РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 17, № 4 2011

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 17 № 4 2011

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 17, № 4. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. 328 с.

ISSN 0134–4889

Том 17 № 4 2011

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 519.174

ХРОМАТИЧЕСКАЯ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСОТЫ ≤ 3 В РЕШЕТКАХ ПОЛНЫХ МНОГОДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

В. А. Баранский, Т. А. Сеньчонок

Доказано, что если n и t — натуральные числа такие, что $0 < t < n$, и h — неотрицательное целое число ≤ 3, то любой полный t-дольный n-граф с неодноэлементными долями, имеющий высоту h в решетке $NPL(n,t)$ разбиений натурального числа n на t слагаемых, является хроматически определяемым.

Ключевые слова: разбиение натурального числа, решетка, граф, полный многодольный граф, хроматический многочлен, хроматическая определяемость.

V. A. Baranskii, T. A. Sen'chonok. Chromatic uniqueness of elements of height ≤ 3 in lattices of complete multipartite graphs.

The purpose of the paper is to prove the following theorem. Let integers n, t, and h be such that $0 < t < n$ and $h \leq 3$. Then, any complete t-partite graph with nontrivial parts that has height h in the lattice $NPL(n,t)$ is chromatically unique.

Keywords: integer partition, lattice, graph, complete multipartite graph, chromatic polynomial, chromatic uniqueness.

Введение

Данная работа является продолжением работ [1; 2], поэтому мы будем придерживаться терминологии и обозначений, используемых в них.

Пусть $n = n_1+n_2+\ldots+n_t$ — разбиение натурального числа n, где $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 1$ [3]. Через $K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ будем обозначать полный t-дольный граф на n вершинах с долями размеров $n_1, n_2, \ldots, n_t$. С точностью до изоморфизма существует взаимно однозначное соответствие между полными t-дольными графами на n вершинах и элементами решетки $NPL(n,t)$ (т. е. разбиениями натурального числа n на t слагаемых [4]). Поэтому мы можем отождествлять полный многодольный граф на n вершинах с соответствующим ему разбиением числа n. Конечно, порядок $\geq$ на $NPL(n,t)$ можно рассматривать как порядок на множестве полных t-дольных графов на n вершинах. Далее через q и r будем соответственно обозначать частное и остаток от деления числа n на t.

Два графа называются *хроматически эквивалентными* или *χ-эквивалентными*, если они имеют одинаковые хроматические многочлены [5]. Граф называется *хроматически определяемым*, если он изоморфен любому хроматически эквивалентному ему графу. Это понятие было введено в работе [6]. Поиску хроматически определяемых графов посвящено значительное число исследований (см. обзор [7]). В частности, в работе [8] доказано, что хроматически определяемы полные многодольные графы, являющиеся наименьшими элементами в решетках $NPL(n,t)$. В работах [2; 9] установлена хроматическая определяемость элементов высоты 1 и 2 в решетках $NPL(n,t)$.

В ходе многочисленных исследований сформировалась следующая гипотеза: хроматически определяем любой полный многодольный граф $K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ при $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 2$.

К настоящему времени эта гипотеза подтверждена при больших значениях числа n_t в зависимости от n и t [7] и, как мы видим, для элементов высоты 0, 1 и 2 в решетках $NPL(n,t)$.

Целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Пусть n и t — натуральные числа такие, что $0 < t < n$, и h — неотрицательное целое число ≤ 3. Тогда любой полный t-дольный n-граф с неодноэлементными долями, имеющий высоту h в решетке $NPL(n,t)$, является хроматически определяемым.*

Заметим, что при $t = 3$ утверждение данной теоремы было доказано в работах [10–12]. В работе же [13] установлено, что полный двудольный граф $K(n_1, n_2)$ хроматически определяем при $n_1 \geq n_2 \geq 2$. В силу отмеченного для доказательства теоремы осталось исследовать случай $t \geq 4$ и $h = 3$.

1. Некоторые хроматические инварианты графов и их свойства

Хорошо известно, что хроматическим инвариантом графа является число его ребер [5]. Для графа G будем обозначать его через $I_2(G)$. Хроматическим инвариантом является также $I_3(G)$ — число треугольников в G (см. [14] или [15]).

Далее через $\mathrm{pt}(G, i)$ мы будем обозначать число разбиений множества вершин графа G на i непустых коклик, т.е. подмножеств, состоящих из попарно несмежных вершин. В силу теоремы Зыкова (см., например, [16]) числа $\mathrm{pt}(G, i)$ при $\chi \leq i \leq n$ являются хроматическими инвариантами, где $\chi = \chi(G)$ — хроматическое число графа G, т. е. наименьшее число красок, необходимых для раскраски графа G.

Для полного t-дольного n-графа $K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$, где $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 1$, выполняется равенство $\chi = t$, и раскраска графа в t красок дает единственное разбиение его вершин на t коклик — долей этого графа. Известно, что $\mathrm{pt}(K(n_1, n_2, \ldots, n_t), t+1) = 2^{n_1 - 1} + \ldots + 2^{n_t - 1} - t$. Под *$s$-разбиением* графа будем понимать разбиение множества его вершин на s коклик.

Далее при доказательстве хроматической определяемости графа $G = K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$, где $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t \geq 2$, мы всегда будем рассматривать некоторый хроматически эквивалентный ему граф H и от противного предполагать, что H неизоморфен G. Для такого графа H хроматическое число равно t и $\mathrm{pt}(H, t) = 1$. Рассмотрим его t-разбиение с долями размера $v_1, v_2, \ldots, v_t$, где $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_t \geq 1$ и $n = v_1 + v_2 + \ldots + v_t$. Через $V_1, V_2, \ldots, V_t$ обозначим множества вершин соответствующих *долей* графа H. Положим $V = V_1 \cup \ldots \cup V_t$. Предположим, что H не является полным t-дольным графом. Тогда $H = K(v_1, v_2, \ldots, v_t) - E$ для некоторого непустого множества E ребер графа $K(v_1, v_2, \ldots, v_t)$. Ясно, что $I_2(K(v_1, v_2, \ldots, v_t)) = I_2(G) + |E|$, так как $I_2(H) = I_2(G)$. Далее для простоты граф $K(v_1, v_2, \ldots, v_t)$ мы будем записывать в виде $K(v)$, где $v = (v_1, v_2, \ldots, v_t)$. Через E_{ij} будем обозначать множество ребер, каждое из которых соединяет вершину из V_i с вершиной из V_j, где $i, j \in \{1, \ldots, t\}$ и $i \neq j$, а через e_{ij} — мощность множества E_{ij}.

Для малых значений числа $|E|$ подсчитаем число $\Delta = \Delta\mathrm{pt}(H, K(v))$, равное по определению $\mathrm{pt}(H, t+1) - \mathrm{pt}(K(v), t+1)$. Ясно, что любое s-разбиение для $K(v)$ при $t \leq s \leq n$ будет s-разбиением и для H. Для подсчета Δ нам надо лишь подсчитать число *новых* $(t+1)$-*разбиений* графа H, которые возникают из единственного t-разбиения графа $K(v)$ за счет удаления ребер множества E из $K(v)$.

Для любых непустых множеств U и D вершин и ребер графа $K(v)$ через $\langle U \rangle$ и $\langle D \rangle$ соответственно будем обозначать вершинно и реберно порожденные подграфы графа $K(v)$ [16]. Полные многодольные вершинно порожденные подграфы графа $\langle E \rangle$ (не являющиеся нулевыми графами) будем называть его *E-подграфами*. Заметим, что подмножество из V является кокликой графа H, не содержащейся ни в одной из его долей, тогда и только тогда, когда оно совпадает с множеством вершин некоторого E-подграфа. *Гирляндой* мощности p будем называть непустое семейство подмножеств $U_1, \ldots, U_p \subseteq V$ такое, что $\langle U_1 \rangle, \ldots, \langle U_p \rangle$ — семейство попарно непересекающихся E-подграфов.

Нетрудно заметить, что любое новое s-разбиение графа H имеет вид $U_1, \ldots, U_p, U_{p+1}, \ldots, U_s$, где $1 \leq p \leq s$, $U_1, \ldots, U_p$ — гирлянда и для любого $j = p+1, \ldots, s$ существует $i \in \{1, \ldots, t\}$ такое, что $U_j \subseteq V_i \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_p)$. Будем говорить, что $U_1, \ldots, U_p$ является *гирляндой* данного *нового разбиения*.

Пусть a — *число долей* графа $K(v)$, *уничтожаемых гирляндой* $U_1, \dots, U_p$, т. е. число таких долей V_i, что $V_i \backslash (U_1, \dots, U_p) = \varnothing$. Через b обозначим число долей графа $K(v)$, неуничтожаемых данной гирляндой. Ясно, что $a + b = t$. Отметим, что гирлянда $U_1, \dots, U_p$ и совокупность непустых множеств вида $V_i \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_p)$ образуют $(p+b)$-разбиение графа H. Поскольку $\chi(H) = t$ и $\mathrm{pt}(H,t) = 1$, отсюда замечаем, что $p + b > t$, т. е. $p > t - b = a$. Таким образом, справедлива следующая

Лемма 1. *Любая гирлянда мощности p уничтожает не более $p-1$ долей.*

Если $a = p - 1$, то $p + b = a + 1 + b = t + 1$ и данная гирлянда является гирляндой точно одного $(t+1)$-разбиения графа H. Если $a \leq p - 2$, то $p + b \geq t + 2$ и данная гирлянда не является гирляндой ни одного $(t+1)$-разбиения графа H. В этом случае она будет гирляндой некоторых s-разбиений при $s \geq t + 2$. Следовательно, справедлива

Лемма 2. *Новые $(t+1)$-разбиения графа H находятся во взаимно однозначном соответствии с гирляндами мощности p, уничтожающими точно $p-1$ долей графа $K(v)$.*

Будем называть долю V_i графа $K(v)$ *особой*, если каждая ее вершина инцидентна некоторому ребру из E. *Особой звездой* (или *особой k-звездой*) графа $K(v)$ будем называть множество ребер $e_1, \dots, e_k$ из E такое, что существуют вершины $x_1, \dots, x_k, y$ графа $K(v)$, для которых $e_1 = x_1 y, \dots, e_k = x_k y$ и $\{x_1, \dots, x_k\} = V_i$ для некоторого i. Здесь V_i — особая доля графа $K(v)$.

Лемма 3. *В графе $K(v)$ не может существовать особой звезды.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Особой звезде графа $K(v)$ отвечает одноэлементная гирлянда, которая уничтожает не менее одной доли графа H. Как отмечено выше, существование таких гирлянд невозможно. □

Отметим, что в графе $K(v)$ на основании леммы 3 не может существовать одноэлементной особой доли.

Непустое подмножество $E' \subseteq E$ будем называть *реберной гирляндой индекса p*, если существуют подмножества $E_1, \dots, E_p \subseteq E$ такие, что $E' = E_1 \cup \ldots \cup E_p$ и $\langle E_1 \rangle, \dots, \langle E_p \rangle$ является семейством попарно непересекающихся E-подграфов. Ясно, что здесь семейство $U_1, \dots, U_p \subseteq V$, где U_i — множество вершин графа $\langle E_i \rangle$ $(i = 1, \dots, p)$, является гирляндой мощности p. Будем говорить, что гирлянда $U_1, \dots, U_p$ *отвечает* реберной гирлянде E'.

Лемма 4. *Любой реберной гирлянде отвечает точно одна гирлянда, при этом индекс реберной гирлянды совпадает с мощностью соответствующей ей гирлянды.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть E', $E_1, \dots, E_p, E'_1, \dots, E'_q \subseteq E$, $E' = E_1 \cup \ldots \cup E_p$, $E' = E'_1 \cup \ldots \cup E'_q$, $\langle E_1 \rangle, \dots, \langle E_p \rangle$ и $\langle E'_1 \rangle, \dots, \langle E'_q \rangle$ — два семейства попарно непересекающихся E-подграфов.

Если e_1 и e_2 — два смежных ребра из E' и $e_1 \in E'_j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, q\}$, то, очевидно, $e_2 \in E'_j$. Используя это замечание и свойства полных многодольных графов, нетрудно установить, что для любого $i = 1, \dots, p$ существует $j \in \{1, \dots, q\}$ такое, что $E_i \subseteq E'_j$. Аналогично для любого $j = 1, \dots, q$ существует $i \in \{1, \dots, p\}$ такое, что $E'_j \subseteq E_i$. Отсюда следует, что семейства множеств $\{E_1, \dots, E_p\}$ и $\{E'_1, \dots, E'_q\}$ совпадают. □

Из леммы 4, очевидно, вытекает

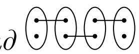
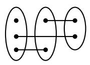
Следствие 1. *Существует взаимно однозначное соответствие между гирляндами и реберными гирляндами.*

Для удобства в дальнейшем будем говорить, что реберная гирлянда *уничтожает* некоторую *долю графа* $K(v)$, если эту долю уничтожает отвечающая ей гирлянда.

Следствие 2. *Если* $|E| = k$, *то* $k \leq \Delta = \Delta\mathrm{pt}(H, K(v)) \leq 2^k - 1$.

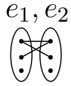
Доказательство. Поскольку в графе $K(v)$ нет одноэлементных особых долей, каждому ребру из E отвечают E-подграф и новое $(t+1)$-разбиение графа H. Следовательно, $k \leq \Delta$.

Осталось заметить, что в силу следствия 1 число гирлянд мощности p, уничтожающих $p-1$ долей, не превосходит числа реберных гирлянд, которое, свою очередь, не превосходит число непустых подмножеств множества E. □

Лемма 5. *Пусть* $|E| = 3$ *и* $\Delta = \Delta\mathrm{pt}(H, K(v)) = 6$. *Тогда ребра из* E *имеют вид*  *или*  *(здесь изображены доли, имеющие вершины, инцидентные ребрам из* E, *причем в доле ставится точка в том и только в том случае, когда она неособая).*

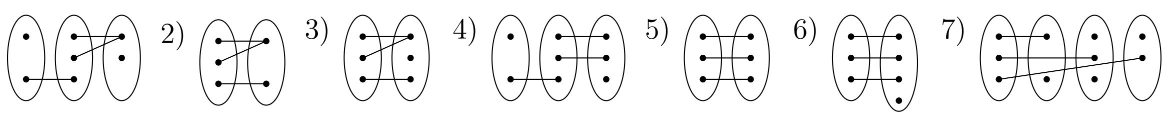
Доказательство. Очевидно, при $|E| = 3$ в графе $K(v)$ могут существовать E-подграфы лишь следующих типов: $K(1,1)$, $K(2,1)$, $K(1,1,1)$, $K(3,1)$.

Если в $K(v)$ имеется E-подграф типа $K(3,1)$, то ввиду отсутствия в $K(v)$ особых звезд получаем $\Delta = 7$. Если же в $K(v)$ имеется E-подграф типа $K(1,1,1)$, то $\Delta = 4$. Таким образом, в $K(v)$ могут существовать лишь E-подграфы типов $K(1,1)$ и $K(2,1)$.

1-й случай. Пусть в графе $K(v)$ нет особых долей. Тогда каждое новое $(t+1)$-разбиение графа H задается гирляндой, состоящей лишь из одного E-подграфа. Если в E существует ребро, не образующее E-подграфов с другими ребрами из E, то $\Delta \leq 1 + 3 = 4$. Следовательно, любое ребро из E образует E-подграф типа $K(2,1)$ хотя бы с одним ребром из E. Возьмем два ребра e_1, e_2, образующих E-подграф типа $K(2,1)$. Третье ребро $e_3 \in E$ образует E-подграф типа $K(2,1)$ хотя бы с одним из ребер e_1, e_2. Поскольку $\langle E\rangle$ не является графом типа $K(3,1)$, ребра e_1, e_2, e_3 образуют простую цепь  и $\Delta = 5$.

2-й случай. Пусть в графе $K(v)$ имеется особая доля.

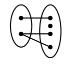
2.1. Пусть в графе $K(v)$ имеется трехэлементная особая доля. Тогда необходимо рассмотреть лишь следующие случаи:



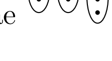
1) $\Delta = 5$; 2); 3) $\Delta = 5$; 4) $\Delta = 3$; 5) $\Delta = 4$; 6) $\Delta = 3$; 7) $\Delta = 3$.

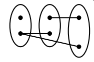
Отметим, что случай 2) невозможен, так как в такой ситуации существует гирлянда мощности 2, уничтожающая две доли.

2.2. В графе $K(v)$ не существует трехэлементной особой доли. Тогда в $K(v)$ существует двухэлементная особая доля. Поскольку в $K(v)$ отсутствуют особые 2-звезды, осталось лишь рассмотреть два следующих случая.

2.2.1. Пусть существуют различные элементы $x_1, x_2 \in V_i$, $y_1, y_2 \in V_j$, $e_1, e_2 \in E_{ij}$, где $i \neq j$ такие, что $e_1 = x_1y_1$, $e_2 = x_2y_2$ и $V_i = \{x_1, x_2\}$. Тогда $\{y_1, y_2\} \subset V_j$, иначе существует гирлянда мощности 2, уничтожающая две доли. Поскольку в $K(v)$ нет особых 2-звезд, третье ребро e_3 из E не может быть смежно обоим ребрам e_1 и e_2. В случае  имеем $\Delta = 7$, а во всех остальных случаях, очевидно, $\Delta \leq 5$.

2.2.2. Пусть в E не существует пар ребер вида, указанного в условии п. 2.2.1. Тогда существуют различные элементы $x_1, x_2 \in V_i$, $y_1 \in V_j$, $y_2 \in V_l$, $e_1 \in E_{ij}$, $e_2 \in E_{il}$, где i, j, l попарно различны, такие, что $V_i = \{x_1, x_2\}$, $e_1 = x_1y_1$ и $e_2 = x_2y_2$. Здесь V_i — особая доля.

Если V_i — единственная двухэлементная особая доля, то в случае  имеем $\Delta = 7$, а во всех остальных случаях $\Delta \leq 5$.

Пусть имеется две двухэлементные особые доли. В случаях, указанных в заключении леммы, имеем $\Delta = 6$, а в еще одном случае  имеем $\Delta = 5$. $\square$

Зафиксируем элементарное преобразование разбиений из $NPL(n,t)$:
$u = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_t) \Rightarrow v = (u_1, \ldots, u_i - 1, \ldots, u_j + 1, \ldots, u_t)$, где $i < j$, $u_i = u_j + \delta$ и $\delta \geq 2$. В работе [2] были доказаны следующие утверждения.

Лемма 6 [2, леммы 3,4,5]. 1) $I_2(u) - I_2(v) = -(\delta - 1)$.
2) $I_3(u) - I_3(v) = -(\delta - 1)(n - u_i - u_j)$.
3) $\Delta\mathrm{pt}(u,v) = 2^{u_j - 1}(2^{\delta - 1} - 1)$.

2. Доказательство теоремы

В силу леммы 6 при выполнении элементарного преобразования инвариант I_2 увеличивается. Будем говорить, что элемент u имеет *уровень* k, если $I_2(b_1) - I_2(u) = k$, где b_1 — наименьший элемент решетки. Для доказательства хроматической определяемости графа $G = K(n_1, n_2, \ldots, n_t)$ рассмотрим граф H, χ-эквивалентный графу $K(u)$, где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_t)$. В [7, с. 119] доказано, что любой полный многодольный граф хроматически определяем в классе всех полных многодольных графов, т. е. из хроматической эквивалентности двух полных многодольных графов вытекает их изоморфизм. Поэтому от противного будем считать, что $H = K(v) - E$ для некоторого множества ребер E. Ясно, что элемент v будет находиться k уровнями ниже u в решетке $NPL(n,t)$, где $k = |E|$.

Начнем рассмотрение нижних этажей решетки $NPL(n,t)$ с элементов высоты 3, имеющих третий уровень. Это элементы b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11} и b_{12} (см. [1]):

$$b_7 = (q+3, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r-3}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r+2}), \quad 3 \leq r \leq t-1, \quad q \geq 1;$$
$$b_8 = (q+2, q+2, q+2, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r-6}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r+3}), \quad 6 \leq r \leq t-1, \quad q \geq 1;$$
$$b_9 = (q+2, q+2, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r-3}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r}, q-1), \quad 3 \leq r \leq t-1, \quad q \geq 2;$$
$$b_{10} = (q+2, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r-3}, q-1, q-1), \quad 0 \leq r \leq t-3, \quad q \geq 2;$$
$$b_{11} = (\underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r+3}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r-6}, q-1, q-1, q-1), \quad 0 \leq r \leq t-6, \quad q \geq 2;$$
$$b_{12} = (\underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r+2}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r-3}, q-2), \quad 0 \leq r \leq t-3, \quad q \geq 3.$$

На рис. 1 приведены нижние этажи решетки $NPL(n,t)$ в случае $6 \leq r \leq t-6$ (в других случаях имеется лишь фрагмент этого частично упорядоченного множества, см. [1]).

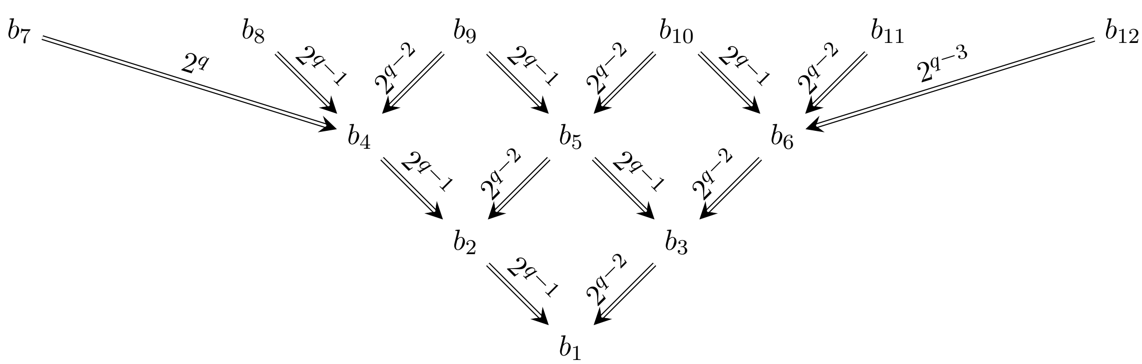


Рис. 1.

На рис. 1 рядом с символами покрытий представлены числа, на которые изменяются инварианты $\mathrm{pt}(u, t+1)$, подсчитанные по лемме 6.

Следует отметить, что в [2] была доказана хроматическая определяемость графов $K(b_7)$ и $K(b_{12})$ как элементов высоты 2 при $3 = r \leq t-1$ и $0 \leq r = t-3$ соответственно. Доказательства для других r в случае высоты 3 проводятся аналогично, поэтому рассматривать их здесь мы не будем.

Сначала попробуем найти графы, эквивалентные данным, удаляя некоторые ребра из графов, лежащих на более низком уровне в решетке $NPL(n, t)$. Начнем с элементов 2-го уровня, в которых ровно на одно ребро меньше:

$$b_4 = (q+2, q+2, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r-4}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r+2}), \quad 4 \leq r \leq t-1, \quad q \geq 1;$$
$$b_5 = (q+2, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r-1}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r-1}, q-1), \quad 1 \leq r \leq t-1, \quad q \geq 2;$$
$$b_6 = (\underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r+2}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r-4}, q-1, q-1), \quad 0 \leq r \leq t-4, \quad q \geq 2.$$

Элементы b_4, b_5 и b_6 получаются из элементов третьего уровня путем одного элементарного преобразования (сдвига). Для этого случая верно некоторое общее утверждение.

Лемма 7 [2, лемма 7]. *Пусть* $u = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_t) \Rightarrow v = (u_1, \ldots, u_i - 1, \ldots, u_j + 1, \ldots, u_t)$, $u_t \geq 2$ *и* $\delta = u_i - u_j = 2$. *Тогда из графа* $K(v)$ *путем удаления одного ребра нельзя получить граф,* χ*-эквивалентный графу* $K(u)$.

Для элементов b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11} и b_{12} существуют покрытия $b_7 \Rightarrow b_4$, $b_8 \Rightarrow b_4$, $b_9 \Rightarrow b_4$, $b_9 \Rightarrow b_5$, $b_{10} \Rightarrow b_5$, $b_{10} \Rightarrow b_6$, $b_{11} \Rightarrow b_6$ и $b_{12} \Rightarrow b_6$, причем в каждом из покрытий $\delta = 2$. Если для b_i $(i = \overline{7, 12})$ последняя компонента ≥ 2, то для $K(b_i)$ нельзя в силу леммы 7 получить χ-эквивалентный граф, отбрасывая одно ребро из покрываемого им графа. Соответствующие пары для графов $K(b_7)$ и $K(b_{12})$ уже рассмотрены в [2]. Рассмотрим оставшиеся пары.

Лемма 8. 1) При $q \geq 2$ из графов $K(b_5)$ и $K(b_6)$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_8)$.

2) При $q \geq 3$ из графа $K(b_6)$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_9)$.

3) При $q \geq 3$ из графа $K(b_4)$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{10})$.

4) При $q \geq 3$ из графов $K(b_4)$ и $K(b_5)$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{11})$.

Доказательство. 1) Пусть $H = K(b_5) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_8)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_8, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_5) = \Delta\mathrm{pt}(b_8, b_5)$. Кроме того, имеем $\Delta\mathrm{pt}(b_8, b_5) = \mathrm{pt}(b_8, t+1) - \mathrm{pt}(b_4, t+1) + \mathrm{pt}(b_4, t+1) - \mathrm{pt}(b_2, t+1) + \mathrm{pt}(b_2, t+1) - \mathrm{pt}(b_5, t+1) = \Delta\mathrm{pt}(b_8, b_4) + \Delta\mathrm{pt}(b_4, b_2) - \Delta\mathrm{pt}(b_5, b_2) = 2^{q-1} + 2^{q-1} - 2^{q-2} = 3 \cdot 2^{q-2} \geq 3$. Однако по следствию 2 $\Delta\mathrm{pt}(H, b_5) = 1$, пришли к противоречию.

Пусть $H = K(b_6) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_8)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_8, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_6) = \Delta\mathrm{pt}(b_8, b_6)$. Кроме того, имеем $\Delta\mathrm{pt}(b_8, b_6) = \Delta\mathrm{pt}(b_8, b_4) + \Delta\mathrm{pt}(b_4, b_2) + \Delta\mathrm{pt}(b_2, b_1) - \Delta\mathrm{pt}(b_3, b_1) - \Delta\mathrm{pt}(b_6, b_3) = 3 \cdot 2^{q-1} - 2 \cdot 2^{q-2} = 2 \cdot 2^{q-1} = 2^q \geq 4$. Однако $\Delta\mathrm{pt}(H, b_6) = 1$, пришли к противоречию.

2) Пусть $H = K(b_6) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_9)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_9, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_6) = \Delta\mathrm{pt}(b_9, b_6)$. Кроме того, имеем $\Delta\mathrm{pt}(b_9, b_6) = \Delta\mathrm{pt}(b_9, b_5) + \Delta\mathrm{pt}(b_5, b_3) - \Delta\mathrm{pt}(b_6, b_3) = 2 \cdot 2^{q-1} - 2^{q-2} = 3 \cdot 2^{q-2} \geq 6$. Однако $\Delta\mathrm{pt}(H, b_6) = 1$, пришли к противоречию.

3) Пусть $H = K(b_4) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_{10})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{10}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_4) = \Delta\mathrm{pt}(b_{10}, b_4)$. Кроме того, имеем $\Delta\mathrm{pt}(b_{10}, b_4) = 2\cdot 2^{q-2} - 2^{q-1} = 0$. Однако $\Delta\mathrm{pt}(H, b_4) = 1$, пришли к противоречию.

4) Пусть $H = K(b_4) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_{11})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{11}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_4) = \Delta\mathrm{pt}(b_{11}, b_4)$. Кроме того, имеем $\Delta\mathrm{pt}(b_{11}, b_4) = 3\cdot 2^{q-2} - 2\cdot 2^{q-1} = -2^{q-2} \leq 0$. Однако $\Delta\mathrm{pt}(H, b_4) = 1$, пришли к противоречию.

Пусть $H = K(b_5) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_{11})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{11}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_5) = \Delta\mathrm{pt}(b_{11}, b_5)$. Кроме того, имеем $\Delta\mathrm{pt}(b_{11}, b_5) = 2\cdot 2^{q-2} - 2^{q-1} = 0$. Однако $\Delta\mathrm{pt}(H, b_5) = 1$, пришли к противоречию. $\square$

На этом можно закончить рассмотрение элементов 2-го уровня и перейти к атомам решетки, в них на 2 ребра меньше, чем в интересующих нас графах. Это элементы b_2 и b_3:

$$b_2 = (q+2, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r-2}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r+1}), \quad 2 \leq r \leq t-1, \quad q \geq 1;$$
$$b_3 = (\underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r+1}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r-2}, q-1), \quad 0 \leq r \leq t-2, \quad q \geq 2.$$

Получение из $K(b_2)$ и $K(b_3)$ χ-эквивалентных графов для $K(b_7)$ и $K(b_{12})$ уже рассмотрено в [2]. Стоит отдельно остановиться только на случае удаления ребер из $K(b_2)$ при $q = 4$ для получения графа, χ-эквивалентного $K(b_{12})$. При рассмотрении этого случая привлечем инвариант I_3. Легко видеть, что если $H = K(w) - E$, то $\Delta I_3(w, H) = I_3(w) - I_3(H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3$, где $\xi_1 = \sum_{e\in E} \xi(e)$ (здесь $\xi(e)$ — число треугольников в $K(w)$, содержащих e), $\xi_2(\xi_3)$ — количество треугольников ровно с двумя (тремя) ребрами из E.

Лемма 9. *Пусть $q = 4$. Тогда из графа $K(b_2) = K(6, \underbrace{5, \ldots, 5}_{r-2}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r+1})$ путем удаления двух ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{12}) = K(\underbrace{5, \ldots, 5}_{r+2}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r-3}, 2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{12})$. Тогда $\xi_2 \leq 1$ и $\xi_3 = 0$. Так как

$$b_{12} = (\underbrace{5, \ldots, 5}_{r+2}, \overrightarrow{\underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r-3}, 2}) \;\Rightarrow\; b_6 = (\underbrace{5, \ldots, \overrightarrow{5}}_{r+2}, \overrightarrow{\underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r-4}, 3}, 3) \;\Rightarrow\; b_3 = (\underbrace{5, \ldots, \overrightarrow{5}}_{r+1}, \overrightarrow{\underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r-2}, 3})$$

$$\Rightarrow\; b_1 = (\underbrace{5, \ldots, 5}_{r}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r}) \;\Leftarrow\; b_2 = (\overrightarrow{6, \underbrace{5, \ldots, 5}_{r-2}, 4}\!\!\!\underbrace{, \ldots, 4}_{t-r+1}),$$

по лемме 6 выполняется равенство

$$\Delta I_3(b_{12}, b_2) = \Delta I_3(b_{12}, b_6) + \Delta I_3(b_6, b_3) + \Delta I_3(b_3, b_1) - \Delta I_3(b_2, b_1)$$

$$= -(n-6) - (n-8) - (n-8) + (n-10) = -n + 6 - n + 8 - n + 8 + n - 10 = -2(n-6).$$

Так как $I_3(b_{12}) = I_3(H)$, получаем $\Delta I_3(b_2, H) = 2(n-6)$. Поскольку $\Delta I_3(b_2, H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = \xi_1 - \xi_2$, заключаем, что $\xi_1 = 2(n-6) + \xi_2 \geq 2(n-6)$. С другой стороны, если $b_2 = (w_1, \ldots, w_t)$, то $\xi_1 = e_{12}(w_3 + \ldots + w_t) + \ldots + e_{t-1t}(w_1 + \ldots + w_{t-2}) = e_{12}(n - w_1 - w_2) + \ldots + e_{t-1t}(n - w_{t-1} - w_t) \leq (e_{12} + \ldots + e_{t-1t})(n - 4 - 4) = 2(n-8)$, пришли к противоречию с условием $\xi_1 \geq 2(n-6)$. $\square$

Лемма 10. *Пусть $q = 3$. Тогда из графа $K(b_2) = K(5, \underbrace{4, \ldots, 4}_{r-2}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{t-r+1})$ путем удаления двух ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{11}) = K(\underbrace{4, \ldots, 4}_{r+3}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{t-r-6}, 2, 2, 2)$.*

Доказательство. Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{11})$. Тогда $\xi_2 \le 1, \xi_3 = 0$. Так как

$$b_{11} = (\underbrace{4,\ldots,4}_{r+3},\overrightarrow{\underbrace{3,\ldots,3}_{t-r-6},2},2,2) \;\Rightarrow\; b_6 = (\underbrace{4,\ldots,4}_{r+2},\overrightarrow{\underbrace{3,\ldots,3}_{t-r-4},2},2)$$

$$\Rightarrow\; b_3 = (\underbrace{4,\ldots,4}_{r+1},\overrightarrow{\underbrace{3,\ldots,3}_{t-r-2},2}) \;\Rightarrow\; b_1 = (\underbrace{4,\ldots,4}_{r},\underbrace{3,\ldots,3}_{t-r}) \;\Leftarrow\; b_2 = (\overrightarrow{5,\underbrace{4,\ldots,4}_{r-2},3},\underbrace{3,\ldots,3}_{t-r+1}),$$

то по лемме 6 выполняется равенство

$$\Delta I_3(b_{11}, b_2) = \Delta I_3(b_{11}, b_6) + \Delta I_3(b_6, b_3) + \Delta I_3(b_3, b_1) - \Delta I_3(b_2, b_1)$$

$$= -(n-6) - (n-6) - (n-6) + (n-8) = -n+6-n+6-n+6+n-8 = -2(n-5).$$

Так как $I_3(b_{11}) = I_3(H)$, получаем $\Delta I_3(b_2, H) = 2(n-5)$. Поскольку $\Delta I_3(b_2, H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = \xi_1 - \xi_2$, заключаем, что $\xi_1 = 2(n-5) + \xi_2 \ge 2(n-5)$. С другой стороны, если $b_2 = (w_1, \ldots, w_t)$, то $\xi_1 = e_{12}(w_3 + \ldots + w_t) + \ldots + e_{t-1t}(w_1 + \ldots + w_{t-2}) = e_{12}(n - w_1 - w_2) + \ldots + e_{t-1t}(n - w_{t-1} - w_t) \le (e_{12} + \ldots + e_{t-1t})(n-3-3) = 2(n-6)$, пришли к противоречию с условием $\xi_1 \ge 2(n-5)$. □

Лемма 11. *Из графов $K(b_2)$ и $K(b_3)$ путем удаления двух ребер нельзя получить графы, χ-эквивалентные графу $K(b_8)$ при $q \ge 2$ и графам $K(b_9)$, $K(b_{10})$, $K(b_{11})$ при $q \ge 3$.*

Доказательство. Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_8)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_8, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(b_8, b_2)$. Отсюда в силу следствия 2 получаем $3 \ge \Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(b_8, b_4) + \Delta\mathrm{pt}(b_4, b_2) = 2 \cdot 2^{q-1} \ge 4$, пришли к противоречию.

Пусть $H = K(b_3) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_8)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_8, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) = \Delta\mathrm{pt}(b_8, b_3)$. Отсюда в силу следствия 2 получаем $3 \ge \Delta\mathrm{pt}(H, b_3) = \Delta\mathrm{pt}(b_8, b_4) + \Delta\mathrm{pt}(b_4, b_2) + \Delta\mathrm{pt}(b_2, b_1) - \Delta\mathrm{pt}(b_3, b_1) = 3 \cdot 2^{q-1} - 2^{q-2} = 5 \cdot 2^{q-2} \ge 5$, пришли к противоречию.

Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_9)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_9, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(b_9, b_2) = 2^{q-2} + 2^{q-1} = 3 \cdot 2^{q-2} \ge 6$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) \le 3$ в силу следствия 2.

Пусть $H = K(b_3) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_9)$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_9, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) = \Delta\mathrm{pt}(b_9, b_3) = 2 \cdot 2^{q-1} \ge 8$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) \le 3$ в силу следствия 2.

Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{10})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{10}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(b_{10}, b_2) = 2 \cdot 2^{q-2} \ge 4$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) \le 3$ в силу следствия 2.

Пусть $H = K(b_3) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{10})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{10}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) = \Delta\mathrm{pt}(b_{10}, b_3) = 2^{q-2} + 2^{q-1} = 3 \cdot 2^{q-2} \ge 6$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) \le 3$ в силу следствия 2.

Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{11})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{11}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(b_{11}, b_2) = 3 \cdot 2^{q-2} - 2^{q-1} = 2^{q-2}$. По следствию 2 имеем $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) \le 3$. Если $q \ge 4$, то $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = 2^{q-2} \ge 4$, что невозможно. Случай $q = 3$ рассмотрен в лемме 10.

Пусть $H = K(b_3) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{11})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{11}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) = \Delta\mathrm{pt}(b_{11}, b_3) = 2 \cdot 2^{q-2} \ge 4$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) \le 3$ в силу следствия 2. □

Для элементов b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11} и b_{12} третьего уровня разница в числе ребер этих графов и наименьшего элемента b_1 равна трем. Элемент b_1 имеет вид:

$$b_1 = (\underbrace{q+1,\ldots,q+1}_{r},\underbrace{q,\ldots,q}_{t-r}), \quad 0 \le r \le t-1, \quad q \ge 1.$$

Получение из $K(b_1)$ χ-эквивалентных графов для $K(b_7)$ и $K(b_{12})$ рассматривалось в [2].

Лемма 12. *Пусть $q = 2$. Тогда из графа $K(b_1) = K(\underbrace{3,\ldots,3}_{r},\underbrace{2,\ldots,2}_{t-r})$ путем удаления трех ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_8) = K(4,4,4,\underbrace{3,\ldots,3}_{r-6},\underbrace{2,\ldots,2}_{t-r+3})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(b_8)$. Тогда $\xi_2 \leq 3$ и $\xi_3 \leq 1$. Так как

$$b_8 = (4,4,\overrightarrow{4,\underbrace{3,\ldots,3}_{r-6},\underbrace{2},\ldots,2}_{t-r+3}) \Rightarrow b_4 = (4,\overrightarrow{4,\underbrace{3,\ldots,3}_{r-4},\underbrace{2},\ldots,2}_{t-r+2})$$

$$\Rightarrow b_2 = (\overrightarrow{4,\underbrace{3,\ldots,3}_{r-2},\underbrace{2},\ldots,2}_{t-r+1}) \Rightarrow b_1 = (\underbrace{3,\ldots,3}_{r},\underbrace{2,\ldots,2}_{t-r}),$$

по лемме 6 выполняется равенство

$$\Delta I_3(b_8,b_1) = \Delta I_3(b_8,b_4) + \Delta I_3(b_4,b_2) + \Delta I_3(b_2,b_1) = -(n-6) - (n-6) - (n-6) = -3(n-6).$$

Так как $I_3(b_8) = I_3(H)$, получаем $\Delta I_3(b_1,H) = 3(n-6)$. С другой стороны, $\Delta I_3(b_1,H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3$, следовательно, $\xi_1 = 3(n-6) + \xi_2 + 2\xi_3$. При этом $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = \Delta\mathrm{pt}(b_8,b_1) = 3\cdot 2^{q-1} = 6$. Из леммы 5 следует, что при удалении трех ребер выполняется равенство $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = 6$ только в двух случаях, при этом в графе две особые двухэлементные доли, а удаляемые ребра несмежны. Это значит, что $\xi_2 = \xi_3 = 0$, откуда $\xi_1 = 3(n-6)$. То есть удалены 3 ребра между трехэлементными долями, но тогда в графе нет двухэлементных особых долей, получили противоречие. □

Лемма 13. *Из графа $K(b_1)$ путем удаления трех ребер нельзя получить графы, χ-эквивалентные графу $K(b_8)$ при $q \geq 2$ и графам $K(b_9)$, $K(b_{10})$, $K(b_{11})$ при $q \geq 3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(b_8)$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t+1) = \mathrm{pt}(b_8,t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = \Delta\mathrm{pt}(b_8,b_1) = 3\cdot 2^{q-1}$. По следствию 2 имеем $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) \leq 7$. Если $q \geq 3$, то $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = 3\cdot 2^{q-1} \geq 12$, что невозможно. Случай $q = 2$ рассмотрен в лемме 12.

Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(b_9)$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t+1) = \mathrm{pt}(b_9,t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = \Delta\mathrm{pt}(b_9,b_1) = 2^{q-2} + 2\cdot 2^{q-1} = 5\cdot 2^{q-2} \geq 10$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) \leq 7$ в силу следствия 2.

Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(b_{10})$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t+1) = \mathrm{pt}(b_{10},t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = \Delta\mathrm{pt}(b_{10},b_1) = 2\cdot 2^{q-2} + 2^{q-1} = 4\cdot 2^{q-2} \geq 8$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) \leq 7$ в силу следствия 2.

Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(b_{11})$. Тогда $\mathrm{pt}(H,t+1) = \mathrm{pt}(b_{11},t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = \Delta\mathrm{pt}(b_{11},b_1) = 3\cdot 2^{q-2}$. По следствию 2 имеем $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) \leq 7$. Если $q \geq 4$, то $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = 3\cdot 2^{q-2} \geq 12$, что невозможно. Если $q = 3$, то $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = 6$, значит, по лемме 5 в графе $K(b_1)$ имеются двухэлементные особые доли, что при $q = 3$ невозможно. □

На этом рассмотрение элементов третьего уровня закончено. Однако этим не заканчивается рассмотрение элементов высоты 3. В некоторых частных случаях они попадают на четвертый уровень, а именно для b_{14} при $r = 3$, $b_{14} = c_3$ $r = 2$, для b_{19} при $r = t-3$, $b_{19} = c_5$ при $r = t-2$ и $b_{17} = c_4$ при $2 = r < t = 4$ (см. [1]). Начнем рассмотрение с элемента

$$b_{14} = (q+3,\underbrace{q+1,\ldots,q+1}_{r-2},\underbrace{q,\ldots,q}_{t-r},q-1), \quad 2 \leq r \leq 3 < t-1, \quad q \geq 2.$$

Нижние этажи решетки $NPL(n,t)$ в случае $3 = r \leq t-1$ представлены на рис. 2.

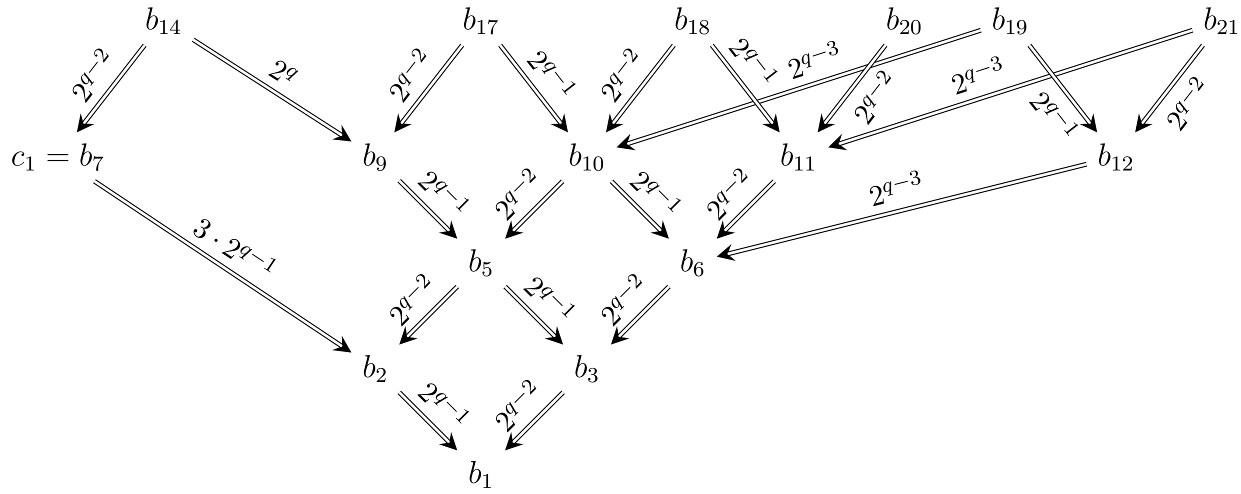


Рис. 2.

В случае $2 = r \leq t - 1$ в решетке присутствует лишь фрагмент этого частично упорядоченного множества.

Выясним, можно ли получить граф, χ-эквивалентный $K(b_{14})$, удалением одного ребра из некоторого графа. Для этого подходят элементы третьего уровня решетки $NPL(n, t)$.

Лемма 14. *При $q \geq 3$ из графов $K(b_7)$, $K(b_9)$, $K(b_{10})$, $K(b_{11})$ и $K(b_{12})$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{14})$.*

Доказательство. Элементы b_7 и b_9 получаются из элемента b_{14} одним элементарным преобразованием с $\delta = 2$. Так как $q \geq 3$, в силу леммы 7 для $K(b_{14})$ нельзя получить χ-эквивалентные графы, отбрасывая одно ребро из покрываемых им графов $K(b_7)$, $K(b_9)$.

Пусть $H = K(b_{10}) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_{14})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{14}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_{10}) = \Delta\mathrm{pt}(b_{14}, b_{10}) = \Delta\mathrm{pt}(b_{14}, b_9) + \Delta\mathrm{pt}(b_9, b_5) - \Delta\mathrm{pt}(b_{10}, b_5) = 2^q + 2^{q-1} - 2^{q-2} = 5 \cdot 2^{q-2} \geq 10$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_{10}) = 1$ в силу следствия 2.

Пусть $H = K(b_{11}) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_{14})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{14}, t+1)$ и, следовательно, $1 = \Delta\mathrm{pt}(H, b_{11}) = \Delta\mathrm{pt}(b_{14}, b_{11}) = 2^q + 2 \cdot 2^{q-1} - 2 \cdot 2^{q-2} = 3 \cdot 2^{q-1} \geq 12$, пришли к противоречию.

Пусть $H = K(b_{12}) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_{14})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{14}, t+1)$ и, следовательно, $1 = \Delta\mathrm{pt}(H, b_{12}) = \Delta\mathrm{pt}(b_{14}, b_{12}) = 2^q + 2 \cdot 2^{q-1} - 2^{q-2} - 2^{q-3} = 13 \cdot 2^{q-3} \geq 13$, пришли к противоречию. □

Мы рассмотрели все возможные варианты получения хроматически эквивалентных графов для $K(b_{14})$ удалением ребра из графов третьего уровня. Теперь проверим, можно ли получить χ-эквивалентный $K(b_{14})$ граф удалением двух ребер из графов второго уровня.

Лемма 15. *При $q \geq 3$ из графов $K(b_5)$ и $K(b_6)$ путем удаления двух ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{14})$.*

Доказательство. Пусть $H = K(b_5) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{14})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{14}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_5) = \Delta\mathrm{pt}(b_{14}, b_5) = 3 \cdot 2^{q-1} \geq 12$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_5) \leq 3$ в силу следствия 2.

Пусть $H = K(b_6) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{14})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{14}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_6) = \Delta\mathrm{pt}(b_{14}, b_6) = 7 \cdot 2^{q-2} \geq 14$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_6) \leq 3$ в силу следствия 2. □

Итак, мы рассмотрели все возможные варианты получения хроматически эквивалентных графов для $K(b_{14})$ удалением двух ребер из графов второго уровня. Теперь нужно проверить, можно ли получить χ-эквивалентный $K(b_{14})$ граф удалением трех ребер из графов первого уровня.

Лемма 16. *При $q \geq 3$ из графов $K(b_2)$ и $K(b_3)$ путем удаления трех ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{14})$.*

Доказательство. Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(b_{14})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{14}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(b_{14}, b_2) = 2^{q-2} + 3 \cdot 2^{q-1} = 7 \cdot 2^{q-2} \geq 14$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) \leq 7$ в силу следствия 2.

Пусть $H = K(b_3) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(b_{14})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{14}, t+1)$ и, следовательно, $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) = \Delta\mathrm{pt}(b_{14}, b_3) = 2^q + 2 \cdot 2^{q-1} = 2^{q+1} \geq 16$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_3) \leq 7$ в силу следствия 2. $\square$

Элемент b_{14} находится на четвертом уровне решетки, поэтому у соответствующего графа на 4 ребра больше, чем у наименьшего элемента b_1.

Лемма 17. *При $q \geq 3$ из графа $K(b_1)$ путем удаления четырех ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{14})$.*

Доказательство. Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 4$, и H χ-эквивалентен $K(b_{14})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{14}, t+1)$ и $\Delta\mathrm{pt}(H, b_1) = \Delta\mathrm{pt}(b_{14}, b_1) = 2^{q-2} + 4 \cdot 2^{q-1} = 9 \cdot 2^{q-2} \geq 18$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_1) \leq 15$ в силу следствия 2. $\square$

Хроматическая определяемость элемента b_{14} доказана. Рассмотрим еще один элемент высоты 3 и уровня 4 в решетке $NPL(n,t)$:

$$b_{19} = (q+2, \underbrace{q+1, \ldots, q+1}_{r}, \underbrace{q, \ldots, q}_{t-r-2}, q-2), \quad 0 > t-2 \leq r \leq t-3, \quad q \geq 3.$$

Нижние этажи решетки $NPL(n,t)$ в случае $0 \leq r = t-3$ представлены на рис. 3.

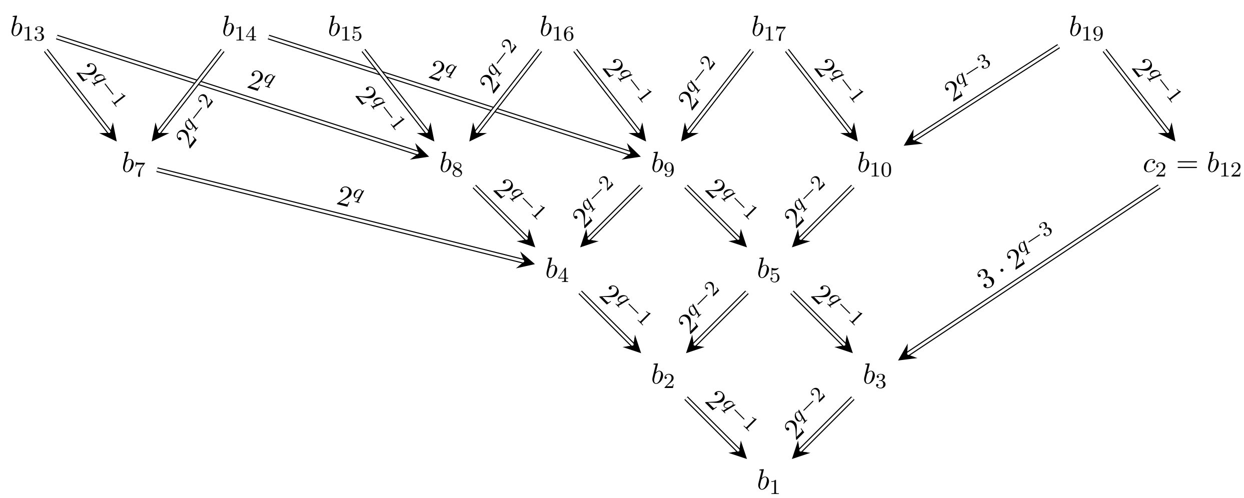


Рис. 3.

В случае $1 \leq r = t-2$ в решетке присутствует лишь фрагмент этого частично упорядоченного множества.

Выясним, можно ли получить граф, χ-эквивалентный $K(b_{19})$, удалением одного ребра из графа третьего уровня решетки $NPL(n,t)$.

Лемма 18. *При $q \geq 4$ из графов $K(b_7)$, $K(b_8)$, $K(b_9)$, $K(b_{10})$ и $K(b_{12})$ путем удаления одного ребра нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{19})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_7) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_{19})$. Тогда $\mathrm{pt}(H, t+1) = \mathrm{pt}(b_{19}, t+1)$ и, следовательно, $1 = \Delta\mathrm{pt}(H, b_7) = \Delta\mathrm{pt}(b_{19}, b_7) = 2^q + 2^{q-1} - 2 \cdot 2^{q-2} - 2^{q-3} = 7 \cdot 2^{q-3} \leq 14$, пришли к противоречию.

Пусть $H = K(b_8) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_{19})$. Тогда $1 = \Delta\mathrm{pt}(H, b_8) = \Delta\mathrm{pt}(b_{19}, b_8) = 2 \cdot 2^{q-1} - 2 \cdot 2^{q-2} - 2^{q-3} = 3 \cdot 2^{q-3} \leq 6$, пришли к противоречию.

Пусть $H = K(b_9) - E$, где $|E| = 1$, и H χ-эквивалентен $K(b_{19})$. Тогда $1 = \Delta\mathrm{pt}(H, b_9) = \Delta\mathrm{pt}(b_{19}, b_9) = 2^{q-1} - 2^{q-2} - 2^{q-3} = 2^{q-3} \leq 2$, пришли к противоречию.

Элементы b_{10} и b_{12} получаются из элемента b_{19} одним элементарным преобразованием (сдвигом) с $\delta = 2$. Так как $q \geq 4$, то для $K(b_{19})$ нельзя в силу леммы 7 получить χ-эквивалентные графы, отбрасывая одно ребро из покрываемых им графов $K(b_{10})$, $K(b_{12})$. $\square$

Теперь необходимо проверить, можно ли получить хроматически эквивалентный $K(b_{19})$ граф удалением двух ребер из графов второго уровня. Сначала рассмотрим случай удаления двух ребер из графа $K(b_4)$ при $q = 4$.

Лемма 19. *Пусть $q = 4$. Тогда из графа $K(b_4) = K(6, 6, \underbrace{5, \ldots, 5}_{r-4}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r+2})$ путем удаления двух ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{19}) = K(6, \underbrace{5, \ldots, 5}_{r}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r-2}, 2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_4) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{19})$. Тогда $\xi_2 \leq 1$ и $\xi_3 = 0$. Так как

$$b_{19} = (6, \underbrace{5, \ldots, 5}_{r}, \underbrace{4, \ldots, \overrightarrow{4}}_{t-r-2}\overrightarrow{, 2}) \Rightarrow b_{10} = (6, \underbrace{5, \ldots, \overrightarrow{5}}_{r}\overrightarrow{, \underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r-3}, 3}, 3) \Rightarrow b_5 = (6, \underbrace{5, \ldots, \overrightarrow{5}}_{r-1}\overrightarrow{, \underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r-1}, 3})$$

$$\Rightarrow b_2 = (6, \underbrace{5, \ldots, 5}_{r-2}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{t-r+1}) \Leftarrow b_4 = (6, \overrightarrow{6, \underbrace{5, \ldots, 5}_{r-4}, 4}, \underbrace{\ldots, 4}_{t-r+2}),$$

по лемме 6 выполняется равенство $\Delta I_3(b_{19}, b_4) = \Delta I_3(b_{19}, b_{10}) + \Delta I_3(b_{10}, b_5) + \Delta I_3(b_5, b_2) - \Delta I_3(b_4, b_2) = -(n-6)-(n-8)-(n-8)+(n-10) = -n+6-n+8-n+8+n-10 = -2(n-6)$. Так как $I_3(b_{19}) = I_3(H)$, получаем $\Delta I_3(b_4, H) = 2(n-6)$. Поскольку $\Delta I_3(b_2, H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = \xi_1 - \xi_2$, заключаем, что $\xi_1 = 2(n-6) + \xi_2 \geq 2(n-6)$. С другой стороны, если $b_4 = (w_1, \ldots, w_t)$, то $\xi_1 = e_{12}(w_3 + \ldots + w_t) + \ldots + e_{t-1t}(w_1 + \ldots + w_{t-2}) = e_{12}(n - w_1 - w_2) + \ldots + e_{t-1t}(n - w_{t-1} - w_t) \leq (e_{12} + \ldots + e_{t-1t})(n-4-4) = 2(n-8)$, пришли к противоречию с условием $\xi_1 \geq 2(n-6)$. $\square$

Лемма 20. *При $q \geq 4$ из графов $K(b_4)$ и $K(b_5)$ путем удаления двух ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{19})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_4) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{19})$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H, b_4) = \Delta\mathrm{pt}(b_{19}, b_4) = 2^{q-3} + 2 \cdot 2^{q-2} - 2^{q-1} = 2^{q-3}$. По следствию 2 имеем $\Delta\mathrm{pt}(H, b_4) \leq 3$. Если $q \geq 5$, то $\Delta\mathrm{pt}(H, b_4) = 2^{q-3} \geq 4$, что невозможно. Случай $q = 4$ рассмотрен в лемме 19.

Пусть $H = K(b_5) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(b_{19})$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H, b_5) = \Delta\mathrm{pt}(b_{19}, b_5) = 2^{q-3} + 2^{q-2} = 3 \cdot 2^{q-3} \geq 6$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_5) \leq 3$. $\square$

Теперь необходимо проверить, можно ли получить хроматически эквивалентный $K(b_{19})$ граф удалением трех ребер из графов первого уровня.

Лемма 21. *При $q \geq 4$ из графов $K(b_2)$ и $K(b_3)$ путем удаления трех ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{19})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(b_{19})$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) = \Delta\mathrm{pt}(b_{19}, b_2) = 2^{q-3} + 2 \cdot 2^{q-2} = 5 \cdot 2^{q-3} \geq 10$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H, b_2) \leq 7$ в силу следствия 2.

Пусть $H = K(b_3) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(b_{19})$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H,b_3) = \Delta\mathrm{pt}(b_{19},b_3) = 2^{q-1}+3\cdot 2^{q-3} \geq 7\cdot 2^{q-3} \geq 14$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H,b_3) \leq 7$ в силу следствия 2. □

Элемент b_{19} находится на четвертом уровне решетки, поэтому у соответствующего графа на 4 ребра больше, чем у наименьшего элемента b_1.

Лемма 22. *При $q \geq 4$ из графа $K(b_1)$ путем удаления четырех ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(b_{19})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 4$, и H χ-эквивалентен $K(b_{19})$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = \Delta\mathrm{pt}(b_{19},b_1) = 2^{q-1}+3\cdot 2^{q-3}+2^{q-2} = 9\cdot 2^{q-3} \geq 18$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H,b_1) \leq 15$ в силу следствия 2. □

Хроматическая определяемость элемента b_{19} доказана, осталось рассмотреть элемент $b_{17} = c_4$ при $2 = r < t = 4$, где $c_4 = (q+2, q+2, q-1, q-1)$, $2 = r < t = 4$, $q \geq 3$.

Нижние этажи решетки $NPL(n,t)$ в случае $2 = r < t = 4$ представлены на рис. 4.

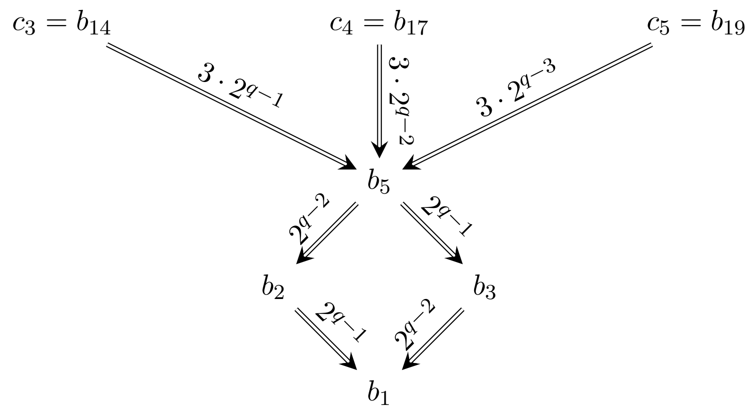


Рис. 4.

Лемма 23. *При $q \geq 3$ из графа $K(b_5)$ путем удаления двух ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(c_4)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_5) - E$, где $|E| = 2$, и H χ-эквивалентен $K(c_4)$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H,b_5) = \Delta\mathrm{pt}(c_4,b_5) = 3\cdot 2^{q-2} \geq 6$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H,b_5) \leq 3$ в силу следствия 2. □

Теперь необходимо проверить, можно ли получить хроматически эквивалентный $K(c_4)$ граф удалением трех ребер из графов первого уровня.

Лемма 24. *При $q \geq 3$ из графов $K(b_2)$ и $K(b_3)$ путем удаления трех ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(c_4)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_2) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(c_4)$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H,b_2) = \Delta\mathrm{pt}(c_4,b_2) = 4\cdot 2^{q-2} \geq 8$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H,b_2) \leq 7$ в силу следствия 2.

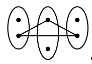
Пусть $H = K(b_3) - E$, где $|E| = 3$, и H χ-эквивалентен $K(c_4)$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H,b_3) = \Delta\mathrm{pt}(c_4,b_3) = 3\cdot 2^{q-2}+2^{q-1} \geq 5\cdot 2^{q-2} \geq 10$. Пришли к противоречию, поскольку $\Delta\mathrm{pt}(H,b_3) \leq 7$ в силу следствия 2. □

Элемент c_4 находится на четвертом уровне решетки, поэтому у соответствующего графа на 4 ребра больше, чем у наименьшего элемента b_1. Сначала рассмотрим случай удаления четырех ребер из графа $K(b_1)$ при $q = 3$.

Лемма 25. *При $q = 3$ и $2 = r < t = 4$ из графа $K(b_1) = K(4,4,3,3)$ путем удаления четырех ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(c_4) = K(5,5,2,2)$.*

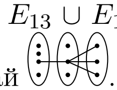
Доказательство. Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 4$, и H χ-эквивалентен $K(c_4)$. Тогда $\xi_2 \le 6, \xi_3 \le 1$.

Так как $c_4 = (5,\overrightarrow{5,2},2) \Rightarrow b_5 = (5,\overrightarrow{4,3,2}) \Rightarrow b_2 = (\overrightarrow{5,3},3,3) \Rightarrow b_1 = (4,4,3,3)$, по лемме 6 имеем $\Delta I_3(c_4,b_1) = \Delta I_3(c_4,b_5) + \Delta I_3(b_5,b_2) + \Delta I_3(b_2,b_1) = -2\cdot 7 - 8 - 6 = -28$. Так как $I_3(c_4) = I_3(H)$, получаем $\Delta I_3(b_1,H) = 28$. Поскольку $\Delta I_3(b_1,H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3$, заключаем, что $\xi_1 = 28 + \xi_2 + 2\xi_3$. С другой стороны, если $b_1 = (w_1,\dots,w_t)$, то $\xi_1 = e_{12}(n - w_1 - w_2) + \ldots + e_{t-1t}(n - w_{t-1} - w_t) = e_{12}\cdot 6 + (e_{13} + e_{14} + e_{23} + e_{24})\cdot 7 + e_{34}\cdot 8$. Так как $|E| = 4$, то $24 \le \xi_1 \le 32$. Кроме того, $\Delta = \Delta\mathrm{pt}(H,b_1) = 12$.

Пусть в E имеется треугольник . Тогда нет особых долей и четвертое ребро, не входящее в треугольник, дает не более одного E-подграфа типа $K(2,1)$ с ребрами из треугольника, поэтому $\Delta \le (3+1)+1+1 = 6$, получили противоречие. Следовательно, $\xi_3 = 0$.

Таким образом, $\xi_1 = 28 + \xi_2 \le 32$ и $\xi_2 \in \{0,1,2,3,4\}$.

Пусть $\xi_2 = 4$. Тогда $\xi_1 = 32 = 8+8+8+8 \Rightarrow e_{34} = 4 \Rightarrow \xi_2 = 0$, получили противоречие.

Пусть $\xi_2 = 3$. Тогда $\xi_1 = 31 = 8+8+8+7 \Rightarrow e_{34} = 3$ и $e_{13} + e_{14} + e_{23} + e_{24} = 1$. Поскольку $\xi_2 = 3$, единственное ребро из $E_{13} \cup E_{14} \cup E_{23} \cup E_{24}$ смежно каждому из трех ребер множества E_{34}, т. е. имеет место случай . Поэтому существует особая 3-звезда, что невозможно.

Пусть $\xi_2 = 2$. Тогда $\xi_1 = 30 = 8+8+8+6 = 8+8+7+7$.

Если $e_{34} = 3$ и $e_{12} = 1$, то $\xi_2 = 0$, что невозможно.

Поэтому $e_{34} = 2, e_{13} + e_{14} + e_{23} + e_{24} = 2$. Предположим, что не существует особых долей. Тогда ребра из $E_{13} \cup E_{14} \cup E_{23} \cup E_{24}$ не образуют E-подграфов типа $K(2,1)$ с ребрами из E_{34}, поэтому $\Delta \le 3+3 = 6$. Пусть теперь существует особая доля в $K(b_1)$. Тогда по сравнению с рассмотренной ситуацией может возникнуть не более одной реберной гирлянды индекса 2, уничтожающей одну долю, следовательно, $\Delta \le 6+1 = 7$, что невозможно.

Пусть $\xi_2 = 1$. Тогда $\xi_1 = 29 = 8+8+7+6 = 8+7+7+7$.

1-й случай. $e_{34} = 2, e_{13} + e_{14} + e_{23} + e_{24} = 1, e_{12} = 1$. Если нет особых долей в $K(b_1)$, то два ребра $E_{12} \cup E_{13} \cup E_{14} \cup E_{23} \cup E_{24}$ не образуют E-подграфов типа $K(2,1)$ с ребрами из E_{34}, поэтому $\Delta \le 3+3 = 6$. Пусть теперь существует особая доля в $K(b_1)$. Тогда по сравнению с предыдущим может возникнуть не более одной реберной гирлянды индекса 2, уничтожающей одну долю, следовательно, $\Delta \le 6+1 = 7$, что невозможно.

2-й случай. $e_{34} = 1, e_{13} + e_{14} + e_{23} + e_{24} = 3$. Если в $K(b_1)$ не существует особой доли, то поскольку ребро из E_{34} не образует E-подграфов типа $K(2,1)$ с ребрами из $E_{13} \cup E_{14} \cup E_{23} \cup E_{24}$, получаем $\Delta \le 1 + (2^3 - 1) = 8$, что невозможно. Пусть в $K(b_1)$ имеется особая доля. Тогда она трехэлементна и по сравнению с предыдущим может возникнуть не более одной реберной гирлянды индекса 2, уничтожающей одну долю, следовательно, $\Delta \le 8+1 = 9$, что невозможно.

Пусть $\xi_2 = 0$. Тогда $\xi_1 = 28 = 8+8+6+6 = 8+7+7+6 = 7+7+7+7$.

1-й случай. $e_{34} = 2, e_{12} = 2$. Тогда в $K(b_1)$ нет особых долей и ребра из E_{34} не образуют E-подграфов типа $K(2,1)$ с ребрами из E_{12}, поэтому $\Delta \le 3+3 = 6$, что невозможно.

2-й случай. $e_{34} = 1, e_{13} + e_{14} + e_{23} + e_{24} = 2, e_{12} = 1$. Если в $K(b_1)$ нет особых долей, то поскольку единственное ребро из E_{34} не образуют E-подграфов типа $K(2,1)$ с ребрами из $E_{12} \cup E_{13} \cup E_{14} \cup E_{23} \cup E_{24}$, имеем $\Delta \le 1 + (2^3 - 1) = 8$. Пусть в $K(b_1)$ имеется особая доля. Тогда она трехэлементна и по сравнению с предыдущим может возникнуть не более одной реберной гирлянды индекса 2, уничтожающей одну долю, поэтому, $\Delta \le 8+1 = 9$, что невозможно.

3-й случай. $e_{13} + e_{14} + e_{23} + e_{24} = 4$.

Если в $\langle E\rangle$ имеется E-подграф типа $K(2,2)$, то в $K(b_1)$ нет особых долей и $\Delta = 9$, что невозможно.

Если же в $\langle E\rangle$ имеется E-подграф типа $K(3,1)$, то ввиду отсутствия особых 3-звезд вершина, инцидентная трем ребрам e_1, e_2, e_3, обязана принадлежать множеству $V_3 \cup V_4$. Если четвертое ребро e_4 смежно хотя бы одному из ребер e_1, e_2, e_3, то в силу равенства $\xi_2 = 0$ и отсутствия особых 4-звезд оно инцидентно точно одному из ребер e_1, e_2, e_3, и поэтому $\Delta \leq 7+2 = 9$. Пусть e_4 не смежно ребрам e_1, e_2, e_3. Тогда легко видеть, что $\Delta \leq 9$, что невозможно.

Таким образом, можно считать, что $\langle E\rangle$ содержит E-подграфы лишь типа $K(2,1)$ или типа $K(1,1)$.

Пусть в $K(b_1)$ имеется четырехэлементная особая доля. Тогда нетрудно заметить, что $\Delta \leq 7$, а это невозможно. Пусть в $K(b_1)$ не существует четырехэлементной особой доли. Если в E существует ребро e, не образующее E-подграфов типа $K(2,1)$ с другими ребрами из E, то $\Delta \leq 1+7+3 = 11$, что невозможно. Если в E существуют два ребра e_1, e_2, каждое из которых не образует E-подграфов типа $K(2,1)$ с ребрами из $E \setminus \{e_1, e_2\}$, то $\Delta \leq 3+3+4 = 10$, что невозможно. Опираясь на эти свойства ребер из E, теперь нетрудно установить, что ребра из E образуют простую цепь, в которой соседние ребра образуют E-подграф типа $K(2,1)$ и $\Delta \leq 9$, что невозможно. □

Лемма 26. *При $q \geq 3$ из графа $K(b_1)$ путем удаления четырех ребер нельзя получить граф, χ-эквивалентный графу $K(c_4)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = K(b_1) - E$, где $|E| = 4$, и H χ-эквивалентен $K(c_4)$. Тогда $\Delta\mathrm{pt}(H, b_1) = \Delta\mathrm{pt}(c_4, b_1) = 3 \cdot 2^{q-2} + 2^{q-1} + 2^{q-2} = 3 \cdot 2^{q-1}$. По следствию 2 имеем $\Delta\mathrm{pt}(H, b_1) \leq 15$. Если $q \geq 4$, то $\Delta\mathrm{pt}(H, b_1) = 3 \cdot 2^{q-1} \geq 24$, что невозможно. Случай $q = 3$ рассмотрен в лемме 25. □

Хроматическая определяемость элемента c_4 доказана, а с ним и хроматическая определяемость всех элементов высоты 3 четвертого уровня. Из лемм 7–26 вытекает теорема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сеньчонок Т.А., Баранский В.А.** Классификация элементов малой высоты в решетках полных многодольных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 159–173.
2. **Сеньчонок Т.А.** Хроматическая определяемость элементов высоты 2 в решетках полных многодольных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 271–281.
3. **Эндрюс Г.** Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.
4. **Баранский В.А., Королева Т.А.** Решетка разбиений натурального числа // Докл. АН. 2008. Т. 418, № 4. С. 439–442.
5. **Read R.C.** An introduction to chromatic polynomials // J. Comb. Theory. 1968. Vol. 4. P. 52–71.
6. **Chao C.Y., E.G. Whitehead Jr.** On chromatic equivalence of graphs // Theory Appl. Graphs. 1978. Vol. 642. P. 121–131.
7. **Zhao H.** Chromaticity and adjoint polynomials of graphs. Zutphen: Wöhrmann Print Service, 2005. 169 p.
8. **Chao C.Y., G.A. Novacky Jr.** On maximally saturated graphs // Discrete Math. 1982. Vol. 41. P. 139–143.
9. **Баранский В.А., Королева Т.А.** Хроматическая определяемость атомов в решетках полных многодольных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 22–29.
10. **Королева Т.А.** Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 65–83.
11. **Королева Т.А.** Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов. II // Изв. Урал. гос. ун-та. 2010. № 74. С. 39–56. (Математика. Механика. Информатика; вып. 12.)
12. **Баранский В.А., Королева Т.А.** Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов // Изв. Урал. гос. ун-та. 2010. № 74. С. 5–26. (Математика. Механика. Информатика; вып. 12.)
13. **Koh K.M., Teo K.L.** The search for chromatically unique graphs // Graphs Combin. 1990. Vol. 6. P. 259–285.
14. **Farrell E.J.** On chromatic coefficients // Discrete Math. 1980. Vol. 29. P. 257–264.

15. **Баранский В.А., Вихарев С.В.** О хроматических инвариантах двудольных графов // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 25–34. (Математика и механика; вып. 7.)
16. **Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. СПб.: "Лань", 2010. 368 с.

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет
e-mail: Vitali.Baranski@usu.ru

Поступила 06.05.2011

Сеньчонок Татьяна Александровна
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: Tatiana.Senchonok@usu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.54

МАЛЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ГРУППАХ $\mathrm{Sp}_4(q)$ ПРИ ЧЁТНЫХ q [1]

В. А. Белоногов

В статье продолжается изучение неклассических взаимодействий (соотношений ортогональности) в конечных группах. Получено описание всех малых взаимодействий (малых D-блоков и малых Φ-блоков) в симплектических группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ при чётных q. В частности, для этих групп подтверждены две известные ранее гипотезы о таких взаимодействиях. Отметим, что наличие в группе малого D-блока равносильно существованию в её таблице характеров пары полупропорциональных строк, а наличие в группе малого Φ-блока равносильно существованию в её таблице характеров пары полупропорциональных столбцов.

Ключевые слова: конечные симплектические группы, таблица характеров, малые взаимодействия, полупропорциональные характеры.

V. A. Belonogov. Small interactions in the groups $\mathrm{Sp}_4(q)$ for even q.

The investigation of nonclassical interactions (orthogonality relations) in finite groups is continued. We obtain a description of all small interactions (small D-blocks and small Φ-blocks) in the symplectic groups $\mathrm{Sp}_4(q)$ for even q. In particular, two known conjectures on these interactions are confirmed for these groups. Note that the existence of a small D-block in a group is equivalent to the existence of a pair of semiproportional rows in its character table and the existence of a small Φ-block in a group is equivalent to the existence of a pair of semiproportional columns in its character table.

Keywords: finite symplectic groups, character table, small interactions, semiproportional characters.

Введение

Изучение связей между строением конечной группы и свойствами её таблицы характеров — одна из главных задач теории представлений. В рамках этой задачи в статье [1] было введено понятие взаимодействия, представляющее собой, по существу, некоторый общий тип соотношений ортогональности в таблице характеров конечной группы, включающий и классические соотношения ортогональности из теорий обыкновенных и модулярных представлений (см. также [2, гл. 3]). А именно, для нормального подмножества D группы G и множества Φ неприводимых характеров G вводятся понятие взаимодействия D с Φ, а также понятия D-блока и Φ-блока (определения напоминаются в разд. 1). При D, равном множеству всех p'-элементов из G, где p — простое число, понятие D-блока совпадает с классическим понятием p-блока. Анализ таблиц характеров групп показывает наличие в них большого числа неклассических взаимодействий (соотношений ортогональности). При изучении произвольных D-блоков группы, как первый нетривиальный случай, естественно возникли так называемые *малые D-блоки*, т. е. D-блоки мощности 2. Аналогично, *малые Φ-блоки* — это Φ-блоки, состоящие из двух классов сопряжённых элементов.

Наряду с изучением общих свойств малых взаимодействий (малых D-блоков и малых Φ-блоков) автором было получено полное описание таковых в ряде классов конкретных групп:

в спорадических простых группах — в [3];
в группах $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$, $\mathrm{GL}_2(q)$ — в [4];
в группах $\mathrm{PGL}_3(q)$, $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{PGU}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$ — в [5];
в группах $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$ — в [6].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы отделения математических наук РАН (проект 09-Т-1-1004) и программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1007) и НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009).

При этом обнаружились некоторые интересные их свойства. В статье [4] на основании результатов работ [3;4] были высказаны следующие две гипотезы, которые до сих пор остаются недоказанными.

Гипотеза 1 (гипотеза о малых D-блоках). *Пусть G — конечная группа. Если двухэлементное подмножество $\{\varphi,\ \psi\}$ из* $\mathrm{Irr}\,(G)$ *есть D-блок для некоторого нормального подмножества D из G, то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

Гипотеза 2 (гипотеза о малых Φ-блоках). *Если объединение двух классов сопряжённых элементов конечной группы G есть Φ-блок для некоторого $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$, то мощность одного из этих классов делит мощность другого.*

Эти гипотезы можно переформулировать в терминах таблицы характеров, используя следующее понятие. Функции α и β из некоторого множества M в поле $\mathbb{C}$ называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого подмножества H из M пропорциональны ограничения α и β на H и их ограничения на $M \setminus H$. Из предложений 1.1 и 1.2 (см. ниже) непосредственно вытекают следующие два утверждения:

(1) неприводимые характеры φ и ψ (а также соответствующие им строки таблицы характеров) группы G полупропорциональны если и только если $\{\varphi, \psi\}$ есть малый D-блок группы G для некоторого её нормального подмножества D;

(2) столбцы таблицы характеров конечной группы G, соответствующие двум её классам сопряжённых элементов, полупропорциональны если и только если объединение этих классов есть Φ-блок для некоторого $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$.

Гипотеза 1$'$ (гипотеза о полупропорциональных строках таблицы характеров). *Если две строки таблицы характеров конечной группы G, соответствующие её неприводимым характерам φ и ψ, полупропорциональны, то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

Гипотеза 2$'$ (гипотеза о полупропорциональных столбцах таблицы характеров). *Если два столбца таблицы характеров конечной группы G, соответствующие двум её классам сопряжённых элементов, полупропорциональны, то мощность одного из этих классов делит мощность другого.*

Подтверждения гипотез 1 и 2 (и, следовательно, гипотез $1'$ и $2'$) получены для всех упомянутых выше групп. Гипотеза 1 подтверждена также для симметрических и знакопеременных групп. Более того, в [7] получено описание всех малых D-блоков в симметрических группах, а в серии работ автора (см. завершающую статью серии [8]) доказано отсутствие малых D-блоков у знакопеременных групп.

Для групп лиева типа выявилась интересная зависимость наличия малых D-блоков и, следовательно, пар полупропорциональных неприводимых характеров, от чётности характеристики поля определения группы. В квазипростых группах $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$ и $\mathrm{SU}_3(q)$ такие пары отсутствуют при всех чётных q и присутствуют при всех нечётных q, за исключением групп $\mathrm{L}_2(5)$ ($\simeq \mathrm{L}_2(4)$), $\mathrm{L}_2(7)$ ($\simeq \mathrm{L}_3(2)$) и $\mathrm{L}_2(9)$ ($\simeq A_6 \simeq \mathrm{PSp}_4(2)'$). ($\mathrm{PSp}_4$(q) есть S_4(q) в обозначениях из Атласа [9]) Вероятно, подобная закономерность присуща (с небольшим числом исключений) всем конечным группам лиева типа. Точная формулировка этой закономерности должна определиться в результате дальнейших исследований. А сейчас сформулируем её, ограничившись простыми группами, следующим образом.

Гипотеза 3. *Конечные простые группы лиева типа, определённые над полем характеристики p, как правило,*

не имеют пар полупропорциональных неприводимых характеров при $p = 2$

и имеют пары полупропорциональных неприводимых характеров при $p > 2$.

Возможно, существует и более глубокая связь между наличием или отсутствием у конечной группы пары полупропорциональных неприводимых характеров и абстрактным строением (скорее всего, локальным строением) этой группы. Изучению некоторых свойств произвольной группы, имеющей такую пару, посвящена статья [10]. В частности, в ней доказано, что *у групп нечётного порядка не существует полупропорциональных неприводимых характеров* (а эти группы — частный случай групп типа характеристики 2). Там же показано, что если гипотеза $1'$ верна для групп A и B, то она верна и для их прямого произведения $A \times B$, и если группы A и B не имеют пар полупропорциональных неприводимых характеров, то их не имеет и группа $A \times B$. Отметим также, что результаты о малых взаимодействиях были использованы в статье [11] для вычисления p-блоков с помощью определённых D-блоков.

Условимся далее под *парой* понимать неупорядоченную пару, т. е. двухэлементное множество.

В настоящей статье доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Конечные простые группы* $\mathrm{Sp}_4(q)$ *при чётном* q $(q \geq 4)$ *не имеют пар полупропорциональных неприводимых характеров.*

Теорема 2. *Конечная простая группа* $\mathrm{Sp}_4(q)$ *при чётном* q $(q \geq 4)$ *имеет точно одну пару полупропорциональных столбцов в таблице характеров; эти столбцы соответствуют единственным двум классам сопряжённых элементов этой группы, состоящим из элементов порядка* 4.

Эти теоремы подтверждают гипотезы 1 и 2 (а также $1'$ и $2'$) для групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ с чётными q. Кроме того, по теореме 1 эти группы удовлетворяют гипотезе 3 (без каких-либо исключений).

Доказательство теорем состоит в анализе таблиц характеров рассматриваемых групп, полученных Х. Еномото в статье [12]. Эти таблицы приведены в разд. 2. Представители классов, о которых идёт речь в теореме 2, обозначены там через a_{41} и a_{42}.

Вероятно, можно сформулировать подобную гипотезе 3 гипотезу о полупропорциональных столбцах в таблице характеров; однако, как видно из теоремы 2, слова "как правило" в подобной гипотезе нуждаются всё же в некотором уточнении. Определённая исключительность классов a_{41}^G и a_{42}^G в группе $G = \mathrm{Sp}_4(2^m)$ состоит в том, что они принадлежат множеству A (см. разд. 2) шести"одиноких" классов, в то время, как классы сопряжённых элементов группы G, не входящие в A, содержатся в больших (однопараметрических или двупараметрических) "семействах" классов.

З а м е ч а н и е. В серии симплектических групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ с чётными q имеется одна непростая группа, а именно, группа $\mathrm{Sp}_4(2)$, изоморфная симметрической группе S_6. Легко увидеть, что для этой группы остаётся верным заключение теоремы 2. Однако, теорема 1 при $q = 2$ неверна: группа S_6 имеет точно пять (неупорядоченных) пар полупропорциональных неприводимых характеров. (Согласно [7, теорема 1], неприводимые характеры φ и ψ симметрической группы S_n $(n \in \mathbb{N})$ полупропорциональны если и только если они ассоциированы (т. е. $\psi = \varphi\xi \neq \varphi$, где ξ — линейный характер группы S_n с ядром A_n).)

О б о з н а ч е н и я. $\mathrm{Cl}(G)$ — множество всех классов сопряжённых элементов группы G; g^G — класс сопряжённых элементов группы G, содержащий элемент g из G; классы сопряжённых элементов группы будем называть просто *классами группы*; $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых характеров G; $\dot\cup$ — знак объединения попарно непересекающихся множеств; $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ — множества всех комплексных, целых и натуральных чисел соответственно; для $a, b, c \in \mathbb{Z}$ запись "$a \mid b$" означает, что a делит b; "$a = \pm b$" пишется вместо "$a \in \{b, -b\}$"; запись "$a \mid b \pm c$" означает, что a делит $b + c$ *или* $b - c$; $\pi(a)$ есть множество всех простых чисел, делящих a.

1. Предварительные результаты

Напомним некоторые определения из [1] (см. также [2]). Пусть G — конечная группа, D — её нормальное подмножество и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. *$D$-срезкой* классовой функции ψ группы G называется классовая функция $\psi|_D^0$, совпадающая с ψ на D и исчезающая (обращающаяся в нуль) на $G \setminus D$. Говорят, что D и Φ *взаимодействуют*, или, что (D, Φ) есть *взаимодействие* в группе G, если D-срезка $\varphi|_D^0$ любого характера φ из Φ является линейной комбинацией характеров из Φ.

D-блок группы G — это минимальное (по включению) непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, взаимодействующее с D, а *Φ-блок* группы G — минимальное непустое нормальное подмножество из G, взаимодействующее с Φ.

Взаимодействие $(D,\ \Phi)$ называется *малым*, если выполнено какое-либо из следующих условий: (а) Φ состоит из двух неприводимых характеров, (б) D есть объединение двух классов сопряжённых элементов группы. При изучении малых взаимодействий можно, отбросив тривиальные случаи, предполагать, что Φ есть D-блок в случае (а) и D есть Φ-блок в случае (б).

