13).

To apply the above results to the variational problem (12) let us introduce the nonlinear functionals  $\Pi(u)$  and  $J(u)$

$$\Pi(u) := J(u) - l(u), \quad J(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \int_0^{\xi^2(u)} g(\tau) d\tau \right\} dx, \quad l(u) := \int_{\Omega} F(x)u(x)dx, \quad (18)$$

$\forall v \in \mathring{H}^2(\Omega)$ , are defined to be as the potentials of the variational problem (12) and the operator  $A$ , respectively. Consider now the following minimization problem.

Find such a function  $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$  that

$$\Pi(u) = \min \Pi(v), \quad v \in \mathring{H}^2(\Omega). \quad (19)$$

Evidently, this problem is equivalent to the variational problem (37).

Let us linearize now the nonlinear variational problem (12), according to the linearization scheme (16). The solution  $u^{(n)} \in \mathring{H}^2(\Omega)$  of the linearized variational problem

$$a(u^{(n-1)}; u^{(n)}, v) := \int_{\Omega} g(\xi^2(u^{(n-1)}))H(u^{(n)}, v)dx = \int_{\Omega} F(x)v(x)dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (20)$$

is defined to be an *approximate solution nonlinear variational problem* (12). Here  $u^{(0)} \in \mathring{H}^2(\Omega)$  is an initial iteration. Different from the potential  $J(u)$ , defined by (18), the potential of the linearized operator, defined to be as  $J_0(u^{(n)})$ , is a quadratic functional, since the left hand side of (20) is a bilinear functional. Thus the potentials of the linearized operator and the linearized problem (20) are defined as follows:

$$\begin{cases} J_0(u^{(n)}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} g(\xi^2(u^{(n-1)}))H(u^{(n)}, u^{(n)})dx; \\ \Pi_0(u^{(n)}) = J_0(u^{(n)}) - l(u^{(n)}), \quad u^{(n)} \in \mathring{H}^2(\Omega). \end{cases} \quad (21)$$

To apply the above theorem we need, first of all, to analyze fulfilment of the convexity argument (14) for the nonlinear biharmonic operator defined by (3).

**Lemma 4.1.** *If the coefficient  $g = g(\xi^2)$  satisfies the conditions (2), then the convexity argument holds for the nonlinear biharmonic operator  $A$ , defined by (3).*

**Proof.** By definitions of the potentials  $J(u)$  and  $\Pi(u)$  we calculate the left hand side of (14):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}a(u; v, v) - \frac{1}{2}a(u; u, u) - J(v) + J(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ g(\xi^2(u))[\xi^2(v) - \xi^2(u)] - \int_0^{\xi^2(v)} g(\tau) d\tau + \int_0^{\xi^2(u)} g(\tau) d\tau \right\} dx. \end{aligned}$$

Now introduce the function  $Q(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$ , by condition (2) we conclude  $Q''(t) = g'(t) \leq 0$ , and hence  $Q = Q(t)$  is a concave function:  $Q'(t_1)(t_2 - t_1) - Q(t_2) + Q(t_1) \geq 0$ ,  $\forall t_2 > t_1 > 0$ . Using this inequality on the right hand side of the above integral expression, and taking  $\xi^2(u)$  and  $\xi^2(v)$  instead of  $t_1, t_2$ , respectively, we get

$$g(\xi^2(u))[g(\xi^2(v)) - g(\xi^2(u))] - \int_0^{\xi^2(v)} g(\tau)d\tau + \int_0^{\xi^2(u)} g(\tau)d\tau \geq 0.$$

This implies the proof.  $\square$

Evidently, the functional  $a(u; v, w)$  satisfies condition (13), hence Theorem 4.1 hold.

**Theorem 4.2.** *Let  $u, u^{(n)} \in \dot{H}^2(\Omega)$  be the solutions of the nonlinear direct problem (12), and linearized problem (20), respectively, and  $g(\xi^2(u))$  satisfies conditions (2). Then:*

(b1) *the sequence of potentials  $\{\Pi_0(u^{(n)})\} \subset \mathbb{R}$ , defined by (21) and corresponding to the sequence  $\{u^{(n)}\} \subset \dot{H}^2(\Omega)$ , is a monotone decreasing one:  $\Pi(u^{(n)}) \leq \Pi(u^{(n-1)})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;*

(b2) *the sequence of approximate solutions  $\{u^{(n)}\} \subset \dot{H}^2(\Omega)$  defined by the iteration scheme (20) converges to the solution  $u \in \dot{H}^2(\Omega)$  of the nonlinear problem (12) in the norm of  $\dot{H}^2(\Omega)$ ;*

(b3) *for the rate of convergence estimate (17) holds.*

Finally let us prove an existence of a quasisolution of ICP2. Let us denote by  $u(x; g)$  the corresponding to the coefficient  $g(\xi^2) \in \mathcal{G}_c$  solution of nonlinear direct problem (12), where  $\mathcal{G}_c$  is the set of admissible coefficients satisfying conditions (2). Then for each step of the quasistatic process of bending, given by the parameter  $\tau_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , the inverse coefficient problem can be reformulated as the following nonlinear functional equation:

$$u(x; g) = w(\lambda_i; \tau_k), \quad g \in \mathcal{G}. \quad (22)$$

The mapping  $\Phi[g] := u(x; g)|_{x=\lambda_i}$ ,  $\Phi: \mathcal{G} \mapsto w(\lambda_i; \tau_k)$ , is defined to be the *input-output mapping*. In practice an exact equality in (22) is not possible due to measurements errors. For this reason we will introduce the auxiliary functional

$$I(g) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^M [u(x; g) - w(\lambda_i; \tau_k)]^2, \quad g \in \mathcal{G}, \quad (23)$$

and consider the following minimization problem:

$$J(g_*) = \inf_{g \in \mathcal{G}} J(g). \quad (24)$$

A solution of this minimization problem will be defined to be as a *quasisolution* of ICP2.

To prove an existence of a quasisolution first of all we need to analyze continuity of the solution  $u(x; g) \in \dot{H}^2(\Omega)$  of the nonlinear variational problem (12) with respect to the coefficient  $g \in \mathcal{G}_c$ .

**Lemma 4.2.** *Let  $\{g_m(\xi^2)\} \subset \mathcal{G}_c$  be a sequence of coefficients and  $\{u_m(x; g)\} \subset \dot{H}^2(\Omega)$  be the corresponding sequence of solutions of the variational problem (12). Assume that the sequence  $\{g_m(\xi^2)\}$  converges to the function  $g \in \mathcal{G}_0$  in  $H^1$ -norm, as  $m \rightarrow \infty$ . Then the sequence of solutions  $\{u(x; g_m)\}$  converges to the solution  $u(x; g) \in \dot{H}^2(\Omega)$  of the variational problem (12) corresponding to the limit function  $g \in \mathcal{G}_c$ .*

**Proof.** Let us denote by  $u_m^{(n)} \in \dot{H}^2(\Omega)$ ,  $u_m^{(n)} = u^{(n)}(x; g_m)$ , the sequence solutions of the linearized problem (20) corresponding to the sequence of coefficients  $\{g_m\} \subset \mathcal{G}_c$ :

$$a_m(u^{(n-1)}; u_m^{(n)}, v) := \int_{\Omega} g_m(\xi^2(u^{(n-1)})) H(u_m^{(n)}, v) dx = \int_{\Omega} F(x) v(x) dx, \quad \forall v \in \dot{H}^2(\Omega). \quad (25)$$

Note that the index  $m$  in the above bilinear form  $a_m(u_m^{(n-1)}; \cdot, \cdot)$  means that in the right hand side integral there is the function  $g_m(\xi^2(u^{(n-1)}))$ , instead of  $g(\xi^2(u^{(n-1)}))$ .

Substituting  $v = u_m^{(n)}$  in (25) we get:

$$|a_m(u_m^{(n-1)}; u_m^{(n)}, u_m^{(n)})| \leq \|F\|_0 \|u_m^{(n)}\|_0 \leq \|F\|_0 \|u_m^{(n)}\|_2, \quad u_m^{(n)} \in \dot{H}^2(\Omega).$$

On the other hand, due to coerciveness of the bilinear form  $a_m(u_m^{(n-1)}; \cdot, \cdot)$  we have

$$|a_m(u_m^{(n-1)}; u_m^{(n)}, u_m^{(n)})| \geq \gamma_1 \|u_m^{(n)}\|_2^2, \quad \gamma_1 > 0.$$

These two inequalities imply the uniform boundedness of the sequence  $\{u_m^{(n)}\}$ :  $\|u_m^{(n)}\|_2 \leq \|F\|_0/\gamma_1$ ,  $\gamma_1 > 0$  in  $H^2$ -norm. This implies the weak convergence of the sequence  $\{u_m^{(n)}\}$  in  $H^2(\Omega)$ . Hence, there exists an element  $\tilde{u}^{(n)} \in \dot{H}^2(\Omega)$  such that  $u_m^{(n)} \rightharpoonup \tilde{u}^{(n)}$  weakly in  $H^2(\Omega)$ . We need to prove that  $\tilde{u}^{(n)} = u^{(n)}(x; g)$ , where  $g \in \mathcal{G}_c$  is the limit of the sequence  $\{g_m\} \subset \mathcal{G}_0$ . For this, let us estimate the difference  $|a(u^{(n-1)}; \tilde{u}^{(n)}, v) - a_m(u^{(n-1)}; u_m^{(n)}, v)|$ , namely

$$\begin{aligned} & |a(u^{(n-1)}; \tilde{u}^{(n)}, v) - a_m(u^{(n-1)}; u_m^{(n)}, v)| \\ &= \left| \int_{\Omega} [g(\xi^2(u^{(n-1)}))H(\tilde{u}^{(n)}, v) - g_m(\xi^2(u^{(n-1)}))H(u_m^{(n)}, v)] dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} [g(\xi^2(u^{(n-1)}))H(\tilde{u}^{(n)}, v) - g_m(\xi^2(u^{(n-1)}))H(\tilde{u}^{(n)}, v)] dx \right| \\ &+ \left| \int_{\Omega} [g_m(\xi^2(u^{(n-1)}))H(u_m^{(n)}, v) - g_m(\xi^2(u^{(n-1)}))H(u_m^{(n)}, v)] dx \right| \\ &\leq \max_{[\xi^*, \xi^*]} |g(\xi^2(u^{(n-1)})) - g_m(\xi^2(u^{(n-1)}))| \int_{\Omega} H(\tilde{u}^{(n)}, v) dx + c_1 \int_{\Omega} H(\tilde{u}^{(n)} - u_m^{(n)}, v) dx. \end{aligned}$$

The first right hand side term tends to zero,  $\max_{[\xi^*, \xi^*]} |g(\xi^2(u^{(n-1)})) - g_m(\xi^2(u^{(n-1)}))| \rightarrow 0$ , since  $g_m \rightarrow g \in \mathcal{G}_c$  in  $H^1$ -norm, as  $m \rightarrow \infty$ . Further, by the weak convergence  $u_m^{(n)} \rightharpoonup \tilde{u}^{(n)}$ , as  $m \rightarrow \infty$ , in  $H^2(\Omega)$ , we conclude that the second right hand side term also tends to zero. Thus, passing to the limit in (25), as  $m \rightarrow \infty$ , we obtain

$$a(u^{(n-1)}; \tilde{u}^{(n)}, v) := \int_{\Omega} g_m(\xi^2(u^{(n-1)}))H(\tilde{u}^{(n)}, v) dx = \int_{\Omega} F(x)v(x) dx, \quad \forall v \in \dot{H}^2(\Omega),$$

i.e. the limit function  $\tilde{u}^{(n)}$  is the solution of the linearized variational problem (20). By the uniqueness of the solution of this problem we conclude  $\tilde{u}^{(n)} = u^{(n)}(x; g)$ .

Thus the convergence  $g_m \rightarrow g$  of the sequence of coefficients in  $H^1$ -norm, implies the weak convergence  $u_m^{(n)} := u^{(n)}(x; g_m) \rightharpoonup u^{(n)} := u^{(n)}(x; g)$ ,  $m \rightarrow \infty$ , in  $H^2(\Omega)$  of the approximate solutions  $u^{(n)} \in \dot{H}^2(\Omega)$ , defined by (20), of the nonlinear variational problem (12):

$$|a(u^{(n-1)}; u^{(n)}, v) - a_m(u^{(n-1)}; u_m^{(n)}, v)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (26)$$

The above results permit to conclude that  $|a(u; u, v) - a_m(u^{(n-1)}; u_m^{(n)}, v)| \rightarrow 0$ , as  $m, n \rightarrow \infty$ . Indeed,

$$\begin{aligned} & |a(u; u, v) - a_m(u^{(n-1)}; u_m^{(n)}, v)| \\ &\leq |a(u; u, v) - a(u^{(n-1)}; u^{(n)}, v)| + |a(u^{(n-1)}; u^{(n)}, v) - a_m(u^{(n-1)}; u_m^{(n)}, v)|. \end{aligned}$$

The first and second right hand side terms tend to zero, due to Theorem 4.2 and (26), accordingly. This completes the proof.  $\square$

Taking into account the compact embedding  $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , we conclude that the sequence solutions  $\{u(x; g_m)\} \subset \dot{H}^2(\Omega)$  converges to the solution  $u(x; g) \in \dot{H}^2(\Omega)$  of the variational problem (12) in  $C^0(\bar{\Omega})$ . This means the continuity of the cost functional (24).

**Theorem 4.3.** *Let conditions (2) hold. Then ICP2 has at least one solution  $g_* \in \mathcal{G}_c$  defined as a solution of the minimization problem (24).*

## 5. Parametrization of the unknown coefficient $g(\xi^2)$ , inversion algorithm and its regularization

The feasibility of the approach given here is that the proposed inversion method is based on a finite number of output measured data, since in engineering practice a limited number of discrete values of the torque  $T[g](\varphi)$ , or deflections  $w(\lambda_i; \tau_k)$  can only be given. In view of ICP1, the limited number of discrete values  $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_M$  of the torque  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\varphi)$ , corresponding to the monotone increasing values  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_M$  of the angle of twist can only be given. Here the values  $\mathcal{T}_0$  and  $\mathcal{T}_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , of the measured torque correspond to pure elastic and  $m$ th plastic torsional deformation cases. Note that the elasticity limit (yield stress)  $\xi_0^2 = e_0^2$  is assumed to be also unknown, and need to be determined from the above given measured data. For each  $\varphi_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ , the torsional state of a material is characterized by the stress intensity  $\xi_m := \max_{\Omega} |\nabla u|$ . As noted above, this parameter is a constant in each finite elements or grid, due to the piecewise linear approximation. This situation naturally leads to necessity of piecewise-linear approximation of the unknown function  $g(\xi^2)$ . The piecewise-linear approximation  $g_h(\xi^2)$  of the plasticity function has the form:

$$g_h(\xi^2) = \begin{cases} \beta_0 = 1/G, & \xi \in (0, \xi_0]; \\ \beta_0 - \beta_1(\xi^2 - \xi_0^2), & \xi \in (\xi_0, \xi_1]; \\ \beta_0 - \sum_{m=1}^{M-1} \beta_m(\xi_m^2 - \xi_{m-1}^2) - \beta_M(\xi^2 - \xi_{M-1}^2), & \xi \in (\xi_{M-1}, \xi_M]. \end{cases} \quad (27)$$

The unknown parameters (slopes)  $\beta_m > 0$  need to be determined step by step, beginning from the parameter  $\beta_0 = 1/G$ . At each  $m$ th state, one needs to determine the parameter  $\beta_m$ , by using the measured output data  $\mathcal{T}_m$ , which corresponds to the value  $\varphi_m$  of the angle of twist. The parameter  $\Delta\xi_m = \xi_m^2 - \xi_{m-1}^2$  is defined to be *the state discretization parameter* for the  $m$ th state, according to [12, 15]. We assume that an appropriate numerical integration formula is applied to the integral in (4). Evidently a solution of the discrete inverse problem

$$I_h(\overline{\beta}^*) = \min_{\overline{\beta} \in \mathcal{B}} I_h(\overline{\beta}^*), \quad I_h(\overline{\beta}^*) = \|T_h(\overline{\beta}) - \overline{\mathcal{T}}\|_{\infty} \quad (28)$$

may not exists even for noise free measured output data, due to computational errors.

Now let us derive algorithms for determination of the unknown parameters  $\beta_0 = 1/G$  and  $\beta_m$ ,  $\overline{1, M}$ . In the pure elastic torsion case one needs to determine the shift modulus  $G = E/2((1 + \nu))$ , since the Poisson ratio is assumed to be known ( $\nu = 0.3$ ). In the pure elastic case we will use Lemma 3.2. Thus, the algorithm of determining the unknown parameter  $G$  is as follows.

### Algorithm for ICP1:

- (i1) Choose iterations  $\beta_0^{(1)}, \beta_0^{(2)}$ , satisfying the conditions:  $T_h[\beta_0^{(1)}] > \mathcal{T}_0 > T_h[\beta_0^{(2)}]$ ;
- (i2) Use next iteration  $\beta_0^{(3)} = (\beta_0^{(1)} + \beta_0^{(2)})/2$ , and calculate the value of the torque  $T_h[\beta_0^{(3)}]$ ;
- (i3) Determine the next iteration by using conditions (6):
  - if  $T_h[\beta_0^{(3)}] < \mathcal{T}_0$ , then  $\beta_0^{(4)} = (\beta_0^{(3)} + \beta_0^{(2)})/2$ ;
  - if  $T_h[\beta_0^{(3)}] > \mathcal{T}_0$ , then  $\beta_0^{(4)} = (\beta_0^{(3)} + \beta_0^{(1)})/2$ ;
- (i4) Calculate  $|T_h[\beta_0^{(3)}] - \mathcal{T}_0|$ ;
- (i5) If  $|T_h[\beta_0^{(3)}] - \mathcal{T}_0| < \varepsilon_T$ , then  $\beta_0 = \beta_0^{(3)}$ . Otherwise, continue the steps (i2)-(i4);
- (i6) Repeat the process until the fulfilment of the stopping condition

$$|T_h[\beta_0^{(n)}] - \mathcal{T}_0| < \varepsilon_T. \quad (29)$$

The parameter  $\varepsilon_T > 0$  is defined to be a given accuracy for an approximate solution of the discrete inverse problem (28), in pure elastic torsion.

For each plastic torsion case, we can derive the similar algorithm for determination of the slopes  $-\beta_m$ ,  $m = \overline{1, M}$ . In this case the following argument is taken into account: an increase of the slope  $\beta_m$  corresponds to an increase of rigidity of a material, and, as a result, to increase of the corresponding theoretical value  $T_h[\beta_m]$  of the torque. This means that  $\beta_m^{(1)} > \beta_m^{(2)}$  implies  $T_h[\beta_m^{(1)}] > T_h[\beta_m^{(2)}]$ .

In all the numerical examples below two types of engineering materials defined to be as rigid ( $E = 210(GPa)$ ) and soft ( $E110(GPa)$ ), are used. To generate the noise free synthetic output data  $\langle \varphi_m, \mathcal{T}_m \rangle$ , the direct problem (3) was solved by the variational finite-difference scheme by using the function  $g_h(\xi^2)$ , given by (11), and the input data  $\varphi_m$ . These values are then assumed to be the noise free synthetic data in subsequent computational experiments.

The first series of numerical examples are related to implementation of Algorithm 1 for finding the shift modulus  $G = E/2((1 + \nu))$  (Here and in all computational experiments below the Poisson ratio is taken to be  $\nu = 0.3$ ). For different values of the stopping parameter  $\varepsilon_T = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ , the corresponding relative errors in the found values of the shift modulus  $G_h$  were between  $\delta G_h = 10^{-2}$  and  $\delta G_h = 10^{-3}$ . The number of iterations was  $n = 4 \div 7$ . Numerical results show that the relative error  $\delta G_h$  decreases proportionally by decreasing the stopping parameter  $\varepsilon_T$ , due to linearity of the problem in pure elastic case. Thus for  $\varepsilon_T = 10^{-4}$  the relative errors  $\delta G_h$  for the both materials are of same order  $10^{-4}$ .

In the second numerical example, the above found values  $G_h$  separately have been used as input data for determination of the unknown elasticity limit  $\xi_0^2$  for the rigid material. With the first input data  $G_{h,1} = 76.50$  the elasticity limit found is  $\xi_{0h,1}^2 = 0.022$ , while computed from the direct problem solution, with the same input data, the elasticity limit is  $\xi_{0,1}^2 = 0.024$ . Hence the relative error is  $\delta \xi_{0h,1}^2 = 0.19$ . Further, in the case of the second input data  $G_{h,2} = 78.75$ , which corresponds to the stopping parameter  $\varepsilon_T = 10^{-3}$ , the elasticity limit found is  $\xi_{0h,2}^2 = 0.023$ , while computed from the direct problem solution the elasticity limit is  $\xi_{0,2}^2 = 0.025$ . The relative error is  $\delta \xi_{0h,2}^2 = 0.14$ . Although further decrease in the stopping parameter improve the reconstructed value of the elasticity limit  $\xi_0^2$ , the order of the relative error  $\delta \xi_{0h,3}^2$  remains the same. Similar results are obtained for the soft material.

The above numerical results permit to conclude that the relative errors  $\delta G_h = 3.3 \times 10^{-3}$  and  $\delta \xi_{0h}^2 = 3.7 \times 10^{-2}$  in the reconstructed values of the shear modulus  $G$  and elasticity limit  $\xi_0^2$ , correspond to the value  $\varepsilon_T = 10^{-4}$  of the *stopping parameter*. Similar situation arises in the case of ICP2.

In order to guarantee stability and convergence of the inversion method two regularization schemes – *relaxation of the monotonicity condition for slopes  $\beta_k$* , and *optimization of the state discretization parameters  $\Delta \xi_{mh} = \xi_{mh}^2 - \xi_{m-1h}^2$*  have been added to proposed inversion algorithm. Introducing the *relaxation parameter  $\delta_\beta > 0$*  we will require that the unknown parameters  $\beta_k$  satisfy the following relaxed monotonicity condition:  $\beta_k + \delta_\beta \geq \beta_{k-1} \geq \beta_k - \delta_\beta$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $\delta_\beta > 0$ . An optimal choice of the state discretization parameters has been realized as follows. Let us assume that the inversion algorithm converges at  $(k-1)$ -th plastic state, but diverges at  $k$ -th plastic state. In this case the parameter  $\Delta \xi_{mh}$  is eliminated from the consideration and taking the new state discretization parameter  $\tilde{\Delta} \xi_{mh} = \Delta \xi_{m+1,h} - \Delta \xi_{m-1,h}$  instead of the parameter  $\Delta \xi_{mh}$ . Then the iteration process is repeated from the  $(m-1)$ -th state. This process is repeated until the fulfilment of the above stopping conditions hold. The found step  $\tilde{\Delta} \xi_{k+1,h} = \Delta \xi_{m+m_s,h} - \Delta \xi_{m-1,h}$  is taken to be a new state discretization parameter for the  $m$ -th state. This modification leads to the natural selection of the state discretization parameters, and also allows us to minimize the number of measurements.

Consider an implementation of the above inversion algorithm for ICP1 with optimal choice of the state discretization parameters. Since in practice a finite number of measured values of the

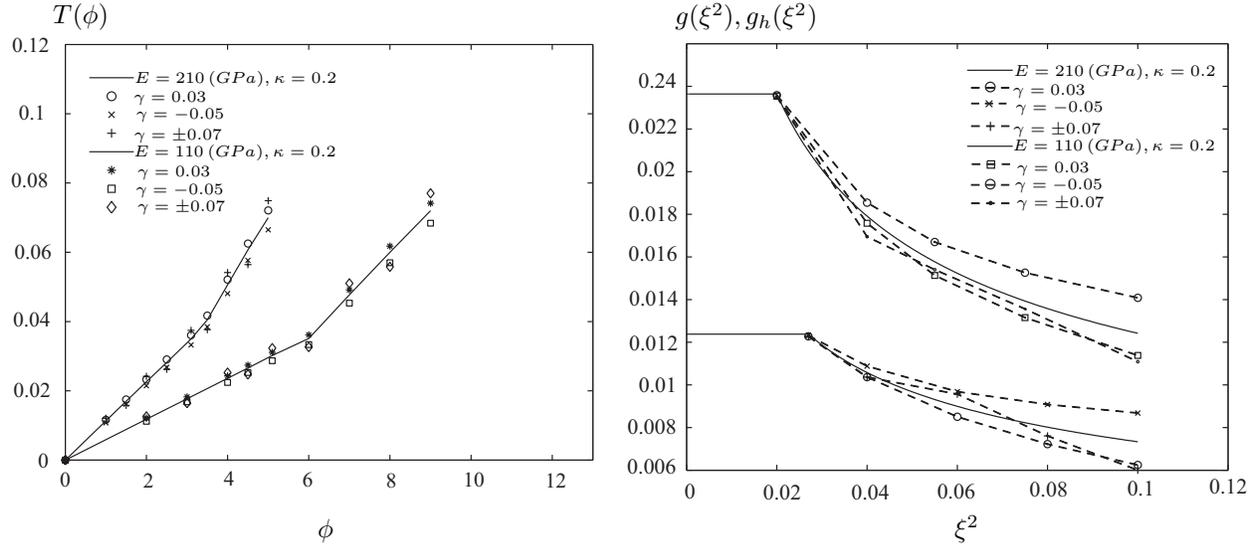


Fig. 3. (The exact and noisy output data (left figure) and the reconstructed coefficients (right figure): ICP2.

torque  $\mathcal{T}$  can only be given with some measurement error:  $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T} + \gamma \mathcal{T}$ , where  $\gamma \in \mathbb{R}$  is the noise level. In this computational experiment the following noisy levels are used:  $\gamma = 0.03, -0.05, \pm 0.07$ .

For the exact and noisy (synthetic) data shown in the left Figure 3, for the rigid and soft materials, the reconstructed coefficients are plotted in the right Figure 3. In all cases the relative errors, defined as  $\delta g_h = \|(g - g_h)/g\|_{\infty, h}$ , were obtained as  $\delta g_h = 6.5 \div 8.0 \times 10^{-3}$ . This shows that the proposed algorithm allows to identify the unknown coefficient with enough high accuracy, not only for the noisy free, but also for the noisy data. The obtained results show that the presented inversion algorithm applied to ICP2 is also feasible in the presence of a noise factor  $\gamma = 5 \div 10\%$ .

### Acknowledgements

The work was supported by the International Center for Theoretical Physics (Trieste, Italy). The author gratefully thanks the anonymous referee for valuable suggestions which improved the readiness of the manuscript.

### REFERENCES

1. **Adams R.A.** Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975. 286 p.
2. **Fleck N.A. and Hutchinson J.W.** A reformulation of strain gradient plasticity // J. Mech. Phys. Solids. 2001. Vol. 49. P. 2245–2271.
3. **Gajewski H., Gröger K. and Zacharias K.** Nichtlineare Operator Gleichungen und Operator Differential Gleichungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1974. 281 p.
4. **Hasanov A. and Mamedov A.** An inverse problem related to the determination of elastoplastic properties of a plate // Inverse Probl. 1994. Vol. 10. P. 601–615.
5. **Hasanov A.** An Inverse coefficient problem for an elasto-plastic medium // SIAM J. Appl. Math. 1995. Vol. 55. P. 1736–1752.
6. **Hasanov A.** Inverse coefficient problems for monotone potential operators // Inverse Probl. 1997. Vol. 13. P. 1265–1278.
7. **Hasanov A.** Convexity argument for monotone potential operators // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 2000. Vol. 47. P. 906–918.
8. **Hasanov A.** Variational approach to non-linear boundary value problems for elasto-plastic incompressible bending plate // Int. J. Non-Linear Mech. 2007. Vol. 42. P. 711–721.
9. **Hasanov A. and Erdem A.** Determination of unknown coefficient in a nonlinear elliptic problem related to the elasto-plastic torsion of a bar // IMA J. Appl. Math. 2008. Vol. 73. P. 579–591.
10. **Hasanov A. and Tatar S.** Semi-analytic inversion method for determination of elastoplastic properties of power hardening materials from limited torsional experiment // Inverse Probl. in Science and Engineering. 2010. Vol. 18. P. 265–278.

11. **Hasanov A. and Tatar S.** An inversion method for identification of elastoplastic properties of a beam from torsional experiment // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2010. Vol. 45. P. 562–571.
12. **Hasanov A.** Some new classes of inverse coefficient problems in nonlinear mechanics and computational material science // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2011. Vol. 46. P. 667–684.
13. **Ivanov V.K., Vasin V.V. and Tanana V.P.** Theory of linear ill-posed problems and its applications. Moscow: Nauka, 1978. 206 p.
14. **Ladyzhenskaya O.A.** The boundary value problems in mathematical physics. New York: Springer, 1985. 322 p.
15. **Mamedov A.** An Inverse problem related to the determination of elastoplastic properties of a cylindrical bar // *Int. J. Non-Linear Mech.* 1965. Vol. 30. P. 23–32.
16. **Samarskii A.A. and Andreev V.B.** Difference methods for elliptic problems. Moscow: Nauka, 1976. 352 p. (in Russian).
17. **Tikhonov A. and Arsenin V.** Solution of ill-posed problems. New York: John Wiley, 1977. 258 p.

Alemdar Hasanov  
Department of Mathematics and Computer Science  
Izmir University, 35350, Izmir - Turkey  
E-mail: alemdar.hasanoglu@izmir.edu.tr

Received July, 15, 2011

УДК 517.983.54

## A NOTE ON THE MODULUS OF CONTINUITY FOR ILL-POSED PROBLEMS IN HILBERT SPACE

Bernd Hofmann, Peter Mathé

The authors study linear ill-posed operator equations in Hilbert space. Such equations become conditionally well-posed by imposing certain smoothness assumptions, often given relative to the operator which governs the equation. Usually this is done in terms of general source conditions. Recently smoothness of an element was given in terms of properties of the distribution function of this element with respect to the self-adjoint associate of the underlying operator. In all cases the original ill-posed problem becomes well-posed, and properties of the corresponding modulus of continuity are of interest, specifically whether this is a concave function. The authors extend previous concavity results of a function related to the modulus of continuity, and obtained for compact operators in B. Hofmann, P. Mathé, and M. Schieck, *Modulus of continuity for conditionally stable ill-posed problems in Hilbert space*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **16** (2008), no. 6, 567–585, to the general case of bounded operators in Hilbert space, and for recently introduced smoothness classes.

Keywords: ill-posed, source conditions, individual smoothness, modulus of continuity.

*Dedicated to the 70th anniversary of the RAS Corresponding-Member*

VLADIMIR V. VASIN

### 1. Introduction

The focus of this note is on *linear ill-posed problems* that can be written as operator equations

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad (1)$$

where  $A: X \rightarrow Y$  is a bounded injective linear mapping between infinite-dimensional separable Hilbert spaces  $X$  and  $Y$  endowed with inner products  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  and norms  $\| \cdot \|$ . We associate  $A$  with the positive self-adjoint operator

$$H := A^*A: X \rightarrow X \quad (2)$$

and set  $a := \|H\| = \|A\|^2$  such that  $a$  is the maximum value of the spectrum  $\sigma(H)$  of  $H$  and zero the corresponding minimum value which moreover represents an accumulation point of  $\sigma(H)$  in the ill-posed case. Following the notation of [14] for the ill-posedness of (1) characterized by a non-closed range  $\mathcal{R}(A)$  of  $A$  we distinguish between the ill-posedness of *type I* where  $A$  is *non-compact* and of *type II* where  $A$  is compact, for more details see also [3; 7].

The solution theory of ill-posed problems is preferably based on the fact that these problems become conditionally well-posed after imposing certain smoothness assumptions by restricting the admissible solutions to a set  $\mathfrak{M}$ . Then the severity of the ill-posedness phenomenon in solving a problem (1) depends on the interplay between the smoothing properties of the operator  $A$  and the smoothness of potential solutions  $x \in \mathfrak{M} \subset X$ . The solution theory may be considered element-wise and, as this is traditionally done, uniformly for smoothness classes.

For the analysis of ill-posed problems solution smoothness is most often measured *relative* to the operator  $A$  governing the equation (1), precisely its self-adjoint associate  $H$ . First, one can quantify the *individual smoothness* of an element  $x \in X$  with respect to  $H$  by using the *point-wise* spectral information, i.e., the *distribution function*

$$F_x^2(t) := \|E_t x\|^2 := \langle \chi_{(0,t]}(H) x, x \rangle = \|\chi_{(0,t]}(H) x\|^2, \quad 0 < t < \infty, \quad (3)$$

where  $\chi_{(0,t]}$  is the characteristic function on the interval  $(0, t]$ . This idea goes back to [15;16] and it was further explored in [2]. This non-decreasing and right-continuous function  $F_x^2$ , which satisfies the limit condition  $\lim_{t \rightarrow 0} F_x^2(t) = 0$  as a consequence of the ill-posedness, can be rewritten as  $F_x^2(t) = \int_0^t d\|E_s x\|^2$  for  $t > 0$ , where  $E_t = E_t(H)$ ,  $0 \leq t \leq a$ , denotes the spectral resolution of the operator  $H$ . Note that

$$\|h(H)x\|^2 = \int_0^a h^2(t) d\|E_t x\|^2 = \int_0^a h^2(t) dF_x^2(t)$$

holds for any bounded measurable real function  $h$ . We refer to [1, Sect. 2.3] and [18, Chapt. 12] for details on spectral theory of bounded and self-adjoint linear operators in Hilbert space.

The most prominent, and traditional way of quantifying solution smoothness uses smoothness classes in terms of *source sets*  $\mathfrak{M} = \mathcal{M}_{\varphi,R}$  defined as

$$\mathcal{M}_{\varphi,R} := \{x \in X : x = \varphi(H)v, v \in X, \|v\| \leq R\}, \quad R > 0. \quad (4)$$

Above, the functions  $\varphi: (0, a] \rightarrow (0, \infty)$  are derived from variable Hilbert scales and called *index functions*; these are assumed to be increasing with  $\lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t) = 0$ . Here we follow the concept of [12;13] or more recently [5;11]. Source sets express the solution smoothness with respect to the spectrum of  $H$  in an *integral* manner, since we have that

$$x \in \mathcal{M}_{\varphi,R} \quad \text{if and only if} \quad \int_0^a \frac{1}{\varphi^2(t)} d\|E_t x\|^2 \leq R^2.$$

Alternatively, and as this was recently suggested and roughly discussed in [4], one can assign smoothness classes by considering, in analogy to (4), the *level sets*  $\mathfrak{M} = \mathcal{E}_{\psi,E}$  defined as

$$\mathcal{E}_{\psi,E} := \{x \in X : F_x^2(t) \leq E^2 \psi^2(t), 0 < t \leq a\}, \quad E > 0, \quad (5)$$

for index functions  $\psi: (0, a] \rightarrow (0, \infty)$ . It is easy to see and was established in [4, Prop. 9] that  $\mathcal{M}_{\psi,E} \subset \mathcal{E}_{\psi,E}$  if  $\varphi$  and  $\psi$  in (4) and (5) coincide.

The following structural properties of both the source and the level sets are given next.

**Proposition 1.** *Let the operator  $A$  be as in (1) with associate  $H$ , see (2). Then the following properties hold true:*

1. *For arbitrary index functions  $\varphi$  and  $\psi$  the sets  $\mathfrak{M} = \mathcal{M}_{\varphi,R}$  and  $\mathfrak{M} = \mathcal{M}_{\psi,E}$  are centrally symmetric, which means that with  $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$  also the elements  $-x_2$  and  $(x_1 - x_2)/2$  belong to  $\mathfrak{M}$ . Moreover, both classes of sets  $\mathfrak{M}$  are convex.*

2. *If the operator  $A$  is compact then the sets  $\mathfrak{M} = \mathcal{M}_{\varphi,R}$  and  $\mathfrak{M} = \mathcal{E}_{\psi,E}$  are compact.*

**Proof.** The central symmetry is evident by definition. Also the convexity of  $\mathcal{M}_{\varphi,R}$  is clear since this set is a linear transformation of a ball. For  $x \in \mathcal{E}_{\psi,E}$  one has that  $\|\chi_{(0,t]}(H)x\| = F_x(t) \leq E\psi(t)$  for all  $0 < t \leq a$ . Therefore the convexity follows from the fact that the inequalities under consideration remain valid for convex linear combinations of the elements  $x$ .

We turn to the second assertion. The compactness of the sets  $\mathcal{M}_{\varphi,R}$  was established in [5, Lemma 2.8], and it follows from the fact that  $\mathcal{M}_{\varphi,R}$  is the image of a closed convex set under a compact operator. Closedness of the sets  $\mathcal{E}_{\psi,E}$  is immediate from (5). Also, it is clear that the set  $\mathcal{E}_{\psi,E}$  is bounded, by letting  $t := a$  in (5). To see the relative compactness, let us denote by  $s_1 \geq s_2, \dots > 0$  the eigenvalues and by  $u_1, u_2, \dots$  the corresponding eigenelements of the non-negative operator  $H$ . With this notation we can write

$$F_x^2(t) = \|\chi_{(0,t]}(H)x\|^2 = \sum_{s_j \leq t} |\langle x, u_j \rangle|^2 \leq E^2 \psi^2(t)$$

for elements  $x \in \mathcal{E}_{\psi, E}$  and for each  $0 < t \leq a$ . But this yields that for any index function  $\psi$  the tails  $\sum_{j=k}^{\infty} |\langle x, u_j \rangle|^2$  tend to zero as  $k \rightarrow \infty$  uniformly for all  $x \in \mathcal{E}_{\psi, E}$ . This gives the compactness, see [10, Chapt. II], and completes the proof.  $\square$

For source sets and level sets representing  $\mathfrak{M} \subset X$  the best possible error for reconstruction of the solution  $x \in \mathfrak{M}$  based on noisy data  $y^\delta$ , satisfying  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$  instead of the exact right-hand side  $y \in \mathcal{R}(A)$ , is given by

$$\tilde{\omega}(A, \mathfrak{M}, \delta) := \sup \{ \|x_1 - x_2\| : x_1, x_2 \in \mathfrak{M}, \|A(x_1 - x_2)\| \leq \delta \}. \quad (6)$$

In the case of centrally symmetric and convex sets  $\mathfrak{M}$  the behavior of this function is closely connected with the behavior of the *modulus of continuity*

$$\omega(A, \mathfrak{M}, \delta) := \sup \{ \|x\| : x \in \mathfrak{M}, \|Ax\| \leq \delta \}, \quad \delta > 0, \quad (7)$$

of the inverse operator  $A^{-1}$  restricted to  $\mathfrak{M}$ , because the inequality chain

$$\omega(A, \mathfrak{M}, \delta) \leq \tilde{\omega}(A, \mathfrak{M}, \delta) \leq \omega(A, 2\mathfrak{M}, \delta) = 2\omega(A, \mathfrak{M}, \delta/2), \quad \delta > 0,$$

is valid. For more details see also [9, Lemma 4.3.1]. The modulus  $\omega(A, \mathfrak{M}, \delta)$  acts as a measure of ill-posedness pre-estimating the reconstruction error in solving (1) for given  $\delta > 0$ .

The mathematical school of Sverdlovsk/Yekaterinburg, see the monograph [9] by IVANOV, VASIN and TANANA, very early studied such moduli in connection with the development of the method of quasi-solutions. In the last decades VLADIMIR V. VASIN continued, extended and improved such studies on regularization methods for the stable approximate solution of ill-posed operator equations, see for example [20–22].

In Section 2 we collect some properties of the modulus of continuity  $\omega(A, \mathfrak{M}, \delta)$ , in particular with respect to the source sets and level sets. Our main result presented in Section 3 is to show the concavity of the associated function  $\omega^2(A, \mathfrak{M}, \sqrt{\delta})$  for both classes. The paper will be completed with some remarks on upper and lower bounds for the modulus of continuity.

## 2. Basic properties of the modulus of continuity

We are going to study the modulus of continuity (7) with focus on the sets  $\mathcal{M}_{\varphi, R}$  and  $\mathcal{E}_{\psi, E}$ . At the beginning we recall the following proposition formulated and proved in [6, Theorem 2.1] that characterizes the main properties of such modulus. Below we shall set

$$U\mathfrak{M} := \{z \in Z : z = Ux, x \in \mathfrak{M}\},$$

for linear operators  $U: X \rightarrow Z$  and some Hilbert space  $Z$ . In that sense, we use  $K\mathfrak{M} := \{x \in X : x = K\tilde{x}, \tilde{x} \in \mathfrak{M}\}$  for constants  $K > 0$  by identifying the constant  $K$  with the multiple  $KI$  of the unit operator.

We state the following useful results.

**Proposition 2.** *For centrally symmetric and convex sets  $\mathfrak{M}$  the following properties hold for the moduli of continuity from (7):*

(a) *If  $\mathfrak{M}$  is bounded then  $\omega(A, \mathfrak{M}, \delta)$  is a finite, positive and non-decreasing function for  $\delta > 0$  and it is constant for  $\delta \geq \bar{\delta} := \sup_{x \in \mathfrak{M}} \|Ax\|$ ;*

(b) *If  $\mathfrak{M}$  is relatively compact then  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(A, \mathfrak{M}, \delta) = 0$ ;*

(c)  *$\omega(A, K\mathfrak{M}, \delta) = K\omega(A, \mathfrak{M}, \delta/K)$  for  $K > 0$ ;*

(d)  *$\omega(A, \mathfrak{M}, C\delta) \leq C\omega(A, \mathfrak{M}, \delta)$  for  $C > 1$ ;*

(e)  *$\omega(A, K\mathfrak{M}, C\delta) \leq \max\{C, K\}\omega(A, \mathfrak{M}, \delta)$  for  $C, K > 0$ ;*

(f) *the decay rate of  $\omega(A, \mathfrak{M}, \delta) \rightarrow 0$  as  $\delta \rightarrow 0$  is at most linear.*

We add a result on the behavior of the modulus of continuity with respect to unitary transformations.

**Proposition 3.** (i) *Let  $A$  and  $H$  be as in (1) and (2). Then we have that*

$$\omega(A, \mathfrak{M}, \delta) = \omega(H^{1/2}, \mathfrak{M}, \delta), \quad \delta > 0.$$

(ii) *If  $B = UGU^*: Z \rightarrow Z$  for some unitary operator  $U: X \rightarrow Z$  mapping into the Hilbert space  $Z$  with norm  $\|\cdot\|_*$  and some bounded linear operator  $G: X \rightarrow X$ , then*

$$\omega(G, \mathfrak{M}, \delta) = \omega(B, U\mathfrak{M}, \delta), \quad \delta > 0.$$

**Proof.** The first assertion (i) is an immediate consequence of  $\|Ax\| = \|H^{1/2}x\|$  for  $x \in X$ . To prove (ii), let  $B = UGU^*$ . Then we have with  $v := Ux$  and  $\|v\|_* = \|x\|$

$$\begin{aligned} \omega(G, \mathfrak{M}, \delta) &= \sup \{ \|x\| : x \in \mathfrak{M}, \|Gx\| \leq \delta \} \\ &= \sup \{ \|U^*v\| : U^*v \in \mathfrak{M}, \|GU^*v\| \leq \delta \} \\ &= \sup \{ \|v\|_* : v \in U\mathfrak{M}, \|Bv\|_* \leq \delta \} \\ &= \omega(B, U\mathfrak{M}, \delta). \end{aligned}$$

This completes the proof.  $\square$

We established in Proposition 1 that the sets  $\mathcal{M}_{\varphi,R}$  and  $\mathcal{E}_{\psi,E}$  are centrally symmetric and convex. Therefore Proposition 2 applies. Within the traditional setup when smoothness is given in terms of source sets with power type index function  $\varphi$  then it is known that the modulus of continuity is *concave* and that  $\omega(A, \mathfrak{M}, \delta) \sim \delta^\kappa$  with  $0 < \kappa < 1$ . This also holds for the logarithmic case  $\omega(A, \mathfrak{M}, \delta) \sim (\log(1/\delta))^{-\kappa}$  with  $\kappa > 0$  if  $\delta > 0$ , and the concavity of the modulus of continuity seems to be typical. However, not necessarily the functions  $\omega(A, \mathfrak{M}, \delta)$  are convex for any classes  $\mathfrak{M} = M_{\varphi,R}$  and  $\mathfrak{M} = E_{\psi,E}$ . Nevertheless, we can show that the associated function  $\omega^2(A, \mathfrak{M}, \sqrt{\delta})$  is convex in any case for both of the classes and for all  $\delta > 0$ . Because of Proposition 2(c) and because  $\mathcal{M}_{\varphi,R} = R\mathcal{M}_{\varphi,1}$  it is sufficient to consider the case  $R = 1$  and the set  $\mathcal{M}_\varphi := \mathcal{M}_{\varphi,1}$ . Similar holds for  $\mathcal{E}_{\psi,E}$  and we let  $\mathcal{E}_\psi := \mathcal{E}_{\psi,1}$ .

### 3. Concavity of the modulus on smoothness classes

Based on results from [8], see also [12, Theorem 1], it was proved in [6, Rem. 3.6] that for compact operators  $A$ , and under a rather weak additional condition on  $\varphi$ , the function

$$\tau(A, \mathfrak{M}, \delta) := \omega^2(A, \mathfrak{M}, \sqrt{\delta}), \quad \delta > 0, \tag{8}$$

is for  $\mathfrak{M} = \mathcal{M}_\varphi$  a concave linear spline, or more precisely the smallest concave index function that interpolates points defined by spectral properties of  $A$  and their interplay with the function  $\varphi$ . Later in [6, Prop. 3.5] the authors have proved the concavity of  $\tau$  with  $\mathfrak{M} = \mathcal{M}_\varphi$  for compact  $A$ , i.e., for ill-posedness of type II. The following Theorem 1 extends this result to ill-posedness of type I, thus covering the case of multiplication operators with multiplier functions having an essential zero. Moreover we can prove concavity of  $\tau$  for all  $\delta > 0$  also in the case  $\mathfrak{M} = \mathcal{E}_\psi$ .

We start with the following preliminary discussion, and we recall the spectral theorem for bounded self-adjoint linear operators in Hilbert space, see [23, Chapt. VII.1] and [17, Chapt. VII].

**Proposition 4.** *For every bounded self-adjoint linear operator  $H: X \rightarrow X$  mapping in the separable Hilbert space  $X$  there exist a measurable space  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , a unitary transformation  $U: X \rightarrow Z := L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , and a measurable function  $f: \Omega \rightarrow \sigma(H) \setminus \{0\} \subseteq (0, \|H\|) \subset \mathbb{R}$  such that  $M_f := UHU^*$  is a multiplication operator defined as*

$$[M_f h](\omega) := f(\omega) h(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

*and mapping  $Z$  into itself. Moreover we have  $\eta(H) = U^*M_{\eta(f)}U$  for bounded measurable functions  $\eta$ .*

We can apply this result for the non-negative operator  $H = A^*A$ , and thus find a non-negative function  $f$  together with a unitary mapping  $U$  such that  $H = U^*M_fU$ , where we shall abbreviate  $\|g\|_* := \|g\|_{L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)}$ . By Proposition 3 we find that

$$\omega(A, \mathfrak{M}, \delta) = \omega(H^{1/2}, \mathfrak{M}, \delta) = \omega(M_{f^{1/2}}, U\mathfrak{M}, \delta), \quad \delta > 0. \quad (9)$$

It is thus interesting to determine the analogs of  $\mathcal{M}_{\varphi, R}$  and  $\mathcal{E}_{\psi, E}$  in the multiplication context, i.e., the images  $U\mathcal{M}_{\varphi, R}$  and  $U\mathcal{E}_{\psi, E}$ , respectively. We state the following without proof.

**Lemma 1.** *We have that*

$$U\mathcal{M}_{\varphi, R} = \{g \in Z : g = \varphi(f)h, \|h\|_* \leq 1\}$$

and

$$U\mathcal{E}_{\psi, E} = \left\{ g \in Z : \int_{0 < f(\omega) \leq t} |g(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leq E^2\psi^2(t), 0 < t \leq a \right\}.$$

The main result is the following.

**Theorem 1.** *For every bounded linear operator  $A : X \rightarrow Y$  with non-closed range  $\mathcal{R}(A)$  and arbitrary index functions  $\varphi$  and  $\psi$  defined on the interval  $(0, \|A\|^2]$  the functions  $\tau(A, \mathfrak{M}, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , from (8) are concave for the classes  $\mathfrak{M} := \mathcal{M}_{\varphi}$  and  $\mathfrak{M} := \mathcal{E}_{\psi}$ .*

**Proof.** We first carry out the proof for  $\mathfrak{M} := \mathcal{M}_{\varphi}$ , and we use (9) together with Lemma 1. By introducing the function  $\Theta(t) := \sqrt{t} \varphi(t)$ ,  $0 < t \leq a$ , we find that

$$\begin{aligned} \tau(A, \mathcal{M}_{\varphi}, \delta) &= \sup \{ \|g\|_*^2 : g = \varphi(f)h, \|h\|_* \leq 1, \|\sqrt{f}g\|_*^2 \leq \delta \} \\ &= \sup \{ \|\varphi(f)h\|_*^2 : \|h\|_* \leq 1, \|\Theta(f)h\|_*^2 \leq \delta \}. \end{aligned}$$

Consider arbitrarily chosen  $0 < \delta_1 < \delta < \delta_2$  and  $\delta = \lambda\delta_1 + (1 - \lambda)\delta_2$  for some appropriate  $0 < \lambda < 1$ . With given  $\varepsilon > 0$  we can find elements  $h_1, h_2 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $\|h_1\|_* \leq 1, \|h_2\|_* \leq 1$ , satisfying the conditions

$$\int_0^a \Theta^2(f(\omega))h_1^2(\omega) d\mu(\omega) \leq \delta_1, \quad \int_0^a \varphi^2(f(\omega))h_1^2(\omega) d\mu(\omega) \geq \tau(A, \mathcal{M}_{\varphi}, \delta_1) - \varepsilon$$

and

$$\int_0^a \Theta^2(f(\omega))h_2^2(\omega) d\mu(\omega) \leq \delta_1, \quad \int_0^a \varphi^2(f(\omega))h_2^2(\omega) d\mu(\omega) \geq \tau(A, \mathcal{M}_{\varphi}, \delta_2) - \varepsilon.$$

We let  $h$  be chosen such that

$$h^2(\omega) := \lambda h_1^2(\omega) + (1 - \lambda)h_2^2(\omega), \quad \omega \in \Omega. \quad (10)$$

Plainly,  $\|h\|_* \leq 1$ . Also we have that

$$\begin{aligned} \int_0^a \Theta^2(f(\omega))h^2(\omega) d\mu(\omega) &= \lambda \int_0^a \Theta^2(f(\omega))h_1^2(\omega) d\mu(\omega) + (1 - \lambda) \int_0^a \Theta^2(f(\omega))h_2^2(\omega) d\mu(\omega) \\ &\leq \lambda\delta_1 + (1 - \lambda)\delta_2 = \delta. \end{aligned}$$

Therefore we conclude that

$$\begin{aligned}\tau(A, \mathcal{M}_\varphi, \delta) &\geq \int_0^a \varphi^2(f(\omega)) h^2(\omega) d\mu(\omega) \\ &= \lambda \int_0^a \varphi^2(f(\omega)) h_1^2(\omega) d\mu(\omega) + (1-\lambda) \int_0^a \varphi^2(f(\omega)) h_2^2(\omega) d\mu(\omega) \\ &\geq \lambda \tau(A, \mathcal{M}_\varphi, \delta_1) + (1-\lambda) \tau(A, \mathcal{M}_\varphi, \delta_2) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Letting  $\varepsilon \rightarrow 0$  this proves the required concavity assertion for the source set  $\mathcal{M}_\varphi$ .

For the level set  $\mathcal{E}_\psi$  the proof is similar. We start from

$$\tau(A, \mathcal{E}_\psi, \delta) = \sup \left\{ \|g\|_*^2 : \int_{0 < f(\omega) \leq t} |g(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leq \psi^2(t), \quad 0 < t \leq a \right\}.$$

Again we choose  $h_1, h_2$  such that

$$\|h_1\|_*^2 \geq \tau(A, \mathcal{E}_\psi, \delta_1) - \varepsilon \quad \text{and} \quad \|h_2\|_*^2 \geq \tau(A, \mathcal{E}_\psi, \delta_2) - \varepsilon,$$

together with

$$\int_{0 < f(\omega) \leq t} |h_1(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leq \psi^2(t), \quad 0 < t \leq a,$$

and

$$\int_{0 < f(\omega) \leq t} |h_2(\omega)|^2 d\mu(\omega) \leq \psi^2(t), \quad 0 < t \leq a.$$

The same choice of  $h$  as in (10) allows us to complete the proof, and we leave the details to the reader.  $\square$

Note that due to the identity (c) in Proposition 2 the proven concavity carries over to the functions  $\omega^2(A, \mathcal{M}_{\varphi, R}, \sqrt{\delta})$  and  $\omega^2(A, \mathcal{E}_{\psi, E}, \sqrt{\delta})$ , respectively, for all  $\delta > 0$ ,  $R > 0$  and  $E > 0$ .

#### 4. Rates on smoothness classes

The modulus of continuity is a benchmark for the reconstruction error of regularization schemes, see the discussion in Section 1. Therefore its decay rate to zero as  $\delta \rightarrow 0$  is of interest. In the compact case such rates for the classes  $\mathcal{M}_{\varphi, R}$  and  $\mathcal{E}_{\psi, E}$  are well studied. In particular, sharp bounds for smoothness given in terms of source sets  $\mathcal{M}_{\varphi, R}$  are obtained by interpolation techniques. However, up to a factor 2 such upper bounds can be obtained by analyzing specific regularization techniques. It was mentioned in Section 2 that  $\mathcal{M}_{\psi, E} \subset \mathcal{E}_{\psi, E}$ , and upper bounds for the level sets provide also upper bounds for the source sets. But for level sets  $\mathcal{E}_{\psi, E}$  upper bounds for the regularization error are easily obtained by noticing that the distribution function  $F_x^2(t)$  is the square of the profile function (regularization error in the noise-free case) for *spectral cut-off*, we refer to [2]. This gives:

**Proposition 5.** *Let the operator  $A$  be as in (1), and let  $\psi$  be an index function, with associated function  $\Theta(t) := \sqrt{t}\psi(t)$ ,  $0 < t \leq a$ . Then*

$$\omega(A, \mathcal{E}_{\psi, E}, \delta) \leq 2E \psi(\Theta^{-1}(\delta/E)), \quad 0 < \delta \leq E\Theta(a), \quad (11)$$

and

$$\omega(A, \mathcal{E}_{\psi, E}, \delta) \geq E \psi(\Theta^{-1}(\delta/E)), \quad \delta^2/E^2 \in \sigma(H\psi^2(H)). \quad (12)$$

**Proof.** We use the spectral cut-off regularization, i.e., when

$$x_\alpha^\delta := g_\alpha(H)A^*y^\delta \quad \text{with} \quad g_\alpha(t) := \begin{cases} 1/t, & t \geq \alpha, \\ 0, & t < \alpha, \end{cases}$$

determines the regularized solutions  $x_\alpha^\delta$ . As already mentioned we have in this case that

$$\|x - g_\alpha(H)Hx\|^2 = F_x^2(\alpha).$$

For  $x \in \mathcal{E}_{\psi,E}$  we have that

$$\begin{aligned} \|x - x_\alpha^\delta\| &\leq \|x - g_\alpha(H)Hx\| + \|g_\alpha(H)Hx - g_\alpha(H)A^*y^\delta\| \\ &\leq F_x(\alpha) + \|g_\alpha(H)A^*\| \|Ax - y^\delta\| \leq F_x(\alpha) + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} = E\psi(\alpha) + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \end{aligned}$$

The choice of  $\alpha = \alpha(\delta)$  as solution to  $\Theta(\alpha) = \delta/E$  allows to complete the proof of inequality (11).

By  $\mathcal{M}_{\psi,E} \subset \mathcal{E}_{\psi,E}$  we have that  $\omega(A, \mathcal{E}_{\psi,E}, \delta) \geq \omega(A, \mathcal{M}_{\psi,E}, \delta)$ . On the other hand,  $\omega(A, \mathcal{M}_{\psi,E}, \delta) \geq E\psi(\Theta^{-1}(\delta/E))$  is valid for  $\delta^2/E^2 \in \sigma(H\psi^2(H))$ , see [19, Theorem 2.5], which yields (12) and completes the proof of the proposition.  $\square$

## REFERENCES

1. **Engl H.W., Hanke M. and Neubauer A.** Regularization of inverse problems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1996. 321 p. (Math. and its Appl; vol. 375.)
2. **Flemming J., Hofmann B. and Mathé P.** Sharp converse results for the regularization error using distance functions // Inverse Problems. 2011. Vol. 27, no. 2. (025006; 18 p.)
3. **Hofmann B. and Fleischer G.** Stability rates for linear ill-posed problems with compact and non-compact operators // Z. Anal. Anwendungen. 1999. Vol. 18, no. 2. P. 267–286.
4. **Hofmann B. and Kindermann S.** On the degree of ill-posedness for linear problems with non-compact operators // Methods Appl. Anal. 2010. Vol. 17, no. 4. P. 445–462.
5. **Hofmann B. and Mathé P.** Analysis of profile functions for general linear regularization methods // SIAM J. Numer. Anal. 2007. Vol. 45, no. 3. P. 1122–1141.
6. **Hofmann B., Mathé P. and Schieck M.** Modulus of continuity for conditionally stable ill-posed problems in Hilbert space // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. Vol. 16, no. 6. P. 567–585.
7. **Hofmann B. and Wolfersdorf L. von** Some results and a conjecture on the degree of ill-posedness for integration operators with weights // Inverse Problems. 2005. Vol. 21, no. 2. P. 427–433.
8. **Ivanov V.K. and Korolyuk T.I.** Error estimates for solutions of incorrectly posed linear problems // USSR Comput. Math. Math. Phys. 1969. Vol. 9, iss. 1. P. 35–49.
9. **Ivanov V.K., Vasin V.V. and Tanana V.P.** Theory of linear ill-posed problems and its applications. Utrecht: VSP, 2002. 218 p. (Inverse and Ill-posed Probl. Ser.)
10. **Lyusternik L.A. and Sobolev V.I.** Kratkii kurs funktsionalnogo analiza. Moscow: “Vyssh. Shkola”, 1982. 272 p.
11. **Mathé P. and Hofmann B.** Direct and inverse results in variable Hilbert scales // J. Approx. Theory. 2008. Vol. 154, no. 2. P. 77–89.
12. **Mathé P. and Pereverzev S.V.** Geometry of linear ill-posed problems in variable Hilbert scales // Inverse Problems. 2003. Vol. 19, no. 3. P. 789–803.
13. **Mathé P. and Pereverzev S.V.** Discretization strategy for linear ill-posed problems in variable Hilbert scales // Inverse Problems. 2003. Vol. 19, no. 6. P. 1263–1277.
14. **Nashed M.Z.** A new approach to classification and regularization of ill-posed operator equations // Inverse and Ill-posed Problems. Boston: Acad. Press, 1987. P. 53–75. (Notes Rep. Math. Sci. Engrg; vol. 4.)
15. **Neubauer A.** On converse and saturation results for regularization methods // Beiträge zur angewandten Analysis und Informatik. Aachen: Shaker, 1994. P. 262–270.
16. **Neubauer A.** On converse and saturation results for Tikhonov regularization of linear ill-posed problems // SIAM J. Numer. Anal. 1997. Vol. 34, no. 2. P. 517–527.

17. **Reed M. and Simon B.** Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. New York: Acad. Press, 1980. 400 p.
18. **Rudin W.** Functional analysis. New York: McGraw-Hill Book Co., 1973. 397 p. (McGraw-Hill Ser. in Higher Math.)
19. **Tautenhahn U., Hämarik, U., Hofmann, B. and Shao, Y.** Conditional stability estimates for ill-posed PDE problems by using interpolation. Preprint 2011-16. Chemnitz: Technische Universität, 2011. 40 p. (Preprint Ser. of Department of Math.)  
URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:ch1-qucosa-72654>.
20. **Vasin V.V.** The method of quasi-solutions by Ivanov is the effective method of solving ill-posed problems // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. Vol. 16, no. 6. P. 537–552.
21. **Vasin V.V. and Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 p. (Inverse and Ill-Posed Probl. Ser.)
22. **Vasin V.V. and Korotkii M.A.** Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functionals // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2007. Vol. 15, no. 8. P. 853–865.
23. **Werner D.** Funktionalanalysis. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 531 p.

Received March, 22, 2011

Bernd Hofmann

Department of Mathematics, Chemnitz University of Technology

09107 Chemnitz, Germany

e-mail: [hofmannb@mathematik.tu-chemnitz.de](mailto:hofmannb@mathematik.tu-chemnitz.de)

Peter Mathé

Weierstraß Institute for Applied Analysis and Stochastics

Mohrenstraße 39, 10117 Berlin, Germany

e-mail: [mathe@wias-berlin.de](mailto:mathe@wias-berlin.de)

УДК 517.983.54

SPARSE OPTIMIZATION METHODS FOR SEISMIC WAVEFIELDS RECOVERY<sup>1</sup>

Y. F. Wang

Due to the influence of variations in landform, geophysical data acquisition is usually sub-sampled. Reconstruction of the seismic wavefield from sub-sampled data is an ill-posed inverse problem. It usually requires some regularization techniques to tackle the ill-posedness and provide a stable approximation to the true solution. In this paper, we consider the wavefield reconstruction problem as a compressive sensing problem. We solve the problem by constructing different kinds of regularization models and study sparse optimization methods for solving the regularization model. The  $l_p$ - $l_q$  model with  $p = 2$  and  $q = 0, 1$  is fully studied. The projected gradient descent method, linear programming method and an  $l_1$ -norm constrained trust region method are developed to solve the compressive sensing problem. Numerical results demonstrate that the developed approaches are robust in solving the ill-posed compressive sensing problem and can greatly improve the quality of wavefield recovery.

Keywords: Seismic inversion; optimization; sparsity; regularization.

*Dedicated to the 70th anniversary of the RAS Corresponding-Member Vladimir Vasin*

## 1. Introduction

In seismic prospecting, the process of acquisition records the continuous wavefield which is generated by the source. In order to restore the seismic data correctly, the acquisition should satisfy the *Nyquist/Shannon* sampling theorem, i.e., the sampling frequency should be at least twice of the maximum frequency of original signal. In seismic acquisition, because of the influence of obstacles at land surface, rivers, bad receivers, noise, acquisition aperture, restriction of topography and investment, the obtained data usually does not satisfy the sampling theorem. A direct effect of the limitations of acquisition is the sub-sampled data will generate aliasing in the frequency domain; therefore, it may affect the subsequent processing such as filtering, de-noising, AVO (amplitude versus offset) analysis, multiple eliminating and migration imaging [23]. In order to remove the influence of sub-sampled data, the seismic data restoration/interpolation technique is often used. However, this is an ill-posed problem due to the fact that seismic data are usually band-limited and the inversion process is under-determined, i.e., the dimension of the solution space is infinite [4; 7; 19; 21].

The model of seismic acquisition can be written as

$$Lm = d, \quad (1)$$

where  $L \in \mathbb{R}^{M \times N}$  is the sampling (forward) operator,  $m \in \mathbb{R}^N$  is the reflectivity model or the wavefield, and  $d \in \mathbb{R}^M$  denotes the sampled data. The restoration problem is to solve  $m$  from knowledge of  $L$  and  $d$ , thus it is an inverse problem. A problem is called well-posed if the solution of (1) exists, is unique and continuous. If any one of these conditions is violated, the problem is ill-posed [11; 12]. Equation (1) can be solved by finding a least squares solution. However, spectrum analysis reveals that this solution is unstable and physically meaningless, sometimes [16].

<sup>1</sup>The work is supported by National Natural Science Foundation of China under grant numbers 10871191, 40974075 and Knowledge Innovation Programs of Chinese Academy of Sciences KZCX2-YW-QN107.

Seismic interpolation is a main technique for wavefield restoration. For seismic interpolation problem, let us denote by  $m$  the original seismic wavefield,  $d$  the sampled data, and  $L$  the sampling operator, the expression again can be written as (1). Our purpose is to restore  $m$  from the sampled data  $d$ . Since  $d$  is usually incomplete and  $L$  is an underdetermined operator, this indicates that there are infinite solutions satisfying the seismic interpolation equation (1). Hence, seismic data interpolation is an ill-posed inverse problem.

The term, compressive sensing, comes from the signal compression sensing area[2; 3; 5], e.g., signals can be compressed using Sine, Cosine, wavelet and curvelet transform. For a signal  $m$  in  $N$  dimensional space, we can find  $M$  linear observations  $L_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ), such that  $d_i = L_i m$ . Denote  $L = [L_1, L_2, \dots, L_M]^T$ , we have the compact form  $d = Lm$  as in (1). Here  $L_i$  is called the sensor, its product with the signal  $m$ , i.e.,  $d_i$  acquires part of information of the signal. The aim of the compressive sensing is to use limited observations  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) ( $M \ll N$ ) to restore the input signal  $m$  (it is also called decoding in signal processing area). To do this, we need to assume the transform of the signal  $m$  is sparse. With this assumption, the signal  $m$  can be expressed sparsely, and can be reconstructed with  $M$  (linear) observations. The basic framework is: suppose the signal  $m$  can be spanned by a series of orthogonal bases  $\Psi_i(t)$ . These bases for all  $i$  constitute an orthogonal transform matrix  $\Psi$  (e.g., sine curve, wavelet, curvelet, contourlet, framelet and Gabor function) [22; 23], such that

$$m(t) = (\Psi a)(t) = \sum_i a_i \Psi_i(t). \quad (2)$$

It is clear that  $a_i = (m, \Psi_i)$ . Using operator expression, we have  $a = \Psi^* m$ , the function  $a$  is the sparse or compressive expression of the signal  $m$ . Let  $A = L\Psi$ , solving for the signal  $m$  is reduced to solve a simple problem

$$d = Aa. \quad (3)$$

Note that  $a_i$  is the weight or coefficient of linear combinations for the signal  $m$ , so it is much simpler than the signal  $m$ . After obtaining a series of coefficients  $a_i$ , the signal  $m$  can then be reconstructed sufficiently.

Therefore, a crucial issue in seismic processing is finding the sparse solution of an underdetermined system. Due to huge storage of the data volume and the specific sampling, methods for solving general linear equations cannot be used in seismic data restoration directly. In this paper, we consider using sparse optimization methods for solving the underdetermined problem.

## 2. Sparse Optimization

We introduce three methods in this paper. For a complete review of the sparse optimization methods and more advanced methods for solving seismic imaging problems, we refer to [4; 23] and references therein.

### 2.1. An $l_p$ - $l_q$ model

In Ref. [17], the authors proposed a general  $l_p - l_q$  model for solving multi-channel ill-posed image restoration problem, which is in the form

$$J^\alpha[a] \triangleq \frac{1}{2} \|Aa - d\|_{l_p}^p + \frac{1}{2} \alpha \|a - a^0\|_{l_q}^q \rightarrow \min, \quad \text{for } p, q \geq 0, \quad (4)$$

where  $a^0$  is an *a priori* estimation about  $a$ . Through straightforward calculation, the gradient  $\text{Grad}_{J^\alpha}[a]$  and the Hessian matrix  $\text{Hess}_{J^\alpha}[a]$  of the objective function in equation (4) can be ex-

pressed as

$$\begin{aligned} \text{Grad}_{J^\alpha}[a] &= \frac{1}{2}pA^T \begin{bmatrix} |r_1|^{p-1}\text{sign}(r_1) \\ |r_2|^{p-1}\text{sign}(r_2) \\ \vdots \\ |r_M|^{p-1}\text{sign}(r_M) \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\alpha q \begin{bmatrix} |a_1 - a_1^0|^{q-1}\text{sign}(a_1 - a_1^0) \\ |a_2 - a_2^0|^{q-1}\text{sign}(a_2 - a_2^0) \\ \vdots \\ |a_N - a_N^0|^{q-1}\text{sign}(a_N - a_N^0) \end{bmatrix}, \\ \text{Hess}_{J^\alpha}[a] &= \frac{1}{2}p(p-1)A^T \text{diag}(|r_1|^{p-2}, |r_2|^{p-2}, \dots, |r_M|^{p-2})A \\ &+ \frac{1}{2}\alpha q(q-1)\text{diag}(|a_1 - a_1^0|^{q-2}, |a_2 - a_2^0|^{q-2}, \dots, |a_N - a_N^0|^{q-2}), \end{aligned}$$

where  $r_i (i = 1, 2, \dots, M)$  is defined by  $r_i = A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + \dots + A_{iN}a_N - d_i$ ;  $\text{sign}(x)$  is the symbol function, defined by

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ -1, & \text{if } x < 0; \end{cases}$$

$\text{diag}(\cdot)$  denotes the vector diagonalization. Details about algorithm description and applications for multichannel image processing problem can be found in Ref. [17]. Evidently, when  $p = 2$ ,  $q = 1$ , the  $l_p - l_q$  minimization model reduces to the  $l_1$ -norm minimization model. The great advantage of the  $l_p - l_q$  minimization model is that it does not require convexity of the objective function, and at the same time the model is a regularization model, hence can be used to solve inverse problems stably. It is obvious that the layer media possess smoothness and non-smoothness simultaneously, so it can be used for solving complex seismic inverse problems [19].

## 2.2. $l_0$ quasi-norm approximation method

Strictly speaking,  $\|\cdot\|_{l_0}$  is not a norm. But the concept of  $l_0$  is useful in sparse representation. The  $l_0$  quasi-norm is defined as:  $\|x\|_{l_0} = \{\text{num}(x \neq 0)\}$ , for all  $x \in \mathbb{R}^N$ , where  $\text{num}(x \neq 0)$  denotes the cardinality of nonzero components of the vector  $x$ , i.e., the support of  $x$ . Minimization of  $\|x\|_{l_0}$  means the number of nonzero values of  $x$  to be minimal. The original problem for  $l_0$  quasi-norm minimization is the following equality constrained optimization problem

$$\min \|a\|_{l_0}, \quad \text{s.t.} \quad Aa = d. \quad (5)$$

Obviously, solving the true  $l_0$  quasi-norm optimization is superior to the  $l_1$ -norm optimization though both methods can yield sparse solutions. However, direct solution of (5) is hard to obtain because of time consuming. We consider approximation of  $l_0$  quasi-norm minimization problem. Denote  $f_\sigma(t) = 1 - \exp(-t^2/(2\sigma^2))$  as a function of  $\sigma$  and  $t$ . This function satisfies the following properties: (a)  $f_\sigma(t)$  is continuous and differentiable; (b)  $f_\sigma(t)$  tends to the  $l_0$  quasi-norm when  $\sigma$  tends to 0, i.e.,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t \neq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Thus, we can construct a continuous function to approximate the  $l_0$  quasi-norm, and then obtain the optimal solution. In this way, problem (5) is approximated by

$$\min J_\sigma(a) := \sum_{i=1}^N f_\sigma(a_i), \quad \text{s.t.} \quad Aa = d. \quad (7)$$

The object function  $J_\sigma(a)$  is differentiable and is closely related to the parameter  $\sigma$ : the smaller value of  $\sigma$ , the closer behavior of  $J_\sigma(a)$  to the  $l_0$  quasi-norm. For small values of  $\sigma$ ,  $J_\sigma(a)$  is highly

non-smooth and contains a lot of local minima, hence its minimization is not easy. On the other hand, for larger values of  $\sigma$ ,  $J_\sigma(a)$  is smoother and contains fewer local minima, and its minimization is easier. Practically, we use a decreasing sequence values of  $\sigma$ : for minimizing  $J_\sigma(a)$  for each value of  $\sigma$ , the initial value of the minimization algorithm is the minimum of  $J_\sigma(a)$  from the previous value of  $\sigma$ . Then we apply a simple projected gradient method to solve equation (7). Details of the procedure are given in Algorithm 2.1. For the convergence of a similar method for general signal processing problems, we refer to [10] for details. Below we present a similar algorithm to [10] based on the above  $l_0$  quasi-norm approximation and use it for seismic wavefield restoration.

**Algorithm 2.1** (Projected gradient method for approximation of the  $l_0$  quasi-norm optimization).

1. Initialization:
  - (1) Let  $\hat{a}_0$  be the minimum  $l_2$ -norm solution of  $Aa = d$ , which can be obtained by applying the pseudo-inverse of  $A$ .
  - (2) Choose the inner loop number  $L$ , outer loop number  $J$  and the step-length  $\mu$ ; set a decreasing sequence values of  $\sigma$ :  $[\sigma_1, \dots, \sigma_J]$ .
2. Iteration: for  $j = 1, \dots, J$ 
  - (1) Let  $\sigma = \sigma_j$ .
  - (2) Minimize the function  $J_\sigma(a)$  on the feasible set  $\mathcal{S} = \{a | Aa = d\}$  using  $L$  iterations of gradient descent method.
    - (a) Let  $a = \hat{a}_{j-1}$ ;
    - (b) For  $l = 1, \dots, L$ :
      - Let  $g_\sigma = [\nabla J_\sigma(a_1), \nabla J_\sigma(a_2), \dots, \nabla J_\sigma(a_n)]$ .
      - (The gradient decent iteration):  $a = a + \tau s$  ( $\tau$  is the step-length,  $s = \gamma(g_\sigma)$ ).
      - (Projection): Project  $a$  on the feasible set  $\mathcal{S} = \{a | Aa = d\}$ :
 
$$a = a - A^T(AA^T)^{-1}(Aa - d).$$
  - (3) Set  $\hat{a}_j = a$ ,  $\sigma = \sigma/2$ .
3. Final solution is  $\hat{a} = \hat{a}_J$ .

We can also choose other functions to approximate the  $l_0$  quasi-norm, e.g., the “truncated hyperbolic” function:

$$f_\sigma(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leq \sigma, \\ 1 - (t/\sigma)^2, & |t| \geq \sigma \end{cases} \quad (8)$$

and

$$f_\sigma(t) = 1 - \sigma^2/(t^2 + \sigma^2). \quad (9)$$

**Remark 2.1.** In step 2 of Algorithm 2.1, if the gradient descent step is based on steepest descent (SD) step, i.e,  $\gamma(g_\sigma) = -g_\sigma$  and  $\tau = \tau^{SD}$ , then the algorithm corresponds to projected steepest descent method.

In addition, in Algorithm 2.1, the inner loop number  $L$  needs not be too large, and according to our experience, the step-length  $\tau$  should be greater than 2 to ensure fast convergence. However, it is clear that this choice of the step-length is not optimal. Usually, we need to calculate an optimal step-length  $\tau^*$  by line search for the one-dimensional minimization problem  $\tau^* = \operatorname{argmin}_\tau J_\sigma(a + \tau s)$ . One may readily see that some fast gradient methods based on non-monotone gradient descent step can be applied, e.g., the Barzilai-Borwein step used in image processing and seismic migration inversion [15; 20], where the function  $\gamma(g_\sigma)$  is updated by the former iterative information instead of the current iterative information.

For orthogonal transform-based restoration, because of the orthogonality of the transform, the inverse of  $AA^T$  is the identify matrix, thus the projection onto  $\mathcal{S} = \{x | Ax = b\}$  can be simply solved by  $x = x - A^T(Ax - b)$ .

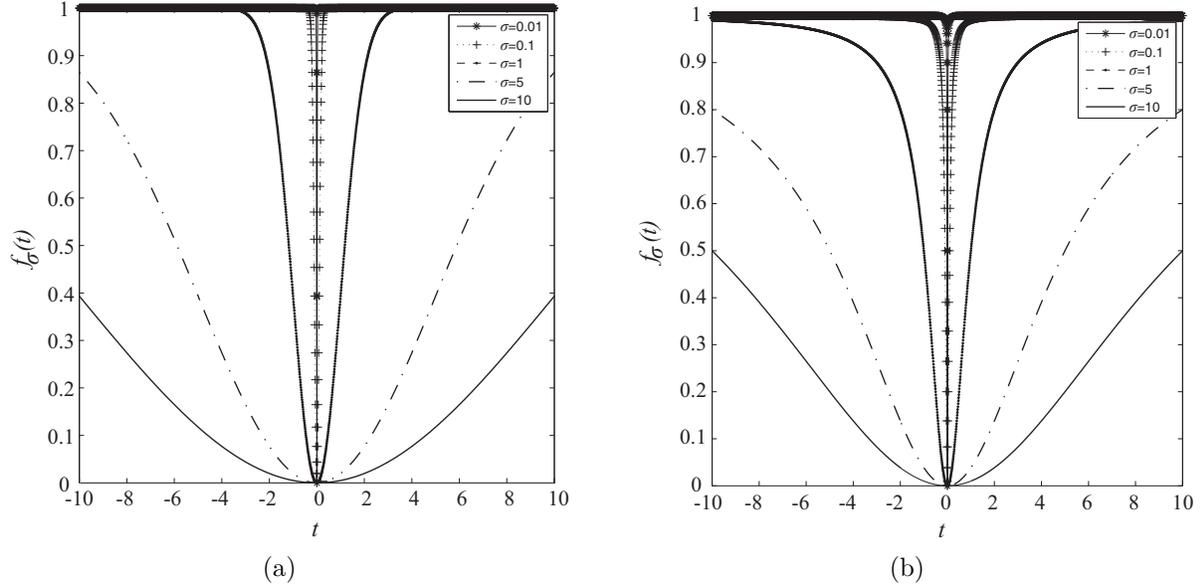


Fig. 1. (a) Function values of  $f_\sigma(t) = 1 - \sigma^2/(t^2 + \sigma^2)$  for different  $\sigma$ ; (b) Function values of  $f_\sigma(t) = 1 - \exp(-t^2/2\sigma^2)$  for different  $\sigma$ .

### 2.3. Linear programming method

Direct solution of the  $l_0$  quasi-norm minimization model is an NP-Hard problem, i.e., it is impossible to invert the function in polynomial time. Thus, direct solving the  $l_0$  quasi-norm minimization problem is not recommended for applications. We reconsider the solution method for the constrained  $l_0$  quasi-norm minimization model (5). Instead of  $l_0$  quasi-norm, using  $l_1$ -norm approximation, it is required to search a feasible solution in the feasible set:  $S = \{a | Aa = d, f_i(a) \leq 0\}$  such that  $\|a\|_{l_1} \rightarrow \min$ , where  $f_i$  is a linear function in the form of  $f_i(a) = e_i^T a + c_i$  for some  $e_i \in \mathbb{R}^N$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ . So, it actually searches an interior point within the feasible set  $S$ , hence the method is called the interior point method. Note that  $\|a\|_{l_1} \rightarrow \min$  is equivalent to  $e_0^T a \rightarrow \min$ , where  $e_0$  is a vector with all components equaling to 1, hence the  $l_1$ -norm minimization under the constraint set  $S$  is the well-known linear programming method. Using logarithmic barrier, minimization of  $\|a\|_{l_1}$  in the feasible set  $S$  can be approximated by

$$\begin{aligned} \min_a e_0^T a - (1/\gamma) \sum_{i=1}^N \log(-f_i(a)), \\ \text{s.t. } Aa = d, \end{aligned} \quad (10)$$

where  $\gamma > 0$  is a constant and  $e_0$  is a vector mentioned above. Define  $\psi(a) = -\sum_{i=1}^N \log(-f_i(a))$  and suppose  $a^*(\gamma)$  for  $\gamma > 0$  is the optimal solution of the problem

$$\begin{aligned} \min_a \gamma e_0^T a + \psi(a), \\ \text{s.t. } Aa = d. \end{aligned} \quad (11)$$

We can define the central path as  $\{a(\gamma) : \gamma > 0\}$ . Therefore  $a = a^*(\gamma)$  if there exists a vector  $u$  such that

$$\gamma e_0 + \nabla \psi(a) + A^T u = 0, \quad Aa = d. \quad (12)$$

This indicates that  $a^*(\gamma)$  minimizes the Lagrangian function

$$\phi(a, \lambda^*(\gamma), \nu^*(\gamma)) \triangleq e_0^T a + \sum_{i=1}^N \lambda_i^*(\gamma) f_i(a) + \nu_i^*(\gamma)^T (Aa - d), \quad (13)$$

where  $\lambda_i^*(\gamma) = -1/(\gamma f_i(a^*(\gamma)))$  and  $\nu^*(\gamma) = u/\gamma$ . The dual problem is

$$\begin{aligned} \max \inf_a \phi(a, \lambda, \nu), \\ \text{s.t. } \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Using the Lagrangian multiplier method, the interior point method chooses a triplet  $(a, \lambda, \nu)$  through solving the nonlinear equations

$$F(a, \lambda, \nu) = \begin{bmatrix} \text{res}_{\text{primal}}(a, \lambda, \nu) \\ \text{res}_{\text{dual}}(a, \lambda, \nu) \\ \text{res}_{\text{central}}(a, \lambda, \nu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

where the residuals of the primal problem, dual problem and central path are defined as

$$\begin{aligned} \text{res}_{\text{primal}}(a, \lambda, \nu) &= Aa - d, \\ \text{res}_{\text{dual}}(a, \lambda, \nu) &= e_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i \nabla f_i(a) + A^T \nu, \\ \text{res}_{\text{central}}(a, \lambda, \nu) &= -\Lambda f - 1/\gamma e_0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (16)$$

where  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  and  $\text{diag}(\cdot)$  denotes a diagonal operator, and  $f = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a))^T$ .

Using Newton's iterative method, the interior point methods generate iteration sequence  $\{a_k, \lambda_k, \nu_k\}$ . With the iterative index  $k$  going to infinity, the equality violations  $\|d - Aa_k\|$  and  $\|A^T \nu_k + \Lambda e + e_0\|$  approach zero and the dual gap towards  $N/\gamma$ , hence solve the primal-dual problem. Detailed algorithm for ill-posed problems can be found in [9; 16; 18]. The complete theory about interior point algorithms was given in Ref. [24].

## 2.4. $l_1$ -norm constrained trust region method

Let us look at the  $l_p$ - $l_q$  minimization model with  $p = 2$  and  $q = 1$  again:

$$J^\alpha[a] = \|Aa - d\|_{l_2}^2 + \alpha \|a\|_{l_1} \longrightarrow \min.$$

In the model, the regularization parameter  $\alpha$  is set *a priori* value. It is evident that the above function  $J^\alpha$  is nondifferentiable at  $a = 0$ . To make it easy to be calculated by computer, we approximate  $\|a\|_{l_1}$  by  $\sum_{i=1}^l \sqrt{(a_i, a_i) + \epsilon}$  ( $\epsilon > 0$ ) and  $l$  is the length of the vector  $a$ . For notational simplicity, we let  $\mathcal{A} = A^T A$ ,

$$\gamma(a^k) = \left( \frac{a_1^k}{\sqrt{(a_1^k)^T a_1^k + \epsilon}}, \frac{a_i^k}{\sqrt{(a_i^k)^T a_i^k + \epsilon}}, \dots, \frac{a_n^k}{\sqrt{(a_n^k)^T a_n^k + \epsilon}} \right)^T$$

and

$$\chi_p(a^k) = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{((a_1^k)^T a_1^k + \epsilon)^{p/2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\epsilon}{((a_i^k)^T a_i^k + \epsilon)^{p/2}} & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\epsilon}{((a_n^k)^T a_n^k + \epsilon)^{p/2}} \end{pmatrix}.$$

Straightforward calculation shows the gradient of  $J^\alpha$  at  $a^k$

$$g_k := g(a^k) \approx A^T (Aa^k - d) + \alpha \gamma(a^k)$$

and the Hessian of  $J^\alpha$  at  $a^k$

$$H_k := H(a^k) \approx \mathcal{A} + \alpha\chi_3(a^k).$$

With above preparation, a trust region subproblem for the compressing model can be formulated as

$$\min_{\xi \in X} \phi_k(\xi) := (g_k, \xi) + \frac{1}{2}(H_k \xi, \xi), \quad (17)$$

$$\text{subject to } \|\xi\|_{l_1} \leq \Delta_k, \quad (18)$$

where  $\xi$  is a trial step and  $\Delta_k$  is the trust region radius which prevents the trial step being too large.

One may readily see that the quadratic minimization problem [17] can be solved by the Gauss-Newton method, i.e., solving the following problem at the  $k$ -th iteration

$$\begin{aligned} H_k \xi &= -g_k, \\ a^{k+1} &= a^k + \xi. \end{aligned}$$

However the method is unstable for ill-posed problems and converges locally [14].

For trust region method, at each iteration, a trust region algorithm generates a new point in the trust region, and has the procedure to determine the acceptance and rejection of the new point. At each iteration, the trial step  $\xi_k$  is normally calculated by solving the trust region subproblem (17)–(18). Generally, a trust region algorithm uses

$$r_k = \frac{\text{Ared}_k}{\text{Pred}_k} \quad (19)$$

to decide whether the trial step  $\xi_k$  is acceptable or not and how the next trust region radius is chosen, where

$$\text{Pred}_k = \psi_k(0) - \psi_k(\xi_k) \quad (20)$$

is the predicted reduction in the approximate model, and

$$\text{Ared}_k = J^\alpha[a^k] - J^\alpha[a^k + \xi_k] \quad (21)$$

is the actual reduction in the objective functional.

Now we give the trust region algorithm for solving the non-smooth  $l_2$ - $l_1$  minimization problem.

**Algorithm 2.2.** (Trust region algorithm for solving the non-smooth  $l_2$ - $l_1$  minimization model)

- ⟨1⟩ Choose parameters  $0 < \tau_3 < \tau_4 < 1 < \tau_1$ ,  $0 \leq \tau_0 \leq \tau_2 < 1$ ,  $\tau_2 > 0$  and initial values  $a_0$ ,  $\Delta_0 > 0$ ; Set  $k := 1$ .
- ⟨2⟩ If the stopping rule is satisfied then STOP; Else, solve (17)–(18) to give  $\xi_k$ .
- ⟨3⟩ Compute  $r_k$ ;

$$a^{k+1} = \begin{cases} a^k & \text{if } r_k \leq \tau_0, \\ a^k + \xi_k & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (22)$$

Choose  $\Delta_{k+1}$  that satisfies

$$\Delta_{k+1} \in \begin{cases} [\tau_3 \|\xi_k\|, \tau_4 \Delta_k] & \text{if } r_k < \tau_2, \\ [\Delta_k, \tau_1 \Delta_k] & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (23)$$

- ⟨4⟩ Evaluate  $g_k$  and  $H_k$ ;  $k := k + 1$ ; GOTO STEP 2.

In Step ⟨2⟩, the stopping rule is based on the following two considerations: the first is whether the norm of the gradient values is sufficiently small. In our algorithm, we will terminate iterations if  $\|g_k\| < \text{tol}$ , where  $\text{tol} \in (0, 1)$ . The second is the discrepancy principle, i.e., the iteration should be terminated at the first occurrence of the index  $k$  such that the energy of the residual of the observation to model is less than the preassigned tolerance. Global convergence and regularity properties of the trust region method for ill-posed inverse problems are discussed in [13].

The constants  $\tau_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) can be chosen by users. Typical values are  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_1 = 2$ ,  $\tau_2 = \tau_3 = 0.25$ ,  $\tau_4 = 0.5$ . The parameter  $\tau_0$  is usually zero or a small positive constant. The advantage of using zero  $\tau_0$  is that a trial step is accepted whenever the objective function is reduced. When the objective function is not easy to compute, it seems that we should not throw away any “good” point that reduces the objective function [14; 21; 25].

To solve the trust region subproblem (17)–(18), we introduce the Lagrangian multiplier  $\lambda$  and solve an unconstrained minimization problem

$$L(\lambda, \xi) = \phi_k(\xi) + \lambda(\Delta_k - \|\xi\|_{l_1}) \longrightarrow \min. \quad (24)$$

Straightforward calculation yields that the solution satisfies

$$\xi = \xi(\lambda) = -(H_k + \lambda\epsilon^{-1}\chi_1(\xi))^{-1}g_k. \quad (25)$$

From (25), we find that the trial step  $\xi$  can be obtained iteratively

$$\xi^{j+1}(\lambda) = -(H_k + \lambda\epsilon^{-1}\chi_1(\xi^j))^{-1}g_k. \quad (26)$$

And at the  $k$ -th step, the Lagrangian parameter  $\lambda$  can be solved via the nonlinear equation

$$\|\xi_k(\lambda)\|_{l_1} = \Delta_k. \quad (27)$$

Denoting  $\Gamma(\lambda) = \frac{1}{\|\xi_k(\lambda)\|_{l_1}} - \frac{1}{\Delta_k}$ , the Lagrangian parameter  $\lambda$  can be iteratively solved by Newton’s method

$$\lambda_{l+1} = \lambda_l - \frac{\Gamma(\lambda_l)}{\Gamma'(\lambda_l)}, \quad l = 0, 1, \dots. \quad (28)$$

The derivative of  $\Gamma(\lambda)$  can be evaluated as

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\rho(\lambda)} \right) = -\frac{\rho'(\lambda)}{\rho^2(\lambda)} = -\frac{\rho'(\lambda)}{\|\xi_k(\lambda)\|_{l_1}^2},$$

where  $\rho(\lambda) := \|\xi_k(\lambda)\|_{l_1}$ . One may readily derive that at the  $k$ -th step

$$\rho'(\lambda) \approx \begin{pmatrix} \frac{\xi_1^k(\lambda)}{\sqrt{\xi_1^k(\lambda)^T \xi_1^k(\lambda) + \epsilon}} \\ \vdots \\ \frac{\xi_i^k(\lambda)}{\sqrt{\xi_i^k(\lambda)^T \xi_i^k(\lambda) + \epsilon}} \\ \vdots \\ \frac{\xi_n^k(\lambda)}{\sqrt{\xi_n^k(\lambda)^T \xi_n^k(\lambda) + \epsilon}} \end{pmatrix} * \frac{d}{d\lambda} \xi_k(\lambda) = \gamma(\xi_k) [\epsilon H_k + \lambda \chi_1(\xi_k)]^{-1} \chi_1(\xi_k) \xi_k(\lambda). \quad (29)$$

Hence the optimal Lagrangian parameter  $\lambda^*$  can be obtained from iteration formula (28). Once  $\lambda^*$  is reached, the optimal step  $\xi^*$  is obtained, and the trust region scheme in Algorithm 2.2 can be driven to another round of iteration.

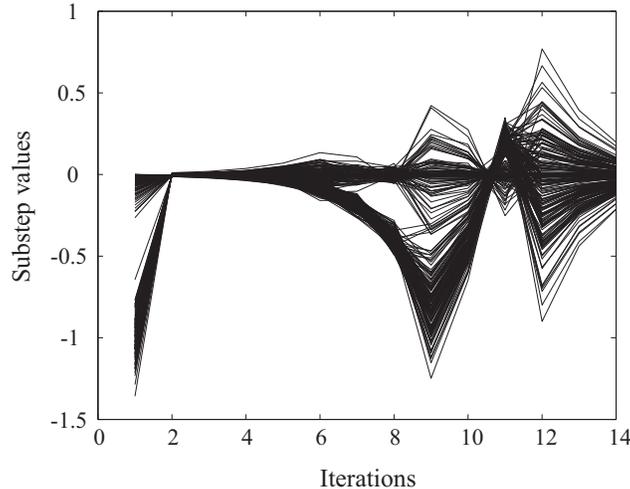


Fig. 2. Iterative step values of the trust region subproblem.

**Theorem 2.1.** *For the trust region subproblem, we have that the Lagrangian parameters  $\{\lambda_k\}$  is uniformly bounded.*

**Proof.** According to trust region Algorithm 2.2, there exists a constant  $\omega > 0$  such that  $\Delta_k \geq \omega \|g_k\|$ , therefore,  $\frac{\|g_k\|}{\Delta_k}$  is bounded. Noticing the relation  $\|(H_k + \lambda \epsilon^{-1} \chi_1(\xi_k))^{-1} g_k\| = \Delta_k$ , the Lagrangian parameters  $\{\lambda_k\}$  must be uniformly bounded.

This property indicates that the Lagrangian parameter  $\lambda$  also plays a role of regularization.

**Remark 2.2.** Unlike the smooth regularization, where the  $\|\xi_k(\lambda)\|_{l_2}$  solved by the corresponding trust region method is monotonically decreasing [13; 14]; for the sparse regularization model, the  $\|\xi_k(\lambda)\|_{l_1}$  solved by the above trust region method is not necessarily decreasing, see Figure 2. However, the Lagrangian parameter  $\lambda$  acts as a regularization parameter which provides a stable approximation to the true solution.

**Remark 2.3.** The trust region subproblems (17)–(18) can be also solved by some gradient-type methods. This may relax the computational cost of factorization of matrices. However, how to incorporate the gradient descent methods into the trust region scheme still requires investigation.

### 3. Numerical experiments

#### 3.1. Sampling

Regular incomplete sampling takes a number of observations in a measurement line with equidistance. This kind of sampling may not satisfy the Shannon/Nyquist sampling theorem. As the coherence noise in frequency-wavenumber domain occurs in this type of sampling, hence it is not suitable for orthogonal transform-based wavefield reconstruction [19]. Random incomplete sampling refers to taking a number of independent observations in a measurement line with randomly allocated geophones. This sampling technique is better than the regular incomplete sampling, however a large sampling interval is not suitable for wavefield reconstruction, e.g., reconstruction using short-time Fourier transform and curvelet transform. This lack of control over the size of the gaps during random sampling may lead to an occasional failed recovery [4; 21]. Another sampling technique is the jittered undersampling [6]. The basic idea of jittered undersampling is to regularly decimate the interpolation grid and subsequently perturb the coarse-grid sample points on the fine grid. However the jittered undersampling takes only integer partition of the complete sampling, which may not satisfy the practical wavefield reconstruction. Usually in field applications, because of

the influence of ground geometry such as valleys and rivers, the sampling is difficult to allocate properly. Therefore the above sampling techniques would not be able to overcome such kind of difficulties completely. Considering their shortcomings, we introduce a new sampling scheme which we developed recently [21]: a piecewise random sub-sampling. We first partition the measurement line into several subintervals; then perform random sampling on each subinterval. As the number of partitions is sufficient enough, the sampling scheme will control the size of the sampling gaps while keeping the randomness of the sampling.

### 3.2. Sparse transforms

There are many ways to choose an orthogonal transform matrix based on some orthogonal bases, e.g., sine curve, wavelet, curvelet, countourlet and framelet, and so forth [8; 22]. In seismic processing, the most commonly used transforms are the Fourier transform, linear Radon transform, parabolic Radon transform, wavelet transform and the curvelet transform. The linear Radon transform can focus the energy of linear events; the parabolic Radon transform can compress events with parabolic shapes. Although applications of wavelets have become increasingly popular in scientific and engineering fields, traditional wavelets perform well only at those points which possess singularities; and the geometric properties, e.g., waveforms of wave fronts in seismic data are not utilized. The curvelet transform as a multi-scale ridgelet transform, is multi-scale, multi-directional, anisotropic and local [1]. Curves are approximated by piecewise line segments in the curvelet domain; therefore, seismic signals can be sparsely compressed. We use the wavelet transform and curvelet transform in this paper. Roughly speaking, the inverse sparse transform can be written as  $m = C^*a$ , where  $C^*$  denotes the adjoint operator of the wavelet or curvelet transform matrix  $C$ ,  $m$  is the original signal and  $a$  is a vector denoting the discrete set of wavelet or curvelet coefficients.

### 3.3. Wavefields restorations

**3.3.1. Reconstruction of anisotropic media.** We consider an anisotropic media to test the performance of the developed methods. The data is generated using a velocity model varying both vertically and transversely, see Figure 3(a). We only list the results by the trust region method. The wavelet transform is used in this test. Note that the objective function minimized using the trust method is an  $l_2$ - $l_1$  model involves a regularizing part, therefore choice of the regularization parameter  $\alpha$  is also crucial. In our test, we choose a priori value of the parameter  $\alpha$  and set it to be 0.001. The original data, sub-sampled data and recovered data are shown in Figures 3(b), 4(a) and 5(a), respectively. The frequency information of the sub-sampled data and the recovered data are shown in Figures 4(b) and 5(b), respectively. Again, the aliasing of the sub-sampled data is reduced greatly in the recovered data. The difference of the original data and the recovered data is illustrated in Figure 6(a). Virtually, all the initial seismic energy is recovered with minor errors. Though the reconstruction is not perfect, most of the details of the wavefield are preserved. Boundedness of Lagrangian parameters at each iteration is shown in Figure 6(b).

**3.3.2. Field data.** We further examine the efficiency of the new methods with field data. A marine shot gather is provided in Figure 7(a) which consists of 160 traces with spacing 25m and 800 time samples with interval  $2 \times 10^{-3}$ s. There are damaged traces in the gather. The sub-sampled gather is shown in Figure 7(b) with half of the original traces randomly deleted. The curvelet transform is used in this experiment. This sub-sampled gather was used to restore the original gather with our methods. The restoration using the  $l_0$  quasi-norm method with  $f_\sigma(t) = 1 - \exp(-t^2/(2\sigma^2))$  is displayed in Figure 7(c). In Algorithm 2.1, the approximation of  $f_\sigma(t)$  with  $l_0$  quasi-norm is controlled by the parameter  $\sigma$ . In our algorithm, the values of  $\sigma$  are reduced by half at each iteration. The initial guess value of  $\sigma$  is set to be  $2 \max(|A^T d|)$ .

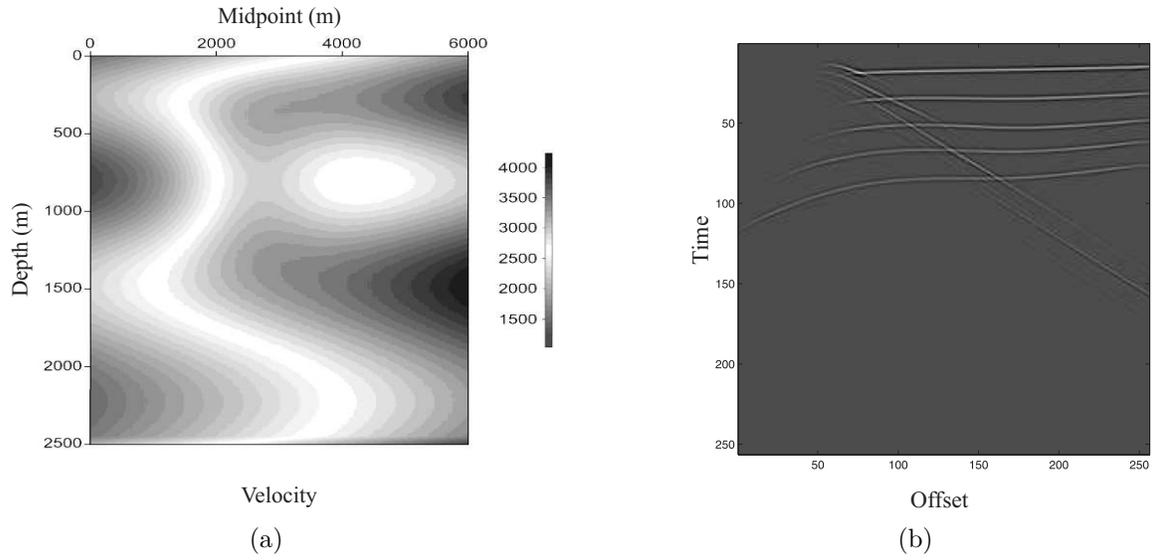


Fig. 3. (a) Velocity model; (b) Seismogram.

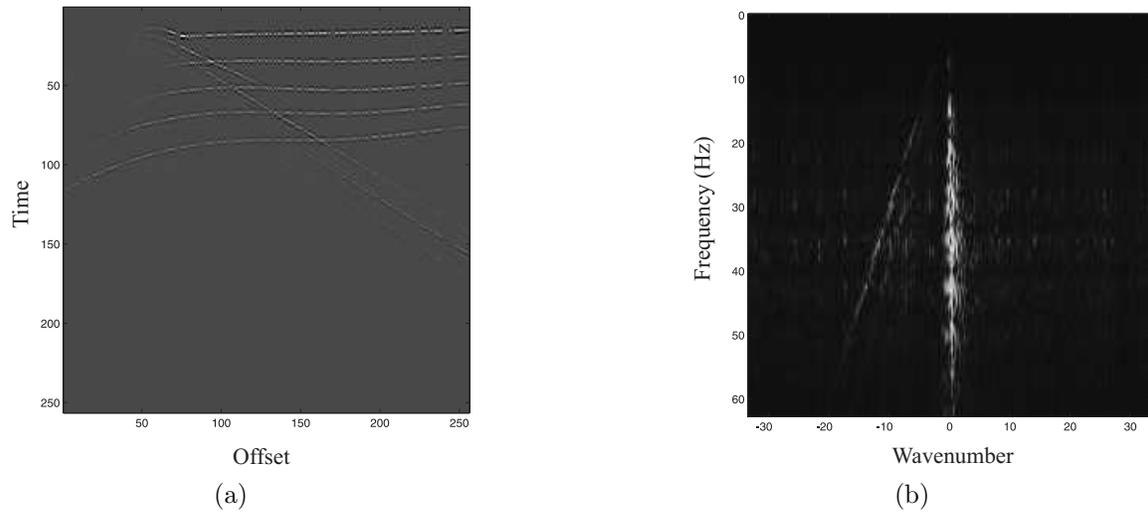


Fig. 4. (a) Incomplete data; (b) Frequency of the sub-sampled data.

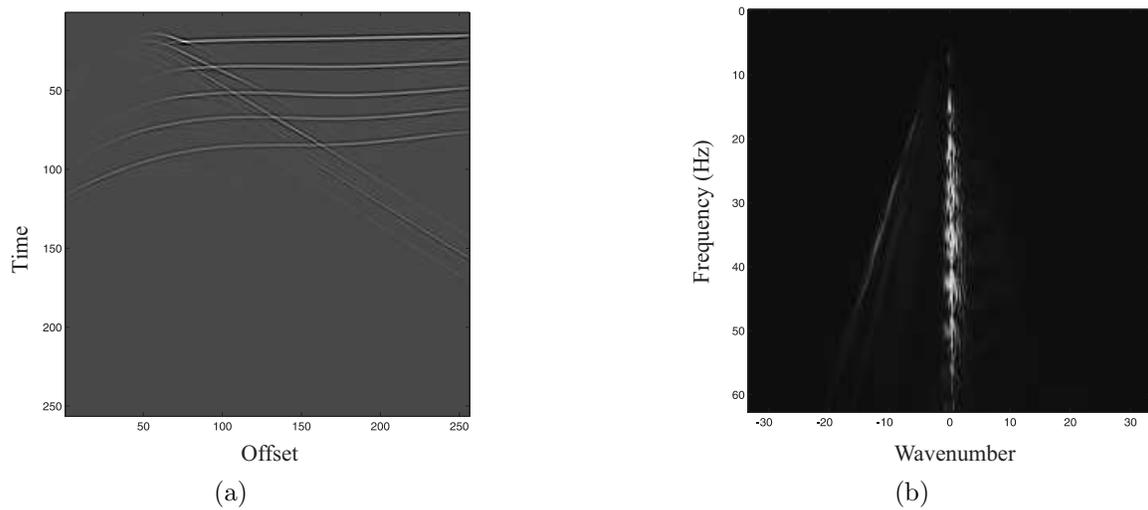


Fig. 5. (a) Recovery results using the  $l_1$ -norm constrained trust region method; (b) Frequency of the restored data using the  $l_1$ -norm constrained trust region method.

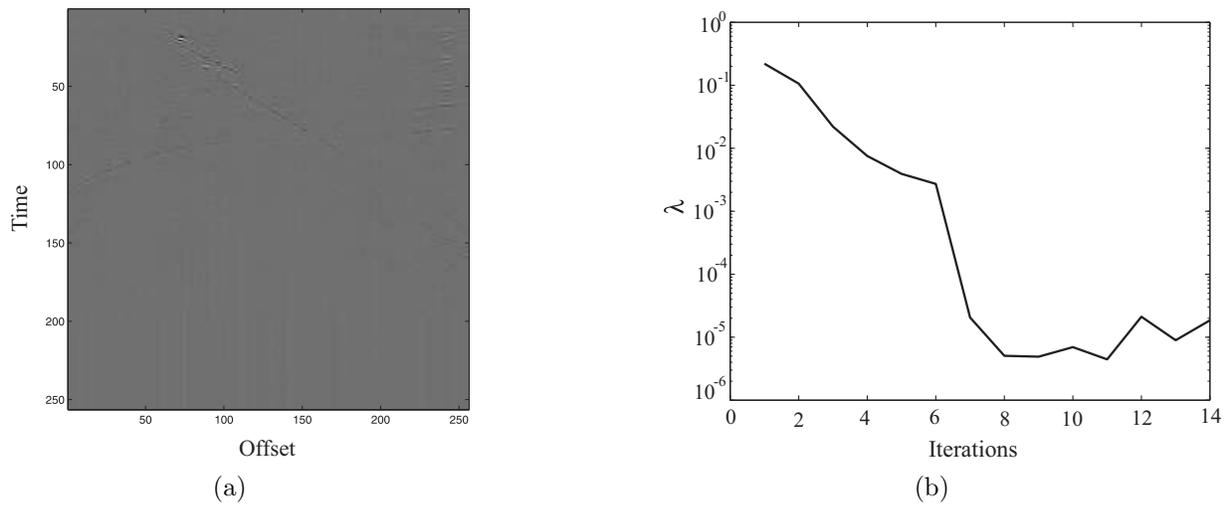


Fig. 6. (a) Difference between the restored data and the original data by the  $l_1$ -norm constrained trust region method; (b) Variations of the Lagrangian parameters  $\lambda$  for the  $l_1$ -norm constrained trust region subproblem.

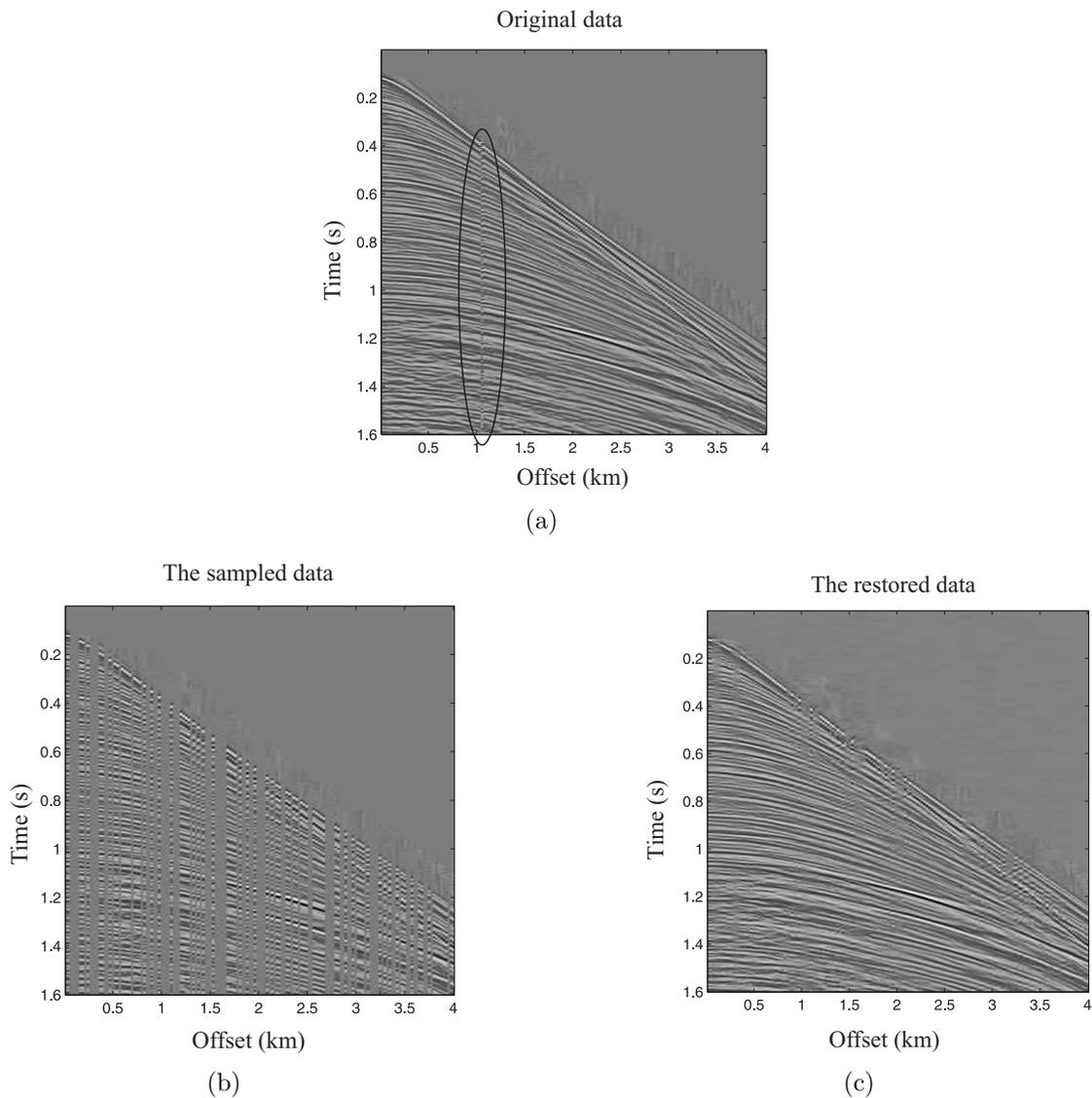


Fig. 7. (a) The original marine shot gather; (b) The sub-sampled gather; (c) Restoration results by the  $l_0$  approximation method with  $f_\sigma(t) = 1 - \exp(-t^2/(2\sigma^2))$ .

## 4. Conclusion

In this paper, we study using sparse optimization methods for solving the compressive sensing problem in seismic imaging. In particular, we introduce several recently developed methods in seismic wavefields recovery, including the  $l_0$  quasi-norm approximation method, linear programming method and the  $l_1$ -norm constrained trust region method. For above mentioned methods, we also perform synthetic experiments and field data tests. The numerical tests reveal that these methods are useful and reliable for seismic wavefields recovery.

## REFERENCES

1. **Candès E. and Donoho D.L.** Curvelets: A surprisingly effective non-adaptive representation for objects with edges // *Curves and Surfaces Fitting* / Eds. A. Cohen, C. Rabut and L.L. Schumaker. Nashville, TN: Vanderbilt University Press, 2000. P. 105–120.
2. **Candès E. J., Romberg J. and Tao T.** Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 2006. Vol. 52, no. 2. P. 489–509.
3. **Candès E.J. and Wakin M.B.** An introduction to compressive sampling // *IEEE Signal Processing Magazine*. 2008. Vol. 25, no. 2. P. 21–30.
4. **Cao J.J., Wang Y.F., Zhao J.T. and Yang C.C.** A review on restoration of seismic wavefields based on regularization and compressive sensing // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2011. Vol. 19, no. 5. P. 679–704.
5. **Donoho D.** Compressed sensing // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 2006. Vol. 52, no. 4. P. 1289–1306.
6. **Hennenfent G. and Herrmann F.J.** Simply denoise: wavefield reconstruction via jittered undersampling. *Geophysics*. 2008. Vol. 73, no. 3. P. V19–V28.
7. **Herrmann F.J. and Hennenfent G.** Non-parametric seismic data recovery with curvelet frames // *Geoph. J. Int.* 2008. Vol. 173, iss. 1. P. 233–248.
8. **Herrmann F.J., Wang D.L., Hennenfent G. and Moghaddam P.P.** Curvelet-based seismic data processing: a multiscale and nonlinear approach // *Geophysics*. 2008. Vol. 73, no. 1. P. A1–A6.
9. **Kim S.-J., Koh K., Lustig M., Boyd S. and Gorinevsky D.** An interior-point method for large-scale  $l_1$ -regularized least squares // *IEEE J. of Selected Topics in Signal Process.* 2007. Vol. 1, no. 4. P. 606–617.
10. **Mohimani H., Babaie-Zadeh M. and Jutten C.** A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed  $l^0$  norm // *IEEE Trans. Signal Process.* 2009. Vol. 57, no.1. P. 289–301.
11. **Tikhonov A.N. and Arsenin V.Y.** *Solutions of ill-posed Problems*. New York: John Wiley & Sons, 1977. 258 p.
12. **Vasin V.V. and Ageev A.L.** *Ill-posed problems with a priori information*. Utrecht: VSP, 1995. 255 p.
13. **Wang Y.F. and Yuan Y.X.** Convergence and regularity of trust region methods for nonlinear ill-posed inverse problems // *Inverse Problems*. 2005. Vol. 21, no. 3. P. 821–838.
14. **Wang Y.F.** *Computational Methods for Inverse Problems and Their Applications*. Beijing: Higher Education Press, 2007.
15. **Wang Y.F. and Ma S.Q.** Projected Barzilai-Borwein methods for large scale nonnegative image restorations // *Inverse Probl. Sci. Eng.* 2007. Vol. 15, no. 6. P. 559–583.
16. **Wang Y.F., Fan S.F. and Feng X.** Retrieval of the aerosol particle size distribution function by incorporating *a priori* information // *J. Aerosol Science*. 2007. Vol. 38, iss. 8. P. 885–901.
17. **Wang Y.F., Cao J.J., Yuan Y.X., Yang C.C. and Xiu N.H.** Regularizing active set method for nonnegatively constrained ill-posed multichannel image restoration problem // *Applied Optics*. 2009. Vol. 48, iss. 7. P. 1389–1401.
18. **Wang Y.F., Ma S.Q., Yang H., Wang J.D. and Li X.W.** On the effective inversion by imposing a priori information for retrieval of land surface parameters // *Science in China. Ser. D*. 2009. Vol. 52, no. 4. P. 540–549.
19. **Wang Y. F., Yang C.C. and Cao J.J.** On Tikhonov regularization and compressive sensing for seismic signal processing // *Math. Models and Methods in Applied Sciences*. 2012. Vol. 22, no. 2. DOI: 10.1142/S0218202511500084.
20. **Wang Y.F. and Yang C.C.** Accelerating migration deconvolution using a nonmonotone gradient method // *Geophysics*. 2010. Vol. 75, no. 4. S131–S137.

21. **Wang Y.F., Cao J.J. and Yang C.C.** Recovery of seismic wavefields based on compressive sensing by an  $l_1$ -norm constrained trust region method and the piecewise random sub-sampling // *Geoph. J. Int.* Vol. 187, iss. 1. P. 199–213.
22. **Wang Y.F., Stepanova I.E., Titarenko V.N. and Yagola A.G.** *Inverse Problems in Geophysics and Solution Methods.* HEP Series in Global Change and Earth System Science. Beijing: Higher Education Press, 2011.
23. **Wang Y.F., Cao J.J. and Yang C.C.** Seismic wavefields interpolation based on regularization and compressive sensing // *Computational Methods for Applied Inverse Problems* / Eds. Y.F. Wang, A.G. Yagola and C.C. Yang. Beijing/Berlin: Higher Education Press and De Gruyter, 2011.
24. **Ye Y.Y.** *Interior-point algorithm: Theory and analysis.* New York: John Wiley and Sons, 1997. 418 p.
25. **Yuan Y.X.** *Numerical methods for nonlinear programming.* Shanghai: Shanghai Science and Technology Publication, 1993.

Yanfei Wang

Received May, 10, 2011

Key Laboratory of Petroleum Resources Research  
Institute of Geology and Geophysics  
Chinese Academy of Sciences  
P. O. Box 9825, Beijing, 100029  
P. R. China  
e-mails: yfwang@mail.iggcas.ac.cn

УДК 517.988.68

## О ЛОКАЛИЗАЦИИ РАЗРЫВОВ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ<sup>1</sup>

А. Л. Агеев, Т. В. Антонова

В работе строятся и исследуются методы локализации (определения положения) разрывов первого рода функции ограниченной вариации одной переменной. Вместо точной функции известны ее приближение в  $L_2(-\infty, +\infty)$  и уровень возмущения. Разрывы делятся на два множества: с величиной скачка по модулю большей некоторого положительного  $\Delta^{\min}$  и разрывы, удовлетворяющие условию малости на величину скачка. Требуется по приближенно заданной функции и уровню возмущений определить число разрывов из первого множества и локализовать их положение. Рассматриваемая задача некорректно поставлена, и для ее решения необходимо строить регуляризирующие алгоритмы. При дополнительных условиях на точную функцию построены регулярные методы локализации разрывов и получены оценки точности локализации, а также другой важной характеристики метода — порога разделимости. Установлена оптимальность (по порядку) построенных методов на классах функций с особенностями.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, разрыв первого рода, локализация особенностей, регуляризирующий алгоритм.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. On the localization of singularities of the first kind for a function of bounded variation.

Methods of the localization (detection) of discontinuities of the first kind for a function of bounded variation of one variable are constructed and investigated. We consider the problem of localizing discontinuities of a function that is noisy in the space  $L_2(-\infty, +\infty)$ . We distinguish between discontinuities with the absolute value of the jump greater than some positive  $\Delta^{\min}$  and discontinuities satisfying a smallness condition for the value of the jump. It is required to find the number of discontinuities and localize them using the approximately given function and the error level. Since the problem is ill-posed, regularizing algorithms should be used for its solution. Under additional conditions on the exact function, we construct regular methods for the localization of discontinuities and obtain estimates for the accuracy of localization and for the separability threshold, which is another important characteristic of the method. The (order) optimality of the constructed methods on the classes of functions with singularities is established.

Keywords: ill-posed problem, discontinuity of the first kind, localization of singularities, regularizing method.

### Введение

Проблемы локализации особенностей относятся к нелинейным некорректно поставленным задачам, и для их решения необходимо строить регуляризирующие алгоритмы (классическая теория некорректно поставленных задач изложена, например, в [1–3]). Задачи этого вида для различных особенностей ( $\delta$ -функций, разрывов первого рода или изломов) имеют давнюю историю (см., например, обзор [4]). Отсылая читателя к вышеупомянутому обзору, кратко остановимся только на локализации разрывов первого рода.

В [5] можно найти примеры задач из области медицины, в которых необходимо локализовать разрывы первого рода одномерной функции (сигнала). Положение разрывов интерпретируется как точка аргумента функции, отвечающая резкому изменению “режима” функционирования исследуемого организма. Ссылки на задачи локализации разрывов первого рода, возникающие в технике, см. в [6]. В настоящей работе рассматриваются только функции одной переменной. Тем не менее очевидно, что случай одного переменного является первым шагом к двумерной проблеме локализации линии [7;8], на которой функция испытывает разрыв первого

<sup>1</sup>Работа поддержана программой фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1022) и РФФИ (проект 09-01-00053).

рода. Границы многих объектов на изображениях являются такого рода линиями. Обсуждение реалистических моделей оптических изображений можно найти, например, в [9].

Перейдем к теоретическим результатам по регуляризации, которые, насколько известно авторам, для задач локализации разрывов первого рода в настоящее время получены только для функций одной переменной и для случая конечного числа разрывов первого рода, в то время как вне разрывов функция предполагается гладкой.

Все работы естественным образом делятся на две группы. В первой группе (см., например, [10; 11]) в статистической постановке рассматривалась задача локализации разрывов первого рода зашумленной функции одного переменного. Основные результаты состоят в конструировании методов локализации и получении статистических оценок сверху точности локализации разрывов.

Другой большой цикл работ по локализации особенностей был выполнен для задач в детерминированной постановке и принадлежит авторам [12–17] (см. также [4]). В этих работах предполагалось, что точная функция  $x$  принадлежит  $L_2(-\infty, +\infty)$  (или  $L_p(-\infty, +\infty)$ ,  $1 < p < \infty$ ) и имеет конечное число разрывов первого рода, вне разрывов функция гладкая. Между тем в некоторых приложениях, например, при обработке изображений, естественнее считать, что функция  $x$  не убывает на  $\pm\infty$ , т.е. не принадлежит  $L_p(-\infty, +\infty)$  и имеет счетное число разрывов первого рода. Поэтому имеет смысл исследовать другие классы функций со счетным числом особенностей и перенести методику [12–17] на этот случай. При этом, как и в работах [12–17], предполагается, что вместо точной функции  $x$  известны уровень возмущения  $\delta$  и приближенное значение  $x^\delta$ , причем  $\|x - x^\delta\|_{L_2(-\infty, +\infty)} \leq \delta$ . Поскольку возмущение  $x - x^\delta$  связано с измеряющей аппаратурой (и условиями проведения измерений) и не связано со свойствами точной функции  $x$ , то, по мнению авторов, такая постановка имеет право на существование.

В отличие от работ [12–17], в настоящей статье существенно привлекаются факты из теории интеграла Лебега — Стильгеса [18], что позволяет обосновать основное разложение для вспомогательной функции ссылками на известные результаты. Также отметим, что ключевой работой, позволившей рассмотреть новую постановку, является статья [17]. В ней предложены новый закон выбора параметра регуляризации и новые способы проведения оценок, позволяющие рассмотреть счетное число разрывов первого рода.

В настоящей статье строятся и исследуются методы локализации (определения положения) разрывов первого рода функции, имеющей счетное количество разрывов. Разрывы делятся на два множества: с величиной скачка большей по модулю некоторого положительного  $\Delta^{\min}$  и разрывы, удовлетворяющие условию малости на величину скачка. Требуется по приближенно заданной функции и уровню возмущения определить число разрывов из первого множества и локализовать их положение. В работе построены регулярные методы локализации разрывов. При дополнительных условиях на точную функцию получены оценки точности локализации и другой важной характеристики метода — порога делимости. Установлена оптимальность (по порядку) построенных методов на классах функций с особенностями.

Отметим некоторые особенности изложения материала. Общая схема, построенная в разд. 2, позволяет получать конкретные методы локализации в различных ситуациях, что удобно для читателя, освоившего основные приемы. Однако при первом чтении большое количество вариантов создает дополнительные трудности. Кроме того, наиболее общие условия на точную функцию (близкие к необходимым), обеспечивающие работоспособность предлагаемых методов, не имеют простой и наглядной интерпретации. Поэтому для удобства читателя авторы сознательно ведут изложение при не самых общих, но зато более прозрачных условиях. Кроме того, в разд. 3 (см. следствия 1–3) рассмотрены более простые частные случаи общих утверждений (конкретные усредняющие функции, более простые условия на точную функцию и т. п.), которые можно получить из общей схемы. В этом же разделе приведены оценки снизу для точности локализации разрывов и порога делимости. Объединение этих оценок и оценок сверху, полученных в разд. 2, позволяет установить оптимальность по порядку построенных методов на соответствующих классах функций с особенностями.

## 1. Вспомогательные утверждения

Договоримся, что все интегралы на протяжении статьи являются интегралами Лебега — Стилтеса [18]. Мы будем рассматривать функции  $x$ , имеющие разрывы первого рода в точках  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , вне которых функция достаточно гладкая и имеет соответствующие пределы  $x(s_i + 0)$ ,  $x(s_i - 0)$ . Обозначим скачок функции  $x$  в точке  $s_i$  через  $\Delta_i = x(s_i + 0) - x(s_i - 0)$ . Через  $[a, b]$  договоримся обозначать конечный отрезок. Пусть отрезок  $[a, b]$  такой, что интервал  $(a, b)$  не содержит точек разрыва. В случае, когда концы отрезка (один или оба) совпадают с точками  $s_i$  разрыва функции, будем допускать вольность речи и говорить, что функция  $x$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ , если в точках  $a$  и  $b$  функция  $x$  переопределена по непрерывности соответственно значениями  $x(a + 0)$ ,  $x(b - 0)$ .

Определим линейное пространство  $MV$  функций  $x$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) на любом отрезке  $[a, b]$  функция  $x$  имеет конечное число разрывов первого рода, и  $\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| < \infty$ ;
- (ii) функция  $x$  ограничена на  $(-\infty, +\infty)$ ;
- (iii) на любом отрезке  $[a, b]$  таком, что интервал  $(a, b)$  не содержит точек разрыва, функция  $x$  абсолютно непрерывна;
- (iii') функция  $x'$  почти всюду ограничена<sup>2</sup> на  $(-\infty, +\infty)$ .

Ясно, что в силу условия (i) любая функция  $x \in MV$  имеет не более счетного числа разрывов первого рода. Из условий (i) и (iii') следует, что на любом отрезке  $[a, b]$  функция  $x$  имеет ограниченную вариацию. Тогда согласно [18, гл. 8, § 3] справедливо следующее разложение функции  $x$ :

$$x(s) = x_0(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \cdot \chi(s - s_i), \quad \chi(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s \geq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $x_0$  — непрерывная функция.

**Лемма 1.** Если  $x \in MV$ , то на любом отрезке  $[a, b]$  функция  $x_0$  в разложении (1.1) абсолютно непрерывна.

Доказательство проведем для случая одного разрыва в точке  $s_1$ . В общем случае доказательство проводится аналогично. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$\hat{x}(s) = \int_a^s x'_0(\tau) d\tau.$$

Если показать, что  $\hat{x}(s) = x_0(s) - x_0(a)$ , то согласно [18, гл. 9, § 4] функция  $x_0$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ . Для  $s \leq s_1$  это следует из того, что для  $\tau \in [a, s]$  имеем  $x_0(\tau) = x(\tau)$ . Пусть  $s > s_1$ . Тогда, поскольку для  $\tau \in [a, s_1]$  имеем  $x(\tau) = x_0(\tau)$ , а для  $\tau \in [s_1, s]$  имеем  $x(\tau) - x_0(\tau) = \Delta_1$  — константа и сужение  $x(\tau)$  на  $[s_1, s]$  есть абсолютно непрерывная функция, то

$$\hat{x}(s) = \int_a^{s_1} x'_0(\tau) d\tau + \int_{s_1}^s x'_0(\tau) d\tau = (x_0(s_1) - x_0(a)) + (x_0(s) - x_0(s_1)) = x_0(s) - x_0(a).$$

Лемма доказана. □

На протяжении статьи мы будем рассматривать функции  $x \in MV$ . Однако для полноты картины приведем два новых условия (iii') и (i'). Договоримся точками излома функции называть точки разрыва первого рода ее производной.

<sup>2</sup>В силу условий (i) и (iii') производная  $x'$  почти всюду существует; в точках несуществования доопределим ее, например, нулем.

Напомним (см. [18, гл. 5, § 5 и гл. 9, § 4]), что если функция  $x(s)$ , определенная на отрезке  $[a, b]$ , для всех  $s \in [a, b]$  имеет производную  $x'$  (в точках  $a, b$  существуют  $x'(a+0)$ ,  $x'(b-0)$ ) и она ограничена на  $[a, b]$ , то функция  $x$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ . Это значит, что из условия, приведенного ниже, следуют условия (iii), (iii'):

(iii') на любом отрезке  $[a, b]$  существует  $x'$  за исключением конечного числа точек (разрывов и изломов); функция  $x'$  ограничена на  $(-\infty, +\infty)$  (подразумевается, что существуют  $x'(s_i-0)$ ,  $x'(s_i+0)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и они ограничены той же константой).

Множество функций, удовлетворяющих условиям (i), (ii), (iii'), содержится в  $MV$ . При этом все эти условия имеют простую геометрическую интерпретацию.

Все результаты настоящей работы справедливы и на более широком множестве. Для выполнения всех утверждений вместо условий (i)–(iii) достаточно выполнения (ii) и следующего условия, являющегося также и необходимым:

(i') функция, определенная на  $(-\infty, +\infty)$ , имеет не более чем счетное число разрывов первого рода в точках  $s_i$ ; справедливо разложение (1.1), где функция  $x_0$  абсолютно непрерывна на любом отрезке  $[a, b]$ .

Ясно, что множество функций, удовлетворяющих условиям (ii), (i'), содержит  $MV$  и является более широким.

Недостатком условия (i') является то, что в нем участвует функция  $x_0$ , а не исходная функция  $x$ . Кроме того, оно не наглядное. Поэтому предпочтительнее использовать условия (i)–(iii).

До сих пор не накладывалось никаких ограничений на величины скачков  $\Delta_i$  функции  $x$ . Предположим, что у функции  $x$  имеется  $l$  разрывов с “большой” по модулю величиной скачков  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , а остальные разрывы имеют “маленькие” величины скачков. Без ограничения общности можно считать, что первые  $l$  разрывов занумерованы по возрастанию  $s_i$ , т.е.  $s_i < s_k$  для  $i < k$ . При этих условиях для функции  $x \in MV$  в разд. 3 будут построены методы, позволяющие локализовать (аппроксимировать) точки  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ , по приближенно заданной функции.

В условии на величину скачков участвует усредняющая функция  $\phi \in W_1^1(-\infty, +\infty)$ , дополнительные требования на которую будут приведены в следующем разделе. Положим  $\phi_\lambda(s) = \phi(s/\lambda)$  (в дальнейшем  $\lambda > 0$  — параметр регуляризации). Нас интересует вспомогательная функция

$$x_\lambda(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(\phi_\lambda(s-t))'_s dt, \tag{1.2}$$

для которой будет получено основное разложение.

**Лемма 2.** Пусть  $x \in MV$  и  $\phi \in W_1^1(-\infty, +\infty)$ . Тогда для любого  $\lambda > 0$  существует непрерывная функция  $x_\lambda$ , задаваемая формулой (1.2), для которой имеет место представление

$$x_\lambda(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \phi_\lambda(s - s_i) + \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\lambda(s - t) x'_0(t) dt. \tag{1.3}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Отметим, что из принадлежности функций  $\phi$  (и, следовательно,  $\phi_\lambda(s)$ ) к соболевскому пространству  $W_1^1[a, b]$  следует абсолютная непрерывность функции на любом отрезке  $[a, b]$  [18, гл. 9, § 8]. Из абсолютной непрерывности функций  $\phi_\lambda$  и  $x_0$  следует (см., например, [18, гл. 9, § 7]) возможность интегрирования по частям в следующем интеграле

$$\int_a^b x(t) d\phi_\lambda(s - t) = -x(t)\phi_\lambda(s - t)|_a^b + \int_a^b \phi_\lambda(s - t) dx(t)$$

$$= -x(t)\phi_\lambda(s-t)|_a^b + \int_a^b \phi_\lambda(s-t)x'_0(t)dt + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \phi_\lambda(s-s_i).$$

Поскольку  $\phi \in W_1^1(-\infty, +\infty)$ , то  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t) = 0$ . Из ограниченности функции  $x$  следует, что в этом равенстве можно перейти к пределу при  $a \rightarrow -\infty$ ,  $b \rightarrow +\infty$ . Значит, все интегралы существуют, а поскольку производные  $x'$ ,  $x'_0$  совпадают почти всюду, то имеет место требуемое равенство. Лемма доказана.  $\square$

Сформулируем условия на величины первых  $l$  разрывов и их отделимость от остальных разрывов:

- (1) задано число  $\Delta^{\min} > 0$  такое, что  $\min\{|\Delta_i| : i = 1, 2, \dots, l\} \geq \Delta^{\min}$ ;  
 (2) задано число  $\lambda_0 > 0$ , что для всех  $0 < \lambda \leq \lambda_0$  справедливо неравенство

$$\mathfrak{d}_l = \sup_s \sum_{i=l+1}^{\infty} |\Delta_i \phi_\lambda(s-s_i)| \leq \gamma \Delta^{\min}, \quad 0 \leq \gamma < 1/2.$$

Договоримся, что функция  $x$  имеет не менее  $l$  разрывов, а если их ровно  $l$ , то считаем  $\mathfrak{d}_l = 0$ . Отметим, что условие (1) использовалось в [12–17]. Что касается условия “малости” остальных разрывов, то ясно, что условие (2) слишком сложное и непрозрачное. Кроме того, в нем присутствует функция  $\phi_\lambda$ , которая определяет метод регуляризации и никак не связана с точной функцией  $x$ . Поэтому желательно иметь более простые достаточные условия. Возможно большое количество вариантов, из которых будут рассмотрены только три. В качестве первого приведем наиболее простое условие — малость остальных разрывов “в совокупности”:

$$(2a) \sum_{i=l+1}^{\infty} |\Delta_i| \leq \gamma \Delta^{\min}, \text{ где } 0 \leq \gamma < 1/2.$$

Если предполагать, что для функции  $\phi$  выполнено условие  $\sup_{t \in [-1, 1]} |\phi(t)| = 1$ , то для любого  $\lambda > 0$  из условия (2a) следует условие (2). Для контраста с предыдущим условием введем более слабое условие на величины  $|\Delta_i|$ ,  $i = l+1, l+2, \dots$ :

$$(2b) \sup\{|\Delta_i| : i = l+1, l+2, \dots\} \leq \gamma \Delta^{\min}, \text{ где } 0 \leq \gamma < 1/2.$$

Это условие также влечет условие (2) при дополнительных условиях на функцию  $\phi$  и расположение разрывов.

**Лемма 3.** Пусть для  $t \notin [-1, 1]$  функция  $\phi(t) = 0$  и  $\sup_{t \in [-1, 1]} |\phi(t)| = 1$ . Тогда, если существует  $h > 0$  такое, что

$$\inf_{k, i \geq 1, k \neq i} |s_k - s_i| \geq h,$$

то при  $\lambda_0 = h/2$  из условия (2b) следует условие (2).

**Доказательство.** При  $t \notin [-1, 1]$  функция  $\phi(t) = 0$ , поэтому для  $0 < \lambda \leq \lambda_0 = h/2$  справедливо неравенство

$$\mathfrak{d}_l = \sup_{i \geq l+1} |\Delta_i| \sup_s \sum_{i=l+1}^{\infty} |\phi_\lambda(s-s_i)| \leq \sup_{i \geq l+1} |\Delta_i|.$$

В силу условия (2b) получаем требуемое неравенство:  $\mathfrak{d}_l \leq \gamma \Delta^{\min}$ , где  $0 \leq \gamma < 1/2$ . Лемма доказана.  $\square$

Третий вариант, когда разрывов ровно  $l$ , рассматривался ранее в [12–17]. Условие (2) при этом автоматически выполнено при  $\gamma = 0$ , и в вышеупомянутых работах использовалось только условие (1).

## 2. Метод локализации и его исследование

Начнем с постановки задачи локализации разрывов первого рода функции из пространства  $MV$ . Договоримся везде далее под  $\|\cdot\|_{L_1}$  и  $\|\cdot\|_{L_2}$  понимать  $\|\cdot\|_{L_1(-\infty, +\infty)}$  и  $\|\cdot\|_{L_2(-\infty, +\infty)}$ .

**Задача локализации разрывов в  $MV$ .** Пусть функция  $x \in MV$ , первые  $l$  разрывов принадлежат известному интервалу  $(-d, d)$ ,  $d > 0$ . Требуется по функции  $x^\delta$  такой, что  $\|x - x^\delta\|_{L_2} \leq \delta$ , и уровню погрешности  $\delta$  определить число  $l$  и аппроксимировать положения первых  $l$  разрывов первого рода  $\{s_i\}_1^l$  функции  $x$ .

На практике также иногда необходимо аппроксимировать величины скачков  $\{\Delta_i\}_1^l$ . Эта задача является более простой, и в настоящей работе такого рода алгоритмы не строятся (см., например, [13–15]).

Забегая вперед, отметим, что для любой функции  $x \in MV$  при дополнительных условиях (1), (2) метод локализации, построенный ниже, будет сходиться, и количество “больших” разрывов гарантированно определяется для всех  $\delta \leq \delta_0(x)$ . К сожалению, величина  $\delta_0(x)$  может быть как угодно малой. Введем дополнительные условия на функцию  $x$  и получим равномерные оценки точности локализации разрывов, в которых все константы не будут зависеть от функции  $x$ . Эти равномерные оценки аналогичны равномерным оценкам в классической теории некорректно поставленных задач на классах корректности [2, гл. 4]. Через  $\text{esssup}$  обозначим супремум почти всюду.

Пусть для точной функции  $x$  известна дополнительная априорная информация:

(3) задано число  $r > 0$  такое, что  $\text{esssup}_s |x'(s)| \leq r$ ;

(4) заданы положительные числа  $L, \Delta^{\max}$  такие, что  $0 < l \leq L$  и  $\max\{|\Delta_i| : i = 1, 2, \dots, l\} \leq \Delta^{\max}$ .

В условии (3) число  $r$  без ограничения общности можно считать равным единице, что мы и будем делать в дальнейшем. Множество точных функций  $x \in MV$ , удовлетворяющих условиям (1)–(4), обозначим  $\mathfrak{M}_{MV}$ .

Обозначим через  $\Phi$  множество усредняющих функций  $\phi(s)$ , удовлетворяющих условиям:

(a)  $\phi \in W_1^1(-\infty, +\infty)$ ,  $\|\phi'\|_{L_2} < \infty$ ;

(b)  $\sup_{t \in [-1, 1]} |\phi(t)| = \phi(0) = 1$ ;

(c) для  $t \notin [-1, 1]$   $|\phi(t)| \leq C/|t|$ ,  $C$  — константа.

Через  $\Phi F$  будем обозначать множество функций  $\phi(s)$ , удовлетворяющих условиям (a), (b) и условию

(c') для  $t \notin [-1, 1]$   $\phi(t) = 0$ .

Ясно, что  $\Phi F \subset \Phi$ . Приведем примеры усредняющих функций:

$$\phi_1[\sigma](t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma}\right), \quad \sigma > 0 \text{ — фиксированный параметр,}$$

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right), & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases} \quad \phi_3(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Функция  $\phi_1[\sigma] \in \Phi$ , а функции  $\phi_2, \phi_3 \in \Phi F$ .

Для локализации особенностей будем строить и исследовать вспомогательную функцию  $x_\lambda^\delta(s)$ , заданную формулой

$$x_\lambda^\delta(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\delta(t) (\phi_\lambda(s-t))'_s dt. \quad (2.1)$$

Напомним, что  $\gamma$  и  $\lambda_0$  — константы из условия (2).

**Лемма 4.** Пусть функция  $x \in \mathfrak{M}_{MV}$  и  $\phi \in \Phi$ . Тогда для любого  $0 < \lambda \leq \lambda_0$  существует непрерывная функция  $x_\lambda^\delta$ , задаваемая формулой (2.1), для которой имеет место представление

$$x_\lambda^\delta(s) = \sum_{i=1}^l \Delta_i \cdot \phi_\lambda(s - s_i) + \alpha_\lambda(s) + \alpha_\lambda^l(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s), \quad (2.2)$$

где

$$\sup_s |\alpha_\lambda(s)| \leq A_0 \lambda, \quad \sup_s |\alpha_\lambda^l(s)| \leq \gamma \Delta^{\min}, \quad \sup_s |\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq A_1 \lambda^{-1/2} \delta,$$

$$A_0 = \|\phi\|_{L_1}, \quad A_1 = \|\phi'\|_{L_2}.$$

**Доказательство.** Запишем функцию  $x_\lambda^\delta(s)$  в виде суммы двух функций:

$$x_\lambda^\delta(s) = x_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s), \quad \text{где} \quad x_\lambda(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (\phi_\lambda(s-t))'_s dt,$$

$$\Delta x_\lambda^\delta(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^\delta(t) - x(t)) (\phi_\lambda(s-t))'_s dt. \quad (2.3)$$

Используя неравенство Гёльдера для интеграла (2.3), оценим модуль функции  $\Delta x_\lambda^\delta$ :

$$|\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq \|x^\delta - x\|_{L_2} \|(\phi_\lambda(s-t))'_s\|_{L_2}.$$

Учитывая, что  $\|(\phi_\lambda(s-t))'_s\|_{L_2} \leq \lambda^{-1/2} \|\phi'\|_{L_2}$ , получаем требуемую оценку.

Рассмотрим функцию  $x_\lambda$ . В предыдущем разделе в лемме 2 было показано, что имеет место следующее равенство:

$$x_\lambda(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i \phi_\lambda(s - s_i) + \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\lambda(s-t) x'(t) dt.$$

Введем обозначения

$$\alpha_\lambda^l(s) = \sum_{i=l+1}^{\infty} \Delta_i \phi_\lambda(s - s_i), \quad \alpha_\lambda(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\lambda(s-t) x'(t) dt.$$

Используя условие (3) на функцию  $x$ , получаем оценку

$$|\alpha_\lambda(s)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_\lambda(s-t)| dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(u)| du \leq \|\phi\|_{L_1} \lambda.$$

Требуемая оценка для  $\alpha_\lambda^l(s)$  следует из условия (2). Лемма доказана.  $\square$

Метод локализации разрывов первого рода заключается в исследовании функции  $|x_\lambda^\delta(s)|$  и аналогичен методу, изложенному в [17]. Аппроксимацию точек разрыва будем проводить в два этапа. На первом этапе определим число  $m$ , относительно которого будет доказано, что  $m = l$ , и выделим непересекающиеся отрезки  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , содержащие точки  $s_i$ . На втором этапе найдем приближения  $s_i^\delta \in [a_i, b_i]$  точек  $s_i$ , для которых будут получены оценки точности аппроксимации. Введем параметр  $P = \Delta^{\min}/2$ . Метод в своей работе также использует параметры  $\lambda$  и  $h$ , которые будут определены позже.

**Метод II.** По функции  $x^\delta$  вычислим вспомогательную функцию  $x_\lambda^\delta$  по формуле (2.1). Положим текущее  $\tilde{s} := -d - 1$ ,  $m := 0$ .

Шаг метода: если уравнение  $|x_\lambda^\delta(s)| - P = 0$  на отрезке  $[\tilde{s}, d]$  не имеет корней, то завершаем процесс; иначе левый корень обозначим  $\bar{s}$ , положим  $m := m + 1$ ,  $a_m := \bar{s}$ ,  $b_m := \bar{s} + h/3$ ,  $\tilde{s} := b_m + h/3$  и повторяем шаг.

**Метод ПФ.** Выбираем  $s_i^\delta$  как середину отрезка  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Напомним, что  $\Delta^{\min}, \gamma, \lambda_0, L, \Delta^{\max}$  — константы из условий на функцию  $x$ ,  $C$  — константа из условий на  $\phi$ ,  $A_0 = \|\phi\|_{L_1}$ ,  $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}$ . Для формулировки теорем нам понадобятся следующие числа:

$$D = \left( \frac{8A_1}{(a-2\gamma)\Delta^{\min}} \right)^2, \quad \delta_0 = \frac{1}{D^{1/2}} \min \left\{ \left( \frac{\Delta^{\min}(a-2\gamma)}{8A_0} \right)^{1/2}, \lambda_0^{1/2} \right\}, \quad (2.4)$$

$$H = \frac{8L\Delta^{\max}\tilde{C}}{\Delta^{\min}(a-2\gamma)}, \quad \text{где } \tilde{C} = \max \left\{ C, \frac{\Delta^{\min}(a-2\gamma)}{8L\Delta^{\max}} \right\}. \quad (2.5)$$

В следующих трех теоремах получены результаты локализации разрывов для разных множеств усредняющих функций, т.е. для разных групп методов локализации.

**Теорема 1.** Пусть функция  $x \in \mathfrak{M}_{MV}$ , функция  $\phi \in \Phi$  и константы  $D, \delta_0, H$  заданы равенствами (2.4), (2.5) при  $a = 1$ . Тогда для всех  $\delta \leq \delta_0$  при связи параметров  $\lambda(\delta) = D\delta^2$  и выполнении неравенства  $\min_{1 \leq i, k \leq l, i \neq k} |s_i - s_k| \geq h(\delta)$ , где  $h(\delta) = 3H\lambda(\delta)$ , для метода П-ПФ получим  $m = l$ , и будет справедлива оценка  $|s_i^\delta - s_i| \leq (HD/2)\delta^2$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $x_\lambda^\delta(s)$  в окрестности точки  $s_i$  такой, что  $|s - s_i| \leq H\lambda$ ,  $i = 1, 2, \dots, l$ . Используя представление (2.2), получаем

$$x_\lambda^\delta(s) = \Delta_i \cdot \phi_\lambda(s - s_i) + \alpha_\lambda(s) + \alpha_\lambda^l(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s) + \sum_{k=1(k \neq i)}^l \Delta_k \cdot \phi_\lambda(s - s_k). \quad (2.6)$$

Ввиду условия (с) на функцию  $\phi$  для всех  $s$  таких, что  $|s - s_k| \geq H\lambda$ , для последнего слагаемого имеем оценку

$$\left| \sum_{k=1(k \neq i)}^l \Delta_k \cdot \phi_\lambda(s - s_k) \right| \leq \frac{(L-1)C\Delta^{\max}}{H}.$$

Заметим, что для  $\delta \leq \delta_0$  при связи параметров  $\lambda = \lambda(\delta)$  имеем  $\lambda \leq \lambda_0$ . Тогда для  $i = 1, 2, \dots, l$ , используя оценки из леммы 4, получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{|s-s_i| \leq H\lambda} \left| \alpha_\lambda(s) + \alpha_\lambda^l(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s) + \sum_{k=1(k \neq i)}^l \Delta_k \cdot \phi_\lambda(s - s_k) \right| \\ & \leq A_0\lambda + A_1\delta\lambda^{-1/2} + \frac{(L-1)C\Delta^{\max}}{H} + \gamma\Delta^{\min}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Учитывая свойство (b) функции  $\phi$ , при данном выборе параметров для  $i = 1, 2, \dots, l$ , поскольку  $0 \leq \gamma < 1/2$ , получаем оценки

$$\sup_{|s-s_i| \leq H\lambda} |x_\lambda^\delta(s)| \geq |x_\lambda^\delta(s_i)| \geq \Delta^{\min} - \frac{3(1-2\gamma)}{8}\Delta^{\min} - \gamma\Delta^{\min} > \frac{\Delta^{\min}}{2} = P. \quad (2.8)$$

Вне множества  $Q = \bigcup_{i=1}^l \{s : |s - s_i| \leq H\lambda\}$  функция  $|x_\lambda^\delta(s)|$  оценивается сверху следующим образом:

$$|x_\lambda^\delta(s)| \leq A_0\lambda + A_1\delta\lambda^{-1/2} + \frac{L\Delta^{\max}C}{H} + \gamma\Delta^{\min} \leq \frac{3(1-2\gamma)}{8}\Delta^{\min} + \gamma\Delta^{\min} < \frac{\Delta^{\min}}{2} = P. \quad (2.9)$$

Дальнейшее доказательство для простоты изложения проведем при  $l = 2$ , т.е. метод П должен сделать два шага и на каждом шаге выделить интервал, содержащий одну точку  $s_i$ . Для произвольного  $l$  доказательство проводится аналогично, при этом метод П должен сделать  $l$  шагов. Напомним, что мы рассматриваем задачу на множестве функций  $x(s)$ , для которых  $s_2 - s_1 \geq h(\delta)$ .

Ввиду оценок (2.8), (2.9) и непрерывности функции  $|x_\lambda^\delta|$  в методе П найдется точка  $\bar{s}$  такая, что  $|x_\lambda^\delta(\bar{s})| = P$ . Поскольку  $s_1 < s_2$ , то  $|\bar{s} - s_1| \leq H\lambda$ . Из (2.8) следует, что  $|x_\lambda^\delta(s_1)| > P$ . Значит,  $s_1 > \bar{s}$ . Следовательно,  $s_1$  принадлежит отрезку  $[\bar{s}, \bar{s} + H\lambda] = [a_1, b_1]$ .