Предложение 1.1 [2, теорема 8З3]. *Пусть G — конечная группа, φ и ψ — её различные неприводимые характеры и D — нормальное подмножество в G. Равносильны условия*:

(1) $\{\varphi,\psi\}$ — *D-блок группы G*;

(2) $\psi|_D = a\varphi|_D$ *и* $\psi|_{G\setminus D} = b\varphi|_{G\setminus D}$ *для некоторых* $a,b\in\mathbb{C}$;

(3) $\psi|_D = a\varphi|_D$ *и* $\psi|_{G\setminus D} = b\varphi|_{G\setminus D}$, *где* $\{a,b\}=\left\{\dfrac{\psi(1)}{\varphi(1)}, -\dfrac{\varphi(1)}{\psi(1)}\right\}$.

Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G и пусть $g_1,g_2\in G$. Тогда*

(1) $\varphi(g)=0 \iff \psi(g)=0$ *для всех* $g\in G$;

(2) *если $\varphi(g_1)$ и $\varphi(g_2)$ — ненулевые, то* $\dfrac{\varphi(g_i)}{\psi(g_i)}\in\left\{\dfrac{\varphi(1)}{\psi(1)}, -\dfrac{\psi(1)}{\varphi(1)}\right\}$ $(i\in\{1,2\})$ *и, в частности,*

либо $\dfrac{\varphi(g_1)}{\psi(g_1)}=\dfrac{\varphi(g_2)}{\psi(g_2)}$ (*если эти дроби одного знака*),

либо $\dfrac{\varphi(g_1)}{\psi(g_1)}\dfrac{\varphi(g_2)}{\psi(g_2)}=-1$ (*в противном случае*);

(3) *если* $|\varphi(g_1)|=|\psi(g_1)|\neq 0$, *то* $\varphi(g)=\pm\,\psi(g)$ *для всех* $g\in G$ (*в частности,* $\varphi(1)=\psi(1)$).

Предложение 1.2 [2, теорема 8З10]. *Пусть x^G и y^G — различные классы сопряжённых элементов группы G $(x,y\in G)$ и $\Phi\subseteq\mathrm{Irr}(G)$. Тогда равносильны условия*:

(1) $x^G\cup y^G$ — *Φ-блок группы G*;

(2) *при некоторых* $a,b\in\mathbf{C}$

$$\varphi(y)=a\varphi(x) \quad \text{для всех} \quad \varphi\in\Phi,$$
$$\chi(y)=b\chi(x) \quad \text{для всех} \quad \chi\in\Phi^-.$$

Кроме того, если выполнены равенства условия (2), *то* $\{a,b\}=\left\{1,\ -\dfrac{|x^G|}{|y^G|}\right\}$.

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 1.2. *Если два столбца таблицы характеров конечной группы G, соответствующие её классам сопряжённых элементов x^G и y^G $(x,y\in G)$, полупропорциональны, то для любого* $\varphi\in\mathrm{Irr(G)}$

(1) *либо* $\varphi(x)=\varphi(y)$, *либо* $\varphi(x)|x^G|=-\varphi(y)|y^G|$;

(2) $\varphi(x)=0\iff\varphi(y)=0$;

(3) *если $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ — вещественные числа одного знака, то они равны.*

Предложение 1.3 [13, теорема 5.2]. *Пусть m — натуральное число, $\{p_1,\dots,p_r\}$ — множество всех его простых делителей и n — натуральное число такое, что существуют корни m-той степени из единицы $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ такие, что $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=0$. Тогда $n=a_1p_1+\ldots+a_rp_r$ для некоторых целых неотрицательных $a_1,\dots,a_r$.*

Предложение 1.4 [13, теорема 4.8]. *Пусть выполнено условие предложения 1.3, причём $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$. Тогда если $r \le 2$ или $n < p_1(p_2-1)+p_3-p_2$, то каждая минимальная равная нулю подсумма суммы $\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ имеет вид $\theta\cdot(1+\zeta_p+\zeta_p^2+\ldots+\zeta_p^{p-1})$, где θ — корень степени m из единицы, $p\in\{p_1,\ldots,p_r\}$ и ζ_p — примитивный корень степени p из единицы.*

Лемма 1.1 [4, лемма B1]. *Пусть $\{m,k,l\}\subseteq\mathbb{N}$.*

(1) $\cos\dfrac{2k\pi}{m}=\cos\dfrac{2l\pi}{m} \iff k+l$ *или* $k-l$ *кратно* m.

(2) $\cos\dfrac{2k\pi}{m}=-\cos\dfrac{2l\pi}{m} \iff m$ *чётно, а* $k+l$ *или* $k-l$ *есть нечётное кратное числа* $m/2$.

Лемма 1.2. *Пусть m — нечётное натуральное число и a,b,c,d — любые целые числа. Тогда равносильны условия*:

(1) $\cos\dfrac{2a\pi}{m}+\cos\dfrac{2b\pi}{m}+\cos\dfrac{2c\pi}{m}+\cos\dfrac{2d\pi}{m}=0$,

(2) *m делится на 15 и левая часть равенства (1) перестановкой слагаемых может быть преобразована в сумму* $1+\cos\dfrac{2\pi}{3}+\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}$;

(3) *m делится на 15 и с точностью до перестановки чисел a,b,c,d справедливы сравнения:* $a\equiv 0 \pmod m$, $b\equiv\pm m/3 \pmod m$, $c\equiv\pm m/5 \pmod m$, $d\equiv\pm 2m/5 \pmod m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $\zeta_m := e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{m}}=\cos\dfrac{2\pi}{m}+\mathbf{i}\sin\dfrac{2\pi}{m}$, где $\mathbf{i}$ — мнимая единица. Тогда $2\cos\dfrac{2k\pi}{m}=\zeta_m^k+\zeta_m^{-k}$ при любом $k\in\mathbb{Z}$ и условие (1) можно переписать в виде:

$$\zeta_m^a+\zeta_m^{-a}+\zeta_m^b+\zeta_m^{-b}+\zeta_m^c+\zeta_m^{-c}+\zeta_m^d+\zeta_m^{-d}=0\,. \tag{1.1}$$

Мы имеем сумму восьми слагаемых, каждое из которых есть корень степени m из единицы. Согласно предложению 1.3 должно быть: $8=a_1p_1+\ldots+a_rp_r$ для некоторых простых делителей $p_1,\ldots,p_r$ числа m и целых неотрицательных $a_1,\ldots,a_r$. Поскольку m нечётно, то предыдущее равенство имеет лишь одно решение: $8=3+5$ и $3\cdot 5$ делит m. Теперь обратимся к предложению 1.4, согласно которому (так как $8<3\cdot 4+7-5$) левая часть равенства (1.1) распадается (возможно после некоторой перестановки слагаемых) на две равные нулю подсуммы:

$$\zeta_m^s+\zeta_m^{s_1}+\zeta_m^{s_2}=\zeta_m^s\cdot(1+\zeta_3+\zeta_3^2) \text{ — \textit{первая подсумма} } (\zeta_3=\zeta_m^{m/3}),$$

$$\zeta_m^t+\zeta_m^{t_1}+\zeta_m^{t_2}+\zeta_m^{t_3}+\zeta_5^{t_4}=\zeta_m^t\cdot(1+\zeta_5+\zeta_5^2+\zeta_5^3+\zeta_5^4) \text{ — \textit{вторая подсумма} } (\zeta_5=\zeta_m^{m/5}).$$

Поскольку в сумме из (1.1) имеются 4 пары комплексно сопряжённых слагаемых, то по крайней мере одна из них должна содержаться во второй подсумме. Пусть это будет $\zeta_m^t\zeta_5^i$, $\zeta_m^t\zeta_5^j$ ($i,j\in\{0,1,2,3,4\}$). Тогда их произведение равно единице, т. е. $(\zeta_m^t)^2=\zeta_5^{-(i+j)}$, $(\zeta_m^t)^{10}=1$, и, ввиду нечётности числа m, $(\zeta_m^t)^5=1$. Поэтому после возможной перестановки слагаемых

$$\text{вторая подсумма есть } 1+\zeta_5+\zeta_5^2+\zeta_5^3+\zeta_5^4=\zeta_m^m+\zeta_m^{m/5}+\zeta_m^{2m/5}+\zeta_m^{-2m/5}+\zeta_m^{-m/5}. \tag{1.2}$$

Во вторую подсумму входят две пары сопряжённых слагаемых из (1.1) и часть ещё одной пары (единица). Следовательно, первая подсумма также содержит пару комплексно сопряжённых слагаемых. Отсюда (подобно выкладкам перед (1.2)) получаем, что $(\zeta_m^s)^3=1$, и поэтому

$$\text{первая подсумма есть } 1+\zeta_3+\zeta_3^2=\zeta_m^m+\zeta_m^{m/3}+\zeta_m^{-m/3}. \tag{1.3}$$

Из (1.1)–(1.3) и тождества $2\cos\dfrac{2k\pi}{m}=\zeta_m^k+\zeta_m^{-k}$ ($k\in\mathbb{Z}$) видно, что условие (1) влечёт условие (2).

Очевидно, (2) $\Rightarrow$ (3) (по лемме 1.1) и (3) $\Rightarrow$ (1). Лемма 1.2 доказана.

Следствие 1.3. *Пусть m — нечётное натуральное число и a, b, c, d — целые числа. Тогда*

(1) $\cos\dfrac{2a\pi}{m} + \cos\dfrac{2b\pi}{m} \neq -\Big(\cos\dfrac{2c\pi}{m} + \cos\dfrac{2d\pi}{m}\Big)$, *если a, b, c, d не делятся на m*;

(2) $\cos\dfrac{2a\pi}{m} \cdot \cos\dfrac{2b\pi}{m} \neq -\Big(\cos\dfrac{2c\pi}{m} \cdot \cos\dfrac{2d\pi}{m}\Big)$, *если $a+b$, $a-b$, $c+d$, $c-d$ не делятся на m.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1): Если неравенство п. (1) неверно, то будет выполнено условие (1) леммы 1.2, а значит, и его условие (3). Но это условие противоречиво, так как по условию доказываемого п. (1) среди чисел a, b, c, d нет делящихся на m.

(2): С помощью известной формулы $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ неравенство п. (2) перепишется в виде

$$\cos\frac{2(a+b)\pi}{m} + \cos\frac{2(a-b)\pi}{m} \neq -\Big(\cos\frac{2(c+d)\pi}{m} + \cos\frac{2(c-d)\pi}{m}\Big).$$

Но по доказанному выше п. (1) оно (при заданных a, b, c, d) справедливо.

Следствие доказано.

Лемма 1.3. *Пусть a_1, b_1, a_2, b_2 — действительные числа. Тогда равносильны условия*:

(1) $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ *и* $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2$,

(2) $\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $x := a_1 + b_1$ и $y := a_1 \cdot b_1$. Выразим a_1 и b_1 через x и y. Имеем: $y = (x - b_1)b_1$, $b_1^2 - xb_1 + y = 0$, откуда

$$b_1 = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4y}}{2} \quad \text{и} \quad \{a_1, b_1\} = \Big\{\frac{x + \sqrt{x^2-4y}}{2}, \ \frac{x - \sqrt{x^2-4y}}{2}\Big\}.$$

Если верно (1), то мы можем получить подобное равенство с a_2, b_2 на месте a_1, b_1 и, следовательно, верно (2). Из (2) же, очевидно, следует (1).

Лемма 1.3 доказана.

2. Классы и характеры групп $\mathrm{Sp}_4(2^m)$

Пусть $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, где q чётно и $q \geq 4$. Тогда G — простая группа порядка $q^4(q^4-1)(q^2-1)$ и $G \simeq \mathrm{PSp}_4(q) = \mathrm{S}_4(q)$ в обозначениях из [9]. По определению $G = \{g \in \mathrm{GL}_4(q) \mid {}^t gJg = J\}$, где ${}^t g$ — матрица, транспонированная к g, и

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица характеров группы G, найденная Х. Еномото в [12], приводится далее в табл. A–D (здесь изменены некоторые обозначения и исправлены ошибки типографского характера). Классы сопряжённых элементов и неприводимые характеры группы G зависят от ряда параметров, содержащихся в кольцах $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю n при $n \in \{q-1, q+1, q^2-1, q^2+1\}$. Эти параметры содержатся в следующих множествах (ниже положено $\mathbb{Z}_n^\# := \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$):

$T_0 := \mathbb{Z}_{q-1}$, $|T_0| = q-1$;

$T_1 := \mathbb{Z}_{q-1}^\#$, $|T_1| = q-2$;

$T_2 := \mathbb{Z}_{q+1}^\#$, $|T_2| = q$;

$T := T_1 \times T_2$, $|T| = q(q-2)$;

$S_0 := \{(i,j) \in T_0 \times T_0 \mid i \neq j\}$, $|S_0| = (q-1)(q-2)$;

$S_1 := \{(i,j) \in T_1 \times T_1 \mid i \neq \pm j\},\ \ |S_1| = (q-2)(q-4);$
$S_2 := \{(i,j) \in T_2 \times T_2 \mid i \neq \pm j\},\ \ |S_2| = q(q-2);$
$R_1 := \{i \in \mathbb{Z}_{q^2-1} \mid i \neq qi\},\ \ |R_1| = q(q-1);$
$R_2 := \{i \in \mathbb{Z}_{q^2-1} \mid i \neq \pm qi\},\ \ |R_2| = q(q-2);$
$R_3 := \mathbb{Z}^{\#}_{q^2+1},\ \ |R_3| = q^2.$

2.1. Классы сопряжённых элементов группы G

$\mathrm{Cl}(G) = A \,\dot\cup\, B \,\dot\cup\, C \,\dot\cup\, D$, где

$A = \{a_1^G,\, a_2^G,\, a_{31}^G,\, a_{32}^G,\, a_{41}^G,\, a_{42}^G\}$
$(a_1 = 1,\ |C_G(a_2)| = |C_G(a_{31})| = q^4(q^2-1),\ |C_G(a_{32})| = q^4,\ |C_G(a_{41})| = |C_G(a_{42})| = 2q^2\,);$

$B = B_1 \,\dot\cup\, B_2 \,\dot\cup\, B_3 \,\dot\cup\, B_4 \,\dot\cup\, B_5$, где
$B_1 = \{\, b_1(i,j)^G \mid (i,j) \in S_1\}\ \ (\,|B_1| = |S_1|/8 = (q-2)(q-4)/8,\ \ |C_G(b_1(i,j))| = (q-1)^2\,),$
$B_2 = \{\, b_2(i)^G \mid i \in R_2\}\ \ (\,|B_2| = |R_2|/4 = q(q-2)/4,\ \ |C_G(b_2(i,j))| = q^2-1\,),$
$B_3 = \{\, b_3(i,j)^G \mid (i,j) \in T_1 \times T_2\}\ \ (\,|B_3| = |T_1\times T_2|/4 = q(q-2)/4,\ \ |C_G(b_3(i,j))| = q^2-1),$
$B_4 = \{\, b_4(i,j)^G \mid (i,j) \in S_2\}\ \ (\,|B_4| = |S_2|/8 = q(q-2)/8,\ \ |C_G(b_4(i,j))| = q^2-1\,),$
$B_5 = \{\, b_5(i)^G \mid i \in R_3\}\ \ (\,|B_5| = |R_3|/4 = q(q-2)/4,\ \ |C_G(b_5(i,j))| = q^2+1\,);$

$C = C_1 \,\dot\cup\, C_2 \,\dot\cup\, C_3 \,\dot\cup\, C_4$, где
$C_1 = \{\, c_1(i)^G \mid i \in T_1\}\ \ (\,|C_1| = |T_1|/2 = (q-2)/2,\ \ |C_G(c_1(i))| = q(q-1)(q^2-1)\,),$
$C_2 = \{\, c_2(i)^G \mid i \in T_1\}\ \ (\,|C_2| = |T_1|/2 = (q-2)/2,\ \ |C_G(c_2(i))| = q(q-1)(q^2-1)\,),$
$C_3 = \{\, c_3(i)^G \mid i \in T_2\}\ \ (\,|C_3)| = |T_2|/2 = q/2,\ \ |C_G(c_3(i))| = q(q+1)(q^2-1)\,),$
$C_4 = \{\, c_4(i)^G \mid i \in T_2\}\ \ (\,|C_4| = |T_2|/2 = q/2,\ \ |C_G(c_4(i))| = q(q+1)(q^2-1)\,);$

$D = D_1 \,\dot\cup\, D_2 \,\dot\cup\, D_3 \,\dot\cup\, D_4$, где
$D_1 = \{\, d_1(i)^G \mid i \in T_1\}\ \ (\,|D_1| = |T_1|/2 = (q-2)/2,\ \ |C_G(d_1(i))| = q(q-1)\,),$
$D_2 = \{\, d_2(i)^G \mid i \in T_1\}\ \ (\,|D_2| = |T_1|/2 = (q-2)/2,\ \ |C_G(d_2(i))| = q(q-1)\,),$
$D_3 = \{\, d_3(i)^G \mid i \in T_2\}\ \ (\,|D_3| = |T_2|/2 = q/2,\ \ |C_G(d_3(i))| = q(q+1)\,),$
$D_4 = \{\, d_4(i)^G \mid i \in T_2\}\ \ (\,|D_4| = |T_2|/2 = q/2,\ \ |C_G(d_4(i))| = q(q+1)\,).$

При подсчёте числа классов учитываются следующие их свойства:

(B1,4) при $s \in \{1,4\}$ восемь обозначений $b_s(\pm i, \pm j)^G$, $b_s(\pm j, \pm i)^G$ определяют один и тот же класс;

(B2,5) при $s \in \{2,5\}$ четыре обозначения $b_s(\pm i)^G$ и $b_s(\pm qi)^G$ определяют один и тот же класс;

(B3) четыре обозначения $b_3(\pm i, \pm j)^G$ определяют один и тот же класс;

(CD) $c_s(i)^G = c_s(-i)^G$ и $d_s(i)^G = d_s(-i)^G$ при $1 \leq s \leq 4$.

Отметим, что A есть множество всех 2-элементов группы G, причём a_2, a_{31}, a_{32} — инволюции, а a_{41} и a_{42} имеют порядок 4 (см. в [12] табл. IV.1, определение элементов $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_{a+b}(t)$, $x_{2a+b}(t)$, $h(z_1,z_2)$ на с. 76 и коммутаторные соотношения $(1.1)'$).

2.2. Неприводимые характеры группы G

$\mathrm{Irr}(G) = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\} \cup (\,\dot\cup_{i=1}^{13} \mathrm{X}_i)$, где

при $i \notin \{1,3,4\}$ X_i состоит из характеров $\chi_i^{(k)}$ для определённых k, указанных в таблице характеров (например, при $i = 5$ параметр k пробегает множество $R_3 = \mathbb{Z}^{\#}_{q^2+1}$),

а при $i \in \{1,3,4\}$ X_i состоит из характеров $\chi_i^{(k,l)}$ для определённых пар (k,l), также указанных в таблице характеров.

При подсчёте мощностей множеств X_i следует учитывать следующие их свойства:

$(\chi 1,4)$ при $i \in \{1,4\}$ восемь обозначений $\chi_i^{(\pm k, \pm l)}$, $\chi_i^{(\pm l, \pm k)}$ определяют один и тот же характер;

$(\chi 2,5)$ при $i \in \{2,5\}$ четыре обозначения $\chi_i^{(\pm k)}$ и $\chi_i^{(\pm qk)}$ определяют один и тот же характер;

$(\chi 3)$ четыре обозначения $\chi_3^{(\pm k, \pm l)}$ определяют один и тот же характер;

$(\chi 6\text{-}13)$ $\chi_i^{(k)} = \chi_i^{(-k)}$ при $6 \le i \le 13$.

В первом столбце таблицы характеров (в табл. A) записаны неприводимые характеры группы G, а в последнем столбце (в табл. D) указаны числа характеров в соответствующих строках (начиная с седьмой строки это — мощности множеств $X_1, \ldots, X_{13}$).

В первой строке таблицы характеров записаны представители классов сопряжённых элементов группы G, а в последней её строке указаны числа классов в соответствующих столбцах (начиная с седьмого столбца это — мощности множеств $B_1, \ldots, B_5, C_1, \ldots, C_4, D_1, \ldots, D_4,$).

Отметим, что диагональные клетки таблицы характеров являются квадратными.

Вхождения таблицы характеров являются суммами корней из единицы $\zeta_n := e^{\frac{2\pi \mathbf{i}}{n}}$ ($\mathbf{i}$ — мнимая единица) при некоторых натуральных n. Целыми являются все значения "одиноких" неприводимых характеров (характеров $\theta_0, \ldots, \theta_5$), а также значения всех неприводимых характеров на "одиноких" классах (классах из A). Другие значения выражаются через следующие числа (при $s \in \mathbb{Z}_n$ полагаем $\zeta_n^s := \zeta_n^{\widetilde{s}}$ для некоторого (следовательно, любого) $\widetilde{s} \in s$):

$$\theta := \zeta_{q^2-1}, \qquad \alpha_s := \zeta_{q-1}^s + \zeta_{q-1}^{-s} = 2\cos\frac{2\widetilde{s}\pi}{q-1} \quad \text{при} \quad s \in \mathbb{Z}_{q-1} \quad \text{и} \quad \widetilde{s} \in s,$$

$$\tau := \zeta_{q^2+1}, \qquad \beta_s := \zeta_{q+1}^s + \zeta_{q+1}^{-s} = 2\cos\frac{2\widetilde{s}\pi}{q+1} \quad \text{при} \quad s \in \mathbb{Z}_{q+1} \quad \text{и} \quad \widetilde{s} \in s.$$

Заметим, что числа α_s и β_s отличны от нуля при любом s ввиду нечётности чисел $q-1$ и $q+1$.

3. Доказательство теоремы 1

Предложение 3.1. *Пусть $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, где q чётно и $q > 2$. Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G. Тогда $\{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{X}_i$ при некотором $i \in \{1, \ldots, 13\}$.*

В частности, для группы G верна гипотеза о малых D-блоках.

Доказательство. Мы будем рассматривать таблицу характеров $\mathrm{X}(G)$ группы G (табл. A–D ниже), используя предложение 1.1 и следствие 1.1. Тот факт, что (по п. (1) следствия 1.1) полупропорциональные неприводимые характеры группы имеют одно и то же множество корней (нулей), используется далее без оговорок. Будем считать, что в $\mathrm{X}(G)$ характер ψ лежит ниже характера φ. Поэтому мы будем каждый раз сравнивать значения характера φ лишь со значениями характеров, расположенных ниже его.

Если $\varphi = \theta_0$ $(= 1_G)$, то ψ в отличие от φ имеет нулевые значения, что противоречиво.

Если $\varphi = \theta_1$, то ψ и φ также имеют разные множества корней, что видно из рассмотрения значений характеров на классах из B (табл. B); это противоречиво.

Если $\varphi = \theta_2$, то снова характеры ψ и φ имеют разные множества корней, что видно из рассмотрения значений характеров на классах из B_2, B_3 и (лишь для исключения случая $\psi \in \{\theta_3, \theta_4\}$) D_2; это противоречиво.

Пусть $\varphi = \theta_3$. Тогда ψ и φ имеют разные множества корней, что видно из рассмотрения значений характеров (расположенных в $\mathrm{X}(G)$ не выше θ_3) на классах из A_{42} (для исключения равенства $\psi = \theta_4$), B_2 и B_3. Этот случай противоречив.

При $\varphi = \theta_4$ характеры ψ и φ также имеют разные множества корней, что видно из рассмотрения значений характеров на A_2; снова — противоречие.

Если $\varphi = \theta_5$, то ψ и φ имеют разные множества корней, что видно из рассмотрения значений характеров на классах из B_4 и B_5; это противоречиво.

Пусть теперь $\varphi \in \mathrm{X}_s$ при некотором $s \geq 1$, и $\psi \in \mathrm{X}_t$ при $t > s$. Здесь мы получим противоречие, применяя следствие 1.1, причём во всех случаях оказалось достаточным рассмотреть лишь ограничения характеров φ и ψ на классах из A (табл. A).

Пусть $s \leq 9$. Поскольку на элементе a_{41} значения всех характеров из $X_1 \cup \ldots \cup X_9$ отличны от нуля, а значения характеров из $X_{10} \cup \ldots \cup X_{13}$ все нулевые, то (по п. (1) следствия 1.1) должно быть $t \leq 9$. Но тогда, как видно из табл. A, $\varphi(a_{41}) = \pm\,\psi(a_{41})$, а значит, по п. (3) следствия 1.1 должно быть $\varphi(g) = \pm\,\psi(g)$ для всех $g \in G$, в частности, $\varphi(a_1) = \psi(a_1)$. Последнее равенство возможно лишь при $(s,t) = (2,3)$, $(s,t) = (6,7)$ и $(s,t) = (8,9)$, однако ни в одном из этих случаев не выполнено равенство $\varphi(a_2) = \pm\,\psi(a_2)$.

Пусть, наконец, $s, t \in \{10, 11, 12, 13\}$. Как видно из табл. A, $\varphi(a_{32}) = \pm\,\psi(a_{32})$, а значит, по п. (3) следствия 1.1 должно быть $\varphi(g) = \pm\,\psi(g)$ для всех $g \in G$. Однако, легко увидеть, для любой рассматриваемой здесь пары φ и ψ это равенство не выполнено даже при всех $g \in \{a_1, a_2\}$.

Предложение 3.1 доказано.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 1.

Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G. Согласно предложению 3.1 существует номер $i \in \{1, \ldots, 13\}$ такой, что $\{\varphi, \psi\} \subseteq \mathrm{X}_i$. Тогда $\varphi(1) = \psi(1)$ и согласно следствию 1.1 $\varphi(g) = \pm\psi(g)$ для всех $g \in G$. Начнём с рассмотрения простых случаев.

Пусть $i = 13$. Тогда $\varphi = \chi_{13}^{(k_1)}$ и $\psi = \chi_{13}^{(k_2)}$ при некоторых $k_1, k_2 \in T_2 = \mathbb{Z}_{q+1}^{\#}$. Так как φ и ψ полупропорциональны, то $\chi_{13}^{(k_1)}(d_4(1)) = \pm\,\chi_{13}^{(k_2)}(d_4(1))$ и по табл. D $\beta_{k_1} = \pm\,\beta_{k_2}$, т. е.

$$\cos\frac{2\widetilde{k_1}\pi}{q+1} = \pm\,\cos\frac{2\widetilde{k_2}\pi}{q+1}\,, \tag{3.1}$$

где $\widetilde{k_i}$ — (любой) представитель класса вычетов k_i ($i \in \{1,2\}$). (Если $k \in \mathbb{Z}_n$ и $\widetilde{k} \in k$, то k состоит из всех целых чисел z, сравнимых с $\widetilde{k}$ по модулю n.) По лемме 1.1 отсюда и из нечётности $q+1$ следует, что $q+1$ делит $\widetilde{k_1} \pm \widetilde{k_2}$ (т. е. делит $\widetilde{k_1} + \widetilde{k_2}$ или $\widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}$) и, следовательно, $k_1 = \pm\,k_2$ в кольце $\mathbb{Z}_{q+1}$. Но тогда по (χ6-13) $\chi_{13}^{(k_1)} = \chi_{13}^{(k_2)}$, что противоречиво.

Пусть $i = 12$. Если $\chi_{12}^{(k_1)}$ полупропорционален $\chi_{12}^{(k_2)}$ при некоторых $k_1, k_2 \in T_2 = \mathbb{Z}_{q+1}^{\#}$, то $\chi_{12}^{(k_1)}(d_3(1)) = \pm\,\chi_{12}^{(k_2)}(d_3(1))$, и согласно табл. D снова верно равенство (3.1). Теперь так же, как и в предыдущем абзаце, получаем противоречие.

Пусть $i = 11$ и $\chi_{11}^{(k_1)}$ полупропорционален $\chi_{11}^{(k_2)}$, где $k_1, k_2 \in T_1 = \mathbb{Z}_{q-1}^{\#}$. Тогда $\chi_{11}^{(k_1)}(d_3(1)) = \pm\,\chi_{11}^{(k_2)}(d_3(1))$, и согласно табл. D $\alpha_{k_1} = \pm\,\alpha_{k_2}$, т. е.

$$\cos\frac{2\widetilde{k_1}\pi}{q-1} = \pm\,\cos\frac{2\widetilde{k_2}\pi}{q-1} \tag{3.2}$$

для любых $\widetilde{k_1} \in k_1$ и $\widetilde{k_2} \in k_2$. По лемме 1.1 отсюда следует, что $q-1$ делит $\widetilde{k_1} \pm \widetilde{k_2}$, т. е. $k_1 = \pm\,k_2$ в кольце $\mathbb{Z}_{q-1}$. Но тогда по (χ6-13) $\chi_{11}^{(k_1)} = \chi_{11}^{(k_2)}$, что противоречиво.

Пусть $i = 10$ и $\chi_{10}^{(k_1)}$ полупропорционален $\chi_{10}^{(k_2)}$, где $k_1, k_2 \in T_1 = \mathbb{Z}_{q-1}^{\#}$. Тогда $\chi_{10}^{(k_1)}(d_4(1)) = \pm\,\chi_{10}^{(k_2)}(d_4(1))$, откуда следует равенство (3.2), а из него так же, как и в предыдущем абзаце, получаем противоречие.

Случаи $i = 9$, $i = 8$, $i = 7$ и $i = 6$ исключаются в точности так же, как случаи $i = 13$, $i = 12$, $i = 11$, $i = 10$ соответственно.

Т а б л и ц а А

Таблица характеров группы $\mathrm{Sp}_4(q)$, $q = 2^m$

	a_1	a_2	a_{31}	a_{32}	a_{41}	a_{42}
θ_0	1	1	1	1	1	1
θ_1	$q(q+1)^2/2$	$q(q+1)/2$	$q(q+1)/2$	$q/2$	$q/2$	$-q/2$
θ_2	$q(q^2+1)/2$	$-q(q-1)/2$	$q(q+1)/2$	$q/2$	$-q/2$	$q/2$
θ_3	$q(q^2+1)/2$	$q(q+1)/2$	$-q(q-1)/2$	$q/2$	$-q/2$	$q/2$
θ_4	q^4	0	0	0	0	0
θ_5	$q(q-1)^2/2$	$-q(q-1)/2$	$-q(q-1)/2$	$q/2$	$q/2$	$-q/2$
$\chi_1^{(k,l)}$ $((k,l) \in S_1)$	$(q+1)^2(q^2+1)$	$(q+1)^2$	$(q+1)^2$	$2q+1$	1	1
$\chi_2^{(k)}$ $(k \in R_2)$	q^4-1	q^2-1	$-(q^2+1)$	-1	-1	-1
$\chi_3^{(k,l)}$ $((k,l) \in T)$	q^4-1	$-(q^2+1)$	q^2-1	-1	-1	-1
$\chi_4^{(k,l)}$ $((k,l) \in S_2)$	$(q-1)^2(q^2+1)$	$(q-1)^2$	$(q-1)^2$	$-(2q-1)$	1	1
$\chi_5^{(k)}$ $(k \in R_3)$	$(q^2-1)^2$	$-(q-1)^2$	$-(q-1)^2$	1	1	1
$\chi_6^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$(q+1)(q^2+1)$	$q+1$	q^2+q+1	$q+1$	1	1
$\chi_7^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$(q+1)(q^2+1)$	q^2+q+1	$q+1$	$q+1$	1	1
$\chi_8^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$(q-1)(q^2+1)$	$q-1$	$-(q^2-q+1)$	$q-1$	-1	-1
$\chi_9^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$(q-1)(q^2+1)$	$-(q^2-q+1)$	$q-1$	$q-1$	-1	-1
$\chi_{10}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$q(q+1)(q^2+1)$	$q(q+1)$	q	q	0	0
$\chi_{11}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$q(q+1)(q^2+1)$	q	$q(q+1)$	q	0	0
$\chi_{12}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$q(q-1)(q^2+1)$	$q(q-1)$	$-q$	$-q$	0	0
$\chi_{13}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$q(q-1)(q^2+1)$	$-q$	$q(q-1)$	$-q$	0	0
Число классов	1	1	1	1	1	1

Т а б л и ц а В

Таблица характеров группы $\mathrm{Sp}_4(q)$, $q = 2^m$ (продолжение)

	$b_1(i,j)$ $((i,j) \in S_1)$	$b_2(i)$ $(i \in R_2)$	$b_3(i,j)$ $((i,j)\in T)$	$b_4(i,j)$ $((i,j) \in S_2)$	$b_5(i)$ $(i \in R_3)$
θ_0	1	1	1	1	1
θ_1	2	0	0	0	-1
θ_2	1	1	-1	-1	0
θ_3	1	-1	1	-1	0
θ_4	1	-1	-1	1	1
θ_5	0	0	0	-2	1
$\chi_1^{(k,l)}$ $((k,l) \in S_1)$	$\alpha_{ik}\alpha_{jl} + \alpha_{il}\alpha_{jk}$	0	0	0	0
$\chi_2^{(k)}$ $(k \in R_2)$	0	$-(\theta^{ik} + \theta^{-jk} + \theta^{qik} + \theta^{-qjk})$	0	0	0
$\chi_3^{(k,l)}$ $((k,l) \in T)$	0	0	$-\alpha_{ik}\beta_{jl}$	0	0
$\chi_4^{(k,l)}$ $((k,l) \in S_2)$	0	0	0	$\beta_{ik}\beta_{jl} + \beta_{il}\beta_{jk}$	0
$\chi_5^{(k)}$ $(k \in R_3)$	0	0	0	0	$\tau^{ik} + \tau^{-ik} + \tau^{qik} + \tau^{-qik}$
$\chi_6^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$\alpha_{ik}\alpha_{jk}$	α_{ik}	0	0	0
$\chi_7^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$\alpha_{ik} + \alpha_{jk}$	0	α_{ik}	0	0
$\chi_8^{(k)}$ $(k \in T_2)$	0	$-\beta_{ik}$	0	$-\beta_{ik}\beta_{jk}$	0
$\chi_9^{(k)}$ $(k \in T_2)$	0	0	$-\beta_{jk}$	$-(\beta_{ik} + \beta_{jk})$	0
$\chi_{10}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$\alpha_{ik}\alpha_{jk}$	$-\alpha_{ik}$	0	0	0
$\chi_{11}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$\alpha_{ik} + \alpha_{jk}$	0	$-\alpha_{ik}$	0	0
$\chi_{12}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	0	$-\beta_{ik}$	0	$\beta_{ik}\beta_{jk}$	0
$\chi_{13}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	0	0	$-\beta_{jk}$	$\beta_{ik} + \beta_{jk}$	0
Число классов	$(q-2)(q-4)/8$	$q(q-2)/4$	$q(q-2)/4$	$q(q-2)/8$	$q^2/4$

Т а б л и ц а С

Таблица характеров группы $\mathrm{Sp}_4(q)$, $q = 2^m$ (продолжение)

	$c_1(i)$ $(i \in T_1)$	$c_2(i)$ $(i \in T_1)$	$c_3(i)$ $(i \in T_2)$	$c_4(i)$ $(i \in T_2)$
θ_0	1	1	1	1
θ_1	0	$q+1$	$q+1$	0
θ_2	q	1	-1	q
θ_3	1	q	q	-1
θ_4	q	q	$-q$	$-q$
θ_5	0	0	$q-1$	$q-1$
$\chi_1^{(k,l)}$ $((k,l) \in S_1)$	$(q+1)(\alpha_{ik} + \alpha_{il})$	$(q+1)\alpha_{ik}\alpha_{il}$	0	0
$\chi_2^{(k)}$ $(k \in R_2)$	0	$(q-1)\alpha_{ik}$	0	$-(q+1)\beta_{ik}$
$\chi_3^{(k,l)}$ $((k,l) \in T)$	$(q-1)\alpha_{ik}$	0	$-(q+1)\beta_{il}$	0
$\chi_4^{(k,l)}$ $((k,l) \in S_2)$	0	0	$-(q-1)(\beta_{ik} + \beta_{il})$	$-(q-1)\beta_{ik}\beta_{il}$
$\chi_5^{(k)}$ $(k \in R_3)$	0	0	0	0
$\chi_6^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$(q+1)\alpha_{ik}$	$q+1+\alpha_{2ik}$	0	$q+1$
$\chi_7^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$q+1+\alpha_{ik}$	$(q+1)\alpha_{ik}$	$q+1$	0
$\chi_8^{(k)}$ $(k \in T_2)$	0	$q-1$	$(q-1)\beta_{ik}$	$q-1-\beta_{2ik}$
$\chi_9^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$q-1$	0	$q-1-\beta_{ik}$	$(q-1)\beta_{ik}$
$\chi_{10}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$(q+1)\alpha_{ik}$	$q+1+q\alpha_{2ik}$	0	$-(q+1)$
$\chi_{11}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$q+1+q\alpha_{ik}$	$(q+1)\alpha_{ik}$	$-(q+1)$	0
$\chi_{12}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	0	$q-1$	$-(q-1)\beta_{ik}$	$-(q-1)-q\beta_{2ik}$
$\chi_{13}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	$q-1$	0	$-(q-1)-q\beta_{ik}$	$-(q-1)\beta_{ik}$
Число классов	$(q-2)/2$	$(q-2)/2$	$q/2$	$q/2$

Т а б л и ц а D

Таблица характеров группы $\mathrm{Sp}_4(q)$, $q = 2^m$ (окончание)

	$d_1(i)$ $(i \in T_1)$	$d_2(i)$ $(i \in T_1)$	$d_3(i)$ $(i \in T_2)$	$d_4(i)$ $(i \in T_2)$	Число характеров
θ_0	1	1	1	1	1
θ_1	1	1	0	0	1
θ_2	0	1	-1	0	1
θ_3	1	0	0	-1	1
θ_4	0	0	0	0	1
θ_5	0	0	-1	-1	1
$\chi_1^{(k,l)}$ $((k,l) \in S_1)$	$\alpha_{ik} + \alpha_{il}$	$\alpha_{ik}\alpha_{il}$	0	0	$(q-2)(q-4)/8$
$\chi_2^{(k)}$ $(k \in R_2)$	0	$-\alpha_{ik}$	0	$-\beta_{ik}$	$q(q-2)/4$
$\chi_3^{(k,l)}$ $((k,l) \in T)$	$-\alpha_{ik}$	0	$-\beta_{il}$	0	$q(q-2)/4$
$\chi_4^{(k,l)}$ $((k,l) \in S_2)$	0	0	$\beta_{ik} + \beta_{il}$	$\beta_{ik}\beta_{il}$	$q(q-2)/8$
$\chi_5^{(k)}$ $(k \in R_3)$	0	0	0	0	$q^2/4$
$\chi_6^{(k)}$ $(k \in T_1)$	α_{ik}	$1 + \alpha_{2ik}$	0	1	$(q-2)/2$
$\chi_7^{(k)}$ $(k \in T_1)$	$1 + \alpha_{ik}$	α_{ik}	1	0	$(q-2)/2$
$\chi_8^{(k)}$ $(k \in T_2)$	0	-1	$-\beta_{ik}$	$-1 - \beta_{2ik}$	$q/2$
$\chi_9^{(k)}$ $(k \in T_2)$	-1	0	$-1 - \beta_{ik}$	$-\beta_{ik}$	$q/2$
$\chi_{10}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	α_{ik}	1	0	-1	$(q-2)/2$
$\chi_{11}^{(k)}$ $(k \in T_1)$	1	α_{ik}	-1	0	$(q-2)/2$
$\chi_{12}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	0	-1	β_{ik}	1	$q/2$
$\chi_{13}^{(k)}$ $(k \in T_2)$	-1	0	1	β_{ik}	$q/2$
Число классов	$(q-2)/2$	$(q-2)/2$	$q/2$	$q/2$	—

Пусть $i=5$. Предположим, что $\chi_5^{(k_1)}$ полупропорционален $\chi_5^{(k_2)}$, где $k_1,k_2\in R_3=\mathbb{Z}_{q^2+1}$. Тогда $\chi_5^{(k_1)}(b_5(i))=\pm\,\chi_5^{(k_2)}(b_5(i))$ для любого $i\in R_3$. Из таблицы характеров группы G видно, что

$$\chi_5^{(k_1)}(g)=\chi_5^{(k_2)}(g)\ \text{ для всех }\quad g\in G\setminus B_5.$$

Поэтому должен существовать $i\in R_3$ такой, что $\chi_{13}^{(k_1)}(b_5(i))=-\chi_{13}^{(k_2)}(b_5(i))$. Отсюда согласно табл. D получаем равенство:

$$\tau^{ik_1}+\tau^{-ik_1}+\tau^{qik_1}+\tau^{-qik_1}+\tau^{ik_2}+\tau^{-ik_2}+\tau^{qik_2}+\tau^{-qik_2}=0\,, \tag{3.3}$$

где τ — первообразный корень степени q^2+1 из единицы. Таким образом, в (3.3) мы имеем сумму восьми слагаемых, являющихся корнями степени q^2+1 из единицы. Согласно предложению 1.3 должно выполняться равенство:

$$8=\sum_{i=1}^{r}a_ip_i,\ \text{где } \{p_1,\ldots,p_r\}=\pi(q^2+1)\ \text{ и }\ a_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Понятно, что это равенство должно иметь вид: $8=3+5$. Но это невозможно, так как 3 не делит q^2+1 $(q^2+1=2^{2m}+1\equiv(-1)^{2m}+1=2\ (\mathrm{mod}\,3))$. Таким образом, $i\neq 5$.

Пусть $i=4$. Здесь $(k,l)\in S_2\subseteq T_2\times T_2$, $l\neq\pm\,k$. Предположим, что $\chi_4^{(k_1,l_1)}$ полупропорционален $\chi_4^{(k_2,l_2)}$. Тогда $\chi_4^{(k_1,l_1)}(g)=\pm\,\chi_4^{(k_2,l_2)}(g)$ для любого $g\in G$. При $g=d_3(1)$ и $g=d_4(1)$ получаем:

$$\beta_{k_1}+\beta_{l_1}=\varepsilon(\beta_{k_2}+\beta_{l_2})\ \text{ и }\ \beta_{k_1}\cdot\beta_{l_1}=\delta\beta_{k_2}\cdot\beta_{l_2},\ \text{ где }\ \{\varepsilon,\delta\}\subseteq\{1,-1\}. \tag{3.4}$$

Если $\varepsilon=\delta=1$, то согласно лемме 1.3 $\{\beta_{k_1},\beta_{l_1}\}=\{\beta_{k_2},\beta_{l_2}\}$, т. е.

$$\left\{\cos\frac{2\widetilde{k_1}\pi}{q+1},\ \cos\frac{2\widetilde{l_1}\pi}{q+1}\right\}=\left\{\cos\frac{2\widetilde{k_2}\pi}{q+1},\ \cos\frac{2\widetilde{l_2}\pi}{q+1}\right\},$$

где $\widetilde{k_1},\widetilde{l_1},\widetilde{k_2},\widetilde{l_2}$ — элементы из k_1,l_1,k_2,l_2 соответственно. По лемме 1.1 отсюда следует, что $q+1$ делит либо $\widetilde{k_1}\pm\widetilde{k_2}$ и $\widetilde{l_1}\pm\widetilde{l_2}$, либо $\widetilde{k_1}\pm\widetilde{l_2}$ и $\widetilde{l_1}\pm\widetilde{k_2}$, т. е. $(k_1,l_1)=(\pm\,k_2,\pm\,l_2)$ или $(k_1,l_1)=(\pm\,l_2,\pm\,k_2)$ в кольце $\mathbb{Z}_{q+1}$. Но отсюда и из $(\chi1,4)$, согласно которому $\chi_i^{(\pm\,k,\pm\,l)}$, $\chi_i^{(\pm\,l,\pm\,k)}$ есть один и тот же характер, следует, что $\chi_4^{(k_1,l_1)}=\chi_4^{(k_2,l_2)}$, а это противоречиво.

Следовательно, $\varepsilon=-1$ или $\delta=-1$, и, как следует из (3.4), справедливо одно из равенств:

$$\beta_{k_1}+\beta_{l_1}+\beta_{k_2}+\beta_{l_2}=0\ \text{ и }\ \beta_{k_1}\cdot\beta_{l_1}+\beta_{k_2}\cdot\beta_{l_2}=0\,. \tag{3.5}$$

Поскольку каждое β_s есть сумма двух корней степени $q+1$ из единицы, то по (3.5) в любом случае мы будем иметь сумму восьми слагаемых, таких корней из единицы, равную нулю. Согласно предложению 1.3 число 8 должно быть линейной комбинацией простых делителей числа $q+1$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Следовательно, решение однозначно: $8=3+5$ и 15 делит $q+1$. Так как $q+1=2^m+1\equiv(-1)^m+1\,(\mathrm{mod}\ 3)$, то 3 делит $q+1$ если и только если $m=2t+1$. Таким образом, если 3 делит $q+1$, то $q=2^{2t+1}$. Но тогда

$$q+1=2^{2t+1}+1=4^t\cdot 2+1\equiv(-1)^t\cdot 2+1\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,5),$$

т. е. 5 не делит $q+1$. Таким образом, $i\neq 4$.

Пусть $i=3$ и $\chi_3^{(k_1,l_1)}$ полупропорционален $\chi_3^{(k_2,l_2)}$, где $k_1,k_2\in T_1=\mathbb{Z}_{q-1}^{\#}$ и $l_1,l_2\in T_2=\mathbb{Z}_{q+1}^{\#}$. Тогда $\chi_3^{(k_1,l_1)}(d_1(1))=\pm\,\chi_3^{(k_2,l_2)}(d_1(1))$ и $\chi_3^{(k_1,l_1)}(d_3(1))=\pm\,\chi_3^{(k_2,l_2)}(d_3(1))$, откуда согласно табл. D $\alpha_{k_1}=\pm\,\alpha_{k_2}$ и $\beta_{l_1}=\pm\,\beta_{l_2}$, т. е.

$$\cos\frac{2\widetilde{k_1}\pi}{q-1}=\pm\,\cos\frac{2\widetilde{k_2}\pi}{q-1}\ \text{ и }\ \cos\frac{\widetilde{2l_1}\pi}{q+1}=\pm\,\cos\frac{2\widetilde{l_2}\pi}{q+1}$$

($\widetilde{k_1}, \widetilde{k_2}, \widetilde{l_1}, \widetilde{l_2}$ — элементы из k_1, k_2, l_1, l_2 соответственно). По лемме 1.1 отсюда следует, что $q-1$ делит $\widetilde{k_1} \pm \widetilde{k_2}$ и $q+1$ делит $\widetilde{l_1} \pm \widetilde{l_2}$, т. е. $k_1 = \pm k_2$ в кольце $\mathbb{Z}_{q-1}$ и $l_1 = \pm l_2$ в кольце $\mathbb{Z}_{q+1}$. Но тогда по $(\chi 3)$ $\chi_3^{(k_1,l_1)} = \chi_3^{(k_2,l_2)}$, что противоречиво.

Пусть $i = 2$ и $\chi_2^{(k_1)}$ полупропорционален $\chi_2^{(k_2)}$, где $k_1, k_2 \in R_2 \subseteq \mathbb{Z}^{\#}_{q^2-1}$, $qk_1 \neq \pm k_1$ и $qk_1 \neq \pm k_2$. Тогда $\chi_2^{(k_1)}(d_2(1)) = \pm \chi_2^{(k_2)}(d_2(1))$ и $\chi_2^{(k_1)}(d_4(1)) = \pm \chi_2^{(k_2)}(d_4(1))$, и согласно табл. D $\alpha_{k_1} = \pm \alpha_{k_2}$ и $\beta_{k_1} = \pm \beta_2$, т. е.

$$\cos\frac{2\widetilde{k_1}\pi}{q-1} = \pm\cos\frac{2\widetilde{k_2}\pi}{q-1} \ \text{ и } \ \cos\frac{2\widetilde{k_1}\pi}{q+1} = \pm\cos\frac{2\widetilde{k_2}\pi}{q+1}$$

($\widetilde{k_1} \in k_1$ и $\widetilde{k_2} \in k_2$). По лемме 1.1 отсюда следует, что $q-1$ делит $\widetilde{k_1} \pm \widetilde{k_2}$ и $q+1$ делит $\widetilde{k_1} \pm \widetilde{k_2}$.Возможны лишь следующие четыре варианта (учтём, что $(q-1, q+1) = 1$).

1. Пусть $q-1$ и $q+1$ делят $\widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}$. Тогда q^2-1 делит $\widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}$, т. е. $k_2 = k_1$ в кольце $\mathbb{Z}_{q^2-1}$.

2. Пусть $q-1$ и $q+1$ делят $\widetilde{k_1} + \widetilde{k_2}$. Тогда q^2-1 делит $\widetilde{k_1} + \widetilde{k_2}$, т. е. $k_2 = -k_1$ в кольце $\mathbb{Z}_{q^2-1}$.

3. Пусть $q-1$ делит $\widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}$ и $q+1$ делит $\widetilde{k_1} + \widetilde{k_2}$. Тогда q^2-1 делит числа $(q+1)(\widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}) = q\widetilde{k_1} - q\widetilde{k_2} + \widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}$ и $(q-1)(\widetilde{k_1} + \widetilde{k_2}) = q\widetilde{k_1} + q\widetilde{k_2} - \widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}$, а значит, и половину их суммы, равной $q\widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}$. Следовательно, $k_2 = qk_1$ в кольце $\mathbb{Z}_{q^2-1}$.

4. Пусть $q-1$ делит $\widetilde{k_1} + \widetilde{k_2}$ и $q+1$ делит $\widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}$. Тогда q^2-1 делит числа $(q+1)(\widetilde{k_1} + \widetilde{k_2}) = q\widetilde{k_1} + q\widetilde{k_2} + \widetilde{k_1} + \widetilde{k_2}$ и $(q-1)(\widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}) = q\widetilde{k_1} - q\widetilde{k_2} - \widetilde{k_1} + \widetilde{k_2}$, а значит, и половину их суммы, равной $q\widetilde{k_1} - \widetilde{k_2}$. Следовательно, $k_2 = -qk_1$ в кольце $\mathbb{Z}_{q^2-1}$.

Таким образом, в кольце $\mathbb{Z}_{q^2-1}$ будет $k_2 \in \{k_1, -k_1, qk_1, -qk_1\}$. Но тогда согласно $(\chi 2, 5)$ $\chi_2^{(k_1)} = \chi_2^{(k_2)}$, что противоречиво.

Пусть $i = 1$. Здесь $(k, l) \in S_1 \subseteq T_1 \times T_1$, $l \neq \pm k$. Предположим, что $\chi_1^{(k_1,l_1)}$ полупропорционален $\chi_1^{(k_2,l_2)}$. Тогда $\chi_4^{(k_1,l_1)}(g) = \pm \chi_4^{(k_2,l_2)}(g)$ для любого $g \in G$. При $g = d_1(1)$ и $g = d_2(1)$ получаем:

$$\alpha_{k_1} + \alpha_{l_1} = \varepsilon(\alpha_{k_2} + \alpha_{l_2}) \ \text{ и } \ \alpha_{k_1}\cdot\alpha_{l_1} = \delta\alpha_{k_2}\cdot\alpha_{l_2}, \ \text{ где } \ \{\varepsilon, \delta\} \subseteq \{1, -1\}. \tag{3.6}$$

Если $\delta = -1$, то, как следует из (3.6), $\alpha_{k_1}\cdot\alpha_{l_1} = -\alpha_{k_2}\cdot\alpha_{l_2}$, т. е.

$$\cos\frac{2\widetilde{k_1}\pi}{q-1}\cdot\cos\frac{2\widetilde{l_1}\pi}{q-1} = -\cos\frac{2\widetilde{k_2}\pi}{q-1}\cdot\cos\frac{2\widetilde{l_2}\pi}{q-1} \tag{3.7}$$

($\widetilde{k_1}, \widetilde{k_2}, \widetilde{l_1}, \widetilde{l_2}$ — элементы из k_1, k_2, l_1, l_2 соответственно). Поскольку $k_j \neq \pm l_j$ при $j \in \{1, 2\}$, то согласно п. (2) следствия 1.3 равенство (3.7) противоречиво.

Следовательно, $\delta = 1$. В этом случае равенства (3.6) можно записать в виде

$$\alpha_{k_1} + \alpha_{l_1} = (\varepsilon\alpha_{k_2}) + (\varepsilon\alpha_{l_2}) \ \text{ и } \ \alpha_{k_1}\cdot\alpha_{l_1} = (\varepsilon\alpha_{k_2})\cdot(\varepsilon\alpha_{l_2}),$$

откуда по лемме 1.3 получаем $\{\alpha_{k_1}, \alpha_{l_1}\} = \{\varepsilon\alpha_{k_2}, \varepsilon\alpha_{l_2}\}$, т. е.

$$\left\{\cos\frac{2\widetilde{k_1}\pi}{q-1}\,,\ \cos\frac{2\widetilde{l_1}\pi}{q-1}\right\} = \left\{\varepsilon\cos\frac{2\widetilde{k_2}\pi}{q-1}\,,\ \varepsilon\cos\frac{2\widetilde{l_2}\pi}{q-1}\right\},$$

где $\widetilde{k_1}, \widetilde{k_2}, \widetilde{l_1}, \widetilde{l_2}$ — элементы из k_1, k_2, l_1, l_2 соответственно. По п. (2) леммы 1.1 отсюда следует, что $\varepsilon = 1$ и, следовательно, по п. (1) леммы 1.1 $q-1$ делит $\widetilde{k_1} \pm \widetilde{k_2}$ и $\widetilde{l_1} \pm \widetilde{l_2}$ или $q-1$ делит $\widetilde{k_1} \pm \widetilde{l_2}$ и $\widetilde{l_1} \pm \widetilde{k_2}$, т. е. $(k_1, l_1) = (\pm k_2, \pm l_2)$ или $(k_1, l_1) = (\pm l_2, \pm k_2)$ в кольце $\mathbb{Z}_{q-1}$. Но отсюда и из $(\chi 1, 4)$, согласно которому $\chi_i^{(\pm k, \pm l)}$, $\chi_i^{(\pm l, \pm k)}$ есть один и тот же характер, следует, что $\chi_1^{(k_1,l_1)} = \chi_1^{(k_2,l_2)}$, что противоречиво. Таким образом, $i \neq 1$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Предложение 4.1. *Пусть $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, где q чётно и $q \geq 4$. Пусть x^G и y^G — классы сопряжённых элементов группы G $(x, y \in G)$ такие, что соответствующие им столбцы таблицы характеров группы G полупропорциональны. Тогда верно одно из условий:*

(1) $x^G \cup y^G = a_{41}^G \cup a_{42}^G$,

(2) $x^G \cup y^G$ *содержится в одном из множеств B_i при $i \in \{1, \ldots, 5\}$, C_i при $i \in \{1, \ldots, 4\}$ и D_i при $i \in \{1, \ldots, 4\}$.*

В частности, $\varphi(d) = \pm\varphi(t)$ для любого $\varphi \in \mathrm{Irr}(G)$.

Доказательство. Мы будем рассматривать таблицу характеров $\mathrm{X}(G)$ группы G (табл. A–D), используя предложение 1.2 и, главным образом, следствие 1.2, что обычно не будем оговаривать. Учитываем, что числа α_s и β_s отличны от нуля при любом s ввиду нечётности чисел $q-1$ и $q+1$.

Легко увидеть, что столбцы, соответствующие классам a_{41}^G и a_{42}^G, полупропорциональны, а любые два других класса из A не полупропорциональны и, более того, ни один класс из A не полупропорционален никакому классу из $\mathrm{Irr}(G) \setminus A$ (достаточно рассмотреть последние пять строк таблицы характеров, т. е. значения характеров из семейств $X_9, \ldots, X_{13}$).

Теперь мы считаем, что $x^G \cup y^G \subseteq \mathrm{Irr}(G) \setminus A$ и докажем, что верно условие (2). Предположим, от противного, что классы x^G и y^G лежат в разных семействах классов, причём будем считать, что в $\mathrm{X}(G)$ класс y^G расположен правее класса x^G. Поэтому далее нам достаточно рассматривать значения характеров лишь на x^G и на классах правее его.

Пусть $x^G \subseteq B_1$ (т. е. $x = b_1(i,j)$). Тогда значения характера θ_1 оставляют для y^G лишь возможность $y^G \subseteq B_5$ (по п. (2), (3) следствия 1.2), но она отбрасывается рассмотрением характера θ_2 $(\theta_2(x) = 1,\ \theta_2(b_5(i)) = 0)$.

Пусть $x^G \subseteq B_2$ $(x = b_2(i))$. Тогда значения характеров θ_1 и θ_5 оставляют для y^G лишь возможность $y^G \subseteq B_3 \cup C_1$ (эти значения одновременно равны нулю лишь на x^G, B_3 и C_1), но она устраняется рассмотрением значений характера χ_8^k, равного $-\beta_{ik}$ на x^G и нулю на $B_3 \cup C_1$.

Пусть $x^G \subseteq B_3$. Тогда значения характеров θ_1 и θ_5 оставляют для y^G лишь возможность $y^G \subseteq C_1$, но она устраняется рассмотрением, например, характера $\chi_{13}^{(k)}$.

Пусть $x^G \subseteq B_4$. Тогда значения характеров θ_1 и θ_4 оставляют для y^G лишь возможность $y^G \subseteq C_4$, но она устраняется рассмотрением характера $\chi_2^{(k)}$.

Пусть $x^G \subseteq B_5$. В этом случае характеры θ_2 и θ_3 одновременно принимают нулевые значения только на элементах из B_5, что говорит о невозможности существования класса y^G (полупропорционального классу x^G и не лежащего в B_5).

Пусть $x^G \subseteq C_1$. Подобно предыдущему случаю невозможность существования класса y^G показывают значения характеров θ_1 и θ_5.

Пусть $x^G \subseteq C_2$. Здесь невозможность существования класса y^G видна из рассмотрения значений характеров θ_4 и θ_5 .

Пусть $x^G \subseteq C_3$. Значения характеров θ_1 и θ_5 показывают невозможность существования класса y^G.

Пусть $x^G \subseteq C_4$. Тогда значения одного лишь характера θ_4 влекут невозможность существования класса y^G.

Пусть $x^G \subseteq D_1$. Здесь невозможность существования класса y^G показывают значения характеров θ_1 и θ_2.

Пусть $x^G \subseteq D_2$. Невозможность существования класса y^G здесь показывают значения характера θ_1.

Пусть, наконец, $x^G \subseteq D_3$. Тогда значения характера θ_2 показывают невозможность существования класса y^G.

Предложение 4.1 доказано.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 2.

Таблица характеров группы G оказалась настолько "удачно" устроенной (обладает своеобразной симметрией относительно главной диагонали), что позволяет доказывать теорему 2, повторяя во многом этапы доказательства теоремы 1.

Пусть x^G и y^G — классы сопряжённых элементов группы G ($x, y \in G$) такие, что соответствующие им столбцы таблицы характеров группы G полупропорциональны. Для краткости будем называть и сами эти классы *полупропорциональными*. Тогда согласно предложению 4.1

либо $x^G \cup y^G = a_{41}^G \cup a_{42}^G$,

либо $x^G \cup y^G$ содержится в одном из множеств B_i при $i \in \{1, \dots, 5\}$, C_i при $i \in \{1, \dots, 4\}$ или D_i при $i \in \{1, \dots, 4\}$.

Мы должны показать, что вторая возможность не реализуется.

Пусть $x^G \cup y^G \subseteq D_4$, а именно, $x^G = d_4(i_1)^G$ и $y^G = d_4(i_2)^G$, где $i_1, i_2 \in T_2 = \mathbb{Z}_{q+1}^{\#}$. Так как x^G и y^G полупропорциональны, то должно быть $\chi_{13}^{(1)}(d_4(i_1)) = \pm\chi_{13}^{(1)}(d_4(i_2))$ и по табл. D $\beta_{i_1} = \pm\,\beta_{i_2}$, т. е.

$$\cos\frac{2\widetilde{k_1}\pi}{q+1} = \pm\,\cos\frac{2\widetilde{k_2}\pi}{q+1} \quad (\widetilde{k_1} \in k_1, \widetilde{k_2} \in k_2).$$

Согласно лемме 1.1 отсюда следует, что $q+1$ делит $\widetilde{k_1} \pm \widetilde{k_2}$, т. е. $i_1 = \pm\, i_2$ в кольце $\mathbb{Z}_{q+1}$. Но тогда по (CD) $d_4(i_1) = d_4(i_2)$, что противоречиво.

Пусть $x^G \cup y^G \subseteq D_3$, а именно, $x^G = d_3(i_1)^G$ и $y^G = d_3(i_2)^G$, где $i_1, i_2 \in T_2 = \mathbb{Z}_{q+1}^{\#}$. Ввиду полупропорциональности x^G и y^G должно быть $\chi_{12}^{(1)}(d_3(i_1)) = \pm\,\chi_{12}^{(1)}(d_3(i_2))$, т. е. $\beta_{i_1} = \pm\,\beta_{i_2}$. Отсюда так же, как и в предыдущем случае, получаем противоречие.

Пусть $x^G \cup y^G \subseteq D_2$, а именно, $x^G = d_2(i_1)^G$ и $y^G = d_2(i_2)^G$, где $i_1, i_2 \in T_1 = \mathbb{Z}_{q-1}^{\#}$. Подобно предыдущему получаем: $\chi_{11}^{(1)}(d_2(i_1)) = \pm\,\chi_{12}^{(1)}(d_2(i_2))$, $\alpha_{i_1} = \pm\,\alpha_{i_2}$, $\cos\dfrac{2\widetilde{i_1}\pi}{q-1} = \pm\,\cos\dfrac{2\widetilde{i_2}\pi}{q-1}$, где $\widetilde{i_1} \in i_1, \widetilde{i_2} \in i_2$, откуда по (CD) $d_4(i_1) = d_4(i_2)$, что противоречиво.

Пусть $x^G \cup y^G \subseteq D_1$. Тогда, используя характер χ_{10}, подобно предыдущему получаем противоречие.

Случаи $x^G \cup y^G \subseteq C_m$ при $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ исключаются в точности так же, как предыдущие 4 случая.

Пусть $x^G \cup y^G \subseteq B_5$, а именно, $x^G = b_5(i_1)^G$ и $y^G = b_5(i_2)^G$, где $i_1, i_2 \in R_3 = \mathbb{Z}_{q^2+1}^{\#}$. Ввиду полупропорциональности x^G и y^G должно быть $\chi_5^{(k)}(b_5(i_1)) = \pm\,\chi_5^{(k)}(b_5(i_2))$ для любого $k \in R_3$. Из таблицы характеров группы G видно, что

$$\chi(x) = \chi(y) \text{ для всех } \chi \in \mathrm{Irr}(G) \setminus X_5.$$

Поэтому должен существовать $k \in R_3$ такой, что $\chi_5^{(k)}(b_5(i_1)) = -\chi_5^{(k)}(b_5(i_2))$. Отсюда согласно таблице D получаем равенство

$$\tau^{i_1 k} + \tau^{-i_1 k} + \tau^{q i_1 k} + \tau^{-q i_1 k} + \tau^{i_2 k} + \tau^{-i_2 k} + \tau^{q i_2 k} + \tau^{-q i_2 k} = 0,$$

где τ — первообразный корень степени q^2+1 из единицы. Согласно предложению 1.3 отсюда следует, что $8 = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i$, где $\{p_1, \dots, p_r\} = \pi(q^2+1)$ и $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Имеется лишь одна возможность: $8 = 3 + 5$ и 15 делит q^2+1. Но это противоречиво, так как 3 не делит q^2+1 ($q^2 + 1 = 2^{2m} + 1 \equiv (-1)^{2m} + 1 = 2 \pmod 3$, $m \in \mathbb{N}$). Этот случай противоречив.

Пусть $x^G \cup y^G \subseteq B_4$, а именно, $x^G = b_4(i_1, j_1)^G$ и $y^G = b_4(i_2, j_2)^G$ ($i_1, i_2 \in R_3 = \mathbb{Z}_{q^2+1}$). Ввиду полупропорциональности x^G и y^G должно быть $\chi(b_4(i_1, j_1)) = \pm\,\chi(b_4(i_2, j_2))$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. При $\chi = \chi_{13}^{(1)}$ и $\chi = \chi_{12}^{(1)}$ получаем равенства

$$\beta_{i_1} + \beta_{j_1} = \varepsilon(\beta_{i_2} + \beta_{j_2}) \;\text{ и }\; \beta_{i_1}\cdot\beta_{j_1} = \delta\beta_{i_2}\cdot\beta_{j_2}, \;\text{ где }\; \{\varepsilon, \delta\} \subseteq \{1, -1\}. \tag{4.1}$$

Отсюда, подобно рассуждениям п. “$i = 4$”, проведённым после утверждения (3.4), получаем следующие заключения, также приводящие к противоречию.

Если $\varepsilon = \delta = 1$, то по лемме 1.3 $\{\beta_{i_1}, \beta_{j_1}\} = \{\beta_{i_2}, \beta_{j_2}\}$, т. е.

$$\left\{\cos\frac{2\widetilde{i_1}\pi}{q+1},\ \cos\frac{2\widetilde{j_1}\pi}{q+1}\right\} = \left\{\cos\frac{2\widetilde{i_2}\pi}{q+1},\ \cos\frac{2\widetilde{j_2}\pi}{q+1}\right\},$$

откуда по лемме 1.1 $(i_1, j_1) = (\pm\, i_2, \pm\, j_2)$ и по (B1,4) $x^G = y^G$, а это противоречиво.

Если же $\varepsilon = -1$ или $\delta = -1$, то получаем одно из равенств: $\beta_{i_1} + \beta_{j_1} + \beta_{i_2} + \beta_{j_2} = 0$ и $\beta_{i_1}\beta_{j_1} + \beta_{i_2}\beta_{j_2} = 0$. Каждое из них благодаря предложению 1.3 приводит к противоречию ($8 = 3 + 5$, но 15 не делит $q + 1$).

Пусть $x^G \cup y^G \subseteq B_3$, а именно, $x^G = b_3(i_1, j_1)^G$ и $y^G = b_3(i_2, j_2)^G$, где $i_1, i_2 \in T_1 = \mathbb{Z}_{q-1}^{\#}$ и $i_2, j_2 \in T_2 = \mathbb{Z}_{q+1}^{\#}$. Ввиду полупропорциональности x^G и y^G должно быть $\chi(b_3(i_1, j_1)) = \pm\,\chi(b_3(i_2, j_2))$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. При $\chi = \chi_{11}^{(1)}$ и $\chi = \chi_{13}^{(1)}$ получаем: $\alpha_{i_1} = \pm\,\alpha_{i_2}$ и $\beta_{j_1} = \pm\,\beta_{j_2}$, т. е.

$$\cos\frac{2\widetilde{i_1}\pi}{q-1} = \pm\,\cos\frac{2\widetilde{i_2}\pi}{q-1} \quad \text{и} \quad \cos\frac{2\widetilde{j_1}\pi}{q+1} = \pm\,\cos\frac{2\widetilde{j_2}\pi}{q+1}.$$

Тогда по лемме 1.1 $q - 1$ делит $\widetilde{i_1} \pm \widetilde{i_2}$ и $q + 1$ делит $\widetilde{j_1} \pm \widetilde{j_2}$, а тогда по (B3) $x^G = y^G$, что противоречиво.

Пусть $x^G \cup y^G \subseteq B_2$, а именно, $x^G = b_2(i_1)^G$ и $y^G = b_2(i_2)^G$, где $i_1, i_2 \in R_2 \subseteq \mathbb{Z}_{q^2-1}^{\#}$ и $qi_s \neq \pm\, i_s$ при $s = 1, 2$. Ввиду полупропорциональности x^G и y^G должно быть $\chi(b_2(i_1)) = \pm\,\chi(b_2(i_2))$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. При $\chi = \chi_{10}^{(1)}$ и $\chi = \chi_{12}^{(1)}$ получаем: $\alpha_{i_1} = \pm\,\alpha_{i_2}$ и $\beta_{i_1} = \pm\,\beta_{i_2}$, т. е.

$$\cos\frac{2\widetilde{i_1}\pi}{q-1} = \pm\,\cos\frac{2\widetilde{i_2}\pi}{q-1} \quad \text{и} \quad \cos\frac{2\widetilde{i_1}\pi}{q+1} = \pm\,\cos\frac{2\widetilde{i_2}\pi}{q+1}$$

для произвольных $\widetilde{i_1} \in i_1$ и $\widetilde{i_2} \in i_2$. По лемме 1.1 отсюда следует, что

$$q - 1 \text{ делит } \widetilde{i_1} \pm \widetilde{i_2} \text{ и } q + 1 \text{ делит } \widetilde{i_1} \pm \widetilde{i_2}. \tag{4.2}$$

Точно такое же утверждение (с заменой i_1, i_2 на k_1, k_2) получено в п. “i=2” доказательства теоремы 1. Проводя подобные выкладки (рассмотрение четырёх возможных вариантов) в ситуации (4.2), получаем, что здесь должно быть $i_2 \in \{i_1, -i_1, qi_1, -qi_1\}$ в кольце $\mathbb{Z}_{q^2-1}$. Но тогда по (B2,5) $b_2(i_1)^G = b_2(i_2)^G$, что противоречиво.

Пусть $x^G \cup y^G \subseteq B_1$, а именно, $x^G = b_1(i_1, j_1)^G$ и $y^G = b_1(i_2, j_2)^G$, где $(i_1, j_1), (i_2, j_1) \in S_1 \subseteq T_1 \times T_1$ и $j_s \neq \pm\, i_s$ при $s \in \{1, 2\}$. Ввиду полупропорциональности x^G и y^G должно быть $\chi(b_2(i_1, j_1)) = \pm\,\chi(b_2(i_2, j_2))$ для любого $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. При $\chi = \chi_{12}^{(1)}$ и $\chi = \chi_{10}^{(1)}$ получаем

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{j_1} = \varepsilon(\alpha_{i_2} + \alpha_{j_2}) \ \text{ и } \ \alpha_{i_1} \cdot \alpha_{j_1} = \delta\alpha_{i_2} \cdot \alpha_{j_2}, \quad \text{где} \ \ \{\varepsilon, \delta\} \subseteq \{1, -1\}. \tag{4.3}$$

В доказательстве теоремы 1 были получены эти же самые соотношения (см. (3.6)), с той лишь разницей, что вместо (i_1, j_1), (i_2, j_2) там фигурируют пары (k_1, l_1), (k_2, l_2) с той же областью значений S_1. Подобно проведённым там рассуждениям, из (4.3) получаем следующее утверждение: $(i_1, j_1) = (\pm\, i_2, \pm\, j_2)$ или $(i_1, j_1) = (\pm\, j_2, \pm\, i_2)$ в кольце $\mathbb{Z}_{q-1}$. Но отсюда и из (B1,4) следует, что $b_1(i_1, j_1)^G = b_1(i_2, j_2)^G$, что противоречиво.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В.А.** D-блоки характеров конечной группы // Исследования по теории групп. Свердловск: УрО АН СССР. 1984. С. 3–31. (Англ. пер.: Belonogov V. A. D-blocks of characters of finite group // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1989. Vol. 143. P. 103–128.)
2. **Белоногов В.А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 380 с.
3. **Белоногов В. А.** Взаимодействия и D-блоки в конечных группах // Подгрупповая структура групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 4–44.
4. **Белоногов В.А.** О малых взаимодействиях в конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 3–18.
5. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$, $\mathrm{PGL}_3(q)$ и $\mathrm{PGU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 17–47.
6. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$ и $\mathrm{PSU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–27.
7. **Белоногов В.А.** О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.
8. **Белоногов В.А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. VII // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 17, № 1. С. 3–16.
9. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norten, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
10. **Белоногов В.А.** К гипотезе о полупропорциональных характерах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 299–314.
11. **Белоногов В.А.** Новый метод вычисления p-блоков. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 3–12.
12. **Enomoto H.** The Characters of the finite symplectic group $\mathrm{Sp}(4,q)$, $q=2^f$ // Osaka J. Math. 1972. Vol. 9. P. 75–94.
13. **Lam T.Y., Leung K.H.** On vanishing sums of roots of unit // J. Algebra. 2000. Vol. 224. P. 91–109.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 22.03.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.544

СПЛЕТЕНИЯ ГРУПП ФИНИТАРНЫХ ПОДСТАНОВОК[1]

В. В. Беляев

В работе исследуется строение групп финитарных подстановок, неразложимых в прямую сумму.

Ключевые слова: финитарная подстановка, финитарная группа, сплетение групп.

V. V. Belyaev. Wreath products of finitary permutation groups.

We investigate the structure of finitary permutation groups indecomposable into a direct sum.

Keywords: finitary permutation, finitary group, wreath product.

Введение

В работе продолжается исследование групп финитарных подстановок, начатое в [1]. Напомним, что основная теорема из [1] сводит изучение финитарно полных групп финитарных подстановок к изучению строения финитарных полных групп типа A и типа B. Согласно определению группа финитарных подстановок G на множестве Ω имеет тип A, если все точки из Ω G-соизмеримы, и имеет тип B, если все классы G-соизмеримых точек конечны и G действует транзитивно на множестве этих классов.

Из приведенного определения следует, что любая группа подстановок конечного множества одновременно является группой типа A и типа B. Чтобы исключить такую возможность, мы скорректируем определение групп типа B следующим образом.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что группа финитарных подстановок G на множестве Ω имеет тип B, если не все точки из Ω G-соизмеримы и G действует транзитивно на множестве классов G-соизмеримых точек.

Ясно, что для группы G финитарных подстановок конечность классов G-соизмеримых точек следует из транзитивности ее действия на множестве классов.

Таким образом, с помощью нового определения мы несколько уменьшили прежний класс групп типа B, удалив из него группы типа A и, очевидно, оставив в силе формулировку основной теоремы из [1].

Настоящая работа посвящена исследованию строения групп типа B (в новом определении). Для формулировки полученных результатов нам потребуются некоторые дополнительные понятия, которые мы приводим ниже.

Пусть $G \leq \mathrm{Sym}\,(\Omega)$ и Σ — G-инвариантное разбиение множества Ω. Будем также предполагать, что группа G действует транзитивно на множестве компонент разбиения Σ.

Выберем произвольную компоненту разбиения $\triangle \in \Sigma$ и пусть $T = \{t_i \mid i \in I\}$ — произвольная правая трансверсаль стабилизатора $G_{\{\triangle\}}$.

Сначала мы введем обозначения для компонент разбиения Σ: положим $\triangle_i := \triangle^{t_i}$ для $i \in I$. Понятно, что $\triangle_i \cap \triangle_j = \varnothing$ для $i \neq j$ и $\Sigma = \{\triangle_i \mid i \in I\}$. Положим $K := \{x \in G \mid \mathrm{supp}\, x \subseteq \triangle\}$ и $K_i := K^{t_i}$ для любого $i \in I$. Так как supp $K_i \subseteq \triangle_i$, то $\mathrm{supp}\, K_i \cap \mathrm{supp}\, K_j = \varnothing$ для $i \neq j$ и $K_i \cap \langle K_i \mid j \in I \setminus \{i\}\rangle = 1$. Пусть $B = \langle K_i \mid i \in I\rangle$. В силу сделанных замечаний B — прямое произведение подгрупп $K_i,\ i \in I$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00349-а) и АВПЦ “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/12136).

Нетрудно понять, что семейство подгрупп $\{K_i \mid i \in I\}$ группы G представляет собой класс сопряженных с K в G подгрупп и, следовательно, B — нормальная в G подгруппа. Отметим также, что B содержится в ядре действия группы G на множестве Σ.

Далее, для любого $\alpha \in \triangle$ положим $\alpha^T = \{\alpha^{t_i} \mid i \in I\}$. Ясно, что семейство $\{\alpha^T \mid \alpha \in \triangle\}$ образует разбиение множества Ω, причем любая компонента этого разбиения имеет ровно одну общую точку с любой компонентой разбиения Σ. Отсюда следует, что сопоставление

$$\alpha^{t_i} \mapsto (\alpha, i)$$

определяет биекцию множества Ω на $\triangle \times I$.

Полученная координатизация множества Ω позволяет наглядно представить действие G на Ω. С этой целью введем дополнительные термины: множества $\{(\alpha, i) \mid i \in I\}$, соответствующие множествам точек α^T, будем называть α-строками, а множества $\{(\alpha, i) \mid \alpha \in \triangle\}$, соответствующие компонентам $\triangle_i$, — i-ми столбцами. Заметим, что для лучшего согласования термина α-строка с наглядным представлением о расположении точек из Ω в виде прямоугольной таблицы можно в качестве представителя стабилизатора $G_{\{\triangle\}}$ взять единичный элемент, т. е. считать, что $T \cap G_{\{\triangle\}} = 1$. В этом случае α-строка "содержит" точку α, т. е. $\alpha \in \alpha^T$. Пользуясь новой терминологией, мы можем сказать, что подгруппа K_i переставляет точки из i-го столбца, оставляя все остальные точки неподвижными. Произвольная подстановка из G переставляет столбцы, возможно, перемешивая при этом, элементы различных строк. Нас, в дальнейшем, будут интересовать подстановки из G, которые переставляют столбцы, не перемешивая при этом строки. Точнее, пусть $H = \{x \in G \mid \alpha^{Tx} = \alpha^T \text{ для любой } \alpha \in \triangle\}$. Ясно, что множество H образует подгруппу в G, которая тривиально пересекается с ядром действия G на Σ и, значит, действие H на Σ, или на множестве индексов I, является точным. Отсюда следует, что $H \cap B = 1$ и поэтому $\langle B, H \rangle = B \leftthreetimes H$. Положим $W = B \leftthreetimes H$. Легко понять, что действие группы W на Ω однозначно восстанавливается из действий группы H на I и группы K на $\triangle$.

Формальная конструкция, описывающая это восстановление действия группы W на Ω, называется ограниченным сплетением группы подстановок $(K, \triangle)$ и (H, I) с естественным действием на множестве $\triangle \times I$. Общее описание конструкций сплетения можно найти, например, в [2]. Обратим внимание на то обстоятельство, что в нашем случае база B сплетения W представима в виде прямого произведения координатных подгрупп K_i, $i \in I$. Внешнее описание конструкции внутреннего прямого произведения подгрупп называется их ограниченным прямым произведением (его элементами являются не произвольные функции $f : K \to I$, а лишь функции с конечными носителями). Конструкция сплетения, использующая ограниченные прямые произведения, обычно называется ограниченным сплетением.

В общем случае подгруппа W, конечно, может не совпадать со всей группой G. Но в случае финитарно полных групп типа B справедлива

Теорема. *Пусть G — финитарно полная группа финитарных подстановок на множестве Ω, Σ — семейство всех классов G-соизмеримых точек из Ω, причем, $|\Sigma| > 1$ и G действует транзитивно на Σ. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *все классы G-соизмеримых точек конечны, а их число $|\Sigma|$ бесконечно*;

2) $G = B \leftthreetimes H$ (во введенных ранее обозначениях);

3) $H \cong F\mathrm{Sym}\,(\Sigma)$, *точнее, группа подстановок, индуцированная действием H на Σ, совпадает с $FSym\,(\Sigma)$.*

Таким образом, подгруппа B совпадает с ядром действия группы G на Σ, а подгруппа H является дополнением к B в G. В частности, H и G индуцируют на Σ одну и ту же группу подстановок $F\mathrm{Sym}\,(\Sigma)$.

Из основной теоремы вытекают

Следствие 1. *Любая финитарно полная группа подстановок типа B есть ограниченное сплетение группы подстановок конечного множества и группы подстановок $F\mathrm{Sym}\,(I)$ для бесконечного множества I.*

Обратное утверждение, очевидно, также справедливо: любое ограниченное сплетение группы подстановок конечного множества $\triangle$ и группы всех финитарных подстановок бесконечного множества I с естественным действием на $\triangle \times I$ есть финитарно полная группа подстановок типа B на множестве $\triangle \times I$.

Понятно, что группа G, удовлетворяющая условиям теоремы, может действовать интранзитивно на Ω, при этом число G-орбит на Ω совпадает с числом K-орбит на $\triangle$. В частности, транзитивные финитарно полные группы типа B являются ограниченными сплетениями конечных транзитивных групп подстановок и бесконечных групп $F\mathrm{Sym}\,(I)$.

Обратим внимание также на два других утверждения, вытекающих из основной теоремы.

Следствие 2. *Пусть G — финитарно полная примитивная группа финитарных подстановок бесконечного множества Ω. Тогда $G = F\mathrm{Sym}\,(\Omega)$.*

Следствие 3. *Пусть G — финитарно полная транзитивная группа финитарных подстановок множества Ω, в котором нет различных G-соизмеримых точек и $|\Omega| > 1$. Тогда $|\Omega| = \infty$ и $G = F\mathrm{Sym}\,(\Omega)$.*

Заметим, что последнее утверждение, представленное здесь в качестве следствия 3 основной теоремы, доказывается в работе независимо и используется в качестве вспомогательного результата при доказательстве основной теоремы.

1. Вспомогательные результаты

В отличие от [1], где использовались лишь поточечные стабилизаторы подмножеств $\Gamma \subseteq \Omega$ в группе $G \leq \mathrm{Sym}\,(\Omega)$, которые обозначались через G_Γ, в данной работе используются как поточечные стабилизаторы Γ, обозначаемые через $G_{(\Gamma)}$, так и стабилизаторы Γ в целом, обозначаемые через $G_{\{\Gamma\}}$.

Подмножества Γ и E из G-пространства Ω будем называть *G-несоизмеримыми*, если в Γ нет точек, G-соизмеримых с точками из E. Очевидно, что G-несоизмеримые подмножества не имеют общих точек.

Пользуясь этой новой терминологией, мы можем сформулировать лемму 1, основное вспомогательное утверждение, вытекающее очевидным образом из [1, лемма 4], в более удобном для данной работы виде.

Лемма 1. *Пусть $G \leq F\mathrm{Sym}\,(\Omega)$ и G-орбита любой точки из Ω бесконечна. Тогда для любых двух конечных G-несоизмеримых подмножеств Γ и E из Ω и любого конечного подмножества Φ множества Ω найдется такой элемент $g \in G_{(E)}$, что $\Gamma^g \cap \Phi = \varnothing$.*

Лемма 2. *Пусть G — финитарно полная транзитивная подгруппа из $F\mathrm{Sym}\,(\Omega)$, причем $|\Omega| > 1$ и любые различные точки из Ω G-несоизмеримы. Тогда $G = F\mathrm{Sym}\,(\Omega)$.*

Доказательство. Сразу отметим, что из условий леммы следует бесконечность множества Ω и, значит, для G восполнены условия леммы 1.

Очевидно, нам достаточно показать, что G содержит все транспозиции множества Ω. Пусть α и β — различные точки из Ω. В силу транзитивности действия G на Ω найдется такая подстановка $a \in G$, что $\alpha^a = \beta$. Положим $E = \{\alpha, \beta\}$ и $\Gamma = \mathrm{supp}\,a \backslash E$. Очевидно, $\mathrm{supp}\,a = E \cup \Gamma$.

Возможны два случая: либо $\beta^a = \alpha$, либо $\beta^a \neq \alpha$.

Рассмотрим сначала случай $\beta^a = \alpha$. В этом случае мы с помощью леммы 1 можем показать, что транспозиция $(\alpha\beta)$ является G-предельной подстановкой. Действительно, пусть Φ — произвольное конечное подмножество из Ω. Воспользовавшись леммой 1, выберем такой $g \in G_{(E)}$, что $\Gamma^g \cap \Phi = \varnothing$. Учитывая равенство $\operatorname{supp} a^g = \Gamma^g \cup E$, заключаем, что подстановка a^g действует на $\Phi \setminus E$ тождественно. В то же время в силу равенства $\operatorname{supp} g \cap E = \varnothing$ действия подстановок a^g и a на E совпадают, т. е. a^g переставляет точки α и β. Согласно определению G-предельных подстановок отсюда следует, что транспозиция $(\alpha\beta)$ есть G-предельная подстановка и в силу финитарной полноты G $(\alpha\beta) \in G$.

Рассмотрим теперь случай $\beta^a \neq \alpha$. Согласно лемме 1 найдется такой $g \in G_{(E)}$, что $\Gamma^g \cap \Gamma = \varnothing$. Положим $b = a^g$. Так как $g \in G_{(E)}$, то $\alpha^b = \beta$, $\operatorname{supp} b = \Gamma^g \cup E$ и $\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} b = E$. Также из неравенства $\alpha \neq \beta^a$ вытекает, что $\alpha^{a^{-1}} \in \Gamma$ и, значит, $\alpha^{b^{-1}} \in \Gamma^g$. Отсюда следует, что подстановка $a^{-1}b^{-1}ab$ переставляет точки α и β, и мы возвращаемся к рассмотренному ранее случаю.

2. Доказательство теоремы

Пусть G — финитарно полная группа финитарных подстановок на множестве Ω, Σ — семейство всех классов G-соизмеримых точек, причем $|\Sigma| > 1$ и G действует транзитивно на Σ. Будем также считать, что сохранены все обозначения для подмножеств и подгрупп, определенных во введении, через фиксированную компоненту $\triangle \in \Sigma$ и правую трансверсаль $T = \{t_i \mid i \in I\}$ стабилизатора $G_{\{\triangle\}}$. Доказательство теоремы разобьем на ряд этапов.

(1) Все классы G-соизмеримых точек конечны, а их число бесконечно.

Так как число классов больше 1 и они транзитивно переставляются финитарными подстановками из G, то все классы G-соизмеримых точек, очевидно, конечны. Если число классов конечно, то Ω — конечное множество и, значит, все точки из Ω G-соизмеримы, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $|\Sigma| = \infty$. □

(2) G-орбита любой точки из Ω бесконечна.

Доказательство следует из транзитивного действия G на Σ и бесконечности Σ. □

(3) $G_{\{\triangle\}} = K \cdot G_{(\triangle)}$.

Включение $K \cdot G_{(\triangle)} \subseteq G_{\{\triangle\}}$ следует из определения K. Докажем обратное включение. Пусть $g \in G_{\{\triangle\}}$. Определим финитарную подстановку k следующим образом:

$$\alpha^k = \begin{cases} \alpha^g, & \alpha \in \triangle, \\ \alpha, & \alpha \notin \triangle. \end{cases}$$

Покажем, что k есть G-предельная подстановка. Действительно, пусть Φ — произвольное конечное подмножество из Ω. Так как множества точек $\triangle$ и $\operatorname{supp} g \setminus \triangle$ G-несоизмеримы, то согласно лемме 1 найдется такой $x \in G_{(\triangle)}$, что

$$(\operatorname{supp} g \setminus \triangle)^x \cap \Phi = \varnothing$$

или

$$\operatorname{supp} g^x \cap (\Phi \setminus \triangle) = \varnothing.$$

Значит, $\Phi \setminus \triangle \subseteq \operatorname{fix} g^x$ и поэтому

$$\alpha^{g^x} = \begin{cases} \alpha^g, & \alpha \in \triangle \\ \alpha, & \alpha \in \Phi \setminus \triangle. \end{cases}$$

Таким образом, ограничения действий подстановок g^x и k на Φ совпадают. Отсюда согласно определению G-предельных подстановок следует, что k есть G-предельная подстановка.

Воспользовавшись финитарной полнотой группы G, получаем, что $k \in G$. Но тогда $k \in K$ и в силу совпадения действий k и g на $\triangle$ $k^{-1}g \in G_{(\triangle)}$. Таким образом, $g \in K \cdot G_{(\triangle)}$. $\square$

(4) $G_{\{\triangle_i\}} = K_i \cdot G_{(\triangle_i)}$.

Утверждение (4) следует из утверждения (3) и транзитивности действия G на множестве компонент $\triangle_i$, $i \in I$, разбиения Σ. $\square$

(5) B есть ядро действия G на Σ.

Очевидно, что подгруппа $B = \langle K_i \mid i \in I\rangle$ содержится в ядре действия G на Σ. Докажем обратное включение.

Пусть $g \in G$ и $\triangle_i^g = \triangle_i$ для всех $i \in I$. В силу финитарности подстановки g g индуцирует нетождественные подстановки точек только на конечном множестве компонент $\triangle_i, i \in J$. Согласно (4) найдутся такие $k_i \in K_i$, $i \in I$, что $\alpha^g = \alpha^{k_i}$ для $\alpha \in \triangle_i$ и $i \in J$. Следовательно, g есть произведение подстановок k_i, $i \in J$, и согласно определению B $g \in B$. $\square$

(6) $G = BH$.

Пусть $g \in G$ и

$$J = \{i \in I \mid \operatorname{supp} g \cap \triangle_i \neq \varnothing\}.$$

Поскольку g — финитарная подстановка, то J — конечное множество. Для произвольного $i \in J$ найдется такой $j \in J$, что $\triangle_i^g = \triangle_j$. Ясно, что $t_i^{-1}t_jg^{-1} \in G_{\{\triangle_i\}}$. В силу (4) существует подстановка $k_i \in K_i$, действие которой на компоненте $\triangle_i$ совпадает с действием $t_i^{-1}t_jg^{-1} \in G_{\{\triangle_i\}}$, т. е.

$$\beta^{k_i} = \beta^{t_i^{-1}t_jg^{-1}}$$

для любого $\beta \in \triangle_i$ или, что эквивалентно,

$$\alpha^{t_ik_ig} = \alpha^{t_j}$$

для любого $\alpha \in \triangle$.

Пусть b есть произведение всех подстановок $k_i, i \in J$. Заметим, что для любого $i \in J$ действие b на $\triangle_i$ совпадает с действием k_i. Поэтому для $i \in J$ и любого $\alpha \in \triangle$

$$\alpha^{t_ibg} = \alpha^{t_ik_ig} \in \alpha^T.$$

Если $i \notin J$, то для любого $\alpha \in \triangle$ имеем $\alpha^{t_i} \notin \operatorname{supp} bg$ и, следовательно, $\alpha^{t_ibg} = \alpha^{t_i} \in \alpha^T$.

Таким образом, $\alpha^{t_ibg} \in \alpha^T$ для любых $\alpha \in \triangle$ и $i \in I$, откуда следует, что $bg \in H$ или, что эквивалентно, $g \in BH$. $\square$

Обозначим через $\overline{G}$ группу подстановок на множестве Σ, индуцированную действием G на Σ.

(7) $\overline{G}$ — финитарно полная подгруппа из $F\mathrm{Sym}(\Sigma)$.

Для любой подстановки $g \in G$ через $\bar{g}$ будем обозначать подстановку на Σ, индуцированную g на классах G-соизмеримых точек. Так как g — финитарная подстановка, то и $\bar{g}$ также является финитарной подстановкой и, следовательно, $\overline{G} \leq F\mathrm{Sym}(\Sigma)$.

Пусть x — произвольная финитарная $\overline{G}$-предельная подстановка и $\operatorname{supp} x = \{\triangle_i \mid i \in J\}$, где J — конечное подмножество из I. Избегая излишнего формализма, будем образы классов $\triangle_i$, $i \in I$, под действием подстановки x обозначать через $\triangle_i^x$. Так как x есть $\overline{G}$-предельная подстановка, то в G найдется такая подстановка g, что

$$\triangle_i^{\bar{y}} = \triangle_i^x$$

для всех $i \in J$. Положим $E = \bigcup\limits_{i \in J} \triangle_i$ и определим финитарную подстановку z на множестве Ω следующим образом:

$$\alpha^z = \begin{cases} \alpha^y, & \alpha \in E \\ \alpha, & \alpha \notin E. \end{cases}$$

Понятно, что подстановка z индуцирует на Σ подстановку x. Поэтому если $z \in G$, то $x = \bar{z} \in \bar{G}$. Следовательно, в силу финитарной полноты группы G нам достаточно показать, что z есть G-предельная подстановка.

Пусть $\Gamma = \operatorname{supp} y \setminus E$ и Φ — произвольное конечное подмножество из Ω. Поскольку множества E и Γ G-несоизмеримы, то согласно лемме 1 найдется такая подстановка $g \in G_{(E)}$, что $\Gamma^g \cap \Phi = \varnothing$. Нетрудно проверить, что действия подстановок y^g и y на E совпадают, а на множестве $\Phi \setminus E$ подстановка y^g действует тождественно. Следовательно, действия y^g и z на Φ совпадают и в силу произвольности выбора конечного множества Φ мы заключаем, что z есть G-предельная подстановка. $\square$

(8) $\overline{G} = F\mathrm{Sym}\,(\Sigma)$.

Так как стабилизаторы точек из Σ совпадают с $\overline{G}_{\{\triangle_i\}}$, $i \in I$, а подгруппа $G_{\{\triangle_i\}}$в силу конечности $\triangle_i$ соизмерима с G_α для $\alpha \in \triangle_i$, то из G-несоизмеримости точек, содержащихся в различных классах $\triangle_i$, следует $\overline{G}$-несоизмеримость различных точек из Σ. Учитывая доказанную в (7) финитарную полноту $\overline{G}$, получаем, что $\overline{G}$ удовлетворяет всем условиям леммы 2 и, следовательно, $\overline{G} = F\mathrm{Sym}\,(\Sigma)$. $\square$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев В.В.** Прямые суммы финитарных групп подстановок // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 45–49.
2. **Rotman J.J.** An introduction to the theory of groups. New York: Springer-Verlag, 1995. 513 p.

Беляев Виссарион Викторович
Поступила 29.06.2011
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский физико-технический институт (государственный университет)
e-mail: v.v.belyaev@list.ru

Том 17 № 4 2011

УДК 512.542.5

О НАСЛЕДУЕМОСТИ СВОЙСТВА D_π ПОДГРУППАМИ[1]

Е. П. Вдовин, Н. Ч. Манзаева, Д. О. Ревин

Для некоторого множества простых чисел π подгруппа H конечной группы G называется π-холловой, если $|H|$ делится только на простые числа из π, в то время как $|G:H|$ не делится на простые числа из π. Говорят, что группа G обладает свойством D_π, если она обладает единственным классом сопряженных максимальных π-подгрупп или, эквивалентно, в группе G справедлив полный аналог теоремы Силова для π-холловых подгрупп. Мы изучаем вопрос о том, какими подгруппами D_π-групп наследуется свойство D_π.

Ключевые слова: холлова подгруппа, свойство D_π, конечная простая группа, теорема Силова.

E. P. Vdovin, N. Ch. Manzaeva, D. O. Revin. On the heritability of the property D_π by subgroups.

For some set of primes π, a subgroup H of a finite group G is called a π-Hall subgroup if all prime divisors of $|H|$ are in π and $|G:H|$ has no prime divisors from π. A group G is said to possess the property D_π if it has only one class of conjugate maximal π-subgroups or, equivalently, the complete analog of Sylow's theorem for Hall π-subgroups is valid in G. We investigate which subgroups of D_π-groups inherit the property D_π.

Keywords: Hall subgroup, property D_π, finite simple group, Sylow's theorem.

Введение

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество всех простых чисел, не лежащих в π, через $\pi(n)$ — множество всех простых делителей натурального числа n, а для конечной группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \pi$, называется *π-числом*, а группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой*. Подгруппа H группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G\colon H|) \subseteq \pi'$. Заметим, что если $\pi = \{p\}$, то π-холлова подгруппа — это в точности силовская p-подгруппа.

В соответствии с [8] будем говорить, что группа G *обладает свойством* E_π (или, короче, $G \in E_\pi$), если в G имеется π-холлова подгруппа. Если при этом любые две π-холловы подгруппы сопряжены, то будем говорить, что группа G *обладает свойством* C_π ($G \in C_\pi$). Если к тому же любая π-подгруппа группы G содержится в некоторой π-холловой подгруппе, то будем говорить, что G *обладает свойством* D_π ($G \in D_\pi$). Группу со свойством E_π (C_π, D_π) будем называть также E_π- (соответственно, C_π-, D_π-) *группой*. Таким образом, утверждение $G \in D_\pi$ равносильно справедливости полного аналога теоремы Силова для π-подгрупп группы G.

В данной работе мы исследуем, какие подгруппы D_π-групп сами обладают свойством D_π. В литературе изучался вопрос: всегда ли нормальная подгруппа D_π-группы обладает свойством D_π? Он восходит к проблеме, впервые сформулированной Х. Виландом на XIII Международном математическом конгрессе в Эдинбурге в 1958 г. [11]: верно ли, что группа G обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда этим свойством обладают факторы ее некоторого нормального ряда? Этот вопрос был отмечен также в работе Ф. Гросса [7] и записан

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 10–01–00391, 10-01-90007 и 11-01-00456), АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1.419), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (гос. контракты № 02.740.11.5191 и № 14.740.11.0346), Совета по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1). Первый автор также поддержан премией фонда Бальзана, присужденной Пьеру Делиню в 2004 г. и Лаврентьевским грантом для коллективов молодых ученых СО РАН (постановление Президиума СО РАН № 43 от 04.02.2010).

В. Д. Мазуровым в “Коуровскую тетрадь” [12] как проблема 13.33. Вопрос Гросса о наследуемости свойства D_π нормальными подгруппами был решен в [3] для групп, обладающих одновременно свойствами D_π и $D_{\pi'}$. В произвольных конечных группах положительный ответ на этот вопрос по модулю классификации конечных простых групп получен в работе [9], где была доказана

Теорема 1 [9, теорема 7.7]. *Пусть G — конечная группа, $A \trianglelefteq G$ и π — некоторое множество простых чисел. Тогда $G \in D_\pi$ если и только если $A \in D_\pi$ и $G/A \in D_\pi$.*

Теорема 1 положительно решает упомянутую выше проблему Х. Виланда и, в частности, проблему Ф. Гросса. Отметим также, что более короткое решение проблемы Гросса опубликовано в [10].

Следствие. *Пусть G — конечная группа и π — некоторое множество простых чисел. Тогда $G \in D_\pi$ если и только если каждый композиционный фактор группы G обладает свойством D_π.*

В данной работе мы изучаем, какими еще подгруппами, кроме нормальных, наследуется свойство D_π. Более точно, мы исследуем следующие три проблемы, сформулированные в порядке усиления.

Проблема 1 [12, проблема 17.44(б)]. *Пусть $G \in D_\pi$ и H — π-холлова подгруппа группы G. Верно ли, что $K \in D_\pi$ для любой подгруппы K такой, что $H \le K \le G$?*

Проблема 2. *Пусть $G \in D_\pi$. Верно ли, что $K \in D_\pi$ для любой подгруппы K группы G такой, что $K \in E_\pi$?*

Проблема 3. *Пусть $G \in D_\pi$. Верно ли, что $K \in D_\pi$ для любой подгруппы K группы G?*

Определим следующие классы конечных групп:

U_π — класс всех D_π-групп, в которых всякая надгруппа π-холловой подгруппы обладает свойством D_π;

V_π — класс всех D_π-групп, в которых любая E_π-подгруппа обладает свойством D_π;

W_π — класс всех конечных групп, в которых любая подгруппа обладает свойством D_π.

Очевидно, имеет место следующая цепочка включений:

$$D_\pi \supseteq U_\pi \supseteq V_\pi \supseteq W_\pi.$$

Используя введенные обозначения, проблемы 1, 2, 3 можно переформулировать эквивалентным образом.

Проблема 1′. *Верно ли, что $U_\pi = D_\pi$?*
Проблема 2′. *Верно ли, что $V_\pi = D_\pi$?*
Проблема 3′. *Верно ли, что $W_\pi = D_\pi$?*

В настоящей статье с помощью теоремы 1 (и, следовательно, с использованием классификации конечных простых групп) доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathscr{X} \in \{U_\pi, V_\pi, W_\pi\}$ и $\mathscr{Y}$ — класс конечных групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов. Если любая простая группа из $\mathscr{Y} \cap D_\pi$ принадлежит $\mathscr{X}$, то $\mathscr{Y} \cap D_\pi \subseteq \mathscr{X}$.*

Таким образом, изучение проблем 1, 2, 3 сводится к случаю простых D_π-групп. Используя теорему 2, мы доказываем следующие две теоремы.

Теорема 3. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и $\mathscr{Y}$ — класс всех конечных групп, у которых любой неабелев композиционный фактор изоморфен либо знакопеременной, либо спорадической группе. Тогда $\mathscr{Y} \cap D_\pi \subseteq V_\pi$.*

Теорема 4. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и $\mathscr{Y}$ — класс всех конечных групп, у которых любой неабелев композиционный фактор изоморфен либо знакопеременной, либо спорадической группе, либо группе лиева типа характеристики, лежащей в π. Тогда $\mathscr{Y} \cap D_\pi \subseteq U_\pi$.*

Теорема 3 дает частичное положительное решение проблемы 2, а теорема 4 — частичное решение проблемы 1. Из теоремы 3 также следует, что в спорадических и знакопеременных D_π-группах любая E_π-подгруппа обладает свойством D_π. Это дает частичное решение проблемы [12, 17.43(б)], поскольку все простые D_π-группы описаны в [13, теорема 3].

В общем случае проблемы 2, 3 решаются отрицательно, как показывает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть π — некоторое конечное множество нечетных простых чисел такое, что $|\pi| \geq 2$. Тогда $D_\pi \backslash V_\pi \neq \varnothing$.*

Пусть, например, $\pi = \{3, 5\}$. Как будет видно из доказательства теоремы 5, группа $G = \mathrm{GL}_3(11^2)$ обладает свойством $D_{\{3,5\}}$, а ее подгруппа $M \simeq \mathrm{GL}_3(11)$ обладает свойством $E_{\{3,5\}}$, но не обладает свойством $D_{\{3,5\}}$.

1. Обозначения и предварительные результаты

Всюду через π обозначается некоторое множество простых чисел. Мы будем использовать обозначения из [1; 2]. В частности, через $A : B$, $A^{\cdot}B$ и $A \,.\, B$ будем обозначать соответственно некоторые расщепляемое, нерасщепляемое и произвольное расширения группы A с помощью группы B. Обозначения $H \leq G$, $H \trianglelefteq G$ будут использоваться нами вместо слов "H — подгруппа группы G", "H — нормальная подгруппа группы G". Сведения о группах лиева типа можно почерпнуть в [4].

Лемма 1 [8, лемма 1]. *Если H — π-холлова и A — нормальная подгруппы конечной группы G, то $H \cap A$ и HA/A — π-холловы подгруппы групп A и G/A соответственно. В частности, нормальная подгруппа и гомоморфный образ E_π-группы обладают свойством E_π.*

Лемма 2. *Класс W_π замкнут относительно подгрупп, гомоморфных образов и расширений, классы U_π и V_π замкнуты относительно нормальных подгрупп, гомоморфных образов и расширений.*

Доказательство. Замкнутость класса W_π относительно подгрупп очевидна. Замкнутость класса D_π относительно нормальных подгрупп, гомоморфных образов и расширений в комбинации с леммой 1 влечет остальные утверждения леммы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\pi = \{p, q\}$. Если группа M обладает свойством E_π и $|M|_\pi = pq$, то M является D_π-группой.*

Доказательство. Можно считать, что $p < q$. Значит, силовская q-подгруппа нормальна в π-холловой подгруппе группы M. В частности, любые две π-холловы подгруппы обладают силовскими башнями одного и того же типа. По [8, теорема A1] π-холловы подгруппы группы M сопряжены. Таким образом, M обладает свойством C_π. Из того, что множество $\{1, p, q, pq\}$ содержит все возможные порядки π-подгрупп группы M, и теоремы Силова следует, что группа M обладает свойством D_π. Лемма доказана.

Лемма 4 [6, теорема 3.2]. *Пусть $G \simeq A_l(q)$, где q — степень числа $p \in \pi \subseteq \pi(G) \setminus \{2\}$ и $q > 3$ при $l = 1$. Положим $\tau = \pi \setminus \{p\}$. Группа G обладает свойством E_π тогда и только тогда, когда $\tau \subseteq \pi(q-1)$ и $r > l+1$ для всех $r \in \tau$.*

Лемма 5 [13, теорема 3]. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Конечная простая группа S обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда пара (S, π) удовлетворяет одному из условий* I–VII (*см. ниже*).

У с л о в и е I. Скажем, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* I, если $\pi(S) \subseteq \pi$ или $|\pi \cap \pi(S)| \leq 1$.

У с л о в и е II. Скажем, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* II, если S и $\pi \cap \pi(S)$ представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Спорадические группы, обладающие свойством D_π

S	$\pi \cap \pi(S)$	$\lvert S\rvert_\pi$	S	$\pi \cap \pi(S)$	$\lvert S\rvert_\pi$
M_{11}	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$	Co_1	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
M_{12}	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$	Co_2	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
M_{22}	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$	Co_3	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
M_{23}	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$	Ly	$\{11, 67\}$	$11 \cdot 67$
	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$	Ru	$\{7, 29\}$	$7 \cdot 29$
M_{24}	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$	$O'N$	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$
	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$		$\{5, 31\}$	$5 \cdot 31$
J_1	$\{3, 5\}$	$3 \cdot 5$	$M(23)$	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
	$\{3, 7\}$	$3 \cdot 7$	$M(24)'$	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
	$\{3, 19\}$	$3 \cdot 19$	B	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$		$\{23, 47\}$	$23 \cdot 47$
J_4	$\{5, 7\}$	$5 \cdot 7$	M	$\{23, 47\}$	$23 \cdot 47$
	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11^3$		$\{29, 59\}$	$29 \cdot 59$
	$\{5, 31\}$	$5 \cdot 31$			
	$\{7, 29\}$	$7 \cdot 29$			
	$\{7, 43\}$	$7 \cdot 43$			

У с л о в и е III. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $p \in \pi$. Положим $\tau = \pi \cap \pi(S) \setminus \{p\}$. В этом случае будем говорить, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* III, если $\tau \subseteq \pi(q-1)$ и никакое число из π не делит порядок группы Вейля группы S[2].

Для определения условий IV и V понадобится следующее обозначение. Пусть r — нечетное простое число, q — целое число, взаимно простое с r. Через $e(q, r)$ обозначим порядок числа q по модулю r, т. е. наименьшее натуральное число e, для которого $q^e \equiv 1 \pmod r$.

У с л о в и е IV. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p, но не изоморфна группам ${}^2B_2(q), {}^2F_4(q), {}^2G_2(q)$. Пусть $2, p \notin \pi$. Обозначим через r наименьшее число из $\pi \cap \pi(S)$ и пусть $\tau = \pi \cap \pi(S) \setminus \{r\}$. Положим $a = e(q, r)$. В этом случае будем говорить, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* IV, если существует $t \in \tau$, для которого $b = e(q, t) \neq a$, и верно одно из следующих утверждений:

(1) $S \simeq A_{n-1}(q)$, $a = r - 1$, $b = r$, $(q^{r-1} - 1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right]$ и $s \in \tau$ $e(q, s) = b$;

[2] Для скрученных групп лиева типа под группой Вейля имеется ввиду группа W^1, определенная в [2, гл. 13].

(2) $S \simeq A_{n-1}(q)$, $a = r-1$, $b = r$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right] + 1$, $n \equiv -1 \pmod r$ и $e(q,s) = b$ для любого $s \in \tau$;

(3) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 1 \pmod 4$, $a = r-1$, $b = 2r$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right]$ и $e(q,s) = b$ для любого $s \in \tau$;

(4) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 3 \pmod 4$, $a = \dfrac{r-1}{2}$, $b = 2r$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right]$ и $e(q,s) = b$ для любого $s \in \tau$;

(5) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 1 \pmod 4$, $a = r-1$, $b = 2r$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right] + 1$, $n \equiv -1 \pmod r$ и $e(q,s) = b$ для любого $s \in \tau$;

(6) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $r \equiv 3 \pmod 4$, $a = \dfrac{r-1}{2}$, $b = 2r$, $(q^{r-1}-1)_r = r$, $\left[\dfrac{n}{r-1}\right] = \left[\dfrac{n}{r}\right] + 1$, $n \equiv -1 \pmod r$ и $e(q,s) = b$ для любого $s \in \tau$;

(7) $S \simeq {}^2D_n(q)$, $a \equiv 1 \pmod 2$, $n = b = 2a$ и для любого $s \in \tau$ либо $e(q,s) = a$, либо $e(q,s) = b$;

(8) $S \simeq {}^2D_n(q)$, $b \equiv 1 \pmod 2$, $n = a = 2b$ и для любого $s \in \tau$ либо $e(q,s) = a$, либо $e(q,s) = b$.

Условие V. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p, но не изоморфна группам ${}^2B_2(q), {}^2F_4(q), {}^2G_2(q)$. Пусть $2, p \notin \pi$. Обозначим через r наименьшее число из $\pi \cap \pi(S)$, и пусть $\tau = \pi \cap \pi(S) \setminus \{r\}$. Положим $c = e(q,r)$. В этом случае будем говорить, что пара (S,π) *удовлетворяет условию* V, если $e(q,t) = c$ для любого $t \in \tau$ и верно одно из следующих утверждений:

(1) $S \simeq A_{n-1}(q)$ и $n < cs$ для любого $s \in \tau$;

(2) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $c \equiv 0 \pmod 4$ и $n < cs$ для любого $s \in \tau$;

(3) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $c \equiv 2 \pmod 4$ и $2n < cs$ для любого $s \in \tau$;

(4) $S \simeq {}^2A_{n-1}(q)$, $c \equiv 1 \pmod 2$ и $n < 2cs$ для любого $s \in \tau$;

(5) S изоморфна одной из групп $B_n(q)$, $C_n(q)$ или ${}^2D_n(q)$, c четно и $2n < cs$ для любого $s \in \tau$;

(6) S изоморфна одной из групп $B_n(q)$, $C_n(q)$ или $D_n(q)$, c нечетно и $n < cs$ для любого $s \in \tau$;

(7) $S \simeq D_n(q)$, c четно и $2n \leq cs$ для любого $s \in \tau$;

(8) $S \simeq {}^2D_n(q)$, c нечетно и $n \leq cs$ для любого $s \in \tau$;

(9) $S \simeq {}^3D_4(q)$;

(10) $S \simeq E_6(q)$ и если $r = 3$ и $c = 1$, то $5, 13 \notin \tau$;

(11) $S \simeq {}^2E_6(q)$ и если $r = 3$, $c = 2$, то $5, 13 \notin \tau$;

(12) $S \simeq E_7(q)$ и если $r = 3$ и $c \in \{1,2\}$, то $5, 7, 13 \notin \tau$, а если $r = 5$ и $c \in \{1,2\}$, то $7 \notin \tau$;

(13) $S \simeq E_8(q)$ и если $r = 3$ и $c \in \{1,2\}$, то $5, 7, 13 \notin \tau$, а если $r = 5$ и $c \in \{1,2\}$, то $7, 31 \notin \tau$;

(14) $S \simeq G_2(q)$;

(15) $S \simeq F_4(q)$ и если $r = 3$ и $c = 1$, то $13 \notin \tau$.

Условие VI. Будем говорить, что пара (S,π) *удовлетворяет условию* VI, если верно одно из следующих утверждений:

(1) $S \simeq {}^2B_2(2^{2m+1})$, $\pi \cap \pi(G)$ содержится в одном из множеств

$$\pi(2^{2m+1}-1), \quad \pi(2^{2m+1} \pm 2^{m+1} + 1);$$

(2) $S \simeq {}^2G_2(3^{2m+1})$, $\pi \cap \pi(G)$ содержится в одном из множеств

$$\pi(3^{2m+1}-1) \setminus \{2\}, \quad \pi(3^{2m+1} \pm 3^{m+1}+1) \setminus \{2\};$$

(3) $S \simeq {}^2F_4(2^{2m+1})$, $\pi \cap \pi(G)$ содержится в одном из множеств

$$\pi(2^{2(2m+1)} \pm 1), \quad \pi(2^{2m+1} \pm 2^{m+1}+1), \quad \pi(2^{2(2m+1)} \pm 2^{3m+2} \mp 2^{m+1}-1),$$
$$\pi(2^{2(2m+1)} \pm 2^{3m+2} + 2^{2m+1} \pm 2^{m+1}-1).$$

У с л о в и е VII. Пусть группа S изоморфна некоторой группе лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p. Пусть $2 \in \pi$, а $3, p \notin \pi$. Положим $\tau = \pi \cap \pi(G) \setminus \{2\}$, и пусть φ — множество простых чисел Ферма, принадлежащих τ. В этом случае будем говорить, что пара (S, π) *удовлетворяет условию* VII, если $\tau \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, где число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что 4 делит $q-\varepsilon$, и верно одно из следующих утверждений:

(1) S изоморфна $A_{n-1}(q)$ или ${}^2A_{n-1}(q)$, $s > n$ для любого $s \in \tau$ и $t > n+1$ для любого $t \in \varphi$;

(2) $S \simeq B_n(q)$ и $s > 2n+1$ для любого $s \in \tau$;

(3) $S \simeq C_n(q)$, $s > n$ для любого $s \in \tau$ и $t > 2n+1$ для любого $t \in \varphi$;

(4) S изоморфна $D_n(q)$ или ${}^2D_n(q)$ и $s > 2n$ для любого $s \in \tau$;

(5) S изоморфна $G_2(q)$ или ${}^2G_2(q)$ и $7 \notin \tau$;

(6) $S \simeq F_4(q)$ и $5, 7 \notin \tau$;

(7) S изоморфна $E_6(q)$ или ${}^2E_6(q)$ и $5, 7 \notin \tau$;

(8) $S \simeq E_7(q)$ и $5, 7, 11 \notin \tau$;

(9) $S \simeq E_8(q)$ и $5, 7, 11, 13 \notin \tau$;

(10) $S \simeq {}^3D_4(q)$ и $7 \notin \tau$.

Лемма 6 [4, теорема 2.6.7]. *Пусть S — группа лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p, U — силовская p-подгруппа группы S и $B = N_S(U)$ — подгруппа Бореля, содержащая U. Если $U \leq M \leq S$, то подгруппа Картана T группы B нормализует M и подгруппа MT является параболической подгруппой группы S.*

Лемма 7 [5, теорема 3.2, теорема 3.3 и ее доказательство]. *Пусть π — конечное множество нечетных простых чисел, содержащее по крайней мере два различных простых числа, и r — минимальное простое число из π. Тогда существует простое число $p \neq r$ такое, что верны следующие утверждения:*

(1) *любое число из $\pi \setminus \{r\}$ делит $p-1$, в частности, любое число из π делит $|\mathrm{GL}_r(p)|$;*

(2) $\mathrm{GL}_r(p)$ *обладает свойством C_π;*

(3) $\mathrm{GL}_r(p)$ *содержит π-подгруппу, которая не изоморфна никакой подгруппе π-холловой подгруппы группы $\mathrm{GL}_r(p)$. В частности, $\mathrm{GL}_r(p) \notin D_\pi$.*

2. Доказательства теорем

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть $G \in \mathscr{Y} \cap D_\pi$ — контрпример наименьшего порядка. Из условия теоремы следует, что группа G непроста. Пусть K — собственная нетривиальная нормальная подгруппа группы G. Пусть $^{-} : G \to G/K$ — естественный эпиморфизм. Поскольку $G \in D_\pi$, по теореме 1 группы $\overline{G}$ и K также обладают свойством D_π. В силу замкнутости класса $\mathscr{Y}$ относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов группы $\overline{G}$ и K принадлежат классу $\mathscr{Y}$. Так как G — контрпример наименьшего порядка, то для $\overline{G}$ и K утверждение теоремы 2 верно, т. е. $\overline{G}, K \in \mathscr{X}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathscr{X} = U_\pi$. Пусть H — π-холлова подгруппа группы G. Так как $G \notin U_\pi$, существует подгруппа M группы G, содержащая подгруппу H и не обладающая свойством D_π. По лемме 1 подгруппа $\overline{H}$ является π-холловой подгруппой группы $\overline{G}$ и $\overline{H} \leq \overline{M} \leq \overline{G}$. Поскольку для группы $\overline{G}$ утверждение теоремы верно, имеем $\overline{M} \in D_\pi$. Кроме того, $H \cap K$ — π-холлова подгруппа группы K по лемме 1. Имеем $H \cap K \leq M \cap K \leq K$, откуда, как и выше, получаем $M \cap K \in D_\pi$. Таким образом, группа M содержит нормальную D_π-группу $M \cap K$ и $M/(M \cap K) \simeq \overline{M} \in D_\pi$. Значит, $M \in D_\pi$ по теореме 1; противоречие.

Пусть $\mathscr{X} = V_\pi$. Пусть M — подгруппа группы G такая, что M является E_π-группой, но не обладает свойством D_π. Имеем $\overline{G} \in D_\pi$, $\overline{M} \leq \overline{G}$ и $\overline{M} \in E_\pi$ по лемме 1, следовательно, $\overline{M} \in D_\pi$. Далее, $K \in D_\pi$, $M \cap K \leq K$ и $M \cap K \in E_\pi$ по лемме 1, значит, $M \cap K \in D_\pi$. Поскольку $\overline{M} \simeq M/(M \cap K)$, из теоремы 1, как и выше, следует, что $M \in D_\pi$.

Теперь рассмотрим случай $\mathscr{X} = W_\pi$. Пусть $M \leq G$. Так как G — контрпример наименьшего порядка, получаем, что группы $\overline{M} \leq \overline{G}$ и $M \cap K \leq K$ обладают свойством D_π. Опять по теореме 1 получаем, что $M \in D_\pi$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Легко заметить, что класс $\mathscr{Y}$ замкнут относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов. Ввиду теоремы 2 достаточно доказать, что знакопеременные и спорадические группы, обладающие свойством D_π, лежат в классе V_π.

Из леммы 5 следует, что если $G \in D_\pi$ — простая знакопеременная или спорадическая группа, то пара (G, π) удовлетворяет одному из условий I или II (см. выше).

Пусть (G, π) удовлетворяет условию I. Тогда либо $\pi \cap \pi(G) = \varnothing$, либо $\pi \cap \pi(G) = \{p\}$, либо $\pi(G) \subseteq \pi$. Во всех этих случаях любая подгруппа группы G обладает свойством D_π. Таким образом, знакопеременные группы лежат в W_π и, следовательно, в классе V_π.

Теперь рассмотрим случай, когда (G, π) удовлетворяет условию II. Ввиду условия II и леммы 3 в классе V_π лежит любая спорадическая простая группа, обладающая свойством D_π, за исключением, возможно, группы J_4 при условии, что $\pi \cap \pi(J_4) = \{5, 11\}$. Рассмотрим этот случай.

Предположим, что группа $G = J_4$ не принадлежит классу V_π, т. е. существует E_π-подгруппа группы G, не являющаяся D_π-группой. Поскольку эта подгруппа содержится в некоторой максимальной подгруппе, достаточно доказать, что любая максимальная подгруппа M группы G лежит в классе V_π. Ввиду леммы 2 достаточно показать, что неабелевы композиционные факторы группы M лежат в классе V_π. В табл. 2 перечислены максимальные подгруппы группы G согласно [1], а также приведена причина, по которой эта максимальная подгруппа принадлежит классу V_π.

Т а б л и ц а 2

Максимальные подгруппы группы J_4

M	$M \in V_\pi$
$2^{11} : M_{24}$	см. выше
$2^{10} : L_5(2)$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2_+^{1+12} \cdot 3M_{22} : 2$	см. выше
$2^{3+12} \cdot (S_5 \times L_3(2))$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$U_3(11) : 2$	см. ниже
$M_{22} : 2$	см. выше
$11_+^{1+2} : (5 \times 2S_4)$	разрешима, теорема Холла
$L_2(32) : 5$	$\lvert L_2(32)\rvert_5 = 1$, теорема Силова
$L_2(23) : 2$	$\lvert M\rvert_5 = 1$, теорема Силова
$U_3(3)$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$29 : 28$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$43 : 14$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$37 : 12$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$

Группа $U_3(11) \simeq {}^2A_2(11)$ обладает свойством D_π по лемме 5 (условие III). Проверим, принадлежит ли группа $U_3(11)$ классу V_π. Ниже приведена табл. 3 максимальных подгрупп M группы $U_3(11)$, аналогичная табл. 2.

Т а б л и ц а 3

Максимальные подгруппы группы $U_3(11)$

M	$M \in V_\pi$
$11_+^{1+2}:40$	разрешима, теорема Холла
$2(L_2(11) \times 2) . 2$	$L_2(11) \simeq A_1(11) \in E_\pi$ по лемме 4, $\lvert L_2(11)\rvert_\pi = 5 \cdot 11$, лемма 3
$L_2(11):2$	$L_2(11) \simeq A_1(11) \in E_\pi$ по лемме 4, $\lvert L_2(11)\rvert_\pi = 5 \cdot 11$, лемма 3
A_6	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$(4^2 \times 3):S_3$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$37:3$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$3^2:Q_8$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$

Получаем, что все максимальные подгруппы группы $U_3(11)$ и, следовательно, сама группа $U_3(11)$ принадлежат классу V_π. Таким образом, $G = J_4 \in V_\pi$, где $\pi \cap \pi(G) = \{5, 11\}$. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Ввиду теорем 2 и 3 и того факта, что $V_\pi \subseteq U_\pi$, достаточно рассмотреть группы лиева типа характеристики, лежащей в π.

Пусть S — группа лиева типа над полем $\mathbb{F}_q$ характеристики p, U — силовская p-подгруппа группы S и $B = N_S(U)$ — подгруппа Бореля группы S. Известно [4, теорема 2.3.4(c)], что $B = U:T$, где T (так называемая подгруппа Картана группы S) является абелевой подгруппой, состоящей из полупростых элементов группы S.

Предположим, что группа S обладает свойством D_π. Тогда по лемме 5 пара (S, π) удовлетворяет одному из сформулированных выше условий I или III. Если пара (S, π) удовлетворяет условию I, то $S \in W_\pi$ (см. доказательство теоремы 3).

Пусть пара (S, π) удовлетворяет условию III. Тогда π-холлова подгруппа H группы S согласно [6, теорема 3.2] с точностью до сопряжения содержится в подгруппе Бореля B. В частности, $U \leq H$ и фактор-группа H/U изоморфна π-холловой подгруппе группы T. Таким образом, ввиду леммы 6 подгруппа M группы S, содержащая H, нормальна в параболической подгруппе $P = MT$. Достаточно доказать, что $MT \in D_\pi$, поскольку свойство D_π наследуется нормальными подгруппами по теореме 1. Поэтому достаточно понять, что любая параболическая подгруппа P группы S обладает свойством D_π.

Любая такая параболическая подгруппа представима в виде $P = VL$, где $V = O_p(P)$ и L — фактор Леви (см. [4, теорема 2.5.6], там же приведены результаты о строении фактора Леви, используемые далее в настоящем доказательстве). Ввиду этого разложения и теоремы 1 достаточно показать, что свойством D_π обладают компоненты фактора Леви L.

Предположим сначала, что S — группа нескрученного типа. Диаграмма Дынкина фактора Леви L получается выбрасыванием нескольких вершин из диаграммы Дынкина группы S. Любой неабелев композиционный фактор группы L является нескрученной группой лиева типа над полем порядка q, и диаграмма Дынкина этого композиционного фактора совпадает с одной из полученных связных компонент. Группы Вейля получившихся композиционных факторов будут подгруппами группы Вейля группы S, и по лемме 5 (условие III) получаем, что композиционные факторы, и следовательно группы L и P являются D_π-группами.

Теперь допустим, что S — группа скрученного типа и $S = O^{p'}(G_\sigma)$, где G — группа нескрученного типа, $\sigma = \varphi \circ \psi$ — "скручивающий" автоморфизм, причем ψ — полевой, а φ — графовый автоморфизмы. В этом случае диаграмма Дынкина фактора Леви L получается из диаграммы Дынкина группы G выбрасыванием некоторого φ-инвариантного подмножества. В частности, группы Вейля получившихся компонент являются подгруппами группы Вейля группы S. Каждая из компонент определена над $\mathbb{F}_{q^k}$ для подходящего $k \geq 1$. Поскольку $\tau \subseteq \pi(q-1)$, имеем $\tau \subseteq \pi(q^k - 1)$ для всех $k \geq 1$. Для каждого неабелева композиционного фактора K группы P пара (K, π) удовлетворяет условию III леммы 5, т.е. $K \in D_\pi$, откуда $P \in D_\pi$. Таким образом, M обладает свойством D_π.

Доказательство теоремы 5. Пусть $r = \min \pi$ и p —простое число из леммы 7. Тогда $\mathrm{GL}_r(p) \in C_\pi \setminus D_\pi$ по лемме 7. Рассмотрим группу $\mathrm{GL}_r(p^{r-1})$. Очевидно, группа $\mathrm{GL}_r(p)$ вкладывается в $\mathrm{GL}_r(p^{r-1})$. Хорошо известно, что $\mathrm{GL}_n(q) = A \,.\, A_{n-1}(q) : B$, где A и B — циклические группы, т.е. $\mathrm{GL}_n(q) \in D_\pi$ тогда и только тогда, когда $A_{n-1}(q) \in D_\pi$. Из леммы 7 следует, что $p \equiv 1 \pmod s$ для любого $s \in \tau = \pi \setminus \{r\}$. Ввиду малой теоремы Ферма $p^{r-1} \equiv 1 \pmod r$. Кроме того, в силу выбора r для любого s из π имеем $s > r - 1$. Поэтому для пары $(A_{r-1}(p^{r-1}), \pi)$ выполнено условие V леммы 5. Отсюда группа $\mathrm{GL}_r(p^{r-1})$ обладает свойством D_π, в то время как ее E_π-подгруппа $\mathrm{GL}_r(p)$ не обладает свойством D_π.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
2. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: John Wiley and Sons, 1972. 364 p.
3. **Gilotti A.L.** D_π-property and normal subgroups // Ann. Mat. Pura Appl. Ser. IV. 1987. Vol. 148. P. 227–235.
4. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, Number 3. Providence, RI: AMS, 1998. 420 p.
5. **Gross F.** Odd order Hall subgroups of $\mathrm{GL}_n(q)$ and $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ // Math. Z. 1984. Vol. 187, no. 3. P. 185–194.
6. **Gross F.** On a conjecture of Philip Hall // Proc. London Math. Soc. Ser. III. 1986. Vol. 52, no. 3. P. 464–494.
7. **Gross F.** On the existence of Hall subgroups // J. Algebra. 1986. Vol. 98, no. 1. P. 1–13.
8. **Hall P.** Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. Ser. III. 1956. Vol. 6, no. 22. P. 286–304.
9. **Revin D.O., Vdovin E.P.** Hall subgroups of finite groups // Contemporary Math. 2006. Vol. 402. P. 229–265.
10. **Revin D.O., Vdovin E.P.** On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. Vol. 324, no. 12. P. 3614–3652.
11. **Wielandt H.** Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // Proc. Intern. Congress Math. (Edinburg, 1958). London: Cambridge Univ. Press, 1960. P. 268–278.
12. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010. 219 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/17kt.pdf.
13. **Ревин Д.О.** Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3, С. 364–394.

Поступила 03.06.2011

Вдовин Евгений Петрович
д-р физ.-мат. наук, доцент
зам. директора
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: vdovin@math.nsc.ru

Манзаева Номина Чингизовна
аспирант
Новосибирский гос. университет
e-mail: manzaeva@gmail.com

Ревин Данила Олегович
д-р физ.-мат. наук, доцент
ведущий научн. сотрудник
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: revin@math.nsc.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.54

О КОНЕЧНЫХ p-ГРУППАХ АЛЬПЕРИНА С ГОМОЦИКЛИЧЕСКИМ КОММУТАНТОМ

Б. М. Веретенников

В статье изучаются метабелевы группы Альперина, т. е. метабелевы группы, в которых любая 2-порожденная подгруппа имеет циклический коммутант. Известно, что если минимальное число $d(G)$ порождающих конечной p-группы Альперина G равно $n \geq 3$, то $d(G') \leq C_n^2$ при $p \neq 3$ и $d(G') \leq C_n^2 + C_n^3$ при $p = 3$. В первом разделе статьи рассматриваются конечные p-группы Альперина G при $p \neq 3$ и $d(G) = n \geq 3$, коммутант которых гомоциклический ранга C_n^2. Кроме того, выводится следствие этого результата для бесконечных p-групп Альперина. Во втором разделе статьи доказывается, что если G — конечная 3-группа Альперина с гомоциклическим коммутантом G' ранга $C_n^2 + C_n^3$, то G' — элементарная абелева группа.

Ключевые слова: p-группа, группа Альперина, коммутант, задание группы образующими и определяющими соотношениями.

B. M. Veretennikov. On finite Alperin p-groups with homocyclic commutator subgroup.

We study metabelian Alperin groups, i.e., metabelian groups in which every 2-generated subgroup has a cyclic commutator subgroup. It is known that, if the minimum number of generators $d(G)$ of a finite Alperin p-group G is $n \geq 3$, then $d(G') \leq C_n^2$ for $p \neq 3$ and $d(G') \leq C_n^2 + C_n^3$ for $p = 3$. The first section of the paper deals with finite Alperin p-groups G with $d(G) \geq 3$ and $p \neq 3$ that have a homocyclic commutator subgroup of rank C_n^2. In addition, a corollary is deduced for infinite Alperin p-groups. In the second section, we prove that, if G is a finite Alperin 3-group with a homocyclic commutator subgroup G' of rank $C_n^2 + C_n^3$, then G' is an elementary abelian group.

Keywords: p-group, Alperin group, commutator subgroup, definition of group by means of generators and defining relations.

Введение

Дж. Альперин в [1] изучал группы, в которых все 2-порожденные подгруппы имеют циклический коммутант. Мы называем такие группы *группами Альперина.* В [1] было доказано, что при нечетном простом p конечные p-группы Альперина *метабелевы*, т. е. имеют абелев коммутант. Однако конечные 2-группы Альперина могут быть и неметабелевы. Так, в [2] был построен пример неметабелевой конечной 2-группы Альперина со вторым коммутантом порядка 2, а в [3] построены бесконечные серии конечных 2-групп Альперина со вторыми коммутантами порядка 2 и 4.

Затем в [4–6] автором были анонсированы результаты, из которых следует существование конечных 2-групп Альперина с циклическим вторым коммутантом сколь угодно большого порядка, а также с элементарным абелевым вторым коммутантом произвольного ранга и, кроме того, существование бесконечных групп Альперина с бесконечным циклическим вторым коммутантом, а также с бесконечным элементарным абелевым вторым коммутантом. Актуальными являются оценка ступени разрешимости конечных 2-групп Альперина и задача описания всех вторых коммутантов метабелевых конечных 2-групп Альперина.

Для решения этих задач может быть полезной информация о конечных 2-группах Альперина с абелевым, в частности гомоциклическим коммутантом. Интересной является задача описания конечных p-групп Альперина при $p \neq 2$, которые, как было отмечено выше, являются метабелевыми.

Используемые в статье обозначения и определения являются стандартными (см., например, [7]).

Будем, в частности, использовать следующие обозначения:

$d(G)$ — ранг группы G, т. е. минимальное число порождающих группы G;

$G^m = \langle x^m \mid x \in G\rangle$ — m-я степень группы G, где m — натуральное число;

G_m — m-й член нижнего центрального ряда группы G, в частности $G_3 = [G', G]$;

$\Omega(G) = \langle x \mid x \in G, |x| = p\rangle$ — нижний слой p-группы G;

$\exp(G)$ — экспонента, или период, конечной группы G, т. е. наименьшее общее кратное порядков всех элементов группы G;

Z_m — циклическая группа порядка m;

$C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$;

id_G — тождественное преобразование группы G.

Напомним также, что конечная p-группа называется *гомоциклической*, если она изоморфна прямому произведению нескольких экземпляров одной и той же циклической p-группы.

Условимся также считать все встречающиеся ниже индексы i, j, k, s, t натуральными числами.

В настоящей статье доказываются две теоремы о метабелевых p-группах Альперина. В них рассматриваются конечные p-группы Альперина с гомоциклическим коммутантом максимально возможного ранга при фиксированном минимальном числе порождающих этих групп, причем в первой теореме рассматривается случай $p \neq 3$, а во второй — $p = 3$.

Заметим, что в работе [1] доказано, что для конечной p-группы Альперина G с $d(G) = n \geq 3$ имеем $d(G') \leq C_n^2$ при $p \neq 3$ и $d(G') \leq C_n^2 + C_n^3$ при $p = 3$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Пусть p — простое число, $p \neq 3$ и $G = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ — конечная p-группа ранга n и с гомоциклическим коммутантом экспоненты p^l и ранга C_n^2, где $n \geq 3$ и $l \geq 1$. Положим $m = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$. Тогда G — группа Альперина в том и только в том случае, если найдутся такие целые числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что $0 \leq \alpha_i < p^{l-m}$ при $1 \leq i \leq n$ и для всех i, j, k из $[1, n]$ верны равенства*

$$[a_i, a_j, a_k] = [a_i, a_j]^{-2\alpha_k p^m}[a_j, a_k]^{\alpha_i p^m}[a_k, a_i]^{\alpha_j p^m}.$$

2) *Для любых натуральных чисел $n \geq 3$ и $l \geq 1$ и для любых целых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, принадлежащих полуинтервалу $[0, p^{l-m})$, где $m = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$, существует конечная p-группа $G = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ ранга n и с гомоциклическим коммутантом периода p^l и ранга C_n^2, в которой для всех тройных коммутаторов $[a_i, a_j, a_k]$ справедливы равенства, указанные в п. 1) теоремы.*

Теорема 2. *Если G — конечная 3-группа Альперина, $d(G) = n \geq 3$, $d(G') = C_n^2 + C_n^3$ и G' — гомоциклическая группа, то G' элементарная абелева. Кроме того, группа со всеми вышеперечисленными условиями существует.*

Теорема 1 доказывается в первом разделе статьи, а теорема 2 — во втором.

В вычислениях автор использует основные коммутаторные тождества $[ab, c] = [a, c]^b[b, c]$, $[a, bc] = [a, c][a, b]^c$ и тождество $[a, b, c][b, c, a][c, a, b] = 1$, выполняемое в любой метабелевой группе. Кроме этого, часто будет использоваться тот факт, что в метабелевой группе G для любых $x \in G$, $t \in G'$ и любого целого числа n верно равенство $[t, x]^n = [t^n, x]$.

Предложение 1. *Пусть G — конечная группа. Тогда G — группа Альперина тогда и только тогда, когда $[a, b, b]$ и $[a, b, a]$ — степени коммутатора $[a, b]$ для любых элементов a, b из G.*

Доказательство. Пусть G — конечная группа Альперина и $a, b \in G$. Так как $\langle a,b\rangle' = \langle [a,b]^x \mid x \in \langle a,b\rangle\rangle$ и $\langle [a,b]\rangle \trianglelefteq \langle a,b\rangle$, то $\langle a,b\rangle' = \langle [a,b]\rangle$ и необходимость доказана.

Обратно, пусть $[a,b]^a$ и $[a,b]^b$ — степени коммутатора $[a,b]$ для $a,b \in G$. Тогда $[a,b]^x$ — степень коммутатора $[a,b]$ для любого элемента x из $\langle a,b\rangle$ и, значит, $\langle a,b\rangle' = \langle [a,b]\rangle$. Достаточность доказана. Предложение доказано.

Предложение 2 [1, лемма 2.1.3]. *Если G — конечная p-группа Альперина, то справедливы следующие утверждения*:

1) *$G/(G')^p$ имеет ступень нильпотентности, не превосходящую 3 при $p = 3$ и 2 при $p \neq 3$;*

2) *если элементы $x_1, \dots x_n$ порождают группу G и $n \geq 2$, то коммутаторы $[x_i, x_j]$ при $1 \leq i < j \leq n$ порождают G' при $p \neq 3$ и эти же коммутаторы с добавлением коммутаторов $[x_i, x_j, x_k]$, где $1 \leq i < j < k \leq n$, порождают G' при $p = 3$;*

3) *если $x, y \in G$, то $[x,y,y]$ и $[y,x,y] \in (G')^p$, причем $G_3 \leq (G')^p$ при $p \neq 3$;*

4) *если $x_1, x_2, x_3 \in G$ и σ — перестановка множества $\{1,2,3\}$, то*

$$[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}] \equiv [x_1, x_2, x_3]^{(-1)^\sigma} \pmod{(G')^p},$$

где $(-1)^\sigma = -1$, если σ — нечетная перестановка, и $(-1)^\sigma = 1$, если σ — четная перестановка.

Предложение 3. *Если G — конечная p-группа Альперина, $p \neq 3$ и G' — гомоциклическая группа, то $\Omega(G') \leq Z(G)$.*

Доказательство. Можно считать, что $d(G) \geq 2$. В силу п. 2) предложения 2 $G = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$ и $G' = \langle [a_i, a_j] | \, 1 \leq i < j \leq n\rangle$. Тогда $\Omega(G') = \langle [a_i, a_j]^{p^{l-1}} | \, 1 \leq i < j \leq n\rangle$, где $p^l = \exp(G')$. Пусть k — произвольный индекс из $[1, n]$. Тогда

$$[[a_i, a_j]^{p^{l-1}}, a_k] = [a_i, a_j, a_k]^{p^{l-1}} \in (G')^{p^l} = 1$$

по п. 3) предложения 2. Предложение доказано.

Предложение 4 [8, лемма 2]. *Пусть H — конечная группа, заданная образующими $b_1, \dots, b_n$ и определяющими соотношениями $w_i(b_1, \dots, b_n) = 1$, где $1 \leq i \leq s$. Пусть далее k — натуральное число и группа K задана образующими $b_1, \dots, b_n$ и b, определяющими соотношениями группы H и добавленными определяющими соотношениями $b_i^b = v_i(b_1, \dots, b_n)$, где $1 \leq i \leq n$, а также $b^k = 1$. Пусть, кроме того, выполнены три условия для группы H*:

1) $\langle v_1(b_1, \dots, b_n), \dots, v_n(b_1, \dots, b_n)\rangle = H$;

2) *b сохраняет все определяющие соотношения группы H в том смысле, что $w_i(v_1(b_1, \dots, b_n), \dots, v_n(b_1, \dots, b_n)) = 1$ — верное равенство в группе H для любого $i = \overline{1, s}$;*

3) *k-я степень автоморфизма ψ группы H, индуцированного отображением $b_i \mapsto v_i(b_1, \dots, b_n)$, где $1 \leq i \leq n$, равна id_H.*

Тогда $K = H \leftthreetimes \langle b\rangle$, причем $|b| = k$.

1. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *Пусть G — конечная p-группа Альперина, p — простое число и $p \neq 3$. Предположим, что $d(G) = 3$, $G = \langle a, b, c\rangle$, $G' \simeq Z_{p^l} \times Z_{p^l} \times Z_{p^l}$, где $l \geq 1$, и $G_3 \leq (G')^{p^\mu}$, где $\mu = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$. Тогда существуют такие, однозначно определенные, целые числа A, B, C, принадлежащие $[0, p^{l-\mu})$, что выполняются равенства*

$$\begin{aligned}
&[a,b,c] = f^{-2Ap^\mu} g^{Bp^\mu} h^{Cp^\mu}, \quad [b,c,c] = g^{-3Ap^\mu}, \quad [c,a,c] = h^{-3Ap^\mu},\\
&[b,c,a] = f^{Ap^\mu} g^{-2Bp^\mu} h^{Cp^\mu}, \quad [a,b,a] = f^{-3Bp^\mu}, \quad [c,a,a] = h^{-3Bp^\mu},\\
&[c,a,b] = f^{Ap^\mu} g^{Bp^\mu} h^{-2Cp^\mu}, \quad [a,b,b] = f^{-3Cp^\mu}, \quad [b,c,b] = g^{-3Cp^\mu},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $f=[a,b]$, $g=[b,c]$, $h=[c,a]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что по п. 2) предложения 2

$$G'=\langle[a,b]\rangle\times\langle[b,c]\rangle\times\langle[c,a]\rangle.$$

Так как G — группа Альперина и $G_3\le(G')^{p^\mu}$, то существуют такие, однозначно определенные, целые числа $k,m,n,t,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\xi,\beta',\gamma',\delta'\in[0,p^{l-\mu})$, что выполняются равенства

$$\begin{array}{lll} [a,b,a]=[a,b]^{kp^\mu}, & [a,b,b]=[a,b]^{mp^\mu}, & \\ [b,c,b]=[b,c]^{np^\mu}, & [b,c,c]=[b,c]^{tp^\mu}, & \\ [c,a,c]=[c,a]^{vp^\mu}, & [c,a,a]=[c,a]^{wp^\mu}, & \\ [a,b,c]=f^{\alpha p^\mu}g^{\beta p^\mu}h^{\gamma p^\mu}, & [b,c,a]=f^{\delta p^\mu}g^{\varepsilon p^\mu}h^{\gamma' p^\mu}, & [c,a,b]=f^{\delta' p^\mu}g^{\beta' p^\mu}h^{\xi p^\mu}. \end{array}$$

Положим $x=[a,b,c]$, $y=[b,c,a]$, $z=[c,a,b]$.

Заметим перед дальнейшими вычислениями, что $(G')^{p^\mu}\le Z(G)$, в частности $G_4=1$. В самом деле, если $d\in\{a,b,c\}$, то $[[a,b]^{p^\mu},d]=[a,b,d]^{p^\mu}\in(G')^{p^{2\mu}}=1$, откуда $[a,b]^{p^\mu}\in Z(G)$. Аналогично $[b,c]^{p^\mu},[c,a]^{p^\mu}\in Z(G)$.

Рассмотрим подгруппу $\langle ab,c\rangle$. Имеем $[ab,c]\equiv h^{-1}g\ (\mathrm{mod}\,(G')^{p^\mu})$ и $[ab,c,c]=[h^{-1},c][g,c]=h^{-vp^\mu}g^{tp^\mu}=h^{-\omega p^\mu}g^{\omega p^\mu}$ для некоторого целого ω, так как G — группа Альперина и $G_3\le(G')^{p^\mu}$. Тогда $v\equiv\omega\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu})$ и $t\equiv\omega\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu})$, откуда $v\equiv t\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu})$ и, с учетом того что $v,t\in[0,p^{l-\mu})$, имеем $v=t$. Из симметрии соотношений 1.1 получаем $k=w$ и $m=n$. Далее имеем

$$[ab,c,ab]=[h^{-1}g,ab]=[h^{-1},ab][g,ab]=[h^{-1},b][h^{-1},a][g,b][g,a]=z^{-1}h^{-wp^\mu}g^{np^\mu}y.$$

Так как G — группа Альперина и $G_3\le(G')^{p^\mu}$, то $[ab,c,ab]$ является некоторой степенью элемента $(h^{-1}g)^{p^\mu}$, откуда $\delta=\delta'$. Снова из соображений симметрии получаем, что $\beta=\beta'$ и $\gamma=\gamma'$.

Рассмотрим теперь подгруппу $\langle ab,ac\rangle$. Имеем

$$[ab,ac]\equiv[a,ac][b,ac]\ (\mathrm{mod}\,(G')^{p^\mu})\equiv h^{-1}gf^{-1}\ (\mathrm{mod}\,(G')^{p^\mu}).$$

Тогда

$$[ab,ac,ab]=[h^{-1}gf^{-1},ab]=z^{-1}h^{-kp^\mu}g^{mp^\mu}f^{-kp^\mu-mp^\mu}y$$

$$=h^{-\xi p^\mu}g^{-\beta p^\mu}h^{-kp^\mu}g^{mp^\mu}f^{-kp^\mu-mp^\mu}g^{\varepsilon p^\mu}h^{\gamma p^\mu}=f^{-kp^\mu-mp^\mu}g^{(m+\varepsilon-\beta)p^\mu}h^{(\gamma-k-\xi)p^\mu}=(h^{-1}gf^{-1})^{p^\mu\omega}$$

для некоторого целого числа ω по определению группы Альперина.

Сравнивая показатели при f,g,h в последних двух выражениях, получим

$$\left\{\begin{array}{rcl} k+m&\equiv&\omega\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu}),\\ m+\varepsilon-\beta&\equiv&\omega\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu}),\\ k+\xi-\gamma&\equiv&\omega\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu}),\end{array}\right.$$

откуда

$$\left\{\begin{array}{l}\varepsilon-\beta\equiv k\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu}),\\ \xi-\gamma\equiv m\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu}).\end{array}\right.$$

Из симметрии соотношений 1.1 получаем также, что $\alpha-\delta\equiv t\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu})$. С учетом сравнений $\alpha+2\delta\equiv0\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu})$, $\varepsilon+2\beta\equiv0\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu})$, $\xi+2\gamma\equiv0\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu})$, вытекающих из равенства $[a,b,c][b,c,a][c,a,b]=1$, получаем, что $k\equiv-3\beta\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu})$, $m\equiv-3\gamma\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu})$, $t\equiv-3\delta\ (\mathrm{mod}\,p^{l-\mu})$.

Положив $A=\delta,B=\beta,C=\gamma$, получаем все равенства, указанные в формулировке леммы. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — конечная p-группа Альперина, $p \neq 3$, $d(G) = 3$ и $G' \simeq Z_{p^l} \times Z_{p^l} \times Z_{p^l}$, где $l \geq 1$. Тогда $G_3 \leq (G')^{p^\mu}$, где $\mu = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$.*

Доказательство. Применим индукцию по l. При $l = 1$ и $l = 2$ лемма, очевидно, верна. Пусть $l > 2$ и l нечетно, т.е. $l = 2\mu - 1$ для $\mu \geq 2$. По предположению индукции, примененному к фактор-группе $G/\Omega(G'), G_3 \leq (G')^{p^{\mu-1}}$, причем ввиду (1.1) имеем

$$\begin{array}{ll} [a,b,c] \equiv f^{-2\alpha p^{\mu-1}} g^{\beta p^{\mu-1}} h^{\gamma p^{\mu-1}} \pmod{\Omega(G')}, & [b,c,c] \equiv g^{-3\alpha p^{\mu-1}} \pmod{\Omega(G')}, \\ [c,a,c] \equiv h^{-3\alpha p^{\mu-1}} \pmod{\Omega(G')}, & [b,c,a] \equiv f^{\alpha p^{\mu-1}} g^{-2\beta p^{\mu-1}} h^{\gamma p^{\mu-1}} \pmod{\Omega(G')}, \\ [a,b,a] \equiv f^{-3\beta p^{\mu-1}} \pmod{\Omega(G')}, & [c,a,a] \equiv h^{-3\beta p^{\mu-1}} \pmod{\Omega(G')}, \\ [c,a,b] \equiv f^{\alpha p^{\mu-1}} g^{\beta p^{\mu-1}} h^{-2\gamma p^{\mu-1}} \pmod{\Omega(G')}, & [a,b,b] \equiv f^{-3\gamma p^{\mu-1}} \pmod{\Omega(G')}, \\ [b,c,b] \equiv g^{-3\gamma p^{\mu-1}} \pmod{\Omega(G')} & \end{array}$$

для некоторых целых чисел α, β, γ таких, что $0 \leq \alpha, \beta, \gamma < p^{(2\mu-2)-(\mu-1)} = p^{\mu-1}$. Положим, как и выше, $f = [a,b]$, $g = [b,c]$, $h = [c,a]$. Тогда

$$g^c = g^{1-3\alpha p^{\mu-1}+kp^{l-1}}, \quad g^a = g^{1-2\beta p^{\mu-1}} f^{\alpha p^{\mu-1}} h^{\gamma p^{\mu-1}} x, \quad f^c = f^{1-2\alpha p^{\mu-1}} g^{\beta p^{\mu-1}} h^{\gamma p^{\mu-1}} y,$$

$$h^c = h^{1-3\alpha p^{\mu-1}+mp^{l-1}}$$

для некоторых целых чисел k, m и некоторых элементов x, y из $\Omega(G')$, причем $x, y \in Z(G)$ по предложению 3.

Подействуем сопряжением элементом a на равенство $g^c = g^{1-3\alpha p^{\mu-1}+kp^{l-1}}$. В результате получим

$$(g^{1-2\beta p^{\mu-1}} f^{\alpha p^{\mu-1}} h^{\gamma p^{\mu-1}} x)^c = (g^{1-2\beta p^{\mu-1}} f^{\alpha p^{\mu-1}} h^{\gamma p^{\mu-1}} x)^{1-3\alpha p^{\mu-1}+kp^{l-1}},$$

откуда

$$g^{(1-2\beta p^{\mu-1})(1-3\alpha p^{\mu-1}+kp^{l-1})} (f^{1-2\alpha p^{\mu-1}} g^{\beta p^{\mu-1}} h^{\gamma p^{\mu-1}} y)^{\alpha p^{\mu-1}} h^{(1-3\alpha p^{\mu-1}+mp^{l-1})\gamma p^{\mu-1}} x$$

$$= (g^{1-2\beta p^{\mu-1}} f^{\alpha p^{\mu-1}} h^{\gamma p^{\mu-1}} x)^{1-3\alpha p^{\mu-1}+kp^{l-1}}.$$

Сравнивая показатели у элемента f в обеих частях полученного равенства, получим

$$(1 - 2\alpha p^{\mu-1})\alpha p^{\mu-1} \equiv \alpha p^{\mu-1}(1 - 3\alpha p^{\mu-1} + kp^{l-1}) \pmod{p^l},$$

откуда $\alpha^2 p^{2\mu-2} \equiv 0 \pmod{p^l}$, а это означает, что α делится на p.

Из соображений симметрии β и γ тоже делятся на p и, значит, $G_3 \leq (G')^{p^\mu}$.

Пусть теперь l четно и $l \geq 4$. Тогда $\mu = l/2$.

Предположим, что $G_3 \nleq (G')^{p^\mu}$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/\Omega(G')$. Тогда $\overline{G}$ — группа Альперина с гомоциклическим коммутантом, изоморфным $Z_{p^{2\mu-1}} \times Z_{p^{2\mu-1}} \times Z_{p^{2\mu-1}}$, причем $\overline{G}_3 \nleq (\overline{G}')^{p^\mu}$. Получили противоречие с только что рассмотренным случаем, когда $l = 2\mu - 1$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа, l — натуральное число, p — простое число, $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $n \geq 2$, G' — абелева группа экспоненты p^l с множеством порождающих, состоящим из коммутаторов $[a_i, a_j]$, где $1 \leq i < j \leq n$. Пусть далее $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — такие целые числа, что $0 \leq \alpha_s < p^{l-\mu}$ для любого $s \in [1,n]$, где $\mu = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$, и для любых $i, j, k \in [1,n]$ имеем $[a_i, a_j, a_k] = [a_i, a_j]^{-2\alpha_k p^\mu} [a_j, a_k]^{\alpha_i p^\mu} [a_k, a_i]^{\alpha_j p^\mu}$. Тогда G — группа Альперина.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим коммутатор $\big[[a_i,a_j]^{p^\mu},a_k\big]$, где $1\le i,j,k\le n$. В силу метабелевости группы G он равен $[a_i,a_j,a_k]^{p^\mu}=[a_i,a_j]^{-2\alpha_k p^{2\mu}}[a_j,a_k]^{\alpha_i p^{2\mu}}[a_k,a_i]^{\alpha_j p^{2\mu}}=1$, так как $2\mu\ge l$. Следовательно, $G_3\le (G')^{p^\mu}\le Z(G)$.

Рассмотрим теперь произвольную 2-порожденную подгруппу H группы G:

$H=\langle a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}x, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}y\rangle$, где $x,y\in G'$, а все γ_i,δ_i — целые числа. Поскольку $G_3\le (G')^{p^\mu}\le Z(G)$, имеем

$$[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}]\equiv\prod_{1\le i<j\le n}[a_i,a_j]^{\gamma_i\delta_j-\gamma_j\delta_i}\ (\operatorname{mod}(G')^{p^\mu}).$$

Вычислим тройной коммутатор

$$[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}]=\prod_{1\le i,j,k\le n}[a_i^{\gamma_i},a_j^{\delta_j},a_k^{\delta_k}]$$

$$=\prod_{1\le i,j,k\le n}[a_i,a_j,a_k]^{\gamma_i\delta_j\delta_k}=\prod_{1\le i,j,k\le n}\Big([a_i,a_j]^{-2\alpha_k p^\mu}[a_j,a_k]^{\alpha_i p^\mu}[a_k,a_i]^{\alpha_j p^\mu}\Big)^{\gamma_i\delta_j\delta_k}.$$

Зафиксируем индексы s и t такие, что $1\le s<t\le n$, и найдем показатель, с которым коммутатор $[a_s,a_t]$ входит в полученное выражение с учетом множителей вида $[a_t,a_s]$. Ясно, что в произведение $\prod_{1\le i,j,k\le n}([a_i,a_j]^{-2\alpha_k p^\mu})^{\gamma_i\delta_j\delta_k}$ этот коммутатор входит с показателем

$$p^\mu\bigg(\sum_{k=1}^n -2\alpha_k\gamma_s\delta_t\delta_k+2\alpha_k\gamma_t\delta_s\delta_k\bigg)=\sum_{k=1}^n(-2\alpha_k\delta_k)(\gamma_s\delta_t-\gamma_t\delta_s)p^\mu.$$

Далее имеем

$$\prod_{1\le i,j,k\le n}\big([a_j,a_k]^{\alpha_i p^\mu}[a_k,a_i]^{\alpha_j p^\mu}\big)^{\gamma_i\delta_j\delta_k}$$

$$=\prod_{1\le i,j\le n}\big([a_j,a_s]^{\alpha_i p^\mu}[a_s,a_i]^{\alpha_j p^\mu}\big)^{\gamma_i\delta_j\delta_s}\cdot\prod_{1\le i,j\le n}\big([a_j,a_t]^{\alpha_i p^\mu}[a_t,a_i]^{\alpha_j p^\mu}\big)^{\gamma_i\delta_j\delta_t}\cdot A,$$

где A — произведение коммутаторов, отличных от $[a_s,a_t]^{\pm1}$. Таким образом, в полученное произведение коммутаторов коммутатор $[a_s,a_t]$ входит с показателем

$$p^\mu\bigg(-\sum_{i=1}^n\alpha_i\gamma_i\delta_t\delta_s+\sum_{j=1}^n\alpha_j\gamma_t\delta_j\delta_s+\sum_{i=1}^n\alpha_i\gamma_i\delta_s\delta_t-\sum_{j=1}^n\alpha_j\gamma_s\delta_j\delta_t\bigg)=p^\mu\sum_{j=1}^n(-\alpha_j\delta_j)(\gamma_s\delta_t-\gamma_t\delta_s).$$

Таким образом, в тройной коммутатор $[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}]$ коммутатор $[a_s,a_t]$ входит с показателем $p^\mu(\gamma_s\delta_t-\gamma_t\delta_s)\sum_{k=1}^n(-3\alpha_k\delta_k)$, откуда получаем с учетом формулы для $[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}]$, полученной в начале доказательства леммы, что

$$\big[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}\big]=\big[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}\big]^{p^\mu\sum\limits_{k=1}^n(-3\alpha_k\delta_k)}.$$

Используя основные коммутаторные тождества, получим

$$\big[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}x, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}y\big]=\big[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n},y][a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}\big]\big[x,a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}\big].$$

Так как $G_3\le (G')^{p^\mu}\le Z(G)$ и $2\mu\ge l$, то для любых g,h из G и любого t из G' имеем $[g,t,h]=[t,g,h]=1$ и $[g,t]^{p^\mu}=1$.

Следовательно,

$$\left[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}x, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}y, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}y\right] = \left[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}\right]$$

$$= \left[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}\right]^{p^\mu \sum\limits_{k=1}^{n}(-3\alpha_k\delta_k)}.$$

С учетом того, что

$$\left[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}, y\right]^{p^\mu} = \left[x, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}\right]^{p^\mu} = 1,$$

имеем

$$\left[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}x, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}y, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}y\right] = \left[a_1^{\gamma_1}\dots a_n^{\gamma_n}x, a_1^{\delta_1}\dots a_n^{\delta_n}y\right]^{p^\mu \sum\limits_{k=1}^{n}(-3\alpha_k\delta_k)}.$$

Таким образом, коммутант H' цикличен, и по предложению 1, в силу произвольности H как 2-порожденной подгруппы G, G — группа Альперина. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть n и l — натуральные числа, $n \geq 3$, p — простое число и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — целые числа, принадлежащие $[0, p^{l-\mu})$, где $\mu = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$. Пусть далее группа G задана порождающими $a_1, \dots, a_n$ и определяюшими соотношениями*

$a_i^{p^l} = 1$ для $i \in [1, n]$, $[a_i, a_j]^{p^l} = 1$ для $i, j \in [1, n]$,

$[[a_i, a_j], [a_k, a_s]] = 1$ для $i, j, k, s \in [1, n]$,

$[a_i, a_j, a_k] = [a_i, a_j]^{-2\alpha_k p^\mu}[a_j, a_k]^{\alpha_i p^\mu}[a_k, a_i]^{\alpha_j p^\mu}$ для $i, j, k \in [1, n]$.

Тогда G — конечная p-группа порядка $p^{\frac{(n^2+n)l}{2}}$ с гомоциклическим коммутантом ранга $\big(n(n-1)\big)/2$ и периода p^l, причем G/G' — гомоциклическая группа ранга n и периода p^l.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия леммы следует, что $G' = \langle [a_i, a_j] | i, j \in [1, n]\rangle$, $|G'| \leq p^{\frac{(n^2-n)l}{2}}$ и G имеет нормальный ряд

$$G' \trianglelefteq G'\langle a_1\rangle \trianglelefteq G'\langle a_1\rangle\langle a_2\rangle \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G,$$

откуда $|G| \leq p^{\frac{(n^2+n)l}{2}}$. Следовательно, для доказательства леммы осталось построить конкретную группу порядка $p^{\frac{(n^2+n)l}{2}}$ с образующими $a_1, \dots, a_n$ и определяющими соотношениями, указанными в формулировке леммы.

Рассмотрим сначала группу $H = \prod_{1 \leq i < j \leq n}\langle f_{ij}\rangle$, где $\langle f_{ij}\rangle$ — циклическая группа порядка p^l для всех рассматриваемых индексов i, j. Ясно, что H — гомоциклическая группа ранга $\big(n(n-1)\big)/2$ и периода p^l. Можно считать, что H задается порождающими f_{ij} и определяющими соотношениями $f_{ij}^{p^l} = 1$, $f_{ji} = f_{ij}^{-1}$, $f_{ii} = 1$, $[f_{ij}, f_{ks}] = 1$, где i, j, k, s изменяются независимо друг от друга от 1 до n.

На первом шаге дальнейшего построения рассмотрим группу K_1, заданную порождающими f_{ij} и a_1, где $i, j \in [1, n]$, определяющими соотношениями группы H и добавленными определяющими соотношениями $a_1^{p^l} = 1$ и $[f_{ij}, a_1] = f_{ij}^{-2\alpha_1 p^\mu} f_{j1}^{\alpha_i p^\mu} f_{1i}^{\alpha_j p^\mu}$ для всех $i, j \in [1, n]$.

Докажем, что $K_1 = H \leftthreetimes \langle a_1\rangle$ и $|a_1| = p^l$. Для этого нужно доказать, что отображение $\varphi\colon f_{ij} \mapsto f_{ij}^{1-2\alpha_1 p^\mu} f_{j1}^{\alpha_i p^\mu} f_{1i}^{\alpha_j p^\mu}$, где $1 \leq i, j \leq n$, индуцирует автоморфизм ψ группы H (пп. 1) и 2) предложения 4), причем $\psi^{p^l} = \mathrm{id}_H$ (п. 3) предложения 4).

Ясно, что указанные образы под действием φ порождают H и φ сохраняет все определяющие соотношения группы H. Осталось доказать, что индуцируемый φ автоморфизм ψ группы H удовлетворяет равенству $\psi^{p^l} = \mathrm{id}_H$.

Докажем индукцией по k, что $f_{ij}^{\psi^k} = f_{ij}^{1-2\alpha_1 p^\mu k} f_{j1}^{\alpha_i p^\mu k} f_{1i}^{\alpha_j p^\mu k}$ для любых i, j $(1 \leq i, j \leq n)$.

При $k=1$ доказываемое равенство верно. Предположим, что оно верно при фиксированном k. Рассмотрим $f_{ij}^{\psi^{k+1}}$:

$$f_{ij}^{\psi^{k+1}} = (f_{ij}^{1-2\alpha_1 p^\mu k} f_{j1}^{\alpha_i p^\mu k} f_{1i}^{\alpha_j p^\mu k})^\psi$$
$$= (f_{ij}^{1-2\alpha_1 p^\mu} f_{j1}^{\alpha_i p^\mu} f_{1i}^{\alpha_j p^\mu})^{1-2\alpha_1 p^\mu k} (f_{j1}^{1-3\alpha_1 p^\mu})^{\alpha_i p^\mu k} f_{1i}^{(1-3\alpha_1 p^\mu)\alpha_j p^\mu k}$$
$$= f_{ij}^{1-2\alpha_1 p^\mu - 2\alpha_1 p^\mu k} f_{j1}^{\alpha_i p^\mu + \alpha_i p^\mu k} f_{1i}^{\alpha_j p^\mu + \alpha_j p^\mu k} = f_{ij}^{1-2\alpha_1 p^\mu (k+1)} f_{j1}^{\alpha_i p^\mu (k+1)} f_{1i}^{\alpha_j p^\mu (k+1)},$$

что и требовалось. В частности, $f_{ij}^{\psi^{p^{l-\mu}}} = f_{ij}$ и, тем более, $f_{ij}^{\psi^{p^l}} = f_{ij}$ для любых $i,j \in [1,n]$. Значит, $\psi^{p^l} = \mathrm{id}_H$. По предложению 4 отсюда следует, что $K_1 = H \leftthreetimes \langle a_1 \rangle$ и $|a_1| = p^l$.

Допустим, что на m-м шаге построена группа $K_m = \langle H, a_1, \ldots, a_m \rangle$, имеющая нормальный ряд

$$H \trianglelefteq H \leftthreetimes \langle a_1 \rangle \trianglelefteq (H \leftthreetimes \langle a_1 \rangle) \leftthreetimes \langle a_2 \rangle \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_m,$$

где $|a_i| = p^l$ для всех $i \in [1,m]$, определяющими соотношениями которой являются определяющие соотношения группы H вместе с соотношениями

$a_i^{p^l} = 1$ для любого $i \in [1,m]$,

$f_{ij}^{a_s} = f_{ij}^{1-2\alpha_s p^\mu} f_{js}^{\alpha_i p^\mu} f_{si}^{\alpha_j p^\mu}$ для всех $i,j \in [1,n]$ и для любого $s \in [1,m]$,

$a_i^{a_j} = a_i f_{ij}$ для всех $i,j \in [1,m]$.

Рассмотрим группу K_{m+1}, порожденную множеством $\{f_{ij}, a_1, \ldots, a_m, a_{m+1} \mid i,j \in [1,n]\}$, с определяющими соотношениями группы K_m и добавленными определяющими соотношениями

$a_{m+1}^{p^l} = 1$,

$f_{ij}^{a_{m+1}} = f_{ij}^{1-2\alpha_{m+1} p^\mu} f_{j,m+1}^{\alpha_i p^\mu} f_{m+1,i}^{\alpha_j p^\mu}$ для всех $i,j \in [1,n]$,

$a_i^{a_{m+1}} = a_i f_{i,m+1}$ для всех $i \in [1,m]$.

Докажем сначала, что отображение φ такое, что $f_{ij} \overset{\varphi}{\mapsto} f_{ij}^{1-2\alpha_{m+1} p^\mu} f_{j,m+1}^{\alpha_i p^\mu} f_{m+1,i}^{\alpha_j p^\mu}$ для всех $i,j \in [1,n]$ и $a_i \overset{\varphi}{\mapsto} a_i f_{i,m+1}$ для всех $i \in [1,m]$, индуцирует автоморфизм группы $\langle H, a_1, \ldots, a_m \rangle$, построенной на предыдущем шаге. Для этого нужно проверить сохранение определяющих соотношений этой группы под действием φ.

Проверим сначала сохранение соотношения вида $[a_i, a_j] = f_{ij}$. Для этого нужно доказать равенство $[a_i f_{i,m+1}, a_j f_{j,m+1}] = f_{ij}^{1-2\alpha_{m+1} p^\mu} f_{j,m+1}^{\alpha_i p^\mu} f_{m+1,i}^{\alpha_j p^\mu}$. Преобразуем левую часть этого равенства:

$$[a_i f_{i,m+1}, a_j f_{j,m+1}] = [a_i, a_j f_{j,m+1}][f_{i,m+1}, a_j] = [a_i, f_{j,m+1}][a_i, a_j][f_{i,m+1}, a_j]$$
$$= (f_{j,m+1}^{-2\alpha_i p^\mu} f_{m+1,i}^{\alpha_j p^\mu} f_{ij}^{\alpha_{m+1} p^\mu})^{-1} f_{ij} f_{i,m+1}^{-2\alpha_j p^\mu} f_{m+1,j}^{\alpha_i p^\mu} f_{ji}^{\alpha_{m+1} p^\mu} = f_{ij}^{1-2\alpha_{m+1} p^\mu} f_{j,m+1}^{\alpha_i p^\mu} f_{m+1,i}^{\alpha_j p^\mu},$$

что и требовалось.

Проверим теперь сохранение соотношения $[f_{ij}, a_s] = f_{ij}^{-2\alpha_s p^\mu} f_{js}^{\alpha_i p^\mu} f_{si}^{\alpha_j p^\mu}$, где $i,j \in [1,n]$, $s \in [1,m]$. Имеем

$$[f_{ij}^{a_{m+1}}, a_s^{a_{m+1}}] = [f_{ij}^{1-2\alpha_{m+1} p^\mu} f_{j,m+1}^{\alpha_i p^\mu} f_{m+1,i}^{\alpha_j p^\mu}, a_s f_{s,m+1}] = [f_{ij}^{1-2\alpha_{m+1} p^\mu} f_{j,m+1}^{\alpha_i p^\mu} f_{m+1,i}^{\alpha_j p^\mu}, a_s] = [f_{ij}, a_s],$$

так как, очевидно, что $H^{p^\mu} \leq Z(K_m)$.

Далее, под действием φ правая часть исходного соотношения преобразуется следующим образом:

$$(f_{ij}^{1-2\alpha_{m+1} p^\mu} f_{j,m+1}^{\alpha_i p^\mu} f_{m+1,i}^{\alpha_j p^\mu})^{-2\alpha_s p^\mu} (f_{js}^{1-2\alpha_{m+1} p^\mu} f_{s,m+1}^{\alpha_j p^\mu} f_{m+1,j}^{\alpha_s p^\mu})^{\alpha_i p^\mu}$$
$$\times (f_{si}^{1-2\alpha_{m+1} p^\mu} f_{i,m+1}^{\alpha_s p^\mu} f_{m+1,s}^{\alpha_i p^\mu})^{\alpha_j p^\mu} = f_{ij}^{-2\alpha_s p^\mu} f_{js}^{\alpha_i p^\mu} f_{si}^{\alpha_j p^\mu}.$$

Таким образом, под действием φ обе части рассматриваемого соотношения не изменились, т. е. данное соотношение сохраняется под действием φ.

Итак, доказано, что отображение φ индуцирует автоморфизм ψ группы K_m. Докажем теперь, что $\psi^{p^l} = \mathrm{id}_{K_m}$.

Как и при рассмотрении 1-го шага, доказывается, что $\psi^{p^{l-\mu}}$ действует на H тождественно. Значит, нужно доказать, что $a_i^{\psi^{p^l}} = a_i$ для любого $i \in [1, m]$. Докажем индукцией по k, что $a_i^{\psi^k} \equiv a_i f_{i,m+1}^k \pmod{H^{p^\mu}}$.

В самом деле, при $k = 1$ это утверждение верно и если предположить, что доказываемое утверждение верно при фиксированном k, то

$$a_i^{\psi^{k+1}} \equiv a_i^{\psi}(f_{i,m+1}^k)^{\psi} \pmod{H^{p^\mu}} \equiv a_i f_{i,m+1} f_{i,m+1}^{(1-3\alpha_{m+1}p^\mu)k} \pmod{H^{p^\mu}} \equiv a_i f_{i,m+1}^{k+1} \pmod{H^{p^\mu}},$$

что и требовалось.