Рассмотрим отрезок  $[b_1 + H\lambda, d]$ . Он не содержит точек  $s$  таких, что  $|s - s_1| \leq H\lambda$ . С другой стороны, так как  $s_2 - s_1 \geq 3H\lambda$ , то  $b_1 + H\lambda < s_2 - H\lambda$ . Следовательно, самый левый корень  $\bar{s}$  уравнения  $|x_\lambda^\delta(s)| - P = 0$  на отрезке  $[b_1 + H\lambda, d]$  строго меньше  $s_2$ . А в силу (2.8) точка  $s_2$  принадлежит отрезку  $[\bar{s}, \bar{s} + H\lambda] = [a_2, b_2]$ .

Отрезки  $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$  разделяются, так как  $a_2 - b_1 \geq H\lambda > 0$ .

Рассмотрим отрезок  $[b_2 + H\lambda, d]$ . Ясно, что он не содержит точек множества  $Q$ , и, следовательно, уравнение  $|x_\lambda^\delta(s)| - P = 0$  на этом отрезке не имеет корней. Таким образом,  $m = 2$ , и процесс завершен.

Поскольку для всех точек  $s \in [a_i, b_i]$ ,  $i = 1, 2$ , имеем оценку  $|s - s_i| \leq H\lambda$ , то для середины отрезков справедлива оценка  $|s_i^\delta - s_i| \leq (H/2)\lambda$ . Теорема доказана.  $\square$

Рассмотрим случай, когда вспомогательная функция  $x_\lambda^\delta$  построена с помощью усредняющей функции  $\phi$  из множества  $\Phi F$ . При этом в разложении (2.6) отсутствует последнее слагаемое, что улучшает оценки как по точности, так и по делимости (в теореме можно взять лучшую функцию  $h(\delta)$ ). Кроме того, во всех константах отсутствуют величины  $\Delta^{\max}$  и  $L$ , что дает существенно лучший результат в случае, когда  $\Delta^{\max} \gg \Delta^{\min}$  и (или)  $L$  — большое число.

**Теорема 2.** Пусть для функции  $x \in MV$  выполнены условия (1), (2), (3), функция  $\phi \in \Phi F$ . Пусть константы  $D, \delta_0$  заданы равенствами (2.4) при  $a = 1$ . Тогда для всех  $\delta \leq 2\delta_0$  при связи параметров  $\lambda(\delta) = (D/4)\delta^2$  и выполнении неравенства  $\min_{1 \leq i, k \leq l, i \neq k} |s_i - s_k| \geq h(\delta)$ , где  $h(\delta) = 3\lambda(\delta)$ , для метода П-ПФ получим  $m = l$ , и будет справедлива оценка  $|s_i^\delta - s_i| \leq (D/8)\delta^2$ .

Доказательство данной теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим случай, когда при построении вспомогательной функции  $x_\lambda^\delta$  используется функция  $\phi \in \Phi$  с дополнительным условием

$$(d) \sup_{t \in [-1, 1]} |\phi(t)| - \sup_{t \notin [-1, 1]} |\phi(t)| = a > 0.$$

Ясно, что для функции  $\phi \in \Phi F$  это условие выполняется при  $a = 1$ . В этом случае можно получить лучшую оценку точности локализации положений разрывов по сравнению с теоремой 1. При этом нужно вместо метода ПФ использовать следующий метод:

**Метод П1.** Находим на каждом отрезке  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , точку максимума  $s_i^\delta$  функции  $|x_\lambda^\delta(s)|$ . Если таких точек несколько, то берем самую левую из них.

**Теорема 3.** Пусть для функции  $\phi \in \Phi$  выполнено условие (d), функция  $x \in \mathfrak{M}_{MV}$ , причем  $\gamma \leq a/2$ . Пусть константы  $D, \delta_0$  и  $H$  определены равенствами (2.4), (2.5), где параметр  $a$  взят из условия (d). Тогда для всех  $\delta \leq \delta_0$  при связи параметров  $\lambda(\delta) = D\delta^2$  и выполнении неравенства  $\min_{1 \leq i, k \leq l, i \neq k} |s_i - s_k| \geq h(\delta)$ , где  $h(\delta) = 3H\lambda(\delta)$ , для метода П-П1 получим  $m = l$ , и будет справедлива оценка  $|s_i^\delta - s_i| \leq D\delta^2$ .

**Доказательство** того, что метод П в этом случае определяет число  $l$  и выделяет непересекающиеся отрезки, содержащие точки  $s_i$ , аналогично доказательству в теореме 1. Покажем справедливость оценки для приближения  $s_i^\delta$ , построенного методом П1.

Пусть  $s_i^\delta$  — точка максимума модуля функции  $x_\lambda^\delta(s)$  на отрезке  $[a_i, b_i], i = 1, 2$ . Используя условия (b) и (d) на функцию  $\phi$ , имеем

$$\sup_{|s-s_i|>\lambda} |\phi_\lambda(s-s_i)| = 1-a \geq 0.$$

Используя разложение (2.6) и оценку (2.7), для  $i = 1, 2$  получаем

$$|x_\lambda^\delta(s_i^\delta)| > \Delta_i - \frac{a\Delta^{\min}}{2} \geq \frac{(2-a)\Delta_i}{2}, \quad \sup_{|s-s_i|>\lambda} |x_\lambda^\delta(s)| < \Delta_i(1-a) + \frac{a\Delta^{\min}}{2} \geq \frac{(2-a)\Delta_i}{2}.$$

Таким образом,  $|s_i^\delta - s_i| \leq \lambda, \quad i = 1, 2$ . Теорема доказана.  $\square$

Рассмотрим случай, когда функция  $x \in MV$  имеет ровно  $l$  разрывов первого рода. В этом случае условие (2) выполнено автоматически при  $\gamma = 0$ . Объединим в одной теореме результаты, аналогичные теоремам 1–3, для этого случая. Введем соответствующие константы

$$D = \left( \frac{8A_1}{a\Delta^{\min}} \right)^2, \quad \delta_0 = \left( \frac{a\Delta^{\min}}{4DA_0} \right)^{1/2}, \quad (2.10)$$

$$H = \frac{8L\Delta^{\max}\tilde{C}}{a\Delta^{\min}}, \quad \text{где } \tilde{C} = \max \left\{ C, \frac{a\Delta^{\min}}{8L\Delta^{\max}} \right\}. \quad (2.11)$$

**Теорема 4.** Пусть функция  $x \in MV$  имеет ровно  $l$  разрывов первого рода и для нее выполнены условия (1), (3).

(А) Если  $\phi \in \Phi$ , для функции  $x$  дополнительно выполнено условие (4) и константы  $D, \delta_0, H$  заданы равенствами (2.10), (2.11) при  $a = 1$ , то для всех  $\delta \leq \delta_0$  при связи параметров  $\lambda(\delta) = D\delta^2$  и выполнении неравенства  $\min_{1 \leq i, k \leq l, i \neq k} |s_i - s_k| \geq h(\delta)$ , где  $h(\delta) = 3H\lambda(\delta)$ , для метода П–ПФ получим  $t = l$ , и будет справедлива оценка  $|s_i^\delta - s_i| \leq (HD/2)\delta^2$ .

(В) Если  $\phi \in \Phi F$  и константы  $D, \delta_0$  заданы равенствами (2.10) при  $a = 1$ , то для всех  $\delta \leq 2\delta_0$  при связи параметров  $\lambda(\delta) = (D/4)\delta^2$  и выполнении неравенства  $\min_{1 \leq i, k \leq l, i \neq k} |s_i - s_k| \geq h(\delta)$ , где  $h(\delta) = 3\lambda(\delta)$ , для метода П–ПФ получим  $t = l$ , и будет справедлива оценка  $|s_i^\delta - s_i| \leq (D/8)\delta^2$ .

(С) Если для  $\phi \in \Phi$  выполнено условие (d), для функции  $x$  дополнительно выполнено условие (4) и константы  $D, \delta_0, H$  заданы равенствами (2.10), (2.11), то для всех  $\delta \leq \delta_0$  при связи параметров  $\lambda(\delta) = D\delta^2$  и выполнении неравенства  $\min_{1 \leq i, k \leq l, i \neq k} |s_i - s_k| \geq h(\delta)$ , где  $h(\delta) = 3H\lambda(\delta)$ , для метода П–П1 получим  $t = l$ , и будет справедлива оценка  $|s_i^\delta - s_i| \leq D\delta^2$ .

Эта теорема является следствием теорем 1–3.

### 3. Оптимальность методов локализации на классах функций с разрывами и примеры конкретных методов локализации

Для установления оптимальности (оптимальности по порядку) конкретного метода необходимы оценки снизу достижимой точности приближения положения особенностей. Эффективные оценки такого рода представляют также и самостоятельный интерес.

Введем условие на функцию с особенностями:

$$(5) \text{ задано положительное число } \hat{h} \text{ такое, что } \min_{1 \leq i, k \leq l, i \neq k} |s_i - s_k| \geq \hat{h}.$$

Обозначим через  $\mathfrak{M}'_{MV}$  класс функций из  $\mathfrak{M}_{MV}$ , удовлетворяющих условию (5).

**О п р е д е л е н и е 1.** Метод, определяющий по функции  $x^\delta$  и уровню погрешности  $\delta$  величину  $l$  и приближения  $s_i^\delta, i = 1, 2, \dots, l$ , к положениям особенностей  $s_i$  функции  $x$ , назовем *методом локализации*.

Для произвольного метода локализации  $\tilde{\Pi}$  на классе функций  $\mathfrak{M}'_{MV}$  введем понятия оптимальности и оптимальности по порядку и дадим определения оптимального (оптимального по порядку) метода по точности.

**О п р е д е л е н и е 2.** Для метода  $\tilde{\Pi}$  точность восстановления особенностей на классе  $\mathfrak{M}'_{MV}$  определяется величиной

$$\tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta) \equiv \sup_{x \in \mathfrak{M}'_{MV}} \sup_{\|x - x^\delta\|_{L_2} \leq \delta} \sup_{1 \leq i \leq l} |s_i - s_i^\delta|.$$

Величину  $\hat{\tau}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta) = \min_{\tilde{\Pi}} \tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$  назовем *оптимальной точностью* локализации особенностей на классе  $\mathfrak{M}'_{MV}$  (минимум берется по всем методам локализации разрывов). Метод  $\tilde{\Pi}$  назовем *оптимальным* (*оптимальным по порядку*) на классе  $\mathfrak{M}'_{MV}$ , если  $\hat{\tau}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta) = \tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$  (существует константа  $R > 1$  такая, что  $\tau(\mathfrak{M}'_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta) \leq R \cdot \hat{\tau}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta)$ ).

Кроме точности аппроксимации интерес представляет оценка снизу для другой характеристики методов локализации — порога делимости.

**О п р е д е л е н и е 3.** Наименьшая функция  $\bar{h}(\delta, \tilde{\Pi}, \mathfrak{M}_{MV})$ , которую можно поставить в условие  $\min_{1 \leq i, k \leq l, i \neq k} |s_i - s_k| \geq \bar{h}(\delta, \tilde{\Pi}, \mathfrak{M}_{MV})$  так, чтобы метод  $\tilde{\Pi}$  позволял локализовать особенности, называется *порогом делимости метода  $\tilde{\Pi}$*  на классе функций  $\mathfrak{M}_{MV}$ ; *порогом делимости задачи* на классе функций  $\mathfrak{M}_{MV}$  называется функция  $\hat{h}(\delta, \mathfrak{M}_{MV}) = \min_{\tilde{\Pi}} \bar{h}(\delta, \tilde{\Pi}, \mathfrak{M}_{MV})$ , где минимум берется по всем методам локализации  $\tilde{\Pi}$ . Метод  $\tilde{\Pi}$  назовем *P-оптимальным* (*P-оптимальным по порядку*) на классе  $\mathfrak{M}_{MV}$ , если  $\hat{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta) = \bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta)$  (существует константа  $R > 1$  такая, что  $\bar{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \tilde{\Pi}, \delta) \leq R \cdot \hat{h}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta)$ ).

**С л е д с т в и е 1.** В теоремах 1–4 получены оценки сверху для порога делимости методов, рассматриваемых в этих теоремах:  $\bar{h}(\delta, \tilde{\Pi}, \mathfrak{M}_{MV}) \leq h(\delta)$ .

В работе [19] приведены с доказательством оценки снизу для оптимальной точности и порога делимости рассматриваемой задачи для случая, когда функция зашумлена в  $L_p(-\infty, +\infty)$ . Для рассматриваемой в настоящей работе задачи при  $p = 2$  имеем

$$\hat{\tau}(\mathfrak{M}_{MV}, \delta) \geq \left( \frac{\delta}{\Delta_{\min}} \right)^2, \quad \hat{h}(\mathfrak{M}'_{MV}, \delta) \geq \left( \frac{\delta}{\Delta_{\min}} \right)^2. \quad (3.1)$$

Как уже отмечалось раньше, каждая из теорем 1–3 позволяет получать конкретные методы в частных ситуациях. Для иллюстрации получим из этих теорем несколько конкретных методов локализации разрывов зашумленной функции из пространства  $MV$ , построенных на основе конкретных усредняющих функций, при более частных условиях на точную функцию.

Выберем в качестве усредняющей функции  $\phi_1[\sigma]$  (см. примеры в разд. 2). Поскольку  $\phi_1[\sigma] \in \Phi$ , то вместо условия (2) на функцию  $x$  можно потребовать выполнения условия (2a). Поскольку  $\|\phi_1\|_{L_1} = \sqrt{2\pi\sigma}$ ,  $\|\phi'_1\|_{L_2} = \sqrt{\pi^{1/2}/(2\sigma^{1/2})}$ , то при  $a = 1$  согласно (2.4), (2.5) получаем следующие константы:

$$D = \left( \frac{\pi}{\sigma} \right)^{1/2} \frac{32}{((1 - 2\gamma) \Delta_{\min})^2}, \quad \delta_0 = \left( \frac{\Delta_{\min}(1 - 2\gamma)}{2\sqrt{2\pi\sigma}D} \right)^{1/2}, \quad H = \frac{8L\Delta_{\max} \exp(-1/(2\sigma))}{\Delta_{\min}(1 - 2\gamma)}.$$

Следуя методу П, вычислим вспомогательную функцию  $x^\delta_\lambda$  по формуле (2.1). Для локализации разрывов используем метод П–PF с параметрами  $\lambda(\delta) = D\delta^2$ ,  $h(\delta) = 3H\lambda(\delta)$ . Следующее утверждение является следствием теоремы 1.

**С л е д с т в и е 2.** Пусть для функции  $x \in MV$  выполнены условия (1), (2a), (3), (4). Тогда для всех  $\delta \leq \delta_0$  при связи параметров  $\lambda = \lambda(\delta)$  и выполнении неравенства

$\min_{1 \leq i, k \leq l, i \neq k} |s_i - s_k| \geq h(\delta)$  для метода П–ПФ получим  $t = l$ , и будет справедлива оценка  $|s_i^\delta - s_i| \leq (HD/2)\delta^2$ ; данный метод локализации оптимален и  $P$ -оптимален по порядку на соответствующих классах функций с разрывами.

Заметим, что для функции  $\phi_1[\sigma]$  выполнено условие (d) при  $a = 1 - \exp(-1/(2\sigma))$ . Следовательно, если для параметра  $\gamma$  из условия (2a) выполнено неравенство  $\gamma \leq a/2$ , то метод локализации, построенный на основе функции  $\phi_1[\sigma]$ , позволяет получить лучшие приближения для положений особенностей. Согласно (2.4), (2.5) имеем

$$D = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{1/2} \frac{32}{((a - 2\gamma) \Delta^{\min})^2}, \quad \delta_0 = \left(\frac{\Delta^{\min}(a - 2\gamma)}{2\sqrt{2\pi\sigma D}}\right)^{1/2}, \quad H = \frac{8L\Delta^{\max} \exp(-1/(2\sigma))}{\Delta^{\min}(a - 2\gamma)}.$$

Для локализации разрывов используем метод П–П1 с параметрами  $\lambda(\delta) = D\delta^2$ ,  $h(\delta) = 3H\lambda(\delta)$ . Следующее утверждение является следствием теоремы 3.

**Следствие 3.** Пусть для функции  $x \in MV$  выполнены условия (1), (2a), (3), (4) и  $\gamma \leq a/2$ . Тогда для всех  $\delta \leq \delta_0$  при связи параметров  $\lambda = \lambda(\delta)$  и выполнении неравенства  $\min_{1 \leq i, k \leq l, i \neq k} |s_i - s_k| \geq h(\delta)$  для метода П–П1 получим  $t = l$ , и будет справедлива оценка  $|s_i^\delta - s_i| \leq D\delta^2$ ; данный метод локализации оптимален и  $P$ -оптимален по порядку на соответствующих классах функций с разрывами.

Построим метод локализации на основе функции  $\phi_2$ . Поскольку  $\phi_2 \in \Phi$ , то для этой функции можно применить теорему 1, т.е. получить оценки, аналогичные оценкам в следствии 2. Кроме того, для функции  $\phi_2$  выполнено условие (d) при  $a = 1$ . Следовательно, также можно получить оценки исходя из теоремы 3. Но, поскольку  $\phi_2 \in \Phi F$ , можно получить лучшее приближение для положений особенностей, используя вместо метода П1 метод ПФ. Кроме того, для функции  $\phi_2 \in \Phi F$  по лемме 2 условие (2) на функцию  $x$  следует из более слабого условия (2b). Таким образом, следующее утверждение является следствием теоремы 2. Поскольку  $\|\phi_2\|_{L_1} = 1$ ,  $\|\phi_2'\|_{L_2} = \pi/2$ , то

$$D = \left(\frac{4\pi}{(1 - 2\gamma)\Delta^{\min}}\right)^2, \quad \delta_0 = \left(\frac{\Delta^{\min}(1 - 2\gamma)}{2D}\right)^{1/2}, \quad \lambda(\delta) = D\delta^2, \quad h(\delta) = 3\lambda(\delta).$$

**Следствие 4.** Пусть для функции  $x \in MV$  выполнены условия (1), (2b), (3). Тогда для всех  $\delta \leq \delta_0$  при связи параметров  $\lambda = \lambda(\delta)$  и выполнении неравенства  $\min_{i, k \geq 1, i \neq k} |s_i - s_k| \geq h(\delta)$  для метода П–ПФ получим  $t = l$ , и будет справедлива оценка  $|s_i^\delta - s_i| \leq (D/2)\delta^2$ ; данный метод локализации оптимален и  $P$ -оптимален по порядку на соответствующих классах функций с разрывами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
2. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. Vasin V. V., Ageev A. L. Ill-posed problems with a priori information. Utrecht, the Netherlands: VSP, 1995. 255 с.
4. Агеев А. Л., Антонова Т. В. О новом классе некорректно поставленных задач // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58. С. 24–42. (Математика. Механика. Информатика; вып. 11.)
5. Don't shed tears over breaks / G. Winkler, O. Wittich, V. Liebsher, A. Kempe // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 2005. Bd. 107, no. 2. S. 57–87.
6. Сизиков В. С. Математические методы обработки результатов измерений // СПб.: Политехника, 2001. 240 с.

7. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
8. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / Под ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
9. **Gilles J., Meyer Y.** Properties of BV-G structures+textures decomposition models. Application to road detection in satellite images // IEEE Trans. Image Process. 2010. Vol. 19, no. 11. P. 2793–2800.
10. **Oudshoorn C. G. M.** Asymptotically minimax estimation of a function with jumps // Bernoulli. 1998. Vol. 4, no. 1. P. 15–33.
11. **Коростелев А. П.** О минимаксном оценивании разрывного сигнала // Теория вероятностей и ее применения. 1987. Т. 32, вып. 4. С. 796–799.
12. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** О задаче разделения особенностей // Изв. вузов. 2007. № 11. С. 1–7. (Математика.)
13. **Антонова Т. В.** Восстановление функции с конечным числом разрывов 1-го рода по зашумленным данным // Изв. вузов. 2001. № 7. С. 65–68. (Математика.)
14. **Antonova T. V.** Approximation of function with finite number of discontinuities by noised data // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2002. Vol. 10, no. 2. P. 113–123.
15. **Antonova T. V.** Solving equations of the first kind on classes of functions with singularities // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. 145–189.
16. **Антонова Т. В.** Новые методы локализации разрывов зашумленной функции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 375–386.
17. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** Регуляризирующие алгоритмы выделения разрывов в некорректных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 8. С. 1362–1370.
18. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
19. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** О некорректно поставленных задачах локализации особенностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 30–45.

Агеев Александр Леонидович

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна

канд. физ.-мат. наук

ст. науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

Поступила 02.06.2011

УДК 518.517

## ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА I РОДА И ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА<sup>1</sup>

А. С. Апарцин

В статье отражена роль функции Ламберта в теории полиномиальных уравнений Вольтерра I рода. Наряду с известными результатами приводятся новые. В частности, изучается устойчивость непрерывного решения полиномиального уравнения Вольтерра I рода  $N$ -й степени. На базе аппарата мажорантных уравнений получены достаточные условия устойчивости.

Ключевые слова: полиномиальные уравнения Вольтерра I рода, функция Ламберта.

A. S. Apartsin. Polynomial Volterra equations of the first kind and the Lambert function.

The role of the Lambert function in the theory of polynomial Volterra equations of the first kind is considered. New results are presented in addition to the known ones. In particular, the stability of a continuous solution of the first-kind polynomial Volterra equation of degree  $N$  is investigated. Based on the techniques of majorant equations, sufficient stability conditions are obtained.

Keywords: polynomial Volterra equations of the first kind, Lambert function.

### Введение

Одним из наиболее универсальных подходов к построению математической модели нелинейной динамической системы типа черного ящика является представление отклика системы на внешнее возмущение в виде отрезка интегро-степенного ряда (полинома) Вольтерра. В основе такого представления лежит континуальный аналог теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной на отрезке вещественной оси функции многочленом — теорема Фреше [1] и различные ее обобщения.

Пусть входной сигнал нелинейной динамической системы  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$  —  $m$ -мерная вектор-функция времени, а отклик системы  $y(t)$  — скалярная функция, что не уменьшает общности. Тогда полином Вольтерра  $N$ -й степени  $P_N(x(t))$  имеет вид

$$y(t) = P_N(x(t)) \equiv \sum_{\nu=1}^N \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_\nu \leq m} V_{i_1 \dots i_\nu}(x(t)), \quad (0.1)$$

где

$$V_{i_1 \dots i_\nu}(x(t)) \equiv \int_0^t \dots \int_0^t K_{i_1 \dots i_\nu}(t, s_1, \dots, s_\nu) \prod_{j=1}^{\nu} x_{i_j}(s_j) ds_j, \quad t \in [0, T]. \quad (0.2)$$

В (0.2) функции  $K_{i_1 \dots i_\nu}$  (ядра Вольтерра) симметричны относительно переменных, соответствующих совпадающим индексам,  $[0, T]$  — отрезок, на котором моделируется переходный процесс. Построить математическую модель (0.1), (0.2) — значит, идентифицировать функции  $K_{i_1 \dots i_\nu}$  с помощью откликов системы на те или иные наборы тестовых входных сигналов. Методам идентификации ядер Вольтерра посвящена обширная литература. В частности, методика, основанная на задании специальных многопараметрических семейств кусочно-постоянных тестовых входных возмущений, в скалярном случае ( $m = 1$ ) изучалась в [2; 3], в векторном — в [3; 4].

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00377).

Предположим, функции  $K_{i_1 \dots i_\nu}$  идентифицированы каким-либо способом. Тогда в качестве следующего этапа математического моделирования может быть рассмотрена типичная задача автоматического управления — нахождения такого  $x(t)$ , которому соответствует заданный (желаемый) отклик  $y(t)$ .

Возникающие при этом нелинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода пока еще изучены недостаточно. На сегодня не существует даже устоявшегося их названия. Заметим, что если в (0.2) все индексы различны, то интегральный оператор  $V_{i_1 \dots i_\nu}$  линеен относительно каждой компоненты  $x_{i_j}(t)$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ , и называется полилинейным ( $\nu$ -линейным) (см. [5, с. 377]). Если, напротив, все индексы совпадают, то  $V_{i_j \dots i_j}$  является  $\nu$ -степенным (см. [5, с. 378]) относительно  $x_{i_j}(t)$ .

Всюду далее будем предполагать, что  $x(t)$  — скалярная функция. Переобозначим  $\underbrace{K_{1 \dots 1}}_{\nu \text{ раз}} \equiv K_\nu$ ,  $x_1(t) \equiv x(t)$ , так что вместо (0.1), (0.2) имеем

$$P_N(x(t)) \equiv \sum_{\nu=1}^N V_\nu x^\nu = y(t), \quad (0.3)$$

где

$$V_\nu x^\nu \equiv \int_0^t \cdots \int_0^t K_\nu(t, s_1, \dots, s_\nu) \prod_{j=1}^{\nu} x(s_j) ds_j, \quad t \in [0, T]. \quad (0.4)$$

В частности, в важных для приложений случаях  $N = 2, 3$

$$P_2(x(t)) \equiv \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1ds_2 = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.5)$$

$$P_3(x(t)) \equiv P_2(x(t)) + \int_0^t \int_0^t \int_0^t K_3(t, s_1, s_2, s_3)x(s_1)x(s_2)x(s_3)ds_1ds_2ds_3 = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.6)$$

а при  $N = 1$  имеем стандартное линейное уравнение Вольтерра I рода

$$P_1(x(t)) = \int_0^t K(t, s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (0.7)$$

В работах [6–8] уравнение вида (0.3), (0.4) трактуется как полилинейное (multilinear) (в частности, (0.5), (0.6) — соответственно би- и трилинейное). В работе [9] используется термин multiple nonlinear, а в [10] предлагается термин “полиномиальное уравнение Вольтерра I рода  $N$ -й степени”, который представляется наиболее удачным, поскольку решить (0.3) — значит, по существу, найти интересующий нас “корень” полинома Вольтерра (например, в пространстве вещественных непрерывных функций).

Общеизвестно, что линейное уравнение (0.7) в предположении, что  $K(t, t) \neq 0 \forall t \in [0, T]$ ;  $K'_i(t, s) \in C_\Delta$ ,  $\Delta = \{t, s/0 \leq s \leq t \leq T\}$ ;  $y(t) = \overset{\circ(1)}{C}_{[0, T]}(y(0) = 0)$ , имеет единственное решение  $x(t) \in C_{[0, T]}$  при любом  $T < \infty$ .

Оказывается, главная специфика полиномиального уравнения (0.3) при  $N > 1$  заключается в том, что его (единственное) вещественное непрерывное решение имеет локальный характер в том смысле, что величина  $T$ , вообще говоря, должна быть достаточно малой.

### 1. О специфике полиномиальных уравнений Вольтерра I рода

Предположим, что помимо симметричности по переменным  $s_1, \dots, s_\nu$  ядра  $K_\nu$ ,  $\nu = \overline{2, N}$ , непрерывны по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемы по  $t$ . Не уменьшая общности, примем  $K(t, t) \equiv 1$ . Все функциональные пространства считаем вещественными.

Выскажем некоторые эвристические соображения. Допустим, нас интересует вещественное непрерывное на некотором временном отрезке  $[0, \bar{t}]$  решение уравнения (0.3). Очевидно, что при малом  $\bar{t}$   $\left| \sum_{\nu=2}^N V_\nu x^\nu \right| = \mathcal{O}(\bar{t}^2)$ , поэтому уравнение (0.3) можно трактовать как линейное с возмущенной правой частью  $\tilde{y}(t)$ , для которой

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\|_{C_{[0, \bar{t}]}}^{(1)} = \mathcal{O}(\bar{t}),$$

а следовательно, задача (0.3) корректна на паре  $(C_{[0, \bar{t}]}, C_{[0, \bar{t}]}^{(1)})$ . Таким образом, при заданных ядрах Вольтерра  $K_\nu$  линейаризацию (0.3) обеспечивает малость отрезка  $[0, \bar{t}]$ , а при заданном  $[0, \bar{t}]$  — малость  $|K_\nu|$ ,  $\nu = \overline{2, N}$ .

Проиллюстрируем сказанное на следующем простом примере. Пусть

$$K_1(t, s) \equiv 1, \quad K_2(t, s_1, s_2) \equiv \lambda \neq 0,$$

так что (0.3) имеет вид

$$P_2(x(t)) \equiv \int_0^t x(s) ds + \lambda \left( \int_0^t x(s) ds \right)^2 = y(t), \quad t \in [0, \bar{t}]. \quad (1.1)$$

Так как  $y(t)$  непрерывно дифференцируема и  $y(0) = 0$ , то уравнение (1.1) эквивалентно уравнению II рода

$$\frac{dP_2(x(t))}{dt} \equiv x(t) + 2\lambda x(t) \int_0^t x(s) ds = y'(t), \quad t \in [0, \bar{t}]. \quad (1.2)$$

Легко проверить, что решением (1.1), (1.2) является функция

$$x^*(t) = \frac{y'(t)}{\sqrt{1 + 4\lambda y(t)}}. \quad (1.3)$$

Если  $y(t)$  знакопостоянна на  $[0, \bar{t}]$ , то при условии  $\text{sign } \lambda = \text{sign } y(t)$   $x^*(t) \in C_{[0, \bar{t}]}$  при любом  $\bar{t} < \infty$ , однако в общем случае вещественность  $x^*(t)$  гарантирует условие

$$|\lambda y(t)| < \frac{1}{4}. \quad (1.4)$$

Поскольку  $y(t) = ty'(\xi)$ ,  $\xi \in [0, t]$ , то, вводя обозначение

$$\max_{0 \leq \xi \leq t} |y'(\xi)| = F(t), \quad (1.5)$$

из (1.4) получаем, что  $x^*(t) \in C_{[0, \bar{t}]}$ , где  $\bar{t}$  — корень уравнения

$$tF(t) = \frac{1}{4|\lambda|},$$

однозначно разрешимого в силу непрерывности и неубывания  $F(t)$ . Если же отрезок  $[0, \bar{t}]$  задан, то (1.4) дает ограничение на  $|\lambda|$

$$|\lambda| < \frac{1}{4\bar{t}} F(\bar{t}).$$

**З а м е ч а н и е 1.** Пусть в (1.1)  $y(t) = g(t) + \lambda g^2(t)$ , где  $g(t) \in C_{[0,T]}^{\circ(1)}$ ,  $T < \infty$ . Вводя новую искомую функцию  $\theta(t) = \int_0^t x(s)ds$ , получаем функциональное уравнение  $\theta(t) + \lambda\theta^2(t) = g(t) + \lambda g^2(t)$ , откуда  $\theta(t) = g(t)$  и  $x^*(t) = g'(t)$ . Этот же результат немедленно следует из (1.3). Однако метод последовательных приближений, примененный к (1.2)

$$x_{k+1} = y'(t) - 2\lambda x_k(t) \int_0^t x_k(s)ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0(t) = y'(t),$$

дает в этом случае

$$x_k(t) = g'(t)(1 + 2\lambda g(t)) \sum_{i=0}^k (-1)^i (2\lambda g(t))^i,$$

так что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = g'(t)$  лишь при условии  $2|\lambda g(t)| < 1$ .

Таким образом, формула обращения (1.3) позволяет ослабить ограничения, связанные с применением принципа сжимающих отображений.

**З а м е ч а н и е 2.** В [7] показано, что, несмотря на единственность непрерывного решения  $x^*(t)$ , (1.3) имеет решение и в классе обобщенных функций

$$x^{**}(t) = -x^*(t) - \frac{1}{\lambda}\delta(t),$$

где  $\delta(t)$  —  $\delta$ -функция Дирака. Исследованию структуры решений уравнений (0.3) с операторами типа многомерных сверток в пространстве обобщенных функций посвящена работа [11].

## 2. Функция Ламберта и полиномиальное уравнение Вольтерра I рода

Рассмотрим следующую функцию вещественного аргумента  $z$ :

$$y(z) = ze^z, \quad z \in (-\infty, \infty). \quad (2.1)$$

Функцией Ламберта  $z = W(y)$  называется решение уравнения

$$ze^z = y,$$

т. е.  $W(y)$  — функция, обратная к функции (2.1).

Заслуга широкого введения функции Ламберта в практику математических исследований принадлежит разработчикам системы MAPLE [12–14]. По-видимому, единственным русскоязычным источником, посвященным функции Ламберта, является [15]. Перечислим вкратце важнейшие для наших целей свойства функции  $W$ .

Функция Ламберта имеет две вещественные ветви — главную, которая определена для  $y \in \left[-\frac{1}{e}, \infty\right)$  и аналитична в 0 (ее обозначают как  $W_0(y)$  или просто  $W(y)$ ), и вторую ветвь, определенную для  $y \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$  и обозначаемую как  $W_{-1}(y)$ . При  $y = -\frac{1}{e}$   $W\left(-\frac{1}{e}\right) = W_{-1}\left(-\frac{1}{e}\right) = -1$ , а при  $y = 0$   $W(0) = 0$ ,  $W_{-1}(0) = -\infty$ . Обе ветви в точке  $y = -\frac{1}{e}$  имеют вертикальную касательную. Непосредственно из определения функции Ламберта следует, что

$$W'(y) = \frac{W(y)}{(1 + W(y))y}, \quad y > -\frac{1}{e}. \quad (2.2)$$

Свойства функции Ламберта в комплексной области, а также ее применение во многих областях прикладной математики детально описаны в [12–15].

Заметим, что, поскольку  $e^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$ , функция  $W(y)$  является решением задачи обращения бесконечного ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu-1)!} = y,$$

причем справедливо представление [14]

$$W(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-k)^{k-1}}{k!} y^k = y - y^2 + \frac{3}{2}y^3 - \frac{8}{3}y^4 + \frac{125}{24}y^5 + \mathcal{O}(y^6).$$

Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$P_\infty(x(t)) \equiv \sum_{\nu=1}^{\infty} V_\nu x^\nu = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.3)$$

Оператор  $P_\infty$  считаем действующим из  $C_{[0,T]}^{\circ(1)}$  в  $C_{[0,T]}^{\circ(1)}$ . Следующий результат устанавливает связь между функцией Ламберта и (единственным) вещественным непрерывным решением  $x^*(t)$  уравнения (2.3).

**Теорема 1.** Пусть в (2.3)

$$K_\nu = \frac{1}{(\nu-1)!}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

а  $y(t) \in C_{[0,T]}^{\circ(1)}$  и

$$y(t) > -\frac{1}{e} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

Тогда справедлива формула обращения (2.3)

$$x^*(t) = P_\infty^{-1}(y(t)) = \frac{W(y(t))y'(t)}{(1+W(y(t)))y(t)}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.6)$$

**Доказательство.** В силу (2.4) и (0.4)

$$V_\nu x^\nu = \frac{1}{(\nu-1)!} \left( \int_0^t x(s) ds \right)^\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Положим

$$\theta(t) \equiv \int_0^t x(s) ds. \quad (2.8)$$

Тогда по (2.7)

$$P_\infty(x(t)) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\theta^\nu(t)}{(\nu-1)!} = \theta(t)e^{\theta(t)}$$

и (2.3) сводится к функциональному уравнению

$$\theta(t)e^{\theta(t)} = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.9)$$

Из условий (2.5) и  $y(0) = 0$ , а также определения главной вещественной ветви функции Ламберта следует, что решением (2.9) является функция  $\theta^*(t) = W(y(t)) \in \overset{\circ(1)}{C}_{[0,T]}$ , откуда, применяя (2.2), получаем

$$x^*(t) = \frac{d}{dt}W(y(t)) = \frac{W(y(t))y'(t)}{(1+W(y(t)))y(t)}, \quad t \in [0, T],$$

и (2.6) доказано.  $\square$

**П р и м е р.** Пусть  $y_1(t) = t$ ,  $y_2(t) = te^t$ ,  $y_3(t) = -t$ . Тогда согласно (2.6)

$$x_1^*(t) = \frac{W(t)}{(1+W(t))t}, \quad x_2^*(t) = 1, \quad x_3^*(t) = \frac{W(-t)}{(1+W(-t))t}.$$

Очевидно,  $x_3^*(t) \notin C_{[0,T]}$  при  $T \geq \frac{1}{e}$ , поскольку для  $y_3(t)$  нарушается условие (2.5).

**З а м е ч а н и е 3.** Областью значений оператора  $P_\infty$  в случае (2.4) является пространство  $\overset{\circ(1)}{C}_{[0,T]}$  с дополнительным условием (2.5). Если (2.4) заменить на  $K_\nu = \frac{1}{\nu!}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , то легко видеть, что тогда  $R(P_\infty) = \overset{\circ(1)}{C}_{[0,T]} \cup \{y(t) > -1\}$  и формула обращения (2.3) такова:

$$x^*(t) = \frac{y'(t)}{1+y(t)}, \quad t \in [0, T].$$

Убедимся, что в терминах функции Ламберта может выражаться и непрерывное решение уравнения (0.3). Положим в (0.3)  $N = 2$ ,  $K_1(t, s) = 1 - L_1(t - s)$ ,  $L_1 > 0$ ;  $K_2(t, s_1, s_2) = -\lambda$ ,  $\lambda > 0$ ,  $y(t) = Ft$ ,  $F > 0$ , так что уравнение (0.3) имеет вид

$$P_2(x(t)) \equiv \int_0^t (1 - L_1(t - s))x(s)ds - \lambda \left( \int_0^t x(s)ds \right)^2 = Ft, \quad t \in [0, T]. \quad (2.10)$$

С помощью дифференцирования и замены (2.8) перейдем от (2.10) к задаче Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{F + L_1\theta(t)}{1 - 2\lambda\theta(t)}, \quad \theta(0) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

Решение (2.11) выражается через главную вещественную ветвь функции Ламберта следующим образом:

$$\theta^*(t) = -\frac{L_1 + 2\lambda F}{2\lambda L_1} W \left( -\frac{2\lambda F}{L_1 + 2\lambda F} \exp \frac{L_1^2 t - 2\lambda F}{L_1 + 2\lambda F} \right) - \frac{F}{L_1},$$

поэтому формула обращения (2.10) такова:

$$x^*(t) = P_2^{-1}(Ft) = -\frac{L_1}{2\lambda} \frac{W \left( -\frac{2\lambda F}{L_1 + 2\lambda F} \exp \frac{L_1^2 t - 2\lambda F}{L_1 + 2\lambda F} \right)}{1 + W \left( -\frac{2\lambda F}{L_1 + 2\lambda F} \exp \frac{L_1^2 t - 2\lambda F}{L_1 + 2\lambda F} \right)},$$

а приравнивание аргумента  $W$  к  $-\frac{1}{e}$  дает верхнюю оценку для  $T$  в (2.10), (2.11)

$$T < T^* = \frac{L_1 + 2\lambda F}{L_1^2} \ln \left( 1 + \frac{L_1}{2\lambda F} \right) - \frac{1}{L_1}. \quad (2.12)$$

### 3. Мажорантные уравнения

Как было отмечено в п. 1, при малом  $\bar{t}$  и соответствующих условиях на исходные данные полиномиальное уравнение (0.3) наследует свойство линейного уравнения Вольтерра I рода — корректность на паре  $(C_{[0,\bar{t}]}, C_{[0,\bar{t}]}^{(1)})$ . Принципиальным является вопрос об оценке величины  $\bar{t}$ , гарантирующей это свойство. Универсальный инструмент, позволяющий такую оценку получить, — принцип сжимающих отображений — дает, как следует из замечания 1, излишне пессимистическую оценку сверху на  $\bar{t}$ .

Иной подход, дающий гарантированную оценку  $\bar{t}$  снизу, основан на введении специальных мажорантных интегральных уравнений, теоретическое обоснование которых, как отмечено в [16], базируется на основополагающих результатах Л.В. Канторовича [17; 18].

Примем следующие обозначения:

$$L_\nu(t) = \max_{0 \leq s_1, \dots, s_\nu \leq \xi \leq t} |K'_{\nu t}(\xi, s_1, \dots, s_\nu)| \geq 0, \quad \nu = \overline{1, N}, \quad t \in [0, \bar{t}]; \quad (3.1)$$

$$M_\nu(t) = \max_{0 \leq s_2, \dots, s_\nu \leq \xi \leq t} |K_\nu(\xi, \xi, s_2, \dots, s_\nu)| \geq 0, \quad \nu = \overline{2, N}, \quad t \in [0, \bar{t}]; \quad (3.2)$$

$$M_N(t) > 0 \quad \forall t > 0.$$

Вещественное непрерывное решение (0.3) будем обозначать как  $x_N^*(t)$ . Так как (0.3) эквивалентно с учетом симметрии  $K_\nu$  по  $s_1, \dots, s_\nu$  уравнению II рода

$$\begin{aligned} x(t) + x(t) \sum_{\nu=2}^N \nu \int_0^t \cdots \int_0^t K_\nu(t, t, s_2, \dots, s_\nu) \prod_{j=2}^\nu x(s_j) ds_j \\ + \sum_{\nu=1}^N \int_0^t \cdots \int_0^t K'_{\nu t}(t, s_1, \dots, s_\nu) \prod_{j=1}^\nu x(s_j) ds_j = y'(t), \quad t \in [0, \bar{t}], \end{aligned} \quad (3.3)$$

то в силу (3.1), (3.2)  $x_N^*(t)$  удовлетворяет неравенству

$$|x_N^*(t)| \leq F(t) + |x_N^*(t)| \sum_{\nu=2}^N \nu M_\nu(t) \left( \int_0^t |x_N^*(s)| ds \right)^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^N L_\nu(t) \left( \int_0^t |x_N^*(s)| ds \right)^\nu, \quad (3.4)$$

где  $F(t)$  определено по (1.5).

Заменяя в (3.4) знак  $\leq$  на  $=$ , рассмотрим интегральное уравнение

$$\psi(t) = F(t) + \psi(t) \sum_{\nu=2}^N \nu M_\nu(t) \left( \int_0^t \psi(s) ds \right)^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^N L_\nu(t) \left( \int_0^t \psi(s) ds \right)^\nu \quad (3.5)$$

и (с учетом замены типа (2.8)) соответствующую задачу Коши

$$\dot{\theta}(t) = G(\theta(t)) \equiv \frac{F(t) + \sum_{\nu=1}^N L_\nu(t) \theta^\nu(t)}{1 - \sum_{\nu=2}^N \nu M_\nu(t) \theta^{\nu-1}(t)}, \quad \theta(0) = 0. \quad (3.6)$$

Локальная липшиц-непрерывность отображения  $G(\theta(t)) : C_{[0,\bar{t}]} \rightarrow C_{[0,\bar{t}]}$  гарантирует для достаточно малого  $\bar{t} > 0$  единственность решения (3.6)  $\theta_N^*(t)$  (следовательно, и решения (3.5)  $\psi_N^*(t) = \theta_N^*(t)$ ), а изотонность  $G(\theta(t))$  относительно конуса  $C_{+[0,\bar{t}]}$  влечет (см. [19, лемма 1]) выполнение неравенства

$$|x_N^*(t)| \leq \psi_N^*(t), \quad t \in [0, \bar{t}]. \quad (3.7)$$

**О п р е д е л е н и е.** Уравнение (3.5) и задачу Коши (3.6) назовем мажорантными для (0.3).

**З а м е ч а н и е 4.** Для случая, когда  $M_\nu$  и  $L_\nu$  не зависят от  $t$ , мажорантные интегральные уравнения и задачи Коши введены в [6].

Структура правой части (3.6) позволяет установить максимальное значение  $\bar{t} = \bar{t}_{\max}$ , при котором справедливо неравенство (3.7).

**Теорема 2.**

$$\bar{t}_{\max} = t^*,$$

где  $t^* > 0$  — единственный корень уравнения

$$\zeta(t) \equiv \sum_{\nu=2}^N \nu M_\nu(t) \theta_N^{*\nu-1}(t) = 1. \quad (3.8)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Так как для  $\bar{t}_{\max}$   $G(\bar{t}_{\max}) = \infty$ , то достаточно показать, что уравнение (3.8) имеет единственное решение  $t = t^*$ . Действительно,  $M_\nu(t)$ ,  $\nu = \overline{2, N}$  — непрерывные неубывающие, а  $\theta_N^*(t)$  — непрерывная возрастающая строго выпуклая функция, поэтому  $\zeta(t)$  — также непрерывная возрастающая строго выпуклая функция с  $\zeta(0) = 0$ , а значит, найдется такое  $t^* > 0$ , что  $\zeta(t^*) = 1$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е 5.** В зарубежной литературе  $\bar{t}_{\max}$  называют blow up — пределом.

Оценку (3.7) при условии  $\bar{t} = t^*$  естественно назвать неулучшаемой для (3.4). В некоторых частных случаях мажоранта в (3.7) аналитически выражается в терминах второй вещественной ветви функции Ламберта [20]. На базе (3.7) можно исследовать проблему устойчивости решения (0.3)  $x_N^*(t)$  к возмущениям правой части.

#### 4. Теорема устойчивости непрерывного решения (0.3)

**Теорема 3.** Пусть вместо  $y(t)$  в (0.3) задана функция  $\tilde{y}(t)$  такая, что

$$\|y(t) - \tilde{y}(t)\|_{\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}} \leq \delta, \quad (4.1)$$

причем

$$T < \min(t^*, t^{**}), \quad (4.2)$$

где  $t^* > 0$  — решение (3.8), а  $t^{**} > 0$  — решение уравнения

$$\eta(t) \equiv \sum_{\nu=2}^N \nu M_\nu(t) (\tilde{\psi}_N^*(t) \cdot t)^{\nu-1} = 1, \quad (4.3)$$

в котором  $\tilde{\psi}_N^*(t)$  удовлетворяет (3.5) с заменой  $F(t)$  на  $\tilde{F}(t) + \delta$ ,  $\tilde{F}(t) = \max_{0 \leq \xi \leq t} |\tilde{y}'(\xi)|$ . Тогда непрерывное решение полиномиального уравнения (0.3)  $x_N^*(t)$  устойчиво к возмущениям правой части вида (4.1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим решение (0.3) с правой частью  $\tilde{y}(t)$  через  $\tilde{x}_N^*(t)$  и оценим

$$|\varepsilon(t)| \equiv |x_N^*(t) - \tilde{x}_N^*(t)|.$$

Положим

$$W_\nu(x(t)) \equiv \nu x(t) \int_0^t \cdots \int_0^t K_\nu(t, t, s_2, \dots, s_\nu) \prod_{j=2}^\nu x(s_j) ds_j,$$

$$U_\nu(x(t)) \equiv \int_0^t \cdots \int_0^t K'_{\nu t}(t, s_1, \dots, s_\nu) \prod_{j=1}^{\nu} x(s_j) ds_j.$$

В силу (3.3)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(V_N(x_N^*(t)) - V_N(\tilde{x}_N^*(t))) \\ & \equiv \varepsilon(t) + \sum_{\nu=2}^N (W_\nu(x_N^*(t)) - W_\nu(\tilde{x}_N^*(t))) + \sum_{\nu=1}^N (U_\nu(x_N^*(t)) - U_\nu(\tilde{x}_N^*(t))) = y(t) - \tilde{y}'(t), \end{aligned}$$

откуда с учетом (4.1)

$$|\varepsilon(t)| \leq \delta + \sum_{\nu=2}^N |W_\nu(x_N^*(t)) - W_\nu(\tilde{x}_N^*(t))| + \sum_{\nu=1}^N |U_\nu(x_N^*(t)) - U_\nu(\tilde{x}_N^*(t))|. \quad (4.4)$$

Оценим суммы в правой части (4.4). Так как в силу (4.2)  $T < t^*$ , то при любом  $t \in [0, T]$

$$\max\{|x_N^*(t)|, |\tilde{x}_N^*(t)|\} \leq \tilde{\psi}_N^*(t), \quad (4.5)$$

где  $\tilde{\psi}_N^*(t)$  — непрерывное решение мажорантного интегрального уравнения (3.5), в котором  $F(t)$  заменена на  $\tilde{F}(t) + \delta$ ,  $\tilde{F}(t) = \max_{0 \leq \xi \leq t} |\tilde{y}'(\xi)|$ . Следовательно, с учетом (3.1), (3.2), (4.5)

$$\begin{aligned} & |W_\nu(x_N^*(t) - W_\nu(\tilde{x}_N^*(t)))| \\ & \leq \nu M_\nu(t) (\tilde{\psi}_N^*(t) \cdot t)^{\nu-1} |\varepsilon(t)| + \nu(\nu-1) M_\nu(t) (\tilde{\psi}_N^*(t))^{\nu-1} t^{\nu-2} \int_0^t |\varepsilon(s)| ds, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$|U_\nu(x_N^*(t) - U_\nu(\tilde{x}_N^*(t)))| \leq \nu L_\nu(t) (\tilde{\psi}_N^*(t) \cdot t)^{\nu-1} \int_0^t |\varepsilon(s)| ds. \quad (4.7)$$

Поскольку функции  $M_\nu(t)$ ,  $L_\nu(t)$  неубывающие, а  $\tilde{\psi}_N^*(t)$  строго возрастающая, то из (4.4)–(4.7) следует, что

$$\begin{aligned} |\varepsilon(t)| & \leq \delta + \sum_{\nu=2}^N \nu M_\nu(T) (\tilde{\psi}_N^*(T) T)^{\nu-1} |\varepsilon(t)| \\ & + \left[ \sum_{\nu=2}^N \nu(\nu-1) M_\nu(T) (\tilde{\psi}_N^*(T))^{\nu-1} T^{\nu-2} + \sum_{\nu=1}^N \nu L_\nu(T) (\tilde{\psi}_N^*(T) T)^{\nu-1} \right] \int_0^t |\varepsilon(s)| ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Осталось учесть, что корень  $t^{**} > 0$  уравнения (4.3) заведомо существует и единствен в силу непрерывности строго возрастающей функции  $\eta(t)$  и условия  $\eta(0) = 0$ ,  $\eta(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ , и так как по (4.2)  $T < t^{**}$ , то  $\eta(T) < \eta(t^{**}) = 1$ , а значит,

$$|\varepsilon(t)| \leq \frac{\delta}{1 - \eta(T)} + \frac{\mu(T)}{1 - \eta(T)} \int_0^t |\varepsilon(s)| ds. \quad (4.9)$$

В (4.9) через  $\mu(T)$  обозначено выражение в квадратных скобках в (4.8). Наконец, из (4.9) по неравенству Гроунолла — Беллмана имеем

$$|\varepsilon(t)| \leq \frac{\delta}{1 - \eta(T)} e^{\frac{\mu(T)}{1 - \eta(T)} t} = \mathcal{O}(\delta), \quad t \in [0, T],$$

что и завершает доказательство.  $\square$

**З а м е ч а н и е 6.** В частном случае, когда  $L_\nu, M_\nu$  не зависят от  $t$  и удовлетворяют специальным соотношениям (см. [20]), позволяющим выразить  $\psi_N^*(t)$  через функцию Ламберта  $W_{-1}(\cdot)$ , значения  $t^*, t^{**}$  могут быть получены в аналитическом виде. Для этого случая теорема 3 доказана в [21].

## 5. О численном решении полиномиальных уравнений Вольтерра

Возможный локальный характер искомого решения полиномиального уравнения привносит свою специфику в поведение сеточных решений. Так, если в линейном случае простейшие квадратуры правых и средних прямоугольников сходятся с порядком  $\mathcal{O}(h)$  и  $\mathcal{O}(h^2)$  соответственно на  $[0, T]$  при любом  $T < \infty$ , то, как установлено в [22] для билинейных (квадратичных) уравнений Вольтерра I рода, даже если искомое решение глобально, область сходимости численных методов из-за возникновения погранслоя ошибок сеточного решения оказывается уже области определения решения  $\psi_2^*(t)$  соответствующего мажорантного уравнения. Остановимся на этом эффекте подробнее.

Непрерывным решением квадратичного уравнения Вольтерра I рода

$$\int_0^t (1 - (t - s))x(s)ds - \frac{1}{2} \left( \int_0^t x(s)ds \right)^2 = t - t^2 \quad (5.1)$$

является функция  $x_2^*(t) = 1, t \in [0, T] \quad \forall T < \infty$ . Так как для этого примера  $M_2 = \frac{1}{2}, L_1 = 1, L_2 = 0$ , а

$$F(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 1; \\ 2t - 1, & t > 1, \end{cases}$$

то при  $T \leq 2$  мажорантное для (5.1) интегральное уравнение Вольтерра II рода имеет согласно (3.5) вид

$$\psi(t) = 1 + \psi(t) \int_0^t \psi(s)ds + \left( \int_0^t \psi(s)ds \right)^2. \quad (5.2)$$

Эквивалентное (5.2) уравнение Вольтерра I рода отличается от (5.1) лишь правой частью

$$\int_0^t (1 - (t - s))x(s)ds - \frac{1}{2} \left( \int_0^t x(s)ds \right)^2 = t,$$

а мажорантная задача Коши (3.6) такова:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1 + \theta(t)}{1 - \theta(t)}, \quad \theta(0) = 0. \quad (5.3)$$

Полагая в (2.11)  $F = 1, L_1 = 1, \lambda = \frac{1}{2}$ , выразим решение (5.3) через главную вещественную ветвь функции Ламберта

$$\theta_2^*(t) = -2W\left(-\frac{1}{2}e^{t-1/2}\right) - 1, \quad 0 \leq t \leq t^*,$$

где в соответствии с (2.12)

$$t^* = 2 \ln 2 - 1 \approx 0.3863,$$

а решением (5.2) является

$$\psi_2^*(t) = \dot{\theta}_2^*(t) = -\frac{W(-\frac{1}{2}e^{t-1/2})}{1 + W(-\frac{1}{2}e^{t-1/2})}, \quad 0 \leq t < t^*. \quad (5.4)$$

Согласно теореме 2 из [22] сходимость метода правых прямоугольников с порядком  $\mathcal{O}(h)$ ,  $h \leq h_0$ , для уравнения (5.1) гарантирована на отрезке  $[0, \hat{T}]$ ,  $\hat{T} < t^*$ , если пара  $h_0, \hat{T}$  удовлетворяет неравенству

$$2M_2(h_0 + \hat{T}\psi_2^*(\hat{T})) < 1. \quad (5.5)$$

Действительно, расчеты показывают, что при  $h_0 = 0,1$ ,  $\hat{T} \approx 0,29$  и на отрезке  $[0, T]$ ,  $T < \hat{T}$ , сходимость с порядком  $\mathcal{O}(h)$  имеет место. Условие (5.5) не является следствием грубости применяемой техники, а отражает существо дела — оно близко к необходимому, так как при его нарушении, как правило, возникает эффект погранслоя ошибок вблизи точки  $t^*$ .

Аналогична специфика численных методов решения интегральных уравнений Вольтерра II рода со степенной нелинейностью

$$x(t) = \int_0^t K(t, s)x^p(s)ds + y(t), \quad p > 1. \quad (5.6)$$

Подобные уравнения с  $p = 2$  возникают, например, в обратных коэффициентных задачах для дифференциальных уравнений гиперболического типа [23]. Пусть в (5.6)  $p = 2$ ,  $K(t, s) \equiv 1$ ,  $x(0) = y(0)$ . Тогда (5.6) эквивалентно задаче Коши для уравнения Риккати

$$\dot{x}(t) = x^2(t) + y'(t), \quad x(0) = y(0), \quad (5.7)$$

и, к примеру, при  $y(t) = t$  решение (5.7) ((5.6))  $x^*(t) = \operatorname{tg} t$  имеет blow-up предел  $t^* = \frac{\pi}{2}$ . Если же  $y(t)$  такова, что  $x^*(t)$  определено на  $[0, T]$ ,  $T < \infty$ , то вновь возникает проблема построения численного метода, сходящегося на отрезке  $[0, \hat{T}]$  максимальной длины.

Пусть для определенности  $y(t) = t - \frac{t^3}{3}$ , так что  $x^*(t) = t$ . Применение квадратурных методов правых прямоугольников и трапеций к уравнению

$$x(t) = \int_0^t x^2(s)ds + t - \frac{t^3}{3},$$

а также методов Рунге — Кутты 4-го и 5-го порядков к задаче Коши

$$\dot{x}(t) = x^2(t) + 1 - t^2, \quad x(0) = 0, \quad (5.8)$$

показало, что при  $\hat{T} > 2, 3, 7$  для методов правых прямоугольников, трапеций и Рунге — Кутты соответственно происходит лавинообразное накопление погрешностей сеточных решений.

Несомненный интерес представляет разработка сеточных методов, учитывающих специфику данного класса задач.

Если, следуя [24, с. 256], на элементарном участке  $[ih, (i+1)h]$  заменить положительную функцию  $y'(t)$  на константу

$$\dot{y}_{i+\frac{1}{2}} = y'\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)h\right),$$

то, поскольку дифференциальное уравнение  $\dot{x}(t) = x^2(t) + c$ ,  $c > 0$ , интегрируется в элементарных функциях, получаем разностную схему (второго порядка точности)

$$x_{i+1} = \sqrt{\dot{y}_{i+\frac{1}{2}}} \frac{x_i + \sqrt{\dot{y}_{i+\frac{1}{2}}} \operatorname{tg}(h\sqrt{\dot{y}_{i+\frac{1}{2}}})}{\sqrt{\dot{y}_{i+\frac{1}{2}}} - x_i \operatorname{tg}(h\sqrt{\dot{y}_{i+\frac{1}{2}}})}. \quad (5.9)$$

Так как в случае (5.8)  $y'(t)$  является знакопеременной, то естественно при  $y'(t) < 0$  на  $[ih, (i+1)h]$  использовать аналитическое решение дифференциального уравнения  $\dot{x}(t) = x^2(t) - c$ ,  $c > 0$ , что приводит к разностной схеме

$$x_{i+1} = \frac{\sqrt{-\dot{y}_{i+1/2}} \left(1 - \gamma_i e^{2h\sqrt{-\dot{y}_{i+1/2}}}\right)}{1 + \gamma_i e^{2h\sqrt{-\dot{y}_{i+1/2}}}}, \quad \text{если } x_i < \sqrt{-\dot{y}_{i+1/2}}, \quad (5.10)$$

$$x_{i+1} = \frac{\sqrt{-\dot{y}_{i+1/2}} \left(1 + \gamma_i e^{2h\sqrt{-\dot{y}_{i+1/2}}}\right)}{1 - \gamma_i e^{2h\sqrt{-\dot{y}_{i+1/2}}}}, \quad \text{если } x_i > \sqrt{-\dot{y}_{i+1/2}}, \quad (5.11)$$

где

$$\gamma_i = \left| \frac{x_i - \sqrt{-\dot{y}_{i+1/2}}}{x_i + \sqrt{-\dot{y}_{i+1/2}}} \right|. \quad (5.12)$$

Как показали расчеты, проведенные с использованием системы MAPLE [25], комбинированный метод, основанный на применении (5.9) для  $ih < 1$  и (5.10)–(5.12) для  $ih > 1$ , позволил получить сходящееся со скоростью  $\mathcal{O}(h^2)$  численное решение (5.8) для  $\hat{T} \approx 4 \cdot 10^3$ .

## 6. Заключение

Общеизвестна роль экспоненциальной функции в теории линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода. В частности, экспонентой оценивается норма обратного оператора, действующего из  $\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}$  в  $C_{[0,T]}$ . В теории полиномиальных уравнений Вольтерра I рода аналогичную роль играет функция Ламберта, позволяющая оценить возможный сверхэкспоненциальный рост искомого непрерывного решения. Весьма эффективный способ исследования линейных уравнений путем перехода от нормы в  $C_{[0,T]}$  к эквивалентной норме

$$\|x(t)\|_* = \max_{0 \leq t \leq T} e^{-Lt} |x(t)|, \quad L > 0,$$

допускает обобщение на полиномиальный случай, когда в качестве весовой используется функция  $[W(\cdot)]^{-1}$ . Некоторые результаты в этом направлении получены в [10].

В целом разработка теории и численных методов решения полиномиальных уравнений Вольтерра I рода весьма далека от завершения и нуждается в дальнейшем развитии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fréchet M. Sur les fonctionnelles continues // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 1910. Vol. 27. P. 193–216.
2. Апарцин А.С. Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (скалярный случай): препринт / ИСЭМ СО РАН. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1995. 30 с.
3. Апарцин А.С. О новых классах линейных многомерных уравнений I рода типа Вольтерра // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 28–41.
4. Апарцин А.С. Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (векторный случай): препринт / ИСЭМ СО РАН. Иркутск: СЭИ СО РАН, 1996. 56 с.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. М: Наука, 1980. 495 с.
6. Апарцин А.С. О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 118–125.
7. Апарцин А.С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. № 1. Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2007. С. 13–41.
8. Апарцин А.С. Полилинейные уравнения Вольтерра I рода и некоторые задачи управления // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 3–16.

9. **Belbas S.A., Bulka Yu.** Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations // Appl. Math. Comput. 2011. Vol. 217, no. 9. P. 4791–4804.
10. **Апарцин А.С.** Об эквивалентных нормах в теории полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. Т. 3, № 1. Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2010. С. 19–29.
11. **Сидоров Д.Н., Сидоров Н.А.** Обобщенные решения полиномиальных интегральных уравнений первого рода в одной модели нелинейной динамики // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 127–132.
12. On the Lambert W function / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey and D.E. Knuth // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 5, no. 4. P. 329–359.
13. Lambert's W function in Maple / R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare and D.J. Jeffrey // The Maple Technical Newsletter. 1993. No. 9. С. 12–22.
14. **Corless R.M., Jeffrey D.J., Knuth D.E.** A sequence of series for the Lambert W function // Proc. ISS AC'97. New York: ACM Press, 1997. P. 197–204.
15. **Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.** W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики: учеб. пособие для вузов. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2006. 160 с.
16. **Сидоров Д.Н., Сидоров Н.А.** Метод монотонных мажорант в теории нелинейных уравнений Вольтерра // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. Т. 4, № 1. Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2011. С. 97–108.
17. **Канторович Л.В.** О функциональных уравнениях // Уч. зап. ЛГУ. 1937. Т. 3, № 17. С. 24–50.
18. **Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.** Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 550 с.
19. **Apartsyn A.S.** Unimprovable estimates of solutions for some classes integral inequalities // Inverse Ill-Posed Probl. 2008. Vol. 16, no. 7. P. 651–680.
20. **Апарцин А.С., Спиряев В.А.** О неулучшаемых ламберт-оценках решений одного класса нелинейных интегральных неравенств // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 3–12.
21. **Апарцин А.С.** К исследованию устойчивости решения полиномиального уравнения Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 95–101.
22. **Апарцин А.С.** О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. № 8. С. 1380–1388.
23. Picosecond scale experimental verification of a globally convergent algorithm for a coefficient inverse problem / M. V. Klibanov [et al.] // Inverse Probl. 2010. Vol. 26, no. 4. ID: 045003. 30 p.
24. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
25. **Сербулов И.И.** Численное решение интегральных уравнений Вольтерра II рода с квадратичной нелинейностью: димлом. работа. Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2011. 45 с.

Апарцин Анатолий Соломонович

д-р физ.-мат. наук

главный науч. сотрудник

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

e-mail: [apartsyn@isem.sei.irk.ru](mailto:apartsyn@isem.sei.irk.ru)

Поступила 12.07.2011

УДК 517.5

## ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В $L$ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ<sup>1</sup>

А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин, В. А. Юдин

Для любого  $0 < h \leq \pi$  найдена величина наилучшего одностороннего интегрального приближения характеристической функции интервала  $(-h, h)$  тригонометрическими полиномами заданного порядка.

Ключевые слова: одностороннее интегральное приближение функций полиномами.

A. G. Babenko, Yu. V. Kryakin, V. A. Yudin. One-sided approximation in  $L$  of the characteristic function of an interval by trigonometric polynomials.

For arbitrary  $0 < h \leq \pi$ , the value of the best one-sided integral approximation of the characteristic function of the interval  $(-h, h)$  by trigonometric polynomials of a given degree is found.

Keywords: one-sided integral approximation of functions by polynomials.

### 1. Введение. Формулировка основного результата

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  — период длины  $2\pi$ , т. е. полуинтервал  $[\alpha, \alpha + 2\pi)$  с отождествленными концами, где  $\alpha$  — произвольное фиксированное число<sup>2</sup> из  $\mathbb{R}$ ;

$L = L(\mathbb{T})$  — пространство  $2\pi$ -периодических измеримых вещественнозначных функций с нормой  $\|f\| = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt$ ;

$\mathcal{T}_n$  — подпространство тригонометрических полиномов  $\tau(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^n (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$  порядка не выше  $n$  с вещественными коэффициентами;

$$E_n(g) := \inf_{\tau \in \mathcal{T}_n} \|g - \tau\|, \quad E_n^-(g) := \inf_{\tau \in \mathcal{T}_n, \tau \leq g} \|g - \tau\|, \quad E_n^+(g) := \inf_{\tau \in \mathcal{T}_n, g \leq \tau} \|g - \tau\|$$

— величины наилучшего интегрального приближения, наилучшего интегрального приближения снизу и соответственно сверху ограниченной функции  $g \in L$  подпространством  $\mathcal{T}_n$ .

Для произвольного фиксированного числа  $h \in (0, \pi]$  обозначим через  $\chi_h$  характеристическую функцию интервала  $(-h, h)$ , периодически продолженную на  $\mathbb{R}$  с периодом  $2\pi$ . Положим

$$\mathcal{E}_n(h) := E_n(\chi_h), \quad \mathcal{E}_n^-(h) := E_n^-(\chi_h), \quad \mathcal{E}_n^+(h) := E_n^+(\chi_h).$$

Отметим, что

$$\mathcal{E}_n^-(h) = \mathcal{E}_n^+(\pi - h) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}, \quad h \in (0, \pi). \quad (1.1)$$

Отсюда с помощью классического результата Фейера (1913) о точной константе в неравенстве между равномерной и интегральной нормами неотрицательного тригонометрического полинома порядка не выше  $n$  (см. [9, ч. 2, отдел 6, § 7, задача 50]) получаем

$$\lim_{h \rightarrow \pi} \mathcal{E}_n^-(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{E}_n^+(h) = \frac{1}{n+1}.$$

<sup>1</sup>Исследования поддержаны РФФИ (проекты 11-01-00417, 11-01-00462, 11-01-00735) и УРО РАН в рамках совместного с учеными СО РАН проекта 12-С-1-1018.

<sup>2</sup>В данной работе в качестве  $\alpha$  будет выбираться число  $-\pi$  или 0.

В силу (1.1) далее будем исследовать лишь величину  $\mathcal{E}_n^-(h)$ .

Задача одностороннего приближения функции  $\text{sign } x$  и характеристической функции интервала целыми функциями экспоненциального типа и тригонометрическими полиномами изучалась в связи с приложениями в теории чисел в работах Берлинга, Сельберга и Ваалера. Установлено [19] (см. также [13, Ch. 1]), что

$$\mathcal{E}_n^-(h) \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{при любых } n \in \mathbb{N}, \quad h \in (0, \pi]. \quad (1.2)$$

В настоящей работе мы продолжаем исследование, начатое в [3], где найдено интегральное приближение характеристической функции  $\chi_h$  при любом  $h \in (0, \pi]$  тригонометрическими полиномами заданного порядка, и получаем аналогичный окончательный результат в случае одностороннего интегрального приближения.

Положим  $[\beta] = \max\{\nu \in \mathbb{Z} : \nu \leq \beta\}$ ,  $\lceil \beta \rceil = \min\{\nu \in \mathbb{Z} : \beta \leq \nu\}$ . Введем функции

$$\Lambda_n(x) = \frac{\sin \frac{nx}{2} - \sin \frac{(n+2)x}{2}}{(n+2) \sin \frac{nx}{2} - n \sin \frac{(n+2)x}{2}}, \quad (1.3)$$

$$\lambda_n(x) = \frac{\sin x}{\left[\frac{n}{2}\right] \sin x - \sin \left(\left[\frac{n}{2}\right] x\right) \cos \left(\left[\frac{n+2}{2}\right] x\right)}, \quad (1.4)$$

$$\gamma_n(x) = \frac{\sin x}{\left[\frac{n}{2}\right] \sin x + \sin \left(\left[\frac{n+2}{2}\right] x\right) \cos \left(\left[\frac{n}{2}\right] x\right)}. \quad (1.5)$$

Сформулируем результат данной работы, в котором используется обозначение

$$I_j = I_{j,n} = \left( \frac{j\pi}{n+1}, \frac{(j+1)\pi}{n+1} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

**Теорема 1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

(a)  $\mathcal{E}_n^-(h) = \frac{1}{n+1}$  при  $h = \frac{j\pi}{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ ;

(b)  $\mathcal{E}_n^-(h) = \frac{h}{\pi}$  при  $h \in I_{0,n}$ ;

(c)  $\mathcal{E}_n^-(h) = \frac{h}{\pi} - \Lambda_n(h)$  при  $h \in I_{1,n}$ ;

(d)  $\mathcal{E}_n^-(h) = \frac{h}{\pi} - \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_n(x_k)$  при  $h \in I_{2j,n}$ ,  $j = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $n \geq 2$ ,

где  $x_0, \dots, x_{j-1}$  — нули функции  $\cos \frac{nh}{2} \cos \frac{(n+2)x}{2} - \cos \frac{(n+2)h}{2} \cos \frac{nx}{2}$ , расположенные в интервале  $(0, h)$  в порядке возрастания;

(e)  $\mathcal{E}_n^-(h) = \frac{h}{\pi} - \Lambda_n(h) - \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_n(y_k)$  при  $h \in I_{2j+1,n}$ ,  $j = 1, \dots, \lceil n/2 \rceil - 1$ ,  $n \geq 3$ ,

где  $y_0, \dots, y_{j-1}$  — нули функции  $\sin \frac{nh}{2} \sin \frac{(n+2)x}{2} - \sin \frac{(n+2)h}{2} \sin \frac{nx}{2}$ , расположенные в интервале  $(0, h)$  в порядке возрастания.

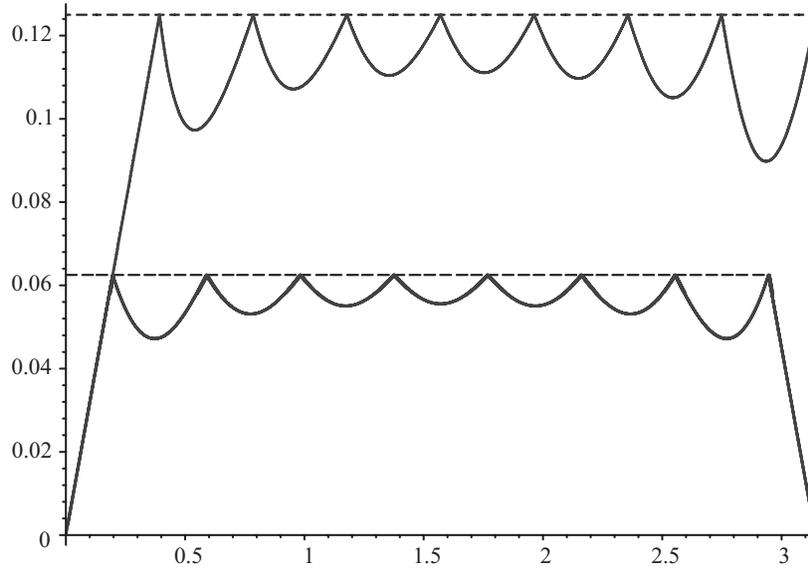


Рис. 1. Графики функций  $\mathcal{E}_7^-(h)$ ,  $\mathcal{E}_7(h)$  переменного  $h \in (0, \pi]$ .

На рис. 1 приведены графики функций  $\mathcal{E}_n^-(h)$ ,  $\mathcal{E}_n(h)$  переменного  $h \in (0, \pi]$ , а также графики постоянных функций  $\frac{1}{n+1}$ ,  $\frac{1}{2(n+1)}$  (пунктирные линии) при фиксированном значении параметра  $n = 7$ ; график функции  $\mathcal{E}_7(h)$  взят из статьи [3].

## 2. Некоторые типы условий эрмитовой интерполяции функции $\chi_h$ . Первая основная лемма

Приведем несколько условий интерполяции функции  $\chi_h$  косинус-полиномами на  $[0, \pi]$ . Пусть

$$s, r \in \{0, 1\}, \quad \ell, m \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}, \quad s + \ell \geq 1.$$

Упорядоченной четверке чисел  $(s, \ell, m, r)$  поставим в соответствие тип  $T(s, \ell, m, r)$  условий интерполяции функции  $\chi_h$  косинус-полиномом  $\tau$  минимально возможного порядка. Указанный тип характеризует расположение узлов интерполяции и их кратность. Опишем значение каждого из параметров  $s, \ell, m, r$ :

- (a) если  $s = 0$ , то 0 не является узлом интерполяции;
- (b) если  $s = 1$ , то 0 является узлом интерполяции, т. е.  $\tau(0) = 1$ ;
- (c) число  $\ell$  означает количество<sup>3</sup> узлов интерполяции  $x_1 < x_2 < \dots < x_\ell$ , расположенных в открытом интервале  $(0, h)$ , причем каждый из этих узлов имеет двойную кратность:

$$\tau(x_j) = 1, \quad \tau'(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, \ell; \quad (2.1)$$

- (d) точка  $x_{\ell+1} := h$  всегда является (простым) узлом интерполяции, т. е.  $\tau(h) = 0$ ;
- (e) число  $m$  означает количество узлов интерполяции  $x_{\ell+2} < x_{\ell+3} < \dots < x_{\ell+m+1}$ , расположенных в интервале  $(h, \pi)$ , причем каждый из этих узлов имеет двойную кратность:

$$\tau(x_j) = 0, \quad \tau'(x_j) = 0, \quad j = \ell + 2, \dots, \ell + m + 1; \quad (2.2)$$

- (f) если  $r = 0$ , то  $\pi$  не является узлом интерполяции;
- (g) если  $r = 1$ , то  $\pi$  является узлом интерполяции, т. е.  $\tau(\pi) = 0$ .

<sup>3</sup>Если  $\ell = 0$ , то в  $(0, h)$  нет узлов интерполяции. Аналогично в условии (e), если  $m = 0$ , то в  $(h, \pi)$  нет узлов интерполяции.

Косинус-полином  $\tau$  (минимально возможного порядка), реализующий тип  $T(s, \ell, m, r)$  условной эрмитовой интерполяции функции  $\chi_h$ , для краткости будем называть *косинус-полиномом типа  $T(s, \ell, m, r)$* ; иногда будем говорить, что *косинус-полином  $\tau$  имеет тип  $T(s, \ell, m, r)$* . Порядок этого полинома равен количеству условий интерполяции минус один, т. е.

$$\deg \tau = s + r + 2(\ell + m). \tag{2.3}$$

С помощью замены  $t = \cos x$  придем к соответствующей задаче эрмитовой интерполяции характеристической функции полуинтервала  $(\cos h, 1]$  алгебраическим многочленом  $P(t)$ , который связан с косинус-полиномом  $\tau(x)$  соотношением

$$P(\cos x) = \tau(x), \quad x \in [0, \pi]. \tag{2.4}$$

Известно, что в случае более общих условий<sup>4</sup> интерполяционный алгебраический многочлен Эрмита (минимально возможной степени) существует и является единственным. Явные формулы для указанного многочлена и его степени приведены в монографии [4, гл. 1, § 11]. В случае, когда все узлы интерполяции имеют двойную кратность, указанная формула имеет довольно простой вид (см. [4, гл. 1, § 11, п. 1, формулы (17), (24)]).

Для оценки сверху величины  $\mathcal{E}_n^-(h)$  и построения соответствующего экстремального косинус-полинома нам понадобится лемма, которая для полинома  $\tau$  типа  $T(0, \ell, m, 0)$  (а точнее, для алгебраического многочлена  $P$ , связанного с указанным полиномом  $\tau$  соотношением (2.4)) является частным случаем результата, независимо установленного в 1880-е годы Марковым [8, ст. 1] и Стильтесом [17; 18] (см. [12, пп. 3.411], а также леммы 9, 9' в [10, гл. 1, разд. 1.2, с. 67–69] и одноименные леммы в [11, разд. “Постников А.Г. Тауберова теория и ее применения”, § 12, с. 312–314]). Общий случай для косинус-полиномов  $\tau$  типа  $T(s, \ell, m, r)$  доказывается аналогично. Для полноты изложения приведем с доказательством следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $s, r \in \{0, 1\}$ ,  $\ell, m \in \mathbb{Z}_+$ ,  $s + \ell \geq 1$ ,  $h \in (0, \pi)$ ,  $\tau$  — интерполяционный косинус-полином (минимально возможного порядка), реализующий тип  $T(s, \ell, m, r)$  условной интерполяции функции  $\chi_h$ . Тогда

$$\tau(x) \leq \chi_h(x) \quad \text{при всех } x \in [-\pi, \pi]. \tag{2.5}$$

**Доказательство.** Обозначим через  $n$  порядок косинус-полинома  $\tau$ ; по формуле (2.3) находим  $n = s + r + 2(\ell + m)$ . Производная полинома  $\tau$  представима в виде произведения  $\tau'(x) = (\sin x)\theta(x)$ , в котором  $\theta$  — некоторый косинус-полином порядка  $\deg \theta = n - 1 = s + r + 2(\ell + m) - 1$ .

Производная  $\tau'(x)$  обращается в нуль на концах отрезка  $[0, \pi]$ . Посчитаем количество попарно различных нулей производной  $\tau'(x)$ , расположенных внутри открытого интервала  $(0, \pi)$ . В силу (2.1) и (2.2) имеем

$$\tau'(x_j) = 0 \quad \text{при } j = 1, \dots, \ell \quad \text{и} \quad j = \ell + 2, \dots, \ell + m + 1,$$

причем узлы  $x_j$  лежат внутри интервала  $(0, \pi)$ , общее их количество равняется сумме  $\ell + m$ .

Количество интервалов  $(x_j, x_{j+1})$ , на концах которых полином  $\tau$  принимает одинаковые значения (либо единичные, либо нулевые), равняется  $s + \ell + m + r - 1$ ; здесь мы учли, что точка  $x_{\ell+1} := h$  всегда является узлом интерполяции, т. е.  $\tau(h) = 0$ . Внутри каждого такого интервала производная  $\tau'(x)$  обращается в нуль. Таким образом, общее количество попарно различных нулей производной  $\tau'(x)$  в открытом интервале  $(0, \pi)$  не меньше, чем число  $d := s + r + 2(\ell + m) - 1$ . Число  $d$  совпадает с порядком косинус-полинома  $\theta$ , т. е.  $d = \deg \theta$ . Поэтому производная  $\tau'$  не имеет на  $[0, \pi]$  нулей, отличных от перечисленных выше. Обозначим нули производной  $\tau'$  на  $[0, \pi]$  так:  $y_0 := 0 < y_1 < \dots < y_d < y_{d+1} := \pi$ .

---

<sup>4</sup>В каждом узле интерполируется сама функция и несколько подряд идущих ее производных, при этом количество интерполируемых значений производных зависит от номера узла.

По условию леммы  $s + \ell \geq 1$ . Отсюда следует, что в полуинтервале  $[0, h)$  содержится хотя бы один узел интерполяции; обозначим через  $x^*$  максимальный из них ( $x^* = 0$ , если  $\ell = 0$ , и  $x^* = x_\ell$ , если  $\ell \geq 1$ ).

Поскольку  $\tau(x^*) = 1$ ,  $\tau(h) = 0$ , то в интервале  $(x^*, h)$  производная  $\tau'(x)$  будет отрицательной. Отсюда однозначно определяется знак производной в любом интервале

$$(y_j, y_{j+1}), \quad j = 0, \dots, d,$$

а также точки локальных минимумов и максимумов полинома  $\tau$ . В частности,  $x^*$  является точкой локального максимума. Анализируя остальные точки локальных экстремумов полинома  $\tau$ , лежащих на отрезке  $[0, \pi]$ , приходим к неравенству (2.5). Лемма доказана.  $\square$

В качестве примера приведем конструкцию косинус-полинома  $\tau$  типа  $T(0, \ell, m, 0)$ .

Обозначим через  $\vartheta(x)$  интерполяционный косинус-полином Эрмита, который интерполирует с двойной кратностью функцию

$$(\cos x - \cos h)\chi_h(x)$$

в узлах  $x_1 < \dots < x_\ell < x_{\ell+1} = h < x_{\ell+2} < \dots < x_{\ell+m+1}$ , расположенных в открытом интервале  $(0, \pi)$  (в узле  $x_{\ell+1} = h$  полагаем  $\vartheta(h) = \vartheta'(h) = 0$ ). Явный вид полинома  $\vartheta(x)$  легко находится с помощью формул (17), (24) из [4, гл. 1, § 11, п. 1]. Несложно убедиться в том, что косинус-полином  $\tau(x) = \frac{\vartheta(x)}{\cos x - \cos h}$  имеет тип  $T(0, \ell, m, 0)$ .

Ниже (см. рис. 2 в конце разд. 6) таким способом построен косинус-полином  $\tau_h \in \mathcal{T}_{10}$  типа  $T(0, 2, 3, 0)$ , являющийся полином наилучшего интегрального приближения снизу функции  $\chi_h$  при  $h = 9\pi/22$ .

### 3. Квадратурная формула гауссовского типа для тригонометрических полиномов. Доказательство утверждения (b) теоремы 1

Хорошо известна (см. [5, т. 2, гл. 10, формула (2.5)]) следующая квадратурная формула:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tau\left(\xi + \frac{2k\pi}{n+1}\right), \quad (3.1)$$

которая выполняется для произвольного полинома  $\tau \in \mathcal{T}_n$  при любом фиксированном  $\xi \in \mathbb{R}$ .

При  $\xi = \pi/(n+1)$  формула (3.1) приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tau(t_k), \quad t_k = \frac{(2k+1)\pi}{n+1},$$

где  $\tau$  — произвольный полином из  $\mathcal{T}_n$ . С помощью этой формулы несложно получить

**Следствие.** Пусть  $\tau \in \mathcal{T}_n$ ,  $\tau(x) \leq 0$  при  $\frac{\pi}{n+1} \leq |x| \leq \pi$ . Тогда  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx \leq 0$ .

**Доказательство** утверждения (b) теоремы 1.

Пусть  $0 < h \leq \frac{\pi}{n+1}$  и  $\tau$  — произвольный полином из  $\mathcal{T}_n$ , удовлетворяющий неравенству  $\tau(x) \leq \chi_h(x)$  при всех  $x \in [-\pi, \pi]$ . Тогда  $\tau(x) \leq 0$  при  $h \leq |x| \leq \pi$ ; а поскольку  $0 < h \leq \frac{\pi}{n+1}$ ,

то  $\tau(x) \leq 0$  при  $\frac{\pi}{n+1} \leq |x| \leq \pi$  и в силу следствия  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx \leq 0$ . Отсюда получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\chi_h(x) - \tau(x)\} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_h(x) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_h(x) dx = \frac{h}{\pi}.$$

Поэтому имеет место оценка снизу  $\mathcal{E}_n^-(h) \geq h/\pi$ . Полином  $\tau(x) \equiv 0$  влечет оценку сверху  $\mathcal{E}_n^-(h) \leq h/\pi$ . Утверждение (b) теоремы 1 доказано.

#### 4. Вторая основная лемма. Доказательство утверждения (a) теоремы 1

Приведем утверждение (лемма 2), с помощью которого в дальнейшем будет получена оценка снизу искомой величины  $\mathcal{E}_n^-(h)$  при  $\pi/(n+1) < h < \pi$ . Доказательство леммы 2 в случае непрерывной функции  $g$  содержится в [6, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.5] и практически дословно переносится на случай произвольной ограниченной функции  $g \in L$ .

**Лемма 2.** Пусть квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) dx \approx \sum_{k=1}^m p_k u(x_k)$$

с неотрицательными коэффициентами  $p_1, \dots, p_m$  точна на  $\mathcal{T}_n$ . Тогда для любой ограниченной функции  $g \in L$  выполняется неравенство

$$E_n^-(g) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx - \sum_{k=1}^m p_k g(x_k).$$

Для произвольного фиксированного числа  $h \in (0, \pi]$  обозначим через  $\chi_{(0,2h)}$  характеристическую функцию интервала  $(0, 2h)$ , периодически продолженную на  $\mathbb{R}$  с периодом  $2\pi$ . В силу инвариантности подпространства  $\mathcal{T}_n$  относительно любого сдвига имеем

$$\mathcal{E}_n^-(h) := E_n^-(\chi_h) = E_n^-(\chi_{(0,2h)}). \tag{4.1}$$

Применим лемму 2 для оценки снизу величины

$$\mathcal{E}_n^-(h_j), \quad h_j = \frac{j\pi}{n+1}, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

которая вместе с оценкой сверху (1.2) позволит обосновать утверждение (a) теоремы 1.

Следует сказать, что утверждение (a) теоремы 1 является простым следствием результата Маркова — Стилтеса, процитированного выше (см. абзац перед леммой 1 в разд. 2), а также аналога леммы 2 для  $E_n^+(g)$  и соотношения (1.1). Однако для полноты изложения приведем

**Доказательство** утверждения (a) теоремы 1.

Пусть  $h_j = \frac{j\pi}{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ . При  $\xi = 0$  формула (3.1) приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \tau(x_k), \quad x_k = \frac{2k\pi}{n+1}, \quad \tau \in \mathcal{T}_n.$$

Отсюда с помощью (4.1) и леммы 2 получаем оценку снизу

$$\mathcal{E}_n^-(h_j) = E_n^-(\chi_{(0,2h_j)}) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{(0,2h_j)}(x) dx - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \chi_{(0,2h_j)}(x_k) = \frac{1}{n+1},$$

которая вместе с (1.2) влечет утверждение (a) теоремы 1.

## 5. Квадратурные формулы с несколькими фиксированными узлами

Доказательство утверждений (c)–(e) теоремы 1 базируется на леммах 1, 2. В свою очередь для применения указанных лемм нам понадобятся квадратурные формулы с несколькими фиксированными узлами, при этом наивысшей степени точности. Такие формулы для алгебраических многочленов изучались давно, начиная с исследований Гаусса, Кристоффеля, Лобатто, Мелера, Маркова. История по этой теме содержится в монографии [12]. Большой интерес представляют явные формулы для коэффициентов указанных квадратурных формул (в частности, знаки коэффициентов) и расположение узлов, что тесно связано с полиномиальными интерполяционно-ортогональными базисами и ортогональными многочленами. Важные результаты в этой области получили Фейер, Стеклов, Эрдеш, Туран, Винстон, Шохат и др. (частичное описание упомянутых результатов и соответствующую библиографию можно найти в работах [2; 14; 15]).

В. А. Стеклов [16] (см. [15, разд. 2, теорема 3]) установил, что квадратурная формула наивысшей степени точности с одним фиксированным узлом (вне зависимости от его расположения) имеет только положительные коэффициенты, правда, один из свободных узлов этой формулы может оказаться вне промежутка интегрирования. К. Винстон [20, разд. 3] для интеграла с весом общего вида нашел явные формулы для коэффициентов соответствующих квадратурных формул наивысшей степени точности с фиксированными узлами в случае, когда они лежат на границе или вне промежутка интегрирования. Я. А. Шохат [15, разд. 2, п. 4] нашел аналогичные формулы и для случая, когда некоторые фиксированные узлы лежат внутри промежутка интегрирования.

Нам понадобятся квадратурные формулы, выражающие среднее значение косинус-полинома на периоде через линейную комбинацию его значений в точках из отрезка  $[0, \pi]$ . Точнее, нам нужны квадратурные формулы с заданным числом узлов (некоторые из них являются фиксированными), причем эти квадратурные формулы должны быть наивысшей степени точности, т. е. быть справедливыми для косинус-полиномов максимально возможного порядка. Для наших целей достаточно будет четырех типов указанных квадратурных формул, а именно: формулы с одним фиксированным узлом  $h$ ; двух формул с двумя фиксированными узлами:  $0, h$  и соответственно  $h, \pi$ ; а также одной формулы с тремя фиксированными узлами  $0, h, \pi$ . Для построения этих формул будем использовать частный случай известного утверждения, которое в [15, разд. 2, теорема 1] (см. также [7, гл. 9]) приведено в терминах алгебраических многочленов, однако с помощью косинус-замены легко переформулируется в терминах косинус-полиномов.

**Теорема 2.** Пусть точки  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$  принадлежат отрезку  $[0, \pi]$ , а точки  $x_1 < x_2 < \dots < x_\nu$  принадлежат множеству  $[0, \pi] \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ . Тогда для того, чтобы нашлись числа  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_\nu$  такие, что для любого косинус-полинома  $\tau$  порядка не выше  $2\nu + m - 1$  выполнялась формула

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \tau(x) dx = \sum_{\ell=1}^m A_\ell \tau(\alpha_\ell) + \sum_{k=1}^\nu B_k \tau(x_k) \quad (5.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы полином

$$(\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2) \cdots (\cos x - \cos x_\nu) \quad (5.2)$$

был ортогонален любому косинус-полиному порядка не выше  $\nu - 1$  с весом

$$(\cos x - \cos \alpha_1)(\cos x - \cos \alpha_2) \cdots (\cos x - \cos \alpha_m).$$

Отметим, что если для любого косинус-полинома  $\tau \in \mathcal{T}_{2\nu+m-1}$  справедлива формула (5.1), то для произвольного тригонометрического полинома  $f \in \mathcal{T}_{2\nu+m-1}$  имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \sum_{\ell=1}^m A_{\ell} \frac{f(\alpha_{\ell}) + f(-\alpha_{\ell})}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} B_k \frac{f(x_k) + f(-x_k)}{2}. \quad (5.3)$$

Напомним некоторые известные факты и термины, связанные с квадратурной формулой (5.1). Точки  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и  $x_1, \dots, x_{\nu}$  называют соответственно *фиксированными* и *свободными* узлами квадратурной формулы (5.1), а числа  $A_{\ell}, B_k$  — ее *коэффициентами*.

Таким образом, числа  $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_{\nu}, x_1, \dots, x_{\nu}$  являются параметрами, которыми можно распоряжаться для того, чтобы сделать максимальной размерность пространства косинус-полиномов, на котором формула (5.1) была бы точна. В отличие от указанных параметров, числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  являются фиксированными и управлять ими мы не имеем права.

Поскольку количество свободных параметров равно  $2\nu + m$ , то естественно предположить, что их можно выбрать так, чтобы квадратурная формула (5.1) была точна для произвольного косинус-полинома порядка  $2\nu + m - 1$  (ведь у такого полинома количество коэффициентов равняется  $2\nu + m$ ). Указанный максимальный порядок полинома называют *наивысшей степенью точности* квадратурной формулы (5.1).

Обратим внимание на то, что утверждение теоремы 2 можно переформулировать в следующей равносильной форме: *косинус-полином*

$$\psi(x) = (\cos x - \cos x_1) \cdots (\cos x - \cos x_{\nu}) (\cos x - \cos \alpha_1) \cdots (\cos x - \cos \alpha_m) \quad (5.4)$$

порядка  $\nu + m$  должен быть ортогональным любому косинус-полиному порядка  $\leq \nu - 1$  с единичным весом.

Это означает, что в разложении полинома  $\psi$  по косинусам коэффициенты с номерами  $0, \dots, \nu - 1$  должны равняться нулю, т. е. этот полином представляет собой линейную комбинацию подряд идущих гармоник с номерами  $\nu, \dots, \nu + m$ . Иными словами, для полинома  $\psi$  одновременно с представлением (5.4) должно иметь место и такое представление:

$$\psi(x) = a_{\nu} \cos \nu x + a_{\nu+1} \cos(\nu + 1)x + \dots + a_{\nu+m} \cos(\nu + m)x. \quad (5.5)$$

Заметим, что в силу (5.4) полином  $\psi$  обращается в нуль во всех узлах квадратурной формулы, в том числе и в фиксированных точках  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ . Отсюда с помощью (5.5) получаем еще одно важное представление для  $\psi$  в виде определителя

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} c_{\nu}(\alpha_1) & c_{\nu+1}(\alpha_1) & \dots & c_{\nu+m}(\alpha_1) \\ c_{\nu}(\alpha_2) & c_{\nu+1}(\alpha_2) & \dots & c_{\nu+m}(\alpha_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{\nu}(\alpha_m) & c_{\nu+1}(\alpha_m) & \dots & c_{\nu+m}(\alpha_m) \\ c_{\nu}(x) & c_{\nu+1}(x) & \dots & c_{\nu+m}(x) \end{vmatrix},$$

здесь

$$c_j(x) := \cos jx.$$

Укажем на связь изучаемых квадратурных формул с ядрами Кристоффеля — Дарбу (см. [12]). Для этого рассмотрим частный случай квадратурной формулы (5.1) с одним фиксированным узлом  $\alpha$  и  $\nu$  свободными узлами  $x_1, \dots, x_{\nu}$ . В этом случае наивысшая степень точности равняется  $2\nu + 1 - 1 = 2\nu$ , а полином  $\psi$  приобретает вид

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} c_{\nu}(\alpha) & c_{\nu+1}(\alpha) \\ c_{\nu}(x) & c_{\nu+1}(x) \end{vmatrix} = \cos \nu \alpha \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)\alpha \cos \nu x.$$

Ясно, что искомые свободные узлы  $x_1, \dots, x_{\nu}$  совпадают с нулями дроби

$$\frac{\psi(x)}{\cos x - \cos \alpha} = \frac{\cos \nu \alpha \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)\alpha \cos \nu x}{\cos x - \cos \alpha}.$$

В свою очередь, эта дробь является ядром Кристоффеля — Дарбу

$$K_\nu(\alpha, x) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \cos j\alpha \cos jx = \frac{\cos \nu\alpha \cos(\nu+1)x - \cos(\nu+1)\alpha \cos \nu x}{\cos x - \cos y},$$

построенным по системе  $\{1, \sqrt{2} \cos x, \sqrt{2} \cos 2x, \dots\}$ , ортонормированной относительно скалярного произведения  $(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)g(x) dx$ .

Для квадратурной формулы наивысшей степени точности с несколькими фиксированными узлами имеет место аналогичная связь с ядром Кристоффеля — Дарбу, построенным по системе ортонормированных косинус-полиномов относительно взвешенного скалярного произведения  $(f, g)_v := \int_0^\pi f(x)g(x)v(x) dx$ , где функция  $v$  выражается через фиксированные узлы<sup>5</sup>.

## 6. Доказательство утверждений (c)–(e) теоремы 1

Доказательство теоремы 1 основано на квадратурных формулах наивысшей степени точности. Для интегрального приближения снизу функции  $\chi_h$  полиномами четного порядка  $n = 2\nu$  используются квадратурные формулы с одним фиксированным узлом  $h$  и тремя фиксированными узлами  $0, h, \pi$ . Эти формулы позволяют получить теорему 1 в случае приближения полиномами четного порядка соответственно для  $h$ , принадлежащих четным  $I_{2k}$  и нечетным  $I_{2k+1}$  интервалам (см. (1.6)). Случай четных интервалов рассмотрен в лемме 3, а случай нечетных — в лемме 4. Аналогично, для приближения  $\chi_h$  снизу полиномами нечетного порядка применяются леммы 5, 6 с двумя фиксированными узлами  $0, h$  и  $h, \pi$  соответственно. В леммах 3–6 используется понятие типа  $T(s, \ell, m, r)$  для косинус-полинома, введенного в разд. 2.

**Лемма 3.** Пусть  $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in I_{0,n}$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

(a) полином

$$\cos \frac{nx_0}{2} \cos \frac{(n+2)x}{2} - \cos \frac{(n+2)x_0}{2} \cos \frac{nx}{2} = \cos \nu x_0 \cos(\nu+1)x - \cos(\nu+1)x_0 \cos \nu x$$

имеет в открытом интервале  $(0, \pi)$  ровно  $1 + n/2$  нулей  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n/2}$ ;

(b) нуль  $x_k = x_k(x_0)$  с номером  $k = 0, 1, \dots, n/2$  возрастая, пробегает интервал  $I_{2k,n}$ , когда  $x_0$  пробегает интервал  $I_{0,n}$ ;

(c) для любого  $\tau \in \mathcal{T}_n$  справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \sum_{k=0}^{n/2} \gamma_n(x_k) \frac{\tau(x_k) + \tau(-x_k)}{2}, \quad (6.1)$$

где функция  $\gamma_n(x)$  определена формулой (1.5), причем  $\gamma_n(x) > 0$  при любом  $x \in (0, \pi)$ ;

(d) для произвольного  $k = 1, \dots, n/2$  и любого  $h \in I_{2k,n}$  полином

$$\cos \frac{nh}{2} \cos \frac{(n+2)x}{2} - \cos \frac{(n+2)h}{2} \cos \frac{nx}{2}$$

имеет в открытом интервале  $(0, \pi)$  ровно  $1 + n/2$  нулей  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n/2}$ , причем  $x_k = h$  и найдется косинус-полином  $\tau_h \in \mathcal{T}_n$  типа  $T(0, k, m, 0)$ ,  $k + m = n/2$ , удовлетворяющий следующим условиям:  $\tau_h(x) \leq \chi_h(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h(x_s) = \chi_h(x_s)$  при  $s = 0, 1, \dots, n/2$ .

<sup>5</sup>Если некоторые фиксированные узлы расположены внутри интервала  $(0, \pi)$ , то функция  $v$  является знакопеременной.

**Доказательство.** Как упоминалось выше, способ построения квадратурных формул наивысшей степени точности с заданным числом фиксированных узлов и с заданным числом свободных узлов известен (см. [20, разд. 3; 15, разд. 2, п. 4]). Он основан на ядрах Кристоффеля — Дарбу (см. [12]).

Для полноты изложения обоснуем квадратурную формулу (6.1) наивысшей степени точности с одним фиксированным узлом  $x_0$  и докажем утверждения леммы 3, характеризующие свойства коэффициентов и узлов этой квадратурной формулы.

В рассматриваемом случае ядро Кристоффеля — Дарбу

$$K_\nu(y, x) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \cos jy \cos jx = \frac{\cos \nu y \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)y \cos \nu x}{\cos x - \cos y} \quad (6.2)$$

строится по системе косинусов  $\{1, \sqrt{2} \cos x, \sqrt{2} \cos 2x, \dots\}$ , ортонормированной относительно скалярного произведения

$$(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

С помощью (6.2) и правила Лопиталья получаем известные соотношения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\nu(y, x) dx = 1; \quad (6.3)$$

$$0 < K_\nu(y, y) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \cos^2 jy = \frac{(\nu + 1) \cos \nu y \sin(\nu + 1)y - \nu \cos(\nu + 1)y \sin \nu y}{\sin y}, \quad (6.4)$$

для  $y = 0, \pi$  значение дроби в последней части (6.4) считаем равным  $2\nu + 1$ .

Искомый косинус-полином (5.2) представляет собой ядро Кристоффеля — Дарбу (6.2) с фиксированным значением первой переменной  $y = x_0$

$$K_\nu(x_0, x) = \frac{\cos \nu x_0 \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)x_0 \cos \nu x}{\cos x - \cos x_0} = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} \cos jx_0 \cos jx. \quad (6.5)$$

Соответствующая рассматриваемому случаю квадратурная формула (5.3) на  $\mathcal{T}_{2\nu}$  приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \gamma_0 \frac{\tau(x_0) + \tau(-x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k \frac{\tau(x_k) + \tau(-x_k)}{2}, \quad (6.6)$$

где  $x_1, \dots, x_\nu$  — попарно различные нули полинома (6.5), расположенные на  $[0, \pi]$ .

В работе [2, разд. 4] показано, что условие  $\left| \frac{\cos(\nu + 1)x_0}{\cos \nu x_0} \right| \leq 1$  является необходимым и достаточным для существования указанных нулей. Кроме того, для любого  $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2\nu + 1}\right]$  полином (6.5) имеет на  $[0, \pi]$  ровно  $\nu$  нулей  $x_1 < x_2 < \dots < x_\nu$ , причем нуль  $x_k = x_k(x_0)$  с номером  $k = 1, \dots, \nu$ , монотонно возрастая, пробегает отрезок  $\left[\frac{2k\pi}{2\nu + 1}, \frac{(2k + 1)\pi}{2\nu + 1}\right]$ , когда  $x_0$  меняется от 0 до  $\frac{\pi}{2\nu + 1}$ .

Перейдем к вычислению коэффициентов квадратурной формулы (6.6). Положим

$$w(x) := \cos \nu x_0 \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)x_0 \cos \nu x,$$

$$w_k(x) := \frac{w(x)}{\cos x - \cos x_k} = \frac{\cos \nu x_0 \cos(\nu + 1)x - \cos(\nu + 1)x_0 \cos \nu x}{\cos x - \cos x_k}, \quad k = 0, \dots, \nu.$$

Пусть  $x_0 \in [0, \pi]$  и  $\cos \nu x_0 \neq 0$ . Тогда согласно теореме 1 из [2, разд. 2] при всех  $k = 0, \dots, \nu$  выполняется равенство

$$\frac{K_\nu(x_k, x)}{K_\nu(x_k, x_k)} = \frac{w_k(x)}{w_k(x_k)};$$

и, следовательно,

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_\nu(x_k, x)}{K_\nu(x_k, x_k)} dx.$$

Отсюда с помощью (6.3) и (6.4) получаем

$$\begin{aligned} 0 < \gamma_k &= \frac{1}{K_\nu(x_k, x_k)} = \frac{\sin x_k}{(\nu + 1) \cos \nu x_k \sin(\nu + 1)x_k - \nu \cos(\nu + 1)x_k \sin \nu x_k} \\ &= \frac{\sin x_k}{\left[ \frac{n}{2} \right] \sin x_k + \sin \left( \left[ \frac{n+2}{2} \right] x_k \right) \cos \left( \left[ \frac{n}{2} \right] x_k \right)}, \quad k = 0, \dots, \nu. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждения (a)–(c) доказаны.

Утверждение (d) следует из утверждения (b) и леммы 1.  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $n = 2\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in I_{1,n}$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

(a) полином

$$\sin \frac{nx_0}{2} \sin \frac{(n+2)x}{2} - \sin \frac{(n+2)x_0}{2} \sin \frac{nx}{2}$$

имеет на полуинтервале  $(0, \pi]$  ровно  $1 + n/2$  нулей:  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n/2} = \pi$ ;

(b) нуль  $x_k = x_k(x_0)$  с номером  $k = 0, \dots, n/2 - 1$ , возрастая, пробегает интервал  $I_{2k+1,n}$ , когда  $x_0$  пробегает  $I_{1,n}$ ;

(c) для любого  $\tau \in \mathcal{T}_n$  справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \Lambda_n(x_0)\tau(0) + \sum_{k=0}^{n/2} \lambda_n(x_k) \frac{\tau(x_k) + \tau(-x_k)}{2}, \quad (6.7)$$

где функция  $\Lambda_n(x)$  определена формулой (1.3), функция  $\lambda_n(x)$  определена формулой (1.4) при  $x \in (0, \pi)$  и  $\lambda_n(\pi) = \Lambda_n(\pi - x_0)$ , причем все коэффициенты  $\Lambda_n(x_0), \lambda_n(x_0), \lambda_n(x_1), \dots, \lambda_n(x_{n/2})$  неотрицательные;

(d) для произвольного  $k = 0, \dots, n/2 - 1$  и любого  $h \in I_{2k+1,n}$  полином

$$\sin \frac{nh}{2} \sin \frac{(n+2)x}{2} - \sin \frac{(n+2)h}{2} \sin \frac{nx}{2}$$

имеет на  $(0, \pi]$  ровно  $1 + n/2$  нулей  $x_0 < x_1 < \dots < x_{n/2} = \pi$ , причем  $x_k = h$  и найдется косинус-полином  $\tau_h \in \mathcal{T}_n$  типа  $T(1, k, m, 1)$ ,  $k + m = n/2 - 1$ , удовлетворяющий следующим условиям:  $\tau_h(x) \leq \chi_h(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h(0) = \chi_h(0)$ ,  $\tau_h(x_s) = \chi_h(x_s)$  при  $s = 0, \dots, n/2$ .

Приведем квадратурную формулу с фиксированными узлами  $0, x_0$  (лемма 5) и квадратурную формулу с фиксированными узлами  $x_0, \pi$  (лемма 6), которые точны на множестве тригонометрических полиномов нечетного порядка  $n = 2\nu - 1$ . Напомним, что  $[\xi]$  означает максимальное целое число, не превосходящее числа  $\xi$ .

**Лемма 5.** Пусть  $n = 2\nu - 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $x_0 \in I_{1,n}$ . Тогда выполняются утверждения:

(a) функция

$$\sin \frac{nx_0}{2} \sin \frac{n+2}{2}x - \sin \frac{n+2}{2}x_0 \sin \frac{nx}{2}$$

имеет в интервале  $(0, \pi)$  ровно  $1 + \lfloor n/2 \rfloor$  нулей:  $x_0 < x_1 < \dots < x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ ;

(b) нуль  $x_k = x_k(x_0)$  с номером  $k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ , возрастая, пробегает интервал  $I_{2k+1, n}$ , когда  $x_0$  пробегает  $I_{1, n}$ ;

(c) для любого  $\tau \in \mathcal{T}_n$  справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \Lambda_n(x_0)\tau(0) + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_n(x_k) \frac{\tau(x_k) + \tau(-x_k)}{2}, \quad (6.8)$$

где функции  $\Lambda_n(x)$ ,  $\lambda_n(x)$  определены формулами (1.3), (1.4) соответственно, причем все коэффициенты  $\Lambda_n(x_0)$ ,  $\lambda_n(x_0), \dots, \lambda_n(x_{\lfloor n/2 \rfloor})$  неотрицательные;

(d) для произвольного  $k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$  и любого  $h \in I_{2k+1, n}$  функция

$$\sin \frac{nh}{2} \sin \frac{n+2}{2}x - \sin \frac{n+2}{2}h \sin \frac{nx}{2}$$

имеет в интервале  $(0, \pi)$  ровно  $\lfloor n/2 \rfloor$  нулей  $x_0 < x_1 < \dots < x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ , причем  $x_k = h$  и найдется косинус-полином  $\tau_h \in \mathcal{T}_n$  типа  $T(1, k, m, 0)$ ,  $k + m = \lfloor n/2 \rfloor = \nu - 1$ , удовлетворяющий условиям:  $\tau_h(x) \leq \chi_h(x)$  для  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h(0) = \chi_h(0)$ ,  $\tau_h(x_s) = \chi_h(x_s)$  при  $s = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ .

**Лемма 6.** Пусть  $n = 2\nu - 1$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $\nu \geq 2$ ,  $x_0 \in I_{0, n}$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

(a) функция

$$\cos \frac{nx_0}{2} \cos \frac{n+2}{2}x - \cos \frac{n+2}{2}x_0 \cos \frac{nx}{2}$$

имеет в интервале  $(0, \pi)$  ровно  $1 + \lfloor n/2 \rfloor$  нулей:  $x_0 < x_1 < \dots < x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ ;

(b) нуль  $x_k = x_k(x_0)$  с номером  $k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ , монотонно возрастая, пробегает интервал  $I_{2k, n}$ , когда  $x_0$  пробегает интервал  $I_{0, n}$ ;

(c) для любого  $\tau \in \mathcal{T}_n$  справедлива квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) dx = \Lambda_n(\pi - x_0)\tau(\pi) + \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \gamma_n(x_k) \frac{\tau(x_k) + \tau(-x_k)}{2}, \quad (6.9)$$

где функции  $\Lambda_n(x)$ ,  $\gamma_n(x)$  определены формулами (1.3), (1.5) соответственно, причем все коэффициенты  $\Lambda_n(\pi - x_0)$ ,  $\gamma_n(x_0), \dots, \gamma_n(x_{\lfloor n/2 \rfloor})$  неотрицательные;

(d) для произвольного  $k = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$  и любого  $h \in I_{2k, n}$  функция

$$\cos \frac{nh}{2} \cos \frac{n+2}{2}x - \cos \frac{n+2}{2}h \cos \frac{nx}{2}$$

имеет в интервале  $(0, \pi)$  ровно  $1 + \lfloor n/2 \rfloor$  нулей  $x_0 < x_1 < \dots < x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ , причем  $x_k = h$  и найдется косинус-полином  $\tau_h \in \mathcal{T}_n$  типа  $T(0, k, m, 1)$ ,  $k + m = \lfloor n/2 \rfloor = \nu - 1$ , удовлетворяющий условиям:  $\tau_h(x) \leq \chi_h(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h(\pi) = \chi_h(\pi)$ ,  $\tau_h(x_s) = \chi_h(x_s)$  при  $s = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ .

Леммы 4, 5, 6 доказываются по схеме доказательства леммы 3. Отметим также, что утверждения (a), (c) лемм 4, 5 содержатся в более общем утверждении [1, лемма 1]; кроме того, доказательство леммы 6 можно получить с помощью леммы 5 и замены  $x$  на  $\pi - x$ .

На рис. 2 ниже приведены графики на отрезке  $[0, \pi]$  функции  $\chi_h$  и косинус-полинома  $\tau_h \in \mathcal{T}_{10}$  ее наилучшего интегрального приближения снизу при  $h = 9\pi/22$ . Полином  $\tau_h$  построен с помощью леммы 3 и конструкции, описанной в конце разд. 2.

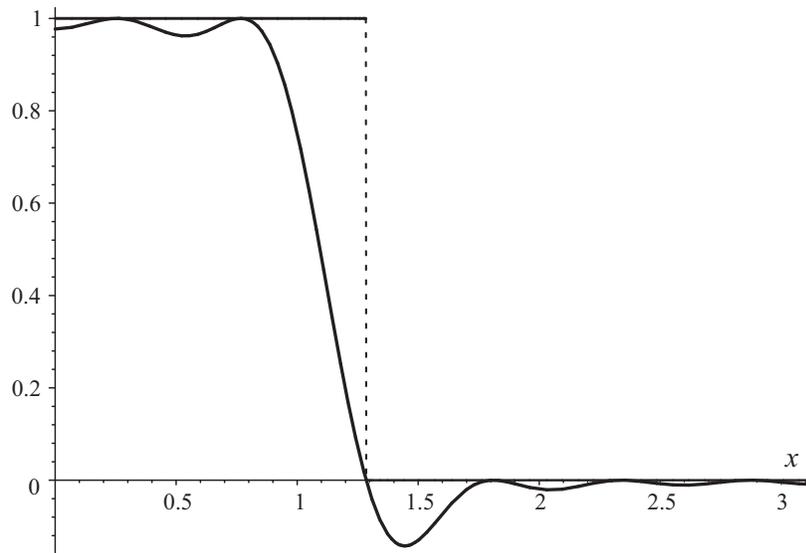


Рис. 2. Графики  $\chi_h$  и  $\tau_h \in \mathcal{T}_{10}$  на  $[0, \pi]$  при  $h = 9\pi/22$ .

Доказательство утверждений (c)–(e) теоремы 1 вытекает из лемм 2–6. Подробнее, для  $h \in I_{2j+1} = I_{2j+1,n}$  (см. (1.6)) оценка снизу величины  $\mathcal{E}_n^-(h)$  получается на основе леммы 2 с применением квадратурных формул (6.7) и (6.8) при четном и нечетном  $n$  соответственно. Оценку сверху, совпадающую с указанной оценкой снизу, дают косинус-полиномы  $\tau_h \in \mathcal{T}_n$ , приведенные в утверждениях (d) лемм 4, 5; при этом для вычисления величины уклонения полинома  $\tau_h$  от приближаемой снизу функции  $\chi_h$  в интегральной метрике надо воспользоваться квадратурными формулами (6.7) и (6.8) при четном и нечетном  $n$  соответственно. Аналогично в случае  $h \in I_{2j} = I_{2j,n}$  оценка снизу для  $\mathcal{E}_n^-(h)$  следует из леммы 2 и квадратурных формул (6.1), (6.9); оценка сверху, совпадающая с указанной оценкой снизу, получается с помощью утверждений (d) лемм 3, 6.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г.** Об одной экстремальной задаче для полиномов с фиксированным средним значением // Приближение функций полиномами и сплайнами. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 15–22.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Полиномиальные интерполяционно-ортогональные базисы // Тр. Междунар. лет. мат. шк. С.Б. Стечкина по теории функций. Тула: Из-во ТулГУ, 2007. С. 22–39.
3. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики. 2008. Т. 14, № 3. С. 19–37.
4. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений: Учеб. пособ.: в 2 т. 2-е изд., стереотип. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1. 464 с. Т. 2. 639 с.
5. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. / Пер. с англ. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с. Т. 2. 538 с.
6. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.
7. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматлит, 1959. 327 с.
8. **Марков А.А.** Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.
9. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 ч. / Пер. с нем. 3-е изд. М.: Наука, 1978. Ч. 1: Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций. 391 с. Ч. 2: Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел. 432 с.
10. **Постников А.Г.** Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.

11. **Постников А.Г.** Избранные труды / Под ред. В.Н. Чубарикова. М.: Физматлит, 2005. 512 с.
12. **Cere Г.** Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962. 500 с.
13. **Montgomery H.L.** Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. CBMS Regional Conference Ser. Math. 84. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by Amer. Math. Soc. Providence, 1994. 220 p.
14. **Peherstorfer F.** Positive quadrature formulas. III. Asymptotics of weights // *Math. Comp.* 2008. Vol. 77, no. 264. P. 2241–2259.
15. **Shohat J.** On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1937. Vol. 42, no. 3. P. 461–496.
16. **Stekloff W.** Sur les problèmes de représentation des fonctions à l'aide de polynômes, du calcul approché des intégrales définies, du développement des fonctions en séries infinies suivant les polynômes et de l'interpolation, considérés au point de vue des idées de Tchébycheff // *Proc. of the International Mathematical Congress held in Toronto, August 11-16, 1924.* Vol. 1. Toronto: The University of Toronto Press, 1928. P. 631–640.
17. **Stieltjes T.J.** Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques // *Annales Sc. de l'École Norm. Super.* 1884. Vol. 1, no. 3. P. 409–426.
18. **Stieltjes T.J.** Œuvres complètes / Collected papers. Vol. 1, 2. Reprint of the 1914–1918 edition. Edited and with a preface and a biographical note by Gerrit van Dijk. With additional biographical and historical material by Walter Van Assche, Frits Beukers, Wilhelmus A. J. Luxemburg and Herman J. J. te Riele. Berlin: Springer-Verlag, 1993. Vol. 1: 566 p.; Vol. 2: 750 p.
19. **Vaaler J.D.** Some extremal functions in Fourier analysis // *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series).* 1985. Vol. 12, no. 2. P. 183–216.
20. **Winston C.** On mechanical quadratures formulae involving the classical orthogonal polynomials // *The Annals of Mathematics. Second Series.* 1934. Vol. 35, no. 3. P. 658–677.

Поступила 26.08.2011

Бабенко Александр Григорьевич  
д-р физ.-мат. наук  
ведущий науч. сотрудник  
Институт математики и механики УрО РАН  
Уральский федеральный университет  
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Kryakin, Yuriy  
dr hab.  
Mathematical Institute  
University of Wrocław  
e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl

Юдин Владимир Александрович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
Московский энергетический институт  
(технический университет)  
e-mail: vlayudin@mtu-net.ru

УДК 517.988

О СХЕМЕ ПОЛНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ  
В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ<sup>1</sup>

А. Б. Бакушинский, М. М. Кокурин, М. Ю. Кокурин

Приводится обоснование схемы полной дискретизации некорректной задачи Коши для абстрактных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с секториальными операторами в банаховом пространстве. Предлагаемая схема сочетает полудискретизацию уравнений по времени с конечномерной аппроксимацией пространств и операторов. Установлены регуляризационные свойства рассматриваемой схемы. При различных априорных предположениях относительно решения получены оценки погрешности в условиях приближенных начальных данных.

Ключевые слова: задача Коши, некорректная задача, дискретизация, регуляризация, оценка погрешности.

A. B. Bakushinskii, M. M. Kokurin, M. Yu. Kokurin. On a complete discretization scheme for an ill-posed Cauchy problem in a Banach space.

A complete discretization scheme for an ill-posed Cauchy problem for abstract first-order linear differential equations with sectorial operators in a Banach space is validated. The scheme combines the time semidiscretization of the equations and a finite-dimensional approximation of the spaces and operators. Regularization properties of the scheme are established. Error estimates are obtained in the case of approximate initial data under various a priori assumptions concerning the solution.

Keywords: Cauchy problem, ill-posed problem, discretization, regularization, error estimate.

## 1. Постановка задачи

Объектом исследования в работе является задача Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \quad x(0) = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

где  $A: D(A) \subset X \rightarrow X$  — неограниченный замкнутый оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве  $X$ ;  $\overline{D(A)} = X$ ,  $f \in D(A)$ . Нас будет интересовать решение  $x = x(t)$  задачи (1.1), понимаемое в классическом смысле. Функция  $x: [0, T] \rightarrow X$ , где  $x(0) = f$ ,  $x(t) \in D(A)$ ,  $t \in [0, T]$ , называется классическим решением (1.1), если она непрерывно дифференцируема по норме  $X$  на  $[0, T]$  и при  $t \in [0, T]$  удовлетворяет дифференциальному уравнению из (1.1). Обозначим через  $\sigma(A)$  спектр оператора  $A$  и положим

$$K(\varphi) = \{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg \zeta| < \varphi\}, \quad \varphi \in (0, \pi).$$

Через  $R(\zeta, A) = (\zeta E - A)^{-1}$ ,  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$  далее обозначается резольвента оператора  $A$ ;  $E$  — единичный оператор пространства  $X$ . Всюду ниже предполагается, что оператор  $A$  удовлетворяет следующему условию секториальности.

У с л о в и е 1. Справедливо включение  $\sigma(A) \subset K(\varphi_0)$ ,  $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ , и имеет место оценка

$$\|R(\zeta, A)\|_{L(X)} \leq \frac{C_0}{1 + |\zeta|} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus K(\varphi_0),$$

где постоянная  $C_0$  не зависит от  $\zeta$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00273а).

Здесь и далее  $L(X)$  — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих в пространстве  $X$ ;  $C_0, C_1, \dots$  — положительные постоянные.

Оценка из условия 1 характерна для операторов вида  $A = -\mathcal{A}$ , где  $\mathcal{A}$  — дифференциальный оператор эллиптического типа.

Задача (1.1) в общем случае поставлена некорректно. Это означает, что решение (1.1) существует не для любого  $f \in D(A)$  и, кроме того, при наличии решения отсутствует непрерывная зависимость определяемого (1.1) элемента  $x(t) \in X, t \in (0, T]$ , от начального элемента  $f \in D(A)$ . В то же время для любого  $f \in D(A)$  задача Коши (1.1) имеет не более одного решения.

В [1–3] с использованием идей многошаговых методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений была развита техника полудискретизации по времени линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, приводящая к широкому классу многослойных конечно-разностных схем регуляризации задачи (1.1). В то же время практическая реализация этих схем предполагает аппроксимацию пространства  $X$  и оператора  $A$  соответствующими конечномерными аналогами. Возможный подход к формализации таких построений был развит в [2–5], где в качестве аппроксимаций для  $A$  использовались операторы, действующие в исходном пространстве  $X$ . Однако с точки зрения приложений более актуальны традиционные конечно-разностные и конечноэлементные процедуры дискретизации, связанные со специально конструируемыми конечномерными аппроксимирующими пространствами и операторами в них. В настоящей работе предлагается общая схема, позволяющая совмещать дискретизацию задачи Коши по времени с такого рода конечномерными аппроксимациями пространств и операторов. В результате достигается полная дискретизация задачи (1.1), необходимая при численной реализации регуляризующих процедур.

Следуя известной общей схеме построения конечно-разностных методов (см., например, [6, гл. 7]), определим семейство конечномерных банаховых пространств  $X_h, h \in (0, h_0]$ , выступающих в качестве дискретных аппроксимаций пространства  $X$ . Пространство  $X_h$  рассматривается вместе с линейным ограниченным оператором  $p_h: X \rightarrow X_h$ , ставящим в соответствие элементу из  $X$  аппроксимирующий его элемент из  $X_h$ . Считаем, что нормы связывающих операторов  $p_h$  ограничены в совокупности равномерно по  $h$ , так что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 2. Для всех  $x \in X$  справедлива оценка

$$\|p_h x\|_{X_h} \leq C_1 \|x\|_X,$$

где константа  $C_1$  не зависит от  $x, h$ .

Введем семейство операторов  $A_h \in L(X_h), h \in (0, h_0]$ , служащих приближениями оператора  $A$ . Всюду далее считаем выполненным следующее условие, характеризующее необходимые аппроксимационные свойства операторов  $A_h$ .

У с л о в и е 3. Для некоторого нормированного пространства  $Y \subset X$  величина

$$\|R(\lambda, A)f\|_Y$$

равномерно ограничена при  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus K(\varphi_0)$ , и с подходящим фиксированным  $s > 0$  имеет место оценка

$$\|(A_h p_h - p_h A)y\|_{X_h} \leq C_2 h^s \|y\|_Y \quad \forall y \in Y,$$

где постоянная  $C_2$  не зависит от  $y, h$ .

Требование ограниченности  $\|R(\lambda, A)f\|_Y$  фактически сводится к условию повышенной гладкости элемента  $f$  по сравнению с гладкостью, предписываемой включением  $f \in D(A)$ . Оценка из условия 3 определяет порядок аппроксимации семейством  $A_h, h \in (0, h_0]$ , оператора  $A$  на элементах  $y \in Y$ . Вложение  $Y \subset X$  отражает тот факт, что такого рода оценки в приложениях обычно устанавливаются для функций  $y$  достаточно высокой гладкости.

Наряду с исходной задачей (1.1) рассмотрим аппроксимирующие ее конечномерные задачи

$$\frac{dx^h(t)}{dt} = A_h x^h(t), \quad x^h(0) = p_h f, \quad h \in (0, h_0]. \quad (1.2)$$

Поскольку  $A_h \in L(X_h)$ , задача (1.2) корректно разрешима при  $t \in [0, T]$  с произвольным  $T > 0$ . Считаем, что операторы  $A_h$  равномерно по  $h$  секториальны в том смысле, что выполняется

**У с л о в и е 4.** Для всех  $h \in (0, h_0]$  справедливо включение  $\sigma(A_h) \subset K(\varphi_0)$  и имеет место оценка

$$\|R(\zeta, A_h)\|_{L(X_h)} \leq \frac{C_3}{1 + |\zeta|} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus K(\varphi_0),$$

где постоянная  $C_3$  не зависит от  $\zeta, h$ .

Опишем теперь дискретизацию исходной задачи (1.1) и аппроксимирующих ее задач (1.2) по времени. Предполагая, что решение  $x(t)$  задачи (1.1) существует при  $t \in [0, T]$ , будем строить приближения  $x_n$  и  $x_n^h$  к значениям функций  $x(t), x^h(t)$  в точке  $t = n\Delta t$  при помощи следующих разностных схем:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j x_{n+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j A x_{n+j}, \quad 0 \leq n \leq N - k, \quad x_0 = f, \quad (1.3)$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j x_{n+j}^h = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j A_h x_{n+j}^h, \quad 0 \leq n \leq N - k, \quad x_0^h = p_h f. \quad (1.4)$$

Здесь  $\Delta t = T/N$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;  $\alpha_j, \beta_j$ ,  $0 \leq j \leq k$ , — вещественные параметры, выбор которых определяет конкретную разностную схему. Кроме них необходимо задать еще начальные элементы  $x_1, \dots, x_{k-1} \in D(A)$  и  $x_1^h, \dots, x_{k-1}^h \in X_h$ . В этой работе, следуя [1], ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда  $x_1 = \dots = x_{k-1} = f$  и аналогично  $x_1^h = \dots = x_{k-1}^h = p_h f$ .

Отметим, что схема (1.3) корректно определяет приближения  $x_{n+k}$  для всех  $0 \leq n \leq N - k$  по формуле

$$x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (\beta_j \Delta t A - \alpha_j E) (\alpha_k E - \beta_k \Delta t A)^{-1} x_{n+j}. \quad (1.5)$$

Существенно, что правая часть последнего соотношения определена при любом начальном значении  $f$  в (1.1), даже не принадлежащем  $D(A)$ . Ниже, говоря о реализации этой схемы для таких начальных значений, будем иметь в виду продолжение (1.5). Аналогичная (1.5) формула с заменой  $A$  на  $A_h$ , очевидно, справедлива для  $x_{n+k}^h$ .

Близкий подход к полной дискретизации некорректных задач Коши развит в [7, гл. 6], где рассматривались лишь двухслойные операторно-разностные схемы в случае гильбертова пространства  $X$  и аппроксимирующих операторов  $A_h = A_h^* \geq 0$ . Альтернативный способ регуляризации некорректной задачи (1.1) связан с конечномерной аппроксимацией семейства вспомогательных задач, возникающих в методах типа квазиобращения (см., например, [8; 9, гл. 7]). Однако теоретическое исследование получаемых процедур осложняется введением дополнительного параметра квазиобращения, который нуждается в надлежащем согласовании с прочими параметрами. В рамках предлагаемой в работе схемы роль параметров регуляризации выполняют шаг дискретизации по времени  $\Delta t$  и параметр  $h$ . Если  $A$  является дифференциальным оператором с частными производными, то  $h$  обычно имеет смысл шага дискретизации при сеточной или конечноэлементной аппроксимации оператора  $A$ .

Структура работы следующая. В разд. 2 приводятся необходимые нам вспомогательные предложения. В разд. 3 получены оценки скорости сходимости схемы (1.4) в случае точных данных, разд. 4 посвящен доказательству оценок погрешности, возникающей при возмущении начального условия. В разд. 5 приводится пример задачи, к которой применима развиваемая теория.

## 2. Вспомогательные результаты

Изучим подробнее свойства решений разностных схем (1.3), (1.4). Относительно параметров этих схем будем предполагать выполненным следующее условие.

**У с л о в и е 5.** Для коэффициентов  $\alpha_k, \beta_k$  в (1.3), (1.4) имеют место неравенства

$$\alpha_k > 0, \quad \beta_k < 0.$$

При выполнении условия 5 вспомогательное скалярное разностное уравнение

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j v_{n+j} = \Delta t \lambda \sum_{j=0}^k \beta_j v_{n+j}, \quad 0 \leq n \leq N - k; \quad v_0 = v_1 = \dots = v_{k-1} = 1 \quad (2.1)$$

имеет решение  $v_n = v_n(\lambda)$ ,  $0 \leq n \leq N$ , если спектральный параметр  $\lambda$  находится вне некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , содержащей точку  $\alpha_k \beta_k^{-1} (\Delta t)^{-1}$ , при этом  $v_j(\lambda) \equiv 1$ ,  $0 \leq j \leq k - 1$ . Разностное уравнение (2.1) аппроксимирует решение  $v(t) = \exp(\lambda t)$  задачи Коши с параметром  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$v' = \lambda v, \quad v(0) = 1. \quad (2.2)$$

Нетрудно установить, что функции  $v_n(\lambda)$ ,  $k \leq n \leq N$ , аналитичны по  $\lambda$  вне  $\Omega$ , в том числе и в точке  $\lambda = \infty$ . Таким образом, определена величина  $v_n(\infty) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} v_n(\zeta)$ .

Введем обозначение  $S(r) = \{\zeta \in \mathbb{C}: |\zeta| \leq r\}$  и зафиксируем постоянную  $r_0$  так, что  $S(r_0) \cap \sigma(A) = \emptyset$ . Обозначим через  $\Gamma(\varphi_0, r_0)$  границу множества  $K(\varphi_0, r_0) = K(\varphi_0) \setminus S(r_0)$ . Определим окружность

$$\tilde{\Gamma}(\Delta t) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \left| \lambda - \frac{\alpha_k}{\beta_k \Delta t} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\alpha_k}{\beta_k \Delta t} \right| \right\}$$

с центром в точке  $\alpha_k \beta_k^{-1} (\Delta t)^{-1}$ . Очевидно, что  $\tilde{\Gamma}(\Delta t) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{K(\varphi_0, r_0)}$ .

Потребуем, чтобы соответствующая (1.3), (1.4) схема (2.1) удовлетворяла следующему условию устойчивости Дальквиста ([10, с. 390]), обеспечивающему сходимость приближений  $v_n$  к соответствующим значениям  $v(t)$ ,  $t = n\Delta t$ ,  $0 \leq n \leq N$ .

**У с л о в и е 6.** Все корни  $\xi^* \in \mathbb{C}$  характеристического полинома  $\rho(\xi) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \xi^j$  таковы, что  $|\xi^*| \leq 1$ , а те корни, для которых  $|\xi^*| = 1$ , являются простыми.

Важной характеристикой разностной схемы (2.1) является порядок аппроксимации  $m$ . Порядок аппроксимации схемы зависит от ее коэффициентов и характеризует качество аппроксимации уравнения (2.2). Введем обозначения

$$\tilde{g}_j = g_j \Delta t, \quad g_j = \sum_{\nu=0}^k \frac{\alpha_\nu v(t_{j+\nu})}{\Delta t} - \lambda \sum_{\nu=0}^k \beta_\nu v(t_{j+\nu}), \quad 0 \leq j \leq n - k, \quad t_\nu = \nu \Delta t, \quad 0 \leq \nu \leq N.$$

Здесь величина  $\tilde{g}_j$  есть погрешность аппроксимации уравнения (2.2) схемой (2.1). По определению [10, с. 397], для разностных схем с порядком аппроксимации  $m \geq 1$  выполняется

$$|g_j| \leq C_4 \max_{t \in [0, T]} |v^{(m+1)}(t)| (\Delta t)^m, \quad 0 \leq j \leq n - k,$$

где постоянная  $C_4$  зависит только от коэффициентов  $\alpha_j, \beta_j$ ,  $0 \leq j \leq k$ . В рассматриваемом случае  $v(t) = \exp(\lambda t)$  и, следовательно,  $\max_{t \in [0, T]} |v^{(m+1)}(t)| = |\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda)$ . Таким образом,

$$|g_j| \leq C_4 |\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda) (\Delta t)^m, \quad 0 \leq j \leq n - k,$$

и

$$\sum_{j=0}^{n-k} |\tilde{g}_j| = \Delta t \sum_{j=0}^{n-k} |g_j| \leq C_4 N \Delta t |\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda) (\Delta t)^m = C_4 T |\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda) (\Delta t)^m. \quad (2.3)$$

Введем условие, характеризующее разностные схемы (1.3), (1.4) в терминах порядка аппроксимации соответствующей им скалярной схемы (2.1).

**У с л о в и е 7.** Разностная схема (2.1) имеет порядок аппроксимации  $m \geq 1$ .

**П р и м е р 1.** Приведем примеры схем, удовлетворяющих условиям 5–7. Без потери общности можно считать, что  $\alpha_k = 1$ . Нетрудно видеть, что при  $k = 1$ ,  $m > 1$  интересующих нас схем не существует. При  $k = 1$ ,  $m = 1$  имеем однопараметрическое семейство схем:  $\alpha_0 = -1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta_0 = 1 - \beta_1$ ,  $\beta_1 < 0$ . Максимальный допустимый порядок аппроксимации  $m$  для схем с  $k = 2$  равен 2. Именно, при  $k = 2$ ,  $m = 2$  существует следующее двухпараметрическое семейство схем:  $\alpha_0 = -2\beta_1 - 4\beta_2 + 3$ ,  $\alpha_1 = 2\beta_1 + 4\beta_2 - 4$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_0 = \beta_1 + 3\beta_2 - 2$ ,  $\beta_2 < 0$ ,  $1 < \beta_1 + 2\beta_2 \leq 2$ .

Ниже нам потребуется ряд вспомогательных утверждений, доказательства которых проводятся с использованием техники из [10, гл. 8, §8].

**Лемма 1.** Для всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ , не лежащих внутри контура  $\tilde{\Gamma}(\Delta t)$  и удовлетворяющих условию  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ , при  $k \leq n \leq N$  справедлива оценка

$$|v_n(\lambda) - \exp(\lambda t)| \leq C_5 \exp(\mu T \operatorname{Re} \lambda) \left( \sum_{j=0}^{n-k} |\tilde{g}_j| + \max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda) - \exp(j\lambda \Delta t)| \right), \quad (2.4)$$

где постоянная  $C_5$  зависит только от  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $0 \leq j \leq k$ , постоянная  $\mu$  — еще и от  $\arg \lambda$ .

**Лемма 2.** Для всех  $\lambda$ , не лежащих внутри контура  $\tilde{\Gamma}(\Delta t)$  и таких, что  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ , справедлива оценка

$$|v_n(\lambda)| \leq C_6 \exp(at \operatorname{Re} \lambda), \quad 0 \leq n \leq N, \quad (2.5)$$

где константы  $a \geq 1$  и  $C_6$  зависят только от  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $0 \leq j \leq k$  и от  $\arg \lambda$ .

**Лемма 3.** Для всех  $\lambda \in \tilde{\Gamma}(\Delta t)$  справедлива оценка

$$|v_n(\lambda)| \leq C_7 \exp(bn),$$

где величины  $C_7$  и  $b$  зависят только от коэффициентов  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $0 \leq j \leq k$ .

**Лемма 4.** Справедлива оценка

$$|v_n(\infty)| \leq C_7 \exp(bn),$$

где константы  $C_7$  и  $b$  те же, что и в лемме 3.

Далее будем пользоваться исчислением секториальных операторов в банаховом пространстве (см., например, [11, с. 133–135]). Напомним, что если оператор  $A$  удовлетворяет условию 1, а комплексные функции  $F(\zeta)$  и  $G(\zeta)$  аналитичны в окрестности сектора  $K(\varphi_0, r_0)$  и убывают на бесконечности быстрее некоторой отрицательной степени  $|\zeta|$  равномерно по  $\zeta \in \mathbb{C}$  с  $|\arg \zeta| \leq \varphi_0$ , то формула

$$F(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} F(\zeta) R(\zeta, A) d\zeta$$

определяет оператор  $F(A) \in L(X)$ . При этом

$$F(A)G(A) = (FG)(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} F(\zeta)G(\zeta)R(\zeta, A) d\zeta. \quad (2.6)$$

Для решений разностных систем (1.3) и (1.4) справедливы представления [3]

$$\begin{aligned} x_n &= v_n(A)f = v_n(\infty)f + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} v_n(\lambda)R(\lambda, A)f d\lambda, \\ x_n^h &= v_n(A_h)p_h f = v_n(\infty)p_h f + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} v_n(\lambda)R(\lambda, A_h)p_h f d\lambda, \end{aligned} \quad (2.7)$$

связывающие элементы  $x_n$  и  $x_n^h$  с решениями  $v_n(\lambda)$  вспомогательного разностного уравнения (2.1).

### 3. Случай точных данных

Предположим вначале, что элемент  $f$  в (1.1) задан точно. Погрешность разностной схемы (1.4) на решении  $x = x(t)$  задачи (1.1) характеризуется величинами

$$\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (3.1)$$

Для погрешности (3.1) имеем оценку

$$\begin{aligned} \|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} &= \|v_n(A_h)p_h f - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \\ &\leq \|v_n(A_h)p_h f - p_h v_n(A)f\|_{X_h} + \|p_h(v_n(A)f - x(n\Delta t))\|_{X_h}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (3.2). Заметив, что

$$p_h v_n(A)f = v_n(\infty)p_h f + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} v_n(\lambda)p_h R(\lambda, A)f d\lambda,$$

с учетом (2.7) получаем

$$\|v_n(A_h)p_h f - p_h v_n(A)f\|_{X_h} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} |v_n(\lambda)| \|(R(\lambda, A_h)p_h - p_h R(\lambda, A))f\|_{X_h} |d\lambda|. \quad (3.3)$$

С использованием определения резольвенты устанавливается равенство

$$R(\lambda, A_h)(A_h p_h - p_h A)R(\lambda, A) = R(\lambda, A_h)p_h - p_h R(\lambda, A), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma(A) \cup \sigma(A_h)),$$

из которого в силу условий 1,3,4 следует

$$\|R(\lambda, A_h)(A_h p_h - p_h A)R(\lambda, A)f\|_{X_h} \leq \frac{C_8 h^s}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus K(\varphi_0).$$

Здесь и далее все константы, вообще говоря, зависят от  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  ( $0 \leq j \leq k$ ),  $\varphi_0$ ,  $T$ ,  $f$ , но не зависят от  $\Delta t$  и  $h$ . Ради упрощения изложения эта зависимость специально не отмечается.

Из (3.3) получаем

$$\|v_n(A_h)p_h f - p_h v_n(A)f\|_{X_h} \leq C_9 h^s \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} \frac{|v_n(\lambda)|}{1 + |\lambda|} |d\lambda|.$$

Замечая, что для всех  $\lambda \in \tilde{\Gamma}(\Delta t)$  выполняется  $|\lambda| \geq \alpha_k / (2|\beta_k|\Delta t)$ , а длина контура  $\tilde{\Gamma}(\Delta t)$  равна  $\pi\alpha_k / (|\beta_k|\Delta t)$  и принимая во внимание лемму 3, приходим к оценке

$$\|v_n(A_h)p_h f - p_h v_n(A)f\|_{X_h} \leq C_{10} h^s \exp(bT/\Delta t). \quad (3.4)$$

Обратимся теперь ко второму слагаемому в правой части (3.2). Из условия 2 следует

$$\|p_h(v_n(A)f - x(n\Delta t))\|_{X_h} \leq C_1 \|v_n(A)f - x(n\Delta t)\|_X. \quad (3.5)$$

В следующих теоремах 1, 2 при различных предположениях относительно искомого решения задачи (1.1) устанавливаются оценки для величины, стоящей в правой части (3.5).

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия 1, 5–7 и оценка (2.5) с  $a = 1$ . Предположим, что элемент  $x(T)$  допускает следующее истокообразное представление:  $x(T) = A^{-p}w$ ,  $w \in X$ ,  $p \geq 1$ . Тогда для погрешности разностной схемы (1.3) справедлива оценка

$$\|v_n(A)f - x(n\Delta t)\|_X \leq C_{11} \|w\|_X \ln^{-p} \frac{1}{\Delta t}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (3.6)$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что условие 1 обеспечивает существование обратного для  $A$  оператора  $A^{-1} \in L(X)$  и любых отрицательных степеней  $A^{-q} \in L(X)$ ,  $q > 0$ .

Введем функции  $F_t(\zeta) = \exp(-(T-t)\zeta)$ ,  $t \in [0, T]$  и  $G(\zeta) = \zeta^{-p}$ , аналитические в окрестности сектора  $K(\varphi_0, r_0)$  и мажорируемые в  $K(\varphi_0, r_0)$  при  $\zeta \rightarrow \infty$  отрицательной степенью  $|\zeta|$ . Тогда

$$x(t) = F_t(A)x(T), \quad 0 \leq t < T; \quad x(T) = G(A)w.$$

Согласно (2.6),

$$x(t) = (F_t G)(A)w, \quad 0 \leq t < T.$$

Легко видеть, что это равенство справедливо и для  $t = T$ . Итак,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \exp(-(T-t)\lambda) \lambda^{-p} R(\lambda, A)w \, d\lambda, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Пользуясь схемой рассуждений из [1], приходим к оценке

$$\|x_n - x(t)\|_X \leq \frac{C_0}{2\pi} \|w\|_X \int_{\Gamma(\varphi_0, r_0)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T\lambda) - \exp(-(T-t)\lambda)|}{|\lambda|^p (1 + |\lambda|)} |d\lambda|, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Дальнейшую оценку последнего интеграла удобно проводить, разбивая контур интегрирования на две части:  $\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda) = \{\lambda \in \Gamma(\varphi_0, r_0) : \operatorname{Re} \lambda < \Lambda\}$  и  $\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda) = \{\lambda \in \Gamma(\varphi_0, r_0) : \operatorname{Re} \lambda \geq \Lambda\}$ . Величину  $\Lambda = \Lambda(\Delta t)$  будем выбирать так, что  $\Lambda \rightarrow \infty$  и  $\Lambda \Delta t \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Конкретная зависимость  $\Lambda = \Lambda(\Delta t)$  будет указана ниже.

Первое слагаемое в правой части (2.4) оценивается согласно (2.3). Рассмотрим второе слагаемое. В ходе доказательства оценка (2.4) будет использоваться для таких  $\lambda \in \mathbb{C}$ , при которых величина  $|\lambda| \Delta t$  мала, поэтому можно считать, что

$$\max_{0 \leq j \leq k-1} |v_j(\lambda) - \exp(j\lambda \Delta t)| = \max_{0 \leq j \leq k-1} |1 - \exp(j\lambda \Delta t)| \leq C_{12} |\lambda| \Delta t \quad (3.7)$$

с константой  $C_{12}$ , не зависящей от  $\lambda$  и  $\Delta t$ . Величина  $|\lambda| \Delta t$  мала, например, если  $\lambda \in \Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)$  при достаточно малом  $\Delta t$ , так как по выбору  $\Lambda = \Lambda(\Delta t)$ ,  $\Lambda \Delta t \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . С учетом (2.3) и (3.7) для  $\lambda \in \Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)$  на основании леммы 1 получаем

$$|v_n(\lambda) - \exp(\lambda t)| \leq C_{13} \exp(\mu T \operatorname{Re} \lambda) \left( |\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda) (\Delta t)^m + |\lambda| \Delta t \right); \quad k \leq n \leq N, \quad \Delta t \in (0, \varepsilon_0). \quad (3.8)$$

Полагая  $\Gamma(\varphi_0, r_0) = \Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda) \cup \Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)$ , запишем

$$\begin{aligned} \|x_n - x(t)\|_X \leq & \frac{C_0}{2\pi} \|w\|_X \left\{ \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T\lambda) - \exp(-(T-t)\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| + \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-(T-t)\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пользуясь (3.8) оценим первое слагаемое в скобках в (3.9)

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T\lambda) - \exp(-(T-t)\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| \\ \leq & \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \left( C_{13} \exp(\mu T \operatorname{Re} \lambda) (|\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda) (\Delta t)^m + |\lambda| \Delta t) \right) \frac{|\exp(-T\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Заметим, что

$$|\lambda|^{m+1} \exp(T \operatorname{Re} \lambda) (\Delta t)^m + |\lambda| \Delta t \leq \frac{\Lambda^2 \Delta t \exp(T\Lambda)}{\cos \varphi_0} \left( \frac{1}{\cos^m \varphi_0} (\Lambda \Delta t)^{m-1} + \frac{1}{\Lambda \exp(T\Lambda)} \right).$$

При сделанных относительно  $\Lambda$  предположениях величина в скобках равномерно ограничена при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Теперь из (3.10) следует

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T\lambda) - \exp(-(T-t)\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| \\ \leq & C_{14} \exp((\mu+1)T\Lambda) \Lambda^2 \Delta t \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-T\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda|. \end{aligned}$$

Все константы здесь и далее, вообще говоря, зависят от  $p$  и  $\|w\|_X$ .

С учетом (2.5) и равенства  $a = 1$  получаем оценку

$$\int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|v_n(\lambda) \exp(-T\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| + \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-(T-t)\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| \leq (C_6 + 1) \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)}.$$

Окончательно из (3.9) получаем

$$\begin{aligned} \|x_n - x(t)\|_X \leq & \frac{C_0 \|w\|_X}{2\pi} \left( C_{14} \exp((\mu+1)T\Lambda) \Lambda^2 \Delta t \int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-T\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| \right. \\ & \left. + (C_6 + 1) \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} \right), \quad t = n\Delta t, \quad 0 \leq n \leq N. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Имеют место оценки

$$\int_{\Gamma^{(1)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|\exp(-T\lambda)|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} |d\lambda| \leq C_{15}, \quad \int_{\Gamma^{(2)}(\varphi_0, r_0, \Lambda)} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^p(1+|\lambda|)} \leq C_{15} \Lambda^{-p}.$$

С учетом этого из (3.11) следует

$$\|x_n - x(t)\|_X \leq C_{16}(\exp((\mu + 1)T\Lambda)\Lambda^2\Delta t + \Lambda^{-p}).$$

Выбрав в качестве  $\Lambda$  функцию  $\Lambda(\Delta t) = 1/((\mu + 1 + \varepsilon)T) \ln(p/\Delta t)$  с  $\varepsilon > 0$ , получим требуемую оценку (3.6). Теорема доказана.

Отметим, что условие истокопредставимости с  $p = 1$  выполняется автоматически в силу определения классического решения задачи Коши (1.1).

Пользуясь схемой доказательства теоремы 1 и техникой из [1], получаем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия 1, 5–7, оценка (2.5) с  $a > 1$  и, кроме того, решение задачи (1.1) существует на отрезке  $[0, T_1]$ , где  $T_1 > aT$ . Тогда для погрешности разностной схемы (1.3) при  $m = 1$  справедлива оценка

$$\|v_n(A)f - x(n\Delta t)\|_X \leq C_{17}(\Delta t)^{\frac{T_1 - aT}{T_1 - aT + (\mu + 1)T}} \ln^2 \frac{1}{\Delta t}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (3.12)$$

где константа  $\mu$  взята из леммы 1 при  $\arg \lambda = \varphi_0$ .

Если же  $m > 1$ , то выполняется оценка

$$\|v_n(A)f - x(n\Delta t)\|_X \leq C_{18}(\Delta t)^{\frac{T_1 - aT}{(T_1 - aT) + (\mu + 1)T}}, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (3.13)$$

Здесь  $m$  — порядок аппроксимации разностной схемы (2.1).

При выполнении условий теоремы 1, комбинируя неравенства (3.2), (3.4)–(3.6), получаем следующую итоговую оценку погрешности разностной схемы (1.4):

$$\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \leq C_{10}h^s \exp(bT/\Delta t) + C_{19} \ln^{-p} \frac{1}{\Delta t}. \quad (3.14)$$

В условиях теоремы 2 при  $m = 1$ , комбинируя оценки (3.2), (3.4), (3.5), (3.12), получим

$$\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \leq C_{10}h^s \exp(bT/\Delta t) + C_{20}(\Delta t)^{\frac{T_1 - aT}{T_1 - aT + (\mu + 1)T}} \ln^2 \frac{1}{\Delta t}. \quad (3.15)$$

Аналогично, в условиях теоремы 2 при  $m > 1$ , комбинируя неравенства (3.2), (3.4), (3.5), (3.13), приходим к оценке

$$\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \leq C_{10}h^s \exp(bT/\Delta t) + C_{21}(\Delta t)^{\frac{T_1 - aT}{(T_1 - aT) + (\mu + 1)T}}. \quad (3.16)$$

Перечисленные оценки выполняются равномерно по  $0 \leq n \leq N$ . Таким образом, доказано следующее утверждение, характеризующее погрешность разностной схемы (1.4) в случае точно заданного элемента  $f$ .

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия 2–4. Тогда для определенной в (3.1) погрешности разностной схемы (1.4) в предположениях теоремы 1 справедлива оценка (3.14), в предположениях теоремы 2 — оценка (3.15) в случае  $m = 1$  и (3.16) в случае  $m > 1$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Теорема 3 и предшествующие ей результаты остаются в силе и в случае бесконечномерного пространства  $X_h$ , если оператор  $p_h$  отображает  $D(A)$  в  $D(A_h)$ , выполняется условие 2 и замкнутый плотно определенный оператор  $A_h: D(A_h) \subset X_h \rightarrow X_h$  удовлетворяет условиям 3,4.

#### 4. Случай приближенных данных

Обратимся к практически важному случаю, когда начальный элемент  $f$  в задаче (1.1) известен с погрешностью. Будем считать, что вместо самого этого элемента задано его приближение  $f_\delta \in X$ , причем

$$\|f_\delta - f\|_X \leq \delta \quad (4.1)$$

с известным уровнем погрешности  $\delta > 0$ . Начальные элементы разностных схем (1.3) и (1.4) определим следующим образом:  $x_0 = x_1 = \dots = x_{k-1} = f_\delta$  и

$$x_0^h = x_1^h = \dots = x_{k-1}^h = p_h f_\delta. \quad (4.2)$$

Согласно (2.7) имеем представление  $x_n^h = x_n^h(f_\delta) = v_n(A_h)p_h f_\delta$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Переходя к оценке погрешности, доставляемой схемой (1.4), запишем

$$\begin{aligned} \|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} &= \|v_n(A_h)p_h f_\delta - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \\ &\leq \|v_n(A_h)p_h(f_\delta - f)\|_{X_h} + \|v_n(A_h)p_h f - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Согласно теореме 3 второе слагаемое в правой части неравенства (4.3) оценивается по формулам (3.14), (3.15) или (3.16). Перейдем к оценке первого слагаемого. Из условия 2 и неравенства (4.1) следует

$$\|v_n(A_h)p_h(f_\delta - f)\|_{X_h} \leq C_1 \delta \|v_n(A_h)\|_{L(X_h)}.$$

Пользуясь условием 4 и леммами 3 и 4, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \|v_n(A_h)\|_{L(X_h)} &\leq |v_n(\infty)| + \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\Gamma}(\Delta t)} |v_n(\lambda)| \|R(\lambda, A_h)\|_{L(X_h)} |d\lambda| \\ &\leq C_7 \exp(bn) + \frac{1}{2\pi} C_7 \exp(bn) \frac{2C_0 |\beta_k| \Delta t}{2|\beta_k| \Delta t + \alpha_k} \frac{\pi \alpha_k}{|\beta_k| \Delta t} \leq C_{22} \exp(bn) \leq C_{22} \exp(bT/\Delta t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|v_n(A_h)p_h(f_\delta - f)\|_{X_h} \leq C_{23} \delta \exp(bT/\Delta t). \quad (4.4)$$

Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда, комбинируя (3.14), (4.3) и (4.4), получаем равномерную по  $0 \leq n \leq N$  оценку

$$\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \leq f_1(h, \Delta t), \quad f_1(h, \Delta t) = C_{24} \left( \exp(bT/\Delta t)(h^s + \delta) + \ln^{-p}(1/\Delta t) \right). \quad (4.5)$$

С учетом замечания 1 естественно доопределить объекты  $X_h$ ,  $p_h$ ,  $A_h$ ,  $h \in (0, h_0]$  при  $h = 0$ , положив  $X_0 = X$ ,  $p_0 = E$ ,  $A_0 = A$ . При этом задача (1.2) переходит в (1.1), схема (1.4) принимает вид (1.3), поэтому имеем  $x_n^0 = x_n$ ,  $0 \leq n \leq N$ . Таким образом, в случае  $h = 0$  развитая выше теория полной дискретизации задачи (1.1) приводит к аналогичным результатам для случая полудискретизации этой задачи по времени.

Несложный анализ показывает, что минимум функции  $f_1(h, \Delta t)$  на  $[0, +\infty) \times (0, 1)$  достигается при  $h = 0$  и

$$\min_{\Delta t \in (0,1)} f_1(0, \Delta t) = C_{24} \min_{\Delta t \in (0,1)} \left( \delta \exp(bT/\Delta t) + \ln^{-p}(1/\Delta t) \right) \geq C_{25} \ln^{-p} \ln(1/\delta). \quad (4.6)$$

В то же время справедлива оценка

$$\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \leq C_{26} \ln^{-p} \ln(1/\delta), \quad 0 \leq n \leq N. \quad (4.7)$$

Здесь (4.6) есть нижняя граница для всевозможных оценок величины  $\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h}$  вида (4.5) относительно различных способов согласования  $h = h(\delta)$ ,  $N = N(\delta)$ . Оценка (4.7)

справедлива для достаточно малых  $\delta$  и получается при подстановке в (4.5) значений  $h = 0$ ,  $\Delta t = T/N(\delta)$ , где

$$N(\delta) = \left[ \frac{1}{\kappa b} \ln \frac{p}{\delta b T} \right], \quad (4.8)$$

$\kappa > 1$  произвольно,  $[c]$  есть целая часть числа  $c$ . Сопоставляя (4.6) и (4.7), заключаем, что оценка (4.7) является наилучшей по порядку в рамках принятой схемы рассуждений.

Если выполнены условия теоремы 2, то равномерно по  $0 \leq n \leq N$

$$\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \leq f_2(h, \Delta t), \quad f_2(h, \Delta t) = C_{27} \left( \exp(bT/\Delta t)(h^s + \delta) + (\Delta t)^q \right), \quad (4.9)$$

где  $q \in (0, (T_1 - aT)/(T_1 - aT + (\mu + 1)T))$  произвольно в случае  $m = 1$  и  $q = (T_1 - aT)/(T_1 - aT + (\mu + 1)T)$ , если  $m > 1$ . Функция  $f_2(h, \Delta t)$  на  $[0, +\infty) \times (0, +\infty)$  достигает минимума также при  $h = 0$  и

$$\min_{\Delta t \in (0, +\infty)} f_2(0, \Delta t) = C_{27} \min_{\Delta t \in (0, +\infty)} \left( \delta \exp(bT/\Delta t) + (\Delta t)^q \right) \geq C_{28} \ln^{-q}(1/\delta), \quad (4.10)$$

при этом

$$\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \leq C_{29} \ln^{-q}(1/\delta), \quad 0 \leq n \leq N. \quad (4.11)$$

Неравенство (4.10) указывает нижнюю границу для оценок величины  $\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h}$  вида (4.9) при различных способах согласования  $h = h(\delta)$ ,  $N = N(\delta)$ . Оценка (4.11) получается при подстановке в (4.9) величин  $h = 0$ ,  $\Delta t = T/N(\delta)$ , где

$$N(\delta) = \left[ \frac{1}{\kappa b} \ln \frac{q}{\delta b T} \right], \quad (4.12)$$

$\kappa > 1$  произвольно. Таким образом, оценка (4.11) наилучша в указанном выше смысле.

Мы видим, что если уровень погрешности  $\delta > 0$  начального элемента задан, а параметры регуляризации  $h$  и  $\Delta t$  подлежат выбору в зависимости от  $\delta$ , то оптимальным является значение  $h = 0$ , соответствующее отсутствию дискретизации пространства  $X$ . Однако потребности практической реализации рассматриваемых схем диктуют необходимость конечномерной аппроксимации  $X$ . Поэтому далее проанализируем случай, когда величина  $h > 0$  фиксирована наряду с  $\delta > 0$ , а в качестве параметра регуляризации выступает шаг дискретизации  $\Delta t$ . Такая трактовка параметра дискретизации  $h$  созвучна подходу из [3; 4], где пространственная дискретизация рассматривалась в качестве возмущения оператора  $A$ .

Пусть сначала выполнены условия теоремы 1. Пользуясь формулами (4.7) и (4.8), из оценки (4.5) получаем

$$\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \leq C_{26} \ln^{-p} \ln(1/(h^s + \delta)), \quad 0 \leq n \leq N. \quad (4.13)$$

К оценке (4.13) приходим при подстановке в (4.5) величины  $\Delta t = T/N(h, \delta)$ ,

$$N(h, \delta) = \left[ \frac{1}{\kappa b} \ln \frac{p}{(h^s + \delta)bT} \right]. \quad (4.14)$$

Если же выполняются условия теоремы 2, то из (4.9) с использованием (4.11), (4.12) получим оценку

$$\|x_n^h - p_h x(n\Delta t)\|_{X_h} \leq C_{29} \ln^{-q}(1/(h^s + \delta)), \quad 0 \leq n \leq N. \quad (4.15)$$

К (4.15) приходим, подставив в (4.9)  $\Delta t = T/N(h, \delta)$ , где

$$N(h, \delta) = \left[ \frac{1}{\kappa b} \ln \frac{q}{(h^s + \delta)bT} \right]. \quad (4.16)$$

Легко видеть, что оценки (4.13), (4.15) наилучши в рамках применяемой схемы рассуждений.

Заметим, что соотношения (4.13)–(4.16) являются естественными обобщениями формул (4.7), (4.8), (4.11), (4.12) соответственно и поэтому справедливы также при  $h = 0$ . Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия 2–4 и предположения теоремы 1 (теоремы 2), величины  $\delta > 0$  и  $h \geq 0$  заданы, а  $N(h, \delta)$  вычисляется по формуле (4.14) (по формуле (4.16)). Тогда погрешность разностной схемы (1.4) с начальными данными (4.2) оценивается согласно (4.13) (согласно (4.15)).

Теорема 4 устанавливает условия, при которых разностная схема (1.4) регуляризует некорректную задачу (1.1). Как видно из формул (4.13), (4.15), регуляризирующим оператором является отображение  $R(f_\delta, \delta) = x_{N(h(\delta), \delta)}^{h(\delta)}(f_\delta)$ , где  $h(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , а количество шагов дискретизации  $N(h, \delta)$  определено формулой (4.14) или (4.16).

**З а м е ч а н и е 2.** В [7, с. 157] для однопараметрического класса двухслойных схем в гильбертовом пространстве с самосопряженными аппроксимирующими операторами получена оценка погрешности, аналогичная (4.15) по порядку  $h, \delta$ . При использовании для регуляризации задачи (1.1) метода квазиобращения с полной дискретизацией оценка вида (4.15) с  $q = 1$  получается при условиях типа истокопредставимости ([8]; см. также [12, с. 104]).

## 5. Пример задачи Коши

Приведем пример задачи, к которой применима изложенная выше теория. Рассмотрим некорректную начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -a_0(s) \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + a_1(s) \frac{\partial x}{\partial s} + a_2(s)x, & x &= x(s, t), \\ x(0, t) &= x(1, t) = 0, & 0 &\leq t \leq T, \\ x(s, 0) &= f(s), & 0 &\leq s \leq 1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Предполагается, что  $a_0, a_1, a_2, f \in C[0, 1]$ ,  $a_0(s) \geq \omega > 0$ ,  $f(0) = f(1) = 0$ . Задача (5.1) может быть различными способами представлена в виде (1.1) в зависимости от выбора пространства  $X$ . Положим  $X = C_0[0, 1] = \{x \in C[0, 1]: x(0) = x(1) = 0\}$ , оператор  $A$  определим равенствами

$$(Ax)(s) = -a_0(s) \frac{d^2 x}{ds^2} + a_1(s) \frac{dx}{ds} + a_2(s)x, \quad D(A) = \{x \in C_0[0, 1]: x \in W_{\text{loc}}^{2,2}[0, 1], Ax \in C_0[0, 1]\}.$$

Введем конечномерные пространства  $X_h, h \in \{1/K: K = 2, 3, \dots\}$  функций, заданных на сетке  $h, 2h, \dots, (K-1)h$ , с нормой  $\|x^h\|_{X_h} = \max_{1 \leq k \leq K-1} |x^h(kh)|$ . Определим оператор  $p_h: X \rightarrow X_h$ ,  $(p_h x)(kh) = x(kh)$ ,  $1 \leq k \leq K-1$ . На сеточных функциях  $x^h(s) = x^h(kh)$ ,  $1 \leq k \leq K-1$  из пространства  $X_h$  зададим разностные операторы

$$\begin{aligned} d_s x^h(s) &= h^{-1}(x^h(s+h) - x^h(s)), & \bar{d}_s x^h(s) &= h^{-1}(x^h(s) - x^h(s-h)), \\ \widehat{d}_s x^h(s) &= (2h)^{-1}(x^h(s+h) - x^h(s-h)), & 1 &\leq k \leq K-1, \end{aligned}$$

где  $x^h(0) = x^h(1) = 0$ . В пространствах  $X_h$  рассмотрим аппроксимирующие  $A$  конечномерные операторы

$$(A_h x^h)(kh) = -a_0(kh) \bar{d}_s d_s x^h(kh) + a_1(kh) \widehat{d}_s x^h(kh) + a_2(kh) x^h(kh).$$

Будем предполагать, что  $f \in D(A^2)$ . Тогда при соответствующих ограничениях на функции  $a_1, a_2$  условие 1 выполнено согласно [13], справедливость условия 2 практически очевидна, условие 3 выполнено с  $s = 2$  для пространства  $Y = C^4[0, 1] \cap C_0[0, 1]$  с нормой  $C^4[0, 1]$  ([14]), выполнение условия 4 установлено в [15]. Таким образом, для регуляризации задачи (5.1) применимы разностные схемы (1.4), удовлетворяющие условиям 5–7, в частности, схемы из примера 1. При выполнении условия существования решения  $x(s, t)$  на отрезке  $[0, T_1]$ ,  $T_1 > aT$ , где  $a > 1$  определяется из (2.5), либо при выполнении условия истокопредставимости  $x(\cdot, T) \in R(A^p)$ ,  $p \geq 1$  и неравенства (2.5) с  $a = 1$  указанные разностные схемы порождают регуляризующие алгоритмы для задачи (5.1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Ключев В.В.** Об оценке скорости сходимости и погрешности разностных методов аппроксимации решения некорректной задачи Коши в банаховом пространстве // Вычисл. методы и прогр. 2006. Т. 7. С. 163–171.
2. **Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu., Kokurin M.M.** On a class of finite difference methods for ill-posed Cauchy problems with noisy data // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. Vol. 18, no. 9. P. 959–977.
3. **Бакушинский А.Б.** Разностные методы решения некорректных задач Коши для эволюционных уравнений в комплексном В-пространстве // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 9. С. 1661–1668.
4. **Бакаев Н.Ю., Бакушинский А.Б.** К теории приближенных методов решения некорректной задачи Коши // Докл. АН СССР. 1990. Т. 312, № 4. С. 777–782.
5. **Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu., Paymerov S.K.** On error estimates of difference solution methods for ill-posed Cauchy problems in a Hilbert space // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. Vol. 16, no. 6. P. 553–565.
6. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007. 488 с.
7. **Бухгейм А.Л.** Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1988. 184 с.
8. **Пискарёв С.И.** Оценки скорости сходимости при решении некорректных задач для эволюционных уравнений // Изв. АН СССР. 1987. Т. 51, № 3. С. 676–687.
9. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.
10. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 636 с.
11. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
12. **Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.** Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит, 1995. 176 с.
13. **Stewart H.B.** Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 199. P. 141–162.
14. **Пискарёв С.И.** Об оценках скорости сходимости при полудискретизации эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 12. С. 2153–2159.
15. **Алибеков Х.Н., Соболевский П.Е.** Об устойчивости и сходимости разностных схем высокого порядка аппроксимации для параболических уравнений. II / Воронежский гос. ун-т. Деп. в ВИНТИ 18.10.76, № 3645–В76. 50 с.

Бакушинский Анатолий Борисович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
главный науч. сотрудник  
Институт системного анализа РАН  
e-mail: bakush@isa.ru

Поступила 26.05.2011

Кокурин Михаил Михайлович  
студент  
Марийский государственный университет  
e-mail: kokurin@nextmail.ru

Кокурин Михаил Юрьевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. кафедрой  
Марийский государственный университет  
e-mail: kokurinm@yandex.ru

УДК 517.977

## ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ТРАЕКТОРИИ И УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ<sup>1</sup>

М. С. Близорукова, В. И. Максимов

Обсуждается задача динамического восстановления неизмеряемых координат фазового вектора и неизвестных управлений, действующих на нелинейные векторные уравнения с запаздыванием. Указывается регуляризирующий алгоритм, позволяющий синхронно с развитием рассматриваемых процессов осуществлять восстановление как этих управлений, так и неизмеряемых координат. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, метод вспомогательных моделей.

M. S. Blizorukova, V. I. Maksimov. On a reconstruction algorithm for the trajectory and control in a delay system.

We discuss a problem of the dynamic reconstruction of unmeasured coordinates of the phase vector and unknown controls in nonlinear vector equations with delay. A regularizing algorithm is proposed for reconstructing both controls and unmeasured coordinates simultaneously with the processes. The algorithm is stable with respect to information noises and computational errors.

Keywords: dynamic reconstruction, method of auxiliary models.

### 1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x_t(s), y_t(s)) + f_2(t, x_t(s), y_t(s))u(t), \quad (1.1)$$

$$\dot{y}(t) = \psi_1(t, x_t(s), y_t(s)) + \psi_2(t, y_t(s))x(t) \quad (1.2)$$

с начальными условиями

$$x_{t_0}(s) = x_0(s) \in C([- \tau_m^x, 0]; \mathbb{R}^{n_1}), \quad y_{t_0}(s) = y_0(s) \in C([- \tau_n^y, 0]; \mathbb{R}^{n_2}). \quad (1.3)$$

Здесь  $t$  — время, меняющееся в пределах заданного отрезка  $T = [t_0, \vartheta]$  ( $t_0 < \vartheta < +\infty$ );  $x$  и  $y$  — соответственно  $n_1$ - и  $n_2$ -мерные векторы (которые считаем векторами-столбцами), характеризующие состояние системы;  $u(t)$  —  $r$ -мерный вектор управления; символы  $x_t(s)$  и  $y_t(s)$  означают функции  $x_t(s) = x(t+s)$  при  $s \in [-\tau_m^x, 0]$ ,  $y_t(s) = y(t+s)$  при  $s \in [-\tau_n^y, 0]$ . Структура векторных функций  $f_1$  и  $\psi_1$ , а также матричных функций  $f_2$  и  $\psi_2$  уточнена ниже.

Начальное состояние (1.3) считаем липшицевым. Далее символ  $P$  означает фиксированный компакт в  $\mathbb{R}^r$  (ресурсы управления);  $x_0(s)$ ,  $y_0(s)$  — известные фиксированные функции. Всякая измеримая (по Лебегу) функция  $u(\cdot)$  из множества  $P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r) : u(t) \in P \text{ п. в. } t \in T\}$  называется управлением, решение  $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$  (в смысле Каратеодори) системы уравнений (1.1), (1.2) с начальным условием (1.3) называется движением системы, порожденным управлением  $u(\cdot)$  (и исходящим из начального состояния  $\{x_0(s), y_0(s)\}$ ).

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-12112-офи-м-2011 и 12-01-00175-а), программы Президиума Уро РАН (проекты 12-П-1-1019 и 12-С-1-1017) и Программы поддержки ведущих научных школ России (НШ-6512.2012.1).

Пусть  $u(\cdot) \in P(\cdot)$  — управление, которое фактически реализуется в течение промежутка времени  $T$ ;  $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$  — порожденное им фактическое движение. Предположим, что по ходу развития процесса в достаточно частые моменты  $\tau_i$  из  $T$  измеряется часть текущего фазового вектора  $\{x(\tau_i), y(\tau_i)\}$ , а именно вектор  $y(\tau_i)$ . При этом результат измерения  $\xi^h(\tau_i)$  неточен: выполняется неравенство

$$|\xi^h(\tau_i) - y(\tau_i)| \leq h, \quad (1.4)$$

где, однако,  $h$  мало. Здесь символ  $|\cdot|$  означает евклидову норму. Задача состоит в построении алгоритма, который по текущим измерениям  $\xi^h(\tau_i)$  в реальном времени восстанавливает неизмеряемую компоненту  $x(\cdot)$  фазового вектора и управление  $u(\cdot)$ . Так как их точное восстановление невозможно (из-за неточности измерений  $y(\cdot)$ ), то фактически потребуем, чтобы искомый алгоритм формировал (в реальном времени) некоторые приближения  $v^h(\cdot)$  и  $u^h(\cdot)$ , достаточно хорошо аппроксимирующие  $x(\cdot)$  и  $u(\cdot)$ . Именно, среднеквадратичное отклонение  $v^h(\cdot)$  от  $x(\cdot)$

$$|v^h(\cdot) - x(\cdot)|_{L_2(T)}^2 = \int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(t) - x(t)|^2 dt \quad (1.5)$$

и отклонение  $v^h(\cdot)$  от  $u(\cdot)$

$$|u(\cdot) - u^h(\cdot)|_{L_2(T)}^2 = \int_{t_0}^{\vartheta} |u(t) - u^h(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

должны быть сколь угодно малы при достаточной малости измерительной погрешности  $h$ .

Обсуждаемая задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем (реконструкции входа по измерениям выхода). Обратные задачи в апостериорной постановке исследовались многими авторами [1–5]. В статье [6] был предложен метод динамического (позиционного) восстановления входа конечномерной динамической системы аффинной по управлению. Этот метод основывается на идеях теории позиционного управления [7; 8] и известных в теории некорректных задач методах сглаживающего функционала и невязки [1]. Для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, указанный метод получил развитие в работах [6; 15; 16]. В [6] рассмотрен случай измерения всех координат фазового вектора, в [15; 16] изучался случай измерений типа (1.4) при некоторых специальных ограничениях на динамику системы. В работах [9–14] указанный метод получил развитие для различных классов систем с последствием.

Ниже полагаем, что элементы вектор-функции  $f_1(\cdot)$ , а также матричной функции  $f_2(\cdot)$  имеют вид

$$g(t, x_i(s), y_t(s)) = g(t, x(t), x(t - \tau_1^x), \dots, x(t - \tau_m^x), y(t), y(t - \tau_1^y), \dots, y(t - \tau_n^y)),$$

$$0 < \tau_1^x < \tau_2^x < \dots < \tau_m^x < +\infty, \quad 0 < \tau_1^y < \tau_2^y < \dots < \tau_n^y < +\infty,$$

$$g(\cdot) = f_{1i}(\cdot), \quad i \in [1 : n_1],$$

$$g(\cdot) = f_{2ij}(\cdot), \quad i \in [1 : n_1], \quad j \in [1 : r]$$

и удовлетворяют условию липшицевости

$$\begin{aligned} & \left| g(t_1, x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}, y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) - g(t_2, x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}) \right| \\ & \leq c_1 \left( |t_2 - t_1| + \sum_{i=0}^m |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| + \sum_{j=0}^n |y_j^{(1)} - y_j^{(2)}| \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Аналогичными свойствами обладают и элементы матричной функции  $\psi_2(\cdot)$  и вектор-функции  $\psi_1(\cdot)$

$$\begin{aligned} g_2(\cdot) &= \psi_{2ij}(\cdot), \quad i \in [1 : n_2], \quad j \in [1 : n_1], \\ g_2(t, y_t(s)) &= g_2(t, y(t), y(t - \tau_1^y), \dots, y(t - \tau_n^y)), \\ g_1(\cdot) &= \psi_{1i}(\cdot), \quad i \in [1 : n_2], \\ g_1(t, x_t(s), y_t(s)) &= g_1(t, x(t - \tau_1^x), \dots, x(t - \tau_m^x), y(t), y(t - \tau_1^y), \dots, y(t - \tau_n^y)). \end{aligned}$$

Именно, элементы  $g_1(\cdot)$  и  $g_2(\cdot)$  удовлетворяют условиям

$$\left| g_2(t_1, y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) - g_2(t_2, y_0^{(1)}, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}) \right| \leq C_1 \left( |t_2 - t_1| + \sum_{j=0}^n |y_j^{(1)} - y_j^{(2)}| \right), \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} &\left| g_1(t_1, x_1^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}, y_0^{(1)}, y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}) - g_1(t_2, x_1^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}, y_0^{(2)}, y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}) \right| \\ &\leq d_1 \left( |t_2 - t_1| + \sum_{i=1}^m |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| + \sum_{j=0}^n |y_j^{(1)} - y_j^{(2)}| \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

В (1.7)–(1.9) и ниже символом  $|\cdot|$  обозначаются как евклидова норма и соответствующая ей матричная норма, так и модуль числа. При выполнении приведенных выше условий каждым начальному состоянию (1.3) и управлению  $u(\cdot) \in P(\cdot)$  отвечает единственное решение системы (1.1), (1.2). В дальнейшем для простоты считаем  $\tau_m^x = \tau_n^y = \tau$ .

Опишем схему алгоритма решения рассматриваемой задачи. Символом  $\xi^h(\cdot)$  всюду ниже обозначим функцию  $\xi^h(t)$ ,  $t \in [t_0 - \tau, \vartheta]$ , такую, что  $\xi^h(t) = y_0(t - t_0)$  при  $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ ,  $\xi^h(t) = \xi^h(\tau_i)$  при  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $i \in [0 : q - 1]$ , где  $\tau_i = \tau_{h,i}$ ,  $q = q_h$ ,  $\xi^h(\tau_i)$  удовлетворяет (1.4). При заданном  $h \in (0, 1)$  на отрезке времени  $T$  фиксируются точки

$$\tau_i = \tau_{h,i}, \quad i = 0, 1, \dots, q = q_h, \quad t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_q = \vartheta. \quad (1.10)$$

При этом для простоты полагается  $\tau_i - \tau_{i-1} = \delta = \delta(h)$ . Таким образом, при каждом  $h$  на  $T$  выбирается равномерная сетка  $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{q_h}$  с шагом  $\delta = \delta(h)$  (см. (1.10)). Затем вводится управляемая система вида

$$\dot{w}^h(t) = \rho(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), u_i^h, w_{\tau_i}^h(s)), \quad (1.11)$$

$$\tau_i < t \leq \tau_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1, \quad w^h(t_0 + s) = w_0^h(s),$$

называемая моделью. Здесь  $w^h(t)$  — конечномерный вектор состояния модели в момент  $t$ ;  $w_0^h(s) = \{w_{0x}^h(s), w_{0y}^h(s)\} \in L_\infty([- \tau, 0]; \mathbb{R}^{n_1+n_2})$  — начальное состояние модели;  $w_{\tau_i}^h(s) = w^h(\tau_i + s) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ,  $s \in [- \tau, 0]$ ,  $v_i^h \in \mathbb{R}^{n_1}$  и  $u_i^h \in \mathbb{R}^r$  — конечномерные управляющие воздействия в модели, вырабатываемые в момент  $\tau_i$  по закону обратной связи [7; 8]

$$v_i^h = V(\tau_i, w_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s)), \quad (1.12)$$

$$u_i^h = U(\tau_i, w_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), v_{\tau_i}^h(s)), \quad (1.13)$$

$\tau_i = \tau_{h,i} \in \Delta_h$ ,  $v_i^h(t_0 + s) = x(t_0 + s)$  при  $s \in [- \tau, 0]$ ,  $v_i^h(s) = v^h(t + s)$  при  $s \in [- \tau, 0]$ ,  $t \geq t_0$ . Функции  $V(\cdot)$ ,  $U(\cdot)$  называются стратегиями. Модель функционирует в “реальном времени”, т. е. синхронно с системой (1.1), (1.2). В ходе ее функционирования формируются кусочно-постоянные управления  $v^h(\cdot)$  и  $u^h(\cdot)$

$$v^h(t) = v_i^h, \quad u^h(t) = u_i^h, \quad \tau_i < t \leq \tau_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, q - 1.$$

Они выбираются за приближения восстанавливаемых функций  $x(\cdot)$  и  $u(\cdot)$ .

## 2. Реконструкция неизвестных координат

Сначала опишем алгоритм динамического восстановления неизвестной координаты  $x(\cdot)$ . Именно, укажем правила выбора стратегии  $V$  (1.12) и модели (1.11), обеспечивающих формирование функции  $v^h(\cdot)$  — приближения  $x(\cdot)$  (см. (1.5)).

Пусть фиксированы величина погрешности измерения  $h \in (0, 1)$  и семейство разбиений  $\Delta_h$  (1.10) отрезка  $T$ . Символом  $Z(T)$  обозначим пучок решений системы (1.1), (1.2) с начальным условием (1.3), т. е.  $Z(T) = \{z(\cdot) = z(\cdot; t_0, z_0(s), u(\cdot)) : u(\cdot) \in P(\cdot)\}$ . В качестве модели возьмем систему, описываемую уравнением

$$\dot{w}^{(1)}(t) = F_1(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), w^{(1)}(\tau_i)), \quad (2.1)$$

$$F_1(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), w^{(1)}(\tau_i)) = \psi_1(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s)) \\ + \psi_2(\tau_i, \xi_{\tau_i}^h(s))v_i^h + 2(\xi^h(\tau_i) - w^{(1)}(\tau_i)), \quad w^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

с начальным условием  $w_{t_0}^{(1)}(s) = y(t_0 + s)$ ,  $s \in [-\tau, 0)$ ,  $w^{(1)}(t_0) = \xi^h(t_0)$ . Решение этого уравнения  $w^{(1)}(\cdot) = w^{(1)}(\cdot; t_0, w_{t_0}^{(1)}(s), v^h(\cdot))$  понимается в смысле Каратеодори.

Пусть  $\Delta^{(j)} = [t_j, t_{j+1}]$ ,  $t_j = t_0 + \tau_1^x j$ , символ  $l$  означает целую часть числа  $\tau/\tau_1^x$ ,  $j_* = \max\{j : t_j < \vartheta\}$ ,

$$g_j(h) = h^{(1/3)^j}, \quad j \in [1 : j_*].$$

Будем считать ниже (для простоты выкладок): разбиения  $\Delta_h$  выбраны таким образом, что  $t_j \in \Delta_h$ . Стратегию  $V$  (1.12) при  $\tau_i \in [t_j, t_{j+1}) \cap T$  зададим следующим образом:

$$V(\tau_i, w_{\tau_i}^{(1)}(s), \xi_{\tau_i}^h(s)) = V_j(\tau_i, w_{\tau_i}^{(1)}(s), \xi_{\tau_i}^h(s)) \\ = \arg \min \left\{ 2(l_i, \psi_2(\tau_i, \xi_{\tau_i}^h(s))v) + \alpha_j |v|^2 : v \in S(A) \right\}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\alpha_j$  — параметр,  $j \in [0 : j_*]$ ,  $S(A) \subset \mathbb{R}^{n_1}$  — шар радиуса  $A$ ,  $A = \sup\{|x(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^{n_1})} : z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\} \in Z(T)\} < +\infty$  с центром в нуле,  $l_i = w^{(1)}(\tau_i) - \xi^h(\tau_i)$ .

Пусть выполнено следующее

**У с л о в и е 1.** Пусть  $n_1 \leq n_2$  и существует число  $c_* > 0$  такое, что у матрицы  $\psi_2(t, y_t(s))$  найдется минор  $n_1$ -го порядка со свойством:  $n_1 \times n_1$ -матрица  $\bar{\psi}_2(t) = \bar{\psi}_2(t, y_t(s))$ , соответствующая этому минору, при каждом  $t \in T$  и всех  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$  удовлетворяет условию

$$|\bar{\psi}_2(t)x| \geq c_* |x|.$$

Параметр  $\alpha_j$  выберем следующим образом:

$$\alpha_0 = Ch^{2/3}, \quad \alpha_j = Cg_j^{2/3}(h), \quad j \geq 1, \quad C = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\delta = \delta(h) \leq h$ , тогда справедливы неравенства

$$|v^h(\cdot) - x(\cdot)|_{L_2(\Delta^{(j-1)}; \mathbb{R}^{n_1})}^2 \leq c_j g_j(h), \quad j \in [1 : j_*].$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, приведем вспомогательные утверждения. Справедливость теоремы 1 будет вытекать из леммы 5. Рассмотрим две системы

$$\dot{p}(t) = f_1(t) + f_2(t)u_1(t), \quad t \in T, \\ \dot{q}(t) = F_1(t) + F_2(t)u_2(t),$$

где  $p(t), q(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_1(\cdot), F_1(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$ ,  $f_2(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^{n \times r})$ ,  $F_2(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^{n \times r})$ ,  $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)$ ,  $|u_p(\cdot)|_{L_\infty(T; \mathbb{R}^r)} \leq K$ ,  $p = 1, 2$ .

Введем обозначения:  $\Delta_*^{(j)} = [t_j^*, t_{j+1}^*] \cap T$ ,  $t_j^* = t_0 + \tau_* j$ ,  $j \in [0 : j_0]$ ,  $\Delta^{(-1)} = [t_0 - \tau_*, t_0]$ ,  $\tau_* = \text{const} \in (0, \vartheta - t_0)$ ,  $j_0 = \max\{j : t_j^* \leq \vartheta\}$ . Пусть  $r \leq n$  и существует число  $c > 0$  такое, что у матрицы  $f_2(t)$  найдется минор  $r$ -го порядка со свойством:  $r \times r$ -матрица  $\bar{f}_2(t)$ , соответствующая этому минору, при каждом  $t \in T$  и всех  $u \in \mathbb{R}^r$  удовлетворяет условию  $|\bar{f}_2(t)u| \geq c|u|$ .

**Лемма 1.** Пусть функция  $t \rightarrow (\bar{f}_2(t))^{-1}u_1(t)$  является функцией с ограниченной вариацией на  $T$  и выполнены условия:

$$|f_1(\cdot) - F_1(\cdot)|_{L_2(\Delta_*^{(j)}; \mathbb{R}^n)}^2 \leq a_1^{(j)}, \quad (2.4)$$

$$|f_2(\cdot) - F_2(\cdot)|_{L_2(\Delta_*^{(j)}; \mathbb{R}^{n \times r})}^2 \leq a_2^{(j)}, \quad (2.5)$$

$$|p(t_j^*) - q(t_j^*)|^2 \leq a_4^{(j)}, \quad (2.6)$$

$$|p(t) - q(t)|^2 + \tilde{\alpha}_j \int_{t_j^*}^t \{|u_2(\nu)|^2 - |u_1(\nu)|^2\} d\nu \leq a_3^{(j)}, \quad (2.7)$$

$$t \in [t_j^*, t_{j+1}^*], \quad \tilde{\alpha}_j = \text{const} \in (0, +\infty).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\mu^{(j)} \equiv |u_1(\cdot) - u_2(\cdot)|_{L_2(\Delta_*^{(j)}; \mathbb{R}^r)}^2 \leq K_j \left\{ \sum_{l=1}^4 (a_l^{(j)})^{1/2} + \tilde{\alpha}_j^{1/2} \right\} + a_3^{(j)} / \tilde{\alpha}_j.$$

**Доказательство.** Пусть  $t \in \Delta_*^{(j)}$ . Тогда в силу (2.4)–(2.7) верна оценка

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_j^*}^t \bar{f}_2(\nu) \{u_1(\nu) - u_2(\nu)\} d\nu \right| \leq \left| \int_{t_j^*}^t f_2(\nu) \{u_1(\nu) - u_2(\nu)\} d\nu \right| \\ &= \left| \int_{t_j^*}^t \{\dot{p}(\nu) - f_1(\nu) - f_2(\nu)u_2(\nu)\} d\nu \right| = \left| \int_{t_j^*}^t \{\dot{p}(\nu) - \dot{q}(\nu) + F_1(\nu) - f_1(\nu) + (F_2(\nu) - f_2(\nu))u_2(\nu)\} d\nu \right| \\ & \leq (a_3^{(j)} + 2\tau_* K^2 \tilde{\alpha}_j)^{1/2} + (a_4^{(j)})^{1/2} + \tau_*^{1/2} \{(a_1^{(j)})^{1/2} + K(a_2^{(j)})^{1/2}\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Воспользовавшись соотношением (2.7), выводим неравенство

$$\begin{aligned} \mu^{(j)} &= |u_1(\cdot)|_{L_2(\Delta_*^{(j)}; \mathbb{R}^r)}^2 - 2(u_1(\cdot), u_2(\cdot))_{L_2(\Delta_*^{(j)}; \mathbb{R}^r)} \\ &+ |u_2(\cdot)|_{L_2(\Delta_*^{(j)}; \mathbb{R}^r)}^2 \leq 2|u_1(\cdot)|_{L_2(\Delta_*^{(j)}; \mathbb{R}^r)}^2 - 2(u_1(\cdot), u_2(\cdot))_{L_2(\Delta_*^{(j)}; \mathbb{R}^r)} + a_3^{(j)} / \tilde{\alpha}_j. \end{aligned}$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \mu^{(j)} &\leq 2 \int_{t_j^*}^{t_{j+1}^*} (u_1(\nu) - u_2(\nu), u_1(\nu))_{\mathbb{R}^r} d\nu + a_3^{(j)} / \tilde{\alpha}_j \\ &= 2 \int_{t_j^*}^{t_{j+1}^*} (\bar{f}_2(\nu)(u_1(\nu) - u_2(\nu)), \bar{f}_2^{-1}(\nu)u_1(\nu))_{\mathbb{R}^r} d\nu + a_3^{(j)} / \tilde{\alpha}_j. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отсюда, учитывая (2.8), (2.9) и результаты работы [17], получаем

$$\begin{aligned} \mu^{(j)} &\leq \left\{ (a_3^{(j)} + 2\tau_* K^2 \tilde{\alpha}_j)^{1/2} + (a_4^{(j)})^{1/2} + \tau_*^{1/2} ((a_1^{(j)})^{1/2} + (a_2^{(j)})^{1/2}) \right\} \\ &\times \left( \sup_{t \in \Delta_*^{(j)}} |\bar{f}_2^{-1}(t)u_1(t)| + \text{var}_{\Delta_*^{(j)}}(\bar{f}_2^{-1}(\cdot)u_1(\cdot)) \right) + a_3^{(j)} / \tilde{\alpha}_j \leq K_j \left\{ \sum_{l=1}^4 (a_l^{(j)})^{1/2} + \tilde{\alpha}_j^{1/2} \right\} + a_3^{(j)} / \tilde{\alpha}_j. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Имеют место следующие леммы

**Лемма 2.** Пучок решений системы (1.1), (1.2)  $Z(T)$  ограничен в пространстве  $W^{1,\infty}(T; \mathbb{R}^{n_1+n_2}) = \{z(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^{n_1+n_2}) : \dot{z}(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^{n_1+n_2})\}$ .

**Лемма 3.** Пучок решений системы (2.1) ограничен в пространстве  $W^{1,\infty}(T; \mathbb{R}^{n_2})$ .

Справедливость лемм 2 и 3 легко проверить, если воспользоваться условиями (1.3), (1.7)–(1.9). Введем величины

$$\lambda_j(t, x(\cdot), y(\cdot), w^{(1)}(\cdot), v^h(\cdot)) = \varepsilon(t) + \alpha_j \int_{t_j}^t \{|v^h(\nu)|^2 - |x(\nu)|^2\} d\nu,$$

$$\varepsilon(t) = |y(t) - w^{(1)}(t)|^2, \quad j \in [0 : j_*], \quad t \in T.$$

**Лемма 4.** Стратегия (2.2) обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda_j(t, x(\cdot), y(\cdot), w^{(1)}(\cdot), v^h(\cdot)) \leq b_j, \quad t \in \Delta^{(j)} \cap T, \quad j \in [0 : j_*],$$

где

$$b_j = |y(t_j) - w^{(1)}(t_j)|^2 + c_j^{(1)}(h + \delta) + c_j^{(2)} \sum_{k=j-l}^j \nu^{(k)},$$

$$\nu^{(j)} = |v^h(\cdot) - x(\cdot)|_{L_2(\Delta^{(j-1)}; \mathbb{R}^{n_1})}^2,$$

$v^h(t) = x(t)$  при  $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ ,  $v^h(t) = x_0(-\tau)$  при  $t \in [t_0 - \tau - \tau_1^x, t_0 - \tau)$ ;  $c_j^{(1)}$ ,  $c_j^{(2)}$  — постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

**Доказательство.** Оценим изменение величины

$$\varepsilon_j(t) = \varepsilon(t) + \alpha_j \int_{t_j}^t \{|v^h(\nu)|^2 - |x(\nu)|^2\} d\nu, \quad t \in \Delta^{(j)} \cap T.$$

Фиксируем  $\tau_i \in \Delta^{(j)}$ . Тогда при  $t \in \Delta^{(j)} \cap \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$  будем иметь

$$\varepsilon_j(t) \leq \varepsilon_j(\tau_i) + \sum_{j=1}^4 \Lambda_{ji}(t), \tag{2.10}$$

где

$$\Lambda_{1i}(t) = 2 \left( s_i, \int_{\tau_i}^t \left\{ \psi_1(\nu, x_\nu(s), y_\nu(s)) - \psi_1(\tau_i, v_\nu^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s)) \right\} d\nu \right), \quad s_i = y(\tau_i) - w^{(1)}(\tau_i),$$

$$\Lambda_{2i}(t) = 2 \left( s_i, \int_{\tau_i}^t \left\{ \psi_2(\nu, y_\nu(s))x(\nu) - \psi_2(\tau_i, \xi_{\tau_i}^h(s))v_i^h \right\} d\nu \right) + \alpha_j \int_{\tau_i}^t \{|v^h(\nu)|^2 - |x(\nu)|^2\} d\tau,$$

$$\Lambda_{3i}(t) = -2(t - \tau_i)(s_i, \xi^h(\tau_i) - w^{(1)}(\tau_i)), \quad \Lambda_{4i}(t) = (t - \tau_i) \int_{\tau_i}^t |\dot{w}^{(1)}(\tau) - \dot{y}(\tau)|^2 d\tau.$$

В силу лемм 2 и 3 справедливо неравенство

$$\Lambda_{4i}(t) \leq K_*^{(j)}(t - \tau_i)^2, \quad t \in \delta_i. \quad (2.11)$$

Заметим, что  $v^h(\tau_i + s) = v^h(t + s)$  при  $s \geq t_0 - \tau_i$  и  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ , кроме того,

$$|\xi^h(\tau_i + s) - y(t + s)| \leq K_*(h + t - \tau_i) \quad \text{при} \quad \tau_i + s \geq t_0 - \tau. \quad (2.12)$$

Поэтому, снова учитывая лемму 2, а также липшицевость функций  $x_0(s)$  и  $y_0(s)$  и неравенства (1.9), (2.12), получаем при  $t \in \delta_i$  соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_i}^t |\psi_1(\nu, x_\nu(s), y_\nu(s)) - \psi_1(\tau_i, v_\nu^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s))| d\nu \\ & \leq K_*^{(j)} \int_{\tau_i}^t \left\{ (\nu - \tau_j) + \sum_{k=1}^m |x(\nu - \tau_k^x) - v^h(\nu - \tau_k^x)| + \sum_{k=0}^n |y(\nu - \tau_k^y) - \xi^h(\tau_i - \tau_k^y)| \right\} d\nu \\ & \leq K_0^{(j)} \left\{ (t - \tau_i)^2 + \int_{\tau_i}^t \sum_{k=0}^n |y(\nu - \tau_k^y) - \xi^h(\tau_i - \tau_k^y)| d\nu + \int_{\tau_i}^t \left( \sum_{k=1}^m |x(\nu - \tau_k^x) - v^h(\nu - \tau_k^x)| \right) d\nu \right\} \\ & \leq K_1^{(j)}(t - \tau_i)(h + t - \tau_i) + K_2^{(j)}(t - \tau_i)^{1/2} \sum_{k=1}^m \left( \int_{\tau_i - \tau_k^x}^{\tau_i - \tau_k^x} |x(\nu) - v^h(\nu)|^2 d\nu \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $\tau_0^y = 0$ . Таким образом, при  $t \in \delta_i$  верна оценка

$$\Lambda_{1i}(t) \leq 2(t - \tau_i)|y(\tau_i) - w^{(1)}(\tau_i)|^2 + K_3^{(j)} \left\{ (t - \tau_i)(h + t - \tau_i)^2 + \sum_{k=1}^m \int_{\tau_i - \tau_k^x}^{\tau_i - \tau_k^x} |x(\nu) - v^h(\nu)|^2 d\nu \right\}. \quad (2.13)$$

Далее, учитывая (1.4), заключаем

$$\Lambda_{3i}(t) \leq -2(t - \tau_i)|y(\tau_i) - w^{(1)}(\tau_i)|^2 + K_4^{(j)}h(t - \tau_i), \quad t \in \delta_i. \quad (2.14)$$

Заметим, что в силу (1.4), (1.8), (2.12) верны неравенства

$$|\psi_2(\nu, y_\nu(s))x(\nu) - \psi_2(\tau_i, \xi_{\tau_i}^h(s))x(\nu)| \leq |\psi_2(\nu, y_\nu(s)) - \psi_2(\tau_i, \xi_{\tau_i}^h(s))||x(\nu)| \leq K_0(h + \nu - \tau_i)$$

при  $\nu \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ . В таком случае

$$\Lambda_{2i}(t) \leq K_5^{(j)}(t - \tau_i)(h + t - \tau_i) + \int_{\tau_i}^t \left\{ 2(l_i, \psi_2(\tau_i, \xi_{\tau_i}^h(s))\{v_i^h - x(\nu)\} + \alpha_j\{|v_i^h|^2 - |x(\nu)|^2\} \right\} d\nu.$$

Учитывая правила выбора управления  $v_i^h$ , а также стратегии  $V(\tau_i, w_{\tau_i}(s), \xi_{\tau_i}^h(s))$  (см. (1.12) и (2.2)), из последнего неравенства выводим

$$\Lambda_{2i}(t) \leq K_5^{(j)}(t - \tau_i)(h + t - \tau_i). \quad (2.15)$$

Объединив (2.10)–(2.15), получаем при  $t \in \Delta^{(j)} \cap \delta_i$

$$\varepsilon_j(t) \leq \varepsilon_j(\tau_i) + K_6^{(j)}\delta(h + \delta) + K_3^{(j)} \sum_{k=1}^m \int_{\tau_i - \tau_k^x}^{\tau_i - \tau_k^x} |x(\nu) - v^h(\nu)|^2 d\nu.$$

Таким образом, при  $t \in \Delta^{(j)} = [t_j, t_{j+1}]$  верно неравенство

$$\varepsilon_j(t) \leq \varepsilon_j(t_j) + K_7^{(j)}(h + \delta) + K_8^{(j)} \sum_{k=1}^m \int_{t_j - \tau_k^x}^{t - \tau_k^x} |x(\nu) - v^h(\nu)|^2 d\nu.$$

Значит,

$$\varepsilon_j(t) \leq \varepsilon_j(t_j) + K_7^{(j)}(h + \delta) + K_9^{(j)} \int_{t_j - \tau}^{t_{j+1} - \tau_1^x} |x(\nu) - v^h(\nu)|^2 d\nu.$$

Заметим, что  $\tau = l\tau_1^x + \gamma$ ,  $\gamma \geq 0$ . Поэтому  $t_{j+1} - \tau_1^x = t_j$ ,  $t_{j-l-1} \leq t_j - \tau \leq t_{j-l}$ . В таком случае при  $t \in \Delta^{(j)}$  имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(t) &\leq \varepsilon_j(t_j) + K_7^{(j)}(h + \delta) + K_9^{(j)} \int_{t_{j-l-1}}^{t_j} |x(\nu) - v^h(\nu)|^2 d\nu \\ &= \varepsilon_j(t_j) + K_7^{(j)}(h + \delta) + K_9^{(j)} \sum_{k=j-l}^j \nu^{(k)}. \end{aligned}$$

Здесь постоянные  $K_k^{(j)}$ ,  $k \in [0 : 9]$ , выписываются в явном виде. Таким образом, можно считать  $c_j^{(1)} = K_7^{(j)}$ ,  $c_j^{(2)} = K_9^{(j)}$ . Лемма доказана.

**Лемма 5.** Пусть  $\delta \leq h$ , а величины  $\alpha_j$  задаются согласно (2.3). Тогда справедливы неравенства

$$\nu^{(j)} \leq c_j g_j(h), \quad (2.16)$$

$$b_j \leq c_j^{(0)} g_j(h). \quad (2.17)$$

**Доказательство.** Пусть для простоты  $t_{j_*+1} = \vartheta$ . В силу леммы 4 при  $t \in \Delta^{(j)}$  имеем

$$\begin{aligned} |y(t) - w^{(1)}(t)| &= \varepsilon^{1/2}(t) \leq \left( \lambda_j(t, x(\cdot), y(\cdot), w^{(1)}(\cdot), v^h(\cdot)) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_j \int_{t_j}^t \{|v^h(\nu)|^2 + |x(\nu)|^2\} d\nu \right)^{1/2} \leq (b_j + \alpha_j \rho_A)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $\rho_A = 2\tau_* d^2(A)$ ,  $d(A) = \sup\{|u| : u \in S(A)\}$ . Учитывая включение  $t_j \in \Delta_h$ , заключаем: для всякого  $j \in [0 : j_*]$  можно указать номер  $i = i_j(h)$  такой, что  $t_j = \tau_{i_j(h)}$ . Введем обозначение  $\varrho_j \equiv |f_1(\cdot) - F_1(\cdot)|_{L_2(\Delta^{(j)}; \mathbb{R}^{n_2})}^2$ . В таком случае, учитывая лемму 2, а также (1.9) и (2.12), имеем

$$\varrho_j \leq d_j^{(1)} \sum_{i=i_j(h)}^{i=i_{j+1}(h)-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ \delta^2 + h^2 + \gamma^h(\nu) + \gamma_i^h(\nu) + |\xi^h(\tau_i) - w^{(1)}(\tau_i)|^2 \right\} d\nu,$$

где

$$\gamma^h(\nu) = \sum_{k=1}^m |x(\nu - \tau_k^x) - v^h(\nu - \tau_k^x)|^2, \quad \gamma_i^h(\nu) = \sum_{k=0}^n |y(\nu - \tau_k^y) - \xi^h(\tau_i - \tau_k^y)|^2.$$

Заметим, что справедливы неравенства

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma^h(\nu) d\nu \leq d_j^{(2)} \int_{t_j - \tau}^{t_j} |x(\nu) - v^h(\nu)|^2 d\nu \leq d_j^{(2)} \int_{t_{j-l-1}}^{t_j} |x(\nu) - v^h(\nu)|^2 d\nu = d_j^{(2)} \sum_{k=j-l}^j \nu^{(k)}, \quad (2.19)$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma_i^h(\nu) d\nu \leq d_j^{(3)}(h^2 + \delta^2). \quad (2.20)$$

Кроме того

$$\nu^{(k)} = 0 \quad \text{при } k \in [-l : 0]. \quad (2.21)$$

Тогда, учитывая неравенства (2.18)–(2.20), получаем оценки

$$\varrho_j \leq d_j^{(5)} \left\{ h^2 + \delta^2 + \sum_{k=j-l}^j \nu^{(k)} + b_j + \alpha_j \right\}, \quad j \in [0 : j_*]. \quad (2.22)$$

Нетрудно видеть, что справедливы также оценки

$$|f_2(\cdot) - F_2(\cdot)|_{L_2(\Delta^{(j)}; \mathbb{R}^{n_2 \times n_1})}^2 \leq d_j^{(5)}(h^2 + \delta^2), \quad j \in [0 : j_*]. \quad (2.23)$$

Здесь постоянные  $d_j^{(1)}-d_j^{(5)}$  могут быть выписаны в явном виде. В силу леммы 4, (2.18) и (2.21) при  $\delta \leq h$  получаем

$$\lambda_0(t, x(\cdot), y(\cdot), w^{(1)}(\cdot), v^h(\cdot)) \leq b_0 \leq c_0^* h, \quad t \in \Delta^{(0)}, \quad (2.24)$$

$$|y(t_1) - w^{(1)}(t_1)|^2 \leq \rho_A \alpha_0 + c_0^* h \leq c_* h^{2/3}. \quad (2.25)$$

В свою очередь, учитывая (2.21)–(2.24), имеем при  $h \in (0, 1)$

$$\varrho_0 \leq d_0^{(1)} \{h^2 + \delta^2 + b_0 + h^{2/3}\} \leq d_0^* h^{2/3}, \quad |f_2(\cdot) - F_2(\cdot)|_{L_2(\Delta^{(0)}; \mathbb{R}^{n_2 \times n_1})}^2 \leq c_j^{(*)} h^2.$$

В силу условия 1 можно воспользоваться леммой 1. Положим  $p = y$ ,  $q = w^{(1)}$ ,  $u_1 = x$ ,  $u_2 = v^h$ ,  $f_1(t) = \psi_1(t, x_t(s), y_t(s))$ ,  $f_2(t) = \psi_2(t, y_t(s))$ ,  $F_1(t) = \psi_1(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s)) + 2(\xi^h(\tau_i) - w^{(1)}(\tau_i))$ ,  $F_2(t) = \psi_2(\tau_i, \xi_{\tau_i}^h(s))$  при  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ . Тогда, считая  $a_1^{(0)} = d_0^* h^{2/3}$ ,  $a_2^{(0)} = c_j^{(*)} h^2$ ,  $a_3^{(0)} = c_0^* h$ ,  $a_4^{(0)} = c_* h^{2/3}$ ,  $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 = ch^{2/3}$ , будем иметь

$$\nu^{(1)} = |x(\cdot) - v^h(\cdot)|_{L_2(\Delta^{(0)}; \mathbb{R}^{n_1})}^2 \leq \tilde{c}_1 h^{1/3} = c_1 g_1(h), \quad (2.26)$$

т. е. неравенство (2.16) верно при  $j = 1$ . Далее, учитывая (2.25) и (2.26), выводим

$$b_1 = |y(t_1) - w^{(1)}(t_1)|^2 + c_1^{(1)}(h + \delta) + c_1^{(2)} \sum_{k=1-l}^1 \nu^{(k)} \leq \tilde{c}_1^{(0)} h^{1/3} = c_1^{(0)} g_1(h). \quad (2.27)$$

Неравенство (2.17) при  $j = 1$  также установлено. Из (2.18) вытекают неравенства

$$|y(t_j) - w^{(1)}(t_j)|^2 \leq b_{j-1} + \rho_A \alpha_{j-1}, \quad j \in [1 : j_* - 1]. \quad (2.28)$$

Следовательно, учитывая (2.28), а также правило определения  $b_j$ , имеем

$$\begin{aligned} b_j &\leq b_{j-1} + \rho_A \alpha_{j-1} + c_j^{(1)}(h + \delta) + c_j^{(2)} \sum_{k=j-l}^j \nu^{(k)} \\ &\leq b_{j-1} + d_j(h + \alpha_{j-1} + \sum_{k=j-l}^j \nu^{(k)}), \quad d_j = \text{const} \in (0, +\infty). \end{aligned} \quad (2.29)$$

При  $j \geq 1$  положим в лемме 1  $a_1^{(j)} = d_j^{(4)} \{h^2 + \delta^2 + \sum_{k=j-l}^j \nu^{(k)} + a_3^{(j)} + \alpha_j\}$ ,  $a_3^{(j)} = b_j$ ,  $a_2^{(j)} = d_j^{(5)}(h^2 + \delta^2)$ ,  $a_4^{(j)} = b_{j-1} + \rho_A \alpha_{j-1}$ ,  $j \in [1 : j_*]$ . (При выборе величин  $a_i^{(j)}$  мы воспользовались

леммой 4, а также неравенствами (2.23), (2.24) и (2.28)). Тогда получаем из этой леммы и (2.29)

$$\nu^{(j+1)} \leq c^{(j)} \left\{ h^{1/2} + \left( \sum_{k=j-l}^j \nu^{(k)} \right)^{1/2} + b_{j-1}^{1/2} + \alpha_{j-1}^{1/2} + \alpha_j^{1/2} \right\} + b_j \alpha_j^{-1}, \quad j \in [1 : j_*]. \quad (2.30)$$

Теперь доказательство (2.16), (2.17) можно провести по индукции. При  $j = 1$  неравенства (2.16), (2.17) справедливы (см. (2.26), (2.27)). Положив в (2.30)  $j = 1$ , получим, что неравенство (2.16) верно при  $j = 2$ . Отсюда и из (2.29) получаем неравенство (2.17) при  $j = 2$ . Пусть неравенства (2.16), (2.17) верны при  $j > 2$ . В силу соотношений  $h \in (0, 1)$ ,  $g_j(h) < g_{j+1}(h)$ ,  $g_{j+1}(h) = g_j^{1/3}(h)$  имеем

$$\left( \sum_{k=j-l}^j \nu^{(k)} \right)^{1/2} \leq l(\nu^{(j)})^{1/2} \leq l g_j^{1/3}(h) = l g_{j+1}(h).$$

Значит, учитывая (2.30), а также неравенства  $b_{j-1} \leq c_{j-1}^{(0)} g_{j-1}(h) \leq c_{j-1}^{(0)} g_{j+1}(h)$ ,  $\alpha_j < \alpha_{j+1}$ , имеем

$$\nu^{(j+1)} \leq c_{j+1} \{g_{j+1}(h) + \alpha_j^{1/2}(h)\} + g_j(h) \alpha_j^{-1}(h). \quad (2.31)$$

Воспользовавшись равенством (см. (2.3))  $g_j(h) \alpha_j^{-1}(h) = 1/C g_j^{1/3}(h)$ , из (2.31) выводим (2.16). Неравенство (2.17) вытекает из (2.29), (2.16) и устанавливается аналогично. Лемма доказана.

### 3. Реконструкция неизвестных управлений

Перейдем к описанию алгоритма динамического восстановления неизвестного входного воздействия  $u(\cdot)$ . Именно, укажем правила выбора стратегии  $U$  (1.13) и модели, обеспечивающих формирование функции  $u^h(\cdot)$  — приближения  $u(\cdot)$  (см. (1.6)).

Пусть фиксированы величина погрешности измерения  $h \in (0, 1)$  и семейство разбиений  $\Delta_h$  (1.10) отрезка  $T$ . В качестве модели возьмем систему, описываемую уравнением

$$\begin{aligned} \dot{w}^{(0)}(t) &= F_0(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), u_i^h), \\ \dot{w}^{(1)}(t) &= F_1(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), w^{(1)}(\tau_i)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$F_0(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), u_i^h) = f_1(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s)) + f_2(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s)) u_i^h$ ,  $w^{(0)} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$  с начальным условием  $w_{t_0}^{(0)}(s) = x(t_0 + s)$  при  $s \in [-\tau, 0]$ ,  $w_{t_0}^{(1)}(s) = y(t_0 + s)$  при  $s \in [-\tau, 0)$ ,  $w^{(1)}(t_0) = \xi^h(t_0)$ . Решение этого уравнения  $w^h(\cdot) = \{w^{(0)}(\cdot), w^{(1)}(\cdot)\} = w^h(\cdot; t_0, w_{t_0}^h(s), v^h(\cdot), u^h(\cdot))$  понимается также в смысле Каратеодори.

Таким образом в уравнении модели (см. (1.11))

$$\rho(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), u_i^h, w^{(1)}(\tau_i)) = \left\{ \begin{array}{l} F_0(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), u_i^h) \\ F_1(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), w^{(1)}(\tau_i)) \end{array} \right\}.$$

Стратегию  $U$  (1.13) зададим следующим образом:

$$U(\tau_i, w_{\tau_i}^{(0)}(s), \xi_{\tau_i}^h(s), v_{\tau_i}^h(s)) = \arg \min \left\{ 2(l_i^{(1)}, f_2(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s))u) + \alpha^{(1)}|u|^2 : u \in P \right\}. \quad (3.2)$$

Здесь  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(1)}(h) : (0, 1) \rightarrow R_+$  — некоторая функция,  $l_i^{(1)} = w^{(0)}(\tau_i) - v_i^h$ .

Пусть символ  $U(y(\cdot))$  означает совокупность всех управлений  $u(\cdot) \in P(\cdot)$ , совместимых с выходом  $y(\cdot)$ . Нетрудно проверить, что это множество выпукло, ограничено и замкнуто в  $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ . Поэтому существует элемент

$$u_*(\cdot) = u_*(\cdot; y(\cdot)) = \arg \min \{ |u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)} : u(\cdot) \in U(y(\cdot)) \}.$$

Имеет место

**Теорема 2.** Пусть  $\delta = \delta(h) \leq h$ ,  $\alpha^{(1)}(h) \rightarrow 0$ ,  $g_{j_*}^{1/2}(h)/\alpha^{(1)}(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , тогда

$$u^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \quad \text{в } L_2(T; \mathbb{R}^r) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2, приведем два вспомогательных утверждения.

**Лемма 6.** Пучок решений системы (3.1) ограничен в пространстве  $W^{1,\infty}(T; \mathbb{R}^{n_1+n_2})$ .

Справедливость леммы 6 легко проверить, если воспользоваться условиями (1.3), (1.4), (1.7)–(1.9).

Введем величину

$$\lambda(t) = \lambda(t, x(\cdot), w^{(0)}(\cdot), u_*(\cdot), u^h(\cdot)) = |x(t) - w^{(0)}(t)|^2 + \alpha^{(1)} \int_{t_0}^t \{|u^h(\nu)|^2 - |u_*(\nu)|^2\} d\nu.$$

**Лемма 7.** Стратегия (3.2) обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda(t, x(\cdot), w^{(0)}(\cdot), u_*(\cdot), u^h(\cdot)) < |x(t_0) - w^{(0)}(t_0)|^2 + C^{(1)}(h + \delta) + C^{(2)} \int_{t_0}^t |x(\nu) - v^h(\nu)| d\nu,$$

$C^{(1)}$ ,  $C^{(2)}$  — постоянные, выписываемые в явном виде.

**Доказательство.** Оценим изменение величины  $\lambda(t)$ . Фиксируем  $\tau_i$ . Тогда при  $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$  будем иметь

$$\lambda(t) \leq \lambda(\tau_i) + \sum_{j=1}^3 \Lambda_{ji}^0(t), \quad (3.3)$$

где

$$\Lambda_{1i}^0(t) = 2 \left( s_i^{(1)}, \int_{\tau_i}^t \{f_1(\nu, x_\nu(s), y_\nu(s)) - f_1(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s))\} d\nu \right), \quad s_i^{(1)} = x(\tau_i) - w^{(0)}(\tau_i),$$

$$\Lambda_{2i}^0(t) = 2 \left( s_i^{(1)}, \int_{\tau_i}^t \{f_2(\nu, x_\nu(s), y_\nu(s)) u_*(\nu) - f_2(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s)) u_i^h\} d\nu \right)$$

$$+ \alpha^{(1)} \int_{\tau_i}^t \{|u^h(\nu)|^2 - |u_*(\nu)|^2\} d\nu, \quad \Lambda_{3i}^0(t) = (t - \tau_i) \int_{\tau_i}^t |\dot{w}^{(0)}(\tau) - \dot{x}(\tau)|^2 d\tau.$$

В силу лемм 2 и 6 справедливы неравенства

$$\Lambda_{3i}^0(t) \leq k_0(t - \tau_i)^2, \quad t \in \delta_i, \quad (3.4)$$

$$|s_i^{(1)}| \leq k_1. \quad (3.5)$$

Здесь и ниже постоянные  $k_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , не зависят от  $i$  и  $t$ . Учитывая липшицевость функций  $x_0(s)$  и  $y_0(s)$ , получаем при  $t \in \delta_i$  соотношения

$$\int_{\tau_i}^t |f_1(\nu, x_\nu(s), y_\nu(s)) - f_1(\tau_i, v_\nu^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s))| d\nu$$

$$\begin{aligned} &\leq k_2 \int_{\tau_i}^t \left\{ (\nu - \tau_j) + \sum_{k=1}^m |x(\nu - \tau_k^x) - v^h(\nu - \tau_k^x)| + \sum_{k=0}^n |y(\nu - \tau_k^y) - \xi^h(\tau_i - \tau_k^y)| \right\} d\nu \\ &\leq k_3(t - \tau_i)(h + (t - \tau_i)) + k_4 \int_{\tau_i}^t \left( \sum_{k=0}^m |x(\nu - \tau_k^x) - v^h(\nu - \tau_k^x)| \right) d\nu, \quad \tau_0^x = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (3.5) при  $t \in \delta_i$  верна оценка

$$\Lambda_{1i}^0(t) \leq k_5 \left\{ (t - \tau_i)(h + (t - \tau_i)) + \int_{\tau_i}^t \left( \sum_{k=0}^m |x(\nu - \tau_k^x) - v^h(\nu - \tau_k^x)| \right) d\nu \right\}. \quad (3.6)$$

Аналогично (3.6) при  $t \in \delta_i$  устанавливается оценка

$$\begin{aligned} &\int_{\tau_i}^t |f_2(\eta, x_\eta(s), y_\eta(s))u_*(\eta) - f_2(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s))u_*(\eta^h)| d\eta \\ &\leq k_6 \left\{ (t - \tau_i)^2 + \int_{\tau_i - \tau}^t |y(\tau) - \xi^h(\tau)| d\tau + \int_{\tau_i}^t \left( \sum_{k=0}^m |x(\nu - \tau_k^x) - v^h(\nu - \tau_k^x)| \right) d\nu \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Кроме того, учитывая лемму 2, а также неравенство (1.4), при  $t \in \delta_i$  получаем

$$\int_{\tau_i - \tau}^t |y(\tau) - \xi^h(\tau)| d\tau \leq k_7(h + \delta). \quad (3.8)$$

Поэтому в силу (3.7), (3.8) имеем при  $t \in \delta_i$

$$\begin{aligned} \Lambda_{2i}^0(t) &\leq k_8(t - \tau_i)(h + \delta) + \int_{\tau_i}^t \left\{ 2(s_i^{(1)}, f_2(\tau_i, v_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s))) \{u_*(\nu) - u_i^h\} \right. \\ &\quad \left. + \alpha^{(1)} \{ |u_i^h|^2 - |u_*(\nu)|^2 \} \right\} d\nu + k_9 |s_i^{(1)}| \int_{\tau_i}^t \left( \sum_{k=0}^m |x(\nu - \tau_k^x) - v^h(\nu - \tau_k^x)| \right) d\nu. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Снова воспользовавшись леммой 2, устанавливаем при  $t \in \delta_i$  оценку

$$\int_{\tau_i}^t |l_i^{(1)} - s_i^{(1)}| d\nu = \int_{\tau_i}^t |x(\tau_i) - v_i^h| d\nu \leq \int_{\tau_i}^t |x(\nu) - v^h(\nu)| d\nu + k_{10}(t - \tau_i). \quad (3.10)$$

Учитывая правило выбора управления  $u_i^h$ , а также стратегии  $U(\tau_i, w_{\tau_i}^h(s), \xi_{\tau_i}^h(s), v_{\tau_i}^h(s))$  (1.13) и (3.2) из (3.9), (3.10) получаем при  $t \in \delta_i$

$$\Lambda_{2i}^0(t) \leq k_{11}(t - \tau_i)(h + \delta) + k_{12} \int_{\tau_i}^t \left( \sum_{j=0}^m |x(\nu - \tau_j^x) - v^h(\nu - \tau_j^x)| \right) d\nu. \quad (3.11)$$

Объединив оценки (3.3), (3.4), (3.6), (3.11), получаем при  $t \in \delta_i$

$$\lambda(t) \leq \lambda(\tau_i) + k_{13}\delta(h + \delta) + k_{14} \int_{\tau_i}^t \left( \sum_{j=0}^m |x(\nu - \tau_j^x) - v^h(\nu - \tau_j^x)| \right) d\nu.$$

Таким образом, при  $t \in T$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &\leq \lambda(t_0) + k_{15}(h + \delta) + k_{15} \int_{t_0}^t \left( \sum_{j=1}^m |x(\nu - \tau_j^x) - v^h(\nu - \tau_j^x)| \right) d\nu \\ &\leq k_{15}(h + \delta) + k_{16} \int_{t_0}^t |x(\nu) - v^h(\nu)|^2 d\nu, \end{aligned} \quad (3.12)$$

ибо  $v^h(t_0 + s) = x(t_0 + s)$  при  $s \in [-\tau, 0]$ . Из (3.12) следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. В силу леммы 7 и теоремы 1, учитывая равенство  $w^{(0)}(t_0) = x(t_0)$ , имеем

$$\lambda(t, x(\cdot), w^{(0)}(\cdot), u_*(\cdot), u^h(\cdot)) \leq c^{(3)}(h + \delta(h) + g_{j_*}^{1/2}(h)).$$

Таким образом,

$$\sup_{t \in T} |x(t) - w^{(0)}(t)|^2 \leq c^{(4)}(\alpha^{(1)}(h) + h + \delta(h) + g_{j_*}^{1/2}(h)),$$

$$\int_{t_0}^t |u^h(\nu)|^2 d\nu \leq \int_{t_0}^t |u_*(\nu)|^2 d\nu + (h + \delta(h) + g_{j_*}^{1/2}(h))/\alpha^{(1)}(h), \quad t \in T.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся по стандартной схеме (см., например, [6]). Теорема доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 287 с.
2. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, СО, 1980. 286 с.
3. **Васильев Ф.П.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
4. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
5. **Banks Н.Т., Kunisch К.** Estimation techniques for distributed parameter systems. Boston: Birkhäuser, 1989. 316 p.
6. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 29–41.
7. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 420 с.
8. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. **Osipov Yu.S.** On reconstruction of a parameter of dynamical system // Functional-differential equations: Proc. Int. Symp. Kyoto, Japan, 1990. P. 309–317.
10. **Близорукова М.С.** О моделировании входа в системе с запаздыванием // Прикладная математика и информатика: Тр. фак. ВМиК МГУ им. Ломоносова. М.: МАКС Пресс, 2000. № 5. С. 105–115.
11. **Васильева Е.В.** Динамический метод невязки для дифференциального уравнения с памятью // Проблемы математической физики. М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 68–74.
12. **Kadiyev A.M., Maksimov V.I.** Dynamical discrepancy method in an input reconstruction problem for a delay system // Funct. Differ. Equ. 2007. Vol. 15, № 3–4. P. 219–237.
13. **Kappel F., Maksimov V.I.** Robust dynamic input reconstruction for delay systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2000. Vol. 10, no. 2. P. 283–307.
14. **Maksimov V.I.** Problems of robust control and dynamical input reconstruction for time-delay systems // Proc. of the 5th European Control Conference. Karlsruhe, Germany, 1999. P. 721–727.

15. **Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S.** Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solution // London: Gordon and Breach, 1995. 851 p.
16. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Об устойчивом позиционном восстановлении управления по измерениям координат // Сб. науч. тр. Свердловск: УрО АН СССР, 1989. С. 33–47.
17. **Вдовин А.Ю.** Оценки погрешности в задаче динамического восстановления управления // Задачи позиционного моделирования: сб. науч. тр. Свердловск: УрО АН СССР, 1986. С. 3–11.

Максимов Вячеслав Иванович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. отделом  
Институт математики и механики УрО РАН  
Уральский федеральный университет  
maksimov@imm.uran.ru

Поступила 01.06.2011

Близорукова Марина Сергеевна  
канд. физ.-мат. наук, доцент  
старший науч. сотрудник  
Институт математики и механики УрО РАН  
Уральский федеральный университет  
e-mail: msb@imm.uran.ru.

УДК 514.7

## ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ПЛОСКОВИНТОВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ<sup>1</sup>

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Рассматривается решение задачи, состоящей в том, чтобы выделить конкретное векторное поле из класса  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  всех гладких в некоторой области  $D \subset R^3$  векторных полей. Класс  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  исчерпывается полями, каждое из которых соленоидально в  $D$ , линии его образуют семейство гладких кривых, лежащих в плоскостях, параллельных некоторой фиксированной плоскости  $R^2 \subset R^3$ , и всюду в  $D$  совпадают с вихревыми линиями поля. Формулируются дополнительные условия в виде краевых условий, которым должно удовлетворять выделяемое поле на подходящих, специально выбранных линиях, принадлежащих границе  $\partial D$  области  $D$ , при не очень стеснительных ограничениях на саму область  $D$  и ее проекцию  $D^2$  на плоскость  $R^2$ . В результате выделение конкретного поля из класса  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  сводится к решению краевой задачи, составной частью которой является задача о нахождении пары функций, гармонически сопряженных в  $D^2$  и непрерывных в замыкании  $\overline{D^2}$ , которые на границе области  $D^2$  принимают непрерывные заданные значения. Предлагается алгоритм решения краевой задачи. Детально рассматривается решение краевой задачи в случае областей  $D$ , проекции которых на плоскость  $R^2$  представляют собой открытый круг  $K$  единичного радиуса. При этом используется подход, основанный на представлении компонент поля в виде разложений в ряды по системе гармонических всплесков, равномерно сходящиеся в замыкании  $\overline{K}$ . Найденное для такой области векторное поле можно распространять затем на любую область  $D$ , проекция  $D^2$  которой есть конформный образ единичного круга.

Ключевые слова: скалярные поля, векторные поля, тензорные поля, ротор, всплески, задача Дирихле.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Statement and solution of a boundary value problem in the class of planar-helical vector fields.

The problem is solved on the selection of a particular vector field from the class  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  of all vector fields smooth in some domain  $D \subset R^3$ . The class  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  consists of fields that are solenoidal in  $D$  and such that the lines of each field form a family of smooth curves lying in planes parallel to some fixed plane  $R^2 \subset R^3$  and coincide everywhere in  $D$  with the vortex lines of the field. Additional conditions are formulated in the form of boundary conditions for the selected field on certain specially chosen lines belonging to the boundary  $\partial D$  under some not very restricting conditions on the domain  $D$  and on its projection  $D^2$  to the plane  $R^2$ . As a result, the selection of a particular field from the class  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  is reduced to solving a boundary value problem, a part of which is the problem on finding a pair of functions that are harmonically conjugate in  $D^2$  and continuous in the closure  $\overline{D^2}$  and take specified continuous values on the boundary of the domain  $D^2$ . An algorithm for solving the boundary value problem is proposed. The solution of the boundary value problem is considered in detail for the case of the domain  $D$  whose projection to the plane  $R^2$  is an open unit disk  $K$ . We use an approach based on representing the components of the field as series expansions in terms of a system of harmonic wavelets converging uniformly in the closure  $\overline{K}$ . The vector field found for such a domain can then be extended to any domain  $D$  whose projection  $D^2$  is a conformal image of a unit disk.

Keywords: scalar fields, vector fields, tensor fields, curl, wavelets, Dirichlet problem.

В работе [1] построен класс  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  гладких<sup>2</sup> соленоидальных плосковинтовых в некоторой области  $D$  евклидова пространства  $R^3$  векторных полей, исчерпывающий все гладкие в  $D$  решения системы уравнений

$$[\mathbf{V}(\mathbf{X}), \text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{X})] = 0, \quad \text{div } \mathbf{V}(\mathbf{X}) = 0, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{V}(\mathbf{X})) = 0, \quad (1)$$

дополненной условием

$$\text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{X}) \neq 0 \quad \text{п. в. в } D. \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00014, 11-01-00347, 11-01-00462) и УРО РАН (проект 09-П-1-1013) в рамках программы Президиума РАН № 29 “Математическая теория управления”.

<sup>2</sup>Поле (скалярное, векторное) считается здесь гладким, если оно непрерывно дифференцируемо.

Здесь  $\mathbf{X}$  — радиус-вектор произвольной точки из  $D$ , определяющий ее положение относительно некоторой точки  $O \in R^3$ , и сама точка;  $\mathbf{n}$  — любой фиксированный единичный вектор. В случае областей  $D$  с цилиндрическими границами, образующие которых коллинеарны  $\mathbf{n}$ , в [1] устанавливаются также дополнительные (краевые) условия, позволяющие выделять из класса  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  одно решение системы (1), (2). Они формулируются в виде соотношений, которым должно удовлетворять искомое решение на выделенных специальным образом линиях, принадлежащих границе области. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы сформулировать краевую задачу в классе  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  векторных полей при менее стеснительных ограничениях на область  $D$  и указать алгоритм ее решения.

Для этого выделим сначала подмножества точек границы области  $D$ , на которых необходимо задавать дополнительные условия.

1. Возьмем в  $R^3$  декартову систему координат  $OX_1X_2X_3$  с началом в точке  $O$  и базисом  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}\}$ . Тогда  $\mathbf{X} = \mathbf{X}(X_1, X_2, X_3) = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$ .

Рассмотрим некоторую область  $D \subset R^3$  и свяжем с ней, как и в [1], область  $\tilde{D}$ , следуя правилу

$$\tilde{D} = D^2 \times D^1, \quad (3)$$

где области  $D^2$  и  $D^1$  — суть проекции области  $D$  соответственно на плоскость  $X_3 = 0$  и прямую  $X_1 = 0, X_2 = 0$ , т. е.

$$D^2 = \{(X_1, X_2): \mathbf{X}(X_1, X_2, X_3) \in D\}, \quad (4)$$

$$D^1 = \{(\mathbf{e}_3, \mathbf{X}) = X_3: \mathbf{X}(X_1, X_2, X_3) \in D\}. \quad (5)$$

Рассматриваемая область  $D$  относится к областям, проекции которых на плоскость  $X_3 = 0$  суть области  $D^2$  плоскости  $X_3 = 0$ , описываемые одним из следующих положений:

П о л о ж е н и е 1. Область  $D^2$  односвязна.

П о л о ж е н и е 2. Область  $D^2$  многосвязна.

Область  $\tilde{D}$ , соответствующая области  $D$ , при условиях положения 1 односвязна, а при условиях положения 2 многосвязна.

Обозначим через  $\xi = \xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  произвольную точку границы  $\partial D$  области  $D$ . Через  $\xi_3^{(1)}$  и  $\xi_3^{(2)}$  ( $-\infty \leq \xi_3^{(1)} < \xi_3^{(2)} \leq +\infty$ ) обозначим наименьшее и наибольшее значения  $\xi_3$  ( $\xi \in \partial D$ ) и заметим, что для любой пары точек  $\xi$  и  $\mathbf{X}$ , принадлежащих плоскости  $X_3 = \text{const}$ , справедливо равенство  $\xi_3 = X_3$ . Учитывая это, можно использовать координату  $X_3 \in \overline{D^1}$ , где

$$\overline{D^1} = \{(\mathbf{e}_3, \mathbf{X}) = X_3: X_3 \in [\xi_3^{(1)}, \xi_3^{(2)}]\} \quad (6)$$

— замыкание области (5), в качестве одного из параметров при задании положения точек границы  $\partial D$ .

Ниже, во избежание чрезмерно громоздкого описания, будем иметь в виду (если это не оговаривается) область  $D$ , для которой справедливо следующее

О г р а н и ч е н и е 1. Проекция  $D^2$  области  $D$  на плоскость  $X_3 = 0$  односвязна, а ее граница  $\partial D^2$  есть звездный контур (см. [2, с. 48]).

В случае такой области в качестве второго параметра для задания границы  $\partial D$  возьмем угол  $\gamma$  между полуплоскостями  $\mathcal{P}_0 = \{(X_1, 0, X_3): X_1 \geq 0, X_3 \in R\}$  и  $\mathcal{P}_\gamma$  с общим краем  $X_1 = 0, X_2 = 0$ , отсчитываемый от  $\mathcal{P}_0$  к  $\mathcal{P}_\gamma$  в направлении против часовой стрелки, если смотреть навстречу оси  $OX_3$ . Будем полагать, что при заданной области  $D$  начало системы координат выбрано так, что значения  $\gamma$  как параметра границы  $\partial D$  изменяются в пределах полуинтервала  $[0, 2\pi)$ .

Для задания границы  $\partial D$  области  $D$  с помощью параметров

$$(\gamma, X_3) \in [0, 2\pi) \times [\xi_3^{(1)}, \xi_3^{(2)}] \quad (7)$$

используем следующие функции:

$$\xi_1 = \xi_1(\gamma, X_3) = r(\gamma, X_3) \cos \gamma, \quad \xi_2 = \xi_2(\gamma, X_3) = r(\gamma, X_3) \sin \gamma, \quad \xi_3 = \xi_3(\gamma, X_3) = X_3, \quad (8)$$

$$r = r(\gamma, X_3), \quad (9)$$

где  $r(\gamma, X_3)$  — расстояние от оси  $OX_3$  до точки границы  $\partial D$ , соответствующей заданным  $\gamma$  и  $X_3$ . Тогда уравнение границы  $\partial D$  будет выражаться вектор-функцией от  $\gamma$  и  $X_3$

$$\xi = \xi(\gamma, X_3) = r(\gamma, X_3)(\mathbf{e}_1 \cos \gamma + \mathbf{e}_2 \sin \gamma) + X_3 \mathbf{e}_3. \quad (10)$$

Что же касается однозначности, непрерывности и непрерывной дифференцируемости функций (8)–(10), то эти свойства оговорим ниже.

**2.** Будем полагать сейчас, что  $D$  — такая область, проекция  $D^2$  (4) которой относится к любому из случаев, описываемых положениями 1, 2. Возьмем подмножество

$$\partial \widetilde{M} = \partial D^2 \times \overline{D^1}$$

точек  $\mathbf{X} \in R^3$ , образующее цилиндрическую часть границы  $\partial \widetilde{D}$  области  $\widetilde{D}$  (3), где  $\partial D^2$  — граница  $D^2$ . Рассмотрим на  $\partial D$  множество точек

$$\partial M = \partial \widetilde{M} \cap \partial D.$$

Выделим на  $\partial M$  подмножество  $\partial L$  точек  $\xi$ , определяемое условиями

$$(a) \{(\xi_1, \xi_2): \xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \partial L\} = \partial D^2;$$

(b) соответствие  $\xi|_{\partial L} \rightarrow \mathbf{X}|_{\partial D^2}$  непрерывно, обратное соответствие  $\mathbf{X}|_{\partial D^2} \rightarrow \xi|_{\partial L}$  непрерывно (кусочно непрерывно) и график его есть линия на  $\partial M$ , непрерывная (кусочно непрерывная), или совокупность таких линий на  $\partial M$ , если  $D^2$  многосвязна;

(c) в точках  $\partial L$  граница  $\partial D$  — кусочно гладкая поверхность, непрерывно дифференцируемая по  $\xi_3$ .

Перечисленным условиям может отвечать, вообще говоря, не единственное подмножество точек на  $\partial M$ . В связи с этим нужно иметь в виду, что всякий раз при заданной области  $D$  следует отдавать предпочтение такому из подмножеств  $\partial L$ , точки которого образуют линию, непрерывную или кусочно-непрерывную (или совокупность таких линий), удовлетворяющую условиям следующего положения.

**П о л о ж е н и е 3.** У линии  $\partial L$  максимальна суммарная длина участков, лежащих в плоскостях  $X_3 = \text{const}$ . В случае нескольких таких участков их концы соединяются отрезками, параллельными оси  $OX_3$ .

**3.** Вернемся к обсуждению области  $D$ , удовлетворяющей ограничению 1 (см. разд. 1). В случае этой области будем полагать для определенности, что  $\partial L$  есть замкнутая линия, выделенная на  $\partial M$  с помощью  $2\pi$ -периодической вектор-функции

$$\xi|_{\partial L} = \Xi(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma)) = \tilde{r}(\gamma)(\mathbf{e}_1 \cos \gamma + \mathbf{e}_2 \sin \gamma) + \xi_3(\gamma)\mathbf{e}_3 \quad (11)$$

параметра  $\gamma$ . Здесь  $\tilde{r}(\gamma) = \tilde{r}(\gamma, \xi_{3\gamma}) = \max_{X_3} r(\gamma, X_3) = r(\gamma, \xi_3(\gamma))$ ;

$$\xi_3 = \xi_3(\gamma) \quad (12)$$

— некоторая  $2\pi$ -периодическая функция, которая на периоде непрерывна, однозначна, имеет почти всюду непрерывную, отличную от нуля производную  $\xi_3'(\gamma)$ , достигает при  $\gamma = \gamma_1$  и  $\gamma = \gamma_2$  наименьшего —  $X_{31} = \xi_3(\gamma_1) \in \overline{D_{\gamma_1}^1}$  и наибольшего —  $X_{32} = \xi_3(\gamma_2) \in \overline{D_{\gamma_2}^1}$  значений, где

$$\overline{D_{\gamma}^1} = \{\xi_{3\gamma} = (\mathbf{e}_3, \xi): \xi \in \partial M \cap \mathcal{P}_{\gamma}\}.$$

В соответствии с условием (с) в определении  $\partial L$  будем полагать, что вектор-функция  $\xi(\gamma, X_3)$  (10) на подмножестве  $\{(\gamma, X_3): \gamma \in [0, 2\pi), X_3 = \xi_3(\gamma)\}$  множества пар (7) однозначна, имеет всюду непрерывную частную производную  $\xi'_3(\gamma, X_3) = \partial\xi(\gamma, X_3)/\partial X_3$  и кусочно непрерывную производную  $\xi'_\gamma(\gamma, X_3) = \partial\xi(\gamma, X_3)/\partial\gamma$ . Тогда вектор-функция (11) однозначна, непрерывна и кусочно дифференцируема на периоде.

Выделим на  $\partial D$  еще два множества точек

$$\partial D^{(1)} = \left\{ \xi(\gamma, X_3): \gamma \in [0, 2\pi), X_3 = \xi_3^{(1)} \right\}, \quad (13)$$

$$\partial D^{(2)} = \left\{ \xi(\gamma, X_3): \gamma \in [0, 2\pi), X_3 = \xi_3^{(2)} \right\}. \quad (14)$$

Пусть  $\Xi_1^{(1)} = \xi(\gamma^{(1)}, \xi_3^{(1)})$  — точка множества (13), удаленная от оси  $OX_3$  на максимальное расстояние, равное  $\rho_1^{(1)}$ , а  $\Xi_2^{(2)} = \xi(\gamma^{(2)}, \xi_3^{(2)})$  — точка множества (14), удаленная от  $OX_3$  на максимальное расстояние, равное  $\rho_2^{(2)}$ .

Рассмотрим линии  $\partial L_{\gamma^{(1)}} = \partial D \cap \mathcal{P}_{\gamma^{(1)}}$ ,  $\partial L_{\gamma^{(2)}} = \partial D \cap \mathcal{P}_{\gamma^{(2)}}$ . Пусть  $\Xi_2^{(1)} = \xi(\gamma^{(1)}, X_{31})$  — точка линии  $\partial L_{\gamma^{(1)}}$ , удаленная от  $OX_3$  на максимальное расстояние, равное  $\rho_2^{(1)}$ , а  $\Xi_1^{(2)} = \xi(\gamma^{(2)}, X_{32})$  — точка линии  $\partial L_{\gamma^{(2)}}$ , удаленная от  $OX_3$  на максимальное расстояние, равное  $\rho_1^{(2)}$ . На  $\partial L_{\gamma^{(1)}}$  возьмем участок, ограниченный точками  $\Xi_1^{(1)}$  и  $\Xi_2^{(1)}$ . Исключая затем вторую из точек, получим участок

$$\partial L_{\gamma^{(1)}}(\xi_3^{(1)} \leq X_3 < X_{31}) \quad (15)$$

линии  $\partial L_{\gamma^{(1)}}$ , не имеющий края  $\Xi_2^{(1)}$ . Аналогично выделим на  $\partial L_{\gamma^{(2)}}$  не имеющий края  $\Xi_1^{(2)}$  участок

$$\partial L_{\gamma^{(2)}}(X_{32} < X_3 \leq \xi_3^{(2)}) \quad (16)$$

из непрерывного участка, ограниченного точками  $\Xi_1^{(2)}$ ,  $\Xi_2^{(2)}$ . Участки (15), (16) задаются соответственно вектор-функциями

$$\xi = \xi(\gamma^{(1)}, X_3), \quad X_3 \in [\xi_3^{(1)}, X_{31}), \quad (17)$$

$$\xi = \xi(\gamma^{(2)}, X_3), \quad X_3 \in [X_{32}, \xi_3^{(2)}) \quad (18)$$

параметра  $X_3$ , каждая из которых может быть как однозначной, так и неоднозначной функцией  $X_3$ . Имея в виду это обстоятельство, условимся выделять на множествах точек, образующих участки (15) и (16), соответственно подмножества  $\partial L^{(1)}$  и  $\partial L^{(2)}$ , задаваемые векторами однозначной ветви

$$\Xi^{(1)} = \Xi(\gamma^{(1)}, X_3) = \rho(\gamma^{(1)}, X_3)(\mathbf{e}_1 \cos \gamma^{(1)} + \mathbf{e}_2 \sin \gamma^{(1)}) + X_3 \mathbf{e}_3, \quad X_3 \in [\xi_3^{(1)}, X_{31}) \quad (19)$$

вектор-функции (17) и векторами однозначной ветви

$$\Xi^{(2)} = \Xi(\gamma^{(2)}, X_3) = \rho(\gamma^{(2)}, X_3)(\mathbf{e}_1 \cos \gamma^{(2)} + \mathbf{e}_2 \sin \gamma^{(2)}) + X_3 \mathbf{e}_3, \quad X_3 \in (X_{32}, \xi_3^{(2)}] \quad (20)$$

вектор-функции (18), где  $\rho(\gamma^{(1)}, X_3)$  и  $\rho(\gamma^{(2)}, X_3)$  — максимальные из значений соответственно  $r(\gamma^{(1)}, X_3)$  и  $r(\gamma^{(2)}, X_3)$ . Эти ветви, вообще говоря, — разрывные функции  $X_3$ , если вектор-функции (17) и (18) неоднозначны.

**З а м е ч а н и е 1.** Если  $D$  многосвязна и ее проекция  $D^2$  на плоскость  $X_3 = 0$  соответствует описанию положения 2, то полуоткрытые подмножества  $\partial L^{(1)}$ ,  $\partial L^{(2)}$ , выделяемые при выбранном  $\partial L$  на линиях пересечения границы  $\partial D$  подходящими плоскостями, параллельными оси  $OX_3$ , должны быть такими, что

$$\left\{ (\mathbf{e}_3, \mathbf{X}) = X_3: \mathbf{X}(X_1, X_2, X_3) \in \partial L \cup \partial L^{(1)} \cup \partial L^{(2)} \right\}$$

$$= \left\{ (\mathbf{e}_3, \mathbf{X}) = X_3: \mathbf{X}(X_1, X_2, X_3) \in D \cup \partial D \right\} = \left[ \xi_3^{(1)}, \xi_3^{(2)} \right].$$

Принимая во внимание принятое выше описание границы  $\partial D$  и ее подмножеств с помощью пары параметров (7), будем использовать далее полярные координаты  $\zeta, \gamma$  в плоскости  $X_3 = 0$  с базисом, образованным ортами

$$\mathbf{e}_\zeta(\gamma) = \mathbf{e}_1 \cos \gamma + \mathbf{e}_2 \sin \gamma, \quad \mathbf{e}_\gamma(\gamma) = -\mathbf{e}_1 \sin \gamma + \mathbf{e}_2 \cos \gamma, \quad (21)$$

через которые декартовы координаты  $X_1, X_2$  и радиус-вектор  $\mathbf{X}$  точки выражаются формулами

$$X_1 = \zeta \cos \gamma, \quad X_2 = \zeta \sin \gamma, \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}(\zeta, \gamma, X_3) = \zeta \mathbf{e}_\zeta(\gamma) + X_3 \mathbf{e}_3.$$

Область  $D^2$  (см. (4)) можно задать тогда формулой

$$D^2 = \left\{ (X_1, X_2): X_1 = \zeta \cos \gamma, X_2 = \zeta \sin \gamma, \zeta \in [0, \tilde{r}(\gamma)], \gamma \in [0, 2\pi) \right\}, \quad (22)$$

а ее границу  $\partial D^2$ , совпадающую с проекцией линии  $\partial L$  (см. (11)) на плоскость  $X_3 = 0$ , — формулой

$$\partial D^2 = \left\{ (X_1, X_2): X_1 = \tilde{r}(\gamma) \cos \gamma, X_2 = \tilde{r}(\gamma) \sin \gamma, \gamma \in [0, 2\pi) \right\}. \quad (23)$$

4. Будем опять иметь в виду область  $D$ , проекция  $D^2$  которой на плоскость  $X_3 = 0$  может быть как односвязной, так и многосвязной, и сохраним обозначения  $\Xi, \Xi^{(1)}, \Xi^{(2)}$  для векторов вектор-функций  $\xi \rightarrow \Xi(\xi), \xi \rightarrow \Xi^{(1)}(\xi), \xi \rightarrow \Xi^{(2)}(\xi)$ , посредством которых на  $\partial D$  задаются соответственно  $\partial L, \partial L^{(1)}, \partial L^{(2)}$ .

Введем вектор-функции  $\mathbf{W}, \varepsilon'_3, \varepsilon = \mathbf{W}/|\mathbf{W}|$ , используемые далее при формулировке краевых условий для системы (1), (2) на линиях  $\partial L, \partial L^{(1)}, \partial L^{(2)}$ . Так, на  $\partial L$  задаются вектор-функции

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\xi) \Big|_{\partial L} = \mathbf{W}(\Xi), \quad (24)$$

$$\varepsilon'_3 = \varepsilon'_3(\xi) \Big|_{\partial L} = \frac{\partial \varepsilon(\xi)}{\partial X_3} \Big|_{\partial L} = \varepsilon'_3(\Xi), \quad (25)$$

а на  $\partial L^{(1)}, \partial L^{(2)}$  — вектор-функции

$$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon(\xi) \Big|_{\partial L^{(1)}} = \varepsilon(\Xi^{(1)}), \quad (26)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \varepsilon(\xi) \Big|_{\partial L^{(2)}} = \varepsilon(\Xi^{(2)}); \quad (27)$$

на  $\partial L$  же вектор-функция

$$\varepsilon = \varepsilon(\xi) \Big|_{\partial L} = \varepsilon(\Xi)$$

выражается через вектор-функцию  $\mathbf{W}$  (24).

З а м е ч а н и е 2. Если на  $\partial L$  имеются участки, лежащие в плоскостях  $X_3 = \text{const}$ , то эти участки не включаются в область определения вектор-функции (25).

Задаваемые вектор-функции подчиняются условиям следующего положения.

П о л о ж е н и е 4. Каждая из вектор-функций (24)–(27) непрерывна. Вектор-функции (24), (26), (27) ортогональны  $\mathbf{e}_3$ . Вектор-функция (24) кусочно дифференцируема, отлична от нуль-вектора, модуль ее не зависит явным образом от координаты  $\Xi_3 = (\mathbf{e}_3, \Xi(\xi)) = \xi_3 = X_3$  точки  $\Xi(\xi)$ . Вектор-функция (25) удовлетворяет равенству

$$\varepsilon'_3(\Xi) = -N(\Xi_3)[\mathbf{e}_3, \varepsilon(\Xi)], \quad (28)$$

где  $N(\Xi_3)$  — некоторая непрерывная функция  $\Xi_3$ .

5. Сформулируем совокупность дополнительных условий, которые требуется задать, чтобы выделить из класса  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  конкретное частное решение

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \delta \widehat{\Omega}(\lambda - \vartheta(\mathbf{X}), \mathbf{e}_3) \mathbf{a}(\mathbf{X}) \quad (29)$$

системы (1), (2) (см. [1]). Здесь  $\delta, \lambda$  — произвольные вещественные числа, причем  $\delta > 0$ ;  $\widehat{\Omega}(\lambda - \vartheta(\mathbf{X}), \mathbf{e}_3)$  — тензорное поле вращений на угол  $\lambda - \vartheta(\mathbf{X})$  вокруг оси, проходящей через точку  $\mathbf{X}$  в направлении  $\mathbf{e}_3$ . При этом

$$\vartheta(\mathbf{X}) = \vartheta(X_3) \quad (30)$$

— скалярное поле в  $D$ ;

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = u(X_1, X_2) \mathbf{e}_1 - v(X_1, X_2) \mathbf{e}_2 \quad (31)$$

— плоское потенциальное и соленоидальное в  $D$  векторное поле, выражаемое через вещественную и мнимую части функции  $f(z)$  комплексного переменного  $z = X_1 + iX_2$ :

$$u(X_1, X_2) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(X_1, X_2) = \operatorname{Im} f(z). \quad (32)$$

З а м е ч а н и е 3. Выбор функций  $f(z) = u(X_1, X_2) + iv(X_1, X_2)$ ,  $\vartheta(X_3)$  подчиним, как и в [1], следующим требованиям:

1)  $f(z)$  — однозначная аналитическая функция в области

$$D_z^2 = \{z = X_1 + iX_2: (X_1, X_2) \in D^2(4)\};$$

2)  $\vartheta(X_3)$  — гладкая в  $\overline{D^1}$  (6) функция и  $d\vartheta(X_3)/dX_3 \neq 0$  п. в. в  $\overline{D^1}$ .

Будем искать поле  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  (29), которое при любых  $\mathbf{X} \in D$ ,  $\Xi \in \partial L$ ,  $\Xi^{(n)} \in \partial L^{(n)}$ ,  $n = 1, 2$ , подчинялось бы краевым условиям

$$\mathbf{V}(\Xi) = \mathbf{W}(\Xi); \quad (33)$$

$$\left. \frac{\mathbf{V}'_3(\mathbf{X})}{V(\mathbf{X})} \right|_{\mathbf{X}=\Xi} = \varepsilon'_3(\Xi), \quad (34)$$

где  $\mathbf{V}'_3(\mathbf{X}) = \partial \mathbf{V}(\mathbf{X}) / \partial X_3$ ,  $V(\mathbf{X}) = |\mathbf{V}(\mathbf{X})|$ ;

$$\frac{d\vartheta(X_3)}{dX_3} = -(\varepsilon'_3(\Xi), [\mathbf{e}_3, \varepsilon(\Xi)]), \quad (35)$$

где  $X_3 = \Xi_3 = (\mathbf{e}_3, \Xi)$ ;

$$\left. \frac{\mathbf{V}(\mathbf{X})}{V(\mathbf{X})} \right|_{\mathbf{X}=\Xi^{(n)}} = \varepsilon(\Xi^{(n)}) \quad (36)$$

при заданных функциях  $\mathbf{W}$ ,  $\varepsilon'_3$ ,  $\varepsilon$ .

Сформулируем теперь следующую краевую задачу в классе  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$  векторных полей: найти векторное поле  $\mathbf{V}(\mathbf{X})$  (29), удовлетворяющее на  $\partial L \cup \partial L^{(1)} \cup \partial L^{(2)}$  условиям (33)–(36).

6. Рассмотрим процедуру решения сформулированной краевой задачи на примере области  $D$ , удовлетворяющей ограничению 1. В случае такой области задаваемые на  $\partial L \cup \partial L^{(1)} \cup \partial L^{(2)}$  вектор-функции определяются формулами

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\xi) \Big|_{\partial L} = \mathbf{W}(\Xi) = \mathbf{W}(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma)), \quad (37)$$

$$\varepsilon'_3 = \varepsilon'_3(\xi) \Big|_{\partial L} = \varepsilon'_3(\Xi) = \varepsilon'_3(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma)), \quad (38)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\xi) \Big|_{\partial L} = \varepsilon(\Xi) = \varepsilon(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma)), \quad (39)$$

где  $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_1 + 2\pi)$ ,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \Big|_{\partial L^{(1)}} = \varepsilon(\boldsymbol{\Xi}^{(1)}) = \varepsilon(\gamma^{(1)}, X_3), & X_3 \in [\xi_3^{(1)}, X_{31}], \\ \varepsilon &= \varepsilon(\boldsymbol{\xi}) \Big|_{\partial L^{(2)}} = \varepsilon(\boldsymbol{\Xi}^{(2)}) = \varepsilon(\gamma^{(2)}, X_3), & X_3 \in (X_{32}, \xi_3^{(2)}].\end{aligned}$$

Чтобы найти частное решение  $\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mathbf{X}(\zeta, \gamma, X_3)) = \mathbf{V}(\zeta, \gamma, X_3)$  (29) системы (1), (2), удовлетворяющее на  $\partial L \cup \partial L^{(1)} \cup \partial L^{(2)}$  условиям (33)–(36), требуется решить следующие три задачи.

Во-первых, найти скалярное поле (30) в замкнутой области

$$\{\mathbf{X}: (\mathbf{e}_3, \mathbf{X}) = X_3 \in [X_{31}, X_{32}], \mathbf{X} \in \overline{D}\} \subset R^3, \quad (40)$$

где  $\overline{D} = D \cup \partial D$ , удовлетворяющее на  $\partial L$  условию (35), которое в случае (11) принимает вид

$$\frac{d\vartheta(X_3)}{dX_3} \Big|_{X_3=\xi_3(\gamma)} = -\left(\boldsymbol{\varepsilon}'_3(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma)), [\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma))]\right). \quad (41)$$

Во-вторых, выделить поле  $\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(\zeta, \gamma, X_3)) = \mathbf{a}(\zeta, \gamma)$  (31) в  $D$ , удовлетворяющее на  $\partial L$  условию (33), которое при найденном решении предыдущей задачи в случае (11) выражается с учетом (29) равенством

$$\delta\widehat{\Omega}(\lambda - \vartheta(\xi_3(\gamma)), \mathbf{e}_3)\mathbf{a}(\tilde{r}(\gamma), \gamma) = \mathbf{W}(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma)). \quad (42)$$

В-третьих, найти после решения предыдущей задачи скалярное поле (30) в дополнении

$$\{\mathbf{X}: (\mathbf{e}_3, \mathbf{X}) = X_3 \in [\xi_3^{(1)}, \xi_3^{(2)}] \setminus [X_{31}, X_{32}], \mathbf{X} \in \overline{D}\} \quad (43)$$

замкнутой области (40) до  $\overline{D}$ , удовлетворяющее на  $\partial L^{(1)} \cup \partial L^{(2)}$  условиям (36), которые в случае  $\partial L^{(1)}$  (19) и  $\partial L^{(2)}$  (20) выражаются в силу (29) равенствами

$$\delta\widehat{\Omega}(\lambda - \vartheta(X_3), \mathbf{e}_3) \frac{\mathbf{a}(\rho(\gamma^{(n)}, X_3), \gamma^{(n)})}{|\mathbf{a}(\rho(\gamma^{(n)}, X_3), \gamma^{(n)})|} = \varepsilon(\gamma^{(n)}, X_3), \quad n = 1, 2, \quad (44)$$

где  $X_3 \in [\xi_3^{(1)}, X_{31}]$ , если  $n = 1$ , и  $X_3 \in (X_{32}, \xi_3^{(2)}]$ , если  $n = 2$ .

Обсудим решение каждой из этих задач по отдельности.

**7.** Найдем зависимость  $\vartheta$  от  $X_3$  при  $X_3 \in [X_{31}, X_{32}]$ . Умножая для этого (41) на  $\zeta'_3(\gamma)$  и учитывая, что  $d\vartheta(X_3)/dX_3 \Big|_{X_3=\xi_3(\gamma)} \xi'_3(\gamma) = d\vartheta(\xi_3(\gamma))/d\gamma$ , придем к равенству, интегрирование которого по  $\gamma$  приводит к выражениям

$$\vartheta(\xi_3(\gamma)) = \vartheta(X_{31}) + \tilde{\theta}(\gamma) - \tilde{\theta}(\gamma_1), \quad (45)$$

$$\theta(\gamma) - \tilde{\theta}(\gamma_1) = - \int_{\gamma_1}^{\gamma} \left( \boldsymbol{\varepsilon}'_3(\tilde{r}(\gamma'), \gamma', \xi_3(\gamma')), [\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{r}(\gamma'), \gamma', \xi_3(\gamma'))] \right) \xi'_3(\gamma') d\gamma', \quad (46)$$

где  $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_1 + 2\pi)$ . Эти формулы определяют функцию  $\vartheta(X_3)$  при  $X_3 \in [X_{31}, X_{32}]$ , но не как функцию переменной  $X_3$ , а как функцию переменной  $\gamma$ . Найдем теперь  $\vartheta$  как функцию  $X_3$ . В связи с этим следует отметить, что  $X_3 = \xi_3(\gamma)$  — однозначная функция (см. пояснения к формуле (12)), определенная на промежутке  $[\gamma_1, \gamma_1 + 2\pi)$ , с множеством значений  $[X_{31}, X_{32}]$ . Обратная же функция  $\gamma = \xi_3^{-1}(X_3) = \{\gamma: \xi_3(\gamma) = X_3\}$ , определенная на  $[X_{31}, X_{32}]$ , однозначной, вообще говоря, не является. Выделим ее однозначную ветвь

$$\gamma = \Gamma(X_3), \quad X_3 \in [X_{31}, X_{32}] \quad (47)$$

по правилу  $\Gamma(X_3) = \min \xi_3^{-1}(X_3)$ . Переходя теперь в (45), (46) от переменной  $\gamma$  к переменной  $X_3$  с помощью формулы (47), будем иметь

$$\vartheta(X_3) = \vartheta(X_{31}) + \theta(X_3) - \theta(X_{31}), \quad X_3 \in [X_{31}, X_{32}], \quad (48)$$

$$\theta(X_3) - \theta(X_{31}) = \tilde{\theta}(\Gamma(X_3)) - \tilde{\theta}(\Gamma(X_{31})). \quad (49)$$

Формулы (48), (49) определяют  $\vartheta$  в промежутке  $[X_{31}, X_{32}]$  как функцию  $X_3$  и позволяют в силу (30) определить конкретное скалярное поле

$$\vartheta(\mathbf{X}) = \vartheta(X_3) = \theta(X_3) - \theta(X_{31}) + \lambda$$

в замкнутой области (40) в предположении, что

$$\lambda = \vartheta(X_{31}). \quad (50)$$

8. Обратимся к формуле (31) и выразим ее в цилиндрических координатах. Получим

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(\zeta, \gamma, X_3)) = \mathbf{a}(\zeta, \gamma) = u(\zeta, \gamma)\mathbf{e}_1 - v(\zeta, \gamma)\mathbf{e}_2. \quad (51)$$

Условие (42), используя (45) при  $\lambda$  (19), преобразуем к виду

$$\mathbf{a}(\tilde{r}(\gamma), \gamma) = \delta^{-1}\mathbf{w}(\tilde{r}(\gamma), \gamma). \quad (52)$$

Здесь

$$\mathbf{w}(\tilde{r}(\gamma), \gamma) = \widehat{\Omega}(\tilde{\theta}(\gamma) - \tilde{\theta}(\gamma_1), \mathbf{e}_3)\mathbf{W}(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma)), \quad (53)$$

где  $\tilde{\theta}(\gamma) - \tilde{\theta}(\gamma_1)$  определяется формулой (46).

Нахождение поля  $\mathbf{a}$  (51) в силу (31), (32) сводится к исследованию и решению следующей самостоятельной и важной в приложениях задачи: найти пару  $(u, v)$  функций, гармонически сопряженных (см. замечание 3) в области  $D^2$  (22), которые на границе  $\partial D^2$  (23) области принимают непрерывные значения  $u|_{\partial D^2} = \delta^{-1}\varphi(\tilde{r}(\gamma), \gamma)$ ,  $v|_{\partial D^2} = -\delta^{-1}\eta(\tilde{r}(\gamma), \gamma)$ , где

$$\varphi(\tilde{r}(\gamma), \gamma) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{w}(\tilde{r}(\gamma), \gamma)), \quad \eta(\tilde{r}(\gamma), \gamma) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{w}(\tilde{r}(\gamma), \gamma)) \quad (54)$$

суть  $2\pi$ -периодические функции  $\gamma$ , непрерывно дифференцируемые на периоде. Нахождение одной из компонент пары  $(u, v)$ , скажем, компоненты  $u$ , требует решения следующей задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(\zeta, \gamma) = 0 & \text{в } D^2, \\ u(\zeta, \gamma)|_{\partial D^2} = \delta^{-1}\varphi(\tilde{r}(\gamma), \gamma) \end{cases} \quad (55)$$

в замыкании  $\overline{D^2} = D^2 \cup \partial D^2$ , где  $\Delta = (1/\zeta)(\partial/\partial\zeta)\zeta(\partial/\partial\zeta) + (1/\zeta^2)(\partial^2/\partial\gamma^2)$  — дифференциальный оператор Лапласа. Что же касается компоненты  $v$ , то совокупность всех гармонических в  $D^2$  функций  $v(\zeta, \gamma)$ , сопряженных с  $u(\zeta, \gamma)$ , можно определить формулой

$$v(\zeta, \gamma) = C + \int_{\zeta_0}^{\zeta(\zeta, \gamma)} \left( d\zeta(\zeta', \gamma'), [\mathbf{e}_3, \nabla u(\zeta', \gamma')] \right). \quad (56)$$

Здесь  $C$  — произвольная вещественная постоянная,  $\zeta_0$  — некоторая фиксированная, а  $\zeta(\zeta, \gamma) = \zeta\mathbf{e}_\zeta(\gamma)$  — произвольная точка области  $D^2$ ,  $\nabla = \mathbf{e}_\zeta(\gamma)(\partial/\partial\zeta) + (1/\zeta)\mathbf{e}_\gamma(\gamma)(\partial/\partial\gamma)$  — дифференциальный оператор Гамильтона, где  $\mathbf{e}_\zeta(\gamma)$ ,  $\mathbf{e}_\gamma(\gamma)$  определяются формулами (21).

Возьмем в (56) в качестве пути интегрирования отрезок  $\{\zeta(\zeta', \gamma): \zeta' \in [0, \zeta]\}$ . Тогда

$$d\zeta = \mathbf{e}_\zeta(\gamma)d\zeta', \quad \left( d\zeta, [\mathbf{e}_3, \nabla u(\zeta', \gamma')] \right) = -\frac{1}{\zeta'} \frac{\partial u(\zeta', \gamma)}{\partial \gamma} d\zeta'$$

и формула (56) принимает вид

$$v(\zeta, \gamma) = C - \int_0^{\zeta} \frac{1}{\zeta'} \frac{\partial}{\partial \gamma} u(\zeta', \gamma) d\zeta'. \quad (57)$$

Постоянную  $C$  можно определить, исходя из условия

$$v(\zeta, \gamma) \Big|_{\zeta=\tilde{r}(\gamma_1), \gamma=\gamma_1} = -\delta^{-1} \eta(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1) \quad (58)$$

в точке  $\zeta(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1) \in \partial D^2$ , где  $\eta(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{w}(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1, X_{31}))$  (см. вторую из формул (54) и формулу (53)). Что же касается постоянной в (55) и (58), то будем полагать, например,

$$\delta = |\mathbf{W}(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1, X_{31})| = |\mathbf{w}(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1)|. \quad (59)$$

Для решения задачи Дирихле (55) будем использовать подход, основанный на представлении решения в виде разложения в ряд по системе функций, которая может служить базисами различных пространств, гармонических в  $D^2$  функций. Подходящими для этого являются системы всплесков, предложенные в [3–5], которые позволяют строить ряды, равномерно сходящиеся в  $\overline{D^2}$ , в случае специальных областей  $D^2$ . И в частности при  $D^2 = K$ ,  $\overline{D^2} = K \cup \partial K$ , где

$$K = \{\zeta(\zeta, \gamma): \zeta \in [0, 1), \gamma \in [0, 2\pi)\}, \quad (60)$$

$$\partial K = \{\zeta(1, \gamma): \gamma \in [0, 2\pi)\} \quad (61)$$

предложена система гармонических всплесков

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_n(\zeta, \gamma) = \operatorname{Re} \chi_n(z), \tilde{\alpha}_n(\zeta, \gamma) = \operatorname{Im} \chi_n(z): n \in \mathbb{N} \right\}, \quad (62)$$

образующих (см. [3, теорема 1.1]) базисы различных пространств  $h_p^m$  типа Харди ( $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ ), гармонических в  $K$  функций. Здесь  $z = \zeta e^{i\gamma}$  и для  $n = 2^j + k$  ( $0 \leq k < 2^j$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ )

$$\chi_n(z) = 2^{-(j-1)/2} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_\varepsilon} \hat{\theta}_\varepsilon\left(\frac{\nu}{2^{j+1}}\right) \cos\left[\frac{2\pi\nu(k+1/2)}{2^{j+1}}\right] z^\nu. \quad (63)$$

Через  $\mathbb{Z}_\varepsilon$  в (63) обозначено множество

$$\mathbb{Z}_\varepsilon = \{\nu \in \mathbb{N}: 2^j(1-\varepsilon) < \nu < 2^{j+1}(1+\varepsilon)\},$$

через  $\hat{\theta}_\varepsilon = \hat{\theta}_\varepsilon(\omega)$  — введенные в [6] для  $\varepsilon = 1/3$  и в [7] для  $0 < \varepsilon < 1/3$  неотрицательные гладкие функции, обладающие свойствами

$$\hat{\theta}_\varepsilon(\omega) \equiv 1 \quad \text{при} \quad \frac{1+\varepsilon}{2} < \omega < 1-\varepsilon,$$

$$\hat{\theta}_\varepsilon^2(1-\omega) + \hat{\theta}_\varepsilon^2(1+\omega) \equiv 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq \omega \leq \varepsilon,$$

$$\hat{\theta}_\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{\theta}_\varepsilon^2(\omega) \equiv 1 \quad \text{при} \quad 1-\varepsilon < \omega < 1+\varepsilon,$$

$$\hat{\theta}_\varepsilon(\omega) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{1-\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad 1+\varepsilon \leq \omega < +\infty.$$

Отождествим в (55) область  $D^2$  и ее границу  $\partial D^2$  (см. (22), (23)) с открытым кругом  $K$  (60) и окружностью  $\partial K$  (61) соответственно и воспользуемся для решения задачи (55) системой всплесков (62). Найденное таким образом решение задачи Дирихле для единичного круга можно распространять затем на любую односвязную область, представляющую собой конформный образ единичного круга.

Итак, представим решение задачи (55) при  $\overline{D^2} = \overline{K}$  и при

$$\delta = |\mathbf{W}(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1, X_{31})| \Big|_{\tilde{r}(\gamma_1)=1} = |\mathbf{W}(1, \gamma_1, X_{31})| \quad (64)$$

в виде ряда

$$u(\zeta, \gamma) = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(\zeta, \gamma). \quad (65)$$

Здесь

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(1, \gamma) d\gamma, \quad U_n(\zeta, \gamma) = a_n \alpha_n(\zeta, \gamma) + \tilde{a}_n \tilde{\alpha}_n(\zeta, \gamma), \quad (66)$$

где

$$\Phi(1, \gamma) = |\mathbf{W}(1, \gamma_1, X_{31})|^{-1} \varphi(\tilde{r}(\gamma), \gamma) \Big|_{\tilde{r}(\gamma)=1}, \quad (67)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(1, \gamma) \alpha_n(1, \gamma) d\gamma, \quad \tilde{a}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(1, \gamma) \tilde{\alpha}_n(1, \gamma) d\gamma. \quad (68)$$

Ряд в (65) согласно [3] равномерно сходится в круге  $\overline{K}$  к функции  $u(\zeta, \gamma)$ . Скорость сходимости частичных сумм  $S_n(\zeta, \gamma; u)$  порядка  $n$  ряда (65) характеризуется оценкой

$$\|u(\zeta, \gamma) - S_n(\zeta, \gamma; u)\| \Big|_{C(\zeta=r)} \leq \varkappa r^N E_N(\Phi),$$

где  $\varkappa = \text{const} > 0$ ,  $r \in [0, 1]$ ,  $E_N(\Phi)$  — наилучшее равномерное приближение функции  $\Phi(\gamma)$  на периоде тригонометрическими полиномами порядка  $N = [2^j(1 - \varepsilon)] \leq n/3$  для  $n = 2^j + k$  ( $0 \leq k < 2^j$ ).

Компоненту  $v(\zeta, \gamma)$  пары  $(u, v)$  в круге  $\overline{K}$  найдем, используя решение (65), формулу (57) и условия (58), (64). Но прежде заметим, что в (57)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta'} \frac{\partial}{\partial \gamma} u(\zeta', \gamma) &= \frac{1}{\zeta'} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(\zeta', \gamma) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \frac{1}{\zeta'} \frac{\partial}{\partial \gamma} \alpha_n(\zeta', \gamma) + \tilde{a}_n \frac{1}{\zeta'} \frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{\alpha}_n(\zeta', \gamma) \right\} = \frac{\partial}{\partial \zeta'} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \tilde{a}_n \alpha_n(\zeta', \gamma) - a_n \tilde{\alpha}_n(\zeta', \gamma) \right\}, \end{aligned} \quad (69)$$

поскольку  $\alpha_n(\zeta, \gamma)$  и  $\tilde{\alpha}_n(\zeta, \gamma)$  как вещественная и мнимая части аналитической в  $K$  функции (63) удовлетворяют в  $K$  соотношениям Даламбера — Эйлера, которые в переменных  $\zeta, \gamma$  выражаются равенствами

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \gamma} \alpha_n(\zeta, \gamma) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{\alpha}_n(\zeta, \gamma) = 0, \quad \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \gamma} \tilde{\alpha}_n(\zeta, \gamma) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \alpha_n(\zeta, \gamma) = 0.$$

Подстановка (69) в (57) и последующее интегрирование приводят к явной формуле

$$v(\zeta, \gamma) = C + \sum_{n=1}^{+\infty} V_n(\zeta, \gamma), \quad (70)$$

не содержащей контурных интегралов. Здесь

$$V_n(\zeta, \gamma) = -\tilde{a}_n \alpha_n(\zeta, \gamma) + a_n \tilde{\alpha}_n(\zeta, \gamma), \quad (71)$$

а постоянная  $C$  при условиях (58), (64), взятых в точке  $\zeta(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1)|_{\tilde{r}(\gamma_1)=1}$  окружности  $\partial K$  (61), определяется формулой

$$C = -H(1, \gamma_1) - \sum_{n=1}^{+\infty} V_n(1, \gamma_1), \quad (72)$$

где

$$H(1, \gamma_1) = |\mathbf{W}(1, \gamma_1, X_{31})|^{-1} \eta(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1)|_{\tilde{r}(\gamma_1)=1}. \quad (73)$$

Итак, искомые компоненты  $u$  и  $v$  пары  $(u, v)$  определяются формулами (65)–(68) и (70)–(73) соответственно.

**9.** Зависимость  $\vartheta$  от  $X_3$  при  $X_3 \in [\xi_3^{(1)}, X_{31}] \cup (X_{32}, \xi_3^{(2)})$  определяется неявно уравнениями (44) при  $\delta$  (59) и  $\lambda$  (50), поскольку векторное поле  $\mathbf{a}$  в (44) выражается через найденные выше компоненты  $u = u(\zeta, \gamma)$ ,  $v = v(\zeta, \gamma)$  пары  $(u, v)$ , которые берутся в точках  $\zeta(\rho(\gamma^{(n)}), X_3), \gamma^{(n)} \in \overline{D^2}$ , где  $n = 1, 2$ . Уравнения (44) в разрешенном относительно  $\vartheta(X_3)$  виде позволяют определить в силу (30) конкретное скалярное поле  $\vartheta(\mathbf{X})$  в (43).

**10.** Вернемся еще раз к задаче из разд. 8 и оговорим следующее. Разрешимость ее предполагает существование пары  $(u, v)$  функций, выделенной требованием:  $u, v$  — гармонически сопряженные в  $K$  (60) и непрерывные в  $\overline{K}$  функции, принимающие на  $\partial K$  (61) заданные непрерывные значения

$$u|_{\partial K} = \Phi(1, \gamma), \quad (74)$$

$$v|_{\partial K} = -H(1, \gamma). \quad (75)$$

Здесь

$$\Phi(1, \gamma) = \delta^{-1} \varphi(\tilde{r}(\gamma), \gamma)|_{\tilde{r}(\gamma)=1}, \quad (76)$$

$$H(1, \gamma) = \delta^{-1} \eta(\tilde{r}(\gamma), \gamma)|_{\tilde{r}(\gamma)=1}, \quad (77)$$

где произвольная положительная постоянная  $\delta$  в отличие от (59) пока не конкретизируется, а  $\varphi$  и  $\eta$  описываются формулами (54). Ослабляя условие гладкости на  $\varphi, \eta$  (см. пояснение к формуле (54)), отметим, что для существования такой пары  $(u, v)$  достаточно, чтобы одна из функций (76), (77) как независимо задаваемая на  $\partial K$  удовлетворяла условию Липшица порядка  $\alpha > 0$  или более слабому условию Дини — Липшица (см., например, [8, гл. III, § 3.5, с. 148; гл. IV, § 4.10, с. 150]), а другая восстанавливалась как зависимая от нее.

Конкретизируем условия существования искомой пары  $(u, v)$  функций, исходя в частности из построенных в разд. 8 разложений (65), (70) в ряды по системе всплесков (62) и сформулируем следующее

**Предложение 1.** Пара  $(u, v)$  гармонически сопряженных в  $K$  и непрерывных в  $\overline{K} = K \cup \partial K$  функций существует, если  $u$  и  $v$  на  $\partial K$  подчиняются условиям (74) и (75), в которых:

1)  $\Phi(1, \gamma)$  — независимо задаваемая на  $\partial K$   $2\pi$ -периодическая функция, непрерывная на периоде и удовлетворяющая условию Липшица порядка  $\alpha > 0$ , или условию Дини — Липшица;

2)  $H(1, \gamma)$  выражается через  $H(1, \gamma_1)$  и  $\Phi(1, \gamma)$  формулой

$$H(1, \gamma) = H(1, \gamma_1) - \sum_{n=1}^{+\infty} [V_n(1, \gamma) - V_n(1, \gamma_1)] \quad (78)$$

(см. (77) при  $\gamma = \gamma_1$  и (71), (68));

3) постоянная  $\delta$  определяется формулой

$$\delta = \sqrt{\varphi^2(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1) + \eta^2(\tilde{r}(\gamma_1), \gamma_1)}|_{\tilde{r}(\gamma_1)=1},$$

выражающей ее через независимо задаваемые значения функций (54) в фиксированной точке  $\zeta(1, \gamma_1) \in \partial K$ .

При этом компоненты  $u$  и  $v$  пары  $(u, v)$  представляются в виде равномерно сходящихся в  $\overline{K}$  рядов, которые описываются соответственно формулами (65)–(68) и (70)–(73).

При условиях предложения 1 вектор-функция  $\mathbf{w}$  выражается в силу (76), (77), (54) формулой

$$\mathbf{w} = \delta[\Phi(1, \gamma)\mathbf{e}_1 + \mathbf{H}(1, \gamma)\mathbf{e}_2], \quad (79)$$

в которой независимо задаваемы только функция  $\Phi(1, \gamma)$  и значение  $\mathbf{H}(1, \gamma_1)$  функции (78) при  $\gamma = \gamma_1$ . Равенство

$$(\mathbf{e}_2, \mathbf{w}(\tilde{r}(\gamma), \gamma))\Big|_{\tilde{r}(\gamma)=1} = \delta\mathbf{H}(1, \gamma), \quad (80)$$

рассматриваемое как ограничение на  $\mathbf{w}$ , на первый взгляд, приемлемое, приводит в действительности к осложнениям. Дело в том, что фактически задаваемой (устанавливаемой по результатам измерений) предполагается не вектор-функция  $\mathbf{w}$  на  $\partial K$ , а вектор-функция  $\mathbf{W}$  (см. (37)) на  $\partial L$ . Компоненты же последней и компоненты вектор-функции  $\mathbf{w}$  связаны в силу (53) системой двух уравнений. Вследствие этого ограничения на вектор-функцию  $\mathbf{W}$ , обусловленные зависимостью  $\mathbf{H}(1, \gamma)$  от  $\Phi(1, \gamma)$ , выражаются уже не одним равенством, как (см. (80)) в случае вектор-функции  $\mathbf{w}$ , а системой двух равенств, следующей из (53) и (79).

**11.** Принимая во внимание указанное осложнение, изменим несколько подход к решению краевой задачи, рассматриваемой в разд. 8. Для этого введем пару  $(\mathcal{L}, \psi)$  гармонически сопряженных в  $K$  (60) функций, где

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\zeta, \gamma) = \ln |f(z(\zeta, \gamma))|, \quad \psi = \psi(\zeta, \gamma) = \arg f(z(\zeta, \gamma)),$$

выражаемых через функцию  $f$ , удовлетворяющую условиям замечания 3 в случае области

$$D_z^2 = K_z = \{z = \zeta e^{i\gamma} : \zeta \in [0, 1], \gamma \in [0, 2\pi)\}.$$

Компоненты искомой пары  $(u, v)$  через компоненты пары  $(\mathcal{L}, \psi)$  выражаются формулами

$$u = u(\zeta, \gamma) = \exp\{\mathcal{L}(\zeta, \gamma)\} \cos \psi(\zeta, \gamma), \quad v = v(\zeta, \gamma) = \exp\{\mathcal{L}(\zeta, \gamma)\} \sin \psi(\zeta, \gamma),$$

а векторное поле  $\mathbf{a}$  (см. (51)) — формулой

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(\zeta, \gamma, X_3)) = \mathbf{a}(\zeta, \gamma) = a(\zeta, \gamma)\boldsymbol{\alpha}(\zeta, \gamma), \quad (81)$$

где

$$a(\zeta, \gamma) = |\mathbf{a}(\zeta, \gamma)| = \exp\{\mathcal{L}(\zeta, \gamma)\}, \quad (82)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\zeta, \gamma) = \widehat{\Omega}(-\psi(\zeta, \gamma), \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \cos \psi(\zeta, \gamma) - \mathbf{e}_2 \sin \psi(\zeta, \gamma). \quad (83)$$

Из (52) и (53) в случае  $\partial K$  (61) выводим два условия. Во-первых,

$$a(\tilde{r}(\gamma), \gamma)\Big|_{\tilde{r}(\gamma)=1} = \delta^{-1}|\mathbf{w}(\tilde{r}(\gamma), \gamma)|\Big|_{\tilde{r}(\gamma)=1} = \delta^{-1}W(1, \gamma), \quad (84)$$

где учтено, что  $|\mathbf{W}(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma))| = W(\tilde{r}(\gamma), \gamma)$  (см. положение 4), и введено обозначение

$$W(1, \gamma) = W(\tilde{r}(\gamma), \gamma)\Big|_{\tilde{r}(\gamma)=1}. \quad (85)$$

Во-вторых,

$$\boldsymbol{\alpha}(\tilde{r}(\gamma), \gamma)\Big|_{\tilde{r}(\gamma)=1} = \widehat{\Omega}(-\psi(1, \gamma), \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 = \widehat{\Omega}(\tilde{\theta}(\gamma) - \tilde{\theta}(\gamma_1), \mathbf{e}_3)\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma))\Big|_{\tilde{r}(\gamma)=1}, \quad (86)$$

где использована формула (83).

Учитывая далее, что  $a(\tilde{r}(\gamma), \gamma)|_{\tilde{r}(\gamma)=1} = \exp\{\mathcal{L}(1, \gamma)\}$  в силу (82) и, полагая в (84)

$$\delta = W(1, \gamma),$$

из (84) выводим условие

$$\mathcal{L}|_{\partial K} = \mathcal{L}(1, \gamma), \quad (87)$$

в котором  $\mathcal{L}(1, \gamma)$  выражается формулой

$$\mathcal{L}(1, \gamma) = \ln \frac{W(1, \gamma)}{W(1, \gamma_1)} \quad (88)$$

через фактически задаваемую на  $\partial L$  непрерывную (см. положение 4) при  $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_1 + 2\pi)$  функцию  $W(1, \gamma)$ , которую можно периодически продолжить на всю числовую ось.

Подчиним выбор компоненты  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\zeta, \gamma)$  условию (87) и разложим  $\mathcal{L}$  в ряд

$$\mathcal{L}(\zeta, \gamma) = \Lambda_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}_n(\zeta, \gamma) \quad (89)$$

по системе всплесков (62). Здесь

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L}(1, \gamma) d\gamma, \quad \mathcal{L}_n(\zeta, \gamma) = \Lambda_n \alpha_n(\zeta, \gamma) + \tilde{\Lambda}_n \tilde{\alpha}_n(\zeta, \gamma), \quad (90)$$

где

$$\Lambda_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L}(1, \gamma) \alpha_n(1, \gamma) d\gamma, \quad \tilde{\Lambda}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L}(1, \gamma) \tilde{\alpha}_n(1, \gamma) d\gamma. \quad (91)$$

Ряд в (89) равномерно сходится в круге  $\bar{K}$  к функции  $\mathcal{L}(\zeta, \gamma)$ , поскольку  $\mathcal{L}(1, \gamma)$  удовлетворяет условиям теоремы 1.1 из [3]. При этом имеет место равенство

$$\Lambda_0 = - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}_n(1, \gamma_1), \quad (92)$$

поскольку (см. (88))  $\mathcal{L}(1, \gamma_1) = 0$ .

Компоненту  $\psi(\zeta, \gamma)$  пары  $(\mathcal{L}, \psi)$  представим (пока формально) в виде ряда

$$\psi(\zeta, \gamma) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(\zeta, \gamma), \quad (93)$$

гармонически сопряженного в  $K$  ряду в правой части (89). Здесь  $\psi_0$  — произвольная вещественная постоянная,

$$\psi_n(\zeta, \gamma) = -\tilde{\Lambda}_n \alpha_n(\zeta, \gamma) + \Lambda_n \tilde{\alpha}_n(\zeta, \gamma). \quad (94)$$

Предположим, что  $\mathcal{L}(1, \gamma)$  удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha > 0$  или условию Дини — Липшица. Тогда сопряженная ей функция  $\psi(1, \gamma)$  будет непрерывной  $2\pi$ -периодической и ее ряд

$$\psi(1, \gamma) = \psi_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(1, \gamma) \quad (95)$$

по соответствующим всплескам будет в силу теоремы 1.1 из [3] сходиться равномерно. Здесь постоянная

$$\psi_0 = \psi(1, \gamma_1) - \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(1, \gamma_1), \quad (96)$$

где  $\psi(1, \gamma_1)$  — принадлежащий промежутку  $[0, 2\pi)$  корень уравнения

$$\widehat{\Omega}(-\psi(1, \gamma_1), \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 = \varepsilon(1, \gamma_1, X_{31}), \quad (97)$$

следующего из (86) при  $\gamma = \gamma_1$ ,  $\tilde{r}(\gamma_1) = 1$ ,  $\xi_3(\gamma_1) = X_{31}$ . Следовательно, ряд (93) равномерно сходится в  $\overline{K}$ , определяя (уже неформально) функцию  $\psi(\zeta, \gamma)$  в  $\overline{K}$ , принимающую на  $\partial K$  непрерывные значения

$$\psi|_{\partial K} = \psi(1, \gamma) \quad (98)$$

и гармонически сопряженную в  $K$  в силу (90), (94) функции  $\mathcal{L}(\zeta, \gamma)$ .

Подводя итоги, сформулируем следующее

**Предложение 2.** Пара  $(\mathcal{L}, \psi)$  гармонически сопряженных в  $K$  и непрерывных в  $\overline{K}$  функций существует, если  $\mathcal{L}$  и  $\psi$  на  $\partial K$  подчиняются условиям (87) и (98), в которых:

1)  $\mathcal{L}(1, \gamma)$  выражается формулой (88) через независимо задаваемую на  $\partial L$   $2\pi$ -периодическую функцию  $W(1, \gamma)$ , непрерывную на периоде и удовлетворяющую условию Липшица порядка  $\alpha > 0$  или условию Дини — Липшица;

2)  $\psi(1, \gamma)$  выражается через  $\psi(1, \gamma_1)$  и  $\mathcal{L}(1, \gamma)$  формулой

$$\psi(1, \gamma) = \psi(1, \gamma_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} [\psi_n(1, \gamma) - \psi_n(1, \gamma_1)] \quad (99)$$

(см. (95), (96), (94), (90)), где постоянная  $\psi(1, \gamma_1) \in [0, 2\pi)$  находится из решения уравнения (97) при независимо заданном в точке  $\boldsymbol{\xi} = [\tilde{r}(\gamma_1)\mathbf{e}_\zeta(\gamma_1) + X_{31}\mathbf{e}_3]|_{\tilde{r}(\gamma_1)=1} \in \partial L$  векторе вектор-функции  $\varepsilon(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma))|_{\tilde{r}(\gamma)=1}$  (см. (39)).

При этом компоненты  $\mathcal{L}$  и  $\psi$  пары  $(\mathcal{L}, \psi)$  представляются в виде равномерно сходящихся в  $\overline{K}$  рядов, которые описываются соответственно формулами (89)–(92) и (93), (94), (96).

Напомним также, что компоненты  $\mathcal{L}|_{\partial K}$ ,  $\psi|_{\partial K}$  пары  $(\mathcal{L}, \psi)$ , взятые на  $\partial K$ , выражаются (см. (85), (88), (86), (46)) через вектор-функции (37)–(39), заданные на  $\partial L$ . Предполагается, что первые две из них могут быть установлены и устанавливаются независимо одна от другой на основе результатов измерений и удовлетворяют условиям положения 4. Вместе с тем компоненты  $\mathcal{L}|_{\partial K}$ ,  $\psi|_{\partial K}$  согласно предложению 2 произвольными быть не могут. Так, пара  $(\mathcal{L}, \psi)$  гармонических в  $K$  и непрерывных в  $\overline{K}$  функций существует, если  $\mathcal{L}|_{\partial K}$  подчиняется требованиям 1), а компонента  $\psi|_{\partial K}$  зависима в силу требований 2) от компоненты  $\mathcal{L}|_{\partial K}$ . Выразим перечисленные в предложении 2 требования как ограничения на непосредственно измеряемые функции, сформулировав следующее

**Предложение 3.** Векторное поле  $\mathbf{a}(\mathbf{X})$  (см. (31), (51)), удовлетворяющее на  $\partial K$  условиям (84), (86), существует и выражается формулами (81)–(83), если задаваемые на  $\partial L$  (см. (11) в случае  $\tilde{r}(\gamma) \equiv 1$ ) вектор-функции (37), (39) подчиняются ограничениям:

- 1) модуль  $W(1, \gamma)$  (85) вектор-функции (37) удовлетворяет условиям 1) предложения 2;
- 2) вектор-функция (39) удовлетворяет равенству

$$\widehat{\Omega}(-\psi(1, \gamma), \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 = \widehat{\Omega}(\tilde{\theta}(\gamma) - \tilde{\theta}(\gamma_1), \mathbf{e}_3)\varepsilon(\tilde{r}(\gamma), \gamma, \xi_3(\gamma))|_{\tilde{r}(\gamma)=1},$$

где  $\psi(1, \gamma)$  определяется формулой (99), а  $\tilde{\theta}(\gamma) - \tilde{\theta}(\gamma_1)$  — формулой (46) при  $\tilde{r}(\gamma') \equiv 1$ , которая при условиях положения 4 (см. (28)) преобразуется к виду

$$\tilde{\theta}(\gamma) - \tilde{\theta}(\gamma_1) = \int_{X_{31}}^{\xi_3(\gamma)} N(\xi_3) d\xi_3.$$

**12.** В заключение уместно обратить внимание на следующие обстоятельства.

Условия положения 4, дополненные ограничениями предложения 3, выражают специфику строения векторного поля, гладкого соленоидального плосковинтового в области  $D$ , непрерывного в замыкании  $\bar{D} = D \cup \partial D$  и непрерывно дифференцируемого в  $\bar{D}$  по переменной  $X_3$ .

Существование такой специфики означает, что не всякое подлежащее изучению векторное поле априори принадлежит классу  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$ . Использование условий положения 4 и ограничений предложения 3, вообще говоря, также не позволяет с полной определенностью решить вопрос о принадлежности или непринадлежности изучаемого поля классу  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$ , поскольку ограничения 1) в предложении 3 основываются на условиях 1) предложения 2, в которых оговариваются только достаточные условия существования пары  $\mathcal{L}, \psi$ . Исключения составляют случаи, когда вектор-функции  $\mathbf{W}, \varepsilon'_3, \varepsilon$ , установленные по результатам измерения (поля и его производной по  $X_3$ ) в точках линий  $\partial L, \partial L^{(1)}, \partial L^{(2)}$ , выделенных на границе  $\partial D$  области  $D$ , оказываются совместимыми с отмеченными в этом пункте условиями и ограничениями, и поле в  $D$  можно отнести к классу  $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D)$ . Однако и в этих случаях не исключены осложнения, поскольку представление решения в числовой форме является, как правило, приближенным, а исходные числовые данные на  $\partial L, \partial L^{(1)}, \partial L^{(2)}$  измеряются в эксперименте с некоторой погрешностью для конечного множества точек и аппроксимируются интерполирующими функциями.

Таким образом, оправданным представляется проведение исследований корректности изучаемой задачи в части непрерывной зависимости решения от граничных условий (задаваемых функций и параметров). Из свойств базиса гармонических всплесков [5] следует равномерная сходимость рядов, представляющих решения задачи Дирихле с непрерывными граничными значениями, а внутри области их сходимость много быстрее сходимости геометрической погрешности (что также делает их удобным средством для численного представления рассматриваемых здесь задач). На основании этого же можно ожидать предварительно, что решения будут устойчивыми к ошибкам измерений и погрешностям вычислений, если условия гладкости (см. [3]) одной из сопряженных функций можно контролировать строго, т. е. гарантировать ее принадлежность классу  $\text{Lip } \alpha$  хоть при какой-либо  $\alpha > 0$  или оценку ее модуля непрерывности  $\omega(\delta; u)$  (или  $\omega(\delta; v)$ ) через  $A/\ln(B/\delta)$  хоть при каких-то конечных  $A$  и  $B$ . Однако детальное и строгое рассмотрение этой проблемы должно стать предметом отдельной статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Класс соленоидальных плосковинтовых векторных полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 128–143.
2. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1958. 680 с.
3. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески в пространстве гармонических функций // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
4. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески и асимптотика решения задачи Дирихле в круге с малым отверстием // Мат. моделирование. 2002. Т. 41, № 15. С. 17–30.
5. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральной отверстием // Тр. Междунар. летней мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 129.

6. Meyer Y. Ondelettes et opérateurs. I. Ondelettes. Paris: Herman, 1990.
7. Offin D. and Oskolkov K. A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1963. Vol. 9. P. 319–325.
8. Харди Г.Х., Рогозинский В.В. Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1959. 156 с.

Верещагин Владимир Пантелеевич

Поступила 30.03.2011

д-р физ.-мат. наук, профессор

Российский государственный профессионально-педагогический университет

г. Екатеринбург

Субботин Юрий Николаевич

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

зав. отд.

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович

д-р физ.-мат. наук

зав. отд.

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

УДК 517.95

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
С НЕЛОКАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ,  
СОДЕРЖАЩИМ ЗАПАЗДЫВАЮЩИЙ АРГУМЕНТ**

А. М. Денисов

Изучена начально-краевая задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент. Сформулирована обратная задача, состоящая в определении неизвестного коэффициента гиперболического уравнения по решению начально-краевой задачи, заданного в фиксированный момент времени. На основе метода монотонных операторов в частично упорядоченных пространствах доказана теорема существования решения обратной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальное условие, запаздывающий аргумент, обратная задача, теорема существования.

A. M. Denisov. Inverse problem for a hyperbolic equation with a nonlocal boundary condition containing a delay argument.

We study an initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a nonlocal boundary condition containing a delay argument. The inverse problem is formulated, which consists in finding the unknown coefficient of the hyperbolic equation from a solution of the initial-boundary value problem specified at a fixed time. An existence theorem for a solution of the inverse problem is proved.

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal condition, delay argument, inverse problem, existence theorem.

## 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Рассмотрим следующую задачу для функции  $u(x, t)$ :

$$u_{xt} + a(x)u_t + b(x)u_x = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = f(t) + u(l, \alpha(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.3)$$

где  $Q = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ .

Предположим, что выполнены условия

$$a, b \in C[0, l], \quad a(x) > 0, \quad b(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq l; \quad (1.4)$$

$$f \in C^2[0, T], \quad f(0) = 0, f'(0) > 0, \quad f''(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (1.5)$$

$$\alpha \in C^2[0, T], \quad \alpha(0) = 0, \quad 0 \leq \alpha'(0) < 1, \quad \alpha'(t) \leq 1, \quad \alpha''(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.6)$$

Задачу (1.1)–(1.3) можно рассматривать как математическую модель фильтрационной системы. В этой системе газ или жидкость, пройдя через фильтр, опять поступает на вход системы с некоторым запаздыванием по времени, определяемым функцией  $\alpha(t)$ . Пример математической модели фильтрационной системы, аналогичной (1.1)–(1.3), в случае постоянных коэффициентов  $a(x)$ ,  $b(x)$  и краевого условия  $u(0, t) = f(t)$  вместо условия (1.2) приведен в [1].

**О п р е д е л е н и е 1.** Решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть функцию  $u(x, t)$  такую, что  $u \in C^1[Q]$ ,  $u_{xt}, u_{tt}, u_{xtt} \in C[Q]$  и  $u(x, t)$  удовлетворяет (1.1)–(1.3).

Сформулируем теорему существования и единственности решения задачи (1.1)–(1.3).

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (1.4)–(1.6). Тогда существует единственная функция  $u(x, t)$ , являющаяся решением задачи (1.1)–(1.3).

Рассмотрим обратную задачу. Пусть функции  $b(x)$ ,  $f(t)$ ,  $\alpha(t)$  заданы, а функция  $a(x)$  неизвестна. Требуется определить  $a(x)$ , если задана следующая дополнительная информация о решении задачи (1.1)–(1.3):

$$u_x(x, T) = h(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.7)$$

Далее через  $u(x, t; a)$  будем обозначать решение задачи (1.1)–(1.3) для заданной функции  $a(x)$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Решением обратной задачи (1.1)–(1.3), (1.7) будем называть функцию  $a(x)$  такую, что  $a \in C[0, l]$ ,  $a(x) > 0$ ,  $x \in [0, l]$  и  $u(x, t; a)$  удовлетворяет (1.1)–(1.3), (1.7).

Для обратной задачи (1.1)–(1.3), (1.7) справедлива следующая теорема существования решения.

**Теорема 2.** Пусть  $b, h \in C[0, l]$ ,  $b(x) > 0$ ,  $h(x) < 0$  для  $0 \leq x \leq l$  и выполнены условия (1.5), (1.6). Тогда для существования решения обратной задачи (1.1)–(1.3), (1.7) необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная, положительная на отрезке  $[0, l]$  функция  $a_m(x)$  такая, что

$$-h(x) \leq a_m(x) \int_0^T \exp\{-b(x)(T - \tau)\} u_t(x, \tau; a_m) d\tau, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.8)$$

Доказательство теоремы 2 основано на применении метода монотонных операторов в полупорядоченных пространствах [2]. В качестве примеров применения этого метода для исследования обратных задач можно указать работы [3–5].

## 2. Существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.3)

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы 1. Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи (1.1)–(1.3). Обозначим  $v(x, t) = u_t(x, t)$ . Функция  $v(x, t)$  является решением задачи

$$v_{xt} + a(x)v_t + b(x)v_x = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (2.1)$$

$$v(0, t) = f'(t) + v(l, \alpha(t))\alpha'(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.3)$$

где

$$v_0(x) = f'(0) \exp\left\{-\int_0^x a(s) ds\right\} \left[1 - \alpha'(0) \exp\left\{-\int_0^l a(s) ds\right\}\right]^{-1}. \quad (2.4)$$

Проинтегрировав уравнение (2.1) с начальным условием  $v_x(x, 0) = v'_0(x) = -a(x)v_0(x)$ , получим

$$v_x(x, t) = -a(x)v_0(x) \exp\{-b(x)t\} - a(x) \int_0^t \exp\{-b(x)(t - \tau)\} v_t(x, \tau) d\tau.$$

Применив формулу интегрирования по частям, имеем

$$v_x(x, t) = -a(x)v(x, t) + a(x)b(x) \int_0^t \exp\{-b(x)(t - \tau)\} v(x, \tau) d\tau.$$

Проинтегрировав это уравнение с условием (2.2), получим

$$\begin{aligned} v(x, t) = & f'(t) \exp\left\{-\int_0^x a(s) ds\right\} + v(l, \alpha(t)) \alpha'(t) \exp\left\{-\int_0^x a(s) ds\right\} \\ & + \int_0^x \exp\left\{-\int_z^x a(s) ds\right\} a(z) b(z) \int_0^t \exp\{-b(z)(t-\tau)\} v(z, \tau) d\tau dz. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Введем обозначение  $w(x, t) = v_t(x, t)$ . Дифференцируя уравнение (2.5) по  $t$ , имеем

$$\begin{aligned} w(x, t) = & f''(t) \exp\left\{-\int_0^x a(s) ds\right\} + w(l, \alpha(t)) (\alpha'(t))^2 \exp\left\{-\int_0^x a(s) ds\right\} \\ & + \left[ \int_0^{\alpha(t)} w(l, \tau) d\tau + v(l, 0) \right] \alpha''(t) \exp\left\{-\int_0^x a(s) ds\right\} + \int_0^x \exp\left\{-\int_z^x a(s) ds\right\} a(z) b(z) v(z, t) dz \\ & - \int_0^x \exp\left\{-\int_z^x a(s) ds\right\} a(z) (b(z))^2 \int_0^t \exp\{-b(z)(t-\tau)\} v(z, \tau) d\tau dz. \end{aligned}$$

Проинтегрировав последний интеграл по частям, получим

$$\begin{aligned} w(x, t) = & F_0(x, t) + \left[ \int_0^{\alpha(t)} w(l, \tau) d\tau \alpha''(t) + w(l, \alpha(t)) (\alpha'(t))^2 \right] \exp\left\{-\int_0^x a(s) ds\right\} \\ & + \int_0^x \int_0^t \exp\left\{-\int_z^x a(s) ds - b(z)(t-\tau)\right\} a(z) b(z) w(z, \tau) d\tau dz, \quad (x, t) \in Q, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$F_0(x, t) = \left[ f''(t) + v_0(l) \alpha''(t) \right] \exp\left\{-\int_0^x a(s) ds\right\} + \int_0^x \exp\left\{-\int_z^x a(s) ds - b(z)t\right\} a(z) b(z) v_0(z) dz.$$

Таким образом, мы показали, что если функция  $u(x, t)$  является решением задачи (1.1)–(1.3), то функция  $w(x, t) = u_{tt}(x, t)$  является непрерывным решением уравнения (2.6).

Справедливо и обратное утверждение. Пусть функция  $w(x, t)$  непрерывна в  $Q$  и удовлетворяет (2.6). Тогда частная производная  $w_x(x, t)$  существует и непрерывна в  $Q$ . Определим функцию  $u(x, t)$  следующим образом:

$$u(x, t) = \int_0^t \left[ \int_0^\tau w(x, \theta) d\theta + v_0(x) \right] d\tau,$$

где функция  $v_0(x)$  задана формулой (2.4). Легко видеть, что  $u \in C^1[Q]$ ,  $u_{xt}, u_{tt}, u_{xtt} \in C[Q]$  и  $u(x, t)$  удовлетворяет (1.1)–(1.3). Следовательно,  $u(x, t)$  является решением задачи (1.1)–(1.3).

Таким образом, для доказательства существования и единственности решения задачи (1.1)–(1.3) достаточно доказать существование и единственность непрерывного решения уравнения (2.6).