Таким образом, $a_i^{\psi^{p^\mu}} = a_i x$, где $x \in H^{p^\mu}$. Положим $\psi^{p^\mu} = \chi$. Тогда $a_i^{\psi^{p^l}} = a_i^{\chi^{p^{l-\mu}}} = a_i x^{p^{l-\mu}} = a_i$, так как φ индуцирует на H^{p^μ} тождественный автоморфизм.

Снова из предложения 4 следует, что $K_{m+1} = K_m \leftthreetimes \langle a_{m+1} \rangle$, $|a_{m+1}| = p^l$.

На последнем n-м шаге получим требуемую группу. Лемма доказана.

Остается завершить д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. По леммам 1 и 2 для любого трехэлементного подмножества $\{i, j, k\}$ из множества $[1, n]$ найдутся такие числа $\alpha_i^{\{i,j,k\}}, \alpha_j^{\{i,j,k\}}, \alpha_k^{\{i,j,k\}}$, что

$$0 \le \alpha_i^{\{i,j,k\}}, \alpha_j^{\{i,j,k\}}, \alpha_k^{\{i,j,k\}} < p^{l-m}$$

и

$$[a_q, a_s, a_t] = [a_q, a_s]^{-2\alpha_t^{\{i,j,k\}} p^m} [a_s, a_t]^{\alpha_q^{\{i,j,k\}} p^m} [a_t, a_q]^{\alpha_s^{\{i,j,k\}} p^m}$$

для любых $q, s, t \in \{i, j, k\}$.

В частности, $[a_i, a_j, a_j] = [a_i, a_j]^{-3\alpha_j^{\{i,j,k\}} p^m}$, откуда $\alpha_j^{\{i,j,k\}}$ не зависит от k. По симметрии $\alpha_j^{\{i,j,k\}}$ не зависит от i. Обозначив $\alpha_j^{\{i,j,k\}}$ через α_j, с учетом леммы 3 получим справедливость утверждения 1) теоремы 1. Утверждение 2) теоремы 1 вытекает из леммы 4. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Пусть p — простое число, l — натуральное число и $m = \left[\dfrac{l+1}{2}\right]$. Тогда для любой последовательности целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$, где $\alpha_i < p^{l-m}$ для любого i, существует бесконечная p-группа Альперина, порожденная элементами $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, такая, что $[a_i, a_j, a_k] = [a_i, a_j]^{-2\alpha_k p^m} [a_j, a_k]^{\alpha_i p^m} [a_k, a_i]^{\alpha_j p^m}$ для любых натуральных чисел i, j, k.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Группу из условия леммы 4 обозначим через H_n для $n \ge 3$. Тогда имеем возрастающую цепочку групп $H_3 < H_4 < \ldots < H_n < \ldots$. Следовательно, $\bigcup_{n=3}^{\infty} H_n$ — p-группа Альперина по лемме 3. Следствие доказано.

2. Доказательство теоремы 2

Предположим, что утверждение теоремы 2 неверно. Тогда существует конечная 3-группа Альперина G такая, что $d(G) = 3$ и G' — гомоциклическая группа ранга 4 и периода 9. В силу п. 2) предложения 2 можно считать, что $G = \langle a, b, c \rangle$ и $G' = \langle f \rangle \langle g \rangle \langle h \rangle \langle t \rangle$, где

$$f = [a, b], \quad g = [b, c], \quad h = [c, a], \quad t = [a, b, c].$$

Тогда с учетом пп. 1), 3), 4) предложения 2 имеем

$$f^a = f^{1+3\alpha}, \quad g^a = gtf^{3A}g^{3B}h^{3C}t^{3D}, \quad h^a = h^{1+3\alpha'}, \quad t^a = tf^{3E}g^{3F}h^{3I}t^{3J}, \quad a^b = af,$$

$$f^b = f^{1+3\beta}, g^b = g^{1+3\beta'}, \quad h^b = htf^{3A'}g^{3B'}h^{3C'}t^{3D'}, \quad t^b = tf^{3E'}g^{3F'}h^{3I'}t^{3J'}.$$

Подействуем сопряжением элементом b на второе из этих равенств. Тогда получим

$$(g^b)^{a^b} = g^b t^b (f^{3A} g^{3B} h^{3C} t^{3D})^b.$$

Из этого равенства преобразованиями его левой и правой части получим равенство

$$g^{1+3\beta'} t^{1+3\beta'} f^{3A} g^{3B} h^{3C} t^{3D} = g^{1+3\beta'} t f^{3E'} g^{3F'} h^{3I'} t^{3J'} f^{3A} g^{3B} h^{3C} t^{3C} t^{3D},$$

откуда

$$t^{3\beta'} = f^{3E'} g^{3F'} h^{3I'} t^{3J'} t^{3C}.$$

Следовательно,

$$E' \equiv F' \equiv I' \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3), \quad J' + C \equiv \beta' \,(\mathrm{mod}\, 3). \tag{2.1}$$

Имеем, в частности, тогда, что $t^b = t^{1+3J'}$.

Аналогично, действуя элементом b на равенство $h^a = h^{1+3\alpha'}$, получаем следующие равенства:

$$(h^b)^{a^b} = (h^b)^{1+3\alpha'}, \quad (htf^{3A'} g^{3B'} h^{3C'} t^{3D'})^a = (htf^{3A'} g^{3B'} h^{3C'} t^{3D'})^{1+3\alpha'},$$

$$h^{1+3\alpha'} t f^{3E} g^{3F} h^{3I} t^{3J} f^{3A'} g^{3B'} t^{3B'} h^{3C'} t^{3D'} = h^{1+3\alpha'} t^{1+3\alpha'} f^{3A'} g^{3B'} h^{3C'} t^{3D'},$$

откуда

$$f^{3E} g^{3F} h^{3I} t^{3J} t^{3B'} = t^{3\alpha'}.$$

Таким образом,

$$E \equiv F \equiv I \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \ \text{ и } \ B' + J \equiv \alpha' \,(\mathrm{mod}\, 3). \tag{2.2}$$

Далее, заметим, что

$$f^c = ft, \quad g^c = g^{1+3\gamma}, \quad h^c = h^{1+3\gamma'}, \quad t^c = tf^{3E''} g^{3F''} h^{3I''} t^{3J''}, \quad a^c = ah^{-1}, \quad b^c = bg$$

для некоторых целых чисел $\gamma, \gamma', E'', F'', I'', J''$.

Подействовав элементом c на равенство $f^a = f^{1+3\alpha}$, получим

$$(ft)^a = (ft)^{1+3\alpha}, \quad f^{1+3\alpha} t^{1+3J} = f^{1+3\alpha} t^{1+3\alpha},$$

откуда

$$\alpha \equiv J \,(\mathrm{mod}\, 3). \tag{2.3}$$

Действуя на равенство $g^a = gtf^{3A} g^{3B} h^{3C} t^{3D}$ элементом c, получим сравнения, аналогичные сравнениям (2.1) и (2.2):

$$E'' \equiv F'' \equiv I'' \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \text{ и } J'' + A \equiv \gamma \,(\mathrm{mod}\, 3). \tag{2.4}$$

Аналогично, действуя на равенство $f^b = f^{1+3\beta}$ элементом c, получим

$$J' \equiv \beta \,(\mathrm{mod}\, 3). \tag{2.5}$$

Подействуем теперь элементом c на равенство $h^b = htf^{3A'} g^{3B'} h^{3C'} t^{3D'}$. Тогда получим

$$(htf^{3A'} g^{3B'} h^{3C'} t^{3D'})^{1+3\gamma'} = h^{1+3\gamma'} t^{1+3J''} f^{3A'} t^{3A'} g^{3B'} h^{3C'} t^{3D'}, \quad t^{3\gamma'} = t^{3J''+3A'},$$

откуда

$$J'' + A' \equiv \gamma' \,(\mathrm{mod}\, 3). \tag{2.6}$$

Кроме того, из равенства $[a,b,c][b,c,a][c,a,b] = 1$ следует, что $t \cdot tf^{3A}g^{3B}h^{3C}t^{3D} \times tf^{3A'}g^{3B'}h^{3C'}t^{3D'} = 1$, откуда имеем систему сравнений

$$\begin{cases} D + D' \equiv 2 \pmod 3, \\ A + A' \equiv 0 \pmod 3, \\ B + B' \equiv 0 \pmod 3, \\ C + C' \equiv 0 \pmod 3. \end{cases} \tag{2.7}$$

Далее для удобства запишем полученные ранее сравнения (2.1)–(2.6) в виде системы

$$\begin{cases} J' + C \equiv \beta' \pmod 3, \\ J + B' \equiv \alpha' \pmod 3, \\ J'' + A \equiv \gamma \pmod 3, \\ J'' + A' \equiv \gamma' \pmod 3, \\ \alpha \equiv J \pmod 3, \\ \beta \equiv J' \pmod 3. \end{cases} \tag{2.8}$$

Из полученных систем (2.7) и (2.8) видно, что

$$D' \equiv (2 - D) \pmod 3, \quad A' \equiv -A \pmod 3, \quad B' \equiv -B \pmod 3,$$

$$C' \equiv -C \pmod 3, \quad J'' \equiv (\gamma - A) \pmod 3.$$

Кроме того,

$$\gamma' \equiv (\gamma - A + A') \equiv (\gamma + A) \pmod 3, \quad \beta' \equiv (\beta + C) \pmod 3, \quad \alpha' \equiv (\alpha - B) \pmod 3.$$

Таким образом, все параметры выражены через $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C, D$.

Итак, определяющие соотношения группы G принимают вид

$$f^a = f^{1+3\alpha}, \quad g^a = gtf^{3A}g^{3B}h^{3C}t^{3D}, \quad h^a = h^{1+3(\alpha-B)}, \quad t^a = t^{1+3\alpha},$$

$$f^b = f^{1+3\beta}, \quad g^b = g^{1+3(\beta+C)}, \quad h^b = htf^{-3A}g^{-3B}h^{-3C}t^{3(-1-D)},$$

$$t^b = t^{1+3\beta}, \quad f^c = ft, \quad g^c = g^{1+3\gamma}, \quad h^c = h^{1+3(\gamma+A)}, \quad t^c = t^{1+3(\gamma-A)}.$$

Теперь используем то, что G — группа Альперина. Рассмотрим подгруппу $\langle ab, c\rangle$. Имеем

$$[ab, c] = (h^{-1})^b g = h^{-1}t^{-1}f^{3A}g^{3B}h^{3C}t^{3(1+D)}g,$$

$$[ab, c, c] = h^{-3(\gamma+A)}t^{-3(\gamma-A)}t^{3A}g^{3\gamma} = h^{-3(\gamma+A)}g^{3\gamma}t^{-3\gamma-3A}$$

есть степень элемента $(h^{-1}t^{-1}g)^3$, т.е. существует число k такое, что $(h^{-1}t^{-1}g)^{3k} = h^{-3(\gamma+A)}g^{3\gamma}t^{-3\gamma-3A}$. Поэтому имеем систему

$$\begin{cases} k \equiv (\gamma + A) \pmod 3, \\ k \equiv \gamma \pmod 3. \end{cases}$$

Отсюда $A \equiv 0 \pmod 3$.

Рассмотрим подгруппу $\langle bc, a\rangle$. Как и выше, получаем

$$[bc, a] = (f^{-1})^c h = f^{-1}t^{-1}h, \quad [bc, a, a] = f^{-3\alpha}t^{-3\alpha}h^{3(\alpha-B)} = (f^{-1}t^{-1}h)^{3k}$$

для некоторого числа k. Поэтому

$$\begin{cases} \alpha \equiv k \pmod 3, \\ \alpha - B \equiv k \pmod 3, \end{cases}$$

откуда $B \equiv 0 \pmod 3$.

Рассмотрим теперь подгруппу $\langle ca, b\rangle$. Имеем

$$[ca,b]=(g^{-1})^a f=g^{-1}t^{-1}f^{-3A}g^{-3B}h^{-3C}t^{-3D}f,\quad [ca,b,b]=g^{-3(\beta+C)}t^{-3\beta-3C}f^{3\beta}=(g^{-1}t^{-1}f)^{3k}$$

для некоторого числа k. Поэтому

$$\begin{cases}\beta+C\equiv k \pmod 3,\\ \beta\equiv k \pmod 3,\end{cases}$$

откуда $C \equiv 0 \pmod 3$.

Из трех полученных выше систем сравнений следует

$$f^a=f^{1+3\alpha},\quad g^a=gt^{1+3D},\quad h^a=h^{1+3\alpha},\quad t^a=t^{1+3\alpha},\quad f^b=f^{1+3\beta},\quad g^b=g^{1+3\beta},$$

$$h^b=ht^{1+3(-1-D)},\quad t^b=t^{1+3\beta},\quad f^c=ft,\quad g^c=g^{1+3\gamma},\quad h^c=h^{1+3\gamma},\quad t^c=t^{1+3\gamma}.$$

Теперь вернемся к $\langle ab, c\rangle$. Имеем

$$[ab,c,ab]=[h^{-1}t^{-1}g,ab]=[h^{-1},ab][t^{-1},ab][g,ab]=t^{3(1+D)-1}(h^{-3\alpha})^b t^{-3\beta}(t^{-3\alpha})^b g^{3\beta}(t^{1+3D})^b$$

$$=t^{2+3D}h^{-3\alpha}t^{-3\alpha}t^{-3\beta}t^{-3\alpha}g^{3\beta}t^{1+3(D+\beta)}=t^{3+6D-6\alpha}h^{-3\alpha}g^{3\beta}=t^{3-3D+3\alpha}h^{-3\alpha}g^{3\beta}=(h^{-1}t^{-1}g)^{3k}$$

для некоторого числа k. Поэтому

$$\begin{cases}1-D+\alpha\equiv -k \pmod 3,\\ \alpha\equiv k \pmod 3,\\ \beta\equiv k \pmod 3,\end{cases}$$

откуда

$$\alpha\equiv\beta \pmod 3, \tag{2.9}$$

а также $1-D+\alpha\equiv-\alpha \pmod 3$, т. е.

$$D\equiv(1-\alpha) \pmod 3. \tag{2.10}$$

Теперь снова рассмотрим подгруппу $\langle bc, a\rangle$. Имеем

$$[bc,a,bc]=[f^{-1}t^{-1}h,bc]=[f^{-1},bc][t^{-1},bc][h,bc]=t^{-1}(f^{-3\beta})^c t^{-3\gamma}(t^{-3\beta})^c h^{3\gamma}(t^{1+3(-1-D)})^c$$

$$=t^{-1}f^{-3\beta}t^{-3\beta}t^{-3\gamma}t^{-3\beta}h^{3\gamma}t^{1+3(-1-D)+3\gamma}=t^{-6\beta+3(-1-D)}f^{-3\beta}h^{3\gamma}=(f^{-1}t^{-1}h)^{3k}$$

для некоторого числа k. Поэтому

$$\begin{cases}-2\beta-1-D\equiv -k \pmod 3,\\ \beta\equiv k \pmod 3,\\ \gamma\equiv k \pmod 3.\end{cases}$$

Следовательно, $\beta\equiv\gamma \pmod 3$ и $-2\beta-1-D\equiv-\beta \pmod 3$, т. е. $D\equiv(-\beta-1) \pmod 3$.

Отсюда и из (2.9) и (2.10) следует, что

$$1-\alpha\equiv(-\alpha-1) \pmod 3.$$

Получили противоречие, которое доказывает первое утверждение теоремы.

В качестве примера 3-группы Альперина, удовлетворяющей всем условиям теоремы 2, можно взять группу $G=B(3,n)$ — группу Бернсайда периода 3, порожденную n элементами, где $n\geq 3$. В [9, 18.2] доказано, что эта группа имеет ступень нильпотентности 3 и в ней выполняются тождества $[x,y,y]=1$ и $[x,y,x]=1$, откуда следует по предложению 1, что эта группа является группой Альперина. Кроме того, там доказано, что $d(G') = C_n^2 + C_n^3$, причем если $G = \langle x_1, \dots x_n \rangle$, то любой элемент группы G однозначно представим в виде

$$\prod_{1 \le i \le n} x_i^{a_i} \prod_{1 \le i < j \le n} [x_i, x_j]^{b_{ij}} \prod_{1 \le i < j < k \le n} [x_i, x_j, x_k]^{c_{ijk}},$$

где $a_i, b_{ij}, c_{ijk} \in \{0, 1, 2\}$ для всех i, j, k.

Теорема 2 доказана.

Автор благодарит рецензента за ряд полезных замечаний по оформлению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Alperin J.L.** On a special class of regular groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106, no. 1. P. 77–99.
2. **Веретенников Б.М.** Об одной гипотезе Альперина // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 1. С. 200–202.
3. **Веретенников Б.М.** О конечных 3-порожденных 2-группах Альперина // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 155–168.
4. **Веретенников Б.М.** Конечная 2-группа Альперина с вторым коммутантом произвольного порядка // Мальцевские чтения: тез. докл. Междунар. конф. Новосибирск, 2009. С. 47.
5. **Веретенников Б.М.** О ранге вторых коммутантов 2-групп Альперина // Мальцевские чтения: тез. докл. Междунар. конф. Новосибирск, 2010. С. 69.
6. **Веретенников Б.М.** 2-группы Альперина с бесконечными циклическими и элементарными абелевыми вторыми коммутантами // Алгебра, логика, теория и приложения: тез. докл. Междунар. конф. Красноярск, 2009. С. 15.
7. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 796 S.
8. **Веретенников Б.М.** О конечных 2-группах Альперина с циклическими вторыми коммутантами // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 3. С. 326–350.
9. **Холл М.** Теория групп. М.: ИЛ, 1962. 468 с.

Веретенников Борис Михайлович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: boris@veretennikov.ru

Поступила 05.02.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.567, 519.151, 519.179.1

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ БИРКГОФА — УИТНИ ДЛЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

М. Ю. Выплов

Понятие наследственной системы является естественным обобщением понятия матроида. В работе доказано обобщение теоремы Биркгофа — Уитни для наследственных систем. Показано, что решетка замкнутых множеств любой наследственной системы не содержит бесконечных цепей и, обратно, любая непустая решетка, не содержащая бесконечных цепей, изоморфна решетке замкнутых множеств некоторой наследственной системы. В частности, любая конечная решетка изоморфна решетке замкнутых множеств некоторой конечной наследственной системы.

Ключевые слова: наследственная система, матроид, оператор замыкания, геометрическая решетка, гиперграф.

M. Yu. Vyplov. A generalization of the Birkhoff–Whitney theorem for hereditary systems.

The notion of hereditary system is a natural generalization of the notion of matroid. We prove the following generalization of the Birkhoff–Whitney theorem for hereditary systems: the lattice of closed sets of any hereditary system does not contain infinite chains and, vice versa, any nonempty lattice without infinite chains is isomorphic to the lattice of closed sets of some hereditary system. In particular, any finite nonempty lattice is isomorphic to the lattice of closed sets of some finite hereditary system.

Keywords: hereditary system, matroid, closure operator, geometric lattice, hypergraph.

1. Введение

Пусть V — непустое множество, $\mathcal{A} \subseteq 2^V$ — непустое семейство его подмножеств. Пара $H = (V, \mathcal{A})$ называется *системой независимости* (или *наследственной системой* [5]) на V, если для всех $A, A' \subseteq V$ выполняется *аксиома наследственности*:

$(A1)$ $(A \in \mathcal{A}, A' \subseteq A) \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$.

Множество называется *независимым*, если оно принадлежит $\mathcal{A}$, и *зависимым* в противном случае. Минимальные по включению зависимые множества называются *циклами*.

Наследственная система $H = (V, \mathcal{A})$ называется *матроидом* на V, если выполняется *аксиома пополнения*:

$(A2)$ $(A, A' \in \mathcal{A}, |A'| = |A| + 1) \Rightarrow \exists a \in A' \setminus A\ (A \cup \{a\} \in \mathcal{A})$.

Понятие матроида было введено Уитни [6]. Хорошо известно также определение матроида в терминах замыкания (см. [1]).

Отображение $\varphi : 2^V \to 2^V$ называется *оператором замыкания* на V, если для всех $X, Y \subseteq V$ выполняются условия:

$(\varphi 1)$ $X \subseteq \overline{X}$ (*направленность*),

$(\varphi 2)$ $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$ (*монотонность*),

$(\varphi 3)$ $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ (*идемпотентность*),

где $\overline{X} = \varphi(X)$. Для *оператора слабого замыкания* требуется выполнение только условий $(\varphi 1)$ и $(\varphi 2)$. Множество $X \subseteq V$ называется *замкнутым*, если $\overline{X} = X$.

Пусть V — непустое множество, а φ — оператор замыкания на V. Пара $M = (V, \varphi)$ называется *матроидом* (или *комбинаторной предгеометрией* [4]) на V, если для всех $X \subseteq V$ и для любых $u, v \in V$ выполняются условия:

$(\varphi 4)$ $(u \notin \overline{X},\ u \in \overline{X \cup \{v\}}) \Rightarrow v \in \overline{X \cup \{u\}}$ (*аксиома замены*),

$(\varphi 5)$ $\exists B \subseteq X$ ($|B| < \infty$ и $\overline{B} = \overline{X}$) (*аксиома конечного базиса*).

Матроид называется *простым* (или *комбинаторной геометрией*), если $\overline{\varnothing} = \varnothing$ и $\overline{\{v\}} = \{v\}$ для любого элемента $v \in V$.

Как известно (см. [1]), оба приведенные выше определения матроида описывают один и тот же объект. А именно матроиду $M = (V, \mathcal{A})$ на множестве V, заданному семейством $\mathcal{A}$ независимых множеств, можно поставить во взаимно однозначное соответствие комбинаторную предгеометрию (V, φ) с оператором замыкания φ, определенным по правилу

$$v \in \overline{X} \Leftrightarrow \big(v \in X \text{ или } \exists A \subseteq X \ (A \in \mathcal{A} \ \text{ и } \ A \cup \{v\} \notin \mathcal{A})\big), \tag{1.1}$$

причем имеет место равенство

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq V \colon a \notin \overline{A \setminus \{a\}} \text{ для всех } a \in \mathcal{A}\}. \tag{1.2}$$

Как показано в работе [3], наследственной системе $H = (V, \mathcal{A})$ на множестве V, заданной семейством $\mathcal{A}$ независимых множеств, можно при помощи правила (1.1) поставить во взаимно однозначное соответствие оператор слабого замыкания на V, удовлетворяющий аксиоме замены (φ4), а также следующей аксиоме: для любого $X \subset V$ и для всех $u, v \in V$

($\varphi 3'$) $\big(u \in \overline{X} \setminus X, \ v \in \overline{X \cup \{u\}} \setminus (X \cup \{u\})\big) \Rightarrow \exists w \in X \ (v \in \overline{X \cup \{u\} \setminus \{w\}})$,

являющейся более слабым условием по сравнению с аксиомой идемпотентности (φ3). Заметим, что при этом $v \in \overline{\overline{X}} \setminus \overline{X}$.

Таким образом, понятие оператора слабого замыкания, удовлетворяющего аксиомам ($\varphi 3'$), (φ4) и (φ5), можно рассматривать как эквивалентное определение наследственной системы. Если $\varphi : 2^V \to 2^V$ — такой оператор, то пару $H = (V, \varphi)$ будем называть *наследственной системой*. Если $\overline{\varnothing} = \varnothing$ и $\overline{\{v\}} = \{v\}$ для любого элемента $v \in V$, то наследственную систему будем называть *простой*.

В настоящей работе изучаются решетки замкнутых множеств наследственных систем. Приведем необходимые определения теории решеток (см. [2]).

Точной верхней гранью $\vee X$ подмножества X частично упорядоченного множества L называется наименьший из элементов множества $\{a \in L \colon x \le a \ \forall x \in X\}$. Аналогично определяется *точная нижняя грань* $\wedge X$. *Решеткой* называется частично упорядоченное множество L, в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань $x \wedge y$ и точную верхнюю грань $x \vee y$.

Наименьший элемент решетки, если он существует, называется *нулем* решетки и обозначается через 0; аналогично наибольший элемент, если он существует, называется *единицей* решетки и обозначается через 1. В частности, любая конечная решетка содержит нуль и единицу.

Цепью называется частично упорядоченное множество, в котором для любых двух его элементов x и y имеет место соотношение $x \le y$ или $y \le x$, т. е. x и y *сравнимы*. *Длина конечной цепи* из n элементов полагается равной $n - 1$. *Длиной решетки* L называется точная верхняя грань длин цепей из L. *Высотой* $h[x]$ элемента $x \in L$, где L — решетка конечной длины, называется точная верхняя грань длин цепей решетки между нулем и x.

Подрешеткой решетки L называется подмножество $X \subset L$ такое, что если $a, b \in X$, то $a \wedge b \in X$ и $a \vee b \in X$. Вообще, если $a \le b$ в решетке L, то *(замкнутый) интервал* $[a, b]$, состоящий из всех элементов $x \in L$, которые удовлетворяют неравенству $a \le x \le b$, всегда будет подрешеткой.

Говорят, что элемент решетки y *покрывает* элемент x (обозначается $x < \cdot y$), если $x < y$ и из соотношения $x < z \le y$ следует $y = z$. *Точками* решетки называются элементы, покрывающие 0. Решетка называется *точечной*, если каждый ее элемент является точной верхней гранью точек. Решетка называется *полумодулярной*, если для любых ее элементов x и y выполняется соотношение $x \wedge y < \cdot x \Rightarrow y < \cdot x \vee y$. Решетка называется *геометрической*, если она является точечной, полумодулярной и не содержит бесконечных цепей.

В данной статье будут рассматриваться только решетки, не содержащие бесконечных цепей.

Замкнутые множества матроида $M = (V, \varphi)$ образуют решетку, в которой $X \wedge Y = X \cap Y$ и $X \vee Y = \overline{X \cup Y}$.

Следующая теорема раскрывает связь между матроидами и геометрическими решетками.

Теорема 1 (Биркгоф — Уитни). *Решетка $L(V)$ замкнутых множеств матроида геометрическая. Обратно, если L — геометрическая решетка с непустым множеством точек V, то пара $M = (V, \varphi)$, где $\varphi(X) = \{v \in V : v \leq \vee X\}$, является простым матроидом, а отображение $f : L \to L(V)$, где $f(x) = \{v \in V : v \leq x\}$ для $x \in L$, — изоморфизм решеток.*

Пусть H — наследственная система на множестве V, $X \subseteq V$. Определим оператор $X \to \langle X \rangle$ следующим образом: $\langle X \rangle$— это минимальное по включению замкнутое множество, содержащее X. Покажем, что оно единственно. Действительно, если предположить, что существуют два таких множества $X_1 \neq X_2$, то пересечение $X_1 \cap X_2$ будет являться замкнутым, содержать X и содержаться в обоих множествах X_1 и X_2, что противоречит их минимальности. Таким образом, определение корректно.

Легко видеть, что $X \to \langle X \rangle$ — оператор замыкания. Замкнутые множества наследственной системы образуют решетку, в которой $X \wedge Y = X \cap Y$ и $X \vee Y = \langle X \cup Y \rangle$. В случае, когда наследственная система является матроидом, $\langle X \rangle = \overline{X}$.

Наша цель — обобщить теорему Биркгофа — Уитни на наследственные системы. Главная трудность состоит в том, что решетки замкнутых множеств наследственных систем могут не быть точечными или полумодулярными.

П р и м е р 1. Рассмотрим наследственную систему $H = (V, \mathcal{A})$, где $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\big\}$. Ее замкнутыми множествами являются $\varnothing$, $\{4\}$ и V. Решетка L замкнутых множеств системы H представляет собой цепь из трех элементов (нуля, единственной точки и единицы). Заметим, что L не точечна (единицу решетки нельзя представить в виде точной верхней грани точек). Если мы попытаемся построить для L систему с изоморфной ей решеткой тем же способом, что в теореме 1 (задав оператор φ на множестве точек L), то потерпим неудачу. Действительно, можно видеть, что полученная система будет одноэлементным матроидом, содержащим всего лишь два замкнутых множества.

Пример наследственной системы с неполумодулярной решеткой замкнутых множеств будет приведен далее (см. пример 2).

Следовательно, нам необходимо предложить и обосновать принципиально иной способ построения по заданной решетке L наследственной системы с изоморфной ей решеткой.

Как будет показано далее, любая непустая решетка, не содержащая бесконечных цепей, изоморфна решетке замкнутых множеств некоторой наследственной системы. В частности, в разд. 2 доказывается, что класс решеток замкнутых множеств конечных наследственных систем совпадает с классом всех непустых конечных решеток. Опираясь на этот результат, в разд. 3 мы получим обобщение теоремы Биркгофа — Уитни для бесконечного случая.

При анализе свойств наследственных систем будет удобно оперировать их наглядным представлением в виде гиперграфов.

Пусть V — непустое множество, $\mathcal{E} \subseteq 2^V$— семейство его подмножеств, причем $\varnothing \notin \mathcal{E}$. Пара $G = (V, \mathcal{E})$ называется *гиперграфом*, элементы множества V — *вершинами* гиперграфа, а элементы множества $\mathcal{E}$ — *ребрами* гиперграфа. Ребро гиперграфа мощности n называется *n-ребром*, ребро гиперграфа мощности 1 — *петлей*.

Гиперграф будем называть *клаттером*, если никакое его ребро не содержит другое ребро в качестве собственного подмножества. Наследственные системы можно отождествить с клаттерами, рассматривая в качестве ребер клаттеров циклы наследственных систем. Заметим, что оператор слабого замыкания (1.1) может быть определен в терминах ребер клаттера: для всех $X \subseteq V$ и $v \in V$

$$v \in \overline{X} \Leftrightarrow \big(v \in X \ \text{ или } \ \exists E \in \mathcal{E}\ (v \in E \ \text{ и } \ X \cup \{v\} \supseteq E)\big). \tag{1.3}$$

Будем называть *замкнутыми множествами и независимыми множествами клаттера* замкнутые множества и независимые множества соответствующей ему наследственной системы.

2. Решетки замкнутых множеств конечных наследственных систем

Рассмотрим алгоритм А1, который для заданной конечной решетки $L, |L| > 1$, строит гиперграф $G = (V, \mathcal{E})$.

Алгоритм А1.

1. Условимся обозначать вершины G парами индексов вида (u, k), где $u \in L$ и $k \in \{1, 2, 3\}$. Положим $V = \bigcup\limits_{u \in L} X_u$, где X_u — подмножества вершин, определенные следующим образом:

$$X_u = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } u = 0, \\ \{(u,1)\}, & \text{если } u \text{ — точка решетки}, \\ \{(u,1),(u,2),(u,3)\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Положим $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$, где

$\mathcal{E}_1$ — множество всех 2-ребер вида $\{(u,1),(u,2)\}$ и $\{(u,1),(u,3)\}$, u — элементы решетки, не являющиеся нулем или точкой;

$\mathcal{E}_2$ — множество всех 3-ребер вида $\{(u',1),(u,2),(u,3)\}$, u и u' — пары элементов решетки такие, что $u' \lessdot u, u' \neq 0$;

$\mathcal{E}_3$ — множество всех 3-ребер вида $\{(u_1,1),(u_2,1),(u_1 \vee u_2,1)\}$, u_1 и u_2 — пары несравнимых элементов решетки.

Пример 2. Рассмотрим точечную неполумодулярную решетку с шестью элементами, точками которой являются элементы a, b и c (рис. 1). На рис. 2 изображен соответствующий ей гиперграф $G = (V, \mathcal{E})$, в котором

$V = X_0 \cup X_a \cup X_b \cup X_c \cup X_d \cup X_1,\ X_0 = \varnothing, X_a = \{(a,1)\}, X_b = \{(b,1)\}, X_c = \{(c,1)\}$;

$X_d = \{(d,1),(d,2),(d,3)\}, X_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$;

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3,\ \mathcal{E}_1 = \big\{\{(d,1),(d,2)\},\ \{(d,1),(d,3)\},\ \{(1,1),(1,2)\},\ \{(1,1),(1,3)\}\big\}$;

$\mathcal{E}_2 = \big\{\{(a,1),(1,2),(1,3)\},\ \{(d,1),(1,2),(1,3)\},\ \{(b,1),(d,2),(d,3)\},\ \{(c,1),(d,2),(d,3)\}\big\}$;

$\mathcal{E}_3 = \big\{\{(a,1),(b,1),(1,1)\},\ \{(a,1),(c,1),(1,1)\},\ \{(a,1),(d,1),(1,1)\},\ \{(b,1),(c,1),(d,1)\}\big\}$.

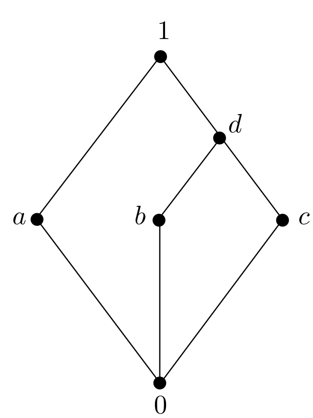


Рис. 1.

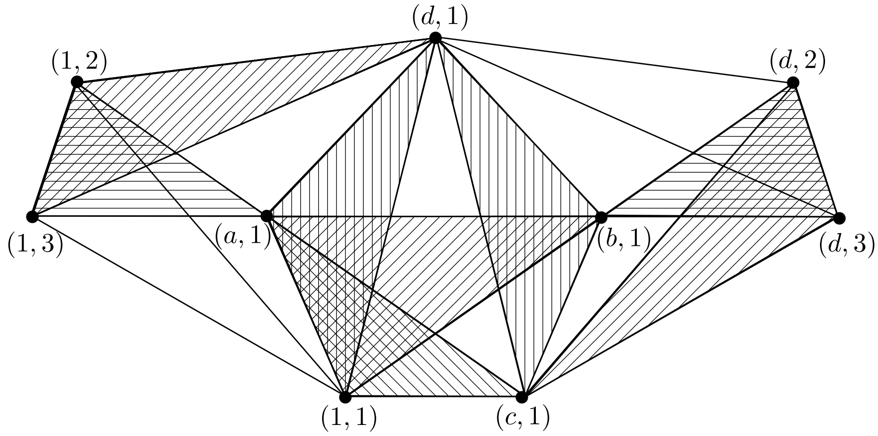


Рис. 2.

Лемма 1. *Пусть G — гиперграф, построенный по решетке L с помощью алгоритма* A1. *Тогда для любого $u \in L$*

$$\langle X_u \rangle = \bigcup_{u' \le u} X_{u'}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала, что для любого $u \in L$

$$\langle X_u \rangle \supseteq \bigcup_{u' \le u} X_{u'} \ . \tag{2.1}$$

Покажем, что

$$\big\langle \{(u,k)\} \big\rangle \supseteq X_u \ \text{ для всех } (u,k) \in V. \tag{2.2}$$

Это, очевидно, выполняется, если u — точка решетки L, так как в этом случае X_u состоит из одной вершины.

Пусть u не является точкой. Тогда, учитывая существование ребер $\{(u,1),(u,2)\}$ и $\{(u,1),(u,3)\}$ из $\mathcal{E}_1$ в силу (1.3) имеем $\overline{\{(u,2)\}} \supseteq \{(u,1),(u,2)\}$, $\overline{\{(u,3)\}} \supseteq \{(u,1),(u,3)\}$, $\overline{\{(u,1)\}} \supseteq \{(u,1),(u,2),(u,3)\}$. Таким образом, замыкание любого непустого подмножества множества X_u содержит вершину $(u,1)$, а замыкание $(u,1)$ содержит X_u целиком. Следовательно, ни одно из непустых собственных подмножеств множества X_u не замкнуто, откуда следует (2.2).

Далее, заметим, что

$$\overline{X_u} \supseteq \{(u',1) \colon u' \prec u, u' \ne 0\} \ \text{ для любого } u \in L. \tag{2.3}$$

Это вытекает в силу (1.3) из существования ребра $\{(u',1),(u,2),(u,3)\}$, принадлежащего $\mathcal{E}_2$.

Учитывая (2.2) и (2.3), для любого $u \in L$ имеем

$$\langle X_u \rangle = \big\langle \overline{X_u} \big\rangle \supseteq \big\langle \{(u',1) \colon \ u' \prec u, u' \ne 0\} \big\rangle \supseteq \bigcup_{u' \prec u, u' \ne 0} \big\langle \{(u',1)\} \big\rangle \supseteq \bigcup_{u' \prec u, u' \ne 0} X_{u'} = \bigcup_{u' \prec u} X_{u'}. \tag{2.4}$$

Так как для любых X, Y справедлива равносильность $\langle X \rangle \supseteq Y \Leftrightarrow \langle X \rangle \supseteq \langle Y \rangle$, то из (2.4) следует, что $\langle X_u \rangle \supseteq \big\langle \bigcup_{u' \prec u} X_{u'} \big\rangle \supseteq \bigcup_{u' \prec u} \langle X_{u'} \rangle$ для любого $u \in L$. Теперь, рассматривая все элементы решетки, меньшие u, в конце концов получаем (2.1).

Покажем, что наряду с (2.1) верно и обратное включение: для любого $u \in L$

$$\langle X_u \rangle \subseteq \bigcup_{u' \le u} X_{u'}. \tag{2.5}$$

Заметим, что в силу $X_u \subseteq \bigcup\limits_{u' \leq u} X_{u'}$ из (2.1) следует

$$\langle X_u \rangle = \Big\langle \bigcup_{u' \leq u} X_{u'} \Big\rangle \quad \text{для любого } u \in L. \tag{2.6}$$

Предположим, что (2.5) не выполняется. Тогда в соответствии с (2.6) имеем $\big\langle \bigcup_{u' \leq u} X_{u'} \big\rangle \supset \bigcup_{u' \leq u} X_{u'}$, откуда следует, что множество $\bigcup_{u' \leq u} X_{u'}$ не замкнуто. В силу (1.3) это означает, что должно существовать такое ребро $E \in \mathcal{E}$, что

$$\Big| E \setminus \bigcup_{u' \leq u} X_{u'} \Big| = 1. \tag{2.7}$$

Предположим, что E принадлежит семейству $\mathcal{E}_1$. Тогда E состояло бы из двух вершин с одинаковым первым индексом, а значит, принадлежало бы некоторому X_w для $w \in L$. То есть E либо полностью содержалось бы в $\bigcup_{u' \leq u} X_{u'}$ в случае $w \leq u$, либо имело бы с ним пустое пересечение в случае $w \not\leq u$, что противоречит (2.7).

Предположим, что $E \in \mathcal{E}_2$. Тогда E имело бы вид $\{(u_1, 1), (u_2, 2), (u_2, 3)\}$, где $u_1 \lessdot u_2$, т. е. либо полностью содержалось бы в $\bigcup_{u' \leq u} X_{u'}$ в случае $u_2 \leq u$, либо имело бы как минимум две вершины $(u_2, 2)$ и $(u_2, 3)$, не принадлежащие $\bigcup_{u' \leq u} X_{u'}$ в случае $u_2 \not\leq u$. Снова получаем противоречие с (2.7).

Предположим, что $E \in \mathcal{E}_3$. Тогда E имело бы вид $\{(u_1, 1), (u_2, 1), (u_1 \vee u_2, 1)\}$, где u_1 и u_2 несравнимы, т. е. либо E полностью содержалось бы в $\bigcup_{u' \leq u} X_{u'}$ в случае, когда $u_1 \leq u$ и $u_2 \leq u$ (так как при этом $u_1 \vee u_2 \leq u$), либо E имело бы как минимум две вершины, не принадлежащие $\bigcup_{u' \leq u} X_{u'}$ (вершины $(u_1, 1)$ и $(u_1 \vee u_2, 1)$ в случае $u_1 \not\leq u$ или вершины $(u_2, 1)$ и $(u_1 \vee u_2, 1)$ в случае $u_2 \not\leq u$). Противоречие с (2.7).

Таким образом, E не может принадлежать построенному алгоритмом семейству ребер $\mathcal{E}$. Получили противоречие, что доказывает (2.5).

Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любой непустой конечной решетки L существует такой клаттер $G = (V, \mathcal{E})$, что решетка замкнутых множеств клаттера G изоморфна L.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|L| = 1$, т. е. решетка L не содержит элементов, отличных от 0. Положим $V = \{v\}$ и $\mathcal{E} = \{\{v\}\}$. Тогда $\overline{\varnothing} = \{v\}$ и $\overline{\{v\}} = \{v\}$. Здесь $\{v\}$ — единственное замкнутое множество. Таким образом, решетка замкнутых множеств клаттера $G = (V, \mathcal{E})$ одноэлементна и, очевидно, изоморфна L.

Пусть $|L| > 1$. Построим гиперграф G с помощью алгоритма A1. G не содержит петель, так как при построении мы добавляли либо 2-ребра, либо 3-ребра. Заметим, что 2-ребра содержат вершины с одинаковым первым индексом, причем второй индекс одной из них равен 1. Если же 3-ребро содержит 2 вершины с одинаковым первым индексом, то их вторые индексы не равны 1. Таким образом, никакое 3-ребро не содержит 2-ребро, следовательно, G — клаттер.

Положим $Y_u = \bigcup\limits_{u' \leq u} X_{u'}$, где $u, u' \in L$. Заметим, что

$$Y_{u'} \subseteq Y_u \Leftrightarrow u' \leq u \quad \text{для всех } u, u' \in L. \tag{2.8}$$

Покажем, что решетка замкнутых множеств клаттера G изоморфна L, причем изоморфизм задается взаимно однозначным соответствием Y_u и u, где $u \in L$. Для этого в силу (2.8) достаточно показать, что $\{Y_u \colon u \in L\}$ является семейством замкнутых множеств в G.

Из леммы 1 следует, что

$$\langle X_u \rangle = \bigcup_{u' \leq u} X_{u'} = Y_u \quad \text{для любого } u \in L. \tag{2.9}$$

Таким образом, для всех $u \in L$ Y_u — минимальные замкнутые множества, содержащие X_u, откуда следует требуемый факт замкнутости Y_u.

Осталось показать, что не существует замкнутых множеств из G, отличных от Y_u, где $u \in L$. Предположим, что существует такое замкнутое множество $Z \subseteq V$, отличное от любого множества Y_u, где $u \in L$. В силу (2.2) если Z содержит хотя бы одну вершину из некоторого $X_u, u \in L$, то оно содержит X_u целиком. Поэтому можем записать

$$Z = \bigcup_{w \in W} X_w, \tag{2.10}$$

где W — некоторое подмножество из L.

Далее, учитывая (2.9), получаем $Z = \langle Z \rangle = \big\langle \bigcup_{w \in W} X_w \big\rangle = \big\langle \bigcup_{w \in W'} X_w \big\rangle$, где $W' = \{w' \in W\colon\ w' \not< w\ \forall w \in W\}$. Множество W' непусто, иначе мы имели бы $Z = \varnothing = X_0 = Y_0$. Если бы W' состояло из единственного элемента w, то выполнялось бы $Z = \langle X_w \rangle$, т. е. $Z = Y_w$ в силу (2.9). Поэтому мы можем выбрать два различных элемента $w_1, w_2 \in W'$. Из построения множества W' имеем, что w_1 и w_2 несравнимы между собой и в W не существует элементов, больших любого из них. Таким образом, $w_1 \vee w_2 \notin W$, откуда в соответствии с (2.10) следует, что $X_{w_1 \vee w_2} \not\subseteq Z$. С другой стороны, существует ребро $\{(w_1, 1), (w_2, 1), (w_1 \vee w_2, 1)\}$, принадлежащее $\mathcal{E}_3$, откуда $Z \supseteq \langle X_{w_1} \cup X_{w_2} \rangle \supseteq \big\langle \{(w_1, 1), (w_2, 1)\} \big\rangle \supseteq (w_1 \vee w_2, 1)$. Но в силу (2.2) $\big\langle \{(w_1 \vee w_2, 1)\} \big\rangle \supseteq X_{w_1 \vee w_2}$, т. е. $Z \supseteq X_{w_1 \vee w_2}$, противоречие.

Теорема доказана.

3. Решетки замкнутых множеств бесконечных наследственных систем

Пусть $H = (V, \varphi)$ — бесконечная наследственная система, где оператор φ удовлетворяет аксиомам (φ1), (φ2), ($\varphi 3'$), (φ4) и (φ5).

Лемма 2. *Аксиома (φ5) равносильна тому, что все независимые множества наследственной системы $H = (V, \varphi)$ конечны.*

Доказательство. Если A — бесконечное независимое множество, то по аксиоме конечного базиса существует подмножество $B \subseteq A$, удовлетворяющее условию $\overline{B} = \overline{A}$. Значит, $a \in \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus \{a\}}$ для всех $a \in A \setminus B$, что противоречит определению независимого множества (1.2).

Пусть все независимые множества конечны. Рассмотрим произвольное $X \subseteq V$. Выберем B — максимальное независимое подмножество X (по предположению оно конечно). Так как в силу выбора B множество $B \cup \{x\}$ зависимо для всех $x \in X \setminus B$, то $\overline{B} = \overline{X}$, т. е. аксиома конечного базиса выполнена.

Лемма доказана.

Замечание 1. В бесконечном случае для клаттера G, построенного алгоритмом A1, не обязательно выполняется аксиома конечного базиса (т. е. может существовать бесконечное множество вершин, не содержащее ребер). Например, рассмотрим решетку L, состоящую из 0, 1 и бесконечного множества элементов $u \in L \setminus \{0, 1\}$, для которых $0 \lessdot u \lessdot 1$. В полученном алгоритмом 1 клаттере имеем бесконечное независимое множество вершин вида $(u, 1)$, где $u \in L \setminus \{0, 1\}$.

В связи с этим предложим усовершенствованный алгоритм A2, строящий для заданной бесконечной решетки L, не содержащей бесконечных цепей, гиперграф $G = (V, \mathcal{E})$.

Алгоритм A2.

1. С помощью алгоритма A1 построим по решетке L клаттер $G_0 = (V, \mathcal{E}_0)$.

2. Положим $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_4$, где множество $\mathcal{E}_4$ строится следующим образом. Сначала $\mathcal{E}_4 = \varnothing$. Поочередно для всех $n = 3, 4, \ldots, l + 1$, где l — длина решетки L, находим все подмножества $X \subset L$ такие, что $|X| = n$, все элементы X попарно не сравнимы, и $\vee X = \vee(X \setminus \{x\})$ для

любого $x \in X$. Для всех таких X добавляем в $\mathcal{E}_4$ все подмножества $E \subseteq V, |E| = n$, для которых
$$X = \{u \in L\colon |X_u \cap E| = 1\} \tag{3.1}$$
и E не содержит уже добавленных ранее на этом этапе ребер в качестве подмножеств.

Лемма 3. *Семейства замкнутых множеств гиперграфов G_0 и G, построенных по решетке L с помощью алгоритмов* A1 *и* A2 *соответственно, совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим семейства ребер $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_4$ гиперграфов G_0 и G соответственно. С учетом (1.3) добавление новых ребер не может привести к появлению новых замкнутых множеств (действительно, замыкание любого множества может либо остаться прежним, либо расшириться).

Осталось показать, что никакое замкнутое множество не перестанет быть замкнутым после добавления к $\mathcal{E}_0$ новых ребер из $\mathcal{E}_4$. Предположим противное, т. е. что такое множество существует. Из доказательства для конечного случая мы знаем, что замкнутые множества в G_0 имеют вид $Y_u = \bigcup_{u' \leq u} X_{u'}$, где $u \in L$. Следовательно, в силу (1.3) должны существовать такое множество $Y_u, u \in L$, такое ребро $E \in \mathcal{E}_4$, и такая вершина $v \in V$, что
$$v = E \setminus Y_u. \tag{3.2}$$
По построению множества $\mathcal{E}_4$ согласно (3.1) существует множество $X = \{w \in L\colon |X_w \cap E| = 1\}$, $|X| = |E|$. Пусть $v \in X_{v_L}$, где $v_L \in L$. По определению X имеем $v_L \in X$ и $X_{v_L} \cap E = v$. Следовательно,
$$X \setminus \{v_L\} = \{w \in L\colon X_w \cap (E \setminus \{v\}) \neq \varnothing\}. \tag{3.3}$$

Заметим также, что по определению множества Y_u
$$\{w \in L\colon X_w \cap Y_u \neq \varnothing\} = \{u' \in L\colon u' \leq u\}. \tag{3.4}$$

В силу (3.2) имеем $E\setminus\{v\} \subseteq Y_u$. Учитывая (3.3) и (3.4), получаем $X\setminus\{v_L\} \subseteq \{u' \in L\colon u' \leq u\}$, откуда $\vee(X \setminus \{v_L\}) \leq \vee\{u' \in L\colon\ u' \leq u\} = u$. Но множество X является одним из множеств, рассматриваемых в алгоритме A2 при построении семейства $\mathcal{E}_4$, и должно удовлетворять условию $\vee X = \vee(X \setminus \{x\})\ \forall x \in X$, в частности $\vee X = \vee(X \setminus v_L)$. Имеем $v_L \leq \vee X = \vee(X \setminus v_L) \leq u$, следовательно, $v_L \in \{u' \in L\colon u' \leq u\}$, откуда $v \in \bigcup_{u' \leq u} X_{u'} = Y_u$. Противоречие с (3.2).

Лемма доказана.

Лемма 4. *Гиперграф G, построенный по решетке L с помощью алгоритма* A2*, не содержит бесконечных независимых множеств вершин.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует бесконечное независимое множество вершин A. Рассмотрим бесконечное множество $A_L = \{u \in L\colon X_u \cap A \neq \varnothing\}$ элементов решетки L. Возьмем элементы $u_0, u_1 \in L$ такие, что интервал $[u_0, u_1]$ содержит бесконечное количество элементов из A_L, причем является минимальным по включению среди таких интервалов (поскольку L не содержит бесконечных цепей, то длины всех интервалов конечны, что обеспечивает существование среди них минимального). Пусть $L' = [u_0, u_1]$. В подрешетке L' мы можем выбрать любое заданное количество попарно не сравнимых элементов множества A_L. Действительно, выберем произвольным образом элемент $u' \in A_L$ такой, что $u_0 < u' < u_1$. По построению L' интервалы $[u_0, u']$ и $[u', u_1]$ могут содержать лишь конечное число элементов из A_L. Поэтому после того как мы исключим из рассмотрения u' вместе со всеми элементами из интервалов $[u_0, u']$ и $[u', u_1]$, у нас все еще остается бесконечное множество нерассмотренных элементов из $L' \cap A_L$, несравнимых с u'. Выбираем из них следующий элемент и т.д.

Таким способом выберем множество X из $n = l' + 1$ попарно не сравнимых элементов, принадлежащих $L' \cap A_L$, где l' — длина подрешетки L'. Заметим, что $l' > 1$ (иначе L' состояла бы всего из двух элементов), следовательно, $|X| \geq 3$.

Докажем, что существует элемент $x_1 \in X$ такой, что $\vee X \neq \vee(X \setminus \{x_1\})$. Предположим противное, т. е. для любого $x \in X$ выполняется $\vee X = \vee(X \setminus \{x\})$. Поскольку $X \subset A_L$, то по определению A_L мы можем выбрать такое подмножество $E \subset A$, что $X = \{u \in L\colon X_u \cap E \neq \varnothing\}$, причем без ограничения общности можно считать, что $X = \{u \in L\colon |X_u \cap E| = 1\}$, т. е. $|E| = |X| = n$. По построению множества $\mathcal{E}_4$ в силу (3.1) это означает, что либо $E \in \mathcal{E}_4$, либо E содержит ребро из $\mathcal{E}_4$ в качестве собственного подмножества. В любом случае так как $E \subset A$, то множество A содержит ребро, что противоречит его независимости.

Рассмотрим множество $X_1 = X \setminus \{x_1\}$. Если $|X_1| \geq 3$, то аналогично доказывается, что существует $x_2 \in X_1$ такой, что $\vee X_1 \neq \vee(X_1 \setminus \{x_2\})$, и т.д. В результате получим цепочку $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_{l'-1}$, где $|X_i| = |X_{i-1}| - 1$ и $\vee X_i \neq \vee X_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, l'-1$. Заметим, что $|X_{l'-1}| = 2$. Так как элементы $X_{l'-1}$ несравнимы, то высота каждого из них не меньше 1, а $h[\vee X_{l'-1}] > 1$ (под высотой h элемента здесь понимается его высота в подрешетке L'). Так как $h[\vee X_i] < h[\vee X_{i'-1}]$ $\forall i = 1, \ldots l'-1$, то получаем $h[\vee X] > l'$, т. е. высота элемента в решетке L' больше длины этой решетки, противоречие.

Лемма доказана.

Имеет место следующее обобщение теоремы Биркгофа — Уитни для бесконечного случая.

Теорема 3. 1) *Решетка замкнутых множеств любой наследственной системы не содержит бесконечных цепей.*

2) *И обратно, для любой непустой решетки L, не содержащей бесконечных цепей, существует наследственная система $H = (V, \varphi)$, решетка замкнутых множеств которой изоморфна L.*

Доказательство. Утверждение 1) доказывается в точности так же, как в теореме Биркгофа — Уитни. Пусть $H = (V, \varphi)$ — наследственная система, $L(V)$ — решетка ее замкнутых множеств. Если в $L(V)$ существуют бесконечные цепи, то они должны содержать счетную возрастающую цепь или счетную убывающую цепь. Пусть $A_1 < A_2 < \ldots$ — некоторая возрастающая цепь в $L(V)$. Согласно свойству конечного базиса $\exists B \subseteq \cup A_i$ ($|B| < \infty$ и $\overline{B} = \overline{\cup A_i}$). Но тогда $B \subseteq \cup A_m$ для некоторого m, и, таким образом, $A_j \subseteq \overline{\cup A_i} = \overline{B} \subseteq A_m$ для всех j, т. е. в действительности цепь стабилизируется начиная с A_m. Если $A_1 > A_2 > \ldots$ — убывающая цепь в $L(V)$, то выберем элементы $a_i \in A_i \setminus A_{i+1}$ и положим $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $V_i = \{a_i, a_{i+1}, \ldots\}$. Так как $\overline{V_{i+1}} \subseteq A_{i+1}$, то $a_i \in \overline{V_{i+1}}$ при всех i. Положим $B_i = A \setminus \{a_i\}$ и допустим, что $a_i \in \overline{B_i}$. Выбирая максимально возможное j, для которого еще $a_i \in \overline{V_j \setminus \{a_i\}}$ ($j \leq i$, потому что $a_i \in V_{i+1}$), заключаем, что $a_i \notin \overline{V_{j+1} \setminus \{a_i\}} = \overline{(V_j \setminus \{a_i\}) \setminus a_j}$, а отсюда согласно аксиоме замены $a_j \in \overline{V_{j+1}}$. Противоречие. Поэтому вопреки аксиоме конечного базиса не существует конечного подмножества A, имеющего то же замыкание, что и A.

2) Пусть L — произвольная непустая решетка, не содержащая бесконечных цепей. Докажем, что существует такой клаттер $G = (V, \mathcal{E})$, удовлетворяющий аксиоме конечного базиса (т. е. не содержащий бесконечных независимых множеств вершин), что его решетка замкнутых множеств изоморфна L.

Построим гиперграф G с помощью алгоритма А2. В силу леммы 3 семейство его замкнутых множеств совпадает с семейством замкнутых множеств гиперграфа, построенного с помощью алгоритма А1, следовательно, решетка замкнутых множеств изоморфна L. В силу леммы 4 G удовлетворяет аксиоме конечного базиса. Осталось показать, что G является клаттером.

Непосредственно из описания алгоритма А2 следует, что ребра из $\mathcal{E}_4$ не содержат друг друга в качестве подмножеств. Далее, так как их мощность не меньше 3, они не могут содержаться в качестве собственных подмножеств в 2-ребрах и 3-ребрах из $\mathcal{E}_0$. Осталось показать, что ребра из $\mathcal{E}_4$ не могут включать в себя ребра из $\mathcal{E}_0$.

Ребра из $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ содержат две вершины с одинаковой первой компонентой. Ребра из $\mathcal{E}_3$ содержат пары вершин, первые компоненты которых являются сравнимыми элементами решетки (например, пара вершин $(u_1, 1)$ и $(u_1 \vee u_2, 1)$ в ребре вида $\{(u_1, 1), (u_2, 1), (u_1 \vee u_2, 1)\}$).

Ребра же из $\mathcal{E}_4$ по построению не содержат ни вершин с одинаковыми первыми компонентами, ни вершин, первые компоненты которых являются сравнимыми элементами решетки L.

Таким образом, гиперграф G, получаемый из клаттера G_0 путем добавления множества ребер $\mathcal{E}_4$, также является клаттером.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Хотя в отличие от теоремы Биркгофа — Уитни теоремы 2 и 3 не гарантируют для любой решетки L существования простой наследственной системы с изоморфной L решеткой замкнутых множеств, тем не менее заметим, что в случае $|L| > 1$ алгоритмы A1 и A2 строят клаттер G таким образом, что он не будет содержать петель (т. е. $\overline{\varnothing} = \varnothing$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айгнер М.** Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982. 558 с.
2. **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
3. **Выплов М.Ю., Ильев В.П.** О гиперграфах, соответствующих операторам слабого замыкания // Дискретные модели в теории управляющих систем: электрон. сб. тр. VIII Междунар. конф. 2009. С. 30–34. (URL: http://www.dmconf.ru/dm8/proceedings.pdf.)
4. **Crapo H.H., Rota G.-C.** On the foundations of combinatorial theory II: combinatorial geometries. Cambridge Mass.: MIT Press, 1970. 293 p.
5. **Grötshel M., Lovász L.** Combinatorial optimization // Handbook of Combinatorics / Eds. R.O. Graham, M. Grötshel, L. Lovász. Vol. 2. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1995. P. 1341–1598.
6. **Whitney H.** On the abstract properties of linear dependence // Amer. J. Math. 1935. Vol. 57, no. 3. P. 509–533.

Выплов Михаил Юрьевич
Поступила 11.09.2010
аспирант
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
e-mail: vyplov@omsu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 515.122.536

НЕКОТОРЫЕ ЦЕНТРИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ И ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ИМИ ТОЧКИ

А. А. Грызлов, Е. С. Бастрыков

Изучается бикомпактное расширение BN счетного дискретного пространства N, построенное как пространство Стоуна одной булевой алгебры. Рассмотрен класс подмножеств из BN, являющихся копиями пространства βN (компактификация Стоуна — Чеха пространства N). Получены характеристики точек прикосновения центрированных систем некоторых семейств подмножеств булевой алгебры.

Ключевые слова: бикомпактное расширение, компактификация Стоуна — Чеха, пространство Стоуна булевой алгебры, центрированные системы множеств.

A. A. Gryzlov, E. S. Bastrykov. Some centered systems of sets and points defined by them.

We study a compactification BN of a countable discrete space N, which is constructed as the Stone space of a Boolean algebra, and consider the class of subsets from BN that are copies of the space βN (the Stone–Čech compactification of the space N). Characteristics of points of closure are obtained for centered systems of some families of subsets of the Boolean algebra.

Keywords: compactification, Stone–Čech compactification, Stone space of a Boolean algebra, centered systems of sets.

1. Введение

Работа посвящена изучению одного бикомпактного расширения BN счетного дискретного пространства N. Это расширение было построено М. Беллом [1] как пространство Стоуна некоторой булевой алгебры, определенной в множестве подмножеств из N.

В [2] было показано существование сходящихся последовательностей в BN и подмножеств из N, для которых замыкание в BN есть копия βN (компактификация Стоуна — Чеха пространства N). Всякая цепь в N, рассматриваемом как частично упорядоченное множество, определяет сходящуюся последовательность в BN, а замыкание всякой так называемой строгой антицепи в N гомеоморфно βN.

В [3; 4] получены характеристики пределов цепей из N как точек прикосновения максимальных центрированных систем множеств некоторого семейства μ подмножеств булевой алгебры B.

Естественно встает вопрос о нахождении таких же характеристик для точек из замыкания строгой антицепи, являющегося копией βN. Оказывается, что минимальное расширение семейства μ позволяет получить максимальные центрированные семейства, точками прикосновения которых являются пределы строгих антицепей (теорема 7). Эти точки названы $\ell_{\pi|M}$-точками. В работе также получены некоторые дополнительные свойства этих точек.

Приведем конструкцию расширения, построенного М. Беллом [1].

Пусть $P = \{\, f \in \omega^\omega\colon\ 0 \leqslant f(n) \leqslant n+1 \text{ для всех } n \in \omega \,\}$. Определим

$$N = \{\, f|_n\colon\ f \in P,\ n \subseteq \omega \,\},$$

множество всех сужений отображений $f \in P$ на $n \subseteq \omega$. Здесь под n понимаем, в зависимости от контекста, как неотрицательное целое число, так и подмножество $n = \{0, \ldots, n-1\}$ из ω.

Через ω обозначается вполне упорядоченное множество $0, 1, 2, \ldots$ неотрицательных целых чисел, а также мощность этого множества. Множество, имеющее мощность ω, называется счетным.

Отметим, что множество $N = \{ f|_n\colon f \in P,\ n \in \omega \}$ является частично упорядоченным множеством со следующим порядком: для $s, t \in N$ имеем $s \leqslant t$ тогда и только тогда, когда t — продолжение s.

Пусть $T = \{ \pi \in N^\omega\colon \operatorname{dom}(\pi(n)) = n+1$ для всех $n < \omega \}$, где под $\operatorname{dom} s$ понимается область определения отображения $s \in N$.

Для каждого $s \in N$ положим

$$C_s = \{ t \in N\colon \operatorname{dom} s \subseteq \operatorname{dom} t,\ \ t|_{\operatorname{dom} s} = s \}.$$

Для $\pi \in T$ положим

$$C_\pi = \cup\{ C_{\pi(n)}\colon n \in \omega \}.$$

Отметим, что C_π и $N \setminus C_\pi$ бесконечны для всякого $\pi \in T$. Пусть B — булева алгебра, порожденная множествами из

$$B' = \{ C_\pi\colon \pi \in T \} \cup \{ N \setminus C_\pi\colon \pi \in T \}.$$

Заметим, что $\{ \{s\}\colon s \in N \} \cup \{ C_s\colon s \in N \} \subseteq B$. Определим BN как пространство Стоуна построенной булевой алгебры B. Это пространство является расширением Белла [1].

Из конструкции расширения Белла следует, что всякая точка нароста $BN \setminus N$ — это ультрафильтр булевой алгебры B, базой которого является семейство бесконечных множеств вида

$$\Bigl(\bigcap_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Bigr) \cap \Bigl(N \setminus \bigcup_{j\leqslant m} C_{\pi'_j}\Bigr).$$

Отметим, что замыкание элемента булевой алгебры в BN — это открыто-замкнутое подмножество в BN.

Топологические и теоретико-множественные термины, используемые в работе, можно найти в [5]. Для множества $A \subseteq BN$ через $[A]$ будем обозначать замыкание A в BN, а $A^* = [A] \setminus A$. Через $|A|$ обозначим мощность множества A.

О п р е д е л е н и е 1. Множество $\{ s_i\colon i \in \omega \} \subseteq N$ будем называть *цепью*, если для любой пары i и $j \in \omega$ таких, что $i < j$, следует, что $s_i \leqslant s_j$.

О п р е д е л е н и е 2. Множество $\{ s_i\colon i \in \omega \} \subseteq N$ будем называть *строгой антицепью*, если для любой пары i и $j \in \omega$ таких, что $i \neq j$, следует, что s_i несравнимо с s_j и $\operatorname{dom} s_i \neq \operatorname{dom} s_j$.

Приведем необходимые для дальнейшего исследования свойства пространства BN, полученные в [2–4].

В [2] была построена следующая база в BN. Для $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$ обозначим

$$C_{\pi|M} = \cup\{ C_{\pi(n)}\colon n \in M \}.$$

Теорема 1. *Семейство*

$$\Bigl\{ \Bigl[C_{\pi|M} \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Bigr]\colon \pi, \pi_i \in T,\ M \subseteq \omega,\ n \in \omega \Bigr\}$$

образует базу пространства BN, а наросты элементов этого семейства — базу в $BN \setminus N$.

О п р е д е л е н и е 3. Множество $C_{\pi|M}$ ($\pi \in T$, $M \subseteq \omega$) назовем *приведенным*, если $\{ \pi(i)\colon i \in M \}$ является строгой антицепью.

Также были построены подмножества в BN, замыкания которых гомеоморфны βN.

Теорема 2. *Пусть $\{ C_{s_i}\colon i \in \omega \}$ — дизъюнктное семейство множеств, $\operatorname{dom} s_i \neq \operatorname{dom} s_j$ для всех $i \neq j$ и $X = \{ x_i\colon i \in \omega \}$ такое, что $x_i \in [C_{s_i}]$. Тогда $[X]$ гомеоморфно βN.*

Было доказано существование сходящихся последовательностей в BN.

Теорема 3. *Пусть $A = \{ s_i \colon i \in \omega \}$ — бесконечная цепь в N. Тогда $\{ s_i \}_{i \in \omega}$ является сходящейся последовательностью в BN.*

В [3] доказана следующая теорема, характеризующая пределы подобных последовательностей.

Теорема 4. *Для точки $x \in BN \setminus N$ и цепи $A = \{s_i \colon i \in \omega\}$ следующие утверждения эквивалентны*:

1) *точка x есть предел последовательности $\{ s_i \}_{i \in \omega}$;*

2) *точка x имеет базу открыто-замкнутых окрестностей вида*

$$\Big[N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}\Big];$$

3) *если $x \in [C_{\pi|M}]$ для некоторых $\pi \in T$ и $M \subseteq \omega$, то существует $i \in M$ такое, что $x \in [C_{\pi(i)}]$.*

Кроме того, в [4] получены характеристики точек прикосновения некоторого класса центрированных систем множеств из N.

Теорема 5. *Если $\xi = \{G\}$ — максимальная центрированная система в семействе*

$$\mu = \Big\{ N \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i} \colon n \in \omega,\ \pi_i \in T \Big\},$$

то $\big|\cap\big\{ G^* \colon G \in \xi \big\}\big| = 1$.

О п р е д е л е н и е 4. Точку $x \in BN \setminus N$ назовем *ℓ-точкой*, если $x \in \cap\big\{ G^* \colon G \in \xi \big\}$ для некоторой максимальной центрированной системы $\xi = \{G\}$ в семействе μ.

Из теорем 4 и 5 вытекает

Следствие 1. *Точка $x \in BN \setminus N$ является ℓ-точкой тогда и только тогда, когда x есть предел в BN последовательности $\{ s_i \}_{i \in \omega}$ бесконечной цепи $\{ s_i \colon i \in \omega \}$ из N.*

Кроме того, нам понадобится следующая лемма, доказанная в [4].

Лемма 1. *Для всякого множества вида $C_{\pi|M}$ существуют два элемента π_1 и π_2 в T такие, что $C_{\pi|M} = C_{\pi_1} \cap C_{\pi_2}$.*

2. Основные результаты

Как было сказано во введении, ℓ-точки — это максимальные центрированные системы в семействе μ.

Рассмотрим множество $C_{\pi|M}$, которое будем считать приведенным, причем M счетно.

Для $C_{\pi|M}$ положим $\theta_{\pi|M} = \big\{ C_{\pi|M_i} \colon M_i = M \cap \{n \colon n \geqslant i\}, i \in \omega\big\}$ и $\mu_{\pi|M} = \mu \cup \theta_{\pi|M}$.

О п р е д е л е н и е 5. Центрированную систему $\xi = \{G\}$ в семействе $\mu_{\pi|M}$ будем называть *$\pi|M$-центрированной для $C_{\pi|M}$*, если $\theta_{\pi|M} \subseteq \xi$.

Всякую $\pi|M$-центрированную систему можно дополнить до максимальной $\pi|M$-центрированной системы.

Теорема 6. *Пусть множество $C_{\pi|M}$ приведенное и M счетно. Если $\xi = \{G\}$ — максимальная $\pi|M$-центрированная система для $C_{\pi|M}$, то*

$$\Big|\cap \big\{ G^* \colon G \in \xi \big\}\Big| = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой теоремы близко к доказательству теоремы для ℓ-точек работы [4].

Из центрированности системы $\xi = \{G\}$ и бикомпактности пространства BN следует, что $\cap\{\, G^*\colon\ G \in \xi \,\}$ не пусто. Предположим, что найдутся две различные точки x, $y \in \cap\{\, G^*\colon\ G \in \xi \,\}$. Рассмотрим окрестность $O_x = \bigl[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i\le n} C_{\pi_i}\bigr]$ точки x такую, что $y \notin O_x$. Отметим, что из построения пространства BN вытекает, что

$$\Bigl[C_{\pi_0|M_0} \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Bigr] = \bigl[C_{\pi_0|M_0}\bigr] \cap \Bigl(\bigcap_{i\leqslant n}[N \setminus C_{\pi_i}]\Bigr) = \bigl[C_{\pi_0|M_0}\bigr] \cap \Bigl[N \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\Bigr].$$

Множества $[C_{\pi_0|M_0}]$ и $\bigl[N \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\bigr]$ — открыто-замкнутые множества, содержащие точку x.

Открыто-замкнутость множества $\bigl[N \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}\bigr]$ предполагает, что множество $N \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i}$ центрировано с ξ, а максимальность системы ξ — что $N \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i} \in \xi$.

Тогда по предположению $y \notin \bigl[C_{\pi_0|M_0}\bigr]$. По лемме 1 представим множество $C_{\pi_0|M_0}$ в виде пересечения $C_{\pi'} \cap C_{\pi''}$. Отсюда $y \notin \bigl[C_{\pi'}\bigr]$ или $y \notin \bigl[C_{\pi''}\bigr]$. Без ограничения общности можно считать, что $y \notin \bigl[C_{\pi'}\bigr]$, поэтому $y \in \bigl[N \setminus C_{\pi'}\bigr]$. Множество $\bigl[N \setminus C_{\pi'}\bigr]$ — открыто-замкнутая окрестность точки y, поэтому оно центрировано с ξ. Из максимальности системы ξ и того, что $N \setminus C_{\pi'}$ — элемент системы $\mu_{\pi|M}$, получаем, что $N \setminus C_{\pi'} \in \xi$. Таким образом, $x \in [N \setminus C_{\pi'}]$, что противоречит $x \in [C_{\pi'}]$. Отсюда следует, что наше предположение $\bigl|\cap\{\, G^*\colon\ G \in \xi \,\}\bigr| > 1$ неверно. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть $\eta = \{G\}$ — максимальная $\pi|M$-центрированная система для некоторого множества $C_{\pi|M}$. Точку

$$x = \cap\{\, G^*\colon\ G \in \eta \,\}$$

будем называть $\ell_{\pi|M}$*-точкой для* $C_{\pi|M}$, а систему η — *порождающей точку* x.

Пусть $\pi \in T$, $M \subseteq \omega$. Положим $\pi(M) = \bigl\{\, \pi(n)\colon\ n \in M \,\bigr\} \subseteq N$. В силу теоремы 2 множество $[\pi(M)]$ гомеоморфно βN.

Лемма 2. *Пусть ξ — ультрафильтр на $\pi(M)$. Тогда найдется база $B_\xi = \{A\}$ ультрафильтра ξ такая, что для любого $A \in B_\xi$ найдется $\pi_A \in T$ такое, что множество*

$$G_A = \cup\{\, C_t\colon\ t \in A \,\}$$

представимо в виде

$$G_A = C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через (0) и (1) обозначим функции из N, определенные на одноточечном множестве $\{0\}$ и переводящие его в 0 и 1 соответственно.

Пусть $U \in \xi$. Докажем, что найдется $A \in \xi$ такое, что $A \subseteq U$ и G_A представимо в виде $C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}$. Через M_U обозначим множество тех n из M, для которых $\pi(n) \in U$. Либо $C_{(0)} \cap \pi(M)$, либо $C_{(1)} \cap \pi(M)$ не принадлежит ξ. Пусть $C_{(0)} \cap \pi(M) \notin \xi$.

Определим $A = U \setminus C_{(0)}$, а $\pi_A \in T$ построим следующим образом:

1) $\pi_A(0) = (0)$;

2) для $n \in M_U \cup (\omega \setminus M)$ пусть $\pi_A(n)$ — некоторое продолжение функции (0);

3) для $n \in M \setminus M_U$ положим $\pi_A(n) = \pi(n)$.

Тогда

$$G_A = C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}.$$

Из построения следует, что $A \in \xi$ и $A \subseteq U$. Семейство $B_\xi = \{A\}$ и есть искомая база.

Теорема 7. *Пусть множество $C_{\pi|M}$ приведенное и M счетно. Тогда*

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) = \bigl\{\, x\colon\ x - \ell_{\pi|M}\text{-}\textit{точка для } C_{\pi|M} \,\bigr\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in BN \setminus N - \ell_{\pi|M}$-точка для некоторого $C_{\pi|M}$. Тогда для любой окрестности O_x точки x имеем

$$\big|O_x \cap \pi(M)\big| = \omega.$$

Действительно, предположим, что существует окрестность $O_x = \big[\big(N \setminus \bigcup_{j \le n} C_{\pi_j}\big) \cap C_{\pi|M_i}\big]$, содержащая лишь конечное число точек множеств $\pi(M)$. Из вида окрестности O_x следует, что в этом случае O_x пересекает только конечное число множеств $C_{\pi(n)}$, где $n \in M$ и, следовательно, $x \in [C_{\pi(m)}]$ для некоторого $m \in M$. Но это противоречит тому, что $x \in \cap\big\{\,[C_{\pi|M_i}]\colon\ i \in \omega\,\big\}$.

Докажем теперь, что любая точка из $[\pi(M)]\setminus\pi(M)$ является $\ell_{\pi|M}$-точкой для $C_{\pi|M}$. По теореме 2 пространство $[\pi(M)]\setminus\pi(M)$ гомеоморфно $\beta N \setminus N$. Рассмотрим точку $x \in [\pi(M)]\setminus\pi(M)$. Она представима в виде ультрафильтра на $\pi(M)$. По лемме 2 найдется база этого ультрафильтра $B_x = \{A\}$ такая, что для любого $A \in B_x$ множество G_A имеет вид

$$G_A = \cup\big\{\,C_t\colon\ t \in A\,\big\} = C_{\pi|M} \setminus C_{\pi_A}.$$

Рассмотрим центрированную систему множеств

$$\big\{\,N \setminus C_{\pi_A}\colon\ A \in B_x\,\big\}.$$

Очевидно, что система $\big\{\,N \setminus C_{\pi_A}\colon\ A \in B_x\,\big\} \cup \theta_{\pi|M}$ центрированная и, следовательно, является $\pi|M$-центрированной. Дополним ее до максимальной $\pi|M$-центрированной системы $\eta = \{G\}$.

Покажем, что $\cap\big\{\,G^*\colon\ G \in \eta\,\big\} = x$. Предположим противное. Пусть $\cap\big\{\,G^*\colon\ G \in \eta\,\big\} = y$ и $x \ne y$. Но по первой части доказательства $y \in [\pi(M)]$ и, подобно x, точку y можно рассматривать как ультрафильтр на $\pi(M)$. Поскольку $x \ne y$, то существует $F \in y$ такое, что $\pi(M) \setminus F \in x$. Тогда найдется $A \in B_x$ такое, что $A \subseteq \pi(M) \setminus F$. С одной стороны, множество $N \setminus C_{\pi_A}$ содержится в η и, следовательно, $y \in [N \setminus C_{\pi_A}]$, а с другой стороны, оно не пересекает G_F, замыкание которого является окрестностью точки y. Противоречие. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 7. Для $\pi, \pi' \in T$ и $M, M' \subseteq \omega$ будем говорить, что $C_{\pi'|M'}$ *вписано в* $C_{\pi|M}$, если для каждого $n' \in M'$ найдется $n \in M$ такое, что $\pi(n) \leqslant \pi'(n')$ и $\pi(n) \ne \pi'(n')$ (далее это будем обозначать как $\pi(n) < \pi'(n')$).

Теорема 8. *Пусть множество $C_{\pi|M}$ приведенное и M счетно. Тогда*

$$\cap\big\{\,[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon\ C_{\pi'|M'} \text{ *вписано в* } C_{\pi|M}\,\big\} = [\pi(M)].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}] \supseteq [\pi(M)]$ для всех $C_{\pi'|M'}$, вписанных в $C_{\pi|M}$, отсюда следует, что

$$\cap\big\{\,[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon\ C_{\pi'|M'} \text{ вписано в } C_{\pi|M}\,\big\} \supseteq [\pi(M)].$$

Докажем теперь, что любая точка x из $D = \cap\big\{[C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon\ C_{\pi'|M'} \text{ вписано в } C_{\pi|M}\big\}$ также лежит в $[\pi(M)]$. Предположим противное. Тогда найдется $x \in D \setminus [\pi(M)]$. Пусть $O_x = [C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}} \setminus \bigcup_{i \le n} C_{\pi_i}]$ — окрестность точки x такая, что $O_x \cap \pi(M) = \varnothing$. Рассмотрим множество

$$\big(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}}\big) \setminus \bigcup_{i \leqslant n} C_{\pi_i}.$$

Элемент $s \in N$ лежит в этом множестве тогда и только тогда, когда существуют $n \in M$ и $\widetilde{n} \in \widetilde{M}$ такие, что $\pi(n) \leqslant s$ и $\widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \leqslant s$. Это означает, что $\pi(n)$ и $\widetilde{\pi}(\widetilde{n})$ сравнимы (т. е. либо $\widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \leqslant \pi(n)$, либо $\pi(n) < \widetilde{\pi}(\widetilde{n})$), а s, $\pi(n)$ и $\widetilde{\pi}(\widetilde{n})$ не принадлежат $\bigcup_{i \le n} C_{\pi_i}$. Но так как $O_x \cap \pi(M) = \varnothing$, то пар n, $\widetilde{n}$ таких, что $\widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \leqslant \pi(n)$ и $\pi(n), \widetilde{\pi}(\widetilde{n}) \notin \bigcup_{i \le n} C_{\pi_i}$ нет. Положим

$$M' = \big\{\,n'\colon\ n' \in \widetilde{M} \text{ и найдется } n \in M \text{ такое, что } \pi(n) < \widetilde{\pi}(n')\,\big\}.$$

Из вышесказанного вытекает равенство

$$\bigl(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}}\bigr) \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i} = \bigl(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|M'}\bigr) \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i},$$

и это множество является окрестностью точки x. В свою очередь,

$$\bigl(C_{\pi|M} \cap C_{\widetilde{\pi}|M'}\bigr) \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i} = C_{\widetilde{\pi}|M'} \setminus \bigcup_{i\leqslant n} C_{\pi_i} \subseteq C_{\widetilde{\pi}|M'}.$$

С одной стороны, $x \in [C_{\widetilde{\pi}|M'}]$, с другой — $C_{\widetilde{\pi}|M'}$ вписано в $C_{\pi|M}$ и, таким образом, $x \in [C_{\pi|M} \setminus C_{\widetilde{\pi}|M'}]$. Противоречие. Теорема доказана.

Из теорем 7 и 8 вытекает

Следствие 2. *Если множество $C_{\pi|M}$ приведенное и M счетно, то*

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) = \bigl\{\, x\colon\ x - \ell_{\pi|M}\text{-}\textit{точка для } C_{\pi|M} \,\bigr\}$$
$$= \cap\bigl\{\, [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon\ C_{\pi'|M'} \ \textit{вписано в } C_{\pi|M} \,\bigr\} \cap (BN \setminus N).$$

Из определения $\ell_{\pi|M}$-точки следует, что множество $\bigl\{\, x\colon\ x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \,\bigr\}$ есть подмножество множества $C^*_{\pi|M} = [C_{\pi|M}] \setminus C_{\pi|M}$. Ввиду теоремы 7 получаем

$$\bigl\{\, x\colon\ x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \,\bigr\} = [\pi(M)] \setminus \pi(M).$$

Множество $\pi(M) \cap C_{\pi(n)}$ состоит из одной точки $\pi(n)$ для всякого $n \in M$. Поэтому, если рассматривать эти множества и операцию замыкания в пространстве βN, имеем

$$[\pi(M)] \cap C^*_{\pi(n)} = \varnothing \text{ для всякого } n \in M,$$

следовательно, $[\pi(M)] \cap \bigl[\cup\bigl\{\, C^*_{\pi(n)}\colon\ n \in M \,\bigr\}\bigr] = \varnothing$.

В пространстве BN ситуация совершенно другая; здесь

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) \subseteq \bigl[\cup\bigl\{C^*_{\pi(n)}\colon\ n \in M\bigr\}\bigr],$$

что вытекает из следующих утверждений.

Лемма 3. *Пусть $x - \ell_{\pi|M}$-точка для некоторого $C_{\pi|M}$ и $C_{\pi'|M'}$ вписано в $C_{\pi|M}$. Тогда для всякой окрестности O_x точки x множество $\bigl\{\, n\colon\ O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'}) = \omega\bigr\}$ бесконечно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$O_x = \Bigl[C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}} \setminus \bigcup_{i\leqslant k} C_{\pi_i}\Bigr].$$

По теореме 7 $x \in [\pi(M)] \setminus \pi(M)$ и, соответственно, $O_x \cap \pi(M)$ бесконечно. Обозначим это бесконечное множество через

$$R = \bigl\{\, n \in M\colon\ \pi(n) \in O_x \,\bigr\}.$$

Докажем теперь, что для всякого $n \in R$ такого, что $n > k + 1$, где k взято из определения $O_x = \bigl[C_{\widetilde{\pi}|\widetilde{M}} \setminus \bigcup_{i\le k} C_{\pi_i}\bigr]$, множество $O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})$ бесконечно. Для этого построим по индукции бесконечную цепь $\{\, s_i\colon\ i \in \omega \,\}$, лежащую в пересечении

$$O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'}),$$

где $n \in R$ и $n > k + 1$.

Так как $n \in R$, то $\pi(n) \in O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})$. Пусть $s_0 = \pi(n)$ — база индукции. Предположим, что мы построили s_j. Построим теперь s_{j+1}.

Поскольку $n > k + 1$, то s_j имеет не менее $k + 2$ продолжений; это означает, что найдется продолжение s_{j+1}, не лежащее ни в C_{π_i} $(i \leqslant k)$, ни в $C_{\pi'|M'}$, а значит, лежащее в $O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})$. Таким образом, мы показали, что $O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})$ бесконечно.

Это выполнено для любого $n \in R$, $n > k + 1$, а множество R также бесконечно, поэтому множество $\bigl\{\, n\colon\ |O_x \cap (C_{\pi(n)} \setminus C_{\pi'|M'})| = \omega \,\bigr\}$ бесконечно. Лемма доказана.

Следствие 3. *Если множество $C_{\pi|M}$ приведенное и M счетно, то*

$$\left\{ x\colon\ x - \ell_{\pi|M}\text{-}\textit{точка для } C_{\pi|M} \right\} = \cap \left\{ \left[\cup \left\{ C^*_{\pi(n)} \setminus C^*_{\pi'|M'}\colon\ n \in M \right\} \right]\colon\ C_{\pi'|M'} \textit{ вписано в } C_{\pi|M} \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3 получаем

$$\left\{ x\colon\ x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \right\} \subseteq \cap \left\{ \left[\cup \left\{ C^*_{\pi(n)} \setminus C^*_{\pi'|M'}\colon\ n \in M \right\} \right]\colon\ C_{\pi'|M'} \text{ вписано в } C_{\pi|M} \right\}$$
$$\subseteq \cap \left\{ [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon\ C_{\pi'|M'} \text{ вписано в } C_{\pi|M} \right\}.$$

По следствию 2 имеем

$$\cap \left\{ [C_{\pi|M} \setminus C_{\pi'|M'}]\colon\ C_{\pi'|M'} \text{ вписано в } C_{\pi|M} \right\} = \left\{ x\colon\ x - \ell_{\pi|M}\text{-точка для } C_{\pi|M} \right\}.$$

Следствие доказано.

Из теоремы 7 и следствия 3 вытекает

Следствие 4.

$$[\pi(M)] \setminus \pi(M) \subseteq \left[\cup \left\{ C^*_{\pi(n)}\colon\ n \in M \right\} \right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bell M.G.** Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25.
2. **Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A.** On Bell's compactification of N // Topology Proceedings. 2010. Vol. 35. P. 177–185.
3. **Бастрыков Е. С.** О некоторых точках расширения Белла счетного дискретного пространства // Вест. Удмурт. ун-та. 2009. Т. 4. P. 3–6. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
4. **Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А.** О точках одного бикомпактного расширения N // Вест. Удмурт. ун-та. 2010. Т. 3. P. 10–17. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
5. **Энгелькинг Р.** Общая топология. Москва: Мир, 1986. 751 с.

Поступила 08.12.2010

Бастрыков Евгений Станиславович
аспирант, ассистент
Удмуртский государственный университет
e-mail: vporoshok@gmail.com

Грызлов Анатолий Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Удмуртский государственный университет
e-mail: gryzlov@udsu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРУППЕ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННОЙ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АБЕЛЕВЫХ 2-ГРУПП И $L_2(2^n)$[1]

А. А. Дуж, А. А. Шлепкин

Пусть $\Re$ — множество групп. Говорят, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$. Доказывается, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(2^k) \times I_n \mid n \in N\}$, где I_n — прямое произведение n экземпляров групп порядка 2 и k — фиксированное число, локально конечна.

Ключевые слова: Периодическая группа, группа Шункова, насыщенность.

A. A. Duzh, A. A. Shlepkin. On a periodic Shunkov group saturated by direct products of finite elementary abelian 2-groups and $L_2(2^n)$.

Let $\Re$ be a set of groups. A group G is said to be *saturated* by groups from $\Re$ if any finite subgroup from G is contained in a subgroup of G isomorphic to some group from $\Re$. It is proved that a periodic Shunkov group saturated by groups from the set $\Re = \{L_2(2^k) \times I_n \mid n \in N\}$, where I_n is the direct product of n copies of groups of order 2 and k is a fixed number, is locally finite.

Keywords: periodic group, Shunkov group, saturation.

Введение

Пусть I_n — прямое произведение n экземпляров группы порядка 2. В [3] изучались периодические группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями групп вида $L_2(5) \times I_n$. В настоящей работе продолжены исследования в этом направлении. Напомним, что группа G называется *группой Шункова*, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Пусть $\Re = \{L_2(q) \times I_n \mid n \in N\}$, где $q = 2^k$ — фиксированное число. Доказана следующая

Теорема 1. *Бесконечная периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества* $\Re = \{L_2(q) \times I_n \mid n \in N\}$, *где* $q = 2^k$ *— фиксированное число, локально конечна и изоморфна группе* $L_2(q) \times I$, *где* I *— бесконечная группа периода* 2.

Схема доказательства теоремы 1 проходит для исследования случая, когда группа Шункова не обязательно является периодической. А именно имеет место

Теорема 2. *Бесконечная группа Шункова, насыщенная группами из множества* $\Re$, *обладает периодической частью, которая изоморфна* $L_2(q) \times I$, *где* I *— бесконечная группа периода* 2.

1. Известные факты и вспомогательные утверждения

Предложение 1 [6, гл. II, § 8]. *Пусть* $G = L_2(q)$, *где* $q = 2^n > 2$ *и* P *— силовская* 2-*подгруппа группы* G. *Тогда*

1. P *— элементарная абелева* 2-*группа порядка* q.
2. $C_G(a) = P$ *для любой инволюции* $a \in P$.

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/3023) и РФФИ (проект 10-01-00509-а).

3. $N_G(P) = P \leftthreetimes H$ *— максимальная подгруппа в G, являющаяся группой Фробениуса с ядром P и циклическим дополнением H порядка $q-1$.*

4. $N_G(H)$ *— группа диэдра порядка $2(q-1)$.*

5. *Если K — подгруппа в G и K обладает нетривиальной нормальной подгруппой нечетного порядка, то $N_G(K)$ — группа диэдра порядка $2(q-1)$ или $2(q+1)$.*

Предложение 2 (теорема Шмидта [2]). *Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа.*

Предложение 3 [4]. *Периодическая группа, насыщенная группами из множества всех проективных специальных линейных групп размерности 2 над конечными полями, локально конечна и изоморфна группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Предложение 4 [5]. *В группе Шункова с бесконечным числом элементов конечного порядка существует бесконечная локально конечная подгруппа.*

Предложение 5 (теорема Шункова [5]). *Если в периодической группе G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены.*

Предложение 6 (теорема Каргаполова — Холла — Кулатилаки [1]). *Бесконечная локально конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой.*

Предложение 7 [5]. *Пусть G — группа Шункова, $H_1 < H_2 < \ldots < H_a < \ldots$ — цепочка ее нормальных подгрупп такая, что для любой подгруппы из этой цепочки фактор-группа G/H_a является группой Шункова и $H = \bigcup H_a$. Тогда G/H — группа Шункова.*

Предложение 8. *Пусть G — группа Шункова, a — элемент простого порядка из G, а x — инволюция из G. Тогда $\langle x, a\rangle$ — конечная группа.*

Доказательство. Из определения группы Шункова вытекает, что $\langle a, a^x\rangle$ — конечная группа. Ясно, что $x \in N_G(\langle a, a^x\rangle)$. Следовательно, $\langle a, a^x\rangle\langle x\rangle$ — конечная группа. Но $\langle x, a\rangle$ является подгруппой в $\langle a, a^x\rangle\langle x\rangle$, поэтому $\langle x, a\rangle$ — также конечная группа. Предложение доказано.

2. Доказательство теоремы 1

До конца раздела G означает бесконечную периодическую группу Шункова, насыщенную группами из множества $\Re$.

Лемма 1. *Любая силовская 2-подгруппа группы G есть бесконечная группа периода 2.*

Доказательство. Пусть x — произвольный 2-элемент группы G. По условию теоремы $x \in L \times I_n$, где $L \simeq L_2(q)$ и n — натуральное число. Следовательно, $|x| \leqslant 2$, поэтому любая силовская 2-подгруппа из G имеет период 2. Ввиду предложения 5 достаточно доказать, что в G существует бесконечная 2-подгруппа периода 2. По предложению 4 в G существует бесконечная локально конечная подгруппа, а значит, по предложению 6 существует бесконечная абелева подгруппа A. Как периодическая абелева группа группа A разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп, т. е. $A = A_2 \times A_{2'}$, где A_2 — силовская 2-подгруппа группы A, а $A_{2'}$ — прямое произведение силовских подгрупп нечетного периода группы G. По условию теоремы любая конечная подгруппа K нечетного порядка из G лежит в некоторой конечной подгруппе группы G, изоморфной $L_2(q)$, следовательно, $|K| \leqslant |L_2(q)|$. Отсюда в силу локальной конечности подгруппы $A_{2'}$ получаем, что $A_{2'}$ конечна, а значит, A_2 — бесконечная группа периода 2. Отсюда и из предложения 5 вытекает, что силовские 2-подгруппы группы G бесконечны. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $a \in G$ и $|a|$ — неединичный делитель числа $q-1$. Тогда*

$$N_G(\langle a\rangle) = (\langle d\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle) \times M,$$

где d — элемент порядка $q-1$, $a \in \langle d\rangle$, i — инволюция такая, что $d^i = d^{-1}$, M — абелева группа периода 2.

Доказательство. По условию насыщенности $\langle a\rangle \le L_1 \times I_{n_1} \le G$, где $L_1 \simeq L_2(q)$ и n_1 — натуральное число, следовательно, в L_1 по предложению 1 найдется подгруппа диэдра вида $\langle d\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle$, где $|d| = q-1$, $|i| = 2$ и $a \in \langle d\rangle$. Пусть b — элемент нечетного порядка из $N_G(\langle a\rangle)$. Группа $\langle a, b\rangle$ конечна и по условию теоремы содержится в подгруппе $L_2 \times I_{n_2}$ группы G, где $L_2 \simeq L_2(q)$ и n_2 — натуральное число. При этом $a, b \in L_2$ и $b \in N_{L_2}(\langle a\rangle)$, а значит, $b \in C_{L_2}(a)$ по предложению 1.

Возьмем теперь два элемента b_1, b_2 нечетного порядка из $N_G(\langle a\rangle)$. Предположим, что один из них, например, b_1 имеет простой порядок. Тогда подгруппа $\langle a, b_1, {b_1}^{b_2}\rangle$ содержится в подгруппе $L_3 \times I_{n_3}$ из G, где $L_3 \simeq L_2(q)$ и n_3 — натуральное число, и поэтому конечна. Ясно, что $a, b_1, {b_1}^{b_2} \in L_3$ и по предложению 1 элементы b_1 и ${b_1}^{b_2}$ перестановочны. Но тогда $\langle b_1\rangle = \langle {b_1}^{b_2}\rangle = \langle b_1\rangle^{b_2}$, т. е. $b_2 \in N_G(\langle b_1\rangle)$. По доказанному выше элементы b_2 и b_1 перестановочны. Используя индукцию по $|b_1|$ в случае, если $|b_1|$ — непростое число, также показываем, что $b_1 b_2 = b_2 b_1$. Таким образом, все элементы нечетного порядка из $N_G(\langle a\rangle)$ образуют абелеву подгруппу, очевидно, совпадающую с $\langle d\rangle$ и нормальную в $N_G(\langle a\rangle)$. Следовательно, фактор-группа $N_G(\langle a\rangle)/\langle d\rangle$ есть элементарная абелева 2-группа. Последнее означает, что $N_G(\langle a\rangle) = \langle d\rangle \leftthreetimes R$, где R — некоторая элементарная абелева 2-подгруппа из $N_G(\langle a\rangle)$. Без ограничения общности можно считать, что $i \in R$. Возьмем любую инволюцию $j \in R$. Тогда либо $d^j = d$, либо $d^j = d^{-1}$. Во втором случае инволюция $z = j \cdot i$ централизует d и $j = iz$, поэтому $R = \langle i\rangle \times M$, где $M = C_R(d$, а значит, $N_G(\langle a\rangle) = (\langle d\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle) \times M$. Лемма доказана.

Лемма 3. *В G существуют подгруппы S, K, C и элемент b такие, что*

1) *K — элементарная абелева группа порядка q, $|b| = q-1$ и $K \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа Фробениуса с ядром K и дополнением $\langle b\rangle$;*

2) *$C_G(K) = S$ — силовская 2-подгруппа группы G;*

3) *$S = K \times C$, где $C = C_S(b)$;*

4) *$N_G(K) = S \leftthreetimes \langle b\rangle = (K \leftthreetimes \langle b\rangle) \times C$;*

5) *$N_G(S) = N_G(K)$.*

Доказательство. 1) По условию насыщенности в G существует конечная подгруппа $L \simeq L_2(q)$. По предложению 1 в L существует элементарная абелева группа K порядка q и элемент b порядка $q-1$ такие, что $N_L(K) = K \leftthreetimes \langle b\rangle$ — группа Фробениуса с ядром K и дополнением $\langle b\rangle$. Зафиксируем подгруппу $K \leftthreetimes \langle b\rangle$.

2) Докажем, что $C_G(K)$ не содержит неединичных элементов нечетного порядка. Предположим противное, и пусть $a \in C_G(K)$, где $|a| > 1$ — нечетное число. Допустим сначала, что $\langle b^a\rangle = \langle b\rangle$. Тогда $a \in N_G(\langle b\rangle)$ и по лемме 2 имеем $a \in \langle b\rangle$. Противоречие с тем, что $a \in C_G(K)$. Итак, $\langle b^a\rangle \ne \langle b\rangle$. Так как $K^{b^a} = K^{a^{-1}ba} = ((K^{a^{-1}})^b)^a = K$, то $\langle b, b^a\rangle \le N_G(K)$ и $\langle K, b, b^a\rangle$ — конечная группа (доказывается индукцией по $|b|$). По условию теоремы $\langle K, b, b^a\rangle \le L_1 \times I_{n_1} \le G$, где $L_1 \simeq L_2(q)$ и n_1 — натуральное число. Поскольку все элементы нечетного порядка из $L_1 \times I_{n_1}$ лежат в L_1, то там лежат элементы вида kb для всех $k \in K$. Так как $|kb| = |b|$, то $K \le L$ и $b^a \in K \leftthreetimes \langle b\rangle$. Точно так же $b^{a^l} \in K \leftthreetimes \langle b\rangle$ для любого натурального числа l. Таким образом, $\langle K \leftthreetimes \langle b\rangle\ , a\rangle$ — конечная группа. По условию теоремы $\langle K \leftthreetimes \langle b\rangle, a\rangle \le L_2 \times I_{n_2} \le G$, где $L_2 \simeq L_2(q)$ и n_2 — натуральное число. Отсюда $\langle K \leftthreetimes \langle b\rangle, a\rangle \le L_2$ и, следовательно, $a \in C_{L_2}(K) = K$, что противоречит выбору a. Итак, $C_G(K)$ — 2-группа и, более того, по лемме 1 это силовская 2-подгруппа группы G. Положим $S = C_G(K)$.

3) Положим $C = C_G(b)$. Предположим, что $s \in S \setminus (K \times C)$. Тогда $\langle K, s, b\rangle$ — конечная группа и по условию теоремы $\langle K, s, b\rangle \le L_4 \times I_{n_4}$, где $L_4 \simeq L_2(q)$ и n_4 — натуральное число.

Следовательно, $s = kc$, где $k \in K$ и $c \in I_{n_4}$. Так как $K \leftthreetimes \langle b\rangle \leq L_4$, то $s \in K \times C$; противоречие с выбором s.

4) Непосредственно следует из пп. 2), 3).

5) Из п. 4) вытекает, что $N_G(K) \leq N_G(S)$. Докажем обратное включение $N_G(S) \leq N_G(K)$. Возьмем $y \in N_G(S)$. Ввиду п. 2) можно считать, что $|y|$ — нечетное число. Пусть b_1 — элемент простого порядка из $\langle b\rangle$. Тогда $\langle b_1, b_1^y\rangle$ — конечная подгруппа из $N_G(S)$. Следовательно, $S\langle b_1, b_1^y\rangle$ — локально конечная группа, а $\langle K, b_1, b_1^y\rangle$ — конечная группа. По условию теоремы $\langle K, b_1, b_1^y\rangle \leq L_5 \times I_{n_5} \leq G$, где $L_5 \simeq L_2(q)$ и n_5 — натуральное число. Так как все элементы нечетного порядка из $L_5 \times I_{n_5}$ лежат в L_5, в частности, и элементы вида kb_1, где $k \in K$, то $\langle K, b_1, b_1^y\rangle \leq L_5$. В силу того что K — силовская 2-подгруппа в L_5 и $b_1^y \in N_G(S)$, получаем, что $K \leftthreetimes \langle b_1\rangle = K \leftthreetimes \langle b_1^y\rangle$ и $\langle b_1\rangle^k = \langle b_1\rangle^y$ для некоторого $k \in K$, т. е. $\langle b_1\rangle = \langle b_1\rangle^{yk}$ и $yk \in N_G(\langle b_1\rangle)$. По лемме 2 $N_G(\langle b_1\rangle) = (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle) \times M$, где i — инволюция, $b^i = b^{-1}$, а M — абелева группа периода 2. Если $|yk|$ — нечетное число, то $yk \in \langle b\rangle$, $y \in K \leftthreetimes \langle b\rangle$, а значит, $y \in N_G(K)$. Пусть $|yk|$ — четное число. Если $|yk| = 2$, то yk — инволюция из $N_G(S)$. Поскольку S — силовская 2-подгруппа, то $yk \in S$, а значит, $y \in S$, так как $k \in S$. Получили противоречие с выбором y. Итак, $|yk| > 2$. Тогда $\langle yk\rangle = \langle d_1\rangle \times \langle l\rangle$, где d_1 — элемент нечетного порядка, а l — инволюция. Поскольку $yk \in N_G(\langle b\rangle)$, $d_1 \in \langle b\rangle$ и $l \in M$, т. е. $yk = b^\alpha l$ для некоторого целого числа α. Но $yk \in N_G(S)$ и $b^\alpha \in N_G(S)$, значит, $l = (yk)b^{-\alpha} \in N_G(S)$. Так как S — силовская 2-подгруппа группы G, то $l \in S$, а значит, $l \in N_G(K)$. Поскольку $b \in N_G(K)$, $yk \in N_G(K)$ и, следовательно, $y \in N_G(K)$. Лемма доказана.

Зафиксируем S, K, C и b из леммы 3.

Лемма 4. *В G существует подгруппа $L \simeq L_2(q)$ такая, что*

1) $K \leftthreetimes \langle b\rangle$ *содержится в* L*;*

2) $L \leq C_G(C)$*;*

3) $LC = L \times C$.

Доказательство. 1) По условию насыщенности $K \leftthreetimes \langle b\rangle \leq L \times I_n \leq G$, где $L \simeq L_2(q)$ и n — натуральное число. Как показано выше, $K \leftthreetimes \langle b\rangle \leq L$.

2) Возьмем в L инволюцию y такую, что $b^y = b^{-1}$ (по предложению 1 такая инволюция существует). По лемме 2 $N_G(\langle b\rangle) = (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle y\rangle) \times M$, где M — единственная силовская 2-подгруппа в $C_G(b)$. Так как $C \leq M$, то $y \in C_G(C)$. Но $K \leftthreetimes \langle b\rangle \leq C_G(C)$, следовательно, $\langle K, b, y\rangle = L \leq C_G(C)$.

3) Поскольку в L нет инволюций, централизующих элемент b, то $L \cap C = 1$, а значит, $LC = L \times C$. Лемма доказана.

Зафиксируем подгруппу L из леммы 4.

Лемма 5. $C_G(C) = L \times C$.

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $\overline{C_G(C)} = C_G(C)/C$. Покажем, что $\overline{C_G(C)} = \overline{L}$. Рассмотрим два случая.

1. $\overline{C_G(C)}$ — конечная группа. Поскольку C — подгруппа группы S, а S — элементарная абелева 2-группа, то $C_G(C)$ — локально конечная группа по предложению 2, а значит, для группы $\overline{C_G(C)}$ существует конечный прообраз U в $C_G(C)$. По условию насыщенности $U \leq L_1 \times I_{n_1} \leq G$, где $L_1 \simeq L_2(q)$ и n_1 — натуральное число. Так как $L \leq C_G(C)$, то $L_1 = L$ и $I_{n_1} \leq C$ (лемма 3). Следовательно, $U < LC$ и $C_G(C) = UC = LC = L \times C$ (лемма 4).

2. $\overline{C_G(C)}$ — бесконечная группа. По предложениям 4 и 7 в $\overline{C_G(C)}$ существует бесконечная локально конечная подгруппа, а значит, по предложению 6 существует бесконечная абелева подгруппа $\overline{A}$. Как периодическая абелева группа группа $\overline{A}$ разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп, т.е. $\overline{A} = \overline{A}_2 \times \overline{A}_{2'}$, где $\overline{A}_2$ — силовская 2-подгруппа группы $\overline{A}$, а $\overline{A}_{2'}$ — прямое произведение силовских $2'$-подгрупп. Предположим, что $\overline{A}_2$ — бесконечная группа. Тогда ее полный прообраз A_2 в $C_G(C)$ — бесконечная элементарная абелева 2-группа, а индекс $|A_2 : C|$ бесконечен. В силу предложения 5 можно считать, что K содержится в A_2.

Последнее противоречит тому, что $K \times C$ — силовская 2-подгруппа группы G. Таким образом, $|\overline{A_2}| \leqslant |K|$. Тогда бесконечной является группа $\overline{A}_{2'}$. Возьмем в $\overline{A}_{2'}$ конечную подгруппу $\overline{U}$ такую, что $|\overline{U}| > |L|$. В силу предложения 2 для $\overline{U}$ существует конечный прообраз U в $C_G(C)$. Можно считать, что U — абелева группа нечетного порядка. По условию насыщенности $U \leq L_2 \times I_{n_2} \leq G$, где $L_2 \simeq L_2(q)$ и n_2 — натуральное число. Так как U — подгруппа нечетного порядка, то $U \leq L_2$. Следовательно, $|\overline{U}| \leqslant |L|$, что противоречит выбору $\overline{U}$. Лемма доказана.

Лемма 6. $G = L \times C$.

Доказательство. Предположим противное. В этом случае найдется инволюция $x \in G \setminus (L \times C)$. Действительно, если это не так, то все инволюции из G лежат в группе $L \times C$. Тогда $L \times C$ — характеристическая подгруппа в G как подгруппа, порожденная всеми инволюциями группы G. Следовательно, в силу характеристичности C в $L \times C$ C — также характеристическая подгруппа группы G. По предложению 7 $\overline{G} = G/C$ — группа Шункова, насыщенная множеством, состоящим из одной группы $L_2(q)$. По предложению 4 $\overline{G} \simeq L_2(q)$, а значит, $G = L \times C$, и в этом случае лемма доказана. По предложению 8 подгруппа $\langle x, a\rangle$, где a — элемент простого порядка из $\langle b\rangle$, конечна. По условию теоремы $\langle x, a\rangle \leq L_1 \times I_{n_1} \leq G$, где $L_1 \simeq L_2(q)$ и n_1 — натуральное число. Отсюда $b \in L_1$ и $I_{n_1} \leq C_G(b)$.

Далее, в L_1 существует подгруппа K_1 такая, что $b \in N_G(K_1)$ и $|K_1| = |K|$. Рассуждая как при доказательстве леммы 3, получим, что

$$N_G(K_1) = C_G(K_1) \leftthreetimes \langle b\rangle = (K_1 \leftthreetimes \langle b\rangle) \times C_1,$$

где $K_1 \times C_1 = S_1$ — некоторая силовская 2-подгруппа в G и $C_1 = C_{S_1}(b)$.

По предложению 1 $\langle K_1, b, y\rangle = L_1$, где i — инволюция, инвертирующая b. По лемме 2 $N_G(b) = (\langle b\rangle \leftthreetimes \langle i\rangle) \times M$, где M — элементарная абелева 2-группа. Поскольку $C_1 \leq O_2(C_G(b)) = M$, $L_1 \leq C_G(C_1)$. $|M : C| \leqslant |K|$ и $|M : C_1| \leqslant |K_1|$ для подгруппы $W = C \cap C_1$, поэтому силовская 2-подгруппа фактор-группы $C_G(W)/W$ конечна.

По предложению 7 фактор-группа $C_G(W)/W$ есть группа Шункова, следовательно, она конечна и изоморфна группе $L_2(q)$ по предложению 3 (рассуждаем точно так же, как в доказательстве п. 2 леммы 5). Но тогда по предложению 2 $C_G(W)$ — локально конечная группа, которая, очевидно, содержит L_1 и L. Рассмотрим конечную подгруппу $\langle L, L_1\rangle$. По условию теоремы $\langle L, L_1\rangle \leq L_2 \times I_{n_2} \leq G$, где $L_2 \simeq L_2(q)$ и n_2 — натуральное число. Следовательно, $L = L_1 = L_2$, $C = C_1 = W$, $I_{n_2} \leq C$ и $x \in L \times C$, что противоречит выбору x. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Каргаполов М.И.** О проблеме О.Ю. Шмидта // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 1. С. 232–235.
2. **Курош А.Г.** Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
3. **Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А.** О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы $L_2(5)$ // Вест. НГУ. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 88–92. (Математика, механика, информатика.)
4. **Рубашкин А.Г., Филиппов К.А.** О периодических группах, насыщенных $L_2(p^n)$ // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1388–1392.
5. **Шлепкин А.К.** Группы Шункова с дополнительными ограничениями: дис. … д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 1998. 130 с.
6. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 794 S.

Поступила 09.03.2011

Дуж Анна Александровна
аспирант
Красноярский государственный аграрный ун-т
e-mail: anyaduzh@yandex.ru

Шлепкин Алексей Анатольевич
студент
Сибирский федеральный ун-т
e-mail: shlyopkin@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НЕЗАВИСИМЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. Х. Журтов, А. А. Цирхов

Описаны конечные группы, все абелевы подгруппы которых независимы. Подгруппа H группы G называется независимой, если $N_G(U) \leqslant N_G(H)$ для любой нетривиальной подгруппы U из H.

Ключевые слова: конечная группа, независимая подгруппа, нормализаторная вложимость.

A. Kh. Zhurtov, A. A. Tsirkhov. Finite groups with independent abelian subgroups.

We describe finite groups all of whose abelian subgroups are independent. A subgroup H of a group G is called independent if $N_G(U) \leqslant N_G(H)$ for any nontrivial subgroup U of H.

Keywords: finite group, independent subgroup, normalizer embeddability.

Введение

Подгруппа H группы G называется (*нормально*) *независимой* (в G) подгруппой, если $N_G(U) \leqslant N_G(H)$ для любой нетривиальной (нормальной) подгруппы U из H.

В [1] авторами доказано, что любая конечная группа, в которой независимы все неабелевы подгруппы, метагальмитонова, т. е. в ней все неабелевы подгруппы нормальны. Ранее Л. И. Шидов [2] описал конечные группы, в которых нормально независимы все нильпотентные подгруппы. Обобщением этого результата служит следующая

Теорема. *Пусть в конечной неабелевой группе G любая абелева подгруппа независима. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(1) *G двуступенно нильпотентна и G' имеет простой порядок*;

(2) *G — группа Фробениуса с нильпотентным дополнением*;

(3) *G изоморфна S_4, A_6, $L_2(7)$ или $L_2(2^m)$ для некоторого натурального числа $m \geqslant 2$.*

1. Предварительные сведения

На протяжении всей работы рассматриваются только конечные группы. Если G — группа, то $Z(G)$, G', $\Phi(G)$ и $F(G)$ обозначают соответственно ее центр, коммутант, подгруппу Фраттини (пересечение всех максимальных подгрупп) и подгруппу Фиттинга (наибольшую нильпотентную нормальную подгруппу). Если x и y — элементы, а H и K — подмножества группы, то $\langle H\rangle$ — подгруппа, порожденная H,

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y, \quad [H,x] = \langle [h,x] \mid h \in H\rangle, \quad [H,K] = \langle [h,k] \mid h \in H, k \in K\rangle.$$

Гамильтоновой группой называется неабелева группа, все подгруппы которой нормальны. *Группой Фробениуса* называется полупрямое произведение $F = KC$, где $1 \neq K \trianglelefteq F$, $C \neq 1$ и $C_K(c) \leqslant C$ для любого нетривиального элемента $c \in C$.

Лемма 1 [3, теорема 12.5.4]. *Если G — гамильтонова группа, то $G = Q \times V \times R$, где Q изоморфна группе кватернионов Q_8, V — элементарная абелева 2-группа и R — абелева группа нечетного порядка.*

Лемма 2 [3, теорема 12.5.1]. *Конечная неабелева 2-группа, имеющая циклическую максимальную подгруппу, изоморфна одной из следующих групп*: $\langle a,\ b \mid a^{2^{m+1}} = b^2 = 1,\ a^b = a^{1+2^m}\rangle$, $\langle a,\ b \mid a^{2^m} = b^2,\ b^4 = 1,\ a^b = a^{-1}\rangle$, $\langle a,\ b \mid a^{2^{m+1}} = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1}\rangle$ *или* $\langle a,\ b \mid a^{2^{m+1}} = b^2 = 1,\ a^b = a^{-1+2^m}\rangle$, *где* m *— натуральное число.*

Лемма 3 [3, теорема 12.2.2]. *Пусть* P *— нормальная* p*-подгруппа группы* G *для простого числа* p*. Если* x *—* p'*-элемент группы* G*, для которого* $[P, x] \leqslant \Phi(P)$*, то* x *централизует* P*.*

Лемма 4 [4]. *Пусть* G *— конечная группа четного порядка, в которой централизатор любой инволюции нильпотентен. Если* $F(G) = 1$*, то* G *обладает нормальной подгруппой нечетного индекса, изоморфной одной из групп* A_6*,* M_{10}*,* $L_2(p)$*, где* $p = 2^m \pm 1 > 3$ *— простое число,* $L_2(q)$*,* $Sz(q)$*,* $U_3(q)$*,* $L_3(q)$*, где* $q = 2^m > 2$*.*

Лемма 5 [5]. *Группы нечетного порядка разрешимы.*

Лемма 6 [6, теорема 3.2]. *Автоморфизм группы* $G = L_2(2^m)$*,* $m \geqslant 2$*, централизирующий ее силовскую* 2*-подгруппу, является внутренним.*

Лемма 7 [7, теоремы V.8.7, V.8.18]. *Пусть* G *— группа Фробениуса с ядром* F *и дополнением* H*. Тогда ядро* F *нильпотентно и* $Z(H) \neq 1$*.*

Лемма 8 [7, теорема II.8.27]. *Пусть* p *— простое число и* K *— подгруппа из* $GL(2, p)$*, в которой силовская* p*-подгруппа не является нормальной. Тогда* $K \geqslant SL(2, p)$*.*

2. Доказательство теоремы

Пусть G — неабелева группа, в которой любая абелева подгруппа независима. Понятно, что и в любой подгруппе группы G абелевы подгруппы независимы.

Лемма 9. *Если* $H \leqslant G$ *и* $1 \neq Z(H) \neq H$*, то* H *нильпотентна и* H' *имеет простой порядок.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть z — элемент простого порядка p в $Z(H)$, $Z = \langle z\rangle$ и $a \in H\setminus Z$. Тогда $A = \langle a, z\rangle$ — абелева подгруппа и по условию независимости $H = N_H(Z) \leqslant N_H(A)$, откуда A нормальна в H. Таким образом, в H/Z любая циклическая подгруппа нормальна и, следовательно, нормальна любая подгруппа. По лемме 1 подгруппа H нильпотентна, т. е. является прямым произведением своих силовских подгрупп.

Если группа H/Z абелева, то заключение леммы верно. Поэтому ввиду леммы 1 можно считать, что силовские 2-подгруппы в H и H/Z неабелевы и $|z| = 2$.

Предположим, что H не является 2-группой. Пусть y — элемент простого нечетного порядка из $Z(H)$. По доказанному выше $H/\langle y\rangle$ — гамильтонова группа, поэтому силовская 2-группа из H изоморфна прямому произведению группы кватернионов на элементарную абелеву группу. Кроме того, любая силовская подгруппа нечетного порядка из H изоморфна силовской подгруппе из H/Z и поэтому абелева. Таким образом, H — гамильтонова группа и заключение леммы справедливо.

Итак, можно считать, что H является 2-группой.

По лемме 1 группа H/Z является прямым произведением группы $\overline{Q}$, изоморфной Q_8, на элементарную абелеву 2-группу. Если все инволюции из H лежат в $Z(H)$, то любая неединичная циклическая подгруппа из H нетривиально пересекается с $Z(H)$ и, значит, нормальна в H. В этом случае H гамильтонова и заключение леммы справедливо. Поэтому можно считать, что H содержит инволюцию u, не лежащую в $Z(H)$. Так как H/Z гамильтонова, то $[u, H] = Z$. Пусть vZ — инволюция из $\overline{Q}$. Если $|v| = 4$, то полный прообраз Q подгруппы $\overline{Q}$ в H обладает циклической максимальной подгруппой, что противоречит лемме 2. Поэтому $v^2 = 1$.

Далее, если $y \cdot Z$ — элемент порядка 4 из H/Z, то $y^2 = v$ или vz и в любом случае инволюция v перестановочна с y. Так как H порождается элементами порядка 4, то $v \in Z(H)$ и поэтому подгруппа $\langle v, u\rangle$ нормальна в H. С другой стороны, $[u, H] = Z \nleqslant \langle v, u\rangle$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Предположим, что теорема неверна, и обозначим через G минимальный контрпример к теореме. Пусть $F = F(G)$.

Лемма 10. $F \neq G$.

Доказательство. В противном случае $Z(G) \neq 1$ и по лемме 9 группа G удовлетворяет п. (1) теоремы. Лемма доказана.

Лемма 11. $F \neq 1$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда G неразрешима и по лемме 5 содержит инволюции. По лемме 9 централизатор любой инволюции из G нильпотентен, и поэтому G удовлетворяет условиям леммы 4.

Если S — силовская 2-подгруппа из G, то лемма 9 влечет $|S'| \leq 2$ и, следовательно, по лемме 4 G обладает нормальной подгруппой H нечетного индекса, изоморфной A_6, $L_2(7)$ или $L_2(2^m)$ для некоторого $m > 2$ (силовские 2-подгруппы других групп из заключения леммы 4 имеют коммутант порядка, большего 2). Ввиду леммы 9 имеем $C_G(H) = 1$. Так как $Out(A_6))$ и $Out(L_2(7))$ являются 2-группами, то $H \cong L_2(2^m)$. Так как в группе H все инволюции сопряжены, то $G = HC_G(a)$ для инволюции $a \in H$. Но централизатор $C_G(a)$ нильпотентен, поэтому $G = HC_G(S)$ для силовской 2-подгруппы S из H. Поскольку любой автоморфизм группы H, централизующий ее силовскую 2-подгруппу, является внутренним (см. лемма 6), то $H = G$ и G удовлетворяет условию (3) заключения теоремы вопреки предположению. Лемма доказана.

Лемма 12. F *абелева.*

Доказательство. Предположим противное. Из леммы 9 получаем $F' = \langle z\rangle$ для элемента z простого порядка и $C_G(z) = F$. Пусть x — элемент из $G \setminus F$. Тогда $z^x \neq z$, поэтому $[z, x]$ — нетривиальный элемент в $\langle z\rangle$ и, следовательно, $[z, x]$ порождает $\langle z\rangle$.

Предположим, что $C_F(x) \neq 1$, f — нетривиальный элемент в $C_F(x)$ и $K = \langle f, x\rangle$. Тогда K — абелева группа и, следовательно, $z \notin K$. Но $z \in C_G(f)$, поэтому $z \in N_G(K)$. В частности, $[z, x] \in K$, откуда $z \in K$; противоречие. Итак, $C_G(f) \leq F$ для любого нетривиального $f \in F$, и поэтому G — группа Фробениуса с ядром F. Если H — дополнение к F в G, то $Z(H) \neq 1$ по лемме 7, откуда по лемме 9 подгруппа H нильпотентна. Таким образом, G удовлетворяет п. (2) теоремы, что противоречит выбору G. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. По лемме 12 подгруппа F абелева.

Если $C_G(f) = F$ для любого нетривиального $f \in F$, то G — группа Фробениуса и дополнение к F нильпотентно по леммам 7 и 9, т. е. G удовлетворяет п. (2) теоремы.

Поэтому существует $1 \neq f \in F$, для которого $C_G(f) \nleqslant F$. Можно считать, что f — элемент простого порядка. Пусть x — p-элемент из $C_G(f) \setminus F$ для некоторого простого числа p. Так как $C_G(f)$ — нильпотентная группа, содержащая F, то x централизует $O_{p'}(F)$.

Если $(O_{p'}(F)) \neq 1$, то по лемме 9 $C_G(O_{p'}(F))$ — нильпотентная нормальная подгруппа в G, откуда $x \in C_G(O_{p'}(F)) = F$, что противоречит выбору x. Поэтому $O_{p'}(F) = 1$ и F — p-группа.

Пусть $C = \{\, y \in G \mid [F, y] \leqslant \Phi(F)\}$. По лемме 3 любой p'-элемент из C централизует F, поэтому C является p-группой. Так как $C \trianglelefteq G$ и $F \leqslant C$, то $F = C$. В частности, $[F, x] \nleqslant \Phi(F)$. Поскольку $F\langle x\rangle$ является неабелевой p-группой, ввиду леммы 9 имеем $|[F, x]| = p$, поэтому $[\Phi(F), x] = 1$. Если $\Phi(F) \neq 1$, то лемма 9 влечет $C_G(\Phi(F)) = F$, что противоречит выбору x. Поэтому $\Phi(F) = 1$, т. е. F — элементарная абелева p-группа.

Пусть $P = \langle F, x\rangle$. Тогда P неабелева и по лемме 9 $|P'| = p$. Если все элементы порядка p из P лежат в $Z(P)$, то P — гамильтонова группа и, следовательно, по лемме 1 подгруппа P

изоморфна прямому произведению группы кватернионов порядка 8 на элементарную 2-группу, в котором нет элементарной абелевой максимальной подгруппы. Поэтому можно считать, что элемент x имеет порядок p.

Предположим, что $|F| \geqslant p^3$. Поскольку $|P'| = p$, в $F \setminus P'$ существует элемент y, централизирующий x. Тогда $\langle x, y\rangle$ — абелева подгруппа, не нормальная в P, но $N_P(\langle y\rangle) = P$, что противоречит независимости подгруппы $\langle x, y\rangle$.

Итак, $|F| \leqslant p^2$. Случай $|F| = p$ невозможен, поэтому F — элементарная абелева группа порядка p^2 и, следовательно, группа G/F изоморфна подгруппе из $GL(2, p)$. Так как силовская p-подгруппа в G/F не нормальна, то по лемме 8 группа G/F содержит подгруппу, изоморфную $SL(2, p)$. Если $p = 2$, то $G/F \cong SL(2, 2) = GL(2, 2) \cong S_3$, откуда $G \cong S_4$, т. е. G удовлетворяет п. (3) теоремы.

Поэтому $p > 2$ и в G есть инволюция t такая, что централизатор $C_G(t)$ не нильпотентен. Но это противоречит тому, что по лемме 9 подгруппа $C_G(t)$ нильпотентна.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Журтов А.Х., Цирхов А.А**. О конечных группах с независимыми подгруппами // Владикавказ. мат. журн. 2010. Т. 12, № 4. С. 15–20.
2. **Шидов Л.И**. О конечных группах с нормализаторным условием // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 6. С. 141–145.
3. **Холл М**. Теория групп. М.: ИЛ, 1982. 468 с.
4. **Suzuki M**. Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2- closed // Ann. Math. 1965. Vol. 82, no. 2. P. 191–212.
5. **Feit W., Thompson J.G.** Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math. 1963. Vol. 13, no. 4. P. 755–1029.
6. **Wilson R.A.** The finite simple groups. London: Springer, 2009. 298 p.
7. **Huppert B**. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1979. 796 S.

Журтов Арчил Хазешович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Кабардино-Балкарский государственный университет
e-mail: zhurtov_a@mail.ru

Поступила 16.06.2011

Цирхов Аубекир
ассистент
Кабардино-Балкарский государственный университет
e-mail: tsirhov_a@mail.ru

Том 17 № 4 2011

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУПП В ГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЛИЕВА ТИПА[1]

В. И. Зенков

Показано, что в конечной группе с цоколем, изоморфным простой группе исключительного лиева типа над полем нечетного порядка, большего трех, число силовских 2-подгрупп, которые пересекаются с фиксированной силовской 2-подгруппой по единичной подгруппе, не менее чем в три раза превосходит порядок этой силовской 2-подгруппы.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа исключительного лиева типа, силовская 2-подгруппа, пересечение подгрупп.

V. I. Zenkov. On intersections of Sylow 2-subgroups in automorphism groups of finite simple groups of exceptional Lie type.

It is shown that, in a finite group with socle isomorphic to a simple group of exceptional Lie type over a field of an odd order greater than 3, the number of Sylow 2-subgroups whose intersection with a fixed Sylow 2-subgroup is trivial exceeds by a factor of at least 3 the order of this Sylow 2-subgroup.

Keywords: finite group, simple group of exceptional Lie type, Sylow 2-subgroup, intersection of subgroups.

Введение

Следующие два результата обосновывают появление настоящей работы.

В работе [2] было показано, что для любой конечной простой неабелевой группе G, любого простого числа p и силовской p-подгруппы S из G найдется элемент $g \in G$ такой, что $S \cap S^g = 1$.

В [3, следствие теоремы C] было доказано, что для любой конечной группы G и любого простого числа p для силовской p-подгруппы S группы G выполнено равенство $S \cap S^x \cap S^y = O_p(G)$ для некоторых элементов x и y из G.

Для группы $G \simeq \mathrm{Aut}\,(L_2(7))$ и $p = 2$ для силовской 2-подгруппы S из G имеем $S \cap S^g \neq 1$ для любого элемента $g \in G$. Заметим, что $|\mathrm{Out}\,(L_2(7))| = 2$ (см. [1, с. 3]). Этот пример показывает, что в равенстве $S \cap S^x \cap S^y = O_p(G)$ нельзя опустить из пересечения ни S, ни S^x, ни S^y.

Всюду далее K — конечная простая неабелева группа, $\mathrm{Inn}(K) \leq G \leq \mathrm{Aut}(K)$ и p — простое число.

Для силовской p-подгруппы S из G положим $X(G,S) := \{S^g \mid g \in G,\ S^g \cap S = 1\}$. Если $X(G,S) \neq \varnothing$, то подгруппа S действует на множестве $X(G,S)$ сопряжениями, разбивая $X(G,S)$ на орбиты длины $|S|$. Действительно, если $S^g \in X(G,S)$, то $|N_S(S^g)| = 1$, иначе некоторый неединичный элемент s из S лежит в $N_G(S^g)$ и, следовательно, в $S \cap S^g$, что противоречиво. Число $|X(G,S)|/|S|$ этих орбит будем обозначать через $\mathrm{orb}_p(G)$. Полагаем $\mathrm{orb}_p\,(G) = 0$ в случае, когда $X(G,S) = \varnothing$, т. е. когда $S \cap S^g \neq 1$ для любого элемента g из G. Возникает

Вопрос. *Каковы тройки* (K, G, p), *для которых* $\mathrm{orb}_p(G) = 0$?

При изучении поставленного выше вопроса используется классификация конечных простых групп, согласно которой любая простая неабелева группа изоморфна либо спорадической

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

простой группе, либо простой знакопеременной группе, либо простой группе лиева типа (см. [4, табл. 2.4]).

Для спорадических и знакопеременных групп K исчерпывающий ответ на поставленный выше вопрос о тройках (K, G, p) получен в [3, леммы 3.27–3.42], и он таков: K изоморфна A_6 или A_8 и $p = 2$, причем в обоих случаях $G = \mathrm{Aut}\,(K)$. Заметим, что $|\mathrm{Out}\,(A_6)| = 4$ и в группе $\mathrm{Aut}\,(A_6)$ имеется три максимальные подгруппы M_1, M_2 и M_3 индекса 2 с цоколем, изоморфным A_6. Однако для каждой из этих максимальных подгрупп M_i имеем $(S \cap M_i) \cap (S \cap M_i)^{m_i} = 1$ для $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и некоторого элемента $m_i \in M_i$ [3, лемма 3.27].

Пусть теперь K — группа лиева типа над конечным полем F. Тогда по [3, теорема B(2)] либо $p = 2$, либо $p = 3$, $K \simeq \Omega_8^+(3)$ и $G = \mathrm{Inn}\,(K)\langle g\rangle$ или $G = \mathrm{Inn}\,(K)\langle g, t\rangle$, где $\langle g\rangle \simeq Z_3$ и $\langle g, t\rangle \simeq S_3$ — подгруппы графовых автоморфизмов группы K.

Остается рассмотреть случай $p = 2$. Пусть r — характеристика поля F. Случай, когда $r = 2$, полностью изучен в [3, § 5]. Случай, когда $r \neq 2$, сведен в [3, теорема B] к подслучаям, в которых порядок поля F равен соответственно 3, 9 или простому числу Ферма или Мерсенна. Так как конечные простые неабелевы группы лиева типа подразделяются на классические группы и исключительные группы лиева типа, то и исследование поставленного вопроса естественно разбить на две части согласно этому общему разбиению. Настоящая работа относится к случаю, когда K — группа исключительного лиева типа, т. е.

$$K \simeq {}^2G_2(q), G_2(q),\ {}^3D_4(q),\ F_4(q),\ {}^2E_6(q),\ E_6(q),\ E_7(q) \text{ или } E_8(q), \text{ где } q \text{ нечетно и } q > 3.$$

Доказана

Теорема. *Пусть K — конечная простая неабелева группа исключительного лиева типа над полем нечетного порядка q, большего трех,* $\mathrm{Inn}\,(K) \leq G \leq \mathrm{Aut}\,(K)$. *Тогда* $\mathrm{orb}_2(G) \geq 3$.

Доказательство теоремы состоит из серии лемм, последовательно разбирающих все случаи групп исключительного лиева типа, указанных перед теоремой.

Будем придерживаться в основном обозначений из [1], $A * B$ означает центральное произведение групп A и B.

1. Основная лемма

Здесь мы докажем лемму, которая играет в нашем доказательстве основную роль. Она дает оценку снизу числа $\mathrm{orb}_2(G)$.

Лемма 1. *Пусть K — конечная простая неабелева группа,* $\mathrm{Inn}\,(K) \leq G \leq \mathrm{Aut}\,(K)$, *$S$ — силовская 2-подгруппа из группы G, $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — представители всех классов сопряженных инволюций в G и $C = \max\{|C_G(i_1)|, |C_G(i_2)|, \ldots, |C_G(i_n)|\}$. Тогда*

$$\mathrm{orb}_2\,(G) > \left(\frac{|G|}{|N_G(S)|} - \sum_{k=1}^{n} \left|i_k^G \cap S\right|^2 \frac{|C_G(i_k)|}{|N_G(S)|}\right) \Big/ |S| > \frac{1}{|S||N_G(S)|}(|G| - |S|^2 C).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Силова $|\mathrm{Syl}_2(G)| = |G|/|N_G(S)|$. Множество $X(G, S) = \{S^g \mid g \in G,\ S^g \cap S = 1\}$ можно получить удалением из $\mathrm{Syl}_2(G)$ тех силовских 2-подгрупп, которые пересекаются с подгруппой S нетривиально. Если $S \cap S^h \neq 1$, то $S \cap S^h$ содержит некоторую инволюцию. Согласно [5, предложение 31] число m_k силовских 2-подгрупп из G, содержащих инволюцию i_k, равно $|i_k^G \cap S||C_G(i_k)|/|N_G(S)|$. Так как $|i_k^G \cap S| > 1$, то для числа n_k силовских 2-подгрупп из G, содержащих некоторую инволюцию из множества $i_k^G \cap S$, имеем $n_k < |i_k^G \cap S| m_k = |i_k^G \cap S|^2 |C_G(i_k)|/|N_G(S)|$. Поэтому число силовских 2-подгрупп из G, которые пересекаются с подгруппой S нетривиально, меньше, чем $\sum_{k=1}^{n} |i_k^G \cap S|^2 |C_G(i_k)|/|N_G(S)|$.

Заметим, что при этом подгруппа S была учтена $|i_k^G \cap S|$ раз. Теперь, просуммировав это выражение по k, имеем не более $\sum_{k=1}^{n} |i_k^G \cap S|^2 |C_G(i_k)|/|N_G(S)|$.

Значит, существует больше, чем $|\mathrm{Syl}_2(G)| - \sum_{k=1}^{n} |i_k^G \cap S|^2 |C_G(i_k)|/|N_G(S)|$, силовских 2-подгрупп из G, которые пересекаются с подгруппой S тривиально, т. е.

$$|X(G,S)| > |\mathrm{Syl}_2(G)| - \sum_{k=1}^{n} |i_k^G \cap S|^2 |C_G(i_k)|/|N_G(S)|.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{orb}_2(G) = \frac{|X(G,S)|}{|S|} &> \frac{1}{|S|}\left(\frac{|G|}{|N_G(S)|} - \sum_{k=1}^{n} |i_k^G \cap S|^2 \frac{|C_G(i_k)|}{|N_G(S)|}\right) \\ &= \frac{1}{|S||N_G(S)|}\left(|G| - \sum_{k=1}^{n} |i_k^G \cap S|^2 |C_G(i_k)|\right) \\ &\geq \frac{1}{|S||N_G(S)|}\left(|G| - \left(\sum_{k=1}^{n} |i_k^G \cap S|^2\right) C\right) > \frac{1}{|S||N_G(S)|}(|G| - |S|^2 C),\end{aligned}$$

так как $\sum_{k=1}^{n} |i_k^G \cap S| < |S|$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Пусть тройка $(K, G, 2)$ удовлетворяет условиям теоремы, в частности, $\mathrm{Inn}\,(K) \leq G \leq \mathrm{Aut}\,(K)$. Пусть S — силовская 2-подгруппа из G, $G_1 := \mathrm{Inn}(K)S_1$, где $S \leq S_1 \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Aut}(K))$, G_0 — подгруппа из G_1, порожденная всеми инволюциями из G_1, и $q = r^f$, где r — простое нечетное число и f — натуральное число.

Лемма 2. *Если* $\widetilde{G} := \mathrm{Inn}(K)S$, *то* $\mathrm{orb}_2(G) \geq \mathrm{orb}_2(\widetilde{G})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как каждая силовская 2-подгруппа из $\widetilde{G}$ будет силовской 2-подгруппой в G, то $|X(G,S)| \geq |X(\widetilde{G},S)|$. Значит, $\mathrm{orb}_2(G) = |X(G,S)|/|S| \geq |X(\widetilde{G},S)|/|S| = \mathrm{orb}_2(\widetilde{G})$. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что теорему достаточно доказать для случая, когда $G = \mathrm{Inn}(K)S$. Для дальнейшего нам понадобится дополнительная информация о подгруппе S из G.

Лемма 3. *Если* $G = \mathrm{Inn}(K)S$, *то*:

(1) *группа* G *содержит некоторую циклическую* 2-*подгруппу* A *полевых автоморфизмов группы* K, *причем* $G_1 = G_d \leftthreetimes A$, *где* G_d — *нормальное дополнение в* G *для подгруппы* A *и* $|A|$ *делит* $|f|$;

(2) $G_1' = \mathrm{Inn}(K)$;

(3) *если* $G = \mathrm{Inn}(K)$ *и* $|N_G(S)| \neq |S|$, *то* G *изоморфна* ${}^2G_2(q)$, $E_6(q)$ *или* ${}^2E_6(q)$ *и* $|N_G(S)/S| \leq q+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пункты (1) и (2) леммы следуют из [6, леммы 4.19–4.26], а п. (3) — из [8, следствия (д), (е)]. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если* $\mathrm{orb}_2(G_0) > q^3$, *то* $\mathrm{orb}_2(G) \geq 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S_0 \in \mathrm{Syl}_2(G_0)$. Если $G \leq G_0$, то можно считать, что $S \leq S_0$ и $|S_0 \colon S| = 2^k$. Тогда $|S_0| = 2^k|S|$, $|G_0| = 2^k|G|$, $|C_0(i_0)| \geq |C|$. По лемме 1

$$\mathrm{orb}_2(G) \geq \frac{1}{|S||N(S)|}(|G| - |S|^2 C) = \frac{2^k}{2^k|S||N_G(S)|}(|G| - |S|^2 C) = \frac{1}{|S_0||N_G(S)|}(|G_0| - |S_0||S|C).$$

Таким образом, $\mathrm{orb}_2(G) \geq \mathrm{orb}_2(G_0) > q^3$, за исключением случая $|N_G(S)| > |N_{G_0}(S_0)|$. Данное неравенство по лемме 3 возможно лишь в случаях K изоморфна $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ или ${}^2G_2(q)$ и

$|N_G(S)\colon S| \le q+1$. Так как $\mathrm{orb}_2(G) \ge q^3$ (см. леммы 6–13 ниже), то $\mathrm{orb}_2(G) \ge q^3/(q+1) > 3$, и в этом случае лемма доказана. Заметим, что $x^{m/2}$ — инволюция из G_0 и $m/2 = |G_2\colon G_0| = |S_2\colon S_0|$, где $S_2 \in Syl_2(G_0)$, содержащая S_0. Если $G \not\le G_0$, то по лемме 3 $G\backslash G_0$ содержит полевой автоморфизм x максимального порядка m, делящего $|f|_2$. По п. (2) леммы 3 $G_1' = \mathrm{Inn}(K)$. Поэтому $G_2 := G_0G$ — подгруппа, $G_0 < G_2 \le G_1$ и $G_2 = G_0\langle x\rangle$.

Применяя лемму 1 к группе G_2, получим

$$\mathrm{orb}_2(G_2) > \frac{1}{|S_2||N_G(S_2)|}\biggl(|G_2| - \sum_{k=1}^{n} |i_k^G \cap S_2|^2 C_2\biggr),$$

где $C_2 = \max\{|C_{G_2}(i_1)|, |C_{G_2}(i_2)|, \ldots, |C_{G_2}(i_n)|\}$. Элемент x лежит в подгруппе S_2 и $|N_G(S_2)| \le |S_2|(q+1)$ [8, следствие]. Число $\sum_{k=1}^{n} |i_k^G \cap S_2|^2$ не зависит от x. Ухудшая, возможно, оценку можно считать, что $x \in C(x_k)$, где $|C_{G_2}(x_k)| = C$. Тогда

$$\mathrm{orb}_2(G_2) > \frac{1}{(q+1)\Bigl(\dfrac{m}{2}|S_0|\Bigr)^2}\biggl(\frac{m}{2}|G_0| - \sum_{k=1}^{m} |i_k^{G_0} \cap S_0|^2 \frac{m}{2} C_0\biggr)$$

$$= \frac{1}{\dfrac{m}{2}|S_0|^2(q+1)}\biggl(|G_0| - \sum_{k=1}^{m} |i_k^{G_0} \cap S_0| C_0\biggr) > \frac{2q^3}{m(q+1)},$$

где $C_0 = \max\{|C_{G_0}(i_1)|, |C_{G_0}(i_2)|, \ldots, |C_{G_0}(i_n)|\}$.

Следовательно, оценка, полученная для группы G_0, может ухудшиться лишь в $m(q+1)/2$ раз. Но полученные оценки для числа $\mathrm{orb}_2(G_0)$ являются многочленами от q степени не менее трех. Так как q нечетно и $q = r^m$ с $m > 1$, то $q/(m/2) = 2q/m = 2r^m/m$. Значит, $\mathrm{orb}_2(G_2) > (2r^m/m)\cdot(q^2/(q+1))$. Поскольку $r \ge 3$ и $m > 1$, то $(2r^m)/m \ge (2\cdot 3^m)/m \ge 9$. Поэтому $\mathrm{orb}_2(G_2) > (9q^2)/(q+1) > 5q$.

Итак, $G \le G_2$ и $\mathrm{orb}_2(G_2) > 5q$. Пусть $|S_2\colon S| = 2^t$. Тогда по лемме 1

$$\mathrm{orb}_2(G) > \frac{1}{|S||N_G(S)|}(|G| - |S|^2|C_G(i)|) = \frac{2^t}{2^t|S||N_G(S)|}(|G| - |S|^2|C_G(i)|)$$

$$> \frac{1}{|S_2||N_G(S)|}(|G_2| - |S_2||S||C_G(i)|) > \frac{1}{|S_2||N_G(S)|}(|G_2| - |S_2|^2 C),$$

так как $|S_2| > |S|$ и $C \ge |C_G(i)|$. Согласно [8, следствие] $|N_G(S)| \le |S|(q+1)$. Значит,

$$\mathrm{orb}_2(G) > \frac{2^t}{(q+1)|S_2|^2}(|G_2| - |S_2|^2|C) \ge \frac{2^t}{(q+1)}\mathrm{orb}_2(G_2) = \frac{2^t}{(q+1)}5q.$$

Так как $t \ge 1$, то $\mathrm{orb}_2(G) \ge (10q)/(q+1) > 5 > 3$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть q — натуральное число и $q \ge 4$. Тогда справедливы следующие неравенства:* (a) $2(q+1)^2 < q^3$; (b) $2(q+1) < q^2$; (c) $2^3 < q^2$;

Доказательство. Пункт (a). Так как $q^3 \ge 4q^2 = 2q^2 + 2q^2 \ge 2q^2 + 8q = 2q^2 + 4q + 4q > 2q^2 + 4q + 2 = 2(q+1)^2$. Пункт (b). Имеем $q^2 = q\cdot q \ge 4q = 2q + 2q > 2q + 2 = 2(q+1)$. Пункт (c) очевиден. Лемма доказана.

В леммах 6–13 мы докажем, что $\mathrm{orb}_2(G_0) > q^3$.

Лемма 6. *Если $K \simeq {}^2G_2(q)$, то* $\mathrm{orb}_2(G_0) > 3q^3 > 3$.

Доказательство. Допустим, что $K \simeq {}^2G_2(q)$. Согласно [1, с. XVI, табл. 6] имеем $q = 3^{2t+1}$ $(t \geq 1)$ и $\mathrm{Out}\,(K) \simeq Z_{2t+1}$. Поэтому $G_0 = \mathrm{Inn}(K)$.

Так как $S \simeq 2^3$, $|N_{G_0}(S)| = 8 \cdot 7 \cdot 3$ и $C_{G_0}(i)$ изоморфна группе $Z_2 \times L_2(q)$ порядка $q(q^2-1)$, то по лемме 1

$$\mathrm{orb}_2(G_0) \geq \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3}(q^3(q^3+1)(q-1) - 8^2 q(q^2-1)) = \frac{q(q^2-1)}{8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3}(q^2(q^2-q+1) - 8^2).$$

Поскольку $q = 3^{2t+1} > 3$, то $q \geq 3^3$. Поэтому

$$\mathrm{orb}_2(G_0) > \frac{q(q-1)}{8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3} q^2 \Big(q^2 - q + 1 - \frac{8^2}{q^2}\Big) > \frac{q(q-1)q^2}{8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3}(q^2 - q) = \frac{q^4(q-1)^2}{8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3} = \frac{q^3 q(q-1)^2}{8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3} > 3q^3 > 3.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Если* $K \simeq {}^3D_4(q)$, *то* $\mathrm{orb}_2(G_0) > q^{15} > 3$.

Доказательство. Согласно [1, с. XVI, табл. 6] имеем $|{}^3D_4(q)| = q^{12}(q^8+q^4+1) \times (q^6-1)(q^2-1)$ и по [6, лемма 4.2.1] в группе G_0 имеется точно два класса инволюций, причем все инволюции в $\mathrm{Inn}\,(K)$ сопряжены с инволюцией i_1, где $|C_{G_0}(i_1)| = |SL_2(q)||SL_2(q^3)| \cdot 2$, а все инволюции в $G_0 \backslash \mathrm{Inn}\,(K)$ сопряжены с инволюцией i_2, где $|C_{G_0}(i_2)| = {}^3D_4(\sqrt{q})$ и $N_{G_0}(S) = S$. По лемме 1 $\mathrm{orb}_2(G_0) > 1/|S|^2(|G_0| - |i_1^{G_0} \cap S|^2 |C_{G_0}(i_1)| - |i_2^{G_0} \cap S|^2 |C_{G_0}(i_2)|)$. Заметим, что $|i_1^{G_0} \cap S| < |K|_2 = |C_{G_0'}(i_1)|_2 = |SL_2(q)|_2 |SL_2(q^3)|_2 = (q^2-1)_2(q^2-1)_2 = ((q^2-1)_2)^2 \leq (2(q+1))^2$. Аналогично $|i_1^{G_0} \cap S| \leq (2(q+1))^2$. Так как $|S| = 2|K|_2$, то $|S| < 2(2(q+1))^2$. По лемме 2 имеем $2(q+1)^2 < q^3$, следовательно, $|i_1^{G_0} \cap S| < (2(q+1)^2)^2 = 4(q+1)^2 = 2 \cdot 2(q+1)^2 < 2q^3$. Аналогично, $|i_2^{G_0} \cap S| < 2q^3$. Так как $|S| < 2(2(q+1))^2$, то $|S| < 4q^3$. Поскольку $|G_0| = 2|{}^3D_4(q)|$, то $|G| > 2q^{26}$, а $|C_G(i_1)| < |C_G(i_2)| = 2q^6(q^4+q^2+1)(q^3-1)(q-1) < 2q^{15}$. Следовательно, $\mathrm{orb}_2(G_0) > 1/(16q^6)(2q^{26} - 4q^{15}) = (2q^{15})/(16q^6)(q^{11}-2) > q^{15}$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если* $K \simeq G_2(q)$, *то* $\mathrm{orb}_2(G_0) > 3q^6 > 3$.

Доказательство. Согласно [1, с. XVI, табл. 6] имеем $|G_2(q)| = q^6(q^6-1)(q^2-1)$ и по [6, лемма 4.22] все инволюции в $\mathrm{Inn}\,(K)$ и $\mathrm{Ant}\,(K) \backslash \mathrm{Inn}\,(K)$ сопряжены соответственно с i_1 и i_2, причем $C_{G_0}(i_1) = SL_2(q) * SL_2(q)\langle u, v\rangle$, $|C_{G_0}(i_1)| = 2|SL_2(q)|^2$ и $|C_{G_0}(i_2)| = 2|G_2(\sqrt{q})|$ при $3 \nmid q$ или $q = 3^{4k}$. Если же $q = 3^{4k+2}$, то $|C_{G_0}(i_2)| = 2|{}^2G_2(q)|$. Так как $|G_2(\sqrt{q})| = q^3(q^3-1)(q-1)$, а $|{}^2G_2(q)| = q^3(q^3+1)(q-1)$, то, применяя формулу из леммы 1 и учитывая, что $|G_2(\sqrt{q})|_2 = |{}^2G_2(q)|_2$ и $|{}^2G_2(q)| > |G_2(\sqrt{q})|$, можно считать, что $C = 2q^3(q^3+1)(q-1)$. Из строения $C_{G_0}(i_1)$ следует, что для силовской 2-подгруппы S из G_0 имеем $N_{G_0}(S) = S$. По лемме 1 $\mathrm{orb}_2(G_0) > (1/|S|)^2\big(|G_0| - |i_1^{G_0} \cap S|^2 |C_{G_0}(i_1)| - |i_2^{G_0} \cap S|^2 |C_{G_0}(i_2)|\big)$.

Поскольку $|i_1^{G_0} \cap S| < |K|_2$ и $|i_2^{G_0} \cap S| < |K|_2$ и $|G_2(q)|_2 = |{}^3D_4(q)|_2 = (2(q+1))^2 < 2q^3$, то $|i_1^{G_0} \cap S| < 2q^3$, $|i_2^{G_0} \cap S| < 2q^3$ и $|S| = 2|G_2(q)|_2 < 4q^3$. Тогда

$$\mathrm{orb}_2(G) > \frac{1}{16q^6}\Big(2q^6(q^6-1)(q^2-1) - 8q^6 q^3(q^3+1)(q-1)\Big)$$

$$= \frac{2q^6(q^3+1)(q-1)}{16q^6}\Big((q^3-1)(q+1)(q^3-1) - 4q^3(q^3+1)\Big)$$

$$= \frac{(q^3+1)(q-1)}{8}\Big((q^6 - 2q^3 + 1)(q+1) - 4q^6 - 4q^3\Big)$$

$$= \frac{(q^3+1)(q-1)}{8}\Big(q^7 - 2q^4 + q + q^6 - 2q^3 + 1 - 4q^6 - 4q^3\Big)$$

$$= \frac{(q^3+1)(q-1)}{8}\Big(q^7 - 3q^6 - 2q^4 - 6q^3 + q + 1\Big)$$

$$> \frac{(q^3+1)(q-1)}{8}\Big(q^6-2q^4-6q^3+q+1\Big) > \frac{(q^3+1)(q-1)3q^5}{8}$$
$$= \frac{(q^2-1)(q^2-q+1)3q^5}{8} > \frac{3q^5(q^2-q+1)}{2} > 3q^6.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Если $K \simeq F_4(q)$, то* $\mathrm{orb}_2(G_0) > q^{16} > 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [1, с. XVI, табл. 6] $|F_4(q)| = q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)\times(q^2-1)$ и по [6, лемма 4.20] в $\mathrm{Inn}\,(K)$ — два класса инволюций с представителями i_1 и i_2, такими, что $|C_{G_0}(i_1)| \le 2|\mathrm{Spin}_9(q)|$ с центром порядка 2, $|C_{G_0}(i_2)| \le 2|SL_2(q)||Sp_6(q)|$, а в $G_0\backslash\mathrm{Inn}\,(K)$ содержится единственный класс инволюций с представителем i_3, причем $|C_{G_0}(i_3)| = 2|F_4(\sqrt{q})|$. По [1, с. XII, XI] $\mathrm{Spin}_9(q)| = q^{16}(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)$, а $|Sp_6(q)| = q^9(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)$.

По лемме 1

$$\mathrm{orb}_2(G_0) > \frac{1}{|S|^2}\big(|G_0| - |i_1^{G_0}\cap S|^2|C_{G_0}(i_1)| - |i_2^{G_0}\cap S|^2|C_{G_0}(i_2)| - |i_3^{G_0}\cap S|^2|C_{G_0}(i_3)|\big),$$

где $S \in \mathrm{Syl}_2(G_0)$. Находим

$$|G_0|_2 = 2(q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1))_2$$
$$= 2((q^4-1)(q^8+q^4+1)(q^4-1)(q^2+1)(q^2-1)(q^4+q^2+1)(q^2-1))_2$$
$$= 2(2(q^2-1)4(q^2-1)(q^2-1)^2)_2 = 2^4(q^2-1)_2^4 \le 2^8(q+1)_2^4,$$

так как $(q^2-1)_2 \le 2(q+1)$. Поскольку все инволюции из силовской 2-подгруппы S из G_0 распределены по трем классам $i_1^{G_0}\cap S$, $i_2^{G_0}\cap S$ и $i_3^{G_0}\cap S$, причем $|C_{G_0}(i_1)| > |C_{G_0}(i_3)| > C_{G_0}(i_2)$, то $|i_1^{G_0}\cap S|^2|C_{G_0}(i_1)| + |i_2^{G_0}\cap S|^2|C_{G_0}(i_2)| + |i_3^{G_0}\cap S|^2|C_{G_0}(i_3)| < |S|^2|C_{G_0}(i_1)|$. Следовательно, по лемме 1

$$\mathrm{orb}_2(G) > \frac{1}{|S|^2}(|G| - |S|^2|C_G(i_1)|)$$

$$\ge \frac{1}{(2^8(q+1)^4)^2}\big(q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1) - (2^8(q+1)^4)^2(q^{16}(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1))\big)$$
$$= \frac{q^{16}(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)}{(2^8(q+1)^4)^2}(q^8(q^8+q^4+1) - (2^8(q+1)^4)^2).$$

Так как $2^2(q+1) < q^2$ при нечетном $q > 3$, то $(2^8(q+1)^4)^2) = ((2^2(q+1))^4)^2 < q^{16}$. Следовательно,

$$\mathrm{orb}_2(G_0) > \frac{q^{16}(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)}{(2^8(q+1)^4)^2)} > \frac{q^{16}q^7q^5q^3q}{q^{16}} = q^{16} > 3.$$

Лемма доказана.

Лемма 10. *Если $K \simeq E_6(q)$, то* $\mathrm{orb}_2(G_0) > q^{41} > 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $K \simeq E_6(q)$, q нечетно. Согласно [1, с. XVI, табл. 6] $|K| = q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1) \times (q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)/d$, где $d = (3, q-1)$ и по [6, лемма 4.25] для группы $U = \mathrm{Aut}\,(K)$ справедливы следующие утверждения (a)–(d).

(a) $U = U'(A\times\langle\tau^*\rangle)$, где $U'\cap(A\times\langle\tau^*\rangle) = 1$, $Z_n \simeq A$ — группа полевых автоморфизмов, $q = p^n$, τ^* — графовый автоморфизм порядка 2, порядок факторгруппы $|U'/\mathrm{Inn}\,(K)| = (3, q-1)$, τ^* инвертирует $U'/\mathrm{Inn}\,(K)$ и $A\times\langle\tau^*\rangle \simeq Z_n\times Z_2$;

(b) Согласно [7, с. 251, табл. 1] U' и $\mathrm{Inn}\,(K)$ имеют точно два класса инволюций с представителями t и v такие, что $C_{G_0}(t) = N_{G_0}(fP\Omega_{10}^+(q))$ и

$$|C_{\mathrm{Inn}\,(K)}(t)| = \frac{q^{20}(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1)}{d},$$

где $d = (3, q-1)$ и $C_{G_0}(v)$ такой, что $E(C_{G_0}(v)) = J_1 * J_2$, $J_1 \simeq SL_6(q)$, $Z(J_1) = Z(J_2) \simeq Z_2$ и $C_{U'}(J_1 * J_2) = \langle v\rangle$. По [1, с. X] имеем $|SL_n(q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\times\ldots\times(q^2-1)$. Следовательно,

$$|E(C_{G_0}(v))| = \frac{|SL_2(q)||SL_6(q)|}{2} = \frac{q(q^2-1)q^{\frac{6\cdot 5}{2}}(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1)}{2}.$$

Кроме того, $C_{\mathrm{Inn\,diag}\,(G_0)}(t) \leq \mathrm{Inn\,diag}(E(C_{G_0}(t)))$. Рассмотрим дробь

$$\frac{|C_{\mathrm{Inn}\,(\mathrm{K})}(t)|}{|E(C_{G_0}(z))|} = \frac{q^{20}(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^2-1)(q-1)/d}{|E(C_G(v))|}$$
$$= \frac{q^{16}(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1)}{2} = \frac{q^{20}(q^8-1)(q-1)/d}{(q^3-1)(q^2-1)/2}$$
$$= \frac{2}{d}\,\frac{q^4(q^8-1)}{(q^3-1)(q+1)} > \frac{2}{d}\,\frac{q^4(q^8-1)}{q^3 2q} = \frac{q^8-1}{d}.$$

Так как $|\mathrm{Aut}\,(E(C_{G_0}(v)))\colon \mathrm{Inn}\,(E(C_{G_0}(v)))| \leq |\mathrm{Aut}\,(J_1)\colon \mathrm{Inn}\,(J_1)||\mathrm{Aut}\,(J_2)\colon \mathrm{Inn}\,(J_2)| \leq (2, q-1)\times 2(6, q-1)4$ и $q \geq 5$, то $|C_{G_0}(t)|/|C_{G_0}(v)| > 1$;

(c) два класса относительно U' графовых автоморфизмов с представителями τ^* и $h\tau^*$, где $C_{U'}(\tau^*) \simeq F_4(q)$ и $C_{U'}(h\tau^*)'$ изоморфна частному $Sp_8(q)$, где $|C_{U'}(\tau^*)| = |F_4(q)| = q^{24}(q^{12}-1)\times(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$ и $|C_{U'}(h\tau^*)| \leq |Sp_8(q)| = q^{16}(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)$. Понятно, что $|C_{U'}(\tau^*)| > |C(h\tau^*)|$ и $|C_{U'}(\tau^*)| > |C_{G_0}(t)|$;

(d) если φ — единственная инволюция из A, то каждая инволюция из $U - U'(\tau^*)$ сопряжена либо φ, либо $\tau^*\varphi$, где $C_{\mathrm{Inn}(K)}(\varphi)' \simeq E_6(\sqrt{q})$ и $C_{\mathrm{Inn}(K)}(\tau^*\varphi') \simeq {}^2E_6(\sqrt{q})$, где $|E_6(\sqrt{q})| = q^{18}\times(q^6-1)(q^{9/2}-1)(q^4-1)(q^3-1)(q^{5/2}-1)(q-1)$ и $|{}^2E_6(\sqrt{q})| = q^{18}(q^6-1)(q^{9/2}+1)(q^4-1)\times(q^3-1)(q^{5/2}+1)(q-1)$. Понятно, что $|C_{G_0}(\tau^*)'| > |E_6(\sqrt{q})|$ и $|C_{G_0}(\tau^*)'| > |{}^2E_6(\sqrt{q})|$. Следовательно, $C = |C_{G_0}(\tau^*)|$ в формуле леммы 1. По лемме 1

$$\mathrm{orb}_2(G_0) \geq \frac{1}{|S||N_{G_0}(S)|}(|G_0| - |S|^2|C|)$$
$$= \frac{1}{|S||N_{G_0}(S)|}\Big(\frac{q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)}{d} - |S|^2|C|\Big)$$
$$= \frac{q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)}{|S||N_{G_0}(S)|}\Big(q^{12}(q^9-1)(q^5-1) - |S|^2\Big).$$

Находим

$$|S| = 4|E_6(q)|_2 = 4\Big(q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)\Big)_2$$
$$= 8(q^2-1)_2(q-1)_2 4(q^2-1)_2(q^2-1)(q-1)_2(q^2-1)_2 = 2^5(q^2-1)_2^4(q-1)_2^2.$$

Так как $(q^2-1)_2 \leq 2(q+1)$, а $q-1 < q$, то $|S| < 2\cdot 4^4(q+1)^4q^2 = 2(4(q+1))^4q^2 < 2q^8q^2 = 2q^{10}$. Тогда

$$\Big(\frac{q^{12}(q^9-1)(q^5-1)}{d} - |S|^2\Big) > \frac{q^{12}(q^9-1)(q^5-1)}{d} - 4q^{20}$$
$$\geq q^{12}(q^9-1)(q^4+q^3+q^2+q+1) - 4q^{20} > q^{24}.$$

Ввиду [8, следствие] имеем $|N(S)| \leq |S|(q+1)$, поэтому

$$\mathrm{orb}_2(G_0) > \frac{q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)q^{24}}{(2q^6(q+1)^4)^2(q+1)}$$
$$> \frac{q^{48}}{4q^{12}(q+1)^9}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1) > \frac{q^{48}}{q^{13}q^{18}}q^{24} = q^{41}.$$

Лемма доказана.

Лемма 11. *Если* $K \simeq {}^2E_6(q)$, *то* $\mathrm{orb}_2(G_0) > q^{41} > 3$.

Доказательство. Согласно [1, с. XVI, табл. 6] $|K| = q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)\times(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)$. Следовательно, $|{}^2E_6(q)| > |E_6(q)|$. Как в предыдущей лемме, используя [6, леммы 4.25, 4.26], получаем, что централизатор инволюции максимального порядка в G_0 имеет порядок $\leq 2|F_4(q)|$. Рассуждая как в предыдущей лемме, получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если* $K \simeq E_7(q)$, *то* $\mathrm{orb}_2(G_0) > q^{37} > 3$.

Доказательство. Согласно [1, с. XVI, табл. 6] $|K| = q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)\times(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)/d$, где $d = (2, q-1)$, и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
|K|_2 &= \frac{\big(q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)\big)_2}{d}\\
&= \frac{\big((q^6-1)(q^{12}+q^6+1)\big)_2\big((q^2-1)(q^{12}+q^{10}+q^8+q^6+q^4+q^2+1)\big)_2}{d}\\
&\times\frac{\big((q^4-1)(q^8+q^4+1)\big)_2\big((q^2-1)(q^8+q^6+q^4+q^2+1)\big)_2 4(q^2-1)_2\big(q^2-1\big)_2(q^2-1)_2}{d}\\
&= \frac{\big(q^2-1\big)_2\big(q^2-1\big)_2 2\big(q^2-1\big)_2\big(q^2-1\big)_2 4\big(q^2-1\big)_2\big(q^2-1\big)_2\big(q^2-1\big)_2}{d} = \frac{2^3((q^2-1)_2)^7}{d}.
\end{aligned}
$$

Далее по [6, лемма 4.24] без ограничения общности можно считать, что в группе G_0 шесть классов сопряженных инволюций с представителями $t_1, \dots, t_6$. Для них справедливы следующие утверждения:

(1) пусть $t_1 \in \mathrm{Inn}\,(K)$. Тогда $C_{G_0}(t_1)$ содержит две компоненты $K_1 \simeq SL_2(q)$ и $K_2 \simeq \mathrm{Spin}^+_{12}(q)$ такие, что $E(C_{G_0}(t_1)) = K_1 * K_2$, $|C_{G_0}(t_1)/J_1 * J_2| = 2$, $C_{G_0}(J_1 * J_2) = \langle t_1\rangle$,

$$|C_{G_0}(t_1)| = |SL_2(q)||\mathrm{Spin}^+_{12}(q)| = q(q^2-1)2q^{6\cdot 5}(q^6-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1);$$

(2) $t_2 \in \mathrm{Inn}\,(K)$, $C(t_2)$ содержит компоненту K_0 такую, что $K_0/Z(K_0) \simeq L_8(q)$ и $|L_8(q)| = q^{\frac{8\cdot 7}{2}}(q^8-1)(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^2-1)$;

(3) $t_3 \in \mathrm{Inn}\,(K)$, $C(t_3)$ содержит компоненту, изоморфную универсальной накрывающей группе для $E_6(q)$ при $q \equiv 1 \pmod 4$ и для ${}^2E_6(q)$ при $q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4)$, $C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(t_2) \cap C(J)$ — циклическая группа и

$$|C(t_3)| = 2q^{36}(q^{12}-1)(q^9\pm 1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5\pm 1)(q^2-1);$$

(4) $t_4 \in \mathrm{Inn\,diag}\,(K)\backslash\mathrm{Inn}\,(K)$, $C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(t_r)$ содержит единственную 2-компоненту J такую, что J изоморфна некоторой факторгруппе группы $SU_8(q)$ при $q \equiv 1 \pmod r$ и группы $SL_8(q)$ при $q \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4)$ и $C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(t_4) \cap C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(J)$ — циклическая подгруппа;

(5) $t_5 \in \mathrm{Inn\,diag}(K)\backslash\mathrm{Inn}$, $C(t_5)$ содержит единственную 2-компоненту J такую, что J изоморфна некоторой факторгруппе универсальной накрывающей группы для ${}^2E_6(q)$ при $q \equiv 1 \pmod 4$ и для $E_6(q)$ при $q \equiv -1 \pmod 4$ и $C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(t_5) \cap C_{\mathrm{Inn\,diag}(K)}(J)$ — циклическая подгруппа;

(6) все инволюции в $\mathrm{Aut}(K)\backslash\mathrm{Inndiag}(K)$ сопряжены с инволюцией t_6 и $C_{\mathrm{Inn(K)}}(t_6) \simeq E_7(\sqrt{q})$.

Наша цель — найти $C = \max\{|C_{G_0}(i)| \mid i = 1, \dots, 6\}$. Согласно [1, с. XVI, табл. 6] имеем

$$\frac{|C_{G_0}(t_6)|}{|C_{G_0}(t_5)|} = \frac{|E_7(\sqrt{q})|}{|{}^2E_6(q)|} \quad \text{при} \quad q \equiv 1 \pmod 4 \qquad \text{и} \qquad \frac{|C_G(t_6)|}{|C_G(t_5)|} = \frac{|E_7(\sqrt{q})|}{|E_6(q)|} \quad \text{при} \quad q \equiv -1 \pmod 4,$$

$$\frac{q^{63/2}(q^9-1)(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^3-1)(q-1)}{q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)} < 1.$$

Сравним порядки централизаторов инволюций из пп. (5) и (4) [1, с. X, XI]

$$\frac{|C_{G_0}(t_5)|}{|C_{G_0}(t_4)|} = \frac{|E_6(\sqrt{q})|}{|SL_8(q)|} \quad \text{при} \quad q \equiv -1 \pmod 4 \qquad \text{и} \qquad \frac{|C_G(t_5)|}{|C_G(t_4)|} = \frac{|{}^2E_6(q)|}{|SU_8(q)|} \quad \text{при} \quad q \equiv 1 \pmod 4,$$

$$\frac{q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)}{q^{28}(q^8-1)(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1)} > 1.$$

Аналогично для отношения $|{}^2E_6(q)|/|SU_8(q)|$. Сравним порядки централизаторов инволюций из пп. (5) и (3): здесь просто меняются местами группы $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ при смене $q \equiv 1 \pmod 4$ на $q \equiv -1 \pmod 4$. Порядки централизаторов инволюций из пп. (5) и (2) уже сравнивались.

Сравним порядки централизаторов инволюций из пп. (5) и (1):

$$\frac{q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)}{2q^{31}(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)^2(q^4-1)(q^2-1)^2} > 1 = \frac{q^5(q^9-1)(q^5-1)(q^6+1)}{2(q^{10}-1)(q^4-1)(q^2-1)} > 1.$$

Следовательно, централизаторы инволюций из п. (5) имеют максимальный порядок в G_0, равный C. По лемме 1

$$\mathrm{orb}_2(G_0) > \frac{1}{|S||N_{G_0}(S)|}(|G_0| - |S|^2|C|)$$

$$= \frac{1}{|S||N_{G_0}(S)|}\frac{\Big(q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)}{d}$$

$$-\,3(q\pm 1)\frac{\Big((2^3|q^2-1|_2)^7\Big)^2 q^{36}(q^{12}-1)(q^9\pm 1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5\pm 1)(q^2-1)\Big)}{d^2}$$

$$> \frac{1}{d^2}\frac{1}{|S||N_{G_0}(S)|}q^{36}(q^{12}-1)(q^9\pm 1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5\pm 1)(q^2-1)$$

$$\times\Big(q^{27}(q^9\mp 1)(q^{14}-1)(q^5\mp 1) - 3(q\pm 1)\Big((2^3(q^2-1)_2)^7\Big)^2\Big).$$

Поскольку $(q^2-1)_2 < 2(q+1)$, то $3(q\pm1)(2^3(q^2-1)_2)^{14} < 3(q\pm1)2^{52}2^{14}q^{14} < 2^{68}q^{15}$. Кроме того, $q^{27}(q^9\mp1)(q^{14}-1)(q^5\mp1) > q^{52}$. Следовательно, $|G_0|-|S|^2|C| > (q^{52}-2^{68}q^{15})C = q^{15}(q^{37}-2^{68})C$. По условию $q > 3$, поэтому $q \geq 5 > 2^2$ и, таким образом, $|G_0| - |S|^2|C| > q^{15}C$. Так как $|S|^2 < 2^{68}q^{15}$ и $|S| = |N_{G_0}(S)|$ [8, следствие], то

$$\mathrm{orb}_2(G) > \frac{q^{36}(q^{12}-1)(q^9\pm 1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5\pm 1)(q^2-1)q^{15}}{2^2 2^{68} q^{15}} > \frac{q^{36}q^{11}q^8q^7q^5q^4q}{2^2 2^{68}}.$$

По условию теоремы $q \geq 5$, следовательно, $2^4 < q^2$. Отсюда $2^2 2^{68} = (2^4)^{17} < (q^2)q^{17} = q^{35}$. Значит, $\mathrm{orb}_2(G_0) > q^{36}q^{11}q^8q^7q^5q^4q/q^{35} = q^{37} > 3$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Если $K \simeq E_8(q)$, то* $\mathrm{orb}_2(G_0) > q^{176} > 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [6, лемма 4.19] $|G_0 : \mathrm{Inn}\,(K)| \leq 2$. По лемме 1 $\mathrm{orb}_2\,(G_0) > 1/(|S||N_{G_0}(S)|)(|G_0| - |S|^2C)$. По [4, табл. 2.4, с. 145] имеем

$$|K|_2 = \Big(q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^8-1)(q^2-1)\Big)_2$$

$$= \Big((q^{10}-1)(q^8-1)(q^{10}-1)2(q^6-1)(q^2-1)(q^4-1)2(q^4-1)(q^2-1)\Big)_2$$

$$= \Big((q^2-1)2(q^4-1)2(q^2-1)(q^2-1)(q^2-1)2(q^2-1)2^2(q^2-1)(q^2-1)\Big)_2 = 2^6((q^2-1)_2)^8.$$

Следовательно,
$$\mathrm{orb}_2\,(G_0) > \frac{1}{|S||N_{G_0}(S)|}\Big(|G_0| - (2^7((q^2-1)_2)^8)^2|C|\Big).$$

Согласно [6, лемма 4.19] в $\mathrm{Aut}(K)$ не более трех классов сопряженных инволюций с представителями t, v и τ (τ существует, только когда q является квадратом) такими, что $E(C_{G_0}(t)) \simeq SL_2(q) * \mathrm{Cov}(E_7(q))$, где $\mathrm{Cov}(E_7(q)$ — универсальная накрывающая группа для $E_7(q)$, и $|C_G(t)\colon E(C_G(t))| \le 4$, и $E(C_{G_0}(v)) \simeq \mathrm{Spin}^+_{16}/Z$, где Z — неединичная подгруппа из $\mathrm{Spin}^+_{16}(q)$ и $|C_{G_0}(v)\colon E(C_{G_0}(v))| \le 4$, $C_{G_0}(\tau) \simeq E_8(\sqrt{q})$. Согласно [4, табл. 2.4, с. 145] имеем

$$|E_7(q)| = \frac{q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)}{(2,q-1)},$$

$$|\mathrm{Spin}_{16}(q)| = q^{56}(q^8-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1).$$

Следовательно, $|E_7(q)| > |\mathrm{Spin}_{16}(q)|$. Также очевидно, что если q является квадратом, то $|E_8(\sqrt{q})| < |E_7(q)|$. Поэтому применяя лемму 1 для группы G_0 на месте G, в качестве C мы должны взять $|C_{G_0}(t)|$. Тогда

$$\mathrm{orb}_2(G_0) > \frac{1}{|S||N_{G_0}(S)|}\Big(|G_0| - (2^7(q^2-1)_2^8)^2|SL_2(q)||E_7(q)|\Big)$$

$$> \frac{|S_2(q)||E_7(q)|}{|S||N_{G_0}(S)|}\Big(q^{56}(q^{30}-1) - (2^7((q^2-1)_2)^8)^2\Big)$$

Поскольку $|S|^2 = (2^7((q^2-1)_2)^8)^2 \le (2^7(2(q+1))^8)^2 = (2^{15}(q+1)^8)^2$, то по лемме 2 имеем $2(q+1)^2 < q^3$ и, следовательно, $|S|^2 < 2^{22}\cdot 2^8(q+1)^{16} < 2^{22}q^{24}$. Так как $2^2 < q$, то $|S|^2 < q^{11}q^{24} = q^{35}$. Согласно [8, следствие] $|N_{G_0}(S)| = |S|$. Значит, $\mathrm{orb}_2(G) > (q^2q^{126})/q^{35}(q^{56}q^{29} - q^{35}) > q^{176} > 3$. Лемма доказана.