Докажем, что непрерывное решение уравнения (2.6) существует и единственно. Рассмотрим множество  $Q_{t_0} = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_0\}$ , где  $t_0$  — некоторое положительное число  $t_0 \leq T$ . Из условий (1.6) следует, что существует такое  $t_0 \in (0, T]$ , что оператор

$$Dw = \left[ \int_0^{\alpha(t)} w(l, \tau) d\tau \alpha''(t) + w(l, \alpha(t)) (\alpha'(t))^2 \right] \exp \left\{ - \int_0^x a(s) ds \right\} \\ + \int_0^x \int_0^t \exp \left\{ - \int_z^x a(s) ds - b(z)(t - \tau) \right\} a(z) b(z) w(z, \tau) d\tau dz$$

отображает множество  $C[Q_{t_0}]$  в себя и является сжимающим на этом множестве. Следовательно, существует функция  $w_0(x, t) \in C[Q_{t_0}]$ , являющаяся решением уравнения (2.6) на множестве  $Q_{t_0}$ .

Пусть  $\alpha(T) > t_0$ . Определим число  $t_1$  как наибольший корень уравнения  $\alpha(t) = t_0$ . Если  $\alpha(T) \leq t_0$ , то положим  $t_1 = T$ . Введем множество  $Q_{t_1} = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, t_0 \leq t \leq t_1\}$ . Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$w(x, t) = F_1(x, t) \\ + \int_0^x \int_{t_0}^t \exp \left\{ - \int_z^x a(s) ds - b(z)(t - \tau) \right\} a(z) b(z) w(z, \tau) d\tau dz, \quad (x, t) \in Q_{t_1}, \quad (2.7)$$

где

$$F_1(x, t) = F_0(x, t) + \left[ \int_0^{\alpha(t)} w_0(l, \tau) d\tau \alpha''(t) + w_0(l, \alpha(t)) (\alpha'(t))^2 \right] \exp \left\{ - \int_0^x a(s) ds \right\} \\ + \int_0^x \int_0^{t_0} \exp \left\{ - \int_z^x a(s) ds - b(z)(t - \tau) \right\} a(z) b(z) w_0(z, \tau) d\tau dz.$$

Уравнение (2.7) имеет единственное решение  $w_1 \in C[Q_{t_1}]$ . Легко видеть, что функция  $w(x, t)$ , равная  $w_0(x, t)$  при  $(x, t) \in Q_{t_0}$  и равная  $w_1(x, t)$  при  $(x, t) \in Q_{t_1}$ , является непрерывным решением уравнения (2.6) при  $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_1$ .

Продолжая подобный процесс, мы за конечное число шагов получим функцию  $w \in C[Q]$ , являющуюся решением уравнения (2.6) на множестве  $Q$ . Следовательно, существование непрерывного решения уравнения (2.6) на множестве  $Q$  доказано. Единственность такого решения доказывается аналогично существованию. Таким образом уравнение (2.6) имеет единственное решение  $w \in C[Q]$ , и теорема 1 доказана.

**Следствие.** При выполнении условий теоремы 1 для производных функции  $u(x, t)$ , являющейся решением задачи (1.1)–(1.3), справедливы оценки

$$u_t(x, t) > 0, \quad u_{tt}(x, t) \geq 0, \quad u_{xt}(x, t) < 0, \quad (x, t) \in Q.$$

**Доказательство.** Докажем неотрицательность  $w(x, t) = u_{tt}(x, t)$  в  $Q$ . Из условий теоремы 1 следует, что функция  $F_0(x, t)$  неотрицательна в  $Q_{t_0}$ . Тогда  $w_0(x, t)$  — решение уравнения (2.6) на множестве  $Q_{t_0}$  — неотрицательно. Из неотрицательности  $w_0(x, t)$  на множестве  $Q_{t_0}$  следует неотрицательность  $F_1(x, t)$  на множестве  $Q_{t_1}$ . Тогда  $w_1(x, t)$  — решение уравнения (2.7) — также неотрицательно на множестве  $Q_{t_1}$ . Продолжая подобный процесс, получим, что  $w(x, t) = u_{tt}(x, t)$  неотрицательно на множестве  $Q$ .

Положительность  $u_t(x, t)$  на множестве  $Q$  следует из неотрицательности  $u_{tt}(x, t)$  и положительности  $u_t(x, 0) = v_0(x)$  при  $0 \leq x \leq l$ .

Докажем отрицательность  $u_{xt}(x, t)$  на множестве  $Q$ . Из (2.1), (2.3) имеем

$$u_{xt}(x, t) = v'_0(x) \exp\{-b(x)t\} - a(x) \int_0^t \exp\{-b(x)(t - \tau)\} u_{tt}(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in Q.$$

Следовательно,  $u_{xt}(x, t) < 0$  на множестве  $Q$ , поскольку  $u_{tt}(x, t) \geq 0$  на множестве  $Q$  и  $v'_0(x) < 0$  при  $0 \leq x \leq l$ .  $\square$

### 3. Существование решения обратной задачи

**Доказательство** теоремы 2. Докажем необходимость условия (1.8). Пусть решение обратной задачи существует. То есть существует непрерывная положительная функция  $\bar{a}(x)$  такая, что для решения задачи (1.1)–(1.3)  $u(x, t; \bar{a})$  справедливо равенство  $u_x(x, T; \bar{a}) = h(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Интегрируя уравнение (1.1) с условием  $u_x(x, 0; \bar{a}) = 0$ , получим

$$u_x(x, t; \bar{a}) = -\bar{a}(x) \int_0^t \exp\{-b(x)(t - \tau)\} u_t(x, \tau; \bar{a}) d\tau, \quad (x, t) \in Q.$$

Положив  $t = T$  и используя равенство  $u_x(x, T; \bar{a}) = h(x)$ , имеем

$$-h(x) = \bar{a}(x) \int_0^T \exp\{-b(x)(T - \tau)\} u_t(x, \tau; \bar{a}) d\tau, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Таким образом, для функции  $a_m(x) = \bar{a}(x)$  условие (1.8) выполнено, и его необходимость доказана.

Докажем достаточность условия (1.8). Пусть  $\bar{a}_m(x)$  — непрерывная положительная функция, удовлетворяющая условию (1.8).

Рассмотрим на множестве непрерывных положительных функций  $a(x)$  оператор

$$Ka = -h(x) \left[ \int_0^T \exp\{-b(x)(T - \tau)\} u_t(x, \tau; a) d\tau \right]^{-1}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3.1)$$

Из положительности  $u_t(x, t; a)$  на  $Q$  следует, что оператор  $K$  отображает множество непрерывных положительных функций  $a(x)$  в себя.

Докажем, что существует непрерывная положительная функция  $a_{m_0}(x)$  такая, что для любой непрерывной положительной функции  $a(x)$  справедливо неравенство  $(Ka)(x) \geq a_{m_0}(x)$  при  $0 \leq x \leq l$ . Используя следствие из теоремы 1, получим, что  $u_t(0, t; a) > u_t(l, t; a)$  при  $0 \leq t \leq T$ . Тогда  $u_t(0, t; a) < f'(t) + u_t(0, \alpha(t); a)\alpha'(t)$  при  $0 \leq t \leq T$ . Из этого неравенства и условий (1.6) следует, что для любой непрерывной положительной функции  $a(x)$  справедливо неравенство  $u_t(0, t; a) \leq f_0$  при  $0 \leq t \leq T$ , где  $f_0$  — постоянная, не зависящая от  $a(x)$ . Тогда  $u_t(0, T; a) = \max_{(x,t) \in Q} u_t(x, t; a) \leq f_0$  для любой непрерывной положительной функции  $a(x)$ .

Следовательно,

$$(Ka)(x) \geq -h(x) \left[ \int_0^T \exp\{-b(x)(T - \tau)\} f_0 d\tau \right]^{-1} := a_{m_0}(x) > 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.2)$$

для любой непрерывной положительной функции  $a(x)$ .

Докажем, что оператор  $K$  является монотонным на множестве непрерывных положительных функций  $a(x)$ , т.е. что из неравенства  $a_1(x) \geq a_2(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ , следует неравенство  $(Ka_1)(x) \geq (Ka_2)(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Из определения (3.1) следует, что для этого достаточно доказать, что  $u_t(x, t; a_1) \leq u_t(x, t; a_2)$ ,  $(x, t) \in Q$ . Обозначим  $z(x, t) = u_t(x, t; a_1) - u_t(x, t; a_2)$ . Функция  $z(x, t)$  является решением задачи

$$z_{xt} + a_2(x)z_t + b(x)z_x = p(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (3.3)$$

$$z(0, t) = z(l, \alpha(t))\alpha'(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.4)$$

$$z(x, 0) = q(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.5)$$

где

$$p(x, t) = (a_2(x) - a_1(x))u_{tt}(x, t; a_1) \leq 0, \quad (x, t) \in Q,$$

$$q(x) = v_0(x; a_1) - v_0(x; a_2).$$

Интегрируя уравнение (3.3) с начальным условием  $z_x(x, 0) = q'(x)$ , получим

$$\begin{aligned} z_x(x, t) &= q'(x) \exp\{-b(x)t\} + \int_0^t \exp\{-b(x)(t - \tau)\} p(x, \tau) d\tau \\ &\quad - a_2(x) \int_0^t \exp\{-b(x)(t - \tau)\} z_t(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in Q. \end{aligned}$$

Интегрируя последний интеграл по частям и учитывая условие (3.5), имеем

$$z_x(x, t) + a_2(x)z(x, t) = g(x, t) + a_2(x)b(x) \int_0^t \exp\{-b(x)(t - \tau)\} z(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in Q, \quad (3.6)$$

где

$$g(x, t) = [q'(x) + a_2(x)q(x)] \exp\{-b(x)t\} + \int_0^t \exp\{-b(x)(t - \tau)\} p(x, \tau) d\tau.$$

Докажем неположительность функции  $g(x, t)$  в  $Q$ . Для этого достаточно доказать, что  $q'(x) + a_2(x)q(x) \leq 0$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Из определения функции  $q(x)$  следует, что

$$\begin{aligned} q'(x) + a_2(x)q(x) &= -a_1(x)v_0(x; a_1) + a_2(x)v_0(x; a_2) + a_2(x)v_0(x; a_1) - a_2(x)v_0(x; a_2) \\ &= -[a_1(x) - a_2(x)]v_0(x; a_1) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Таким образом  $g(x, t) \leq 0$  в  $Q$ . Интегрируя уравнение (3.6) с условием (3.4), получим

$$\begin{aligned} z(x, t) &= G(x, t) + z(l, \alpha(t))\alpha'(t) \exp\left\{-\int_0^x a_2(s) ds\right\} \\ &\quad + \int_0^x \int_0^t \exp\left\{-\int_\xi^x a_2(s) ds - b(\xi)(t - \tau)\right\} a_2(\xi)b(\xi)z(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad (x, t) \in Q, \quad (3.7) \end{aligned}$$

где

$$G(x, t) = \int_0^x \exp\left\{-\int_\xi^x a_2(s) ds\right\} g(\xi, t) d\xi \leq 0, \quad (x, t) \in Q.$$

Из уравнения (3.7) для функции  $z(x, t)$  аналогично доказательству следствия из теоремы 1 получим, что  $z(x, t) = u_t(x, t; a_1) - u_t(x, t; a_2) \leq 0$ ,  $(x, t) \in Q$ . Следовательно, оператор  $K$  является монотонным на множестве непрерывных положительных функций.

Рассмотрим множество функций

$$A = \{a \in C[0, l]: a_{m_0}(x) \leq a(x) \leq a_m(x), x \in [0, l]\},$$

где функция  $a_{m_0}(x)$  определена в (3.2). Из условия (1.8), неравенства (3.2) и монотонности оператора  $K$  следует, что он переводит множество  $A$  в себя и является монотонным на этом множестве.

Докажем, что оператор  $K$  является компактным на  $A$ . Ограниченность оператора  $K$  на множестве  $A$  очевидна. Оценим разность  $|(Ka)(x_1) - (Ka)(x_2)|$ . Обозначим через  $c_1$  постоянную

$$c_1 = \max_{x \in [0, l]} \left[ \int_0^T \exp\{-b(x)(T - \tau)\} u_t(x, \tau; a_m) d\tau \right]^{-1} > 0.$$

Из определения (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} |(Ka)(x_1) - (Ka)(x_2)| &\leq c_1 |h(x_1) - h(x_2)| \\ &+ c_1^2 \|h\|_{C[0, l]} \int_0^T |\exp\{-b(x_1)(T - \tau)\} u_t(x_1, \tau; a) - \exp\{-b(x_2)(T - \tau)\} u_t(x_2, \tau; a)| d\tau. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Оценим  $\max_{(x, t) \in Q} |u_{xt}(x, t; a)|$ . Для функции  $u_{xt}(x, t; a)$  справедливо представление

$$u_{xt}(x, t; a) = -a(x)u_t(x, t; a) + a(x)b(x) \int_0^t \exp\{-b(x)(t - \tau)\} u_t(x, \tau; a) d\tau, \quad (x, t) \in Q.$$

Следовательно, учитывая неравенство  $\max_{(x, t) \in Q} |u_t(x, t; a)| \leq f_0$ , получим, что

$$\max_{(x, t) \in Q} |u_{xt}(x, t; a)| \leq c_2 = 2\|a_m\|_{C[0, l]} f_0 \quad (3.9)$$

для любой функции  $a(x)$  из множества  $A$ .

Из неравенств (3.8), (3.9) следует, что

$$\begin{aligned} |(Ka)(x_1) - (Ka)(x_2)| &\leq c_1 \omega_h(|x_1 - x_2|) + c_1^2 T^2 \|h\|_{C[0, l]} f_0 \omega_b(|x_1 - x_2|) \\ &+ c_1^2 c_2 T \|h\|_{C[0, l]} |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [0, l] \quad \forall a \in A, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\omega_h(\xi)$  и  $\omega_b(\xi)$  — модули непрерывности на отрезке  $[0, l]$  функций  $h(x)$  и  $b(x)$  соответственно.

Из ограниченности множества  $K(A)$  и оценки (3.10) следует компактность оператора  $K$  на множестве  $A$ .

Докажем непрерывность оператора  $K$  на множестве  $A$ . Пусть  $a_1, a_2 \in A$ . Из (3.1) следует, что

$$\|Ka_1 - Ka_2\|_{C[0, l]} \leq \|h\|_{C[0, l]} c_1^2 T \max_{(x, t) \in Q} |u_t(x, t; a_1) - u_t(x, t; a_2)|. \quad (3.11)$$

Функция  $z(x, t) = u_t(x, t; a_1) - u_t(x, t; a_2)$  является решением уравнения (3.7). Следовательно, функция  $Z(t) = \max_{x \in [0, l]} |z(x, t)|$  удовлетворяет неравенству

$$Z(t) \leq c_3 \|a_1 - a_2\|_{C[0, l]} + Z(\alpha(t))\alpha'(t) + \|b\|_{C[0, l]} \int_0^t Z(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.12)$$

где  $c_3$  — постоянная. Принимая во внимание свойства функции  $\alpha(t)$ , из неравенства (3.12) получим, что

$$Z(t) \leq c_4 \|a_1 - a_2\|_{C[0,l]}, \quad c_4 = \text{const} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.13)$$

Из неравенств (3.11), (3.13) следует, что

$$\|Ka_1 - Ka_2\|_{C[0,l]} \leq c_5 \|a_1 - a_2\|_{C[0,l]}, \quad c_5 = \text{const},$$

и непрерывность оператора  $K$  на множестве  $A$  доказана.

Таким образом, доказано, что оператор  $K$  отображает множество  $A$  в себя, является монотонным, непрерывным и компактным на этом множестве. Следовательно [2], уравнение  $Ka = a$  имеет решение  $\bar{a} \in A$ . Из определения оператора  $K$  следует, что  $u(x, T; \bar{a}) = h(x)$ , т. е. функция  $\bar{a}(x)$  является решением обратной задачи и теорема 2 доказана.

Мы доказали, что условие (1.8) является необходимым и достаточным условием разрешимости обратной задачи. Следует отметить, что с вычислительной точки зрения проверка выполнимости условия (1.8) не является обязательной. Действительно, пусть функция  $a_m(x)$ , удовлетворяющая условию (1.8), существует, но неизвестна. Однако нижняя граница множества  $A$  — функция  $a_{m_0}(x)$  — может быть найдена легко. Рассмотрим итерационный процесс  $a_{n+1}(x) = Ka_n(x)$ ,  $a_0(x) = a_{m_0}(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Из теоремы 2 и метода монотонных операторов [2] следует, что последовательность  $a_n(x)$  монотонно возрастает, т. е.  $a_{n+1}(x) \geq a_n(x)$ ,  $\forall x \in [0, l]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  и равномерно сходится к функции  $\bar{a}(x)$ . Таким образом, для сходимости итерационного процесса важен только факт существования функции  $a_m(x)$ , а не ее конкретные значения, поскольку эта функция никак не определяет сам итерационный процесс. Теорема 2 дает обоснование указанного выше итерационного процесса, и он может быть использован для численного решения обратной задачи. Итерационные методы решения обратных и некорректно поставленных задач рассматривались многими авторами, см., например, [6; 7] и цитированную там литературу.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
2. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. М.: Наука, 1969. 456 с.
3. **Isakov V.** Inverse parabolic problem with the final overdetermination // Comm. Pure Appl. Math. 1991. Vol. 44. P. 185–209.
4. **Прилепко А.И., Костин А.Б.** Обратная задача определения коэффициента параболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 146–155.
5. **Denisov A.M., Shores T.S.** An inverse coefficient problem for an integro-differential equation // Appl. Anal. 2002. Vol. 81. P. 725–752.
6. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
7. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. 200 с.

Денисов Александр Михайлович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. кафедрой  
МГУ имени М.В. Ломоносова  
e-mail: den@cs.msu.su

Поступила 28.04.2011

УДК 519.642 , 519.633, 519.612

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ  
В КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ  
ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ<sup>1</sup>****С. И. Кабанихин, М. А. Шишленин**

Рассматриваются алгоритмы численного решения обратных коэффициентных задач для гиперболических уравнений, основанные на использовании априорной информации об искомом решении. Исследованы оптимизационные алгоритмы и динамический вариант метода Гельфанда — Левитана — Крейна. В качестве априорной информации использованы ограниченность решения и ограниченность первой производной. Получены оценки скорости сходимости. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи для гиперболических уравнений, уравнение Гельфанда — Левитана, оптимизационные методы, регуляризация, априорная информация.

S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin. On the use of a priori information in coefficient inverse problems for hyperbolic equations.

Numerical algorithms for solving inverse coefficient problems for hyperbolic equations based on the use of a priori information on the solution are considered. Optimization algorithms and a dynamic version of the Gelfand–Levitan–Krein method are investigated. The boundedness of the solution and of its first derivative are used as a priori information. Convergence rate estimates are derived. The results of numerical simulations are presented.

Keywords: coefficient inverse problems for hyperbolic equations, Gelfand–Levitan equation, optimization methods, regularization, a priori information.

Посвящается 70-летию В. В. Васина

**1. Введение**

Рассматриваются обратные задачи определения коэффициента  $q(x, y)$  уравнения

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - q(x, y)u$$

по некоторой дополнительной информации относительно решения соответствующих прямых задач.

Основной целью работы является исследование двух способов использования априорной информации при решении коэффициентных обратных задач.

Использование априорной информации при решении некорректных задач является одним из способов улучшения сходимости регуляризирующих алгоритмов [1–3; 6]. Учет априорной информации при построении алгоритмов позволяет улучшить скорость сходимости, сократить количество вычислений [1–3; 6; 15].

Для построения приближенного решения применяются два алгоритма, основанные на методе итераций Ландвебера и на двумерном аналоге метода Гельфанда — Левитана [4; 5].

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09–01–00746, 11–01–00105) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350).

В первом случае метод итераций Ландвебера модифицируется с учетом априорной информации о принадлежности искомого решения ограниченному множеству

$$B(r) = \{q \in L_2((0, \ell) \times (-\pi, \pi)) : \|q\| \leq r\}.$$

Во втором случае обратная задача сводится к системе интегральных уравнений Гельфанда — Левитана, а априорная информация учитывается с помощью приема, введенного С.К. Годуновым [3] и основанного на дискретизации задачи и расширении соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Показано, что модификация метода итераций Ландвебера, основанная на проектировании текущего приближенного решения на каждом шаге итерации на шар, в котором содержится точное решение, существенно сокращает количество итераций. Показано, что включение априорной информации о гладкости искомого решения в алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений в качестве дополнительной системы линейных алгебраических уравнений, повышает точность нахождения нормального псевдорешения.

Рассматриваемые в работе обратные задачи возникают в акустике, сейсмике, электродинамике [4; 7]. В случае обратной задачи акустики коэффициент  $q$  связан с акустической жесткостью среды; в обратной задаче электродинамики — с электромагнитными параметрами среды (если слагаемое  $qu$  заменить на  $qu_t$ , то  $q$  можно трактовать как проводимость среды).

## 2. Постановка обратной задачи 1

Рассмотрим *обратную задачу* определения коэффициента  $q(x, y)$  в случае, когда о решении  $u(x, y, t)$  *прямой задачи*

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - q(x, y)u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0; \quad (1)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad u_x|_{x=0} = \gamma\delta(t); \quad (2)$$

$$u|_{y=\pi} = u|_{y=-\pi} \quad (3)$$

известна дополнительная информация вида

$$u|_{x=0} = f(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in (0, 2\ell). \quad (4)$$

Нетрудно показать [4; 7], что при достаточной гладкости функции  $q$  (например, непрерывной дифференцируемости), решение прямой задачи (1)–(3) существует, единственно и представимо в виде

$$u(x, y, t) = \gamma\theta(x - t) + \tilde{u}(x, y, t).$$

Здесь  $\theta$  — тета-функция Хевисайда, а функция  $\tilde{u}$  является гладкой при всех  $t \geq x \geq 0$ .

Таким образом, обратную задачу (1)–(4) можно свести к задаче [4; 5]:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - q(x, y)u, \quad (x, y, t) \in \Omega(\ell); \quad (5)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in (0, 2\ell); \quad (6)$$

$$u|_{t=x+0} = \gamma, \quad x \in (0, \ell), \quad y \in (-\pi, \pi); \quad (7)$$

$$u|_{y=\pi} = u|_{y=-\pi}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \in (0, 2\ell); \quad (8)$$

$$u|_{x=0} = f(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in (0, 2\ell). \quad (9)$$

Здесь  $\Omega(\ell) = \{x, y, t : (x, t) \in \Delta(\ell), y \in (-\pi, \pi)\}$ ,  $\Delta(\ell) = \{(x, t) : 0 < x < t < 2\ell - x\}$ , а выбор области  $\Omega(\ell)$  осуществляется с учетом теоремы единственности решения обратной задачи [4; 5] (для однозначного определения  $q(x, y)$  в области  $(0, \ell) \times (-\pi, \pi)$  необходимо, а в одномерном случае и достаточно, задать функцию  $f(y, t)$  в области  $(-\pi, \pi) \times (0, 2\ell)$ ).

Один из методов регуляризации обратной задачи (5)–(9) заключается в добавлении слагаемого  $\beta q(x, y)$  в правую часть (7):

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - q(x, y)u, \quad (x, y, t) \in \Omega(\ell); \quad (10)$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in (0, 2\ell); \quad (11)$$

$$u|_{t=x+0} = \gamma + \beta q(x, y), \quad x \in (0, \ell), \quad t \in (0, 2\ell); \quad (12)$$

$$u|_{y=\pi} = u|_{y=-\pi}, \quad x \in (0, \ell), \quad t \in (0, 2\ell); \quad (13)$$

$$u|_{x=0} = f(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in (0, 2\ell). \quad (14)$$

Можно показать, что решение регуляризованной обратной задачи (10)–(14) стремится к точному решению задачи (5)–(9) при  $\beta \rightarrow 0$  [4], поэтому далее мы будем исследовать обратную задачу (10)–(14).

### 3. О сходимости итераций Ландвебера

В данном разделе мы рассмотрим метод итераций Ландвебера [4; 14]. Обратная задача (10)–(14) будет сведена к бесконечной системе нелинейных интегральных уравнений (15), (16), регуляризация которой будет проведена на основе проекционного метода. Приближенное решение полученной при этом конечной системы интегральных уравнений будет построено на основе модифицированного метода итераций Ландвебера, оценка скорости сходимости которого следует из полученных ранее результатов [4; 14].

В разд. 3.1 на примере одномерной обратной задачи акустики будут приведены оценки норм оператора обратной задачи, производной Фреше и сопряженного оператора. В разд. 3.2 будет исследована сходимость модифицированного метода итераций Ландвебера. В разд. 3.3 приведены результаты численных расчетов.

Применим формулу Даламбера к задаче (10), (11), (14) для обращения (пока что формального) оператора  $\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$

$$u(x, y, t) = F(x, y, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} (u_{yy}(\xi, y, \tau) + q(\xi, y)u(\xi, y, \tau)) d\tau d\xi, \quad (x, y, t) \in \Omega(\ell); \quad (15)$$

а затем положим в (15)  $t = x + 0$ . Учитывая (12), получим

$$q(x, y) = \tilde{F}(x, y) + \frac{1}{2\beta} \int_0^x \int_{\xi}^{2x-\xi} (u_{yy}(\xi, y, \tau) + q(\xi, y)u(\xi, y, \tau)) d\tau d\xi, \quad x, y \in (0, \ell) \times (-\pi, \pi). \quad (16)$$

Здесь

$$F(x, y, t) = \frac{1}{2}[f(y, t+x) + f(y, t-x)], \quad \tilde{F}(x, y) = \frac{F(x, y, x) - \gamma}{\beta}.$$

Если система (15), (16) имеет решение  $u \in C^2(\Omega(\ell))$ ,  $q \in C^1((0, \ell) \times (-\pi, \pi))$ , то применяя к (15) операцию  $\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$ , можно убедиться, что  $u(x, y, t)$  удовлетворяет уравнению (10), а пара функций  $\{u(x, y, t), q(x, y)\}$  является решением задачи (10)–(14).

Приближенное решение обратной задачи будем искать в виде конечных рядов Фурье ( $P_N$ -приближение). С этой целью представим  $q$  и  $u$  в виде

$$q(x, y) = \sum_n q_n(x) e^{iny}, \quad u(x, y, t) = \sum_n u_n(x, t) e^{iny}.$$

Здесь и далее  $\sum_n a_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$ , а через  $\mathbb{Z}$  обозначается множество целых чисел.

Система интегральных уравнений (15), (16) может быть записана в виде бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода:

$$u_n(x, t) = F_n(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \left( -n^2 u_n(\xi, \tau) + \sum_m q_{n-m}(\xi) u_m(\xi, \tau) \right) d\tau d\xi, \quad (17)$$

$$q_n(x) = \tilde{F}_n(x) + \frac{1}{2\beta} \int_0^x \int_{\xi}^{2x-\xi} \left( -n^2 u_n(\xi, \tau) + \sum_m q_{n-m}(\xi) u_m(\xi, \tau) \right) d\tau d\xi. \quad (18)$$

Здесь  $(x, t) \in \Delta(\ell)$ ,  $F_n(x, t)$  и  $\tilde{F}_n(x)$  — коэффициенты Фурье функции  $F(x, y, t)$  и  $\tilde{F}(x, y)$  соответственно,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Системе уравнений (17), (18) сопоставим конечную систему

$$v_n(x, t) = F_n(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} \left( -n^2 v_n(\xi, \tau) + \sum_{|n|, |n-m| \leq N} p_{n-m}(\xi) v_m(\xi, \tau) \right) d\tau d\xi, \quad (19)$$

$$p_n(x) = \tilde{F}_n(x) + \frac{1}{2\beta} \int_0^x \int_{\xi}^{2x-\xi} \left( -n^2 v_n(\xi, \tau) + \sum_{|n|, |n-m| \leq N} p_{n-m}(\xi) v_m(\xi, \tau) \right) d\tau d\xi. \quad (20)$$

Здесь  $|n| \leq N$ .

Используя результаты работы [13], можно доказать сходимость

$$\max_{|n| \leq N} \|v_n - u_n\|_{L_2(\Delta(\ell))} \rightarrow 0, \quad \max_{|n| \leq N} \|p_n - q_n\|_{L_2(0, \ell)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty$$

в предположении, что коэффициенты Фурье  $u_n$  и  $q_n$  достаточно быстро убывают с ростом  $n$ .

Введем вектор-функции  $V(x, t) = (v_{-N}, v_{-N+1}, \dots, v_0, \dots, v_N)$ ,  $P(x) = (p_{-N}, p_{-N+1}, \dots, p_0, \dots, p_N)$  и обозначим  $\mathbb{P} = (V(x, t), P(x))^\top$ ,  $\mathbb{F} = (F_{-N}(x, t), \dots, F_N(x, t), \tilde{F}_{-N}(x), \dots, \tilde{F}_N(x))^\top$ . Конечную систему (19), (20) можно переписать в виде операторного уравнения

$$\mathbb{A}(\mathbb{P}) = \mathbb{F}. \quad (21)$$

Здесь оператор  $\mathbb{A}: \mathcal{L}_2(\ell) \rightarrow \mathcal{L}_2(\ell)$ , где  $\mathcal{L}_2(\ell) := \mathcal{L}_2(\Delta(\ell)) \times \mathcal{L}_2(0, \ell)$ ,

$$\mathcal{L}_2(\Delta(\ell)) = \left\{ V(x, t): \|V\|_{\mathcal{L}_2(\Delta(\ell))}^2 = \sum_{|k| \leq N} \|v_k\|_{L_2(\Delta(\ell))}^2 \right\},$$

$$\mathcal{L}_2(0, \ell) = \left\{ P(x): \|P\|_{L_2(0, \ell)}^2 = \sum_{|k| \leq N} \|p_k\|_{L_2(0, \ell)}^2 \right\}.$$

Нелинейные интегральные операторы вида (19), (20), записанные в виде (21), исследованы в работах [8; 11–13]. В частности, показано, что

$$\|\mathbb{A}(\mathbb{P})\|_{\mathcal{L}_2(\ell)} \leq C_1 \|\mathbb{P}\|_{\mathcal{L}_2(\ell)}, \quad \|\mathbb{A}'(\mathbb{P})\mathbb{S}\|_{\mathcal{L}_2(\ell)} \leq C_2 \|\mathbb{S}\|_{\mathcal{L}_2(\ell)}, \quad (22)$$

$$\|\mathbb{A}(\mathbb{P}_1) - \mathbb{A}(\mathbb{P}_2) - \mathbb{A}'(\mathbb{P}_2)(\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2)\|_{\mathcal{L}_2(\ell)} \leq \eta \|\mathbb{A}(\mathbb{P}_1) - \mathbb{A}(\mathbb{P}_2)\|_{\mathcal{L}_2(\ell)}. \quad (23)$$

Здесь  $\eta \in (0, 1/2)$  — некоторая постоянная,  $\mathbb{A}'$  — производная Фреше оператора  $\mathbb{A}$ .

Из (22), (23) вытекает оценка скорости сходимости итераций Ландвёбера

$$\left\| \mathbb{P}^{(n)} - \mathbb{P} \right\|_{\mathcal{L}_2(\ell)} \leq M\beta^n,$$

$$\mathbb{P}^{(n+1)} = T(\mathbb{P}^{(n)}), \quad T(\mathbb{P}^{(n)}) = \mathbb{P}^{(n)} - \alpha \left[ \mathbb{A}'(\mathbb{P}^{(n)}) \right]^* \left( \mathbb{A}(\mathbb{P}^{(n)}) - \mathbb{F} \right).$$

Здесь  $\beta \in (0, 1)$  и  $M > 0$  — некоторые постоянные, не зависящие от  $n$ .

Отметим, что из оценки (23) при  $\varkappa = 2/(1 - \eta^2)$  следует оценка [2; 16]

$$\|\mathbb{A}(\mathbb{P}_1) - \mathbb{A}(\mathbb{P}_2)\|^2 \leq \varkappa \langle \mathbb{A}(\mathbb{P}_1) - \mathbb{A}(\mathbb{P}_2), \mathbb{A}'(\mathbb{P}_1)(\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2) \rangle. \quad (24)$$

В следующем разделе мы приведем схему получения оценок (22), (23) на примере аналогичной одномерной обратной задачи акустики [10].

### 3.1. Одномерная обратная задача акустики

Рассмотрим следующую обратную задачу:

$$\frac{1}{c^2(z)} v_{tt} = v_{zz} - \frac{\rho'(z)}{\rho(z)} v_z, \quad z > 0, \quad t > 0, \quad (25)$$

$$v|_{t < 0} \equiv 0, \quad z > 0, \quad (26)$$

$$v_z|_{z=0} = \delta(t), \quad t > 0, \quad (27)$$

$$v(+0, t) = g(t), \quad t > 0, \quad (28)$$

где  $\rho(z) > 0$  — плотность среды,  $c(z) > 0$  — скорость распространения волн в среде. Прямая (обобщенная начально-краевая) задача (25)–(27) заключается в определении акустического давления  $v(z, t)$  по известным  $c(z)$  и  $\rho(z)$ . В обратной задаче (25)–(28) по дополнительной информации (28) надо найти либо  $c(z)$ , либо  $\rho(z)$ , либо некоторую их комбинацию. Покажем, что одновременно отыскать функции  $c(z)$  и  $\rho(z)$  в одномерной постановке невозможно, но можно найти их произведение  $c(\psi(x)) \cdot \rho(\psi(x))$ , где  $x = \varphi(z) := \int_0^z \frac{dz}{c(z)}$  — новая переменная,  $\psi(\varphi(z)) = z$ . Заметим, что поскольку  $c(z) > 0$ , то для  $\varphi(z)$  существует обратная функция  $\psi(x)$ .

Обозначая  $w(x, t) = v(\psi(x), t)$ ,  $a(x) = c(\psi(x))$ ,  $b(x) = \rho(\psi(x))$ ,  $\sigma(x) = a(x)b(x)$ ,  $c_0 = c(+0)$  и учитывая, что

$$a'/a + b'/b = (\ln a)' + (\ln b)' = (\ln(ab))' = (\ln \sigma)' = \sigma'/\sigma,$$

получим обратную задачу

$$w_{tt} = w_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} w_x, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (29)$$

$$w|_{t < 0} \equiv 0, \quad x > 0, \quad (30)$$

$$w_x(+0, t) = c_0 \delta(t), \quad t > 0, \quad (31)$$

$$w(+0, t) = g(t), \quad t > 0, \quad (32)$$

в которой по дополнительной информации (32) требуется найти функции  $w(x, t)$  и  $\sigma(x)$ .

Отметим, что уравнение (29) в случае не только одной, но и  $n$  пространственных переменных  $(x, y) = (x, y_1, \dots, y_{n-1})$

$$w_{tt} = \Delta w - \nabla \ln \sigma(x, y) \nabla w$$

может быть сведено к виду

$$u_{tt} = \Delta u - q(x, y)u,$$

если ввести новые функции [9; 12]:

$$u(x, y, t) = w(x, y, t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln \sigma(x, y) \right\},$$

$$q(x, y) = -\frac{1}{2} \Delta \ln \sigma(x, y) + \frac{1}{4} |\nabla \ln \sigma(x, y)|^2.$$

Если  $\sigma \in C^1(\mathbb{R}_+)$ , то решение прямой задачи (29)–(31) имеет вид

$$w(x, t) = s(x)\theta(t - x) + \tilde{w}(x, t), \quad (33)$$

где  $\tilde{w}(x, t)$  — непрерывная при  $x \geq 0$  и гладкая при  $t > x > 0$  функция,  $s(x) = -\gamma\sqrt{\sigma(x)/\sigma(+0)}$ .

Учитывая (33), можно показать, что обратная задача (29)–(32) эквивалентна следующей обратной задаче:

$$w_{tt} = u_{xx} - 2 \frac{s'(x)}{s(x)} w_x, \quad t > x > 0, \quad (34)$$

$$w_x|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \quad (35)$$

$$w(x, x+0) = s(x), \quad x > 0, \quad (36)$$

$$w|_{x=+0} = g(t), \quad t > 0. \quad (37)$$

Обратная задача (34)–(37) предпочтительнее первоначальной постановки (25)–(28) по нескольким причинам. Во-первых, прямая задача (34)–(36), в отличие от прямой задачи (25)–(27), не имеет сингулярных составляющих. Во-вторых, в обратной задаче (34)–(37) не два, а один неизвестный коэффициент  $s(x)$ , в то время как у исходной обратной задачи (25)–(28) решение не единственно, поскольку для одной  $\sigma(x) = c(\psi(x))\rho(\psi(x))$  можно подобрать бесконечно много пар функций  $\tilde{c}(\psi(x)) = mc(\psi(x))$ ,  $\tilde{\rho}(\psi(x)) = m^{-1}\rho(\psi(x))$ ,  $m = \text{const}$ , удовлетворяющих исходной обратной задаче. В-третьих, для обратной задачи (34)–(37) оказывается возможным выписать систему нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа (см. далее (38), (40), (41)).

Обозначим

$$q_1(x, t) = w_x(x, t), \quad q_2(x) = \frac{1}{s(x)}, \quad q_3(x) = 2 \frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

Отметим, что поскольку

$$q_2'(x) = -\frac{s'(x)}{s^2(x)} = -\frac{1}{2} q_3(x)q_2(x), \quad s(+0) = -\gamma,$$

то

$$q_2(x) = -\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)q_2(\xi) d\xi. \quad (38)$$

Используя формулу Даламбера для задачи Коши (34)–(36), находим, что

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(t - x) + g(t + x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q_3(\xi)q_1(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (39)$$

Дифференцируя (39) по  $x$ , получаем формулу

$$u_x(x, t) = q_1(x, t) = \frac{1}{2} [-g'(t - x) + g'(t + x)] + \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)[q_1(\xi, t + x - \xi) + q_1(\xi, t - x + \xi)] d\xi. \quad (40)$$

Полагая в (39)  $t = x + 0$  и используя равенство (36), мы приходим к соотношениям

$$s(x) = \frac{1}{2} [g(+0) + g(2x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi}^{2x-\xi} q_3(\xi)q_1(\xi, \tau) d\tau d\xi,$$

$$s'(x) = g'(2x) + \int_0^x q_3(\xi)q_1(\xi, 2x - \xi) d\xi.$$

Умножив последнее равенство почленно на (38), получаем

$$q_3(x) = \left[ -\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)q_2(\xi) d\xi \right] \left[ 2g'(2x) + 2 \int_0^x q_3(\xi)q_1(\xi, 2x - \xi) d\xi \right]. \quad (41)$$

Уравнения (38), (40), (41) образуют систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Заметим, что если решение задачи (40), (38), (41) существует и  $w \in L_2(\Delta(l)) \cap C^2(\Delta(l))$ ,  $s \in C^1(0, l)$ ,  $g \in C^2(0, 2l)$ , то по формуле  $\sigma(x) = (\sigma(+0)/\gamma^2)s^2(x)$  мы можем найти решение обратной задачи (29)–(32) при условии, что  $\sigma(+0)$  известно.

Исследовать одномерную обратную задачу для уравнения акустики (34)–(37) мы будем в операторной форме

$$A(Q) = f, \quad (42)$$

где в соответствии с (38), (40), (41)

$$A(Q) := Q + B(Q), \quad (43)$$

$$Q(x, t) = (q_1(x, t), q_2(x), q_3(x))^T, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} q_1(x, t) = w_x(x, t), \quad q_2(x) = 1/s(x), \quad q_3(x) = 2s'(x)/s(x), \quad f(x, t) = (f_1, f_2, f_3)^T, \\ f_1(x, t) = [g'(t+x) - g'(t-x)]/2, \quad f_2(x) = -1/c_0, \quad f_3(x) = -2g'(2x)/c_0, \end{aligned} \quad (45)$$

$$B(Q) = (B_1(Q), B_2(Q), B_3(Q))^T, \quad (46)$$

$$B_1(Q) = -\frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)[q_1(\xi, t+x-\xi) + q_1(\xi, t-x+\xi)] d\xi, \quad B_2(Q) = \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)q_2(\xi) d\xi,$$

$$B_3(Q) = 2B_2(Q)[g'(2x) + B_4(Q)] + (2/c_0)B_4(Q), \quad B_4(Q) = \int_0^x q_3(\xi)q_1(\xi, 2x-\xi) d\xi.$$

Заметим, что если  $\{w(x, t), s(x)\}$  — решение задачи (34)–(37), то вектор-функция  $Q(x, t)$ , построенная по формуле (44), является решением задачи (42)–(46).

Будем говорить, что элемент  $Q(x, t) = (q_1, q_2, q_3)^T$  принадлежит пространству  $\mathcal{L}_2(l)$ , если

$$q_1(x, t) \in L_2(\Delta(l)), \quad q_k(x) \in L_2(0, l), \quad k = 2, 3.$$

В пространстве  $\mathcal{L}_2(l)$  введем скалярное произведение

$$\langle Q^{(1)}, Q^{(2)} \rangle_{\mathcal{L}_2(l)} = \iint_{\Delta(l)} q_1^{(1)}(x, t)q_1^{(2)}(x, t) dx dt + \sum_{k=2}^3 \int_0^l q_k^{(1)}(x)q_k^{(2)}(x) dx$$

и согласованную с ним норму  $\|Q\|_{\mathcal{L}_2(l)}$ .

Если  $Q(x, t) \in \mathcal{L}_2(l)$  — решение задачи (42)–(46), то пара  $\{w(x, t), s(x)\}$ , где  $w(x, t)$  построена по формуле (39),  $s(x) = 1/q_2(x)$ , является решением задачи (34)–(37).

**Лемма 3.1** (ограниченность оператора  $A$ ). *Предположим, что оператор  $A$  определен формулами (43), (46), и пусть  $g' \in L_2(0, 2l)$ .*

*Тогда имеют место следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \|B_1(Q)\|_{L_2(\Delta(l))}^2 &\leq \|Q\|_{\mathcal{L}_2(l)}^4 l, \quad \|B_2(Q)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq (1/4)\|Q\|_{\mathcal{L}_2(l)}^4 l, \\ \|B_3(Q)\|_{L_2(0, l)}^2 &\leq (3/2)(4/c_0^2 + \beta)\|Q\|_{\mathcal{L}_2(l)}^4 + (3/2)\|Q\|_{\mathcal{L}_2(l)}^8, \end{aligned}$$

где  $\beta := \|g'\|_{L_2(0, 2l)}^2$  и, следовательно,  $A: \mathcal{L}_2(l) \rightarrow \mathcal{L}_2(l)$ .

**Лемма 3.2** (существование производной Фреше  $A'(Q)$ ). Если  $Q \in \mathcal{L}_2(l)$ ,  $g' \in L_2(0, 2l)$ , то оператор  $A$ , определяемый формулами (43), (46), дифференцируем по Фреше, т. е. существует  $A'(Q): \mathcal{L}_2(l) \rightarrow \mathcal{L}_2(l)$ , и  $A'(Q)P = P + B'(Q)P$  для  $P \in \mathcal{L}_2(l)$ , где  $B'(Q)P = (B'_1(Q)P, B'_2(Q)P, B'_3(Q)P)^\top$ ,

$$\begin{aligned} B'_1(Q)P &= -\frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi) [p_1(\xi, t+x-\xi) + p_1(\xi, t-x+\xi)] d\xi \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^x p_3(\xi) [q_1(\xi, t+x-\xi) + q_1(\xi, t-x+\xi)] d\xi, \\ B'_2(Q)P &= \frac{1}{2} \int_0^x [q_3(\xi)p_2(\xi) + q_2(\xi)p_3(\xi)] d\xi, \\ B'_3(Q)P &= 2B'_2(Q)P[g'(2x) + B_4(Q)] + 2B'_4(Q)P[B_2(Q) + 1/c_0], \\ B'_4(Q)P &= \int_0^x [q_3(\xi)p_1(\xi, 2x-\xi) + p_3(\xi)q_1(\xi, 2x-\xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Более того, имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|B'_1(Q)P\|_{L_2(\Delta(l))}^2 &\leq 4\|Q\|_{L_2(l)}^2 \|P\|_{L_2(l)}^2 l, \\ \|B'_2(Q)P\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq \|P\|_{L_2(l)}^2 \|Q\|_{L_2(l)}^2, \\ \|B'_3(Q)P\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq 8(\beta + 4/c_0^2) \|Q\|_{L_2(l)}^2 \|P\|_{L_2(l)}^2 + 16\|Q\|_{L_2(l)}^6 \|P\|_{L_2(l)}^2. \end{aligned}$$

**Лемма 3.3** (свойства сопряженного оператора  $[A'(Q)]^*$ ). Пусть оператор  $A$  определяется формулами (43), (46) и  $g' \in L_2(0, 2l)$ . Тогда для любого  $Q \in \mathcal{L}_2(l)$  оператор  $A'(Q): \mathcal{L}_2(l) \rightarrow \mathcal{L}_2(l)$  имеет сопряженный оператор  $[A'(Q)]^*: \mathcal{L}_2(l) \rightarrow \mathcal{L}_2(l)$ , причем  $[A'(Q)]^*R = R + [B'(Q)]^*R$ ,  $R \in \mathcal{L}_2(l)$ , и компоненты оператора  $[B'(Q)]^*$  имеют вид

$$\begin{aligned} [B'_1(Q)]^*R &= -\frac{1}{2} q_3(x) \left\{ \int_x^{(x+t)/2} r_1(\xi, t+x-\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{l-(t-x)/2} r_1(\xi, t-x+\xi) d\xi - 2 \left[ B_2(Q) \left( \frac{t+x}{2} \right) + \frac{1}{c_0} r_3 \left( \frac{t+x}{2} \right) \right] \right\}, \\ [B'_2(Q)]^*R &= \frac{1}{2} q_3(x) \int_x^l \{ r_2(\xi) + 2r_3(\xi)[g'(2\xi) + B_4(Q)(\xi)] \} d\xi, \\ [B'_3(Q)]^*R &= -\frac{1}{2} \int_x^l \left\{ \int_\xi^{2l-\xi} [q_1(x, t+\xi-x) + q_1(x, t-\xi+x)] r_1(\xi, t) dt \right. \\ &\quad \left. - q_2(x)r_2(\xi) - 2q_2(x)r_3(\xi)[g'(2\xi) + B_4(Q)(\xi)] - 4q_1(x, 2\xi-x) \left[ B_2(Q)(\xi) + \frac{1}{c_0} r_3(\xi) \right] \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Кроме того, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|[B'_1(Q)]^*R\|_{L_2(\Delta(l))}^2 &\leq 2l\|R\|_{L_2(l)}^2 \|Q\|_{L_2(l)}^2 + 2(\|Q\|_{L_2(l)}^4 + 4/c_0^2) \|R\|_{L_2(l)}^2 \|Q\|_{L_2(l)}^2, \\ \|[B'_2(Q)]^*R\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq (3/4) \|Q\|_{L_2(l)}^2 \|R\|_{L_2(l)}^2 (l + 2\beta + 2\|Q\|_{L_2(l)}^4), \\ \|[B'_3(Q)]^*R\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq 3\|R\|_{L_2(l)}^2 \|Q\|_{L_2(l)}^2 (8/c_0^2 + \beta + 3l/2 + 3\|Q\|_{L_2(l)}^4). \end{aligned}$$

### 3.2. Сходимость модифицированного метода итераций Ландвебера в двумерной обратной задаче

Предположим, нам известно, что решение системы интегральных уравнений (19), (20) существует, является достаточно гладким, и известна априорная информация о принадлежности решения  $\mathbb{P}$  некоторому выпуклому замкнутому множеству  $M$ . Рассмотрим модифицированный метод итераций Ландвебера

$$\mathbb{P}^{(n+1)} = \mathcal{P}_M T(\mathbb{P}^{(n)}), \quad (47)$$

где  $\mathcal{P}_M$  в общем случае сильно  $M$ -фейеровское ( $M$ -псевдосжимающее отображение) [2]. В наших численных экспериментах, приводимых в следующем разделе, в качестве  $\mathcal{P}_M$  используется проекция на шар, т. е. априорное множество  $M = \{\mathbb{P}: \|\mathbb{P}\| \leq r\}$ .

Поскольку метрическая проекция является сильно  $M$ -фейеровским отображением [1], а условие (24) гарантирует выполнение этого свойства для оператора шага

$$T(\mathbb{P}) = \mathbb{P} - \alpha[\mathbb{A}'(\mathbb{P})^*](A(\mathbb{P}) - \mathbb{F})$$

при  $\alpha \in (0, 2/(\mathcal{K}C_1^2))$ , ( $C_1$  — константа из оценки (22)), то на основании общей теоремы сходимости [17] итерационный процесс (47) слабо сходится к решению уравнения (21) и имеет место сильная сходимость невязок:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A(\mathbb{P}^n) - \mathbb{F}\| = 0$ . Используя результаты работ [2; 17], можно обосновать и сильную сходимость модифицированного процесса (47).

### 3.3. Численные расчеты

Перепишем обратную задачу (10)–(14) в виде бесконечной системы дифференциальных уравнений на коэффициенты Фурье функций

$$u_{ntt} = u_{nxx} - n^2 u_n(x, t) + \sum_k q_{n-k}(x) u_k(x, t), \quad (48)$$

$$u_{nx}|_{x=0} = 0, \quad u_n|_{t=x} = \bar{q}_n(x), \quad u_n|_{x=0} = f_n(t). \quad (49)$$

Здесь  $(x, t) \in \Delta(\ell)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\bar{q}_n(x)$  — коэффициенты Фурье функции  $\gamma + \beta q(x, y)$ .

Для численного решения обратной задачи (48), (49) перейдем к конечной системе обратных задач. Как и в разд. 3, введем вектор-функции  $V(x, t) = (v_{-N}(x, t), \dots, v_N(x, t))^T$ ,  $P(x) = (p_{-N}(x), \dots, p_N(x))^T$  и представим обратную задачу (48)–(49) в векторной форме:

$$V_{tt} = V_{xx} - B(x)V, \quad (x, t) \in \Delta(\ell); \quad (50)$$

$$V_x|_{x=0} = 0, \quad t \in (0, 2\ell); \quad (51)$$

$$V|_{t=x} = \bar{P}(x), \quad x \in (0, \ell); \quad (52)$$

$$V|_{x=0} = F(t), \quad t \in (0, 2\ell). \quad (53)$$

Здесь компонента с номером  $n$  вектора  $B(x)V$  имеет вид

$$[B(x)V]_n = n^2 v_n(x, t) + \sum_{|k| \leq N, |k-n| \leq N} p_{n-k}(x) v_k(x, t), \quad n = -N, \dots, N;$$

$\bar{P}(x)$  и  $F(t)$  — вектор-функции, состоящие из коэффициентов Фурье функций  $\gamma + \beta q(x, y)$  и  $f(y, t)$  соответственно. Обратная задача (50)–(53) состоит в нахождении вектор-функции  $P(x)$  по известным данным  $F(t)$ .

Обратную задачу (50)–(53) запишем в операторной форме

$$L(P) = F.$$

В силу единственности решения обратной задачи (50)–(53), доказанной в [13], достаточно найти минимум целевого функционала

$$J(P) = \|L(P) - F\|_{\mathcal{L}_2(0,2\ell)}^2. \quad (54)$$

Для решения задачи минимизации  $J(P) \rightarrow \inf$  применим метод итераций Ландвебера

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} - \alpha[L'(P^{(n)})]^*(L(P^{(n)}) - F), \quad n = 0, 1, \dots$$

Метод итераций Ландвебера является градиентным методом с фиксированным параметром спуска  $\alpha$ , поскольку

$$J'(P) = 2[L'(P)]^*(L(P) - F).$$

Найдем приращение функционала невязки

$$J(P + \delta P) - J(P) = \int_0^{2\ell} ([V(0, t; P + \delta P) - F(t)]^2 - [V(0, t; P) - F(t)]^2) dt.$$

Компонента с номером  $m$  приращения функционала невязки имеет вид

$$[J(P + \delta P) - J(P)]_m = \int_0^{2\ell} ([v_m(0, t; P + \delta P) - f_m(t)]^2 - [v_m(0, t; P) - f_m(t)]^2) dt.$$

Обозначим  $\bar{v}_n = v_n(0, t; P + \delta P)$ ,  $\delta v_n = \bar{v}_n - v_n$ . Тогда  $\bar{v}_n$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ntt} &= \bar{v}_{nxx} - n^2 \bar{v}_n - \sum_{|k| \leq N, |k-n| \leq N} (p_{n-k} + \delta p_{n-k}) \bar{v}_k, \\ \bar{v}_n x|_{x=0} &= 0, \quad \bar{v}_n|_{t=x} = \beta(p_n + \delta p_n), \end{aligned}$$

а функция  $\delta v_n$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \delta v_{ntt} &= \delta v_{nxx} - n^2 \delta v_n - \sum_{|k| \leq N, |k-n| \leq N} [q_{n-k} \delta v_k + \delta p_{n-k} v_k], \\ \delta v_n x|_{x=0} &= 0, \quad \delta v_n|_{t=x} = \beta \delta p_n(x). \end{aligned} \quad (55)$$

Учитывая введенные выше обозначения, компоненту функционала с номером  $m$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} [J(P + \delta P) - J(P)]_m &= \int_0^{2\ell} ([\tilde{v}_m(0, t) - f_m(t)]^2 - [v_m(0, t) - f_m(t)]^2) dt \\ &= \int_0^{2\ell} ([\delta v_m(0, t) + u_m(0, t) - f_m(t)]^2 - [v_m(0, t) - f_m(t)]^2) dt \\ &= \int_0^{2\ell} \delta v_m(0, t) 2[v_m(0, t) - f_m(t)]^2 dt + \int_0^{2\ell} [\delta v_m]^2(0, t) dt. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить явный вид градиента функционала  $J(P)$ , умножим уравнение (55) на некоторую функцию  $\psi_n(x, t)$  и проинтегрируем по области  $\Delta(\ell)$ :

$$0 = \iint_{\Delta(\ell)} \left\{ \delta v_{ntt} - \delta v_{nxx} + n^2 \delta v_n + \sum_{|k| \leq N, |k-n| \leq N} [p_{n-k} \delta v_k + \delta p_{n-k} v_k] \right\} \psi_n(x, t) dx dt.$$

После интегрирования по частям данного соотношения заключаем, что функция  $\Psi(x, t)$  является решением сопряженной задачи

$$\Psi_{tt} = \Psi_{xx} - B(x)\Psi, \quad (x, t) \in \Delta(\ell);$$

$$\Psi_x|_{x=0} = 2[U(0, t) - F(t)], \quad t \in (0, 2\ell); \quad \Psi|_{t=2\ell-x} = 0, \quad x \in (0, \ell),$$

а компонента с номером  $m$  градиента функционала (54) определяется по формуле

$$[J'(Q)]_m(x) = 2\beta(\psi_{mx} + \psi_{mt})(x, x) + \sum_{|k| \leq N, |k-m| \leq N} \int_x^{2\ell-x} u_{m-k}(x, t)\psi_m(x, t) dt.$$

Численная схема модифицированного метода Ландвебера таким образом определяется такой последовательностью действий:

1. Задаем начальное приближение  $P^{(0)}(x)$ .
2. Пусть  $P^{(n)}(x)$  известно. Решаем прямую задачу

$$V_{tt}^{(n)} = V_{xx}^{(n)} - B^{(n)}(x)V^{(n)}, \quad (x, t) \in \Delta(\ell);$$

$$V_x^{(n)}|_{x=0} = 0, \quad t \in (0, 2\ell); \quad V^{(n)}|_{t=x} = \bar{P}^{(n)}(x), \quad x \in (0, \ell).$$

3. Находим значение функционала  $J(P^{(n)})$ . Если значение достаточно мало, то принимаем  $P^{(n)}$  за приближенное решение обратной задачи. В противном случае идем на следующий шаг:

4. Решаем сопряженную задачу

$$\Psi_{tt}^{(n)} = \Psi_{xx}^{(n)} - B^{(n)}(x)\Psi^{(n)}, \quad (x, t) \in \Delta(\ell);$$

$$\Psi_x^{(n)}|_{x=0} = 2[V^{(n)}(0, t) - F(t)], \quad t \in (0, 2\ell); \quad \Psi^{(n)}|_{t=2\ell-x} = 0, \quad x \in (0, \ell).$$

5. Определяем компоненту с номером  $m$  градиента функционала

$$[J'(P^{(n)})]_m(x) = 2\beta(\psi_m^{(n)}|_x + \psi_m^{(n)}|_t)(x, x) + \sum_{|k| \leq N, |k-m| \leq N} \int_x^{2\ell-x} v_{m-k}^{(n)}(x, t)\psi_m^{(n)}(x, t) dt.$$

6. Находим приближенное решение на следующем шаге

$$P^{(n+1)}(x) = \mathcal{P}_M[P^{(n)}(x) - \alpha[J'(P^{(n)})](x)],$$

где  $\mathcal{P}_M$  — метрическая проекция на шар  $M = \{\mathbb{P}: \|\mathbb{P}\| \leq r\}$ .

Для численных расчетов были выбраны следующие значения: размер области  $\ell = 1$ , количество узлов равномерной сетки  $N_x = 50$ ,  $N = 10$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 0.1$ .

На рис. 1 и 2 видно, что введение в алгоритм константы  $r$  существенно уменьшает число итераций. Более того, модифицированный алгоритм не зависит от начального приближения (рис. 3 и 4). На рис. 4 и 5 при выборе начального приближения по формуле

$$q^{(0)}(x, y) = \sqrt{40x} |\cos(30y) + 2| + 2x \cos(40y) \sin(10x)\alpha \quad (56)$$

(для каждой точки  $(x, y)$   $\alpha$  — случайное число, равномерно распределенное на интервале  $(0, 1)$ ), алгоритм, не использующий априорную информацию, расходится (рис. 5 слева). При использовании же априорной информации после 800 итераций можно сделать вывод о структуре решения обратной задачи (рис. 5 справа).

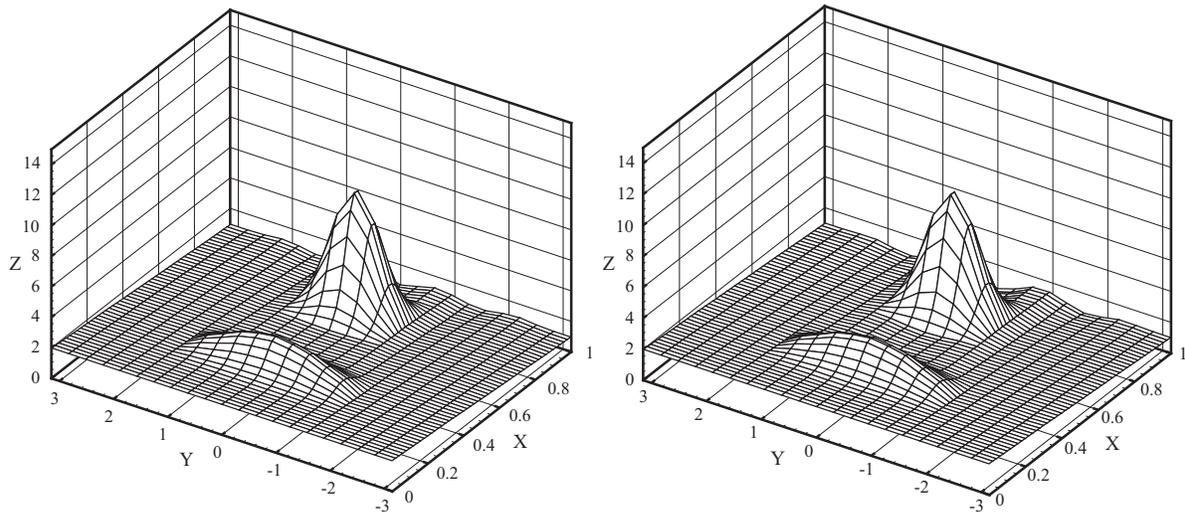


Рис. 1. Слева приведено приближенное решение  $q^{(1000)}(x, y)$ , вычисленное без использования априорной информации; справа — приближенное решение  $q^{(330)}(x, y)$ , вычисленное с учетом априорной информации.

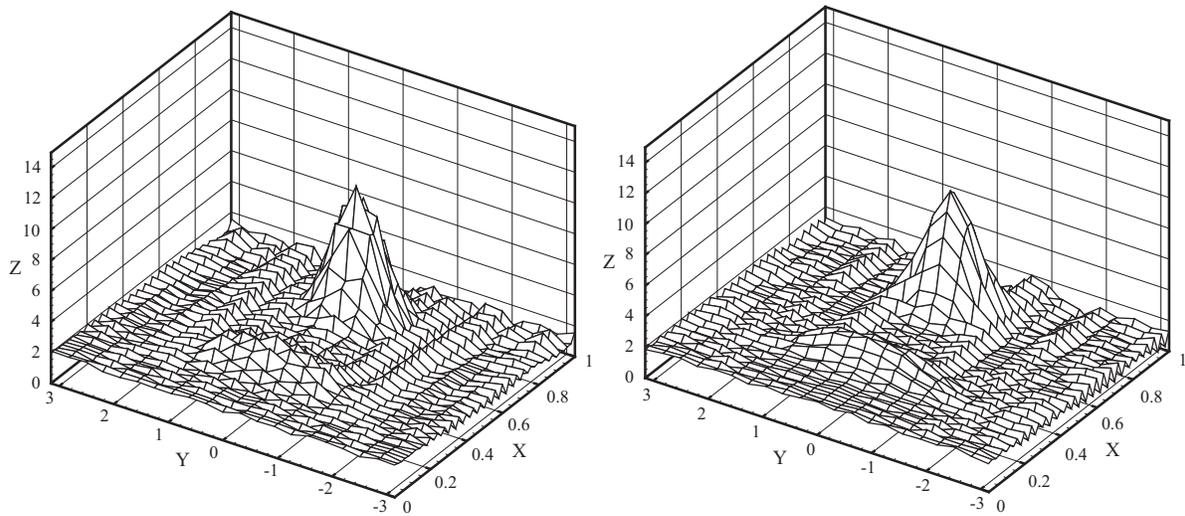


Рис. 2. Результаты расчетов по данным, заданным с погрешностью 3%. Слева приведено приближенное решение  $q^{(1000)}(x, y)$ , вычисленное без использования априорной информации; справа — приближенное решение  $q^{(330)}(x, y)$ , вычисленное с учетом априорной информации. При численных расчетах возмущение данных обратной задачи рассматривалось в виде  $f^\varepsilon = f + \varepsilon\alpha(f_{\max} - f_{\min})$ , где  $\varepsilon$  — уровень погрешности,  $\alpha$  — равномерно распределенное случайное число на отрезке  $[-1, 1]$ ,  $f_{\max}$  и  $f_{\min}$  — максимальное и минимальное значения точных данных.

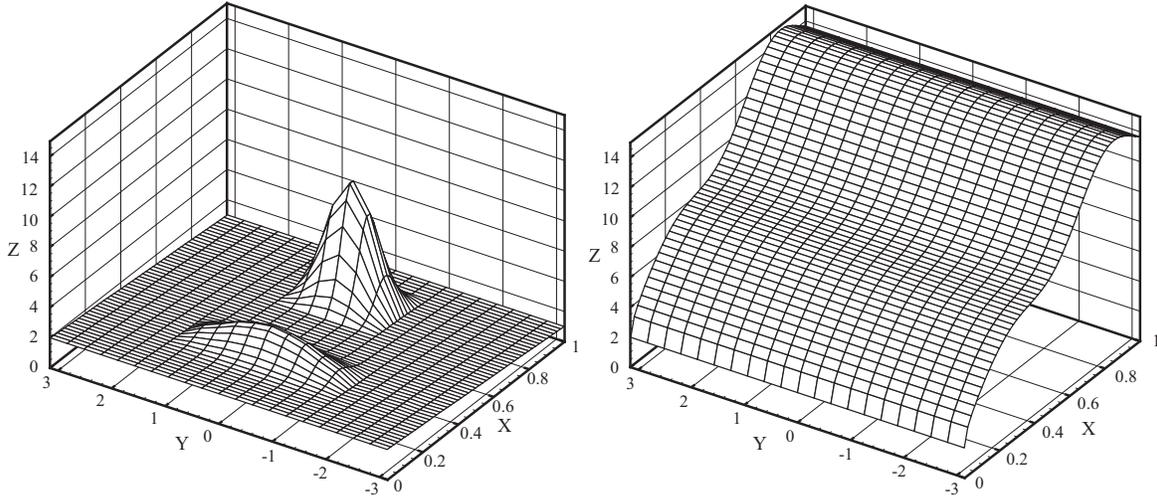


Рис. 3. Слева приведено точное решение  $q(x, y)$ , справа — начальное приближение  $q^{(0)}(x, y)$ .

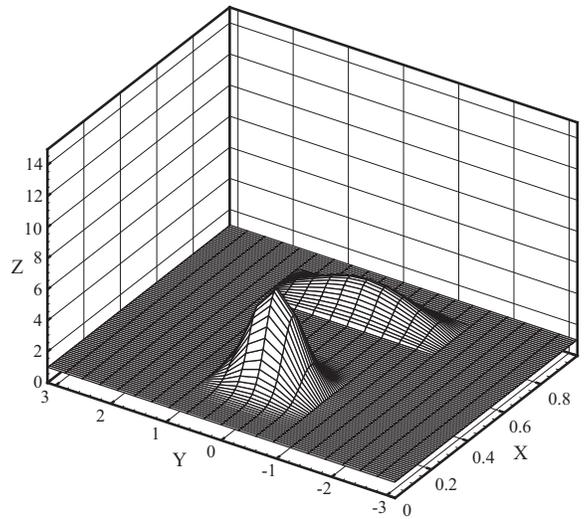


Рис. 4. Точное решение  $q(x, y)$  во второй серии расчетов. Начальное приближение выбрано по формуле (56).

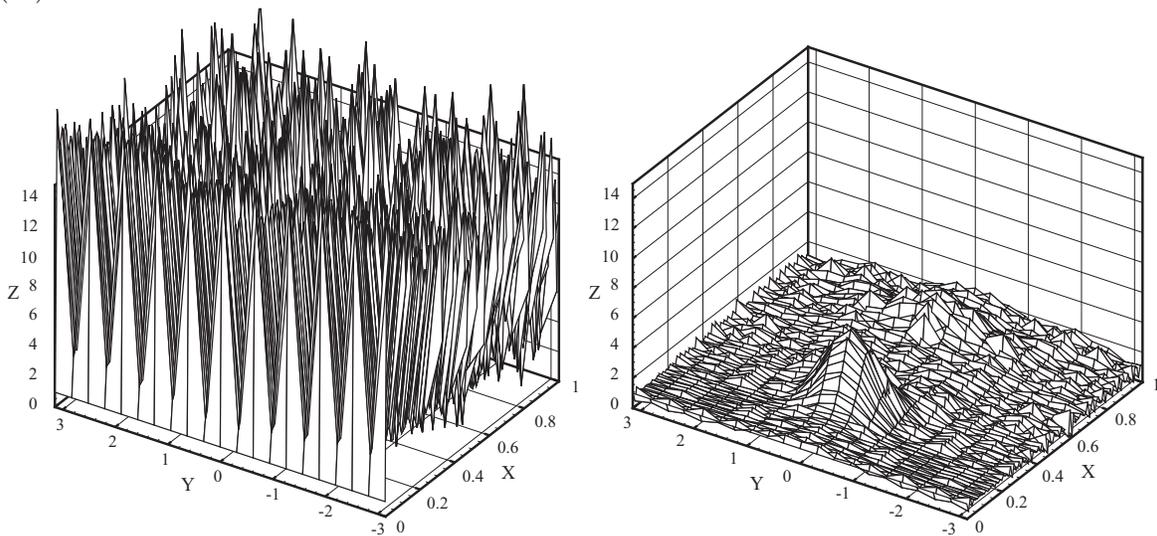


Рис. 5. Слева приведено приближенное решение  $q^{(20)}(x, y)$ , вычисленное без использования априорной информации (при  $n > 20$  метод расходится); справа — приближенное решение  $q^{(800)}(x, y)$ , вычисленное с учетом априорной информации.

#### 4. Использование априорной информации при решении уравнений Гельфанда — Левитана

В данном разделе мы приведем схему вывода многомерного аналога уравнений Гельфанда — Левитана [12], а также результаты решения одномерного и двумерного уравнений с использованием априорной информации на основе приема, предложенного С.К. Годуновым [3].

Рассмотрим последовательность обратных задач, в которой требуется найти функцию  $q(x, y)$ , удовлетворяющую соотношениям [12]

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x, y)u^{(k)}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad (57)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0; \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x)e^{iky}; \quad (58)$$

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0. \quad (59)$$

При всех  $k \in \mathbb{Z}$  решение прямой задачи (57), (58) обладает следующим свойством:

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{1}{2}e^{iky}\theta(t - |x|) + \tilde{u}^{(k)}(x, y, t), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (60)$$

где  $\tilde{u}^{(k)}(x, y, t)$  — достаточно гладкая функция.

Из равенства (60) следуют необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи (57)–(59):

$$f^{(k)}(y, +0) = \frac{1}{2}e^{iky}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y, t) = 0.$$

Введем вспомогательную задачу

$$w_{tt}^{(m)} = w_{xx}^{(m)} + w_{yy}^{(m)} - q(x, y)w^{(m)}, \quad x > 0, \quad y, t \in \mathbb{R}; \quad (61)$$

$$w^{(m)}|_{x=0} = \delta(t)e^{imy}; \quad w_x^{(m)}|_{x=0} = 0. \quad (62)$$

Функция  $w^{(m)}(x, y, t)$  как решение задачи (61), (62), имеет вид

$$w^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(t - x) + \delta(t + x)] + \tilde{w}^{(m)}(x, y, t) \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Здесь функция  $\tilde{w}^{(m)}(x, y, t)$  обладает свойством

$$\tilde{w}^{(m)}(x, y, x - 0) = \frac{1}{4} \left[ xm^2 + \int_0^x q(\xi, y) d\xi \right] e^{imy}.$$

Функция  $u^{(k)}(x, y, t)$  как решение прямой задачи (57), (58) определена для  $t > 0$ . Доопределим эту функцию при  $t < 0$ , построив нечетное продолжение

$$u^{(k)}(x, y, t) = -u^{(k)}(x, y, -t), \quad t < 0.$$

Для функции  $f^{(k)}(y, t)$  после нечетного продолжения по переменной  $t$  справедливо представление

$$f^{(k)}(y, t) = \frac{1}{2}e^{iky}[\theta(t) - \theta(-t)] + \tilde{f}^{(k)}(y, t), \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где функция  $\tilde{f}^{(k)}(y, t)$  непрерывна и нечетна по  $t$ .

Тогда функция  $u^{(k)}(x, y, t)$  как решение соответствующей прямой задачи с учетом нечетного продолжения удовлетворяет условиям

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x, y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y, t \in \mathbb{R}; \quad (63)$$

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t); \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0. \quad (64)$$

Нетрудно проверить, что решение вспомогательной задачи (61), (62) и решение (63), (64) связаны соотношением

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_m w^{(m)}(x, y, s) f_m^{(k)}(t - s) ds.$$

Здесь  $f_m^{(k)}(t)$  — коэффициенты Фурье функции  $f^{(k)}(y, t)$ .

После дифференцирования по  $t$  можно получить многомерный аналог уравнения Гельфанда — Левитана

$$\tilde{w}^{(k)}(x, y, t) + \sum_m \int_{-x}^x f_m^{(k)'}(t - s) \tilde{w}^{(m)}(x, y, s) ds = -\frac{1}{2} [f^{(k)'}(y, t - x) + f^{(k)'}(y, t + x)]. \quad (65)$$

Решая семейство интегральных уравнений (65), функцию  $q(x, y)$  можно найти по формуле

$$q(x, y) = 4 \frac{\partial}{\partial x} \tilde{w}^{(0)}(x, y, x - 0).$$

#### 4.1. Численные результаты

Рассмотрим алгоритм использования априорной информации о гладкости искомого решения на примере одномерной обратной задачи акустики. В одномерном случае можно получить следующее уравнение Гельфанда — Левитана [7]:

$$\int_{-x}^x f(t - s) \tilde{w}(x, s) ds = -\frac{1}{2} [f(t - x) + f(t + x)]. \quad (66)$$

Фиксируем  $x$  и обозначим  $F(t) = -1/2 [f(t - x) + f(t + x)]$  и  $p(s) = \tilde{w}(x, s)$ . После дискретизации уравнения (66) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$A_{m,n} p_n = F_m. \quad (67)$$

Для решения системы используем априорную информацию о гладкости решения (прием регуляризации С.К. Годунова [3]).

Предположим, что известна априорная информация о решении  $p$  системы алгебраических уравнений (67), которая записывается в виде линейных алгебраических уравнений

$$B_{k,n} p_n = g_k.$$

Расширим матрицу  $A$  за счет добавления априорной информации (матрица  $B$ ), введем параметр регуляризации  $\alpha$  и рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\tilde{A}_{m+k,n} p_n = \tilde{f}_{m+k}.$$

Здесь

$$\tilde{A}_{m+k,n} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha) A_{m,n} \\ \alpha B_{k,n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}_{m+k} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha) F_m \\ \alpha g_k \end{bmatrix}.$$

Параметр регуляризации  $\alpha$  выбирается с учетом шага дискретизации уравнения (66) и уровня ошибок в задании правой части  $F_m$  системы.

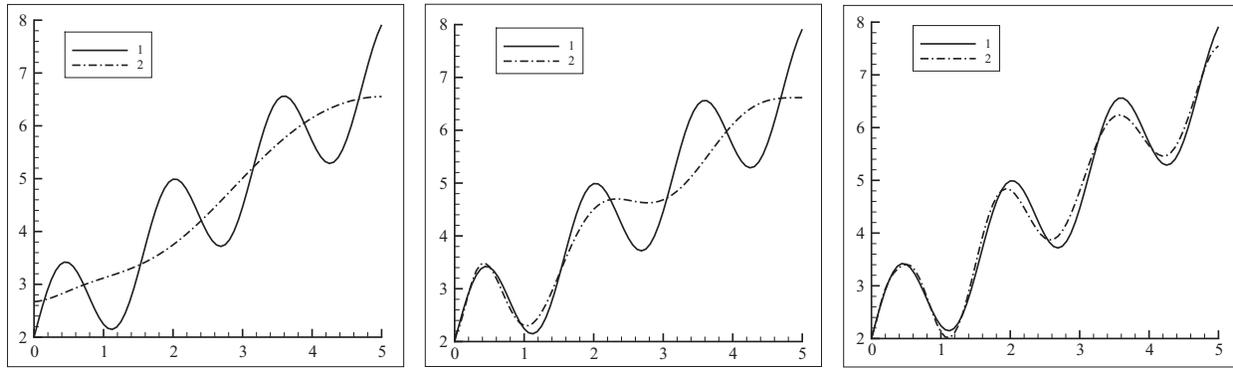


Рис. 6. Зависимость решения от выбора параметра регуляризации. Слева направо:  $\alpha = 10^{-5}$ ,  $\alpha = 10^{-9}$  и  $\alpha = 10^{-13}$  соответственно. Сплошная линия (1) — точное решение, пунктир (2) — решение, полученное с помощью приема С.К. Годунова.

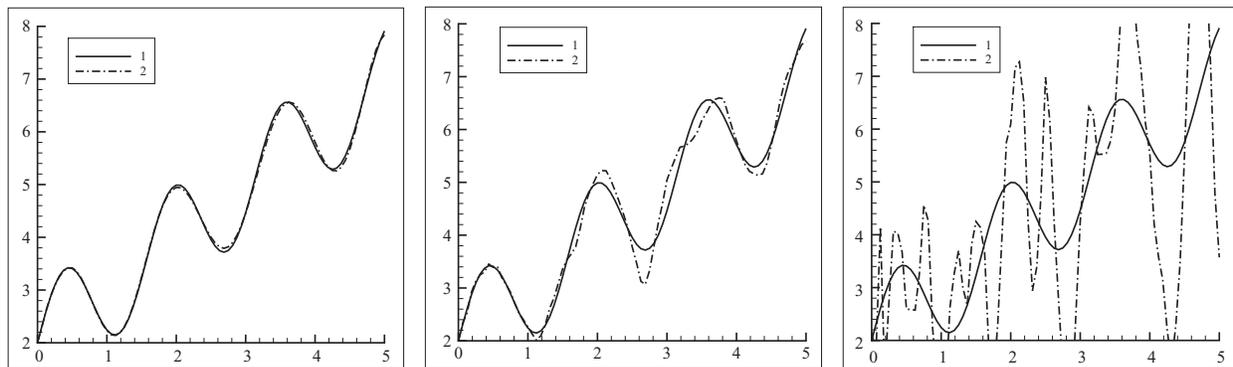


Рис. 7. Зависимость решения от выбора параметра регуляризации. Слева направо:  $\alpha = 10^{-15}$ ,  $\alpha = 10^{-17}$  и  $\alpha = 10^{-18}$  соответственно. При  $\alpha \rightarrow 0$  решение расходится. Сплошная линия (1) — точное решение, пунктир (2) — решение, полученное с помощью приема С.К. Годунова.

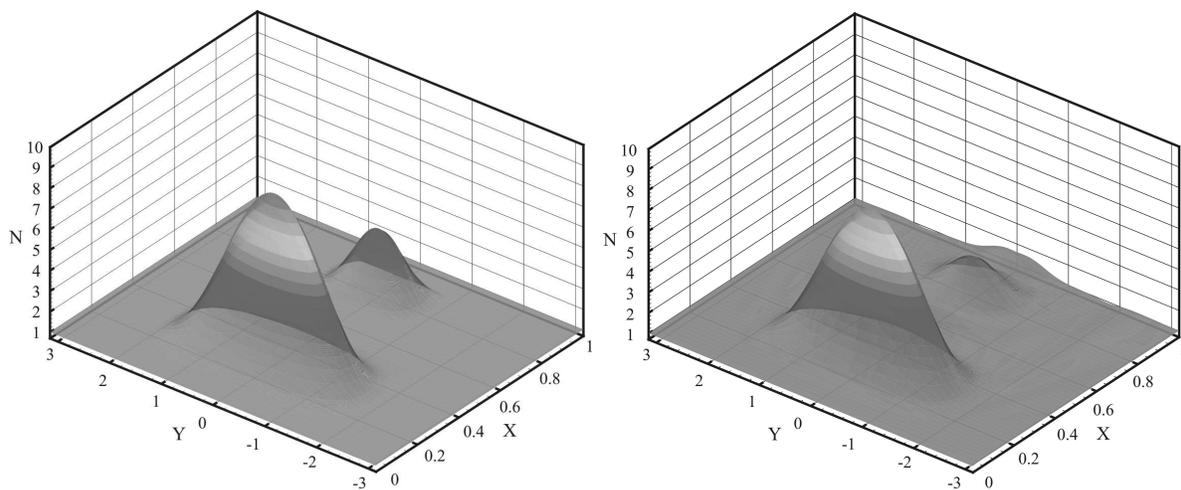


Рис. 8. Слева приведено точное решение; справа — приближенное решение двумерной обратной задачи акустики.

В численных расчетах на рис. 6, 7 выбраны следующие параметры:  $\ell = 5$ ,  $n = m = 100$ ,  $h = 1/n$ . В качестве априорной информации было выбрано условие ограниченности первой производной

$$\left| \frac{p_{i+1} - p_i}{h} \right| \leq M,$$

которое затем преобразовано к системе линейных соотношений

$$B_{k,n} p_n = g_k.$$

Здесь матрица  $B_{k,n}$  имеет вид

$$B_{k,n} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

В расчетах мы полагаем, что величина  $\alpha \|g_k\|$  сравнима с ошибкой задания правой части и  $\alpha g_k = 0$ .

На рис. 8 приведены результаты численных расчетов двумерного аналога уравнения Гельфанда — Левитана — Крейна с использованием априорной информации об ограниченности первых производных решения; при этом  $\ell = 1$ ,  $N = 50$ , число коэффициентов Фурье 25.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность чл.-корр. РАН В. В. Васину за ценные замечания и советы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 258 с.
2. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Москва; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. 199 с.
3. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах / С.К. Годунов [и др.]. Новосибирск: Наука, 1992. 456 с.
4. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское науч. изд-во, 2008. 460 с.
5. **Кабанихин С.И., Шишленин М.А.** Сравнительный анализ численных методов решения обратной задачи для волнового уравнения // Обратные задачи и информационные технологии. 2002. Т. 1, № 1. С. 49–72.
6. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А.Н. Тихонов [и др.]. Москва: Наука, 1983. 198 с.
7. **Романов В.Г.** Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984. 264 с.
8. **Azamatov J.S., Kabanikhin S.I.** Nonlinear Volterra operator equations.  $L_2$ -theory // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1999. Vol. 7, no. 6. P. 487–510.
9. **He S., Kabanikhin S.I.** An optimization approach to a three-dimensional acoustic inverse problem in the time domain // J. Math. Phys. 1995. Vol. 36, no. 8. P. 4028–4043.
10. **Kabanikhin S.I., Ayapbergenova A.T.** Estimation of the rate of convergence of the Landweber iteration method in an inverse problem of acoustics // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. 2002. Suppl. 2. P. S75–S97.
11. **Kabanikhin S.I., Kowar R., Scherzer O.** On the Landweber iteration for the solution of parameter identification problem in a hyperbolic partial differential equation of second order // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. Vol. 6, no. 5. P. 403–430.

12. **Kabanikhin S.I., Satybaev A.D., Shishlenin M.A.** Direct methods of solving inverse multidimensional hyperbolic problems. Utrecht: VSP, 2005. 179 с.
13. **Kabanikhin S.I., Scherzer O., Shishlenin M.A.** Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2003. Vol. 11, no. 1. P. 87–109.
14. **Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.** Quasi-solution in inverse coefficient problems // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. Vol. 16, no. 7. P. 705–713.
15. **Titarenko V., Yagola A.** Error estimation for ill-posed problems on piecewise convex functions and sourcewise represented sets // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. Vol. 16, no. 6. P. 625–638.
16. **Vasin V.V.** On convergence of gradient type methods for nonlinear equations // Doklady RAS. 1998. Vol. 359. P. 5–7.
17. **Vasin V., Skorik G.** Iterative processes of gradient type with applications to gravimetry and magnetometry inverse problems // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2010. Vol. 18, no. 8. P. 855–876.

Кабанихин Сергей Игоревич

Поступила 22.06.2011

д-р физ.-мат. наук

зав. лаб.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

e-mail: kabanikhin@scc.ru

Шишленин Максим Александрович

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

e-mail: mshishlenin@ngs.ru

УДК 519.172.4

## РЕБЕРНЫЕ ТОЧНЫЕ ГРАФЫ ДЕЗА

В. В. Кабанов<sup>1</sup>, А. В. Митянина

Реберным для заданного графа  $G$  является граф  $L(G)$ , вершинами которого служат ребра графа  $G$  и две вершины которого смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра имеют точно одну общую вершину в  $G$ . Регулярный граф диаметра 2 на  $v$  вершинах степени  $k$  называется точным графом Деза с параметрами  $(v, k, b, a)$ , если он не является сильно регулярным и для любых двух его вершин число их общих соседей равно или  $b$ , или  $a$ . В статье дана классификация реберных точных графов Деза.

Ключевые слова: реберные графы, точные графы Деза.

V. V. Kabanov, A. V. Mityanina. Strictly Deza line graphs.

For a given graph  $G$ , its line graph  $L(G)$  is a graph such that its vertices represent the edges of  $G$  and two vertices are adjacent if and only if the corresponding edges of  $G$  have exactly one common vertex. A  $k$ -regular graph of diameter 2 with  $v$  vertices is called a strictly Deza graph with parameters  $(v, k, b, a)$  if it is not strongly regular and any two vertices have either  $a$  or  $b$  common neighbors. We present a classification of strictly Deza graphs that are line graphs.

Keywords: line graphs, strictly Deza graphs.

## Введение

Все рассматриваемые графы являются неориентированными, без петель и кратных ребер. Пусть  $G$  — граф, смежность между вершинами  $U$  и  $W$  графа  $G$  будем обозначать через  $U \sim W$ . Смежные вершины будем называть *соседями*. *Порожденным подграфом* называется подграф, вершины которого смежны тогда и только тогда, когда они смежны в самом графе. Далее вместо порожденный подграф будем говорить просто подграф. Обозначим через  $[W]$  множество соседей вершины  $W$  (а также подграф, индуцированный на этом множестве вершин) и назовем  $[W]$  *окрестностью вершины  $W$* , а число  $|[W]|$  — *степенью вершины  $W$*  (далее предполагается, что граф  $G$  ясен из контекста). Назовем *замкнутой* окрестностью вершины  $W$  и обозначим через  $W^\perp$  подграф на множестве  $[W] \cup \{W\}$ .

В дальнейшем подграф и множество его вершин часто будем обозначать одним символом.

*Расстоянием* между вершинами  $U$  и  $W$  является длина самого короткого пути из  $U$  в  $W$  или  $\infty$ , если такого пути нет. *Диаметром* графа называется максимальное из расстояний между всеми парами его вершин.

*Полным двудольным графом  $K_{m,n}$*  называется граф, множество вершин которого можно разбить на два подмножества мощности  $m$  и  $n$  таким образом, что две вершины смежны тогда и только тогда, когда они лежат в разных подмножествах. Граф  $K_{1,3}$  будем называть *3-лапой*.

Граф на  $n$  вершинах называется *полным (кликой)*, если каждая его пара вершин соединена ребром, и обозначается  $K_n$ .

*Реберным* для заданного графа  $G$  является граф  $L(G)$ , вершинами которого служат ребра графа  $G$  и две вершины которого смежны тогда и только тогда, когда соответствующие ребра имеют точно одну общую вершину в  $G$ .

Граф  $L(K_{m,n})$  называется  *$m \times n$ -решеткой*.

Граф  $G$  называется *регулярным*, если степени всех его вершин одинаковы. Граф является *сильно регулярным*, если он регулярный и для любых различных его вершин  $U$  и  $W$  и

<sup>1</sup>Работа поддержана РФФИ России и ГФЕН Китая (проект № 12-01-91155).

некоторых констант  $\lambda, \mu$  имеем  $|[U] \cap [W]| = \lambda$ , если  $U \sim W$ , и  $|[U] \cap [W]| = \mu$  в противном случае.

Пусть  $v, k, b, a$  — целые числа такие, что  $0 \leq a \leq b \leq k < v$ . Граф  $G$  является  $(v, k, b, a)$ -графом Деза, если:

- 1)  $G$  содержит точно  $v$  вершин;
- 2) для любых вершин  $U, W \in G$ :  $|[U] \cap [W]| = \begin{cases} a \text{ или } b, & \text{если } U \neq W; \\ k, & \text{если } U = W. \end{cases}$

Очевидно, что сильно регулярные графы являются подклассом графов Деза. Точным графом Деза называется граф Деза, не являющийся сильно регулярным и имеющий диаметр 2. Это понятие было впервые введено в 1994 году в [1]. В 1999 году была опубликована работа пяти авторов [2], в которой они описывают основные свойства таких графов, а также приводят некоторые конструктивные способы их построения (из разностных множеств, композиций и произведений графов и из сильно регулярных графов). В конце [2] дается полный перечень точных графов Деза с количеством вершин, не превышающим 13. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение из этой работы.

**Утверждение 1** (Erickson et al. [2]). Пусть  $G$  является  $(v, k, b, a)$ -графом Деза. Определим для вершины  $U$  следующие параметры:

$$\alpha = |\{W \in G: |[U] \cap [W]| = a\}|, \quad \beta = |\{W \in G: |[U] \cap [W]| = b\}|.$$

Тогда  $\alpha$  и  $\beta$  не зависят от выбора вершины  $U$  и находятся по формулам

$$\alpha = \begin{cases} \frac{b(v-1) - k(k-1)}{b-a}, & \text{если } a \neq b; \\ \frac{k(k-1)}{a}, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{a(v-1) - k(k-1)}{a-b}, & \text{если } a \neq b; \\ \frac{k(k-1)}{a}, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

Классификация реберных сильно регулярных графов была получена в работе [5] в рамках исследования сильно регулярных графов с наименьшим собственным значением  $-2$ .

Треугольник  $T$  графа  $G$  называется *нечетным*, если в  $G$  имеется вершина, смежная с нечетным числом вершин в  $T$ , и *четным*, если  $G$  не содержит таких вершин.

Первый результат о реберных графах был получен Крауцем.

**Теорема 1** (Крауц, [3]). Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $G$  — реберный граф.
2. Ребра графа  $G$  можно разбить на полные подграфы таким образом, чтобы ни одна из вершин не принадлежала более чем двум подграфам.

Структурный критерий того, является ли данный граф реберным, был получен ван Роои и Вилфом.

**Теорема 2** (Роои — Вилф, [4]). Следующие утверждения эквивалентны:

1.  $G$  — реберный граф.
2. Граф  $G$  не содержит 3-лапу  $K_{1,3}$  в качестве порожденного подграфа, и если два нечетных треугольника имеют общее ребро, то подграф, порожденный их вершинами, есть  $K_4$ .

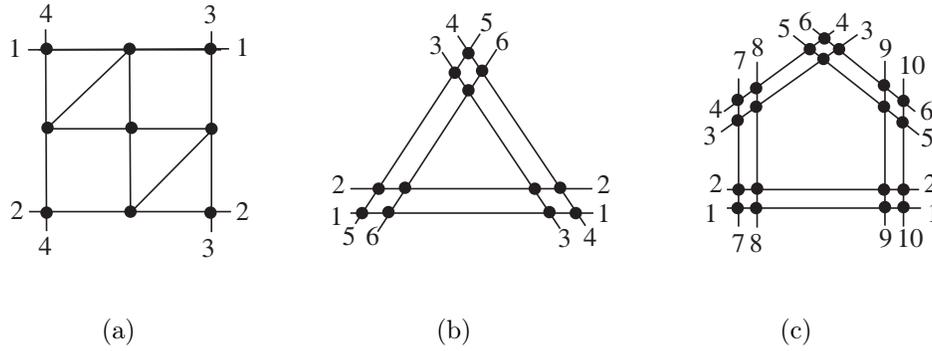


Рис. 1

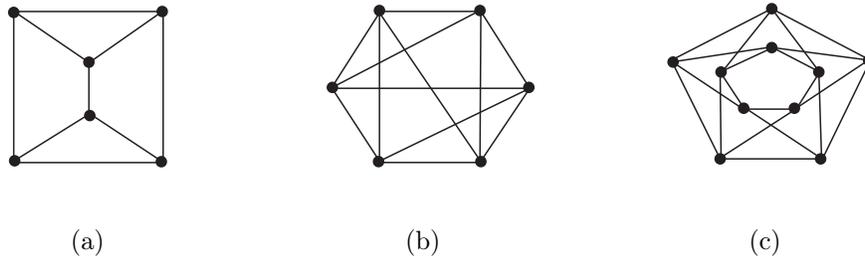


Рис. 2

**З а м е ч а н и е.** Чтобы не загромождать рисунок, полагаем, что все вершины, находящиеся на одной линии  $i - i$ , попарно смежны.

Для удобства формулировки результатов введем следующие обозначения.

Через  $M_1$  обозначим граф Деза с параметрами  $(9,4,2,1)$ , представленный на рис. 1 (а).

Через  $M_2$  обозначим граф Деза с параметрами  $(12,6,3,2)$ , представленный на рис. 1 (б).

Через  $M_3$  обозначим граф Деза с параметрами  $(20,6,2,1)$ , представленный на рис. 1 (с).

Заметим, что графы  $M_1$  и  $M_2$  присутствуют в списке графов Деза, приведенном в [2].

Целью данной статьи является доказательство следующей теоремы, которая дает полную классификацию реберных точных графов Деза.

**Теорема.** *Граф  $G$  является реберным точным графом Деза тогда и только тогда, когда он*

1.  $4 \times n$ -решетка,  $n > 1, n \neq 4$ .
2. Один из графов  $M_1, M_2$  или  $M_3$ .

Отметим, что  $4 \times n$ -решетка является реберным графом для полного двудольного графа  $K_{4,n}$ . При  $n = 4$  этот граф является сильно регулярным графом. Графы  $M_1, M_2, M_3$  являются реберными для графов, представленных на рис. 2 (а), 2 (б), 2 (с) соответственно.

### 1. Общие замечания

Пусть граф  $G$  удовлетворяет условию теоремы, т.е. является реберным точным графом Деза с параметрами  $(v, k, b, a)$ ,  $0 \leq a < b \leq k < v$ .

Так как граф  $G$  является реберным графом, то по теореме Крауца множество всех его ребер можно разбить на подмножества, которые порождают полные подграфы, причем таким образом, что ни одна из вершин не принадлежит более чем двум подграфам. Зафиксируем некоторое разбиение  $\Sigma$  ребер графа  $G$  на клики в соответствии с теоремой Крауца. Обозначим через  $K^{XY}$  полный подграф, содержащий ребро  $XY$ .

**Лемма 1.** Для графа  $G$  верны следующие утверждения.

1. Каждая вершина графа  $G$  принадлежит ровно двум кликам из разбиения  $\Sigma$ .
2. Пусть  $B$  и  $C$  — вершины из окрестности произвольной вершины  $A$  графа  $G$  такие, что  $K^{AB} \neq K^{AC}$ . Тогда множество  $A^\perp$  совпадает с множеством вершин из  $K^{AB} \cup K^{AC}$ .
3. Для любого ребра  $AB$  в окрестности вершины  $A$  существует вершина, не смежная с  $B$ .
4.  $\exists$  константы  $s$  и  $t$ ,  $s \geq 2$ ,  $t \geq 2$  такие, что число вершин в каждой из клик  $K^{AB}$  и  $K^{AC}$  принимает одно из двух значений  $s$  или  $t$  независимо от выбора  $A$ .

**Доказательство.** 1) Рассмотрим вершину  $A$  графа  $G$ . По определению разбиения  $\Sigma$  вершина  $A$  принадлежит не более чем двум кликам. Если окрестность вершины  $A$  является полным подграфом, то ввиду регулярности и связности графа  $G$  получаем, что окрестность вершины  $A$  совпадает с  $G$ . Таким образом,  $G$  является полным графом, что противоречит тому, что  $G$  — точный граф Деза.

2) Предположим, что существует такая вершина  $D$ , что  $D \in A^\perp \setminus (K^{AB} \cup K^{AC})$ , тогда ребро  $AD$  принадлежит клике  $K^{AD}$ . Из свойств разбиения  $\Sigma$  следует, что  $K^{AD}$  совпадает с  $K^{AB}$  или  $K^{AC}$ . Тогда вершина  $D$  лежит в объединении  $K^{AB} \cup K^{AC}$ , что противоречит предположению.

3) Пусть утверждение неверно, и для некоторого ребра  $AB$  такой вершины не существует. Поскольку  $G$  — регулярен, то  $A^\perp = B^\perp$  и, следовательно,  $b = k - 1$ .

По п. 1 леммы в  $A^\perp$  существует вершина  $E$  такая, что  $K^{AE} \neq K^{AB}$ . Тогда по п. 2 леммы  $A^\perp = K^{AB} \cup K^{AE}$ . Так как  $A^\perp = B^\perp$ , то аналогичным образом получаем для вершины  $B$  соотношение  $B^\perp = K^{AB} \cup K^{BE}$ . Отсюда следует, что  $A^\perp \setminus K^{AB} = B^\perp \setminus K^{AB}$ . При этом  $A^\perp \setminus K^{AB} = B^\perp \setminus K^{AB} = \{E\}$ , поскольку в противном случае ребро из полного подграфа  $K^{AE}$ , инцидентное двум вершинам из этой разности, лежит и в полном подграфе  $K^{BE}$ , а это противоречит условиям разбиения  $\Sigma$ .

Поскольку  $K^{AE} \neq K^{BE}$ , то  $E^\perp = K^{AE} \cup K^{BE}$ , а следовательно, замкнутая окрестность вершины  $E$  содержит ровно три вершины:  $A, B, E$ . Так как граф  $G$  — связный и регулярный, то он является треугольником на вершинах  $A, B, E$ , что противоречит тому, что  $G$  — точный граф Деза.

4) Поскольку  $\Sigma$  — разбиение, то  $k = |K^{AB}| + |K^{AC}| - 2$ . Заметим, что  $B^\perp$  содержит  $K^{AB}$ , и в соответствии с п. 3 этой леммы найдется вершина  $D \in B^\perp$  такая, что  $D$  не принадлежит  $A^\perp$ . Тогда  $k = |K^{AB}| + |K^{BD}| - 2$ , а следовательно,  $|K^{AC}| = |K^{BD}|$ .

Поскольку  $G$  — точный граф Деза, то он регулярен и связан, а значит, утверждение леммы верно.

Лемма доказана.

В разд. 2 и 3 для графа  $G$  рассмотрены следующие альтернативы:

- любой треугольник графа содержится только в одной клике разбиения  $\Sigma$ ;
- существует треугольник, все ребра которого лежат в разных кликах разбиения  $\Sigma$ .

## 2. “Внутрикликовый” случай

Пусть  $G$  — граф, удовлетворяющий условиям теоремы, т. е. реберный точный граф Деза с параметрами  $(v, k, b, a)$ ,  $0 \leq a < b \leq k < v$ . В этом разделе разбирается случай, когда любой треугольник графа  $G$  содержится в некоторой клике разбиения  $\Sigma$ .

Пусть вершина  $A$  — некоторая вершина графа  $G$ , тогда по лемме 1 в окрестности  $A$  существуют несмежные вершины  $B$  и  $C$ , и пусть  $K^{AB} = \{A, B = B_1, \dots, B_s\}$ ,  $K^{AC} = \{A, C = C_1, \dots, C_t\}$ . Поскольку в этом разделе любой треугольник разбиения графа содержится в некоторой клике разбиения  $\Sigma$ , то не существует ребер вида  $B_i C_j$  для любых  $i$  и  $j$ .

**Лемма 2.** Для любой клики разбиения  $\Sigma$  и любой вершины графа  $G$  вне этой клики существует не более одного ребра, выходящего из этой вершины в эту клику.

**Доказательство.** Поскольку любой треугольник содержится в некоторой клике разбиения  $\Sigma$ , то доказательство леммы следует из свойств разбиения  $\Sigma$ .

**Лемма 3.** *Любая пара вершин  $B_i, C_j, i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t$ , имеет не более двух общих соседей в графе  $G$ , и, следовательно,  $a \leq 2$ .*

**Доказательство.** Без ограничения общности рассмотрим вершины  $B, C$  и для каждой из них построим множество соседей вне  $A^\perp : \{X_1 = X, \dots, X_t\}$  и  $\{Y_1 = Y, \dots, Y_s\}$  соответственно, которые вместе с  $B$  и  $C$  будут образовывать соответствующие клики  $K^{BX}$  и  $K^{CY}$ , являющиеся элементами  $\Sigma$ .

Из свойств разбиения  $\Sigma$  следует, что  $|K^{BX} \cap K^{CY}| \leq 1$ . Поскольку по лемме 1 имеем  $B^\perp = K^{AB} \cup K^{BX}, C^\perp = K^{AC} \cup K^{CY}$ , то  $|B^\perp \cap C^\perp| \leq 2$ .

Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Для реберного точного графа Деза с параметрами  $a = 2, b > 2$ , у которого любой треугольник содержится в некоторой клике разбиения  $\Sigma$ , выполняются следующие утверждения:*

1. *Любая вершина графа принадлежит двум полным подграфам разбиения  $\Sigma$  таким, что они содержат различное количество вершин.*

2. *Граф является решетчатым графом размера  $(a + 2) \times (b + 2)$ .*

**Доказательство.** По лемме 3 любая пара несмежных вершин  $B_i, C_j, i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t$ , имеет ровно двух общих соседей, и при этом  $[B_i] \cap [C_j]$  является 2-кликкой для всех  $i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t$ . По лемме 1 окрестность  $A$  является объединением двух изолированных подграфов.

Поскольку по условию леммы граф является точным графом Деза, то мощности этих подграфов различны. По [7, теорема 1] получаем, что искомый граф является  $(a + 2) \times (b + 2)$ -решеткой, где  $a = 2, b > 2$ .

Лемма доказана.

Мощности полных подграфов  $K^{AB}$  и  $K^{AC}$  могут принимать одно из двух значений  $\{a + 2, b + 2\}$ . Далее рассмотрим различные случаи.

**2.1.** Пусть  $|K^{AB}| = |K^{AC}| = b + 2, k = 2b + 2$ .

По лемме 1 найдется вершина  $X$  из  $B^\perp \setminus A^\perp$  такая, что  $B^\perp = K^{AB} \cup K^{BX}$ , и пусть  $K^{BX} = \{B, X = X_1, X_2, \dots, X_{b+1}\}$ . Заметим, что  $K^{BX} \cap K^{AC} = \emptyset$ .

В зависимости от того, существует ли ребро вида  $X_i C_j, i, j \in \{1, \dots, b + 1\}$ , возможны два случая.

**2.1.1.** Пусть не существует ребер вида  $X_i C_j, i, j \in \{1, \dots, b + 1\}$ . Поскольку граф  $G$  имеет диаметр 2, существуют пути длины 2 из каждой  $X_i$  в каждую  $C_j$ . Пусть  $X_{i,j} \in X_i^\perp \cap C_j^\perp, i, j = 1, \dots, b + 1$ . По лемме 2 каждая вершина  $X_{i,j}$  смежна только с одной вершиной  $C_j$  из  $K^{AC}, i, j = 1, \dots, b + 1$ . С другой стороны,  $X_i^\perp, i = 1, \dots, b + 1$ , содержит  $K^{BX}$  и  $b + 1$  вершину  $\{X_{i,1}, \dots, X_{i,b+1}\}$ . Аналогичные рассуждения справедливы и для вершин  $C_j$ .

Ввиду леммы 1 порожденный подграф на множестве  $\{X_{i,j} | i, j = 1, \dots, b + 1\}$  является  $(b + 1) \times (b + 1)$ -решеткой. Эта решетка вместе с полными подграфами  $K^{AC} \setminus \{A\}$  и  $K^{BX} \setminus \{B\}$  является объединением всех замкнутых окрестностей  $X_{i,j}, i, j = 1, \dots, b + 1$ . Рассмотрим  $[X_{i,j}] \cap [B_2]$ . Поскольку  $G$  — граф диаметра 2, то  $|[X_{i,j}] \cap [B_2]| > 0$ . Но тогда  $B_2$  смежна с  $X_{i,k}$  для некоторого  $k$  из  $\{1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, b + 1\}$  или с  $X_{m,j}$  для некоторого  $m$  из  $\{1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, b + 1\}$ . В любом случае получаем противоречие:  $B_2$  не принадлежит  $K^{AC}, K^{BX}$  и  $B_2$  не принадлежит  $\{X_{i,j} | i, j = 1, \dots, b + 1\}$ .

**2.1.2.** Пусть существует ребро вида  $X_i C_j, i, j \in \{1, \dots, b + 1\}$ . Без ограничения общности будем считать, что  $C_1 X_1$  — ребро. По лемме 3 один из параметров  $\{a, b\}$  равен 2. Значит, либо  $a = 2$ , либо  $b = 2$ .

**2.1.2.1.** Пусть  $a = 2, b > 2$ . Так как  $|K^{AB}| = |K^{AC}|$ , то получаем противоречие с леммой 4.

**2.1.2.2.** Пусть  $b = 2$ , тогда  $a$  равно либо 0, либо 1.

Пусть граф  $G$  имеет параметры  $(v, 6, 2, 0)$ . Так как  $G$  — точный граф Деза, то для пары несмежных вершин число общих соседей не равно 0. С другой стороны, нетрудно увидеть, что любая пара смежных вершин имеет ровно двух общих соседей. Следовательно, реберного точного графа Деза с такими параметрами не существует.

Пусть граф  $G$  имеет параметры  $(v, 6, 2, 1)$ , следовательно,  $|K^{AB}| = |K^{AC}| = 4$ . По лемме 1 для каждой вершины  $B_i$  и  $C_j, i, j = 1, 2, 3$ , в антиокрестности  $[A]^\setminus$  существует треугольник, со всеми вершинами которого она смежна. Заметим, что любая пара вершин  $B_i, B_j, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$ , в  $[A]^\setminus$  не имеет общих соседей, а значит, эти треугольники не пересекаются ни по одной из вершин. Аналогично для вершин  $C_j, j = 1, 2, 3$ . Через  $\Delta_{B_i}$  (через  $\Delta_{C_i}$ ),  $i = 1, 2, 3$ , обозначим треугольник, все вершины которого смежны с соответствующей вершиной  $B_i$  ( $C_i$ ). Через  $\Delta_B$  обозначим множество всех соседей из  $[A]^\setminus$  вершин  $B_i, i = 1, 2, 3$ , очевидно,  $\Delta_B = \bigcup_{i=1}^3 \Delta_{B_i}$ . Аналогично введем обозначение  $\Delta_C$ , где  $\Delta_C = \bigcup_{i=1}^3 \Delta_{C_i}$ . Поскольку граф  $G$  является точным графом Деза, тогда  $G = A^\perp \cup \Delta_B \cup \Delta_C$ . Отметим, что  $|\Delta_B| = |\Delta_C| = 9$ , при этом  $0 \leq |\Delta_B \cap \Delta_C| \leq 9, 25 \geq v \geq 16$ .

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 5.** Для любых  $\Delta_{B_i}$  и  $\Delta_{C_j}, i, j \in \{1, 2, 3\}$  верны следующие утверждения:

1.  $|\Delta_{B_i} \cap \Delta_{C_j}| \leq 1$ .
2. Если  $|\Delta_{B_i} \cap \Delta_{C_j}| = 1$ , то не существует ребер, соединяющих вершины из  $\Delta_{B_i}$  с вершинами из  $\Delta_{C_j}$ .

**Доказательство.** 1. Если  $|\Delta_{B_i} \cap \Delta_{C_j}| > 1$ , тогда вершины  $B_i$  и  $C_j, i, j \in \{1, 2, 3\}$ , смежные с этими треугольниками, имеют более двух общих соседей, что противоречит заданным параметрам.

2. В противном случае получаем треугольник, все ребра которого принадлежат разным полным подграфам, а именно,  $\Delta_{B_i}, \Delta_{C_j}$  и некоторому полному подграфу, содержащему ребро, которое инцидентно вершинам из  $\Delta_{B_i}$  и  $\Delta_{C_j}, i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

Лемма доказана.

Если  $|\Delta_B \cap \Delta_C| = 9$ , тогда  $v = 16, \beta = 15, \alpha = 0$  и, следовательно, граф  $G$  является сильно регулярным, что противоречит условию. Таким образом,  $|\Delta_B \cap \Delta_C| < 9$ , а значит, существуют вершины, лежащие либо в  $\Delta_B \setminus \Delta_C$ , либо в  $\Delta_C \setminus \Delta_B$ , и очевидно, что  $|\Delta_B \setminus \Delta_C| = |\Delta_C \setminus \Delta_B|$ . Будем называть вершины из множества  $(\Delta_B \setminus \Delta_C) \cup (\Delta_C \setminus \Delta_B)$  “свободными”.

Отметим, что замкнутая окрестность любой вершины из  $\Delta_B \cap \Delta_C$  представляет собой объединение двух 4-клик, которые имеют одну общую вершину и одна из которых содержит некоторый треугольник  $\Delta_{B_i}$  и соответствующую ему вершину  $B_i$ , а другая — треугольник  $\Delta_{C_j}$  и вершину  $C_j$ , соответственно, где  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . А поскольку граф  $G$  регулярен и  $G = A^\perp \cup \Delta_B \cup \Delta_C$ , то замкнутая окрестность любой “свободной” вершины содержит вершины из  $(\Delta_B \setminus \Delta_C) \cup (\Delta_C \setminus \Delta_B)$ . Введем раскраску ребер подграфа, построенного на множестве вершин  $\Delta_B \cup \Delta_C$ : красные — это ребра треугольников  $\Delta_{B_i}, \Delta_{C_i}, i = 1, 2, 3$ ; синие — это ребра, соединяющие две “свободные” вершины, принадлежащие разным треугольникам. При этом вершины из пересечения  $\Delta_B \cap \Delta_C$  инцидентны только красным ребрам, а для “свободных” вершин верна следующая лемма.

**Лемма 6.** Из каждой “свободной” вершины выходит два красных и три синих ребра, причем все синие ребра замыкаются синими и образуют синюю 4-клику.

**Доказательство** очевидно из условия регулярности и параметров графа  $G$ , а также из строения графа  $G = A^\perp \cup \Delta_B \cup \Delta_C$ .

Заметим, что на синих ребрах имеем объединение изолированных 4-клик. Следовательно, количество “свободных” вершин должно быть кратно 4, а  $|\Delta_B \setminus \Delta_C| = |\Delta_C \setminus \Delta_B|$  кратно 2, а значит,  $|\Delta_B \cap \Delta_C| \in \{1, 3, 5, 7\}$ .

Пусть  $|\Delta_B \cap \Delta_C| = 1$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\Delta_{B_1} \cap \Delta_{C_1} \neq \emptyset$ . По лемме 5 не существует ребер, соединяющих вершины из треугольников  $\Delta_{B_1}$  и  $\Delta_{C_1}$ . Заметим, что вершины из множеств  $\Delta_{B_1} \setminus \Delta_{C_1}$  и  $\Delta_{C_1} \setminus \Delta_{B_1}$  не могут быть смежны более чем с одной вершиной из каждого треугольника  $\Delta_{B_i}, \Delta_{C_i}, i = 2, 3$ , в противном случае получаем противоречие с параметром  $b$ . Следовательно, каждая вершина из симметрической разности  $(\Delta_{B_1} \setminus \Delta_{C_1}) \cup (\Delta_{C_1} \setminus \Delta_{B_1})$  множеств  $\Delta_{B_1}$  и  $\Delta_{C_1}$  смежна ровно с одной вершиной из трех различных треугольников  $\Delta_{B_i}, \Delta_{C_i}, i = 2, 3$ .

Пусть  $W_1, W_2 \in \Delta_{B_1} \setminus \Delta_{C_1}$  и вершина  $W_1$  смежна с тремя вершинами из трех различных треугольников. Поскольку граф  $G$  имеет диаметр 2, то должны существовать пути длины 2 от  $W_1$  до всех вершин четвертого треугольника. При этом эти пути будут проходить через вершину  $W_2$ , но тогда  $W_2$  смежна со всеми вершинами четвертого треугольника. Получили противоречие со значением параметра  $b$ .

Пусть  $|\Delta_B \cap \Delta_C| = 3$ , значит, имеем три синих 4-клики. Рассмотрим подграф на вершинах из  $\Delta_B \cap \Delta_C$ . Предположим, что в нем имеется хотя бы одна изолированная вершина, при этом она лежит в пересечении  $\Delta_{B_i} \cap \Delta_{C_j}, i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Тогда по лемме 5 все четыре вершины из симметрической разности множеств  $\Delta_{B_i}$  и  $\Delta_{C_j}$  должны лежать в разных синих 4-кликах, что противоречит количеству синих 4-клик. Следовательно, в подграфе на вершинах из  $\Delta_B \cap \Delta_C$  нет изолированных вершин.

Предположим, что подграф на вершинах из  $\Delta_B \cap \Delta_C$  является треугольником. Без ограничения общности будем считать, что  $\Delta_B \cap \Delta_C = \Delta_{B_1}$ . При этом каждая вершина из  $\Delta_{B_1}$  лежит в пересечении  $\Delta_{B_1} \cap \Delta_{C_i}, i = 1, 2, 3$ . Отметим, что все синие 4-клики построены на вершинах из множества  $\bigcup_{i=2,3} \Delta_{B_i} \cup \bigcup_{i=1}^3 \Delta_{C_j}$ . Очевидно, что вершины из  $\Delta_{C_i} \setminus \Delta_{B_1}, i \in \{1, 2, 3\}$ , будут лежать в двух различных синих 4-кликах, но тогда для вершины из  $\Delta_{B_1} \cap \Delta_{C_i}$  не существует пути длины не более 2 до вершин из  $\bigcup_{i=2,3} \Delta_{B_i}$ , лежащих в третьей синей 4-клике. Получили противоречие с предположением.

Следовательно, подграф на вершинах из  $\Delta_B \cap \Delta_C$  содержит ровно два ребра, которые принадлежат треугольникам  $\Delta_{B_i}$  и  $\Delta_{C_j}, i, j \in \{1, 2, 3\}$ , соответственно. Без ограничения общности будем считать, что в множестве  $\Delta_B \cap \Delta_C$  лежат вершины из пересечений  $\Delta_{B_1} \cap \Delta_{C_1}, \Delta_{B_1} \cap \Delta_{C_2}, \Delta_{B_2} \cap \Delta_{C_1}$ . Отметим, что все вершины треугольников  $\Delta_{B_2}$  и  $\Delta_{C_1}$  будут лежать в трех различных синих 4-кликах. По лемме 5 вершины из разностей  $\Delta_{B_1} \setminus \Delta_C$  и  $\Delta_{C_1} \setminus \Delta_B$  будут лежать в двух различных кликах, но тогда для вершины из  $\Delta_{B_1} \cap \Delta_{C_1}$  не существует пути длины не более 2 до вершин из третьей синей 4-клики, лежащих в  $\Delta_{B_3}$  и  $\Delta_{C_3}$ . Следовательно, такого графа не существует.

Пусть  $|\Delta_B \cap \Delta_C| = 5$ , значит, имеем ровно две синих 4-клики. Предположим, что нашлось такое  $i \in \{1, 2, 3\}$ , что треугольник  $\Delta_{B_i}$  полностью не лежит в  $\Delta_B \cap \Delta_C$ . Тогда все вершины  $\Delta_{B_i}$  лежат в различных синих 4-кликах, что противоречит их количеству. Следовательно, предположение неверно и для любого  $i \in \{1, 2, 3\}$  верно, что  $|\Delta_{B_i} \cap \Delta_C| > 0$ . Таким образом, получили следующие возможные наборы для величин  $|\Delta_{B_i} \cap \Delta_C|, i = 1, 2, 3$ :  $(2, 2, 1)$  и  $(3, 1, 1)$ . Аналогично и для треугольников из  $\Delta_C$ . Соотношение этих наборов для треугольников из  $\Delta_B$  и  $\Delta_C$  определяет структуру  $\Delta_B \cap \Delta_C$ .

Без ограничения общности предположим, что  $|\Delta_{B_1} \cap \Delta_C| = |\Delta_{B_2} \cap \Delta_C| = 2, |\Delta_{B_3} \cap \Delta_C| = 1$ , и пусть треугольник  $\Delta_{B_3}$  пересекается с треугольником  $\Delta_{C_1}$ . В соответствии с количеством синих 4-клик и с учетом того, что вершины из множества  $\Delta_{B_3} \setminus \Delta_C$  лежат в разных синих 4-кликах, а также леммы 5 получаем, что  $|\Delta_{C_1} \setminus \Delta_B| = 0$ . Следовательно, треугольник  $\Delta_{C_1}$  полностью лежит в  $\Delta_B \cap \Delta_C$  и, значит, пересекается со всеми треугольниками  $\Delta_{B_i}, i = 1, 2, 3$ , и для треугольников из  $\Delta_C$  справедлив набор  $(3, 1, 1)$  для величин  $|\Delta_{C_i} \cap \Delta_B|, i = 1, 2, 3$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\Delta_{B_1} \cap \Delta_{C_2} \neq \emptyset$ . Но тогда  $|(\Delta_{B_1} \cap \Delta_C) \cup (\Delta_{C_2} \cap \Delta_B)| = 3$ , и все эти вершины по лемме 5 должны лежать в различных синих 4-кликах. Получили противоречие с их количеством.

Без ограничения общности будем считать, что  $|\Delta_{B_1} \cap \Delta_C| = 3, |\Delta_{B_2} \cap \Delta_C| = |\Delta_{B_3} \cap \Delta_C| = 1$ . Очевидно, что для треугольников из  $\Delta_C$  возможен только набор  $(3, 1, 1)$  для вели-

чин  $|\Delta_{C_i} \cap \Delta_B|, i = 1, 2, 3$ . Также без ограничения общности будем считать, что  $|\Delta_{C_1} \cap \Delta_B| = 3$ ,  $|\Delta_{C_2} \cap \Delta_B| = |\Delta_{C_3} \cap \Delta_B| = 1$ . Заметим, что  $|\Delta_{B_2} \setminus \Delta_{C_1}| = |\Delta_{B_3} \setminus \Delta_{C_1}| = |\Delta_{C_2} \setminus \Delta_{B_1}| = |\Delta_{C_3} \setminus \Delta_{B_1}| = 2$  и каждая из этих вершин соответствующего треугольника будет принадлежать одной из двух различных синих 4-клик. Таким образом, определены окрестности для всех вершин графа  $G$ , и граф  $G$  является графом  $M_3$  — реберным точным графом Деза с параметрами  $(20, 6, 2, 1)$ .

Пусть  $|\Delta_B \cap \Delta_C| = 7$ , а значит, имеем ровно одну изолированную 4-клику на синих вершинах. Из вершин синей 4-клики выходит ровно 8 красных ребер во множество  $\Delta_B \cap \Delta_C$ , причем два красных ребра идут в одну вершину. Получаем “внекликковый” треугольник, что противоречит нашим условиям.

**2.2.** Пусть  $|K^{AB}| = |K^{AC}| = a + 2, k = 2a + 2$ .

Пусть вершины  $A, B_1, \dots, B_{a+1} \in K^{AB}$  и  $A, C_1, \dots, C_{a+1} \in K^{AC}$ . По лемме 1 для каждой из вершин  $B_1, \dots, B_{a+1}$  определим множество ее соседей вне  $A^\perp$ . Обозначим их  $B_{1,1}, \dots, B_{1,a+1}, \dots, B_{a+1,1}, \dots, B_{a+1,a+1}$  соответственно. Заметим, что эти множества вместе с соответствующей вершиной  $B_i, i \in \{1, \dots, a+1\}$ , будут образовывать клики  $K^{B_1 B_{1,1}}, \dots, K^{B_{a+1} B_{a+1,1}}$ .

В зависимости от того, существует ли ребро, соединяющее вершины из разных клик  $K^{B_1 B_{1,1}}, \dots, K^{B_{a+1} B_{a+1,1}}$  и  $K^{AC}$ , возможны два случая.

**2.2.1.** Предположим, что такого ребра нет, тогда вершины  $B_1$  и  $C_1$  имеют ровно одного общего соседа, а именно, вершину  $A$ . Следовательно, либо  $b = 1$ , либо  $a = 1$ .

Рассмотрим сначала случай  $b = 1$ , при этом  $a = 0, k = 2$ . Тогда граф  $G$  является пятиугольником, получаем противоречие, поскольку этот граф не является точным графом Деза.

Теперь рассмотрим случай  $a = 1$ , а значит,  $k = 4$ . Поскольку нет ребер, инцидентных вершинам из разных клик, то в  $[A]^\setminus$  существуют вершины  $E_i, i = 1, 2$ , которые смежны с  $B_{1,1}, \dots, B_{2,2}$  и  $E_1, E_2 \sim C_1$ . Ни одна из вершин  $E_1$  и  $E_2$  не может быть одновременно смежна с  $B_{1,i}$  и  $B_{2,j}, i, j \in \{1, 2\}$ , поскольку тогда получаем 3-лапу на вершинах  $C_1, E_i, B_{1,i}, B_{2,j}$ . Следовательно, без ограничения общности будем считать, что  $E_1$  смежна с вершинами  $B_{1,i}$ , а вершина  $E_2$  — с  $B_{2,j}$ , где  $i, j = 1, 2$ . Причем вершины  $E_1$  и  $E_2$  смежны друг с другом, иначе получаем 3-лапу с вершиной  $A$ . Тогда  $[E_1] = \{C_1, B_{1,1}, B_{1,2}, E_2\}$  и  $[E_2] = \{C_1, B_{2,1}, B_{2,2}, E_1\}$ , но в этом случае расстояние между вершинами  $E_1$  и  $B_2, E_2$  и  $B_1$  не менее трех. Получили противоречие, а значит, существует ребро, соединяющее вершины из разных клик.

**2.2.2.** Пусть существует ребро, соединяющее вершины из разных клик  $K^{B_1 B_{1,1}}, \dots, K^{B_{a+1} B_{a+1,1}}$  и  $K^{AC}$ . Без ограничения общности можно считать, что это ребро  $C_1 B_{1,1}$ . По лемме 2 получаем, что не может существовать ребер вида  $B_{1,1} C_i$  и  $B_{1,i} C_1$ . Следовательно, у вершин  $B_1$  и  $C_1$  есть ровно два общих соседа, а это приводит к тому, что либо  $a = 2$ , либо  $b = 2$ .

**2.2.2.1.** Пусть  $b = 2$ , тогда  $a \in \{0, 1\}$ .

Предположим, что граф  $G$  имеет параметры  $(v, 2, 2, 0)$ . В этом случае граф не является точным графом Деза, поскольку является сильно регулярным графом.

Предположим, что граф  $G$  имеет параметры  $(v, 4, 2, 1)$ . Обозначим через  $x$  количество вершин  $X$  из окрестности  $A$  таких, что  $|[A] \cap [X]| = a$  для вершины  $A$  в антиокрестности  $[A]^\setminus$ , а через  $y$  — количество вершин  $Y$  из окрестности  $A$  таких, что  $|[A] \cap [Y]| = b$ . Количество ребер, выходящих из  $[A]$  в  $[A]^\setminus$ , равно 8. С другой стороны, количество ребер, входящих в  $[A]^\setminus$ , составляет  $x + 2y$ . Заметим, что  $x, y > 0$ , иначе граф  $G$  является сильно регулярным. Таким образом, параметры  $x$  и  $y$  могут принимать следующие значения: 6 и 1, 4 и 2, 2 и 3. При этом параметр  $v$  будет равен 12, 11 и 10 соответственно. Согласно статье [2] графов с заданным набором параметров не существует.

**2.2.2.2.** Пусть  $a = 2$ , тогда  $k = 6, b > 2$ . Так как  $|K^{AB}| = |K^{AC}|$ , то получаем противоречие с леммой 4.

**2.3.** Пусть  $|K^{AB}| = b + 2$  и  $|K^{AC}| = a + 2, k = b + a + 2$ . Пусть вершины  $A, B_1, \dots, B_{b+1} \in K_{AB}$  и  $A, C_1, \dots, C_{a+1} \in K^{AC}$ . По лемме 1 для каждой из вершин  $B_1, \dots, B_{b+1}$  определим множество

ее соседей вне  $A^\perp$ . Обозначим их  $B_{1,1}, \dots, B_{1,a+1}, \dots, B_{b+1,1}, \dots, B_{b+1,a+1}$  соответственно. Эти множества вместе с соответствующей вершиной  $B_i$  будут образовывать клики  $K^{B_i B_{i,1}}, i = 1, \dots, b+1$ . Заметим, что клики  $K^{B_i B_{i,1}}$  и  $K^{B_j B_{j,1}}, i \neq j, i, j \in \{1, \dots, b+1\}$ , не пересекаются, в противном случае получаем противоречие с параметром  $b$ . Далее возможны два случая в зависимости от того, найдется или нет ребро, соединяющее вершины из различных клик  $K^{B_i B_{i,1}}$  и  $K^{AC}, i = 1, \dots, b+1$ , исключая ребра, лежащие в клике  $K^{AB}$ .

**2.3.1.** В графе не найдется ни одного ребра, соединяющего вершины различных клик  $K^{B_i B_{i,1}}$  и  $K^{AC}, i = 1, \dots, b+1$ . Тогда количество общих соседей у вершин  $B_i, C_j$  равно единице, а следовательно, либо  $a = 1$ , либо  $b = 1$ .

Пусть  $a = 1$ , тогда  $k = b + 3$ . Поскольку граф  $G$  имеет диаметр два, то множество  $C_1^\perp \setminus A^\perp$  содержится в  $\bigcup_{i=1, j=1}^{b+1, 2} B_{i,j}^\perp$ . Тогда хотя бы одна вершина из  $C_1^\perp \setminus A^\perp$  будет смежна не менее чем с двумя вершинами из  $\bigcup_{i=1, j=1}^{b+1, 2} B_{i,j}^\perp$ . Заметим, что ими не могут быть ни вершины, принадлежащие разным кликам, поскольку в этом случае получаем 3-лапу, ни вершины, принадлежащие одной клике, поскольку в этом случае получаем противоречие с условиями разбиения ребер. Следовательно, такого графа не существует.

Пусть  $b = 1$ , тогда  $a = 0, k = 3$ . Число вершин в графе  $G$  не превосходит 11. Согласно статье [2], не существует графов с параметрами  $(v, 3, 1, 0), v \leq 11$ .

**2.3.2.** Пусть теперь существует ребро, соединяющее вершины из различных клик  $K^{B_i B_{i,1}}$  и  $K^{AC}, i = 1, \dots, b+1$ . Без ограничения общности будем считать, что это ребро  $C_1 B_{1,1}$ . По лемме 3 получаем, что вершины  $C_1$  и  $B_1$  имеют в точности двух общих соседей, а значит, либо  $b = 2$ , либо  $a = 2$ .

**2.3.2.1.** Пусть  $b = 2$ , тогда либо  $a = 0, k = 4$ , либо  $a = 1, k = 5$ . Пусть граф  $G$  имеет параметры  $(v, 4, 2, 0)$ . Легко увидеть, что граф  $G$  является решеткой размера  $4 \times 2$ , что удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть граф  $G$  имеет параметры  $(v, 5, 2, 1)$ . Поскольку  $|K^{AB}| = 4$  и  $|K^{AC}| = 3$ , то количество ребер, выходящих из  $A^\perp$  в  $[A]^\setminus$ , составляет  $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$ . При этом для вершины  $A$  в антиокрестности  $[A]^\setminus$  найдется  $x$  вершин  $X$  из окрестности  $A$  таких, что  $|[A] \cap [X]| = a$  и  $y$  вершин  $Y$  из окрестности  $A$  таких, что  $|[A] \cap [Y]| = b$ . Следовательно,  $x + 2y = 12$ , где  $y > 0$ , поскольку  $B_{1,1} \in [A]^\setminus$ . Для параметров  $x$  и  $y$  возможны следующие значения: 10 и 1, 8 и 2, 6 и 3, 4 и 4, 2 и 5, 0 и 6, а следовательно, параметр  $v$  будет принимать следующие значения: 17, 16, 15, 14, 13, 12.

Пусть  $v = 17, x = 10, y = 1$ . Заметим, что только вершина  $B_{1,1}$  является вершиной  $Y$  из окрестности  $A$  такой, что  $|[A] \cap [Y]| = b$  для  $A$ . По лемме 1 для каждой из вершин  $C_1, C_2$  определим множество ее соседей вне  $A^\perp$ . Обозначим их  $C_{1,1}, \dots, C_{1,3}, C_{2,1}, \dots, C_{2,3}$  соответственно. Эти множества вместе с соответствующей вершиной  $C_i$  будут образовывать клики  $K^{C_i C_{i,1}}, i = 1, 2$ .

Поскольку граф  $G$  имеет диаметр два, то  $G = A^\perp \bigcup_{i=1}^3 K^{B_i B_{i,1}} \bigcup_{j=1}^2 K^{C_j C_{j,1}}$ , и вершина  $B_{1,2}$  является смежной с вершиной из  $K^{B_2 B_{2,1}}, K^{B_3 B_{3,1}}$  и  $K^{C_2 C_{2,1}}$ . Без ограничения общности будем считать, что такими вершинами являются  $B_{2,2}, B_{3,2}$  и  $C_{2,1}$ , которые вместе с  $B_{1,2}$  образуют клику по лемме 1. Но тогда вершина  $C_{2,1}$  имеет шесть соседей, что противоречит размеру окрестности любой вершины.

Точные графы Деза на  $v$  вершинах,  $14 \leq v \leq 16$ , рассмотрены в статье [6]. В соответствии с [6] точным графом Деза с параметрами  $(v, 5, 2, 1), 14 \leq v \leq 16$ , является граф с параметрами  $(16, 5, 2, 1)$ . Согласно описанию конструкции графа, данному в статье [6], окрестность некоторой вершины представляет собой объединение  $K_{1,2} \cup K_2$ , что противоречит лемме 1.

Все графы Деза на  $v$  вершинах,  $v \leq 13$ , перечислены в [2]. Согласно [2] существует единственный граф Деза с параметрами  $(v, 5, 2, 1), v \leq 13$ , а именно, решетка размера  $4 \times 3$ , которая является точным реберным графом Деза с параметрами  $(12, 5, 2, 1)$ .

**2.3.2.2.** Пусть  $a = 2, b > 2, k = 4 + b$ . По лемме 4 граф  $G - 4 \times (b + 2)$ -решетка, а значит, он является точным реберным графом Деза с параметрами  $(4 * (b + 2), b + 4, b, 2), b > 2$ .

Поскольку для графа  $G$  возможны только три случая.

1.  $|K^{AB}| = |K^{AC}| = b + 2, k = 2b + 2.$
2.  $|K^{AB}| = |K^{AC}| = a + 2, k = 2a + 2.$
3.  $|K^{AB}| = b + 2$  и  $|K^{AC}| = a + 2, k = b + a + 2,$  которые мы рассмотрели в пп. 2.1, 2.2 и 2.3 соответственно, то “внутрикликковый” случай можно считать полностью рассмотренным.

### 3. “Внекликковый” случай

Пусть, как и ранее,  $G$  — реберный точный граф Деза с параметрами  $(v, k, b, a), 0 \leq a < b \leq k < v.$  Пусть  $\Sigma$  — разбиение ребер на клики согласно теореме Крауца. По лемме 1 в окрестности  $A$  существуют вершины  $B$  и  $C$  такие, что  $A^\perp = K^{AB} \cup K^{AC},$  где  $K^{AB} = \{A, B = B_1, \dots, B_s\}, K^{AC} = \{A, C = C_1, \dots, C_t\}.$

В предыдущем разделе рассматривался случай, когда в графе  $G$  любой треугольник лежит внутри клики. В этом разделе разбирается случай, когда существует треугольник, все ребра которого лежат в разных кликах разбиения  $\Sigma.$  Пусть таким треугольником является  $ABC.$

**Лемма 7.** *Для любой клики разбиения  $\Sigma$  и любой вершины графа  $G$  вне этой клики существует не более двух ребер, выходящих из этой вершины в эту клику.*

**Доказательство.** Пусть  $K$  — клика разбиения  $\Sigma$  и вершина  $A$  лежит вне  $K.$  Предположим, что из  $A$  в клику  $K$  идут более двух ребер. По лемме 1 эти ребра принадлежат объединению  $K^{AB} \cup K^{AC}$  для некоторых несмежных  $B$  и  $C, B, C \in A^\perp.$  В одну из клик попадет не менее двух ребер. Пусть такой кликой будет  $K^{AB}.$  Тогда подграф  $K^{AB} \cap K$  содержит ребро, что противоречит тому, что  $\Sigma$  — это разбиение множества ребер.

Лемма доказана.

По лемме 7 получаем, что  $|[A] \cap [B_1]| = |\{B_2, \dots, B_s, C_1\}| = s$  и  $|[A] \cap [C_1]| = |\{C_2, C_3, \dots, C_t, B_1\}| = t,$  где  $s, t \in \{a, b\}.$

Таким образом, имеем следующие варианты для окрестности вершины  $A:$

- 1)  $s = a, t = b;$  2)  $s = b, t = b;$  3)  $s = a, t = a.$

**3.1.** Пусть  $A, B_1, \dots, B_a \in K^{AB}$  и  $A, C_1, \dots, C_b \in K^{AC},$  тогда  $k = a + b.$  Рассмотрим вершины  $A$  и  $B_2.$  Для того чтобы соблюдались параметры графа  $G,$  т.е.  $|[A] \cap [B_2]| = a,$  должно существовать ребро вида  $B_2C_j, j \neq 1.$  Без ограничения общности, таким ребром будет ребро  $B_2C_2.$  Проведем аналогичные рассуждения для всех  $B_i, i = 3, \dots, a,$  и получим ребра  $B_iC_i.$

Рассмотрим вершины  $C_{a+1}, \dots, C_b,$  у которых  $|[A] \cap [C_j]| = b - 1, j = a + 1, \dots, b.$  Но в соответствии с заданными параметрами  $|[A] \cap [C_j]| \in \{a, b\},$  тогда получаем  $b - 1 = a.$

Для вершины  $B_1$  построим множество соседей вне  $A^\perp,$  которые вместе с вершиной  $C_1$  будут образовывать клику  $K^{B_1C_1},$  где  $|K^{B_1C_1}| = b + 1.$  Но для вершины  $C_1$  размер данной клики должен быть  $|K^{B_1C_1}| = a + 1.$  Получили противоречие.

**3.2.** Пусть  $A, B_1, \dots, B_b \in K^{AB}$  и  $A, C_1, \dots, C_b \in K^{AC},$  тогда  $k = 2b.$

**3.2.1.** Предположим, что для любого  $i \in \{1, \dots, b\}$  найдется такое  $j \in \{1, \dots, b\},$  что существует ребро  $B_iC_j,$  и каждое такое ребро лежит в клике  $K^{B_iC_j}$  соответственно. Без ограничения общности будем считать, что  $i = j.$

**Лемма 8.** *Для любых  $i, j \in \{1, \dots, b\}, i \neq j,$  клики  $K^{B_iC_i}$  и  $K^{B_jC_j}$  имеют непустое пересечение.*

**Доказательство.** Предположим противное, т.е. существуют такие  $i, j \in \{1, \dots, b\}, i \neq j,$  что  $K^{B_iC_i} \cap K^{B_jC_j} = \emptyset.$  Без ограничения общности будем считать, что  $i = 1, j = 2.$  Тогда  $B_1^\perp \cap C_2^\perp = \{A, C_1, B_2\},$  а значит,  $|B_1^\perp \cap C_2^\perp| = 3$  и  $3 \in \{a, b\}.$

Пусть  $Y \in K^{B_2C_2} \setminus B_2C_2$ , тогда пересечение  $A^\perp \cap Y^\perp$  содержит ребро  $B_2C_2$ , и либо  $|A^\perp \cap Y^\perp| = 2$ , либо пересечение  $A^\perp \cap Y^\perp$  содержит ребро в одной из клик разбиения  $\Sigma$  в замкнутой окрестности  $A^\perp$ .

Пусть  $|A^\perp \cap Y^\perp| = 2$ , тогда граф  $G$  имеет параметры  $(v, 6, 3, 2)$ . Поскольку  $G$  является графом диаметра 2, то  $G = A^\perp \cup_{i=1}^3 K^{B_iC_i}$ . В зависимости от того, пересекается ли клика  $K^{B_3C_3}$  с кликами  $K^{B_1C_1}$  и  $K^{B_2C_2}$ , получаем следующие возможные значения для количества вершин графа  $G$ :  $v \in \{11, 12, 13\}$ . В соответствии с [2] графами Деца, удовлетворяющими набору параметров  $(v, 6, 3, 2)$ , где  $v \in \{11, 12, 13\}$ , являются графы с параметрами  $(12, 6, 3, 2)$ . Так как  $v = 12$ , то  $|K^{B_3C_3} \cap K^{B_1C_1}| = 1$  либо  $|K^{B_3C_3} \cap K^{B_2C_2}| = 1$ , но при этом полученная конструкция для графа  $G$  не удовлетворяет ни одному из графов Деца с параметрами  $(12, 6, 3, 2)$ . Получили противоречие.

Пусть  $A^\perp \cap Y^\perp$  содержит ребро в одной из клик разбиения  $\Sigma$  в замкнутой окрестности  $A^\perp$ . Без ограничения общности можно считать, что это ребро лежит в клике  $K^{AB}$ .

Пусть вершина  $B_3 \in A^\perp \cap Y^\perp$ ,  $B_3 \in K^{AB}$ ,  $B_3 \neq B_1, B_2$ . При этом вершина  $B_3$  смежна с некоторой вершиной  $C_3 \in K^{AC}$ , тогда из свойств разбиения  $\Sigma$  получаем, что  $C_3 \neq C_1, C_2$ . Если ребро  $B_3C_3$  не лежит в клике  $K^{YB_3}$ , тогда вершина  $B_3$  лежит в трех кликах разбиения  $\Sigma$ , что невозможно. Следовательно,  $B_3C_3$  лежит в клике  $K^{YB_3}$ .

В клике  $K^{B_2C_2} \setminus B_2C_2$  лежит  $b - 1$  вершина  $Y_1, \dots, Y_{b-1}$ , а поскольку вершина  $Y$  выбрана произвольно, то вышеизложенные рассуждения справедливы для любой  $Y_i, i \in \{1, \dots, b - 1\}$ . Таким образом каждая вершина  $Y_i, i = 1, \dots, b - 1$ , смежна с ребром  $B_iC_i$ , но для одной вершины  $Y_j$  такого ребра не будет, так как  $K^{B_1C_1} \cap K^{B_2C_2} = \emptyset$ . Следовательно, предположение неверно.

Лемма доказана.

Заметим, что в каждой клике  $K^{B_iC_i}$  содержится ровно  $b - 1$  вершин, не принадлежащих  $A^\perp$ , и каждая клика  $K^{B_iC_i}$  должна пересечь ровно  $b - 1$  клику. Получаем однозначное построение в заданных условиях, при этом граф  $G$  — треугольник  $T(b + 1)$ , который не является точным графом Деца. Получили противоречие с тем, что для любого  $i = 1, \dots, b$  существует ребро  $B_iC_i$ .

**3.2.2.** Предположим, что существует такое  $h$ , для которого в графе  $G$  не существует ребра вида  $B_hC_i, i = 1, \dots, b$ , но тогда  $|[A] \cap [B_h]| = b - 1$ , а следовательно,  $b - 1 = a$ .

Рассмотрим вершину  $B_h$ , у которой существуют соседи  $B_{h,1}, \dots, B_{h,b}$  вне  $A^\perp$ ; вместе с вершиной  $B_h$  они образуют по лемме 1 клику  $K^{B_hB_{h,1}}$ . Очевидно, клики  $K^{B_hB_{h,1}}$  и  $K^{AC}$  не пересекаются.

Предположим, что не существует ни одного ребра, соединяющего вершины из полных подграфов  $K^{B_hB_{h,1}}$  и  $K^{AC}$ , кроме ребра  $AB$ . Тогда вершины  $B_h$  и  $C_j, j = 1, \dots, b$ , имеют ровно одного общего соседа (вершину  $A$ ), а значит, либо  $b = 1$ , либо  $a = 1$ .

Если  $b = 1$ , тогда  $a = 0, k = 2$ , и граф  $G$  является треугольником, что дает нам противоречие.

Если  $a = 1$ , тогда  $b = 2, k = 4$ . Без ограничения общности будем считать, что вершины  $C_1 \sim B_1$  и вместе с инцидентным им ребром принадлежат клике  $K^{B_1C_1}$ , а также  $h = 2$ . Поскольку  $b = 2$ , то в клике  $K^{B_1C_1}$  должна быть еще одна вершина. Обозначим эту вершину через  $E$ . При этом она не может совпадать ни с одной вершиной из клики  $K^{B_2B_{2,1}}$ , поскольку тогда получим ребро, соединяющее вершину  $C_1$  с вершиной из  $K^{B_2B_{2,1}}$ , а это по предположению невозможно. Значит, вершина  $E$  лежит вне уже построенных клик. Для того чтобы вершины  $B_{2,1}, B_{2,2}$  имели пути длины не более 2 до вершины  $C_1$ , они должны быть смежны с вершиной  $E$ , а значит, вершины  $B_{2,1}, B_{2,2}, E$  образуют клику. Получили, что ребро  $B_{2,1}B_{2,2}$  лежит в двух кликах, что дает противоречие с реберностью графа  $G$ .

Таким образом, получили, что для непересекающихся клик  $K^{B_hB_{h,1}}$  и  $K^{AC}$  найдется ребро, соединяющее вершину из  $K^{AC}$  с вершиной из  $K^{B_hB_{h,1}}$ . Без ограничения общности будем считать, что таким ребром, соединяющим их, является  $C_1B_{h,1}$ . Заметим, что не может быть ребер вида  $B_{h,1}C_i, B_{h,i}C_1$ , где  $i > 1$ , поскольку тогда получаем противоречие с реберностью

графа  $G$ . Получили, что вершины  $B_1$  и  $C_1$  имеют ровно двух общих соседей (вершины  $A$  и  $B_{h,1}$ ), а значит, либо  $a = 2$ , либо  $b = 2$ .

**3.2.2.1.** Пусть  $b = 2$ , тогда  $a = 1, k = 4$ . Пусть  $h = 2$ , тогда вершина  $B_2$  не смежна ни с одной вершиной из полного подграфа  $K^{AC}$ , кроме вершины  $A$ . Тогда в графе  $G$  есть ребро  $B_1C_1$ , лежащее в клике  $K^{B_1C_1}$ , а ребро  $C_2B_{2,1}$  принадлежит клике  $K^{C_2B_{2,1}}$ , содержащей также некоторую вершину  $Y$  вне  $A^\perp$ .

Для клики  $K^{B_1C_1}$  уже найдены две вершины (а именно  $B_1, C_1$ ), необходимо определить третью вершину, входящую в эту клику. Предположим, что это одна из вершин  $B_{2,2}$  или  $Y$ . Без ограничения общности будем считать, что это вершина  $B_{2,2}$ , тогда будут построены ребра  $B_{2,2}C_1, B_{2,2}B_1$ . Но тогда вершина  $Y$  не имеет пути длины не более 2 до вершины  $B_1$ . Аналогично для вершины  $B_{2,2}$ . Следовательно, ни  $B_{2,2}$ , ни  $Y$  не могут входить в клику  $K^{B_1C_1}$ . Значит, такой вершиной является некоторая вершина  $W : W \sim C_1, W \sim B_1$ . Заметим, что вершины  $B_{2,2}$  и  $Y$  будут иметь путь длины 2 до вершин  $C_1$  и  $B_1$  соответственно, если они будут смежны с вершиной  $W$ , а значит, будут образовывать клику. Построенный граф  $G$  является графом  $M_1$ , а значит, реберным точным графом Деза.

**3.2.2.2.** Пусть  $a = 2$ , тогда  $b = 3, k = 6$ . Пусть  $h = 2$  и в графе имеются непересекающиеся клики  $K^{AC}$  и  $K^{B_2B_{2,1}} = \{B_2, B_{2,1}, B_{2,2}, B_{2,3}\}$  и ребро  $B_{2,2}C_2$ , соединяющее их. Рассмотрим вершины  $C_1$  и  $B_{2,2}$ , которые имеют одного общего соседа, а поскольку  $a = 2$ , тогда должно существовать ребро  $C_1B_{2,1}$ . Аналогично строится ребро  $C_3B_{2,3}$ .

Так как вершина  $B_2$  не имеет соседей среди  $K^{AC} \setminus \{A\}$  и  $|K^{AB}| = |K^{AC}| = b+1$ , то найдется некоторая вершина  $C_g \in K^{AC}$  такая, что не существует ребер вида  $B_iC_g, i = 1, \dots, b$ . Без ограничения общности можем считать, что  $g = 2$ , а так как  $k = 6$ , для  $C_2$  должны существовать некоторые смежные с ней вершины  $W_1$  и  $U_1$ , которые вместе с  $C_2$  и  $B_{2,2}$  образуют клику. Обозначим ее  $K^{C_2B_{2,2}}$ . Далее, проведя рассуждения о количестве общих соседей у вершин  $C_2, B_1$  и  $C_2, B_3$ , получим ребра  $W_1B_1, U_1B_3$ .

Известно, что хотя бы одно ребро  $B_iC_j$  существует,  $i, j \in \{1, \dots, b\}$ . Будем считать, что таким ребром является  $B_1C_1$ . Получаем, что вершины  $C_1, B_{2,1}, W_1, B_1$  принадлежат одной клике, обозначенной  $K^{B_1C_1}$ .

Предположим, что вершины  $C_3, B_{2,3}$  не смежны с вершинами  $B_3, U_1$ , тогда должны существовать вершины  $E_1, E_2$  такие, что  $E_1 \sim C_3, E_1 \sim B_{2,3}, E_2 \sim C_3, E_2 \sim B_{2,3}, E_1 \sim E_2$ . При этом вершины  $E_1, E_2$  должны иметь пути длины не более 2 до вершин  $B_1, B_3, U_1$ , но это возможно только в случае  $E_1 \sim B_3, E_1 \sim U_1, E_2 \sim B_3, E_2 \sim U_1$ . При этом получаем, что вершины  $E_1, E_2, B_3, U_1$  образуют клику, а значит, ребро  $E_1, E_2$  лежит в двух кликах, что противоречит реберности графа  $G$ . Следовательно, предположение неверно.

Тогда предположим, что вершины  $C_3, B_{2,3}$  смежны с вершиной  $U_1$ , но не смежны с  $B_3$ . Тогда существует вершина  $E$ , вместе с которой вершины  $C_3, B_{2,3}, U_1$  образуют клику. Получили, что вершина  $U_1$  имеет 7 соседей, а это противоречит условию. Следовательно, предположение неверно, и  $C_3, B_{2,3}$  смежны с вершинами  $B_3, U_1$ . Получаем граф  $M_2$  — реберный точный граф Деза.

**3.3.** Пусть  $A, B_1, \dots, B_a \in K^{AB}$  и  $A, C_1, \dots, C_a \in K^{AC}$ , тогда  $k = 2a$ . Заметим, что для любого  $i = 1, \dots, a$  выполняется  $|[A] \cap [B_i]| = |\{B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, B_a\}| = |[A] \cap [C_i]| = |\{C_1, \dots, C_{i-1}, C_{i+1}, C_a\}| = a - 1$ , а следовательно, для любого  $i = 1, \dots, a$  найдется  $j \in \{1, \dots, a\}$  такое, что существует ребро  $B_iC_j$ . При этом соответствие  $i$  и  $j$  взаимнооднозначное, и каждое такое ребро лежит в клике  $K^{B_iC_j}$  соответственно. Без ограничения общности будем считать, что  $i = j$ .

Докажем, что для любых  $i, j \in \{1, \dots, a\}, i \neq j$ , клики  $K^{B_iC_i}$  и  $K^{B_jC_j}$  имеют непустое пересечение. Предположим противное, т. е. что для некоторых  $i, j \in \{1, \dots, a\}, i \neq j$ , выполняется  $K^{B_iC_i} \cap K^{B_jC_j} = \emptyset$ . Без ограничения общности будем считать, что  $i = 1, j = 2$ . Тогда  $B_1^\perp \cap C_2^\perp = \{A, C_1, B_2\}$ , а значит,  $|B_1^\perp \cap C_2^\perp| = 3$  и  $3 \in \{a, b\}$ .

Поскольку  $G$  является графом диаметра 2, то  $G = A^\perp \cup_{i=1}^a K^{B_iC_i}$ , где  $|K^{B_iC_i}| = a + 1$ . Следовательно, получаем ограничение на количество вершин графа  $G$ :  $v \leq a(a + 1) + 1$ .

1. Пусть  $a = 3$ , тогда граф  $G$  имеет параметры  $(v, 6, b, 3)$ , где  $v \leq 13, a < b$ .