Из лемм 6–13 следует, что $\mathrm{orb}_2(G_0) > q^3$. Из леммы 5 в этом случае следует, что $\mathrm{orb}_2(\mathrm{Inn}(K)S) > 3$. Следовательно, лемма 2 завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
2. **Зенков В.И., Мазуров В.Д.** О пересечении силовских подгрупп в конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 424–432.
3. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.
4. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. Москва: . 1996. 352 с.
5. **Кабанов В.В., Кондратьев А.С.** Силовские 2-подгруппы конечных групп. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР. 1979. 144 с.
6. **Harris N.E.** Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over a field of odd order // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272, № 1. P. 1–65.
7. **Liebeck M.W., Saxl J.** The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. 1985. Vol. 31, № 2. P. 250–264.
8. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. P. 368–376.

Зенков Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: zenkov@imm.uran.ru

Поступила 10.05.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.542

РАСПОЗНАВАНИЕ ПО СПЕКТРУ ПРОСТЫХ ГРУПП $C_p(2)$ [1]

М. Р. Зиновьева

Доказано, что если G — конечная группа с множеством порядков элементов как у группы $C_p(2)$, где p — простое число и $p > 3$, то $G/O_2(G)$ изоморфна $C_p(2)$.

Ключевые слова: конечная простая группа, граф простых чисел, спектр, распознавание по спектру, симплектическая группа.

M. R. Zinov'eva. Recognizability by spectrum of simple groups $C_p(2)$.

It is proved that, if G is a finite group that has the same set of element orders as the simple group $C_p(2)$, where p is a prime and $p > 3$, then $G/O_2(G)$ is isomorphic to $C_p(2)$.

Keywords: finite simple group, prime graph, spectrum, recognition by spectrum, symplectic group.

Введение

Для конечной группы G через $\omega(G)$ обозначается *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. Для произвольного подмножества ω множества натуральных чисел через $h(\omega)$ обозначим число попарно неизоморфных конечных групп G таких, что $\omega(G) = \omega$. Если k — натуральное число, то говорят, что группа G является *k-распознаваемой по спектру* (коротко, *k-распознаваемой*), если $h(\omega(G)) = k$. В частности, говорят, что G *распознаваема*, если $h(\omega(G)) = 1$, и *нераспознаваема*, если $h(\omega(G))$ бесконечно. Проблема распознаваемости для конечной группы G считается решенной, если определено число $h(\omega(G))$. Так как конечная группа с нетривиальной разрешимой нормальной подгруппой нераспознаваема, то при решении проблемы распознаваемости рассматривают, главным образом, почти простые группы.

К настоящему времени для многих конечных почти простых групп проблема распознавания решена (см., например, обзор В.Д. Мазурова [1]). Первый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. По [2] конечная неабелева простая группа P *квазираспознаваема*, если каждая конечная группа H с условием $\omega(H) = \omega(P)$ имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

Теорема Грюнберга — Кегеля (см. предложение 1 ниже) позволяет изучать только конечные группы с несвязными графами простых чисел. В статье А.В. Васильева [3] доказана структурная теорема, которая при исследовании распознаваемости конечной группы дает дополнительные ограничения. В частности, эта теорема может быть применена к простым группам лиева типа с несвязным графом простых чисел. Уточнение этой теоремы получено в [4].

В [5] доказано, что если $\omega(G) = \omega(C_3(2))$, то группа G изоморфна $C_3(2)$ или $D_4(2)$.

В [6] автором доказана распознаваемость для бесконечной серии конечных симплектических простых групп над полем порядка 3. В данной статье мы доказываем квазираспознаваемость для бесконечной серии конечных симплектических простых групп над полем порядка 2, существенно используя классификацию конечных простых групп.

Теорема. *Если G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega(C_p(2))$, где p — простое число и $p > 3$, то $G/O_2(G) \cong C_p(2)$.*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00324).

В дальнейшем p обозначает простое число, большее 3.

1. Предварительные результаты

Пусть G — конечная группа. Множество $\omega(G)$ частично упорядочено относительно делимости. Обозначим через $\mu(G)$ множество элементов из $\omega(G)$, максимальных относительно этого отношения. Пусть $\pi(n)$ — множество простых делителей натурального числа n. Обозначим $\pi(|G|)$ через $\pi(G)$. На множестве $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: вершины r и s в $\pi(G)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля или графом простых чисел группы* G и обозначается через $GK(G)$. Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \cdots, s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент в графе $GK(G)$. Если порядок G четен, то считаем, что $2 \in \pi_1$. Также положим $\mu_i(G) = \{a \in \mu(G) \mid \pi(a) \subseteq \pi_i(G)\}$. В [7; 8] описаны связные компоненты всех конечных простых групп. В [9, лемма 4] доказано, что $\mu_i(G)$ — одноэлементное множество для каждой простой неабелевой группы G и $i \geq 2$. Обозначим через $n_i = n_i(G)$ единственный элемент из $\mu_i(G)$ при $i \geq 2$.

Граф называется *кокликой*, если его вершины попарно несмежны. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(q, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число q.

Для удобства доказательства теоремы разобьем класс конечных простых групп лиева типа характеристики r с несвязным графом Грюнберга — Кегеля на два подкласса N_1 и N_2. В подкласс N_1 запишем группы S с небольшим числом $t(S)$. В подкласс N_2 запишем остальные группы. Используя результаты работ [7–9] и атлас конечных групп [10], составим табл. 1 и табл. 2, описывающие параметры $t(r, S)$, $t(S)$ и n_i при $i \geq 2$ для групп S из подклассов N_1 и N_2 соответственно. В табл. 3 укажем множество $\pi_1(S)$ и числа n_i при $i \geq 2$ для спорадических и знакопеременных групп S с несвязным графом простых чисел.

В табл. 1–3 $q = r^f$ для простого числа r и натурального числа f и p' — нечетное простое число.

Общая структура конечной группы с несвязным графом простых чисел описывается следующей теоремой Грюнберга — Кегеля.

Предложение 1 [7, теорема A]. *Если конечная группа G имеет несвязный граф простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(a) *$s(G) = 2$ и G — группа Фробениуса или двойная группа Фробениуса*;

(б) *существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/F(G) \leq Aut(S)$, где $F(G)$ и $\overline{G}/S$ являются $\pi_1(G)$-подгруппами, $s(S) \geq s(G)$ и для каждого i с условием $2 \leq i \leq s(G)$ существует j с условием $2 \leq j \leq s(S)$ такое, что $\mu_i(G) = \mu_j(S)$.*

В [3; 4] А.В. Васильев и И.Б. Горшков получили следующий аналог теоремы Грюнберга — Кегеля.

Предложение 2 [3; 4]. *Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая условиям $t(G) \geq 3$ и $t(2, G) \geq 2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq Aut(S)$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G.*

(2) *Для каждой коклики ρ графа $GK(G)$ такой, что $|\rho| \geq 3$, не более чем одно простое число из ρ делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(S) \geq t(G) - 1$.*

(3) *Выполняется одно из двух утверждений*:

(а) *каждое простое число $r \in \pi(G)$, несмежное в $GK(G)$ с числом 2, не делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$, в частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$;*

(б) *существует простое число $r \in \pi(K)$, несмежное в $GK(G)$ с числом 2, $t(G) = 3$, $t(2, G) = 2$ и $S \cong Alt_7$ или $A_1(q)$ для некоторого нечетного числа q.*

Т а б л и ц а 1

Параметры групп S из N_1

S	Ограничения на S	$t(r,S)$	$t(S)$	$n_i(S)=n_i(i\geq 2)$
$A_2(q)$	$(q-1)_3\neq 3, q+1=2^k$	2	2	$(q^3-1)/(q-1)(3,q-1)$
${}^2A_2(q)$	$(q+1)_3\neq 3, q-1=2^k$	2	2	$(q^3+1)/(q+1)(3,q+1)$
${}^2A_3(2)$		2	2	5
$C_2(q)$	$q>2$	2	2	$(q^2+1)/(2,q-1)$
$C_3(2)$		2	2	7
$D_4(2)$		2	2	7
${}^3D_4(2)$		2	2	13
$A_5(2)$		2	3	31
$A_6(2)$		2	3	127
$C_4(2)$		2	3	17
${}^3D_4(q)$	$q>2$	2	3	q^4-q^2+1
${}^2F_4(2)'$		2	3	13
$A_1(q)$	$3<q\equiv\epsilon\ (\mathrm{mod}\ 4), \epsilon=\pm 1$	3	3	$r, (q+\epsilon)/2$
$A_1(q)$	$q=2^f\geq 4$	3	3	$q\pm 1$
$A_2(2)$		3	3	3,7
$A_2(q)$	$q\neq 2,\ (q-1)_3\neq 3,\ q+1\neq 2^k$	3	3	$(q^3-1)/(q-1)(3,q-1)$
$A_2(q)$	$(q-1)_3=3, q+1=2^k$	3	3	$(q^3-1)/(q-1)(3,q-1)$
$A_3(q)$	$q=2,3,5$	3	3	7,13,31
$A_4(2)$		3	3	31
$A_7(2)$		3	3	127
${}^2A_2(q)$	$(q+1)_3\neq 3, q-1\neq 2^k$	3	3	$(q^3+1)/(q+1)(3,q+1)$
${}^2A_2(q)$	$(q+1)_3=3, q-1=2^k$	3	3	$(q^3+1)/(q+1)(3,q+1)$
${}^2A_4(2)$		3	3	11
${}^2A_5(2)$		3	3	7,11
${}^2D_4(2)$		3	3	17
${}^2D_5(2)$		3	3	17
$G_2(q)$	$2<q\equiv\epsilon\ (\mathrm{mod}\ 3), \epsilon=\pm 1$	3	3	$q^2-\epsilon q+1$
$G_2(q)$	$q=3^f$	3	3	$q^2\pm q+1$
$C_5(2)$		3	4	31
$D_5(2)$		3	4	31
$D_6(2)$		3	4	31
$F_4(2)$		3	4	13,17
$A_{10}(2)$		3	5	2047
$F_4(q)$	q нечетно	3	5	q^4-q^2+1
$F_4(q)$	$q=2^f\geq 4$	3	5	q^4+1, q^4-q^2+1
$A_2(4)$		4	4	3,5,7
$A_2(q)$	$q\neq 4, (q-1)_3=3,\ q+1\neq 2^k$	4	4	$(q^3-1)/(q-1)(3,q-1)$
${}^2A_2(q)$	$q\neq 2, (q+1)_3=3,\ q-1\neq 2^k$	4	4	$(q^3+1)/(q+1)(3,q+1)$
${}^2B_2(q)$	$q>2$	4	4	$q-1, q\pm\sqrt{2q}+1$
${}^2F_4(8)$		4	4	37,109
${}^2E_6(q)$	$q>2$	4	5	$(q^6-q^3+1)/(3,q+1)$
$E_6(q)$		4	5	$(q^6+q^3+1)/(3,q-1)$
${}^2E_6(2)$		4	5	13,17,19
${}^2F_4(q)$	$q>8$	4	5	$q^2\pm\sqrt{2q^3}+q\pm\sqrt{2q}+1$
${}^2G_2(q)$	$q>3$	5	5	$q\pm\sqrt{3q}+1$
$E_7(2)$		5	8	73,127
$E_7(3)$		5	8	757,1093

Таблица 2

Параметры групп S из N_2

S	Ограничения на S	$t(r,S)$	$t(S)$	$n_i(S)=n_i$ $(i\geq 2)$
$B_n(q)$	$n=2^m\geq 4,\ q$ нечетно	2	$\left[\frac{3n+5}{4}\right]$	$(q^n+1)/2$
$C_n(q)$	$n=2^m\geq 4,\ (n,q)\neq(4,2)$	2	$\left[\frac{3n+5}{4}\right]$	$(q^n+1)/(2,q-1)$
$A_{p'-1}(q)$	$(p',q)\neq(5,2),(7,2),(11,2),\ p'\geq 5$	3	$\frac{p'+1}{2}$	$(q^{p'}-1)/((q-1)(p',q-1))$
$A_{p'}(q)$	$(q-1)\mid(p'+1), p'\geq 5,\ (p',q)\neq(5,2),(7,2)$	3	$\frac{p'+1}{2}$	$(q^{p'}-1)/(q-1)$
${}^2A_{p'-1}(q)$	$(p',q)\neq(5,2),\ p'\geq 5,$	3	$\frac{p'+1}{2}$	$(q^{p'}+1)/((q+1)(p',q+1))$
${}^2A_{p'}(q)$	$(q+1)\mid(p'+1), p'\geq 5,\ (p',q)\neq(5,2)$	3	$\frac{p'+1}{2}$	$(q^{p'}+1)/(q+1)$
$B_{p'}(3)$		3	$\left[\frac{3p'+5}{4}\right]$	$(3^{p'}-1)/2$
$C_{p'}(q)$	$q=2,3,\ (p',q)\neq(3,2),(5,2)$	3	$\left[\frac{3p'+5}{4}\right]$	$(q^{p'}-1)/(2,q-1)$
$D_{p'}(q)$	$p'\geq 5,\ q=2,3,5,$			
	$(p',q)\neq(5,2), p'\equiv 1 \pmod 4$	3	$\frac{3p'+1}{4}$	$(q^{p'}-1)/(q-1)$
	$p'\geq 5,\ q=2,3,5, p'\equiv 3 \pmod 4$	3	$\frac{3p'+3}{4}$	$(q^{p'}-1)/(q-1)$
$D_{p'+1}(q)$	$q=2,3,\ (p',q)\neq(3,2),(5,2)$	3	$[[\frac{3p'+4}{4}]$	$(q^{p'}-1)/(2,q-1)$
${}^2D_n(2)$	$n=2^m+1,\ m\geq 3$	3	$[[\frac{3n+4}{4}]$	$2^{n-1}+1$
${}^2D_{p'}(3)$	$5\leq p'\neq 2^m+1$	3	$\left[\frac{3p'+4}{4}\right]$	$(3^{p'}+1)/4$
${}^2D_n(3)$	$9\leq n=2^m+1\neq p'$	3	$\left[\frac{3n+4}{4}\right]$	$(3^{n-1}+1)/2$
${}^2D_{p'}(3)$	$p'=2^m+1,\ m\geq 2$	3	$\left[\frac{3p'+4}{4}\right]$	$(3^{p'-1}+1)/2, (3^{p'}+1)/4$
${}^2D_n(q)$	$n=2^m\geq 4,\ (n,q)\neq(4,2)$	4	$\left[\frac{3n+4}{4}\right]$	$(q^n+1)/(2,q+1)$
$E_8(q)$	$q\equiv 2,3 \pmod 5$	5	12	$(q^{10}-q^5+1)/(q^2-q+1),$
				$(q^{10}+q^5+1)/(q^2+q+1),$
				q^8-q^4+1
$E_8(q)$	$q\equiv 0,1,4 \pmod 5$	5	12	$(q^{10}-q^5+1)/(q^2-q+1),$
				$(q^{10}+q^5+1)/(q^2+q+1),$
				$(q^{10}+1)/(q^2+1),$
				q^8-q^4+1

Т а б л и ц а 3

Параметры спорадических и знакопеременных групп с несвязным графом простых чисел

S	$\pi_1(S)$	$n_i(S) = n_i$ $(i \geq 2)$
A_n	$6 < n = p', p'+1, p'+2$; одно из чисел $n, n-2$ не просто	p'
A_n	$n > 6, n = p', p'-2$ — простые числа	$p', p'-2$
M_{11}	$\{2,3\}$	5,11
M_{12}	$\{2,3,5\}$	11
M_{22}	$\{2,3\}$	5,7,11
M_{23}	$\{2,3,5,7\}$	11,23
M_{24}	$\{2,3,5,7\}$	11,23
J_1	$\{2,3,5\}$	7,11,19
J_2	$\{2,3,5\}$	7
J_3	$\{2,3,5\}$	17,19
J_4	$\{2,3,5,7,11\}$	23,29,31,37,43
Ru	$\{2,3,5,7,13\}$	29
He	$\{2,3,5,7\}$	17
McL	$\{2,3,5,7\}$	11
HN	$\{2,3,5,7,11\}$	19
HiS	$\{2,3,5\}$	7,11
Suz	$\{2,3,5,7\}$	11,13
Co_1	$\{2,3,5,7,11,13\}$	23
Co_2	$\{2,3,5,7\}$	11,23
Co_3	$\{2,3,5,7,11\}$	23
Fi_{22}	$\{2,3,5,7,11\}$	13
Fi_{23}	$\{2,3,5,7,11,13\}$	17,23
Fi'_{24}	$\{2,3,5,7,11,13\}$	17,23,29
$O'N$	$\{2,3,5,7\}$	11,19,31
LyS	$\{2,3,5,7,11\}$	31,37,67
F_1	$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,47\}$	41,59,71
F_2	$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$	31,47
F_3	$\{2,3,5,7,13\}$	19,31

Предложения 1 и 2 являются важными инструментами в доказательстве распознаваемости конечных неабелевых простых групп.

Если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r, q) = 1$, то, следуя [11], через $e(r, q)$ обозначим минимальное натуральное число n с условием $q^n \equiv 1 \pmod r$. Говорят, что простое число r с условием $e(r, q) = n$ является *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Обозначим через $r_i(2)$ примитивный простой делитель числа $2^i - 1$, т. е. $r_i(2)$ делит $2^i - 1$ и не делит $2^j - 1$ для каждого $j < i$. По теореме Жигмонди [12] в случае $i \neq 6$ число $r_i(2)$ всегда существует. Нам понадобится также несколько предварительных лемм.

Лемма 1 [13, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N есть группа Фробениуса с ядром Фробениуса F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s \cdot |C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Лемма 2 [14]. *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара $(p^a,\ q^b)$ равна $(3^2,\ 2^3)$, $(p,\ 2^b)$ или $(2^a,\ q)$.*

Лемма 3 [15, лемма 4]. *Для любой степени q простого числа выполняются неравенства*

$$\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1} > q^8-q^4+1 > \frac{q^{10}+1}{q^2+1} > \frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1},$$

причем

$$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1} = q^8-q^7+q^5-q^4+q^3-q+1.$$

Лемма 4. *Группа $C_p(2)$ содержит подгруппу, изоморфную группе Фробениуса $U : \mathbb{Z}_{(2^p-1)}$, где U — нетривиальная 2-группа.*

Доказательство. Пусть G — группа, изоморфная $C_p(2)$. По [16, 4.1.19] группа G содержит подгруппу, изоморфную $U : L_p(2)$, где U — нетривиальная 2-группа. В $L_p(2)$ возьмем циклическую подгруппу Z порядка 2^p-1. Ввиду табл. 1 и табл. 2 группа $U : Z$ искомая. Лемма доказана.

Определяем как в [11] функцию $\eta(x)$ на множестве натуральных чисел: $\eta(x) = x$ при нечетном x и $\eta(x) = x/2$ при четном x.

Лемма 5 [17, предложение 2.4]. *Пусть $r, s \in \pi(C_p(2)) \setminus \{2\}$, $k = e(r, 2)$, $l = e(s, 2)$ и $1 \leq \eta(k) \leq \eta(l)$. Тогда r, s несмежны в $GK(C_p(2))$ тогда и только тогда, когда $\eta(k) + \eta(l) > p$ и l/k не является нечетным положительным целым числом.*

2. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega(C_p(2))$, где $p > 3$ — простое число. Согласно [8] $s(G) = 2$ и $n_2(G) = 2^{p'}-1$. По предложению 1 и [18] существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/F(G) \leq Aut(S)$, $\pi(F(G)) \bigcup \pi(\overline{G}/S) \subseteq \pi_1(G)$ и $s(S) \geq 2$. По данным табл. 1 и табл. 2 $t(2, G) = 3$ и $t(G)$ равно 4 при $p = 5$ и $\left[\dfrac{3p+5}{4}\right]$ при $p > 5$. В соответствии с классификацией конечных простых групп группа S представлена в одной из табл. 1–3. Ввиду предложений 1 и 2 группа S удовлетворяет системе условий

$$\left\{\begin{array}{ll} n_i(S) & = 2^p - 1, \\ t(S) & \geq \left[\dfrac{3p+5}{4}\right] - 1, \end{array}\right. \tag{1}$$

где $i \geq 2$, а параметры $t(S)$ и $n_i(S)$ взяты из таблиц, представленных выше.

Лемма 6. *Все решения системы* (1) *для групп S из табл.* 2 *таковы: $C_p(2)$, $D_p(2)$, $D_{p+1}(2)$.*

Доказательство. Пусть S — группа из табл. 2. Пусть $p = 5$. Тогда уравнение из (1) имеет вид $n_i(S) = 31$.

Пусть $S \cong A_{p'-1}(q)$, $p' \geq 5$, $(p', q) \neq (5, 2), (7, 2), (11, 2)$. Предположим, что $q \geq 3$. Тогда

$$n_2(S) = \frac{q^{p'}-1}{(q-1)(p', q-1)} \geq \frac{q^5-1}{(q-1)^2} = q^3 + 2q^2 + 3q + 4 + \frac{5}{q-1} > 31;$$

противоречие. Если $q = 2$, то $p' \geq 13$ и, следовательно,

$$n_2(S) = \frac{q^{p'}-1}{(q-1)(p', q-1)} \geq 2^{13} - 1 > 31;$$

противоречие. Аналогично показывается, что S не изоморфна группам $A_{p'}(q)$, $p' \geq 5$, $(q-1) \mid (p'+1)$, $(p', q) \neq (5, 2), (7, 2)$; ${}^2A_{p'-1}(q)$, $p' \geq 5$, $(p', q) \neq (5, 2)$; ${}^2A_{p'}(q)$, $p' \geq 5$, $(q+1) \mid (p'+1)$, $(p', q) \neq (5, 2)$.

Пусть $S \cong B_{p'}(3)$. Тогда $n_2(S) = (3^{p'} - 1)/2 = 31$, откуда $3^{p'} = 63$; противоречие. Аналогично показывается, что S не изоморфна группам $C_{p'}(q)$, $q = 2, 3$, $(p', q) \neq (3, 2), (5, 2)$; $D_{p'}(q)$, $p' \geq 5$, $q = 2, 3, 5$, $(p', q) \neq (5, 2)$; $D_{p'+1}(q)$, $q = 2, 3$, $(p', q) \neq (3, 2), (5, 2)$.

Пусть $S \cong {}^2D_n(2)$, $n = 2^m + 1$, $m \geq 3$. Тогда $n = 2^m + 1 \geq 9$,

$$n_2(S) = 2^{n-1} + 1 \geq 2^8 + 1 = 129 > 31;$$

противоречие. Аналогично показывается, что S не изоморфна группам ${}^2D_{p'}(3)$, $5 \leq p' \neq 2^m+1$; ${}^2D_n(3)$, $9 \leq n = 2^m + 1 \neq p'$; ${}^2D_{p'}(3)$, $p' = 2^m + 1$, $m \geq 2$; ${}^2D_n(q)$, $n = 2^m \geq 4$, $(n, q) \neq (4, 2)$.

Пусть $S \cong E_8(q)$. Тогда по лемме 3

$$\frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1} > q^8 - q^4 + 1 > \frac{q^{10} + 1}{q^2 + 1} > \frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1} = q^8 - q^7 + q^5 - q^4 + q^3 - q + 1$$

$$= q^7(q - 1) + q^4(q - 1) + q(q^2 - 1) + 1 \geq 2^7 + 2^4 + 2 \cdot 3 + 1 = 151 > 31;$$

противоречие. Итак, $p \geq 7$. Тогда $n_i(S) \geq 2^7 - 1 = 127$.

Пусть $S \cong A_{p'-1}(q)$, $p' \geq 5$, $(p', q) \neq (5, 2), (7, 2), (11, 2)$. Тогда система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{q^{p'} - 1}{(q - 1)(p', q - 1)} & = & 2^p - 1, \\ \dfrac{p' + 1}{2} & \geq & \left[\dfrac{3p + 5}{4}\right] - 1. \end{cases}$$

Если $p \equiv 1 \pmod 4$, то $\left[\dfrac{3p + 5}{4}\right] = \dfrac{3p + 5}{4}$. Поэтому неравенство из системы (1) равносильно неравенству $p' \geq \dfrac{3p}{2} - \dfrac{1}{2}$. Если $p \equiv 3 \pmod 4$, то $\left[\dfrac{3p + 5}{4}\right] = \dfrac{3p + 3}{4}$. Поэтому неравенство из системы (1) равносильно неравенству $p' \geq \dfrac{3p}{2} - \dfrac{3}{2}$. Значит, для любого нечетного p имеем $p' \geq \dfrac{3p}{2} - \dfrac{3}{2}$, поэтому

$$2^p - 1 = \frac{q^{p'} - 1}{(q - 1)(p', q - 1)} \geq \frac{q^{p'} - 1}{(q - 1)^2} \geq q^{p'-2} - 1.$$

Таким образом, $2^p - 1 \geq q^{p'-2} - 1$. Учитывая неравенство $p' \geq \dfrac{3p}{2} - \dfrac{3}{2}$, получаем

$$2^p \geq q^{p'-2} \geq q^{\frac{3p}{2} - \frac{7}{2}} \geq 2^{\frac{3p}{2} - \frac{7}{2}}.$$

Отсюда $2^{\frac{p}{2} - \frac{7}{2}} \leq 1$. Значит, $p = 7$. Отсюда $p' \geq 11$. Поэтому $q^9 \leq q^{p'-2} \leq 2^7$; противоречие. Аналогично показывается, что S не изоморфна $A_{p'}(q)$, $p' \geq 5$, $(q - 1) \mid (p' + 1)$, $(p', q) \neq (5, 2), (7, 2)$.

Пусть $S \cong {}^2A_{p'-1}(q)$, $p' \geq 5$, $(p', q) \neq (5, 2)$. Тогда система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{q^{p'} + 1}{(q + 1)(p', q + 1)} & = & 2^p - 1, \\ \dfrac{p' + 1}{2} & \geq & \left[\dfrac{3p + 5}{4}\right] - 1. \end{cases}$$

Из неравенства системы (1), как и в предыдущем случае, получаем $p' \geq \dfrac{3p}{2} - \dfrac{3}{2}$. Предположим, что $q \geq 3$. Тогда

$$2^p - 1 = \frac{q^{p'} + 1}{(q + 1)(p', q + 1)} \geq \frac{q^{p'} + 1}{(q + 1)^2} \geq q^{p'-3} - 1.$$

Таким образом, $2^p - 1 \geq q^{p'-3} - 1$. Учитывая неравенство $p' \geq \dfrac{3p}{2} - \dfrac{3}{2}$, получаем

$$2^p \geq q^{p'-3} > 2^{p'-3} \geq 2^{\frac{3p}{2}-\frac{9}{2}}.$$

Отсюда $2^{\frac{p}{2}-\frac{9}{2}} \leq 1$. Значит, $p = 7$. Отсюда $p' \geq 11$. Поэтому $3^8 \leq q^{p'-3} \leq 2^7$; противоречие. Итак, $q = 2$ и $(p', q+1) = (p', 3) = 1$. Теперь уравнение из системы (1) имеет вид $\dfrac{2^{p'}+1}{3} = 2^p - 1$. Отсюда $2^{p'} = 4(3 \cdot 2^{p-2} - 1)$; противоречие. Аналогично показывается, что S не изоморфна ${}^2A_{p'}(q)$, $p' \geq 5$, $(q+1) \mid (p'+1)$, $(p', q) \neq (5, 2)$.

Пусть $S \cong B_{p'}(3)$. Тогда $\dfrac{3^{p'}-1}{2} = 2^p - 1$. Отсюда $2^{p+1} - 3^{p'} = 1$. По лемме 2 $p+1 = 1$ или $p' = 1$; противоречие.

Пусть $S \cong C_{p'}(q)$, $q = 2, 3$, $(p', q) \neq (3, 2), (5, 2)$. Если $q = 3$, то получаем противоречие, как в предыдущем случае. Если $q = 2$, то $p' = p$ и $S \cong C_p(2)$.

Пусть $S \cong D_{p'}(q)$, $p' \geq 5$, $q = 2, 3, 5$, $(p', q) \neq (5, 2)$. Предположим, что $p' \equiv 1 \pmod 4$. Тогда система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{q^{p'}-1}{q-1} &= 2^p - 1, \\ t(S) &= \left[\dfrac{3p'+1}{4}\right] \geq \left[\dfrac{3p+5}{4}\right] - 1. \end{cases}$$

Если $q = 2$, то $p' = p$ и $S \cong D_p(2)$. Если $q = 3$, то получаем противоречие, как в случае $S \cong B_{p'}(3)$. Предположим, что $q = 5$. Тогда $\dfrac{5^{p'}-1}{4} = 2^p - 1$. Из неравенства в системе (1) следует, что $p' \geq p$. Следовательно,

$$3 = 2^{p+2} - 5^{p'} \leq 2^{p+2} - 5^p = 2^p\left(4 - \left(\frac{5}{2}\right)^p\right) \leq 2^p\left(4 - \left(\frac{5}{2}\right)^7\right) < 0;$$

противоречие. Предположим, что $p' \equiv 3 \pmod 4$. Тогда система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{q^{p'}-1}{q-1} &= 2^p - 1, \\ t(S) &= \dfrac{3p'+3}{4} \geq \left[\dfrac{3p+5}{4}\right] - 1. \end{cases}$$

Если $q = 2$, то $p' = p$ и $S \cong D_p(2)$. В случаях $q = 3$ и $q = 5$ получаем противоречие, как при $p' \equiv 1 \pmod 4$.

Пусть $S \cong D_{p'+1}(q)$, $q = 2, 3$, $(p', q) \neq (3, 2), (5, 2)$. Тогда $\dfrac{q^{p'}-1}{(2, q-1)} = 2^p - 1$. Если $q = 2$, то $p' = p$ и $S \cong D_{p+1}(2)$. Если $q = 3$, то получаем противоречие, как в случае $S \cong B_{p'}(3)$.

Пусть $S \cong {}^2D_n(2)$, $n = 2^m + 1$, $m \geq 3$. Тогда $2^{n-1} + 1 = 2^p - 1$. Отсюда $2^{n-1} + 2$ делится на 32; противоречие.

Пусть $S \cong {}^2D_{p'}(3)$, $5 \leq p' \neq 2^m + 1$. Тогда система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{3^{p'}+1}{4} &= 2^p - 1, \\ t(S) = \left[\dfrac{3p'+4}{4}\right] &\geq \left[\dfrac{3p+5}{4}\right] - 1. \end{cases}$$

Из неравенства в системе (1) следует, что $p' \geq p$. Следовательно,

$$5 = 2^{p+2} - 3^{p'} \leq 2^{p+2} - 3^p = 2^p\left(4 - \left(\frac{3}{2}\right)^p\right) \leq 2^p\left(4 - \left(\frac{3}{2}\right)^7\right) < 0;$$

противоречие.

Пусть $S \cong {}^2D_n(3)$, $9 \le n = 2^m + 1 \ne p'$. Тогда $\dfrac{3^{n-1}+1}{2} = 2^p - 1$. Отсюда $3^{n-1} + 3 = 2^{p+1}$; противоречие.

Пусть $S \cong {}^2D_{p'}(3)$, $p' = 2^m + 1$, $m \ge 2$. Тогда $2^p - 1$ равно $\dfrac{3^{p'-1}+1}{2}$ или $\dfrac{3^{p'-1}+1}{4}$. В первом случае $3^{p'-1} + 3 = 2^{p+1}$; противоречие. В втором — получаем противоречие, как при $S \cong {}^2D_{p'}(3)$, $5 \le p' \ne 2^m + 1$.

Пусть $S \cong {}^2D_n(q)$, $n = 2^m \ge 4$, $(n,q) \ne (4,2)$. Тогда система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{q^n+1}{(2,q+1)} & = & 2^p - 1, \\ t(S) & = & \left[\dfrac{3n+4}{4}\right] \ge \left[\dfrac{3p+5}{4}\right] - 1. \end{cases}$$

Если q четно, то $q^n + 1 = 2^p - 1$ и, следовательно, $q^n + 2$ делится на 128; противоречие. Значит, q нечетно и $\dfrac{q^n+1}{2} = 2^p - 1$. Из неравенства в системе (1) следует, что $n \ge p-1$. Теперь следующая цепочка неравенств приводит к противоречию

$$3 = 2^{p+1} - q^n \le 2^{p+1} - 3^{p-1} = 2^{p-1}\Bigl(4 - \Bigl(\frac{3}{2}\Bigr)^{p-1}\Bigr) \le 2^{p-1}\Bigl(4 - \Bigl(\frac{3}{2}\Bigr)^{6}\Bigr) < 0.$$

Пусть $S \cong E_8(q)$. Тогда $12 = t(S) \ge \left[\dfrac{3p+5}{4}\right] - 1$. Отсюда $p \in \{5, 7, 11, 13\}$. Следовательно, $n_2(G) \in \{31, 127, 2047, 8191\}$. Из уравнения системы (1) имеем, что

$$2^p - 1 \in \Bigl\{\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}, q^8 - q^4 + 1, \frac{q^{10}+1}{q^2+1}, \frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}\Bigr\}.$$

По лемме 3 выполняется цепочка неравенств

$$\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1} > q^8 - q^4 + 1 > \frac{q^{10}+1}{q^2+1} > \frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}.$$

Поэтому множество $\{n_i(S) \mid i \ge 2\}$ принадлежит отрезку $[151, 331]$ при $q = 2$, отрезку $[4561, 8401]$ при $q = 3$ и полуинтервалу $[49981, \infty)$ при $q \ge 4$. Так как $n_2(G) \in \{n_i(S) \mid i \ge 2\}$, то $p = 13$, $n_2(G) = 8191$, $q = 3$. Но $q^8 - q^4 + 1 = 6481 < n_2(G)$, а $\dfrac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1} = 8401 > n_2(G)$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть S — конечная простая неабелева группа лиева типа над полем характеристики r из табл.* 1. *Тогда система* (1) *имеет в точности следующие решения:*

(а) если $r \ne 2$, то $p = 5$ и $S \cong A_1(31^f)$, $A_1(61)$, $A_2(5)$, $A_3(5)$ или $G_2(5)$;

(б) если $r = 2$, то либо $p = 5$ и $S \cong A_1(32)$, $A_4(2)$, ${}^2B_2(32)$, либо $p = 7$ и $S \cong E_7(2)$.

Доказательство. Пусть $p = 5$. Тогда $n_i(S) = 31$.

Пусть $S \cong A_1(q)$, $3 < q \equiv \epsilon \pmod 4$, $\epsilon = \pm 1$. Тогда $r = 31$ или $(q+\epsilon)/2 = 31$. Таким образом, $r = 31$ или $q = 61$. Отсюда $S \cong A_1(31^f)$ или $S \cong A_1(61)$.

Если $S \cong A_1(2^f)$, $f \ge 2$, то $S \cong A_1(32)$. Если $S \cong A_2(2)$, то $n_i(S) \in \{3, 7\}$; противоречие. Аналогично показывается, что S не изоморфна группам $A_7(2)$, ${}^2A_4(2)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2D_4(2)$, ${}^2D_5(2)$, $F_4(2)$, $A_{10}(2)$, $A_2(4)$, ${}^2E_6(2)$, $E_7(2)$, $E_7(3)$, ${}^2F_4(8)$; противоречие.

Пусть $S \cong A_2(q)$, $q \ne 2, 4$. Предположим, что $q \ge 11$. Тогда

$$n_2(S) = \frac{q^3-1}{(q-1)(3,q-1)} \ge \frac{q^2+q+1}{3} \ge \frac{11^2+11+1}{3} = \frac{133}{3} > 44 > 31;$$

противоречие. Если $q \in \{3, 7, 8, 9\}$, то $n_2(S) \in \{13, 19, 73, 91\}$; противоречие. Значит, $S \cong A_2(5)$.

Пусть $S \cong A_3(q)$, $q = 2, 3, 5$. Тогда $S \cong A_3(5)$. Непосредственно из табл. 1 следует, что группы $A_4(2)$, $C_5(2)$, $D_5(2)$, $D_6(2)$ являются решениями системы (1).

Пусть $S \cong^2 A_2(q)$, $q \neq 2$. Предположим, что $q \geq 11$. Тогда

$$n_2(S) = \frac{q^3+1}{(q+1)(3, q+1)} \geq \frac{q^2-q+1}{3} \geq \frac{11^2-11+1}{3} = 37 > 31;$$

противоречие. Если $q < 11$, то $n_2(S) \in \{7, 13, 19, 43, 73\}$; противоречие.

Пусть $S \cong G_2(q)$, $2 < q \equiv \epsilon \pmod 3$, $\epsilon = \pm 1$. Тогда $q^2 - \epsilon q + 1 = 31$ и, следовательно, $q = 5$ и $S \cong G_2(5)$. Если $S \cong G_2(q)$, где $q = 3^f$, то $q^2 \pm q + 1 = 31$; противоречие. Аналогично показывается, что S не изоморфна группам $F_4(q)$, где q нечетно, ${}^2G_2(q)$, где $q > 3$, ${}^2F_4(q)$, где $q > 2$; противоречие.

Пусть $S \cong^2 B_2(q)$, где $q = 2^{2m+1} > 2$. Тогда $q - 1 = 31$ или $q \pm \sqrt{2q} + 1 = 31$. В первом случае $m = 2$, во втором случае m нецелое. Значит, $S \cong^2 B_2(32)$.

Пусть $S \cong^2 E_6(q)$, $q > 2$. Тогда

$$n_2(S) = \frac{q^6-q^3+1}{(3, q+1)} \geq \frac{q^6-q^3+1}{3} \geq \frac{3^3(3^3-1)+1}{3} > 234 > 31;$$

противоречие. Аналогично показывается, что S не изоморфна $S \cong E_6(q)$.

Пусть $p \geq 7$. Тогда $n_i(S) = 2^p - 1 \geq 127$ и $t(S) \geq \left[\frac{3p+5}{4}\right] - 1 \geq 5$.

Предположим, что $p > 7$. Тогда $p \geq 11$ и $t(S) \geq 8$. По табл. 1 либо $S \cong E_7(2)$ и $n_i(S) \in \{73, 127\}$, либо $S \cong E_7(3)$ и $n_i(S) \in \{757, 1093\}$. Но $2^p - 1 \geq 2^{11} - 1 = 2047$; противоречие.

Итак, $p = 7$ и $n_i(S) = 2^7 - 1 = 127$. По табл. 1 либо $t(S) = 8$, либо $t(S) = 5$. В первом случае $S \cong E_7(2)$, что не противоречит лемме. Второй случай не возникает, так как $n_i(S) = 127$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *S не изоморфна спорадической группе.*

Доказательство. Пусть S изоморфна спорадической группе. Предположим, что $p = 5$. Так как $n_i(S) = 2^p - 1 = 31$, то по табл. 3 и предложению 1 S изоморфна одной из следующих групп: J_4, $O'N$, LyS, F_2, F_3. Но $\pi(S) \subseteq \pi(C_5(2)) = \{2, 3, 5, 7, 11, 17, 31\}$, что противоречит табл. 3. Итак, $p \geq 7$. Так как $2^p - 1 \geq 127$, то по табл. 3 S не изоморфна спорадической группе. Лемма доказана.

Лемма 9. *S не изоморфна A_n при $n \geq 5$.*

Доказательство. Предположим, что S изоморфна A_n. Так как $p \geq 5$, то $2^p - 1 \geq 31$. Поэтому $n \geq 31$. Рассмотрим табл. 3. Если $s(A_n) = 2$, то $n \in \{p', p'+1, p'+2\}$, одно из чисел n и $n-2$ непросто и $2^p - 1 = p'$. Если $s(A_n) = 3$, то $n \in \{p', p'-2\}$, p' и $p'-2$ — простые числа и $2^p - 1 \in \{p', p'-2\}$. По лемме 5 и [10, табл. 4] из $\{2, r_p(2), r_{2p}(2)\}$ — коклика в $GK(G)$. Заметим, что $r_{2p}(2)$ делит $\frac{2^p+1}{3}$.

Предположим, что $2^p - 1 = p' \geq 31$. Тогда $r_{2p}(2)$ делит $\frac{2^p+1}{3} = \frac{p'+2}{3}$. Имеем

$$2 + r_{2p}(2) \leq 2 + \frac{p'+2}{3} = \frac{p'+8}{3} \leq p' - 4 \leq n - 2.$$

Значит, вершины 2 и $r_{2p}(2)$ смежны в $GK(S)$, что противоречит их несмежности в $GK(G)$. Итак, $2^p - 1 = p' - 2$. Тогда $p' = 2^p + 1$, поэтому p' делится на 3; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если S — простая группа лиева типа, то $S \cong C_p(2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r \neq 2$. По леммам 6 и 7 $p = 5$ и S изоморфна одной из следующих групп: $A_1(31^f)$, $A_1(61)$, $A_2(5)$, $A_3(5)$, $G_2(5)$. По лемме 5 и [10, табл. 4,8] $\{2, 11, 31\}$ и $\{7, 11, 17, 31\}$ — коклики в $C_5(2)$.

Пусть $S \cong A_1(31^f)$. Предположим, что $f = 1$. Тогда $\pi(S) = \{2, 3, 5, 31\}$, поэтому $7, 11 \in \pi(F(G))$. Так как $F(G)$ нильпотентна, то $7 \cdot 11 = 77 \in \omega(F(G))$; противоречие. Итак, $f \geq 2$. Заметим, что $\pi(q^2-1) \subseteq \pi_1(C_5(2)) = \{2, 3, 5, 7, 11, 17\}$, $e(11, 31) = 5$, $e(7, 31) = 6$ и $e(17, 31) = 16$. Если $f = 5$, то $41 \in \pi(q+1)) \nsubseteq \pi_1(C_5(2))$; противоречие. Если $f = 6$, то $19 \in \pi(q+1)) \nsubseteq \pi_1(C_5(2))$; противоречие. Если $f = 16$, то $13 \in \pi(q-1)) \nsubseteq \pi_1(C_5(2))$; противоречие. По теореме Жигмонди при $f \neq 1, 5, 6, 16$ существует простой делитель t числа $q - 1 = r^f - 1$ и $t \notin \{2, 3, 5, 7, 11, 17\} = \pi_1(C_5(2))$; противоречие.

Если $S \cong A_1(61)$, то $61 \in \pi(G)$; противоречие.

Пусть $S \cong A_2(5)$. Тогда $\pi(S) = \{2, 3, 5, 31\}$, поэтому $7, 11 \in \pi(F(G))$. Так как $F(G)$ нильпотентна, то $7 \cdot 11 = 77 \in \omega(F(G))$; противоречие.

Если $S \cong A_3(5)$, то $13 \in \pi(G)$; противоречие.

Пусть $S \cong G_2(5)$. Тогда $\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$, поэтому $11, 17 \in \pi(F(G))$. Так как $F(G)$ нильпотентна, то $11 \cdot 17 = 187 \in \omega(F(G))$; противоречие.

Пусть $r = 2$. По леммам 6 и 7 S изоморфна одной из следующих групп: $A_1(32)$, $A_4(2)$, ${}^2B_2(32)$ при $p = 5$; $E_7(2)$ при $p = 7$; $S \cong C_p(2)$, $D_{p+1}(2)$, $D_p(2)$ для любого p.

Пусть $p = 5$. Пусть $S \cong A_1(32)$. Тогда $\pi(S) = \{2, 3, 11, 31\}$, поэтому $7, 17 \in \pi(F(G))$. Так как $F(G)$ нильпотентна, то $7 \cdot 17 = 119 \in \omega(F(G))$; противоречие.

Пусть $S \cong A_4(2)$. Тогда $\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$, поэтому $11, 17 \in \pi(F(G))$. Так как $F(G)$ нильпотентна, то $11 \cdot 17 = 187 \in \omega(F(G))$; противоречие.

Пусть $S \cong^2 B_2(32)$. Тогда $41 \in \pi(G)$; противоречие.

Пусть $p = 7$ и $S \cong E_7(2)$. Тогда $19 \in \omega(E_7(2))$. Так как $e(19, 2) = 18$, то 19 не делит $|C_7(2)|$; противоречие.

Пусть $S \cong D_{p+1}(2)$. По [17, предложение 2.5] вершины $r_{p-1}(2)$ и $r_{p+3}(2)$ смежны в $GK(D_{p+1}(2))$. По лемме 5 вершины $r_{p-1}(2)$ и $r_{p+3}(2)$ несмежны в $GK(C_p(2))$; противоречие.

Пусть $S \cong D_p(2)$. По лемме 5 и [10, табл. 4] $\{2, r_p(2), r_{2p}(2)\}$ — коклика в $GK(G)$. По предложению 2 $r_{2p}(2) \notin \pi(F(G))$. Так как $r_{2p}(2) \in \pi(G)$ и $r_{2p}(2) \notin \pi(Aut(S))$, то $r_{2p}(2) \in \pi(F(G))$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 11. *$G/O_2(G) \cong C_p(2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $G/F(G) \neq S$, то по [19] граф простых чисел группы $G/F(G)$ связен. Поэтому $G/F(G) \cong S$.

Пусть $F(G) \neq 1$. Можно предполагать, что $F(G)$ — нетривиальная элементарная абелева q-группа для некоторого простого числа q и $G/F(G)$ действует на $F(G)$ точно и неприводимо. Пусть $q \neq 2$. По лемме 4 существует подгруппа Фробениуса $U : Z_m$ группы $C_p(2)$, где U — нетривиальная 2-группа и $m = 2^p - 1$. Поэтому $q \cdot r_p(2) \in \omega(G)$ по лемме 1 и, следовательно, $\omega(G) \neq \omega(C_p(2))$. Значит, $F(G) = O_2(G)$.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7.)
2. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 998–1003.
3. **Васильев А.В.** О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 315–324.
4. **Васильев А.В., Горшков И.Б.** О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 292–299.

5. **Мазуров В.Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
6. **Зиновьева М.Р.** Распознавание по спектру простых групп $C_p(3)$// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 88–55.
7. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
8. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
9. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
10. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
11. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
12. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd. 3, no. 1. S. 265–284.
13. **Мазуров В.Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
14. **Gerono G.C.** Note sur la r*é*solution en nombres entiers et positifs de l'*é*quation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
15. **Зиновьева М. Р., Шен Р., Ши В.** Распознавание простых групп $B_p(3)$ по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 303–315.
16. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 303 p.
17. **Васильев А. В., Вдовин Е. П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы: препринт № 225. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2009. 34 с.
18. **Алеева М.Р.** О конечных простых группах с множеством порядков элементов как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 3. С. 323–339.
19. **Lucido M.S.** Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. P. 1–22.

Зиновьева Марианна Рифхатовна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Поступила 05.04.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 519.17+512.54

О ГРАФЕ КОММУТИРОВАНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ TI-ПОДГРУПП В ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ[1]

Н. Д. Зюляркина

Изучается граф коммутирования $\Gamma(A)$ циклической TI-подгруппы A порядка 4 в конечной группе G с квазипростой обобщенной подгруппой Фиттинга $F^*(G)$. Доказано, что если $F^*(G)$ — линейная группа, то граф $\Gamma(A)$ является кокликой или реберно регулярным, но не кореберно регулярным графом.

Ключевые слова: конечная группа, циклическая TI-подгруппа, граф коммутирования.

N. D. Zyulyarkina. On the commutation graph of cyclic TI-subgroups in linear groups.

We study the commutation graph $\Gamma(A)$ of a cyclic TI-subgroup A of order 4 in a finite group G with quasisimple generalized Fitting subgroup $F^*(G)$. It is proved that, if $F^*(G)$ is a linear group, then the graph $\Gamma(A)$ is either a coclique or an edge-regular but not coedge-regular graph.

Keywords: finite group, cyclic TI-subgroup, commutation graph.

Введение

Подгруппа A группы G называется *TI-подгруппой* в G, если $A \cap A^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus N_G(A)$. В случае, когда A — TI-подгруппа четного порядка конечной группы G, A называется *подгруппой корневого типа*, если индекс $|A : N_A(A^g)|$ нечетен для любого элемента $g \in G$, для которого число $|N_A(A^g)|$ четно.

Конечные группы с TI-подгруппой A, являющейся 2-группой, изучались в [1–8], и в настоящий момент наименее исследованными остались случаи, когда подгруппа A либо циклическая, либо элементарная абелева. Заметим, что если A — циклическая 2-группа, то достаточно изучить ситуацию, когда $|A| = 4$.

В дальнейшем будем предполагать, что G — конечная группа, $A \le G$, $A = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$ и $a_0 = a^2$. Непосредственно из определений вытекают следующие две леммы.

Лемма 1. *Подгруппа A является TI-подгруппой в G тогда и только тогда, когда она нормальна в $C_G(a_0)$.*

Лемма 2. *Подгруппа A является подгруппой корневого типа в G тогда и только тогда, когда условие $[a_0, a_0^g] = 1$ для $g \in G$ влечет $[A, A^g] = 1$.*

Заметим, что в случае, когда $C_G(a_0) = C_G(A)$, подгруппа A всегда будет подгруппой корневого типа в G.

Далее будем предполагать, что A есть TI-подгруппа в G.

Одним из основных методов исследования групп, содержащих TI-подгруппу, выступает индукция. Кроме того, существенно различаются случаи, когда G содержит компоненты, а когда нет. Справедлива

Лемма 3 [2, доказательство леммы 1.1]. *Подгруппа A нормализует любую компоненту группы G.*

[1]Работа выполнена при поддержке программы отделения математических наук РАН (проект 09-Т-1-1004) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1007) и с НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009).

Ввиду леммы 3 исследование групп G, содержащих компоненты, сводится к изучению групп вида $G = F^*(G)A$, где $F^*(G)$ — квазипростая группа. Поэтому для построения индукционных предположений полезно иметь информацию о том, для каких известных квазипростых групп возможна такая конструкция и какими свойствами в таких группах обладает подгруппа A.

В дальнейшем будем предполагать, что группа G представима в виде $G = XA$, где $X = F^*(G)$ — частное группы $SL_n(q)$ по ее центральной подгруппе порядка d, q нечетно и A — циклическая TI-подгруппа порядка 4 в G, не лежащая в $Z(F^*(G))$. Через X^* обозначим множество таких расширений группы X, что для группы $\tilde{X}$ из X^* любой элемент из $\tilde{X} \setminus X$ индуцирует на X внешний внутренне-диагональный автоморфизм.

Возможности для $G = F^*(G)A$ описаны в [2–4]. Как следует из этого описания, в большинстве случаев элемент a индуцирует на $F^*(G)$ внутренний или внутренне-диагональный автоморфизм и лишь для некоторых классических групп небольшой размерности a индуцирует внутренне-полевой или внутренне-графовый автоморфизм.

Ввиду того что классические группы можно представить как группы автоморфизмов векторных пространств, нам понадобятся сведения об инволюциях и полуинволюциях в таких группах.

Пусть V — векторное пространство размерности n над полем $k = GF(q)$, q нечетно, $\tilde{Y} = GL_n(k)$ и $Y \leq \tilde{Y}$. Обозначим через I_V тождественный автоморфизм пространства V, а через γI_V ($\gamma \in k^*$) — автоморфизм, при котором каждый вектор из V умножается на γ. Неединичные элементы w из Y, для которых $w^2 = \gamma I_V$, назовем *полуинволюциями.* Ясно, что инволюции из Y — это полуинволюции. Полуинволюции, не являющиеся инволюциями, будем называть *истинными.*

Как показано в [5, разд. 3A], каждой инволюции $w \in Y$ соответствуют два подпространства V_w^+ и V_w^- из V:

$$V_w^+ = C_V(w) = \{v \in V \mid w(v) = v\}, \quad V_w^- = [V, w] = \{v \in V \mid w(v) = -v\}.$$

Тогда имеет место разложение $V = V_w^+ \oplus V_w^-$, и *тип* инволюции w определяется как $dim\ V_w^-$. Для инволюции w типа m базис в V назовем *стандартным*, если в нем первые $n - m$ векторов выбраны из V_w^+, а последние m векторов — из V_w^-.

Пусть теперь $w \in Y$ — истинная полуинволюция и $w^2 = \gamma I_V$. Если $\gamma = \beta^2$ для некоторого элемента β из k, то $w = \beta I_V w_1$, где w_1 — инволюция из $\tilde{Y}$. Определим в этом случае *тип* w как минимум из типов двух инволюций w_1 и $-I_V w_1$. *Стандартный базис* для w определяется как стандартный базис той из инволюций w_1 или $-I_V w_1$, тип которой минимален. Если $\gamma \notin (k^*)^2$, то *тип* для w считается равным 0. Далее считается, что a_0 соответствует инволюции типа 1 или $n - 1$ в $GL_n(q)$.

Для полуинволюции $w \in GL_n(q)$ через C_w обозначим группу $C_{GL_n(q)}(w)$.

Для изучения групп с заданными свойствами можно исследовать связанные с ними комбинаторные объекты (графы, схемы, геометрии и др.) Одним из таких объектов является граф коммутирования. Мы рассматриваем только неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Если G — группа и A — TI-подгруппа в G, то *граф коммутирования* $\Gamma(A) = \Gamma_G(A)$ определяется как граф, в котором вершинами служат подгруппы, сопряженные с A в G, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда они различны и поэлементно коммутируют.

Граф коммутирования инволюций $\Gamma(a_0)$ определяется как $\Gamma(\langle a_0 \rangle)$. Заметим, что если A является подгруппой корневого типа, то граф $\Gamma(A)$ изоморфен графу $\Gamma(a_0)$.

Граф Γ называется *полным графом* или *кликой*, если в нем любые две различные вершины смежны. Граф Γ называется *кокликой*, если в нем вершины попарно не смежны.

Окрестностью вершины u графа Γ называется множество $[u]$ всех вершин графа Γ, смежных с u. Для двух смежных (соответственно несмежных) вершин u и v графа Γ обозначим через $\lambda(u, v)$ (соответственно $\mu(u, v)$) число элементов в $[u] \cap [v]$.

Особое внимание в теории графов уделяется графам с различными условиями симметричности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если для любой его вершины v выполняется равенство $|[v]| = k$. Регулярный граф степени 1 называется *лестничным графом.* Граф Γ называется *реберно регулярным с параметрами* (k, λ) если он регулярен степени k и для любых смежных вершин u и v выполняется равенство $\lambda(u, v) = \lambda$. Граф Γ называется *кореберно регулярным с параметрами* (k, μ), если он регулярен степени k и для любых двух его несмежных вершин u и v выполняется равенство $\mu(u, v) = \mu$. Граф Γ называется *вершинно* (соответственно *реберно, кореберно) транзитивным*, если группа его автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин (соответственно упорядоченных ребер, коребер).

Очевидно, что вершинно транзитивный граф Γ регулярен, а реберная (кореберная) транзитивность влечет равенство значений $\lambda(u, v)$ $(\mu(u, v))$ для любых смежных (различных несмежных) вершин u и v из Γ.

В данной статье начато изучение графов коммутирования циклических TI-подгрупп в группах, близких к простым, на предмет их симметричности. Доказана

Теорема 1. *Пусть $G = XA$, X — частное группы $SL_n(q)$ по ее центральной подгруппе, q нечетно. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $n = 2$ и $\Gamma(A)$ является кокликой;

(2) $n \geq 3$, $G \in X^*$, $\Gamma(A)$ является вершинно и реберно транзитивным графом диаметра 2, но не является кореберно регулярным графом, причем для двух несмежных вершин c и g графа $\Gamma(A)$ число $\mu(c, g)$ равно $(q^{n-2} - 1)q^{n-2}/(q - 1)$ или $(q^{n-2} - 1)q^{n-3}/(q - 1)$;

(3) $n \geq 3$, $G \notin X^*$ и $\Gamma(A)$ является кокликой.

1. Доказательство теоремы 1 в случае, когда a индуцирует на X внутренне-диагональный автоморфизм

В этом разделе будем считать, что X — частное группы $SL_n(q)$ по ее центральной подгруппе и $G \in X^*$. Ввиду [4] можно считать, что $q \equiv 1$ $(mod\ 4)$.

Теорема 2. *Если $n = 2$, то $\Gamma(A)$ является кокликой. Если $n \geq 3$, то $\Gamma(A)$ является вершинно и реберно транзитивным графом диаметра 2, но не является кореберно регулярным графом, причем для двух несмежных вершин c и g графа $\Gamma(A)$ число $\mu(c, g)$ равно $(q^{n-2} - 1)q^{n-2}/(q - 1)$ или $(q^{n-2} - 1)q^{n-3}/(q - 1)$.*

Доказательство теоремы 2 проведем в виде последовательности лемм.

Лемма 4. *Подгруппа A является TI-подгруппой корневого типа, за исключением случая, когда $X \cong PSL_2(q)$.*

Доказательство. При указанных ограничениях $C_G(a_0) = C_G(a)$, поэтому лемма следует из леммы 2. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $X \cong PSL_2(q)$, то $\Gamma(A)$ является кокликой.*

Доказательство. Из [4, доказательство теоремы 2.1] следует, что $C_G(a_0)$ является диэдральной группой. Поэтому A является единственной подгруппой из A^G, содержащейся в $C_G(a_0)$. Лемма доказана.

Лемма 6 [4]. *Случай $X = SL_2(q)$ невозможен.*

Лемма 7. *Пусть $G = XA = XB$, где a_0 соответствует инволюции типа 1 в $GL_n(q)$, B — циклическая TI-подгруппа порядка 4 из G с инволюцией b_0, соответствующей инволюции типа $n - 1$ в $GL_n(q)$. Тогда графы $\Gamma(A)$ и $\Gamma(B)$ изоморфны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $n = 2$, то $\Gamma(A)$ и $\Gamma(B)$ совпадают. Пусть $n > 2$, a_0 соответствует инволюции u типа 1 в $GL_n(q)$, а b_0 — инволюции v типа $n-1$ в $GL_n(q)$. Можно считать, что $v = -I_V u$. Для любого $g \in G$ выполняется равенство $v^g = -I_V u^g$. Очевидно, что отображение $u^g \to -I_V u^g$ $(g \in G)$ дает требуемый изоморфизм графов. Лемма доказана.

Далее будем считать, что a_0 соответствует инволюции типа 1 в $SL_n(q)$ и $n > 2$. Через Γ обозначим граф $\Gamma(a_0)$, изоморфный графу $\Gamma(A)$.

Лемма 8. *Пусть (u, v) и (u', v') — две пары различных коммутирующих инволюций типа 1 из $GL_n(q)$. Тогда они сопряжены с помощью элемента из $SL_n(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По [5, разд. 3A] инволюции одинакового типа из $GL_n(q)$ сопряжены посредством элемента из $SL_n(q)$. Поэтому существует такой элемент x из $SL_n(q)$, что $u^x = u'$. Заметим, что v^x централизует u'. По [5, разд. 3A] заключаем, что v^x и v содержатся в $GL(V_{u'}^+)$ и поэтому сопряжены посредством элемента y из $SL(V_{u'}^+)$, который централизует u'. Окончательно получаем, что $(u, v)^{xy} = (u', v')$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Граф Γ является вершинно и реберно транзитивным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что любой элемент группы G индуцирует на Γ автоморфизм посредством сопряжения. Вершинная транзитивность графа Γ следует из определения Γ, а его реберная транзитивность — из леммы 7 и 8. Лемма доказана.

Следствие. *Граф Γ является реберно регулярным.*

Лемма 10. *Инволюции u и v типа 1 из $GL_n(q)$ коммутируют тогда и только тогда, когда v централизует V_u^-, V_u^+ инвариантно относительно v и V_v^- является одномерным подпространством в V_u^+.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из строения централизатора инволюции в $GL_n(q)$, описанного в [5, разд. 3A]. Лемма доказана.

Лемма 11. *Граф Γ не является кореберно регулярным, причем для его несмежных вершин c и g число $\mu(c, g)$ равно $(q^{n-2}-1)q^{n-2}/(q-1)$ или $(q^{n-2}-1)q^{n-3}/(q-1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим две несмежные вершины c и g из Γ, которым соответствуют инволюции u и v типа 1 в $GL_n(q)$. Пусть $L_1 = V_u^+$, $L_2 = V_v^+$, $W_1 = V_u^- = \langle w_1 \rangle$ и $W_2 = V_v^- = \langle w_2 \rangle$. Рассмотрим подпространство $L = L_1 \cap L_2$. Так как $dim\ L_1 = dim\ L_2 = n-1$, то $dim\ L \geq n-2$.

С л у ч а й 1. Подпространства L_1 и L_2 совпадают и $dim\, L = n-1$. В этом случае $w_2 = w_1 + e$, где $e \in L$. Определим количество инволюций типа 1, централизующих u и v. Пусть t — такая инволюция. По лемме 10 инволюция t централизует w_1 и w_2. Поэтому t централизует e. Следовательно, t централизует в L подпространство размерности $n-2$, содержащее e, и инвертирует одномерное подпространство в L. Верно и обратное: если инволюция централизует в L векторы w_1 и w_2 и подпространство размерности $n-2$, содержащее e, и инвертирует одномерное подпространство, то она централизует u и v. Поэтому для определения количества таких инволюций достаточно найти число способов представления L в виде $L = L' \oplus L''$, где $dim\ L' = 1$, $dim\ L'' = n-2$ и $e \in L''$. Подпространство L' можно выбрать $(q^{n-1}-q)/(q-1)$ способами. Пусть L' уже выбрано. Количество способов выбора последовательности векторов $e, e_1, \ldots e_{n-3}$, образующей базис в L'', равно $(q^{n-1}-q^2)(q^{n-1}-q^3)\ldots(q^{n-1}-q^{n-2})$. Так как в L'' существует в точности $(q^{n-2}-q)(q^{n-2}-q^2)\ldots(q^{n-2}-q^{n-3})$ таких базисов, то число способов выбора подпространства L'' равно q^{n-3}. Поэтому число инволюций типа 1, централизующих u и v, равно $(q^{n-1}-q)q^{n-3})/(q-1)$. Окончательно получаем, что $|[c] \cap [g]| = (q^{n-1}-q)q^{n-3}/(q-1)$.

С л у ч а й 2. Подпространства L_1 и L_2 различны, $dim\ L = n-2$ и $\langle w_1 \rangle + \langle w_2 \rangle + L = V$. Определим количество инволюций типа 1, централизующих u и v. Пусть t — такая инволюция.

По лемме 10 инволюция t инвертирует одномерное подпространство из L и централизует w_1, w_2 и подпространство размерности $n-3$ из L. Верно и обратное: если инволюция централизует в L векторы w_1 и w_2 и подпространство размерности $n-3$ и инвертирует одномерное подпространство из L, то она централизует u и v. Поэтому для определения количества таких инволюций достаточно найти число способов представления L в виде $L = L' \oplus L''$, где $dim\ L' = 1$, $dim\ L'' = n-3$. Подпространство L' можно выбрать $(q^{n-2}-1)/(q-1)$ способами. При заданном L' базис $e_1, \dots e_{n-3}$ пространства L'' можно выбрать $(q^{n-2}-q)(q^{n-2}-q^2)\dots(q^{n-2}-q^{n-3})$ способами. Так как в L'' существует в точности $(q^{n-3}-1)(q^{n-3}-q)\dots(q^{n-3}-q^{n-2})$ таких базисов, то число способов выбора подпространства L'' равно q^{n-3}. Поэтому число инволюций типа 1, централизующих u и v, равно $(q^{n-2}-1)q^{n-3}/(q-1)$. Окончательно получаем, что $|[c] \cap [g]| = (q^{n-2}-1)q^{n-3}/(q-1)$.

С л у ч а й 3. Подпространства L_1 и L_2 различны, $dim\ L = n-2$ и $\langle w_1 \rangle + \langle w_2 \rangle + L \neq V$. В этом случае можно считать, что $w_2 = w_1 + e$, где $e \in L$. Определим количество инволюций типа 1, централизующих u и v. Пусть t — такая инволюция. По лемме 10 инволюция t централизует векторы w_1 и w_2 и, следовательно, централизует e. Кроме того, t инвертирует вектор e' из L, не пропорциональный e, и централизует в L_1 подпространство L' размерности $n-2$, содержащее e. Покажем, что верно и обратное. Пусть инволюция централизует в L векторы w_1 и w_2 и подпространство L' размерности $n-2$, содержащее e, и инвертирует одномерное подпространство из L. Положим $M = L' \cap L$. Так как L и L' являются различными подпространствами размерности $n-2$ в пространстве L_1 то $dim\ M = n-3$. Пусть $L_2 = \langle e_2 \rangle + L$. Так как $V = L' + \langle e' \rangle + \langle w_1 \rangle$, $e_2 = f + \alpha e' + \beta w_1$, где $f \in L'$. Но тогда вектор $e_2 - \alpha e'$ из L_2 централизует t. Получаем, что $L_2 = M + \langle e_2 - \alpha e' \rangle + \langle e' \rangle$ и t централизует подпространство $M + \langle e_2 - \alpha e' \rangle$ размерности $n-2$ из L_2. По лемме 9 инволюция t централизует инволюции u и v. С учетом доказанного для определения количества таких инволюций достаточно найти число способов представления подпространства L_1 в виде $L_1 = L' \oplus L''$, где $dim\ L' = n-2$, $dim\ L'' = 1$ и $e \in L'$. Как и в случае 1, получим, что число таких представлений равно $(q^{n-1}-q)q^{n-3}/(q-1)$. Лемма доказана.

Теперь теорема 2 следует из лемм 5, 6, 9, 11.

2. Доказательство теоремы 1 в случае, когда a индуцирует на X не внутренне-диагональный автоморфизм

В этом разделе доказывается

Теорема 3. *Пусть $G = XA$, где X — частное группы $SL_n(q)$ по ее центральной подгруппе, $n \geq 3$, q нечетно и $G \notin X^*$. Тогда $\Gamma(A)$ является кокликой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проведем в последовательности лемм.

Лемма 12. *Пусть $G = XA$, где $X \cong PSL_2(9)$ и a индуцирует на X внутренне-полевой автоморфизм. Тогда $\Gamma(A)$ является кокликой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выясним сначала строение подгруппы A. Поле $GF(9)$ есть квадратичное расширение поля $GF(3)$, поэтому его элементы будем записывать в виде $x + \rho y$, где $\rho \in GF(9)$ и $\rho^2 = 2$, $x, y \in Z_3$. Пусть $Z = Z(SL_2(9))$.

Как следует из [4, доказательство теоремы 2.1], элемент a_0 имеет вид

$$a_0 = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix} Z.$$

Обозначим через φ полевой автоморфизм порядка 2 группы $SL_2(9)$, действующий по правилу

$$\begin{pmatrix} x_1 + \rho y_1 & x_2 + \rho y_2 \\ x_3 + \rho y_3 & x_4 + \rho y_4 \end{pmatrix}^{\varphi} = \begin{pmatrix} x_1 - \rho y_1 & x_2 - \rho y_2 \\ x_3 - \rho y_3 & x_4 - \rho y_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда элемент a записыватся в виде

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1+2\rho \\ 1+\rho & 0 \end{pmatrix} Z\varphi.$$

Непосредственными вычислениями установливается, что φ централизует a_0 и $C_{F^*(G)}(a_0)$ состоит из элементов вида $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} Z$ или $\begin{pmatrix} 0 & d \\ d^{-1} & 0 \end{pmatrix} Z$, где $c, d \in GF(9)$. Предположим, что $B = \langle b \rangle$ — сопряженная с A подгруппа и $[A, B] = 1$. Так как элемент b централизует a_0 и сопряжен с a, элемент b имеет вид $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} Z\varphi$ или $\begin{pmatrix} 0 & d \\ d^{-1} & 0 \end{pmatrix} Z\varphi$, где $c, d \in GF(9)$. В обоих случаях $b_0 = b^2 = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} Z$. Но b_0 — инволюция, поэтому $e = \pm\rho$ и $a = 0 = b_0$. Из определения TI-подгруппы получаем, что $A = B$, $S_0 = A$ и $\Gamma(A)$ — коклика. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $G = XA$, где $X \cong SL_3(3)$ и a индуцирует на X внутренне-графовый автоморфизм. Тогда $\Gamma(A)$ является кокликой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выясним сначала строение подгруппы A. Заметим, что $Z(SL_3(3)) = 1$, и обозначим через τ инверсно-транспонирующий автоморфизм группы $SL_3(3)$. Из [4, доказательство теоремы 2.1] следует, что элементы a_0 и a записываются следующим образом:

$$a_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tau.$$

Непосредственными вычислениями установливается, что τ централизует a_0 и $C_X(a_0)$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix}$ с определителем, равным 1.

Предположим, что $B = \langle b \rangle$ — сопряженная с A подгруппа и $[A, B] = 1$. Так как элемент b централизует a_0 и сопряжен с a, то b имеет вид $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix} \tau$. Заметим, что

$$b_0 = b^2 = \begin{pmatrix} 1 & e_2 & 0 \\ e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Но b_0 — инволюция, сопряженная с a_0, поэтому она имеет тип 2. Это возможно лишь в случае $a = 0 = b_0$. Из определения TI-подгруппы получаем, что $A = B$ и $\Gamma(A)$ — коклика. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $G = XA$, где $X \cong PSL_3(7)$ и a индуцирует на $F^*(G)$ внутренне-графовый автоморфизм. Тогда $\Gamma(A)$ является кокликой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится аналогично доказательству леммы 13. Заметим только, что в этом случае, если $Z = Z(SL_3(7))$, то

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

и элементы a_0, a имеют вид

$$a_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Z\tau.$$

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 3. Пусть $G = XA$, X — частное группы $SL_n(q)$ по ее центральной подгруппе, q нечетно и $G \notin X^*$. По [4, теорема 2.1] имеет место один из следующих случаев:

1) $X \cong L_2(9)$, элемент a индуцирует на X внутренне-полевой автоморфизм и a_0 соответствует полуинволюции типа 1 в $SL_2(9)$;

2) $X \cong L_3(3)$ или $L_3(7)$, $G = X\langle\tau\rangle$, где τ — графовый автоморфизм и a_0 соответствует инволюции типа 2 из X.

В случае 1) утверждение теоремы 3 следует из леммы 12, а в случае 2) — из лемм 13 и 14. Теорема 3 доказана.

Теорема 1 следует из теорем 2 и 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** TI-подгруппы в группах типа характеристики 2 // Мат. сб. 1985. Т. 127, № 2. С. 239–244.
2. **Зюляркина Н.Д., Махнев А.А.** Плотно вложенные подгруппы с абелевым слиянием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 19–26.
3. **Зюляркина Н.Д., Махнев А.А.** Циклические TI-подгруппы порядка 4 в исключительных группах Шевалле // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1994. Т. 3. С. 41–49.
4. **Зюляркина Н.Д.** Циклические TI-подгруппы порядка 4 в классических группах Шевалле нечетной характеристики // Вопросы алгебры и логики. Тр. ИМ СО РАН. 1996. С. 89–110.
5. **Harris M.E.** Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over field of odd order // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272, no. 1. P. 1–65.
6. **Hochheim Y., Timmesfeld F.** A note on TI-subgroups // Arch. Math. 1988. Vol. 51, no. 1. P. 97–103.
7. **Махнев А.А.** Теорема редукции для TI-подгрупп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, № 2. С. 303–317.
8. **Suzuki M.** Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent // Ann. Math. 1964. Vol. 80, no. 1. P. 58–77.

Зюляркина Наталья Дмитриевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
ведущий научн. сотрудник
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: toddeath@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 519.854.2

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ИМИТАЦИИ ОТЖИГА В ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА

А. В. Ипатов

Задача маршрутизации транспорта состоит в определении набора маршрутов для парка автомобилей, расположенных в депо, и нескольких географически удаленных клиентов. Данная задача относится к классу NP-трудных, поскольку является обобщением задачи коммивояжера и задачи об упаковке в контейнеры. В настоящей работе изложены модифицированная схема имитации отжига и алгоритм, основанный на этой схеме, позволяющий находить решение задачи маршрутизации транспорта, близкое к оптимальному. Приводятся результаты вычислительного эксперимента, демонстрирующего работу описанного алгоритма на специальных тестовых примерах.

Ключевые слова: задача маршрутизации транспорта, имитация отжига, метаэвристика.

A. V. Ipatov. Enhanced simulated annealing in the vehicle routing problem.

The vehicle routing problem (VRP) is to find routes for a fleet of vehicles located at a central depot and for several distant customers. This problem is NP-hard because it can be seen as a merge of the travelling salesman problem and the bin packing problem. In this paper we describe an enhanced simulated annealing approach and an algorithm for the VRP based on this approach. We present computational results of this algorithm on benchmark instances of the VRP.

Keywords: vehicle routing problem, simulated annealing, metaheuristic.

1. Введение

Рассмотрим ориентированный граф $G = (V, A)$, где $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$, $A = \{(v_i, v_j) \mid i \neq j\}$ и для каждой дуги $(v_i, v_j) \in A$ определена ее неотрицательная стоимость d_{ij}. Назовем вершину v_0 *депо*, а все остальные вершины — *клиентами*. Будем считать, что в депо расположено неограниченное количество одинаковых автомобилей грузоподъемности Q, а для каждого клиента определен его *заказ* q_i (Q и q_i — неотрицательные действительные числа; $\max\{q_i \mid 1 \leq i \leq n\} \leq Q$).

Задача маршрутизации транспорта с ограничением на грузоподъемность (далее CVRP — Capacitated Vehicle Routing Problem) состоит в нахождении множества маршрутов автомобилей минимальной суммарной стоимости, удовлетворяющего следующим свойствам:

1) каждый клиент посещается в точности одним автомобилем;
2) маршруты всех автомобилей начинаются и заканчиваются в депо;
3) суммарный заказ всех клиентов, посещенных одним автомобилем, не превосходит Q.

Решение задачи CVRP можно изобразить в виде графа, являющегося объединением ориентированных циклов исходного графа G, имеющих единственное пересечение в вершине v_0.

Задача CVRP является NP-трудной, так как к ней очевидным образом сводятся задача коммивояжера (TSP) и задача об упаковке в контейнеры (BPP). Найти оптимальное решение для задач CVRP большой размерности за разумное время не представляется возможным, поэтому в настоящее время большое внимание уделяется разработке эвристических и метаэвристических алгоритмов решения этой задачи. Обзор существующих метаэвристических методов можно найти в работах [1] и [2].

В работе [3] изложен метаэвристический алгоритм решения задачи маршрутизации транспорта с ограничением на грузоподъемность, основанный на методе имитации отжига. В настоящей работе мы построим на его основе улучшенный алгоритм, находящий решение значительно более высокого качества.

2. Общая схема метода имитации отжига

Метод *имитации отжига* (simulated annealing) строит последовательность планов оптимизационной задачи, начиная с начального плана x_0 и на t-й итерации (итерации нумеруются с нуля) переходя от плана x_t к плану x_{t+1}. На каждой из итераций метод действует следующим образом. Сначала явно или неявно для плана x_t строится так называемая *окрестность* $N(x_t)$ — дискретная случайная величина, задающая множество "соседних" к x_t планов и для каждого из соседних планов — вероятность его выбора. Затем, с учетом вероятностей выбора, из окрестности случайным образом выбирается план x_{new}. Пусть $f(x)$ — стоимость плана x. Если $f(x_{new}) < f(x_t)$, то в качестве x_{t+1} выбирается план x_{new}. Иначе x_{t+1} задается по правилу

$$x_{t+1} = \begin{cases} x_{new} & \text{с вероятностью } p_t, \\ x_t & \text{с вероятностью } 1 - p_t. \end{cases}$$

Здесь p_t — *вероятность перехода к худшему решению на t-й итерации* — некоторая функция от t, x_{new} и x_t.

Процесс построения последовательности планов задачи завершается после выполнения T итераций. В ранних работах по имитации отжига в качестве результата работы алгоритма выбирается последний построенный план x_T, в современных — план, имеющий наименьшую стоимость среди всех построенных x_t (который гарантированно не хуже x_T).

Естественным требованием к функции вероятности p_t является ее положительность при $f(x_{new}) \geq f(x_t)$ (иначе метод остановится в первом локальном минимуме). Обычно выбирается функция p_t, убывающая с ростом $f(x_{new}) - f(x_t)$ и с ростом t. Так, в классическом методе имитации отжига используется функция $p_t = e^{(f(x_t)-f(x_{new}))/\theta_t}$, где последовательность θ_t убывает с ростом t. Однако эти ограничения на функцию p_t не являются обязательными для метода имитации отжига, и в конкретных реализациях при использовании функции другого вида можно получить решения лучшего качества.

Итак, для создания алгоритма, укладывающегося в схему имитации отжига, нужно зафиксировать три составляющие:

1) алгоритм построения начального плана x_0;
2) алгоритм построения окрестности $N(x_t)$;
3) функцию p_t.

3. Модификация схемы

Пусть алгоритм, реализующий описанную схему имитации отжига, последовательно строил следующие планы оптимизационной задачи на минимум: x_k, $x_{k+1} = x_k$, $x_{k+2} = x_k$, $\ldots$, $x_{k+l} = x_k$, $x_{k+l+1} \neq x_k$. Допустим, что $f(x_{k+l+1}) \geq f(x_k)$. Это означает, что на $(k+l)$-й итерации был осуществлен вероятностный переход к худшему решению. Заметим, что все планы x_{new}, найденные с k-й по $(k+l-1)$-ю итерацию, имели стоимость не меньше $f(x_k)$, но некоторые из них, вообще говоря, могли иметь стоимость меньше $f(x_{k+l+1})$. Это свойство специфично для метода имитации отжига.

Можно модифицировать метод имитации отжига так, чтобы в случае вероятностного перехода к худшему решению переход осуществлялся не к текущему соседу, а к лучшему из просмотренных ранее соседей (см. [4; 5]). Полученный в результате такой модификации метод может быть применен к любой оптимизационной задаче, к которой применим классический метод.

Приведем формальное описание модифицированного метода.

1. Выберем некоторый план оптимизационной задачи в качестве начального. Обозначим его через x_0. Положим $x^* = x_0$, $h^* = +\infty$.

2. Для t от 0 до $T-1$:
   (a) Рассмотрим окрестность $N(x_t)$. Выберем из нее случайным образом план x_{new}. Положим $h = f(x_{new}) - f(x_t)$.
   (b) Если $h < h^*$, то положим $x^* = x_{new}$, $h^* = h$.
   (c) Если $h < 0$, то положим $x_{t+1} = x_{new}$, $h^* = +\infty$.
   (d) Иначе с вероятностью p_t положим $x_{t+1} = x^*$, $h^* = +\infty$. С вероятностью $1 - p_t$ положим $x_{t+1} = x_t$.

3. Из всех построенных планов x_t выберем план с наименьшей стоимостью. Он является результатом работы алгоритма.

4. Описание алгоритма

Для построения начального плана воспользуемся эвристикой Кларка — Райта [6]. Временная сложность построения начального плана — $O(n^2 \cdot \log(n))$.

Явное построение окрестности $N(x_t)$ требует перечисления всех лежащих в ней планов и для каждого — указания вероятности его выбора в качестве плана x_{new}. Мы вместо этого воспользуемся алгоритмом случайной модификации x_t, с некоторой вероятностью возвращающего в качестве плана x_{new} каждый из планов, лежащих в $N(x_t)$.

В качестве базового действия для модификации плана x_t возьмем перемещение некоторого клиента v_s из орцикла c_s в орцикл c_f. Будем использовать обозначения $v_{prev(k)}$ и $v_{next(k)}$ для вершин, непосредственно предшествующих и следующих за клиентом v_k в плане x_t соответственно.

1. Пусть Ω_1 — множество всех орциклов, составляющих план x_t, $K = |\Omega_1|$. Выберем случайный элемент из Ω_1, считая, что вероятность выбора каждого из них равна $1/K$. Обозначим выбранный орцикл через c_s.

2. Рассмотрим Ω_2 — множество всех клиентов из c_s, $n_s = |\Omega_2|$. Выберем случайного клиента из Ω_2, считая, что вероятность выбора каждого из них равна $1/n_s$. Пусть это клиент v_s.

3. Пусть $\Omega_3 = \big\{c_i \in (\Omega_1 \setminus c_s) \mid q_s + \sum_{v_k \in c_i} q_k \le Q\big\} \cup \tilde{c}$, где $\tilde{c}$ — “пустой” маршрут, т. е. орцикл, содержащий только вершину v_0 и не содержащий ни одной дуги. Считая, что все элементы Ω_3 равновероятны, выберем из них случайный орцикл c_f.

4. Удалим из x_t дуги $(v_{prev(s)}, v_s)$ и $(v_s, v_{next(s)})$. Если $v_{prev(s)} \ne v_{next(s)}$, добавим дугу $(v_{prev(s)}, v_{next(s)})$.

5. Если $c_f = \tilde{c}$, добавим дуги (v_0, v_s) и (v_s, v_0).

6. Иначе орцикл c_f содержит хотя бы одного клиента. Для краткости обозначим через $v_{next(0)}$ такого клиента из c_f, что $v_{prev(next(0))} = v_0$. Вычислим для всех вершин v_k из c_f величину $D(v_k) = d_{ks} + d_{s,next(k)} - d_{k,next(k)}$. Выберем среди них вершину v_f, для которой $D(v_k)$ минимально. Удалим дугу $(v_f, v_{next(f)})$ и добавим дуги (v_f, v_s) и $(v_s, v_{next(f)})$.

7. Получившийся в результате этих действий план является планом x_{new}.

Временная сложность описанного алгоритма равна $O(K + n_s + n_f)$, где n_f — количество клиентов в орцикле c_f. Алгоритм также находит стоимость плана x_{new}: для этого нужно во время модификации вычитать из стоимости x_t веса всех удаляемых дуг и прибавлять к ней веса всех добавляемых.

В качестве вероятности p_t мы будем использовать постоянную 0.005. Вычислительный эксперимент показывает, что, несмотря на то, что вероятность перехода к худшему решению не зависит ни от стоимости этого решения, ни от номера итерации t, применение модифицированной схемы имитации отжига позволяет находить решения высокого качества.

5. Вычислительный эксперимент

Для сравнения различных точных, эвристических и метаэвристических алгоритмов разработаны специальные тестовые примеры CVRP (их можно найти на ресурсе [7]). Для проведения вычислительного эксперимента мы использовали тестовый набор Christofides, Mingozzi, Toth. Набор состоит из 14 примеров; половина из них, кроме ограничения на грузоподъемность, содержит еще ограничение на суммарную длину пути каждого автомобиля. Поэтому мы ограничились семью примерами: C1–C5, в которых вершины графа случайно распределены на плоскости, и C11–C12, в которых вершины сгруппированы в кластеры. Примеры содержат от 50 до 199 клиентов. Стоимость дуги в них полагается равной евклидовому расстоянию между вершинами.

Мы протестировали работу программ, реализующих алгоритм, описанный в работе [3] (Basic), и модифицированную схему имитации отжига (Enhanced). Число итераций отжига в обоих случаях составляло 100 млн. Каждая из программ была запущена 10 раз на каждом из тестовых примеров. Тестирование производилось на персональном компьютере с процессором Intel Core2 Duo E4600 2.40 GHz.

В табл. 1 представлены результаты работы обеих программ. Для каждого примера приведена стоимость лучшего известного решения (Best), указаны лучший (Min) и средний (Avg) результаты работы программы на этом примере и среднее относительное отклонение найденного решения от лучшего известного (δ) в процентах.

Т а б л и ц а 1

Test	Basic			Enhanced			Best
	Min	Avg	$\delta, \%$	Min	Avg	$\delta, \%$	
C1	526.97	529.37	0.91	524.61	527.55	0.56	524.61
C2	879.58	885.12	5.97	835.45	839.46	0.50	835.26
C3	868.36	872.98	5.67	828.26	829.35	0.39	826.14
C4	1108.73	1111.00	8.03	1034.03	1040.67	1.19	1028.42
C5	1412.29	1412.29	9.37	1323.97	1330.10	3.01	1291.29
C11	1069.65	1071.70	2.84	1052.33	1053.09	1.05	1042.11
C12	835.59	835.59	1.96	819.56	822.32	0.34	819.56

Из табл. 1 видно, что описанная модификация схемы имитации отжига дает среднее относительное отклонение от лучшего известного решения в несколько раз меньше, чем алгоритм, описанный в [3].

Обе версии имеют одинаковую временную сложность, поскольку на каждой итерации работает один и тот же алгоритм выбора плана из окрестности. В ходе эксперимента время их работы на различных примерах из набора не превышало 46 с (т. е. в течение секунды алгоритм делает более двух миллионов итераций).

В табл. 2 приводится сравнение решений, найденных с помощью описанного метода, с решениями, полученными метаэвристиками аналогичного класса, которые можно найти в литературе. Мы выбрали для сравнения реализации методов имитации отжига и поиска с запретами, предложенные в работе [8] (Osm-SA и Osm-TS соответственно), а также метод муравьиной колонии, описанный в работе [9] (Bul-AS).

Видно, что наш алгоритм, реализующий модифицированную схему имитации отжига, на всех примерах дает результаты лучше, чем имитация отжига Osm-SA и метод муравьиной колонии Bul-AS, проигрывая поиску с запретами Osm-TS лишь на примере C11. В целом, можно отметить, что все рассматриваемые алгоритмы, кроме Osm-SA, дают на примерах из тестового набора отклонение от лучшего известного решения в пределах 5%, что вполне достаточно для практических целей.

Таблица 2

Test	Osm-SA	Osm-TS	Bul-AS	Our	Best
C1	528.02	524.61	524.61	524.61	524.61
C2	838.62	844.03	844.31	835.45	835.26
C3	829.18	838.04	832.32	828.26	826.14
C4	1058.04	1044.35	1061.55	1034.03	1028.42
C5	1375.87	1334.16	1343.46	1323.97	1291.29
C11	1176.02	1043.05	1065.21	1052.33	1042.11
C12	826.03	819.59	819.56	819.56	819.56

К сожалению, из-за прогресса вычислительных мощностей не представляется возможным адекватно сравнить время работы программ. Так, время работы программы Osm-SA на компьютере VAX 8600 с частотой процессора 12.5 MHz составляло около двух с половиной часов, программы Osm-TS на этом же компьютере — около часа. Время работы программы Bul-AS на компьютере с процессором Intel Pentium 100 MHz составляло 88 мин. Напомним, что время работы нашей программы на компьютере с процессором Intel Core2 Duo 2400 MHz составило 46 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. New heuristics for the vehicle routing problem / J. Cordeau, M. Gendreau, A. Hertz, G. Laporte, J. Sormany // Logistics systems: Design and optimization. New York: Springer, 2005. P. 279–297.
2. **Gendreau M., Laporte G., Potvin J.-Y.** Metaheuristics for the capacitated VRP // The Vehicle Routing Problem. SIAM Monog. Discrete Math. Appl. Philadelphia, 2002. P. 129–154.
3. **Ипатов А.В.** Решение задачи маршрутизации транспорта методом имитации отжига // Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 40-й регион. молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. С. 290–294.
4. **Ипатов А.В.** Модифицированный метод имитации отжига в задаче CMST // Информац. бюллетень Ассоциации мат. программирования. Вып. 12. Екатеринбург: УрО РАН, 2011. С. 182–183.
5. **Ипатов А.В.** Построение минимального остова с ограниченной пропускной способностью методом имитации отжига // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2011. Т. 4, №. 2. С. 114–123. (Математика.)
6. **Clarke G., Wright J.W.** Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points // Oper. Res. 1964. Vol. 12. P. 568–581.
7. The VRP Web. URL: http://neo.lcc.uma.es/radi-aeb/WebVRP (дата обращения: 11.11.2010).
8. **Osman I.H.** Metastrategy simulated annealing and tabu search algorithms for the vehicle routing problem // Ann. Oper. Res. 1993. Vol. 41. P. 421–451.
9. **Bullnheimer B., Hartl R.F., Strauss C.** An improved ant system algorithm for the vehicle routing problem // Ann. Oper. Res. 1999. Vol. 89. P. 319–328.

Ипатов Александр Владимирович
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: sandro@acm.timus.ru

Поступила 20.11.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА[1]

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Устанавливаются признаки p-разрешимости конечной группы с условием перестановочности максимальных подгрупп с некоторыми подгруппами Шмидта.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, подгруппа Шмидта, перестановочные подгруппы.

V. N. Knyagina, V. S. Monakhov. On the permutability of maximal subgroups with Schmidt subgroups.

A Schmidt group is a finite nonnilpotent group in which every proper subgroup is nilpotent. We establish sufficient conditions for the p-solvability of a finite group in which maximal subgroups permute with some Schmidt subgroups.

Keywords: finite group, solvable group, Schmidt subgroup, permutable subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. *Группой Шмидта* называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1], в которой доказано, что группа Шмидта бипримарна (т. е. ее порядок делится в точности на два различных простых числа), одна из ее силовских подгрупп нормальная, другая циклическая, и указана система индексов главного ряда группы Шмидта. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в статье В. С. Монахова [2].

Одной из первых работ, посвященных перестановочности некоторых подгрупп с подгруппами Шмидта, является работа Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [3]. В этой работе наряду с другими результатами получены следующие утверждения.

Теорема [3, следствия 2–4]. 1. *Пусть максимальная подгруппа H группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из G. Тогда $H/\mathrm{Core}_G H$ нильпотентна, а $G/\mathrm{Core}_G H$ разрешима.*

2. *Если каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из G, то G разрешима.*

3. *Пусть каждая максимальная подгруппа H группы G обладает тем свойством, что $\mathrm{Core}_G H$ содержит все подгруппы Шмидта из H. Тогда G разрешима.*

Напомним, что $\mathrm{Core}_G H = \cap_{g\in G} H^g$ — наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H. Группа, порядок которой делится на простое число p, называется *pd-группой*, а группа с нормальной силовской p-подгруппой называется *p-замкнутой.* Если в группе G существует нормальная подгруппа K такая, что $G = KP$, $K\cap P = 1$, где P — силовская p-подгруппа в G, то G называется *p-нильпотентной.* Группа, которая одновременно p-замкнута и p-нильпотентна, называется *p-разложимой. Мета-p-разложимая группа* — это группа, содержащая нормальную p-разложимую подгруппу, фактор-группа по которой также p-разложима. Через $l_p(G)$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ-БРФФИ (проект Ф 10Р-231).

обозначается p-длина p-разрешимой группы G. A_n и S_n — знакопеременная и симметрическая группы степени n соответственно.

В настоящей заметке получены локальные аналоги результатов Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика. В частности, доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Зафиксируем простое число p.*

1. *Пусть максимальная подгруппа M группы G перестановочна со всеми pd-подгруппами Шмидта группы G. Тогда $M/\mathrm{Core}_G M$ p-разложима. Если $p = 2$, то $G/\mathrm{Core}_G M$ разрешима.*

2. *Пусть каждая максимальная подгруппа H группы G обладает тем свойством, что $\mathrm{Core}_G H$ содержит все pd-подгруппы Шмидта из H. Тогда G p-разрешима.*

Теорема 2. 1. *Если в группе G каждая максимальная подгруппа перестановочна с любой 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка из G, то G разрешима и $l_2(G) \leq 1$.*

2. *Если в группе G каждая максимальная подгруппа перестановочна с любой pd-подгруппой Шмидта из G, то G мета-p-разложима. В частности, G p-разрешима и $l_p(G) \leq 1$.*

3. *Если каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из G, то G метанильпотентна.*

В простой группе $PSL(2,5)$ максимальная подгруппа, изоморфная A_4, перестановочна со всеми $5d$-подгруппами Шмидта, а в группе $PSL(2,7)$ максимальная подгруппа, изоморфная S_4, перестановочна со всеми $7d$-подгруппами Шмидта. Эти примеры показывают, что для $p > 2$ в п. 1 теоремы 1 получить p-разрешимость фактор-группы $G/\mathrm{Core}_G M$ невозможно.

Отметим, что в утверждении 2 теоремы 2 ограничиться только p-нильпотентными pd-подгруппами Шмидта нельзя ни при каком нечетном простом p, поскольку для каждого $p \geq 3$ существует простая неабелева группа, в которой нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта. Для $p = 3$ это группа $SL(2, 2^n)$ при любом нечетном $n \geq 3$, а для $p \geq 5$ — группа $PSL(2,p)$. Обратим внимание также на то, что в утверждении 2 теоремы 2 не исключается случай $p = 2$. Утверждение 3 теоремы 2 усиливает утверждение 2 теоремы Берковича — Пальчика.

1. Вспомогательные результаты

Будем придерживаться обозначений и определений, принятых в [4; 5]. Запись $G = [A]B$ означает, что группа G является полупрямым произведением подгрупп A и B, причем A нормальна в G. Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — дополнение к π во множестве всех простых чисел. Если порядок подгруппы H делится только на простые числа из π, то говорят, что H — *π-подгруппа* группы G. Если индекс π-подгруппы H в группе G делится только на простые числа из π', то H называют *π-холловой* подгруппой группы G. Говорят, что группа G обладает свойством D_π, если в G имеется π-холлова подгруппа, любые две π-холловы подгруппы сопряжены и каждая π-подгруппа содержится в некоторой π-холловой подгруппе. Группу со свойством D_π называют *D_π-группой*. Если в группе G имеется максимальная подгруппа M с единичным ядром ($\mathrm{Core}_G M = 1$), то группу G называют *примитивной*, а M — ее *примитиватором*.

Условимся называть *$S_{\langle p,q \rangle}$-группой* $\{p,q\}$-группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и циклической силовской q-подгруппой. Если X и Y — подгруппы группы G, то положим $X^Y = \langle X^y \mid y \in Y \rangle$.

Для простого числа r через $S_r(G)$ обозначается наибольшая нормальная r-разрешимая подгруппа группы G, а через $S(G)$ — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G.

Лемма 1 [6, лемма 1.5]. *Если в группе G нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта, то G p-нильпотентна.*

Лемма 2 [6, лемма 3.1]. *Если в группе G нет 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка, то G 2-замкнута.*

Лемма 3. *Если p-разрешимая группа G не является p-замкнутой группой, то в ней существует p-нильпотетная pd-подгруппа Шмидта.*

Доказательство. По [7, теорема 5.3.13] группа G является $D_{\{p,q\}}$-группой для любого $q \in \pi(G)$. Пусть G не p-замкнута. Тогда существует $q \in \pi(G)$ такое, что $\{p, q\}$-холлова подгруппа H из группы G не p-замкнута, т. е. H не q-нильпотентна. По лемме 1 в H существует p-нильпотетная pd-подгруппа Шмидта. Лемма доказана.

Напомним, что *минимальным добавлением* к подгруппе A в группе G называется подгруппа B такая, что $G = AB$ и $G \neq AB_1$ для каждой собственной подгруппы B_1 из B.

Лемма 4 [8, лемма 3]. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами*:

1) *L — p-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа*;

2) *все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны*;

3) *L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в подгруппе D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.*

Лемма 5. *Зафиксируем различные простые числа p и q. Пусть H — подгруппа группы G, порожденная всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из G, а N — нормальная подгруппа в G, содержащая H. Тогда в G/N нет $S_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп.*

Доказательство. Допустим противное, пусть A/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G/N. По лемме 4 в A существует $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа S такая, что $S^AN = A$. Однако по построению подгруппы H имеем $S^A \subseteq H \subseteq N$, т. е. $A = N$ и A/N единична, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и $p, q \in \pi(M)$. Предположим, что M перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из M, то S^G содержится в $\mathrm{Core}_G M$.*
2. *Фактор-группа $M/\mathrm{Core}_G(M)$ не содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп.*

Доказательство. 1. Пусть S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из M. По условию подгруппа M перестановочна с S^x для каждого $x \in G$. Если допустить, что существует элемент $y \in G$ такой, что M не содержит S^y, то $MS^y = S^yM = G$ и $G = MS^y \subseteq MM^y$, что невозможно ввиду [4, лемма 1.44]. Таким образом,

$$S^G = \langle S^x \mid x \in G\rangle \subseteq \mathrm{Core}_G M.$$

2. По п. 1 леммы $\mathrm{Core}_G M$ содержит все $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппы из M. По лемме 5 в $G/\mathrm{Core}_G M$ нет $S_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Предположим, что подгруппа M перестановочна со всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта из группы G. Тогда $M/\mathrm{Core}_G M$ p-нильпотентна.*

Доказательство. По условию M перестановочна со всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами группы G для всех $q \in \pi(G)$. По лемме 6 в $M/\mathrm{Core}_G M$ нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта. По лемме 1 фактор-группа $M/\mathrm{Core}_G M$ p-нильпотентна. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Предположим, что подгруппа M перестановочна со всеми p-нильпотентными pd-подгруппами Шмидта из группы G. Тогда $M/\mathrm{Core}_G M$ p-замкнута в каждом из следующих случаев*:

1) $p = 2$;

2) $p > 2$ *и подгруппа* $M/\mathrm{Core}_G M$ *p-разрешима.*

Доказательство. По условию M перестановочна со всеми $S_{\langle q,p\rangle}$-подгруппами группы G для всех $q \in \pi(G)$. По лемме 6 в $M/\mathrm{Core}_G M$ нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта.

Пусть $p = 2$. Тогда по лемме 2 фактор-группа $M/\mathrm{Core}_G M$ 2-замкнута.

Пусть $p > 2$ и подгруппа $M/\mathrm{Core}_G M$ p-разрешима. По [7, теорема 5.3.13] подгруппа $M/\mathrm{Core}_G M$ является $D_{\{p,t\}}$-группой для любого $t \in \pi(M)$. Пусть $M/\mathrm{Core}_G M$ не p-замкнута. Тогда существует $q \in \pi(M/\mathrm{Core}_G M)$ такое, что $\{p,q\}$-холлова подгруппа $H/\mathrm{Core}_G M$ из группы $M/\mathrm{Core}_G M$ не p-замкнута, т. е. $H/\mathrm{Core}_G M$ не q-нильпотентна. По лемме 1 в $H/\mathrm{Core}_G M$ существует p-нильпотетная pd-подгруппа Шмидта. Противоречие. Поэтому допущение неверно и $M/\mathrm{Core}_G M$ p-замкнута. Лемма доказана.

Лемма 9. *Зафиксируем простые числа p и q, где $p \neq q$.*

1. *Пусть H — подгруппа группы G, N — нормальная в G подгруппа. Если H перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой из G, то HN/N перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой из G/N.*

2. *Если в группе G каждая максимальная подгруппа перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой и N — нормальная подгруппа в G, то в G/N каждая максимальная подгруппа перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой из G/N.*

Доказательство. 1. Пусть A/N — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из G/N. По лемме 4 имеем $A = S^L N$, где S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа из минимального добавления L к N в A. По условию $HS^l = S^l H$ для любого $l \in G$. Тогда $HS^L = S^L H$ по [8, лемма 6] и $HA = AH$. Теперь HN/N и A/N перестановочны.

2. Если H/N — максимальная подгруппа в G/N, то для H выполнено условие, а следовательно, и заключение из п. 1. Поэтому в G/N каждая максимальная подгруппа перестановочна с любой $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой. Лемма доказана.

Лемма 10 [9, предложение 1]. *Всякая неразрешимая группа G содержит 2-нильпотентную подгруппу Шмидта S четного порядка такую, что S не содержится в $S(G)$ и из условия $SH = G$, где H — подгруппа группы G, следует, что $H = G$.*

Лемма 11. *Пусть p — простое число и группа G мета-p-разложима. Тогда*

1) *если H — подгруппа группы G, то H мета-p-разложима*;

2) *если N — нормальная в G подгруппа, то G/N мета-p-разложима*;

3) $l_p(G) \leq 1$;

4) *если группы A и B мета-p-разложимы, то группа $A \times B$ мета-p-разложима*;

5) *если X — группа и $X/\Phi(X)$ мета-p-разложима, то X мета-p-разложима.*

Доказательство. Доказательства утверждений 1 и 2 — простая проверка.

3. В силу п. 2 и индукции можно предположить, что $l_p(G/N) \leq 1$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы N. Если $l_p(G/N) > 1$, то по [5, лемма VI.6.9]

$$O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1, \quad O_p(G) = F(G) = C_G(O_p(G)) \simeq E_{p^n}$$

для некоторого натурального числа n и $G = [O_p(G)]M$ для некоторой максимальной в G подгруппы M. Из мета-p-разложимости группы G следует, что M p-разложима. Но $O_p(M) = 1$, поэтому M — p'-подгруппа и $l_p(G) \leq 1$.

4. По условию в группе A существует нормальная p-разложимая подгруппа A_1 такая, что A/A_1 p-разложима. Соответственно, в группе B существует нормальная подгруппа B_1 такая, что B_1 и B/B_1 p-разложимы. Ясно, что группа $A_1B_1 = A_1 \times B_1$ p-разложима как прямое произведение p-разложимых групп. Фактор-группа

$$(A \times B)/(A_1 \times B_1) \simeq (A/A_1) \times (B/B_1)$$

также p-разложима. Теперь группа $H = A \times B$ мета-p-разложима.

5. Пусть X — группа и $X/\Phi(X)$ мета-p-разложима. Тогда $X/\Phi(X)$ содержит нормальную p-разложимую подгруппу $Y/\Phi(X)$ и фактор-группа

$$(X/\Phi(X))/(Y/\Phi(X)) \simeq X/Y$$

также p-разложима. Пусть P — силовская p-подгруппа в Y. Поскольку подгруппа Y p-разрешима, то в Y существует p'-холлова подгруппа H. По условию

$$Y/\Phi(X) = (P\Phi(X)/\Phi(X)) \times (H\Phi(X)/\Phi(X)),$$

поэтому подгруппы $P\Phi(X)/\Phi(X)$ и $H\Phi(X)/\Phi(X)$ нормальны в $X/\Phi(X)$. По лемме Фраттини

$$X = (P\Phi(X))N_X(P) = \Phi(X)N_X(P), \quad X = (H\Phi(X))N_X(H) = \Phi(X)N_X(H).$$

Ввиду известного свойства подгруппы Фраттини получаем, что подгруппы P и H нормальны в X и $Y = P \times H$ p-разложима. Так как X/Y p-разложима, то X мета-p-разложима. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если группа G мета-p-разложима для всех $p \in \pi(G)$, то G метанильпотентна.*

Доказательство. Так как мета-p-разложимая группа p-разрешима, то G — разрешимая группа. По индукции можно считать, что G примитивна и тогда

$$G = [N]H, \quad N = F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G), \quad \text{где } p \in \pi(G),$$

N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, H — максимальная в G подгруппа и $\mathrm{Core}_G H = 1$. Так как G мета-p-разложима, то существует нормальная p-разложимая подгруппа $K = K_p \times K_{p'}$ такая, что G/K p-разложима. Из равенства $N = O_p(G)$ следует, что $N = K_p$, а поскольку $N = C_G(N)$, то $K_{p'} = 1$, т. е. $N = K$. Так как G/N p-разложима и $O_p(G/N) = 1$, то G/N — p'-группа и N — силовская p-подгруппа группы G.

Пусть q — произвольное число из $\pi(G) \setminus \{p\}$. Так как группа G мета-q-разложима, то в ней существует нормальная подгруппа $T = T_q \times T_{q'}$ такая, что G/T q-разложима. Поскольку T_q нормальна в G и $q \neq p$, то $T_q \subseteq C_G(N) = N$ и $T_q = 1$. Пусть $G_{q'}$ — q'-холлова подгруппа в G. Ясно, что $T_{q'} \subseteq G_{q'}$, а поскольку $G/T_{q'}$ q-разложима, то $G_{q'}/T_{q'}$ нормальна в $G/T_{q'}$. Отсюда следует, что $G_{q'}$ нормальна в G и G q-нильпотентна для всех $q \neq p$. Но в этом случае p'-холлова подгруппа нильпотентна и G метанильпотентна. Лемма доказана.

Лемма 13 [10, лемма 2]. *Пусть $G = AB$, где подгруппы A и B p-замкнуты. Тогда если $O_p(A_p^G) = Z(A_p^G) = 1$, то $A_p^G \cap B_p^G = 1$.*

Лемма 14 [11, теорема 2]. *Пусть (непримарная) максимальная подгруппа M группы G является p-разложимой подгруппой. Тогда G имеет нормальную подгруппу одного из видов*:

1) *силовская p-подгруппа из M*;
2) *p'-холлова подгруппа из M*;
3) *p'-холлова подгруппа из G.*

2. Доказательство теоремы 1

1. Пусть максимальная подгруппа M группы G перестановочна со всеми pd-подгруппами Шмидта из G. Из леммы 7 вытекает, что $M/\mathrm{Core}_G M$ p-нильпотентна, поэтому она p-разрешима, а из леммы 8 получаем, что $M/\mathrm{Core}_G M$ p-замкнута, следовательно, $M/\mathrm{Core}_G M$ p-разложима.

Теперь, используя индукцию по порядку группы, покажем, что при $p = 2$ фактор-группа $G/\mathrm{Core}_G M$ разрешима. Допустим, что это не так. Ввиду леммы 9 можно считать, что $\mathrm{Core}_G M = 1$. По лемме 10 в группе G существует недобавляемая 2-нильпотентная подгруппа Шмидта S четного порядка. Поэтому $G \neq MS$, а поскольку M и S перестановочны, то $S \leq M$. Но M 2-разложима, противоречие. Значит, допущение неверно и $G/\mathrm{Core}_G M$ разрешима.

2. Пусть каждая максимальная подгруппа H группы G обладает тем свойством, что $\mathrm{Core}_G H$ содержит все pd-подгруппы Шмидта из H. Из леммы 6 следует, что для любой такой H в $H/\mathrm{Core}_G H$ нет pd-подгрупп Шмидта. По лемме 1 $H/\mathrm{Core}_G H$ p-нильпотентна, а по лемме 3 $H/\mathrm{Core}_G H$ p-замкнута. Следовательно, $H/\mathrm{Core}_G H$ p-разложима. Если $\mathrm{Core}_G M = 1$ для всех максимальных подгрупп M из G, то все собственные подгруппы в группе G p-разложимы, а по лемме 1 группа G p-нильпотентна, значит, p-разрешима. Поэтому можно считать, что существует максимальная подгруппа M в группе G такая, что $\mathrm{Core}_G M \neq 1$, в частности, группа G не проста. Теперь, используя индукцию по порядку группы, покажем, что G p-разрешима.

Пусть N — минимальная нормальная в G подгруппа и M/N — максимальная в G/N подгруппа. Пусть A/N — pd-подгруппа Шмидта из M/N. По лемме 4 подгруппа A содержит pd-подгруппу Шмидта S такую, что $S^A N = A$. По условию $S \subseteq \mathrm{Core}_G M$, поэтому $S^A N = A \subseteq \mathrm{Core}_G M$. Так как $N \subseteq \mathrm{Core}_G M$ и $\mathrm{Core}_{G/N}(M/N) = (\mathrm{Core}_G M)/N$, то условия теоремы наследует фактор-группа G/N. По индукции можно считать, что $S_p(G) = 1$ и в группе G минимальная нормальная подгруппа N единственна, причем N не является p-разрешимой pd-подгруппой. Кроме того, ясно, что каждая максимальная в G подгруппа, не содержащая N, имеет единичное ядро, а потому p-разложима.

По лемме Фраттини $G = N_G(P)N$, где P — силовская p-подгруппа из N. Пусть H — максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(P)$. Тогда $G = HN$ и N не содержится в H. Поэтому H p-разложима, значит $H = P^* \times B$, где P^* — силовская p-подгруппа, а B — p'-холлова подгруппа из H. По лемме 14 группа G имеет нормальную подгруппу L одного из видов: $P^* \neq 1$, B, неединичная p'-холлова подгруппа из G. Так как $S_p(G) = 1$, то $L = B$ и, следовательно, $B = 1$ и силовская p-подгруппа P^* максимальна в G. Теперь $p = 2$ по [5, теорема IV.7.4] и 2 делит $|G : N|$. Пусть $r \in \pi(N) \backslash \{2\}$ и R — силовская r-подгруппа из N. По лемме Фраттини $G = N_G(R)N$. Пусть M — максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(R)$. Тогда $G = MN$, N не содержится в M и M 2-разложима: $M = P_1 \times A$, где P_1 — силовская 2-подгруппа, а A — $2'$-холлова подгруппа из M. По лемме 14 группа G имеет нормальную подгруппу одного из видов: $P_1 \neq 1$, поскольку 2 делит $|G : N| = |M : M \cap N|$; $A \neq 1$, поскольку $R \subseteq A$; неединичная $2'$-холлова подгруппа из G. В любом случае $S_2(G) \neq 1$, противоречие. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

1. Пусть в группе G каждая 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой максимальной подгруппой из G. Предположим, что G неразрешима. Тогда по лемме 10 в G существует 2-нильпотентная подгруппа Шмидта S четного порядка, не добавляемая в G. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G. По условию M и S перестановочны, т. е. MS — подгруппа группы G. Отсюда следует, что $S \subseteq M$, а поскольку M — произвольная максимальная подгруппа, то $S \subseteq \Phi(G)$, противоречие. Следовательно, допущение неверно и G разрешима.

Теперь с помощью индукции по порядку группы G покажем, что $l_2(G) \leq 1$. Условия теоремы наследуют все фактор-группы по лемме 9. Предположим, что G содержит две различные минимальные нормальные подгруппы M_1 и M_2. По [4, лемма 2.11] $G \simeq G/(M_1 \cap M_2)$ и G изоморфна подгруппе из $(G/M_1) \times (G/M_2)$. По индукции G/M_1 и G/M_2 — разрешимые группы 2-длины не выше 1, значит, $l_2(G) \leq 1$. Пусть теперь G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N и $l_2(G/N) \leq 1$.

Если G не примитивна, то $\mathrm{Core}_G M \neq 1$ для всех максимальных подгрупп M группы G. Следовательно, $N \subseteq \Phi(G) \neq 1$. По индукции $l_2(G/\Phi(G)) \leq 1$. Теперь $l_2(G) \leq 1$ по [5, лемма VI.6.4]. Значит, G примитивна и поэтому в G существует максимальная подгруппа M с единичным ядром. Теперь подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является минимальной нормальной подгруппой в G, $F = O_p(G)$, $p \in \pi(G)$ и $G = [F]M$. Ясно, что $l_2(G) \leq l_2(F) + l_2(M)$ и $l_2(M) \leq 1$ по индукции. Если $l_2(G) \geq 2$, то $p = 2$ и $l_2(M) = 1$, т. е. подгруппа M имеет четный порядок. Теперь $O_2(M) = 1$ и M не 2-замкнута. По лемме 2 в M существует 2-нильпотентная подгруппа Шмидта S. Так как $\mathrm{Core}_G M = 1$, то найдется элемент $x \in G$ такой, что S не содержится в M^x. По условию подгруппы S и M^x перестановочны, поэтому $SM^x = G$, а по [4, лемма 1.43] $SM = G = M$, противоречие. Утверждение 1 теоремы 2 доказано.

2. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и докажем сначала, что G p-разрешима. Если это не так, то $p \in \pi(G)$ и G не p-нильпотентна. Если все собственные подгруппы в G являются p-нильпотентными подгруппами, то G — p-замкнутая группа по [5, теорема IV.5.4], в частности G p-разрешима. Пусть в G существуют не p-нильпотентные максимальные подгруппы и M — одна из них. По лемме 1 в M существует $S_{\langle p,q \rangle}$-подгруппа S для некоторого $q \in \pi(M)$. По условию M и S^x перестановочны для любого $x \in G$. Если S^x не содержится в M для некоторого $x \in G$, то $MS^x = G$, а по [4, лемма 1.43] $MS = M = G$, противоречие. Значит, допущение неверно и $S \in \mathrm{Core}_G M$. В частности, группа G не проста и $\mathrm{Core}_G M \neq 1$ для каждой не p-нильпотентной максимальной подгруппы группы G.

В силу леммы 9 условия теоремы наследуют все фактор-группы группы G. Поэтому G/K p-разрешима для любой неединичной нормальной подгруппы K. По индукции $S_p(G) = 1$ и в G имеется точно одна минимальная нормальная подгруппа N. По доказанному $N \subseteq \mathrm{Core}_G M$ для каждой не p-нильпотентной максимальной подгруппы M. В G существует максимальная подгруппа H, не содержащая N, поэтому $G = HN$. Подгруппа H p-нильпотентна, в частности H p-разрешима. Если H не p-замкнута, то по лемме 3 в H существует $S_{\langle t,p \rangle}$-подгруппа T для некоторого $t \in \pi(H)$. Подгруппы H и T^x перестановочны для всех $x \in G$. Если T^g не содержится в H для некоторого $g \in G$, то $HT^g = G$, а по [4, лемма 1.43] $HT = H = G$, противоречие. Следовательно, $T \subseteq H_G$ и $H_G \neq 1$. Но теперь $N \subseteq H_G$, поскольку N — единственная минимальная нормальная подгруппа, и $HN = H = G$, противоречие. Поэтому допущение неверно и H p-разложима.

Так как N не p-разрешима, то по лемме 1 в N существует p-замкнутая pd-подгруппа Шмидта A. Подгруппа A не содержится в H, поэтому $AH = G$. По лемме 13 $A_p^G \cap H_p^G = 1$, где A_p и H_p — силовские p-подгруппы подгрупп A и H. Так как $A_p^G \neq 1$ и в G единственная минимальная нормальная подгруппа, то $H_p^G = 1$. Итак, каждая максимальная подгруппа, не содержащая N, является p'-группой.

По лемме Фраттини $G = N_G(P)N$, где P — силовская p-подгруппа из N. Так как $P \neq 1$ и $S_p(G) = 1$, то $N_G(P) \neq G$ и существует максимальная в G подгруппа U, содержащая $N_G(P)$. Теперь $G = UN$ и N не содержится в U. По доказанному U — p'-группа, что противоречит тому, что $1 \neq P \leq N_G(P) \leq U$.

Итак, группа G — p-разрешима. Теперь с помощью индукции по порядку G докажем, что G мета-p-разложима.

Предположим, что в G минимальная нормальная подгруппа не единственна. Пусть M_1 и M_2 — две различные минимальные нормальные подгруппы из G. По [4, лемма 2.11] $G \simeq G/(M_1 \cap M_2)$ и G изоморфна подгруппе из группы $(G/M_1) \times (G/M_2)$. По индукции G/M_1 и G/M_2 — мета-p-разложимы, а по лемме 11 группа G мета-p-разложима. Значит, если группа G

содержит более одной минимальной нормальной подгруппы, то утверждение верно.

Пусть теперь группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N. Если G не примитивна, то $\mathrm{Core}_G M \neq 1$ для всех максимальных подгрупп группы G. Следовательно, $N \subseteq \Phi(G) \neq 1$. По индукции $G/\Phi(G)$ мета-p-разложима, так что по лемме 11 группа G также мета-p-разложима.

Итак, G — примитивная группа. Пусть N — минимальная нормальная в G подгруппа. Так как G p-разрешима, то N либо p-подгруппа, либо p'-подгруппа. Пусть M — максимальная подгруппа в G, не содержащая N. Подгруппа M существует, поскольку $\Phi(G) = 1$. Подгруппа M p-разрешима. Предположим, что M не p-разложима. Пусть M содержит pd-подгруппу Шмидта S. Так как $\mathrm{Core}_G M = 1$, то существует элемент $x \in G$ такой, что S^x не содержится в M. По условию $S^x M = MS^x$ — подгруппа группы G, поэтому $S^x M = G$, а из [4, лемма 1.43] следует, что $MS = M = G$, противоречие. Поэтому допущение неверно и M — p-разложима. Но теперь G мета-p-разложима. Из леммы 11 следует, что $l_p(G) \leq 1$. Утверждение 2 теоремы 2 доказано.

3. Пусть каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из G. По утверждению из п. 2 группа G мета-p-разложима для любого $p \in \pi(G)$. По лемме 12 группа метанильпотентна. Теорема доказана.

Авторы благодарны рецензенту за ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмидт О. Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, №3–4. С. 366–372.
2. **Монахов В. С.** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Праці Украін. матем. конгресу–2001 / Ін-т математики НАН України. Секц. 1. Київ, 2002. С. 81–90.
3. **Беркович Я. Г., Пальчик Э. М.** О перестановочности подгрупп конечной группы // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 4. С. 741–753.
4. **Монахов В. С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйш. шк., 2006. 207 с.
5. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
6. **Монахов В. С.** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. 1998. Вып. 13. С. 153–171.
7. **Suzuki M.** Group theory II. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer, 1986. 621 p.
8. **Княгина В. Н., Монахов В. С.** О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 130–139.
9. **Беркович Я. Г.** Условие, необходимое для совпадения группы с коммутантом // Изв. вузов. 1968. № 8 (75). С. 11–17. (Математика.)
10. **Монахов В. С.** Разрешимость факторизуемой группы с разложимыми факторами // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 3. С. 337–340.
11. **Романовский А. В.** Группы с холловыми нормальными делителями // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966. С. 98–115.

Княгина Виктория Николаевна
канд. физ.-мат. наук
Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь
e-mail: knyagina@inbox.ru

Поступила 05.01.2011

Монахов Виктор Степанович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: Victor.Monakhov@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 519.46

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЕТИ В ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ[1]

В. А. Койбаев

Для элементарной сети (сети без диагонали) аддитивных подгрупп произвольного коммутативного кольца определяются производная сеть, замыкание сети и сеть, ассоциированная с элементарной группой. Приводится факторизация элементарной группы, на основе которой строится пример замкнутой (допустимой) сети, которая не дополняется до (полной) сети.

Ключевые слова: сеть, элементарная сеть, замкнутая сеть, сетевая группа, элементарная группа, трансвекция.

V. A. Koibaev. Elementary nets in linear groups.

For an elementary net (a net without diagonal) of additive subgroups of an arbitrary commutative ring, we define a derivative net, the closure of the net, and a net associated with the elementary group. A factorization of the elementary group is presented and used to construct an example of a closed (admissible) net that cannot completed to the (complete) net.

Keywords: net, elementary net, closed net, net group, elementary group, transvection.

Введение

Мы пользуемся следующим стандартным набором определений и обозначений. Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо с единицей и n — натуральное число. Если A, B — подгруппы аддитивной группы кольца Λ, то через AB мы обозначаем подгруппу аддитивной группы кольца Λ, порожденную всеми произведениями ab, где $a \in A, b \in B$. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца Λ называется *сетью порядка n над кольцом* Λ, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j (см. [1]). Для сети принят также термин "*ковер*" (см. [2]).

Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется *элементарной сетью* (*элементарным ковром* [3; 4, вопрос 15.46]). Таким образом, элементарная сеть — это набор $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i \neq j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца Λ, для которых $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных чисел i, r, j.

Пусть e — единичная матрица порядка n и e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных позициях — нули. Если $\alpha \in \Lambda$, то через $t_{ij}(\alpha) = e + \alpha e_{ij}$ обозначается *элементарная трансвекция*. Для подгруппы A аддитивной группы кольца Λ положим

$$t_{ij}(A) = \{t_{ij}(\alpha) : \ \alpha \in A\}.$$

Для сети σ через $E(\sigma)$ обозначается ее *элементарная группа*:

$$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : \ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle.$$

Данная работа посвящена изучению элементарных сетей. Для произвольной элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ аддитивных подгрупп σ_{ij}, $i \neq j$, коммутативного кольца Λ с 1 определяются производная сеть $\sigma^{(1)}$, замкнутая сеть $\bar{\sigma}$ (замыкание сети σ), сеть σ^E, ассоциированная с элементарной группой $E(\sigma)$, при этом (теорема 1) выполняются включения

$$\sigma^{(1)} \subseteq \sigma \subseteq \bar{\sigma} \subseteq \sigma^E, \quad \sigma^{(1)}_{ir}\sigma^E_{rj} \subseteq \sigma^{(1)}_{ij}, \quad \sigma^E_{ir}\sigma^{(1)}_{rj} \subseteq \sigma^{(1)}_{ij}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324).

Детально изучается цепочка:

дополняемые сети $\subset$ замкнутые (допустимые) сети $\subset$ элементарные сети.

Построенные в работе примеры сетей и элементарных групп показывают, что все включения указанной цепочки собственные.

В заключительной части работы приводится факторизация элементарной группы сети (теорема 2), которая дает возможность построения примера замкнутой (допустимой) сети, которая не дополняется до (полной) сети.

На протяжении всей статьи предполагается, что n — натуральное число, $n \geq 2$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть порядка n над кольцом Λ.

Отметим, что данная статья уточняет и продолжает результаты работы [5]. Так, например, в настоящей работе впервые мы представляем факторизацию элементарной группы, вводим понятие замыкания элементарной сети, и все это позволяет нам строить пример замкнутой (допустимой) элементарной сети, которая не продолжается до (полной) сети. Далее, в разд. 2 настоящей работы мы даем подробное доказательство результатов, анонсированных в [5].

1. Дополняемые сети

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, называется *дополняемой*, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца Λ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети.

Хорошо известно (см., например, [1]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ дополняема тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij} \tag{1}$$

для любых $i \neq j$. Диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}, \tag{2}$$

где суммирование берется по всем k, отличным от i.

Ясно, что элементарная сеть может быть дополнена до сети не всегда единственным способом. Однако, очевидно, формула (2) (при выполнении условий (1)) позволяет дополнить элементарную сеть σ наименьшей диагональю.

2. Производная сеть $\sigma^{(1)}$

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть порядка n над кольцом Λ, $n \geq 3$. Рассмотрим набор $\sigma^{(1)} = (\sigma_{ij}^{(1)})$ аддитивных подгрупп $\sigma_{ij}^{(1)}$ кольца Λ, определенных для любых $i \neq j$ следующим образом:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{kj},$$

где (поскольку σ — элементарная сеть) суммирование берется по всем k, отличным от i и j. Ясно, что $\sigma_{ij}^{(1)} \subseteq \sigma_{ij}$, следовательно, для любой тройки попарно различных чисел i, r, j мы имеем

$$\sigma_{ir}^{(1)}\sigma_{rj}^{(1)} \subseteq \sigma_{ij}^{(1)}.$$

Таким образом, набор $\sigma^{(1)} = (\sigma_{ij}^{(1)})$ аддитивных подгрупп $\sigma_{ij}^{(1)}$ кольца Λ является элементарной сетью.

П р и м е р. Пусть $n = 3$. Тогда $\sigma^{(1)} = (\sigma_{ij}^{(1)})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} * & \sigma_{13}\sigma_{32} & \sigma_{12}\sigma_{23} \\ \sigma_{23}\sigma_{31} & * & \sigma_{21}\sigma_{13} \\ \sigma_{32}\sigma_{21} & \sigma_{31}\sigma_{12} & * \end{pmatrix}.$$

Непосредственно из сетевого условия вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть. Для подгрупп этой сети имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если $i \neq j$, то $(\sigma_{ir}\sigma_{ri})(\sigma_{jr}\sigma_{rj}) \subseteq (\sigma_{ir}\sigma_{ri}) \cap (\sigma_{jr}\sigma_{rj}) \cap (\sigma_{ij}\sigma_{ji})$.*

(2) *Если $i \neq r$, то $\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ir}\sigma_{rj}$. Если $i = r$ и $k \neq j$, то $\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj}$.*

(3) *Если $k \neq j$, то $(\sigma_{ik}\sigma_{ki})\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{ij}$.*

(4) *(цикл) $\sigma_{ik}\sigma_{kr}\sigma_{ri} \subseteq (\sigma_{ir}\sigma_{ri}) \cap (\sigma_{kr}\sigma_{rk}) \cap (\sigma_{ik}\sigma_{ki})$.*

(5) *Если $i \neq j$ и m — натуральное число, то $(\sigma_{ik}\sigma_{kj})(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^m \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{kj}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем только утверждение (5). Если $k \neq r$ и m — натуральное число, то в силу (3) $(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^m\sigma_{kj} \subseteq \sigma_{kj}$. Если же $k = r$, то ввиду $i \neq j$ снова в силу (3) имеем $(\sigma_{rj}\sigma_{jr})^m\sigma_{ir} \subseteq \sigma_{ir}$. В обоих случаях приходим к включению из утверждения (5). Лемма доказана.

Нетрудно увидеть, что элементарная сеть $\sigma^{(1)}$ является дополняемой. Другими словами, $\sigma_{ij}^{(1)}\sigma_{ji}^{(1)}\sigma_{ij}^{(1)} \subseteq \sigma_{ij}^{(1)}$ для любых $i \neq j$.

Элементарную сеть $\sigma^{(1)}$ можно дополнить до (полной) сети стандартным способом по формуле (2). Однако мы предлагаем другой (необходимый нам для дальнейшей работы с элементарными группами) способ дополнения элементарной сети $\sigma^{(1)}$ до полной. Для любых $i \neq j$ положим (прямая сумма)

$$\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m.$$

Тогда диагональные элементы $\sigma_{ii}^{(1)}$, $1 \leq i \leq n$, определим следующим образом:

$$\sigma_{ii}^{(1)} = \sum_{k \neq s} (\gamma_{ik} \cap \gamma_{is} \cap \gamma_{ks}), \tag{3}$$

где суммирование ведется по всем k, где $1 \leq k \neq s \leq n$ (очевидно, что $k \neq i \neq s$).

Если, например, $n = 3$, то

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{33}^{(1)} = \gamma_{12} \cap \gamma_{13} \cap \gamma_{23}.$$

Ясно, что $\sigma_{ii}^{(1)}$ состоит из сумм элементов вида

$$t(i,k,s) = \sum_{m=1}^{m_1} (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^m \cap \sum_{p=1}^{p_1} (\sigma_{is}\sigma_{si})^p \cap \sum_{l=1}^{l_1} (\sigma_{sk}\sigma_{ks})^l. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть i, j, k, p, m — натуральные числа, причем i, j, k попарно различны. Тогда*

$$(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \subseteq (\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m \cap (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \cap (\sigma_{kj}\sigma_{jk})^q,$$

где $q = \min(m, p)$. В частности,

$$(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \subseteq \gamma_{ij} \cap \gamma_{ik} \cap \gamma_{kj}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из включения $(\sigma_{ij}\sigma_{ji})\sigma_{ik} \subseteq \sigma_{ik}$ следует, что $(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m\sigma_{ik} \subseteq \sigma_{ik}$, а потому $(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m\sigma_{ik}^p \subseteq \sigma_{ik}^p$. Следовательно, $(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \subseteq (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p$. Аналогично, $(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \subseteq (\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m$. Пусть, далее, $m \leq p, \quad l = p - m$. Согласно лемме 1 (1) $(\sigma_{ij}\sigma_{ji})(\sigma_{ik}\sigma_{ki}) \subseteq \sigma_{jk}\sigma_{kj}$. Поэтому

$$(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p = [(\sigma_{ij}\sigma_{ji})(\sigma_{ik}\sigma_{ki})]^m(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^l \subseteq (\sigma_{jk}\sigma_{kj})^m(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^l.$$

Согласно уже рассмотренному случаю $(\sigma_{jk}\sigma_{kj})^m(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^l \subseteq (\sigma_{jk}\sigma_{kj})^m$. Следовательно,

$$(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \subseteq (\sigma_{jk}\sigma_{kj})^m.$$

Таким образом, при $m = q = \min m, p)$ получаем

$$(\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \subseteq (\sigma_{ij}\sigma_{ji})^m \cap (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^p \cap (\sigma_{kj}\sigma_{jk})^m.$$

Лемма доказана.

Предложение 1. *Элементарная сеть* $\sigma^{(1)}$*, дополненная диагональю формулой* (3)*, является (полной) сетью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\sigma^{(1)}$ (без диагонали) является элементарной сетью, то для $i \neq j$ достаточно рассмотреть следующие случаи.

а) $\sigma_{ij}^{(1)}\sigma_{ji}^{(1)} \subseteq \sigma_{ii}^{(1)}$. Ясно, что $\sigma_{ij}^{(1)}\sigma_{ji}^{(1)} \subseteq \sigma_{ij}\sigma_{ji}$. Далее, пусть k, s отличны от i и j. Если $k \neq s$, то по лемме 1 (4)

$$(\sigma_{ik}\sigma_{kj})(\sigma_{js}\sigma_{si}) \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{ks}\sigma_{si} \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{ki} \cap \sigma_{is}\sigma_{si} \cap \sigma_{ks}\sigma_{sk} \subseteq \sigma_{ii}^{(1)}.$$

Если же $k = s$, то по лемме 1 (1) имеем

$$(\sigma_{ik}\sigma_{kj})(\sigma_{js}\sigma_{si}) = (\sigma_{ik}\sigma_{ki})(\sigma_{jk}\sigma_{kj}) \subseteq \sigma_{ik}\sigma_{ki} \cap \sigma_{jk}\sigma_{kj} \cap \sigma_{ij}\sigma_{ji} \subseteq \sigma_{ii}^{(1)}.$$

б) $\sigma_{ii}^{(1)}\sigma_{ij}^{(1)} \subseteq \sigma_{ij}^{(1)}$ (аналогично доказывается включение $\sigma_{ij}^{(1)}\sigma_{jj}^{(1)} \subseteq \sigma_{ij}^{(1)}$). Рассмотрим произвольное слагаемое (см. (4)) $t(i, k, s)$ из $\sigma_{ii}^{(1)}$ и произвольное слагаемое $\sigma_{iq}\sigma_{qj}$ из $\sigma_{ij}^{(1)}$, где $i \neq q \neq j$. Покажем, что

$$t(i, k, s)\sigma_{iq}\sigma_{qj} \subseteq \sigma_{ij}^{(1)}.$$

Так как $k \neq s$, то пусть $q \neq k$. Тогда $(\sigma_{ik}\sigma_{ki})\sigma_{iq} \subseteq \sigma_{iq}, \quad (\sigma_{ik}\sigma_{ki})^m\sigma_{iq} \subseteq \sigma_{iq}$, следовательно,

$$t(i, k, s)\sigma_{iq}\sigma_{qj} \subseteq \Big[\sum_{m=1}^{m_1}(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^m\Big]\sigma_{iq}\sigma_{qj} = \Big[\sum_{m=1}^{m_1}(\sigma_{ik}\sigma_{ki})^m\sigma_{iq}\Big]\sigma_{qj} \subseteq \sigma_{iq}\sigma_{qj} \subseteq \sigma_{ij}^{(1)}.$$

в) $\sigma_{ii}^{(1)}\sigma_{ii}^{(1)} \subseteq \sigma_{ii}^{(1)}$. Рассмотрим произвольные слагаемые (см. (4)) $t(i, k, s)$ и $t(i, q, r)$ из $\sigma_{ii}^{(1)}$. Так как $k \neq s$, то пусть $q \neq k$. Тогда согласно лемме 2

$$t(i, k, s)t(i, q, r) \subseteq \gamma_{iq} \cap \gamma_{ik} \cap \gamma_{kq} \subseteq \sigma_{ii}^{(1)}.$$

Предложение доказано.

Если σ — элементарная сеть, то (полную) сеть $\sigma^{(1)}$, диагональ которой определена формулой (3), мы назовем *производной сетью* для σ.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что $\sigma^{(1)} \subseteq \sigma$ и из $\sigma \subseteq \tau$ следует, что $\sigma^{(1)} \subseteq \tau^{(1)}$. Далее, из построения производной сети понятно, как строить вторую, третью и т. д. производные сети. Ранее в [5] для производной сети мы использовали термин “*сеть, ассоциированная с элементарной сетью*”.

3. Сеть σ^E, ассоциированная с элементарной группой

В этом разделе мы построим сеть σ^E, связанную с элементарной группой $E(\sigma)$.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть над кольцом Λ порядка n. Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\sigma_{ij}^E = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij},$$

где $\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$.

Предложение 2. *Таблица $\sigma^E = (\sigma_{ij}^E)$ является элементарной сетью, причем дополняемой, т. е. справедливы включения $\sigma_{ij}^E\sigma_{ji}^E\sigma_{ij}^E \subseteq \sigma_{ij}^E$ для любых $i \neq j$.*

В силу предложения 2 дополним элементарную сеть σ^E до (полной) сети стандартным способом, положив $\sigma_{ii}^E = \sum_{k\neq i}\sigma_{ik}^E\sigma_{ki}^E$, где суммирование берется по k, $k \neq i$. Заметим, что $\sigma_{ii}^{(1)} \subseteq \sigma_{ii}^E$ для всякого i.

Сеть σ^E мы назовем *сетью, ассоциированной с элементарной группой* $E(\sigma)$. Ясно, что $\sigma^{(1)} \leq \sigma^E$ и (для недиагональных позиций) $\sigma^{(1)} \leq \sigma \leq \sigma^E$.

Предложение 3. *Сеть σ^E является наименьшей (дополняемой) сетью, содержащей элементарную сеть σ. Далее, $(\sigma^E)^{(1)} = \sigma^{(1)}$.*

Доказательство. Пусть τ — дополняемая сеть и $\sigma \subseteq \tau$. Покажем, что $\sigma^E \subseteq \tau$. Напомним, что

$$\sigma_{ij}^E = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij}) + \sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij})^2 + \dots .$$

Имеем $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$. В силу дополняемости сети τ получаем $\tau_{ij}\tau_{ji}\tau_{ij} \subseteq \tau_{ij}$, а потому

$$\sigma_{ij}(\sigma_{ji}\sigma_{ij}) \subseteq \tau_{ij}\tau_{ji}\tau_{ij} \subseteq \tau_{ij}$$

и т. д. Равенство $(\sigma^E)^{(1)} = \sigma^{(1)}$ следует из лемм 1, 2 и замечания 1. Предложение доказано.

4. Замкнутые (допустимые) сети

Для элементарной сети σ рассмотрим элементарную сеть $\bar\sigma = (\bar\sigma_{ij})$, индуцированную трансвекциями из элементарной группы $E(\sigma)$. А именно для любых $i \neq j$ положим

$$\bar\sigma_{ij} = \{\alpha \in \Lambda:\ t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)\}.$$

Очевидно, что в силу известного коммутаторного соотношения $\bar\sigma = (\bar\sigma_{ij})$ является элементарной сетью.

Элементарную сеть $\bar\sigma$ мы назовем *замыканием сети* σ. Если $\sigma = \bar\sigma$, то сеть σ мы называем *замкнутой* (или *допустимой*).

Очевидно, что примером замкнутой сети являются дополняемые сети.

Замечание 2. Понятие допустимой сети стало известно нам из работ В.М. Левчука (см., например, вопрос 15.46 из [4]), однако, на наш взгляд (см. предложения 4, 5), термин “*замкнутая сеть*” лучше отражает суть этого понятия.

Предложение 4. *Операция замыкания сетей обладает следующими свойствами (операции замыкания в топологическом пространстве):*

$$\sigma \subseteq \bar\sigma; \quad \sigma \subseteq \tau \Rightarrow \bar\sigma \subseteq \bar\tau; \quad \bar\sigma = \bar{\bar\sigma}; \quad \overline{\sigma\cap\tau} \subseteq \bar\sigma \cap \bar\tau.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые два утверждения очевидны. Докажем третье. Ясно, что $\bar{\sigma} \subseteq \bar{\bar{\sigma}}$. Обратно, пусть $\alpha \in (\bar{\bar{\sigma}})_{ij}$. Тогда $t_{ij}(\alpha) \in E(\bar{\sigma})$, а потому $t_{ij}(\alpha)$ порождается трансвекциями $t_{rs}(\beta)$. Но $\beta \in (\bar{\sigma})_{rs}$, следовательно, по определению $t_{rs}(\beta) \in E(\sigma)$, а потому $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma)$, откуда $\alpha \in (\bar{\sigma})_{ij}$.

Докажем четвертое включение. Пусть $\alpha \in (\overline{\sigma \cap \tau})_{ij}$. Тогда $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma \cap \tau) \subseteq E(\sigma) \cap E(\tau)$. Отсюда $\alpha \in (\bar{\sigma})_{ij} \cap (\bar{\tau})_{ij} = (\bar{\sigma} \cap \bar{\tau})_{ij}$. Предложение доказано.

Предложение 5. (1) *Пересечение замкнутых элементарных сетей является замкнутой элементарной сетью.*

(2) *Пусть τ — замкнутая сеть и $\sigma \subseteq \tau$. Тогда $\sigma \subseteq \bar{\sigma} \subseteq \tau$. В частности, $\bar{\sigma}$ — наименьшая замкнутая сеть, содержащая σ.*

(3) *Для сети σ^E имеем $\sigma \subseteq \bar{\sigma} \subseteq \sigma^E$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Из предложения 4 следует, что если $\bar{\sigma} = \sigma$ и $\bar{\tau} = \tau$, то $\overline{\sigma \cap \tau} = \sigma \cap \tau$.

(2) Пусть $\alpha \in (\bar{\sigma})_{ij}$. Тогда $t_{ij}(\alpha) \in E(\sigma) \subseteq E(\tau)$, откуда $\alpha \in (\bar{\tau})_{ij} = (\tau)_{ij}$.

Утверждение (3) вытекает из утверждения (2). Предложение доказано.

Положим $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2$ и $\sigma_1 \vee \sigma_2 = \overline{\sigma_1 \cup \sigma_2}$, где $\sigma_1 \cup \sigma_2$ — сеть, равная пересечению всех элементарных сетей, содержащих σ_1 и σ_2.

Следствие 1. *Множество замкнутых (допустимых) сетей является решеткой (подрешеткой всех элементарных сетей), содержащей решетку всех дополняемых сетей.*

Из леммы 1 (4, 5) и леммы 2 вытекают следующие две леммы.

Лемма 3. *Если $r \neq j$, то $\sigma^{(1)}_{ij}\gamma_{rj} \subseteq \sigma^{(1)}_{ij}$.*

Лемма 4. *Пусть σ — элементарная сеть, $\sigma^{(1)}$ — производная сеть и $r \neq j$. Тогда*

$$\sigma^{(1)}_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma^{(1)}_{ij}, \quad \sigma_{jr}\sigma^{(1)}_{ri} \subseteq \sigma^{(1)}_{ji}.$$

Теорема 1. *Элементарная сеть σ индуцирует производную сеть $\sigma^{(1)}$, замкнутую сеть $\bar{\sigma}$ и сеть σ^E, ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma)$, при этом выполняются включения*

$$\sigma^{(1)} \subseteq \sigma \subseteq \bar{\sigma} \subseteq \sigma^E, \quad \sigma^{(1)}_{ir}\sigma^E_{rj} \subseteq \sigma^{(1)}_{ij}, \quad \sigma^E_{ir}\sigma^{(1)}_{rj} \subseteq \sigma^{(1)}_{ij}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое включение (второе доказывается аналогично). Пусть сначала $r \neq j$. Тогда $\sigma^E_{rj} = \sigma_{rj} + \sigma_{rj}\gamma_{rj}$ и требуемое включение вытекает из лемм 3 и 4. Пусть $r = j$. Покажем, что $\sigma^{(1)}_{ij}\sigma^E_{jj} \subseteq \sigma^{(1)}_{ij}$. Пусть $\gamma_{sj} \subseteq \sigma^E_{jj}$, $s \neq j$. Тогда из леммы 3 следует, что $\sigma^{(1)}_{ij}\gamma_{sj} \subseteq \sigma^{(1)}_{ij}$. Теорема доказана.

5. Факторизация элементарной группы

В этом разделе доказывается теорема 2 о факторизации элементарной группы $E(\sigma)$.

Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ — элементарная сеть порядка n над кольцом Λ. Соотношения, представленные в следующей лемме, хорошо известны.

Лемма 5. *Пусть $\alpha \in \sigma_{ij}$, $\beta \in \sigma_{rs}$, $i \neq j$, $r \neq s$.*

(1) *Если $j \neq r$ и $i \neq s$, то $t_{ij}(\alpha)t_{rs}(\beta) = t_{rs}(\beta)t_{ij}(\alpha)$.*

(2) *Если $j = r$ и $i \neq s$ ($\alpha\beta \in \sigma^{(1)}_{is}$), то $t_{ij}(\alpha)t_{js}(\beta) = t_{js}(\beta)t_{ij}(\alpha)t_{is}(\alpha\beta)$.*

(3) *Если $j \neq r$ и $i = s$ ($\alpha\beta \in \sigma^{(1)}_{rj}$), то $t_{ij}(\alpha)t_{ri}(\beta) = t_{ri}(\beta)t_{ij}(\alpha)t_{rj}(-\alpha\beta)$.*

Пусть $i \neq j$. Положим

$$\Gamma_{ij} = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}), \quad t_{ji}(\sigma_{ji})\rangle.$$

Теорема 2. *Если $n \geq 3$, то*

$$E(\sigma) = \Big(\prod_{1\leq i<j\leq n} \Gamma_{ij}\Big) E(\sigma^{(1)}),$$

причем сомножители Γ_{ij} в произведении можно брать в любом порядке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы проводится вытягиванием влево трансвекций из Γ_{ij} в нужном порядке с помощью леммы 5. При этом если соседние трансвекции не коммутируют, то появляется дополнительная трансвекция из $E(\sigma^{(1)})$.

6. Примеры элементарных сетей

Пусть F — произвольное поле. Рассмотрим поле $\Lambda = F(x)$ рациональных функций f/g, где $f, g \in F[x]$. Рассмотрим кольцо

$$R = \big\{f/g \in F(x) \colon degf - deg\ g \geq 4\big\}$$

и подгруппы

$$A = F/x + F + R,\ A_1 = F/x^2 + F + R,\ B = F/x + R.$$

Через (R) обозначим сеть, все элементы которой совпадают с R. Положим также $E((R)) = E(R)$.

6.1. Пример незамкнутой (не допустимой) сети. Пусть F — произвольное поле и $\Lambda = F(x)$. Определим элементарную сеть $\rho = (\rho_{ij})$ порядка n в Λ следующим образом: $\rho_{12} = A, \rho_{21} = A_1$ и $\rho_{ij} = R$ для всех остальных $i \neq j$.

Так как $RA \subseteq R,\ RA_1 \subseteq R,\ R^2 \subset R \subset A$ и $R^2 \subset A_1$, то ρ — элементарная сеть. Далее, $1/x^3 \in AA_1A$, следовательно, $AA_1A \nsubseteq A$, а потому элементарная сеть ρ не является дополняемой.

Сеть ρ не является замкнутой (допустимой). Дествительно, положим $b = t_{12}(1/x)t_{21}(1)t_{12}(-1)$. Тогда $b^{-1}t_{12}(1/x)b = t_{21}(-1/x)$, поэтому $1/x \in (\bar{\rho})_{21}$, но $1/x$ не содержится в группе $A_1 = \rho_{21}$. Поэтому $\rho \neq \bar{\rho}$, т. е. сеть ρ не является замкнутой.

6.2. Пример замкнутой (допустимой), но не дополняемой сети. Пусть $F = \mathbb{F}_2$ — поле из двух элементов и $\Lambda = \mathbb{F}_2(x)$.

Определим элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ порядка n в поле Λ следующим образом: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = B$ и $\sigma_{ij} = R$ для всех остальных $i \neq j$.

Так как $RB \subseteq R$, и $R^2 \subset R \subset B$, то σ — элементарная сеть.

Лемма 6. *Пусть $n = 2$ и $\Gamma_{12} = \langle t_{12}(B), t_{21}(B)\rangle$. Если $h \in \Gamma_{12}$, то матрица h содержится в одном из следующих множеств матриц (или транспонированных к ним):*

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + (R),\quad \begin{pmatrix}1 & 1/x\\ 0 & 1\end{pmatrix} + (R),\quad \begin{pmatrix}1 + (1/x^2) & 1/x\\ 1/x & 1\end{pmatrix} + (R),$$

$$\begin{pmatrix}1 + (1/x^2) & 1/x^3\\ 1/x & 1 + (1/x^2)\end{pmatrix} + (R),\quad \begin{pmatrix}1 + (1/x^2) & 1/x^3\\ 1/x^3 & 1 + (1/x^2)\end{pmatrix} + (R),$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1/x\\ 1/x & 1 + (1/x^2)\end{pmatrix} + (R).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть произведение трансвекций $t_{12}(1/x + R)$ и $t_{21}(1/x + R)$ и при этом учесть, что $(1/x^m) \in R$ при $m \geq 4$. Лемма доказана.

Следствие 2. *Сеть*
$$\begin{pmatrix} * & B \\ B & * \end{pmatrix}$$
является замкнутой (допустимой), но не дополняемой.

Предложение 6. *Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является допустимой, но не дополняемой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем допустимость сети $\sigma = (\sigma_{ij})$. Рассмотрим факторизацию элементарной группы $E(\sigma)$ из теоремы 2:
$$E(\sigma) = \Big(\prod_{1 \le i < j \le n} \Gamma_{ij} \Big) E(\sigma^{(1)}).$$
Безусловно, что для всякого $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$ имеем $\Gamma_{ij} \subseteq E(R)$ (так как $\sigma_{ij} = R$ для этих i, j), а также $E(\sigma^{(1)}) \subseteq E(R)$. Следовательно, $E(\sigma) \subseteq \Gamma_{12} E(R)$ (обратное включение очевидно), а потому $E(\sigma) = \Gamma_{12} E(R)$. Замкнутость сети σ (равенство $\sigma = \bar{\sigma}$) вытекает теперь из леммы 6. Предложение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боревич З.И.** О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1978. Т. 75. С. 22–31.
2. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
3. **Левчук В.М.** Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 504–517.
4. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010. 219 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/17kt.pdf.
5. **Койбаев В.А.** Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавказ. мат. журн. 2010. Т. 12, вып. 4. С. 39–43.

Койбаев Владимир Амурханович

Поступила 16.03.2011

д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Южный математический институт ВНЦ РАН
зав. кафедрой
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ЧЕТЫРЕПРИМАРНЫХ ГРУППАХ[1]

А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов

Описаны главные факторы коммутантов конечных групп, граф простых чисел которых несвязен и имеет точно четыре вершины. Как следствие определены конечные простые группы, распознаваемые по графу простых чисел с точно четырьмя вершинами.

Ключевые слова: конечная группа, четырепримарная группа, граф простых чисел, распознавание по графу простых чисел.

A. S. Kondrat'ev, I. V. Khramtsov. On finite tetraprimary groups.

Chief factors of commutants of finite groups whose prime graph is disconnected and has exactly four vertices are described. As a corollary, finite simple groups recognizable by prime graph with exactly four vertices are determined.

Keywords: finite group, tetraprimary group, prime graph, recognition by prime graph

Введение

В теории конечных групп интерес многих исследователей вызывают различные проблемы распознаваемости — характеризации группы по некоторому набору ее параметров с точностью до изоморфизма. Примерами такого рода проблем являются проблемы распознаваемости конечных групп по спектру или по графу простых чисел.

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G, а через $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором множество вершин есть $\pi(G)$ и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

Группа G называется *распознаваемой* (*по спектру*), если любая конечная группа H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ изоморфна G. С уже устоявшимся направлением исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [9]) тесно связано новое перспективное направление исследований распознаваемости конечных групп по графу простых чисел. Группа G называется *распознаваемой по графу простых чисел*, если для любой конечной группы H равенство $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ графов влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Здесь под равенством графов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(G)$ понимается совпадение их множеств вершин и множеств ребер соответственно. Ясно, что из распознаваемости конечной группы по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру.

Изучение распознаваемости конечных групп по графу простых чисел имеет совсем недолгую историю. В 2003 г. в работе М. Хаги [20] были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу простых чисел, а именно некоторые спорадические простые группы, и также получено некоторое описание (но не полная классификация) конечных групп G

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН (проект 09-T-1-1004) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-C-1-1007) и НАН Беларуси (проект 09-C-1-1009).

таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$, где S — спорадическая простая группа. В дальнейшем в работах [3; 10; 11; 27–30] была установлена распознаваемость по графу простых чисел групп $G_2(7)$, ${}^2G_2(q)$ и $L_2(q)$ для некоторых q.

Недавно было завершено доказательство распознаваемости всех конечных простых групп по своим порядку и спектру (см. [1]). Кажется весьма правдоподобной гипотеза, что конечные простые группы распознаваемы даже по своему порядку и графу простых чисел. Для многих конечных простых групп эта гипотеза подтверждена.

Возникает также интересная более общая задача: *описать все конечные группы, графы простых чисел которых изоморфны графу с заданным свойством.*

Прежде всего привлекает внимание более подробное изучение класса конечных групп с несвязным графом простых чисел. Это мотивировано следующим. Указанный класс широко обобщает класс конечных групп Фробениуса, что сразу видно из известной структурной теоремы Грюнберга — Кегеля о конечных группах с несвязным графом простых чисел (см. лемму 1.1). Роль же групп Фробениуса в теории конечных групп совершенно исключительна.

Заметим также, что класс конечных групп с несвязным графом простых чисел совпадает с классом конечных групп, имеющих изолированную подгруппу (т. е. собственную подгруппу, содержащую централизатор каждого своего неединичного элемента), который изучался многими авторами (см., например, [13]).

Конечные простые группы с несвязным графом простых чисел описаны в работах Уильямса [41] и А. С. Кондратьева [4]. Они составляют довольно узкий подкласс всех конечных простых групп, однако включают многие "малые" в различных смыслах группы, часто возникающие в исследованиях. Например, все конечные простые группы исключительного лиева типа, кроме групп $E_7(q)$ при $q > 3$, а также простые группы из известного "Атласа конечных групп" [15], кроме группы A_{10}, имеют несвязный граф простых чисел.

При изучении класса конечных групп с несвязным графом простых чисел возникают весьма нетривиальные проблемы, связанные с модулярными представлениями конечных простых групп. Рассмотрим одну такую проблему.

Пусть G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, не изоморфная ни группе Фробениуса, ни двойной группе Фробениуса. Тогда по теореме Грюнберга — Кегеля группа $\overline{G} := G/F(G)$ почти проста и известна ввиду результатов [4; 32; 41]. Предположим, что $F(G) \neq 1$. Каждой связной компоненте $\pi_i(G)$ графа $\Gamma(G)$ для $i > 1$ соответствует нильпотентная изолированная $\pi_i(G)$-холлова подгруппа $X_i(G)$ группы G. Любой неединичный элемент из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует без неподвижных точек (свободно) на $F(G)$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G $(K < L)$, содержащиеся в $F(G)$. Тогда (главный) фактор $V = L/K$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p (мы будем называть его *p-главным фактором* группы G), и его можно рассматривать как неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль (так как $C_{G/K}(V) = F(G)/K$), причем каждый неединичный элемент из $X_i(G)$ $(i > 1)$ действует без неподвижных точек на V. Поэтому задача изучения строения группы G во многом сводится к имеющей самостоятельный интерес проблеме *описания неприводимых $GF(p)\overline{G}$-модулей, на которые некоторый элемент простого порядка $r \neq p$ из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек.* Некоторые частные результаты по этой проблеме можно найти в [18;19;22;23;33–35;44]. В общем случае эта важная проблема далека от решения.

Если таблица неприводимых p-модулярных брауэровых характеров цоколя группы $\overline{G}$ известна, то для решения этой проблемы можно применить лемму 1.5, сформулированную ниже.

Авторы исследуют конечные группы, граф простых чисел которых несвязен и имеет небольшое число вершин. Ранее в работе авторов [5] были исследованы конечные группы, граф простых чисел которых несвязен и имеет не более трех вершин.

Основным результатом данной работы является описание главных факторов коммутантов конечных групп G, граф простых чисел которых имеет точно четыре вершины (в этом случае группа G называется *четырепримарной*) и несвязен. В некоторых случаях все возможности для таких главных факторов определить не удалось, однако доказано существование хотя бы одной возможности.

Доказаны следующие теоремы, в формулировках которых используются обозначения и терминология из разд. 1. Каждый из пунктов этих теорем реализуется.

Теорема 1. *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом простых чисел и $\overline{G} = G/F(G)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) *G — группа Фробениуса*;

(2) *G — 2-фробениусова группа, т. е. в G существуют такие подгруппы A, B и C, что $G = ABC$, A и AB — нормальные подгруппы в G, AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно*;

(3) *$\overline{G}$ — почти простая трипримарная группа*;

(4) *$\overline{G} \cong L_2(2^m)$, где $m \geq 5$, $2^m - 1$ и $(2^m + 1)/3$ — простые числа*;

(5) *$\overline{G} \cong L_2(3^m)$ или $PGL_2(3^m)$, где m и $(3^m-1)/2$ — нечетные простые числа, а $(3^m+1)/4$ равно либо простому числу, либо 11^2 (при $m = 5$)*;

(6) *$\overline{G} \cong L_2(r)$ или $PGL_2(r)$, где r — простое число, $17 \neq r \geq 11$, $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ — простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $r \in \{97, 577\}$*;

(7) *$\overline{G} \cong A_7$, S_7, A_8, S_8, A_9, $L_2(16)$, $L_2(16){:}\,2$, $Aut(L_2(16))$, $L_2(25)$, $L_2(25){:}\,2$, $L_2(27){:}\,3$, $L_2(49)$, $L_2(49){:}\,2_1$, $L_2(49){:}\,2_3$, $L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2$, $L_2(81){:}\,4$, $L_3(4)$, $L_3(4){:}\,2_1$, $L_3(4){:}\,2_3$, $L_3(5)$, $Aut(L_3(5))$, $L_3(7)$, $L_3(7){:}\,2$, $L_3(8)$, $L_3(8){:}\,2$, $L_3(8){:}\,3$, $Aut(L_3(8))$, $L_4(3)$, $L_4(3){:}\,2_2$, $L_4(3){:}\,2_3$, $U_3(4)$, $U_3(4){:}\,2$, $Aut(U_3(4))$, $U_3(5)$, $U_3(5){:}\,2$, $U_3(7)$, $Aut(U_3(7))$, $U_3(8)$, $U_3(8){:}\,2$, $U_3(8){:}\,3_1$, $U_3(8){:}\,3_3$, $U_3(8){:}\,6$, $U_3(9)$, $U_3(9){:}\,2$, $Aut(U_3(9))$, $U_4(3)$, $U_4(3){:}\,2_2$, $U_4(3){:}\,2_3$, $U_5(2)$, $Aut(U_5(2))$, $S_4(4)$, $S_4(4){:}\,2$, $Aut(S_4(4))$, $S_4(5)$, $S_4(7)$, $S_4(9)$, $S_4(9){:}\,2_1$, $S_4(9){:}\,2_3$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, $G_2(3)$, $Aut(G_2(3))$, ${}^3D_4(2)$, $Aut({}^3D_4(2))$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, $Aut(Sz(32))$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2F_4(2)$, M_{11}, M_{12}, $Aut(M_{12})$, J_2.*

З а м е ч а н и е. Все простые четырепримарные группы, кроме группы A_{10}, имеют несвязный граф простых чисел. В. Ши записал в “Коуровскую тетрадь” [6] вопрос 13.65: *конечно или бесконечно число конечных простых четырепримарных групп?* Как отмечено в [26, замечание 3.6], имеются некоторые основания для существования только конечного числа групп в пп. (4) и (5) теоремы 1. Однако вопрос Ши до сих пор открыт.

Теорема 2. *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом $\Gamma(G)$ и $\overline{G} := G/F(G)$ — почти простая трипримарная группа. Тогда $\pi(F(G))$ содержит простое число p, не принадлежащее $\pi(\overline{G})$, такое, что $\pi_1(G) = \{2, 3, p\}$, $\pi_2(G) = \pi_2(\overline{G}) = \{r\} \subseteq \{5, 7, 13, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$r = 5$, $\overline{G} \cong A_5$ или S_5, подгруппа $O_p(G)$ абелева, все p-главные факторы группы G как $\overline{G}$-модули изоморфны 4-мерному неприводимому $GF(p)\overline{G}$-модулю, $G/O_p(G)$ — группа из пп. (3) или (5i) теоремы из [5]*;

(2) *$r = 7$, $\overline{G} \cong L_2(7)$ или $PGL_2(7)$, каждый p-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 3-мерному неприводимому $GF(p^2)L_2(7)$-модулю или 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(p)L_2(7)$-модулю и $G/O_p(G)$ — группа из п. (5v) теоремы из [5]*;

(3) *$r = 7$, $\overline{G} \cong U_3(3)$ или $G_2(2)$, каждый p-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(p^m)\overline{G}$-модулю, где $m = 2$, если $\overline{G} \cong G_2(2)$ и $p \equiv -1 \pmod 3$, и $m = 1$ в противном случае, $G/O_p(G)$ — группа из п. (5vi) теоремы из [5]*;

(4) *$r = 13$, $\overline{G} \cong L_3(3)$ или $Aut(L_3(3))$, каждый p-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 12-мерному абсолютно неприводимому $GF(p^m)\overline{G}$-модулю, где $m = 2$, если $\overline{G} \cong Aut(L_3(3))$ и $p \not\equiv 1 \pmod{12}$, и $m = 1$ в противном случае, $G/O_p(G)$ — группа из п. (5vii) теоремы из [5]*;

(5) *$r = 17$, $\overline{G} \cong L_2(17)$ или $PGL_2(17)$, каждый p-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен при $p \not\equiv \pm 1 \pmod 9$ одному из четырех 16-мерных абсолютно неприводимых*

$GF(p)\overline{G}$-модулей, а при $p \equiv \pm 1 \pmod 9$ — 16-мерному абсолютно неприводимому $GF(p)\overline{G}$-модулю или 16-мерному абсолютно неприводимому $GF(p^3)\overline{G}$-модулю, $G/O_p(G)$ — группа из п. (5viii) теоремы из [5].

Теорема 3. *Пусть G — конечная четырепримарная группа и $\pi_1(G) = \{2\}$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$G = O(G) \leftthreetimes S$ — группа Фробениуса, где $O(G)$ — трипримарная абелева группа, S — силовская 2-подгруппа в G, изоморфная циклической группе или (обобщенной) группе кватернионов;*

(2) *G — группа Фробениуса с ядром $O_2(G)$;*

(3) *$G = A \leftthreetimes (B \leftthreetimes C)$ — 2-фробениусова группа, где $A = O_2(G)$, B — циклическая трипримарная группа нечетного порядка и C — циклическая 2-группа.*

(4) *$G \cong L_2(r)$, где r — простое число Ферма или Мерсенна, $r > 17$ и $|\pi(r^2 - 1)| = 3$;*

(5) *$G \cong L_3(4)$;*

(6) *$\overline{G} := G/O_2(G) \cong L_2(2^m)$, где либо $m = 4$, либо m, $2^m - 1$, $(2^m + 1)/3$ — простые числа, большие 3; если $O_2(G) \neq 1$, то $O_2(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2m} в G, каждая из которых как $\overline{G}$-модуль изоморфна естественному 2-мерному $GF(2^m)SL_2(2^m)$-модулю;*

(7) *$\overline{G} := G/O_2(G) \cong Sz(2^n)$, где $n \in \{3, 5\}$; если $O_2(G) \neq 1$, то $O_2(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{4n} в G, каждая из которых как $\overline{G}$-модуль изоморфна естественному 4-мерному $GF(2^n)Sz(2^n)$-модулю.*

Теорема 4. *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом $\Gamma(G)$, $\overline{G} := G/F(G)$ — почти простая четырепримарная группа и $3 \notin \pi_1(G) \neq \{2\}$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *G изоморфна одной из групп $L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_2$, $L_2(81){:}\,2_3$, $L_2(3^m)$, $PGL_2(3^m)$ или $L_2(p)$, где m — нечетное простое число, $|\pi(3^{2m} - 1)| = 3$, p — простое число, $17 < p \neq 2^k \pm 1$ для любых натуральных чисел k, $p \not\equiv \pm 1 \pmod{12}$ и $|\pi(p^2 - 1)| = 3$;*

(2) *$\overline{G} \cong Sz(8)$, $F(G) = O_2(G) \neq 1$, $\pi_1(G) = \{2, 5, 7\}$ и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 4-мерному или 16-мерному неприводимому $GF(8)\overline{G}$-модулю, причем вторая возможность всегда появляется;*

(3) *$\overline{G} \cong Sz(32)$ или $Aut(Sz(32))$, $F(G) = O_2(G)$ ($O_2(G) \neq 1$ при $G \cong Sz(32)$), $\{2, 5\} \subseteq \pi_1(G)$ и каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен либо 4-мерному, либо одному из двух 16-мерных, либо одному из двух 64-мерных неприводимых $GF(32)Sz(32)$-модулей.*

Теорема 5. *Пусть G — конечная четырепримарная группа, $\overline{G} := G/F(G)$ — почти простая четырепримарная группа, $3 \in \pi_1(G)$ и $5 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *G изоморфна одной из групп M_{11}, $L_2(11)$, $L_3(4){:}\,2_1$, $L_3(4){:}\,2_2$, $U_4(3)$, $L_2(25)$, $L_2(25){:}\,2_1$, $L_2(25){:}\,2_3$ или $S_4(7)$;*

(2) *$\overline{G} \cong L_2(49), L_2(49){:}\,2_2$ или $L_2(49){:}\,2_3$, $F(G)$ — абелева 7-группа, 7-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль может быть изоморфен 4-мерному неприводимому $GF(7)L_2(49)$-модулю;*

(3) *$\overline{G} \cong A_7$ и $F(G)$ — элементарная абелева 2-группа и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных 4-мерных неприводимых $GF(2)A_7$-модулей.*

Теорема 6. *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом $\Gamma(G)$, $\overline{G} := G/F(G)$ — почти простая четырепримарная группа из п. (7) заключения теоремы 1, $\pi_1(G) = \{2, 3, 5\}$ и $\pi_2(G) = \{p\}$. Тогда $p \in \{7, 11, 13, 17, 31, 41, 73\}$ и выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 7$, $G \cong U_3(5)$, $U_3(5){:}\,2$, A_9, $U_4(3)$, $U_4(3){:}\,2_2$, $U_4(3){:}\,2_3$ или $O_8^+(2)$;*

(2) $p = 7$, $\overline{G} \cong A_7$ *или* S_7, $F(G) \neq 1$ *при* $\overline{G} \cong A_7$, *каждый* r*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(r)\overline{G}$*-модулю для* $r \in \{2, 3, 5\}$;

(3) $p = 7$, $\overline{G} \cong A_8$ *или* S_8, $F(G) = O_2(G) \neq 1$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(2)\overline{G}$*-модулю*;

(4) $p = 7$, $\overline{G} \cong L_3(4), L_3(4){:}\,2_1$ *или* $L_3(4){:}\,2_3$, $F(G) = O_2(G) \neq 1$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных* 9*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(2)L_3(4)$*-модулей*;

(5) $p = 7$, $\overline{G} \cong J_2$, $F(G) = O_2(G)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(4)J_2$*-модулю*;

(6) $p = 7$, $\overline{G} \cong S_6(2)$, $F(G) = O_2(G)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(2)S_6(2)$*-модулю*;

(7) $p = 11$, $\overline{G} \cong M_{11}$, $F(G) \neq 1$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 10*-мерному неприводимому* $GF(2)M_{11}$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен одному из двух* 5*-мерных или трех* 10*-мерных неприводимых* $GF(3)M_{11}$*-модулей, каждый* 5*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 10*-мерному неприводимому* $GF(5)M_{11}$*-модулю или* 10*-мерному неприводимому* $GF(25)M_{11}$*-модулю*;

(8) $p = 11$, $\overline{G} \cong M_{12}$ *или* $Aut(M_{12})$, $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 10*-мерному неприводимому* $GF(2)M_{12}$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен либо одному из двух квазиэквивалентных* 10*-мерных, либо одному из двух квазиэквивалентных* 15*-мерных неприводимых* $GF(3)M_{12}$*-модулей*;

(9) $p = 11$, $\overline{G} \cong U_5(2)$ *или* $Aut(U_5(2))$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 5*-мерному или* 10*-мерному неприводимому* $GF(4)U_5(2)$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 10*-мерному неприводимому* $GF(3)U_5(2)$*-модулю, каждый* 5*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 10*-мерному неприводимому* $GF(5)U_5(2)$*-модулю*;

(10) $p = 13$, $G \cong^2 F_4(2)'$ *или* ${}^2F_4(2)$;

(11) $p = 13$, $\overline{G} \cong L_2(25)$ (*при* $F(G) \neq 1$), $L_2(25){:}\,2_2$ *или* $L_2(25){:}\,2_3$ (*при* $F(G) \neq 1$), $F(G) = O_2(G) \times O_5(G)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных* 12*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(2)L_2(25)$*-модулей, каждый* 5*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 4*-мерному или* 16*-мерному неприводимому* $GF(5)L_2(25)$*-модулю или* 8*-мерному неприводимому* $GF(25)L_2(25)$*-модулю*;

(12) $p = 13$, $\overline{G} \cong U_3(4)$, $U_3(4){:}\,2$ *или* $U_3(4){:}\,4$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 3*-мерному или* 9*-мерному неприводимому* $GF(16)U_3(4)$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 12*-мерному неприводимому* $GF(3)U_3(4)$*-модулю, каждый* 5*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 12*-мерному неприводимому* $GF(5)U_3(4)$*-модулю*;

(13) $p = 13$, $\overline{G} \cong S_4(5)$, $F(G) = O_2(G)$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G *как* $\overline{G}$*-модуль изоморфен* 12*-мерному неприводимому* $GF(4)\overline{G}$*-модулю*;

(14) $p = 13$, $\overline{G} \cong L_4(3)$, $L_4(3){:}\,2_2$ *или* $L_4(3){:}\,2_3$, $F(G) = O_3(G)$, *каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 6*-мерному неприводимому* $GF(3)L_4(3)$*-модулю*;

(15) $p = 17$, $\overline{G} \cong L_2(16)$ (*при* $F(G) \neq 1$), $L_2(16){:}\,2$ *или* $L_2(16){:}\,4$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 2*-мерному или* 4*-мерному неприводимому* $GF(16)L_2(16)$*-модулю,* 4*-мерному неприводимому* $GF(4)L_2(16)$*-модулю или* 16*-мерному неприводимому* $GF(2)L_2(16)$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 16*-мерному неприводимому* $GF(3)L_2(16)$*-модулю, каждый* 5*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 16*-мерному неприводимому* $GF(5)L_2(16)$*-модулю*;

(16) $p = 31$, $\overline{G} \cong L_3(5)$ *или* $L_3(5){:}\,2$, *каждый* 2*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 30*-мерному неприводимому* $GF(2)L_3(5)$*-модулю, каждый* 3*-главный фактор группы* G' *как* $\overline{G}'$*-модуль изоморфен* 30*-мерному неприводимому* $GF(3)L_3(5)$*-модулю, каждый*

5-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен неприводимому $GF(5)L_3(5)$-модулю, принадлежащему парам квазиэквивалентных модулей размерностей 3, 6, 15 (две пары), 18, 39 или 60;

(17) $p = 73$, $\overline{G} \cong U_3(9)$, $U_3(9){:}\,2$ или $U_3(9){:}\,4$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 72-мерному неприводимому $GF(2)\overline{G}'$-модулю, каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен неприводимому $GF(81)\overline{G}'$-модулю размерности 3, 6, 9, 15, 18 (два модуля), 21, 36, 42, 45 (два модуля), 90 или 105, каждый 5-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 72-мерному неприводимому $GF(5)\overline{G}$-модулю;

(18) $p = 41$, $\overline{G} \cong L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_1$, $L_2(81){:}\,2_3$, $L_2(81){:}\,4_1$ или $L_2(81){:}\,4_2$, $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$, $F(G) \neq 1$ при $\overline{G} \cong L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_3$ или $L_2(81){:}\,4_2$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных 40-мерных неприводимых $GF(2)L_2(81)$-модулей, 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль может быть изоморфен 4-мерному $GF(9)L_2(81)$-модулю;

(19) $p = 41$, $\overline{G} \cong S_4(9)$, $S_4(9){:}\,2_1$ или $S_4(9){:}\,2_3$, $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$, 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль может быть изоморфен 40-мерному неприводимому $GF(4)S_4(9)$-модулю.