2. Пусть  $b = 3$ , тогда граф  $G$  имеет параметры  $(v, 4, 3, 2)$ ,  $v \leq 7$ .

В соответствии с [2] нет точных графов Деза, удовлетворяющих параметрам, полученным в обоих случаях. Следовательно, получили противоречие.

Проводя дальнейшие рассуждения аналогично п. 3.2.1, получим треугольный граф  $T(a + 1)$ , что дает противоречие с условием теоремы, так как треугольный граф является сильно регулярным графом.

Таким образом, все возможные строения графа  $G$  для “внекликвого” случая рассмотрены, и, следовательно, теорема доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Deza A., Deza M.** The ridge graph of the metric polytope and some relatives // Polytopes: Abstract, convex and computational / Ed. T. Bisztriczky et al. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Vol. 440. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 359–372.
2. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs / M. Erickson [et al.] // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7. P. 359–405.
3. **Krausz J.** Démonstration nouvelle d'une de Whitney sur les réseaux // Mat. Fiz. Vol. 50. 1943. P. 75–89.
4. **Roos A. van, Wilf H.** The interchange graphs of a finite graph // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1965. Vol. 16. P. 263–269.
5. **Seidel J.J.** Strongly regular graphs with  $(-1, 1, 0)$  adjacency matrix having eigenvalue // Lin. Alg. Appl. 1968. Vol. 1. P. 281–298.
6. **Горяинов С.В., Шалагинов Л.В.** О графах Деза на 14, 15 и 16 вершинах // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 105–115.
7. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Об одном классе кореберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69. N. 6. С. 95–114.

Кабанов Владислав Владимирович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
Институт математики и механики УрО РАН  
Уральский федеральный университет  
e-mail: vvk@imm.uran.ru

Поступила 02.09.2011

Митянина Анастасия Владимировна  
аспирант  
Челябинский гос. университет  
e-mail: nastya.mityanina@gmail.com

УДК 517.9

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ<sup>1</sup>

А. И. Короткий, Д. О. Михайлова

Рассматривается обратная задача динамики, состоящая в восстановлении априори неизвестных граничных управлений в динамических системах, описываемых краевыми задачами для уравнений с частными производными параболического типа. Исходной информацией для решения обратной задачи служат результаты приближенных измерений состояний наблюдаемого движения системы. Задача решается в статическом варианте, когда для решения задачи используется вся совокупность результатов измерений, накопленная в течение какого-либо заданного промежутка времени наблюдения. Рассматриваемая задача некорректна и для ее решения предлагается воспользоваться методом Тихонова со стабилизатором, содержащим сумму среднеквадратичной нормы и полной вариации по времени допустимого управления. Использование такого стабилизатора позволяет получить более тонкие результаты, чем приближение искомого управления в пространствах Лебега. В частности, на этом пути удается обосновать поточечную и кусочно-равномерную сходимость регуляризованных приближений, что открывает возможность для численной реконструкции тонкой структуры искомого управления. В работе описан и обоснован метод проекции субградиента получения минимизирующей последовательности для функционала Тихонова, описана двухэтапная конечномерная аппроксимация задачи. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: динамическая система, управление, реконструкция, наблюдение, измерение, обратная задача, регуляризация, метод Тихонова, вариация, кусочно-равномерная сходимость.

A.I.Korotkii, D.O.Mikhailova. Reconstruction of boundary controls in parabolic systems.

In this paper an inverse dynamic problem is considered. It consists in reconstructing a priori unknown boundary controls in dynamic systems described by boundary problems for parabolic partial differential equations. The source information for solving the inverse problem is results of approximate measurements of a states of the observed system's motion. The problem is solved in static case, i.e. we can use all the accumulated during the definite observation period data of measurements to solve the problem. The problem under consideration is ill-posed. We propose the Tikhonov method with stabilizer containing sum of mean-square norm and total variation of control in time to solve the problem. The usage of such non-differentiable stabilizer lets obtain more precise results in some cases than approximation of the desired control in Lebesgue spaces does. In particular, this way provides the pointwise and piecewise uniform convergences of regularized approximations and permits numerical reconstruction of desired control's subtle structure. In this paper we describe and validate the gradient projection technique of receiving minimizing sequence for the Tikhonov functional. Also we demonstrate two-stage finite-dimensional approximation of the problem and present results of computational modeling.

Keywords: dynamical system, control, reconstruction, observation, measurement, regularization, inverse problem, Tikhonov's method, variation, piecewise uniform convergence.

### Введение

В работе рассматривается задача о восстановлении априори неизвестных граничных управлений, функционирующих в управляемых динамических системах, описываемых краевыми задачами для уравнений с частными производными параболического типа. Управляющие воздействия в динамической системе могут быть заранее не известны и должны быть определены в результате наблюдений за системой по приближенным измерениям ее текущих фазовых положений. Подобного рода задачи восстановления для динамических систем изучались в различных постановках в теории управления, теории дифференциальных игр, теории оценивания

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках" при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

и идентификации [1–9]. Хорошо известно, что рассматриваемые задачи некорректны и их решение требует привлечения методов регуляризации [10–12].

Для решения задачи предлагается воспользоваться вариационным методом Тихонова, состоящим в минимизации некоторого подходящего функционала невязки на множестве допустимых управлений. Задача будет решаться в статическом варианте, когда для ее решения будет использоваться вся совокупность результатов измерений, накопленная в течение какого-либо заданного промежутка времени наблюдения за системой. Основное внимание будет уделено построению регуляризирующих алгоритмов, способных восстанавливать искомое управление не только в традиционной среднеквадратичной метрике, но и в более сильных метриках.

Известно, что для некорректных задач классическая тихоновская регуляризация, использующая в качестве стабилизаторов нормы пространств Соболева, дает высокое качество восстановления для гладких искомым функций, однако не позволяет качественно восстанавливать недифференцируемые функции, которые могут содержать изломы, близкие пики, разрывы и другие особенности. Такими могут быть управляющие воздействия в динамических системах. Стабилизирующие функционалы, содержащие норму пространств Соболева, обладают сильным регуляризирующим эффектом, что неизбежно приводит к заглаживанию искомой функции и потере ее тонкой структуры. Стабилизирующие функционалы, содержащие нормы пространств Лебега, достаточно часто используются при регуляризации задач, но они приводят к довольно грубой аппроксимации. Поэтому возникает необходимость конструирования стабилизаторов, приспособленных к восстановлению негладких функций и функций с особенностями. К настоящему времени в вариационных методах регуляризации предложено несколько классов стабилизирующих функционалов, которые неплохо зарекомендовали себя как для гладких, так и для негладких восстанавливаемых функций. В случае функций одной переменной часто используются стабилизаторы, содержащие классическую или обобщенную вариацию в совокупности с какой-нибудь строго выпуклой нормой [13–23]. На этом пути удастся получить сходимость в пространствах Лебега, поточечную сходимость, сходимость вариаций, а также кусочно-равномерную сходимость регуляризованных приближений. В случае функций нескольких переменных часто используются стабилизаторы, содержащие обобщенную вариацию [24]. Здесь удастся получить сходимость в пространствах Лебега, поточечную сходимость и сходимость обобщенных вариаций регуляризованных приближений [14–16; 20–27]. В работах [20–23] приводятся некоторые результаты по регуляризации с использованием вариаций для функций нескольких переменных, основанных на конечных разностях. Для получения равномерной аппроксимации непрерывного, но в общем случае недифференцируемого решения привлекаются стабилизаторы в виде нормы пространства Липшица [15; 16]. Использование в качестве стабилизатора нормы пространства Соболева с дробными производными может оказаться полезным для восстановления как непрерывных, так и разрывных искомым функций [13; 16]. Упомянутые выше результаты получены для линейных и нелинейных операторных уравнений первого рода. Большой интерес представляет проведение аналогичных исследований для обратных задач динамики, в которых требуется осуществить качественное восстановление неизвестных управлений.

В данной работе показано, что при использовании стабилизаторов в виде суммы классической вариации и среднеквадратичной нормы допустимого управления в задаче восстановления управления можно получить поточечную сходимость, сходимость в пространствах Лебега, сходимость классических вариаций и кусочно-равномерную сходимость. Полученные результаты открывают возможность для численной реконструкции тонкой структуры искомого управления. В работе также описан и обоснован метод проекции субградиента получения минимизирующих последовательностей для функционала Тихонова. Описана двухэтапная конечномерная аппроксимация задачи. На первом этапе исходная бесконечномерная задача аппроксимируется более простой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (аппроксимация основана на методе разделения переменных). Доказана соответствующая теорема об аппроксимации. На втором этапе задача для системы обыкновенных дифференциальных

уравнений аппроксимируется конечномерной дискретной задачей. Проведены вычислительные эксперименты, которые показали, что разработанные методы и алгоритмы могут применяться для восстановления искомого управления и его тонкой структуры. Приводятся результаты численного моделирования. Работа продолжает исследования [28–33].

## 1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая динамическая система, состояние которой в момент времени  $t$  из заданного ограниченного отрезка времени  $T = [t_0, \vartheta]$  ( $t_0 < \vartheta$ ) характеризуется функцией  $y[t] = y(t, \cdot)$ , определенной в некоторой области  $\Omega$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . Эволюция состояний  $y[t] = y(t, \cdot)$  во времени описывается краевой задачей [34–36]

$$y_t = Ay + f(t, x), \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega, \quad (1.1)$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial y}{\partial N} + \sigma_2 y = g(x) u(t), \quad t \in T, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (1.3)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — неотрицательные постоянные,  $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$ ;  $y_0$  — начальное состояние системы;  $f$  и  $g$  — заданные функции;  $\partial y / \partial N$  — внешняя кономальная производная, соответствующая оператору  $A$ ;  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$  — вектор управляющего воздействия на систему в момент времени  $t \in T$ ;  $A$  — линейный самосопряженный дифференциальный оператор

$$Ay = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) - a(x) y.$$

Допустимые текущие значения управляющего воздействия подчинены ограничению

$$u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T.$$

Пусть за движением  $y = y[t]$ ,  $t \in T$ , управляемой динамической системы осуществляется наблюдение в течение промежутка времени  $T$  и в соответствующие текущие моменты времени  $t \in T$  приближенно измеряются состояния системы  $y[t]$ , причем результаты этих измерений  $y_\delta[t]$  удовлетворяют условию

$$\int_T \|y_\delta[t] - y[t]\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq \delta^2, \quad (1.4)$$

где  $\delta$  — числовой параметр, характеризующий точность измерений,  $0 \leq \delta \leq \delta_0$ .

Задача восстановления состоит в том, чтобы по результатам  $y_\delta = y_\delta[t]$ ,  $t \in T$ , приближенных измерений состояний наблюдаемого движения системы  $y = y[t]$ ,  $t \in T$ , приближенно определить (восстановить) то управление  $u = u(t)$ ,  $t \in T$ , которое порождает наблюдаемое движение системы. При этом результат восстановления  $u_\delta = u_\delta(t)$ ,  $t \in T$ , искомого управления  $u = u(t)$ ,  $t \in T$ , должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений

$$\int_T \|u_\delta(t) - u(t)\|_{R^m}^2 dt \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Смысл понятия приближенного восстановления  $u_\delta \approx u$  далее будет варьироваться и уточняться. Будут предложены такие алгоритмы восстановления, которые кроме традиционного среднеквадратичного приближения (1.5) обеспечат приближение в некотором более сильном смысле, приводящем к восстановлению тонкой структуры искомого управления. При этом будет предполагаться, что наблюдателю, стремящемуся к решению задачи восстановления,

известны априорное геометрическое ограничение на множество допустимых управлений, уравнения динамики системы и начальное состояние системы.

Рассматриваемой задаче можно дать следующую содержательную интерпретацию. В некотором теле (области)  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  развивается процесс теплообмена под действием граничных тепловых режимов с составляющей по времени  $u$ . Эта управляющая составляющая  $u$  априори неизвестна и недоступна прямому измерению. Процесс распределения тепла в теле  $\Omega$  наблюдается в течение некоторого конечного отрезка времени  $T$ . По ходу процесса в текущие моменты времени  $t \in T$  измеряется с ошибкой  $\delta$  температура тела  $y[t] = y(t, x)$ ,  $x \in \Omega$ . Результатом этих измерений является функция  $y_\delta[t] = y_\delta(t, x)$ ,  $x \in \Omega$ , удовлетворяющая оценке (1.4). Требуется по поступившей информации  $y_\delta[t]$ ,  $t \in T$ , о приближенной температуре тела на промежутке времени  $T$  приближенно восстановить реализацию того управления  $u$ , которое порождает наблюдаемую эволюцию температуры  $y[t]$ ,  $t \in T$ . При этом восстановление должно быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений температуры.

Перейдем к математической формализации задачи. Пусть  $P$  — выпуклое компактное множество из  $\mathbb{R}^m$ ;  $U$  — множество всех допустимых управлений в задаче, представляющее собой множество всех измеримых и интегрируемых с квадратом вектор-функций, значения которых при почти всех  $t \in T$  принадлежат компакту  $P$ ,

$$U = \{ u \in E : u(t) \in P \text{ п.в. } t \in T \}, \quad E = L_2(T; \mathbb{R}^m).$$

Будем считать, что  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  [34–36]. Пусть  $f \in L_2(Q)$ ,  $g \in L_2^m(\Gamma)$ ,  $y_0 \in L_2(\Omega)$ , коэффициенты оператора  $A$  удовлетворяют в  $\Omega$  условиям:  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $a \geq a_0 = \text{const} > 0$ ,  $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$ ,  $a \in L_\infty(\Omega)$ , при  $\sigma_1 = 0$  дополнительно  $a_{ij} \in W_p^1(\Omega)$ ,  $p > n$ .

Известно [37; 38], что при указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1)–(1.3) для каждого управления  $u \in E$  существует единственное слабое решение  $y = y(t, x) = y(t, x; u)$ ,  $(t, x) \in Q$ , этой краевой задачи из пространства  $C(T; L_2(\Omega))$ . Это решение иногда будем называть движением динамической системы (1.1)–(1.3), порожденным управлением  $u \in U$ , и будем обозначать его символом  $y = y[\cdot; u] = y[t; u]$ ,  $t \in T$ .

Введем в рассмотрение множество всех возможных движений системы (1.1)–(1.3), отвечающих всем возможным управлениям

$$Y = \{ y = y[\cdot; u] : u \in U \}.$$

Для каждого движения  $y \in Y$  введем множество всех допустимых управлений, порождающих данное движение

$$U(y) = \{ u \in U : y[\cdot; u] = y \},$$

и множество всех возможных измерений этого движения

$$Y_\delta(y) = \left\{ y_\delta \in Z : \int_T \| y[t] - y_\delta[t] \|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq \delta^2 \right\}, \quad Z = L_2(T; L_2(\Omega)).$$

Решение задачи восстановления будем искать в классе алгоритмов, каждый из которых отождествим с семейством отображений (методов)

$$D = \{ D_\delta : 0 \leq \delta \leq \delta_0 \}, \quad D_\delta : Z \rightarrow E.$$

Для формулировки задачи введем обозначения

$$r_\delta(y) = \sup \{ \rho[ D_\delta(y_\delta), U(y) ] : y_\delta \in Y_\delta(y) \},$$

$$\rho[ D_\delta(y_\delta), U(y) ] = \min \{ \| D_\delta(y_\delta) - v \|_E : v \in U(y) \}.$$

**З а д а ч а.** Требуется построить алгоритм  $D$ , который на любом наблюдаемом движении системы  $y \in Y$  обладает регуляризующим свойством

$$r_\delta(y) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

## 2. Свойства управляемой системы

Отметим ряд свойств динамической системы и ее движений, которые будут использоваться при обосновании выбранных способов решения задачи восстановления.

**Лемма 2.1.** *Множество  $U$  выпукло, ограничено, замкнуто и слабо компактно в  $E$ .*

**Лемма 2.2.** *Если последовательность управлений  $\{u_k\} \subset E$  слабо в  $E$  сходится к элементу  $u_0 \in E$ , то соответствующая последовательности управлений последовательность движений  $\{y[\cdot; u_k]\}$  сходится в  $C(T; L_2(\Omega))$  к движению  $y[\cdot; u_0]$ .*

**Лемма 2.3.** *Отображение  $B: E \ni u \rightarrow y[\cdot; u] \in C(T; L_2(\Omega))$  линейно и компактно.*

**Лемма 2.4.** *Множество  $Y$  выпукло и компактно в пространстве  $C(T; L_2(\Omega))$ .*

**Лемма 2.5.** *Для каждого  $y \in Y$  множество  $U(y)$  непусто, выпукло, ограничено, замкнуто и слабо компактно в  $E$ , оно содержит в себе единственный элемент  $u^*(y)$  минимальной  $E$ -нормы.*

Доказательства лемм аналогичны доказательствам подобных утверждений в [31; 32; 38].

Из леммы 2.3 следует, что отображение  $B$  не может иметь непрерывного обратного отображения [39, с. 228], поэтому рассматриваемая задача восстановления некорректна и ее решение требует привлечения методов регуляризации.

## 3. Решение задачи восстановления

Рассмотрим один из вариантов решения задачи. Введем обозначения

$$F_\alpha^*(z) = \min \{ F_\alpha(z, v) : v \in U \}, \quad (3.1)$$

$$U_\alpha^*(z) = \{ v \in U : F_\alpha(z, v) = F_\alpha^*(z) \}, \quad (3.2)$$

$$F_\alpha = F_\alpha(z, v) = \int_T \|y[t; v] - z(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt + \alpha \|v\|_E^2, \quad (3.3)$$

$$\alpha = \text{const} > 0.$$

Отметим некоторые свойства функционала (3.3), экстремальной задачи (3.1) и множества ее решений (множества минимизирующих элементов) (3.2).

**Лемма 3.1.** *При любых  $\alpha > 0$ ,  $z \in Z$  функционал (3.3) полунепрерывен снизу по  $v$  относительно слабой сходимости в  $E$ .*

**Лемма 3.2.** *При любых  $\alpha > 0$ ,  $z \in Z$  экстремальная задача (3.1) однозначно разрешима, множество ее решений  $U_\alpha^*(z)$  состоит из одного элемента  $u_\alpha^* \in U$ .*

**Лемма 3.3.** *При любых  $\alpha > 0$ ,  $z \in Z$  всякая минимизирующая последовательность в задаче (3.1) сходится сильно в  $E$  к элементу  $u_\alpha^*$ .*

Доказательства лемм аналогичны доказательствам подобных утверждений в [31; 32; 38–42].

Построим алгоритм, решающий задачу восстановления. Для любых  $\delta \in [0, \delta_0]$ ,  $z \in Z$  определим реализацию (значение) метода  $D_\delta(z)$  по правилу

$$D_\delta(z) = v \in U : F_\alpha^*(z) \leq F_\alpha(z, v) \leq F_\alpha^*(z) + \varepsilon, \quad (3.4)$$

где  $\varepsilon$  — неотрицательный параметр, характеризующий точность по функционалу решения экстремальной задачи (3.1). Величины  $\alpha$  и  $\varepsilon$  будут являться параметрами метода (параметрами регуляризации), они будут выбираться в зависимости от величины погрешности измерений  $\delta$ .

**Теорема 3.1.** *Пусть параметры регуляризации  $\alpha = \alpha(\delta)$  и  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  удовлетворяют условиям согласования*

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2) \alpha(\delta)^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\delta) \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Тогда алгоритм  $D$ , состоящий из методов (3.4), решает задачу восстановления на любом наблюдаемом движении  $y \in Y$ , т. е.  $r_\delta(y) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Кроме того, каковы бы ни случились реализации измерений  $y_\delta \in Y_\delta(y)$ , для реализаций  $v_\delta = D_\delta(y_\delta)$  методов (3.4) при  $\delta \rightarrow 0$  имеет место сильная в  $E$  сходимость  $v_\delta \rightarrow u^*(y)$ .

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобного утверждения в [28–32].

Рассмотрим еще один вариант решения задачи восстановления.

Пусть  $W$  есть банахово пространство функций ограниченной полной вариации [43–45]

$$W = \{ u \in E : V[u] < \infty \}, \quad \| u \|_W = \| u \|_E + V[u],$$

где  $V[u]$  — полная вариация функции  $u : T \ni t \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,

$$V[u] = \sup \left\{ \sum_{i=1}^l \| u(t_i) - u(t_{i-1}) \|_{\mathbb{R}^m} : \sigma \in \Sigma \right\},$$

супремум берется по множеству  $\Sigma$  всех конечных разбиений  $\sigma$  отрезка  $T$ ,

$$\sigma : t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} < t_l = \vartheta.$$

Отметим некоторые свойства пространства  $W$  и его нормы.

**Лемма 3.4.** *Пространство  $W$  компактно вкладывается в  $E$ , т. е. оператор вложения  $W$  в  $E$  непрерывен и каждое ограниченное множество из  $W$  он переводит в предкомпактное множество из  $E$ . Всякое замкнутое ограниченное множество из  $W$  компактно в  $E$ .*

**Лемма 3.5.** *Поточечный предел ограниченной в  $W$  последовательности функций также является функцией из  $W$ .*

**Лемма 3.6.** *Функционал  $V[\cdot]$  и норма  $\|\cdot\|_W$  полунепрерывны снизу относительно поточечной сходимости аргументов, т. е. если последовательность функций ограниченной вариации  $\{v_k\}$  сходится поточечно на  $T$  к некоторой функции ограниченной вариации  $v_0$ , то  $V[v_0] \leq \liminf V[v_k]$  и  $\|v_0\|_W \leq \liminf \|v_k\|_W$ .*

**Лемма 3.7.** *Функционал  $V[\cdot]$  и норма  $\|\cdot\|_W$  полунепрерывны снизу относительно сходимости в  $E$  ограниченных последовательностей из  $W$ , т. е. если  $\{v_k\}$  есть ограниченная последовательность из  $W$ , которая в  $E$  сходится к некоторой функции  $v_0 \in E$ , то  $v_0 \in W$  и  $V[v_0] \leq \liminf V[v_k]$ ,  $\|v_0\|_W \leq \liminf \|v_k\|_W$ .*

**Лемма 3.8.** *Для любого замкнутого шара  $S_r[w_0] = \{ w \in W : \| w - w_0 \| \leq r \}$  множество  $U \cap S_r[w_0]$  выпукло, замкнуто в  $E$  и  $W$ , компактно и слабо компактно в  $E$ , компактно относительно поточечной сходимости на  $T$ .*

Обоснования лемм 3.4–3.8 аналогичны обоснованиям подобных утверждений в [13; 30–32].

Введем обозначения

$$\widehat{F}_\alpha^*(z) = \min \{ \widehat{F}_\alpha(z, v) : v \in U_W \}, \quad U_W = U \cap W, \quad (3.6)$$

$$\widehat{U}_\alpha^*(z) = \{ v \in U_W : \widehat{F}_\alpha(z, v) = \widehat{F}_\alpha^*(z) \}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_\alpha &= \widehat{F}_\alpha(z, v) = \int_T \| y[t; v] - z(t) \|_{L_2(\Omega)}^2 dt + \alpha \Lambda(v), \\ \Lambda(v) &= \| v \|_E^2 + V[v]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отметим некоторые свойства функционала (3.8), экстремальной задачи (3.6) и множества ее решений (3.7).

**Лемма 3.9.** При любых  $\alpha > 0$ ,  $z \in Z$  функционал (3.8) полунепрерывен снизу по  $v$  относительно сходимости в  $E$  ограниченных последовательностей из  $W$ .

**Лемма 3.10.** При любых  $\alpha > 0$ ,  $z \in Z$  экстремальная задача (3.6) однозначно разрешима, множество ее решений  $\widehat{U}_\alpha^*(z)$  состоит из одного элемента  $\widehat{u}_\alpha^* \in U_W$ .

**Лемма 3.11.** При любых  $\alpha > 0$ ,  $z \in Z$  всякая минимизирующая последовательность в задаче (3.6) сходится сильно в  $E$  к элементу  $\widehat{u}_\alpha^*$ .

Пусть на множестве  $U$  задан некоторый функционал  $G$ . Элемент  $\widehat{u}$  множества  $S \subseteq U$ , удовлетворяющий условию  $G(\widehat{u}) = \inf \{G(u) : u \in S\}$ , назовем  $(G, S)$ -нормальным элементом множества  $S$  и будем обозначать его символом  $\widehat{u}(G, S)$ .

**Лемма 3.12.** Пусть для  $y \in Y$  множество  $S = U(y) \cap W \neq \emptyset$ , тогда во множестве  $S$  существует единственный  $(\Lambda, S)$ -нормальный элемент  $\widehat{u} = \widehat{u}(\Lambda, S)$ .

Построим алгоритм, решающий задачу восстановления. Для любых  $\delta \in [0, \delta_0]$ ,  $z \in Z$  определим реализацию (значение) метода  $D_\delta(z)$  по правилу

$$D_\delta(z) = v \in U_W : \widehat{F}_\alpha^*(z) \leq \widehat{F}_\alpha(z, v) \leq \widehat{F}_\alpha^*(z) + \varepsilon, \quad (3.9)$$

где  $\varepsilon$  — неотрицательный параметр, характеризующий точность по функционалу решения задачи (3.6).

Обозначим  $Y_* = \{y \in Y : U(y) \cap W \neq \emptyset\}$ .

**Теорема 3.2.** Пусть параметры регуляризации  $\alpha = \alpha(\delta)$  и  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  удовлетворяют условиям согласования (3.5). Тогда алгоритм  $D$ , состоящий из методов (3.9), решает задачу восстановления на любом наблюдаемом движении  $y \in Y_*$ , т. е.  $r_\delta(y) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Кроме того, если  $\widehat{u}$  есть  $(\Lambda, S)$ -нормальный элемент множества  $S = U(y) \cap W$ , то каковы бы ни случились реализации измерений  $y_\delta \in Y_\delta(y)$ , для реализаций  $v_\delta = D_\delta(y_\delta)$  методов (3.9) при  $\delta \rightarrow 0$  имеют место следующие сходимости: 1)  $v_\delta \rightarrow \widehat{u}$  сильно в  $E$ ; 2)  $v_\delta \rightarrow \widehat{u}$  в  $\mathbb{R}^m$  поточечно на  $T$ ; 3)  $V[v_\delta] \rightarrow V[\widehat{u}]$ ; 4)  $v_\delta(t) \rightarrow \widehat{u}(t)$  в  $\mathbb{R}^m$  равномерно по  $t$  на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции  $\widehat{u}$ .

Доказательства лемм 3.9–3.12 и теоремы 3.2 аналогичны доказательствам подобных утверждений в [28–32].

#### 4. Восстановление распределенных по границе управлений

Рассмотрим случай распределенных по границе управлений  $u = u(t, x)$ ,  $t \in T$ ,  $x \in \Gamma_* \subseteq \Gamma$ . Пусть для простоты  $n = 2$ ,  $m = 1$ . Допустим, что некоторая часть  $\Gamma_*$  границы  $\Gamma$  параметризована переменной  $s \in [s_1, s_2]$  и допустимые управления сосредоточены на параметризованном участке. Пусть  $\Pi = T \times [s_1, s_2]$ ,  $E = L_2(\Pi)$ ,  $U = \{u \in E : u(t, s) \in P \text{ п.в. } (t, s) \in \Pi\}$ . В качестве стабилизатора рассмотрим функционал  $\Lambda(v) = \|v\|_E^2 + \|v\|_W$ , где  $\|\cdot\|_W$  — норма в банаховом пространстве  $W$  функций  $v = v(t, s)$ ,  $(t, s) \in \Pi$ , с конечной полной вариацией  $VH(v, \Pi)$  [23, с. 89]. Повторяя приведенную выше схему решения задачи реконструкции и опираясь на результаты [23, с. 89–91], получим следующее утверждение, аналогичное теореме 3.2.

**Теорема 4.1.** Пусть параметры регуляризации  $\alpha = \alpha(\delta)$  и  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  удовлетворяют условиям согласования (3.5). Пусть  $y \in Y_*$  и управление  $\widehat{u}$  является  $(\Lambda, S)$ -нормальным элементом множества  $S = U(y) \cap W$ , пусть это управление является единственным в существенном [23, с. 90] и непрерывным в области  $\Pi_* \subseteq \Pi$  вместе с функцией  $\pi(t, x) = VH(\widehat{u}, \Pi_{t_0 s_1}^{t, s})$  [23, с. 89]. Тогда алгоритм  $D$ , состоящий из методов (3.9), решает задачу восстановления на любом наблюдаемом движении  $y \in Y_*$ , т. е.  $r_\delta(y) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Кроме того, каковы бы ни случились реализации измерений  $y_\delta \in Y_\delta(y)$ , для реализаций  $v_\delta = D_\delta(y_\delta)$

методов (3.9) при  $\delta \rightarrow 0$  имеют место следующие сходимости: 1)  $v_\delta \rightarrow \hat{u}$  сильно в  $E$ ; 2)  $v_\delta \rightarrow \hat{u}$  в  $\mathbb{R}$  поточечно на  $\Pi$ ; 3)  $VH(v_\delta, \Pi) \rightarrow VH(\hat{u}, \Pi)$ ; 4)  $v_\delta(t, s) \rightarrow \hat{u}(t, s)$  в  $\mathbb{R}$  равномерно по  $(t, s)$  из любой замкнутой подобласти  $\Pi^* \subset \Pi_*$ .

Аналогичное утверждение справедливо при замене полной вариации  $VH(v, \Pi)$  на вариацию Арцела  $VA(v, \Pi)$  [23, с. 89–91]. При этом заключительная часть утверждения переформулируется так: 1)  $v_\delta \rightarrow \hat{u}$  сильно в  $E$ ; 2)  $v_\delta \rightarrow \hat{u}$  в  $\mathbb{R}$  в точках непрерывности функции  $\hat{u}$ ; 3)  $VA(v_\delta, \Pi) \rightarrow VA(\hat{u}, \Pi)$ ; 4)  $v_\delta(t, s) \rightarrow \hat{u}(t, s)$  в  $\mathbb{R}$  равномерно по  $(t, s)$  из любой замкнутой подобласти  $\Pi^* \subset \Pi_*$ .

### 5. Построение минимизирующих последовательностей

Для приближенного решения задачи (3.6), т. е. для получения  $\varepsilon$ -оптимальных решений, удовлетворяющих условию (3.9), необходимо уметь строить минимизирующие последовательности для задачи (3.6). Для построения таких последовательностей можно воспользоваться градиентными и субградиентными методами [39–42]. Установим в этом направлении некоторые вспомогательные утверждения. Исследование аналогичных вопросов для задачи (3.1) проще, поскольку в целевом функционале отсутствует вариация.

Отметим сначала некоторые дифференциальные свойства функционала  $\hat{F}_\alpha$ . Представим его в виде суммы соответствующих слагаемых

$$\hat{F}_\alpha(z, u) = J_1(z, u) + \alpha J_2(u) + \alpha J_3(u),$$

$$J_1(z, u) = \int_T \|y[t; u] - z(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt, \quad J_2(u) = \|u\|_E^2, \quad J_3(u) = V[u].$$

Функционалы  $J_1$  и  $J_2$  дифференцируемы по Фреше по переменной  $u$  в каждой точке  $u \in E$  (как функционалы  $E \rightarrow \mathbb{R}$ ) и в каждой точке  $u \in W$  (как функционалы  $W \rightarrow \mathbb{R}$ ), функционал  $J_3$  не является дифференцируемым ни по Фреше, ни по Гато на  $W$  (например, он не дифференцируем по Гато в точке  $u = 0$ ). Функционал  $\hat{F}_\alpha$  является выпуклым и непрерывным на  $W$ , и поэтому он субдифференцируем по переменной  $u$  на  $W$  [40]

$$\partial_u \hat{F}_\alpha(z, u) = J'_{1u}(z, u) + \alpha J'_2(u) + \alpha \partial J_3(u).$$

Практическое применение субградиентных методов для минимизации функционала  $\hat{F}_\alpha$  наталкивается на трудности, связанные со сложностями вычисления субдифференциала  $\partial J_3(u)$  и описания сопряженного пространства  $W^*$ . Некоторые из возможных подходов к численной реализации задачи минимизации могут быть связаны с аппроксимацией функционала  $J_3$  подходящими дифференцируемыми функционалами [13; 23–27]. В данной работе будет реализован подход [14–19], связанный с заменой пространства  $W$  каким-либо гильбертовым пространством, например, пространством Соболева  $H = W_2^1(T)^m$ , которое должно быть вложено в  $W$  и достаточно хорошо аппроксимировать его элементы. Это позволит воспользоваться техникой гильбертова пространства и упростить вычисление градиентов и субградиентов целевого функционала.

Рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу

$$F_\alpha^\circ(z) = \inf \{ \hat{F}_\alpha(z, v) : v \in U_H \}, \quad U_H = U \cap H. \tag{5.1}$$

Сформулируем некоторые утверждения, относящиеся к этой задаче.

**Лемма 5.1.** *Имеет место включение  $H \subset W$ , и для каждого элемента  $u \in H$*

$$V[u] = \int_T \|\dot{u}(t)\|_{\mathbb{R}^m} dt.$$

**Лемма 5.2.** Для каждого элемента  $u \in U_W$  найдется последовательность элементов  $\{u_k\} \subset U_H$  такая, что  $u_k \rightarrow u$  сильно в  $E$  и

$$\limsup V[u_k] \leq V[u].$$

**Лемма 5.3.** Для любых  $\alpha > 0$ ,  $z \in Z$  справедливо равенство

$$F_\alpha^\circ(z) = \widehat{F}_\alpha^*(z).$$

**Лемма 5.4.** Для любых  $\alpha > 0$ ,  $z \in Z$  любая минимизирующая последовательность задачи (5.1) сходится сильно в  $E$  к элементу  $\widehat{u}_\alpha^*$ .

Леммы 5.1 и 5.2 доказаны в [30]. Доказательства лемм 5.3 и 5.4 аналогичны доказательствам подобных утверждений в [30].

Исследуем вопрос о дифференцируемости функционала  $\widehat{F}_\alpha: H \rightarrow \mathbb{R}$ .

Для приращения функционала  $J_1$  по переменной  $u$  справедливо представление (оно выводится аналогично [39, гл. 8, § 7])

$$J_1(z, u+h) - J_1(z, u) = \langle b(\psi), h \rangle_E + o(\|h\|_E), \quad (5.2)$$

$$|o(\|h\|_E)| \leq C \|h\|_E^2 \leq C \|h\|_H^2,$$

$$b(\psi) = \sigma_2^{-1} \langle g, \frac{\partial \psi}{\partial N} \rangle_{L_2(\Gamma)} = \sigma_2^{-1} \left( \langle g_1, \frac{\partial \psi}{\partial N} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \dots, \langle g_m, \frac{\partial \psi}{\partial N} \rangle_{L_2(\Gamma)} \right) \text{ при } \sigma_1 = 0,$$

$$b(\psi) = -\sigma_1^{-1} \langle g, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = -\sigma_1^{-1} \left( \langle g_1, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)}, \dots, \langle g_m, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} \right) \text{ при } \sigma_1 \neq 0,$$

$C$  — некоторая положительная константа, не зависящая от  $u \in E$  и  $h \in E$ ,  $\psi = \psi(\cdot; z, u)$  — решение сопряженной задачи

$$\psi_t = -A\psi + 2(y(t, x; u) - z(t, x)), \quad (t, x) \in Q, \quad (5.3)$$

$$\psi(\vartheta, x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5.4)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \psi}{\partial N} + \sigma_2 \psi = 0, \quad t \in T, \quad x \in \Gamma. \quad (5.5)$$

Ясно, что функционал  $\eta_u$ , действующий по правилу  $\eta_u(h) = \langle b(\psi), h \rangle_E$ , есть линейный непрерывный функционал на  $E$ ,  $W$  и  $H$ . Из (5.2) следует, что этот функционал и будет являться производной Фреше функционала  $J_1(z, \cdot): H \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $u \in H$ , т. е.

$$J'_{1u}(z, u) = \eta_u \in H^*, \quad \eta_u(h) = \langle b(\psi), h \rangle_E \quad \forall h \in H. \quad (5.6)$$

По теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством для функционала  $\eta_u$  найдется единственный элемент  $a_u^{(1)} \in H$ , обеспечивающий представление

$$\eta_u(h) = \langle b(\psi), h \rangle_E = \langle a_u^{(1)}, h \rangle_H \quad \forall h \in H. \quad (5.7)$$

Из (5.6) и (5.7) следует, что элемент  $a_u^{(1)} \in H$  будет являться градиентом функционала  $J_1(z, \cdot): H \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $u \in H$ , т. е.

$$\nabla_u J_1(z, u) = a_u^{(1)}, \quad \eta_u(h) = \langle b(\psi), h \rangle_E = \langle a_u^{(1)}, h \rangle_H \quad \forall h \in H. \quad (5.8)$$

Таким образом, для вычисления производной  $J'_{1u}(z, u)$  нужно последовательно решить две задачи: сначала из краевой задачи (1.1)–(1.3) нужно найти решение  $y = y(\cdot; u)$ , затем из краевой задачи (5.3)–(5.5) — решение  $\psi = \psi(\cdot; z, u)$  и, наконец, по формуле (5.6) найти искомый

функционал  $\eta_u$ . Для нахождения градиента  $\nabla_u J_1(z, u)$  нужно найти элемент  $a_u^{(1)} \in H$ , обеспечивающий представление (5.8).

Сформулируем полученный результат в виде леммы.

**Лемма 5.5.** *Для каждого элемента  $z \in Z$  функционал  $J_1(z, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывен и дифференцируем по Фреше в каждой точке  $u \in H$ . Производная Фреше  $J'_{1u}(z, u) \in H^*$  в точке  $u \in H$  определяется равенством (5.6). Градиент  $\nabla_u J_1(z, u) \in H$  в точке  $u \in H$  определяется равенством (5.8). Кроме того, при указанных условиях на исходные данные задачи производная  $J'_{1u}(z, \cdot)$  и градиент  $\nabla_u J_1(z, \cdot)$  удовлетворяют условию Липшица на  $U_H$ , т. е. существует число  $L \geq 0$  такое, что для любых  $u \in U_H$  и  $v \in U_H$  выполняются неравенства*

$$\|J'_{1u}(z, u) - J'_{1u}(z, v)\|_{H^*} \leq L \|u - v\|_H,$$

$$\|\nabla_u J_1(z, u) - \nabla_u J_1(z, v)\|_H \leq L \|u - v\|_H.$$

Из дифференцируемости функционала  $J_1$  по переменной  $u$  следует его субдифференцируемость, субдифференциал  $\partial_u J_1(z, u)$  состоит из одного элемента  $\eta_u$ ,  $\partial_u J_1(z, u) = \{\eta_u\}$  [40, с. 58, 208, 227].

**Лемма 5.6.** *Функционал  $J_2 : H \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывен и дифференцируем по Фреше в каждой точке  $u \in H$ . Производная Фреше  $J'_2(u) \in H^*$  в точке  $u \in H$  определяется равенством*

$$J'_2(u) = \varphi_u \in H^*, \quad \varphi_u(h) = \langle 2u, h \rangle_E \quad \forall h \in H.$$

Градиент  $\nabla J_2(u) \in H$  в точке  $u \in H$  определяется равенством

$$\nabla J_2(u) = a_u^{(2)}, \quad \varphi_u(h) = \langle 2u, h \rangle_E = \langle a_u^{(2)}, h \rangle_H \quad \forall h \in H.$$

Доказательство подобного утверждения имеется, например, в [39, гл. 8, § 3]. Из дифференцируемости функционала  $J_2$  следует его субдифференцируемость, субдифференциал  $\partial J_2(u)$  состоит из одного элемента  $\varphi_u$ ,  $\partial J_2(u) = \{\varphi_u\}$  [40, с. 58, 208, 227].

Функционал  $J_3 : H \rightarrow \mathbb{R}$ , вообще говоря, не является дифференцируемым по Фреше или Гато на  $H$ . Например, он не имеет в нуле даже слабой производной Гато. Однако он является непрерывным и выпуклым на  $H$ , и поэтому он субдифференцируем в каждой точке  $u \in H$  [40, гл. 4, § 4.2], причем для субдифференциала имеет место равенство

$$\partial J_3(u) = \{\varphi \in H^* : \varphi(v - u) \leq V[v] - V[u] \quad \forall v \in H\}.$$

Отметим одно полезное утверждение (см., например, [40, гл. 4, § 4.2, § 4.4]): функционал  $J_3 : H \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируем по Гато в точке  $u \in H$  тогда и только тогда, когда его субдифференциал  $\partial J_3(u)$  в этой точке содержит ровно один элемент  $\varphi_u \in H^*$ , который и будет производной Гато в этой точке, т. е.  $J'_3(u) = \varphi_u$ .

**Лемма 5.7.** *Функционал  $J_3 : H \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируем по Гато в точке  $u \in H$  тогда и только тогда, когда мера Лебега множества  $T_u = \{t \in T : \dot{u}(t) = 0\}$  равна нулю. В случае дифференцируемости производная Гато  $J'_3(u)$  определяется равенством*

$$J'_3(u)(h) = \left\langle \frac{\dot{u}}{\|\dot{u}\|_{\mathbb{R}^m}}, \dot{h} \right\rangle_E \quad \forall h \in H.$$

**Лемма 5.8.** *Если функционал  $J_3 : H \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируем по Гато в точке  $u \in H$ , то он дифференцируем и по Фреше в этой же точке, причем производные Гато и Фреше в этой точке совпадают как элементы  $H^*$ .*

В тех точках  $u \in H$ , в которых функционал  $J_3 : H \rightarrow \mathbb{R}$  не дифференцируем по Гато, субдифференциал  $\partial J_3(u)$  состоит более, чем из одного элемента. Действительно, субдифференциал не пуст, и, если бы он содержал только один элемент, то функционал  $J_3$  был бы

дифференцируем по Гато в точке  $u$  [40, с. 208]. На самом деле  $\partial J_3(u)$  в таких точках содержит бесконечное число различных элементов, так как если множество  $\partial J_3(u)$  содержит хотя бы два различных элемента  $w_1$  и  $w_2$ , то в силу своей выпуклости оно должно содержать в себе все элемента вида  $w_\lambda = \lambda \cdot w_1 + (1 - \lambda) \cdot w_2$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Из общих теорем следует, что множество  $\partial J_3(u)$  является выпуклым, ограниченным и \*-слабо компактным в  $H$  [39, с. 199; 40, с. 210]. По теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала над гильбертовым пространством множеству  $\partial J_3(u)$  из  $H^*$  соответствует выпуклое, ограниченное и слабо компактное множество субградиентов  $I(\partial J_3(u))$  из  $H$ , где  $I$  есть линейный изометрический изоморфизм между  $H^*$  и  $H$ , определяемый теоремой Рисса.

Соотношение, определяющее субдифференциал  $\partial J_3(u)$ , с учетом леммы 5.1 примет вид

$$\partial J_3(u) = \left\{ \varphi \in H^* : \varphi(v - u) \leq \int_T \|\dot{v}(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau - \int_T \|\dot{u}(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau \quad \forall v \in H \right\}.$$

Множество субградиентов  $DJ_3(u)$  субдифференциала  $\partial J_3(u)$  определяется равенством

$$DJ_3(u) = I(\partial J_3(u)),$$

$$DJ_3(u) = \left\{ w \in H : \langle w, v - u \rangle_H \leq \int_T \|\dot{v}(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau - \int_T \|\dot{u}(\tau)\|_{\mathbb{R}^m} d\tau \quad \forall v \in H \right\}.$$

Если ограничиться функционалами  $\varphi_g \in H^*$  вида

$$\varphi_g(v) = \langle \dot{g}, \dot{v} \rangle_E = \int_T \langle \dot{g}(\tau), \dot{v}(\tau) \rangle_{\mathbb{R}^m} d\tau, \quad v \in H, \quad (5.9)$$

то легко проверить, что в точке  $u \in H$ , в которой  $\text{meas } T_u > 0$ , субдифференциал  $\partial J_3(u)$  содержит в себе все функционалы  $\varphi_g \in H^*$  с определяющими элементами  $g \in H$  вида

$$\dot{g}(t) = \frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|_{\mathbb{R}^m}} \quad \text{при } t \in T \setminus T_u, \quad \|\dot{g}(t)\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1 \quad \text{при } t \in T_u. \quad (5.10)$$

Оказывается, что субдифференциал  $\partial J_3(u)$  состоит в точности из всех таких функционалов  $\varphi_g$  вида (5.9) с определяющими элементами  $g$  вида (5.10).

**Лемма 5.9.** *Субдифференциал  $\partial J_3(u)$  состоит в точности из всех функционалов  $\xi_w \in H^*$  вида*

$$\xi_w(h) = \langle \dot{w}, \dot{h} \rangle_E = \int_T \langle \dot{w}(t), \dot{h}(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt \quad \forall h \in H$$

с определяющими элементами  $w$  из множества  $\Xi_u$

$$\Xi_u = \left\{ w \in H : \dot{w}(t) = \frac{\dot{u}(t)}{\|\dot{u}(t)\|_{\mathbb{R}^m}} \quad \text{при } t \in T \setminus T_u, \quad \|\dot{w}(t)\|_{\mathbb{R}^m} \leq 1 \quad \text{при } t \in T_u \right\},$$

т. е. справедливо равенство

$$\partial J_3(u) = \{\xi_w : w \in \Xi_u\},$$

а множество  $DJ_3(u)$  в каждой точке  $u \in H$  состоит из элементов

$$DJ_3(u) = \left\{ w \in H : \int_T w(t) dt = 0, \quad \dot{w}(t) = \int_{t_0}^t w(\tau) d\tau + \dot{g}(t), \quad g \in \Xi_u \right\}.$$

Леммы 5.6–5.9 доказаны в [30].

По теореме Моро — Рокафеллара [40] имеем

$$\partial_u F_\alpha(z, u) = J'_{1u}(z, u) + \alpha J'_2(u) + \alpha \partial J_3(u), \quad u \in H,$$

$$D_u F_\alpha(z, u) = \nabla_u J_1(z, u) + \alpha \nabla J_2(u) + \alpha DJ_3(u), \quad u \in H.$$

Для построения минимизирующих последовательностей в задаче (3.6) воспользуемся методом проекции субградиента [39, гл. 5, § 3; 41]

$$u^{(k+1)} = Pr(u^{(k)} - \beta_k v_k), \quad \beta_k > 0, \quad v_k \in D_u F_\alpha(z, u^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.11)$$

где  $u^{(0)}$  — начальное приближение из  $U_H$ ,  $Pr(w)$  — проекция точки  $w \in H$  на множество  $U_H$  (поскольку множество  $U_H$  выпукло и замкнуто в  $H$ , то проекция существует и единственна [39, гл. 8, § 4]), параметры метода  $\beta_k$  подлежат подходящему выбору.

**Теорема 5.1.** Пусть в итерационном процессе (5.11)  $u^{(0)}$  — произвольное начальное приближение из  $U_H$ ,  $v_k$  — произвольный субградиент из  $D_u F_\alpha(z, u^{(k)})$ , параметры метода  $\beta_k$  удовлетворяют условию

$$\beta_k = 1, \quad \text{если } v_k = 0; \quad \beta_k = \gamma_k / \|v_k\|_H, \quad \text{если } v_k \neq 0; \quad (5.12)$$

$$\gamma_k > 0, \quad \gamma_k \rightarrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty. \quad (5.13)$$

Тогда 1)  $\widehat{F}_\alpha(z, u_*^{(k)}) \rightarrow F_\alpha^\circ(z) = \widehat{F}_\alpha^*(z)$ , где  $\widehat{F}_\alpha^*(z) = \min \{\widehat{F}_\alpha(z, u^{(i)}) : i \in \overline{0, k}\}$ ; 2) минимизирующая последовательность  $\{u_*^{(k)}\} \subset U_H$  задачи (5.1) сходится сильно в  $E$  к элементу  $u_*^*$ ; 3)  $V[u_*^{(k)}] \rightarrow V[u_*^*]$ .

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 из [32].

## 6. Аппроксимация задачи

Воспользуемся для аппроксимации задачи методом разделения переменных. Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) представим в виде ряда Фурье

$$y = y(t, x; u) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \omega_i(x), \quad t \in T, \quad x \in \Omega,$$

$$\dot{y}_i(t) = -\lambda_i y_i(t) + f_i(t) + g^{(i)} u(t), \quad t \in T, \quad y_i(t_0) = y_{0i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$y_i(t) = y_i(t; u) = y_{0i} \exp(-\lambda_i(t-t_0)) + \int_{t_0}^t f_i(\tau) \exp(-\lambda_i(t-\tau)) d\tau + g^{(i)} \int_{t_0}^t u(\tau) \exp(-\lambda_i(t-\tau)) d\tau,$$

где  $y_{0i} = \langle y_0, \omega_i \rangle_{L_2(\Omega)}$ ,  $f_i(t) = \langle f(t, \cdot), \omega_i \rangle_{L_2(\Omega)}$ ,  $g^{(i)} = (\langle g_1, \Pi(\omega_i) \rangle_{L_2(\Gamma)}, \dots, \langle g_m, \Pi(\omega_i) \rangle_{L_2(\Gamma)})$ ,  $\Pi(\omega_i) = -\sigma_2^{-1} \partial \omega_i / \partial N$  при  $\sigma_1 = 0$ ,  $\Pi(\omega_i) = \sigma_1^{-1} \omega_i$  при  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\{\lambda_i, \omega_i : i \in \mathbb{N}\}$  — решение в  $W_2^1(\Omega)$  спектральной задачи

$$A\omega = -\lambda\omega \quad \text{в } \Omega, \quad \sigma_1 \frac{\partial \omega}{\partial N} + \sigma_2 \omega = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad \langle \omega, \omega \rangle_{L_2(\Omega)} = 1.$$

Известно [34–36], что спектральная задача разрешима для счетного набора вещественных положительных чисел  $\lambda = \lambda_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , каждое из которых имеет конечную кратность, и их можно упорядочить (с учетом их кратности) в порядке возрастания

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots, \quad \lambda_i \rightarrow \infty \quad \text{при } i \rightarrow \infty;$$

соответствующие собственным числам  $\lambda_i$  собственные функции  $\omega_i$  образуют ортонормированный базис в  $L_2(\Omega)$ , при  $\sigma_1 = 0$  — базис в  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$  и  $W_{2,0}^2(\Omega)$ , при  $\sigma_1 \neq 0$  — базис в  $W_2^1(\Omega)$ .

Для любых  $t \in T$  и  $u \in U$  справедлива оценка со сходящимся рядом [38]

$$\begin{aligned} \|y(t, \cdot; u)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t; u)^2 \leq 3 \sum_{i=1}^{\infty} y_{0i}^2 + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} \int_T f_i(\tau)^2 d\tau \\ &+ 3m C_P^2 \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} \langle g_i, \Pi(\omega_j) \rangle_{L_2(\Gamma)}^2 (\lambda_j)^{-2} \right) < \infty, \\ C_P &= \sup \{ \|w\|_{\mathbb{R}^m} : w \in P \}, \end{aligned}$$

из которой, в частности, следует сходимость остатка ряда  $R_p \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ ,

$$R_p = 3 \sum_{i=p}^{\infty} y_{0i}^2 + \frac{3}{2} \sum_{i=p}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} \int_T f_i(\tau)^2 d\tau + 3m C_P^2 \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=p}^{\infty} \langle g_i, \Pi(\omega_j) \rangle_{L_2(\Gamma)}^2 (\lambda_j)^{-2} \right).$$

Фиксируем какое-нибудь  $p \in \mathbb{N}$  и рассмотрим экстремальную задачу

$$\tilde{F}_\alpha^{(p)}(z) = \min \{ F_\alpha^{(p)}(z, v) : v \in U_W \}, \quad (6.1)$$

$$F_\alpha^{(p)} = F_\alpha^{(p)}(z, v) = J_1^{(p)}(z, v) + \alpha \Lambda(v),$$

$$J_1^{(p)}(z, v) = \sum_{i=1}^p \int_T (y_i(t; v) - z_i(t))^2 dt, \quad z_i(t) = \langle z(t, \cdot), \omega_i \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad z \in Z.$$

При любых  $\alpha > 0$ ,  $z \in Z$  экстремальная задача (6.1) имеет единственное решение  $u_\alpha^{(p)}(z) \in U_W$ , всякая минимизирующая последовательность в задаче (6.1) сходится сильно в  $E$  к элементу  $u_\alpha^{(p)}(z)$ .

Рассмотрим следующий алгоритм для решения исходной задачи реконструкции

$$D = \{ D_\delta^{(p)} : 0 \leq \delta \leq \delta_0, p \in \mathbb{N} \}, \quad D_\delta^{(p)} : Z \rightarrow E.$$

Для любых  $\delta \in [0, \delta_0]$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $z \in Z$  определим реализацию метода

$$D_\delta^{(p)}(z) = v \in U_W : \tilde{F}_\alpha^{(p)}(z) \leq F_\alpha^{(p)}(z, v) \leq \tilde{F}_\alpha^{(p)}(z) + \varepsilon, \quad (6.2)$$

где  $\varepsilon$  — неотрицательный параметр, характеризующий точность по функционалу решения экстремальной задачи (6.1).

**Теорема 6.1.** Пусть параметры регуляризации  $\alpha = \alpha(\delta)$ ,  $p = p(\delta)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  удовлетворяют условиям согласования

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2 + R_{p(\delta)}) \alpha(\delta)^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\delta) \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad p(\delta) \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Тогда алгоритм  $D$ , состоящий из методов (6.2), решает задачу восстановления на любом наблюдаемом движении  $y \in Y_*$ , т. е.  $r_\delta(y) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Кроме того, если  $\hat{u}$  есть  $(\Lambda, S)$ -нормальный элемент множества  $S = U(y) \cap W$ , то какие бы ни случились реализации измерений  $y_\delta \in Y_\delta(y)$ , для реализаций  $v_\delta = D_\delta^{(p(\delta))}(y_\delta)$  методов (6.2) при  $\delta \rightarrow 0$  имеют место следующие сходимости: 1)  $V[v_\delta] \rightarrow V[\hat{u}]$ ; 2)  $v_\delta \rightarrow \hat{u}$  сильно в  $E$ ; 3)  $v_\delta \rightarrow \hat{u}$  в  $\mathbb{R}^m$  поточечно на  $T$ ; 4)  $v_\delta(t) \rightarrow \hat{u}(t)$  в  $\mathbb{R}^m$  равномерно по  $t$  из любого отрезка, не содержащего точек разрыва функции  $\hat{u}$ .

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2.

Укажем способ построения минимизирующих последовательностей в задаче (6.1). Этот способ аналогичен способу, изложенному в разд. 5.

Рассмотрим новую вспомогательную экстремальную задачу

$$\overset{\circ}{F}_\alpha^{(p)}(z) = \inf \{ F_\alpha^{(p)}(z, u) : u \in U_H \}. \quad (6.3)$$

Как и в разд. 5, можно показать, что  $\overset{\circ}{F}_\alpha^{(p)}(z) = \tilde{F}_\alpha^{(p)}(z)$ , любая минимизирующая последовательность в задаче (6.3) сходится сильно в  $E$  к элементу  $u_\alpha^{(p)}(z)$ .

Функционал  $F_\alpha^{(p)} : H \rightarrow \mathbb{R}$  не дифференцируем по переменной  $u$  ни по Фреше, ни по Гато на  $H$ , но он субдифференцируем в каждой точке  $u \in H$

$$\partial_u F_\alpha^{(p)}(z, u) = J_{1u}^{(p)'}(z, u) + \alpha J_2'(u) + \alpha \partial J_3(u).$$

Производная Фреше  $J_2'(u)$  и субдифференциал  $\partial J_3(u)$  найдены выше, сформулируем соответствующее утверждение о производной функционала  $J_1^{(p)}(z, u)$ .

**Лемма 6.1.** *Для каждого элемента  $z \in Z$  функционал  $J_1(z, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывен и дифференцируем по Фреше в каждой точке  $u \in H$ . Производная Фреше  $J_{1u}^{(p)'}(z, u)$  в точке  $u \in H$  определяется равенством*

$$J_{1u}^{(p)'}(z, u) = \eta_u \in H^*, \quad \eta_u(h) = \langle b_p(\psi), h \rangle_E \quad \forall h \in H,$$

где  $b_p(\psi) = \psi_1 g^{(1)} + \dots + \psi_p g^{(p)}$ ,  $\psi^{(p)} = (\psi_1, \dots, \psi_p)$  — решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi}_i(t) = \lambda_i \psi_i(t) - 2(y_i(t; u) - z_i(t)), \quad t \in T, \quad \psi_i(\vartheta) = 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Градиент  $\nabla_u J_1^{(p)}(z, u) \in H$  в точке  $u \in H$  по теореме Рисса определяется равенством

$$\nabla_u J_1^{(p)}(z, u) = b_u^{(p)} \in H, \quad \eta_u(h) = \langle b_p(\psi), h \rangle_E = \langle b_u^{(p)}, h \rangle_H \quad \forall h \in H.$$

Кроме того, при указанных условиях на исходные данные задачи производная  $J_{1u}^{(p)'}(z, \cdot)$  и градиент  $\nabla_u J_1^{(p)}(z, \cdot)$  удовлетворяют условию Липшица на  $U_H$ , т. е. существует такое число  $L^{(p)} \geq 0$ , что для любых  $u \in U_H$  и  $v \in U_H$  выполняются неравенства

$$\| J_{1u}^{(p)'}(z, u) - J_{1u}^{(p)'}(z, v) \|_{H^*} \leq L^{(p)} \| u - v \|_H,$$

$$\| \nabla_u J_1^{(p)}(z, u) - \nabla_u J_1^{(p)}(z, v) \|_H \leq L^{(p)} \| u - v \|_H.$$

Для построения минимизирующих последовательностей в задаче (6.3) воспользуемся методом проекции субградиента

$$u^{(k+1)} = Pr(u^{(k)} - \beta_k v_k), \quad \beta_k > 0, \quad v_k \in D_u F_\alpha^{(p)}(z, u^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.4)$$

где  $u^{(0)}$  — начальное приближение из  $U_H$ ;  $Pr(w)$  — проекция в  $H$  точки  $w \in H$  на множество  $U_H$ ;  $D_u F_\alpha^{(p)}(z, u)$  — множество субградиентов субдифференциала  $\partial_u F_\alpha^{(p)}(z, u)$ ; параметры метода  $\beta_k$  подлежат подходящему выбору.

**Теорема 6.2.** *Пусть в итерационном процессе (6.4)  $u^{(0)}$  — произвольное начальное приближение из  $U_H$ ,  $v_k$  — произвольный субградиент из  $D_u F_\alpha^{(p)}(z, u^{(k)})$ , параметры метода  $\beta_k$  удовлетворяют условиям (5.12), (5.13). Тогда 1)  $F_\alpha^{(p)}(z, u_*^{(k)}) \rightarrow \overset{\circ}{F}_\alpha^{(p)}(z) = \tilde{F}_\alpha^{(p)}(z)$ , где  $F_\alpha^{(p)}(z, u_*^{(k)}) = \min \{ F_\alpha^{(p)}(z, u^{(i)}) : i \in \overline{0, k} \}$ ; 2) минимизирующая последовательность  $\{u_*^{(k)}\} \subset U_H$  задачи (6.3) сходится сильно в  $E$  к элементу  $u_\alpha^{(p)}(z)$ ; 3)  $V[u_*^{(k)}] \rightarrow V[u_\alpha^{(p)}]$ .*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.1.

## 7. Численное моделирование

Проведем численное моделирование задачи восстановления управления в системе

$$\begin{aligned} y_t &= a^2 y_{xx}, \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega, \\ y(0, x) &= y_0(x), \quad x \in \Omega = (0, l), \\ y(t, 0) &= u(t), \quad y(t, l) = 0, \quad t \in T = [0, \vartheta]. \end{aligned}$$

По условию

$$y_0 \in L_2(\Omega), \quad a = \text{const} > 0.$$

Пусть множество геометрических ограничений на управления  $P$  есть отрезок

$$P = [\mu_1, \mu_2] \subset \mathbb{R}, \quad \mu_1 < \mu_2,$$

приближенное измерение состояний динамической системы моделируется соотношением

$$y_\delta(t, x) = y(t, x; u) + \delta \xi(t, x), \quad \int_T \|\xi(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq 1.$$

В данном конкретном случае

$$\lambda_i = \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2, \quad \omega_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\sqrt{\lambda_i} x), \quad g^{(i)} = a^2 \sqrt{\frac{2\lambda_i}{l}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\dot{y}_i(t) = -a^2 \lambda_i y_i(t) + g^{(i)} u(t), \quad t \in T, \quad y_i(0) = y_{0i},$$

$$y_i(t) = y_i(t; u) = y_{0i} \exp(-a^2 \lambda_i t) + g^{(i)} \int_0^t \exp(-a^2 \lambda_i (t - \tau)) u(\tau) d\tau,$$

$$y = y(t, x) = y(t, x; u) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \omega_i(x), \quad t \in T, \quad x \in [0, l].$$

Далее фиксируем какое-либо натуральное число  $p \in \mathbb{N}$  и рассматриваем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i(t) = -a^2 \lambda_i y_i(t) + g^{(i)} u(t), \quad t \in T, \quad y_i(0) = y_{0i}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (7.1)$$

Дискретизируем задачу (6.3). Фиксируем разбиение  $\Delta$  отрезка  $T$  с равномерным шагом  $h$  точками  $t_k \in T$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = \vartheta$ . На разбиении  $\Delta$  определим дискретное управление  $u_h = (u_0^{(h)}, \dots, u_m^{(h)})$  как элемент евклидова пространства  $\mathbb{R}^{m+1}$ , удовлетворяющий геометрическому ограничению  $u_h \in P^{m+1} = P_h$ . Движение системы (7.1)

$$y^{(p)} = y^{(p)}[t; u] = (y_1(t; u), \dots, y_p(t; u)), \quad t \in T,$$

в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^p$ , соответствующее управлению  $u \in U$ , аппроксимируем упорядоченным набором сеточных функций

$$y_h^{(p)} = (y_{1h}, \dots, y_{ph}), \quad y_{ih} = y_{ih}[\cdot; u_h] = (y_{ih}[t_0; u_h], \dots, y_{ih}[t_m; u_h]), \quad i = 1, \dots, p,$$

и назовем дискретным движением системы (7.1) в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^p$ , соответствующим дискретному управлению  $u_h \in P_h$ . Из (7.1) находим

$$y_{ih}[t_{k+1}; u_h] = y_{ih}[t_k; u_h] \exp(-a^2 \lambda_i h) + g^{(i)} u_k^{(h)} a^{-2} \lambda_i (1 - \exp(-a^2 \lambda_i h)),$$

$$y_{ih}[t_0; u_h] = y_{0i}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad i = 1, \dots, p.$$

Целевой функционал в (6.3) аппроксимируем конечными суммами

$$F_{\alpha h}^{(p)} = F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h) = J_{1h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h) + \alpha J_{2h}(u_h) + \alpha J_{3h}(u_h),$$

первые две суммы представляют собой соответственно аппроксимацию интегралов  $J_1^{(p)}$  и  $J_2(u)$  методом трапеций на разбиении  $\Delta$ , третья сумма  $J_{3h}$  — аппроксимацию полной вариации  $V[u]$  интегральной суммой на разбиении  $\Delta$  в соответствии с леммой 5.1.

Исходной бесконечномерной экстремальной задаче (6.3) поставим в соответствие конечномерную экстремальную задачу

$$\Phi_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}) = \min \{ F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h) : u_h \in P_h \}. \quad (7.2)$$

Решение задачи (7.2) примем за дискретное приближение к решению задачи (6.3). Задача (7.2) разрешима единственным образом, поскольку целевая функция  $F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$  непрерывна и строго выпукла на  $\mathbb{R}^{m+1}$ , а множество  $P_h$  компактно в  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Первые два слагаемых  $J_{1h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$  и  $J_{2h}(\cdot)$  функции  $F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$  непрерывно дифференцируемы на  $\mathbb{R}^{m+1}$ , третье слагаемое  $J_{3h}(\cdot)$  не является дифференцируемым во всех точках  $\mathbb{R}^{m+1}$ , но оно непрерывно и выпукло на  $\mathbb{R}^{m+1}$  и поэтому является субдифференцируемым на  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Таким образом, функция  $F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$  субдифференцируема на  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Приближенное решение задачи (7.2) будем искать методом проекции субградиента в форме

$$u_h^{[k+1]} = Pr_h \left( u_h^{[k]} - \beta_k v_h^{[k]} \right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $D_u F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h^{[k]}) \ni v_h^{[k]}$  — субградиент по переменной  $u_h$  целевой функции в точке  $u_h^{[k]}$ ;  $Pr_h(w_h)$  — проекция точки  $w_h \in \mathbb{R}^{m+1}$  на выпуклое компактное множество  $P_h$ ; в качестве начального приближения выбирается какой-нибудь элемент  $u_h^{[0]} \in P_h$ ;  $\beta_k$  — последовательность параметров метода, удовлетворяющая условиям вида (5.12), (5.13).

Множество субградиентов  $D_u F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h)$  целевой функции вычисляется достаточно просто [32]. Выпишем только субдифференциал функционала  $J_{3h}(u_h)$

$$\partial J_{3h}(u_h) = \partial \left[ \sum_{k=0}^{m-1} |u_{k+1}^{(h)} - u_k^{(h)}| \right] = \sum_{k=0}^{m-1} d_k,$$

$d_k = v_k$  при  $u_{k+1}^{(h)} > u_k^{(h)}$ ,  $d_k = -v_k$  при  $u_{k+1}^{(h)} < u_k^{(h)}$ ,  $d_k = co\{v_k, -v_k\}$  при  $u_{k+1}^{(h)} = u_k^{(h)}$ , где  $v_k = (0, \dots, 0, -1_k, 1_{k+1}, 0, \dots, 0)$  — элемент пространства  $\mathbb{R}^{m+1}$ , у которого стоит  $-1$  на месте с номером  $k$  и  $1$  на месте с номером  $k+1$ ;  $co\{v_k, -v_k\}$  — замкнутая выпуклая оболочка в  $\mathbb{R}^{m+1}$  двух элементов  $v_k$  и  $-v_k$ .

Проекция  $Pr_h(v_h) = (w_0, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$  элемента  $v_h = (v_0, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$  на выпуклый компакт  $P_h$  вычисляется по правилу:  $w_k = v_k$  при  $v_k \in P$ ,  $w_k = \mu_1$  при  $v_k < \mu_1$ ,  $w_k = \mu_2$  при  $v_k > \mu_2$ ,  $k = 0, \dots, m$ .

Погрешности измерений в дискретной задаче будем моделировать соотношениями

$$\xi_{ih}(t) = \varkappa_i \sin(\nu_i t), \quad t \in T, \quad \nu_i = \text{const } i, \quad \varkappa_i = \text{const } i, \quad i = 1, \dots, p, \quad \vartheta(\varkappa_1^2 + \dots + \varkappa_p^2) \leq 1.$$

Численные эксперименты проводились при следующих параметрах задачи:  $a = 1$ ,  $\vartheta = 1$ ,  $l = 1$ ,  $\mu_1 = -2$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $y_0 = 0$ ,  $\nu_i = 2$ ,  $\varkappa_i = p^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

В качестве модельных восстанавливаемых управлений были выбраны функции:

- 1)  $u = u_{(1)}(t) = 2t \sin(40t^{1.5})$  (гладкое управление);
- 2)  $u = u_{(2)}(t) = 1.5$  при  $0.2 < t < 0.25$ ,  $-1$  при  $0.4 < t < 0.43$ ,  $-2$  при  $0.6 < t < 0.62$ ,  $2$  при  $0.62 \leq t < 0.63$ ,  $0$  в остальных точках отрезка  $[0, 1]$  (импульсы).

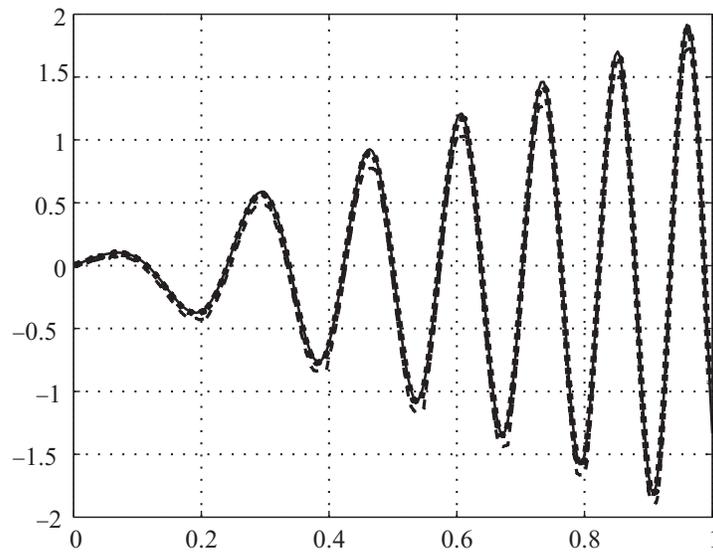


Рис. 1. Восстановление гладкого управления.

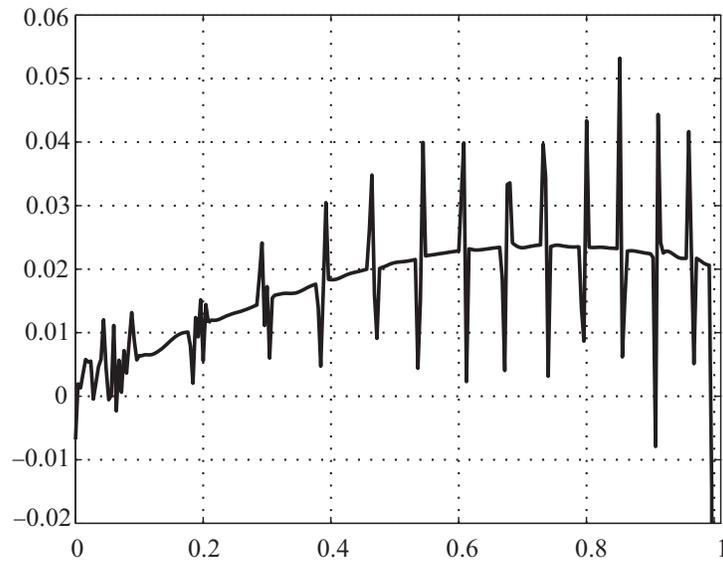


Рис. 2. Погрешность восстановления гладкого управления.

Т а б л и ц а 1

## Восстановление гладкого управления

Погрешность $\delta$	Невязка	Относительная погрешность
3.0	0.11626	14.41770
2.0	0.07901	9.79809
1.0	0.04200	5.33222
0.5	0.02699	3.34666
0.2	0.02041	2.53091

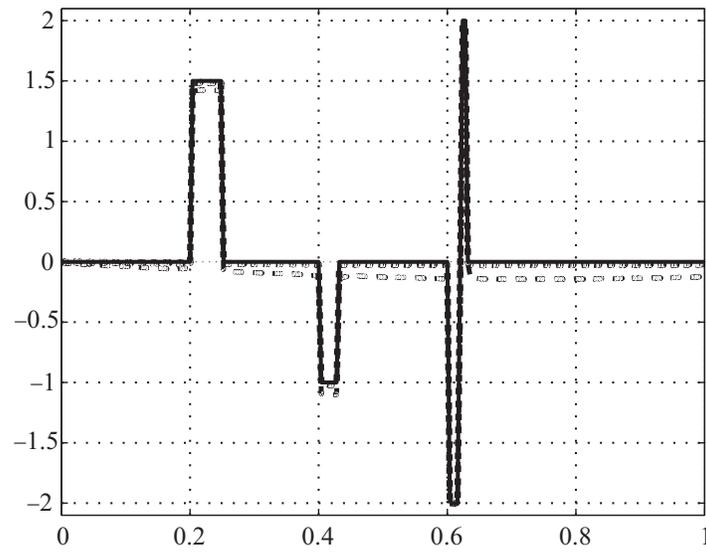


Рис. 3. Восстановление импульсов.

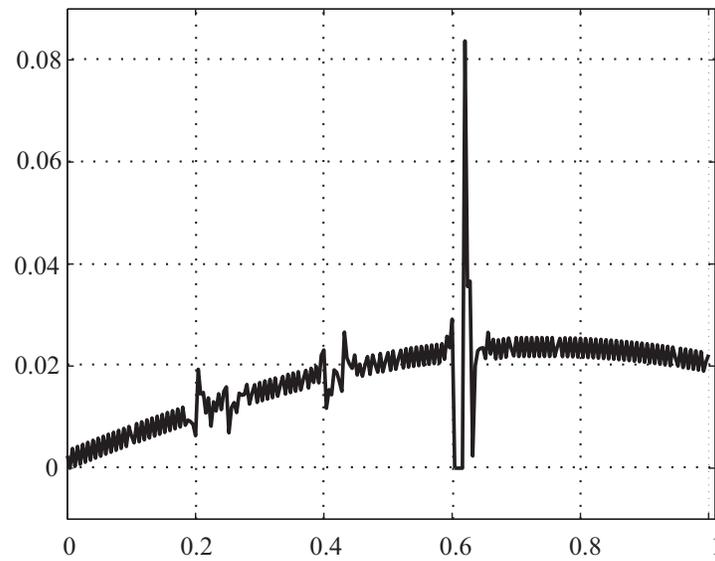


Рис. 4. Погрешность восстановления импульсов.

Т а б л и ц а 2

## Восстановление импульсов

Погрешность $\delta$	Невязка	Относительная погрешность
3.0	0.11656	24.19850
2.0	0.07772	16.13540
1.0	0.03888	8.07293
0.5	0.01950	4.04921
0.2	0.00793	1.64574

Величины  $\gamma_k$  выбирались по формулам:  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_k = 1/\sqrt{k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Начальной функцией в методе проекции субградиента служила нулевая сеточная функция. Она достаточно далеко отстоит от модельного управления как по норме, так и по качественному поведению.

Зависимость параметра  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  точности минимизации в задаче (7.2) от погрешности  $\delta$  в измерении состояний динамической системы напрямую не контролировалась, точность решения задачи (7.2) определялась выбором количества итераций  $M$  в методе проекции субградиента и величиной шага  $h$ , характеризующего степень дискретизации задачи.

Ниже приведены результаты расчетов при следующих значениях расчетных параметров:  $h = 0.004$ ,  $M = 500$ ,  $\alpha = 10^{-4} \delta$ ,  $N = 15$ .

На рис. 1 и 3 сплошной линией показаны модельные восстанавливаемые управления, пунктирная линия — результат восстановления при  $\delta = 3$ , линия с точками — результат восстановления при  $\delta = 0.5$ . На рис. 2 и 4 показаны погрешности восстановления при  $\delta = 0.5$  (приводятся графики разности модельного управления и его реконструкции). На рисунках горизонтальная ось — ось времени, вертикальная ось — ось значений управления и погрешности восстановления соответственно.

В табл. 1 и 2 приведены результаты восстановления управления при варьировании параметра  $\delta$ , относительная погрешность указана в процентах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1976. 392 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems of ordinary differential equations: Dynamical Solutions. L.: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
5. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
6. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
7. **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
8. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. 304 с.
9. **Крутько П.Д.** Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 332 с.
10. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
11. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
12. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
13. **Агеев А.Л.** Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. № 4. С. 819–836.
14. **Васин В.В.** Регуляризация и дискретная аппроксимация некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Докл. РАН. 2001. Т. 376, № 1. С. 11–14.
15. **Васин В.В.** Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.
16. **Васин В.В.** Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 1. С. 64–77.
17. **Vasin V.V., Korotkii M.A.** Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2007. Vol. 15, № 8. P. 853–865.
18. **Васин В.В., Серезникова Т.И.** Об одном алгоритме решения уравнения Фредгольма — Стильтеса // Изв. вузов. Математика. 2001. № 4. С. 3–10.
19. **Васин В.В., Серезникова Т.И.** Двухэтапный метод аппроксимации негладких решений и восстановление зашумленного изображения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 126–135.

20. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 212 с.
21. **Leonov A.S.** Regularization of ill-posed problems in Sobolev space  $W_1^1$  // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2005. Vol. 13, № 6. P. 595–619.
22. **Леонов А.С.** Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22, № 3. С. 516–531.
23. **Леонов А.С.** Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 326 с.
24. **Giusti E.** Minimal surfaces and functions of bounded variations. Basel: Birkhauser, 1984. 239 p.
25. **Acar R., Vogel C.R.** Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems // Inverse Probl. 1994. Vol. 10. P. 1217–1229.
26. **Chavent G., Kunish K.** Regularization of linear least squares problems by total bounded variation control // Optimization and Calculus of Variation. 1997. Vol. 2. P. 359–376.
27. **Vogel C.R.** Computation methods for inverse problems. Philadelphia: SIAM, 2002. 183 p.
28. **Короткий М.А.** Восстановление управлений и параметров методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 2. С. 76–82.
29. **Короткий М.А.** Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 39–53.
30. **Короткий М.А.** Метод регуляризации Тихонова с негладкими стабилизаторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 132 с.
31. **Соболева Д.О.** Реконструкция управлений в параболических системах // Вестн. Бурятского гос. ун-та. Математика и информатика. 2010. Вып. 9. С. 59–67.
32. **Короткий А.И., Михайлова Д.О.** Восстановление управлений в параболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 211–227.
33. **Короткий А.И., Грибанова Е.И.** Восстановление управлений в гиперболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 17, № 1. С. 99–108.
34. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
35. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
36. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
37. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
38. **Короткий А.И.** Прямые и обратные задачи управляемых систем с распределенными параметрами: дис. ... докт. физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1993. 331 с.
39. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 824 с.
40. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
41. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
42. **Демьянов В.Ф., Васильев В.П.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
43. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
44. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 496 с.
45. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

Короткий Александр Илларионович

Поступила 27.04.2011

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Михайлова Дарья Олеговна

магистрант

Уральский федеральный университет

e-mail: darso@rambler.ru

УДК 517.397

## ПОЛНЫЕ ВАРИАЦИИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ<sup>1</sup>

А. С. Леонов

В пространстве функций двух переменных со свойством Харди — Краузе вводятся новые понятия полных вариаций высших порядков и банаховы пространства функций двух переменных с ограниченными высшими вариациями. Изучается связь этих пространств с пространствами Соболева  $W_1^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . В пространствах Соболева выделяется широкий класс интегральных функционалов, имеющих свойства слабой регуляризации и  $H$ -свойство. Доказывается, что использование этих функционалов в вариационной тихоновской схеме порождает при  $m \geq 3$  сходимость приближенных решений по полной вариации порядка  $m - 3$ . Результаты естественным образом переносятся на случай функций  $N$  переменных.

Ключевые слова: полные вариации высших порядков функций многих переменных, регуляризация некорректных задач.

A. S. Leonov. Higher-order total variations for functions of several variables and their application in the theory of ill-posed problems.

In the space of functions of two variables with Hardy–Krause property, new notions of higher-order total variations and Banach spaces of functions of two variables with bounded higher variations are introduced. The connection of these spaces with Sobolev spaces  $W_1^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , is studied. In Sobolev spaces, a wide class of integral functionals with the weak regularization properties and the  $H$ -property is isolated. It is proved that the application of these functionals in the Tikhonov variational scheme generates for  $m \geq 3$  the convergence of approximate solutions with respect to the total variation of order  $m - 3$ . The results are naturally extended to the case of functions of  $N$  variables.

Keywords: higher-order total variations for functions of several variables, regularization of ill-posed problems.

### Введение

Функции с ограниченной вариацией часто применяются при решении некорректно поставленных задач. Широко известны работы В. В. Васина и его школы (см. [1–6]), а также работы других авторов (например, [7–14]) по этой тематике. В связи с потребностями практики особую актуальность приобретают многомерные некорректно поставленные обратные задачи. Для их решения иногда приходится привлекать пространства функции нескольких переменных с ограниченной вариацией и конструировать регуляризующие алгоритмы, обеспечивающие адекватную сходимость приближений из этих пространств (см. [4; 6; 9; 10; 12–14]). В этой связи возникает проблема выбора типа вариации функции нескольких переменных. Дело в том, что известны различные подходы к конструкции понятия вариации функции в многомерном случае. Эти подходы породили вариации Витали, Арцела, Фреше, Тонелли, Хаана, Кронрода — Витушкина, Минлоса, Джусты и др. (см. обзоры в [15–17]). В работах [8; 9; 18] предложено другое понятие вариации функции нескольких переменных, которое позволяет перенести на  $N$ -мерный случай многие свойства функций одной переменной с ограниченной вариацией. Это понятие порождает банахово пространство, которое состоит из функций со свойством Харди — Краузе [19]. Оно оказывается плодотворным и для обобщения понятия вариаций высших порядков, введенного для функций одной переменной в статье [13]. Данная

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00040-а и 10-01-91150-ГФЕН-а), аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/11278), а также проектов ГК Рособразования П268, П943.

работа посвящена развитию понятия вариаций высших порядков для функций нескольких переменных и его приложениям к решению многомерных некорректных задач. Для компактности изложения мы ограничимся случаем функций двух действительных переменных, из рассмотрения которого очевидным образом следует обобщение на  $N$ -мерный случай.

### 1. Полная вариация функций двух переменных

Пусть  $B = B_{ac}^{bd} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  — основной брус в  $\mathbb{R}^2$ , в котором определена функция  $z = z(x, y)$ . Будем обозначать как  $B_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \alpha < x \leq \beta, \gamma < y \leq \delta\}$  двумерные подбрусы основного бруса. Если при этом  $\alpha = a$  или  $\gamma = c$ , то неравенства  $\alpha < x, \gamma < y$  заменяются здесь на  $\alpha \leq x, \gamma \leq y$ . Определим с помощью функции  $z(x, y)$  “квазиобъем”  $\sigma(B_{\alpha\gamma}^{\beta\delta})$  бруса  $B_{\alpha\gamma}^{\beta\delta}$  по правилу:  $\sigma(B_{\alpha\gamma}^{\beta\delta}) = z(\beta, \delta) - z(\beta, \gamma) - z(\alpha, \delta) + z(\alpha, \gamma)$ . Квазиобъем  $\sigma$  является аддитивной функцией брусов. Зададим допустимое разбиение  $\Pi$  основного бруса:  $\Pi = \{B_j\}_{j=1}^n$ , в котором подбрусы  $B_j$  не пересекаются и  $B = B_1 + \dots + B_n$ . Совокупность всех таких разбиений для всевозможных  $n$  обозначим как  $\mathcal{P}$ . Двумерной вариацией Витали функции  $z(x, y)$  в брус  $B$  называется величина (см. [8; 9; 15])

$$V_2(z, B) = \sup_{\Pi} \left\{ \sum_{j=1}^n |\sigma(B_j)| : \Pi = \{B_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{P} \right\}.$$

Введем обычные (одномерные) вариации  $V_1(z, B_a^b) = \bigvee_a^b [z(x, c)]$ ,  $V_1(z, B_c^d) = \bigvee_c^d [z(a, y)]$  следов функции  $z(x, y)$  на гранях  $B_a^b = [a, b] \times \{y = c\}$ ,  $B_c^d = \{x = a\} \times [c, d]$  бруса  $B$ . Тогда *полной вариацией* функции  $z(x, y)$  в брус  $B$  называется величина  $VH(z, B) = V_1(z, B_a^b) + V_1(z, B_c^d) + V_2(z, B)$ . В  $N$ -мерном случае это понятие определено в [8; 9].

Пространство  $\mathcal{VH}(B)$  функций  $z(x, y)$  с ограниченной полной вариацией можно снабдить нормой  $\|z\|_0 = |z(a, b)| + VH(z, B)$ . Полученное нормированное пространство является банаховым [8; 9; 18]. Оно состоит из функций класса Харди — Краузе [19]. Эти функции непрерывны в  $B$  всюду, кроме, быть может, точек разрыва, которые лежат на не более чем счетном множестве координатных линий.

Пространство  $\mathcal{V}_0(B) = \mathcal{VH}(B) \cap C(B)$  с нормой  $\|z\|_0$  также будет банаховым. Доказательство этого факта проводится по схеме, использованной ниже в более общем случае (см. разд. 2, теорема 2).

В дальнейшем мы будем использовать пространства Соболева  $W_1^m(B)$  функций двух переменных с нормой

$$\|z\|_{W_1^m} = \|z\|_{L_1(B)} + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \int_B \left| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right| dt, \quad t = (t_1, t_2) = (x, y).$$

В частности,

$$\begin{aligned} \|z\|_{W_1^2} &= \|z\|_{L_1(B)} + \int_B |z_x(x, y)| dx dy + \int_B |z_y(x, y)| dx dy \\ &+ \int_B |z_{xx}(x, y)| dx dy + 2 \int_B |z_{xy}(x, y)| dx dy + \int_B |z_{yy}(x, y)| dx dy. \end{aligned}$$

Ниже будем кратко обозначать  $\|z\|_{L_1(B)} = \|z\|_L$ . Укажем связь пространств  $W_1^2(B)$  и  $\mathcal{V}_0(B)$ .

**Теорема 1.** *Если  $z \in W_1^2(B) \cap C(B)$ , то  $z \in \mathcal{V}_0(B)$ , причем справедливы оценки  $V_2(z, B) \leq \|z_{xy}\|_L \leq \|z\|_{W_1^2}$ ,  $VH(z, B) \leq \gamma_0 \|z\|_{W_1^2}$ ,  $\gamma_0 = \text{const}$ .*

**Доказательство.** Прежде всего, заметим, что функция  $z(x, y)$  как элемент пространства  $W_1^2(B)$  обладает свойством абсолютной непрерывности по аргументу  $y$  при почти всех допустимых  $x$ . Обозначим множество таких  $x$  как  $E_x$ :  $E_x \subset [a, b]$ ,  $\text{mes}\{[a, b] \setminus E_x\} = 0$ . Аналогично,  $z(x, y)$  абсолютно непрерывна по  $x$  при  $y \in E_y$ , где  $E_y \subset [c, d]$ ,  $\text{mes}\{[c, d] \setminus E_y\} = 0$ .

Теперь зададим произвольные разбиения  $\{x_i\}_{i=1}^n$ ,  $\{y_j\}_{j=1}^m$  отрезков  $[a, b]$  и  $[c, d]$ :  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ,  $c = y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$  и будем сначала считать, что  $\{x_i\} \subset E_x$ . В результате получим специальное разбиение основного бруса  $\Pi = \{B_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n-1, m-1}$ , где  $B_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ . Справедлива выкладка

$$\begin{aligned} \omega(z, \Pi) &\equiv \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} |z(x_{i+1}, y_{j+1}) - z(x_{i+1}, y_j) - z(x_i, y_{j+1}) + z(x_i, y_j)| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \left| \int_{y_j}^{y_{j+1}} z_y(x_{i+1}, y) dy - \int_{y_j}^{y_{j+1}} z_y(x_i, y) dy \right| = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \left| \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left[ \int_{x_i}^{x_{i+1}} z_{xy}(x, y) dx \right] dy \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \left| \int_{B_{ij}} z_{xy}(x, y) dx dy \right| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \int_{B_{ij}} |z_{xy}(x, y)| dx dy = \int_B |z_{xy}(x, y)| dx dy \leq \|z\|_{W_1^2(B)}. \end{aligned}$$

В ней первое равенство получено из отмеченной абсолютной непрерывности функции  $z(x, y)$  по аргументу  $y$  при каждом  $x \in E_x$ . Второе равенство вытекает из абсолютной непрерывности частной производной  $z_y(x, y) \in W_1^1(B)$  по  $x$  при почти всех  $y \in [c, d]$  и из существования почти всюду в  $B$  у элемента  $z \in W_1^2(B)$  суммируемой частной производной  $z_{xy}(x, y)$ . Третье равенство следует из теоремы Фубини. Остальные соотношения очевидны. Итак, суммы  $\omega(z, \Pi)$  равномерно по  $\Pi$  ограничены числом  $\|z_{xy}\|_L$  при почти всех  $\{x_i\}$ . Но тогда в силу непрерывности функции  $z(x, y)$  они будут ограничены тем же числом и при произвольных  $\{x_i\} \subset [a, b]$ :  $\omega(z, \Pi) \leq \|z_{xy}\|_L \forall \Pi$ . Тогда из свойства  $V_2(z, B) = \sup_{\Pi} \omega(z, \Pi)$  вариации Витали [15] получается первое из доказываемых неравенств:  $V_2(z, B) \leq \|z_{xy}\|_L \leq \|z\|_{W_1^2(B)}$ .

Далее, из упомянутой в начале доказательства абсолютной непрерывности функции  $z(x, y)$  по аргументу  $x$  при почти всех фиксированных  $y \in [c, d]$  вытекает (см. [20]) существование конечной вариации  $\bigvee_a^b [z(x, y)]$ ,  $y \in E_y$ , и равенство  $\bigvee_a^b [z(x, y)] = \int_a^b |z_x(x, y)| dx$  при этих  $y$ . Тогда по теореме Фубини из суммируемости производной  $z_x(x, y) \in W_1^1(B)$  получается, что

$$\int_c^d \bigvee_a^b [z(x, y)] dy = \int_B |z_x(x, y)| dx dy. \quad (1.1)$$

Аналогично,

$$\int_a^b \bigvee_c^d [z(x, y)] dx = \int_B |z_y(x, y)| dx dy.$$

Это означает конечность вариации Тонелли функции  $z(x, y)$

$$VT(z, B) = \int_c^d \bigvee_a^b [z(x, y)] dy + \int_a^b \bigvee_c^d [z(x, y)] dx < \infty.$$

В [15] указано, что из конечности вариаций Тонелли и Витали непрерывной функции следует ее включение в класс Харди — Краузе и, значит, конечность вариации (по  $x$ )  $\bigvee_a^b [z(x, y)]$  для всех

$y \in [c, d]$  и вариации (по  $y$ )  $\bigvee_c^d [z(x, y)]$  для всех  $x \in [a, b]$  (см. также [19, с. 345]). В частности, конечны и вариации  $V_1(z, B_a^b) = \bigvee_a^b [z(x, c)]$ ,  $V_1(z, B_c^d) = \bigvee_c^d [z(a, y)]$ .

Теперь заметим, что из неравенства

$$|z(x_{i+1}, c) - z(x_i, c)| \leq |z(x_{i+1}, y) - z(x_i, y)| + |z(x_{i+1}, y) - z(x_i, y) - z(x_{i+1}, c) + z(x_i, c)|$$

следует, что

$$\bigvee_a^b [z(x, c)] \leq \bigvee_a^b [z(x, y)] + V_2(z, B)$$

для всех  $y$ . Отсюда с учетом равенства (1.1) получается

$$\begin{aligned} \int_c^d \bigvee_a^b [z(x, c)] dy &= (d - c) \bigvee_a^b [z(x, c)] \leq \int_c^d \left( \bigvee_a^b [z(x, y)] + V_2(z, B) \right) dy \\ &= \int_B |z_x(x, y)| dx dy + (d - c) V_2(z, B) \end{aligned}$$

и далее

$$V_1(z, B_a^b) = \bigvee_a^b [z(x, c)] \leq \frac{1}{d - c} \int_B |z_x(x, y)| dx dy + V_2(z, B).$$

Аналогично доказывается, что

$$V_1(z, B_c^d) = \bigvee_c^d [z(a, y)] \leq \frac{1}{b - a} \int_B |z_y(x, y)| dx dy + V_2(z, B).$$

Поэтому, взяв  $\gamma_0 = \max\left(\frac{1}{d - c}, \frac{1}{b - a}, 3\right)$ , получим

$$\begin{aligned} VH(z, B) &= V_1(z, B_a^b) + V_1(z, B_c^d) + V_2(z, B) \leq \frac{1}{d - c} \int_B |z_x(x, y)| dx dy + \frac{1}{b - a} \int_B |z_y(x, y)| dx dy \\ &+ 3V_2(z, B) \leq \gamma_0 \left[ \int_B (|z_x(x, y)| + |z_y(x, y)|) dx dy + \int_B |z_{xy}(x, y)| dx dy \right] \leq \gamma_0 \|z\|_{W_1^2(B)}. \quad \square \end{aligned}$$

## 2. Полные вариации высших порядков

**О п р е д е л е н и е 1.** Множество всех функций  $z(x, y)$  из пространства  $z \in C^m(B)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , для которых конечна норма

$$\|z\|_m = \|z\|_0 + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left\| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right\|_0, \quad t = (t_1, t_2) = (x, y),$$

назовем пространством  $\mathcal{V}_m(B)$ . Величину

$$\text{Var}_m(z) = VH(z, B) + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 VH\left(\frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}\right)$$

будем называть *полной вариацией  $m$ -го порядка* функции  $z(x, y) \in \mathcal{V}_m(B)$ .

Например, множество всех функций  $z(x, y)$  из пространства  $C^1(B)$ , для которых конечна норма  $\|z\|_1 = \|z\|_0 + \|z_x\|_0 + \|z_y\|_0$ , называется пространством  $\mathcal{V}_1(B)$ , а величина  $\text{Var}_1(z) = VH(z, B) + VH(z_x, B) + VH(z_y, B)$  — полной вариацией первого порядка функции  $z(x, y) \in \mathcal{V}_1(B)$ . Для единообразия будем обозначать  $\text{Var}_0(z) = VH(z, B)$ .

Отметим следующие вспомогательные факты. Из неравенства  $|z(x, y)| \leq |z(a, b)| + VH(z, B) \forall (x, y) \in B$  (см. [8; 18]) получается

**Предложение 1.** Для любой  $z(x, y) \in \mathcal{V}_m(B)$

$$\|z\|_C \leq \|z\|_0, \|z\|_{C^m} = \|z\|_C + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left\| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right\|_C \leq \|z\|_m. \quad (2.1)$$

**Предложение 2** [11]. Функционал  $VH(z, B)$  полунепрерывен снизу относительно  $P$ -сходимости в  $B$ : для любой последовательности  $\{z_n(x, y)\}$  такой, что  $VH(z_n, B) \leq M = \text{const}$ , и которая поточечно сходится в  $B$  к функции  $z_0(x, y)$ , верно неравенство  $\liminf_{n \rightarrow \infty} VH(z_n, B) \geq VH(z_0, B)$ .

**Теорема 2.** Пространство  $\mathcal{V}_m(B)$  полное.

**Доказательство.** Пусть  $\{z_n\}$  — произвольная фундаментальная последовательность в  $\mathcal{V}_m(B)$ , т.е. для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , что для любых  $n, p > N(\varepsilon)$  выполнено неравенство  $\|z_n - z_p\|_m < \varepsilon$ . Отсюда и из (2.1) получается неравенство  $\|z_n - z_p\|_{C^m} < \varepsilon$ , означающее фундаментальность последовательности в пространстве  $C^m(B)$ . Из полноты этого пространства следует сходимость  $z_p(x, y) \xrightarrow{C^m} z_0(x, y)$  при  $p \rightarrow \infty$ , т.е. сходимости

$$z_p \xrightarrow{C} z_0, \frac{\partial^k z_p}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \xrightarrow{C} \frac{\partial^k z_0}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \quad (k = 1, \dots, m; i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2).$$

Отсюда, используя свойство полунепрерывности снизу функционала  $VH(z, B)$  относительно  $P$ -сходимости (предложение 2), а значит, и равномерной сходимости функциональных последовательностей, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \liminf_{p \rightarrow \infty} \|z_n - z_p\|_m = \liminf_{p \rightarrow \infty} \left\{ \|z_n - z_p\|_0 + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left\| \frac{\partial^k (z_n - z_p)}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right\|_0 \right\} \\ &\geq \liminf_{p \rightarrow \infty} \{ |z_n(a, b) - z_p(a, b)| + VH(z_n - z_p, B) \} \\ &\quad + \liminf_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left| \frac{\partial^k z_n}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) - \frac{\partial^k z_p}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \right| \\ &+ \liminf_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 VH \left( \frac{\partial^k z_n}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} - \frac{\partial^k z_p}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right) \geq |z_n(a, b) - z_0(a, b)| \\ &\quad + VH(z_n - z_0, B) + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left| \frac{\partial^k z_n}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) - \frac{\partial^k z_0}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 VH \left( \frac{\partial^k z_n}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} - \frac{\partial^k z_0}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right) = \|z_n - z_0\|_m. \end{aligned}$$

Это означает, что  $\|z_n - z_0\|_m \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , и поэтому пространство  $\mathcal{V}_m(B)$  полное.  $\square$

**Теорема 3.** Если  $z \in W_1^{m+2}(B) \cap C^m(B)$ , то  $z \in \mathcal{V}_m(B)$ , причем справедливы неравенства  $\text{Var}_m(z) \leq \gamma_m \|z\|_{W_1^{m+2}}$ ,  $\gamma_m = \text{const}$ , и

$$\|z\|_m \leq \sum_{k=0}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \right| + \gamma_m \|z\|_{W_1^{m+2}}. \quad (2.2)$$

**Доказательство.** Как в теореме 1, можно проверить, заменяя  $z(x, y)$  на производные  $\frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}$ , что

$$V_2\left(\frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}\right) \leq \left\| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right\|_{W_1^2(B)}$$

и, далее, что

$$VH\left(\frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}, B\right) \leq \gamma_0 \left\| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right\|_{W_1^2(B)}$$

для всех  $k$ ,  $0 \leq k \leq m$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Var}_m(z) &= VH(z, B) + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 VH\left(\frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}, B\right) \\ &\leq \gamma_0 \|z\|_{W_1^2(B)} + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \gamma_0 \left\| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right\|_{W_1^2(B)} \leq \gamma_m \|z\|_{W_1^{m+2}(B)} \end{aligned}$$

с некоторой константой  $\gamma_m > 0$ . Аналогично получается и неравенство (2.2)

$$\begin{aligned} \|z\|_m &= \|z\|_0 + \sum_{k=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left\| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}} \right\|_0 \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \right| + \sum_{k=0}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 VH\left(\frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}, B\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \right| + \gamma_m \|z\|_{W_1^{m+2}}. \end{aligned}$$

Из него следует конечность нормы  $\|z\|_m$  для функций  $z \in W_1^{m+2}(B) \cap C^m(B)$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Все изложенное в данном разделе верно и в  $N$ -мерном случае, если заменить  $W_1^2$  на  $W_1^N$  и  $W_1^{m+2}$  на  $W_1^{m+N}$ .

### 3. Регуляризация некорректно поставленных обратных задач

Предположим, что  $Z(B)$  — пространство функций  $z = z(x, y)$ , определенных в  $B$ . Наделим  $Z(B)$  некоторой топологией секвенциальной сходимости  $\tau$ . Введем оператор  $A$  (в общем случае нелинейный), действующий из  $Z(B)$  в нормированное пространство  $U$ . Фиксируем элемент  $u \in U$  и зададим некоторое непустое множество  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \subset Z(B)$ . Рассмотрим на нем операторное уравнение

$$Az = u, \quad z \in \mathcal{D}. \quad (3.1)$$

Будем считать, что для этого  $u$  множество  $Z^* = \arg \inf \{ \|Az - u\|_U : z \in \mathcal{D} \}$  квазирешений уравнения (3.1) не пусто. Для многих уравнений вида (3.1) оно может содержать более одного элемента. В этом случае для нахождения (отбора) специальных квазирешений уравнения (3.1)

будем использовать вспомогательный функционал  $\Omega[z]$ , определенный на  $\mathcal{D}$ . Будем отбирать с его помощью  $\Omega$ -оптимальные квазирешения уравнения (3.1), т. е. такие функции  $\bar{z} = \bar{z}(x, y) \in Z^*$ , для которых

$$\Omega[\bar{z}] = \inf\{\Omega[z]: z \in Z^*\} \equiv \bar{\Omega}. \quad (3.2)$$

Их множество обозначим как  $\bar{Z}$ . Введем также  $\mu = \|A\bar{Z} - u\|_U$ . Далее, будем предполагать, что вместо точных данных  $\{A, u\}$  уравнения (3.1) известны некоторые их приближения  $\{A_h, u_\delta\}$  с точностями  $\eta = (h, \delta)$ . Считается, что  $\|u_\delta - u\| \rightarrow 0$ ,  $\|A_h z - Az\| \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow 0$  для любого  $z \in \mathcal{D}$ . Требуется по набору величин  $\{A_h, u_\delta, h, \delta\}$  построить  $\tau$ -устойчивое приближенное решение задачи (3.1), (3.2), т. е. такую функцию  $z_\eta = z_\eta(x, y) \in \mathcal{D}$ , для которой  $z_\eta \xrightarrow{\tau} \bar{Z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

В такой постановке удобно рассматривать многие прикладные обратные задачи с приближенными данными и особенно некорректно поставленные задачи. Решение задач этого типа можно провести с помощью вариационных регуляризующих алгоритмов (см. [1; 7; 21–23] и др.). В частности, при использовании *вариационной тихоновской схемы регуляризации* для решения задачи (3.1), (3.2) в качестве приближения  $z_\eta(x, y)$  берется какая-либо функция  $z^{\alpha\eta}(x, y) \in \mathcal{D}$ , которая реализует глобальный минимум сглаживающего функционала

$$M^{\alpha\eta}[z] = \alpha_\eta \Omega[z] + \|A_h z - u_\delta\|_U^2 \quad (3.3)$$

на множестве  $\mathcal{D}$ . Здесь  $\alpha_\eta$  — параметр регуляризации, выбранный специальным образом по данным  $\{A_h, u_\delta, h, \delta\}$ . Способы выбора этого параметра подробно описаны в литературе (см., например, [7; 21–23]). Выбор проводится с таким расчетом, чтобы были выполнены условия регулярности

$$\overline{\lim}_{\eta \rightarrow 0} \Omega[z^{\alpha\eta}] \leq \bar{\Omega}, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \|Az^{\alpha\eta} - u\|_U = \mu. \quad (3.4)$$

При определенных предположениях о величинах  $\Omega[z]$ ,  $A$ ,  $A_h$  получаемые таким образом приближения  $z_\eta = z^{\alpha\eta}$   $\tau$ -сходятся к  $\bar{Z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

Предположения относительно функционала  $\Omega[z]$  в постановке задачи должны обеспечивать его *регуляризующие свойства* [7]. Последние гарантируют существование  $\Omega$ -оптимальных квазирешений, т. е. разрешимость задачи (3.2), разрешимость задачи минимизации функционала (3.3) и  $\tau$ -устойчивость получаемых приближенных решений  $z^{\alpha\eta}(x, y)$ . В общей форме регуляризующие свойства указаны и исследованы с разных позиций рядом авторов (см., например, обзоры в [7; 21–23]). Так, в [7] даны следующие достаточные условия на функционал  $\Omega[z]$  для регуляризации по вариационной тихоновской схеме в топологических пространствах: **A1)**  $\Omega[z]$   $\tau$ -секвенциально полунепрерывен снизу на  $\mathcal{D}$ ; **A2)** непустые множества  $\Omega_C = \{z \in \mathcal{D}: \Omega[z] \leq C\}$   $\tau$ -секвенциально компактны.

Как показано в [7], эти условия и условия регулярности (3.4) в предположении  $\tau$ -секвенциальной полунепрерывности снизу на множестве  $\mathcal{D}$  функционалов невязок  $N(z) = \|Az - u\|_U$ ,  $N_h(z) = \|A_h z - u\|_U$  обеспечивают для приближений, полученных в тихоновской схеме, сходимость функционалов  $\Omega[z^{\alpha\eta}] \rightarrow \bar{\Omega}$  и сходимость по топологии  $z^{\alpha\eta} \xrightarrow{\tau} \bar{Z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ .

Все сказанное справедливо и для важного частного случая рассмотренной общей постановки задачи, в котором  $Z(B)$  — банахово пространство, а  $\tau$  есть топология слабой сходимости. Применение в этом случае тихоновского регуляризующего алгоритма при достаточных условиях “слабой регуляризации” — (A1)  $\Omega[z]$  слабо полунепрерывен снизу на  $\mathcal{D}$ ; (A2) непустые множества  $\Omega_C = \{z \in \mathcal{D}: \Omega[z] \leq C\}$  слабо секвенциально замкнуты и слабо компактны; — ведет к сходимости  $\Omega[z^{\alpha\eta}] \rightarrow \bar{\Omega}$  и к слабой сходимости приближений  $z^{\alpha\eta} \rightharpoonup \bar{Z}$ , если функционалы невязок  $N(z)$ ,  $N_h(z)$  слабо полунепрерывны снизу на  $\mathcal{D}$ . С прикладной точки зрения слабая сходимость приближенных решений часто оказывается малоинтересной. Более предпочтительной была бы сильная сходимость  $z^{\alpha\eta} \rightarrow \bar{Z}$  в банаховом пространстве  $Z(B)$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Она обеспечивается, если в дополнении к свойствам (A1) и (A2) функционал  $\Omega[z]$  обладает так называемым *H*-свойством.

**О п р е д е л е н и е 2.** Функционал  $\Omega[z]$  имеет на множестве  $\mathcal{D}$  банахова пространства  $Z(B)$   $H$ -свойство, если любая последовательность  $\{z_n\} \subset \mathcal{D}$ , слабо сходящаяся к некоторому пределу  $z_0 \in \mathcal{D}$ :  $z_n \rightharpoonup z_0$  и обладающая свойством сходимости функционалов:  $\Omega[z_n] \rightarrow \Omega[z_0]$ , сильно сходится к  $z_0$  в  $Z(B)$ :  $z_n \rightarrow z_0$ .

Проиллюстрируем определение хорошо исследованным примером. Пусть  $Z(B) = \mathcal{D} = L_p(B)$ ,  $p > 1$ , и  $\Omega[z] = \|z\|_{L_p(B)}^p$ . Можно убедиться, что для такого  $\Omega[z]$  выполнены условия (A1), (A2). Применяя далее тихоновскую вариационную схему решения задачи (3.1), (3.2) с  $\Omega[z] = \|z\|_{L_p(B)}^p$  и используя в ней выбор  $\alpha_\eta$ , обеспечивающий условия регулярности, получим сходимость норм  $\|z^{\alpha_\eta}\|_{L_p} \rightarrow \|\bar{z}\|_{L_p(B)}$  и слабую сходимость приближений  $z^{\alpha_\eta} \rightharpoonup \bar{z}$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Но функционал  $\|\cdot\|_{L_p(B)}$  в пространстве  $L_p(B)$  с  $p > 1$  имеет  $H$ -свойство [21]. Значит, из этих сходимостей следует сильная сходимость приближенных решений в  $L_p(B)$  к  $\bar{z}$ .

Использовать функционал нормы как регуляризатор для получения сильной сходимости можно не всегда. Например, в пространстве  $L_1(B)$  норма, как легко убедиться на примерах, не имеет  $H$ -свойства и свойства (A2). Это связано с тем, что банахово пространство  $L_1(B)$  не является рефлексивным. Поэтому для сильной регуляризации в этом пространстве необходимо применять другие функционалы  $\Omega$ . То же самое можно сказать и о регуляризации в нерефлексивном пространстве функций ограниченной вариации  $V[a, b]$  с нормой  $\|z\|_V = |z(a)| + \bigvee_a^b(z)$  и о регуляризации в пространствах  $\mathcal{V}_m(B)$ .

Вопрос о достаточных условиях на функционал  $\Omega[z]$ , которые не только гарантируют выполнение свойств (A1) и (A2) в конкретных банаховых пространствах  $Z$ , но и обеспечивают там  $H$ -свойство функционала  $\Omega[z]$ , решен в работах [24; 25] для пространств  $Z = L_p(T)$ ,  $p \geq 1$ ,  $W_p^l(T)$ ,  $p > 1$ ,  $l \geq 1$ , и  $W_1^1(T)$ . Здесь  $T$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^N$ .

Ниже будет рассматриваться вопрос о виде регуляризирующих функционалов, порождающих сходимость приближенных решений по норме пространства  $\mathcal{V}_m(B)$ , а также сходимость “по вариации”  $\text{Var}_m$ . Сходимость по норме пространства  $\mathcal{V}_m(B)$  интересна, например, тем, что она автоматически в силу (2.1) обеспечивает сходимость приближений к точному решению рассматриваемой задачи в пространстве  $C^m(B)$ , т. е. равномерную сходимость не только самих приближенных решений, но и их производных. Однако использовать пространства  $\mathcal{V}_m(B)$  в качестве  $Z(B)$  для получения сходимости по норме нельзя: эти пространства несепарабельны, так как содержат одномерные несепарабельные подпространства  $V\{[a, b] \times y\}$  и  $V\{x \times [c, d]\}$  с фиксированными допустимыми  $x, y$ . А известно [26], что в несепарабельных пространствах  $Z(B)$  задача типа (3.1) в общем случае не регуляризуема. Однако сходимость по норме в  $\mathcal{V}_m(B)$  (и по вариации  $\text{Var}_m$ ) можно все же получить в сепарабельных подпространствах  $Z(B)$  пространства  $\mathcal{V}_m(B)$ . Весь вопрос в том, какое конкретное подпространство для этого взять и какой выбрать регуляризирующий функционал  $\Omega[z]$ . Например, можно убедиться, что адекватным сепарабельным подпространством является  $W_1^{m+2}(B) \cap C^m(B)$  с нормой  $\|z\| = \|z\|_{C^m(B)} + \|z\|_{W_1^{m+2}(B)}$ . В нем сильная сходимость последовательности функций порождает ее сходимость по вариации. Действительно, для  $\{z_n(x)\} \subset W_1^{m+2}(B) \cap C^m(B)$  из сходимости  $z_n(x) \xrightarrow{W_1^{m+2} \cap C^m} \bar{z}(x)$  по теореме 3 следует, что

$$\text{Var}_m(z_n - \bar{z}) \leq \gamma_m \|z_n - \bar{z}\|_{W_1^{m+2}(B)} \rightarrow 0 \implies \text{Var}_m(z_n - \bar{z}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

При этом, как оказывается (раздел 4), в пространствах Соболева  $W_1^{m+2}(B)$  существует широкий класс регуляризирующих функционалов  $\Omega$ , имеющих свойства (A1), (A2) и  $H$ -свойство. Тогда в указанной выше вариационной тихоновской схеме, использующей эти  $\Omega$ , гарантируется сильная регуляризация рассматриваемой некорректной задачи в пространстве  $W_1^{m+2}(B)$ . Если еще обеспечивается и сходимость приближений в  $C^m(B)$ , то при дополнительном предположении о точном решении  $\bar{z} \in W_1^{m+2}(B) \cap C^m(B)$ , сходимость приближенных решений по вариации получается по схеме, показанной в (3.5).

Возможна и несколько другая методика получения сходимости по вариациям высших порядков, также основанная на использовании регуляризаторов в  $W_1^m(B)$ . Она изложена в разд. 5.

#### 4. Регуляризирующие функционалы в пространстве $W_1^m$

Обозначим  $\nu = 2^{m+1} - 2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\mathbf{L}_1(B) = L_1(B) \times \dots \times L_1(B)$  — прямое произведение  $(\nu + 1)$ -го экземпляра пространства  $L_1(B)$ , а  $v(x, y) = (v_0(x, y), v_1(x, y), \dots, v_\nu(x, y))$  — элемент банахова пространства  $\mathbf{L}_1(B)$  с нормой  $\|v\|_{\mathbf{L}} = \sum_{k=0}^{\nu} \|v_k\|_L$ . Введем вектор-функцию

$$D_\nu z(x, y) = (z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy}, \dots, z_{y^m}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{\nu+1},$$

состоящую из всевозможных (обобщенных) частных производных функции  $z(x, y)$  до  $m$ -го порядка включительно. Входящие сюда производные будем также обозначать как  $(D_\nu z)_k$ ,  $k = \overline{0, \nu}$ . Если  $z(x, y) \in W_1^m(B)$ , то справедливы включение  $D_\nu z(x) \in \mathbf{L}_1(B)$  и равенство  $\|z\|_{W_1^m} = \|D_\nu z(x, y)\|_{\mathbf{L}}$ .

Предположим, что функция  $f(u) = f(u_0, u_1, \dots, u_\nu)$  непрерывна, выпукла и ограничена снизу в области  $U_0 = \{u \in \mathbb{R}^{\nu+1} : u_0 \geq 0\}$ :  $f(u) \geq f_0 = \text{const} \forall u \in U_0$ . Введем функционал

$$\omega[v] = \iint_B f[v(x, y)] dx dy = \iint_B f[v_0(x, y), v_1(x, y), \dots, v_\nu(x, y)] dx dy, \quad (4.1)$$

определенный на множестве  $\mathcal{W}_0 = \{v \in \mathbf{L}_1(B) : v_0(x) \geq 0; \omega[v] < \infty\}$ . Здесь и далее неравенства для функций, подобные  $v_0(x) \geq 0$ , полагаются выполненными почти всюду на  $B$ .

В дальнейшем будет использоваться следующее дополнительное свойство производящей функции  $f(u)$ .

**О п р е д е л е н и е 3.** Мы будем говорить, что  $f(u)$  обладает *VP-свойством* (свойством Валле Пуссена), если существует четная и непрерывная в  $\mathbb{R}$  функция  $\Phi_0(t)$  такая, что  $\Phi_0(t)/t \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$  и что  $f(u_0, u_1, \dots, u_\nu) - f_0 \geq |\Phi_0(u_k)|$  в  $U_0$  для всех  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots, \nu$ .

Из результатов работы [24] получаются следующие свойства вспомогательных функционалов типа (4.1).

**Лемма 1.** Пусть производящая функция  $f(u)$  функционала (4.1) ограничена снизу, непрерывна, выпукла и имеет *VP-свойство* в области  $U_0$ . Тогда функционал (4.1) слабо непрерывен снизу на слабо секвенциально замкнутом множестве  $\mathcal{W}_0$  пространства  $\mathbf{L}_1(B)$ , а непустые множества  $M_C = \{v \in \mathcal{W}_0 : \omega[v] \leq C\}$  слабо секвенциально замкнуты и слабо компактны в  $\mathbf{L}_1(B)$ .

В качестве комментария заметим, что слабая компактность множеств  $M_C$  получается из порождаемого *VP-свойством* очевидного неравенства

$$\omega[v] - f_0 \cdot \text{mes}(B) \geq \|\Phi_0(v_k(x))\|_L, \quad k = 0, 1, \dots, \nu,$$

и из критерия Валле Пуссена слабой компактности множеств пространства  $L_1(B)$  (см. [27]).

Из леммы 1 следует, что функционал (4.1) имеет свойства (A1), (A2) слабой регуляризации в пространстве  $\mathbf{L}_1(B)$ .

По аналогии с определением 2 вводится понятие *H-свойства* функционала  $\omega[v]$  на его области определения  $\mathcal{W}_0 \subset \mathbf{L}_1(B)$ . При этом из [24] следует

**Лемма 2.** Предположим, что функция  $f(u)$  дважды дифференцируема на множестве  $U_0$ . Пусть, кроме того, квадратичная форма ее второго дифференциала строго положительна в следующем смысле:

$$\sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\nu} f''_{u_k u_l}(u) \xi_k \xi_l \geq \beta(u) \sum_{k=0}^{\nu} \xi_k^2 \quad \forall u \in U_0; \forall \xi \in \mathbb{R}^{\nu+1}, \quad (4.2)$$

где  $\beta(u) = \gamma_1 [\gamma_2 + \sum_{k=0}^{\nu} |u_k|^{\rho}]^{-1}$ , а  $\gamma_1 > 0$ ,  $\gamma_2 > 0$  и  $\rho$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$  — постоянные. Тогда функционал (4.1) имеет на множестве  $\mathcal{W}_0$  пространства  $\mathbf{L}_1(B)$   $H$ -свойство.

Эта лемма остается верной, если в ее условиях заменить множество  $U_0$  на множество  $U(\varepsilon_0) = \{u \in \mathbb{R}^{\nu+1} : u_0 \geq \varepsilon_0\}$ , где  $\varepsilon_0 > 0$  фиксировано.

Функционал (4.1) порождает интегральный функционал в пространстве  $W_1^m(B)$

$$\Omega[z] = \omega[D_{\nu}z] = \iint_B f[D_{\nu}z(x, y)] dx dy = \iint_B f[z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy}, \dots, z_{y^m}] dx dy \quad (4.3)$$

с областью определения  $\mathcal{D} = \{z(x, y) \in W_1^m(B) : z(x, y) \geq 0, \Omega[z] < \infty\}$ . Для исследования функционалов такого вида потребуются следующие определения.

**О п р е д е л е н и е 4.** Последовательность  $\{z_n\} \subset W_1^m(B)$   $WL$ -слабо сходится к элементу  $z_0 \in W_1^m(B)$  ( $z_n \xrightarrow{WL} z_0$ ), если соответствующая последовательность

$$\{D_{\nu}z_n\} = \{(z_n, (z_n)_x, (z_n)_y, (z_n)_{xx}, (z_n)_{xy}, (z_n)_{yx}, (z_n)_{yy}, \dots, (z_n)_{y^m})\} \subset \mathbf{L}_1(B)$$

слабо сходится в  $\mathbf{L}_1(B)$  к элементу

$$D_{\nu}z_0 = (z_0, (z_0)_x, (z_0)_y, (z_0)_{xx}, (z_0)_{xy}, (z_0)_{yx}, (z_0)_{yy}, \dots, (z_0)_{y^m}) \in \mathbf{L}_1(B),$$

т. е.  $D_{\nu}z_n \xrightarrow{L} D_{\nu}z_0$ .

Отметим, что  $WL$ -слабая сходимость — это сужение слабой сходимости в нерефлексивном банаховом пространстве  $W_1^m(B)$ . Она рассматривается лишь на специальном множестве линейных непрерывных функционалов из сопряженного пространства  $(W_1^m(B))^*$ . Однако в отличие от слабой сходимости в  $W_1^m(B)$  для  $WL$ -слабой сходимости можно указать удобные для использования условия  $WL$ -слабой компактности некоторых множеств.

**О п р е д е л е н и е 5.** Функционал  $\Omega[z]$  имеет на множестве  $\mathcal{D}$  пространства  $W_1^m(B)$   $H$ -свойство относительно  $WL$ -слабой сходимости, если любая последовательность  $\{z_n\} \subset \mathcal{D}$ ,  $WL$ -слабо сходящаяся к некоторому элементу  $z_0 \in \mathcal{D}$  и обладающая свойством сходимости функционалов  $\Omega[z_n] \rightarrow \Omega[z_0]$ , сильно сходится к  $z_0$  в пространстве  $W_1^m(B)$ .

Из этого определения и определения 2, примененного к пространству  $W_1^m(B)$ , ясно, что из  $H$ -свойства относительно  $WL$ -слабой сходимости вытекает  $H$ -свойство относительно слабой сходимости в  $W_1^m(B)$ .

Поэтому мы будем исследовать регуляризующие свойства интегральных функционалов (3.3) в пространстве  $W_1^m(B)$  относительно  $WL$ -слабой сходимости.

**Теорема 4.** Функционалы вида (4.3) с ограниченной снизу, непрерывной и выпуклой в области  $U_0$  производящей функцией, имеющей  $VP$ -свойство, обладают свойствами  $WL$ -слабой регуляризации (A1) и (A2).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Свойство (A1), т. е.  $WL$ -слабая полунепрерывность снизу функционала (4.3) на его области определения  $\mathcal{D}$ , следует из слабой полунепрерывности снизу вспомогательного функционала (4.1) (лемма 1) и определения 4  $WL$ -слабой сходимости по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \forall \{z_n\} \subset W_1^m(B) : z_n \xrightarrow{WL} z_0 \in \mathcal{D} &\implies v_n \equiv D_{\nu}z_n \xrightarrow{L} D_{\nu}z_0 \equiv v_0 \implies \liminf_{n \rightarrow \infty} \omega(v_n) \geq \omega(v_0) \\ &\sim \liminf_{n \rightarrow \infty} \omega(D_{\nu}z_n) \geq \omega(D_{\nu}z_0) \sim \liminf_{n \rightarrow \infty} \Omega[z_n] \geq \Omega[z_0]. \end{aligned}$$

Обратимся к проверке свойства (A2).

$WL$ -слабая секвенциальная замкнутость множеств  $\Omega_C = \{z \in \mathcal{D}: \Omega(z) \leq C\}$  вытекает из доказанной  $WL$ -слабой полунепрерывности снизу функционала  $\Omega[z]$ . Чтобы доказать  $WL$ -слабую компактность этих множеств, заметим, что справедливо вложение:  $\Omega_C = \{z \in \mathcal{D}: \Omega(z) \leq C\} = \{D_\nu z \in \mathcal{W}_0: \omega(D_\nu z) \leq C\} \subset M_C$ . Поэтому множество  $\Omega_C$  как подмножество специальных элементов вида  $v = D_\nu z$  из множества  $M_C$  слабо компактно в  $\mathbf{L}_1[a, b]$  (лемма 1). Значит, для любой последовательности  $\{z_n\} \subset \Omega_C$  из соответствующей ей последовательности  $\{w_n\} = \{D_\nu z_n\} \subset M_C$  можно выбрать подпоследовательность  $\{D_\nu z_{n_l}\}$ , которая слабо сходится в  $\mathbf{L}_1(B)$  к некоторому элементу  $w = (v_0, v_1, \dots, v_\nu) \in \mathbf{L}_1(B)$ . Если обозначить для простоты  $z_{n_l} = z_l$ , это означает слабую сходимостъ частных производных  $(D_\nu z_l)_k \xrightarrow{L} v_k$  для каждого  $k = 0, 1, \dots, \nu$  и, в частности,  $z_l \xrightarrow{L} v_0$ .

Рассмотрим последнюю слабую сходимостъ для линейных и ограниченных в  $L_1(B)$  функционалов  $\langle z, h \rangle$ , порождаемых бесконечно дифференцируемыми и финитными в  $B$  функциями  $h(x, y)$ . Тогда из нее получаются следующие сходимости для (обобщенных) производных  $(D_\nu z_l)_k$  как элементов из  $L_1[a, b]$ :  $\langle (D_\nu z_l)_k, h \rangle \rightarrow \langle (D_\nu v_0)_k, h \rangle$ ,  $k = 1, \dots, \nu$  [28]. Поэтому последовательность  $\{w_l\} = \{D_\nu z_l\} = \{(z_l, (D_\nu z_l)_1, \dots, (D_\nu z_l)_\nu)\}$  слабо сходится к  $w_0 = D_\nu v_0 = (v_0, (D_\nu v_0)_1, \dots, (D_\nu v_0)_\nu) \in \mathcal{W}_0$  на множестве линейных и ограниченных в  $\mathbf{L}_1(B)$  функционалов, порождаемых бесконечно дифференцируемыми финитными функциями. Но тогда в силу единственности слабого предела в банаховом пространстве  $\mathbf{L}_1(B)$  должно выполняться равенство  $w = w_0$ , т. е.  $\{w_l\}$  слабо сходится к  $w_0$  в  $\mathbf{L}_1(B)$ :

$$w_l = \{(z_l, (D_\nu z_l)_1, \dots, (D_\nu z_l)_\nu)\} \rightharpoonup (v_0, (D_\nu v_0)_1, \dots, (D_\nu v_0)_\nu) = w_0.$$

Это по определению означает сходимостъ  $z_l \xrightarrow{WL} w_0$ , причем  $w_0 \in \Omega_C$  в силу  $WL$ -слабой секвенциальной замкнутости множеств  $\Omega_C$ .  $WL$ -слабая компактность множеств  $\Omega_C$  доказана.

**Теорема 5.** Пусть производящая функция  $f(u)$  дважды дифференцируема на множестве  $U_0$  и для нее выполнено условие (4.2). Тогда функционал (4.3) имеет на своей области определения  $\mathcal{D} \subset W_1^m(B)$   $H$ -свойство относительно  $WL$ -слабой сходимости.

**Доказательство.** Возьмем произвольную последовательность  $\{z_n\} \subset \mathcal{D}$  такую, что  $z_n \xrightarrow{WL} z_0 \in \mathcal{D}$  и  $\Omega[z_n] \rightarrow \Omega[z_0]$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это означает, что для последовательности  $\{w_n\} = \{D_\nu z_n\} \subset \mathcal{W}_0$  и элемента  $w_0 = D_\nu z_0 \in \mathcal{W}_0$  справедливы сходимости:  $w_n = D_\nu z_n \xrightarrow{L} D_\nu z_0 = w_0$ ,  $\omega[w_n] = \Omega[z_n] \rightarrow \Omega[z_0] = \omega[w_0]$ . Так как выполнены условия леммы 2, то функционал  $\omega$  имеет на множестве  $\mathcal{W}_0$  пространства  $\mathbf{L}_1(B)$   $H$ -свойство, из определения которого получим, что  $w_n \xrightarrow{L} w_0$ , т. е.  $\|z_n - z_0\|_{W_1^m} = \sum_{k=0}^\nu \|(D_\nu z_n)_k - (D_\nu z_0)_k\|_{\mathbf{L}} = \|w_n - w_0\|_{\mathbf{L}} \rightarrow 0$ . Итак,  $z_n$  сильно сходится в  $W_1^m$  к  $z_0$ , и это доказывает  $H$ -свойство функционала (4.3) относительно  $WL$ -слабой сходимости.  $\square$

Суммируя приведенные результаты, можно утверждать следующее. Если производящая функция  $f(u)$  ограничена снизу и дважды дифференцируема на множестве  $U_0$ , для нее выполнено неравенство (4.2) и она имеет  $VP$ -свойство, то теоремы 4, 5 обеспечивают свойства (A1), (A2) и  $H$ -свойство функционала  $\Omega$  относительно  $WL$ -слабой сходимости. Тогда согласно сказанному в разд. 3 это гарантирует сильную сходимостъ в  $W_1^m(B)$  приближенных решений, полученных по вариационной тихоновской схеме регуляризации задачи (3.1), (3.2). То же самое справедливо, если в условиях теорем 4, 5 заменить  $U_0$  на множество  $U(\varepsilon_0)$ .

Приведем пример регуляризующего функционала в  $W_1^m(B)$ , который, как можно проверить, удовлетворяет условиям теорем 4, 5:

$$\Omega_1[z(x)] = \iint_B \left\{ z(x, y) \ln[z(x, y)] + \sum_{k=1}^\nu p_k |(D_\nu z(x, y))_k| \ln[1 + |(D_\nu z(x, y))_k|] \right\} dx, \quad (4.4)$$

$$p_k = \text{const} > 0, \quad z(x, y) \in \mathcal{D}_1 = \{z(x, y) \in W_1^m(B): z(x, y) \geq \varepsilon_0, \Omega_1[z(x, y)] < \infty\}.$$

Здесь  $\varepsilon_0 > 0$  — некоторая константа, определяемая спецификой решаемой задачи. При  $p_k = 0$ ,  $k = \overline{1, \nu}$  функционал (4.4) хорошо изучен, используется в широко известном методе максимальной энтропии и обеспечивает сильную регуляризацию в пространстве  $L_1(B)$ . Применение функционала в виде (4.4) в схеме тихоновской регуляризации можно трактовать как некоторое обобщение метода максимальной энтропии на случай пространства  $W_1^m(B)$ .

## 5. Сходимость приближенных решений по вариациям

В этом разделе будем считать, что задача (3.1) имеет единственное решение (или квазирешение)  $\bar{z}(x)$  в рассматриваемом пространстве  $Z(B) = W_1^m(B)$  ( $m \geq 3$ ). Тогда регуляризующие функционалы вида (4.3) с производящими функциями, подчиненными условиям теорем 4, 5 (например, функционал (4.4)), обеспечивают при использовании вариационной тихоновской регуляризации сильную сходимость приближенных решений  $z^{\alpha_\eta}(x)$  в пространстве  $W_1^m(B)$  к  $\bar{z}(x)$ . Это гарантирует сходимость указанных приближений к  $\bar{z}(x)$  по полной вариации порядка  $m-3$ . Действительно, при  $m \geq 3$  по теоремам вложения [29]  $\bar{z}(x, y)$ ,  $z^{\alpha_\eta}(x, y) \in C^{m-3}(B)$ , и поэтому из теоремы 3 следует

$$\text{Var}_{m-3}(z^{\alpha_\eta} - \bar{z}) \leq \gamma_{m-1} \|z^{\alpha_\eta} - \bar{z}\|_{W_1^{m-1}} \leq \gamma_{m-1} \|z^{\alpha_\eta} - \bar{z}\|_{W_1^m} \rightarrow 0, \quad \eta = (h, \delta) \rightarrow 0.$$

Интерес представляет также сходимость регуляризованных приближений по норме пространства  $\mathcal{V}_{m-3}[a, b]$ . Для получения такой сходимости используется регуляризующий функционал

$$\Omega[z] = |z(a, b)| + \sum_{k=1}^{m-3} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left| \frac{\partial^k z}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \right| + \Omega_0[z], \quad (5.1)$$

где  $\Omega_0[z]$  — функционал вида (4.3) с областью определения  $\mathcal{D}_0 \subset W_1^m(B)$ . Если ввести число  $\sigma = 2^{m-2} - 2$ , то, как и выше для числа  $\nu$ , можно ввести вектор из частных производных  $D_\sigma z(x, y) = (z, (D_\sigma z)_1, \dots, (D_\sigma z)_\sigma)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^{\sigma+1}$ . Тогда функционал (5.1) можно записать в форме

$$\Omega[z] = \sum_{k=0}^{\sigma} |(D_\sigma z)_k(a, b)| + \Omega_0[z].$$

**Теорема 6.** *Предположим, что функционал  $\Omega_0[z]$  удовлетворяет условиям теорем 4, 5. Если для приближенных решений  $z^{\alpha_\eta}(x, y) \in \mathcal{D}_0$  задачи (3.1), полученных по вариационной тихоновской схеме с использованием функционала  $\Omega[z]$  вида (5.1), выполнены условия регулярности (3.4), то*

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \|z^{\alpha_\eta} - \bar{z}\|_{m-3} = 0, \quad z_n(a, b) \rightarrow z_0(a, b), \quad \frac{\partial^k z_n}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \rightarrow \frac{\partial^k \bar{z}}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b)$$

$$(k = \overline{1, m-3}; i_1, i_2, \dots, i_k = \overline{1, 2}).$$

**Доказательство.** Зададим в пространстве  $W_1^m(B)$  топологию секвенциальной сходимости  $\tau$  так, что  $\tau$ -сходимость  $z_n \xrightarrow{\tau} z_0$  соответствует сходимостям  $z_n(x) \xrightarrow{WL} z_0(x)$ ,  $(D_\sigma z_n)_k(a, b) \rightarrow (D_\sigma z_0)_k(a, b)$  для  $k = \overline{0, \sigma}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Проверим условия (A1) и (A2) для функционала  $\Omega[z]$  при такой топологии. Условие (A1) следует из так определенной  $\tau$ -сходимости и свойства  $WL$ -слабой полунепрерывности снизу функционала  $\Omega_0[z]$  на множестве  $\mathcal{D}_0$ : для любого  $z_0 \in \mathcal{D}_0$  и всякой последовательности  $\{z_n\} \subset \mathcal{D}_0$ :  $z_n \xrightarrow{\tau} z_0$  справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega[z_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\sigma} |(D_\sigma z_n)_k(a, b)| + \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_0[z_n] \geq \sum_{k=0}^{\sigma} |(D_\sigma z_0)_k(a, b)| + \Omega_0[z_0] = \Omega[z_0].$$

Установим свойство (A2). Возьмем непустое множество  $\Omega_C = \{z \in \mathcal{D}_0 : \Omega[z] \leq C\}$ . Тогда для его элементов  $z(x)$  верны неравенства  $\Omega_0[z] \leq C$ ,  $|z(a)| \leq C$ . Так как для  $\Omega_0[z]$  выполнено условие (A2) (теорема 4), то из множества  $\Omega_C$  можно выбрать последовательность  $\{z_n\}$  такую, что  $z_n \xrightarrow{WL} z_0 \in \mathcal{D}_0$ . По определению  $WL$ -слабой сходимости тогда получим:  $D_\nu z_n \xrightarrow{L} D_\nu z_0$ , т. е.  $(D_\nu z_n)_k \xrightarrow{L} (D_\nu z_0)_k$  для  $k = 0, 1, \dots, \nu$ . Эти соотношения согласно свойству слабой сходимости в пространстве  $L_1[a, b]$  влекут за собой неравенства

$$\|(D_\nu z_n)_k\|_L \leq C_0 = \text{const} \Rightarrow \|z_n\|_{W_1^m(B)} = \sum_{k=0}^{\nu} \|(D_\nu z_n)_k\|_L \leq C_1 = \text{const},$$

и, далее, с учетом неравенства (2.1), включения  $z_n \in W_1^m(B) \subset C(B)$  при  $m \geq 3$  и теоремы 1, оценку

$$\begin{aligned} |z_n(x, y)| &\leq \|z_n\|_0 = |z_n(a, b)| + VH(z_n, B) = |z_n(a, b)| + \gamma_0 \|z_n\|_{W_1^2(B)} \\ &\leq C_0 + \gamma_0 \|z_n\|_{W_1^m(B)} \leq C_0 + \gamma_0 C_1 = C_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Неравенство  $\|z_n(x, y)\|_0 \leq C_2$  по  $N$ -мерному варианту теоремы Хелли о выборе (см. [18]) обеспечивает существование подпоследовательности  $\{z_{n_l}(x)\}$ , которая поточечно сходится в  $B$ :  $z_{n_l}(x, y) \rightarrow \hat{z}(x, y) \in \mathcal{V}_0(B) \subset L_1(B)$ , причем согласно (5)  $|z_{n_l}(x, y)| \leq C_2$ . Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе получим

$$\langle z_{n_l}, h \rangle = \iint_B z_{n_l}(x, y) h(x, y) dx dy \rightarrow \iint_B \hat{z}(x, y) h(x, y) dx dy = \langle \hat{z}, h \rangle, \quad l \rightarrow \infty,$$

для любой функции  $h(x, y) \in L_\infty(B)$ . Это значит, что  $z_{n_l} \xrightarrow{L} \hat{z} \in L_1(B)$ . Отсюда  $\hat{z} \xrightarrow{L} z_0$  в силу единственности слабого предела. Кроме того, из сходимости  $z_{n_l} \rightarrow \hat{z}$  получим (как при доказательстве теоремы 4) для финитных и бесконечно дифференцируемых в  $B$  функций  $h$ :  $\langle (D_\nu z_{n_l})_k, h \rangle \rightarrow \langle (D_\nu \hat{z})_k, h \rangle$  [28]. С другой стороны, как отмечено выше,  $(D_\nu z_{n_l})_k \xrightarrow{L} (D_\nu z_0)_k$ , т. е.  $\langle (D_\nu z_{n_l})_k, h \rangle \rightarrow \langle (D_\nu z_0)_k, h \rangle$ . Поэтому из определения обобщенной производной и ее единственности следует, что  $(D_\nu \hat{z})_k \xrightarrow{L} (D_\nu z_0)_k$ ,  $k = \overline{0, \nu}$ , так что функция  $\hat{z}(x, y)$  имеет суммируемые обобщенные производные до  $m$ -го порядка включительно. Таким образом,  $\hat{z}(x, y)$ ,  $z_0(x, y) \in W_1^m(B)$  и, значит, по теореме вложения типа Соболева — Кондрашова [29]  $\hat{z}(x, y)$ ,  $z_0(x, y) \in C^{m-3}(B)$ . Тогда отмеченное выше равенство  $\hat{z} \xrightarrow{L} z_0$  для оказавшихся непрерывными функций  $\hat{z}(x, y)$ ,  $z_0(x, y)$  означает, что  $\hat{z}(x, y) = z_0(x, y) \forall (x, y) \in B$ , а равенство частных производных  $(D_\nu \hat{z})_k \xrightarrow{L} (D_\nu z_0)_k$  порождает равенство

$$(D_\sigma \hat{z})_k(x, y) = (D_\sigma z_0)_k(x, y) \quad \forall (x, y) \in B$$

для всех производных до порядка  $m - 3$ . В частности,

$$\hat{z}(a, b) = z_0(a, b), \quad (D_\sigma \hat{z})_k(a, b) = (D_\sigma z_0)_k(a, b), \quad k = \overline{1, \sigma}.$$

В итоге оказывается, что из множества  $\Omega_C$  можно выбрать последовательность  $\{z_{n_l}(x, y)\}$ , для которой  $z_{n_l}(x) \xrightarrow{WL} z_0(x)$ ,  $z_{n_l}(a, b) \rightarrow z_0(a, b)$  и  $(D_\sigma z_{n_l})_k(a, b) \rightarrow (D_\sigma z_0)_k(a, b)$ , т. е.

$$\frac{\partial^k z_{n_l}}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \rightarrow \frac{\partial^k z_0}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \quad (k = \overline{1, m-3}; i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2).$$

При этом из доказанного свойства (A1) следует, что  $\Omega[z_0] \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Omega[z_n] \leq C$ . Но это означает  $\tau$ -компактность множества  $\Omega_C$ .

Итак, функционал  $\Omega[z]$  имеет свойства (A1) и (A2) относительно топологии  $\tau$ . Но тогда, если для этого функционала выполнены условия регулярности (3.4), то для любой последовательности тихоновских приближений  $z_n(x) = z^{\alpha_n}(x)$ ,  $\alpha_n = \alpha_{\eta_n}$ , которые получены с применением рассматриваемого функционала для приближенных данных с погрешностями  $\eta_n \rightarrow 0$ , будут выполняться соотношения

$$z_n \xrightarrow{\tau} \bar{z}, \quad \Omega[z_n] \rightarrow \Omega[\bar{z}],$$

т. е.

$$z_n \xrightarrow{WL} \bar{z}, \quad z_n(a, b) \rightarrow z_0(a, b), \quad \frac{\partial^k z_n}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \rightarrow \frac{\partial^k \bar{z}}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b),$$

$$(k = \overline{1, m-3}; i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2)$$

и  $\Omega_0[z_n] \rightarrow \Omega_0[\bar{z}]$ . Отсюда, учитывая  $H$ -свойство функционала  $\Omega_0[z]$  относительно  $WL$ -слабой сходимости (теорема 5), находим, что  $\|z_n - \bar{z}\|_{W_1^m} \rightarrow 0$  и далее из неравенства (2.2) получим

$$\|z_n - \bar{z}\|_{m-3} \leq \sum_{k=0}^{m-3} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^2 \left| \frac{\partial^k z_n}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) - \frac{\partial^k \bar{z}}{\partial t_{i_1} \partial t_{i_2} \dots \partial t_{i_k}}(a, b) \right| + \hat{\gamma} \|z_n - \bar{z}\|_{W_1^m} \rightarrow 0,$$

$\hat{\gamma} = \text{const}$ . □

Отметим также следующее обстоятельство. При решении прикладных задач часто используется метод регуляризации А. Н. Тихонова  $m$ -го порядка в пространстве функций двух переменных, в котором  $\Omega[z] = \|z(x, y)\|_{W_2^m(B)}$ . Это обеспечивает при  $m \geq 3$  не только сходимость приближенных решений к  $\bar{z}(x) \in W_2^m(B)$  по норме пространства  $W_2^m(B)$ , но в силу компактности вложения этого пространства в  $C^{m-3}(B)$  и равномерную сходимость приближенного решения вместе с его производными до порядка  $m-3$  к точному решению. Между тем согласно теоремам вложения  $W_2^m(B) \subset W_1^m(B)$ , причем  $\|z\|_{W_2^m(B)} \geq c_0 \|z\|_{W_1^m(B)}$ ,  $c_0 = \text{const}$ . Отсюда при  $m \geq 3$  по теореме 3 находим

$$\|z^{\alpha_n} - \bar{z}\|_{W_2^m(B)} \geq c_0 \|z^{\alpha_n} - \bar{z}\|_{W_1^m(B)} \geq c_0 \gamma_{m-1} \text{Var}_{m-3}(z^{\alpha_n} - \bar{z}).$$

Поэтому метод регуляризации Тихонова  $m$ -го порядка кроме указанных стандартных сходимостей дает при решении задачи (3.1) еще и сходимость по полной вариации  $(m-3)$ -го порядка.

**З а м е ч а н и е.** Все изложенное в данном разделе верно и в  $N$ -мерном случае, если считать, что  $m > N$ , и заменить  $C^{m-3}$  на  $C^{m-N-1}$ ,  $\text{Var}_{m-3}$  на  $\text{Var}_{m-N-1}$  и  $\|\cdot\|_{m-3}$  на  $\|\cdot\|_{m-N-1}$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993. 260 с.
2. **Васин В.В.** Регуляризация и дискретная аппроксимация некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Докл. РАН. 2001. Т. 376, № 1. С. 11–14.
3. **Vasin V.V.** Regularization and iterative approximation for linear ill-posed problems in the space of function of bounded variation // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. Suppl. 1. P. 225–239.
4. **Васин В.В.** Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.
5. **Васин В.В.** Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 64–77.
6. **Vasin V.V., Korotkii M.A.** Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2007. Vol. 15, no. 8. P. 853–865.
7. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.
8. **Леонов А.С.** Функции нескольких переменных с ограниченной вариацией в некорректных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 9. С. 35–49.

9. **Леонов А.С.** Об использовании функций нескольких переменных с ограниченной вариацией для кусочно-равномерной регуляризации некорректных задач // Докл. АН СССР. 1996. Т. 351, № 5. С. 592–595.
10. **Леонов А.С.** О многомерных некорректных задачах с разрывными решениями // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 74–86.
11. **Леонов А.С.** Применение функций нескольких переменных с ограниченными вариациями для численного решения двумерных некорректных задач // Сиб. журн. вычисл. математики. 1999. Т. 2, № 3. С. 257–271.
12. **Леонов А.С.** Кусочно-равномерная регуляризация двумерных некорректных задач с разрывными решениями: численный анализ // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 12. С. 1939–1944.
13. **Леонов А.С.** О сходимости по полным вариациям регуляризующих алгоритмов решения некорректно поставленных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 5. С. 767–783.
14. **Acar R., Vogel C.R.** Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems // Inverse Probl. 1994. Vol. 10. P. 1217–1229.
15. **Clarkson J.A., Adams C.R.** On definition of bounded variation for functions of two variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 35, no. 4. С. 824–854.
16. **Витушкин А.Г.** О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955. 220 с.
17. **Джустуи Э.** Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Мир, 1989. 240 с.
18. **Леонов А.С.** Замечание о полной вариации функций нескольких переменных и многомерном аналоге принципа выбора Хелли // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 1. С. 69–80.
19. **Hobson E.W.** The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. 3rd ed. Vol.1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. 690 p.
20. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 484 с.
21. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
22. **Леонов А.С.** Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: УРСС, 2009. 326 с.
23. **Морозов В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 240 с.
24. **Леонов А.С.** Функционалы с  $H$ -свойством в пространстве Соболева  $W_1^1$  // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 6. С. 121–136.
25. **Леонов А.С.** Об  $H$ -свойстве функционалов в пространствах Соболева // Мат. заметки. 2005. Т. 77, вып. 3. С. 378–394.
26. **Винокуров В.А.** О понятии регуляризуемости разрывных отображений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 5. С. 1097–1112.
27. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский [и др.] // М.: Наука, 1966. 500 с.
28. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959. 470 с.
29. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.

Леонов Александр Сергеевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”  
e-mail: asleonov@mephi.ru

Поступила 26.04.2011

УДК 519.6

## АДАПТИРОВАННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ОБЪЕМОВ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ РДТТ

А. М. Липанов, М. Р. Королева, С. Ю. Дадикина

В работе представлен метод построения ортогональных криволинейных расчетных сеток с использованием адаптированной системы цилиндрических координат. Данная статья посвящена построению таких сеток применительно к дозвуковым и сверхзвуковым частям сопла Лавала. Приведены построенные с помощью данного метода криволинейные расчетные сетки для различных профилей сопла Лавала.

Ключевые слова: ортогональные криволинейные системы координат, адаптированные цилиндрические координаты, расчетные сетки, сопло Лавала.

A. M. Lipanov, M. R. Koroleva, S. Yu. Dadikina. Adapted cylindrical coordinates for internal volumes of structural elements of a solid-propellant rocket engine.

A method for constructing orthogonal curvilinear computational grids based on an adapted system of cylindrical coordinates is proposed. The paper is devoted to constructing such grids for subsonic and supersonic parts of a Laval nozzle. Curvilinear computational grids constructed by the proposed method for various shapes of a Laval nozzle are presented.

Keywords: orthogonal curvilinear coordinate system, adapted cylindrical coordinates, computational grids, Laval nozzle.

### Введение

Исследование физико-химических процессов, протекающих в ракетном твердотопливном двигателе (РДТТ), сопряжено не только с необходимостью рассчитывать турбулентные до- и сверхзвуковые потоки, определять приход массы и энергии продуктов сгорания (ПС) твердых топлив, находить контур канала заряда, по которому движутся ПС, но и строить расчетные сетки, разные в различных частях РДТТ.

Криволинейная форма границ элементов конструкции РДТТ требует использования расчетных сеток, согласованных с этими границами. Применение сеток, полученных с помощью классических систем ортогональных криволинейных координат (цилиндрических и сферических), приводит к несовпадению в физическом пространстве сеточных линий с координатными. Для конечно-разностных методов это влечет за собой применение сложной интерполяции при постановке граничных условий, и как следствие происходит потеря точности численного решения.

Подобные трудности служат поводом для введения адаптированных систем криволинейных координат, построенных таким образом, чтобы границы в физическом пространстве совпадали с криволинейными координатными линиями. При этом искривленная в физическом пространстве расчетная область преобразуется в адаптированных криволинейных координатах в прямоугольную, и дискретизация уравнений проводится в пространстве этих координат, что делает расчет более эффективным.

Однако использование таких систем координат приводит к определенным трудностям. Во-первых, необходимо определять вид уравнений гидромеханики в пространстве этих координат. В уравнениях появляются дополнительные члены, определяющие преобразование физической области в вычислительную. Эти дополнительные члены (коэффициенты преобразования) имеют форму производных, и для них также необходимо проводить дискретизацию, что является дополнительным источником ошибок в численном решении. Во-вторых, при преобразовании

криволинейных физических границ в прямоугольную вычислительную область возникает деформация сетки, при этом точность решения уменьшается.

Известно, что для получения высокой точности численного решения сетка должна быть ортогональной. Кроме того, для ортогональных систем координат некоторые члены преобразования пропадают, и уравнения упрощаются [1]. Это позволяет избежать больших ошибок аппроксимации и повысить точность численного решения уравнений гидромеханики.

Таким образом, задача построения расчетной сетки в элементах конструкции РДТТ заключается в нахождении отображения, которое переводит узлы сетки из криволинейной физической области в прямоугольную вычислительную и удовлетворяет следующим требованиям:

1. Отображение должно быть взаимно однозначным (невырожденным).
2. Линии сетки должны быть гладкими.
3. Сетка должна быть ортогональной.

Существует три основных подхода к решению этой задачи. Первый использует алгебраические методы, второй — оптимизационные методы, третий основан на решении уравнений в частных производных.

Алгебраические методы осуществляют интерполяцию внутренних точек сетки по граничным [1–3]. Их преимущества — простота и высокая эффективность численной реализации. Однако с помощью этих методов можно построить лишь локально ортогональные (например, к границам области) сетки, либо сетки, близкие к ним.

Вариационные методы [4] используют критерии оптимальности (например, критерий близости сетки к равномерной, критерий близости сетки к ортогональной, критерий адаптации сетки к решению), которые не позволяют построить строго ортогональную сетку и требуют довольно сложной численной реализации.

Методы, основанные на решении уравнений в частных производных (чаще всего используют уравнение Пуассона), относятся к числу наиболее развитых [1–3]. Построенные с их помощью сетки отвечают требованиям гладкости и невырожденности. Добиться ортогональности в этом случае можно методом итерационного приближения сетки к ортогональной, который также сложен в реализации.

К методам построения расчетных сеток на основе решения дифференциальных уравнений можно отнести комплексный метод граничных элементов [5; 6], позволяющий строить сетки, удовлетворяющие вышеперечисленным требованиям. Однако для построения сетки в канале типа сопла Лаваля (см. рис. 1) как одного из элементов конструкции РДТТ нет необходимости использовать столь громоздкий в реализации метод. В этом случае более эффективным будет способ получения сетки путем построения ортогональных траекторий [1].

## 1. Получение адаптированной системы цилиндрических координат

Рассмотрим канал типа сопла Лаваля. Для такого канала при переходе от декартовой системы координат  $(x, y, z)$  к криволинейной вместо обычной цилиндрической системы  $(r, \varphi, z)$  удобнее использовать адаптированную систему цилиндрических координат  $(\xi, \varphi, z_1)$ , связанную с уравнением контура сопла  $R(z)$  (рис. 1). В качестве уравнения, определяющего профиль сопла, удобно использовать полином степени  $n$ :  $R(z) = R_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ , коэффициенты  $a_i$ ,  $(i = 0..n)$  которого будем считать известными. Так как контур сопла является монотонной функцией, его следует разделить на две части и для каждой из них использовать свой полином  $R(z)$ .

Введем в рассмотрение переменную  $\xi$ , определяющую продольные криволинейные координатные линии  $\xi = \text{const}$

$$\xi = \frac{r}{R(z)}. \quad (1.1)$$

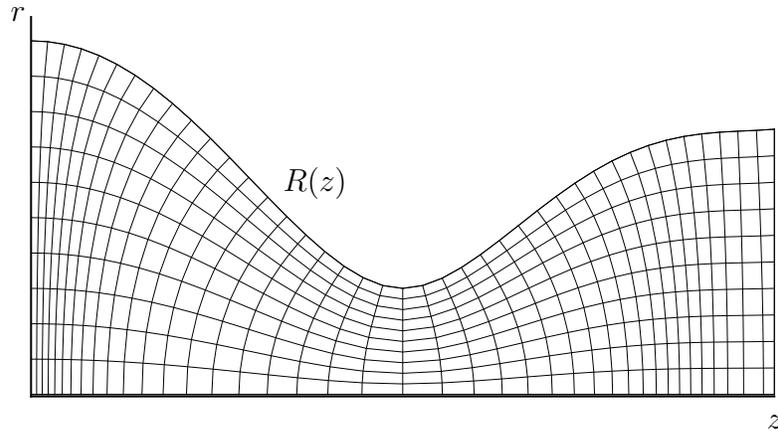


Рис. 1. Сопло Лавая.

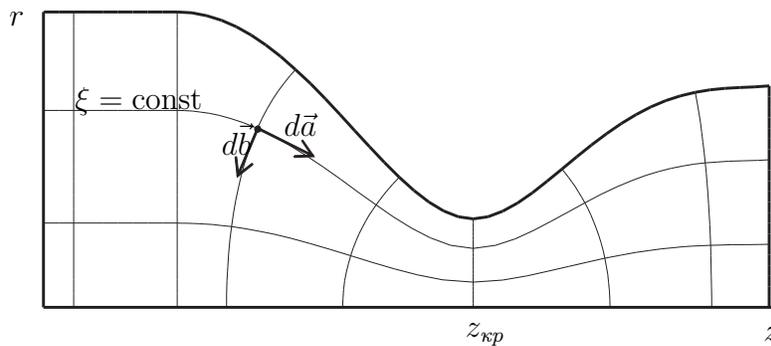


Рис. 2. Построение ортогональных линий сетки.

Согласно данному уравнению  $\xi$  будет меняться от нуля до единицы. Значению  $\xi = 1$  будет соответствовать линия контура сопла. Остальным значениям переменной  $\xi$  будут соответствовать продольные криволинейные координатные линии, которые сужаются в горловине сопла, а во входной и выходной частях канала находятся на больших расстояниях друг от друга. При переходе к оси симметрии линии постепенно превращаются в менее криволинейные образования и при  $r = 0$  переходят в горизонтальную линию.

Вдоль этих линий в силу уравнения (1.1) выполняется равенство

$$dr = \xi \frac{dR}{dz} dz. \quad (1.2)$$

Для получения ортогональной сетки построим линии (траектории), начинающиеся на контуре сопла, оканчивающиеся на его оси и пересекающие все промежуточные координатные линии  $\xi = \text{const}$  под прямым углом. Для этого будем рассматривать дифференциалы  $dz$  и  $dr$  как компоненты некоторого вектора  $\vec{da}$ , направленного по касательной к линии  $\xi = \text{const}$ . Построим ортогональный этому вектору другой вектор  $\vec{db}$  с координатами  $dz'$  и  $dr'$  (см. рис. 2).

Запишем скалярное произведение векторов  $\vec{da}$  и  $\vec{db}$ :

$$(\vec{da}, \vec{db}) = dzdz' + drdr' = 0.$$

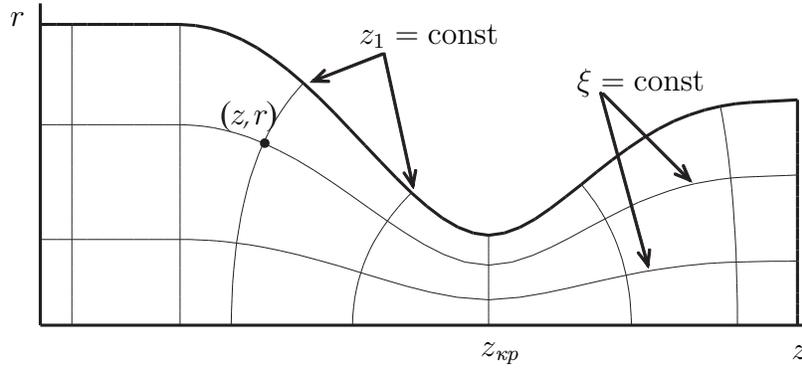


Рис. 3. Адаптированные криволинейные осесимметричные координаты для сопла Лаваля.

Отсюда с учетом (1.1) и (1.2) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{R'(z)} = -\frac{r}{R(z)} dr,$$

или

$$\frac{R(z)}{R'(z)} dz = -r dr, \quad (1.3)$$

которое описывает серию кривых, ортогональных к продольным криволинейным координатным линиям  $\xi = \text{const}$ .

Выберем на контуре сопла точку, соответствующую некоторой координате  $z_1$ , из которой будет выходить линия, ортогональная кривым  $\xi = \text{const}$ . Далее, интегрируя уравнение (1.3) вдоль этой кривой, получим

$$\int_{z_1}^z \frac{R(z)}{R'(z)} dz = - \int_{R(z_1)}^r r dr = \frac{R^2(z_1) - r^2}{2}. \quad (1.4)$$

Интегральное выражение в левой части (1.4) запишем следующим образом:

$$Q(z, z_1) = \int_{z_1}^z \frac{R(z)}{R'(z)} dz = \int_{z_1}^z \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n}{a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1}} dz.$$

Данный интеграл может быть записан в квадратурах.

В итоге получим уравнение, которое описывает соответствующую координатную линию,

$$Q(z, z_1) = \frac{R^2(z_1) - r^2}{2}, \quad (1.5)$$

где функция  $Q(z, z_1)$  в общем случае нелинейная.

Представим (1.5) с учетом (1.1) в следующем виде:

$$g(z, z_1, \xi) = Q(z, z_1) - \frac{R^2(z_1) - \xi^2 R^2(z)}{2} = 0. \quad (1.6)$$

Из (1.6), зная  $\xi, z_1$ , необходимо определить координаты  $(z, r)$  точек пересечения кривых  $\xi_j = \text{const}$ ,  $j = 0 \dots M$  и  $z_{1i} = \text{const}$ ,  $i = 0 \dots N$  (см. рис. 3).

Координаты  $z_{i,j}$  найдем, решая (1.6) методом Ньютона до достижения заданной точности  $\epsilon$ :

$$z_{i,j}^0 = z_{i,j+1},$$

$$z_{i,j}^k = z_{i,j}^{k-1} - \frac{g(z_{i,j}^{k-1}, z_{1i}, \xi_j)}{g'(z_{i,j}^{k-1}, \xi_j)}, k = 1, 2, \dots$$

Здесь  $g'(z, \xi) = \frac{R(z)}{R'(z)} + \xi^2 R(z) R'(z)$ , тогда  $r_{i,j} = \xi_j R(z_{i,j})$ .

Таким образом, перемещаясь вдоль контура сопла, предварительно задавшись некоторым шагом  $\Delta z_1$ , определяем величины  $z_{1i} = z_0 + i\Delta z, i = 0 \dots N$ . Для каждого значения  $z_{1i}$  при известном  $\xi_j$  в результате решения уравнения (1.6) находим точку пересечения координатных линий  $\xi_j = \text{const}$  и  $z_{1i} = \text{const}$  и получаем криволинейную ортогональную сетку (см. рис. 3). В криволинейных адаптированных цилиндрических координатах  $(\xi, z_1)$  будем иметь прямоугольную сетку.

На рис. 4 представлены ортогональные сетки, полученные с помощью данного метода для различных профилей сопла Лавала. Во все случаях использовался полином  $R(z)$  четвертой степени.

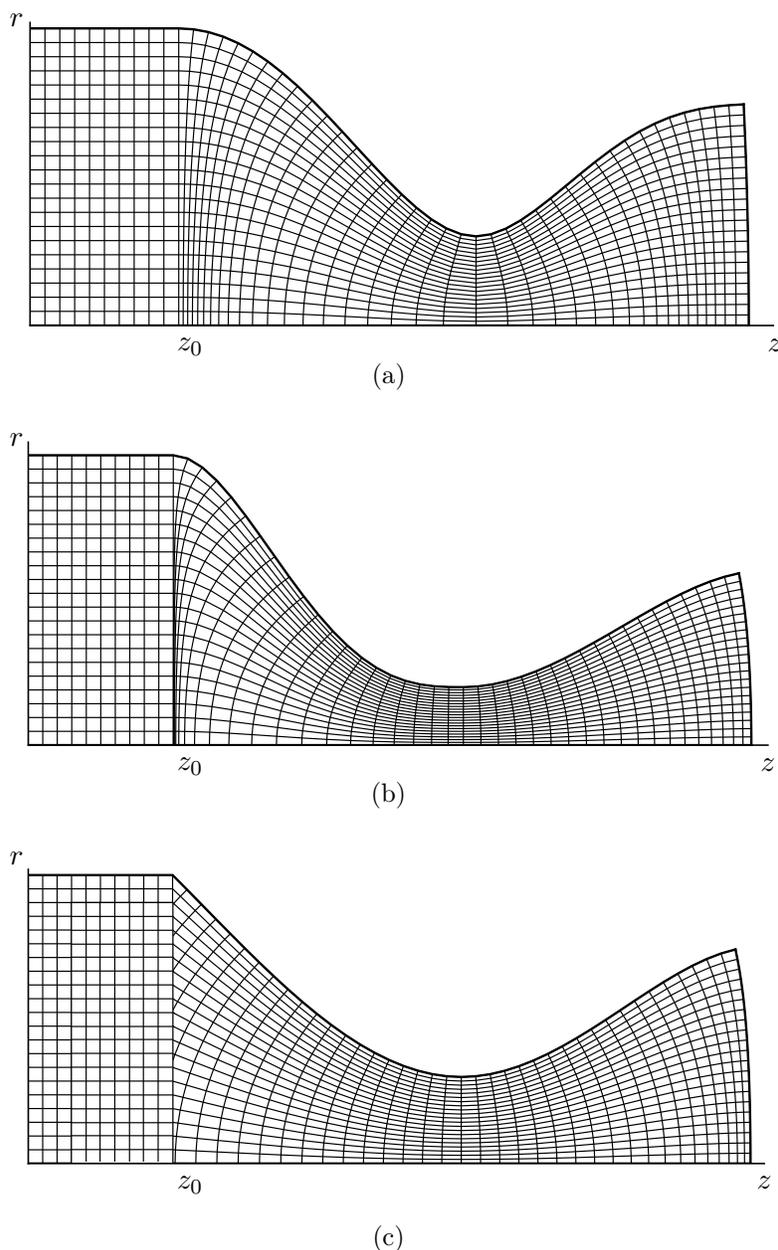


Рис. 4. Криволинейные ортогональные сетки для различных профилей сопла Лавала  $R(z)$ .

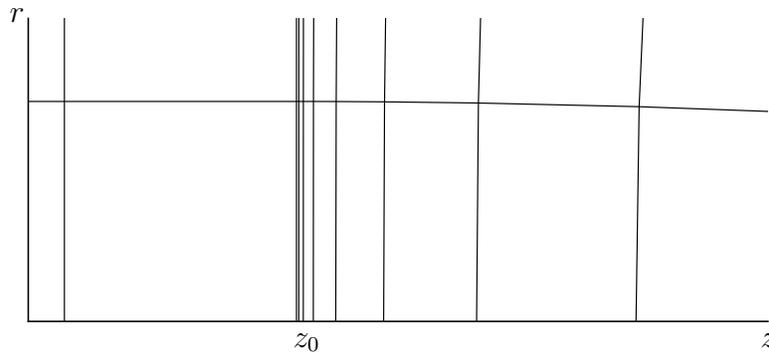


Рис. 5. Фрагмент сетки.

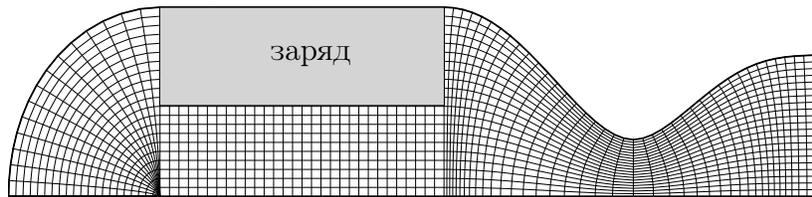


Рис. 6. Криволинейная ортогональная сетка в РДГТ.

Очевидно, сам способ построения сетки гарантирует ортогональность сеточных линий, а его сочетание с выбором коэффициентов полинома  $R(z)$ , описывающего контур сопла (для сопел, изображенных на рис. 4(a) и 4(b), коэффициент  $a_1$  полагался равным нулю), и вида переменной  $\xi$  (см. (1.1)) обеспечивает выполнение требований гладкости и невырожденности. На рис. 4(b) линии сетки сопла на левой границе располагаются очень близко друг к другу, но не пересекаются (см. рис. 5). Сетка, приведенная на рис. 4(c), не является вырожденной, как может показаться на первый взгляд. Однако контур сопла имеет такой вид (коэффициент  $a_1$  отличен от нуля), что сеточные линии заходят в цилиндрическую часть канала. В этом случае сетку необходимо разбить на два блока по линии стыка и расчет производить по каждому блоку отдельно с корректно организованной передачей данных из одной части сетки в другую.

Представленный метод построения ортогональной расчетной сетки может быть использован при решении задач, связанных с моделированием течения вязкого газа в РДГТ [7]. Один из возможных вариантов такой расчетной сетки приведен на рис. 6.

## 2. Система уравнений гидромеханики в адаптированной системе цилиндрических координат

Как было сказано выше, при моделировании вязких течений в областях типа сопла Лавала необходимо решать систему уравнений гидромеханики, записанную в криволинейной системе координат  $(\xi, \varphi, z_1)$ . Уравнения связи между декартовыми координатами  $(x, y, z)$  и адаптированными цилиндрическими  $(\xi, \varphi, z_1)$  запишутся так:

$$\begin{cases} x = \xi R(z) \sin \varphi, \\ y = \xi R(z) \cos \varphi, \\ Q(z, z_1) - \frac{R^2(z_1) - \xi^2 R^2(z)}{2} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

При записи законов сохранения в рассматриваемой криволинейной ортогональной системе координат удобно использовать коэффициенты Ламе [2;8], которые с учетом (2.1) будут иметь вид

$$\begin{cases} H_1 = \frac{R(z)}{\sqrt{1 + (\xi R'(z))^2}}, \\ H_2 = \xi R(z), \\ H_3 = \frac{R(z_1)R'(z)(1 + R'^2(z_1))}{R(z)R'(z_1)\sqrt{1 + (\xi R'(z))^2}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Система уравнений Навье — Стокса в адаптированных цилиндрических координатах  $(\xi, \varphi, z_1)$  в векторной форме будет выглядеть следующим образом:

$$H_1 H_2 H_3 \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} H_2 H_3 (F - F_v) + \frac{\partial}{\partial \varphi} H_1 H_3 (G - G_v) + \frac{\partial}{\partial z_1} H_1 H_2 (H - H_v) = S. \quad (2.3)$$

Здесь векторы  $W, F, F_v, G, G_v, H, H_v$  имеют вид

$$\begin{aligned} W &= \rho \begin{pmatrix} 1 \\ V_\xi \\ V_\varphi \\ V_{z_1} \\ E \end{pmatrix}, & F &= \rho \begin{pmatrix} V_\xi \\ V_\xi^2 \\ V_\xi V_\varphi \\ V_\xi V_{z_1} \\ V_\xi E \end{pmatrix}, & G &= \rho \begin{pmatrix} V_\varphi \\ V_\xi V_\varphi \\ V_\varphi^2 \\ V_\varphi V_{z_1} \\ V_\varphi E \end{pmatrix}, & H &= \rho \begin{pmatrix} V_{z_1} \\ V_\xi V_{z_1} \\ V_\varphi V_{z_1} \\ V_{z_1}^2 \\ V_{z_1} E \end{pmatrix}, \\ F_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \varepsilon_{\xi\xi} - \left(p + \frac{2}{3}\mu\Omega\right) \\ \mu \varepsilon_{\xi\varphi} \\ \mu \varepsilon_{\xi z_1} \\ (\vec{V}, \vec{P}_\xi) - \vec{q}_\xi - V_\xi \left(p + \frac{2}{3}\mu\Omega\right) \end{pmatrix}, & G_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \varepsilon_{\xi\varphi} \\ \mu \varepsilon_{\varphi\varphi} - \left(p + \frac{2}{3}\mu\Omega\right) \\ \mu \varepsilon_{\varphi z_1} \\ (\vec{V}, \vec{P}_\varphi) - \vec{q}_\varphi - V_\varphi \left(p + \frac{2}{3}\mu\Omega\right) \end{pmatrix}, \\ H_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \varepsilon_{\xi z_1} \\ \mu \varepsilon_{\varphi z_1} \\ \mu \varepsilon_{z_1 z_1} - \left(p + \frac{2}{3}\mu\Omega\right) \\ (\vec{V}, \vec{P}_{z_1}) - \vec{q}_{z_1} - V_{z_1} \left(p + \frac{2}{3}\mu\Omega\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а коэффициенты Ламэ  $H_1, H_2, H_3$  вычисляются по формулам (2.2).

Компоненты вектора  $S$ :

$$S_1 = 0; \quad S_5 = 0;$$

$$S_2 = H_2 \frac{\partial H_1}{\partial z_1} (\mu \varepsilon_{\xi z_1} - \rho V_\xi V_{z_1}) - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \xi} (\mu \varepsilon_{\varphi\varphi} - \rho V_\varphi^2) - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \xi} (\mu \varepsilon_{z_1 z_1} - \rho V_{z_1}^2) + \left(p + \frac{2}{3}\mu\Omega\right) \frac{\partial H_2 H_3}{\partial \xi};$$

$$S_3 = H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \xi} (\mu \varepsilon_{\xi\varphi} - \rho V_\xi V_\varphi) + H_1 \frac{\partial H_2}{\partial z_1} (\mu \varepsilon_{\varphi z_1} - \rho V_\varphi V_{z_1});$$

$$S_4 = H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \xi} (\mu \varepsilon_{\xi z_1} - \rho V_\xi V_{z_1}) - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial z_1} (\mu \varepsilon_{\varphi\varphi} - \rho V_\varphi^2) - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial z_1} (\mu \varepsilon_{\xi\xi} - \rho V_\xi^2) + \left(p + \frac{2}{3}\mu\Omega\right) \frac{\partial H_1 H_2}{\partial z_1}.$$

В приведенных выше формулах использовались следующие обозначения:

$\rho, \vec{V}(V_\xi, V_\varphi, V_{z_1}), E, p, T$  — плотность, вектор скорости, полная энергия, давление и температура газа;

$\Omega = \text{div}(\vec{V})$  — дивергенция вектора скорости;

векторы  $\vec{P}_\xi = \mu(2\varepsilon_{\xi\xi}, \varepsilon_{\xi\varphi}, \varepsilon_{\xi z_1})$ ,  $\vec{P}_\varphi = \mu(\varepsilon_{\xi\varphi}, 2\varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{\varphi z_1})$ ,  $\vec{P}_{z_1} = \mu(\varepsilon_{\xi z_1}, \varepsilon_{\varphi z_1}, 2\varepsilon_{z_1 z_1})$ , где  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;

компоненты тензора скоростей деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{2}{H_1} \left( \frac{\partial V_\xi}{\partial \xi} + \frac{V_{z_1}}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial z_1} \right), & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{2}{H_2} \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_\xi}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} + \frac{V_{z_1}}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial z_1} \right), \\ \varepsilon_{z_1 z_1} &= \frac{2}{H_3} \left( \frac{\partial V_{z_1}}{\partial z_1} + \frac{V_\xi}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \xi} \right), & \varepsilon_{\xi\varphi} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \xi} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_\xi}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi}, \\ \varepsilon_{\xi z_1} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \xi} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial V_\xi}{\partial z_1} - \frac{1}{H_1 H_3} \left( V_{z_1} \frac{\partial H_3}{\partial \xi} + V_\xi \frac{\partial H_1}{\partial z_1} \right), & \varepsilon_{\varphi z_1} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial V_\varphi}{\partial z_1} - \frac{V_\varphi}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial z_1}; \end{aligned}$$

$\vec{q}(q_\xi, q_\varphi, q_{z_1})$  — тепловой поток:  $q_\xi = \frac{\lambda_{\text{эфф}}}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \xi}$ ,  $q_\varphi = \frac{\lambda_{\text{эфф}}}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$ ,  $q_{z_1} = \frac{\lambda_{\text{эфф}}}{H_3} \frac{\partial T}{\partial z_1}$ , где  $\lambda_{\text{эфф}}$  — эффективный коэффициент теплопроводности, учитывающий перенос энергии излучением.

Динамический коэффициент вязкости  $\mu$  связан с температурой газа  $T$  зависимостью

$$\mu(T) = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^n, \quad (2.4)$$

где  $T_0, \mu_0$  — температура и динамический коэффициент вязкости, соответствующие начальному состоянию газа.

Эффективный коэффициент теплопроводности  $\lambda_{\text{эфф}}$  связан с температурой газа  $T$  через коэффициент  $\mu$ :

$$\lambda_{\text{эфф}} = \mu(T) \frac{C_p}{Pr} + \sigma T^3, \quad (2.5)$$

где  $Pr$  — число Прандтля,  $C_p$  — теплоемкость при постоянном давлении,  $\sigma$  — коэффициент черноты системы газ-стенка при распространении тепла за счет излучения.

Для замыкания системы уравнений (2.3)–(2.5) необходимо добавить уравнение состояния Менделеева — Клапейрона

$$p = \rho R T \quad (2.6)$$

и выражение для полной энергии

$$E = \frac{V_\xi^2 + V_\varphi^2 + V_{z_1}^2}{2} + \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho}, \quad (2.7)$$

где  $R$  — удельная газовая постоянная,  $k$  — показатель адиабаты.

Таким образом, получили систему уравнений гидромеханики (2.3)–(2.7), записанную в адаптированных цилиндрических координатах. При решении уравнений (2.3)–(2.7) необходимо будет также рассчитывать концентрации исходных реагентов и получающихся в результате химических реакций конечных веществ.

### 3. Заключение

Адаптированные цилиндрические координаты удобно использовать при расчете течений вязкого газа в областях типа сопла Лавала. Построенные с их помощью сетки получаются ортогональными и согласованными с границами расчетной области.

Данный подход, состоящий в сочетании предложенного способа построения ортогональных расчетных сеток с высокоэффективным методом прямого численного моделирования турбулентных потоков [9], позволит проводить теоретические расчеты течения ПС твердых топлив в РДТТ, обеспечивая хорошее соответствие с экспериментальными данными.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 2. 552 с.
2. **Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 2. 337 с.
3. **Thompson J.F., Warsiz U.A., Mastin C.W.** Numerical grid generation: foundation and applications. New-York: North-Holland, 1985. 484 p.
4. **Сидоров А.Ф., Ушакова О.В., Хайруллина О.Б.** Вариационные методы построения оптимальных сеток. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН, 1997. 50 с.
5. **Громадка П.Т., Лей Ч.** Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. М.: Мир, 1990. 303 с.
6. **Тененев В.А., Русяк И.Г.** Численное решение задач гидродинамики и теплообмена в областях сложной формы. Ижевск: Изд-во ИЖГТУ, 1996. 60 с.
7. **Липанов А.М., Алиев А.В.** Проектирование ракетных двигателей твердого топлива. М.: Машиностроение, 1995. 400 с.
8. **Кочин Н.Е.** Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 450 с.
9. **Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г.** Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. 161 с.

Липанов Алексей Матвеевич  
академик РАН

директор

Институт прикладной механики УрО РАН  
e-mail: ipm@udman.ru

Королева Мария Равилевна  
канд. физ.-мат. наук  
ст. науч. сотрудник

Институт прикладной механики УрО РАН  
e-mail: koroleva-ipm@yandex.ru

Дадикина Светлана Юрьевна  
мл. науч. сотрудник

Институт прикладной механики УрО РАН  
e-mail: sveta-dadikina@yandex.ru

Поступила 15.11.2010

УДК 519.6

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ, СВОДЯЩИХСЯ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ФРЕДГОЛЬМА 1-ГО РОДА<sup>1</sup>

Д. В. Лукьяненко, А. Г. Ягола

В работе рассматриваются особенности применения многопроцессорных систем для решения обратных задач, сводящихся к многомерным уравнениям Фредгольма 1-го рода для векторной функции. Предлагается параллельный алгоритм решения такого типа задач на примере наиболее общих с практической точки зрения двумерного и трехмерного случаев. Эффективность данного подхода демонстрируется на примере решения обратной задачи восстановления параметров намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля вне его корпуса.

Ключевые слова: обратные задачи, некорректные задачи, интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, метод регуляризации Тихонова, параллельные вычисления, восстановление параметров намагниченности.

D. V. Luk'yanenko, A. G. Yagola. Application of multiprocessor systems for solving inverse problems leading to Fredholm integral equations of the first kind.

We consider the peculiarities of applying multiprocessor systems for solving inverse problems leading to multidimensional Fredholm integral equations of the first kind for a vector function. A parallel algorithm for solving problems of this kind is proposed for the two- and three-dimensional cases, which are the most general from the practical point of view. The efficiency of the proposed approach is shown by an example of solving the inverse problem of recovering magnetization parameters of a ship from measured values of the magnetic field outside its hull.

Keywords: inverse problems, ill-posed problems, Fredholm integral equation of the first kind, Tikhonov regularization method, parallel computing, recovery of magnetization parameters.

### Введение

При решении многих современных прикладных задач часто возникает необходимость восстанавливать характеристики исследуемых объектов в пространстве, причем эти характеристики могут являться векторными функциями. Это приводит к необходимости решать двумерные или трехмерные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода для векторной функции, что зачастую невозможно эффективно сделать с помощью обычных персональных компьютеров. В таких случаях обычно используются различные упрощения и допущения, которые понижают численную размерность решаемой задачи, но дают ограниченную информацию об исследуемом объекте либо приводят к существенным ошибкам в значениях восстанавливаемых характеристик. Предлагается решать такие многомерные задачи с использованием многопроцессорных систем [1;2] в самой общей постановке, сводящейся к двумерному или трехмерному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода для векторной функции. Материал, представленный в этой статье, основан на результатах, полученных авторами в работах [2;3].

В статье продемонстрированы эффективные методы решения таких задач, которые можно реализовать как на многопроцессорных кластерных системах, так и на современных персональных компьютерах с многоядерными процессорами. При разработке этих методов активно

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды проектов 11-01-00040-а и 10-01-91150-ГФЕН\_а). Тестовые расчеты выполнялись с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса Московского государственного университета.

использовались идеи применения многопроцессорных систем для решения двумерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, заложенные в работах [4; 5]. Эффективность данного подхода при решении рассматриваемого класса задач продемонстрирована на примере решения обратной задачи восстановления параметров намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля вне его корпуса [2; 3]. Все результаты данной работы могут быть легко упрощены на случаи задач меньшей размерности либо задач, при решении которых необходимо восстанавливать скалярную функцию.

## 1. Постановка задачи и метод решения

### 1.1. Двумерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

Рассмотрим двумерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

$$\mathbf{A}M = \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \mathbf{K}(s, t, x, y) M(x, y) dx dy = \mathbf{B}(s, t), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{B}(s, t)$  и  $M(x, y)$  — векторные функции, а ядро  $\mathbf{K}(s, t, x, y)$  является матричной функцией

$$\mathbf{B}(s, t) = \begin{pmatrix} B^1(s, t) \\ B^2(s, t) \\ B^3(s, t) \end{pmatrix}, \quad M(x, y) = \begin{pmatrix} M^1(x, y) \\ M^2(x, y) \\ M^3(x, y) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Обозначим

$$P = \{(x, y): L_x \leq x \leq R_x, L_y \leq y \leq R_y\}, \quad Q = \{(s, t): L_s \leq s \leq R_s, L_t \leq t \leq R_t\},$$

где  $P$  — область определения векторной функции  $M(x, y)$ , а  $Q$  — область определения векторной функции  $\mathbf{B}(s, t)$ . Будем предполагать, что  $M \in W_2^2(P)$ ,  $\mathbf{B} \in L_2(Q)$ , а оператор  $\mathbf{A}$  с ядром  $\mathbf{K}$  непрерывен и взаимнооднозначен. Нормы правой части уравнения (1.1) и решения вводятся следующим образом:

$$\|\mathbf{B}\|_{L_2} = \sqrt{\|B^1\|_{L_2}^2 + \|B^2\|_{L_2}^2 + \|B^3\|_{L_2}^2}, \quad \|M\|_{W_2^2} = \sqrt{\|M^1\|_{W_2^2}^2 + \|M^2\|_{W_2^2}^2 + \|M^3\|_{W_2^2}^2}. \quad (1.3)$$

Пусть вместо точно известных  $\bar{\mathbf{B}}$  и оператора  $\bar{\mathbf{A}}$  ( $\bar{\mathbf{A}}\bar{M} = \bar{\mathbf{B}}$ ) известны их приближенные значения  $\mathbf{B}_\delta$  и  $\mathbf{A}_h$  такие, что  $\|\mathbf{B}_\delta - \bar{\mathbf{B}}\|_{L_2} \leq \delta$ ,  $\|\mathbf{A}_h - \bar{\mathbf{A}}\|_{W_2^2 \rightarrow L_2} \leq h$ . При выписанных условиях задача является некорректной, для ее решения необходимо построить регуляризирующий алгоритм. Воспользуемся алгоритмом, основанным на минимизации функционала Тихонова,

$$F^\alpha[M] = \|\mathbf{A}_h M - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|M\|_{W_2^2}^2, \quad (1.4)$$

который в двумерном случае примет вид

$$F^\alpha[M] = \int_{L_s}^{R_s} \int_{L_t}^{R_t} ds dt \left\{ \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \mathbf{K}_h(s, t, x, y) M(x, y) dx dy - \mathbf{B}_\delta(s, t) \right\}^2 + \alpha \Omega[M], \quad (1.5)$$

где  $\Omega[M] \equiv \|M\|_{W_2^2}^2$  — сглаживающий функционал

$$\Omega[M] = \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \left\{ (M, M) + \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 M}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) \right\} dx dy.$$

Для любого  $\alpha > 0$  существует единственная экстремаль функционала Тихонова  $\mathbf{M}_\eta^\alpha$ ,  $\eta = \{\delta, h\}$ , реализующая минимум  $F^\alpha[\mathbf{M}]$ . Для выбора параметра регуляризации можно использовать алгоритм обобщенного принципа невязки [6]. При выборе параметра  $\alpha = \alpha(\eta)$  по обобщенному принципу невязки

$$\rho(\alpha) = \|\mathbf{A}_h \mathbf{M}_\eta^\alpha - \mathbf{B}_\delta\|_{L_2}^2 - (\delta + h \|\mathbf{M}_\eta^\alpha\|_{W_2^2})^2 = 0$$

$\mathbf{M}_\eta^\alpha$  стремится при  $\eta \rightarrow 0$  к точному решению задачи  $\bar{\mathbf{M}}$  в норме  $W_2^2$ , а следовательно, и равномерно на  $P$ .

В качестве метода минимизации функционала Тихонова применяется метод сопряженных градиентов.

При решении задачи минимизации методом сопряженных градиентов необходимо вычислять значение функционала Тихонова  $F^\alpha[\mathbf{M}]$  и его градиента  $\text{grad } F^\alpha[\mathbf{M}]$ . Для численного решения задачи переходим к конечномерным пространствам. Введем сетки по  $x, y, s, t$  с шагами  $h_x, h_y, h_s, h_t$  и числом узлов  $N_x, N_y, N_s, N_t$  соответственно:

$$\begin{aligned} x_{i_1} &= L_x + (i_1 - 1)h_x, & i_1 &= \overline{1, N_x}, & h_x &= \frac{R_x - L_x}{N_x - 1}, \\ y_{i_2} &= L_y + (i_2 - 1)h_y, & i_2 &= \overline{1, N_y}, & h_y &= \frac{R_y - L_y}{N_y - 1}, \\ s_{j_1} &= L_s + (j_1 - 1)h_s, & j_1 &= \overline{1, N_s}, & h_s &= \frac{R_s - L_s}{N_s - 1}, \\ t_{j_2} &= L_t + (j_2 - 1)h_t, & j_2 &= \overline{1, N_t}, & h_t &= \frac{R_t - L_t}{N_t - 1}. \end{aligned}$$

Примем, что  $M_{i_1 i_2}^m = M^m(x_{i_1}, y_{i_2})$ ,  $B_{j_1 j_2}^n = B_\delta^n(s_{j_1}, t_{j_2})$ ,  $K_{j_1 j_2 i_1 i_2}^{nm} = K_h^{nm}(s_{j_1}, t_{j_2}, x_{i_1}, y_{i_2})$ ,  $n = \overline{1, 3}$ ,  $m = \overline{1, 3}$ . Все интегралы в формуле (1.5) аппроксимируются по формуле прямоугольников. Таким образом, получаем следующую конечно-разностную аппроксимацию функционала Тихонова (1.5):

$$F^\alpha[\mathbf{M}] = \Phi[\mathbf{M}] + \alpha\Omega[\mathbf{M}], \quad (1.6)$$

где

$$\Phi[\mathbf{M}] = \sum_{j_1=1}^{N_s} \sum_{j_2=1}^{N_t} \sum_{n=1}^3 h_s h_t \times \left[ \sum_{i_1=1}^{N_x} \sum_{i_2=1}^{N_y} \sum_{m=1}^3 h_x h_y K_{j_1 j_2 i_1 i_2}^{nm} M_{i_1 i_2}^m - B_{j_1 j_2}^n \right]^2, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \Omega[\mathbf{M}] &= h_x h_y \sum_{i_1=1}^{N_x} \sum_{i_2=1}^{N_y} \sum_{m=1}^3 (M_{i_1 i_2}^m)^2 + \dots \\ &+ \frac{h_y}{h_x} \sum_{i_1=2}^{N_x-1} \sum_{i_2=1}^{N_y} \sum_{m=1}^3 (M_{i_1+1 i_2}^m - 2M_{i_1 i_2}^m + M_{i_1-1 i_2}^m)^2 + \dots \\ &+ \frac{h_x}{h_y} \sum_{i_1=1}^{N_x} \sum_{i_2=2}^{N_y-1} \sum_{m=1}^3 (M_{i_1 i_2+1}^m - 2M_{i_1 i_2}^m + M_{i_1 i_2-1}^m)^2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, исходная задача сводится к задаче минимизации в  $N$ -мерном пространстве, где  $N \equiv 3 \times N_x \times N_y$ , с последующим выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки.

Итерационный процесс минимизации функционала строится следующим образом: задается некоторое начальное приближение — вектор  $\mathbf{M}^{(0)}$ . Для заданной точки  $\mathbf{M}^{(i)}$  минимизирующей

последовательности вычисляется градиент  $\mathbf{g}^{(i)} = \text{grad } F^\alpha[\mathbf{M}^{(i)}]$ , который легко получить из формул (1.7), (1.8):

$$\begin{aligned} (\text{grad } F^\alpha[\mathbf{M}])_{i_1 i_2}^m &= \frac{\partial F^\alpha[\mathbf{M}]}{\partial M_{i_1 i_2}^m} = \dots \\ &= 2h_x h_y \sum_{j_1=1}^{N_s} \sum_{j_2=1}^{N_t} \sum_{n=1}^3 h_s h_t K_{j_1 j_2 i_1 i_2}^{nm} \times \left[ \sum_{l_1=1}^{N_x} \sum_{l_2=1}^{N_y} \sum_{p=1}^3 h_x h_y K_{j_1 j_2 l_1 l_2}^{np} M_{l_1 l_2}^p - B_{j_1 j_2}^n \right] + \alpha \frac{\partial \Omega[\mathbf{M}]}{\partial M_{i_1 i_2}^m}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega[\mathbf{M}]}{\partial M_{i_1 i_2}^m} &= 2h_x h_y M_{i_1 i_2}^m + 2 \frac{h_y}{h_x} \Omega'_1 + 2 \frac{h_x}{h_y} \Omega'_2, \\ \Omega'_1 &= \begin{cases} -2M_{i_1+1 i_2}^m + M_{i_1 i_2}^m + M_{i_1+2 i_2}^m, & i_1 = 1 \\ -4M_{i_1+1 i_2}^m + 5M_{i_1 i_2}^m - 2M_{i_1-1 i_2}^m + M_{i_1+2 i_2}^m, & i_1 = 2 \\ -4M_{i_1+1 i_2}^m + 6M_{i_1 i_2}^m - 4M_{i_1-1 i_2}^m + M_{i_1-2 i_2}^m + M_{i_1+2 i_2}^m, & i_1 = \overline{3, N_x - 2}, \\ -2M_{i_1+1 i_2}^m + 5M_{i_1 i_2}^m - 4M_{i_1-1 i_2}^m + M_{i_1-2 i_2}^m, & i_1 = N_x - 1 \\ -2M_{i_1-1 i_2}^m + M_{i_1 i_2}^m + M_{i_1-2 i_2}^m, & i_1 = N_x \end{cases} \\ \Omega'_2 &= \begin{cases} -2M_{i_1 i_2+1}^m + M_{i_1 i_2}^m + M_{i_1 i_2+2}^m, & i_2 = 1 \\ -4M_{i_1 i_2+1}^m + 5M_{i_1 i_2}^m - 2M_{i_1 i_2-1}^m + M_{i_1 i_2+2}^m, & i_2 = 2 \\ -4M_{i_1 i_2+1}^m + 6M_{i_1 i_2}^m - 4M_{i_1 i_2-1}^m + M_{i_1 i_2-2}^m + M_{i_1 i_2+2}^m, & i_2 = \overline{3, N_y - 2}, \\ -2M_{i_1 i_2+1}^m + 5M_{i_1 i_2}^m - 4M_{i_1 i_2-1}^m + M_{i_1 i_2-2}^m, & i_2 = N_y - 1 \\ -2M_{i_1 i_2-1}^m + M_{i_1 i_2}^m + M_{i_1 i_2-2}^m, & i_2 = N_y \end{cases} \end{aligned}$$

Далее по направлению градиента  $\mathbf{g}^{(i-1)}$  и направлению спуска  $\mathbf{h}^{(i-1)}$  на предыдущем шаге вычисляется новое направление спуска по формуле

$$\mathbf{h}^{(i)} = -\mathbf{g}^{(i)} + \gamma_i \mathbf{h}^{(i-1)}, \quad \gamma_i = \frac{(\mathbf{g}^{(i)} - \mathbf{g}^{(i-1)}, \mathbf{g}^{(i)})}{(\mathbf{g}^{(i-1)}, \mathbf{g}^{(i-1)})}$$

(вариант Полака — Рибьера метода сопряженных градиентов). После этого строится однопараметрическое множество, состоящее из элементов  $\mathbf{M}_\lambda = \mathbf{M}^{(i)} + \lambda \mathbf{h}^{(i)}$ . Затем решается задача одномерной минимизации функционала  $F^\alpha[\mathbf{M}_\lambda]$ . Точка минимума функционала  $F^\alpha[\mathbf{M}_\lambda]$  на рассматриваемом множестве принимается за следующий элемент  $\mathbf{M}^{(i+1)}$  минимизирующей последовательности. За  $N$  шагов методом сопряженных градиентов находится минимум функционала Тихонова (1.5) для фиксированного параметра регуляризации  $\alpha$ . Параметр регуляризации  $\alpha$  выбирается по обобщенному принципу невязки (соответствующие численные методы выбора параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки подробно описаны в работе [6]).

## 1.2. Трехмерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

Рассмотрим теперь обобщение на трехмерный случай. Трехмерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции будет иметь вид

$$\mathbf{A} \mathbf{M} = \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \int_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}(s, t, r, x, y, z) \mathbf{M}(x, y, z) dx dy dz = \mathbf{B}(s, t, r), \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{B}(s, t, r)$ ,  $\mathbf{M}(x, y, z)$  и  $\mathbf{K}(s, t, r, x, y, z)$  имеют структуру, аналогичную (1.2). Областью определения векторной функции  $\mathbf{M}(x, y, z)$  является  $P = \{(x, y, z): L_x \leq x \leq R_x, L_y \leq y \leq R_y, L_z \leq z \leq R_z\}$ , а областью определения векторной функции  $\mathbf{B}(s, t, r)$  — область  $Q = \{(s, t, r): L_s \leq s \leq R_s, L_t \leq t \leq R_t, L_r \leq r \leq R_r\}$ . Также будем предполагать, что  $\mathbf{M} \in W_2^2(P)$ ,  $\mathbf{B} \in L_2(Q)$ , а оператор  $\mathbf{A}$  с ядром  $\mathbf{K}$  непрерывен и взаимнооднозначен. Нормы правой части уравнения (1.10) и решения вводятся аналогичным (1.3) образом. Функционал Тихонова (1.4) в случае трехмерного уравнения примет вид

$$F^\alpha[\mathbf{M}] = \int_{L_s}^{R_s} \int_{L_t}^{R_t} \int_{L_r}^{R_r} ds dt dr \left\{ \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \int_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}_h(s, t, r, x, y, z) \mathbf{M}(x, y, z) dx dy dz - \mathbf{B}_\delta(s, t, r) \right\}^2 + \alpha \Omega[\mathbf{M}], \quad (1.11)$$

где  $\Omega[\mathbf{M}] \equiv \|\mathbf{M}\|_{W_2^2}^2$  — сглаживающий функционал

$$\Omega[\mathbf{M}] = \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \int_{L_z}^{R_z} \left\{ (\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \left( \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial z^2} \right) \right\} dx dy dz.$$

Введем дополнительные сетки  $z$ ,  $r$  с шагами  $h_z$ ,  $h_r$  и числом узлов  $N_z$ ,  $N_r$

$$z_{i_3} = L_z + (i_3 - 1)h_z, \quad i_3 = \overline{1, N_z}, \quad h_z = \frac{R_z - L_z}{N_z - 1},$$

$$r_{j_3} = L_r + (j_3 - 1)h_r, \quad j_3 = \overline{1, N_r}, \quad h_r = \frac{R_r - L_r}{N_r - 1}$$

и примем, что  $M_{i_1 i_2 i_3}^m = M^m(x_{i_1}, y_{i_2}, z_{i_3})$ ,  $B_{j_1 j_2 j_3}^n = B_\delta^n(s_{j_1}, t_{j_2}, r_{j_3})$ ,  $K_{j_1 j_2 j_3 i_1 i_2 i_3}^{nm} = K_h^{nm}(s_{j_1}, t_{j_2}, r_{j_3}, x_{i_1}, y_{i_2}, z_{i_3})$ ,  $n = \overline{1, 3}$ ,  $m = \overline{1, 3}$ . В результате получаем следующую конечно-разностную аппроксимацию функционала Тихонова (1.6):

$$\Phi[\mathbf{M}] = \sum_{j_1=1}^{N_s} \sum_{j_2=1}^{N_t} \sum_{j_3=1}^{N_r} \sum_{n=1}^3 h_s h_t h_r \times \left[ \sum_{i_1=1}^{N_x} \sum_{i_2=1}^{N_y} \sum_{i_3=1}^{N_z} \sum_{m=1}^3 h_x h_y h_z K_{j_1 j_2 j_3 i_1 i_2 i_3}^{nm} M_{i_1 i_2 i_3}^m - B_{j_1 j_2 j_3}^n \right]^2, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \Omega[\mathbf{M}] &= h_x h_y h_z \sum_{i_1=1}^{N_x} \sum_{i_2=1}^{N_y} \sum_{i_3=1}^{N_z} \sum_{m=1}^3 (M_{i_1 i_2 i_3}^m)^2 + \dots \\ &+ \frac{h_y h_z}{h_x^3} \sum_{i_1=2}^{N_x-1} \sum_{i_2=1}^{N_y} \sum_{i_3=1}^{N_z} \sum_{m=1}^3 (M_{i_1+1 i_2 i_3}^m - 2M_{i_1 i_2 i_3}^m + M_{i_1-1 i_2 i_3}^m)^2 + \dots \\ &+ \frac{h_x h_z}{h_y^3} \sum_{i_1=1}^{N_x} \sum_{i_2=2}^{N_y-1} \sum_{i_3=1}^{N_z} \sum_{m=1}^3 (M_{i_1 i_2+1 i_3}^m - 2M_{i_1 i_2 i_3}^m + M_{i_1 i_2-1 i_3}^m)^2 + \dots \\ &+ \frac{h_x h_y}{h_z^3} \sum_{i_1=1}^{N_x} \sum_{i_2=1}^{N_y} \sum_{i_3=2}^{N_z-1} \sum_{m=1}^3 (M_{i_1 i_2 i_3+1}^m - 2M_{i_1 i_2 i_3}^m + M_{i_1 i_2 i_3-1}^m)^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, трехмерная задача сводится к задаче минимизации в  $N$ -мерном пространстве, где  $N \equiv 3 \times N_x \times N_y \times N_z$ , с последующим выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки.

Итерационный процесс минимизации функционала строится по схеме, описанной в предыдущем разделе. Градиент  $\mathbf{g}^{(i)} = \text{grad } F^\alpha[\mathbf{M}^{(i)}]$ , который легко получить из формул (1.12), (1.13), в трехмерном случае будет иметь вид

$$\begin{aligned}
(\text{grad } F^\alpha[\mathbf{M}])_{i_1 i_2 i_3}^m &= \frac{\partial F^\alpha[\mathbf{M}]}{\partial M_{i_1 i_2 i_3}^m} = \dots = 2h_x h_y h_z \sum_{j_1=1}^{N_s} \sum_{j_2=1}^{N_t} \sum_{j_3=1}^{N_r} \sum_{n=1}^3 h_s h_t h_r K_{j_1 j_2 j_3 i_1 i_2 i_3}^{nm} \\
&\times \left[ \sum_{l_1=1}^{N_x} \sum_{l_2=1}^{N_y} \sum_{l_3=1}^{N_z} \sum_{p=1}^3 h_x h_y h_z K_{j_1 j_2 j_3 l_1 l_2 l_3}^{np} M_{l_1 l_2 l_3}^p - B_{j_1 j_2 j_3}^n \right] + \alpha \frac{\partial \Omega[\mathbf{M}]}{\partial M_{i_1 i_2 i_3}^m}, \quad (1.14) \\
\frac{\partial \Omega[\mathbf{M}]}{\partial M_{i_1 i_2 i_3}^m} &= 2h_x h_y h_z M_{i_1 i_2 i_3}^m + 2 \frac{h_y h_z}{h_x^3} \Omega'_1 + 2 \frac{h_x h_z}{h_y^3} \Omega'_2 + 2 \frac{h_x h_y}{h_z^3} \Omega'_3, \\
\Omega'_1 &= \begin{cases} -2M_{i_1+1 i_2 i_3}^m + M_{i_1 i_2 i_3}^m + M_{i_1+2 i_2 i_3}^m, & i_1 = 1 \\ -4M_{i_1+1 i_2 i_3}^m + 5M_{i_1 i_2 i_3}^m - 2M_{i_1-1 i_2 i_3}^m + M_{i_1+2 i_2 i_3}^m, & i_1 = 2 \\ -4M_{i_1+1 i_2 i_3}^m + 6M_{i_1 i_2 i_3}^m - 4M_{i_1-1 i_2 i_3}^m + M_{i_1-2 i_2 i_3}^m + M_{i_1+2 i_2 i_3}^m, & i_1 = \overline{3, N_x-2} \\ -2M_{i_1+1 i_2 i_3}^m + 5M_{i_1 i_2 i_3}^m - 4M_{i_1-1 i_2 i_3}^m + M_{i_1-2 i_2 i_3}^m, & i_1 = N_x-1 \\ -2M_{i_1-1 i_2 i_3}^m + M_{i_1 i_2 i_3}^m + M_{i_1-2 i_2 i_3}^m, & i_1 = N_x \end{cases}
\end{aligned}$$

Выражения для  $\Omega'_2$  и  $\Omega'_3$  имеют вид, аналогичный  $\Omega'_1$ , с учетом соответствующих замен выражений в коэффициентах  $i_2$  и  $i_3$  на выражения для  $i_1$ .

### 1.3. Распараллеливание задачи минимизации

При решении задачи минимизации методом сопряженных градиентов основные вычисления приходится на вычисление функционала Тихонова  $F^\alpha[\mathbf{M}]$  и его градиента  $\text{grad } F^\alpha[\mathbf{M}]$ . Из формул (1.6)–(1.9) для функционала и его градиента в двумерном случае (и из формул (1.6), (1.12)–(1.14) для функционала и его градиента в трехмерном случае) видно, что они состоят из не связанных между собой групп слагаемых (по  $j_1$ ,  $j_2$  ( $j_3$ ) и  $i_1$ ,  $i_2$  ( $i_3$ ) соответственно). Это дает возможность применения многопроцессорной системы. Задачу можно распараллелить, т. е. переписать программу таким образом, чтобы независимые части программы выполнялись на разных процессорах. Исходная задача решалась с использованием  $N$  параллельных процессов  $0, 1, \dots, N-1$ , выполняющихся на отдельных процессорах и при необходимости взаимодействующих друг с другом.

Рассмотрим подробнее задачу вычисления значения функционала  $F^\alpha[\mathbf{M}]$  в некоторой точке  $\mathbf{M}$ . Сначала нулевой процесс передает всем остальным процессам вектор  $\mathbf{M}$ . После этого каждый ненулевой процесс вычисляет свой квадрат выражения для (1.12) для заданных переменных  $j_1$ ,  $j_2$  ( $j_3$ ). Все многомерные массивы можно записать как одномерные, поэтому переменные  $j_1$ ,  $j_2$  ( $j_3$ ) можно заменить переменной  $k$ , которая изменяется от 1 до  $\tilde{N} = 3 \times N_s \times N_t$  ( $\times N_r$ ). Каждый процесс вычисляет суммы для своих значений  $k$ . После этого это значение ( $s(k)$ ) передается нулевому процессу, где происходит суммирование со значениями, переданными от других процессов. Основной особенностью вычисления функционала является тот факт, что при повторных вычислениях могут получаться различные значения функционала. Это связано с тем, что переменные  $s$  могут поступать в разном порядке от разных процессов, в связи с чем округление суммирования каждый раз будет давать различный результат.

Алгоритм распараллеливания задачи вычисления градиента функционала  $\text{grad } F^\alpha[\mathbf{M}]$  аналогичен схеме вычисления функционала  $F^\alpha[\mathbf{M}]$ . Но есть и отличие: каждый ненулевой процесс вычисляет  $k$ -й элемент вектора градиента  $\text{grad } F^\alpha[\mathbf{M}]$  и передает нулевому процессу вычисленный элемент  $s$  вместе с номером  $k$  этого элемента в массиве. Таким образом, при формировании массива  $\text{grad}$  неважно, в какой последовательности нулевой процесс получает элементы  $s$ , так как числа  $k$  точно определяют их позиции в массиве  $\text{grad}$ . Так же важным отличием вычисления градиента от вычисления функционала является то, что вычисления градиента сглаживающего функционала  $\Omega[\mathbf{M}]$  распараллелены.

Очень важным вопросом является эффективность алгоритмов распараллеливания. Ограничения на эффективность этих алгоритмов накладывает закон Амдала. Согласно закону Амдала небольшая часть алгоритма, которая не может быть распараллелена, ограничивает ускорение вычислений, которое может быть достигнуто за счет распараллеливания. Любая практическая задача содержит распараллеливаемые вычисления и нераспараллеливаемые (последовательные). Закон Амдала устанавливает следующие ограничения на ускорение работы алгоритма, которые дает распараллеливание:

$$S = \frac{1}{(1 - P) + P/(N - 1)},$$

где  $S$  — ускорение работы программы (относительно времени работы последовательной версии программы),  $N$  — число используемых при вычислениях процессов,  $P$  — часть вычислений, которые можно распараллелить. Таким образом, если, например, часть нераспараллеливаемых действий равна 10% от общего количества вычислений, то невозможно получить ускорения работы программы более чем в 10 раз вне зависимости от числа процессов  $N$ .

При решении нашей задачи распараллеливание осуществлялось только при вычислении функционала Тихонова  $F^\alpha[\mathbf{M}]$  и его градиента  $\text{grad } F^\alpha[\mathbf{M}]$ . Ясно, что все остальные вычисления производились последовательно. Но так как время работы данного последовательного кода пренебрежимо мало при больших размерностях сетки, время, затрачиваемое на все эти вычисления, можно считать равным нулю. Остается открытым вопрос о том, как влияют на эффективность распараллеливания последовательные вычисления сглаживающего функционала  $\Omega[\mathbf{M}]$  при вычислении функционала Тихонова.

Из формулы (1.6) для конечно-разностной аппроксимации функционала Тихонова видно, что невязка (1.7), (1.12) состоит из  $3 \times N_s \times N_t (\times N_r)$  независимо вычисляемых групп слагаемых, а сглаживающий функционал (1.8), (1.13) состоит из  $3 \times (\leq 4)$  эквивалентных (в смысле затрачиваемого на вычисления время) групп слагаемых. Соответственно для вычисления функционала Тихонова часть распараллеливаемых действий составляет

$$P \geq \frac{3N_s N_t (N_r)}{3N_s N_t (N_r) + 12} = \frac{N_s N_t (N_r)}{N_s N_t (N_r) + 4},$$

откуда видно, что даже при достаточно небольшом количестве входных данных, например, для  $N_s = N_t = (N_r) = 10$  (напомним, что эти сетки соответствуют области определения известной векторной функции  $\mathbf{B}$ ), распараллеливаемая часть вычислений составляет более 96%. Современные прикладные задачи требуют обработки гораздо большего числа входных данных, в связи с чем доля распараллеливаемых вычислений стремится к 100%, что доказывает очень высокую эффективность рассматриваемых алгоритмов распараллеливания.

Также надо заметить, что рассмотренный параллельный алгоритм имеет следующую особенность: каждый процесс вычисляет достаточно объемные (в смысле затрачиваемого на вычисления времени) группы слагаемых, в связи с чем время обмена сообщениями между процессами пренебрежимо мало по сравнению с временем работы каждого процесса, и его можно не учитывать при оценке эффективности алгоритма. По этой самой причине вычисления сглаживающего функционала  $\Omega[\mathbf{M}]$  не распараллеливаются: как видно из формулы (1.8), (1.13), при распараллеливании каждый процесс вынужден был бы производить объем действий, время вычисления которых было бы сопоставимо (и даже было бы меньше с увеличением числа процессов) с временем передачи сообщений между процессами, что привело бы к значительному замедлению работы программы.

При решении модельных задач и задач обработки экспериментальных данных использовался суперкомпьютер СКИФ МГУ “Чебышёв” Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ (подробную информацию о кластере можно найти в [7]). При написании программ на многопроцессорных системах использовалась библиотека MPI (Message Passing Interface) [8]. В качестве языка программирования был выбран Fortran 90.

## 2. Пример решения прикладной задачи восстановления параметров намагниченности некоторого объекта по измеренным значениям магнитного поля вне этого объекта

Рассмотрим важную прикладную задачу восстановления пространственного распределения магнитных диполей  $M_j$  по измеренным значениям магнитного поля  $B_i$  вне исследуемого объекта [9–11]. Такой тип задач возникает, например, в случае, когда необходимо определить области намагниченности корабля по значениям магнитного поля, измеренным триаксиальными сенсорами, расположенными на дне залива (рис. 1 и 2).

Уравнение, описывающее магнитное поле  $B_i$ , индуцируемое магнитными диполями  $M_j$ , имеет вид

$$B_i(x_s, y_s, z_s) = \sum_{j=1}^N \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(M_j, \mathbf{r}_{ij})\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^5} - \frac{M_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} \right], \quad (2.1)$$

где  $x_s, y_s, z_s$  — координаты точек (соответствуют расположению триаксиальных сенсоров), в которых определена векторная функция  $B$ ,  $r_{ij}$  — расстояние между точкой  $(x_s, y_s, z_s)$  и точкой  $(x, y, z)$ , в которой расположен магнитный диполь с номером  $j$ ,  $\mu_0$  — величина магнитной проницаемости в вакууме (в системе СИ она равна  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м),  $N$  — число магнитных диполей.

### 2.1. Двумерная постановка задачи восстановления параметров намагниченности

Если мы хотим упростить вычисления, мы можем свести задачу к двумерному случаю [3]. В данной постановке задачи мы используем допущение, что основной намагниченной частью корабля является корпус, но не делаем никаких дополнительных допущений о форме корпуса корабля, считая, что геометрические характеристики корпуса исследуемого корабля нам известны. В этом случае корпус разбивается на четырехугольные элементы поверхности, которые являются проекцией двумерной прямоугольной сетки  $Oxy$  на корпус корабля (на рис. 3 приведены примеры разбиения поверхности корабля на 584 и 1780 элементов, что соответствует 1752 и 5340 восстанавливаемым параметрам намагниченности).

В этом случае задача (2.1) сводится к решению двумерного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода в общем виде [3]:

$$B(x_s, y_s) = \int_S \mathbf{K}(x_s, y_s, x, y, z(x, y)) \hat{M}(x, y, z(x, y)) ds, \quad (2.2)$$

где неизвестная функция  $\hat{M}$  связана с  $M$  соотношением

$$\hat{M}(x, y, z(x, y)) = \frac{M(x, y, z(x, y))}{\cos \gamma(x, y, z(x, y))}$$

( $\gamma$  — угол между нормалью соответствующего элемента разбиения и осью  $Oz$ ). Здесь координаты  $x, y, z$  связаны уравнением поверхности  $z = z(x, y)$ , описывающим геометрическую структуру корпуса корабля. Ядро  $\mathbf{K}$  интегрального уравнения (2.2) соответствует уравнению (2.1) и может быть записано как

$$\mathbf{K}(x_s, y_s, x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \begin{bmatrix} 3(x - x_s)^2 - r^2 & 3(x - x_s)(y - y_s) & 3(x - x_s)z \\ 3(y - y_s)(x - x_s) & 3(y - y_s)^2 - r^2 & 3(y - y_s)z \\ 3z(x - x_s) & 3z(y - y_s) & 3z^2 - r^2 \end{bmatrix},$$

где  $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + z^2}$ .

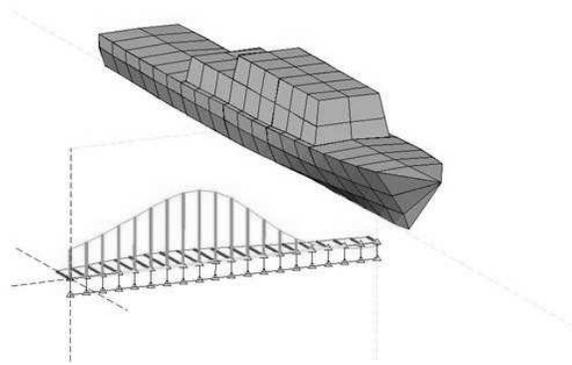


Рис. 1. Корабль проходит над массивом триаксиальных сенсоров, которые измеряют значения магнитного поля, индуцируемого магнитными диполями, распределенными по объему корабля.

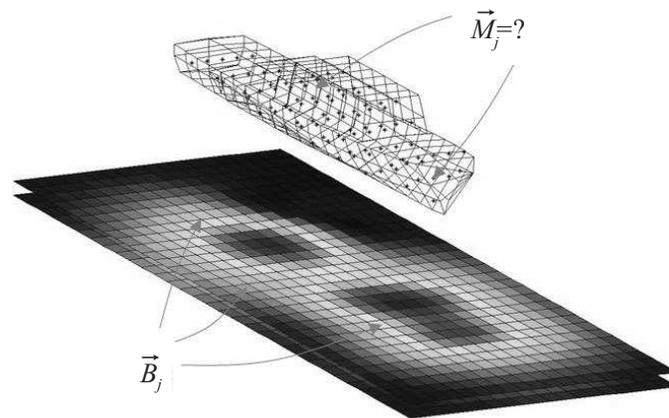


Рис. 2. Эквивалентная постановка задачи: статичный корабль над системой плоскостей, на которых измерены значения магнитного поля.

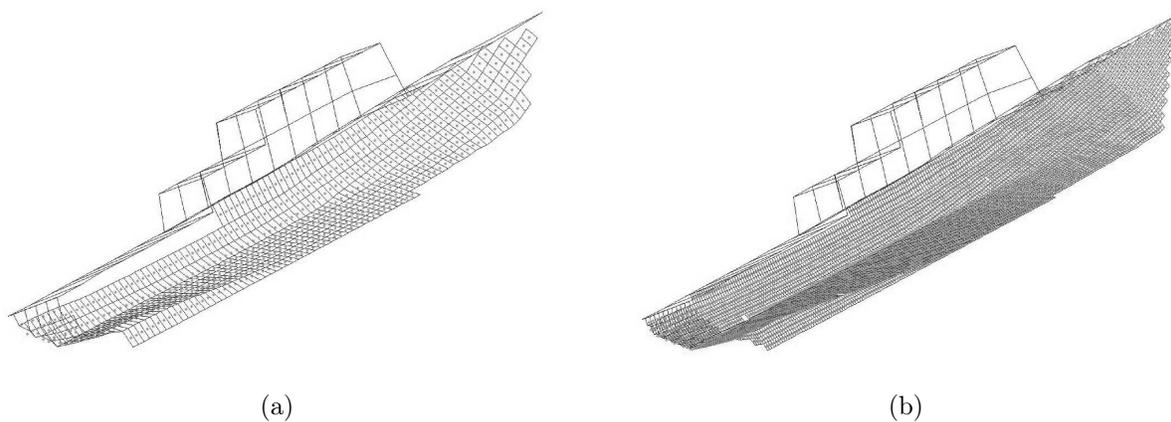


Рис. 3. Примеры разбиения корпуса: (a) — на 584 элементов и (b) — на 1780 элементов.

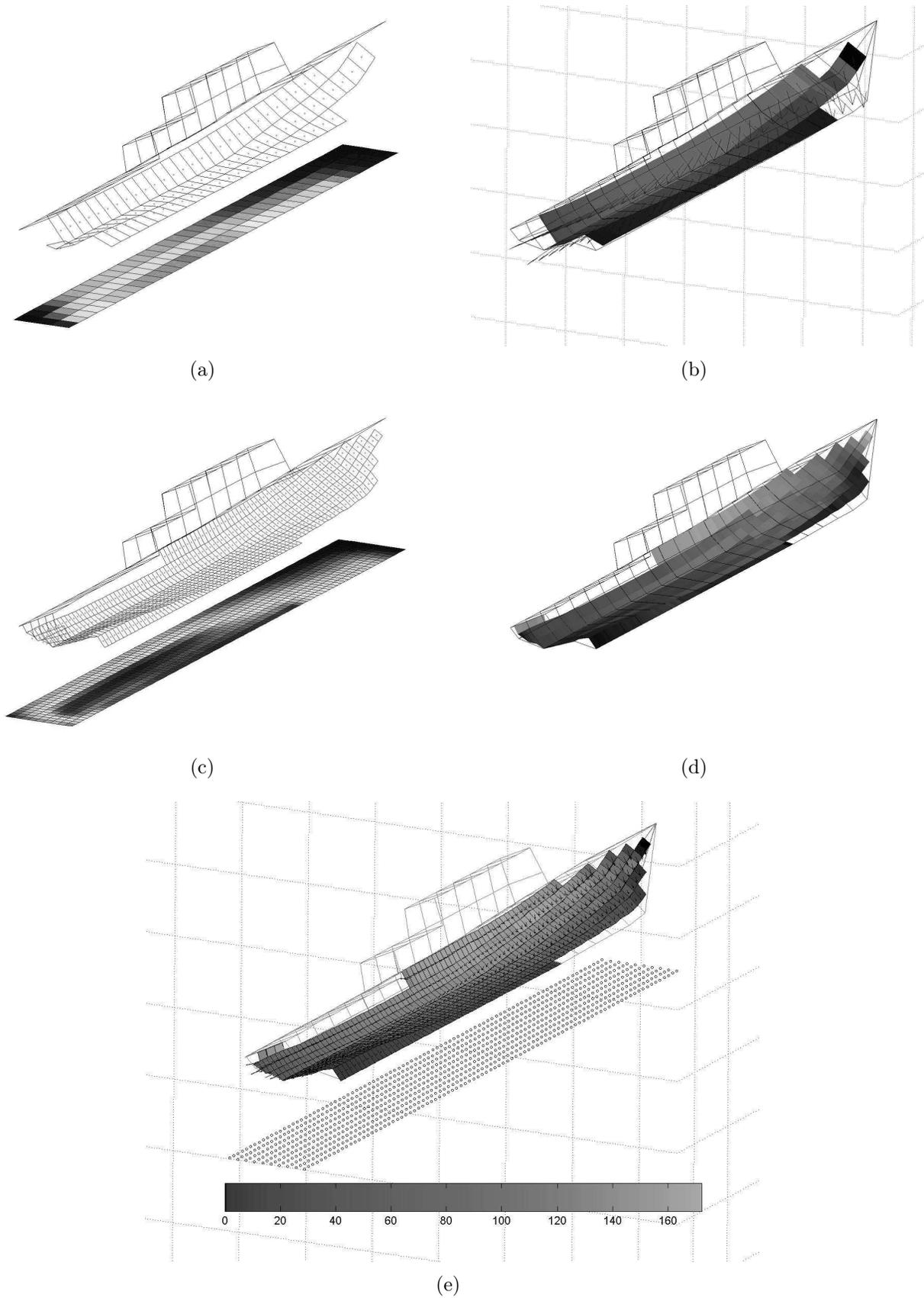


Рис. 4. Упрощенные примеры решения поставленной задачи: (a), (c) — корабль и сенсорная плоскость, расположенная под кораблем; (b), (d), (e) — значения восстановленных значений вектора  $M$ .

Если мы предположим, что  $S \subset P = \{(x, y): L_x \leq x \leq R_x, L_y \leq y \leq R_y\}$  и сенсорная плоскость ограничена прямоугольником  $Q = \{(x_s, y_s) \equiv (s, t): L_s \leq s \leq R_s, L_t \leq t \leq R_t\}$ , мы получаем двумерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

$$\mathbf{B}(s, t) = \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \mathbf{K}(s, t, x, y) \mathbf{M}(x, y) dx dy,$$

которое в точности соответствует уравнению (1.1).

На рис. 4 для наглядности представлены упрощенные результаты вычислений. На рис. 4(а) и 4(б) представлено разбиение корабля на 86 элементов, рис. 4(с) и 4(д) представляют варианты разбиения корабля на 584 элемента. В этом случае с учетом того, что в процессе решения задачи восстанавливается векторная функция, 584 элемента поверхности корабля приводят к необходимости восстановить 1752 параметра намагниченности. Вычисления заняли 539 секунд ( $\sim 10$  минут), что соответствует примерно 9–10 часам работы обычного компьютера (3Ghz).

## 2.2. Трехмерная постановка задачи восстановления параметров намагниченности

В самой общей постановке необходимо найти непрерывное распределение вектора намагниченности по объему корабля при отсутствии какой-либо информации о структуре корабля (размерах, предполагаемом распределении намагниченности и т. д.) и его положении в пространстве относительно сенсоров. В этой постановке задачи мы считаем, что никакими сведениями о корабле (или другом исследуемом объекте) мы не обладаем, а значит, не можем делать никаких существенных предположений и упрощений. Эта постановка приводит к необходимости восстанавливать значения векторной функции в пространстве по измеренным значениям магнитного поля вне корабля, а значит, и координаты точек, в которых измеряется магнитное поле, должны образовывать систему плоскостей (как минимум две). На практике это реализуется достаточно просто: на рис. 1 приведен пример расположения массива измерительных сенсоров, которому соответствует эквивалентная постановка задачи, в которой измерения сделаны на системе параллельных сенсорных плоскостей (на рис. 2 приведен пример двух таких плоскостей).

В этом случае уравнение (2.1) может быть описано эквивалентным ему интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода для векторной функции [2]:

$$\mathbf{B}(x_s, y_s, z_s) = \int_V \mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, x, y, z) \mathbf{M}(x, y, z) dv. \quad (2.3)$$

Тогда функция  $\mathbf{B}$  является векторной функцией, определенной на системе измерительных сенсорных плоскостей, и неизвестная функция  $\mathbf{M}$  — также векторная функция, определенная по объему корабля  $V$ . Здесь  $x, y, z$  — координаты точек, расположенных внутри объема корабля  $V$ . Ядро  $\mathbf{K}$  интегрального уравнения (2.3) соответствует уравнению (2.1) и может быть записано как

$$\mathbf{K}(x_s, y_s, z_s, x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \begin{bmatrix} 3(x - x_s)^2 - r^2 & 3(x - x_s)(y - y_s) & 3(x - x_s)(z - z_s) \\ 3(y - y_s)(x - x_s) & 3(y - y_s)^2 - r^2 & 3(y - y_s)(z - z_s) \\ 3(z - z_s)(x - x_s) & 3(z - z_s)(y - y_s) & 3(z - z_s)^2 - r^2 \end{bmatrix},$$

где  $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}$ . Если мы предположим, что  $V \subset P = \{(x, y, z): L_x \leq x \leq R_x, L_y \leq y \leq R_y, L_z \leq z \leq R_z\}$  и система сенсорных плоскостей ограничена прямоугольным параллелепипедом  $Q = \{(x_s, y_s, z_s) \equiv (s, t, r): L_s \leq s \leq R_s, L_t \leq t \leq R_t, L_r \leq r \leq R_r\}$ ,

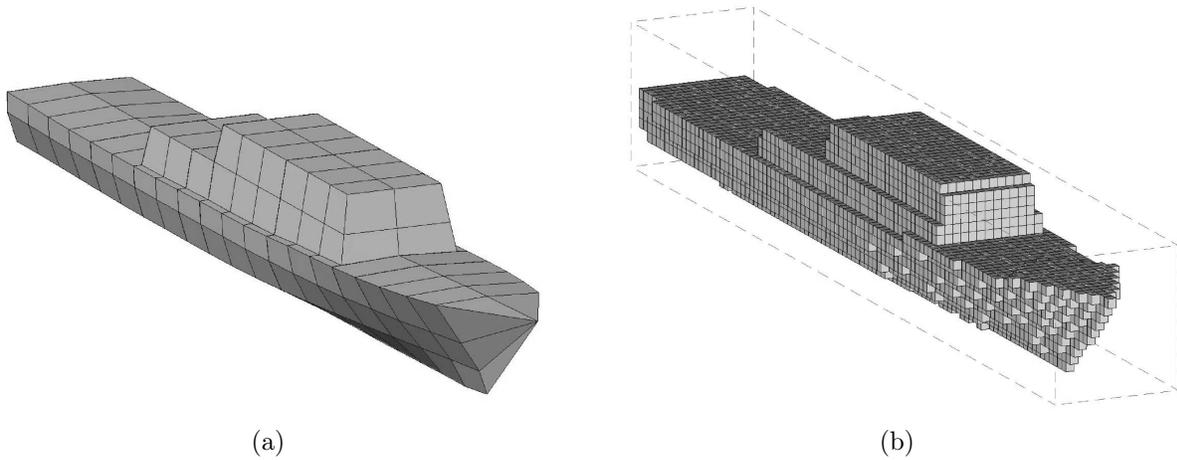


Рис. 5. (a) — модель корабля; (b) — аппроксимация корпуса корабля прямоугольными параллелепипедами ( $100 \times 15 \times 15$  элементов разбиения).

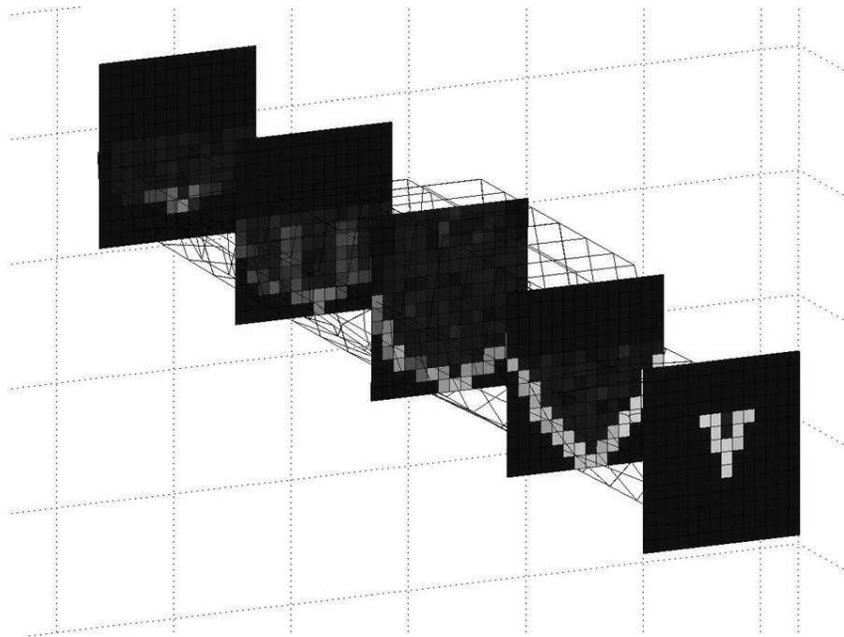


Рис. 6. Результаты восстановления распределения намагниченности по объему корабля (представлено пять срезов модуля восстановленной векторной функции  $M$ ).

мы получаем трехмерное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для векторной функции

$$B(s, t, r) = \int_{L_x}^{R_x} \int_{L_y}^{R_y} \int_{L_z}^{R_z} \mathbf{K}(s, t, r, x, y, z) \mathbf{M}(x, y, z) dx dy dz,$$

которое в точности соответствует уравнению (1.10).

Типичные размерности, соответствующие реальным приложениям:  $N_x = 100$ ,  $N_y = 15$ ,  $N_z = 15$  (рис. 5(a) и 5(b)). Входные данные симулировали данные реального эксперимента, когда измерения производились 6 триаксиальными сенсорами (расположены друг над другом в два ряда по три сенсора), и каждым из них было сделано 4000 измерений, что соответствует  $N_s = 4000$ ,  $N_t = 3$ ,  $N_r = 2$ . Такие размерности сеток соответствуют задаче восстановления 67500 неизвестных по 72000 входных данных.

В результате применения описанных в работе методов было восстановлено распределение

областей намагниченности по объему корабля. На рис. 6 представлено несколько срезов модуля восстановленной векторной функции  $M$ . Входные данные были заданы с ошибкой 1,5%.

Как видно, эти методы позволили достаточно точно восстановить корпус корабля (как часть корабля, которая наиболее сильно подвержена намагничиванию) и даже некоторую внутреннюю структуру (отчетливо можно различить двигательную установку).

Время вычислений составило примерно 29 часов при использовании 200 процессоров (Intel Xeon E5472 3.0 GHz). Столь длительное время вычислений связано с применением регуляризирующих алгоритмов, которые требуют повторных находжений минимума минимизируемого функционала для каждого значения параметра регуляризации  $\alpha$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.** Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 608 с.
2. **Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г.** Применение многопроцессорных систем для решения трехмерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода для векторных функций // Вычислит. методы и программирование. 2010. Т. 11. С. 336–343.
3. **Lukyanenko D.V., Yagola A.G., Evdokimova N.A.** Application of inversion methods in solving ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. Vol. 18, no. 9. P. 1013–1029.
4. **Ягола А.Г., Васильев М.П.** Применение многопроцессорных систем для решения двумерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // Вычисл. методы и программирование. 2003. Т. 4. С. 323–326.
5. Особенности решения задач картирования распределения химических элементов по поверхностям звезд как некорректных задач с использованием многопроцессорных систем / А.Г. Ягола, В.Н. Титаренко, М.П. Васильев, Е.В. Шимановская // Вычисл. методы и программирование. 2002. Т. 3. С. 1–13.
6. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. М.: Наука, 1990. 232 с.
7. Вычислительный кластер НИВЦ МГУ. URL: <http://parallel.ru/cluster>.
8. MPI: A message-passing interface standard. The message passing interface forum. Ver. 1.1 ( June 12, 1995). URL: <http://www.mpi-forum.org>.
9. **Ohlund G.** Design of submarine for stealth and survivability. Hamburg: UDT, 1997. P. 114–118.
10. **Totterdell A.C.** Magnetic signature control from conceptual design to ship operation. London: UDT, 1996. P. 122–130.
11. **Pei Y.H., Yeo H.G.** Sequential inversion of ship magnetization from measurements. Underwater Defense technology, Asia, 2003. Singapore, 2003. 11 p.

Лукьяненко Дмитрий Витальевич  
канд. физ.-мат. наук  
мл. науч. сотрудник  
МГУ имени М.В. Ломоносова  
e-mail: [lukyanenko@physics.msu.ru](mailto:lukyanenko@physics.msu.ru)

Поступила 31.05.2011

Ягола Анатолий Григорьевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
МГУ имени М.В. Ломоносова  
e-mail: [yagola@physics.msu.ru](mailto:yagola@physics.msu.ru)

УДК 519.17

## ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ <sup>1</sup>

А. А. Махнев, Л. Ю. Циовкина

Изучены простые делители порядков автоморфизмов и подграфы их неподвижных точек гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ . Доказано, что такой граф не является реберно симметричным.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизмы.

A. A. Makhnev, L. Yu. Tsiovkina. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ .

Prime divisors of the orders of automorphisms and their fixed point subgraphs are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ . It is proved that this graph is not edge-symmetric.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

### Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины  $a$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(a)$  обозначим  $i$ -окрестность вершины  $a$ , т. е. подграф, индуцированный  $\Gamma$  на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $a$ . Положим  $[a] = \Gamma_1(a)$ ,  $a^\perp = \{a\} \cup [a]$ .

Пусть  $\Gamma$  — граф,  $a, b$  — две вершины из  $\Gamma$ , число вершин в  $[a] \cap [b]$  обозначается через  $\mu(a, b)$  (через  $\lambda(a, b)$ ), если  $a, b$  находятся на расстоянии 2 (смежны) в  $\Gamma$ . Далее, индуцированный  $[a] \cap [b]$  подграф называется  $\mu$ -подграфом ( $\lambda$ -подграфом). Если  $\Gamma$  — граф диаметра  $d$ , то через  $\Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_t}$ , где  $i_j \leq d$  для всех  $j = 1, \dots, t$ , обозначается граф с тем же множеством вершин, что и  $\Gamma$ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии  $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$  в  $\Gamma$ .

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф  $\Gamma$  называется *регулярным степени  $k$* , если степень любой вершины из  $\Gamma$  равна  $k$ . Граф  $\Gamma$  назовем *реберно регулярным с параметрами  $(v, k, \lambda)$* , если он содержит  $v$  вершин, регулярен степени  $k$  и каждое его ребро лежит в  $\lambda$  треугольниках. Граф  $\Gamma$  — *вполне регулярный граф с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$* , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и  $[a] \cap [b]$  содержит  $\mu$  вершин для любых двух вершин  $a, b$ , находящихся на расстоянии 2 в  $\Gamma$ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Если вершины  $u, w$  находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$ , то через  $b_i(u, w)$  (через  $c_i(u, w)$ ) обозначим число вершин в пересечении  $\Gamma_{i+1}(u)$  ( $\Gamma_{i-1}(u)$ ) с  $[w]$ . Граф  $\Gamma$  диаметра  $d$  называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений  $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения  $b_i(u, w)$  и  $c_i(u, w)$  не зависят от выбора вершин  $u, w$  на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$  для любого  $i = 0, \dots, d$ . Положим  $a_i = k - b_i - c_i$ . Заметим, что для дистанционно регулярного графа  $b_0$  — это степень графа,  $c_1 = 1$ . Граф  $\Gamma$  диаметра  $d$  называется *дистанционно транзитивным*, если для любого  $i \in \{0, \dots, d\}$  и для любых двух пар вершин  $(u, w)$  и  $(y, z)$  с  $d(u, w) = d(y, z) = i$  найдется автоморфизм  $g$  графа  $\Gamma$  такой,

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), программы Отделения математических наук РАН (09-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1008) и с НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009).

что  $(u^g, w^g) = (y, z)$ . Для подмножества  $X$  автоморфизмов графа  $\Gamma$  через  $\text{Fix}(X)$  обозначается множество всех вершин графа  $\Gamma$ , неподвижных относительно любого автоморфизма из  $X$ . Далее, через  $p_{ij}^l(x, y)$  обозначим число вершин в подграфе  $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$  для вершин  $x, y$ , находящихся на расстоянии  $l$  в графе  $\Gamma$ . В дистанционно регулярном графе числа  $p_{ij}^l(x, y)$  не зависят от выбора вершин  $x, y$ , обозначаются  $p_{ij}^l$  и называются *числами пересечения* графа  $\Gamma$ .

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

Пусть  $\mathcal{F}$  — некоторый класс графов. Граф  $\Gamma$  назовем *локально  $\mathcal{F}$ -графом*, если  $[a]$  лежит в  $\mathcal{F}$  для любой вершины  $a$  графа  $\Gamma$ . Если при этом класс  $\mathcal{F}$  состоит из графов, изоморфных некоторому графу  $\Delta$ , то граф  $\Gamma$  назовем *локально  $\Delta$ -графом*.

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000.

**Предложение 1.** Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на  $v \leq 1000$  вершинах,  $\lambda = 2$  и  $\mu > 1$ . Тогда верно одно из утверждений:

- (1)  $\Gamma$  — примитивный граф с массивом пересечений  $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$ ,  $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$ ,  $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$ ,  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ ,  $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ ;
- (2)  $\Gamma$  — антиподальный граф с  $\mu = 2$  и массивом пересечений  $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$ ,  $r \in \{3, 4, \dots, 21\} - \{10, 16\}$  и  $v = 2r(r + 1)$ ;
- (3)  $\Gamma$  — антиподальный граф с  $\mu \geq 3$  и массивом пересечений  $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$ ,  $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$ ,  $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ ,  $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$ ,  $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$ ,  $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$ ,  $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$ .

Предполагается исследование реберно симметричных графов с такими массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ .

Граф с массивом пересечений  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$  имеет  $v = 1 + 35 + 560 + 160 = 756$  вершин и спектр  $35^1, 7^{270}, -1^{245}, -7^{240}$ , причем  $\Gamma_3$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(756, 160, 40, 32)$  и спектром  $160^1, 16^{245}, -8^{510}$ .

**Теорема.** Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент из  $G$  простого порядка  $p$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$  и выполняются следующие утверждения:

- (1)  $\Omega$  — пустой граф и либо
  - (i)  $p = 7$ ,  $\alpha_3(g) = 168s$ ,  $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 42$  и  $\alpha_2(g) = 798 - 98l - 210s$ ;
  - (ii)  $p = 3$ ,  $\alpha_3(g) = 72s$ ,  $\alpha_1(g) = 42l + 18s$  и  $\alpha_2(g) = 756 - 42l - 90s$ ;
  - (iii)  $p = 2$ ,  $\alpha_3(g) = 48s$ ,  $\alpha_1(g) = 28l + 12s$  и  $\alpha_2(g) = 756 - 28l - 60s$ ;
- (2)  $\Omega$  состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в  $\Gamma$  и либо
  - (i)  $p = 5$ ,  $|\Omega| = 1$ ,  $\alpha_3(g) = 120s + 40$  и  $\alpha_1(g) = 70l + 30s + 5$ , либо
  - (ii)  $p = 7$ ,  $|\Omega| = 7r$ ,  $\alpha_3(g) = 168s + 112/r$  и  $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 49r$ ,  $s \leq 2/r$ ,  $r \in \{1, 2\}$  или  $|\Omega| = 21$ ,  $\alpha_3(g) = 0$  и  $\alpha_1(g) = 98l + 49$ ,  $l \leq 6$ ;
- (3)  $p = 2$ ,  $|\Omega| = 2t$ ,  $\alpha_3(g) = 48l - 16t$ ,  $\alpha_1(g) = 28s + 12l - 14t$  и либо
  - (i) для любой вершины  $a$  из  $\Omega$  подграф  $\Gamma_3(a)$  не пересекает  $\Omega$  и  $|\Omega| \leq 36$ , либо
  - (ii)  $\Omega$  содержит вершину степени 1 и  $|\Omega| \leq 50$ , либо
  - (iii) степень любой вершины в  $\Omega$  не меньше 3 и не больше 19, а  $|\Omega| \leq 82$ .

**Следствие.** Граф с массивом пересечений  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$  не является реберно симметричным.

## 1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

**Лемма 1.1.** Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ . Тогда для чисел пересечения графа  $\Gamma$  верны равенства

- (1)  $p_{11}^1 = 2, p_{12}^1 = 32, p_{13}^1 = 0, p_{22}^1 = 400, p_{23}^1 = 128, p_{33}^1 = 32;$
- (2)  $p_{11}^2 = 2, p_{12}^2 = 25, p_{13}^2 = 8, p_{22}^2 = 414, p_{23}^2 = 120, p_{33}^2 = 32;$
- (3)  $p_{11}^3 = 0, p_{12}^3 = 28, p_{13}^3 = 7, p_{22}^3 = 420, p_{23}^3 = 112, p_{33}^3 = 40.$

**Доказательство.** Из [2, лемма 4.1.7] следуют равенства

$$p_{i-1}^1 = c_i k_i / k, p_{ii}^1 = a_i k_i / k, p_{i+1}^1 = b_i k_i / k,$$

$$p_{i-2}^i = c_{i-1} c_i / \mu, p_{i+12}^{i-1} = b_{i-1} b_i / \mu, p_{i-1i+1}^2 = k_i c_i b_i / (k b_1),$$

$$p_{i2}^{i-1} = b_{i-1} (a_i + a_{i-1} - a_1) / \mu, p_{i2}^{i+1} = c_{i+1} (a_i + a_{i+1} - a_1) / \mu.$$

Аналогично,  $p_{11}^1 = a_1 k_1 / k, p_{22}^1 = a_2 k_2 / k$  и  $p_{33}^1 = a_3 k_3 / k.$

Далее,  $p_{12}^3 = c_2 c_3 / \mu, p_{13}^3 = k_2 c_2 b_2 / (k b_1), p_{22}^3 = p_{21}^3 (a_2 + a_3 - a_1) / \mu$  и  $p_{23}^3 = b_2 (a_3 + a_2 - a_1) / \mu.$

Снова по [2, лемма 4.1.7] получим  $p_{22}^2 = (p_{11}^2 b_1 + p_{12}^2 (a_2 - a_1) + p_{13}^2 c_3 - p_{02}^2 b_0) / \mu, p_{23}^3 = (p_{12}^3 b_2 + p_{13}^3 (a_3 - a_1) - p_{03}^3 b_0) / \mu$  и  $p_{33}^3 = (p_{22}^3 b_2 + p_{23}^3 (a_3 - a_2) - p_{13}^3 b_1) / c_3.$

Отсюда следуют указанные равенства.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [3]. При этом граф  $\Gamma$  рассматривается как симметричная схема отношений  $(X, \mathcal{R})$  с  $d$  классами, где  $X$  — множество вершин графа,  $R_0$  — отношение равенства на  $X$  и для  $i \geq 1$  класс  $R_i$  состоит из пар  $(u, w)$  таких, что  $d(u, w) = i$ . Для  $u \in \Gamma$  положим  $k_i = |\Gamma_i(u)|, v = |\Gamma|$ . Классу  $R_i$  отвечает граф  $\Gamma_i$  на множестве вершин  $X$ , в котором вершины  $u, w$  смежны, если  $(u, w) \in R_i$ . Пусть  $A_i$  — матрица смежности графа  $\Gamma_i$  для  $i > 0$  и  $A_0 = I$  — единичная матрица. Тогда  $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_k$  для подходящих неотрицательных целых  $p_{ij}^l$ .

Пусть  $P_i$  — матрица, в которой на месте  $(j, l)$  стоит  $p_{ij}^l$ . Тогда собственные значения  $p_1(0), \dots, p_1(d)$  матрицы  $P_1$  являются собственными значениями графа  $\Gamma$  кратностей  $m_0 = 1, \dots, m_d$ . Заметим, что матрица  $P_j$  является значением некоторого рационального многочлена от  $P_1$ , поэтому упорядочение собственных значений матрицы  $P_1$  задает порядок на множестве собственных значений матрицы  $P_j$ . Матрицы  $P$  и  $Q$ , у которых на месте  $(i, j)$  стоят  $p_j(i)$  и  $q_j(i) = m_j p_i(j) / n_i$  соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством  $PQ = QP = vI$ .

**Предложение 2** [4, теорема 17.12]. Пусть  $u_j$  и  $w_j$  — левый и правый собственные векторы матрицы  $P_1$ , отвечающие собственному значению  $p_1(j)$  и имеющие первую координату 1. Тогда кратность  $m_j$  собственного значения  $p_1(j)$  равна  $v / \langle u_j, w_j \rangle$ .

Фактически из доказательства предложения следует, что  $w_j$  являются столбцами матрицы  $P$  и  $m_j u_j$  являются строками матрицы  $Q$ .

Подстановочное представление группы  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  на вершинах графа  $\Gamma$  обычным образом дает матричное представление  $\psi$  группы  $G$  в  $GL(v, \mathbf{C})$ . Пространство  $\mathbf{C}^v$  является ортогональной прямой суммой собственных  $G$ -инвариантных подпространств  $W_0, \dots, W_d$  матрицы смежности  $A = A_1$  графа  $\Gamma$ . Для любого  $g \in G$  матрица  $\psi(g)$  перестановочна с  $A$ , поэтому подпространство  $W_i$  является  $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть  $\chi_i$  — характер представления  $\psi_{W_i}$ . Тогда (см. [3, § 3.7]) для  $g \in G$  получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где  $\alpha_j(g)$  — число точек  $x$  из  $X$  таких, что  $(x, x^g) \in R_j$ . Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для  $\chi_i(g)$  — число рациональное, то  $\chi_i(g)$  — целое число.

**Лемма 1.2.** Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ . Если  $g \in G$ ,  $\chi_1$  — характер проекции представления  $\psi$  на подпространство размерности 270,  $\chi_2$  — характер проекции представления  $\psi$  на подпространство размерности 245, то  $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$  для любого натурального числа  $l$ , взаимно простого с  $|g|$ ,

$$\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g)/4)/14,$$

$$\chi_2(g) = (8\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/24 - 7.$$

Если  $|g| = p$  — простое число, то  $\chi_1(g) - 270$  и  $\chi_2(g) - 245$  делятся на  $p$ .

**Доказательство.** Имеем

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 35 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 32 & 25 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например,  $p_1(1) = 7$ . Тогда

$$P_1 - 7I = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 & 0 \\ 35 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 32 & 18 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если  $(1, x_2, x_3, x_4)$  — вектор-строка из ядра матрицы  $P_1 - 7I$ , то  $x_2 = 1/5$ ,  $x_3 = 0$  и  $x_4 = -1/20$ . Отсюда

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 270 & 54 & 0 & -27/2 \\ 245 & -7 & -7 & 49/2 \\ 240 & -48 & 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g)/4)/14$ .

Аналогично,  $\chi_2(g) = (35\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 7/2\alpha_3(g))/108$ . Подставляя  $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 756 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$ , получим  $\chi_2(g) = (8\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/24 - 7$ .

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 2].

## 2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$

В этом разделе  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . По [2, предложение 1.3.2] порядок клики  $L$  из  $\Gamma_3$  не больше 21, причем в случае равенства любая вершина из  $\Gamma_3 - L$  смежна ровно с 4 вершинами из  $L$ . Порядок коклики в  $\Gamma_3$  не превосходит 36.

Кроме того, для произвольной вершины  $u$  из  $\Gamma$  подграф  $\Gamma_3(u)$  — регулярный граф степени 7 на 160 вершинах.

**Лемма 2.1.** Если  $\Omega$  — пустой граф, то  $\alpha_3(g) = 24r$  и выполняется одно из утверждений:

- (1)  $p = 7$ ,  $\alpha_3(g) = 168s$ ,  $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 42$  и  $\alpha_2(g) = 798 - 98l - 210s$ ;
- (2)  $p = 3$ ,  $\alpha_3(g) = 72s$ ,  $\alpha_1(g) = 42l + 18s$  и  $\alpha_2(g) = 756 - 42l - 90s$ ;
- (3)  $p = 2$ ,  $\alpha_3(g) = 48s$ ,  $\alpha_1(g) = 28l + 12s$  и  $\alpha_2(g) = 756 - 28l - 60s$ .

**Доказательство.** Так как  $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ , то  $p = 2, 3$  или  $7$ . Из целочисленности  $\chi_2(g)$  следует, что  $\alpha_3(g) = 24r$ .

Пусть  $p = 7$ . Тогда  $\chi_2(g) - 245 = \alpha_3(g)/24 - 252$  делится на 7, поэтому  $\alpha_3(g) = 168s$ . Далее,  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 42s)/14$  сравнимо с  $-3$  по модулю 7. Отсюда  $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 42$ ,  $\alpha_2(g) = 798 - 98l - 210s$ .

Пусть  $p = 3$ . Тогда  $\chi_2(g) - 245 = \alpha_3(g)/24 - 252$  делится на 3, поэтому  $\alpha_3(g) = 72s$ . Далее,  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 18s)/14$  делится на 3. Отсюда  $\alpha_1(g) = 18s + 42l$ ,  $\alpha_2(g) = 756 - 42l - 90s$ .

Пусть  $p = 2$ . Тогда число  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - \alpha_3(g)/4)/14$  четно. Далее, число  $\chi_2(g) - 245 = \alpha_3(g)/24 - 252$  четно, поэтому  $\alpha_3(g) = 48s$ ,  $\alpha_1(g) = 28l + \alpha_3(g)/4 = 28l + 12s$ ,  $\alpha_2(g) = 756 - 28l - 60s$ . Лемма доказана.

В леммах 2.2–2.4 предполагается, что  $\Omega$  содержит вершину  $a$ .

**Лемма 2.2.** *Если  $\Omega$  состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в  $\Gamma$ , то верно одно из утверждений*

(1)  $p = 5$ ,  $|\Omega| = 1$ ,  $\alpha_3(g) = 120s + 40$  и  $\alpha_1(g) = 70l + 30s + 5$ ;

(2)  $p = 7$  и либо

(i)  $|\Omega| = 7$ ,  $\alpha_3(g) = 168s + 112$  и  $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 49$ ,  $s \leq 2$ , либо

(ii)  $|\Omega| = 14$ ,  $\alpha_3(g) = 168s + 56$  и  $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 98$ ,  $s \leq 1$ , либо

(iii)  $|\Omega| = 21$ ,  $\alpha_3(g) = 0$  и  $\alpha_1(g) = 98l + 49$ ,  $l \leq 6$ .

**Доказательство.** Пусть  $\Omega$  состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в  $\Gamma$ . Тогда  $\Omega$  является кликой в сильно регулярном графе  $\Gamma_3$  и  $|\Omega| \leq 21$ .

Если  $|\Omega| = 1$ , то  $p = 5$ ,  $\chi_2(g) = (8 + \alpha_3(g))/24 - 7$ , поэтому  $(8 + \alpha_3(g))/24$  сравнимо с  $-3$  по модулю 5 и  $\alpha_3(g) = 120s + 40$ ,  $s \leq 5$ . Далее,  $\chi_1(g) = (5 + \alpha_1(g) - 30s - 10)/14$  делится на 5, поэтому  $\alpha_1(g) = 70l + 30s + 5$ .

Пусть  $|\Omega| > 1$ . Так как  $p_{13}^3 = 7$ , то  $p = 7$  и  $|\Omega| = 7, 14$  или 21. В случае  $|\Omega| = 7$  имеем  $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) \geq 245$ . Далее,  $\chi_2(g) = (56 + \alpha_3(g))/24 - 7$ , поэтому  $\alpha_3(g) = 168s + 112$ ,  $s \leq 2$ . Наконец,  $\chi_1(g) = (35 + \alpha_1(g) - \alpha_3(g)/4)/14$ , причем  $\chi_1(g) - 270$  делится на 7, поэтому  $(7 + \alpha_1(g) - 42s)/14$  сравнимо с  $-3$  по модулю 7 и  $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 49$ .

В случае  $|\Omega| = 14$  имеем  $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) \geq 490$ . Далее,  $\chi_2(g) = (112 + \alpha_3(g))/24 - 7$ , поэтому  $\alpha_3(g) = 168s + 56$ ,  $s \leq 1$ . Наконец,  $\chi_1(g) = (70 + \alpha_1(g) - \alpha_3(g)/4)/14$ , причем  $\chi_1(g) - 270$  делится на 7, поэтому  $(56 + \alpha_1(g) - 42s)/14$  сравнимо с  $-3$  по модулю 7 и  $\alpha_1(g) = 98l + 42s - 98$ .

Если  $|\Omega| = 21$ , то каждая  $\langle g \rangle$ -орбита длины 7 является кокликой или семиугольником. Кроме того, каждая вершина из  $\Gamma - \Omega$  смежна с единственной вершиной из  $\Omega$ , находится на расстоянии 3 от четырех вершин из  $\Omega$  и на расстоянии 2 от шестнадцати вершин из  $\Omega$ . Поэтому  $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 735$ .

Так как  $\chi_1(g) = (105 + \alpha_1(g))/14$ , то  $\alpha_1(g) = 98l + 49$ ,  $l \leq 6$ . В окрестности вершины из  $\Omega$  имеется либо пять семиугольных  $\langle g \rangle$ -орбит, либо не менее двух кокликовых  $\langle g \rangle$ -орбит. При  $l = 5, 6$  в  $\Omega$  есть по крайней мере 2 вершины, окрестности которых являются объединениями изолированных семиугольников. Лемма доказана.

До конца раздела предполагается, что  $\Omega$  содержит две вершины, расстояние между которыми в  $\Gamma$  не больше 2. Заметим, что если  $a, b \in \Omega$  и  $p > 2$ , то  $[a] \cap [b] \subset \Omega$  и  $\lambda_\Omega = 2$ .

**Лемма 2.3.** *Число  $p$  не больше 2.*

**Доказательство.** Пусть  $p > 2$ . Допустим, что  $\Omega$  содержит  $[a]$ , тогда вершина  $u \in \Gamma_2(a)$  лежит в  $[a_i] \cap [a_j]$  для некоторых вершин  $a_i, a_j$  из  $[a]$ , поэтому  $u \in \Omega$ . Отсюда  $\Gamma_2(a) \subseteq \Omega$  и  $\Gamma = \Omega$ , противоречие.

Кроме того, в окрестности каждой вершины из  $\Gamma - \Omega$  имеется не более одной вершины из  $\Omega$ . Поэтому число ребер между  $\Omega$  и  $\Gamma - \Omega$  не меньше  $p \cdot |\Omega|$  и не больше  $|\Gamma - \Omega|$ . Отсюда  $|\Omega| \leq 756/(p + 1)$ .

Пусть  $p = 31$ . Тогда  $\Omega(a)$  — четырехугольник, противоречие с тем, что  $\mu = 2$ .

Если  $p = 29$ , то  $|\Omega(a)| = 6$  и  $|\Omega| \geq 1 + 6 + 6 \cdot 3/2 = 31$ , но  $|\Omega| \leq 756/30$ , противоречие. Аналогично получим противоречие в случаях  $p = 23, 19, 17$ .

Пусть  $p = 13$ . Тогда  $|\Omega| \equiv 2 \pmod{13}$ ,  $|\Omega(a)| \equiv 9 \pmod{13}$  и  $|\Omega| \leq 54$ . Поэтому  $|\Omega(a)| = 9$ ,  $|\Omega_2(a)| = 27$  и  $|\Omega| = 41$  или  $54$ . В первом случае  $|\Omega_3(a)| = 4$ , противоречие с тем, что  $p_{13}^2 = 8$ . Во втором случае имеем  $|\Omega_3(a)| = 17$ , и каждая вершина из  $\Omega_2(a)$  смежна с 8 вершинами из  $\Omega_3(a)$ , противоречие с тем, что  $\mu = 2$ .

Пусть  $p = 11$ . Тогда  $|\Omega| \equiv 8 \pmod{11}$ ,  $|\Omega(a)| \equiv 2 \pmod{11}$  и  $|\Omega| \leq 63$ . Поэтому  $|\Omega(a)| = 2$ , противоречие.

Заметим, что если  $\Omega$  содержит изолированную вершину, то  $p = 7$  и связная компонента  $\Delta$  графа  $\Omega$  — вполне регулярный локально семиугольный граф с параметрами  $(24, 7, 2, 2)$ . Если  $p = 7$  и  $n$  — число изолированных вершин  $\Omega$ , то  $|\Omega| = 24 + n$ , число ребер между  $\Omega$  и  $\Gamma - \Omega$ , деленное на 7, равно  $5n + 4 \cdot 24$ , но не больше  $(756 - n - 24)/7$ , поэтому  $n \leq 1$ , противоречие с тем, что  $|\Omega|$  делится на 7.

Пусть  $p = 7$  и  $\Omega$  — связный граф. Тогда  $\Omega$  — вполне регулярный граф степени  $k' = 14, 21$  или  $28$ . Во всех трех случаях получим противоречие с тем, что  $|\Omega| \leq 91$ .

Если  $p = 5$ , то  $\Omega$  — вполне регулярный граф степени  $k' = 5s$ ,  $1 \leq s \leq 6$ ,  $|\Omega| \leq 126$ , поэтому  $k'^2 - k' - 250 \leq 0$  и  $k' \leq 15$ . Если  $k' = 15$ , то  $|\Omega| \geq 1 + 15 + 15 \cdot 12/2 = 106$  и число ребер между  $\Omega$  и  $\Gamma - \Omega$  не меньше  $106 \cdot 20$ , противоречие. Аналогично получим противоречие в случае  $k' = 10$ . Если  $k' = 5$ , то  $\Omega$  — локально пятиугольный граф, поэтому  $\Omega$  — граф икосаэдра и  $|\Omega| = 12$ , противоречие.

Пусть  $p = 3$ . Тогда  $\Omega$  — вполне регулярный граф степени  $k' = 3s + 2$ ,  $1 \leq s \leq 10$ ,  $|\Omega| \leq 189$ , поэтому  $k'^2 - k' - 376 \leq 0$  и  $k' \leq 17$ . Если  $k' = 17$ , то  $|\Omega| \geq 1 + 17 + 17 \cdot 15/2 = 137$  и число ребер между  $\Omega$  и  $\Gamma - \Omega$  не меньше  $137 \cdot 18$ , противоречие. Аналогичным образом получим противоречие в случаях  $k' = 14, 11, 8$ . Если  $k' = 5$ , то  $\Omega$  — локально пятиугольный граф, поэтому  $\Omega$  — граф икосаэдра,  $|\Omega| = 12$  и  $|\Omega_3(a)| = 1$ . Но  $p_{13}^2 = 8$  и поэтому  $|\Omega_3(a)|$  не меньше 2, противоречие.

**Лемма 2.4.** *Если  $p = 2$ , то выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) для любой вершины  $a$  из  $\Omega$  подграф  $\Gamma_3(a)$  не пересекает  $\Omega$  и  $|\Omega| \leq 36$ ;
- (2)  $\Omega$  содержит вершину степени 1 и  $|\Omega| \leq 66$ ;
- (3) степень любой вершины в  $\Omega$  не меньше 3 и не больше 19, а  $|\Omega| \leq 82$ .

**Доказательство.** Пусть  $p = 2$ ,  $u \in \Gamma - \Omega$ . Если  $d(u, u^g) \leq 2$ , то  $[u]$  содержит 0 или 2 вершины из  $\Omega$ .

Так как  $p_{33}^1 = p_{33}^2 = 32$ , то  $|\Gamma_3(u) - \Omega| \geq 128$ ,  $|\Gamma - \Omega| \geq 1 + 33 + 33 \cdot 30/2 + 128 = 657$ . Если  $d(u, u^g) = 3$ , то  $[u]$  не пересекает  $\Omega$  и  $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(u^g)$  содержит четное число вершин из  $\Omega$ .

Пусть  $a, b \in \Omega$ . Так как  $p_{12}^2 = 25$ , то в случае  $d(a, b) = 2$  подграф  $[a] \cap \Gamma_2(b)$  содержит вершину из  $\Omega$ . Так как  $p_{13}^3 = 7$ , то в случае  $d(a, b) = 3$  подграф  $[a] \cap \Gamma_3(b)$  содержит вершину из  $\Omega$ .

Покажем, что вершина из  $\Omega$  смежна по крайней мере с 16 вершинами из  $\Gamma - \Omega$ .

Пусть  $[a] \subset \Omega$ . Тогда для любой вершины  $u$  из  $\Gamma_2(a) - \Omega$  подграф  $[u] \cap \Omega$  содержит 2 вершины  $b, c$  из  $\Omega(a)$ . Противоречие с тем, что  $[b] \cap [c] = \{a, u\}$  содержится в  $\Omega$ .

Пусть  $|[a] - \Omega| = 2t$ . Тогда  $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| \leq 98 - (36 - 2t)$ , поэтому  $|\Gamma_2(a) - \Omega| \geq 498 - 2t$ ,  $498 - 2t \leq 2t \cdot 32$  и  $t \geq 8$ . Отсюда  $16|\Omega| \leq 2(756 - |\Omega|)$  и  $|\Omega| \leq 84$ . Причем в случае  $|\Omega| = 84$  каждая вершина из  $\Gamma - \Omega$  смежна точно с 2 вершинами из  $\Omega$  и  $\Omega$  — регулярный граф степени 19, но тогда  $|\Omega| \geq 1 + 19 + 19 \cdot 16/2 = 172$ , противоречие. Поэтому  $|\Omega| \leq 82$ .

Имеем  $\chi_2(g) = (16t + \alpha_3(g))/24 - 7$ , поэтому  $\alpha_3(g) = 48l - 16t$ . Далее,  $\chi_1(g) = (10t + \alpha_1(g) - 12l + 4t)/14$ , поэтому  $\alpha_1(g) = 28s + 12l - 14t$ .

Пусть для любой вершины  $a$  из  $\Omega$  подграф  $\Gamma_3(a)$  не пересекает  $\Omega$ . Тогда  $\Omega$  является кокликкой в графе  $\Gamma_3$  и  $|\Omega|$  не больше 36.

Пусть степень вершины  $a$  в  $\Omega$  равна 1. Тогда  $\Gamma_2(a)$  содержит 16 вершин из  $\Omega$ , смежных с парами вершин из  $[a] - b^\perp$ , переставляемых  $g$ . Для  $b \in \Omega(a)$  ее степень в  $\Omega$  также равна 1. Поэтому  $\Gamma_2(b)$  содержит 16 вершин из  $\Omega$ . Так как  $p_{13}^2 = 8$ , то  $\Gamma_2(b) \cap \Omega$  не пересекает  $\Gamma_3(a)$ . Наконец,  $|\Omega| \leq 2 + 2 \cdot 16 + 32$ . Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

### 3. Граф с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ не является реберно симметричным

До конца раздела предполагается, что  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$  и группа  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  действует транзитивно на множестве дуг графа  $\Gamma$ . Пусть  $\{a, b\}$  — ребро графа  $\Gamma$ . Тогда  $[a]$  — объединение изолированных  $n$ -угольников,  $n \in \{5, 7, 35\}$ ,  $|G : G_a| = 756$ ,  $|G_a : G_{a,b}| = 35$ ,  $|G_{\{a,b\}} : G_{a,b}| = 2$ . Кроме того,  $G_a$  является подгруппой подстановочного сплетения диэдральной группы порядка  $2n$  с помощью симметрической группы степени  $35/n$ . Заметим, что в силу теоремы  $G_{a,b}$  является 2-подгруппой в  $G$  и  $|G| = 2^{m+2} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ . Положим  $\bar{G} = G/O_2(G)$ .

**Лемма 3.1.** *Граф  $\Gamma$  не является реберно симметричным.*

**Доказательство.** Если группа  $G$  имеет холлову  $\{3, 5\}$ -подгруппу, то силовская 3-подгруппа централизует 5-подгруппу  $\langle g \rangle$ , противоречие с тем, что  $|\text{Fix}(g)| = 1$  не делится на 3. Поэтому группа  $G$  неразрешима.

Заметим, что разрешимый радикал группы  $G$  совпадает с  $O_2(G)$ . Поэтому цоколь  $\bar{T}$  группы  $\bar{G}$  — простая группа с силовской подгруппой порядка 27. Отсюда группа  $\bar{T}$  изоморфна  $J_2$  или  $U_3(3)$ . Так как порядок группы  $J_2$  делится на  $5^2$ , то в первом случае получим противоречие.

Поэтому группа  $\bar{T}$  изоморфна  $U_3(3)$ . Но порядок группы  $\text{Aut}(U_3(3))$  не делится на 5, противоречие. Лемма, а вместе с ней и следствие доказаны.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Буриченко В.П., Махнев А.А.** О вполне регулярных локально циклических графах // Современные проблемы математики: тез. XLII Всерос. мол. конф. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. С. 181–183.
2. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1989. 494 p.
3. **Cameron P.J.** Permutation Groups. London Math. Soc. Stud. Texts Vol. 45. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1999. 220 p.
4. **Cameron P.J., Lint J.H. van.** Designs, graphs, codes and their links. London Math. Soc. Stud. Texts. Vol. 22. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1991. 240 p.
5. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений  $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$  // Докл. РАН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.

Махнев Александр Алексеевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
член-корр. РАН  
зав. отделом

Институт математики и механики УрО РАН  
Уральский федеральный университет  
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 15.09.2011

Циовкина Людмила Юрьевна  
аспирант

Институт математики и механики УрО РАН  
e-mail: l.tsiovkina@gmail.com

УДК 512.772

## О ТОПОЛОГИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Н. В. Медведев, С. С. Титов

Работа посвящена изучению вопроса всюду плотности множества рациональных точек на эллиптической кривой. Исследуется гипотеза В.Н. Ушакова, требующая изучения топологии эллиптической кривой. Рассматриваются эллиптические кривые и функции Вейерштрасса с вещественными инвариантами. Доказана теорема о критерии всюду плотности множества точек на кривой. Произведен численный расчет ранга эллиптической кривой.

Ключевые слова: эллиптическая кривая, эллиптический интеграл, всюду плотность, ранг,  $L$ -функция.

N. V. Medvedev, S. S. Titov. On the topology of elliptic curves.

The paper is concerned with studying the everywhere density of the set of rational points on an elliptic curve. V.N. Ushakov's conjecture, which is related to the topology of elliptic curves, is investigated. Elliptic curves and Weierstrass functions with real invariants are considered. A criterion of the everywhere density of a set of points on a curve is proved. The rank of an elliptic curve is calculated numerically.

Keywords: elliptic curve, elliptic integral, everywhere density, rank,  $L$ -function.

## Введение

Многие задачи моделирования, геометрии, теории чисел и защиты информации сводятся, как известно, к задачам геометрии эллиптических кривых (математическая физика, теория управления, криптография) [3–8; 13–18; 20; 21]. В работе [20] В.Н. Ушаков рассматривал задачи, в которых требуется доказать конкурентность (т. е. пересечение в одной точке) трех высот или трех биссектрис, или трех медиан треугольника, или трех отрезков, соединяющих вершины треугольника с соответствующими точками Жергона. Удивительным образом оказалась связанной с геометрией египетских пирамид (пирамиды Хеопса) задача о прямоугольных треугольниках с конкурентными биссектрисой, высотой и медианой. При изучении этой задачи возникла кривая на плоскости, которую В.А. Демьяненко трансформировал в эллиптическую кривую  $y^2 = x^3 - 4x + 4$  (для простоты будем называть ее  $\Omega$ -кривой). Вычисления показали, что эта кривая обладает достаточно богатым множеством рациональных точек  $E(\mathbb{Q})$ . Построение некоторых рациональных приближений в исходной геометрической задаче о прямоугольных треугольниках приводит к проблеме всюду плотности множества  $E(\mathbb{Q})$  на эллиптических кривых и, в частности, на  $\Omega$ -кривой. В [20] В.Н. Ушаковым поставлен ряд задач, связанных с эллиптическими кривыми, и выдвинута “гипотеза А” о плотности множества  $E(\mathbb{Q})$  для  $\Omega$ -кривой. Приведем цитату из работы [20]: “гипотеза А: множество  $mP$  всюду плотно на кривой  $y^2 = x^3 - 4x + 4$ ; [...] рисунки дают убедительное подтверждение того, что гипотеза А справедлива; остается лишь дать ее доказательство. [...] При каких условиях на целочисленные коэффициенты  $a$  и  $b$  эллиптическая кривая  $y^2 = x^3 + ax + b$  обладает всюду плотным множеством рациональных точек?”. Таким образом, поставлена следующая задача: при каких условиях множество рациональных точек будет всюду плотным на эллиптической кривой? В.Н. Ушаков логично предполагает, что рациональные точки на  $\Omega$ -кривой лежат всюду плотно. Это видно из проведенных численных экспериментов построения рациональных точек на ней. Доказательство “гипотезы А” требует изучения топологии  $\Omega$ -кривой. Этой проблеме в общем случае и посвящена данная статья.

## 1. Группа точек эллиптической кривой как топологическая группа

Поскольку точки эллиптической кривой образуют, как известно, абелеву группу, естественно воспользоваться методами топологических групп, рассмотрев задачу всюду плотности в соответствующей топологии, в которой групповые операции  $E(\mathbb{R})$  непрерывны [17].

Пусть  $G$  — топологическая группа,  $\sum_e$  — некоторая полная система окрестностей ее единицы  $e$  и  $M$  — некоторое множество, всюду плотное в  $G$ . Тогда, как известно, совокупность  $\sum$  всех множеств вида  $Ux$ , где  $U \in \sum_e, x \in M$ , есть полная система окрестностей пространства  $G$ , а система  $\sum_e$  удовлетворяет следующим пяти условиям:

1. Пересечение всех множеств системы  $\sum_e$  содержит лишь  $e$ .
2. Пересечение всяких двух множеств системы  $\sum_e$  содержит некоторое третье множество системы  $\sum_e$ .
3. Для всякого множества  $U$  системы  $\sum_e$  найдется такое множество  $V$  той же системы, что  $VV^{-1} \subset U$ .
4. Для всякого множества  $U$  системы  $\sum_e$  и всякого элемента  $a \in U$  найдется такое множество  $V$  системы  $\sum_e$ , что  $Va \subset U$ .
5. Если  $U$  есть некоторое множество системы  $\sum_e$  и  $a$  — произвольный элемент группы  $G$ , то существует такое множество  $V$  системы  $\sum_e$ , что  $a^{-1}Va \subset U$ .

Для абелевой группы обычно используют не умножение, а сложение. Вместо единицы в качестве нейтрального элемента используют нуль. В группе точек эллиптической кривой нулем является бесконечно удаленная точка (в которой пересекаются все вертикальные прямые). Условие 5 для абелевой группы излишне в силу коммутативности. В качестве  $\sum_0$  выступает семейство множеств точек кривой с достаточно большими абсциссами. Довольно очевидно, что множество точек на эллиптической кривой  $E(\mathbb{R})$  над полем вещественных чисел удовлетворяет пяти вышеперечисленным условиям. Рассмотрим две точки  $P$  и  $Q$  на эллиптической кривой. Если эти точки лежат близко друг к другу, то  $x_P - x_Q$  мало. Поэтому прямая, соединяющая точки  $P$  и  $(-Q)$ , близка к вертикальной, т. е. точка  $R = P - Q$  имеет большую ординату, следовательно,  $R$  близка к  $\mathbf{0}$ , и обратно. Таким образом близость точек  $P$  и  $Q$  на эллиптической кривой  $E(\mathbb{R})$  можно рассматривать в естественной топологии ее группы.

## 2. Эллиптическая кривая и функция Вейерштрасса с вещественными инвариантами

Как известно [13], эллиптическая кривая над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$  параметризуется функцией Вейерштрасса  $\wp$  [1]. Эта функция является двояко периодической, и поэтому кривая над полем  $\mathbb{C}$  гомеоморфна двумерному тору  $\mathbb{T}^2$ . Гомеоморфизм задается эллиптическим интегралом, который задает изоморфизм группы точек эллиптической кривой  $E(\mathbb{C})$  над полем  $\mathbb{C}$  и группой комплексных чисел  $\mathbb{C}$  с операцией сложения по модулю параллелограмма периодов. Это вытекает из теорем сложения эллиптических интегралов, открытых Эйлером. Этот факт был обнаружен [2] знаменитым немецким математиком Якоби в статье “О применении теории эллиптических и абелевых интегралов в диофантовом анализе” в 1834 г. В начале своей статьи Якоби высказывает удивление, что ученый муж (т. е. Эйлер) не заметил связи, которая бросается в глаза: на современном языке она формулируется как изоморфизм топологических групп  $\mathbb{T}^2$  и  $E(\mathbb{C})$  посредством эллиптического интеграла (см. далее (2.2)). Интересно, что геометрический смысл сложения точек в  $E(\mathbb{C})$  найден Пуанкаре только на рубеже 19–20 вв. Всюду плотные подгруппы в  $E(\mathbb{C})$  давно известны как “иррациональные обмотки тора”. Рассматривая вложения  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  и кривую  $E(\mathbb{R})$ , естественно рассмотреть функцию Вейерштрасса с вещественными инвариантами над  $\mathbb{R}$ . Добавление бесконечно удаленной точки компактифицирует эту кривую. При этом логично воспользоваться теорией абелевых локально компактных групп [17]. Теперь строго оформим эти рассуждения, опираясь на теорию эллиптических функций [1, с. 144–147].

Рассмотрим переход от уравнения эллиптической кривой в канонической форме  $y^2 = x^3 + ax + b$  к уравнению кривой в инвариантах функции Вейерштрасса  $w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$ ;  $z = \wp(u)$ ;  $w = \wp'(u)$ , где  $g_2, g_3$  — вещественные инварианты [1]. Произведем замену  $w = 2y$ ,  $z = x$ . Получаем  $4y^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$ , т. е.  $y^2 = z^3 - g_2z/4 - g_3/4$ , где  $a = -g_2/4$ ,  $b = -g_3/4$ . При этом из-за изменения масштаба при растяжении переменных между дискриминантами имеется связь  $\delta = g_2^3 - 27g_3^2$  и  $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$ . Так,  $\Omega$ -кривая  $y^2 = x^3 - 4x + 4$  в инвариантах функции Вейерштрасса имеет вид:  $w^2 = 4z^3 - 16z + 16$ , т. е.  $g_2 = 16$ ,  $g_3 = -16$ . Для данной эллиптической кривой дискриминант  $\Delta = -16(-4 \cdot 64 + 27 \cdot 16) = -2816 = -2^8 \cdot 11$  [20].

Если инварианты  $g_2, g_3$  вещественны, то либо все три корня  $e_1, e_2, e_3$  многочлена  $4z^3 - g_2z - g_3$  вещественны, либо один корень вещественный (за него примем  $e_2$ ), а остальные два — комплексные сопряженные [1].

В первом случае, если дискриминант  $\delta$  положителен,  $\delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$ , пронумеруем вещественные корни так, чтобы  $e_1 > e_2 > e_3$ . Все корни предполагаются различными; это исключает обращение дискриминанта в нуль. Во втором случае, если дискриминант  $\delta$  отрицателен,  $e_1$  и  $e_3$  комплексно сопряжены. Так, для  $\Omega$ -кривой  $e_2 = -2.38297576\dots$ ,  $e_1 \approx 1.191487 + 0.508851i$ ,  $e_3 \approx 1.191487 - 0.508851i$ . Эти факты — следствие формулы

$$\delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2.$$

Функция  $\wp(u)$  с вещественными инвариантами (при любом знаке дискриминанта) имеет на вещественной оси только вещественные значения. Действительно, в случае вещественных инвариантов все коэффициенты разложения функции  $\wp$  в ряд

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \dots$$

вещественны. Отсюда следует, что и  $\wp'(u)$  вещественна при  $u \in \mathbb{R}$ . Вещественны и значения, принимаемые функцией  $\wp(u)$  на мнимой оси, при этом для вычисления полезно соотношение

$$\wp(iu; g_2, g_3) = -\wp(u; g_2, -g_3). \quad (2.1)$$

Выведем выражения для периодов  $2\omega_1, 2\omega_3$  функции  $\wp(u)$  через инварианты.

1. В случае  $\delta > 0$  рассмотрим для вещественных значений формулу

$$u = \int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \quad z = \wp(u), \quad (2.2)$$

где под корнем при  $x > e_1$  подразумевается его арифметическое значение. Отсюда вытекает, что при уменьшении  $\wp$  от  $+\infty$  до  $e_1$  величина  $u$  растет монотонно от 0 до  $\omega_1$ . Следовательно,

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}. \quad (2.3)$$

Возьмем функцию  $\wp(u; g_2, -g_3)$  и обозначим ее периоды через  $2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_3$ . Корнями многочлена  $4x^3 - g_2x + g_3$ , расположенными в порядке убывания, будут  $\tilde{e}_1 = -e_3, \tilde{e}_2 = -e_2, \tilde{e}_3 = -e_1$ . При этом соотношение (2.1) показывает, что

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\omega_3}{i}, \quad \tilde{\omega}_3 = -\frac{\omega_1}{i}. \quad (2.4)$$

По аналогии с формулой (2.3) можем написать

$$\tilde{\omega}_1 = \int_{\tilde{e}_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x + g_3}}, \quad \omega_3 = i \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x + g_3}}.$$

Таким образом, периоды  $2\omega_1, 2\omega_3$  выражены через инварианты  $g_2, g_3$  в виде интегралов, причем  $2\omega_1$  — число вещественное, а  $2\omega_3$  — число чисто мнимое. Это значит, что в рассмотренном случае положительного  $\delta$  параллелограммом периодов является прямоугольник.

2. В случае  $\delta < 0$  с помощью аналогичных соображений из (2.2) получим

$$\omega_2 = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}. \tag{2.5}$$

Снова возьмем функцию  $\wp(u; g_2, -g_3)$ . В прежних обозначениях получим, аналогично,

$$\widetilde{\omega}_2 = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x + g_3}}. \tag{2.6}$$

Примем теперь во внимание равенства (2.4), а также то, что  $\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3, \widetilde{\omega}_2 = -\widetilde{\omega}_1 - \widetilde{\omega}_3$ . Мы найдем  $\omega_1 + \omega_3 = -\omega_2, \omega_1 - \omega_3 = i\widetilde{\omega}_2$ . Таким образом, складывая и вычитая величины (2.5), (2.6), получим периоды  $2\omega_1, 2\omega_3$ . Мы видим, что в случае  $\delta < 0$  периоды  $2\omega_1, 2\omega_3$  — числа сопряженные, откуда следует, что параллелограммом периодов является ромб.

Нам нужны те значения переменной  $u$ , для которых  $\wp(u)$ , и  $\wp'(u)$  вещественны. В данном случае по модулю ромба периодов это будут только числа  $u$  на вещественной оси, полупериод  $\omega_2 = -(\omega_1 + \omega_3)$  вещественный, группа изоморфна одномерному тору  $\mathbb{T} = \mathbb{R}(\text{mod } 2\omega_2)$  (см. рис. 1).

Формулы для изоморфизма групп выписываются явно через интеграл (2.2) ввиду теоремы сложения для функции Вейерштрасса, так что  $z = \wp(u)$  есть абсцисса точки на эллиптической кривой, а  $\omega = \wp'(u)$  — ордината. Ввиду непрерывности интеграла (2.2) по нижнему пределу изоморфизм будет непрерывным, т. е. гомеоморфизмом. Итак, группа  $E(\mathbb{R})$  при  $\delta < 0$  изоморфна одномерному тору  $\mathbb{T}$ .

В случае  $\delta > 0$  имеем, как было сказано выше, прямоугольник периодов (см. рис. 2), так что группа  $E(\mathbb{C})$  топологически изоморфна двумерному тору  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}(\text{mod } (2\omega_1, 2\omega_3))$ . Аналогично предыдущему случаю  $\wp(u)$  и  $\wp'(u)$  вещественны, только если по модулю прямоугольника периодов  $u$  либо вещественно, либо имеет мнимую часть, равную мнимой части полупериода  $\omega_3$ . Вещественные значения параметра  $u$  соответствуют правой (неограниченной) ветви кривой над  $\mathbb{R}$ . Значение  $u = 0$  соответствует бесконечно удаленной точке (нулю  $\mathbf{0}$  в группе точек кривой); параметры  $u$  с мнимой частью, равной мнимой части  $\omega_3$ , соответствуют ограниченной ветви, т. е. овалообразной левой части эллиптической кривой. Непрерывность изоморфизма доказывается аналогично вышеизложенному ввиду непрерывности интеграла (2.2) по нижнему пределу.

Поскольку сумма любых двух чисел с мнимой частью, равной мнимой части  $\omega_3$ , имеет нулевую мнимую часть  $2\omega_3 \equiv 0(\text{mod } 2\omega_3)$ , т. е. вещественна, получаем изоморфизм  $E(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{T}$

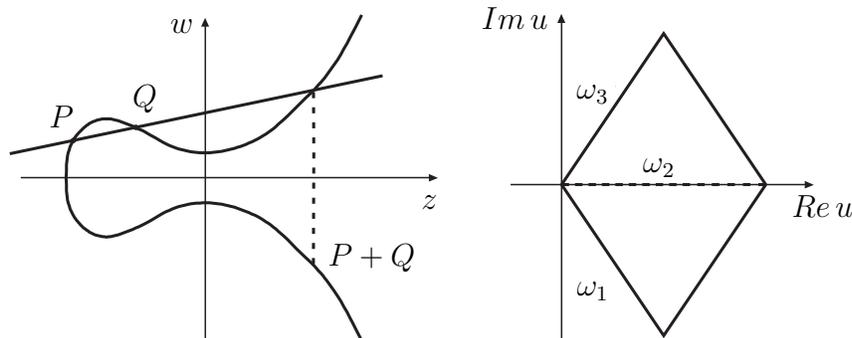


Рис. 1. Эллиптическая кривая и ромб периодов.

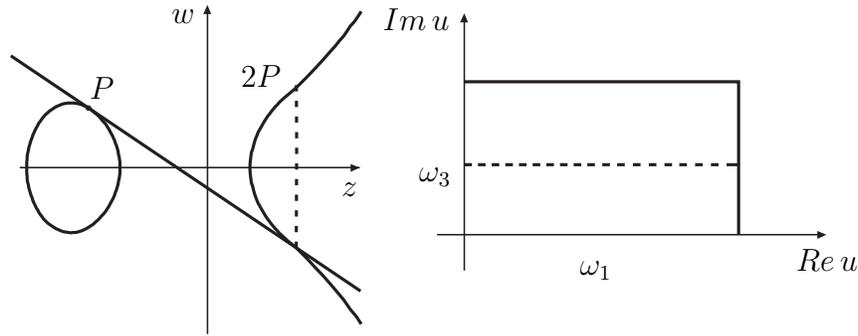


Рис. 2. Эллиптическая кривая и прямоугольник периодов.

группы  $E(\mathbb{R})$  с прямой суммой циклической группы порядка два и одномерного тора. Из этого вытекает следующая

**Теорема 1.** *Связная компонента нуля группы  $E(\mathbb{R})$  топологически изоморфна тору  $\mathbb{T}$ .*

**Следствие 1.** *Группа  $E(\mathbb{R})$  топологически изоморфна либо одномерному тору  $\mathbb{T}$  (при  $\Delta < 0$ ), либо  $Z_2 \oplus \mathbb{T}$  (при  $\Delta > 0$ ).*

### 3. Плотность рациональных точек на кривой

Как известно, любая точка бесконечного порядка в одномерном торе порождает в нем всюду плотную подгруппу, так называемую иррациональную обмотку тора [12]. Этим доказана

**Теорема 2.** *Любая точка бесконечного порядка порождает группу, содержащую всюду плотную подгруппу связной компоненты нуля в группе  $E(\mathbb{R})$ .*

**Следствие 2.** *Если эллиптическая кривая на поле  $\mathbb{Q}$  имеет ранг больше нуля, то рациональные точки на ее правой ветви располагаются всюду плотно.*

**Следствие 3.** *При  $\Delta > 0$  любая точка бесконечного порядка, лежащая на левой ветви эллиптической кривой, порождает подгруппу, всюду плотную в  $E(\mathbb{R})$ .*

**Следствие 4.** *В случае  $\Delta > 0$ , если ранг эллиптической кривой над  $\mathbb{Q}$  больше нуля и есть хотя бы одна рациональная точка на левой ветви эллиптической кривой, то множество рациональных точек всюду плотно на всей кривой.*

Применим развитую выше теорию к задаче В.Н. Ушакова, поставленной в работе [20] об исследовании множества рациональных точек  $E(\mathbb{Q})$  на  $\Omega$ -кривой. Отметим, что на сегодняшний день не существует единого алгоритма поиска рациональных точек на эллиптических кривых.

На эллиптической кривой [20] найдены следующие целые рациональные точки:  $-3P = (x_1, y_1) = (-2, 2)$ ;  $3P = (x_2, y_2) = (-2, -2)$ ;  $2P = (x_3, y_3) = (0, 2)$ ;  $-2P = (x_4, y_4) = (0, -2)$ ;  $-4P = (x_5, y_5) = (1, 1)$ ;  $4P = (x_6, y_6) = (1, -1)$ ;  $1P = (x_7, y_7) = (2, 2)$ ;  $-P = (x_8, y_8) = (2, -2)$ ;  $-5P = (x_9, y_9) = (6, 14)$ ;  $5P = (x_{10}, y_{10}) = (6, -14)$ ;  $6P = (x_{11}, y_{11}) = (8, 22)$ ;  $-6P = (x_{12}, y_{12}) = (8, -22)$ ;  $-11P = (x_{13}, y_{13}) = (310, 5458)$ ;  $11P = (x_{14}, y_{14}) = (310, -5458)$ .

Это множество, видимо, и есть множество целочисленных точек, что подтверждается путем сплошного перебора (“методом грубой силы” [18]) в системе MATLAB, где  $-2 \leq x \leq 1000000$ . При  $y = 0$  уравнение  $x^3 - 4x + 4 = 0$  не имеет рациональных корней. Все известные рациональные точки на этой эллиптической кривой входят в одну серию, порожденную точкой  $P = (x_7, y_7) = (2, 2)$ , как целые кратные этой точки вида  $kP$ , где  $k$  — целое число.

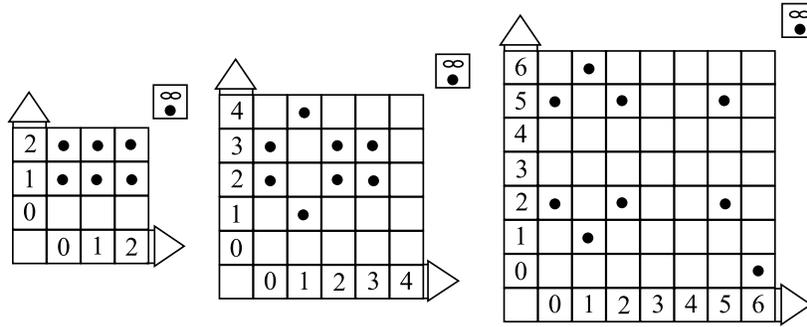


Рис. 3. Кривая  $y^2 = x^3 - 4x + 4$  над полями  $GF(3)$ ,  $GF(5)$  и  $GF(7)$ .

Используя арифметику длинных чисел в системе MATLAB, мы реализовали программу поиска точек  $kP$  при больших  $k$  и разложения числителя и знаменателя в произведение простых чисел. Результаты совпали с вычислениями В.Н. Ушакова [20].

Приведем примеры точек на кривой. Пусть точка  $P = (2, 2)$ , тогда точка  $40P = (x, y)$ .

$$x = \frac{6842296746792370323149869881}{4707170986824452430287314276} = \frac{3^2 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 163 \cdot 839 \cdot 136521199 \cdot 61265513}{2^2 \cdot 7^2 \cdot 277^2 \cdot 169217^2 \cdot 104551^2};$$

$$y = -\frac{362077523342554990622151678980410735228339}{322953474560414360335499847218317184607976} - \frac{19 \cdot 19056711754871315295902719946337407117281}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 277^3 \cdot 169217^3 \cdot 104551^3};$$

$$41P = (x, y),$$

$$x = -\frac{181226218994295581157409868326}{209127443065468492080485963449} - \frac{2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 11425787 \cdot 62070119 \cdot 6691 \cdot 2539}{1307^2 \cdot 4145257^2 \cdot 84407^2};$$

$$y = \frac{249670492375287945529792531595246833484748682}{95634929326401914649422056773813468051478957} = \frac{2 \cdot 158407707050071741224978273029 \cdot 4341394523 \cdot 181523}{1307^3 \cdot 4145257^3 \cdot 84407^3}.$$

Все вычисления проводились в системе MATLAB с использованием символьной арифметики. Нам удалось досчитать до точки  $1024P$  (всего около 90000 знаков в абсциссе и ординате).

Для ответа на вопрос, является ли группа, порожденная точкой  $P$ , всюду плотной, решим задачу о ранге этой кривой  $E(\mathbb{Q})$ . Рассмотрим эллиптическую кривую  $y^2 = x^3 - 4x + 4$  над полями  $GF(3)$ ,  $GF(5)$  и  $GF(7)$ , т.е. кривые  $E(GF(3))$ ,  $E(GF(5))$ ,  $E(GF(7))$  (см. рис. 3).

Черные точки на рис. 3 символизируют точки на соответствующей расширенной плоскости, принадлежащие исследуемой кривой. Над полем  $GF(11)$  рассматривать нельзя, так как дискриминант  $\Delta = -2816$  делится на 11. Нельзя брать  $GF(2)$ , так как дискриминант четный.

Количество точек  $N_3$  в поле  $GF(3)$  равно 7, количество точек  $N_5$  в поле  $GF(5)$  равно 9, количество точек  $N_7$  в поле  $GF(7)$  равно 10, наибольший общий делитель этих чисел равен 1. Из этого следует по теореме Лагранжа о подгруппах и по теореме Лутц — Нагеля о точках кручения на эллиптической кривой [3; 10], что точек кручения на данной кривой нет. В работе [20] это доказано другим методом. Следовательно, серия точек является бесконечной, и ранг исследуемой кривой  $r \geq 1$ . Отсюда и из следствия 2 вытекает обосновывающее “гипотезу А” В.Н. Ушакова следующее

**Утверждение 1.** Множество рациональных точек на  $\Omega$ -кривой всюду плотно.

Представляется, что при  $r > 1$  рациональные точки лежат на кривой “еще более плотно”. Задачу плотности можно ставить по-разному. Например, как задачу нахождения меры плотности рациональных точек на эллиптической кривой.

#### 4. Ранг $\Omega$ -кривой

Численно покажем, что ранг  $\Omega$ -кривой равен 1. По гипотезе Берча и Свиннертон-Дайера [22] ранг  $r$  эллиптической кривой определяется асимптотическим законом

$$f(x) = \prod_{p \leq x} \frac{N_p}{p} \approx C \log(x)^r, \quad (4.1)$$

где  $x \rightarrow \infty$ ,  $p$  пробегает множество простых чисел (для  $\Omega$ -кривой — за исключением двойки и 11, так как это делители  $\Delta$ ),  $N_p$  — количество точек на кривой в поле  $GF(p)$ .

Взяв множество простых чисел  $p$ , состоящее из 5000 элементов, мы построили кривые  $E(GF(p))$  и вычислили  $N_p = |E(GF(p))|$  для каждого из них. Таким образом, получили график зависимости  $\ln f(x)$  от  $\ln(\ln x)$  для  $\Omega$ -кривой (см. рис. 4), причем ось  $OX$  измеряется в двойном логарифмическом масштабе, а ось  $OY$  — в логарифмическом масштабе.

Как видно из графика на рис. 4, угол наклона прямой, аппроксимирующей данную кривую, близок к  $45^\circ$ , следовательно,  $r = 1$ , что вытекает из логарифмирования асимптотического равенства (4.1). С современной точки зрения на математическую строгость для рассматриваемой задачи о ранге этого достаточно для численного обоснования ранга данной кривой. Принято считать, что ранг допустимо находить таким методом численного моделирования.

В дополнение к этому рассмотрим  $L$ -функцию для эллиптической кривой  $y^2 = x^3 - 4x + 4$

$$L(s) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}, \quad a_p = p - N_p. \quad (4.2)$$

Хотя это Эйлерово произведение гарантированно сходится лишь при  $Re(s) > 1.5$ , в наших вычислениях параметр  $s$  изменяется от 1 до 3. В результате получился следующий график зависимости  $L(s)$  для эллиптической кривой  $y^2 = x^3 - 4x + 4$  (см. рис. 5).

Поясним, что численные расчеты могут давать правильный результат даже для расходящихся рядов и произведений [19]. Например, так бывает для асимптотических разложений [9]. Это может быть объяснено неявным использованием в схеме численного расчета регуляризующих процедур (например, схемная вязкость в газодинамических расчетах или использование ядра Фейера для суммирования рядов Фурье). Получается  $L(1) = 0.0078 \neq 0$ , но близко к 0,

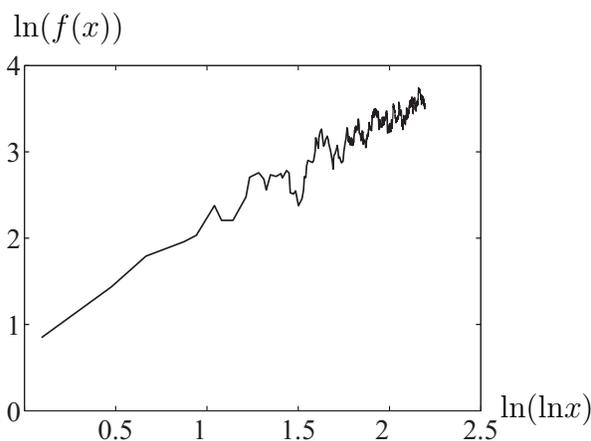


Рис. 4. График зависимости  $f(x)$ .

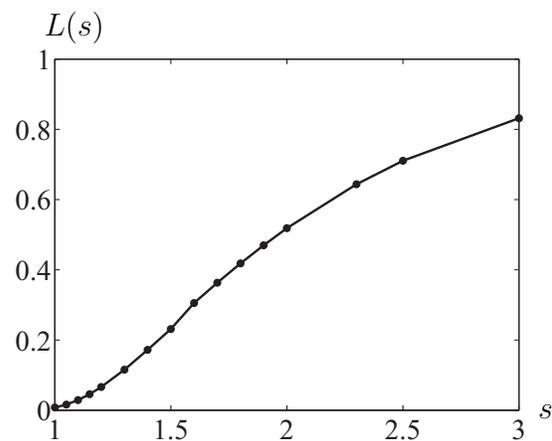


Рис. 5. График зависимости  $L(s)$ .

что неплохо для расходящегося, возможно, произведения (4.2), т. е.  $r > 0$ . Наклон прямой  $L(s)$  около единицы  $s \approx 1$  равен примерно  $30^\circ$ , что отделено от нуля в рамках вычислительной процедуры, следовательно,  $r = 1$  (это соответствует вычислениям (4.1)).

В.А. Кольвагин показал [11], что эллиптическая кривая  $E$ , для которой  $L(1) \neq 0$ , имеет ранг 0, а ранг кривой, для которой  $L(s)$  имеет при  $s = 1$  корень первого порядка, равен единице; т. е. он доказал гипотезу Берча и Свиннертон-Дайера для ранга  $r = 1$ . Отсюда можно сделать вывод, который мы не будем называть теоремой, как доказанный не теоретически; мы будем считать численно полученным

**Утверждение 2.** *Ранг  $\Omega$ -кривой равен единице.*

Итак, в статье доказана “гипотеза А”, выдвинутая В.Н. Ушаковым в работе [20]: множество рациональных точек на эллиптической кривой  $y^2 = x^3 - 4x + 4$  всюду плотно. Доказана общая теорема о критерии всюду плотности множества точек на эллиптической кривой над  $\mathbb{R}$ . Установлена связь между группой точек эллиптической кривой над полем вещественных чисел и одномерным тором. Рассмотрена  $L$ -функция для  $\Omega$ -кривой. На основе гипотезы Берча и Свиннертон-Дайера, в части, доказанной В.А. Кольвагиным, численно получено, что ранг кривой  $y^2 = x^3 - 4x + 4$  равен 1. Разработанный в статье метод может быть использован в дальнейших исследованиях, в том числе для решения прикладных задач, требующих привлечения эллиптических кривых.

Авторы благодарят В.Н. Ушакова за постановку задач и внимание к работе, а также Ю.Н. Мухина за полезные обсуждения вопросов в теории топологических групп.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
2. **Башмакова И.Г.** Диофант и диофантовы уравнения. М.: Наука, 1972. 68 с.
3. Элементарное введение в эллиптическую криптографию: Алгебраические и алгоритмические основы / А.А. Болотов [и др.]. М.: КомКнига, 2006. 328 с.
4. **Болотова Е.А., Коновалова С.С., Титов С.С.** Свойства решеток разграничения доступа, совершенные шифры и схемы разделения секрета // Проблемы безопасности и противодействия терроризму: материалы IV Междунар. науч. конф. М.: МЦНМО, 2009. Т. 2. С. 71–86.
5. Введение в криптографию / Под общ. ред. В.В. Яценко. СПб: Питер, 2001. 288 с.
6. **Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А.** Алгебра: учебник для вузов. М.: Гелиос АРВ, 2003. 336 с.
7. **Глухов М.М.** О применениях квазигрупп в криптографии // Прикл. дискрет. математика. 2008. № 2. С. 28–32.
8. **Ибрагимов Н.Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Мир, 1983. 280 с.
9. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
10. **Кнэпп Э.** Эллиптические кривые. М.: Факториал Пресс, 2004. 488 с.
11. **Кольвагин В.А.** О группах Морделла — Вейля и Шафаревича — Тэйта для эллиптических кривых Вейля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 6. С. 1154–1180.
12. **Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А.** Избранные задачи по вещественному анализу. М.: Наука, 1992. 432 с.
13. **Маркушевич А.И.** Введение в классическую теорию абелевых функций. М.: Наука, 1979. 240 с.
14. Математические и компьютерные основы криптологии: уч. пособие для вузов / Ю.С. Харин [и др.]. Минск: Новое знание, 2003. 381 с.
15. **Медведев Н.В.** Алгоритм шифрования SAFER и возможности его улучшения // Проблемы теоретической и прикладной математики: тез. докл. 41-й Всерос. мол. конф. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С. 482–486.
16. **Медведев Н.В., Титов С.С.** Почти-пороговые схемы разделения секрета на эллиптических кривых // Докл. Томского гос. ун-та систем управления и радиоэлектроники. 2011. № 1 (23), ч. 1. С. 91–96.

17. **Понтрягин Л.С.** Непрерывные группы. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 515 с.
18. **Саттон М., Грин А., Амини П.** Fuzzing. Исследование уязвимостей методом грубой силы. М.: Символ-Плюс, 2009. 560 с.
19. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды. Математика, механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
20. **Ушаков В.Н.** Теорема Чевы и некоторые особенности геометрии пирамиды Хеопса. Живой журнал. URL: <http://ushakov-vn.livejournal.com/761.html> (дата обращения 24.08.2011).
21. Эллиптические кривые и современные алгоритмы теории чисел / Ю.П. Соловьев [и др.]. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 191 с.
22. **Wiles A., Carlson J., Jaffe A.** The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture // The millennium prize problems. Cambridge: Clay Math. Inst., 2006. P. 31–44.

Медведев Никита Владимирович  
аспирант

Уральский государственный университет путей сообщения  
e-mail: itcrypt@gmail.com

Титов Сергей Сергеевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор

Уральский государственный университет путей сообщения  
e-mail: sergey.titov@usaaa.ru

Поступила 12.09.2011

УДК 517.983 : 517.982.4 : 519.21

**ОБОБЩЕННАЯ КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ  
ДЛЯ АБСТРАКТНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ШУМОМ<sup>1</sup>****И. В. Мельникова, М. А. Альшанский**

Работа посвящена исследованию существования, единственности и устойчивости решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения с мультипликативным шумом в пространствах обобщенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: задача Коши, полугруппа, белый шум, обобщенные решения.

I. V. Melnikova, M. A. Alshanskiy. The generalized well-posedness of the Cauchy problem for an abstract stochastic equation with multiplicative noise.

We study the existence, uniqueness, and stability of a solution to the Cauchy problem for a stochastic differential equation with multiplicative noise in the spaces of generalized random variables with values in a Hilbert space.

Keywords: Cauchy problem, semigroup, white noise, generalized solutions.

**1. Введение**

Стремление учесть воздействие случайных факторов на систему при построении ее математической модели в виде дифференциального уравнения приводит к стохастическим дифференциальным уравнениям. При этом во многих прикладных задачах возникает необходимость рассматривать стохастические дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, например, в задачах популяционной динамики, а также в задачах финансовой математики, связанных с вычислением процентных ставок и текущей цены бондов.

Введение в уравнение белого шума связано с проблемой корректного определения случайного процесса, значения которого в различные моменты времени — независимые случайные величины с бесконечными отклонениями. Таким образом, уже на этапе постановки стохастических задач с учетом случайности типа белого шума возникает проблема устранения расходимостей, которая остается актуальной и на этапе построения решений, поскольку наличие в уравнении слагаемого, содержащего шум, естественным образом обуславливает ухудшение свойств решений по сравнению с детерминированным случаем. Одним из возможных подходов к решению этой проблемы является постановка и решение задачи в подходящих пространствах обобщенных функций.

Задача Коши для линейного уравнения с мультипликативным шумом в классической постановке (в форме дифференциалов Ито) выглядит следующим образом:

$$dX(t) = AX(t)dt + B(X(t))dW(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \Phi, \quad (1.1)$$

где  $A: H \rightarrow H$ ,  $B(\cdot): H \rightarrow \mathcal{L}(H)$  — линейные операторы ( $H$  — сепарабельное гильбертово пространство),  $\Phi$  —  $H$ -значная случайная величина,  $W(t)$  —  $H$ -значный цилиндрический винеровский процесс. По существу уравнение (1.1) — это “проинтегрированное” дифференциальное уравнение, записанное в форме дифференциалов. Переход к этому уравнению с помощью техники интеграла Ито, связанный с негладкостью белого шума, позволил для оператора  $A$ ,

<sup>1</sup>Работа поддержана проектом 2.1.1/14118 Минобрнауки РФ и РФФИ (проект 10-01-96003р).

являющегося генератором полугруппы класса  $C_0$ , доказать существование так называемого “мягкого” решения (см., например, [1]).

В настоящей работе введены пространства обобщенных  $H$ -значных случайных величин, в которых  $H$ -значный белый шум оказывается гладким по переменной  $t$ . (Пространства  $\mathbb{R}$ -значных обобщенных случайных величин описаны в работах [2; 3] и др.) В результате в этих пространствах возникает возможность рассматривать задачу Коши для дифференциального уравнения вида

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B(X(t)) \diamond \mathbb{W}(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \Phi, \quad (1.2)$$

где  $\mathbb{W}(t)$  — белый шум, а символ “ $\diamond$ ” обозначает произведение Уика обобщенных случайных величин.

Для задачи (1.2) путем сведения ее с помощью  $S$ -преобразования к детерминированной задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве доказано существование единственного решения. Для решения получены оценки, которые можно трактовать как некоторую его устойчивость относительно изменения начальных данных. Таким образом, доказана обобщенная корректность задачи (1.2).

## 2. Обобщенные случайные величины

Пусть  $\mathcal{S}'$  — пространство распределений медленного роста над пространством быстроубывающих функций  $\mathcal{S}$ . Пространство  $\mathcal{S}$  является счетно-гильбертовым ядерным пространством:  $\mathcal{S} = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_p$ , где  $\mathcal{S}_p$  — подпространство пространства  $L^2(\mathbb{R})$  с нормой  $|\cdot|_p$ , определяемой скалярным произведением  $(f, g)_p := (\hat{D}^p f, \hat{D}^p g)_{L^2(\mathbb{R})}$ , где

$$\hat{D} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1;$$

$\mathcal{B}(\mathcal{S}')$  —  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $\mathcal{S}'$ , а  $\mu$  — вероятностная мера на  $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$  (мера Минлоса — Сазонова), удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathcal{S}'} e^{i\langle \omega, \theta \rangle} d\mu(\omega) = e^{-\frac{1}{2}|\theta|_0^2}, \quad \theta \in \mathcal{S}, \quad (2.1)$$

где  $|\cdot|_0$  — норма пространства  $L_2(\mathbb{R})$ . Мера  $\mu$  называется нормализованной гауссовской мерой на  $\mathcal{S}'$ , так как для любого набора функций  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathcal{S}$ , ортогональных в  $L^2(\mathbb{R})$ , случайная величина  $\omega \mapsto (\langle \omega, \theta_1 \rangle, \langle \omega, \theta_2 \rangle, \dots, \langle \omega, \theta_n \rangle)$  распределена по нормальному закону с плотностью распределения

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n |\theta_i|_0} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{|\theta_i|_0^2}\right),$$

что эквивалентно равенству

$$E\left(f(\langle \omega, \theta_1 \rangle, \dots, \langle \omega, \theta_n \rangle)\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n |\theta_i|_0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{|\theta_i|_0^2}} dx_1 \dots dx_n \quad (2.2)$$

для любой функции  $f$ , для которой существует интеграл в правой части.

Вероятностное пространство  $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$  называют пространством белого шума. Через  $(L^2)$  будем обозначать пространство  $L^2(\mathcal{S}', \mu; \mathbb{R})$  интегрируемых с квадратом по мере  $\mu$  функций (случайных величин) со значениями в  $\mathbb{R}$ , определенных на  $\mathcal{S}'$ . Норму этого пространства будем обозначать  $\|\cdot\|_0$ . Из равенства (2.2) следует, что для любых  $\theta, \eta \in \mathcal{S}$  выполнены равенства

$$(\langle \cdot, \theta \rangle, \langle \cdot, \eta \rangle)_{(L^2)} = E\left(\langle \cdot, \theta \rangle \langle \cdot, \eta \rangle\right) = (\theta, \eta)_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \|\langle \cdot, \theta \rangle\|_0^2 = E\langle \cdot, \theta \rangle^2 = |\theta|_0^2.$$

Пользуясь этим равенством, отображение  $\theta \mapsto \langle \cdot, \theta \rangle$  можно по непрерывности продолжить с  $\mathcal{S}$  на все  $L^2(\mathbb{R})$ , оставляя в случае  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  то же обозначение  $\langle \cdot, \phi \rangle \in (L^2)$ . При этом соотношение (2.1) остается верным для  $\theta \in L^2(\mathbb{R})$ , а равенство (2.2) — для  $\theta_1, \dots, \theta_n \in L^2(\mathbb{R})$ .

### 2.1. Пространства $\mathbb{R}$ -значных обобщенных случайных величин

Пусть  $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$  — ортонормированный базис пространства  $L^2(\mathbb{R})$ , состоящий из функций Эрмита

$$\xi_k(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} ((k-1)!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} h_{k-1}(x),$$

где  $\{h_k(x)\}_{k=0}^\infty$  — многочлены Эрмита  $h_k(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} (d/dx)^k e^{-\frac{x^2}{2}}$ , являющиеся собственными функциями дифференциального оператора  $\hat{D}: \hat{D}\xi_i = (2i)\xi_i, i \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\mathcal{T} \subset (\mathbb{N} \cup \{0\})^\mathbb{N}$  множество всех финитных мультииндексов. Стохастические полиномы Эрмита, определенные равенством  $\mathbf{h}_\alpha(\omega) := \prod_k h_{\alpha_k}(\langle \omega, \xi_k \rangle), \omega \in \mathcal{S}', \alpha \in \mathcal{T}$ , образуют ортогональный базис пространства  $(L^2)$ , при этом

$$(\mathbf{h}_\alpha, \mathbf{h}_\beta)_{(L^2)} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ \alpha!, & \alpha = \beta, \end{cases} \quad \alpha! := \prod_k \alpha_k!$$

В работах [2; 3] используется оснащение гильбертова пространства  $(L^2)$  — тройка Гельфанда

$$(\mathcal{S})_\rho \subset (L^2) \subset (\mathcal{S})_{-\rho}, \quad (0 \leq \rho \leq 1).$$

Пространство  $(\mathcal{S})_\rho$  играет роль пространства основных функций (случайных величин). По определению  $(\mathcal{S})_\rho = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_p)_\rho$  с топологией проективного предела, где

$$(\mathcal{S}_p)_\rho = \left\{ \varphi = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \varphi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (L^2) : \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1+\rho} |\varphi_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{2p\alpha} < \infty \right\}$$

с нормой  $|\cdot|_{p,\rho}$ , порожденной скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{p,\rho} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1+\rho} \varphi_\alpha \bar{\psi}_\alpha (2\mathbb{N})^{2p\alpha}, \quad (2\mathbb{N})^{p\alpha} := \prod_{i \in \mathbb{N}} (2i)^{p\alpha_i}.$$

Пространство  $(\mathcal{S})_{-\rho}$  играет роль пространства обобщенных функций (случайных величин). По определению  $(\mathcal{S})_{-\rho} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$  с топологией индуктивного предела, где  $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$  — пространство, сопряженное к  $(\mathcal{S}_p)_\rho$ . Пространство  $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$  можно отождествить с гильбертовым пространством всевозможных формальных разложений  $\Phi = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha$ , удовлетворяющих условию

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1-\rho} |\Phi_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(\Phi, \Psi)_{-p,-\rho} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1-\rho} \Phi_\alpha \bar{\Psi}_\alpha (2\mathbb{N})^{-2p\alpha}.$$

Норму пространства  $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$  будем обозначать  $|\cdot|_{-p,-\rho}$ . Для

$$\Phi = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}, \quad \varphi = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \varphi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_\rho$$

имеем

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \alpha! \Phi_\alpha \bar{\varphi}_\alpha.$$

Множество  $M \subseteq (\mathcal{S})_\rho$  называется ограниченным, если для любой последовательности  $\{\varphi_n\} \subseteq M$  и для любой  $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}$ , сходящейся к нулю,  $\{\varepsilon_n \varphi_n\}$  сходится к нулю в  $(\mathcal{S})_\rho$ . Очевидно, ограниченность множества в  $(\mathcal{S})_\rho$  эквивалентна его ограниченности в каждом пространстве  $(\mathcal{S}_p)_\rho$ .

## 2.2. Пространства $H$ -значных обобщенных случайных величин

Пусть  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство над  $\mathbb{C}$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и связанной с ним нормой  $\|\cdot\|$ . Через  $(L^2)(H)$  будем обозначать пространство  $H$ -значных функций, определенных на  $\mathcal{S}'$ , интегрируемых с квадратом по Бохнеру по мере  $\mu$ . Пусть  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  — ортонормированный базис в пространстве  $H$ . Семейство  $H$ -значных функций вида  $\{\mathbf{h}_\alpha e_j\}_{\alpha \in \mathcal{T}, j \in \mathbb{N}}$  образует ортогональный базис  $(L^2)(H)$ . Элементы  $f \in (L^2)(H)$  раскладываются в ряды Фурье по этому базису следующим образом [4–6]:

$$f = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}, j \in \mathbb{N}} f_{\alpha,j} \mathbf{h}_\alpha e_j = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} f_\alpha \mathbf{h}_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j,$$

$$f_{\alpha,j} \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha = \sum_j f_{\alpha,j} e_j \in H, \quad f_j = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} f_{\alpha,j} \mathbf{h}_\alpha \in (L^2),$$

при этом

$$\|f\|_{(L^2)(H)}^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}, j \in \mathbb{N}} \alpha! |f_{\alpha,j}|^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \alpha! \|f_\alpha\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{(L^2)}^2.$$

Определим  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ , пространство  $H$ -значных обобщенных функций над пространством основных функций  $(\mathcal{S})_\rho$ , как пространство линейных непрерывных операторов  $\Phi: (\mathcal{S})_\rho \rightarrow H$  с топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства  $(\mathcal{S})_\rho$ . Действие элемента  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  на основную функцию  $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$  будем обозначать  $\Phi[\varphi]$ .

**Предложение 1.** *Любой элемент  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  является ограниченным оператором из  $(\mathcal{S}_p)_\rho$  в  $H$  для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ .*

**Доказательство.** Предположим, что это не так. Пусть  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ . Для каждого  $p \in \mathbb{N}$  выберем  $\varphi_p \in (\mathcal{S}_p)_\rho$  так, что  $|\varphi_p|_{p,\rho} = 1$ , при этом  $\|\Phi[\varphi_p]\| \geq p$ . В силу неравенств  $|\varphi_k|_{p,\rho} \leq |\varphi_k|_{k,\rho}$ , справедливых при  $k > p$ , последовательность  $\left\{\frac{\varphi_k}{k}\right\}$  сходится к нулю в пространстве  $(\mathcal{S})_\rho$ , при этом  $\left\|\Phi\left[\frac{\varphi_k}{k}\right]\right\| \geq 1$ , что противоречит непрерывности  $\Phi$ .  $\square$

Пространство основных функций  $(\mathcal{S})_\rho$  является ядерным счетно-гильбертовым пространством, так как для любого  $p \in \mathbb{N}$  оператор вложения  $I_{p,p+1}: (\mathcal{S}_{p+1})_\rho \hookrightarrow (\mathcal{S}_p)_\rho$  является оператором Гильберта — Шмидта. Действительно, для ортонормированного базиса

$$\left\{ \frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+p}{2}} (2\mathbb{N})^{(p+1)\alpha}} \right\}$$

пространства  $(\mathcal{S}_{p+1})_\rho$  имеем

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \left| \frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+p}{2}} (2\mathbb{N})^{(p+1)\alpha}} \right|_{p,\rho}^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \frac{1}{(2\mathbb{N})^{2\alpha}} < \infty.$$

В дальнейшем будем обозначать

$$A(p) = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \frac{1}{(2\mathbb{N})^{p\alpha}}.$$

В [3] доказано, что этот ряд сходится при  $p > 1$ .

Отсюда и из предложения 1 следует

**Предложение 2.** *Любой элемент  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  является оператором Гильберта — Шмидта из  $(\mathcal{S}_p)_\rho$  в  $H$  для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ .*

Для любого  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  обозначим через  $\Phi_j$  линейный функционал, определенный на  $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$  равенством  $\langle \Phi_j, \varphi \rangle := (\Phi[\varphi], e_j)$ . Пусть  $\Phi$  является оператором Гильберта — Шмидта из  $(\mathcal{S}_p)_\rho$  в  $H$ . Тогда все функционалы  $\Phi_j, j \in \mathbb{N}$ , принадлежат соответствующему сопряженному пространству  $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ , а значит, допускают разложение

$$\Phi_j = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \Phi_{\alpha,j} \mathbf{h}_\alpha, \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1-\rho} |\Phi_{\alpha,j}|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty.$$

При этом для нормы  $\Phi$  как оператора Гильберта — Шмидта из  $(\mathcal{S}_p)_\rho$  в  $H$  имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{\text{HS},p,\rho}^2 &= \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \left\| \Phi \left[ \frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+\rho}{2}} (2\mathbb{N})^{p\alpha}} \right] \right\|^2 \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle \Phi_j, \frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+\rho}{2}} (2\mathbb{N})^{p\alpha}} \right\rangle \right|^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}, j \in \mathbb{N}} (\alpha!)^{1-\rho} |\Phi_{\alpha,j}|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\text{HS}((\mathcal{S}_p)_\rho; H)$  пространство операторов Гильберта — Шмидта, действующих из  $(\mathcal{S}_p)_\rho$  в  $H$ . Это сепарабельное гильбертово пространство. Ортогональный базис этого пространства образуют операторы  $\mathbf{h}_\alpha \otimes e_j, \alpha \in \mathcal{T}, j \in \mathbb{N}$ , определенные равенством

$$(\mathbf{h}_\alpha \otimes e_j)\varphi := (\mathbf{h}_\alpha, \varphi)_{(L^2)} e_j, \quad \varphi \in (\mathcal{S}_p)_\rho.$$

Из предложения 2 следует, что

$$(\mathcal{S})_{-\rho}(H) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \text{HS}((\mathcal{S}_p)_\rho; H),$$

любой элемент  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  допускает разложения

$$\Phi[\cdot] = \sum_{j \in \mathbb{N}} \langle \Phi_j, \cdot \rangle e_j = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}, j \in \mathbb{N}} \Phi_{\alpha,j} (\mathbf{h}_\alpha \otimes e_j) = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \Phi_\alpha (\mathbf{h}_\alpha, \cdot)_{(L^2)},$$

где  $\Phi_j = (\Phi[\cdot], e_j) \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$  для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi_\alpha = \sum_{j \in \mathbb{N}} \Phi_{\alpha,j} e_j \in H$ . При этом

$$\|\Phi\|_{\text{HS},p,\rho}^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\Phi_j\|_{-p,-\rho}^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}, j \in \mathbb{N}} (\alpha!)^{1-\rho} |\Phi_{\alpha,j}|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha\|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty.$$

Очевидно,

$$\text{HS}((\mathcal{S}_{p_1})_\rho; H) \subseteq \text{HS}((\mathcal{S}_{p_2})_\rho; H) \quad \text{при } p_1 < p_2, \quad (2.3)$$

при этом

$$\|\Phi\|_{\text{HS},p_1,\rho} \geq \|\Phi\|_{\text{HS},p_2,\rho} \quad \text{для всех } \Phi \in \text{HS}((\mathcal{S}_{p_1})_\rho; H). \quad (2.4)$$

Множество  $\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  называется ограниченным, если для любой последовательности  $\{\Phi_n\} \subseteq \mathcal{M}$  и для любой  $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}$ , сходящейся к нулю,  $\{\varepsilon_n \Phi_n\}$  сходится к нулю в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ .

**Предложение 3.** *Множество  $\mathcal{M}$  ограничено в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  тогда и только тогда, когда для любого  $M$  — ограниченного подмножества  $(\mathcal{S})_\rho$ , существует константа  $K > 0$  такая, что  $\|\Phi[\varphi]\| \leq K$  для всех  $\varphi \in M, \Phi \in \mathcal{M}$ .*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $\mathcal{M}$  ограничено в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ . Предположим, существует ограниченное в  $(\mathcal{S})_\rho$  множество  $M$  такое, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдутся  $\varphi_n \in M$  и  $\Phi_n \in \mathcal{M}$ , для которых  $\|\Phi_n[\varphi_n]\| > n$ . При этом

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \frac{1}{n} \Phi_n[\varphi_k] \right\| \geq \left\| \frac{1}{n} \Phi_n[\varphi_n] \right\| > 1,$$

а значит,  $\left\{\frac{1}{n}\Phi_n\right\}$  не сходится к нулю равномерно на ограниченном множестве  $\{\varphi_k, k \in \mathbb{N}\} \subseteq M$ , т. е.  $\left\{\frac{1}{n}\Phi_n\right\}$  не сходится к нулю в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ .

*Достаточность.* Следует из оценки  $\|\varepsilon_n \Phi[\varphi]\| \leq |\varepsilon_n|K$ .  $\square$

**Предложение 4.** Если  $M$  ограничено в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ , то для некоторых  $p \in \mathbb{N}$  и  $K > 0$  неравенство  $\|\Phi[\varphi]\| \leq K|\varphi|_{p,\rho}$  выполняется для любых  $\Phi \in M$ ,  $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$ .

*Доказательство.* Предположим, что это не так, т. е. для любого  $p \in \mathbb{N}$  найдутся  $\varphi_p \in M$  и  $\Phi_p \in M$ , для которых  $\|\Phi_p[\varphi_p]\| > p|\varphi_p|_{p,\rho}$ . Рассмотрим последовательность  $\left\{\frac{\varphi_n}{|\varphi_n|_{n,\rho}}\right\}$ . Она ограничена в  $(\mathcal{S})_\rho$ , так как для любого  $p \in \mathbb{N}$  при  $n > p$  имеем

$$\left|\frac{\varphi_n}{|\varphi_n|_{n,\rho}}\right|_{p,\rho} = \frac{|\varphi_n|_{p,\rho}}{|\varphi_n|_{n,\rho}} \leq 1.$$

Тогда в силу предложения 3 найдется  $K > 0$  такое, что  $\left\|\Phi\left[\frac{\varphi_n}{|\varphi_n|_{n,\rho}}\right]\right\| \leq K$  для всех  $\Phi \in M$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , что противоречит неравенству  $\left\|\Phi\left[\frac{\varphi_n}{|\varphi_n|_{n,\rho}}\right]\right\| > n$ .  $\square$

Таким образом, если множество  $M$  ограничено в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ , то для некоторого  $p \in \mathbb{N}$  все элементы  $M$  являются ограниченными операторами из  $(\mathcal{S}_p)_\rho$  в  $H$  и  $M$  ограничено в  $\mathcal{L}((\mathcal{S}_p)_\rho, H)$ . Отсюда следует

**Предложение 5.** Если множество  $M$  ограничено в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ , то  $M \subset \text{HS}((\mathcal{S}_p)_\rho; H)$  для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ , причем  $M$  ограничено в  $\text{HS}((\mathcal{S}_p)_\rho; H)$ .

Следующее предложение характеризует сходимость в пространстве  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ .

**Предложение 6.** Пусть  $\Phi_n = \sum_\alpha \Phi_\alpha^{(n)} \mathbf{h}_\alpha$ ,  $\Phi = \sum_\alpha \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ . Следующие утверждения эквивалентны:

(i)  $\{\Phi_n\}$  сходится к  $\Phi$  в пространстве  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ .

(ii) Для некоторого  $p \in \mathbb{N}$  все элементы последовательности  $\{\Phi_n\}$  и  $\Phi$  принадлежат  $\text{HS}((\mathcal{S}_p)_\rho; H)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_n - \Phi\|_{\text{HS}, p, \rho} = 0$ .

*Доказательство.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Пусть  $\{\Phi_n\}$  сходится к  $\Phi$  в пространстве  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ . Тогда для любого  $\alpha \in \mathcal{T}$  имеем  $\|\Phi_\alpha^{(n)} - \Phi_\alpha\| = \frac{1}{\alpha!} \|\Phi^{(n)}[\mathbf{h}_\alpha] - \Phi[\mathbf{h}_\alpha]\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . В силу предложения 2  $\Phi \in \text{HS}((\mathcal{S}_p)_\rho; H)$  для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ . Для произвольного множества  $M$ , ограниченного в  $(\mathcal{S})_\rho$ , начиная с некоторого  $n$  для всех  $\varphi \in M$  выполнено неравенство  $\|\Phi_n[\varphi] - \Phi[\varphi]\| < 1$ , а значит,  $\|\Phi_n[\varphi]\| \leq 1 + \|\Phi\|_{\text{HS}, p, \rho} |\varphi|_{p, \rho} \leq 1 + \|\Phi\|_{\text{HS}, p, \rho} K_p$ , где  $K_p = \sup_{\varphi \in M} |\varphi|_{p, \rho}$ . Значит, в силу предложения 3 последовательность  $\{\Phi_n\}$  ограничена в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ . Из предложения 5 следует, что вся последовательность принадлежит некоторому пространству  $\text{HS}((\mathcal{S}_q)_\rho; H)$  и ограничена в нем. В силу (2.3) и (2.4) можем считать, что существует такое  $q$ , что для любого  $p > q$  последовательность  $\{\Phi_n\}$  и  $\Phi$  содержатся в  $\text{HS}((\mathcal{S}_p)_\rho; H)$  и  $\{\Phi_n\}$  ограничены по норме каждого из этих пространств некоторой константой  $K > 0$ .

Пусть  $\text{Index } \alpha := \max\{n \in \mathbb{N}, \alpha_n \neq 0\}$ . Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\Phi_n - \Phi\|_{\text{HS}, p+1, \rho}^2 &= \sum_{\text{Index } \alpha \leq k} (\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Phi_\alpha\|^2 (2\mathbb{N})^{-2(p+1)\alpha} \\ &+ \sum_{\text{Index } \alpha > k} (\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Phi_\alpha\|^2 (2\mathbb{N})^{-2(p+1)\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \max_{\text{Index } \alpha \leq k} \left[ (\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Phi_\alpha\|^2 \right] \cdot \sum_{\text{Index } \alpha \leq k} (2\mathbb{N})^{-2(p+1)\alpha} \\
 &+ \sum_{\text{Index } \alpha > k} \left[ (\alpha!)^{1-\rho} (2\|\Phi_\alpha^{(n)}\|^2 + 2\|\Phi_\alpha\|^2) (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} \right] (2\mathbb{N})^{-2\alpha} \\
 &\leq \max_{\text{Index } \alpha \leq k} \left[ (\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Phi_\alpha\|^2 \right] \cdot A(2p+1) + 4K^2 \sum_{\text{Index } \alpha > k} (2\mathbb{N})^{-2\alpha}.
 \end{aligned}$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  выбираем сначала  $k$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{\text{Index } \alpha > k} (2\mathbb{N})^{-2\alpha} < \frac{\varepsilon}{8K^2},$$

а затем  $N$  так, чтобы при  $n > N$  было верно неравенство

$$\max_{\text{Index } \alpha \leq k} \left[ (\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Phi_\alpha\|^2 \right] < \frac{\varepsilon}{2A(2p+2)},$$

тогда при  $n > N$  будет выполнено  $\|\Phi_n - \Phi\|_{\text{HS}, p+1, \rho}^2 < \varepsilon$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Очевидно.  $\square$

Для функций  $\Phi(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  предел и производную в точке  $t_0 \in \mathbb{R}$  будем понимать в смысле равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства  $(\mathcal{S})_\rho$ . Из предложения 6 нетрудно получить

**Следствие 1.** Пусть  $\Phi(t) = \sum_\alpha \Phi_\alpha(t) \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  при  $t \in [a, b]$ ,  $t_0 \in [a, b]$ .

(1)  $\lim_{t \rightarrow t_0} \Phi(t) = \Phi(t_0)$  в пространстве  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  тогда и только тогда, когда для некоторого  $p \in \mathbb{N}$  все  $\Phi(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , принадлежат  $\text{HS}((\mathcal{S}_p)_\rho; H)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(t) - \Phi(t_0)\|_{\text{HS}, p, \rho} = 0$ .

(2) Функция  $\Phi(t)$  дифференцируема в точке  $t_0 \in [a, b]$  тогда и только тогда, когда для некоторого  $p$  существует  $\frac{d\Phi}{dt} := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0}$  в пространстве  $\text{HS}((\mathcal{S}_p)_\rho; H)$ .

**Пример 1.** ( $H$ -значные цилиндрический винеровский процесс и белый шум).

Пусть  $n(\cdot, \cdot): \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  — биекция, удовлетворяющая условию

$$n(i, j) \geq ij, \quad i, j \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Определим последовательность независимых броуновских движений  $\{\beta_j(t)\}_{j=1}^\infty$ , положив

$$\beta_j(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(s) ds \mathbf{h}_{\epsilon_n(i, j)},$$

где  $\epsilon_n := (0, 0, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots)$ , тогда  $H$ -значный случайный процесс, определенный равенством

$$W(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j(t) e_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} W_{\epsilon_n}(t) \mathbf{h}_{\epsilon_n}, \quad W_{\epsilon_n}(t) = \int_0^t \xi_{i(n)}(s) ds e_{j(n)} \in H,$$

где  $i(n), j(n) \in \mathbb{N}$  такие, что  $n(i(n), j(n)) = n$ , называется цилиндрическим винеровским процессом.

Нетрудно проверить, что  $W(t) \notin (L^2)(H)$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ . В то же время из известной оценки  $\int_0^t \xi_i(s) ds = O(i^{-\frac{3}{4}})$  и условия (2.5) следует  $\|W(t)\|_{\text{HS}, 1, \rho}^2 < \infty$ . Таким образом,  $W(t) \in \text{HS}((\mathcal{S}_1)_\rho; H) \subset (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ .

Определим  $H$ -значный цилиндрический белый шум равенством

$$\mathbb{W}(t) := \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \xi_i(t) (\mathbf{h}_{\epsilon_n(i,j)} e_j) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t) \mathbf{h}_{\epsilon_n}, \quad \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t) = \xi_{i(n)}(t) e_{j(n)} \in H.$$

Поскольку справедлива оценка  $\xi_i(t) = O(i^{-\frac{1}{4}})$ , имеем  $\|\mathbb{W}(t)\|_{\text{HS},1,\rho}^2 < \infty$ , что означает  $\mathbb{W}(t) \in \text{HS}((\mathcal{S}_1)_\rho; H) \subset (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ .

Заметим, что для всех  $t \in \mathbb{R}$  верно равенство  $\frac{d}{dt} \mathbb{W}(t) = \mathbb{W}(t)$ .

### 2.3. $S$ -преобразование $H$ -значных обобщенных случайных величин

Пусть  $\mathcal{E}_h := e^{\langle \cdot, h \rangle - \frac{1}{2}|h|_0^2}$ . При  $h \in \mathcal{S}$  эта случайная величина определена на всем пространстве  $\mathcal{S}'$  и принадлежит  $(\mathcal{S})_\rho$  для  $0 \leq \rho < 1$ , при этом справедлива оценка

$$|\mathcal{E}_h|_{p,\rho} \leq 2^{\rho/2} \exp \left[ (1-\rho) \frac{2\rho-1}{1-\rho} |h|_p^{\frac{2}{1-\rho}} \right], \quad (2.6)$$

(см., например, [2]). Разложение  $\mathcal{E}_h$  в ряд по стохастическим полиномам Эрмита имеет вид

$$\mathcal{E}_h = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} e_\alpha \mathbf{h}_\alpha, \quad e_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \prod_{i=1}^{\infty} (h, \xi_i)_{L^2(\mathbb{R})}^{\alpha_i}. \quad (2.7)$$

Действительно, пусть  $h \in \mathcal{S}$ ,  $\mathbf{h}_\alpha = \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(\langle \cdot, \xi_i \rangle)$  — стохастический многочлен Эрмита. Используя разложение  $h = \sum_{i=1}^n (h, \xi_i)_{L^2(\mathbb{R})} \xi_i + h^\perp$ , соотношение (2.2) и свойства производящей функции полиномов Эрмита, получим

$$\begin{aligned} e_\alpha &= (\mathcal{E}_h, \mathbf{h}_\alpha)_{(L^2)} = \int_{\mathcal{S}'} e^{\langle \omega, h \rangle - \frac{1}{2}|h|_0^2} \mathbf{h}_\alpha(\omega) d\mu(\omega) \\ &= \int_{\mathcal{S}'} e^{\sum_{i=1}^n \langle \omega, \xi_i \rangle (h, \xi_i)_{L^2(\mathbb{R})} + \langle \omega, \frac{h^\perp}{|h^\perp|_0} \rangle |h^\perp|_0 - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (h, \xi_i)_{L^2(\mathbb{R})}^2 + |h^\perp|_0^2 \right)} \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(\langle \omega, \xi_i \rangle) d\mu(\omega) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{\sum_{i=1}^n x_i (h, \xi_i) + x_{n+1} |h^\perp|_0 - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (h, \xi_i)^2 + |h^\perp|_0^2 \right)} \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(x_i) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} dx_1 \dots dx_{n+1} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{x_i (h, \xi_i) - \frac{1}{2} (h, \xi_i)^2} h_{\alpha_i}(x_i) e^{-\frac{1}{2} x_i^2} dx_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{x |h^\perp|_0 - \frac{1}{2} |h^\perp|_0^2 - \frac{1}{2} x^2} dx = \prod_{i=1}^n \frac{(h, \xi_i)_{L^2(\mathbb{R})}^{\alpha_i}}{\alpha_i!}. \end{aligned}$$

Пусть  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ ,  $0 \leq \rho < 1$ .  $S$ -преобразованием  $\Phi$  называется  $H$ -значная функция, определенная равенством

$$(S\Phi)(h) = \Phi[\mathcal{E}_h], \quad h \in \mathcal{S}.$$

Из оценки (2.6) следует, что для любого  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  существует такое  $p \in \mathbb{N}$ , что выполнена оценка

$$\|(S\Phi)(h)\| = \|\Phi[\mathcal{E}_h]\| \leq 2^{\rho/2} \|\Phi\|_{\text{HS},p,\rho} \exp \left[ (1-\rho) \frac{2\rho-1}{1-\rho} |h|_p^{\frac{2}{1-\rho}} \right]. \quad (2.8)$$

Оказывается, оценки типа (2.8) достаточно для того, чтобы функция, действующая из  $\mathcal{S}$  в  $H$ , была  $S$ -преобразованием некоторой обобщенной  $H$ -значной случайной величины. Точнее, справедлива следующая характеристическая теорема, доказательство которой почти дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы для  $\mathbb{R}$ -значного случая (см., например, [2]).

**Теорема 1.** Пусть  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ ,  $0 \leq \rho < 1$ . Тогда функция  $F = S\Phi$  удовлетворяет условиям:

(i) Для любых  $h, \theta \in \mathcal{S}$  функция  $F(h + z\theta)$  является целой аналитической функцией переменной  $z \in \mathbb{C}$ .

(ii) Существуют  $K > 0, a > 0, p \in \mathbb{N}$  такие, что выполнена оценка

$$\|F(h)\| \leq K \exp \left[ a|h|_p^{\frac{2}{1-\rho}} \right], \quad h \in \mathcal{S}.$$

Если функция  $F: \mathcal{S} \rightarrow H$  удовлетворяет условиям (i) и (ii), то существует единственная функция  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ , для которой  $F = S\Phi$ . При этом для любого  $q$ , такого, что выполняется неравенство  $e^2 \left( \frac{2a}{1-\rho} \right)^{1-\rho} \sum_{i=1}^{\infty} (2i)^{-2(q-p)} < 1$ , справедлива оценка

$$\|\Phi\|_{\text{HS}, q, \rho} \leq K \left( 1 - e^2 \left( \frac{2a}{1-\rho} \right)^{1-\rho} \sum_{i=1}^{\infty} (2i)^{-2(q-p)} \right)^{-1/2}.$$

Пример 2.

$$(S\mathbb{W}(t))(h) = \mathbb{W}(t)[\mathcal{E}_h] = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \xi_i(t) e_j(\xi_{n(i,j)}, h)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

В силу того, что функции  $\xi_i(t) e_j$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(\mathbb{R}; H)$ , справедливо равенство

$$\| [S\mathbb{W}(\cdot)](h) \|_{L^2(\mathbb{R}; H)}^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} |(\xi_{n(i,j)}, h)_{L^2(\mathbb{R})}|^2 = |h|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

## 2.4. Произведение Уика

Пусть  $H_1$  и  $H_2$  — сепарабельные гильбертовы пространства. Тогда  $\text{HS}(H_1; H_2)$  — пространство операторов Гильберта — Шмидта, действующих из  $H_1$  в  $H_2$ , — является сепарабельным гильбертовым пространством, поэтому можно ввести в рассмотрение пространство  $(\mathcal{S})_{-\rho}(\text{HS}(H_1; H_2))$  обобщенных случайных величин со значениями в  $\text{HS}(H_1; H_2)$  над  $(\mathcal{S})_{\rho}$  так, как это сделано в подразд. 2.2. Пусть  $\Psi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\text{HS}(H_1; H_2))$ ,  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H_1)$ . Рассмотрим их  $S$ -преобразования. Они удовлетворяют условиям (i) и (ii) теоремы 1. Для любого  $h \in \mathcal{S}$  имеем  $S\Psi(h) \in \text{HS}(H_1; H_2)$ ,  $S\Phi(h) \in H_1$ , поэтому  $F(h) = S\Psi(h)S\Phi(h) \in H_2$ , для любых  $h, \theta \in \mathcal{S}$  функция  $F(h + z\theta)$  — целая аналитическая функция переменной  $z \in \mathbb{C}$ . При этом

$$\|S\Psi(h)S\Phi(h)\|_{H_2} \leq \|S\Psi(h)\|_{\text{HS}(H_1; H_2)} \|S\Phi(h)\|_{H_1} \leq K_1 K_2 \exp \left[ (a_1 + a_2) |h|_p^{\frac{2}{1-\rho}} \right],$$

где  $K_1, K_2, a_1, a_2$  — константы из условия (ii) теоремы 1, выполненного для  $\Psi$  и  $\Phi$  соответственно (очевидно, можно считать эти условия выполненными с одной и той же константой  $p$ ). Следовательно,  $F$  является  $S$ -преобразованием некоторой обобщенной случайной величины  $\Theta \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H_2)$ . Это делает корректным следующее определение.

Пусть  $\Psi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\text{HS}(H_1; H_2))$ ,  $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H_1)$ . Обобщенная случайная величина  $\Theta \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H_2)$  такая, что  $S\Theta = S\Psi S\Phi$ , называется *произведением Уика*  $\Psi$  и  $\Phi$  и обозначается  $\Psi \diamond \Phi$ .

Из разложения (2.7) следуют равенства

$$S\Psi(h) = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \Psi_{\alpha} \prod_{i=1}^{\infty} (h, \xi_i)_{L^2(\mathbb{R})}^{\alpha_i}, \quad S\Phi(h) = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \Phi_{\alpha} \prod_{i=1}^{\infty} (h, \xi_i)_{L^2(\mathbb{R})}^{\alpha_i}.$$

Перемножая эти разложения, получим

$$S\Psi(h)S\Phi(h) = \sum_{\gamma \in \mathcal{T}} \left( \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \Psi_\alpha \Phi_\beta \right) \prod_{i=1}^{\infty} (h, \xi_i)_{L^2(\mathbb{R})}^{\gamma_i}.$$

В силу единственности  $S$ -преобразования отсюда следует

$$\Psi \diamond \Phi = \sum_{\gamma \in \mathcal{T}} \left( \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \Psi_\alpha \Phi_\beta \right) \mathbf{h}_\alpha.$$

## 2.5. Интеграл Хицуды — Скорохода

Пусть  $Q \in \text{HS}(H; H)$ . Обозначим через  $H_Q$  пространство  $Q^{\frac{1}{2}}(H)$  со скалярным произведением  $(u, v)_{H_Q} = (Q^{-\frac{1}{2}}u, Q^{-\frac{1}{2}}v)_H$ . Для определенного выше  $H$ -значного цилиндрического белого шума справедливо следующее

**Предложение 7.** При любых  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in [0; 1]$  верно  $\mathbb{W}(t) \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H_Q)$  для любого оператора  $Q = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 (e_j \otimes e_j) \in \text{HS}(H; H)$ ,<sup>2</sup> т. е. такого, что  $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$ , если выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{-2} j^{-2p} < \infty \quad \text{для некоторого } p \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

**Доказательство.** Справедливость предложения вытекает из оценки

$$\|\mathbb{W}_{\epsilon_n(i,j)}\|_{H_Q}^2 (2\mathbb{N})^{-2p\epsilon_n(i,j)} = |\xi_i(t)|^2 \sigma_j^{-2} (2n(i,j))^{-2p} \leq \frac{|\xi_i(t)|^2}{\sigma_j^2 (2ij)^{2p}} = O(\sigma_j^{-2} i^{-2p-\frac{1}{2}} j^{-2p}). \quad \square$$

Из предложения 7 следует, что если оператор  $Q$  удовлетворяет условию (2.9), то для любого  $(\mathcal{S})_{-\rho}(\text{HS}(H_Q; H))$ -значного случайного процесса  $\Psi(t)$  определен  $(\mathcal{S})_{-1}(H)$ -значный случайный процесс  $\Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)$ .

Будем называть  $(\mathcal{S})_{-\rho}(\text{HS}(H_Q; H))$ -значный случайный процесс  $\Psi(t)$  *интегрируемым по Хицуде — Скороходу* на промежутке  $[0; T]$ , если процесс  $\Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t)$  интегрируем на  $[0; T]$  как  $(\mathcal{S})_{-1}(H)$ -значная функция. В таком случае будем называть интеграл

$$\int_0^T \Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t) dt$$

интегралом Хицуды — Скорохода от  $\Psi(t)$ .

Интеграл Хицуды — Скорохода является обобщением интеграла Ито  $\int_0^T \Psi(t) dW(t)$  по цилиндрическому винеровскому процессу в том смысле, что если процесс

$$\Psi(t) \in (L^2)(\text{HS}(H_Q; H))$$

для всех  $t \in [0; T]$  и адаптирован к фильтрации, порожденной процессом  $W(t)$ , то

$$\int_0^T \Psi(t) \diamond \mathbb{W}(t) dt = \int_0^T \Psi(t) dW(t).$$

<sup>2</sup>Для  $v \in V$ ,  $u \in U$ , где  $V$  и  $U$  — гильбертовы пространства, через  $v \otimes u$  обозначаем оператор, действующий из  $U$  в  $V$ , определенный равенством  $(v \otimes u)h := v(u, h)_U$ .

### 3. Задача Коши для линейного дифференциально-операторного уравнения с мультипликативным шумом

Пусть  $A$  — линейный оператор, действующий из гильбертова пространства  $H_1$  в гильбертово пространство  $H_2$ . Определим его действие как оператора из  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H_1)$  в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H_2)$  следующим образом. Если  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ , положим

$$A\Phi := \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} A\Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \quad \text{для} \quad \Phi = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H_1). \quad (3.1)$$

Определенный таким образом  $A$  очевидно является линейным непрерывным оператором из  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H_1)$  в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H_2)$ . Если  $A$  неограниченный, определим  $(\text{dom } A)$  как множество всех

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H_1),$$

для которых  $\Phi_\alpha \in \text{dom } A$  при всех  $\alpha \in \mathcal{T}$  и выполнено условие

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1-\rho} \|A\Phi_\alpha\|_{H_2}^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty \quad \text{для некоторого } p \in \mathbb{N}.$$

Тогда формула (3.1) определяет на  $(\text{dom } A)$  линейный оператор, действующий из  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H_1)$  в  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H_2)$ . Легко проверить, что он замкнут, если  $A$  — замкнутый оператор из  $H_1$  в  $H_2$ .

**Предложение 8.** Пусть  $A$  — замкнутый оператор из  $H_1$  в  $H_2$ . Для любого  $\Phi \in (\text{dom } A) \subseteq (\mathcal{S})_{-\rho}(H_1)$   $[S\Phi](h) \in \text{dom } A \subseteq H_1$ , при этом верно равенство

$$[SA\Phi](h) = A[S\Phi](h), \quad h \in \mathcal{S}.$$

Пусть  $A$  — линейный замкнутый оператор, действующий в пространстве

$$H, \quad B(\cdot) \in \mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H)), \quad \Phi \in (\text{dom } A) \subseteq (\mathcal{S})_{-\rho}(H).$$

Рассмотрим задачу Коши (1.2)

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B(X(t)) \diamond \mathbb{W}(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \Phi.$$

Она получается путем замены интеграла Ито на интеграл Хицуды — Скорохода в уравнении (1.1) и дифференцирования обеих частей по  $t$ . Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи (1.2) в пространстве  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  при  $\rho \in [0; 1)$ , т. е. существование  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ -значной дифференцируемой функции, удовлетворяющей (1.2). Заметим, что если  $Q$  — ядерный оператор в пространстве  $H$ , удовлетворяющий условию предложения 7 для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ , то в силу того, что  $B(X(t)) \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\text{HS}(H_Q; H))$  для любого  $X(t) \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ , произведение Уика в (1.2) определено.

Применяя  $S$ -преобразование к задаче (1.2), получаем следующую задачу:

$$\frac{d}{dt} \hat{X}(t, h) = A\hat{X}(t, h) + B(\hat{X}(t, h)) \hat{\mathbb{W}}(t, h), \quad t \geq 0, \quad \hat{X}(0, h) = \hat{\Phi}(h), \quad h \in \mathcal{S}, \quad (3.2)$$

где  $\hat{X}(t, h) = S[X(t)](h)$ ,  $\hat{\mathbb{W}}(t, h) = S[\mathbb{W}(t)](h)$ ,  $\hat{\Phi}(h) = S\Phi(h)$ .

В дальнейшем будем предполагать, что оператор  $B$  удовлетворяет следующему условию.

**Предположение 1.** Для любого  $y \in H$

(BI)  $B(\text{dom } A)y \subseteq \text{dom } A$ ;

(BII) оператор  $C(\cdot)y: \text{dom } A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ , определенный равенством

$$C(x)y := AB(x)y - B(Ax)y, \quad x \in \text{dom } A,$$

ограничен.

Заметим, что из предположения 1 в силу принципа равномерной ограниченности следует, что существует  $M_{AB} > 0$  такое, что выполнена оценка

$$\|C(x)y\| \leq M_{AB}\|x\| \|y\|, \quad x \in \text{dom}A, \quad y \in H. \quad (3.3)$$

Пусть оператор  $A$  является генератором полугруппы  $\{U(t), t \geq 0\}$  класса  $C_0$ . Будем предполагать, что  $M > 0$  и  $a \in \mathbb{R}$  — константы, для которых выполнено неравенство

$$\|U(t)\| \leq Me^{at}, \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

**Предложение 9.** *Если  $\ker B(\cdot)y = \{0\}$  при всех  $y \in H$ , то решение задачи (3.2) если и существует, то единственно.*

**Доказательство.** Если функция  $\hat{X}(\cdot, h)$  — решение задачи (3.2) при некотором  $h \in \mathcal{S}$ , то она является решением уравнения

$$\hat{X}(t, h) = U(t)\hat{\Phi}(h) + \int_0^t U(t-s)B(\hat{X}(s, h))\hat{\mathbb{W}}(s, h) ds, \quad t \geq 0.$$

(Обратное, вообще говоря, неверно). Таким образом, для доказательства единственности задачи (3.2) достаточно доказать, что при любом  $h \in H$  уравнение

$$\int_0^t U(t-s)B(\hat{X}(s, h))\hat{\mathbb{W}}(s, h) ds = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.5)$$

имеет лишь тривиальное решение  $X(\cdot, h) \equiv 0$  на  $[0; \infty)$ . Для этого применим к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа. При  $\text{Re } \lambda > a$  имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt e^{\lambda t} \int_0^t U(t-s)B(\hat{X}(s, h))\hat{\mathbb{W}}(s, h) ds &= \int_0^\infty ds \int_s^\infty e^{\lambda t} U(t-s)B(\hat{X}(s, h))\hat{\mathbb{W}}(s, h) dt \\ &= \int_0^\infty ds \int_0^\infty e^{\lambda(t+s)} U(t)B(\hat{X}(s, h))\hat{\mathbb{W}}(s, h) dt = (\lambda - A)^{-1} \int_0^\infty e^{\lambda s} B(\hat{X}(s, h))\hat{\mathbb{W}}(s, h) ds. \end{aligned}$$

В силу свойств резольвенты  $A$  и преобразования Лапласа отсюда следует, что если  $\hat{X}(\cdot, h)$  — решение уравнения (3.5) при любом  $h \in \mathcal{S}$ , то  $B(\hat{X}(\cdot, h))\hat{\mathbb{W}}(\cdot, h) \equiv 0$  на  $[0; \infty)$  при любом  $h \in \mathcal{S}$ . Полагая  $h = \xi_{n(i,j)}$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , получаем  $B(\hat{X}(\cdot, h))\hat{\mathbb{W}}(\cdot, h) = B(\xi_i(\cdot)\hat{X}(\cdot, \xi_{n(i,j)}))e_j \equiv 0$  на  $[0; \infty)$ , откуда следует  $\hat{X}(\cdot, h) \equiv 0$  на  $[0; \infty)$  для всех  $h \in \mathcal{S}$ .  $\square$

Определим последовательность операторов  $\{T_k(t, h)\}$ ,  $t \geq 0, h \in \mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} T_0(t, h) &= U(t), \\ T_k(t, h)x &= \int_0^t U(t-s)B(T_{k-1}(s, h)x)\hat{\mathbb{W}}(s, h) ds, \quad x \in H, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Лемма 1.** *Для любого  $t \geq 0, h \in \mathcal{S}$  и  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*

$$\|T_k(t, h)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq M^{k+1} \|B\|^k e^{at} |h|_{L^2(\mathbb{R})}^k \sqrt{\frac{t^k}{k!}}, \quad (3.6)$$

где  $M > 0$  и  $a \in \mathbb{R}$  — константы из оценки (3.4),  $\|B\| = \|B\|_{\mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H))}$ .

**Доказательство.** Предположим, что (3.6) выполнено для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ , тогда для любого  $x \in H$  имеем

$$\begin{aligned} \|T_{k+1}(t, h)x\| &= \left\| \int_0^t U(t-s)B(T_k(s, h)x)\hat{W}(s, h) ds \right\| \leq \int_0^t \|U(t-s)B(T_k(s, h)x)\hat{W}(s, h)\| ds \\ &\leq M\|B\| \int_0^t e^{a(t-s)} \|T_k(s, z)x\| \|\hat{W}(s, h)\| ds \leq M^{k+2}\|B\|^{k+1} e^{at} |h|_{L^2(\mathbb{R})}^k \int_0^t \sqrt{\frac{s^k}{k!}} \|\hat{W}(s, h)\| ds \|x\| \\ &\leq M^{k+2}\|B\|^{k+1} e^{at} |h|_{L^2(\mathbb{R})}^k \left( \int_0^t \frac{s^k}{k!} ds \right)^{1/2} \left( \int_0^t \|\hat{W}(s, h)\|^2 ds \right)^{1/2} \|x\| \\ &\leq M^{k+2}\|B\|^{k+1} e^{at} |h|_{L^2(\mathbb{R})}^k \sqrt{\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}} \|\hat{W}(\cdot, h)\|_{L^2(\mathbb{R}; H)} \|x\| \leq M^{k+2}\|B\|^{k+1} e^{at} |h|_{L^2(\mathbb{R})}^{k+1} \sqrt{\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}} \|x\|. \end{aligned}$$

Поскольку оценка (3.6) верна при  $k = 0$ , по индукции заключаем, что она верна для всех  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Лемма 2.** Для любых  $t \geq 0$ ,  $h \in \mathcal{S}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\Phi \in (\text{dom} A)$  справедлива оценка

$$\|AT_k(t, h)\hat{\Phi}(h)\| \leq M^{k+1}\|B\|^{k-1} |h|_{L^2(\mathbb{R})}^k e^{at} \sqrt{\frac{t^k}{k!}} \left( \|B\| \|A\hat{\Phi}(h)\| + kM_{AB} \|\hat{\Phi}(h)\| \right), \quad (3.7)$$

где  $M > 0$  и  $a \in \mathbb{R}$  — константы из оценки (3.4),  $\|B\| = \|B\|_{\mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H))}$ ,  $M_{AB}$  — константа из оценки (3.3).

**Доказательство.** При  $k = 0$ , пользуясь свойствами полугрупп класса  $C_0$ , получаем

$$\|AT_0(t, h)\hat{\Phi}(h)\| = \|AU(t)\hat{\Phi}(h)\| = \|U(t)A\hat{\Phi}(h)\| \leq Me^{at} \|\hat{\Phi}(h)\|. \quad (3.8)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} AT_k(t, h)\hat{\Phi}(h) &= \int_0^t AU(t-s)B(T_{k-1}(s, h)\hat{\Phi}(h))\hat{W}(s, h) ds \\ &= \int_0^t U(t-s)AB(T_{k-1}(s, h)\hat{\Phi}(h))\hat{W}(s, h) ds \\ &= \int_0^t U(t-s) \left[ B(AT_{k-1}(s, h)\hat{\Phi}(h))\hat{W}(s, h) + C(T_{k-1}(s, h)\hat{\Phi}(h))\hat{W}(s, h) \right] ds. \end{aligned}$$

Если (3.7) верно при некотором  $k \in \mathbb{N}$ , то используя это представление и оценку (3.6), получаем

$$\begin{aligned} &\|AT_{k+1}(t, h)\hat{\Phi}(h)\| \\ &\leq \int_0^t Me^{a(t-s)} \left[ M^{k+1}\|B\|^k |h|_{L^2(\mathbb{R})}^k e^{as} \sqrt{\frac{s^k}{k!}} \left( \|B\| \|A\hat{\Phi}(h)\| + kM_{AB} \|\hat{\Phi}(h)\| \right) \|\hat{W}(s, h)\| \right. \\ &\quad \left. + M_{AB} M^{k+1} \|B\|^k e^{as} |h|_{L^2(\mathbb{R})}^k \sqrt{\frac{s^k}{k!}} \|\hat{\Phi}(h)\| \|\hat{W}(s, h)\| \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M^{k+2} \|B\|^k |h|_{L^2(\mathbb{R})}^k e^{at} \left( \|B\| \|A\hat{\Phi}(h)\| + (k+1)M_{AB} \|\hat{\Phi}(h)\| \right) \int_0^t \sqrt{\frac{s^k}{k!}} \|\hat{\mathbb{W}}(s, h)\| ds \\
&\leq M^{k+2} \|B\|^k |h|_{L^2(\mathbb{R})}^k e^{at} \left( \|B\| \|A\hat{\Phi}(h)\| + (k+1)M_{AB} \|\hat{\Phi}(h)\| \right) \left( \int_0^t \frac{s^k}{k!} ds \right)^{1/2} \left( \int_0^t \|\hat{\mathbb{W}}(s, h)\|^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq M^{k+2} \|B\|^k |h|_{L^2(\mathbb{R})}^{k+1} e^{at} \sqrt{\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}} \left( \|B\| \|A\hat{\Phi}(h)\| + (k+1)M_{AB} \|\hat{\Phi}(h)\| \right).
\end{aligned}$$

По индукции отсюда и из (3.8) следует утверждение леммы.  $\square$

Рассмотрим ряд

$$T(t, h) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t, h). \quad (3.9)$$

Из леммы 1 следует, что для любых  $n, m \in \mathbb{N}$  справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{n+m} \|T_k(t, h)\| &\leq M e^{at} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{(M\sqrt{2}\|B\| |h|_{L^2(\mathbb{R})} \sqrt{t})^k}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^k}} \\
&\leq M e^{at} \left( \sum_{k=n}^{n+m} \frac{(2M^2\|B\|^2 |h|_{L^2(\mathbb{R})}^2 t)^k}{k!} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{2^k} \right)^{1/2}, \quad (3.10)
\end{aligned}$$

откуда следует абсолютная сходимость ряда (3.9) в  $\mathcal{L}(H)$  для любых  $t \geq 0$ ,  $h \in \mathcal{S}$ . Таким образом,  $T(t, h) \in \mathcal{L}(H)$ .

**Предложение 10.** Для любых  $\Phi \in (\text{dom}A)$ ,  $h \in \mathcal{S}$  функция  $\hat{X}(t, h) = T(t, h)\hat{\Phi}(h)$  является решением задачи (3.2).

**Доказательство.** Для любого  $\Phi \in (\text{dom}A)$ , пользуясь предложением 8 и свойствами  $C_0$ -полугрупп, получаем  $T_0(t, h)\hat{\Phi}(h) \in \text{dom}A$  при всех  $t \geq 0$  и  $h \in \mathcal{S}$ . Из условия (VI) следует, что  $B(\text{dom}A)\hat{\mathbb{W}}(t, h) \subseteq \text{dom}A$  при всех  $t \geq 0$  и  $h \in \mathcal{S}$ . Отсюда по индукции получаем  $T_k(t, h)\hat{\Phi}(h) \in \text{dom}A$  для любых  $\Phi \in (\text{dom}A)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t \geq 0$  и  $h \in \mathcal{S}$ . Из условия (VI) также следует  $B(T_k(s, h)\hat{\Phi}(h))\hat{\mathbb{W}}(t, h) \in \text{dom}A$ . Кроме того

$$\frac{d}{dt} U(t-s)B(T_k(s, h)\hat{\Phi}(h))\hat{\mathbb{W}}(t, h) = AU(t-s)B(T_k(s, h)\hat{\Phi}(h))\hat{\mathbb{W}}(t, h), \quad t \geq 0, \quad h \in \mathcal{S}.$$

Таким образом, для  $\Phi \in (\text{dom}A)$  выполняются равенства

$$\frac{d}{dt} T_0(t, h)\hat{\Phi}(h) = AT_0(t, h)\hat{\Phi}(h), \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt} T_k(t, h)\hat{\Phi}(h) = \int_0^t AU(t-s)B(T_{k-1}(s, h)\hat{\Phi}(h))\hat{\mathbb{W}}(s, h) ds + B(T_{k-1}(t, h)\hat{\Phi}(h))\hat{\mathbb{W}}(t, h). \quad (3.12)$$

Пользуясь замкнутостью оператора  $A$ , перепишем равенство (3.12) в виде

$$\frac{d}{dt} T_k(t, h)\hat{\Phi}(h) = AT_k(t, h)\hat{\Phi}(h) + B(T_{k-1}(t, h)\hat{\Phi}(h))\hat{\mathbb{W}}(t, h). \quad (3.13)$$

С помощью леммы 2 получаем оценку

$$\sum_{k=n+1}^m \|AT_k(t, h)\hat{\Phi}(h)\| \leq M e^{at} \left( \sum_{k=n+1}^m \frac{(\sqrt{2}M\|B\| |h|_{L^2(\mathbb{R})} \sqrt{t})^k}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^k}} \right) \|A\hat{\Phi}(h)\|$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{M}{\|B\|} e^{at} \left( \sum_{k=n+1}^m \frac{(\sqrt{2}M\|B\|\|h\|_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{t})^k}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{k}{\sqrt{2^k}} \right) M_{AB} \|\hat{\Phi}(h)\| \\
& \leq M e^{at} \left( \sum_{k=n+1}^m \frac{(2M^2\|B\|^2|h\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 t)^k}{k!} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k} \right)^{1/2} \|A\hat{\Phi}(h)\| \\
& + \frac{M}{\|B\|} e^{at} \left( \sum_{k=n+1}^m \frac{(2M^2\|B\|^2|h\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 t)^k}{k!} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=n+1}^m \frac{k^2}{2^k} \right)^{1/2} M_{AB} \|\hat{\Phi}(h)\|,
\end{aligned}$$

из которой следует сходимость в пространстве  $H$  ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} AT_k(t, h)\hat{\Phi}(h)$  при всех  $h \in \mathcal{S}$ ,  $\Phi \in (\text{dom}A)$ . В результате, суммируя равенства (3.11) и (3.13) по всем  $k \in \mathbb{N}$ , мы получаем в правой части ряд, сходящийся в  $H$  при всех  $t \geq 0$ ,  $h \in \mathcal{S}$ , а значит, доказываем, что  $\hat{X}(t, h) = T(t, h)\hat{\Phi}(h)$  — решение задачи (3.2).  $\square$

**Теорема 2.** Пусть линейный замкнутый оператор  $A$  с плотной в  $H$  областью определения является генератором полугруппы класса  $S_0$ , а линейный ограниченный оператор  $B(\cdot): H \rightarrow \mathcal{L}(H)$  удовлетворяет предположению 1 и  $\ker B(\cdot)y = \{0\}$  при всех  $y \in H$ . Тогда для любого  $\Phi \in (\text{dom}A) \subseteq (\mathcal{S})_{-0}(H)$  задача Коши (1.2) имеет единственное решение в пространстве  $(\mathcal{S})_{-0}(H)$ .

**Доказательство.** Из предложений 9 и 10 следует, что в условиях теоремы для любого  $\Phi \in (\text{dom}A)$  преобразованная задача (3.2) имеет единственное решение  $\hat{X}(t, h) = T(t, h)\hat{\Phi}(h)$  для любого  $h \in \mathcal{S}$ . При этом из оценки (3.10) следует оценка

$$\begin{aligned}
\|T(t, h)\| & \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T_k(t, h)\| \leq M e^{at} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M\sqrt{2}\|B\|\|h\|_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{t})^k}{\sqrt{k!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^k}} \\
& \leq M e^{at} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2M^2\|B\|^2|h\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 t)^k}{k!} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right)^{1/2} = M\sqrt{2} e^{at} \exp\left(M^2\|B\|^2|h\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 t\right).
\end{aligned}$$

В силу оценки (2.8) имеем  $\|\hat{\Phi}(h)\| \leq \|\Phi\|_{HS,p,0} \exp(|h|_p^2)$ ,  $h \in \mathcal{S}$  для некоторого  $p \in \mathbb{N}$ . Следовательно, при  $t \geq 0$  справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\|\hat{X}(t, h)\| & \leq M\sqrt{2} e^{at} \exp\left(M^2\|B\|^2|h\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 t + |h|_p^2\right) \|\Phi\|_{HS,p,0} \\
& \leq M\sqrt{2} e^{at} \exp\left((M^2\|B\|^2 t + 1)|h|_p^2\right) \|\Phi\|_{HS,p,0}, \quad h \in \mathcal{S}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Отсюда следует, что при  $t \geq 0$   $\hat{X}(t, h)$  является  $S$ -преобразованием единственной обобщенной случайной величины  $X(t)$  из пространства  $(\mathcal{S})_{-0}(H)$ , которая и является единственным решением задачи (3.2).  $\square$

**Следствие 2.** В условиях теоремы 2 для любого  $T > 0$  найдутся такие  $q \in \mathbb{N}$  и  $K > 0$ , что для  $X(t)$  — решения задачи Коши (3.2) выполнено неравенство

$$\|X(t)\|_{HS,q,0} \leq K e^{at} \|\Phi\|_{HS,p,0}, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.15}$$

**Доказательство.** Из теоремы 1 и оценки (3.14) следует, что при любом  $t \in [0; T]$  для любого  $q \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющего условию

$$2e^2(M^2\|B\|^2 T + 1) \sum_{i=1}^{\infty} (2i)^{-2(q-p)} < 1, \tag{3.16}$$

верна оценка

$$\begin{aligned} \|X(t)\|_{\text{HS},q,0} &\leq M\sqrt{2}e^{at} \left(1 - 2e^2(M^2\|B\|^2t + 1) \sum_{i=1}^{\infty} (2i)^{-2(q-p)}\right)^{-1/2} \|\Phi\|_{\text{HS},p,0} \\ &\leq M\sqrt{2}e^{at} \left(1 - 2e^2(M^2\|B\|^2T + 1) \sum_{i=1}^{\infty} (2i)^{-2(q-p)}\right)^{-1/2} \|\Phi\|_{\text{HS},p,0}. \quad \square \end{aligned}$$

Отметим, что длина отрезка  $[0; T]$  определяется выбором  $q > p$ , что видно из неравенства (3.16). Чем больше  $q$ , тем длиннее отрезок, на котором верна оценка (3.15).

**Пример 3.** Пусть

$$H = L^2[0, 1], \quad A = -\frac{d}{ds} + \mu(s), \quad \mu \in L_{\infty}[0, 1]$$

такая, что

$$\frac{d\mu}{ds} \in L_{\infty}[0, 1], \quad \text{dom}A = \left\{x \in L^2[0, 1], \frac{dx}{ds} \in L^2[0, 1], x(0) = 0\right\}.$$

Оператор  $A$  является генератором полугруппы класса  $C_0$ , что может быть доказано методами теории возмущений полугрупп: оператор  $d\mu/ds$  порождает полугруппу сдвига класса  $C_0$  в пространстве  $L^2[0, 1]$ , а оператор умножения на функцию  $\mu$  с указанными свойствами является ограниченным в  $L^2[0, 1]$ ; такое возмущение оператора не меняет свойство соответствующей полугруппы принадлежать классу  $C_0$ .

Пусть  $B(\cdot) \in \mathcal{L}(H; \mathcal{L}(H))$  определен равенством

$$[B(x)y](s) := \varepsilon \cdot x(s)(\psi * y)(s), \quad (3.17)$$

где  $\varepsilon > 0$ ,  $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  (бесконечно-дифференцируемая функция с компактным носителем). Определенные таким образом операторы  $A$  и  $B$  удовлетворяют условиям теоремы 2, а значит, соответствующая задача Коши (1.2) имеет единственное решение в пространстве  $(\mathcal{S})_{-0}(H)$ , устойчивое в смысле оценки (3.15).

Уравнения с операторами, подобными  $A$ , возникают, например, в задачах популяционной динамики. Такой оператор содержит слагаемое, которое является генератором полугруппы типа сдвига и которое описывает поступательное изменение некоторой количественной характеристики популяции с течением времени (например, возраст особей или их размер), и слагаемые, являющиеся операторами умножения на функцию и описывающие структурные изменения популяции, связанные с такими явлениями, как гибель особей и их размножение. При подходящем выборе параметра  $\varepsilon$  и функции  $\psi$  на оператор  $B$  вида (3.17) можно смотреть как на стохастическое возмущение оператора умножения на функцию  $\mu$  (см., например, [7], где изучено стохастически возмущенное подобным образом уравнение, описывающее эволюцию популяции клеток, структурированной по размеру).

#### 4. Заключение

Введение мультипликативного стохастического возмущения (мультипликативного шума) в дифференциально-операторное уравнение в гильбертовом пространстве является актуальной проблемой как в плане постановки задачи, так и в плане ее последующего решения. Пространства  $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$  гильбертово-значных случайных величин, введенные в настоящей работе, позволили, с одной стороны, рассмотреть дифференциально-операторное уравнение с цилиндрическим белым шумом, а с другой — использовать технику сведения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения с помощью  $S$ -преобразования к задаче Коши для детерминированного уравнения для доказательства существования, единственности и устойчивости ее решений в пространстве  $(\mathcal{S})_{-0}(H)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Prato G. Da, Zabczyk J.** Stochastic equations in infinite dimensions // *Encycl. Math. Appl.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. Vol. 44. 454 p.
2. **Kuo H.-H.** White noise distribution theory. Boca Raton: CRC Press, 1996. 378 p.
3. **Holden H., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T.** Stochastic partial differential equations. A modelling, white noise functional approach. Boston: Birkhäuser, 1996. 229 p.
4. **Filinkov A., Sorensen J.** Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions // *Stoch. Stoch. Rep.* 2002. Vol. 72, no. 3–4. P. 129–173.
5. **Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A.** Abstract stochastic equations II. Solutions in spaces of abstract stochastic distributions // *J. Math. Sci.* 2003. Vol. 116, no. 5. P. 3620–3656.
6. **Альшанский М.А., Мельникова И.В.** Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач // *Мат. сб.* 2011. № 11. С. 3–30.
7. **Альшанский М.А.** Стохастически возмущенное уравнение популяционной динамики // *Математическое моделирование и краевые задачи: тр. VII Всерос. науч. конф. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи.* Самара: СамГТУ, 2010. С. 15–18.

Мельникова Ирина Валерьяновна  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
Уральский федеральный университет  
e-mail: Irina.Melnikova@usu.ru

Поступила 23.05.2011

Альшанский Максим Алексеевич  
канд. физ.-мат. наук, доцент  
Уральский федеральный университет  
e-mail: mxalsh@gmail.com

УДК 517.977

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОСОБЕННОСТЬЮ НА ГРАНИЦЕ<sup>1</sup>

И. В. Першин

Рассматривается третья краевая задача для параболического уравнения второго порядка на полупространстве с особенностью. Особенность заключается в наличии на границе области подвижного полосового источника тепла с дельтаобразной функцией распределения мощности. Получено точное аналитическое решение задачи, исследовано поведение этого решения в окрестности особенности.

Ключевые слова: краевые задачи для уравнений в частных производных, асимптотика решения.

I. V. Pershin. Asymptotics of a solution to the heat equation with a singularity at the boundary.

The third boundary value problem for a second-order parabolic equation in a half-space with singularity is considered. The singularity consists in the presence of a moving band heat source with delta-like source intensity function at the boundary of the domain. An exact analytic solution of the problem is found, and the behavior of this solution in a neighborhood of the singularity is investigated.

Keywords: boundary value problems for partial differential equations, asymptotics of a solution.

### 1. Постановка задачи

Современные технологические процессы сварки и наплавки (электронно-лучевая, лазерная) характеризуются наличием подвижных сосредоточенных источников тепла большой мощности. Особенностью этих процессов является то, что вблизи источника тепла температура на небольшом участке резко возрастает, возникают большие температурные градиенты.

Асимптотика фундаментального решения для параболического уравнения второго порядка вблизи особой точки исследовалась в ряде работ. В статьях [1; 2] была построена и обоснована асимптотика фундаментального решения задачи Коши при малом значении времени. В работе [3] построена асимптотика функции Грина для второй краевой задачи.

В данной работе рассматривается задача о нагреве полубесконечного тела подвижным источником тепла большой мощности, заданным на полосе малой ширины. Предполагается выполнение следующих условий: распространение тепла в теле происходит только с помощью теплопроводности, отсутствуют фазовые и структурные превращения, теплофизические коэффициенты не зависят от температуры. На поверхности тела задано граничное условие третьего рода, определяющее конвективный теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой.

Строится решение уравнения теплопроводности вблизи полосового источника тепла малой ширины при условии, что мощность источника стремится к бесконечности, а ширина полосы источника стремится к нулю.

Задача решается в полупространстве:  $0 \leq x \leq \infty$ ,  $-\infty \leq y \leq \infty$ ,  $-\infty \leq z \leq \infty$ ,  $t > 0$ .

Полосовой источник действует на границе  $x = 0$  и движется вдоль оси  $y = 0$  с постоянной скоростью. В этом случае тепловое поле полубесконечного тела не зависит от координаты  $z$  (является симметричным вдоль оси  $oz$ ). Поэтому исходная задача сводится к двумерной задаче определения теплового поля в полуплоскости, по границе которой движется источник малой ширины, при этом ширина источника стремится к нулю, а его мощность — к бесконечности.

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 11-01-00679 и 10-01-00726).

Задача описывается двумерным уравнением теплопроводности в декартовых координатах и граничными условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{y}^2} \right), \\ \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} + \alpha_k T \right) \Big|_{x=0} = \delta(\tilde{y} - \tilde{v}t), \quad T(\tilde{x}, \tilde{y}, 0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $a$  — коэффициент температуропроводности ( $a < 1$ ),  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\alpha_k$  — коэффициент конвективной теплопередачи,  $v$  — скорость движения источника тепла,  $\delta$  — дельта-функция Дирака,  $T$  — искомая температура,  $t$  — время, знак  $\sim$  обозначает неподвижную систему координат.

## 2. Построение явного решения задачи

Не теряя общности граничное условие при  $x = 0$  можно записать в виде

$$\left( -\frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} + \alpha T \right) \Big|_{x=0} = \delta(\tilde{y} - \tilde{v}t), \quad \alpha = \frac{\alpha_k}{\lambda}.$$

Перейдя в подвижную систему координат, связанную с источником тепла, и обозначив  $\beta = 1/a$ , из системы (1) получим

$$\begin{cases} \beta \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \tilde{v}\beta \frac{\partial T}{\partial y}, \\ \left( -\frac{\partial T}{\partial x} + \alpha T \right) \Big|_{x=0} = \delta(y), \quad T(x, y, 0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Сделав замену переменных  $T = ue^{-\frac{v}{2}y - \frac{v^2}{4\beta}t}$ ,  $v = \tilde{v}\beta$ , приведем систему (2) к каноническому виду

$$\begin{cases} \beta \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \left( -\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \right) \Big|_{x=0} = \delta(y) e^{\frac{v}{2}y + \frac{v^2}{4\beta}t}, \quad u(x, y, 0) = 0, \\ 0 \leq x \leq \infty, \quad -\infty \leq y \leq \infty, \quad t > 0. \end{cases} \quad (3)$$

**Теорема 1.** *Существует единственное решение задачи (3) при  $t > 0$ , которое имеет вид*

$$\pi u(x, y, t) = \sqrt{\frac{\beta}{t}} e^{-\frac{y^2\beta}{4t}} D\left(x, \frac{t}{\beta}\right) + e^{st} \int_0^{t/\beta} D(x, \tau) \left[ \frac{\beta s}{\sqrt{\tau}} + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left( \frac{2\tau - y^2}{4\tau} \right) \right] e^{-\frac{y^2\beta}{4\tau} - s\tau} d\tau, \quad (4)$$

где

$$D(x, t) = \frac{1}{\alpha\beta} \left[ \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - e^{\alpha^2 t + \alpha x} \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \alpha t\right) \right].$$

Здесь  $\operatorname{Erfc}(x)$  — дополнение функции ошибок,  $s = v^2/4\beta$ .

**Доказательство.** Применим к системе (3) интегральное преобразование Фурье  $\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-i\xi y} dy = U$ , тогда

$$\begin{cases} \beta \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \xi^2 U, \\ \left( -\frac{\partial U}{\partial x} + \alpha U \right) \Big|_{x=0} = e^{st}, \quad U(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Далее используем интегральное преобразование Лапласа  $\int_0^\infty e^{-pt} U dt = w$ , в результате возникает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - (\xi^2 + \beta p)w = 0, \quad \left( -\frac{dw}{dx} + \alpha w \right) \Big|_{x=0} = \frac{1}{p-s},$$

которое имеет решение

$$w = \frac{-e^{-\sqrt{\xi^2 + \beta p} x}}{(p-s)(\sqrt{\xi^2 + \beta p} + \alpha)}.$$

Используя соответствующие обратные преобразования Лапласа и Фурье, получим решение для функции  $u(x, y, t)$  в подвижной системе координат в виде (4).  $\square$

Из анализа решения видно, что функции, входящие в подынтегральное выражение, а также сам интеграл имеют сильные особенности (быстро растут) при  $(x, y) \rightarrow 0$ . Исследуем решение в этой области — в непосредственной близости от подвижного источника тепла.

### 3. Исследование поведения решения

В первую очередь исследуем поведение функции  $D(x, t)$ , представив ее в виде ряда  $\sum_{i=0}^\infty D_i(x, t)$ , разложив функции, входящие в  $D(x, t)$ , в ряды при  $(x, t) \rightarrow 0$ . Нетрудно показать, что  $D(x, t) = D_0(x, t) + O(D_2)$ , где

$$D_0(x, t) = \frac{1}{\alpha\beta} \left[ \alpha\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{4t}} - (\alpha^2 t + \alpha x) \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right].$$

$D_0(x, t)$  зависит от автомодельной переменной  $\vartheta = x/(2\sqrt{t})$ . Поскольку изучается поведение решения вблизи источника тепла, переменные  $x$  и  $t$  малы, но  $0 \leq \vartheta \leq \infty$  при различном соотношении  $x$  и  $t$ . Исследуем поведение функции  $D_0(x, t)$ .

**Теорема 2.** *Функция  $D_0(x, t)$  имеет асимптотическое представление*

- в области  $x \leq t$ :  $D_0(x, t) = \frac{M\sqrt{t}}{\beta} + O(t)$ ,  $0 < M \leq 1$ , причем при  $x \ll t$   $M = 1$ ;
- в области  $x \gg t$ :  $D_0(x, t) = \frac{2\sqrt{t}}{\beta} e^{-\frac{x^2}{4t}} + O(t)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Не составляет сложности показать, что справедливы следующие соотношения.

В случае  $x \ll \sqrt{t}$  ( $\vartheta \rightarrow 0$ ) из асимптотики функции  $\operatorname{Erfc}(\vartheta)$  следует

$$\operatorname{Erfc}(\vartheta) \rightarrow 1, \quad \alpha^2 t + \alpha x \ll \alpha\sqrt{t}, \quad e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow 1.$$

Поэтому для функции  $D_0(x, t)$  выполняется  $D_0(x, t) = \sqrt{t}/\beta + O(t)$ .

При  $x \cong \sqrt{t}$  ( $\vartheta$  является ограниченной) следует

$$\alpha^2 t \ll \alpha x, \quad 0 < \alpha\sqrt{t}e^{-\frac{x^2}{4t}} - \alpha x \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) < 1.$$

Тогда верна оценка  $D_0(x, t) \cong M\sqrt{t}/\beta$ , где  $0 < M < 1$ .

В случае  $x \gg t$  ( $\vartheta \rightarrow \infty$ ) для функции  $D(x, t)$  имеем

$$D(x, t) = \frac{1}{\alpha\beta} \left[ \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \alpha t\right) \right].$$

Учитывая асимптотику  $\operatorname{Erfc}(\vartheta)$  на бесконечности, получим  $D_0(x, t) = \frac{2\sqrt{t}}{\beta} e^{-\frac{x^2}{4t}} + O(t)$ .  $\square$

Подставив эти формулы в (4), исследуем поведение решения  $u(x, y, t)$ . Аналогичным образом построим главный член этого решения.

**Теорема 3.** Функция  $u_0(x, y, t)$  имеет асимптотическое представление

- в области  $x \leq t$ :  $\pi u_0(x, y, t) \cong M \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{-\beta \frac{y^2}{4t}} - \frac{\beta}{2} Ei \left( -\frac{\beta y^2}{4t} \right) \right]$ ,  $0 < M \leq 1$ , причем при  $x \ll t$   $M = 1$ ;
- в области  $x \gg t$ :  $\pi u_0(x, y, t) \cong \frac{2}{\beta} e^{-\frac{\beta(x^2+y^2)}{4t}}$ .

**Доказательство.** Нетрудно показать, что верны следующие соотношения.

В случае  $x \ll \sqrt{t}$  после некоторых преобразований, ряда оценок и вычисления интегралов получим

$$\pi u_0(x, y, t) = e^{-\beta \frac{y^2}{4t}} \left( \frac{st-1}{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right) + Ei \left( -\frac{\beta y^2}{4t} \right) \left( \frac{sy^2}{4} - \frac{\beta}{2} \right),$$

где  $Ei(x)$  — интегральная показательная функция.

С учетом  $\beta \ll 1$  имеем

$$\pi u_0(x, y, t) \cong \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{-\beta \frac{y^2}{4t}} \frac{\beta}{2} Ei \left( -\frac{\beta y^2}{4t} \right).$$

При  $x \cong \sqrt{t}$  выполнено

$$\pi u_0(x, y, t) \cong M \left[ \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{-\beta \frac{y^2}{4t}} - \frac{\beta}{2} Ei \left( -\frac{\beta y^2}{4t} \right) \right], \quad 0 < M < 1.$$

В случае  $x \gg t$  справедливо

$$\pi u_0(x, y, t) \cong \frac{2}{\sqrt{\beta}} e^{-\frac{\beta(x^2+y^2)}{4t}} - \beta Ei \left( -\frac{\beta(x^2+y^2)}{4t} \right).$$

Учитывая асимптотику функции  $Ei$  на бесконечности, получим

$$\pi u_0(x, y, t) \cong \frac{2}{\beta} e^{-\frac{\beta(x^2+y^2)}{4t}}. \quad \square$$

Так как  $u_0(x, y, t)$  является функцией трех независимых переменных, то его поведение зависит от следующего соотношения переменных  $y$  и  $t$ .

В случае  $y \cong \sqrt{t}$  член  $u_0(x, y, t)$  соответствует условиям теоремы 3.

В случае  $y \gg \sqrt{t}$  следует

$$\pi u_0(x, y, t) \cong \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\beta(x^2+y^2)}{4t}}.$$

В данной задаче наиболее интересным является случай  $(x, y) \ll \sqrt{t}$ , когда исследуется решение непосредственно вблизи источника тепла. В этом случае выполнено

$$\pi u_0(x, y, t) \cong -\ln \left( \frac{y^2}{4at} \right).$$

Вернувшись в неподвижную систему координат, для решения исходной задачи вблизи источника тепла получим

$$T_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \cong e^{-\frac{\tilde{v}}{2a}\tilde{y}^2 - \frac{\tilde{v}}{4a}\tilde{t}} \left( -\ln \left( \frac{(\tilde{y} - \tilde{v}\tilde{t})^2}{4a\tilde{t}} \right) \right).$$

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Бабич В.М., Рапопорт Ю.О.** Асимптотика при малых временах фундаментального решения задачи Коши для параболического уравнения второго порядка // Проблемы мат. физики. Вып.7. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. С. 21–38.
2. **Бабич В.М.** Анзац Адамара, его аналоги, обобщения, приложения // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, вып. 5. С. 1–37.
3. **Першин И.В.** Построение асимптотики функции Грина в окрестности особой точки // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 6. С. 842–843.

Першин Игорь Викторович  
главный программист  
Институт математики и механики УрО РАН  
e-mail: piv@imm.uran.ru

Поступила 2.09.2011

УДК 517.958

## ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ<sup>1</sup>

В. Г. Романов

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение, которое соответствует двумерной задаче электродинамики с учетом дисперсии. Предполагается, что электродинамические свойства непроводящей среды, обладающей постоянной магнитной проницаемостью, и внешний ток не зависят от координаты  $x_3$ . В этом случае третья компонента вектора электрической напряженности удовлетворяет скалярному интегро-дифференциальному уравнению второго порядка с переменной диэлектрической проницаемостью среды. Для этого уравнения изучается задача об определении пространственной части ядра, входящего в интегральный член уравнения. Это соответствует отысканию той части диэлектрической проницаемости, которая зависит от частоты электромагнитной волны. Предполагается, что носитель диэлектрической проницаемости содержится в некоторой компактной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Для отыскания этого коэффициента внутри  $\Omega$  задается информация о решении соответствующей прямой задачи на границе области  $\Omega$  для некоторого конечного временного интервала. В предположении, что этот интервал достаточно велик, установлена оценка условной устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения электродинамики, гиперболическое уравнение, устойчивость, единственность.

V. G. Romanov. Two-dimensional problem for an integrodifferential equation of electrodynamics.

An integrodifferential equation corresponding to the two-dimensional problem of electrodynamics with dispersion is considered. It is assumed that the electrodynamic properties of a nonconducting medium with a constant magnetic permeability and the external current are independent of the  $x_3$  coordinate. In this case, the third component of the electric field vector satisfies a second-order scalar integrodifferential equation with a variable permittivity of the medium. For this equation, we study the problem of finding the spatial part of the kernel entering the integral term. This corresponds to finding the part of the permittivity that depends on the electromagnetic frequency. It is assumed that the permittivity support is contained in some compact domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . To find this coefficient inside  $\Omega$ , we use information on the solution of the corresponding direct problem on the boundary of  $\Omega$  on a finite time interval. An estimate for the conditional stability of the solution of the inverse problem is established under the assumption that the time interval is sufficiently large.

Keywords: inverse problem, electrodynamics equations, hyperbolic equation, stability, uniqueness.

### 1. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим относительно функции  $u = u(x, t)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ , уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \varepsilon_0(x)u(x, t) + \int_0^t \varepsilon(x, t-s)u(x, s) ds \right) - \Delta u(x, t) = F(x, t) \quad (1.1)$$

для  $(x, t) \in \mathbb{R}^3$ .

Это уравнение возникает в электродинамике в случае, когда непроводящая дисперсионная среда имеет постоянную магнитную проницаемость ( $\mu = 1$ ), а ее диэлектрическая проницаемость и сторонний ток не зависят от координаты  $x_3$ . При этом третья компонента вектора электрической напряженности поля удовлетворяет уравнению (1.1).

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00105-а) и Сибирского отделения РАН (проект СО РАН, выполняемый со сторонними организациями, 2009, № 93).

В этой статье мы принимаем, что  $\varepsilon_0(x) \in \mathbf{C}^5(\mathbb{R}^2)$  является заданной положительной функцией,  $\varepsilon_0(x) \geq \varepsilon_{00} > 0$ , а функция  $\varepsilon(x, t)$  представима в виде

$$\varepsilon(x, t) = k(t)\varepsilon_0(x)p(x), \quad (1.2)$$

в котором  $k(t) \in \mathbf{C}^3[0, \infty)$  является заданной функцией такой, что  $k(0) = 1$ , а  $p(x)$  — неизвестной функцией класса  $\mathbf{C}^3(\mathbb{R}^2)$ , носитель которой содержится в открытой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с гладкой границей  $\partial\Omega$ .

Чтобы найти  $p(x)$ , мы рассматриваем решение уравнения (1.1) с функцией  $F(x, t)$  вида

$$F(x, t) = \delta(x_1)\delta(t), \quad (1.3)$$

нулевыми начальными данными

$$u|_{t < 0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1.4)$$

и предполагаем, что след этого решения и его нормальной производной известен на некоторой конечной части  $S \subset \partial\Omega \times \mathbb{R}$  боковой границы области  $Q = \Omega \times \mathbb{R}$ ,

$$u|_S = g(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = h(x, t). \quad (1.5)$$

Более точное описание множества  $S$  будет дано ниже. Требуется по заданным функциям  $g(x, t)$  и  $h(x, t)$  найти  $p(x)$  в области  $\Omega$ . При этом предполагается, что прямая  $x_1 = 0$ , на которой локализована дельта-функция  $\delta(x_1)$ , не принадлежит замыканию области  $\Omega$ ; для определенности примем, что  $\Omega$  лежит в полуплоскости  $x_1 \geq d$  при некотором  $d > 0$ .

Полученный в этой статье результат связан с оценкой устойчивости решения сформулированной задачи и основан на методе, изложенном в книге [1]. Суть его заключается: 1) в построении амплитудных соотношений на характеристической поверхности  $t = \tau(x)$ , в которой функция  $\tau(x)$  является решением задачи Коши

$$|\nabla\tau(x)|^2 = \varepsilon_0(x); \quad \tau|_{x_1=0} = 0,$$

и 2) в получении некоторой априорной оценки решения уравнения (1.1) с данными Коши (1.5). Использование этого метода приводит к липшицевой оценке решения обратной задачи.

Заметим, что обратные задачи об определении ядра интегро-дифференциального уравнения, несколько отличного от уравнения (1.1), в предположении, аналогичном (1.2), изучались ранее в работах [2; 3]. В них получена гельдеровская оценка условной устойчивости решения задач. Принципиальная разница в постановках задач, рассматриваемых в настоящей работе и в упомянутых выше работах, состоит в том, что в работах [2; 3] задаются ненулевые начальные данные, которые равномерно отделены от нуля на всем множестве  $\Omega$ . Последнее обстоятельство существенно используется в технике исследования обратной задачи. Впервые подобная постановка обратной задачи и метод ее исследования был представлен в работе [4]. Однако эта постановка обладает очевидным физическим недостатком: не имея возможности проводить измерения внутри области  $\Omega$  (а именно так обстоит дело в практических приложениях обратных задач), мы не можем измерить и начальное состояние в  $\Omega$ . В реальной ситуации возможно создавать поле смещений только источниками, носитель которых располагается вне изучаемой области. Эти источники могут быть различной природы, в частности иметь вид (1.3). В статье [5] рассмотрена задача об определении ядра интегро-дифференциального уравнения вязко-упругости. Эта задача сведена к изучению задачи интегральной геометрии, и для ее решения найдена липшицева оценка устойчивости.

В связи с постановкой обратной задачи вполне закономерным является вопрос: почему функция  $\varepsilon_0(x)$  предполагается известной? Более интересной кажется задача об одновременном определении двух функций  $\varepsilon_0(x)$  и  $p(x)$ . При этом, конечно, информация о решении прямой задачи должна быть более обширной. Например, можно было бы задавать функцию  $F(x, t)$  в

виде  $F(x, t) = \delta(t)\delta(x \cdot \nu)$ , зависящем от единичного вектора  $\nu$  как от параметра задачи (постановки задач такого типа см. в книге [1]). Далее, задавая информацию вида (1.5) для двух различных значений параметра  $\nu$ , можно ставить вопрос о построении двух функций  $\varepsilon_0(x)$  и  $p(x)$  одновременно. Эта задача является значительно более сложной, чем рассматриваемая в настоящей работе. Автор предполагает изучить ее позднее. Однако и для настоящей постановки задачи имеются достаточно серьезные оправдательные аргументы. В самом деле, нетрудно заметить, что время пробега электромагнитных волн между любой парой точек зависит только от функции  $\varepsilon_0(x)$  и никак не связано с функцией  $\varepsilon(x, t)$ . Поэтому для уравнения (1.1) можно рассмотреть вначале обратную кинематическую задачу (постановку ее и результаты исследования см., например, в [1]) и построить с помощью ее решения функцию  $\varepsilon_0(x)$ , а затем уже изучить задачу (1.1)–(1.4). Таким образом, исходная обратная задача о построении двух функций может решаться последовательно, сначала разыскивается функция  $\varepsilon_0(x)$ , а затем  $p(x)$ .

Перейдем теперь к формулировке основного результата этой работы. Предположим, что риманова метрика  $d\tau = \sqrt{\varepsilon_0(x)(dx_1^2 + dx_2^2)}$  имеет неположительную кривизну в  $\Omega$ . Достаточным условием выполнения последнего требования является удовлетворение следующего неравенства (см., например, [6, с. 113, формула (18)]):

$$\Delta \ln \varepsilon_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

При выполнении этого условия метрика является *простой*, т. е. каждая пара точек  $x$  и  $y$  в  $\Omega$  может быть соединена единственной геодезической.

С целью некоторого технического упрощения исследования обратной задачи примем также, что  $\varepsilon_0(x) = 1$  вне  $\Omega$ .

Определим  $S = S(T)$  как множество  $S(T) = \{(x, t) \in (\partial\Omega \times \mathbb{R}) \mid \tau(x) \leq t \leq T + \tau(x)\}$ , в котором  $T$  – некоторое положительное число. Пусть  $G(T)$  – цилиндрическая область:  $G(T) = \{(x, t) \mid x \in \Omega, \tau(x) < t < T + \tau(x)\}$ , а  $\Sigma = \Sigma(T)$  – нижнее основание этой области:  $\Sigma(T) = \{(x, t) \mid x \in \Omega, t = \tau(x)\}$ .

Для фиксированных чисел  $q_0 > 0, d > 0$  обозначим через  $\Lambda(q_0, d)$  множество функций  $(\varepsilon_0, k, p)$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1)  $\text{supp}(p(x), \varepsilon_0(x) - 1) \subset \Omega, \inf_{\Omega} \tau(x) \geq d,$
- 2)  $\|p\|_{C^3(\mathbb{R}^2)} \leq q_0, \|\varepsilon_0 - 1\|_{C^5(\mathbb{R}^2)} \leq q_0, \|k - 1\|_{C^2[0, \infty)} \leq q_0.$

Для решения прямой задачи справедлива следующая

**Лемма.** *Для каждого  $T_0 > 0$  найдется положительное число  $q_0^* = q_0^*(T_0)$  такое, что для любых  $(\varepsilon_0, k, p) \in \Lambda(q_0, d), q_0 \leq q_0^*$ , решение задачи (1.1)–(1.4) представимо в области  $K(T_0) = \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq T_0 - \tau(x)\}$  в виде*

$$u(x, t) = \alpha(x)\theta_0(t - \tau(x)) + \beta(x)\theta_1(t - \tau(x)) + v(x, t), \tag{1.6}$$

в котором  $\theta_0(t)$  – функция Хевисайда, т. е.  $\theta_0(t) = 1$  для  $t \geq 0$  и  $\theta_0(t) = 0$  для  $t < 0$ , а  $\theta_1(t) = t\theta_0(t)$ . Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются соотношениями

$$\alpha(x) = \frac{1}{2} \exp(\varphi(x)), \quad \varphi(x) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma(x)} \left[ p(\xi) + \frac{\Delta\tau(\xi)}{\varepsilon_0(\xi)} \right] d\tau, \tag{1.7}$$

$$\beta(x) = \frac{\alpha(x)}{2} \int_{\Gamma(x)} \left[ \frac{\Delta\alpha(\xi)}{\varepsilon_0(\xi)\alpha(\xi)} - k'(0)p(\xi) \right] d\tau, \tag{1.8}$$

в которых  $\Gamma(x)$  – геодезическая проходящая на плоскости переменных  $\xi_1, \xi_2$  через точку  $x$  и ортогональная оси  $\xi_1 = 0$ ,  $d\tau$  – элемент римановой длины. При этом  $\alpha \in C^3(D(T_0)), \beta \in C^1(D(T_0)), D(T_0) = \{x \mid \tau(x) \leq T_0\}$ , а функция  $v(x, t)$  вместе с частной производной по переменной  $t$  принадлежит классу  $\mathbf{H}^2(K(T_0) \cap \{t = \text{const}\})$  и тождественно равна нулю для

$t \leq \tau(x)$ . Кроме того, существует постоянная  $C = C(T_0, q_0) > 0$  такая, что справедливы неравенства

$$|\alpha(x)| \leq C, \quad |\beta(x)| \leq q_0 C, \quad |v(x, t)| \leq q_0 C, \quad |v_t(x, t)| \leq q_0 C, \quad (x, t) \in K(T_0). \quad (1.9)$$

Доказательство этой леммы дано в разд. 2. Основным результатом этой статьи составляет следующая теорема устойчивости решения обратной задачи.

**Теорема 1.** Пусть  $(\varepsilon_0, k, p_i) \in \Lambda(q_0, d)$ ,  $i = 1, 2$ , а  $g_i(x, t)$ ,  $h_i(x, t)$  — данные Коши, соответствующие решению задачи (1.1)–(1.4) при  $p = p_i(x)$ . Пусть, кроме того, область  $\Omega$  содержится в некотором римановом круге радиуса  $\rho$  и выполнено условие

$$T > 4\rho.$$

Тогда найдутся положительные числа  $q_0^*$ ,  $C$  такие, что при всех  $q_0 \leq q_0^*$  выполнено неравенство

$$\|p_1 - p_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq C (\|g_1 - g_2\|_{\mathbf{H}^1(S)}^2 + \|h_1 - h_2\|_{\mathbf{L}^2(S)}^2). \quad (1.10)$$

Доказательство теоремы дано в разд. 3. Из теоремы 1 в качестве следствия вытекает теорема единственности.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и данные Коши, соответствующие решению задачи (1.1)–(1.4) для  $p = p_i$ ,  $i = 1, 2$ , совпадают, т. е.  $g_1 = g_2$ ,  $h_1 = h_2$ . Тогда найдется положительное число  $q_0^*$  такое, что при  $q_0 \leq q_0^*$  в области  $\Omega$  выполнено равенство  $p_1(x) = p_2(x)$ .

## 2. Доказательство леммы

Представим решение задачи (1.1)–(1.4) в виде (1.6). Простые вычисления с учетом равенства  $|\nabla\tau(x)|^2 = \varepsilon_0(x)$  приводят к формулам

$$\begin{aligned} \nabla u(x, t) = & -[\alpha(x)\nabla\tau(x)]\delta(t - \tau(x)) + [\nabla\alpha(x) - \beta(x)\nabla\tau(x)]\theta_0(t - \tau(x)) \\ & + [\nabla\beta(x)]\theta_1(t - \tau(x)) + \nabla v(x, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u(x, t) = & \alpha(x)\varepsilon_0(x)\delta'(t - \tau(x)) + [-\operatorname{div}(\alpha(x)\nabla\tau(x)) + \beta(x)\varepsilon_0(x) - \nabla\alpha(x) \cdot \nabla\tau(x)]\delta(t - \tau(x)) \\ & + [\Delta\alpha(x) - \operatorname{div}(\beta(x)\nabla\tau(x)) - \nabla\beta(x) \cdot \nabla\tau(x)]\theta_0(t - \tau(x)) \\ & + [\Delta\beta(x)]\theta_1(t - \tau(x)) + \Delta v(x, t). \end{aligned}$$

Кроме того, имеем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \varepsilon_0(x)u(x, t) + \int_0^t \varepsilon(x, t-s)u(x, s) ds \right) &= \varepsilon_0(x)u_{tt}(x, t) + \varepsilon(x, 0)u_t(x, t) \\ &+ \varepsilon_t(x, 0)u(x, t) + \int_0^t \varepsilon_{tt}(x, t-s)u(x, s) ds \\ &= \varepsilon_0(x)v_{tt}(x, t) + \varepsilon(x, 0)v_t(x, t) + \varepsilon_t(x, 0)v(x, t) + \int_0^t \varepsilon_{tt}(x, t-s)v(x, s) ds \\ &+ \varepsilon_0(x)\alpha(x)\delta'(t - \tau(x)) + [\varepsilon_0(x)\beta(x) + \varepsilon(x, 0)\alpha(x)]\delta(t - \tau(x)) \end{aligned}$$

$$+ [\varepsilon(x, 0)\beta(x) + \varepsilon_t(x, 0)\alpha(x)]\theta_0(t - \tau(x)) + F_1(x, t),$$

в которых

$$F_1(x, t) = \varepsilon_t(x, 0)\beta(x)\theta_1(t - \tau(x)) + \int_0^t \varepsilon_{tt}(x, t - s)[\alpha(x)\theta_0(s - \tau(x)) + \beta(x)\theta_1(s - \tau(x))] ds.$$

Используя представление (1.2), условие  $k(0) = 1$ , находим, что

$$\begin{aligned} Lu = \varepsilon_0(x)[v_{tt}(x, t) + p(x)v_t(x, t) + k'(0)p(x)v(x, t)] - \Delta v(x, t) \\ + \int_0^t k''(t - s)\varepsilon_0(x)p(x)v(x, s) ds + F_1(x, t) \\ + [\varepsilon_0(x)p(x)\alpha(x) + \alpha(x)\Delta\tau(x) + 2\nabla\alpha(x) \cdot \nabla\tau(x)]\delta(t - \tau(x)) \\ + [\varepsilon_0(x)p(x)\beta(x) + k'(0)\varepsilon_0(x)p(x)\alpha(x) - \Delta\alpha(x) + \beta(x)\Delta\tau(x) + 2\nabla\beta(x) \cdot \nabla\tau(x)]\theta_0(t - \tau(x)). \end{aligned}$$

В этой формуле  $k'(t)$  и  $k''(t)$  означают, соответственно, первую и вторую производные функции  $k(t)$ .

Рассмотрим в этой формуле слагаемое  $\alpha(x)\Delta\tau(x)$ . Так как функция  $\tau(x)$  в окрестности прямой  $x_1 = 0$  имеет порядок

$$\tau(x) \sim |x_1|,$$

то ее градиент терпит разрыв на этой прямой. Поэтому выражение  $\alpha(x)\Delta\tau(x)$  является сингулярной функцией. Оно представимо в виде

$$\alpha(x)\Delta\tau(x) = 2\alpha(x)|_{x_1=0}\delta(x_1) + \langle \alpha(x)\Delta\tau(x) \rangle,$$

в котором символ  $\langle \rangle$  означает регулярную часть функции. Выбирая функцию  $\alpha(x)$  так, чтобы были выполнены условия

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x)p(x)\alpha(x) + \alpha(x)\Delta\tau(x) + 2\nabla\alpha(x) \cdot \nabla\tau(x) = 0 \quad \text{при } x_1 \neq 0, \\ \alpha(x)|_{x_1=0} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

получаем формулу (1.7) для ее вычисления.

Функцию  $\beta(x)$  определим условиями

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x)p(x)\beta(x) + \beta(x)\Delta\tau(x) + 2\nabla\beta(x) \cdot \nabla\tau(x) + k'(0)\varepsilon_0(x)p(x)\alpha(x) - \Delta\alpha(x) = 0 \quad \text{при } x_1 \neq 0, \\ \beta(x)|_{x_1=0} = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Равенство (2.2) вдоль  $\Gamma(x)$  можно записать в виде

$$2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0(x)\alpha(x)} [\Delta\alpha(x) - k'(0)\varepsilon_0(x)p(x)\alpha(x)].$$

Отсюда следует формула (1.8).

Функция  $v(x, t)$  является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x)[v_{tt}(x, t) + p(x)v_t(x, t) + k'(0)p(x)v(x, t)] - \Delta v(x, t) \\ + \int_0^t k''(t - s)\varepsilon_0(x)p(x)v(x, s) ds + F_1(x, t) = 0, \quad v|_{t<0} = 0. \end{aligned}$$

В силу условий гладкости, наложенных на  $\varepsilon_0(x)$ , функция  $\tau(x)$  непрерывна всюду и имеет непрерывные производные до пятого порядка при  $x_1 \neq 0$ . Поэтому  $\alpha(x)$  является трижды гладкой, а  $\beta(x)$  непрерывной вместе с производными первого порядка при  $x_1 \neq 0$ . Обе эти функции сохраняют непрерывность при переходе через прямую  $x_1 = 0$ . Достаточно очевидно, что функции  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  принадлежат  $\mathbf{H}^1(K(T_0) \cap \{t = 0\})$  при любом конечном  $T_0 > 0$ . Очевидно также, что  $F_1(x, t) = 0$  для  $t < \tau(x)$  и  $F_1(x, t) \in \mathbf{H}^1(K(T_0))$ . Из энергетических неравенств тогда следует, что  $(v(x, t), v_t(x, t)) \in \mathbf{H}^2(K(T_0) \cap \{t = \text{const}\})$  и  $v(x, t) = v_t(x, t) = 0$  для всех  $t \leq \tau(x)$ .

Осталось установить неравенства (1.9). Заметим, что  $\Delta\tau(x) = 0$ ,  $\varphi(x) = 0$ ,  $\alpha(x) = 1/2$  для всех  $x \in \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq d\}$ . В целом, для  $x \in D(T_0)$  имеют место неравенства

$$\|\alpha\|_{\mathbf{C}^3(D(T_0))} \leq C, \quad \|\Delta\tau\|_{\mathbf{C}^3(D(T_0))} \leq q_0C, \quad \|\varphi\|_{\mathbf{C}^3(D(T_0))} \leq q_0C, \quad (2.3)$$

с некоторой положительной постоянной  $C = C(T_0, q_0)$ , ограниченной для любой конечной области изменения параметров  $T_0, q_0$ . Эти неравенства есть следствие априорного предположения о рассматриваемом классе функций  $\varepsilon_0(x)$ ,  $p(x)$  (см. доказательство аналогичных неравенств в книге [1, разд. 4.2.]). Так как

$$\frac{\Delta\alpha(x)}{\alpha(x)} = \Delta \ln \alpha(x) + |\nabla \ln \alpha(x)|^2 = \Delta\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|^2,$$

то из формулы (1.8) для функции  $\beta(x)$  следует неравенство, вполне аналогичное неравенствам (2.3):

$$\|\beta\|_{\mathbf{C}^1(D(T_0))} \leq q_0C.$$

Следовательно,

$$\|F_1\|_{\mathbf{H}^1(K(T_0))} \leq q_0C.$$

Далее, из энергетических неравенств и теорем вложения следуют два последние неравенства (1.9). Лемма доказана.

### 3. Доказательство теоремы 1

Пусть выполнены условия теоремы. Обозначим решение задачи (1.1)–(1.4), отвечающее  $p_i(x)$  через  $u_i(x, t)$ , а функции  $\alpha(x)$ ,  $\varphi$ ,  $\beta(x)$ ,  $v(x, t)$  в представлении (1.6), (1.7) через  $\alpha_i(x)$ ,  $\varphi_i$ ,  $\beta_i(x)$ ,  $v_i(x, t)$ . Введем разности

$$\tilde{u} = u_1 - u_2, \quad \tilde{p} = p_1 - p_2, \quad \tilde{\alpha} = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \tilde{\varphi} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \tilde{g} = g_1 - g_2, \quad \tilde{h} = h_1 - h_2.$$

Из равенства (1.1), записанного для  $(p_i, u_i)$ , следует соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \varepsilon_0(x) \tilde{u}(x, t) + \int_0^t k(t-s) [p_1(x) \tilde{u}(x, s) + \tilde{p}(x) u_2(x, s)] ds \right) - \Delta \tilde{u}(x, t) = 0$$

для всех  $(x, t) \in G(T)$  или, в более развернутом виде,

$$\varepsilon_0(x) \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + p_1(x) \left( \frac{\partial}{\partial t} + k'(0) \right) \right] \tilde{u}(x, t) - \Delta \tilde{u}(x, t) + \tilde{F}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in G(T), \quad (3.1)$$

в котором

$$\tilde{F}(x, t) = \varepsilon_0(x) \tilde{p}(x) \left( \frac{\partial}{\partial t} + k'(0) \right) u_2(x, t) + \int_{\tau(x)}^t k''(t-s) [p_1(x) \tilde{u}(x, s) + \tilde{p}(x) u_2(x, s)] ds. \quad (3.2)$$

Из леммы следует, что  $(\tilde{u}, \tilde{u}_t) \in \mathbf{H}^2(G(T) \cap \{t = \text{const}\})$ , а для функций  $u_2(x, t)$ ,  $(u_2)_t(x, t)$  справедливы неравенства

$$|u_2(x, t)| \leq C, \quad |(u_2)_t(x, t)| \leq q_0 C, \quad (x, t) \in G(T), \quad (3.3)$$

с некоторой положительной постоянной  $C = C(q_0, T)$ .

Заметим также, что имеют место равенства

$$\tilde{u}|_S = \tilde{g}(x, t), \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right|_S = \tilde{h}(x, t), \quad (3.4)$$

$$\tilde{u}|_{t=\tau(x)+0} = \tilde{\alpha}(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.5)$$

Воспользуемся для оценки решения задачи Коши (3.1), (3.4) теоремой 1.3 из статьи [7]. Согласно этой теореме, при выполнении условий теоремы 1 существует такая постоянная  $C > 0$ , что для решения задачи (3.1), (3.4) выполнено неравенство

$$\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}^2 + \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^1(G)}^2 \leq C \left( \|\tilde{F}\|_{\mathbf{L}^2(G)}^2 + \|\tilde{g}\|_{\mathbf{H}^1(S)}^2 + \|\tilde{h}\|_{\mathbf{L}^2(S)}^2 \right). \quad (3.6)$$

С другой стороны, из равенства (3.2), неравенств (3.3) и априорного предположения о функции  $k(t)$  следует оценка

$$\|\tilde{F}\|_{\mathbf{L}^2(G)}^2 \leq q_0^2 C \left( \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^1(G)}^2 + \|\tilde{p}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right) \quad (3.7)$$

с некоторой постоянной  $C = C(q_0, T)$ . Так как эта постоянная всегда может быть сделана неубывающей функцией параметра  $q_0$ , то существует достаточно малое число  $q_0^* > 0$  такое, что для всех  $q_0 \leq q_0^*$  из неравенств (3.6), (3.7) следует оценка

$$\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma)}^2 + \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^1(G)}^2 \leq C \left( q_0^2 \|\tilde{p}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{g}\|_{\mathbf{H}^1(S)}^2 + \|\tilde{h}\|_{\mathbf{L}^2(S)}^2 \right). \quad (3.8)$$

Используем теперь равенство (3.5). Из него следует, что

$$\tilde{u}|_{\Sigma} = \tilde{\alpha}(x) = \frac{1}{2} [\exp(\varphi_1(x)) - \exp(\varphi_2(x))] = \tilde{\varphi}(x)Q(x).$$

Здесь

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \exp[\varphi_2(x) + z(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))] dz.$$

Из априорных предположений о функциях  $\varepsilon_0(x)$ ,  $p_i(x)$  тогда следует неравенство  $Q(x) \geq c_0 > 0$  для всех  $x \in \Omega$  с некоторой постоянной  $c_0$ . Поэтому

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^1(G)}^2. \quad (3.9)$$

Из равенства (2.1), записанного для функций  $p_i(x)$ ,  $\alpha_i(x)$ , после деления на  $\alpha_i(x)$  следуют соотношения

$$\varepsilon_0(x)p_i(x) + \Delta\tau(x) + 2\nabla\varphi_i(x) \cdot \nabla\tau(x) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Из них находим, что

$$\varepsilon_0(x)\tilde{p}(x) + 2\nabla\tilde{\varphi}(x) \cdot \nabla\tau(x) = 0.$$

Поэтому

$$\|\tilde{p}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2.$$

Из этого соотношения и неравенств (3.9), (3.8) вытекает оценка

$$\|\tilde{p}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq C \left( q_0^2 \|\tilde{p}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{g}\|_{\mathbf{H}^1(S)}^2 + \|\tilde{h}\|_{\mathbf{L}^2(S)}^2 \right).$$

Для достаточно малых значений параметра  $q_0$  из последнего неравенства следует искомая оценка (1.10).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Романов В.Г.** Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005. 296 с.
2. **Lorenzi A., Messina F., Romanov V.G.** Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // Appl. Anal. 2007. Vol. 86, no. 11. P. 1375–1395.
3. **Romanov V.G., Yamamoto M.** Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Appl. Anal. 2010. Vol. 89, no. 3. P. 377–390.
4. **Бухгейм А.Л., Клибанов М.В.** Единственность в целом одного класса многомерных обратных задач // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 2. С. 269–272.
5. **Романов В.Г.** Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. работ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. С. 246–253.
6. **Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.** Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
7. **Романов В.Г.** Оценки решения одного дифференциального неравенства // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 626–635.

Романов Владимир Гаврилович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
чл.-корр. РАН  
зав. лаб.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН  
e-mail: romanov@math.nsc.ru

Поступила 25.01.2011

УДК 517.948

**ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ  
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ<sup>1</sup>****В. П. Танана, А. Б. Бредихина, Т. С. Камалтдинова**

Нелинейным методом проекционной регуляризации решена обратная задача Коши при условии кусочной гладкости искомого решения.

Ключевые слова: операторные уравнения, регуляризация, метод, оценка погрешности, некорректная задача.

V. P. Tanana, A. B. Bredikhina, T. S. Kamaltdinova. On an error estimate for an approximate solution for an inverse problem in the class of piecewise smooth functions.

An inverse Cauchy problem is solved by the nonlinear projection regularization method under the assumption that the required solution is smooth.

Keywords: operator equations, regularization, method, error estimate, ill-posed problem.

**Введение**

Исследования, посвященные повышению точности приближенных решений обратных задач за счет более полного использования априорной информации и уточнению соответствующих оценок актуальны.

Часто при решении обратных задач априорной информацией об искомом решении является предположение о его кусочной гладкости. Как правило, это условие расширяется до принадлежности его пространству  $W_2^1(X)$ , с которым в дальнейшем и работают, получая соответствующие оценки погрешности [1].

В работе [2] для увеличения точности приближенного решения В.К. Ивановым был предложен новый подход, заключающийся в использовании класса корректности  $M_r(\delta)$ , зависящего от  $\delta$ .

В настоящей работе развивается подход работы [2], а также сделана попытка, используя условия кусочной гладкости решения, повысить точность приближенного решения одной обратной задачи.

Заметим, что кусочная гладкость решения  $u(x)$ , а также принадлежность  $u(x)$  и  $u'(x)$  пространствам  $L_1(-\infty, \infty)$  и  $L_2(-\infty, \infty)$  влекут, что для любого  $\varepsilon > 0$   $u(x) \in W_2^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)}(-\infty, \infty)$  и при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\|u(x)\|_{W_2^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)}} \rightarrow \infty$  см. [3, с. 252].

Для использования этого факта наиболее удобным является нелинейный метод проекционной регуляризации [4], в котором приближенное решение  $u_\delta$  уравнения  $Au = g$  определяется исходными данными  $g_\delta, \delta$ . В этом уравнении  $A$  — инъективный оператор,  $\|g_\delta - g_0\| \leq \delta$ . Тогда в случае принадлежности точного решения  $u_0$  классу корректности  $M_r$  справедлива оценка погрешности  $\|u_\delta - u_0\| \leq 7\omega(\delta, M_r)$ , в которой  $\omega(\delta, M_r)$  — модуль непрерывности оператора  $A^{-1}$  на классе  $M_r$  [1].

Данный подход проиллюстрирован на примере обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности при условии кусочной гладкости искомого решения.

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом р-урал-а (проект 10-01-96000).

## 1. Постановка задачи и основные понятия

Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $A$  и  $B$  — линейные ограниченные самосопряженные операторы, отображающие  $H$  в  $H$ . Предположим, что спектор  $\text{Sp}(A)$  оператора  $A$  совпадает с отрезком  $[0, \|A\|]$ , а

$$B = G(A), \quad (1.1)$$

где  $G(\sigma)$  — строго возрастающая, непрерывная на  $[0, \|A\|]$  функция такая, что  $G(0) = 0$ .

Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = g; \quad u \in H, \quad g \in H. \quad (1.2)$$

**О п р е д е л е н и е 1.** Множество  $M_r$  будем называть классом корректности для уравнения (1.2), если сужение  $A_{N_r}^{-1}$  оператора  $A^{-1}$  на множество  $N_r = AM_r$  равномерно непрерывно.

Предположим, что при  $g = g_0$  существует решение  $u_0 \in H$  уравнения (1.2), но точное значение правой части  $g_0$  нам неизвестно, а вместо него даны  $g_\delta \in H$  и  $\delta > 0$  такие, что

$$\|g_\delta - g_0\| \leq \delta. \quad (1.3)$$

Требуется, используя исходную информацию  $g_\delta$  и  $\delta$ , определить приближенное решение  $u_\delta$  уравнения (1.2) и, с учетом того, что  $u_0 \in M_r$ , получить оценку для величины  $\|u_\delta - u_0\|$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Семейство операторов  $\{T_\delta: 0 < \delta \leq \delta_0\}$  будем называть методом приближенного решения уравнения (1.2) на множестве  $M_r$ , если для любого  $\delta \in (0, \delta_0]$  оператор  $T_\delta$  непрерывно отображает  $H$  в  $H$  и  $T_\delta g_\delta \rightarrow u_0$  при  $\delta \rightarrow 0$  равномерно на множестве  $M_r$  при условии, что  $\|g_\delta - Au_0\| \leq \delta$ .

## 2. Нелинейный метод проекционной регуляризации

В методе проекционной регуляризации [1] используется регуляризующее семейство операторов  $\{P_\alpha: 0 < \alpha \leq \|A\|\}$ , действующих из  $H$  в  $H$  и определяемых формулой

$$P_\alpha g = \int_\alpha^{\|A\|} \frac{1}{\sigma} dE_\sigma g, \quad \alpha \in (0, \|A\|], \quad (2.1)$$

где  $\{E_\sigma: 0 \leq \sigma \leq \|A\|\}$  — спектральное разложение единицы  $E$ , порожденное оператором  $A$ .

Приближенное решение уравнения (1.2) определим формулой

$$u_\delta^\alpha = P_\alpha g_\delta. \quad (2.2)$$

Для выбора параметра регуляризации  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$  в формуле (2.2) по исходным данным  $(g_\delta, \delta)$  используем уравнение

$$\|Au_\delta^\alpha - g_\delta\|^2 = 16\delta^2. \quad (2.3)$$

**Лемма 1** [4]. Пусть  $\vartheta(\alpha) = \|Au_\delta^\alpha - g_\delta\|^2$ . Тогда  $\vartheta(\alpha) \in C[0, \|A\|]$ ,  $\vartheta(\alpha)$  не убывает и, если  $\|g_\delta\| > 4\delta$ , то существует значение  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$ , удовлетворяющее уравнению (2.3).

В дальнейшем приближенное решение  $u_\delta$  уравнения (1.2) определим формулой

$$u_\delta = \hat{T}_\delta g_\delta = \begin{cases} P_{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)} g_\delta, & \text{при } \|g_\delta\| > 4\delta, \\ 0, & \text{при } \|g_\delta\| \leq 4\delta, \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $P_\alpha$  определен формулой (2.1), а  $\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$  — уравнением (2.3).

**Лемма 2** [4]. Оператор  $\hat{T}_\delta$ , определяемый формулой (2.4), непрерывен на пространстве  $H$ .

**Лемма 3** [1]. Пусть оператор  $P_\alpha$  определен формулой (2.1). Тогда

$$\|P_\alpha\| = \frac{1}{\alpha}.$$

**Лемма 4.** Если  $\|g_\delta\| > 4\delta$ , а  $\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$  определено (2.3), то для любого  $\alpha \in (0, \|A\|]$  из того, что

$$\|AP_\alpha g_\delta - g_\delta\| < 4\delta \tag{2.5}$$

следует, что

$$\|P_\alpha\| \geq \|P_{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}\|.$$

**Доказательство.** Так как на основании леммы 1 функция  $\vartheta(\alpha) = \|Au_\delta^\alpha - g_\delta\|^2$  не убывает на отрезке  $[0, \|A\|]$ , то из (2.5) следует, что  $\alpha \leq \hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$ , а из леммы 3 следует утверждение леммы. Тем самым лемма доказана.

Обозначим через  $\bar{\alpha}(\delta)$  значение параметра регуляризации, удовлетворяющее уравнению

$$r\alpha G(\alpha) = \delta. \tag{2.6}$$

Из уравнения (2.6) и условий, наложенных в (1.1) на функцию  $G(\alpha)$ , следует, что при  $\delta < r\|A\|G(\|A\|)$  уравнение (2.6) имеет единственное решение.  $\square$

**Утверждение.** Пусть  $u_0 \in M_r$ ,  $\|g_\delta\| > 4\delta$ . Тогда для значений  $\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)$  и  $\bar{\alpha}(\delta)$  выполняются соотношения

$$\|Au_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - g_\delta\| \leq 3\delta, \quad \hat{\alpha}(g_\delta, \delta) \geq \bar{\alpha}(\delta)$$

и

$$\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}g_0\| \leq rG[\bar{\alpha}(\delta)].$$

**Доказательство.** Обозначим через  $H_\alpha^\perp$  подпространство  $H$ , определяемое формулой

$$H_\alpha^\perp = [E - E_\alpha]H.$$

Тогда из (2.1) будет следовать, что

$$P_\alpha g = A^{-1}g \quad \text{при } g \in H_\alpha^\perp. \tag{2.7}$$

Учитывая инвариантность подпространства  $H_\alpha^\perp$  относительно оператора  $A$ , доказанную в [5, с. 336], и соотношений (1.3) и (2.7), получаем

$$\|Au_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - Au_0^{\bar{\alpha}(\delta)}\| \leq \delta,$$

где  $u_0^{\bar{\alpha}(\delta)} = P_{\bar{\alpha}(\delta)}g_0$ , а  $u_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} = P_{\bar{\alpha}(\delta)}g_\delta$ .

Так как

$$\|Au_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - g_0\|^2 = \int_0^{\bar{\alpha}(\delta)} d(E_\sigma g_0, g_0),$$

а

$$\int_0^{\bar{\alpha}(\delta)} d(E_\sigma g_0, g_0) = \int_0^{\bar{\alpha}(\delta)} \sigma^2 G^2(\sigma) d(E_\sigma v_0, v_0),$$

то

$$\|Au_0^{\bar{\alpha}(\delta)} - g_0\| \leq r\bar{\alpha}(\delta)G[\bar{\alpha}(\delta)]. \quad (2.8)$$

Из (2.6) и (2.8) следует, что

$$\|Au_0^{\bar{\alpha}(\delta)} - g_0\| \leq \delta, \quad (2.9)$$

а из (2.6) и (2.9) вытекает неравенство

$$\|Au_\delta^{\bar{\alpha}(\delta)} - g_\delta\| \leq 3\delta. \quad (2.10)$$

Из лемм 3 и 4, соотношения (2.10) имеем

$$\hat{\alpha}(g_\delta, \delta) \geq \bar{\alpha}(\delta). \quad (2.11)$$

Так как

$$\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}g_0\| \leq \frac{\delta}{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}, \quad (2.12)$$

то из (2.12) и (2.11) следует, что

$$\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}g_0\| \leq \frac{\delta}{\bar{\alpha}(\delta)}, \quad (2.13)$$

а из (2.6) и (2.13) следует, что

$$\|P_{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}g_\delta - P_{\hat{\alpha}(g_\delta, \delta)}g_0\| \leq rG[\bar{\alpha}(\delta)].$$

Тем самым утверждение доказано.

**Теорема [4].** Пусть  $u_0 \in M_r$ ,  $\|g\| > 4\delta$ ,  $u_\delta$  определен формулой (2.4), а  $\bar{\alpha}(\delta)$  — формулой (2.6). Тогда справедлива оценка

$$\|u_\delta - u_0\| \leq 7rG[\bar{\alpha}(\delta)].$$

### 3. Оценка погрешности нелинейного метода проекционной регуляризации при решении обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \quad -\infty < x < \infty, \quad t \in (0, T], \quad T > 1, \quad (3.1)$$

где  $u(x, t) \in C\{(-\infty, \infty) \times [0, T]\} \cap C^{2,1}\{(-\infty, \infty) \times (0, T]\}$  для любого  $t \in (0, T]$ ,  $u(x, t)$ ,  $u'_x(x, t)$ ,  $u''_{xx}(x, t) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$  и существует функция  $\chi(x) \in L_1(-\infty, \infty)$  такая, что почти для любого  $t \in (0, T]$

$$|u(x, t)| + \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right| \leq \chi(x); \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (3.2)$$

Пусть нам дано распределение температуры  $g(x) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$  в момент времени  $T > 0$

$$u(x, T) = g(x); \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.3)$$

а начальное распределение  $u_0(x)$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.4)$$

требуется определить.

Предположим, что при  $g(x) = g_0(x)$  существует  $u_0(x)$  такое, что  $u_0(x)$ ,  $u'_0(x) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$ . Функция  $u'_0(x)$  является четной и имеет конечное число точек разрыва первого

рода. Решение задачи (3.1), (3.4) удовлетворяет условию  $u(x, T) = g_0(x)$ . Но точное значение  $g_0(x)$  нам неизвестно, а вместо него даны некоторое приближение  $g_\delta(x) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$  и  $\delta > 0$  такие, что

$$\|g_\delta(x) - g_0(x)\|_{L_2} \leq \delta. \quad (3.5)$$

Требуется, используя исходные данные  $(g_\delta, \delta)$  задачи (3.1), (3.3), (3.5), определить приближенное решение  $u_\delta(x) \in L_2(-\infty, \infty)$  и оценить величину  $\|u_\delta(x) - u_0(x)\|_{L_2}$ .

Для решения задачи (3.1), (3.3), (3.5) воспользуемся пространствами  $W_2^p(-\infty, \infty)$ ,  $p > 0$ , описанными в [3, с. 252], и преобразованием Фурье, применимость которого следует из условия (3.2).

Таким образом, получим, что

$$\hat{u}'_t(\lambda, t) = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda, t); \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \quad t \in (0, T] \quad (3.6)$$

и

$$\hat{u}(\lambda, T) = \hat{g}(\lambda); \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \quad (3.7)$$

где  $\hat{u}(\lambda, t) = \mathcal{F}[u(x, t)]$ , а  $\hat{g}(\lambda) = \mathcal{F}[g(x)]$ .

Решая задачу (3.6), (3.7), сведем ее к операторному уравнению

$$A\hat{u}(\lambda) = e^{-\lambda^2 T} \hat{u}(\lambda) = \hat{g}(\lambda); \quad \hat{u}(\lambda), \quad \hat{g}(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty). \quad (3.8)$$

Из условий четности производной  $u'_0(x)$  и существования у нее лишь конечного числа точек разрыва первого рода следует, что

$$u'_0(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) + \psi(x), \quad (3.9)$$

где для любого  $i \in \overline{1, n}$  существуют числа  $a_i \neq 0$  и  $x_i > 0$  такие, что

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} a_i, & -x_i \leq x \leq x_i, \\ 0, & x < -x_i, \quad x > x_i, \end{cases} \quad (3.10)$$

а

$$\psi(x) \in W_2^{\frac{1}{2}}(-\infty, \infty). \quad (3.11)$$

Таким образом, из (3.10) следует, что

$$\hat{\varphi}_i(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} a_i \frac{\sin x_i \lambda}{\lambda}, & -\infty < \lambda < 0, \quad 0 < \lambda < \infty, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} a_i x_i, & \lambda = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

где  $\hat{\varphi}_i(\lambda) = \mathcal{F}[\varphi_i(x)]$ .

Сформулируем одну лемму.

**Лемма 5** [3]. Пусть  $\varphi(x) \in L_2(-\infty, \infty) \cap L_1(-\infty, \infty)$ , а  $\hat{\varphi}(\lambda) = \mathcal{F}[\varphi(x)]$ . Тогда из того, что  $\varphi(x) \in W_2^p(-\infty, \infty)$ ,  $p \in (0, \infty)$ , следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1 + |\lambda|^{2p}] |\hat{\varphi}(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$$

и

$$\|\varphi(x)\|_{W_2^p}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [1 + |\lambda|^{2p}] |\hat{\varphi}(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Из (3.12) и леммы 5 следует, что для любого  $\varepsilon \in (0, 1/2)$

$$\varphi_i(x) \in W_2^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)}(-\infty, \infty), \quad i \in \overline{1, n}. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что для любого  $i \in \overline{1, n}$  существует  $c_i$  такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1 + |\lambda|^{1-\varepsilon}] |\hat{\varphi}_i(\lambda)|^2 d\lambda \leq \frac{4 a_i^2}{\pi \varepsilon} + c_i. \quad (3.14)$$

Из (3.9), (3.11) и (3.14) следует существование числа  $a > 0$  такого, что для любого  $\varepsilon \in (0, 1/2)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1 + |\lambda|^{3(1-\varepsilon)}] |\hat{u}_0(\lambda)|^2 d\lambda \leq \frac{a}{\varepsilon} \quad (3.15)$$

и

$$\|A\hat{u}_0(\lambda) - \hat{g}_\delta(\lambda)\| \leq \delta.$$

Применяя к решению уравнения (3.8) метод проекционной регуляризации, введем регуляризующее семейство операторов  $\{P_\alpha : \alpha > 0\}$ , определяемых формулой

$$P_\alpha \hat{f}(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda^2 T} \hat{g}(\lambda), & |\lambda| \leq \alpha, \\ 0, & |\lambda| > \alpha. \end{cases}$$

Таким образом, приближенное решение  $u_\delta^\alpha(\lambda)$  в уравнении (3.8) определим формулой

$$\hat{u}_\delta^\alpha(\lambda) = P_\alpha \hat{g}_\delta(\lambda), \quad (3.16)$$

а для выбора параметра регуляризации  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\hat{g}_\delta, \delta)$  в формуле (3.16) используем уравнение

$$\|A\hat{u}_\delta^\alpha - \hat{g}_\delta\|^2 = 16\delta^2. \quad (3.17)$$

Из (3.16) и (3.17) определим приближенное решение  $\hat{u}_\delta(\lambda)$  уравнения (3.8) формулой

$$\hat{u}_\delta(\lambda) = \hat{u}_\delta^{\hat{\alpha}(\hat{g}_\delta, \delta)}(\lambda),$$

а из теоремы и соотношений (3.15)–(3.17) следует оценка

$$\|\hat{u}_\delta(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\| \leq 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} G_\varepsilon(\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon)), \quad (3.18)$$

где функция  $G_\varepsilon(\sigma)$  в соответствии с (3.8) и (3.15) определена параметрически формулами

$$G_\varepsilon(\sigma) = [1 + |\lambda|^{3(1-\varepsilon)}]^{-1/2}, \quad \sigma = e^{-\lambda^2 T}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \quad (3.19)$$

а  $\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon)$  определено уравнением

$$\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} G_\varepsilon(\alpha) \alpha = \delta. \quad (3.20)$$

Так как оценка (3.18) выполняется при любом  $\varepsilon \in (0, 1/2]$ , то выберем значение  $\varepsilon(\delta)$ , минимизирующее эту оценку, т. е.

$$7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon(\delta)}} G_{\varepsilon(\delta)}(\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon(\delta))) = \min_{\varepsilon \in (0, 1/2]} 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} G_\varepsilon(\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon)). \quad (3.21)$$

Тогда из (3.18)–(3.21) для  $\hat{u}_\delta(\lambda)$  будет справедлива оценка

$$\|\hat{u}_\delta(\lambda) - \hat{u}_0(\lambda)\| \leq 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon(\delta)}} G_{\varepsilon(\delta)}(\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon(\delta))). \quad (3.22)$$

Применяя к  $\hat{u}_\delta(\lambda)$  обратное преобразование Фурье  $\mathcal{F}^{-1}$  и взяв действительную часть, получим приближенное решение  $u_\delta(x) = \operatorname{Re}[\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_\delta(\lambda))]$  обратной задачи (3.1), (3.3), (3.5). Для этого решения ввиду теоремы Планшереля [6, с. 411] будет справедлива оценка (3.22).

Для сравнения оценки (3.22) с известными оценим правую часть соотношения (3.22) в элементарных функциях.

Из (3.19) следует, что при достаточно малых значениях  $\sigma$  справедливо соотношение

$$G_\varepsilon(\sigma) \leq T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{1}{\sigma}, \quad (3.23)$$

а из (3.23) и того, что

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{G_\varepsilon(\sigma)}{T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{1}{\sigma}} = 1,$$

следует, что при достаточно малых значениях  $\sigma$

$$T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \sigma^2 < \sigma G_\varepsilon(\sigma). \quad (3.24)$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \alpha^2 = \delta. \quad (3.25)$$

Решение  $\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon)$  уравнения (3.25) определяется формулой

$$\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon) = T^{-\frac{3}{8}(1-\varepsilon)} \sqrt{\delta \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}}}. \quad (3.26)$$

Из (3.20), (3.24) и (3.25) следует, что

$$\bar{\alpha}(\delta, \varepsilon) \leq \hat{\alpha}(\delta, \varepsilon). \quad (3.27)$$

Таким образом, из (3.18), (3.23) и (3.27) следует, что

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{1}{\hat{\alpha}(\delta, \varepsilon)}. \quad (3.28)$$

Из (3.26) и (3.28) окончательно получим

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq 7\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} (2T)^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \left[ T^{\frac{3}{4}(1-\varepsilon)} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\varepsilon\delta}} \right]. \quad (3.29)$$

В оценке (3.29) значение  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$  определим формулой

$$\varepsilon(\delta) = \frac{2a}{\ln \ln \frac{1}{\delta}}. \quad (3.30)$$

Из (3.29) и (3.30) следует, что

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq \frac{7}{2} \sqrt{2} (2T)^{3/4} \sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))} \left[ \frac{\sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}}}{\sqrt{2\delta}} \right]. \quad (3.31)$$

Если  $\ln \ln \frac{1}{\delta_0} \geq \sqrt{2}$ , то при  $\delta \in (0, \delta_0]$  из (3.31) следует оценка

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq \frac{7}{2} \sqrt{2} (2T)^{3/4} \sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))} \left(\frac{1}{\delta}\right). \quad (3.32)$$

Так как из (3.30) следует, что

$$\ln^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon(\delta))} \left(\frac{1}{\delta}\right) = \ln^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{\delta}\right) \cdot \ln^{\frac{3a}{2 \ln \ln \frac{1}{\delta}}} \left(\frac{1}{\delta}\right),$$

а

$$\ln \left[ \ln^{\frac{3a}{2 \ln \ln \frac{1}{\delta}}} \left(\frac{1}{\delta}\right) \right] = \frac{3a}{2 \ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln \ln \frac{1}{\delta} = \frac{3a}{2},$$

то из (3.32) следует, что

$$\|u_\delta(x) - u_0(x)\| \leq 7\sqrt{2} e^{\frac{3a}{2}} T^{3/4} \sqrt{\ln \ln \frac{1}{\delta}} \ln^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{\delta}\right).$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
2. О возможности определения энергетического спектра бозе-системы по термодинамическим функциям / В.К. Иванов, В.А. Коршунов, Т.Н. Решетова, В.П. Танана // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228, № 1. С. 19–22.
3. **Крейн С.Г.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544 с.
4. **Танана В.П., Япарова Н.М.** Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 154–168.
5. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
6. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Танана Виталий Павлович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. кафедрой  
Южно-Уральский государственный университет  
e-mail: tvpa@susu.ac.ru

Поступила 16.04.2011

Бредихина Анна Борисовна  
аспирант  
Южно-Уральский государственный университет  
e-mail: bredikhina-ann@yandex.ru

Камалтдинова Татьяна Сергеевна  
старший преподаватель  
Южно-Уральский государственный университет  
e-mail: kamaltdinovats@mail.ru

УДК 519.642.8

## О СХОДИМОСТИ МЕТОДА М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ИНВОЛЮЦИЕЙ<sup>1</sup>

А. П. Хромов, Г. В. Хромова

В данной работе установлена сходимость метода регуляризации М. М. Лаврентьева для интегрального уравнения с инволюцией в среднеквадратичной метрике. Доказательство сходимости базируется на изучении поведения резольвенты некоторого интегро-дифференциального уравнения, связанного с исходным.

Ключевые слова: интегральное уравнение, регуляризация, инволюция, резольвента.

A. P. Khromov, G. V. Khromova. On the convergence of the Lavrent'ev method for an integral equation of the first kind with involution.

The convergence in the mean-square metric of the Lavrent'ev regularization method for an integral equation with involution is established. The proof of the convergence is based on studying the behavior of the resolvent of a certain integro-differential equation related to the original equation.

Keywords: integral equation, regularization, involution, resolvent.

### Введение

Рассматривается интегральное уравнение первого рода

$$Au \equiv \int_0^{1-x} A(1-x, t)u(t) dt + \beta \int_0^x A(x, t)u(t) dt = f(x) \quad (0.1)$$

с ядром  $A(x, t)$ , непрерывным при  $0 \leq t \leq x \leq 1$  вместе с производными  $A_x(x, t)$ ,  $A_t(x, t)$ ,  $A_{xt^2}(x, t)$ , при этом  $A(x, x) = 1$ ,  $\beta^2 \neq 1$  (для простоты считаем  $\beta > 1$ ).

Предполагается, что оператор  $A$  действует в пространстве  $L_2[0, 1]$ .

Пусть  $T_\alpha$  — семейство регуляризирующих операторов, соответствующих методу М. М. Лаврентьева

$$T_\alpha = (\alpha E + A)^{-1},$$

( $\alpha > 0$  — параметр).

М. М. Лаврентьев рассматривал это семейство применительно к операторному уравнению

$$Au = f$$

с самосопряженным положительным оператором в гильбертовом пространстве  $H$  и показал [1], что для любого  $u \in H$  выполняется сходимость

$$\|T_\alpha Au - u\| \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0. \quad (0.2)$$

В данной работе сходимость (0.2) устанавливается для, вообще говоря, несамосопряженного интегрального оператора  $A$  из (0.1) и для любой функции  $u(x)$  из  $L_2[0, 1]$ . Ранее в [2] этот результат был получен в частном случае, когда  $A_x(x, t)|_{t=x} = 0$ . В рассматриваемой нами постановке возникают трудности, требующие специального подхода.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00270) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4383.2010.1).

Доказательство сходимости (0.2) основывается на следующих фактах, изложенных в [2]:

1. Соотношение (0.2) может иметь место лишь при  $u(x) \in \overline{M(A)}$ , где  $\overline{M(A)}$  — замыкание в  $L_2[0, 1]$  области значений  $M(A)$  оператора  $A$ ;

2. Условие

$$\|T_\alpha A\| \leq K, \quad (0.3)$$

где  $K$  — константа, не зависящая от  $\alpha$ , является необходимым и достаточным условием выполнения (0.2) для любой  $u(x) \in \overline{M(A)}$ ;

3.  $T_\alpha A = -\lambda R_\lambda(A)|_{\lambda=-1/\alpha}$ , где  $R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1}A$  — резольвента Фредгольма оператора  $A$ ,  $\lambda$  — спектральный параметр.

Таким образом, вопрос о сходимости (0.2) сводится к исследованию поведения резольвенты при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  и к нахождению  $\overline{M(A)}$ .

## 1. Резольвента оператора $A$

Приведем известные факты относительно резольвенты, используемые нами в дальнейшем.

Обозначим  $y_1(x) = R_\lambda(A)f$ ,  $y_2(x) = y_1(1-x)$ ,  $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$  ( $T$  — знак транспонирования). Будем для простоты в обозначениях функций, зависящих от аргументов  $x$  и  $\lambda$ , опускать либо аргумент  $\lambda$ , либо оба аргумента.

**Лемма 1** [3]. *Если  $\lambda$  таково, что  $R_\lambda(A)$  существует, то  $y(x)$  удовлетворяет краевой задаче*

$$B_1 y'(x) + P_1(x)y(x) - N_1 y(x) = \mu y(x) + F(x), \quad (1.1)$$

$$M_0 y(0) + M_1 y(1) = 0, \quad (1.2)$$

где

$$B_1 = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}, \quad P_1(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & p(1-x) \end{pmatrix} B_1,$$

$N_1 y(x) \equiv (N_1 y)(x)$ ,  $p(x) = T(x, x)$ ,  $T(x, t)$  — ядро интегрального оператора

$$Tf = \int_0^x T(x, t)f(t) dt, \quad T = (E - A_x)^{-1} - E,$$

$$A_x f = \int_0^x A_x(x, t)f(t) dt, \quad N_1 = \begin{pmatrix} \beta T'_t & -T'_t \\ \beta S T'_t & -S T'_t \end{pmatrix}, \quad T'_t f = \int_0^x T'_t(x, t)f(t) dt, \quad S f(x) = f(1-x),$$

$$\mu = (\beta^2 - 1)\lambda, \quad F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T, \quad F_1(x) = (\beta^2 - 1)f(x), \quad F_2(x) = (\beta^2 - 1)f(1-x),$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Обратно, если  $\lambda$  таково, что однородная краевая задача (1.1), (1.2) (т. е. при  $F(x) \equiv 0$ ) имеет только нулевое решение, то  $R_\lambda(A)$  существует,  $R_\lambda(A)f = y_1(x)$ ,  $y_2(x) = y_1(1-x)$ .

**Лемма 2** [3]. *Если  $y(x)$  является решением (1.1), (1.2), то  $\tilde{z}(x) = \Gamma^{-1}y(x)$  является решением краевой задачи*

$$\tilde{z}'(x) + P_2(x)\tilde{z}(x) - N_2\tilde{z}(x) = \lambda D\tilde{z}(x) + \tilde{\Phi}(x), \quad (1.3)$$

$$\tilde{Q}_0\tilde{z}(0) + \tilde{Q}_1\tilde{z}(1) = 0, \quad (1.4)$$

где

$$P_2(x) = D^{-1}\Gamma^{-1}P_1(x)\Gamma, \quad D = \text{diag}(d, -d), \quad d = \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \beta - d \\ \beta - d & 1 \end{pmatrix},$$

$$N_2 = D^{-1}\Gamma^{-1}N_1\Gamma, \quad N_2\tilde{z}(x) \equiv (N_2\tilde{z})(x), \quad \tilde{\Phi}(x) = D^{-1}\Gamma^{-1}F(x), \quad \tilde{Q}_0 = M_0\Gamma, \quad \tilde{Q}_1 = M_1\Gamma.$$

И наоборот.

**Теорема 1** [3]. Если задача (1.3), (1.4) при  $\tilde{\Phi}(x) \equiv 0$  имеет только нулевое решение, то  $R_\lambda(A)$  существует и

$$R_\lambda(A)f = \tilde{z}_1(x) + (\beta - d)\tilde{z}_2(x),$$

где  $\tilde{z}_i(x) \equiv \tilde{z}_i(x, \lambda)$ ,  $i = 1, 2$ , — компоненты вектор-функции  $\tilde{z}(x)$ , являющейся решением системы (1.3), (1.4).

## 2. Асимптотика решений однородной дифференциальной системы

Сначала преобразуем задачу (1.3), (1.4) к виду, удобному для дальнейших исследований.

**Лемма 3.** Пусть

$$P_3(x) = \text{diag}(e_1(x), e_2(x)), \quad e_i(x) = e^{-\int_0^x p_{ii}(t) dt}, \quad i = 1, 2, \quad (2.1)$$

где  $p_{ii}(x)$  — диагональные элементы матрицы  $P_2(x)$ . Если  $\tilde{z}(x)$  — решение (1.3), (1.4), то  $z(x) = P_3^{-1}(x)\tilde{z}(x)$  является решением краевой задачи

$$z'(x) + P(x)z(x) - \lambda Dz(x) = \Phi(z, x), \quad (2.2)$$

$$U(z) \equiv Q_0z(0) + Q_1z(1) = 0; \quad (2.3)$$

здесь

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ q_1(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$q_1(x) = p_{21}(x)e_1(x)e_2^{-1}(x)$ ,  $q_2(x) = p_{12}(x)e_2(x)e_1^{-1}(x)$ ,  $p_{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, 2$  — элементы матрицы  $P_2(x)$ ,

$$\Phi(z, x) = P_3^{-1}N_2P_3z + P_3^{-1}\tilde{\Phi}(x), \quad (2.4)$$

$$Q_0 = \tilde{Q}_0P_3(0), \quad Q_1 = \tilde{Q}_1P_3(1). \quad (2.5)$$

**Доказательство.** Запишем (1.3) в виде

$$\tilde{z}'(x) + P_2(x)\tilde{z}(x) - \lambda D\tilde{z}(x) = N_2\tilde{z}(x) + \tilde{\Phi}(x).$$

Матрицу  $P_2(x)$  представим в виде

$$P_2(x) = P_2^{(1)}(x) + P_2^{(2)}(x),$$

где  $P_2^{(1)}(x)$  — диагональная,  $P_2^{(2)}(x)$  — кодиагональная матрицы.

В (1.3) выполним замену  $\tilde{z}(x) = P_3(x)z(x)$ , где  $P_3(x)$  определена в (2.1).

Тогда, учитывая, что  $P_3'(x) + P_2^{(1)}(x)P_3(x) = 0$ , получим (2.2). Соотношение (2.3) получается тривиально. Лемма доказана.

Рассмотрим однородную дифференциальную систему

$$z'(x) + P(x)z(x) - \lambda Dz(x) = 0. \quad (2.6)$$

Считаем всюду в дальнейшем  $\lambda < 0$ .

**Лемма 4.** *Фундаментальная матрица решений однородной системы (2.6) имеет при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  асимптотическое представление*

$$V(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{\lambda dx} & O\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda dx} \\ O\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda dx} & \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{-\lambda dx} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Оценки  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  равномерны по  $x \in [0, 1]$ .

**Доказательство.** Для простоты дальнейших выкладок обозначим  $\nu = \lambda d$ . В компонентной записи система (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} z_1'(x) - \nu z_1(x) &= -q_2(x)z_2(x), \\ z_2'(x) + \nu z_2(x) &= -q_1(x)z_1(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Система (2.8) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} z_1(x) &= C_1 e^{\nu x} - \int_0^x e^{\nu(x-t)} q_2(t) z_2(t) dt, \\ z_2(x) &= C_2 e^{-\nu x} - \int_0^x e^{-\nu(x-t)} q_1(t) z_1(t) dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные константы, вообще говоря, зависящие от  $z$ .

Подберем  $C_1$  и  $C_2$  так, чтобы получить фундаментальную матрицу решений с нужными свойствами.

Положим

$$\begin{aligned} v_1(x) &= z_1(x)e^{-\nu x}(x), \\ v_2(x) &= z_2(x)e^{\nu x}(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тогда (2.9) примет вид

$$v_1(x) = C_1 - \int_0^x e^{-2\nu t} q_2(t) v_2(t) dt, \quad (2.11)$$

$$v_2(x) = C_2 - \int_0^x e^{2\nu t} q_1(t) v_1(t) dt. \quad (2.12)$$

Подставив (2.11) в (2.12) и положив  $C_1 = 0, C_2 = 1$ , получим

$$v_2(x) = 1 + \int_0^x e^{-2\nu\tau} q_2(\tau) v_2(\tau) d\tau \int_{\tau}^x e^{2\nu t} q_1(t) dt.$$

Поскольку  $q_1(x), q_2(x)$  имеют оценки  $O(1)$ , то

$$\int_{\tau}^x e^{2\nu t} q_1(t) dt = O\left(\frac{1}{\nu}\right) e^{2\nu\tau}, \quad v_2(x) = 1 + \int_0^x O\left(\frac{1}{\nu}\right) v_2(t) dt,$$

а отсюда следует, что решение  $v_2(x)$  существует и для него имеет место асимптотическая по  $\nu$  при  $|\nu| \rightarrow \infty$  оценка

$$v_2(x) = 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (2.13)$$

Подставив (2.13) в (2.11), получим

$$v_1(x) = O\left(\frac{1}{\nu}\right)e^{-2\nu x}. \quad (2.14)$$

Из (2.10), (2.13), (2.14), переходя от  $\nu$  к  $\lambda$ , получим, что существует решение системы (2.6) с асимптотикой

$$z_1(x) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda dx}, \quad z_2(x) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{-\lambda dx}.$$

Будем считать, что это компоненты второго столбца фундаментальной матрицы решений. Найдем компоненты первого столбца.

Подставим (2.12) в (2.11), положим  $C_1 = 1$ ,  $C_2$  выберем позднее.

Получим

$$v_1(x) = 1 - C_2 \int_0^x e^{-2\nu t} q_2(t) dt + \int_0^x e^{-2\nu t} q_2(t) dt \int_0^t e^{2\nu \tau} q_1(\tau) v_1(\tau) d\tau. \quad (2.15)$$

Обозначим

$$\varphi(x, \nu) = \int_0^x e^{-2\nu t} q_2(t) dt.$$

Меняя порядок интегрирования в третьем слагаемом правой части (2.15) и учитывая, что

$$\int_t^x e^{-2\nu \tau} q_2(\tau) d\tau = \varphi(x, \nu) - \varphi(t, \nu),$$

придем к выражению

$$v_1(x) = 1 - \left(C_2 - \int_0^x e^{2\nu t} q_1(t) v_1(t) dt\right) \varphi(x, \nu) - \int_0^x e^{2\nu t} q_1(t) \varphi(t, \nu) v_1(t) dt. \quad (2.16)$$

Теперь выбираем

$$C_2 = \int_0^1 e^{2\nu t} q_1(t) v_1(t) dt, \quad (2.17)$$

подставляем в (2.16), учитывая, что  $\varphi(x, \nu) = O\left(\frac{1}{\nu}\right)e^{-2\nu x}$ , и получаем асимптотическое представление

$$v_1(x) = 1 - \int_0^1 O\left(\frac{1}{\nu}\right) v_1(t) dt.$$

Отсюда следует, что  $v_1(x)$  существует и справедлива формула

$$v_1(x) = 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (2.18)$$

Из (2.11) и (2.17) следует, что

$$v_2(x) = \int_x^1 e^{2\nu t} q_1(t) v_1(t) dt,$$

а отсюда и из (2.18) вытекает представление

$$v_2(x) = O\left(\frac{1}{\nu}\right)e^{2\nu x}. \quad (2.19)$$

В итоге из (2.10), (2.18), (2.19) получаем асимптотику решений, являющихся компонентами первого столбца матрицы  $V(x, \lambda)$  в (2.7):

$$z_1(x) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{\lambda dx}, \quad z_2(x) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda dx}.$$

Лемма доказана.

### 3. Решение краевой задачи для неоднородной дифференциальной системы

Рассмотрим неоднородную дифференциальную систему уравнений

$$z'(x) + P(x)z(x) - \lambda Dz(x) = \varphi(x), \quad (3.1)$$

где  $\varphi(x)$  — произвольная вектор-функция с компонентами из  $L_2[0, 1]$ .

Обозначим через  $[K]$  матрицу  $K + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ , где  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  означает матрицу с компонентами, имеющими оценку  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ , причем, если есть еще зависимость от других переменных (например, от  $x$ ), то  $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$  равномерна по этим переменным.

**Лемма 5.** *Для общего решения неоднородной системы (3.1) справедлива следующая асимптотическая формула*

$$z(x) = [E]V_0(x, \lambda)c^0 + [E]g_\lambda[E]\varphi(x), \quad (3.2)$$

где  $E$  — единичная матрица  $2 \times 2$ ,  $V_0(x, \lambda) = \text{diag}(e^{\lambda dx}, e^{-\lambda dx})$ ,

$$g_\lambda \varphi(x) = (g_\lambda \varphi)(x) = \int_0^1 g(x, t, \lambda) \varphi(t) dt, \quad g(x, t, \lambda) = \text{diag}(g_1(x, t, \lambda), g_2(x, t, \lambda)),$$

$$g_1(x, t, \lambda) = \varepsilon(x, t)e^{\lambda d(x-t)}, \quad g_2(x, t, \lambda) = -\varepsilon(t, x)e^{-\lambda d(x-t)};$$

$\varepsilon(x, t) = 1$  при  $t \leq x$ ,  $\varepsilon(x, t) = 0$  при  $t > x$ .

**Доказательство.** По методу вариации произвольных постоянных общее решение системы (3.1) имеет вид

$$z(x) = V(x, \lambda)c(x), \quad (3.3)$$

где  $V(x, \lambda)$  берем из (2.7),  $c(x) = (c_1(x), c_2(x))^T$  — вектор-функция, удовлетворяющая системе

$$c'(x) = V^{-1}(x, \lambda)\varphi(x). \quad (3.4)$$

Интегрируя первую компоненту (3.4) от 0 до  $x$ , а вторую от  $x$  до 1, из (3.4) получим

$$c(x) = c^0 + \int_0^1 E_0(x, t)V^{-1}(t, \lambda)\varphi(t) dt, \quad (3.5)$$

где  $c^0$  — произвольный постоянный вектор,  $E_0(x, t) = \text{diag}(\varepsilon(x, t), -\varepsilon(t, x))$ .

Так как

$$V(x, \lambda) = [E]V_0(x, \lambda), \quad (3.6)$$

$$V^{-1}(x, \lambda) = V_0^{-1}(x, \lambda)[E], \quad (3.7)$$

то из (3.3), (3.5)–(3.7) получаем

$$z(x) = [E]V_0(x, \lambda)c^0 + [E] \int_0^1 V_0(x, \lambda)E_0(x, t)V_0^{-1}(t, \lambda)[E]\varphi(t) dt. \quad (3.8)$$

Но

$$V_0(x, t)E_0(x, t)V_0^{-1}(t, \lambda) = g(x, t, \lambda).$$

Поэтому из (3.8) получаем (3.2). Лемма доказана.

**Лемма 6.** При  $\lambda < 0$  и достаточно больших значениях  $|\lambda|$  матрица  $U(V(x, \lambda))$  обратима и имеет место асимптотическое представление

$$V(x, \lambda)U^{-1}(V(x, \lambda)) = V_1(x, \lambda),$$

где

$$V_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} O(e^{\lambda dx}) & O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ O\left(\frac{1}{\lambda}\right) & O(e^{\lambda d(1-x)}) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

**Доказательство.** Найдем сначала матрицу  $U(V(x, \lambda))$ . Имеем

$$U(V(x, \lambda)) = Q_0V(0, \lambda) + Q_1V(1, \lambda),$$

где  $Q_0, Q_1$  определены в (2.5).

Из (2.5), (2.1) и (2.7) получаем

$$U(V(x, \lambda)) = \begin{pmatrix} q_{01} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) & q_{02} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ \left(q_{02}e_1(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{\lambda d} & \left(q_{01}e_2(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{-\lambda d} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

где  $q_{01} = d, q_{02} = \beta(\beta - d) - 1$ .

Обозначим  $\Delta(\lambda) = \det U(V(x, \lambda))$ .

Из (3.10) получаем

$$\Delta(\lambda) = \left(q_{01}^2 e_2(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{-\lambda d} - \left(q_{02}^2 e_1(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{\lambda d}. \quad (3.11)$$

Из (3.11) видно, что при достаточно больших значениях  $|\lambda|$   $\Delta(\lambda) \neq 0$ , а отсюда вытекает обратимость матрицы  $U(V(x, \lambda))$ .

Далее из (3.10) имеем

$$U^{-1}(V(x, \lambda)) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \left(q_{01}e_2(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{-\lambda d} & -q_{02} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ \left(-q_{02}e_1(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{\lambda d} & q_{01} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Представим  $\Delta(\lambda)$  в виде:  $\Delta(\lambda) = e^{-\lambda d}\bar{\Delta}(\lambda)$ .

Тогда (3.12) примет вид

$$U^{-1}(V(x, \lambda)) = \frac{1}{\bar{\Delta}(\lambda)} \begin{pmatrix} q_{01}e_2(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) & \left(-q_{02} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{\lambda d} \\ \left(-q_{02}e_1(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{2\lambda d} & \left(q_{01} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)e^{\lambda d} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Из (3.13) и (2.7) получаем (3.9). Лемма доказана.

**Лемма 7.** *Решение неоднородной дифференциальной системы (3.1) с краевыми условиями (2.3) при больших значениях  $|\lambda|$  существует, единственно, и для него имеет место асимптотическая формула*

$$z(x) = -V_1(x, \lambda)U([E]g_\lambda[E]\varphi) + [E]g_\lambda[E]\varphi(x). \quad (3.14)$$

**Доказательство.** Подставим (3.2) в краевое условие (2.3). Учитывая, что в первом слагаемом в (3.2)  $[E]V_0(x, \lambda) = V(x, \lambda)$ , получим

$$U(V(x, \lambda))c^0 + U([E]g_\lambda[E]\varphi) = 0.$$

Отсюда

$$c^0 = -U^{-1}(V(x, \lambda))U([E]g_\lambda[E]\varphi).$$

Подставляя  $c^0$  в (3.2), получаем (3.14). Лемма доказана.

**Лемма 8.** *Для  $z(x)$  из леммы 7 имеет место оценка  $\|z\|_{L_2} = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\|\varphi\|_{L_2}\right)$ , где  $\|\cdot\|_{L_2}$  — норма в пространстве вектор-функций.*

**Доказательство.** Из леммы 6 следует, что компоненты матрицы  $V_1(x, \lambda)$  имеют в  $L_2[0, 1]$  оценку  $O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right)$ . Далее

$$g_\lambda\varphi = \left( \int_0^x e^{\lambda d(x-t)}\varphi_1(t) dt, - \int_x^1 e^{\lambda d(t-x)}\varphi_2(t) dt \right)^T,$$

где  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  — компоненты вектор-функции  $\varphi(x)$ .

По теореме об оценке нормы свертки [4, с. 569] (которая справедлива и на отрезке  $[0, 1]$ ) получаем

$$\|g_\lambda\varphi\|_{L_2} = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\|\varphi\|_{L_2}\right).$$

Утверждение леммы следует из приведенных оценок и леммы 7.

#### 4. Основная теорема

**Лемма 9.** *Решение  $z(x)$  краевой задачи (2.2), (2.3) при больших  $|\lambda|$  существует, единственно, и для него справедлива оценка*

$$\|z\|_{L_2} = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\|F\|_{L_2}\right).$$

**Доказательство.** Подставим в (3.14) вместо функции  $\varphi(x)$  функцию  $\Phi(z, x)$ , определенную в (2.4). Запишем  $\Phi(z, x)$  в виде:  $\Phi(z, x) = N_3z + \tilde{F}$ , где  $N_3 = P_3^{-1}N_2P_3$ ,  $\tilde{F} = P_3^{-1}D^{-1}\Gamma^{-1}F$ . Тогда (3.14) примет вид

$$z(x) = -V_1(x, \lambda)U([E]g_\lambda[E](N_3z + \tilde{F})) + [E]g_\lambda[E](N_3z + \tilde{F}). \quad (4.1)$$

Имеем

$$g_\lambda N_3z = \int_0^1 g(x, t, \lambda) dt \int_0^1 \varepsilon(t, \tau) N_3(t, \tau) z(\tau) d\tau = \int_0^1 z(\tau) d\tau \int_0^1 g(x, t, \lambda) \varepsilon(t, \tau) N_3(t, \tau) dt.$$

Применяя во внутреннем интеграле интегрирование по частям ( $N_3(t, \tau)$  дифференцируема), получим

$$\int_0^1 g(x, t, \lambda) \varepsilon(t, \tau) N_3(t, \tau) dt = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Тогда (4.1) переходит в

$$z(x) = \int_0^1 O\left(\frac{1}{\lambda}\right) z(t) dt + z_0(x), \quad (4.2)$$

где  $z_0(x)$  — решение краевой задачи (2.3), (3.1), когда  $\varphi = \tilde{F}$ . Поэтому по лемме 8

$$\|z_0\|_{L_2} = O\left(\frac{1}{|\lambda|} \|F\|_{L_2}\right). \quad (4.3)$$

Из (4.2), (4.3) получаем утверждение леммы.

**Теорема 2.** Для оператора  $A$  из (0.1) и любой  $u(x) \in L_2[0, 1]$  выполняется сходимость (0.2) в метрике  $L_2[0, 1]$ .

**Доказательство.** Из теоремы 1, лемм 3 и 9 следует оценка (0.3) для нормы  $\|T_\alpha A\|_{L_2}$ . Тем самым (0.2) справедлива для любой  $u(x) \in \overline{M(A)}$ .

В [2] доказано равенство  $\overline{M(A)} = L_2[0, 1]$  для уравнения (0.1), в котором производная по  $x$  от ядра равна нулю на диагонали  $t = x$ . В доказательстве (см. леммы 4 и 5) используется лишь факт существования этой производной. Поэтому указанное равенство справедливо и в рассматриваемом нами случае. Отсюда следует утверждение теоремы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаврентьев М.М.** О некоторых некорректных задачах математической физики. // Новосибирск: СО АН СССР, 1962. 92 с.
2. **Хромова Г.В.** О сходимости метода М.М. Лаврентьева // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 6. С. 958–965.
3. **Хромов А.П.** О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования // Интегральные преобразования и специальные функции: информ. бюллетень. Т. 6, № 1. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2006. С. 46–55.
4. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.

Хромов Август Петрович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. кафедрой  
Саратовский гос. университет  
e-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Поступила 25.05.2011

Хромова Галина Владимировна  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
Саратовский гос. университет

УДК 519.6

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С ВНУТРЕННИМИ РАБОТАМИ<sup>1</sup>****А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов**

Рассматривается вариант обобщенной задачи курьера с внутренними работами (выполняемыми на целевых множествах), для которого возможные варианты перемещений ограничиваются точками — элементами сечений многозначных отображений. Исследуется решение по методу динамического программирования.

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования.

A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. On a routing problem with internal tasks.

A variant of the generalized courier problem with internal tasks (performed at target sets) is considered. The possible variants of travels are restricted by points, which are elements of sections of multivalued mappings. A solution based on the dynamic programming method is investigated.

Keywords: route, path, precedence conditions.

**Введение**

В статье рассматривается задача маршрутизации перемещений, осложненная ограничениями в виде условий предшествования. Кроме того, предполагается, что перемещения связаны с посещением непустых конечных множеств, на каждом из которых должны выполняться те или иные работы. Как сами перемещения, так и упомянутые работы сопровождаются затратами, которые агрегируются аддитивно. Получающийся при этом аддитивный критерий следует минимизировать.

Исследуемая задача является развитием хорошо известной задачи коммивояжера (ЗК) [1–3], соответствующие осложнения постановки связаны с особенностями прикладных задач, на решение которых ориентировано настоящее исследование. Это касается появления ограничений, многовариантности перемещений, необходимости выполнения (внутренних) работ на множествах. В этой связи отметим [1], где наряду с ЗК обсуждается целый ряд подобных задач с особенностями, вызванными соображениями прикладного характера (в частности, упоминаются ЗК с выбором, задача курьера). В связи с возможными приложениями отметим задачи о морских и авиационных перевозках, а также ряд задач, связанных с атомной энергетикой. В последнем случае можно указать задачу оптимизации дозовой нагрузки персонала АЭС при проведении комплекса работ в помещениях с повышенным уровнем радиации и задачу демонтажа энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации. В обоих случаях возникает острая потребность в маршрутизации, осуществляемой в целях снижения суммарной дозы радиации, получаемой соответствующим работником. В связи с упомянутыми содержательными задачами отметим работы [4–6]. Применительно к данной статье можно указать следующий естественный вариант задачи.

Пусть имеется ряд помещений, в каждом из которых есть набор входов-выходов (см. [4]) и некоторый пункт — место, в котором следует осуществить то или иное действие, после чего помещение покидается исполнителем, который может это сделать только через один из входов-выходов (аналогичное требование накладывается на вход в помещение). Помещения следует

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления” (проекты 09-П-1-1007, 09-П-1-1014) и при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00436, 10-01-96020, 10-08-00484).

посещать при ограничениях в виде условий предшествования (см. [1]). Требуется выбрать очередность посещений и соответствующую последовательность входов-выходов. Итак, совокупный процесс включает систему (внешних) перемещений между помещениями и систему внутренних работ, сводящихся каждая к перемещению от входа к месту действия, осуществлению нужного действия и последующего перемещения к выходу. Условия на этапах внешних перемещений и внутренних работ могут быть весьма различными. Так, например, в условиях АЭС может оказаться, что уровень радиации в помещениях существенно выше внешнего фона.

В статье рассматривается математическая постановка, включающая вышеупомянутую содержательную задачу (в заключении статьи приведен модельный пример данной задачи, для которого реализован оптимальный алгоритм ее решения). Возможны, конечно, и другие варианты внутренних работ. Таким образом, речь идет о большом классе актуальных прикладных задач, к которым может быть применен единый подход. В настоящей статье продолжается развитие этого подхода, естественным образом связанного с задачей последовательного обхода мегаполисов, но отличающегося существенным разнообразием внутренних работ и наличием ограничений. Отличие же настоящего исследования от предыдущих состоит в том, что уже на уровне постановки ограничиваются возможности перемещений между множествами (мегаполисами): выделяются некоторые подмножества (п/м), зависящие от предыдущего положения и такие, что только в точки этих п/м допустимо перемещение из упомянутого положения. Эта особенность может быть связана с теми или иными директивными соображениями (например, перемещение должно осуществляться на “почти ближайшую” точку), но может возникать и искусственно, по соображениям экономии вычислений. В то же время данное обстоятельство приводит к интересной в математическом отношении экстремальной задаче. В настоящей работе для ее решения используется метод динамического программирования (МДП). В связи с использованием МДП для решения ЗК отметим [7; 8]. Настоящее исследование является логическим продолжением [9–11] и целого ряда других работ авторов.

## 1. Содержательное обсуждение задачи

Рассмотрим непустое множество  $\mathbf{X}$ , в котором выделены  $N$ ,  $N \geq 2$ , непересекающихся попарно конечных п/м  $M_1, \dots, M_N$  и точка  $x^0$ , не принадлежащая ни одному из упомянутых п/м  $\mathbf{X}$ . С каждым из множеств  $M_j$  связываем отображение  $A_j$  на  $\mathbf{X}$ , сопоставляющее точке непустое п/м  $M_j$ ; итак,  $A_j(x) \subset M_j$  при  $x \in \mathbf{X}$ . Рассматривается вопрос о построении системы перемещений вида

$$(x_0 = x^0) \rightarrow x_1^{(1)} \in A_{\alpha(1)}(x_0) \rightsquigarrow x_1^{(2)} \in M_{\alpha(1)} \rightarrow \dots \rightarrow x_N^{(1)} \in A_{\alpha(N)}(x_{N-1}^{(2)}) \rightsquigarrow x_N^{(2)} \in M_{\alpha(N)}. \quad (1.1)$$

Прямые стрелки в (1.1) соответствуют внешним перемещениям, а волнистые — внутренним работам; через  $\alpha$  обозначена перестановка индексов  $1, \dots, N$ , рассматриваемая как функция индекса. Далее исследуется случай, когда выбор  $\alpha$  стеснен условиями предшествования (см. [11, ч. 1]): имеется конечный набор пар индексов, причем для каждой такой пары множество, нумеруемое первым индексом (отправителем), должно посещаться раньше, чем множество, нумеруемое вторым индексом (получателем). Тем самым выделяется множество допустимых маршрутов (перестановок). Конкретные перемещения в (1.1) по занумерованным множествам называем трассами. Возможность выбора каждой конкретной трассы определяется соответствующим маршрутом.

В основе перемещений (см. (1.1)) выделяются точки входа и точки выхода для каждого целевого множества. Их несовпадение может быть связано с выполнением работ, которые могут в принципе иметь различный характер, однако стоимость этих работ в последующем однозначно определяется упомянутой парой точек. Важно отметить, имея в виду практическое применение, что с точки зрения “совокупной” оптимизации можно полагать выполнение

реальных внутренних работ оптимальным при фиксации точек входа и выхода для каждого целевого множества (это существенно, например, в том случае, когда внутренние работы связаны с обходом всех элементов соответствующего целевого множества).

В условиях аддитивного агрегирования затрат для оптимизации критерия можно использовать все допустимые маршруты и трассы, с ними согласованные в духе (1.1).

## 2. Основные понятия и обозначения. Постановка задачи

Используем кванторы и пропозициональные связи;  $\triangleq$  — равенство по определению. Если  $x$  и  $y$  — объекты, то через  $\{x; y\}$  обозначаем неупорядоченную пару [14] этих двух объектов, т. е. множество, содержащее  $x$  и  $y$  и не содержащее никаких других объектов. Если  $a$  и  $b$  — объекты, то  $(a, b) \triangleq \{\{a\}; \{a; b\}\}$  есть [14] упорядоченная пара с первым элементом  $a$  и вторым элементом  $b$ . Для всякого объекта  $u$  полагаем, что  $\{u\} \triangleq \{u; u\}$ . Если  $z$  — какая-либо упорядоченная пара, то через  $\text{pr}_1(z)$  и  $\text{pr}_2(z)$  условимся обозначать соответственно ее первый и второй элементы, определяемые однозначно и реализующие представление  $z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z))$ ; если  $z \in A \times B$ , где  $A$  и  $B$  — множества, то  $\text{pr}_1(z) \in A$  и  $\text{pr}_2(z) \in B$ . Условимся о следующем традиционном соглашении: если  $X, Y$  и  $W$  — множества,  $Z$  — п/м  $X \times Y$ ,  $f$  — отображение из  $Z$  в  $W$ ,  $z \in Z$  и при этом  $z = (x, y)$ , где  $x \in X$  и  $y \in Y$ , то, как обычно,  $f(x, y) \triangleq f(z)$ .

В дальнейшем  $\mathbb{R}$  — вещественная прямая,  $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$  (натуральный ряд),  $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0; 1; 2; \dots\}$  и  $\overline{k, l} \triangleq \{j \in \mathbb{N}_0 \mid (k \leq j) \& (j \leq l)\} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall l \in \mathbb{N}_0$ . Ясно, что  $\overline{1, m} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq m\}$  при  $m \in \mathbb{N}$ . Если  $X$  — множество, то через  $\text{Fin}(X)$  обозначаем семейство всех непустых конечных п/м  $X$ ,  $(\text{FIN})[X] \triangleq \text{Fin}(X) \cup \{\emptyset\}$ ; если  $K \in \text{Fin}(X)$ , то через  $|K|$  обозначаем количество элементов  $K$ ,  $|\emptyset| \triangleq 0$ . Если  $K$  — непустое конечное множество, то через  $(\text{bi})[K]$  обозначаем множество всех биекций “отрезка”  $\overline{1, |K|}$  на  $K$  (обозначение соответствует [11, (1.2.3)]).

Ниже фиксируется число  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$ , определяющее количество целевых множеств. Полагаем  $\mathbb{P} \triangleq (\text{bi})[\overline{1, N}]$ , получая множество всех перестановок в  $\overline{1, N}$ , называемых (полными) маршрутами. Если  $\alpha \in \mathbb{P}$ , то через  $\alpha^{-1}$  обозначаем перестановку, обратную к  $\alpha$ :  $\alpha^{-1} \in \mathbb{P}$  и  $\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k \quad \forall k \in \overline{1, N}$ . Используем также частичные маршруты, понимаемые как биекции из  $(\text{bi})[S]$ , где  $S$  — непустое п/м  $\overline{1, N}$ . Полагаем заданным множество  $\mathbf{K} \in (\text{FIN})[\overline{1, N} \times \overline{1, N}]$  ( $\mathbf{K}$  — п/м  $\overline{1, N} \times \overline{1, N}$ ) адресных упорядоченных пар, у каждой из которых первый элемент играет роль “отправителя” (груза, сообщения и т.п.), а второй — “получателя”. Тогда

$$\mathbb{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}\}$$

рассматривается в качестве множества всех допустимых маршрутов (реализующих для каждой адресной пары посещение “отправителя” раньше, чем “получателя”; данные требования именуем условиями предшествования, см. [11, ч. 2]). Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\forall K \in \text{Fin}(\mathbf{K}) \exists z \in K : \text{pr}_1(z) \neq \text{pr}_2(\tilde{z}) \quad \forall \tilde{z} \in K.$$

Напомним, что фиксированы непустое множество  $\mathbf{X}$ , кортеж  $(M_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \rightarrow \text{Fin}(\mathbf{X})$  целевых множеств и точка  $x^0 \in \mathbf{X}$ ,  $x^0 \notin M_j \quad \forall j \in \overline{1, N}$ . Полагаем, что  $M_k \cap M_l = \emptyset \quad \forall k \in \overline{1, N} \quad \forall l \in \overline{1, N} \setminus \{k\}$ . Кроме того, заданы отображения

$$A_1 : \mathbf{X} \rightarrow \text{Fin}(M_1), \dots, A_N : \mathbf{X} \rightarrow \text{Fin}(M_N) \quad (2.1)$$

(для наших целей достаточно, чтобы  $A_1, \dots, A_N$  были определены на множестве

$$\{x^0\} \cup \left( \bigcup_{i=1}^N M_i \right); \quad (2.2)$$

однако для упрощения обозначений мы доопределяем такие суженные отображения, полагая, например, что  $A_j(x) = M_j$  для  $j \in \overline{1, N}$  и точек  $x \in \mathbf{X}$ , не принадлежащих множеству (2.2)). С учетом конечности целевых множеств (2.1) эквивалентно тому, что  $A_j(x)$  — непустое п/м  $M_j$  при  $j \in \overline{1, N}$  и  $x \in \mathbf{X}$ .

Если  $k \in \overline{1, N}$ , то  $\mathfrak{X}_k$  есть def множество всех кортежей  $(z_i)_{i \in \overline{0, k}}: \overline{0, k} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ . Тогда в согласии с (1.1) полагаем, что

$$\mathfrak{Z}[\alpha] \triangleq \{(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}_N \mid (z_0 = (x^0, x^0)) \& (z_j \in A_{\alpha(j)}(\text{pr}_2(z_{j-1})) \times M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1, N})\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}, \quad (2.3)$$

получая множество трасс, согласованных с соответствующим маршрутом. С учетом (2.3) введем множество всех решений, определяемых каждое в виде пары маршрут-трасса:

$$\mathbf{S} \triangleq \{(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbb{A} \times \mathfrak{X}_N \mid (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha]\}. \quad (2.4)$$

Мы полагаем, что любая упорядоченная пара из множеств (2.4) доступна выбору в качестве допустимого решения.

Если  $S$  — непустое множество, то через  $\mathcal{R}_+[S]$  обозначаем множество всех отображений из  $S$  в  $[0, \infty[$ , т. е. множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на  $S$ .

В дальнейшем фиксируем  $\mathbf{g} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbf{X}]$  и  $\kappa \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}]$ , а также кортеж

$$(g_i)_{i \in \overline{1, N}}: \overline{1, N} \rightarrow \mathcal{R}_+[\mathbf{X} \times \mathbf{X}].$$

Функции  $\mathbf{g}$ ,  $\kappa$ ,  $g_1, \dots, g_N$  используем для оценивания систем перемещений вида (1.1). Эти функции в своей существенной части могут быть заданы на целевых множествах или на их декартовых произведениях (требуется также определить  $\mathbf{g}(x^0, y)$ , где  $y$  — точка из объединения  $M_1, \dots, M_N$ ; вообще же можно без потери общности отождествить  $\mathbf{X}$  с множеством (2.2)), а затем доопределены каким-то образом до функций на  $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$  и  $\mathbf{X}$  соответственно.

Далее рассматривается аддитивный вариант агрегирования затрат: если  $\alpha \in \mathbb{P}$ , то  $\mathfrak{C}_\alpha \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}_N]$  определяем по правилу

$$\mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \triangleq \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(z_j), \text{pr}_1(z_{j+1})) + \sum_{i=1}^N g_{\alpha(i)}(z_i) + \kappa(\text{pr}_2(z_N)) \quad \forall (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}_N. \quad (2.5)$$

В качестве основной рассматриваем задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \rightarrow \min, \quad (\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{S}. \quad (2.6)$$

Через  $\mathfrak{N}$  обозначаем семейство всех непустых п/м  $\overline{1, N}$ , т. е.  $\mathfrak{N} = \text{Fin}(\overline{1, N})$ ;  $\mathbf{N} \triangleq \mathfrak{N} \cup \{\emptyset\}$ .

**Расширение основной задачи.** Наряду с (2.6) будем рассматривать подобные задачи с неполным списком заданий и начальными состояниями, не совпадающими, вообще говоря, с  $x^0$ . Совокупность таких “укороченных” (вообще говоря) задач будем именовать расширением задачи (2.6). Однако непосредственное построение расширения осложнено условиями предшествования. В этой связи потребуются предварительное преобразование ограничений (см. [11, ч. 2]). Для этого в соответствии с [11, (2.2.26)] введем

$$\Sigma[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \quad (2.7)$$

В терминах (2.7) конструируется оператор  $\mathbf{I}$  [11, § 2.2], действующий в  $\mathfrak{N}$  по правилу

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z): z \in \Sigma[K]\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \quad (2.8)$$

Конструкцию на основе (2.7), (2.8) рассмотрим совсем кратко, отсылая за подробностями к [11, § 2.2] (напомним только, что  $\mathbf{I}(K) \in \mathfrak{N} \quad \forall K \in \mathfrak{N}$ ). Если  $K \in \mathfrak{N}$ , то множество

$$(\mathbf{I}\text{-bi})[K] \triangleq \{\alpha \in (\text{bi})[K] \mid \alpha(s) \in \mathbf{I}(\{\alpha(l): l \in \overline{1, |K|}\}) \quad \forall s \in \overline{1, |K|}\} \quad (2.9)$$

используем в качестве множества допустимых (по вычеркиванию) маршрутов в задаче, для которой список заданий исчерпывается посещением множеств с индексами из  $K$ . В качестве  $K$  может использоваться  $\overline{1, N}$ ; при этом (см. [11, (2.2.32)] и теорему 2.2.1 монографии [11])

$$\mathbb{A} = (\mathbf{I}\text{-bi})[\overline{1, N}]. \quad (2.10)$$

Кроме того, из предложения 2.2.2 монографии [11] следует, что

$$(\mathbf{I}\text{-bi})[K] \neq \emptyset \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \quad (2.11)$$

Тогда из (2.10) и (2.11) имеем, в частности, свойство  $\mathbb{A} \neq \emptyset$ . Итак (см.(2.10),(2.11)), получили свойство совместности системы ограничений по дискретной компоненте (это касается также и аналогов задачи (2.6), соответствующих неполным спискам заданий). Теперь мы несколько обобщим определение множества (2.3). Если  $x \in \mathbf{X}$ ,  $K \in \mathfrak{N}$  и  $\alpha \in (\text{bi})[K]$ , то

$$\mathfrak{Z}(x, K, \alpha) \triangleq \{(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathfrak{X}_{|K|} \mid (z_0 = (x, x)) \& (z_j \in A_{\alpha(j)}(\text{pr}_2(z_{j-1})) \times M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1, |K|})\}. \quad (2.12)$$

Кроме того, отметим, что из (2.3) и (2.12) вытекает, что

$$\mathfrak{Z}[\alpha] = \mathfrak{Z}(x^0, \overline{1, N}, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{P} \quad (2.13)$$

(напомним, что  $\mathbb{P} = (\text{bi})[\overline{1, N}]$ ). Из (2.13) вытекает, что при  $\alpha \in \mathbb{P}$  множество  $\mathfrak{Z}[\alpha]$  непусто и конечно. Итак, установлено, в частности (см. (2.9)), что

$$(\mathfrak{Z}(x, K, \alpha) \in \text{Fin}(\mathfrak{X}_{|K|}) \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N} \quad \forall \alpha \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K]) \& (\mathfrak{Z}[\alpha] \in \text{Fin}(\mathfrak{X}_N) \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}). \quad (2.14)$$

Учтем также и то, что согласно (2.9) и (2.11) при  $K \in \mathfrak{N}$   $(\mathbf{I}\text{-bi})[K]$  есть непустое конечное множество; кроме того, из (2.10) следует, что  $\mathbb{A}$  есть непустое конечное множество. Итак,

$$((\mathbf{I}\text{-bi})[K] \in \text{Fin}((\text{bi})[K]) \quad \forall K \in \mathfrak{N}) \& (\mathbb{A} \in \text{Fin}(\mathbb{P})). \quad (2.15)$$

Введем в рассмотрение задачи, подобные (2.6), но отвечающие обслуживанию неполных (вообще говоря) списков заданий. Для введения таких задач потребуются укороченные аналоги аддитивного критерия: полагаем при  $x \in \mathbf{X}$ ,  $K \in \mathfrak{N}$  и  $\alpha \in (\text{bi})[K]$ , что функционал  $\mathfrak{C}_K^{(\alpha)} \in \mathcal{R}_+[\mathfrak{X}_{|K|}]$  определяется правилом

$$\mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0, |K|}}) \triangleq \sum_{i=0}^{|K|-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(z_i), \text{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{|K|} g_{\alpha(i)}(z_i) + \kappa(\text{pr}_2(z_{|K|})) \quad \forall (z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathfrak{X}_{|K|}. \quad (2.16)$$

Заметим, что посредством (2.16) определены, в частности, значения  $\mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0, |K|}})$ ,  $(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathfrak{Z}(x, K, \alpha)$ . С учетом этого при  $x \in \mathbf{X}$  и  $K \in \mathfrak{N}$  введем следующую (укороченную) задачу:

$$\mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0, |K|}}) \rightarrow \min, \quad \alpha \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K], \quad (z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathfrak{Z}(x, K, \alpha). \quad (2.17)$$

С каждой задачей (2.17) естественным образом связывается ее значение (экстремум)

$$v(x, K) \triangleq \min_{\alpha \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K]} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathfrak{Z}(x, K, \alpha)} \mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0, |K|}}) \in [0, \infty[ \quad (2.18)$$

(см. (2.14), (2.15)). Отметим, в частности, что задачу (2.17) можно рассматривать при  $x = x^0$  и  $K = \overline{1, N}$ . В этом случае согласно (2.5), (2.16), (2.10) и (2.13) получаем, что

$$V \triangleq v(x^0, \overline{1, N}) = \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha]} \mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i \in \overline{0, N}}). \quad (2.19)$$

Из (2.4) и (2.19) получаем теперь, что  $V$  есть значение задачи (2.6):

$$V = \min_{(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{S}} \mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in [0, \infty[.$$

Наконец, определяем функцию (Беллмана)  $\mathbb{V}: \mathbf{X} \times \mathbf{N} \rightarrow [0, \infty[$  посредством следующего правила:

$$(\mathbb{V}(x, K) \triangleq v(x, K) \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}) \& (\mathbb{V}(x, \emptyset) \triangleq \kappa(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}). \quad (2.20)$$

### 3. Уравнение Беллмана

Функция (2.20), определенная на непустом множестве  $\mathbf{X} \times \mathbf{N}$ , есть (обычная) функция Беллмана в экстремальной задаче с редуцированными посредством (2.7), (2.8) ограничениями. В настоящем разделе устанавливается уравнение, характеризующее эволюцию слоев этой функции, т. е. (по сути дела) уравнение Беллмана.

**Теорема.** Если  $x \in \mathbf{X}$  и  $K \in \mathfrak{N}$ , то справедливо следующее равенство:

$$\mathbb{V}(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})]. \quad (3.1)$$

**Доказательство.** Пусть  $n \triangleq |K|$ ; тогда  $n \in \overline{1, N}$ . При этом

$$|K \setminus \{k\}| = n - 1 \quad \forall k \in \mathbf{I}(K).$$

Легко видеть (см. (2.20)), что истинна импликация

$$(n = 1) \Rightarrow (\mathbb{V}(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})]). \quad (3.2)$$

Пусть  $n \in \overline{2, N}$ . Тогда  $n - 1 \in \overline{1, N - 1}$ . С учетом (2.18), (2.20) подберем биекцию  $\alpha^0 \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K]$ , а также трассу  $(z_i^0)_{i \in \overline{0, n}} \in \mathfrak{Z}(x, K, \alpha^0)$ , для которых справедливо равенство

$$\mathbb{V}(x, K) = \mathfrak{C}_K^{(\alpha^0)}((z_i^0)_{i \in \overline{0, n}}). \quad (3.3)$$

Из (2.16) и (3.3) получаем очевидное равенство

$$\mathbb{V}(x, K) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(z_i^0), \text{pr}_1(z_{i+1}^0)) + \sum_{i=1}^n g_{\alpha^0(i)}(z_i^0) + \kappa(\text{pr}_2(z_n^0)). \quad (3.4)$$

Напомним, что  $K \in \mathfrak{N}$  и  $n = |K|$ . Тогда, в частности,  $\alpha^0 \in (\text{bi})[K]$ ; при этом справедлива следующая система включений:

$$\alpha^0(s) \in \mathbf{I}(\{\alpha^0(l) : l \in \overline{s, n}\}) \quad \forall s \in \overline{1, n}. \quad (3.5)$$

Кроме того, из (2.12) вытекает, что  $(z_i^0)_{i \in \overline{0, n}} \in \mathfrak{X}_n$ , причем справедливы свойства

$$(z_0^0 = (x, x)) \& (z_j^0 \in A_{\alpha^0(j)}(\text{pr}_2(z_{j-1}^0)) \times M_{\alpha^0(j)} \quad \forall j \in \overline{1, n}). \quad (3.6)$$

Отметим, в частности, что  $\alpha^0: \overline{1, n} \rightarrow K$ , причем  $K = \{\alpha^0(i) : i \in \overline{1, n}\}$ . Из (3.5) имеем, следовательно, что  $\alpha^0(1) \in \mathbf{I}(K)$ . Кроме того, из (3.6) вытекает включение  $z_1^0 \in A_{\alpha^0(1)}(x) \times M_{\alpha^0(1)}$ . Получаем очевидное неравенство

$$\begin{aligned} & \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})] \\ & \leq \mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z_1^0)) + g_{\alpha^0(1)}(z_1^0) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z_1^0), K \setminus \{\alpha^0(1)\}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

С другой стороны, из (3.4) и (3.6) вытекает, что

$$\mathbb{V}(x, K) = \mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z_1^0)) + g_{\alpha^0(1)}(z_1^0) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(z_i^0), \text{pr}_1(z_{i+1}^0)) + \sum_{i=2}^n g_{\alpha^0(i)}(z_i^0) + \kappa(\text{pr}_2(z_n^0)). \quad (3.8)$$

Рассмотрим следующее выражение, используемое в правой части (3.8):

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(z_i^0), \text{pr}_1(z_{i+1}^0)) + \sum_{i=2}^n g_{\alpha^0(i)}(z_i^0) + \kappa(\text{pr}_2(z_n^0)) \in [0, \infty[.$$

Данное выражение будет преобразовано с целью оценивания  $\mathbb{V}(x, K)$ . Напомним также, что  $\alpha^0: \overline{1, n} \rightarrow K$ . При этом  $j+1 \in \overline{2, n} \quad \forall j \in \overline{1, n-1}$ . Введем  $\mathbb{K} \triangleq K \setminus \{\alpha^0(1)\} \in \mathfrak{N}$ ,  $|\mathbb{K}| = n-1$ , а также отображение  $\alpha_0: \overline{1, n-1} \rightarrow K$ , определяемое правилом

$$\alpha_0(j) \triangleq \alpha^0(j+1) \quad \forall j \in \overline{1, n-1}. \quad (3.9)$$

Тогда, как легко видеть,  $\alpha_0$  есть биекция  $\overline{1, n-1} = \overline{1, |\mathbb{K}|}$  на  $\mathbb{K}$ , т. е.  $\alpha_0 \in (\text{bi})[\mathbb{K}]$ .

Напомним, что  $\mathbb{K} \in \mathfrak{N}$  и при этом  $|\mathbb{K}| = n-1$ . Поэтому согласно (2.9)

$$(\mathbf{I}\text{-bi})[\mathbb{K}] = \{\alpha \in (\text{bi})[\mathbb{K}] \mid \alpha(s) \in \mathbf{I}(\{\alpha(l) : l \in \overline{s, n-1}\}) \quad \forall s \in \overline{1, n-1}\}. \quad (3.10)$$

Пусть  $t \in \overline{1, n-1}$ . Тогда  $t+1 \in \overline{2, n}$  и согласно (3.5)  $\alpha^0(t+1) \in \mathbf{I}(\{\alpha^0(l) : l \in \overline{t+1, n}\})$ , где  $\alpha^0(t+1) = \alpha_0(t)$  согласно (3.9). Итак,

$$\alpha_0(t) \in \mathbf{I}(\{\alpha^0(l) : l \in \overline{t+1, n}\}). \quad (3.11)$$

Если  $l_* \in \overline{t+1, n}$ , то  $l_* - 1 \in \overline{t, n-1}$ , где  $\overline{t, n-1} \subset \overline{1, n-1}$ , а поэтому (см. (3.9))  $\alpha_0(l_* - 1) = \alpha^0(l_*)$ . Следовательно,  $\{\alpha^0(l) : l \in \overline{t+1, n}\} \subset \{\alpha_0(l) : l \in \overline{t, n-1}\}$ . Если же  $l^* \in \overline{t, n-1}$ , то  $l^* + 1 \in \overline{t+1, n}$ , а тогда, поскольку  $\overline{t, n-1} \subset \overline{1, n-1}$ , имеем из (3.9), что  $\alpha_0(l^*) = \alpha^0(l^* + 1)$ . Следовательно,  $\{\alpha_0(l) : l \in \overline{t, n-1}\} \subset \{\alpha^0(l) : l \in \overline{t+1, n}\}$ , и с учетом ранее доказанного противоположного вложения имеем равенство  $\{\alpha_0(l) : l \in \overline{t, n-1}\} = \{\alpha^0(l) : l \in \overline{t+1, n}\}$ , а поэтому согласно (3.11) справедливо включение  $\alpha_0(t) \in \mathbf{I}(\{\alpha_0(l) : l \in \overline{t, n-1}\})$ . Поскольку выбор  $t$  был произвольным, установлено, что

$$\alpha_0(s) \in \mathbf{I}(\{\alpha_0(l) : l \in \overline{s, n-1}\}) \quad \forall s \in \overline{1, n-1}. \quad (3.12)$$

Из (3.10) и (3.12) следует, что

$$\alpha_0 \in (\mathbf{I}\text{-bi})[\mathbb{K}]. \quad (3.13)$$

Напомним, что  $i+1 \in \overline{1, n} \quad \forall i \in \overline{0, n-1}$ . При этом  $(z_i^0)_{i \in \overline{0, n}} \in \mathfrak{X}_n$ . Поэтому  $z_{i+1}^0 \in \mathbf{X} \times \mathbf{X} \quad \forall i \in \overline{0, n-1}$ . Введем в рассмотрение кортеж  $(z_i^{00})_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathfrak{X}_{n-1}$ , определяемый следующим правилом:

$$(z_0^{00} \triangleq (\text{pr}_2(z_1^0), \text{pr}_2(z_1^0))) \& (z_j^{00} \triangleq z_{j+1}^0 \quad \forall j \in \overline{1, n-1}), \quad (3.14)$$

где  $n-1 = |\mathbb{K}|$ . Далее, отметим, что согласно (3.6)

$$z_j^{00} = z_{j+1}^0 \in A_{\alpha^0(j+1)}(\text{pr}_2(z_j^0)) \times M_{\alpha^0(j+1)} \quad \forall j \in \overline{1, n-1}. \quad (3.15)$$

Из (3.9) и (3.15) получаем, в частности, что

$$z_j^{00} \in A_{\alpha_0(j)}(\text{pr}_2(z_j^0)) \times M_{\alpha_0(j)} \quad \forall j \in \overline{1, n-1}. \quad (3.16)$$

В частности, из (3.16) вытекает включение  $z_1^{00} \in A_{\alpha_0(1)}(\text{pr}_2(z_1^0)) \times M_{\alpha_0(1)}$ ,  $\text{pr}_2(z_1^0) = \text{pr}_2(z_0^{00})$ . Поэтому

$$z_1^{00} \in A_{\alpha_0(1)}(\text{pr}_2(z_0^{00})) \times M_{\alpha_0(1)}. \quad (3.17)$$

Если же  $j \in \overline{2, n-1}$ , то  $j-1 \in \overline{1, n-2}$  и согласно (3.14)  $z_{j-1}^{00} = z_{(j-1)+1}^0 = z_j^0$ , а поэтому из (3.16) вытекает включение  $z_j^{00} \in A_{\alpha_0(j)}(\text{pr}_2(z_{j-1}^{00})) \times M_{\alpha_0(j)}$ . Поскольку выбор  $j$  был произвольным, установлено, что  $z_i^{00} \in A_{\alpha_0(i)}(\text{pr}_2(z_{i-1}^{00})) \times M_{\alpha_0(i)} \forall i \in \overline{2, n-1}$ . С учетом (3.17) имеем окончательно, что  $z_i^{00} \in A_{\alpha_0(i)}(\text{pr}_2(z_{i-1}^{00})) \times M_{\alpha_0(i)} \forall i \in \overline{1, n-1}$ . Таким образом (см.(3.14)),

$$(z_0^{00} = (\text{pr}_2(z_1^0), \text{pr}_2(z_1^0))) \& (z_i^{00} \in A_{\alpha_0(i)}(\text{pr}_2(z_{i-1}^{00})) \times M_{\alpha_0(i)} \forall i \in \overline{1, n-1}).$$

Из (2.12) получаем, следовательно, включение

$$(z_i^{00})_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathfrak{Z}(\text{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}, \alpha_0). \quad (3.18)$$

Итак (см.(3.13),(3.18)),  $\alpha_0 \in (\mathbf{I}\text{-bi})[\mathbb{K}]$ :  $(z_i^{00})_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathfrak{Z}(\text{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}, \alpha_0)$ . Из (2.18) имеем

$$v(\text{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}) \leq \mathfrak{C}_{\mathbb{K}}^{(\alpha_0)}((z_i^{00})_{i \in \overline{0, n-1}}). \quad (3.19)$$

При этом согласно (2.16) справедлива цепочка равенств (см.(3.9), (3.14))

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\mathbb{K}}^{(\alpha_0)}((z_i^{00})_{i \in \overline{0, n-1}}) &= \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{g}(\text{pr}_2(z_i^{00}), \text{pr}_1(z_{i+1}^{00})) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{\alpha_0(i)}(z_i^{00}) + \kappa(\text{pr}_2(z_{n-1}^{00})) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{g}(\text{pr}_2(z_i^{00}), \text{pr}_1(z_{i+2}^0)) + \sum_{i=2}^n g_{\alpha^0(i)}(z_i^0) + \kappa(\text{pr}_2(z_n^0)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Если  $i = 0$ , то (см.(3.14))  $\text{pr}_2(z_i^{00}) = \text{pr}_2(z_0^{00}) = \text{pr}_2(z_1^0) = \text{pr}_2(z_{i+1}^0)$ . Если же  $i \in \overline{1, n-2}$ , то  $\text{pr}_2(z_i^{00}) = \text{pr}_2(z_{i+1}^0)$  согласно (3.14). Итак,  $\text{pr}_2(z_i^{00}) = \text{pr}_2(z_{i+1}^0) \forall i \in \overline{0, n-2}$ . С учетом (3.20) получаем, следовательно, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\mathbb{K}}^{(\alpha_0)}((z_i^{00})_{i \in \overline{0, n-1}}) &= \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{g}(\text{pr}_2(z_{i+1}^0), \text{pr}_1(z_{i+2}^0)) + \sum_{i=2}^n g_{\alpha^0(i)}(z_i^0) + \kappa(\text{pr}_2(z_n^0)) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(z_i^0), \text{pr}_1(z_{i+1}^0)) + \sum_{i=2}^n g_{\alpha^0(i)}(z_i^0) + \kappa(\text{pr}_2(z_n^0)). \end{aligned}$$

С учетом (3.8), (3.20) получаем теперь следующее равенство:

$$\mathbb{V}(x, K) = \mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z_1^0)) + g_{\alpha^0(1)}(z_1^0) + \mathfrak{C}_{\mathbb{K}}^{(\alpha_0)}((z_i^0)_{i \in \overline{0, n-1}}), \quad (3.21)$$

причем согласно (2.20) и (3.19)  $\mathbb{V}(\text{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}) \leq \mathfrak{C}_{\mathbb{K}}^{(\alpha_0)}((z_i^0)_{i \in \overline{0, n-1}})$ . Тогда согласно (3.21) имеем неравенство

$$\mathbb{V}(x, K) \geq \mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z_1^0)) + g_{\alpha^0(1)}(z_1^0) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}). \quad (3.22)$$

С учетом (3.7) и (3.22) получаем, что

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})] \leq \mathbb{V}(x, K). \quad (3.23)$$

Выберем теперь индекс

$$q \in \mathbf{I}(K) \quad (3.24)$$

и упорядоченную пару

$$\mathbf{y} \in A_q(x) \times M_q \quad (3.25)$$

так, что при этом справедливо равенство

$$\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(\mathbf{y})) + g_q(\mathbf{y}) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(\mathbf{y}), Q)$$

$$= \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})], \quad (3.26)$$

где  $\mathbf{Q} \triangleq K \setminus \{q\}$ . Поскольку  $n = |K| \in \overline{2, N}$ , то  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{N}$  и

$$|\mathbf{Q}| = n - 1 \in \overline{1, N-1}. \quad (3.27)$$

При этом из (3.25) следует, в частности, что  $\mathbf{y} \in \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ , а тогда  $\text{pr}_2(\mathbf{y}) \in \mathbf{X}$ ; более точно,  $\text{pr}_2(\mathbf{y}) \in M_q$ . Итак,  $\text{pr}_2(\mathbf{y}) \in \mathbf{X}$  и  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{N}$ , причем справедливо (3.27). Тогда из (2.18) и (2.20)

$$\mathbb{V}(\text{pr}_2(\mathbf{y}), \mathbf{Q}) = v(\text{pr}_2(\mathbf{y}), \mathbf{Q}) = \min_{\alpha \in (\mathbf{I-bi})[\mathbf{Q}]} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathfrak{Z}(\text{pr}_2(\mathbf{y}), \mathbf{Q}, \alpha)} \mathfrak{C}_{\mathbf{Q}}^{(\alpha)}((z_i)_{i \in \overline{0, n-1}}) \in [0, \infty[. \quad (3.28)$$

С учетом (3.28) выберем и зафиксируем биекцию

$$\beta \in (\mathbf{I-bi})[\mathbf{Q}], \quad (3.29)$$

а также трассу

$$(w_i)_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathfrak{Z}(\text{pr}_2(\mathbf{y}), \mathbf{Q}, \beta), \quad (3.30)$$

для которых справедливо равенство

$$\mathbb{V}(\text{pr}_2(\mathbf{y}), \mathbf{Q}) = \mathfrak{C}_{\mathbf{Q}}^{(\beta)}((w_i)_{i \in \overline{0, n-1}}). \quad (3.31)$$

Поэтому согласно (2.16), (3.27) и (3.31) справедливо равенство

$$\mathbb{V}(\text{pr}_2(\mathbf{y}), \mathbf{Q}) = \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{g}(\text{pr}_2(w_i), \text{pr}_1(w_{i+1})) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{\beta(i)}(w_i) + \kappa(\text{pr}_2(w_{n-1})). \quad (3.32)$$

Заметим, что согласно (2.9), (3.27) и (3.29)

$$\beta \in (\text{bi})[\mathbf{Q}], \quad (3.33)$$

причем

$$\beta(s) \in \mathbf{I}(\{\beta(l) : l \in \overline{s, n-1}\}) \quad \forall s \in \overline{1, n-1}.$$

Из (2.12), (3.27) и (3.30) вытекает, что  $(w_i)_{i \in \overline{0, n-1}} \in \mathfrak{X}_{n-1}$ , при этом

$$(w_0 = (\text{pr}_2(\mathbf{y}), \text{pr}_2(\mathbf{y}))) \& (w_j \in A_{\beta(j)}(\text{pr}_2(w_{j-1})) \times M_{\beta(j)} \quad \forall j \in \overline{1, n-1}). \quad (3.34)$$

Заметим, что  $j-1 \in \overline{1, n-1} \quad \forall j \in \overline{2, n}$ . Поскольку (см. (3.27), (3.33))  $\beta: \overline{1, n-1} \rightarrow \mathbf{Q}$ , то имеем, что  $\beta(j-1) \in \mathbf{Q} \quad \forall j \in \overline{2, n}$ . Получаем, в частности, что  $\beta(j-1) \in K \quad \forall j \in \overline{2, n}$ . Из (2.8) и (3.24) следует, что  $q \in K$ . Введем в рассмотрение отображение

$$\tilde{\beta}: \overline{1, n} \rightarrow K$$

$$(\tilde{\beta}(1) \triangleq q) \& (\tilde{\beta}(j) \triangleq \beta(j-1) \quad \forall j \in \overline{2, n}). \quad (3.35)$$

Легко видеть, что  $\tilde{\beta}$  — допустимый маршрут, т. е.

$$\tilde{\beta} \in (\mathbf{I-bi})[K]. \quad (3.36)$$

Напомним, что  $j-1 \in \overline{0, n-1} \quad \forall j \in \overline{1, n}$ ; кроме того,  $k-1 \in \overline{1, n-1} \quad \forall k \in \overline{2, n}$ . При этом

$$\overline{1, n} = \{1\} \cup \overline{2, n}, \quad \overline{0, n} = \{0\} \cup \overline{1, n} = \{0\} \cup \{1\} \cup \overline{2, n}.$$

С учетом этого полагаем, что кортеж  $(\tilde{w}_i)_{i \in \overline{0, n}} \in \mathfrak{X}_n$  определяется следующим образом:

$$(\tilde{w}_0 \triangleq (x, x)) \& (\tilde{w}_1 \triangleq \mathbf{y}) \& (\tilde{w}_j \triangleq w_{j-1} \quad \forall j \in \overline{2, n}). \quad (3.37)$$

Напомним, что согласно (3.25) и (3.37)  $\tilde{w}_1 \in A_q(x) \times M_q$ , а потому (см.(3.35), (3.37))

$$\tilde{w}_1 \in A_{\tilde{\beta}(1)}(\text{pr}_2(\tilde{w}_0)) \times M_{\tilde{\beta}(1)}. \quad (3.38)$$

Если  $j \in \overline{2, n}$ , то  $j - 1 \in \overline{1, n - 1}$  и согласно (3.34)  $\tilde{w}_j = w_{j-1} \in A_{\beta(j-1)}(\text{pr}_2(w_{j-2})) \times M_{\beta(j-1)}$ ; из (3.35) имеем теперь, что справедливо включение

$$\tilde{w}_j \in A_{\tilde{\beta}(j)}(\text{pr}_2(w_{j-2})) \times M_{\tilde{\beta}(j)}. \quad (3.39)$$

Если при этом  $j = 2$ , то  $w_{j-2} = w_0 = (\text{pr}_2(\mathbf{y}), \text{pr}_2(\mathbf{y}))$  согласно (2.12) и (3.30), а потому имеем цепочку равенств  $\text{pr}_2(w_{j-2}) = \text{pr}_2(\mathbf{y}) = \text{pr}_2(\tilde{w}_1)$  (см. (3.37)) и согласно (3.39) в данном случае  $\tilde{w}_j = \tilde{w}_2 \in A_{\tilde{\beta}(2)}(\text{pr}_2(\tilde{w}_1)) \times M_{\tilde{\beta}(2)}$ ; как следствие  $\tilde{w}_j \in A_{\tilde{\beta}(j)}(\text{pr}_2(\tilde{w}_{j-1})) \times M_{\tilde{\beta}(j)}$ . Имеем импликацию

$$(j = 2) \Rightarrow (\tilde{w}_j \in A_{\tilde{\beta}(j)}(\text{pr}_2(\tilde{w}_{j-1})) \times M_{\tilde{\beta}(j)}). \quad (3.40)$$

Если же  $j \in \overline{3, n}$ , то  $j - 2 \in \overline{1, n - 2}$  и согласно (3.37)  $\tilde{w}_{j-1} = w_{j-2}$ , поскольку  $j - 1 \in \overline{2, n - 1}$ , а тогда согласно (3.39)  $\tilde{w}_j \in A_{\tilde{\beta}(j)}(\text{pr}_2(\tilde{w}_{j-1})) \times M_{\tilde{\beta}(j)}$ . Итак, установлена следующая импликация:

$$(j \in \overline{3, n}) \Rightarrow (\tilde{w}_j \in A_{\tilde{\beta}(j)}(\text{pr}_2(\tilde{w}_{j-1})) \times M_{\tilde{\beta}(j)}). \quad (3.41)$$

Коль скоро  $j \in \overline{2, n}$ , то  $(j = 2) \vee (j \in \overline{3, n})$ , а тогда из (3.40), (3.41) вытекает, что

$$\tilde{w}_s \in A_{\tilde{\beta}(s)}(\text{pr}_2(\tilde{w}_{s-1})) \times M_{\tilde{\beta}(s)} \quad \forall s \in \overline{2, n}.$$

С учетом (3.38) и последнего соотношения получаем, что

$$\tilde{w}_i \in A_{\tilde{\beta}(i)}(\text{pr}_2(\tilde{w}_{i-1})) \times M_{\tilde{\beta}(i)} \quad \forall i \in \overline{1, n}. \quad (3.42)$$

Поскольку  $|K| = n$ , из (2.12), (3.37) и (3.42) вытекает, что

$$(\tilde{w}_i)_{i \in \overline{0, n}} \in \mathfrak{Z}(x, K, \tilde{\beta}). \quad (3.43)$$

Тогда (см. (3.36), (3.43))  $\tilde{\beta} \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K]$  и  $(\tilde{w}_i)_{i \in \overline{0, n}} \in \mathfrak{Z}(x, K, \tilde{\beta})$ . Из (2.18) и (2.20) следует

$$\mathbb{V}(x, K) \leq \mathfrak{C}_K^{(\tilde{\beta})}((\tilde{w}_i)_{i \in \overline{0, n}}). \quad (3.44)$$

При этом согласно (2.16) и (3.43) справедливо равенство

$$\mathfrak{C}_K^{(\tilde{\beta})}((\tilde{w}_i)_{i \in \overline{0, n}}) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(\tilde{w}_i), \text{pr}_1(\tilde{w}_{i+1})) + \sum_{i=1}^n g_{\tilde{\beta}(i)}(\tilde{w}_i) + \kappa(\text{pr}_2(\tilde{w}_n)). \quad (3.45)$$

Из (3.35), (3.37) и (3.45) вытекает, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_K^{(\tilde{\beta})}((\tilde{w}_i)_{i \in \overline{0, n}}) &= \mathbf{g}(\text{pr}_2(\tilde{w}_0), \text{pr}_1(\tilde{w}_1)) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(\tilde{w}_i), \text{pr}_1(\tilde{w}_{i+1})) \\ &+ \sum_{i=1}^n g_{\tilde{\beta}(i)}(\tilde{w}_i) + \kappa(\text{pr}_2(\tilde{w}_n)) = \mathbf{g}(x, \text{pr}_1(\mathbf{y})) + g_{\tilde{\beta}(1)}(\tilde{w}_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(\tilde{w}_i), \text{pr}_1(\tilde{w}_{i+1})) \\ &+ \sum_{i=2}^n g_{\tilde{\beta}(i)}(\tilde{w}_i) + \kappa(\text{pr}_2(\tilde{w}_n)) = \mathbf{g}(x, \text{pr}_1(\mathbf{y})) + g_q(\mathbf{y}) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(\tilde{w}_i), \text{pr}_1(\tilde{w}_{i+1})) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} g_{\beta(i)}(w_i) + \kappa(\text{pr}_2(w_{n-1})). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Рассмотрим представление величины  $\sum_{i=1}^{n-1} g(\text{pr}_2(\tilde{w}_i), \text{pr}_1(\tilde{w}_{i+1})) \in [0, \infty[$ . Для этого заметим, что согласно (3.37)  $\mathbf{g}(\text{pr}_2(\tilde{w}_1), \text{pr}_1(\tilde{w}_2)) = \mathbf{g}(\text{pr}_2(\mathbf{y}), \text{pr}_1(w_1))$ ; однако из (3.30) вытекает, что  $w_0 = (\text{pr}_2(\mathbf{y}), \text{pr}_2(\mathbf{y}))$  (см.(2.12)), а тогда

$$\mathbf{g}(\text{pr}_2(\tilde{w}_1), \text{pr}_1(\tilde{w}_2)) = \mathbf{g}(\text{pr}_2(w_0), \text{pr}_1(w_1)). \quad (3.47)$$

Если же  $j \in \overline{2, n-1}$ , то  $\text{pr}_2(\tilde{w}_j) = \text{pr}_2(w_{j-1})$ ; кроме того,  $j+1 \in \overline{3, n}$  и согласно (3.37)  $\text{pr}_1(\tilde{w}_{j+1}) = \text{pr}_1(w_j)$ , а тогда  $\mathbf{g}(\text{pr}_2(\tilde{w}_j), \text{pr}_1(\tilde{w}_{j+1})) = \mathbf{g}(\text{pr}_2(w_{j-1}), \text{pr}_1(w_j))$ . С учетом (3.47) имеем, следовательно, теперь, что  $\mathbf{g}(\text{pr}_2(\tilde{w}_j), \text{pr}_1(\tilde{w}_{j+1})) = \mathbf{g}(\text{pr}_2(w_{j-1}), \text{pr}_1(w_j)) \forall j \in \overline{1, n-1}$ . Поэтому справедливо очевидное равенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(\tilde{w}_i), \text{pr}_1(\tilde{w}_{i+1})) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(w_{i-1}), \text{pr}_1(w_i)) = \sum_{i=0}^{n-2} g(\text{pr}_2(w_i), \text{pr}_1(w_{i+1})). \quad (3.48)$$

Тогда из (3.32), (3.46) и (3.48) получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_K^{(\tilde{\beta})}((\tilde{w}_i)_{i \in \overline{0, n}}) &= \mathbf{g}(x, \text{pr}_1(\mathbf{y})) + g_q(\mathbf{y}) + \sum_{i=0}^{n-2} \mathbf{g}(\text{pr}_2(w_i), \text{pr}_1(w_{i+1})) \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} g_{\beta(i)}(w_i) + \kappa(\text{pr}_2(w_{n-1})) = \mathbf{g}(x, \text{pr}_1(\mathbf{y})) + g_q(\mathbf{y}) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(\mathbf{y}), \mathbf{Q}). \end{aligned}$$

С учетом (3.26) имеем, стало быть, равенство

$$\mathfrak{C}_K^{(\tilde{\beta})}((\tilde{w}_i)_{i \in \overline{0, n}}) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})].$$

Используя (3.44) и последнее равенство, получаем оценку

$$\mathbb{V}(x, K) \leq \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})].$$

С учетом (3.23) получаем теперь очевидное равенство

$$\mathbb{V}(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})]. \quad (3.49)$$

Итак (см.(3.49)), истинна следующая импликация:

$$(n \in \overline{2, N}) \Rightarrow (\mathbb{V}(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + \mathbb{V}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})]).$$

С учетом (3.2) получаем, что (3.1) выполняется во всех возможных случаях.  $\square$

#### 4. Усеченная реализация функции Беллмана

Построение оптимального алгоритма на основе уравнения (3.1) сопряжено с трудностями вычислительного характера, связанными прежде всего с насчитыванием массива значений функции Беллмана. В [11–13] предложена конструкция реализации МДП, предусматривающая лишь частичное насчитывание массива значений функции Беллмана. Эта конструкция адаптируется в настоящем разделе к процедуре МДП разд. 2, 3. Напомним некоторые понятия [11–13];  $\mathfrak{Y} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} ((\text{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\text{pr}_2(z) \in K))\}$  интерпретируем как множество существенных списков заданий (существенность понимается в смысле соблюдения условий предшествования). Введем также множества

$$\mathfrak{Y}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{Y} \mid s = |K|\} \forall s \in \overline{1, N}.$$

Тогда при  $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$  имеем очевидное равенство  $\mathfrak{Y}_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1\}$ . Кроме того,  $K \setminus \{k\} \in \mathfrak{Y}_{s-1} \forall s \in \overline{2, N} \forall K \in \mathfrak{Y}_s \forall k \in \mathbf{I}(K)$ . В пространстве позиций  $\mathbf{X} \times \mathbf{N}$  конструируем множества, называемые слоями. Полагая

$$\mathbb{M} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus \mathbf{K}_1} M_i,$$

определяем начальный слой  $D_0 \triangleq \mathbb{M} \times \{\emptyset\} = \{(x, \emptyset) : x \in \mathbb{M}\}$ . Кроме того, полагаем  $D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1, N})\}$  (одноэлементное множество).

Для построения промежуточных слоев введем при  $s \in \overline{1, N-1}$  и  $K \in \mathfrak{Y}_s$  множество

$$J_s(K) \triangleq \{i \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{i\} \cup K \in \mathfrak{Y}_{s+1}\}. \quad (4.1)$$

В терминах множеств (4.1) конструируем промежуточные слои, полагая, что

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathfrak{Y}_s} \{(x, K) : x \in \bigcup_{j \in J_s(K)} M_j\}. \quad (4.2)$$

**З а м е ч а н и е.** В связи с (4.2) отметим одно соображение, связанное с возможным вариантом распараллеливания процедуры построения усеченного массива значений функции Беллмана, полагая при  $s \in \overline{1, N-1}$  и  $K \in \mathfrak{Y}_s$ , что

$$\mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in J_s(K)} M_j,$$

и рассматривая множество  $\mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x, K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\}$  в качестве клетки пространства позиций. Тогда клетки  $\mathbb{D}_s[K]$ ,  $K \in \mathfrak{Y}_s$ , образуют в совокупности разбиение слоя  $D_s$ . Это обстоятельство можно использовать, прибегая к разбиению семейства  $\mathfrak{Y}_s$  в сумму непустых подсемейств  $\mathfrak{Y}_s^{(1)}, \dots, \mathfrak{Y}_s^{(\mathbf{n}_s)}$ , где  $\mathbf{n}_s \in \mathbb{N}$  (реально  $\mathbf{n}_s \in \overline{1, N}$ ) интерпретируется как число процессоров, задействованных при построении  $s$ -го слоя функции Беллмана. При  $l \in \overline{1, \mathbf{n}_s}$  на каждое множество  $K \in \mathfrak{Y}_s^{(l)}$  “навешиваются” состояния из  $\mathcal{M}_s[K]$ , образуя соответствующую клетку. Процессору при этом может выделяться для проведения расчетов несколько таких клеток.  $\square$

Напомним в связи с упомянутыми построениями следующие положения [11, §4.9]. Так,  $\overline{1, N} \in \mathfrak{Y}_N$  и  $D_s \neq \emptyset \forall s \in \overline{0, N}$ . Следовательно,  $D_0, D_1, \dots, D_N$  — суть непустые п/м  $\mathbf{X} \times \mathbf{N}$ . При этом [11, с.178]  $\forall s \in \overline{1, N} \forall (x, K) \in D_s \forall k \in \mathbf{I}(K) \forall y \in M_k$

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1}. \quad (4.3)$$

Напомним, что  $D_s, s \in \overline{0, N}$ , суть непустые п/м  $\mathbf{X} \times \mathbf{N}$ , а поэтому можно определить соответствующие сужения функции  $\mathbb{V}$ . Итак, полагаем, что

$$V_s \triangleq (\mathbb{V}(x, K))_{(x, K) \in D_s} \forall s \in \overline{0, N}. \quad (4.4)$$

Согласно (4.4) при  $l \in \overline{0, N}$  функция  $V_l$  определяется как  $(x, K) \mapsto \mathbb{V}(x, K) : D_l \rightarrow [0, \infty[$ ; иными словами,  $V_l(x, K) = \mathbb{V}(x, K)$  при  $(x, K) \in D_l$ . В частности,  $V_N$  определяется своим единственным значением  $\mathbb{V}(x^0, \overline{1, N}) = V$  (см.(2.19), (2.20)), т. е.

$$V_N(x^0, \overline{1, N}) = V. \quad (4.5)$$

С учетом (4.3) получаем при  $s \in \overline{1, N}$  и  $(x, K) \in D_s$ , что определены значения  $V_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) \in [0, \infty[$ ,  $k \in \mathbf{I}(K)$ ,  $y \in M_k$ ; как следствие определена величина

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + V_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})] \in [0, \infty[.$$

**Предложение.** Если  $s \in \overline{1, N}$  и  $(x, K) \in D_s$ , то справедливо равенство

$$V_s(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + V_{s-1}(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})].$$

Доказательство следует из (4.4) и теоремы.  $\square$

Предложение определяет конкретный способ последовательного построения функций  $V_0, V_1, \dots, V_N$ . В самом деле, функция  $V_0$  известна: правило  $(V_0(x, \emptyset) = \kappa(x) \forall x \in \mathbb{M})$  исчерпывающим образом определяет  $V_0$ . Пусть вообще  $m \in \overline{0, N-1}$  и функции  $V_i, i \in \overline{0, m}$ , уже построены. В частности, известна функция  $V_m: D_m \rightarrow [0, \infty[$ . Тогда, следуя предложению, определяем функцию  $V_{m+1}: D_{m+1} \rightarrow [0, \infty[$  посредством правила:  $\forall (x, K) \in D_{m+1}$

$$V_{m+1}(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in A_k(x) \times M_k} [\mathbf{g}(x, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + V_m(\text{pr}_2(z), K \setminus \{k\})]; \quad (4.6)$$

(4.6) — регулярный шаг процедуры; после исполнения  $N$  шагов на основе (4.6) будут построены все функции  $V_0, V_1, \dots, V_N$ . В частности, будет определен глобальный экстремум  $V$  (4.5).

## 5. Построение оптимальной пары маршрут-трасса

Рассмотрим процедуру построения оптимального решения на основе функций  $V_0, V_1, \dots, V_N$ , которые здесь предполагаются известными (предполагается, что информацией о значениях  $V$  в точках, не принадлежащих ни одному из множеств  $D_0, D_1, \dots, D_N$ , мы не располагаем). Пусть  $\mathbf{z}_0 \triangleq (x^0, x^0)$ . Дальнейшее построение трассы и маршрута осуществляется по рекурсивной процедуре. Отметим, что согласно (4.5) и предложению

$$V = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{z \in A_k(x^0) \times M_k} [\mathbf{g}(x^0, \text{pr}_1(z)) + g_k(z) + V_{N-1}(\text{pr}_2(z), \overline{1, N} \setminus \{k\})]. \quad (5.1)$$

С учетом (5.1) выбираем индекс  $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ , а также упорядоченную пару  $\mathbf{z}_1 \in A_{\mathbf{i}_1}(x^0) \times M_{\mathbf{i}_1}$ , для которых справедливо равенство

$$V = \mathbf{g}(x^0, \text{pr}_1(\mathbf{z}_1)) + g_{\mathbf{i}_1}(\mathbf{z}_1) + V_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}). \quad (5.2)$$

Заметим, что по определению  $\mathbf{z}_0$  имеем включение  $\mathbf{z}_1 \in A_{\mathbf{i}_1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_0)) \times M_{\mathbf{i}_1}$ . Кроме того, из (5.2) следует по определению  $\mathbf{z}_0$  равенство

$$V = \mathbf{g}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_0), \text{pr}_1(\mathbf{z}_1)) + g_{\mathbf{i}_1}(\mathbf{z}_1) + V_{N-1}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}).$$

Подчеркнем, что согласно (4.3)  $(\text{pr}_2(\mathbf{z}_1), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \in D_{N-1}$ . Заметим также, что  $(\mathbf{z}_i)_{i \in \overline{0, 1}} \in \mathfrak{X}_1$ . Пусть теперь вообще  $r \in \overline{1, N}$  и уже построены кортежи

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, r}}: \overline{1, r} \rightarrow \overline{1, N}, \quad (5.3)$$

$$(\mathbf{z}_j)_{j \in \overline{0, r}} \in \mathfrak{X}_r, \quad (5.4)$$

обладающие следующими свойствами:

- 1')  $\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, j-1}\}) \forall j \in \overline{1, r}$ ;
- 2')  $(\mathbf{z}_0 = (x^0, x^0)) \& (\mathbf{z}_j \in A_{\mathbf{i}_j}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1})) \times M_{\mathbf{i}_j} \forall j \in \overline{1, r})$ ;
- 3')  $(\text{pr}_2(\mathbf{z}_j), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, j}\}) \in D_{N-j} \forall j \in \overline{1, r}$ ;
- 4')  $V = \sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_j), \text{pr}_1(\mathbf{z}_{j+1})) + \sum_{j=1}^r g_{\mathbf{i}_j}(\mathbf{z}_j) + V_{N-r}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_r), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, r}\})$ .

Заметим, что при  $r = 1$  условия 1')–4') выполнены. Вернемся к общему случаю кортежей (5.3), (5.4) со свойствами 1')–4'). Возможен один из следующих двух случаев:  $(r = N) \vee (r \neq N)$ . Каждый из этих случаев рассмотрим отдельно.

а) Пусть сначала  $r = N$  (финал процедуры). Тогда (5.3), (5.4) превращаются в соотношения  $(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, N}}: \overline{1, N} \rightarrow \overline{1, N}$ ,  $(\mathbf{z}_j)_{j \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}_N$ . Из 1') имеем в данном случае, что  $\mathbf{i}_j \in \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, j-1}\} \forall j \in \overline{1, N}$ . Это означает, что  $\forall j_1 \in \overline{1, N} \forall j_2 \in \overline{1, N}$

$$(j_2 < j_1) \Rightarrow (\mathbf{i}_{j_1} \neq \mathbf{i}_{j_2}). \quad (5.5)$$

Как следствие имеем из (5.5), что  $\mathbf{i}_p \neq \mathbf{i}_q \forall p \in \overline{1, N} \forall q \in \overline{1, N} \setminus \{p\}$ . Получили очевидное свойство инъективности отображения

$$\mathbf{r} \triangleq (\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, N}},$$

а потому  $\mathbf{r} \in (\text{bi})[\overline{1, N}]$ , т. е.  $\mathbf{r} \in \mathbb{P}$ . Из 1') вытекает, что

$$\mathbf{r}(j) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{r}(k): k \in \overline{1, j-1}\}) \forall j \in \overline{1, N}. \quad (5.6)$$

Вместе с тем в силу биективности  $\mathbf{r}$  справедливы равенства  $\{\mathbf{r}(k): k \in \overline{j, N}\} = \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{r}(k): k \in \overline{1, j-1}\} \forall j \in \overline{1, N}$ . Поэтому согласно (5.6) получаем систему включений  $\mathbf{r}(j) \in \mathbf{I}(\{\mathbf{r}(k): k \in \overline{j, N}\}) \forall j \in \overline{1, N}$ . С учетом (2.9) получаем включение  $\mathbf{r} \in (\mathbf{I} - \text{bi})[\overline{1, N}]$ , а тогда из (2.10) имеем включение

$$\mathbf{r} \in \mathbb{A}. \quad (5.7)$$

Далее отметим, что кортеж  $(\mathbf{z}_j)_{j \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}_N$  обладает свойством 2'), т. е.

$$(\mathbf{z}_0 = (x^0, x^0)) \& (\mathbf{z}_j \in \mathbf{A}_{\mathbf{r}(j)}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1})) \times M_{\mathbf{r}(j)} \forall j \in \overline{1, N}).$$

С учетом (2.3) получаем теперь следующее свойство:

$$(\mathbf{z}_j)_{j \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{Z}[\mathbf{r}]. \quad (5.8)$$

Из (2.4), (5.7) и (5.8) вытекает, что  $(\mathbf{r}, (\mathbf{z}_j)_{j \in \overline{0, N}}) \in \mathbf{S}$ . При этом  $\{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, N}\} = \overline{1, N}$ , а потому (в рассматриваемом сейчас случае  $\mathbf{r} = N$ ) с учетом (2.20) имеем, что

$$V = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{g}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_j), \text{pr}_1(\mathbf{z}_{j+1})) + \sum_{j=1}^N g_{\mathbf{r}(j)}(\mathbf{z}_j) + \kappa(\text{pr}_2(\mathbf{z}_N)).$$

Используя последнее соотношение и (2.5) (см. также (5.7), (5.8)), получаем равенство

$$\mathfrak{C}_{\mathbf{r}}((\mathbf{z}_i)_{i \in \overline{0, N}}) = V. \quad (5.9)$$

Из (5.7), (5.8) и (5.9) следует, что оптимальное решение задачи (2.6) построено. Итак, случай а) отвечает завершению построения оптимального решения основной задачи.

в) Пусть  $r \neq N$ , т. е.  $r \in \overline{1, N-1}$ . С учетом 3') имеем, в частности, что

$$(\text{pr}_2(\mathbf{z}_r), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, r}\}) \in D_{N-r}. \quad (5.10)$$

Заметим, что  $N-r \in \overline{1, N-1}$ , а тогда согласно (4.3) и (5.10)

$$(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, r}\}) \setminus \{l\}) \in D_{N-(r+1)} \forall l \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, r}\}) \forall y \in M_l.$$

При этом  $N-(r+1) = (N-r) - 1 \in \overline{0, N-2}$ . С учетом (4.4) и (5.10) корректно определяется

$$V_{N-(r+1)}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, r}\}) \setminus \{l\}) = \mathbb{V}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, r}\}) \setminus \{l\}) \in [0, \infty[$$

$$\forall l \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k: k \in \overline{1, r}\}) \forall y \in M_l.$$

Напомним, что согласно предложению и (5.10) справедливо следующее равенство:

$$V_{N-r}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_r), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r}\}) = \min_{l \in \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r}\}} \min_{z \in A_l(\text{pr}_2(\mathbf{z}_r)) \times M_l} [\mathbf{g}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_r), \text{pr}_1(z)) + g_l(z) + V_{N-(r+1)}(\text{pr}_2(z), (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r}\}) \setminus \{l\})]. \quad (5.11)$$

С учетом (5.11) выбираем индекс

$$\mathbf{i}_{r+1} \in \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r}\} \quad (5.12)$$

и упорядоченную пару

$$\mathbf{z}_{r+1} \in A_{\mathbf{i}_{r+1}}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_r)) \times M_{\mathbf{i}_{r+1}} \quad (5.13)$$

так, что при этом реализуется цепочка равенств

$$V_{N-r}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_r), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r}\}) = \mathbf{g}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_r), \text{pr}_1(\mathbf{z}_{r+1})) + g_{\mathbf{i}_{r+1}}(\mathbf{z}_{r+1}) + V_{N-(r+1)}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_{r+1}), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r+1}\}). \quad (5.14)$$

Теперь (см.(5.3), (5.4)) мы располагаем следующей парой кортежей:

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, r+1}} : \overline{1, r+1} \rightarrow \overline{1, N}, \quad (5.15)$$

$$(\mathbf{z}_j)_{j \in \overline{0, r+1}} \in \mathfrak{X}_{r+1}. \quad (5.16)$$

Из (5.12) следует, в частности, что  $\mathbf{i}_{r+1} \in \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r}\}$ . Из 1') и (5.12) вытекает, что справедливо следующее свойство:

$$1'') \mathbf{i}_j \in \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\} \quad \forall j \in \overline{1, r+1}.$$

Далее, из 2') и (5.13) следует, что справедливо свойство

$$2'') (\mathbf{z}_0 = (x^0, x^0)) \& (\mathbf{z}_j \in A_{\mathbf{i}_j}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_{j-1})) \times M_{\mathbf{i}_j} \quad \forall j \in \overline{1, r+1}).$$

Из (4.3), (5.10), (5.12) и (5.13) следует, что  $(\text{pr}_2(\mathbf{z}_{r+1}), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r+1}\}) \in D_{N-(r+1)}$ . Поэтому с учетом 3') получаем очевидное теперь свойство

$$3'') (\text{pr}_2(\mathbf{z}_j), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j}\}) \in D_{N-j} \quad \forall j \in \overline{1, r+1}.$$

Наконец, из 4') и (5.14) вытекает равенство

$$4'') V = \sum_{j=0}^r \mathbf{g}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_j), \text{pr}_1(\mathbf{z}_{j+1})) + \sum_{j=1}^{r+1} g_{\mathbf{i}_j}(\mathbf{z}_j) + V_{N-(r+1)}(\text{pr}_2(\mathbf{z}_{r+1}), \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r+1}\}).$$

Итак, в рассматриваемом сейчас случае (т.е. при  $r \neq N$ ) каждый из кортежей (5.3), (5.4) удалось продолжить на один шаг (см.(5.15), (5.16)) так, что при этом были сохранены все основные свойства исходных кортежей: система 1') – 4') преобразовалась в 1'') – 4'').

После конечного числа (регулярных) шагов, отвечающих случаю в), мы придем к финальной ситуации случая а), т.е. к построению оптимального решения.

## 6. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим примеры решения основной задачи (2.6), полагая далее  $\mathbf{X} \triangleq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ( $\mathbf{X}$  — плоскость). Будем конструировать перемещения (1.1) по множествам, заданным на плоскости. Полагаем, что  $x^0 \triangleq (0, 0)$  (нулевой вектор),  $N = 27$ . Таким образом рассматривается задача о посещении множеств  $M_1, \dots, M_{27}$ , которые будут определены ниже.

Полагаем, что функция  $\mathbf{g}$  определяется евклидовым расстоянием, а функция  $\kappa$  есть евклидова норма (расстояние до нуля), обозначаемая ниже через  $\|\cdot\|$ . Полагаем, что (многозначные) отображения  $A_1, \dots, A_{27}$  определяются следующими выражениями: при  $i \in \overline{1, 27}$  и  $x \in \mathbf{X}$

$$A_i(x) \triangleq \{y \in M_i \mid \mathbf{g}(x, y) \leq \min_{z \in M_i} \mathbf{g}(x, z) + \varepsilon\} \quad \forall x \in \mathbf{X}; \quad (6.1)$$

здесь  $\varepsilon \in [0, \infty[$ . Значение  $\varepsilon$  является допуском на глубину просмотра целевого множества при поиске точки входа с целью последующего выполнения внутренних работ. Итак, при  $i \in \overline{1, N}$  попадание на множество  $M_i$  из точки  $x \in \mathbf{X}$  допускается только через  $A_i(x)$ .

Как уже отмечалось (см. (2.5)), используется аддитивный способ агрегирования затрат, включая стоимости внутренних работ. Эти стоимости определяются следующим образом.

Предполагается, что упорядоченной паре  $x = (x_1, x_2) \in M_i \times M_i$ , где  $i \in \overline{1, N}$ , сопоставляется величина

$$g_i(x) \triangleq \|x_1 - \mathbf{m}_i\| + \|\mathbf{m}_i - x_2\|,$$

где  $\mathbf{m}_i \in \mathbf{X}$  — фиксированная точка, определяющая цель исполнителя во время работы на  $M_i$ . Можно полагать при этом, что точки  $M_i$  — суть входы-выходы в некоторое помещение  $\Omega_i$ , для которого  $\mathbf{m}_i \in \Omega_i$ ; при этом  $\mathbf{m}_i$  характеризует место исполнения работы, связанной с  $M_i$ . На этапах перемещений  $x_1 \rightarrow \mathbf{m}_i$ ,  $\mathbf{m}_i \rightarrow x_2$  исполнитель может, в частности, испытывать воздействие агрессивной среды, степень которого и отражена посредством  $g_i(x)$ . Так, в случае перемещения в помещении АЭС речь может идти о дозе облучения, которая суммируется с дозами, полученными исполнителем на этапе внешних перемещений (влияние фона) и работ в других помещениях. Следуя правилу (2.5) в данном случае, приходим к выражениям

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i \in \overline{0, N}}) &= \sum_{i=0}^{N-1} \|\text{pr}_2(z_j) - \text{pr}_1(z_{j+1})\| \\ &+ \sum_{i=1}^N (\|\text{pr}_1(z_i) - \mathbf{m}_i\| + \|\mathbf{m}_i - \text{pr}_2(z_i)\|) + \|\text{pr}_2(z_N) - x_0\| \quad \forall (z_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}_N. \end{aligned}$$

Данная упрощенная версия алгоритма, рассматриваемого в статье, была реализована в виде программы на языке C++ (был использован пакет CodeGear C++ Builder XE) для ПЭВМ, работающей под управлением операционной системы Windows (Windows XP, Vista или Windows 7). Вычислительная часть программы выполняется в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления маршрута и трассы, увеличения отдельных участков графика, а также его сохранения в графическом файле формата bmp.

Использование множеств на плоскости в вычислительном эксперименте продиктовано желанием обеспечить наглядность представления результатов. Будем рассматривать множества следующего вида: на окружности задана равномерная “сетка” из 40 точек, их отсчет ведется от точки на окружности с нулевой угловой координатой в направлении по часовой стрелке. Таким образом, каждое множество  $M_i$  однозначно представляется в виде пары  $(O_i, R_i)$ , где  $O_i$  — координаты центра окружности, а  $R_i$  — ее радиус.

Вышеупомянутые точки  $\mathbf{m}_i$ ,  $i \in \overline{1, N}$ , посещения внутри целевых множеств, т. е. точки, в которые осуществляется переход из элементов множеств, играющих роль “входов”, и из которых производится перемещение в точки множеств, играющие роль “выходов”, задаются следующим образом. Для каждой окружности, формирующей целевое множество  $M_i$ ,  $i \in \overline{1, N}$ ,

точка  $\mathbf{m}_i$  расположена на горизонтальной линии, проходящей через центр окружности  $O_i$ , и находится на расстоянии 0.5 радиуса левее ее центра. Пусть

$$\begin{aligned} O_1 &= (20, 0); O_2 = (50, 0); O_3 = (85, 0); O_4 = (0, -25); O_5 = (0, -60); \\ O_6 &= (0, -85); O_7 = (-15, 0); O_8 = (-40, 0); O_9 = (-75, 0); O_{10} = (0, 22); \\ O_{11} &= (0, 50); O_{12} = (0, 80); O_{13} = (30, 40); O_{14} = (30, 80); O_{15} = (80, 80); \\ O_{16} &= (70, 40); O_{17} = (50, -40); O_{18} = (30, -60); O_{19} = (80, -40); \\ O_{20} &= (65, -80); O_{21} = (-30, -25); O_{22} = (-35, -70); O_{23} = (-70, -40); \\ O_{24} &= (-70, -80); O_{25} = (-30, 40); O_{26} = (-75, 50); O_{27} = (-50, 75). \end{aligned}$$

Пусть радиусы окружностей определяются как

$$\begin{aligned} R_1 &= R_6 = R_7 = R_{10} = R_{21} = 8; \\ R_3 &= R_{12} = R_{14} = R_{17} = R_{24} = R_{26} = 10; \\ R_5 &= R_8 = R_{11} = R_{15} = R_{18} = R_{19} = R_{23} = R_{27} = 12; \\ R_2 &= R_4 = R_9 = R_{13} = R_{16} = R_{20} = R_{22} = R_{25} = 15. \end{aligned}$$

Условия предшествования заданы в виде 25 пар индексов  $(p_i, q_i)$ ,  $i \in \overline{1, 25}$ . При  $i \in \overline{1, 25}$  множество с индексом  $p_i$  должно посещаться раньше множества с индексом  $q_i$ . Тогда  $\mathbf{K} = \{(p_i, q_i) : i \in \overline{1, 25}\}$ . Итак, пусть вышеупомянутые пары имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, q_1 = 10; p_2 = 12, q_2 = 2; p_3 = 2, q_3 = 13; p_4 = 13, q_4 = 15; \\ p_5 &= 6, q_5 = 16; p_6 = 15, q_6 = 16; p_7 = 18, q_7 = 27; p_8 = 9, q_8 = 27; \\ p_9 &= 10, q_9 = 9; p_{10} = 11, q_{10} = 19; p_{11} = 20, q_{11} = 19; p_{12} = 25, q_{12} = 26; \\ p_{13} &= 23, q_{13} = 22; p_{14} = 21, q_{14} = 20; p_{15} = 24, q_{15} = 22; \\ p_{16} &= 14, q_{16} = 16; p_{17} = 7, q_{17} = 10; p_{18} = 8, q_{18} = 2; p_{19} = 1, q_{19} = 9; \\ p_{20} &= 14, q_{20} = 26; p_{21} = 2, q_{21} = 27; p_{22} = 3, q_{22} = 6; p_{23} = 3, q_{23} = 19; \\ p_{24} &= 18, q_{24} = 17; p_{25} = 14, q_{25} = 25. \end{aligned}$$

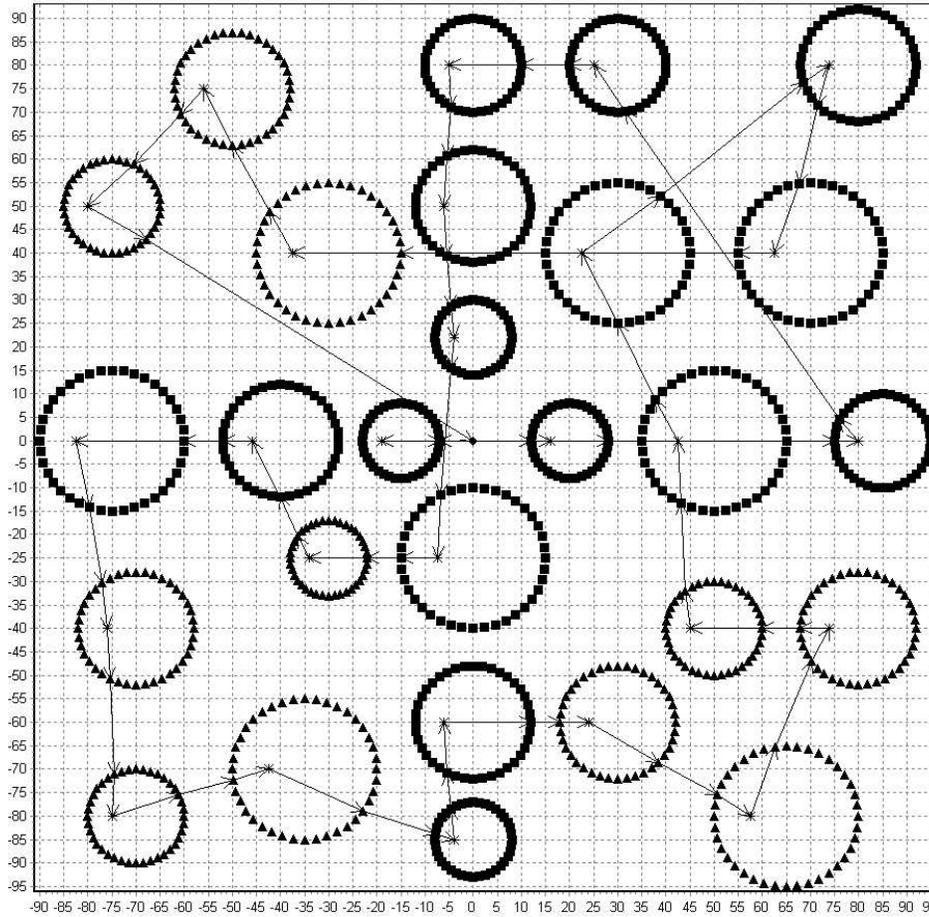
Вычислительный эксперимент проводился на портативном компьютере notebook с центральным процессором Intel Core2Duo T7700 объемом ОЗУ 3 гБ, с установленной операционной системой Windows Vista Business SP2.

Сначала рассмотрим решение задачи в случае, когда  $A_i(x) = M_i \quad \forall i \in \overline{1, 27} \quad \forall x \in \mathbf{X}$ . Итак, отображения  $A_1, \dots, A_{27}$  постоянны и соответствуют фиксированным изначально целевым множествам. Были получены следующие результаты.

Величина совокупных затрат:  $V=1223.93$ .

Маршрут и трасса:

$$\begin{aligned} x_0 &= (0, 0) \Rightarrow (-7, 0) \in M_7 \rightarrow \mathbf{m}_7 = (-19, 0) \rightarrow (-7, 0) \in M_7 \\ &\Rightarrow (12, 0) \in M_1 \rightarrow \mathbf{m}_1 = (16, 0) \rightarrow (28, 0) \in M_1 \\ &\Rightarrow (75, 0) \in M_3 \rightarrow \mathbf{m}_3 = (80, 0) \rightarrow (76.09, 4.54) \in M_3 \\ &\Rightarrow (31.56, 70.12) \in M_{14} \rightarrow \mathbf{m}_{14} = (25, 80) \rightarrow (20, 8) \in M_{14} \\ &\Rightarrow (10, 8) \in M_{12} \rightarrow \mathbf{m}_{12} = (-5, 8) \rightarrow (-4.54, 71.09) \in M_{12} \\ &\Rightarrow (-5.45, 60.69) \in M_{11} \rightarrow \mathbf{m}_{11} = (-6, 50) \rightarrow (-5.45, 39.31) \in M_{11} \\ &\Rightarrow (-4.7, 28.47) \in M_{10} \rightarrow \mathbf{m}_{10} = (-4, 22) \rightarrow (-4.7, 15.53) \in M_{10} \\ &\Rightarrow (-6.81, -11.63) \in M_4 \rightarrow \mathbf{m}_4 = (-7.5, -25) \rightarrow (-15, -25) \in M_4 \\ &\Rightarrow (-22, -25) \in M_{21} \rightarrow \mathbf{m}_{21} = (-34, -25) \rightarrow (-36.47, -20.3) \in M_{21} \\ &\Rightarrow (-40, -12) \in M_8 \rightarrow \mathbf{m}_8 = (-46, 0) \rightarrow (-52, -0) \in M_8 \\ &\Rightarrow (-60, 0) \in M_9 \rightarrow \mathbf{m}_9 = (-82.5, 0) \rightarrow (-79.64, -14.27) \in M_9 \\ &\Rightarrow (-77.05, -30.29) \in M_{23} \rightarrow \mathbf{m}_{23} = (-76, -40) \rightarrow (-75.45, -50.69) \in M_{23} \\ &\Rightarrow (-74.54, -71.09) \in M_{24} \rightarrow \mathbf{m}_{24} = (-75, -80) \rightarrow (-61.09, -75.46) \in M_{24} \\ &\Rightarrow (-49.82, -72.35) \in M_{22} \rightarrow \mathbf{m}_{22} = (-42.5, -70) \rightarrow (-22.86, -78.82) \in M_{22} \\ &\Rightarrow (-7.9, -83.75) \in M_6 \rightarrow \mathbf{m}_6 = (-4, -85) \rightarrow (-4.7, -78.53) \in M_6 \\ &\Rightarrow (-5.45, -70.69) \in M_5 \rightarrow \mathbf{m}_5 = (-6, -60) \rightarrow (12, -60) \in M_5 \end{aligned}$$



Маршрут и трасса обхода множеств в случае постоянных многозначных отображений.

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (18, -6) \in M_{18} \rightarrow \mathbf{m}_{18} = (24, -60) \rightarrow (38.49, -68.49) \in M_{18} \\
 &\Rightarrow (50.73, -75.36) \in M_{20} \rightarrow \mathbf{m}_{20} = (57.5, -80) \rightarrow (62.65, -65.18) \in M_{20} \\
 &\Rightarrow (70.29, -47.05) \in M_{19} \rightarrow \mathbf{m}_{19} = (74, -40) \rightarrow (68, -40) \in M_{19} \\
 &\Rightarrow (60, -40) \in M_{17} \rightarrow \mathbf{m}_{17} = (45, -40) \rightarrow (44.12, -31.91) \in M_{17} \\
 &\Rightarrow (43.19, -13.37) \in M_2 \rightarrow \mathbf{m}_2 = (42.5, 0) \rightarrow (37.86, 8.82) \in M_2 \\
 &\Rightarrow (30, 25) \in M_{13} \rightarrow \mathbf{m}_{13} = (22.5, 40) \rightarrow (38.82, 52.14) \in M_{13} \\
 &\Rightarrow (68.59, 76.29) \in M_{15} \rightarrow \mathbf{m}_{15} = (74, 80) \rightarrow (71.51, 71.51) \in M_{15} \\
 &\Rightarrow (67.65, 54.82) \in M_{16} \rightarrow \mathbf{m}_{16} = (62.5, 40) \rightarrow (55, 40) \in M_{16} \\
 &\Rightarrow (-15, 40) \in M_{25} \rightarrow \mathbf{m}_{25} = (-37.5, 40) \rightarrow (-42.14, 48.82) \in M_{25} \\
 &\Rightarrow (-50, 63) \in M_{27} \rightarrow \mathbf{m}_{27} = (-56, 75) \rightarrow (-60.69, 69.55) \in M_{27} \\
 &\Rightarrow (-70.46, 58.91) \in M_{26} \rightarrow \mathbf{m}_{26} = (-80, 50) \rightarrow (-67.93, 42.93) \in M_{26} \Rightarrow x_0 = (0, 0);
 \end{aligned}$$

здесь значок  $\Rightarrow$  соответствует перемещениям между множествами, а символ  $\rightarrow$  характеризует перемещение к пункту совершения внутренних работ из точки “входа” и затем к точке “выхода” после того, как работы на множестве будут выполнены.

Время счета составило 18 ч. 10 мин. 33 с.

График маршрута и трассы приведен на рисунке.

Перейдем теперь к решению задачи обхода сечений многозначных отображений вида (6.1). Будем исследовать при этом зависимость результата (величины затрат) и времени счета от значения коэффициента  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Проведя вычислительный эксперимент, получаем, что при  $\varepsilon=10$ ,  $\varepsilon=5$ , а также при  $\varepsilon=2$  величина совокупных затрат  $V$  по-прежнему равна 1223.93, а маршрут и трасса обхода сечений многозначных отображений (6.1) полностью идентичны результатам, приведенным выше и

полученным с применением алгоритма последовательного обхода множеств, при котором поиск очередного пункта перехода на множество производится среди всех его элементов. Времена счета программы получились следующие:

- 1) при  $\varepsilon=10$ : 6 час. 7 мин. 2 с;
- 2) при  $\varepsilon=5$ : 4 час. 12 мин. 25 с;
- 3) при  $\varepsilon=2$ : 2 час. 48 мин. 30 с.

В случае  $\varepsilon=1$  получаем незначительное (0.034%) увеличение величины совокупных затрат и изменение трассы, маршрут изменений не претерпел:

затраты в задаче:  $V=1224.35$ .

Трасса претерпела следующие незначительные изменения:

- 1) При посещении множества  $M_4$  точка “входа” стала  $(-4.64, -10.73)$  вместо  $(-6.81, -11.63)$ ;
  - 2) Для множества  $M_{20}$  точка “выхода” —  $(65, -65)$  вместо  $(62.65, -65.18)$ ;
  - 3) На множестве  $M_{19}$  точка “входа” —  $(70.29, -47.05)$  вместо  $(68, -40)$ ;
  - 4) При движении через множество  $M_{17}$  точка “выхода” —  $(45.46, -31.09)$  вместо  $(44.12, -31.91)$ .
- Время счета составило 2 час. 9 мин. 41 с.

С точки зрения визуализации рисунок дает практически полное представление об оптимальной паре маршрут-трасса в рассматриваемом примере.

Налицо существенная экономия времени в случае использования конструкций (6.1) при поиске точки перехода на множество при практически отсутствующем проигрыше в качестве; просматривая не все целевое множество, а лишь подмножество  $\varepsilon$ -ближайших к точке перехода его элементов, мы существенно уменьшаем объем перебора при построении трассы. Применение такого приближенного алгоритма целесообразно в задачах с ограниченным временем, выделенным для их решения; как видим, переход к “допускам” почти в 9 раз сократил время счета (для величин допусков, равных 1).

Реальная комбинаторная размерность задачи, т.е. объем перебора при поиске решения, составила  $27 * 1600$ , что достаточно велико; именно этим фактом и обусловлено большое время счета в случае применения алгоритма с постоянными многозначными отображениями. Поскольку мощность каждого множества  $A_i(x)$ ,  $i \in \overline{1, 27}$ , не превышает мощности соответствующего множества  $M_i$  и убывает с уменьшением величины допуска  $\varepsilon$ , то мы имеем сокращение объема перебора в задаче с уменьшением величины  $\varepsilon$ , что и проявилось в вычислительном эксперименте в виде существенного сокращения времени счета.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
4. Использование метода динамического программирования для оптимизации траектории перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации облучения / А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, С.Е. Щеклеин, М.Ю. Куклин, А.Г. Ченцов, А.А. Кадников // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2006. № 2. С. 41–48.
5. Вопросы математических методов моделирования в решении проблемы снижения облучаемости персонала / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, А.Г. Ченцов, С.Е. Щеклеин, Ф.А. Балушкин, А.П. Хомяков // Вопросы радиационной безопасности. 2009. № 4. С. 47–57.
6. Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, С.Е. Щеклеин, А.Г. Ченцов // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2009. № 2. С. 115–120.
7. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернет. сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
8. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения. // Кибернет. сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.

9. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями // Изв. вузов. Математика. 2010. № 6. С. 64–81.
10. **Ченцов А.Г.** Метод динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации с ограничениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 3. С. 61–73.
11. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 238 с.
12. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т.14, № 3. С. 183–201.
13. **Ченцов А.Г.** Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений // Докл. РАН. 2008. Т. 423, № 3. С. 303–307.
14. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

Ченцов Алексей Александрович

Поступила 27.03.2011

канд. физ.-мат. наук

гл. программист

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич

чл.-кор. РАН

зав. отд.

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

УДК 517.983.54; 517.988

## МНОГОШАГОВЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ<sup>1</sup>

П. А. Чистяков

В работе рассматривается многошаговый итерационный метод решения линейного операторного уравнения  $Ax = y$  с  $B$ -симметричным и  $B$ -положительным оператором, действующим из  $X$  в  $Y$ , где  $X, Y$  — банаховы пространства. Пространство  $X$  предполагается  $p$ -выпуклым и равномерно гладким, тогда как  $Y$  — произвольное банахово пространство. Рассматривается случай точных данных, доказывается слабая и сильная сходимость (по норме) итерационного процесса.

Ключевые слова: итерационный метод, дуальное отображение,  $B$ -симметричный оператор,  $B$ -положительный оператор, дистанция Брэгмана, проекция Брэгмана, равномерно выпуклое пространство, гладкое пространство, характеристическое неравенство Ксю — Роуч, модуль гладкости пространства.

P. A. Chistiakov. Multistep iterative method for solving linear operator equations in Banach spaces.

Multistep iterative method for solving the linear operator equation  $Ax = y$  with  $B$ -symmetric  $B$ -positive operator acting from a Banach space  $X$  to a Banach space  $Y$  is considered. The space  $X$  is assumed to be  $p$ -convex and uniformly smooth, whereas  $Y$  is an arbitrary Banach space. The case of exact data is considered and the weak and strong (norm) convergences of the iterative process are proved.

Keywords: iterative method, duality mapping,  $B$ -symmetric operator,  $B$ -positive operator, Bregman distance, Bregman projection, uniformly convex space, smooth space, Xu–Roach characteristic inequality, modulus of smoothness of a space.

### 1. Введение

Рассматривается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y, \quad (1.1)$$

где  $A: X \rightarrow Y$  — действующий на паре банаховых пространств непрерывный  $B$ -симметричный и  $B$ -положительный оператор,  $B: X \rightarrow Y^*$  — линейный непрерывный оператор. Задача (1.1) может быть некорректно поставленной, т. е. решение может быть неединственным (если вообще существует) либо оно может не зависеть непрерывным образом от возмущений в правой части уравнения (1.1) или в операторе  $A$ ; например, это имеет место, когда  $A$  — компактный оператор, заданный в бесконечномерном пространстве.

В работе [1] предложен общий подход к построению итерационного метода в банаховом пространстве для уравнения с произвольным линейным непрерывным оператором. В [2] изложена модификация этого метода для специального случая  $B$ -симметричного и  $B$ -положительного оператора.

В недавно опубликованных статьях немецких математиков Шопфера и Шустера [3; 4 и др.] предлагается методика ускорения сходимости итераций за счет введения дополнительных направлений  $A^*w_{n,i}$ :

$$x_{n+1} = J_{*q} \left[ J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} \mu_{n,i} A^* w_{n,i} \right], \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00053).

где  $J_p: X \rightarrow 2^{X^*}$ ,  $J_{*q}: X^* \rightarrow 2^{X^{**}}$  — так называемые дуальные отображения банаховых пространств, и вектор параметров шагов  $\mu_n = (\mu_{n,1}, \dots, \mu_{n,N_n})$  минимизирует выпуклую непрерывно-дифференцируемую функцию

$$h_n(t) = h_n(t_1, \dots, t_{N_n}) = \frac{1}{q} \left\| J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} t_i A^* w_{n,i} \right\|^q + \sum_{i=1}^{N_n} t_i \langle w_{n,i}, y \rangle.$$

В данной работе исследуется многошаговый итерационный метод

$$x_{n+1} = J_{*q} \left[ J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} \mu_{n,i} B^* A \xi_{n,i} \right], \quad (1.3)$$

который является некоторой модификацией процесса (1.2); здесь операторы  $A$  и  $B$  связаны между собой соотношениями  $B$ -симметричности и  $B$ -положительности, вектор параметров шагов  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{N_n})$  минимизирует выпуклую непрерывно-дифференцируемую функцию

$$h_n(t) = h_n(t_1, \dots, t_{N_n}) = \frac{1}{q} \left\| J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} t_i B^* A \xi_{n,i} \right\|^q + \sum_{i=1}^{N_n} t_i \langle B \xi_{n,i}, y \rangle.$$

Формулировке всех необходимых определений и понятий применяемого математического аппарата посвящен следующий раздел.

## 2. Предварительные сведения

Пусть  $X$  и  $Y$  — вещественные банаховы пространства. Через  $X^*$ ,  $Y^*$  обозначаем их сопряженные. Во всех этих четырех пространствах обозначаем норму символом  $\| \cdot \|$ , не указывая при этом индексом принадлежность нормы к пространству, поскольку соответствующая информация всегда без труда определяется из контекста. Для величины функционала  $x^* \in X^*$  на элементе  $x \in X$  придерживаемся следующих симметричных обозначений по типу скалярного произведения в гильбертовом пространстве  $\langle x^*, x \rangle := x^*(x)$ . Через  $\mathcal{L}(X, Y)$  обозначается пространство всех линейных непрерывных операторов  $A: X \rightarrow Y$ . Если оператор  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , то сопряженный к нему оператор  $A^*$  принадлежит пространству  $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$ , и  $\|A\| = \|A^*\|$  (здесь для обозначения норм операторов из разных нормированных пространств также используется один и тот же символ). Отметим, что в нашей постановке для оператора  $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$  формально  $B^* \in \mathcal{L}(Y^{**}, X^*)$ . Однако, используя существование естественного вложения  $\pi: Y \rightarrow Y^{**}$  (см. [5, с. 191]), будем считать оператор  $B^*$  определенным на всем пространстве  $Y$ . Через  $p, q \in (1, +\infty)$  обозначаем сопряженные показатели, т. е.  $1/p + 1/q = 1$ .

### 2.1. Дуальные отображения, связь с субдифференциалом нормы

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть  $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi(0) = 0$ , — непрерывная строго возрастающая функция (такая функция называется *функцией роста*). Отображение  $J_\varphi: X \rightarrow 2^{X^*}$ , определяемое по формуле

$$J_\varphi(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \|x\|, \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\}, \quad (2.1)$$

называется *дуальным отображением* пространства  $X$  с *функцией роста*  $\varphi$ .

Всюду в дальнейшем мы будем использовать дуальные отображения банаховых пространств со степенными функциями вида  $\varphi(t) = t^{p-1}$  ( $p > 1$ ) в качестве функций роста, которые будем обозначать  $J_p(x)$  и называть для краткости *дуальными отображениями  $p$ -й степени*. В этом случае соотношение (2.1) примет вид

$$J_p(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \|x\|, \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\}. \quad (2.2)$$

При  $p = 2$  дуальное отображение называется *каноническим* или *нормализованным* дуальным отображением и обозначается  $J(x)$ . Через  $J_{*q}: X^* \rightarrow X^{**}$  обозначаем определяемое аналогично дуальное отображение сопряженного пространства  $X^*$ . В случае рефлексивности пространства  $X$  можно считать, что  $J_{*q}$  действует из  $X^*$  в  $X$ . Если пространство рефлексивно, строго выпукло и гладко, то дуальное отображение  $J_p$  взаимно однозначно и сильно-слабо непрерывно (переводит в общем случае сильно сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся), причем обратное отображение задается формулой  $(J_p)^{-1} = J_{*q}$  (см., к примеру, [1; 6; 7]).

Существует связь между дуальным отображением пространства и субдифференциалом его нормы. Напомним определение субдифференциала.

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклый функционал. *Субдифференциалом*  $f$  называется отображение  $\partial f: X \rightarrow 2^{X^*}$ , определяемое по правилу

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, z - x \rangle \leq f(z) - f(x) \quad \forall z \in X\}.$$

Рассмотрим теперь функционал вида  $f_p(x) := (1/p)\|x\|^p$ , который часто фигурирует в теории выпуклой оптимизации и в различных задачах, рассматриваемых в контексте банаховых пространств.

**Теорема 1** (Асплунд [6]). *Дуальное отображение пространства  $X$  и субдифференциал функционала  $f_p$  совпадают как отображения, т. е.  $\forall x \in X$  выполнено  $\partial f_p(x) = J_p(x)$ .*

## 2.2. Дистанция Брэгмана и проекция Брэгмана

Для доказательства основной теоремы (разд. 3) нам понадобятся некоторые утверждения, связанные с дистанцией и проекцией Брэгмана. Учитывая, что эти факты не очень широко используются в работах по теории некорректных задач, в этом разделе приведем необходимые сведения, причем некоторые с подробными доказательствами (см., например, [3]).

**О п р е д е л е н и е 3** (Брэгман [8]). Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — строго выпуклый непрерывный функционал. *Дистанцией Брэгмана* от  $x_1 \in X$  до  $x_2 \in X$  по функционалу  $f$  называется величина

$$\Delta_f(x_1, x_2) := f(x_2) - f(x_1) - \inf_{\xi^* \in \partial f(x_1)} \langle \xi^*, x_2 - x_1 \rangle.$$

Дистанцию Брэгмана по функционалу  $f_p$ , определенному выше, будем обозначать через  $\Delta_p$ . Согласно теореме 1 формула для вычисления дистанции Брэгмана примет вид

$$\Delta_p(x_1, x_2) = \frac{1}{p}\|x_2\|^p - \frac{1}{p}\|x_1\|^p - \inf_{\xi^* \in J_p(x_1)} \langle \xi^*, x_2 - x_1 \rangle. \quad (2.3)$$

Если  $X$  — гладкое пространство, то при любом  $x$  множество  $J_p(x)$  состоит из одного элемента, который для упрощения записи будем обозначать снова через  $J_p(x)$ . В этом случае формула для дистанции Брэгмана еще упростится

$$\Delta_p(x_1, x_2) = \frac{1}{p}\|x_1\|^p - \langle J_p(x_1), x_2 \rangle + \frac{1}{p}\|x_2\|^p.$$

Дистанции Брэгмана в сопряженных пространствах связаны формулой

$$\Delta_p(x_1, x_2) = \Delta_q^*(J_p(x_2), J_p(x_1)).$$

В гильбертовом пространстве  $\Delta_{f_2}(x_1, x_2) = \Delta_2(x_1, x_2) = f_2(x_1 - x_2) = (1/2)\|x_1 - x_2\|^2$ . Дистанция Брэгмана не является метрикой; в общем случае в силу строгой выпуклости функционала  $f$  выполнено только первое свойство из определения метрики

$$\forall x_1, x_2 \in X: \Delta_f(x_1, x_2) \geq 0, \quad \Delta_f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

соответственно условие симметричности и неравенство треугольника нарушаются. Нам понадобится оценка сверху для дистанции Брэгмана.

**Лемма 1.** Пусть  $X$  — гладкое строго выпуклое банахово пространство, тогда для любых  $x_1, x_2 \in X$  справедливо неравенство

$$\Delta_p(x_1, x_2) \leq \langle J_p(x_1) - J_p(x_2), x_1 - x_2 \rangle. \quad (2.4)$$

**Доказательство.** По определению

$$\Delta_p(x_1, x_2) = \frac{1}{p}(\|x_2\|^p - \|x_1\|^p) - \langle J_p(x_1), x_2 - x_1 \rangle.$$

Требуется доказать неравенство

$$\frac{1}{p}(\|x_2\|^p - \|x_1\|^p) - \langle J_p(x_1), x_2 - x_1 \rangle \leq \langle J_p(x_1) - J_p(x_2), x_1 - x_2 \rangle.$$

Перенесем все члены в правую часть, воспользуемся свойством дистрибутивности и равенством  $\langle J_p(x), x \rangle = \|x\|^p$ . После приведения подобных членов приходим к неравенству

$$0 \leq \frac{1}{p}\|x_1\|^p + \frac{1}{q}\|x_2\|^p - \langle J_p(x_2), x_1 \rangle = \Delta_p(x_2, x_1),$$

выполняющемуся с очевидностью. Лемма доказана.

**Определение 4.** Проекциями Брэгмана элемента  $x \in X$  на непустое выпуклое замкнутое множество  $C \subseteq X$  по функционалу  $f$  называются такие элементы  $\xi \in C$ , что

$$\Delta_f(x, \xi) = \inf_{z \in C} \Delta_f(x, z).$$

**Определение 5.** Функционал  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  называется усиленно коэрцитивным, если

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = +\infty.$$

**Лемма 2.** Пусть  $X$  — рефлексивное пространство,  $f$  — строго выпуклый дифференцируемый усиленно коэрцитивный функционал. Тогда для любого  $x \in X$  семейство всех проекций Брэгмана по функционалу  $f$  на множество  $C$  непусто и одноэлементно.

**Доказательство.** Пусть  $0 \leq m := \inf_{z \in C} \Delta_f(x, z)$ . Существует минимизирующая последовательность  $\{z_n\} \subseteq C$  такая, что

$$m \leq \Delta_f(x, z_n) < m + \frac{1}{n} \leq m + 1.$$

Из оценки

$$m + 1 \geq \Delta_f(x, z_n) = f(z_n) - f(x) - \langle \partial f(x), z_n - x \rangle \geq f(z_n) - f(x) - \|\partial f(x)\|(\|z_n\| + \|x\|)$$

и свойства усиленной коэрцитивности вытекает ограниченность последовательности  $\{z_n\}$ . В силу рефлексивности пространства  $X$  и слабой замкнутости выпуклого замкнутого множества найдется подпоследовательность  $\{z_{n_k}\}$ , слабо сходящаяся к некоторому элементу  $\xi \in C$ . Поскольку  $f$  — непрерывный выпуклый функционал, то он заведомо обладает свойством слабой полунепрерывности снизу, следовательно,

$$m \leq \Delta_f(x, \xi) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \{f(z_{n_k}) - f(x) - \langle \partial f(x), z_{n_k} - x \rangle\} = \liminf_{k \rightarrow +\infty} \Delta_f(x, z_{n_k}) \leq m.$$

Предположим, что найдутся два различных элемента  $\xi_1$  и  $\xi_2$  из  $C$  со свойствами

$$f(\xi_1) - f(x) - \langle \partial f(x), \xi_1 - x \rangle = m, \quad f(\xi_2) - f(x) - \langle \partial f(x), \xi_2 - x \rangle = m.$$

Составив для произвольного  $\lambda \in (0, 1)$  выпуклую комбинацию этих равенств, получим

$$\lambda f(\xi_1) + (1 - \lambda)f(\xi_2) - f(x) - \langle \partial f(x), \lambda \xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2 - x \rangle = m.$$

Из строгой выпуклости функционала  $f$  следует

$$\Delta_f(x, \lambda \xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2) = f(\lambda \xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2) - f(x) - \langle \partial f(x), \lambda \xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2 - x \rangle < m,$$

что приводит к противоречию. Лемма доказана.

Введем для проекции Брэгмана обозначение  $\Pi_C^f(x)$ . Для функционала  $f_p$  примем упрощенную запись  $\Pi_C^p(x)$  и всюду далее в этой статье будем рассматривать только такую проекцию. Очевидными являются следующие свойства:

$$[\Pi_C^p(x) = x \Leftrightarrow x \in C], \quad \left[ (C_1 \subseteq C_2 \wedge \tilde{x} := \Pi_{C_2}^p(x) \in C_1) \Rightarrow \tilde{x} = \Pi_{C_1}^p(x) \right],$$

а также  $\Pi_C^p(0) = \min_{z \in C} \|z\|$ . По аналогии с метрической проекцией имеет место характеристическое вариационное неравенство для проекции Брэгмана.

**Лемма 3.** Пусть  $X$  — строго выпуклое гладкое рефлексивное пространство,  $\tilde{x} \in C$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\tilde{x} = \Pi_C^p(x)$ ;
- 2)  $\langle J_p(\tilde{x}) - J_p(x), z - \tilde{x} \rangle \geq 0 \quad \forall z \in C$ ;
- 3)  $\Delta_p(x, \tilde{x}) \leq \Delta_p(x, z) - \Delta_p(\tilde{x}, z) \quad \forall z \in C$ .

**Доказательство.** Проверим циклическую цепочку импликаций 1)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  3)  $\Rightarrow$  1). Пусть  $\tilde{x} = \Pi_C^p(x)$ , т. е. для любого  $z \in C$  выполнено  $\Delta_p(x, \tilde{x}) \leq \Delta_p(x, z)$ . Для произвольного  $z \in C$  в силу свойства выпуклости множества  $C$  при любом  $\lambda \in [0, 1]$  элемент  $\tilde{x} + \lambda(z - \tilde{x})$  также принадлежит  $C$ . Имеем для любого  $\lambda \in [0, 1]$  неравенство  $\Delta_p(x, \tilde{x}) \leq \Delta_p(x, \tilde{x} + \lambda(z - \tilde{x}))$ . Воспользовавшись равенством (2.3) для преобразований, имеем

$$\frac{\Delta_p(x, \tilde{x} + \lambda(z - \tilde{x})) - \Delta_p(x, \tilde{x})}{\lambda} = \frac{\frac{1}{p} \|\tilde{x} + \lambda(z - \tilde{x})\|^p - \frac{1}{p} \|\tilde{x}\|^p}{\lambda} - \langle J_p(x), z - \tilde{x} \rangle.$$

В полученном равенстве можно перейти к пределу при  $\lambda \rightarrow +0$ , поскольку первое слагаемое в правой части сходится к производной Гато функционала  $f_p$ , которая в свою очередь существует в силу гладкости исходного пространства и совпадает с субдифференциалом  $\partial f_p(\tilde{x})$ . По теореме 1 получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\Delta_p(x, \tilde{x} + \lambda(z - \tilde{x})) - \Delta_p(x, \tilde{x})}{\lambda} = \langle J_p(\tilde{x}), z - \tilde{x} \rangle - \langle J_p(x), z - \tilde{x} \rangle = \langle J_p(\tilde{x}) - J_p(x), z - \tilde{x} \rangle \geq 0.$$

Разложив по формуле (2.3) неравенство 3), перенеся все члены в правую часть и приведя подобные, нетрудно заметить, что неравенства 2) и 3) эквивалентны.

Импликация 3)  $\Rightarrow$  1) очевидна. Лемма доказана.

В гильбертовом пространстве проекция Брэгмана по функционалу  $f_2$  совпадает с обычной метрической проекцией. Проекция Брэгмана в сопряженных пространствах и дуальное отображение обладают интересной взаимосвязью друг с другом.

**Лемма 4.** Пусть  $X$  — строго выпуклое гладкое рефлексивное пространство,  $U$  — замкнутое подпространство в  $X$ ,  $x, y, z \in X$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $x = \Pi_{z+U}^p(y)$ ;
- 2)  $(x - z \in U) \wedge (J_p(x) - J_p(y) \in U^\perp, \text{ где } U^\perp = \{u^* \in X^* \mid \langle u^*, u \rangle = 0 \forall u \in U\})$ ;
- 3)  $J_p(x) = \Pi_{J_p(y)+U^\perp}^q(J_p(z))$ , где  $\Pi_{\circ}^q$  — проекция Брэгмана по функционалу  $f_q$  в  $X^*$ .

**Доказательство.** Построим снова циклические импликации. Пусть  $x = \Pi_{z+U}^p(y)$ , тогда очевидно, что  $x - z \in U$ . Согласно неравенству 2) из предыдущей леммы  $\langle J_p(x) - J_p(y), z + u - x \rangle \geq 0$  при всех  $u \in U$ . Поскольку  $z - x \in U$ , то  $\langle J_p(x) - J_p(y), u \rangle \geq 0$ , что может быть только в случае, когда  $\langle J_p(x) - J_p(y), u \rangle = 0$ . Это означает, что  $J_p(x) - J_p(y) \in U^\perp$ .

Далее, равенство  $J_p(x) = \Pi_{J_p(y)+U^\perp}^q(J_p(z))$  снова по лемме 3 эквивалентно  $\langle x - z, J_p(y) + u^* - J_p(x) \rangle \geq 0$  для произвольного  $u^* \in U^\perp$ . Из условий 2) доказываемой леммы вытекает, что на самом деле  $\langle x - z, J_p(y) + u^* - J_p(x) \rangle = 0$ , так что импликация 2)  $\Rightarrow$  3) обоснована.

Поменяв теперь за счет рефлексивности ролями пространства  $X$  и  $X^*$ , дуальные отображения  $J_p$  и  $J_{*q}$ , сопряженные показатели  $p$  и  $q$ , подпространства  $U$  и  $U^\perp$  и применив уже доказанную по транзитивности импликацию 1)  $\Rightarrow$  3) к равенству  $J_p(x) = \Pi_{J_p(y)+U^\perp}^q(J_p(z))$ , получим требуемое. Лемма доказана.

Пусть  $0 \neq u^* \in X^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Через  $H(u^*, \alpha)$  обозначаем, следуя [3; 4], гиперплоскость

$$H(u^*, \alpha) = \{x \in X \mid \langle u^*, x \rangle = \alpha\}.$$

Следующее утверждение позволяет вычислять проекцию Брэгмана на пересечение нескольких гиперплоскостей.

**Лемма 5** [3, с. 494]. Пусть  $H(u_1^*, \alpha_1), \dots, H(u_N^*, \alpha_N)$  — конечный набор гиперплоскостей в строго выпуклом гладком рефлексивном пространстве с непустым пересечением

$$H = \bigcap_{k=1}^N H(u_k^*, \alpha_k).$$

Для произвольного  $x \in X$  рассмотрим функцию  $h: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(t) := \frac{1}{q} \left\| J_p(x) - \sum_{k=1}^N t_k u_k^* \right\|^q + \sum_{k=1}^N t_k \alpha_k, \quad t = (t_1, \dots, t_N), \quad (2.5)$$

которая обладает свойствами выпуклости и непрерывной дифференцируемости,

$$\frac{\partial h}{\partial t_j}(t) = - \left\langle u_j^*, J_{*q} \left( J_p(x) - \sum_{k=1}^N t_k u_k^* \right) \right\rangle + \alpha_j.$$

Тогда проекция Брэгмана элемента  $x$  на  $H$  задается формулой

$$\Pi_H^p(x) = J_{*q} \left( J_p(x) - \sum_{k=1}^N \tilde{t}_k u_k^* \right), \quad (2.6)$$

где  $\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_N)$  — решение  $N$ -мерной задачи оптимизации  $\min_{t \in \mathbb{R}^N} h(t)$ . Более того, если векторы  $u_1^*, \dots, u_N^*$  линейно независимы, тогда  $h$  — строго выпуклая функция и  $\tilde{t}$  — единственное решение задачи на минимум.

**З а м е ч а н и е.** Данная лемма позволяет вычислять также и проекцию Брэгмана на гиперплоскость в том случае, когда  $N = 1$ . А именно,

$$\Pi_{H(u^*, \alpha)}^p(x) = J_{*q}(J_p(x) - \tilde{t}u^*),$$

где  $\tilde{t}$  — точка глобального минимума (необходимо единственная) строго выпуклой функции

$$h(t) = \frac{1}{q} \|J_p(x) - tu^*\|^q + \alpha t,$$

причем  $\text{sign}(\hat{t}) = \text{sign}(\langle u^*, x \rangle - \alpha)$ .

Будем предполагать в дальнейшем, что пространство  $X$  является  $p$ -выпуклым и равномерно гладким банаховым пространством, т. е. для модуля выпуклости

$$\delta_X(\varepsilon) := \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{1}{2}(x+y) \right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}$$

выполняется оценка  $\delta_X(\varepsilon) \geq C_1 \varepsilon^p$  при некотором  $C_1 > 0$ . Тогда пространство  $X^*$  будет  $q$ -гладким, т. е. для модуля гладкости

$$\rho_X(\tau) := \frac{1}{2} \sup \{ \|x+y\| + \|x-y\| - 2 : \|x\| = 1, \|y\| \leq \tau \}$$

будет верна оценка  $\rho_X(\tau) \leq C_2 \tau^q$  при некотором  $C_2 > 0$ . Отображения  $J_p$  и  $J_{*q}$  будут в таком случае равномерно непрерывными на ограниченных множествах (см. [6]). В  $q$ -гладком пространстве  $X^*$  для любых  $x_1^*, x_2^* \in X^*$  и некоторой константы  $G_q \geq 1$  имеет место характеристическое неравенство (см. [9])

$$\frac{1}{q} \|x_1^* - x_2^*\|^q \leq \frac{1}{q} \|x_1^*\|^q - \langle J_{*q}(x_1^*), x_2^* \rangle + \frac{G_q}{q} \|x_2^*\|^q, \quad (2.7)$$

которое будет играть ключевую роль в доказательстве сходимости нашего метода.

### 2.3. $B$ -симметричные и $B$ -положительные операторы

**О п р е д е л е н и е 6.** Оператор  $A$  называется

(а)  $B$ -симметричным, если при любых  $x_1, x_2 \in X$  выполнено равенство  $\langle Ax_1, Bx_2 \rangle = \langle Ax_2, Bx_1 \rangle$ ;

(б)  $B$ -неотрицательным, если для каждого  $x \in X$  выполнено  $\langle Ax, Bx \rangle \geq 0$ ;

(с)  $B$ -положительным (не строго), если для каждого  $x \in X$  выполнено  $\langle Ax, Bx \rangle \geq 0$ , причем  $\langle Ax, Bx \rangle = 0$  в том и только в том случае, когда  $Ax = 0$ ;

(д) строго  $B$ -положительным, если для каждого  $x \in X$  выполнено  $\langle Ax, Bx \rangle \geq 0$ , причем  $\langle Ax, Bx \rangle = 0$  в том и только в том случае, когда  $x = 0$ .

Отметим, что строгая  $B$ -положительность оператора  $A$  влечет за собой обратимость обоих операторов. Если  $Y$  — гильбертово пространство, то всякий линейный непрерывный оператор  $A$  является  $A$ -симметричным и  $A$ -положительным. В общем случае вопрос о построении по заданному оператору  $A$  нетривиального (т. е. отличного от нулевого) оператора  $B$ , для которого выполнены свойства (а) и (б) из определения, остается открытым. Нетрудно заметить, что все операторы  $B$ , для которых  $A$  становится  $B$ -симметричным и  $B$ -положительным, образуют в пространстве  $\mathcal{L}(X, Y^*)$  положительный конус.

Отметим полезные свойства, вытекающие из определения 6.

**Лемма 6** [2, с. 307]. Пусть  $A$  —  $B$ -симметричный и  $B$ -неотрицательный оператор. Тогда для квадратичной формы  $\langle Ax, Bx \rangle$  справедлива следующая оценка снизу:

$$\langle Ax, Bx \rangle \geq \frac{\|B^*Ax\|^2}{\|B^*A\|} \geq \frac{\|B^*Ax\|^2}{\|B\|\|A\|}. \quad (2.8)$$

**Лемма 7** [2, с. 307]. Пусть  $A$  —  $B$ -симметричный и  $B$ -положительный оператор,  $y \in \mathcal{R}(A)$ . Тогда

$$Ax = y \Leftrightarrow B^*Ax = B^*y.$$

**Лемма 8** [2, с. 307]. Пусть  $A$  —  $B$ -симметричный и  $B$ -неотрицательный оператор. Тогда имеет место так называемое обобщенное неравенство Коши — Буняковского

$$|\langle Ax_1, Bx_2 \rangle| \leq \sqrt{\langle Ax_1, Bx_1 \rangle} \sqrt{\langle Ax_2, Bx_2 \rangle}.$$

### 3. Итерационный метод решения операторного уравнения

Перейдем теперь к основной цели нашей работы — описанию и обоснованию итерационного метода решения уравнения (1.1) для заданного  $B$ -симметричного и  $B$ -положительного оператора  $A$ , где  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ . Банахово пространство  $X$  предполагается  $p$ -выпуклым и равномерно гладким,  $Y$  — произвольное вещественное банахово пространство. Ограничимся случаем точных данных  $y \in \mathcal{R}(A)$ . Рассмотрим задачу аппроксимации проекции Брэгмана  $x^\dagger = \Pi_M^p(x_0)$  для произвольного  $x_0 \in X$ , где

$$M := \{x \in X \mid Ax = y\},$$

которое, как нетрудно заметить, является непустым выпуклым замкнутым множеством. Таким образом, искомая проекция корректно определена. Если  $x_0 = 0$ , то  $x^\dagger$  совпадает с решением минимальной нормы (нормальным решением). Опишем вкратце предлагаемый метод.

**Метод.** Возьмем некоторый элемент  $x_0$  в качестве начального приближения. Он может содержать в себе некоторую априорную информацию об искомом решении. Предположим, что на шаге  $n$  приближение  $x_n$  уже построено. Выберем в пространстве  $\mathcal{R}(B^*A)$  конечное число  $N_n$  направлений поиска  $\{B^*A\xi_{n,1}, \dots, B^*A\xi_{n,N_n}\}$  и определим следующее приближение по правилу

$$x_{n+1} := J_{*q} \left[ J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} \mu_{n,i} B^* A \xi_{n,i} \right], \quad (3.1)$$

где вектор параметров шагов  $\mu = (\mu_{n,1}, \dots, \mu_{n,N_n})$  минимизирует выпуклую непрерывно дифференцируемую функцию  $h: \mathbb{R}^{N_n} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$h(t_1, \dots, t_{N_n}) := \frac{1}{q} \left\| J_p(x_n) - \sum_{i=1}^{N_n} t_i B^* A \xi_{n,i} \right\|^q + \sum_{i=1}^{N_n} t_i \langle B \xi_{n,i}, y \rangle. \quad \square$$

Заметим, что в силу леммы 5 описанный итерационный алгоритм эквивалентен последовательному проектированию по Брегману

$$x_{n+1} = \Pi_{H_n}^p(x_n), \quad (3.2)$$

где

$$H_n := \bigcap_{k=1}^{N_n} H(B^*A\xi_{n,i}, \langle B\xi_{n,i}, y \rangle).$$

Поскольку для  $z \in M$  выполнено  $\langle B^*A\xi_{n,i}, z \rangle = \langle A\xi_{n,i}, Bz \rangle = \langle B\xi_{n,i}, y \rangle$ , то получим  $M \subseteq H_n$ . Следовательно, для всех  $z \in M$  имеем

$$\langle B\xi_{n,i}, Ax_{n+1} - y \rangle = \langle B^*A\xi_{n,i}, x_{n+1} - z \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N_n\}. \quad (3.3)$$

Заметим, что  $H_n$  для произвольного  $z \in M$  представимо в виде  $H_n = z + U_n^\perp$ , где  $U_n \subseteq \mathcal{R}(B^*A)$  есть пространство направлений поиска

$$U_n := \text{span}\{B^*A\xi_{n,i} \mid i = 1, \dots, N_n\} \subseteq X^*.$$

Тогда согласно лемме 4 последовательное проектирование (3.2) эквивалентно проектированию в сопряженном пространстве

$$J_p(x_{n+1}) = \Pi_{J_p(x_n) + U_n}^q(J_p(z)), \quad z \in M. \quad (3.4)$$

Кроме того,  $J_p(x_{n+1}) - J_p(x_n) \in U_n$ , поэтому из соотношений (3.3) вытекает, что

$$\langle J_p(x_{n+1}) - J_p(x_n), x_{n+1} - z \rangle = 0 \quad \forall z \in M. \quad (3.5)$$

Сформулируем теперь основной результат нашей работы, теорему о сходимости представленного итерационного метода.

**Теорема 2.** Пусть на каждом шаге итерации процесса (3.1) вектор  $B^*(Ax_n - y)$  содержится в пространстве направлений поиска  $U_n$ . Тогда:

1) последовательность итераций  $\{x_n\}$  ограничена, и все ее слабо предельные точки являются решениями (1.1);

2) если в пространстве  $X$  дуальное отображение обладает свойством слабой-слабой непрерывности (например, такими будут пространства  $l_p$  при  $1 < p < +\infty$ ), т. е. всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в слабо сходящуюся, тогда вся последовательность  $\{x_n\}$  слабо сходится к  $x^\dagger = \Pi_M^P(x_0)$ ;

3) если в  $\{x_n\}$  можно выбрать хотя бы одну сильно сходящуюся подпоследовательность (не имеет значения, к какому пределу!), то вся последовательность сильно сходится к  $x^\dagger$ . Такая сильно сходящаяся подпоследовательность существует, например, независимо в каждом из случаев:

- (а)  $X$  конечномерно;
- (б)  $Y$  конечномерно;
- (в) для некоторого фиксированного  $n_0 \in \mathbb{N}$  и бесконечного числа индексов  $n \geq n_0$  вектор  $J_p(x_n) - J_p(x_{n_0})$  включается в пространство направлений поиска  $U_n$ .

**Доказательство.** Пусть  $B^*(Ax_n - y) \in U_n$ . Тогда для любого  $\bar{\mu} > 0$  имеет место  $J_p(x_n) - \bar{\mu}B^*(Ax_n - y) \in J_p(x_n) + U_n$ . В силу (3.4) получаем для любого  $z \in M$  следующую цепочку отношений:

$$\begin{aligned} \Delta_p(x_{n+1}, z) &= \Delta_q^*(J_p(z), J_p(x_{n+1})) \leq \Delta_q^*(J_p(z), J_p(x_n) - \bar{\mu}B^*(Ax_n - y)) \\ &= \frac{1}{p} \|z\|^p - \langle z, J_p(x_n) \rangle + \bar{\mu} \langle z, B^*(Ax_n - y) \rangle + \frac{1}{q} \|J_p(x_n) - \bar{\mu}B^*(Ax_n - y)\|^q. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\langle z, B^*(Ax_n - y) \rangle = \langle Bz, A(x_n - x^\dagger) \rangle = \langle B(x_n - x^\dagger), y \rangle$ , и воспользуемся неравенством (2.7) для дальнейшей оценки  $\Delta_p$ :

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) \leq \frac{1}{p} \|z\|^p - \langle J_p(x_n), z \rangle + \bar{\mu} \langle B(x_n - x^\dagger), y \rangle + \frac{1}{q} \|x_n\|^p - \bar{\mu} \langle B(x_n - x^\dagger), Ax_n \rangle + \frac{G_q}{q} \bar{\mu}^q R_n^q,$$

где  $R_n := \|B^*(Ax_n - y)\|$ . По формуле для дистанции Брэгмана получаем

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) \leq \Delta_p(x_n, z) - \bar{\mu} \langle A(x_n - x^\dagger), B(x_n - x^\dagger) \rangle + \frac{G_q}{q} \bar{\mu}^q R_n^q.$$

Применим оценку (2.8), тогда

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) \leq \Delta_p(x_n, z) - \bar{\mu} \frac{R_n^2}{\|A\| \|B\|} + \frac{G_q}{q} \bar{\mu}^q R_n^q \quad \forall \bar{\mu} > 0. \quad (3.6)$$

Возьмем в правой части полученного неравенства минимум по  $\bar{\mu}$ ; он достигается в точке, где производная равна нулю, т. е.

$$-\frac{R_n^2}{\|A\| \|B\|} + G_q \bar{\mu}^{q-1} R_n^q = 0 \quad \iff \quad \bar{\mu} = \frac{R_n^{p-2}}{G_q^{p-1} \|A\|^{p-1} \|B\|^{p-1}}.$$

Подставив полученное значение  $\bar{\mu}$  в (3.6), имеем

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) \leq \Delta_p(x_n, z) - \frac{R_n^p}{G_q^{p-1} \|A\|^p \|B\|^p} + \frac{1}{q} \frac{R_n^{pq-2q+q}}{G_q^{p-1} \|A\|^p \|B\|^p} = \Delta_p(x_n, z) - \frac{R_n^p}{p G_q^{p-1} \|A\|^p \|B\|^p}.$$

Таким образом, получена окончательная оценка

$$\Delta_p(x_{n+1}, z) \leq \Delta_p(x_n, z) - \frac{R_n^p}{p G_q^{p-1} \|A\|^p \|B\|^p} \leq \Delta_p(x_n, z) \quad \forall z \in M. \quad (3.7)$$

Из нее вытекает, что дистанции Брэгмана от итерационных точек до множества решений  $M$  убывают, следовательно, они ограничены, следовательно,  $\{x_n\}$  ограничена. Из (3.7) также вытекает, что  $R_n$  сходится к нулю. В силу слабой полунепрерывности снизу функционала  $R(x) = \|B^*(Ax - y)\|$  каждая слабая предельная точка  $\{x_n\}$  является решением уравнения (1.1).

Докажем теперь п. 2). Пусть дуальное отображение  $J_p$  слабо-слабо непрерывно и  $x$  — слабый предел некоторой подпоследовательности  $\{x_{n_k}\}$ . Тогда  $J_p(x_{n_k}) - J_p(x_0)$  слабо сходится к  $J_p(x) - J_p(x_0)$ . Поскольку  $J_p(x_{n_k}) - J_p(x_0) \in \mathcal{R}(B^*A)$  и  $\overline{\mathcal{R}(B^*A)}$  слабо замкнуто, то

$$x \in M = x^\dagger + \mathcal{N}(B^*A) = x^\dagger + \overline{\mathcal{R}(B^*A)}^\perp \quad \wedge \quad J_p(x) - J_p(x_0) \in \overline{\mathcal{R}(B^*A)}.$$

В этом случае лемма 4 гарантирует нам, что  $x = \Pi_M^p(x_0) = x^\dagger$ .

Переходим к последнему пункту доказательства. Аналогичными рассуждениями, как и в п. 2), доказывается, что предел сильно сходящейся подпоследовательности  $\{x_{n_k}\}$  обязан совпадать с  $x^\dagger$ . Из непрерывности дистанции Брэгмана по своим аргументам вытекает, что  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_p(x_{n_k}, x^\dagger) = \Delta_p(x^\dagger, x^\dagger) = 0$ . Монотонная последовательность  $\{\Delta_p(x_n, z)\}$  сходится при всех  $z \in M$ , поэтому

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_p(x_n, x^\dagger) = 0 \quad \iff \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x^\dagger\| = 0.$$

Если пространство  $X$  конечномерно, то из ограниченной последовательности  $\{x_n\}$  всегда можно выбрать сильно сходящуюся подпоследовательность. Если  $Y$  конечномерно, то и  $\mathcal{R}(B^*A)$  конечномерно, поэтому в последовательности  $\{J_p(x_n) - J_p(x_0)\} \subseteq \mathcal{R}(B^*A)$  можно выбрать сильно сходящуюся подпоследовательность. За счет равномерной гладкости пространства  $X$  отображение  $J_{*q}$  равномерно непрерывно на любом ограниченном множестве, поэтому в  $\{x_n\}$  подпоследовательность, взятая по тем же индексам, будет сильно сходящейся. Наконец, предположим, не ограничивая общности, что  $J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_0}) \in U_{n_k}$  при всех натуральных  $k$ , и пусть последовательность  $\{x_{n_k+1}\}$  (со сдвигом на один индекс вперед) слабо сходится к некоторому  $x \in M$ . Подставив значение  $B^*A\xi_{n_k,i} = J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_0})$  в соотношение (3.3), получим

$$\langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_0}), x_{n_k+1} - x \rangle = 0.$$

Учитывая свойство (3.5), приходим к соотношениям

$$\langle J_p(x_{n_k+1}) - J_p(x), x_{n_k+1} - x \rangle = \langle J_p(x_{n_k+1}) - J_p(x_{n_k}), x_{n_k+1} - x \rangle$$

$$+ \langle J_p(x_{n_k}) - J_p(x_{n_0}), x_{n_k+1} - x \rangle + \langle J_p(x_{n_0}) - J_p(x), x_{n_k+1} - x \rangle = \langle J_p(x_{n_0}) - J_p(x), x_{n_k+1} - x \rangle.$$

В полученном равенстве правая часть стремится к нулю при  $k \rightarrow +\infty$ . Тогда из леммы 1 следует, что подпоследовательность  $\{x_{n_k+1}\}$  сходится сильно к  $x$ . Теорема доказана.

#### 4. Заключение

В представленной работе для уравнений с  $B$ -симметричным и  $B$ -положительным оператором рассмотрен итерационный метод, аналогичный тому, что предложен в работе [4]. При этом используется соответствующий математический аппарат из этой статьи.

Данная работа является начальным этапом в исследовании итерационных методов для  $B$ -симметричных и  $B$ -положительных операторов с несколькими направлениями поиска. В качестве дальнейшего продолжения исследования отметим построение итераций в случае неточно заданных исходных данных задачи (1.1), проведение содержательных экспериментов, иллюстрирующих работу методов, сравнительный анализ методов по скорости сходимости при различном выборе числа и направления шагов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Schöpfer F., Louis A. K., Schuster T.** Nonlinear iterative methods for linear ill-posed problems in Banach spaces // *Inverse Probl.* 2006. Vol. 22. P. 311–329.
2. **Чистяков П. А.** Итерационные методы решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2011. Т. 17, № 3. С. 303–318.
3. **Schöpfer F., Schuster T., Louis A. K.** Metric and Bregman projections onto affine subspaces and their computation via sequential subspace optimization methods // *J. Inverse Ill-posed Probl.* 2008. Vol. 16, № 5. P. 479–506.
4. **Schöpfer F., Schuster T.** Fast regularizing sequential subspace optimization in Banach spaces // *Inverse Probl.* 2009. Vol. 25, № 1 (015013). P. 1–22.
5. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
6. **Cioranescu I.** Geometry of Banach spaces, duality mappings, and nonlinear problems. Dordrecht: Kluwer, 1990. 260 p.
7. **Дистель Дж.** Геометрия банаховых пространств: избранные главы. Киев: Вища школа, 1980. 216 с.
8. **Брэгман Л.М.** Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1967. Т. 7, № 3. С. 620–631.
9. **Xu Z.B., Roach G.F.** Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces // *J. Math. Anal. Appl.* 1991. Vol. 157. P. 189–210.

Чистяков Павел Александрович

Поступила 30.09.2011

мл. науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: p\_a\_v\_e\_l@isnet.ru

УДК 517.5, 517.9, 519.6

**МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ “АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ (ААНЗ-2011)”****А. Л. Агеев, В. В. Арестов, В. В. Васин**

Конференция по некорректно поставленным и обратным задачам, посвященная памяти выдающегося российского ученого члена-корреспондента АН СССР В.К. Иванова, проводится в Екатеринбурге раз в три года, начиная с 1995. В 2008 году она прошла в честь 100-летия со дня рождения В.К. Иванова. Очередная 6-я конференция состоялась 31 октября – 5 ноября 2011 года. В статье представлен ее обзор.

Ключевые слова: некорректно поставленная проблема, алгоритм регуляризации, оптимальность по порядку, аппроксимация функций, оценка погрешности, обратная прикладная задача, оптимальное управление, операторно-дифференциальное уравнение.

A. L. Ageev, V. V. Arestov, V. V. Vasin. International Conference “Algorithmic Analysis of Unstable Problems (AAUP-2011)”.

Since 1995, Yekaterinburg hosts the triennial conference on ill-posed and inverse problems dedicated to the memory of the outstanding Russian scientist, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the USSR V.K. Ivanov. The previous conference was held in 2008 and was dedicated to the 100th anniversary of the birth of V.K. Ivanov. The 6th conference was held from October 31 to November 5, 2011. The paper presents a review of this conference.

Keywords: ill-posed problem, regularizing algorithm, order optimality, approximation of functions, error estimate, inverse applied problem, optimal control, operator differential equation.

31 октября – 5 ноября 2011 года на Урале в шестой раз прошла международная конференция “Алгоритмический анализ неустойчивых задач (ААНЗ-2011)”. Традиционное место ее проведения — база отдыха “Трубник” (с. Курганово в 30 км от Екатеринбурга). Конференция была организована Институтом математики и механики УрО РАН (головная организация) и Уральским федеральным университетом при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Уральского отделения РАН.

Международный программный комитет: В.В. Васин (председатель), В. В. Арестов (сопредседатель), А.Л. Агеев, А.С. Апарцин, В.И. Бердышев, А.М. Денисов, С.И. Кабанихин, В.И. Максимов, П.С. Мартышко, И.В. Мельникова, В.А. Морозов, В.Г. Пименов, В.Г. Романов, Ю.Н. Субботин, В.П. Танана, М.Ю. Хачай, Г.В. Хромова, А.Г. Ягола, А. Hasanoglu (Hasanov) (Turkey), В. Hofmann (Germany), М. Nashed (USA), Neubauer (Austria), G. Vainikko (Estonia), Y. Wang (China), М. Yamamoto (Japan).

Локальный оргкомитет: А.Л. Агеев (председатель), Е.Н. Акимова, Т.В. Антонова, А.Г. Бабенко, Д.В. Белоусов, А.Н. Борбунов, М.И. Гомоюнов, К.Н. Гурьянова, М.В. Дейкалова, Б.В. Дигас, М.А. Короткий, С.И. Кумков, Е.И. Паршикова, Г.Я. Пересторонина, Т.И. Сережникова, В.Д. Скарин, Г.Г. Скорик, А.Н. Уваров, П.А. Чистяков.

В сборнике тезисов докладов [1] опубликовано 160 работ. В работе конференции приняли участие 132 человека из 16 городов Российской Федерации, в том числе 6 членов-корреспондентов РАН, 36 докторов и 38 кандидатов наук, а также студенты, магистранты, аспиранты и молодые сотрудники научно-исследовательских институтов. 6 зарубежных участников прибыли в Екатеринбург из Германии, Турции, Польши, Алжира и Казахстана. На конференции обсуждались современные достижения в области теории регуляризации и методов аппроксимации решений некорректно поставленных и обратных задач, возникающих в теоретических исследованиях и при математическом моделировании проблем геофизики, механики, экономики, управления, археологии и химии. Тематика докладов охватывала широкий спектр исследований по современным направлениям фундаментальной и прикладной математики.

В первой половине дня конференции были заслушаны пленарные доклады (30 мин.) для всех участников, во второй половине работали три секции:

1. Теоретические основы и общие методы регуляризации и аппроксимации.
  2. Математическое моделирование и алгоритмический анализ обратных задач естествознания и инженерии.
  3. Неустойчивые дифференциально-операторные уравнения и задачи оптимизации.
- Программа конференции включала также пленарные секционные доклады (30 мин.) и секционные доклады (20 мин.).

На конференции было представлено 18 научных пленарных докладов:

1. A. Hasanoglu (Hasanov). Some new inverse problems in non-linear mechanics and materials science.
2. А.Л. Агеев, Т.В. Антонова. Навигация и некоторые проблемы обработки изображений.
3. А.С. Апарцин. Полиномиальные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта.
4. В.В. Арестов. Точные интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов.
5. А.Б. Бакушинский. Полиномиальный метод приближенного решения задач квадратичного и линейного программирования на основе принципа итеративной регуляризации.
6. В.И. Бердышев. Навигация по геофизическим полям и связанные с ней экстремальные задачи.
7. В.В. Васин. Методы регуляризации Тихонова и фейеровские процессы.
8. А.М. Денисов. Обратная задача для линеаризованной математической модели возбуждения сердца.
9. А.И. Кожанов. Обратные задачи для уравнений с частными производными и задачи с нелокальными краевыми условиями.
10. А.В. Кряжимский, В.И. Максимов. О некоторых задачах динамической реконструкции и устойчивого управления.
11. П.С. Мартышко, И.В. Ладовский. Решение обратной задачи для уравнения теплопроводности.
12. И.В. Мельникова. Дифференциальные задачи со случайными возмущениями в бесконечномерных пространствах. Регуляризованные и обобщенные решения.
13. Э.М. Мухамадиев, Г.Э. Гришанина. О применении метода регуляризации к построению классического решения уравнения Пуассона.
14. В.Г. Романов. Двумерная обратная задача вязкоупругости.
15. И.П. Рязанцева. Непрерывные методы регуляризации для смешанных вариационных неравенств в гильбертовом пространстве.
16. В.П. Танана, Т.С. Камалтдинова. О принципе невязки при выборе параметра регуляризации и приложения к решению обратных задач в классе кусочно-гладких функций.
17. А.П. Хромов, Г.В. Хромова. Регуляризация интегрального уравнения первого рода с инволюцией.
18. А.Г. Ягола. Новые прикладные обратные задачи.

Сравнивая нынешнюю конференцию с предыдущими, можно отметить оживление прикладной тематики. Здесь был представлен целый ряд серьезных прикладных работ или обзоров прикладных работ по грави- и магниторазведке, обработке данных биофизических измерений, проектированию антенн, интерпретации результатов термогидродинамических исследований скважин, спектроскопии многослойных наногетероструктур, зондированию атмосферы на содержание парниковых газов, гидролокационному зондированию и многим другим разделам естествознания.

По сравнению с предыдущей конференцией выросло также число молодых участников. Благодаря финансированию РФФИ удалось снизить сумму оргвзноса для молодых ученых. Молодые участники конференции выступили более чем с 40 сообщениями в качестве либо докладчиков, либо соавторов докладов, участвовали в пленарных и секционных сессиях.



Участники международной конференции “Алгоритмический анализ неустойчивых задач (ААНЗ-2011)”.

Оргкомитетом были предусмотрены и проведены общие для всех секций заседания, где прозвучали доклады, ориентированные прежде всего на молодых участников:

1. В.В. Арестов. Биографический очерк. Научное наследие В.К. Иванова.
2. Т.А. Сушкевич, А.Л. Агеев. Выдающийся российский математик и механик 20 столетия. К 100-летию со дня рождения М.В. Келдыша.
3. А.Г. Ягола. Как корректно решать некорректные задачи?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Международ. конф., посвящен. памяти В.К. Иванова, Екатеринбург, 31 окт. – 5 нояб. 2011 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. 306 с.

Агеев Александр Леонидович

Поступила 01.12.2011

д-р физ.-мат. наук

вед. науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: ageev@imm.uran.ru

Арестов Виталий Владимирович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. кафедрой

Уральский федеральный университет

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: Vitalii.Arestov@usu.ru

Васин Владимир Васильевич

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

зав. отделом

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: vasin@imm.uran.ru

**ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН**

**Том 18**

**№ 1**

**2012**

Учредитель  
Учреждение Российской академии наук  
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;  
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения  
в связи с переименованием учредителя.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Е. Е. Понизовкина  
Т<sub>E</sub>X-редактор Н. Н. Моргунова  
Фото на с. 4, с. 331 В. А. Переломов

Отв. за выпуск Т. В. Антонова, Г. Г. Скорик

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

---

Подписано в печать 15.02.12. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 39. Уч.-изд. л. 28. Тираж 200 экз.

---

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16  
Институт математики и механики УрО РАН  
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”  
тел. (343) 375-34-58  
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии  
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”  
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226