Теорема 7. *Пусть G — конечная четырепримарная группа, $\overline{G} := G/F(G)$ — конечная четырепримарная почти простая группа с несвязным графом $\Gamma(G)$ из п. (7) заключения теоремы 1, $\{2,3\} \subseteq \pi_1(G)$ и $5 \notin \pi(G)$. Тогда либо $\pi_1(G) = \{2,3\}$, $\pi_2(G) = \{7\}$, $\pi_3(G) = \{13\}$ и $G \cong G_2(3)$, либо $\pi_1(G) = \{2,3,7\}$, $\pi_2(G) = \{p\} \subseteq \{13,19,43,73\}$ и выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 13$, $\overline{G} \cong L_2(27){:}\,3$, $F(G) = O_3(G)$, каждый 3-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 12-мерному или 36-мерному неприводимому $GF(3)L_2(27)$-модулю;

(2) $p = 13$, $G \cong G_2(3){:}\,2$;

(3) $p = 13$, $\overline{G} \cong {}^3D_4(2)$ или ${}^3D_4(2){:}\,3$, $F(G) = O_2(G)$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 8-мерному неприводимому $GF(8)^3D_4(2)$-модулю;

(4) $p = 19$, $G \cong L_3(7)$ или $L_3(7){:}\,2$;

(5) $p = 19$, $\overline{G} \cong U_3(8), U_3(8){:}\,2, U_3(8){:}\,3_1$ или $U_3(8){:}\,3_3$, $F(G) = O_2(G)$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен либо 9-мерному неприводимому $GF(64)U_3(8)$-модулю, либо 27-мерному неприводимому $GF(4)U_3(8)$-модулю;

(6) $p = 43$, $\overline{G} \cong U_3(7)$ или $U_3(7){:}\,2$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 42-мерному неприводимому $GF(2)U_3(7)$-модулю, каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 42-мерному неприводимому $GF(3)U_3(7)$-модулю, каждый 7-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен неприводимому $GF(49)U_3(7)$-модулю размерности 3, 6, 15 (два модуля), 21, 24, 33, 36, 42, 75 или 105;

(7) $p = 73$, $\overline{G} \cong L_3(8)$, $L_3(8){:}\,2$, $L_3(8){:}\,3$ или $L_3(8){:}\,6$, каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен либо одному из двух квазиэквивалентных 3-мерных неприводимых $GF(8)L_3(8)$-модулей, либо одному из четырех 9-мерных неприводимых $GF(8)L_3(8)$-модулей (разбитых на две $Aut(\overline{G}')$-орбиты), либо одному из четырех 24-мерных неприводимых $GF(8)L_3(8)$-модулей (разбитых на две $Aut(\overline{G}')$-орбиты), либо одному из двух квазиэквивалентных 27-мерных неприводимых $GF(2)L_3(8)$-модулей, либо одному из двух квазиэквивалентных 27-мерных неприводимых $GF(8)L_3(8)$-модулей, либо одному из четырех 72-мерных неприводимых $GF(8)L_3(8)$-модулей (разбитых на две $Aut(\overline{G}')$-орбиты), каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 72-мерному неприводимому $GF(3)L_3(8)$-модулю, каждый 7-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 72-мерному неприводимому $GF(7)L_3(8)$-модулю.

Теорема 8. *Пусть G — конечная четырепримарная группа с несвязным графом $\Gamma(G)$, $\overline{G} := G/F(G)$ — конечная четырепримарная почти простая группа из пп. (4)–(6) заключения теоремы 1 и $\{2,3\} \subseteq \pi_1(G)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $\overline{G} \cong L_2(2^m)$, *где* m, $u := 2^m - 1$ *и* $t := (2^m+1)/3$ *— простые числа, большие* 3, $\pi_1(G) = \{2,3,t\}$, $\pi_2(G) = \{u\}$, $F(G) = O_2(G) \neq 1$, *2-главный фактор группы* G *может быть изоморфен 4-мерному неприводимому* $GF(2^m)L_2(2^m)$*-модулю;*

(2) $\overline{G} \cong L_2(3^m)$, *где* m *и* $u := (3^m-1)/2$ *— нечетные простые числа, а* $t^b := (3^m+1)/4$, *где* t *— простое число и* $b = 1$, *кроме случая* $t^b = 11^2$ *при* $m = 5$, $\pi_1(G) = \{2,3,t\}$, $\pi_2(G) = \{u\}$, $F(G) = O_3(G) \neq 1$, *3-главный фактор группы* G *может быть изоморфен 4-мерному неприводимому* $GF(3^m)L_2(3^m)$*-модулю;*

(3) $\overline{G} \cong L_2(r)$, *где* r *— простое число,* $17 \neq r \geq 13$, $r^2 - 1 = 2^a3^bs^c$, $s > 3$ *— простое число,* $s^c = (r+1)/2$, $a, b \in \mathbb{N}$ *и* c *равно либо* 1, *либо* 2 *при* $r \in \{97, 577\}$, $\pi_1(G) = \{2,3\}$, $\pi_2(G) = \{r\}$, $\pi_3(G) = \{s\}$, $F(G) = O_2(G)$, *если* $F(G) \neq 1$, *то* $c = 1$ *и 2-главные факторы группы* G *изоморфны* $(r-1)/2$*-мерному неприводимому* $GF(4)L_2(r)$*-модулю;*

(4) $\overline{G} \cong L_2(r)$ *или* $PGL_2(r)$, *где* r *— простое число,* $17 \neq r \geq 11$, $r^2 - 1 = 2^a3^bs^c$, $s > 3$ *— простое число,* $a, b \in \mathbb{N}$ *и* c *равно либо* 1, *либо* 2 *при* $r \in \{97, 577\}$, $\pi_1(G) = \{2,3,s\}$, $\pi_2(G) = \{r\}$, $F(G) = O_{r'}(G) \neq 1$, *2-главные факторы группы* G' *могут быть изоморфны любому неприводимому* $GF(2)L_2(r)$*-модулю, 3-главные факторы группы* G *соответствуют классам алгебраической сопряженности* $(r-1)$*-мерных абсолютно неприводимых* $\overline{GF(3)}L_2(r)$*-модулей,* s*-главные факторы группы* G *соответствуют классам алгебраической сопряженности* $(r-1)$*-мерных, а при* $r \equiv -1 \pmod 4$ *еще и* $(r-1)/2$*-мерных абсолютно неприводимых* $\overline{GF(s)}L_2(r)$*-модулей.*

Наши результаты в теоремах 5 и 6, касающиеся четырепримарных спорадических групп M_{11}, M_{12} и J_2, существенно уточняют соответствующие результаты М. Хаги [20]. Результаты для группы J_2 получены совместно с С. М. Логиновым.

Вычисления в доказательствах теорем проводятся с применением компьютерной системы GAP. На языке этой системы составлена программа, которая позволяет вычислять по формуле из леммы 1.5 размерность централизатора в векторном пространстве элемента простого порядка конечной простой группы, неприводимо действующей на этом пространстве.

В [43] показано, что любая конечная четырепримарная простая группа, кроме группы A_{10}, распознаваема по порядку и графу простых чисел. В качестве следствия теорем 1–9 получается следующая

Теорема 9. *Конечная четырепримарная простая группа распознаваема по графу простых чисел тогда и только, когда она изоморфна одной из следующих групп:* A_8, $L_3(4)$ *и* $L_2(q)$, *где* $|\pi(q^2-1)| = 3$, $q > 17$ *и либо* $q = 3^m$ *и* m *— простое нечетное число, либо* q *— простое число и* $q \not\equiv 1 \pmod{12}$, *либо* $q \in \{97, 577\}$.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [7; 12; 14; 15; 24; 25].

Если группа G действует на группе H, то будем говорить, что неединичный элемент $g \in G$ действует на H *свободно* (или *без неподвижных точек*), если $C_H(g) = 1$.

Два линейных (или матричных) представления T_1 и T_2 группы называются *квазиэквивалентными*, если представления $T_1\alpha$ и T_2 эквивалентны для некоторого автоморфизма α этой группы.

Напомним некоторые сведения из теории модулярных представлений конечных групп. Пусть p — простое число, K — алгебраическое замыкание поля $GF(p)$, G — конечная группа экспоненты p^am, где $(p,m) = 1$ и f — наименьшее натуральное число такое, что $p^f \equiv 1 \pmod m$. Пусть $g_1, \ldots, g_r$ — представители классов сопряженных p'-элементов группы G и F — подполе порядка $q = p^f$ в K. Тогда все неприводимые представления группы G над K могут быть реализованы над F (см. [25, теорема VII.2.6]), а число их классов эквивалентности равно r (см. [25, теорема VII.3.9]).

Возьмем порождающий элемент x мультипликативной группы F^* поля F, так что x есть примитивный $(q-1)$-й корень из единицы в поле K. Пусть $\zeta = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{q-1}\right)$. Сопоставим каждому элементу x^k группы F^* элемент ζ^k поля $\mathbb{C}$. Обратное отображение для этого сопоставления может быть продолжено до кольцевого гомоморфизма $\mu\colon \mathbb{Z}[\zeta] \to F$.

Пусть $T\colon G \to GL(V)$ — (p-модулярное) неприводимое представление группы G в конечномерном векторном пространстве V над полем F (при этом V называется FG-модулем) с (p-модулярным) характером Брауэра φ. *Полем определения* представления T называется наименьшее подполе из F, над которым T может быть реализовано. Хорошо известно (см. [12, введение]), что поле определения представления T равно $GF(p)(\varphi(g_i)^\mu \mid 1 \le i \le r)$.

Если $T\colon G \to GL_n(F)$ — матричное представление группы G над полем F и $\alpha \in Aut(F)$, то отображение $T^\alpha\colon G \to GL_n(F)$ такое, что $T^\alpha(g) = (a_{ij}^\alpha)$ для $g \in G$ и $T(g) = (a_{ij}) \in GL_n(F)$, также является матричным представлением группы G над полем F. Если V — FG-модуль, соответствующий T, то через V^α обозначается FG-модуль, соответствующий T^α. Представление T^α (соответственно модуль V^α) называется *алгебраически сопряженным* представлению T (соответственно модулю V).

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теорем.

Лемма 1.1 (теорема Грюнберга — Кегеля [41, теорема A]). *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *G — группа Фробениуса*;

(2) *G — двойная группа Фробениуса*;

(3) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \le A \le Aut(P)$, P — простая неабелева группа с $s(G) \le s(P)$, и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Лемма 1.2 [21]. *Если G — конечная простая трипримарная группа, то G изоморфна одной из следующих групп*: $A_5, L_2(7), A_6, L_2(8), L_2(17), L_3(3), U_3(3), U_4(2)$.

Лемма 1.3 [16; 26; 37]. *Пусть G — конечная простая четырепримарная группа. Тогда G изоморфна одной из следующих групп*:

(1) A_7, A_8, A_9, A_{10}, M_{11}, M_{12}, J_2, $L_2(16)$, $L_2(25)$, $L_2(49)$, $L_2(81)$, $L_3(4)$, $L_3(5)$, $L_3(7)$, $L_3(8)$, $L_3(17)$, $L_4(3)$, $S_4(4)$, $S_4(5)$, $S_4(7)$, $S_4(9)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, $G_2(3)$, $U_3(4)$, $U_3(5)$, $U_3(7)$, $U_3(8)$, $U_3(9)$, $U_4(3)$, $U_5(2)$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$;

(2) *$L_2(r)$, где r — простое число, $17 \ne r \ge 11$, $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ — простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $r \in \{97, 577\}$*;

(3) *$L_2(2^m)$, где m, $2^m - 1$ и $(2^m + 1)/3$ — простые числа, большие 3*;

(4) *$L_2(3^m)$, где m и $(3^m - 1)/2$ — нечетные простые числа, а $(3^m + 1)/4$ равно либо простому числу, либо 11^2 (при $m = 5$).*

Лемма 1.4 [8, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Следующий полезный результат хорошо известен (см., например, [2, лемма 4]).

Лемма 1.5. *Пусть G — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FG-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент простого порядка, отличного от p, из G, то*

$$dim\ C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Лемма 1.6 [38, предложение 3.2]. *Пусть G — конечная группа, $H \trianglelefteq G$, $G/H \cong L_2(q)$, где q нечетно, $q > 5$, и $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 3 из $G \setminus H$. Тогда $H = 1$.*

Лемма 1.7 [22, теорема 8.2; 38, предложение 4.2]. *Пусть G — конечная группа, $1 \neq H \trianglelefteq G$ и $G/H \cong L_2(2^n)$, где $n \geq 2$. Предположим, что $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 3 из G. Тогда $H = O_2(G)$ и H является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2n} в G, каждая из которых как G/H-модуль изоморфна естественному $GF(2^n)SL_2(2^n)$-модулю.*

Лемма 1.8 [34, теорема, замечание 1]. *Пусть G — конечная группа, $1 \neq H \trianglelefteq G$, $G/H \cong Sz(q)$ для $q \in \{8, 32\}$. Предположим, что $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 5 из G. Тогда $H = O_2(G)$ и H является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка q^4 в G, каждая из которых как G/H-модуль изоморфна естественному 4-мерному $GF(q)Sz(q)$-модулю.*

Лемма 1.9 [25, теорема VII.1.16]. *Пусть G — конечная группа, $F = GF(p^m)$ — поле определения характеристики $p > 0$ для абсолютно неприводимого FG-модуля V, $\langle \sigma \rangle = Aut(F)$, V_0 обозначает модуль V, рассматриваемый как $GF(p)G$-модуль, и $W = V_0 \otimes_{GF(p)} F$. Тогда*

(1) *$W = \bigoplus_{i=1}^{m} V^{\sigma^i}$, где V^{σ^i} — модуль, алгебраически сопряженный с V посредством σ^i;*

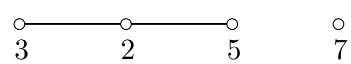
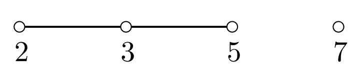
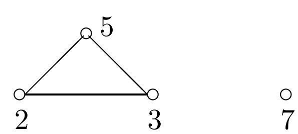
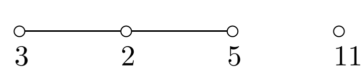
(2) *V_0 является неприводимым $GF(p)G$-модулем и, в частности, W реализуется как неприводимый $GF(p)G$-модуль V_0;*

(3) *с точностью до изоморфизма модулей неприводимые $GF(p)G$-модули находятся во взаимно однозначном соответствии с классами алгебраической сопряженности неприводимых $\overline{GF(p)}G$-модулей.*

Лемма 1.10. *Почти простые четырепримартные группы с несвязным графом простых чисел перечислены в табл. 1.*

Т а б л и ц а 1

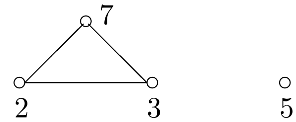
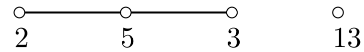
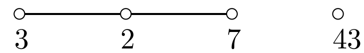
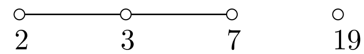
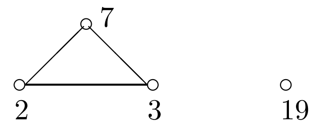
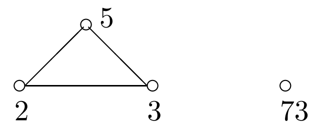
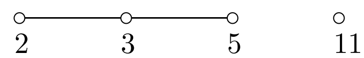
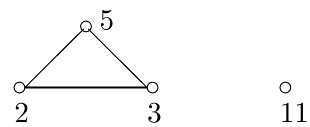
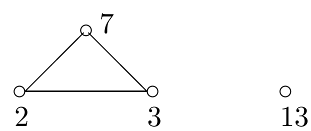
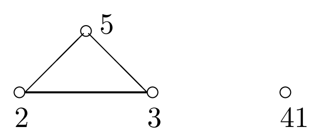
Несвязные графы простых чисел почти простых четырепримарных групп

Группа L	Граф $\Gamma(L)$
A_7, $L_2(49)$, $L_3(4)\colon 2_1$, $U_4(3)$, $L_2(49).2_3$	
S_7, $L_3(4)\colon 2_3$, $U_3(5)$, $U_3(5)\colon 2$, $U_4(3)\colon 2_2$, $U_4(3)\colon 2_3$, $L_2(49)\colon 2_1$	
A_8	
$A_9, S_8, J_2, S_6(2), O_8^+(2)$	
$L_2(11)$, M_{11}	
$M_{12}, M_{12}\colon 2$	

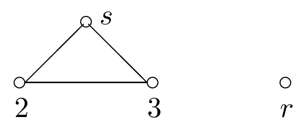
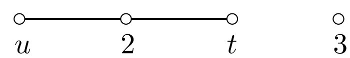
Продолжение табл. 1

Группа L	Граф $\Gamma(L)$
$L_2(16)$	2; $3 — 5$; 17
$L_2(16){:}\,2, L_2(16){:}\,4, S_4(4), S_4(4){:}\,2,$ $S_4(4){:}\,4$	$2 — 3 — 5 — 2$; 17
$L_2(25)$, $L_2(25).2_3$	$2 — 3$; 5; 13
$L_2(25){:}\,2_1$	$3 — 2 — 13$; 5
$L_2(25){:}\,2_2$, $L_4(3)$, $L_4(3){:}\,2_2$, $L_4(3){:}\,2_3$, ${}^2F_4(2)'$, $Aut({}^2F_4(2)')$	$3 — 2 — 5$; 13
$L_2(81), L_2(81){:}\,2_3$	$2 — 5$; 3; 41
$L_2(81){:}\,2_2 \cong PGL_2(81)$	$5 — 2 — 41$; 3
$L_2(81){:}\,2_1, L_2(81){:}\,4_1, L_2(81){:}\,4_2$	$2 — 3 — 5 — 2$; 41
$L_3(4)$	2; 3; 5; 7
$L_3(4).2_2, L_2(49).2_2$	$3 — 2 — 7$; 5
$L_3(5)$, $L_3(5){:}\,2$	$3 — 2 — 5$; 31
$L_3(7), L_3(7){:}\,2$	$3 — 2 — 7$; 19
$L_3(8)$	$2 — 7 — 3$; 73
$L_2(13)$, $G_2(3)$	$2 — 3$; 7; 13
$PGL_2(13)$, $L_2(27){:}\,3$, $G_2(3).2$	$3 — 2 — 7$; 13
$L_3(8){:}\,2, L_3(8){:}\,3, L_3(8){:}\,6$	$2 — 3 — 7 — 2$; 73
$S_4(5), U_3(4){:}\,2, U_3(4){:}\,4$	$2 — 3 — 5 — 2$; 13

Продолжение табл. 1

Группа L	Граф $\Gamma(L)$
$S_4(7)$	
$U_3(4)$	
$U_3(7), U_3(7).2$	
$U_3(8), U_3(8){:}\ 3_1, U_3(8){:}\ 3_3$	
$U_3(8){:}\ 2, U_3(8){:}\ 6$	
$U_3(9), U_3(9){:}\ 2, U_3(9){:}\ 4$	
$U_5(2)$	
$U_5(2){:}\ 2$	
$Sz(8)$	
$Sz(32)$	
$Sz(32){:}\ 5$	
${}^3D_4(2), {}^3D_4(2){:}\ 3$	
$S_4(9), S_4(9){:}\ 2_1, S_4(9){:}\ 2_3$	
$L_2(r)$, где $r > 17$ — простое число, $r^2 - 1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ — простое число, $a, b, c \in \mathbb{N}$, $r \equiv \varepsilon 1 \pmod 4), \varepsilon \in \{+, -\}$:	
1) $r - \varepsilon 1 = 2^{a-1}$	
2) $r - \varepsilon 1 = 2^{a-1} 3^b$	

Продолжение табл. 1

Группа L	Граф $\Gamma(L)$
3) $r-\varepsilon 1 = 2^{a-1}s^c$	
$PGL_2(r)$, где $r>17$ — простое число, $r^2-1=2^a3^bs^c$, $s>3$ — простое число, $a,b,c\in\mathbb{N}$, $r\equiv\varepsilon 1 \pmod 4, \varepsilon\in\{+,-\}$:	
1) $r-\varepsilon 1 = 2^{a-1}$	
2) $r-\varepsilon 1 \neq 2^{a-1}$	
$L_2(2^m)$, где m, $u=2^m-1$ и $t=(2^m+1)/3$ — простые числа, большие 3	
$L_2(3^m)$, где m, $u=(3^m-1)/2$ и $t\in\pi(3^m+1)$ — нечетные простые числа	
$PGL_2(3^m)$, где m, $u=(3^m-1)/2$ и $t\in\pi(3^m+1)$ — нечетные простые числа	

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — почти простая четырепримарная группа с несвязным графом $\Gamma(G)$ и цоколем P. Ввиду леммы 1.2 и [15] P — простая четырепримарная группа.

Лемма 1.3 дает список всех конечных простых четырепримарных групп.

1. Если P — из п. (1) леммы 1.3, то $\Gamma(G)$ легко находится с помощью [15; 40].

2. Пусть P — из п. (2) леммы 1.3. Тогда $P\cong L_2(r)$, где r — простое число, $r>17$, $r^2-1=2^a3^bs^c$, $s>3$ — простое число, $a,b,c\in\mathbb{N}$. Таким образом, $\pi(G)=\{2,3,r,s\}$. Пусть $r=\varepsilon 1 \pmod 4$, где $\varepsilon\in\{+,-\}$. Ввиду [41] граф $\Gamma(P)$ имеет следующие компоненты связности: $\pi_1(P)=\pi(r-\varepsilon 1)$, $\pi_2(P)=\{r\}$, $\pi_3(P)=\pi(r+\varepsilon 1)$. В частности, $|\pi_1(P)|\le 2$.

Если $|\pi_1(P)|=1$, то $\pi_1(P)=\{2\}$, $\pi_2(P)=\{r\}$ и $\pi_3(P)=\{3,s\}$.

Пусть $|\pi_1(P)|=2$. Если $3\in\pi_1(P)$, то $\pi_1(P)=\{2,3\}$, $\pi_2(P)=\{r\}$ и $\pi_3(P)=\{s\}$. Если $s\in\pi_1(P)$, то $\pi_1(P)=\{2,s\}$, $\pi_2(P)=\{r\}$ и $\pi_3(P)=\{3\}$.

Пусть $G=Aut(P)\cong PGL_2(r)$. Тогда в G есть подгруппы, изоморфные $D_{2(r-1)}$ и $D_{2(r+1)}$, поэтому $\pi_1(G)=\{2,3,s\}$ и $\pi_2(G)=\{r\}$. Если $r-\varepsilon 1=2^{a-1}$, то $\pi_1(G)$ — полный граф. Если $r-\varepsilon 1\neq 2^{a-1}$, то $\pi_1(G)$ — цепь.

3. Пусть P — из п. (3) леммы 1.3. Тогда $P\cong L_2(2^m)$, где m, $u=2^m-1$ и $t=(2^m+1)/3$ — простые числа, большие 3. Поэтому $\pi_1(P)=\{2\}$, $\pi_2(P)=\{u\}$ и $\pi_3(P)=\{3,t\}$.

Предположим, что $Inn(P)<G\le Aut(P)$. Тогда $G=Inn(P)\leftthreetimes\langle f\rangle$, где f — полевой автоморфизм порядка m группы P. Поскольку $|\pi(G)|=|\pi(P)|=4$, $m\in\{u,t\}$. Можно считать, что f нормализует силовскую u-подгруппу и силовскую t-подгруппу из P. Поэтому f централизует в P элемент порядка u или t — противоречие с тем, что $C_P(f)\cong L_2(2)\cong S_3$.

Пусть P — из п. (4) леммы 1.3. Тогда $P\cong L_2(3^m)$, где m, $u=(3^m-1)/2$ и $t\in\pi(3^m+1)$ — нечетные простые числа. Таким образом, $\pi(P)=\{2,3,u,t\}$.

По [41] граф $\Gamma(P)$ имеет следующие компоненты связности: $\pi_1(P) = \pi(3^m + 1) = \{2, t\}$, $\pi_2(P) = \{3\}$, $\pi_3(P) = \{u\}$.

Пусть $Inn(P) < G \leq Aut(P) \cong PGL_2(3^m) \leftthreetimes \langle f\rangle$, где f — полевой автоморфизм порядка m группы P.

Пусть $G \geq PGL_2(3^m)$. Тогда в G есть подгруппы, изоморфные $D_{2(3^m-1)}$ и $D_{2(3^m+1)}$, поэтому $\Gamma(G)$ имеет компоненты связности $\pi_1(G) = \{2, u, t\}$ и $\pi_2(G) = \{3\}$, причем вершина 2 смежна с u и t.

Допустим, что $G > PGL_2(3^m)$. Тогда G содержит элемент f простого порядка m и $C_P(f) \cong PGL_2(3) \cong S_4$, следовательно, $m \in \{3, u, t\}$. Но тогда граф $\Gamma(G)$ связен; противоречие.

Значит, $G = PGL_2(3^m)$. Вершины u и t не смежны в графе $\Gamma(G)$, так как подгруппы, изоморфные $D_{2(3^m-1)}$ или $D_{2(3^m+1)}$, максимальны в G.

Пусть $G \cap PGL_2(3^m) = P$. Поскольку $Out(P)$ — циклическая группа порядка $2m$ и m нечетно, то $G \cap \langle f\rangle \neq 1$ и граф $\Gamma(G)$, как и выше, связен, что не так.

Лемма доказана.

2. Доказательство теорем

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Теорема следует из лемм 1.1, 1.3 и 1.9.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть выполняются условия теоремы 2. Поскольку группа G четырепримарна, а группа $\overline{G}$ трипримарна, то по лемме 1.2 в $\pi(F(G))\backslash\pi(\overline{G})$ содержится простое число p, большее 3. По лемме 1.1 $\{2, p\} \subseteq \pi_1(G)$.

Случай 1. $3 \notin \pi_1(G)$. Тогда $3 \notin \pi_1(\overline{G})$ и по [5, таблица] имеем $\overline{G} \in \{A_5, A_6, M_{10}, L_2(7), L_2(8), L_2(17)\}$.

Если $\overline{G} \in \{A_5,\ L_2(8)\}$, то элемент порядка 3 из G действует свободно на $O_p(G)$, откуда по лемме 1.7 получаем, что $O_p(G) = 1$, а это не так.

Если $\overline{G} \in \{A_6, M_{10}\}$, то $3p \in \omega(G)$, поскольку силовская 3-подгруппа в $\overline{G}$ является элементарной абелевой порядка 9, откуда $3 \in \pi_1(G)$; противоречие с предположением.

Если $G \cong L_2(7)$, то $\overline{G}$ содержит подгруппу Фробениуса порядка 21 и по лемме 1.4 вершина 3 лежит в $\pi_1(G)$; противоречие с предположением.

Если $\overline{G} \cong L_2(17)$, то элемент порядка 3 из G действует свободно на $O_p(G)$, откуда по лемме 1.6 получаем, что $O_p(G) = 1$, а это не так.

Таким образом, случай 1 невозможен.

Случай 2. $3 \in \pi_1(G)$. Тогда $\pi_1(G) = \{2, 3, p\}$ и $\pi_2(G) = \pi_2(\overline{G}) = \{r\}$ для некоторого простого числа r. Так как $\overline{G}$ — почти простая трипримарная группа, то по [5, таблица] имеем $\pi(\overline{G}) = \{2, 3, r\}$ и, следовательно, $r \in \{5, 7, 13, 17\}$.

Если $r = 5$, то по [2], [5, таблица, теорема] и [15] имеем $\overline{G} \in \{A_5, S_5\}$ и выполняется утверждение (1).

Пусть $r = 7$. Тогда по [5, таблица] имеем $\overline{G} \in \{L_2(7), PGL_2(7), L_2(8),{}^2G_2(3), U_3(3), G_2(2)\}$.

Если $\overline{G} \in \{L_2(7), PGL_2(7)\}$, то по [15] и [5, теорема] выполняется утверждение (2).

Если $\overline{G} \in \{L_2(8),{}^2G_2(3)\}$, то по [15] не существует неприводимый $GF(p)\overline{G}$-модуль, на котором элемент порядка 7 из $\overline{G}$ действует свободно, значит, граф $\Gamma(G)$ связен; противоречие.

Если $\overline{G} \in \{U_3(3), G_2(2)\}$, то по [15] существует единственный 6-мерный абсолютно неприводимый $GF(p^m)\overline{G}$-модуль с полем определения $GF(p^m)$. Если $\overline{G} \cong U_3(3)$, то $m = 1$. Если $\overline{G} \cong G_2(2)$, то $m = (GF(p)(\sqrt{-3})\colon GF(p))$. По [31, лемма 4] получаем, что m равно 1 при $p \equiv 1 \pmod 3$ и 2 при $p \equiv -1 \pmod 3$. Поэтому с учетом [5, теорема] выполняется утверждение (3).

Пусть $r = 13$. Тогда по [5, таблица] имеем $\overline{G} \in \{L_3(3), Aut(L_3(3))\}$. По [15] существует единственный 12-мерный абсолютно неприводимый $GF(p^m)\overline{G}$-модуль с полем определения $GF(p^m)$. Если $\overline{G} \cong L_3(3)$, то $m = 1$. Если $\overline{G} \cong Aut(L_3(3))$, то $m = (GF(p)(\sqrt{3})\colon GF(p))$. Ввиду [31, лемма 3] получаем, что m равно 1 при $p \equiv 1 \pmod{12}$ и 2 в противном случае. Поэтому ввиду [5, теорема] выполняется утверждение (4).

Пусть, наконец, $r = 17$. Тогда по [5, таблица] имеем $\overline{G} \in \{L_2(17), Aut(L_2(17))\}$. Ввиду [15] и [31, таблица] выполняется утверждение (5).

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Пусть выполняются условия теоремы 3. Если $O(G) \neq 1$, то по [39, теорема II.1] выполняется утверждение (1).

Пусть $O(G) = 1$. По лемме 1.1 возможен один из трех случаев.

Если выполнен случай (1) леммы 1.1, то G — группа Фробениуса с ядром $F(G) = O_2(G)$ и справедливо утверждение (2).

Если выполнен случай (2) леммы 1.1, то справедливо утверждение (3).

Пусть выполнен случай (3) леммы 1.1. Тогда $F(G) = O_2(G)$ и по [39, теорема III.1] группа $\overline{G}$ изоморфна одной из следующих групп: $L_2(2^n)$ $(n \geq 2)$, $Sz(q)$ $(q = 2^{2n+1} > 2)$, $L_2(q)$ ($q > 5$ — простое число Ферма или Мерсенна), $L_3(4)$.

Если $\overline{G} \cong L_2(q)$, где $q > 5$ — простое число Ферма или Мерсенна, то по лемме 1.6 справедливо утверждение (4).

Если $\overline{G} \cong L_3(4)$, то $O_2(G) = 1$, так как силовская 3-подгруппа в $\overline{G}$ изоморфна элементарной абелевой группе порядка 9, поэтому справедливо утверждение (5).

Если $\overline{G} \cong L_2(2^n)$ $(n \geq 2)$, то ввиду лемм 1.3 и 1.7 справедливо утверждение (6).

Если $\overline{G} \cong Sz(q)$, то ввиду лемм 1.3, 1.8 и 1.10 справедливо утверждение (7).

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Пусть выполняются условия теоремы 4.

Поскольку $3 \notin \pi_1(G)$, то $3 \notin \pi_1(\overline{G})$. Из леммы 1.10 вытекает, что группа $\overline{G}$ изоморфна одной из групп $L_3(4)$, $L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_2$, $L_2(81){:}\,2_3$, $Sz(8)$, $Sz(32)$, $Aut(Sz(32))$, $L_2(2^l)$, $L_2(3^m)$, $PGL_2(3^m)$ или $L_2(r)$, где l, m, r — нечетные простые числа, $|\pi(2^{2l}-1)| = |\pi(3^{2m}-1)| = |\pi(r^2-1)| = 3$ и $17 \neq r \not\equiv \pm 1 (mod\ 12)$.

Если $\overline{G} \cong L_3(4)$, то $F(G) = 1$, так как силовская 3-подгруппа в $L_3(4)$ элементарная абелева порядка 9, и поэтому $\pi_1(G) = \{2\}$, что противоречит условию теоремы.

Если $\overline{G}$ изоморфна $L_2(81)$, $L_2(81){:}\,2_2$, $L_2(81){:}\,2_3$, $L_2(3^m)$, $PGL_2(3^m)$ или $L_2(r)$, то по лемме 1.6 получаем, что $F(G) = 1$, так что ввиду теоремы 3 выполнено утверждение (1).

Пусть $\overline{G} \cong L_2(2^l)$. Поскольку $\pi_1(G) \neq \{2\}$, то из леммы 1.10 вытекает, что $F(G) \neq 1$ и $\pi_1(G) = \{2, u\}$, где $u = 2^l - 1$. Теперь по лемме 1.7 $F(G) = O_2(G)$, и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен естественному $GF(2^l)SL_2(2^l)$-модулю. Но тогда элемент порядка u из G действует свободно на $O_2(G)$ и, следовательно, $u \notin \pi_1(G)$; противоречие с установленным ранее.

Пусть $\overline{G} \cong Sz(8)$, $Sz(32)$ или $Aut(Sz(32))$. Ясно, что 5 делит $|G|$. Предположим, что $5 \notin \pi_1(G)$. Тогда, используя леммы 1.9 и условие $\pi_1(G) \neq \{2\}$, получаем, что $\overline{G} \cong Sz(q)$, где $q \in \{8, 32\}$, и $F(G) \neq 1$. По лемме 1.8 $F(G) = O_2(G)$ и каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен естественному 4-мерному $GF(q)Sz(q)$-модулю. Применяя лемму 1.5 и таблицы модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}$ из [12], получаем, что все элементы простого нечетного порядка из G действуют свободно на $O_2(G)$ и, следовательно, $\pi_1(G) = \{2\}$; противоречие.

Итак, $5 \in \pi_1(G)$. Пусть $p \in \pi_2(G)$. Применив лемму 1.5 и таблицы модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}$ из [12], получаем, что элемент порядка p из G действует несвободно на $O(F(G))$. Поэтому $F(G) = O_2(G)$. Применяя лемму 1.5 и таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}'$ из [12], получим, что выполнены утверждения (2) или (3). Вычисления в последних двух абзацах проводятся с применением компьютерной системы GAP [40].

Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 5. Пусть выполняются условия теоремы 5. Поскольку $5 \in \pi(G) \setminus \pi_1(G)$, $5 \in \pi(\overline{G}) \setminus \pi_1(\overline{G})$. Из леммы 1.10 и условия $3 \in \pi_1(G)$ вытекает, что группа $\overline{G}$ изоморфна одной из групп, определенных в утверждениях (1)–(3) доказываемой теоремы.

Если $\pi_2(G) = \{5\}$, то, применяя [2], лемму 1.5 и таблицу 2-модулярных характеров Брауэра группы A_7 из [12], получаем, что выполнено одно из утверждений (1)–(3).

Поэтому можно считать, что $\pi_1(G) = \{2,3\}$ и $\pi_2(G) = \{5,p\}$, где $p \in \pi(G) \setminus \{2,3,5\}$. Отсюда по лемме 1.1 $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3\}$. Ввиду леммы 1.9 $F(G) \neq 1$. Поэтому силовские 5- и p-подгруппы группы $\overline{G}$ циклические, следовательно, группа $\overline{G}$ изоморфна одной из групп A_7, $L_3(4)$, $L_3(4)\colon 2_1$, $L_3(4)\colon 2_2$, $U_4(3)$, M_{11} или $L_2(11)$. Применяя лемму 1.5 и таблицы 2- и 3-модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}'$ из [12], получаем, что элемент порядка 5 или p из G централизует нетривиальный элемент из $F(G)$, что невозможно.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 6. Пусть выполняются условия теоремы 6. Применяя леммы 1.5, 1.9 и 1.10, таблицы характеров Брауэра из [12] и вычисляя в GAP [40], получим, что либо выполнено одно из утверждений (1)–(18), либо $p = 41$ и $\overline{G}$ — группа из утверждений (18) или (19).

Пусть G — группа из утверждения (19). Тогда ввиду леммы 1.10 $\overline{G} \cong L_2(81)$, $L_2(81)\colon 2_1$, $L_2(81)\colon 2_3$, $L_2(81)\colon 4_1$ или $L_2(81)\colon 4_2$ и $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3,5\}$, причем $F(G) \neq 1$ при $\overline{G} \cong L_2(81)$, $L_2(81)\colon 2_3$ или $L_2(81)\colon 4_2$. Применяя лемму 1.5 и таблицы 2- и 5-модулярных характеров Брауэра из [17] для группы $\overline{G}' \cong L_2(81)$, получим, что $O_5(G) = 1$ и каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных 40-мерных неприводимых $GF(2)L_2(81)$-модулей. 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль может быть изоморфен 4-мерному $GF(9)L_2(81)$-модулю, поскольку $L_2(81) \cong \Omega_4^-(9)$, а элемент порядка 41 из $\Omega_4^-(9)$ действует свободно на естественном 4-мерном $GF(9)\Omega_4^-(9)$-модуле. Таким образом, утверждение (18) доказано.

Пусть G — группа из утверждения (19). Тогда ввиду леммы 1.9 $\overline{G} \cong S_4(9)$, $S_4(9)\colon 2_1$ или $S_4(9)\colon 2_3$ и $\pi(F(G)) \subseteq \{2,3,5\}$. В $\overline{G}'$ есть подгруппа H, изоморфная $L_2(81)$. Поэтому ввиду утверждения (18) имеем $O_5(G) = 1$. По [42] алгебраически сопряженные неприводимые характеры θ_7 и θ_8 из главного 2-блока группы $\overline{G}'$ имеют степень 40, и их ограничения на множество элементов нечетного порядка группы $\overline{G}'$ являются ее неприводимыми характерами Брауэра. Ввиду утверждения (18) ограничениям этих характеров Брауэра на подгруппу H соответствуют неприводимые $GF(2)H$-модули, на которых элемент порядка 41 из H действует свободно. Отсюда следует справедливость утверждения (19).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть выполняются условия теоремы 7. Применяя леммы 1.5, 1.9 и 1.10, таблицы характеров Брауэра из [12] и вычисляя в GAP [40], получим справедливость одного из утверждений (1)–(7) теоремы.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 8. Пусть выполняются условия теоремы 8.

Пусть сначала выполнен п. (4) заключения теоремы 1. Тогда по лемме 1.10 $\overline{G} \cong L_2(2^m)$, где m, $u := 2^m - 1$ и $t := (2^m + 1)/3$ — простые числа, большие 3, $\pi_1(G) = \{2,3,t\}$, $\pi_2(G) = \{u\}$ и $F(G) \neq 1$. В $\overline{G}$ есть подгруппа, изоморфная группе Фробениуса вида $2^m\colon u$. Если $O(F(G)) \neq 1$, то по лемме 1.4 элемент порядка u из G централизует нетривиальный элемент из $O(F(G))$, что не так. Поэтому $F(G) = O_2(G) \neq 1$. Пусть V_1 — естественный 2-мерный неприводимый $GF(2^m)\overline{G}$-модуль с характером Брауэра β_1, V_2 — модуль, алгебраически сопряженный с V посредством автоморфизма Фробениуса поля $GF(2^m)$, с характером Брауэра β_2 и $V = V_1 \otimes V_2$. Положим $z = \exp(2\pi i/u)$ и a — элемент порядка u в $\overline{G}$. Тогда ввиду [17, разд. VII] $\beta_1(a^k) = z^k + z^{-k}$ и $\beta_2(a^k) = z^{2k} + z^{-2k}$ для $0 \leq k \leq u-1$ и V_2 — неприводимый $GF(2^m)\overline{G}$-модуль с характером Брауэра $\beta = \beta_1\beta_2$. Но $\beta(a^k) = (z^k+z^{-k})+(z^{3k}+z^{-3k})$, поэтому $4+2\sum_{k=0}^{(u-1)/2}\beta(a^k) = 4 + 2\sum_{k=1}^{(u-1)/2}(z^k + z^{-k}) + 2\sum_{k=1}^{(u-1)/2}(z^{3k} + z^{-3k}) = 0$ и, следовательно, по лемме 1.5 элемент a действует на V свободно. Так как m — простое число, и группа $L_2(2^m)$ не изоморфна подгруппе из $L_4(2)$ (см. [15]), то $GF(2^m)$ — поле определения модуля V. Пункт (1) теоремы доказан.

Пусть теперь выполнен п. (5) заключения теоремы 1. Тогда по лемме 1.10 $\overline{G} \cong L_2(3^m)$, где m, $u := (3^m - 1)/2$ и $t \in \pi(3^m + 1)$ — нечетные простые числа, $\pi_1(G) = \{2,3,t\}$, $\pi_2(G) = \{u\}$ и $F(G) \neq 1$. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, заменив $2^m - 1$ на $(3^m - 1)/2$, получим справедливость п. (2) теоремы.

Пусть наконец выполнен п. (6) заключения теоремы 1. Тогда $\overline{G} \cong L_2(r)$ или $PGL_2(r)$, где r — простое число, $17 \neq r \geq 11$, $r^2-1 = 2^a 3^b s^c$, $s > 3$ — простое число, $a, b \in \mathbb{N}$ и c равно либо 1, либо 2 при $r \in \{97, 577\}$. Пусть $r \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Ниже в табл. 2 приведена таблица характеров группы $L_2(r)$, где $|a| = (r-1)/2$, $|b| = (r+1)/2$, $|c| = |d| = r$ (см. [17]).

Т а б л и ц а 2

Таблица характеров группы $L_2(r)$

	1	c	d	a^m $(1 \leq m \leq \frac{r-2+\varepsilon 1}{4})$	b^n $(1 \leq n \leq \frac{r-\varepsilon 1}{4})$
1	1	1	1	1	1
γ_1	$\frac{r+1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{\varepsilon r}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{\varepsilon r}}{2}$	$(-1)^m$	0
γ_2	$\frac{r+1}{2}$	$\frac{1-\sqrt{\varepsilon r}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{\varepsilon r}}{2}$	$(-1)^m$	0
δ_k $(1 \leq k \leq \frac{r-2+\varepsilon 1}{4})$	$q-1$	-1	-1	0	$-2\cos\frac{4\pi kn}{r+1}$
α	q	0	0	1	-1
θ_l $(1 \leq l \leq \frac{r-4-\varepsilon 1}{4})$	$q+1$	1	1	$2\cos\frac{4\pi lm}{r-1}$	0

Предположим, что $r \in \pi_1(G)$. Тогда по лемме 1.10 $\pi_1(G) = \{2, 3, r\}$, $\pi_2(G) = \{s\}$, $\overline{G} \cong L_2(r)$ и $F(G) \neq 1$. Покажем сначала, что $O_p(G) = 1$. В противном случае можно считать, что $V := O_p(G)$ — неприводимый $GF(r)\overline{G}$-модуль. Ввиду [17, теорема 9.1] размерность n модуля V нечетна и $n \geq 3$. Если s делит $r+1$, то s не делит r^n-1 и, следовательно, элемент порядка s из G действует на V несвободно, что не так. Поэтому s делит $r-1$. В группе G есть подгруппа D, изоморфная диэдральной группе порядка $2s$, причем $C_V(D) = 1$. По теореме Машке V есть прямая сумма неприводимых точных $GF(r)D$-модулей, которые все имеют размерность 2, поэтому n четно; противоречие.

Таким образом, $O_p(G) = 1$. Если s делит $r-1$, то по лемме 1.4 элемент порядка s из G действует на $F(G)$ несвободно. Поэтому $r+1$ равно $2s$ или $2s^2$ и 12 делит $r-1$.

Применяя лемму 1.5, табл. 2 и p-модулярные матрицы разложения группы $L_2(r)$ для $p \in \{2, 3\}$ из [17], получаем, что элемент порядка r из G действует свободно на всех неприводимых $GF(p)L_2(r)$-модулях, на которых элемент порядка s из G действует свободно. Отсюда элемент порядка r из G действует свободно на $F(G)$, что противоречит предположению, так как $r \notin \pi_1(\overline{G})$.

Итак, $r \notin \pi_1(G)$.

Пусть $\pi_1(G) = \{2, 3\}$. Тогда по лемме 1.10 $\pi_2(G) = \{r\}$, $\pi_2(G) = \{s\}$, $\overline{G} \cong L_2(r)$ и $r - \varepsilon 1 = 2^{a-1}3^b$. Если $F(G) = 1$, то выполняется п. (3) теоремы выполняется. Пусть $F(G) \neq 1$.

Если $\varepsilon = -$, то s делит $r-1$ и по лемме 1.4 элемент порядка s из G действует на $F(G)$ несвободно. Поэтому $\varepsilon = +$ и $r+1$ равно $2s$ или $2s^2$. Применяя лемму 1.5, табл. 2 и p-модулярные матрицы разложения группы $L_2(r)$ для $p \in \{2, 3\}$ из [17], получим справедливость п. (3) теоремы.

Пусть $\pi_1(G) = \{2, 3, s\}$. Тогда по лемме 1.10 $\pi_2(G) = \{r\}$. Применяя лемму 1.5, табл. 2 и p-модулярные матрицы разложения группы $L_2(r)$ для $p \in \{2, 3, s\}$ из [17], получим справедливость п. (4) теоремы.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 9. Из леммы 1.10 и теорем 1—8 следует, что для доказательства теоремы осталось доказать нераспознаваемость по графу простых чисел группы $S_4(7)$. Но это действительно так, поскольку ввиду леммы 1.10 легко увидеть, что $\Gamma(S_4(7)) = \Gamma(G)$, где G — группа Фробениуса вида $(2^4 \times 3^4 \times 7^4) : 5$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев А.В., Гречкосеева М.А., Мазуров В.Д.** Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 658–728.
2. **Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М.С.** C55-группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
3. **Заварницин А.В.** О распознавании конечных простых групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
4. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
5. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.
6. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 15-е. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. 172 с.
7. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
8. **Мазуров В.Д.** Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
9. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7.)
10. **Хосрави А., Хосрави Б.** Квазираспознавание простой группы $^2G_2(q)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 707–715.
11. **Хосрави А., Хосрави Б.** 2-распознаваемость $PSL(2, p^2)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 934–944.
12. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
13. **Arad Z., Herford W.** Classification of finite groups with a CC-subgroup // Comm. Algebra. 2004. Vol. 32, no 6. P. 2087–2098.
14. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
15. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
16. **Bugeaud Y., Cao Z., Mignotte M.** On simple K_4-groups // J. Algebra. 2001. Vol. 241, no. 2. P. 658–668.
17. **Burkhardt R.** Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $PSL(2, p^f)$-groups // J. Algebra. 1976. Vol. 40, no. 1. P. 75–96.
18. **Fleischmann P., Lempken W., Tiep P.H.** Finite p'-semiregular groups // J. Algebra. 1997. Vol. 188, no. 2. P. 547–579.
19. **Guralnik R.M., Tiep P.H.** Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. Vol. 6, no. 3. P. 271–310.
20. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424.
21. **Herzog M.** On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. 1968. Vol. 10, no. 3. P. 383–388.
22. **Higman G.** Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes. Michigan: University Michigan, 1968. 77 p.

23. **Holt D.F., Plesken W.** A_5-invariant 2-groups with no trivial sections // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1986. Vol. 37, no. 145. P. 39–47.
24. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
25. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups II. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 531 p.
26. **Huppert B., Lempken W.** Simple groups of order divisible by at most four primes // Proc. F. Scorina. Gomel State University. 2000. no. 3 (16). Problems in Algebra. P. 64–75.
27. **Khosravi B.** n-recognition by prime graph of the simple group $PSL(2, q)$ // J. Algebra Appl. 2008. Vol. 7, no. 6. P. 735–748.
28. **Khosravi B., Amiri S.S.S.** Groups with the same prime graph as $L_2(q)$ where $q = p^\alpha < 100$ // Hadronic J. 2007. Vol. 30, no. 3. P. 343–354.
29. **Khosravi Bahman, Khosravi Behnam, Khosravi Behrooz.** On the prime graph of $PSL(2, p)$ where $p > 3$ is a prime number // Acta Math. Hungar. 2007. Vol. 116, no. 4. P. 295–307.
30. **Khosravi Bahnam, Khosravi Behnam, Khosravi Behrooz.** Groups with the same prime graph as a CIT simple group // Houston J. Math. 2007. Vol. 33, no. 4. P. 967–977 (electronic).
31. **Kondratiev A.S.** Finite linear groups of small degree. II // Commun. Algebra. 2001. Vol. 29, no. 9. P. 4103–4123.
32. **Lucido M.S.** Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1999. Vol. 102. P. 1–22; addendum // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. P. 189–190.
33. **Martineau P.** On representations of the Suzuki groups over fields of odd characteristic // J. London Math. Soc. (2) 1972. Vol. 6. P. 153–160.
34. **Martineau R.P.** On 2-modular representations of the Suzuki groups // Amer. J. Math. 1972. Vol. 94. P. 55–72.
35. **Prince A.R.** On 2-groups admitting A_5 or A_6 with an element of order 5 acting fixed point freely // J. Algebra. 1977. Vol. 49, no. 2. P. 374–386.
36. **Prince A.R.** An analogue of Maschke's theorem for certain representations of A_6 over $GF(2)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A. 1982. Vol. 91, no. 3–4. P. 175–177.
37. **Shi W.J.** On simple K_4-groups // Chinese Science Bull. 1991. 36 (17). P. 1281–1283.
38. **Stewart W.B.** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. 1973. Vol. 426, no. 4. P. 653–680.
39. **Suzuki M.** Finite groups with nilpotent centralizer // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 99. P. 425–470.
40. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.4.12. 2008. URL: http://www.gap-system.org .
41. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
42. **White D.L.** The 2-Decomposition numbers of $Sp(4, q)$, q odd // J. Algebra. 1990. Vol. 131, no. 2. P. 703–725.
43. **Zhang L.C., Shi W.J.** OD-Characterization of simple K_4-groups // Algebra Colloquium. 2009. Vol. 16, no. 2. P. 275–282.
44. **Zurek G.** Über A_5-invariante 2-Gruppen // Mitt. Math. Sem. Giessen. 1982. H. 155. 92 S.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 30.04.2010

Храмцов Игорь Владимирович
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ihramtsov@gmail.com

Том 17 № 4 2011

УДК 515.162.8

ЕДИНСТВЕННОСТЬ КОРНЕЙ УЗЛОВ В $F \times I$ И ПРИМАРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ УЗЛОВ[1]

Ф. Г. Кораблев

На множестве узлов в утолщенных поверхностях, т. е. трехмерных многообразиях вида $F \times I$, где F — замкнутая ориентируемая поверхность и $I = [0, 1]$, вводится четыре типа редукций. Доказывается, что процесс применения этих редукций к произвольному узлу в утолщенной поверхности всегда конечен. Получающийся в результате набор узлов в утолщенных поверхностях зависит только от исходного узла с точностью до удаления тривиальных узлов в утолщенных сферах. Редукции узлов в утолщенных поверхностях индуцируют операцию связного суммирования виртуальных узлов. Доказывается, что любой виртуальный узел раскладывается в связную сумму нескольких примарных или тривиальных виртуальных узлов. При этом примарные слагаемые такого разложения определены однозначно.

Ключевые слова: виртуальный узел, теория корней, связная сумма, утолщенная поверхность.

F. G. Korablev. Uniqueness of knot roots in $F \times I$ and prime decompositions of virtual knots.

We introduce four types of reduction on the set of knots in thickened surfaces, i.e., in three-dimensional manifolds of the form $F \times I$, where F is a closed orientable surface and $I = [0, 1]$. It is proved that the process of applying these reductions to an arbitrary knot in a thickened surface is always finite. The resulting set of knots in thickened surfaces depends on the initial knot only up to the removal of trivial knots in thickened spheres. Reductions of knots in thickened surfaces induce the operation of connected summation of virtual knots. It is proved that every virtual knot can be decomposed into a connected sum of several prime or trivial virtual knots and the prime summands of the decomposition are defined uniquely.

Keywords: virtual knot, root theory, connected sum, thickened surface.

Введение

Утолщенные поверхности, т. е. трехмерные многообразия вида $F \times I$, где F — замкнутая ориентируемая поверхность и $I = [0, 1]$, являются самыми простыми трехмерными многообразиями после сферы S^3. В работе [7] было показано, что если узел $K \subset F \times I$ является гомологически тривиальным, т. е. определяет тривиальный элемент группы $H_1(F; \mathbb{Z}_2)$, то его разложение в кольцевую связную сумму примарных узлов существует и единственно. В общем случае единственности нет. Это означает, что применение редукций типа 1 (преобразований, обратных кольцевым суммированиям из работы [7]) к гомологически нетривиальному узлу может дать различные наборы примарных слагаемых. Несколько таких примеров приведены в разд. 2. Из их анализа следует, что единственности можно добиться за счет дальнейшего разложения слагаемых с помощью дополнительных преобразований, которые мы будем называть редукциями типов 2, 3 и 4 (см. разд. 1). Нами доказана

Теорема 1. *Пусть K — узел в $F \times I$, где F — замкнутая ориентируемая поверхность и $I = [0, 1]$. Будем к паре $(F \times I, K)$ и получающимся из нее парам применять нетривиальные редукции типов $1 - 4$ до тех пор, пока это возможно. Тогда этот процесс всегда конечен. Получающийся в результате набор узлов в утолщенных поверхностях зависит только от исходной пары $(F \times I, K)$ с точностью до удаления пар типа $(S^2 \times I, O)$, где O — тривиальный узел в утолщенной сфере $S^2 \times I$.*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00605) и Программы фундаментальных исследований отделения математических наук РАН.

Как следует из работ [1;4], множество пар вида $(F\times I, K)$, рассматриваемых с точностью до отношения эквивалентности, порожденного дестабилизациями (редукциями типа 2), совпадает со множеством виртуальных узлов. Следующий результат вытекает из теоремы 1.

Теорема 2. *Любой виртуальный узел раскладывается в связную сумму нескольких примарных или тривиальных виртуальных узлов. При этом примарные слагаемые такого разложения определены однозначно, т. е. зависят только от исходного виртуального узла.*

Отметим, что появление тривиальных виртуальных узлов в формулировке теоремы 2 связано с существованием нетривиальных виртуальных узлов, представимых в виде связных сумм тривиальных виртуальных узлов (см. [3; 6]).

1. Редукции узлов в $F \times I$

Определение 1. Пусть F — связная замкнутая ориентируемая поверхность, $I = [0,1]$. *Узлом* в $F \times I$ называется произвольная простая замкнутая кривая $K \subset Int(F \times I)$. Два узла $K \subset F \times I$ и $K' \subset F' \times I$ *эквивалентны*, если существует такой гомеоморфизм пар $h\colon (F \times I, K) \to (F' \times I, K')$, что $h(F \times \{0\}) = F' \times \{0\}$.

Удобно рассматривать узел $K \subset F \times I$ как пару $(F \times I, K)$. Будем предполагать, что $K \neq \varnothing$. Собственное кольцо $A \subset F \times I$ называется *вертикальным*, если оно изотопно кольцу вида $c \times I \subset F \times I$, где c — простая замкнутая кривая на поверхности F. Определим четыре типа редукций узлов в утолщенных поверхностях.

Определение 2. Пусть $(F \times I, K)$ — узел.

1. Пусть $A \subset F \times I$ — несжимаемое вертикальное разбивающее кольцо, трансверсально пересекающее узел K в двух точках. *Редукция типа* 1 вдоль кольца A состоит в следующем: разрезаем пару $(F \times I, K)$ по кольцу A и заклеиваем две получившиеся копии этого кольца двумя ручками индекса 2 с тривиальными дугами в них. В результате получаются две пары $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$.

2. Пусть $A \subset F\times I$ — несжимаемое вертикальное кольцо, не пересекающее узел K. *Редукция типа* 2 (дестабилизация) вдоль кольца A состоит в следующем: разрезаем многообразие $F \times I$ по кольцу A и заклеиваем две копии этого кольца ручками индекса 2. Если в результате редукции получается утолщенная поверхность, не содержащая никакого узла, помещаем в нее тривиальный узел (т. е. кривую, ограничивающую диск).

3. Пусть A_1, A_2 — такая пара непересекающихся вертикальных колец в $F \times I$, что их объединение разбивает $F \times I$ на две части и узел K трансверсально пересекает каждое из колец ровно в одной точке. *Редукция типа* 3 вдоль колец A_1, A_2 состоит в следующем: разрезаем пару $(F \times I, K)$ по кольцам A_1, A_2 и склеиваем копии этих колец на крае каждой части так, чтобы получились две пары $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$, где F_1, F_2 — замкнутые ориентируемые поверхности.

4. Пусть $S \subset F \times I$ — сфера, ограничивающая шар $B \subset F \times I$, причем пересечение $l = K \cap B$ либо совпадает с узлом K, либо является заузленной дугой в B. *Редукция типа* 4 (вырезание локального узла) вдоль сферы S состоит в замене пары $(F \times I, K)$ на две пары $(S^2 \times I, K_1)$ и $(F \times I, K_2)$. Узел $(S^2 \times I, K_1)$ получается взятием копии (B', l') пары (B, l) внутри утолщенной сферы $S^2 \times I$ и в случае, когда l' является дугой, замыканием ее в узел путем добавления к ней незаузленной дуги в дополнении шара B'. Узел K_2 в $F \times I$ либо является кривой, ограничивающей диск (при $l = K$), либо получается из узла K заменой дуги $l \subset B$ на тривиальную дугу в B.

Редукция типа 4 задается сферой, которая либо трансверсально пересекает узел в двух точках, либо ограничивает шар, целиком содержащий узел. Результат применения редукции типа 4 совпадает с результатом применения редукции типа 1 или 2 вдоль подходящего сжимаемого кольца. Редукции типов 1 и 4 обратны операции кольцевой связной суммы (см. [7]).

Такая связная сумма является прямым обобщением связной суммы классических узлов в S^3 на случай узлов в утолщенных поверхностях. Редукции типа 3 обратны другой операции связного суммирования, которая не имеет аналогов в теории классических узлов, но иногда рассматривается в теории виртуальных узлов (см. [6]).

О п р е д е л е н и е 3. Редукция пары $(F \times I, K)$ называется *тривиальной*, если эта пара остается неизменной, но к ней добавляется либо тривиальный узел в утолщенной сфере (т. е. кривая, ограничивающий диск), либо узел вида $l \times \{*\}$ в утолщенном торе $T^2 \times I$, где $l \subset T^2$ — простая замкнутая кривая на торе T^2. Узел $(F \times I, K)$ называется *примарным*, если он не допускает нетривиальных редукций типов 1–4.

Отметим, что если кольцо $X \subset F \times I$ задает редукцию типа 1 или 2 пары $(F \times I, K)$, то в силу несжимаемости кольца X эта редукция всегда нетривиальна.

2. Мотивирующие примеры

В работе [7] был приведен пример узла в утолщенной поверхности рода 2 (рис. 1(а)), который с помощью редукций типов 1 и 4 сводится к двум различным наборам узлов, причем дальнейшие нетривиальные редукции типов 1 и 4 к ним не применимы. Участки K_1, K_2, K_3 являются танглами с четырьмя концами. Поверхность рода 2 получается из сферы с четырьмя дырками склеиванием края D_1^+ с краем D_1^-, а края D_2^+ с краем D_2^-. В результате применения редукции типа 1 вдоль кольца $c_1 \times I$ получаются два узла в утолщенных торах, которые не допускают нетривиальных редукций типов 1 и 4. Один из них содержит танглы K_1 и K_2, а другой — только тангл K_3. Если сделать редукцию исходного узла вдоль кольца $c_2 \times I$, то снова получим два узла в утолщенных торах, которые не допускают нетривиальных редукций типов 1 и 4. Один из узлов содержит танглы K_1, K_3, а второй — только K_2. Этот пример не противоречит основному результату работы [7], так как указанный узел не является гомологически тривиальным. Если дополнительно к редукциям типов 1 и 4 использовать редукцию типа 3, то у этого узла разложение становится единственным. В общем случае это не так.

На рис. 1(б) изображена диаграмма еще одного узла на поверхности рода 2. С помощью редукций типов 1, 3 и 4 этот узел сводится к двум разным наборам узлов, к которым дальнейшие нетривиальные редукции типов 1, 3 и 4 не применимы. В самом деле, сделав редукцию типа 1 вдоль кольца $c_1 \times I$, получим два узла в утолщенных торах, причем один из них (содержащий тангл K_2) допускает нетривиальную редукцию типа 4. Если к исходному узлу, изображенному на рис. 1(б), применить редукцию типа 1 вдоль кольца $c_2 \times I$, то в результате получим два узла в утолщенных торах, не допускающих нетривиальных редукций типов 1, 3 и 4. Непосредственно проверяется, что если разрешить использование редукций типа 2, то примарное разложение узла на рис. 1(б) становится единственным.

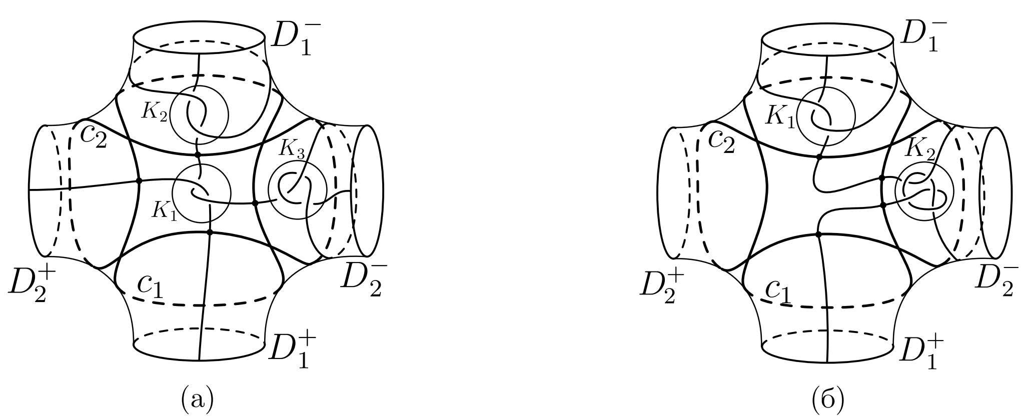


Рис. 1. Два примера узлов в утолщенных поверхностях, допускающих не единственное разложение.

3. Существование и единственность корня

3.1. Элементы теории корней

Теория корней была разработана в работе [2]. Пусть Γ — произвольный ориентированный граф с множеством вершин $\mathbb{V}(\Gamma)$ и множеством ребер $\mathbb{E}(\Gamma)$. Обозначим через $\mathbb{E}^{(2)}(\Gamma)$ множество таких пар ребер графа Γ, что начальные вершины каждой пары совпадают. Пары ребер, состоящие из одного и того же ребра, допускаются.

Определение 4. Будем говорить, что вершина $V \in \mathbb{V}(\Gamma)$ является *корнем* вершины $U \in \mathbb{V}(\Gamma)$, если

1) существует ориентированный путь в графе Γ из вершины U в вершину V;

2) из вершины V не выходит ни одного ребра.

Приведем два условия на Γ, достаточные как для существования, так и для единственности корня любой его вершины (эти условия предложил С.В. Матвеев).

(FC) (от слов Finiteness Condition): любой ориентированный путь по ребрам графа Γ имеет конечную длину, т. е. обрывается. Это означает, что Γ не содержит ориентированных циклов (в частности, петель) и бесконечных ориентированных путей по ребрам.

(MF) (от слов Mediator Function): существует такая функция $\mu\colon \mathbb{E}^{(2)}(\Gamma) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, что для любой пары ребер $(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) \in \mathbb{E}^{(2)}(\Gamma)$ выполнены следующие два условия:

(MF1): если $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = 0$, то найдется вершина $W \in \mathbb{V}(\Gamma)$, в которую можно проложить ориентированные пути по ребрам графа Γ как из вершины V_1, так и из вершины V_2;

(MF2): если $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) > 0$, то найдется такое ребро $\overrightarrow{UW}$ с той же начальной вершиной, что $\mu(\overrightarrow{UV_i}, \overrightarrow{UW}) < \mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2})$ при $i = 1, 2$.

Лемма 1. *Если граф* Γ *удовлетворяет условиям* (FC) *и* (MF)*, то корень любой его вершины существует и единствен.*

Доказательство. Существование корня произвольной вершины прямо следует из свойства (FC). Назовем вершину *сингулярной*, если она имеет более одного корня, и *регулярной*, если только один. Единственность корня будем доказывать от противного. Предположим, что граф Γ содержит хотя бы одну сингулярную вершину, и пусть $U \in \mathbb{V}(\Gamma)$ — такая сингулярная вершина, что концы всех выходящих из нее ребер регулярны. Из свойства (FC) следует, что такая вершина всегда найдется, так как в противном случае в графе Γ содержится бесконечный путь по сингулярным вершинам. Выберем два таких ребра $\overrightarrow{UV_1}$ и $\overrightarrow{UV_2}$, что вершины V_1 и V_2 имеют различные корни и число $\mu_0 = \mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2})$ минимально возможное.

Если $\mu_0 = 0$, то по свойству (MF1) найдется вершина W, в которую можно проложить ориентированные пути из вершин V_1 и V_2. Это противоречит тому, что вершины V_1 и V_2 регулярны и имеют различные корни.

Если $\mu_0 > 0$, то по свойству (MF2) найдется такое ребро $\overrightarrow{UW}$, что его конец W регулярен и $\mu_0 = \mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) > \mu(\overrightarrow{UV_i}, \overrightarrow{UW})$ при $i = 1, 2$. Это противоречит тому, что μ_0 минимально. Таким образом, сингулярных вершин в графе Γ нет. Лемма доказана.

Построим нужный для доказательства теоремы 1 конкретный ориентированный граф Γ. Каждая его вершина является либо парой вида $(F \times I, K)$, т. е. узлом в утолщенной поверхности, либо набором нескольких таких пар. Две вершины, отличающиеся добавлением или удалением тривиальных узлов в $S^2 \times I$, будем считать одинаковыми. Вершины $U, V \in \mathbb{V}(\Gamma)$ соединены ориентированным ребром $\overrightarrow{UV}$, если набор узлов V получается из набора узлов U применением какой-нибудь нетривиальной редукции типа 1,2, 3 или 4 к некоторой паре вершины U. Если различные редукции пар вершины U приводят к одной и той же вершине V, то мы проводим только одно ребро $\overrightarrow{UV}$, запрещая тем самым двойные ребра. Ребро $\overrightarrow{UV}$ определяет многозначное отображение $\psi\colon U \to V$, которое почти каждой паре вершины U сопоставляет эквивалентную (см. определение 1) пару из V, и только той паре, к которой применяется нетривиальная редукция, сопоставляет либо одну, либо две пары вершины V.

3.2. Доказательство свойства (FC)

Пусть Ω — некоторое вполне упорядоченное множество, $\mathcal{K}$ — множество всех пар вида $(F \times I, K)$. Построим такую функцию $\varphi\colon \mathcal{K} \to \Omega$, что для любой пары $(F' \times I, K') \in \mathcal{K}$, получающейся из пары $(F \times I, K) \in \mathcal{K}$ в результате нетривиальной редукции типа 1, 2, 3 или 4, справедливо соотношение $\varphi(F \times I, K) > \varphi(F' \times I, K')$. Функцию φ, удовлетворяющую этому условию, будем называть *функцией сложности.*

Определение 5. Пусть $(F \times I, K)$ — узел. *Числом Шуберта* $s(F \times I, K)$ называется максимальное число таких попарно не пересекающихся трехмерных шаров $B_1, B_2, \ldots$ в $F \times I$, что для каждого $i = 1, 2, \ldots$ пересечение $K \cap B_i$ является заузленной дугой в B_i.

Из результатов работы [5] следует, что число Шуберта $s(F \times I, K)$ конечно и однозначно определяется парой $(F \times I, K)$. Это следует также из [2, теорема 7].

Определение 6. Пусть $(F \times I, K)$ — узел, $g(F)$ — род поверхности F и $c_1, \ldots, c_{2g(F)}$ — такой упорядоченный набор простых замкнутых кривых на F, что каждая следующая кривая трансверсально пересекает предыдущую ровно в одной точке. Упорядоченный набор $\mathcal{C} = \{C_i \subset F \times I \mid 1 \leqslant i \leqslant 2g(F)\}$ трансверсальных узлу K вертикальных колец называется *контрольным*, если каждое кольцо C_i изотопно кольцу $c_i \times I$, $i = 1, \ldots, 2g(F)$.

Определение 7. Пусть $(F \times I, K)$ — узел, $\mathcal{C} = \{C_1 \ldots, C_{2g(F)}\}$ — контрольный набор колец. *Весом узла* K *относительно набора* $\mathcal{C}$ называется упорядоченная последовательность $w_{\mathcal{C}}(K) = (\#(C_1 \cap K), \ldots, \#(C_{2g(F)} \cap K))$, где $\#(C_i \cap K)$ — число точек в пересечении $C_i \cap K$. Для сравнения весов используется лексикографический порядок. *Весом* узла K называется упорядоченная последовательность $w(K)$, равная минимальному весу узла K относительно всех возможных контрольных наборов колец.

Опишем функцию $\varphi\colon \mathcal{K} \to \Omega$ следующим образом:

$$\varphi(F \times I, K) = (g(F), s(F \times I, K), w(K)),$$

где $g(F)$ — род поверхности F, $s(F \times I, K)$ — число Шуберта пары $(F \times I, K)$ и $w(K)$ — вес узла K в $F \times I$. Из определений 5 и 7 следует, что значение функции φ является корректно определенной тройкой элементов. Первые два элемента этой тройки — неотрицательные числа, а третий — упорядоченная последовательность длины $2g(F)$. На множестве всех таких троек вводится лексикографический порядок.

Лемма 2. *Пусть пара $(F' \times I, K')$ получается в результате применения к паре $(F \times I, K)$ нетривиальной редукции типа $1, 2, 4$ или редукции типа 3 вдоль пары непараллельных колец. Тогда $\varphi(F' \times I, K') < \varphi(F \times I, K)$.*

Доказательство. Пусть к паре $(F \times I, K)$ применяется нетривиальная редукция типа 1 или 2. Так как кольцо, задающее такую редукцию, несжимаемо, то $g(F') < g(F)$. Следовательно, $\varphi(F' \times I, K') < \varphi(F \times I, K)$.

Рассмотрим случай, когда к $(F \times I, K)$ применяется нетривиальная редукция типа 4. В результате получаем две пары $(F \times I, K_1)$ и $(S^2 \times I, K_2)$. Так как узел K_1 либо тривиален, либо получается из узла K вырезанием локального узла, то неравенство $s(F \times I, K_1) < s(F \times I, K)$ следует из нетривиальности примененной редукции. Следовательно, $\varphi(F \times I, K_1) < \varphi(F \times I, K)$. Для второй пары $(S^2 \times I, K_2)$ справедливы неравенства $s(S^2 \times I, K_2) \leqslant s(F \times I, K)$ и $g(S^2) \leqslant g(F)$, причем одновременные равенства в них достигаются только в случае, когда редукция типа 4 тривиальна. Следовательно, $\varphi(S^2 \times I, K_2) < \varphi(F \times I, K)$.

Пусть пары $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ получаются из пары $(F \times I, K)$ в результате редукции типа 3 вдоль пары непараллельных колец. Из определения редукции типа 3 следует, что $g(F) = g(F_1) + g(F_2) - 1$. Так как кольца, задающие редукцию, непараллельны, то $g(F_1), g(F_2) > 1$. Следовательно, $g(F_1), g(F_2) < g(F)$, что и влечет справедливость леммы.

Осталось рассмотреть случай, когда к паре $(F \times I, K)$ применяется нетривиальная редукция типа 3 вдоль пары параллельных колец A_1, A_2. Эти кольца разбивают все многообразие $F \times I$ на две части. Одну из частей, которую обозначим через $\mathcal{T}$, можно отождествить с многообразием $A_1 \times [1,2]$ так, что $A_i = A_1 \times \{i\}$, $i = 1,2$. В результате редукции типа 3 вдоль колец A_1 и A_2 получаем две пары $(F \times I, K')$ и $(T^2 \times I, K'')$, где T^2 — двумерный тор.

Будем называть *полосой* в $\mathcal{T} = A_1 \times [1,2]$ собственный диск $P \subset \mathcal{T}$, примыкающий к кольцам $A_1 = A_1 \times \{1\}$ и $A_2 = A_1 \times \{2\}$ по двум дугам на его крае. Полоса P называется *возвратной*, если эти дуги лежат на одном кольце, и *сквозной*, если на разных.

Предложение 1. *Пусть $(F \times I, K)$ — узел, $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_{2g(F)}\}$ — контрольный набор колец и $A_1, A_2 \subset F \times I$ — пара вертикальных параллельных колец, задающая редукцию типа 3. Тогда существует такой контрольный набор колец $\mathcal{C}' = \{C'_1, \ldots, C'_{2g(F)}\}$, что $w_{\mathcal{C}'}(K) \leqslant w_{\mathcal{C}}(K)$ и для каждого $i = 1, \ldots, 2g(F)$ пересечение $C'_i \cap \mathcal{T}$ либо пусто, либо является сквозной полосой.*

Доказательство. Можно считать, что кольца A_1, A_2 и кольца системы $\mathcal{C}$ находятся в общем положении. С помощью изотопии $F \times I \to F \times I$ будем устранять пересечения колец системы $\mathcal{C}$ с кольцом A_1.

Допустим, что пересечение $C_i \cap A_1$, где $C_i \in \mathcal{C}$, содержит тривиальную окружность на A_1. Так как все кольца C_i несжимаемы, то окружность пересечения, тривиальная на A_1, тривиальна и на C_i. Тогда можно считать, что найдутся такие диски $D \subset A_1$ и $D' \subset C_i$, что $D \cap C_i = \partial D = \partial D'$ и с точностью до перенумерации колец системы $\mathcal{C}$ диск D не пересекается с кольцами системы $\mathcal{C} \setminus C_i$. Объединение $D \cup D'$ является сферой, которая задает такую изотопию $h_t \colon F \times I \to F \times I$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, что $h_0(C_i) = C_i$ и кольцо $h_1(C_i)$ получается из кольца $(C_i \setminus D') \cup D$ малой изотопией. При это устраняется не менее одной тривиальной окружности из пересечения $C_i \cap A_1$. Набор колец $\mathcal{C}'$, который получается из набора $\mathcal{C}$ заменой кольца C_i на кольцо $h_1(C_i)$, является контрольным, так как кольца $h_1(C_i)$ и C_i изотопны в $F \times I$. Более того, так как $\#(D \cap K) \leqslant 1$, то $w_{\mathcal{C}'}(K) \leqslant w_{\mathcal{C}}(K)$.

Если пересечение $C_i \cap A_1$ не содержит тривиальных окружностей, то аналогичными построениями можно добиться того, чтобы в пересечении $C_i \cap A_1$ не было дуг, опирающихся на одну компоненту края кольца A_1. Для этого вместо диска $D \subset A_1$ достаточно выбирать самый внешний на A_1 полудиск, ограничиваемый кривыми пересечения $C_i \cap A_1$.

Пусть все пересечения $C_i \cap A_1$, где $C_i \in \mathcal{C}$, состоят только из нетривиальных окружностей. Эти окружности разбивают кольца A_1 и C_i, где $i = 1, \ldots, 2g(F)$, на подкольца. Выберем одно из таких подколец $A' \subset A_1$, которое не пересекается с кривой K и примыкает к краю $\partial(F \times I)$ (такое подкольцо всегда найдется, так как $\#(K \cap A_1) = 1$). Можно считать, что никакие другие кольца системы $\mathcal{C}$, кроме некоторого кольца C_i, не пересекаются с A'. Пусть $C' \subset C_i$ — подкольцо, отрезаемое от кольца C_i кривой $C_i \cap A'$ и примыкающее к той же компоненте края многообразия $F \times I$, что и кольцо A'. Полный тор T, отрезаемый от $F \times I$ объединением $A' \cup C'$, задает такую изотопию h_t, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, что $h_0(C_i) = C_i$ и кольцо $h_1(C_i)$ получается малой изотопией кольца $(C_i \setminus C') \cup A'$. При этом число компонент в пересечении $A_1 \cap C_i$ уменьшается. Набор колец $\mathcal{C}'$, который получается из набора $\mathcal{C}$ заменой кольца C_i на кольцо $h_1(C_i)$, является контрольным, так как кольца $h_1(C_i)$ и C_i изотопны в $F \times I$. Более того, так как $\#(A' \cap K) = 0$, то $w_{\mathcal{C}'}(K) \leqslant w_{\mathcal{C}}(K)$.

Повторяем предыдущие рассуждения, устраняя окружности и дуги, опирающиеся на одну компоненту края кольца A_2, из пересечения колец системы $\mathcal{C}$ с кольцом A_2.

Осталось рассмотреть последний случай, когда пересечения $C_i \cap A_1$, где $C_i \in \mathcal{C}$, состоят только из дуг, соединяющих различные компоненты края кольца A_1. Это означает, что пересечение $C_i \cap \mathcal{T}$ состоит только из полос. Если не все из этих полос сквозные, то можно считать, что найдутся такая возвратная полоса $C' \subset C_i$ и такой диск $D' \subset A_1$, ограничиваемый дугами $C' \cap A_1$, что он не пересекается с кольцами системы $\mathcal{C} \setminus C_i$. Шар, отрезаемый от $F \times I$ объединением $C' \cup D'$, задает такую изотопию h_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, что $h_0(C_i) = C_i$ и кольцо $h_1(C_i)$ получается малой изотопией из кольца $(C_i \setminus C') \cup D'$. При такой изотопии устраняется не менее двух дуг из пересечения $C_i \cap A_1$. Набор колец $\mathcal{C}'$, который получается из набора $\mathcal{C}$ заменой кольца C_i на кольцо $h_1(C_i)$, является контрольным, так как кольца $h_1(C_i)$ и C_i изотопны в $F \times I$. Более того, так как $\#(D' \cap K) \leqslant 1$, то $w_{\mathcal{C}'}(K) \leqslant w_{\mathcal{C}}(K)$.

Для устранения возвратных полос, примыкающих к кольцу A_2, рассуждения аналогичны. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть пара $(F' \times I, K')$ получается в результате применения к паре $(F \times I, K)$ редукции типа 3. Тогда $s(F' \times I, K') \leqslant s(F \times I, K)$.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2 \subset F \times I$ — пара колец, задающая редукцию типа 3. Напомним, что такая редукция состоит в разрезании пары $(F \times I, K)$ по кольцам A_1, A_2 и склеивании копий этих колец на крае каждой из получившихся частей так, чтобы получились два узла в утолщенных поверхностях. Пусть $A \subset F' \times I$ — кольцо, которое получается в результате такой склейки копий колец A_1 и A_2. Из определения редукции типа 3 следует, что кольцо A является вертикальным и пересекается с K' в одной точке.

Будем называть систему непересекающихся шаров $B_1, B_2, \ldots, B_n \subset F' \times I$ *полной*, если для каждого $i = 1, \ldots, n$ пересечение $B_i \cap K'$ является заузленной дугой и в дополнении $(F' \times I) \setminus Int(B_1 \cup \ldots \cup B_n)$ не существует шара, пересекающегося с K' по заузленной дуге (т. е. нет локальных узлов). Из определения 5 и [2, теорема 7] следует, что $n \leqslant s(F' \times I, K')$.

Покажем, что в $F' \times I$ найдется полная система шаров, не пересекающаяся с A. Пусть $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ — полная система шаров в $F' \times I$ и D — самый внутренний диск на A, ограничиваемый кривыми пересечения кольца A со сферами $\partial B_1, \ldots, \partial B_n$ (т. е. $\partial B_i \cap Int D = \varnothing$ при $i = 1, \ldots, n$). Обозначим число кривых в этом пересечении через $N_{\mathcal{B}}$. Построим такую полную в $F' \times I$ систему шаров $\mathcal{B}'$, что число кривых в пересечении кольца A с краями шаров этой системы меньше, чем $N_{\mathcal{B}}$. С точностью до перенумерации шаров системы $\mathcal{B}$ можно считать, что $\partial D = A \cap \partial B_1$. Так как $\#(A \cap K') = 1$, то пересечение диска D с кривой K' содержит не более одной точки. Сделаем перестройку сферы ∂B_1, разрезав ее по кривой ∂D и приклеив две параллельные копии диска D. Получим две сферы $S_1, S_2 \subset F' \times I$. Обозначим через $U_1, U_2 \subset F' \times I$ шары, ограничиваемые сферами S_1, S_2 соответственно.

Если $\#(D \cap K') = 0$, то один из шаров U_1, U_2 не пересекается с кривой K' (пусть для определенности это шар U_2). В этом случае полная система $\mathcal{B}'$ получается из системы $\mathcal{B}$ заменой шара B_1 на шар U_1. Если $\#(D \cap K') = 1$ и диск D целиком лежит в B_1, то каждый из шаров U_1, U_2 пересекается с кривой K' по дуге. В этом случае полная система $\mathcal{B}'$ получается заменой шара B_1 системы $\mathcal{B}$ на те шары пары U_1, U_2, для которых пересечение с K' является заузленной дугой. Последняя возможность: $\#(D \cap K') = 1$ и диск D не лежит целиком в B_1. В этом случае шары U_1 и U_2 вложены один в другой (пусть для определенности $U_2 \subset U_1$). Тогда полная система $\mathcal{B}'$ получается из системы $\mathcal{B}$ добавлением шара U_1 и отбрасыванием всех шаров системы $\mathcal{B}$, которые содержатся в U_1. Отметим, что во всех трех случаях число кривых в пересечении кольца A и краев шаров системы $\mathcal{B}'$ меньше, чем $N_{\mathcal{B}}$. Повторное применение преобразования перестройки позволяет построить полную систему шаров, которая не пересекается с A.

Пусть $\mathcal{B}$ — полная система шаров в $F' \times I$, не пересекающаяся с A. Тогда в $F \times I$ найдется полная система шаров $\widetilde{\mathcal{B}}$, состоящая из шаров системы $\mathcal{B}$ и, возможно, еще нескольких шаров. Справедливость неравенства $s(F' \times I, K') \leqslant s(F \times I, K)$ следует из того, что максимальные полные системы шаров в $F' \times I$ и $F \times I$ (т. е. системы, содержащие ровно $s(F' \times I, K')$ и $s(F \times I, K)$ шаров соответственно) можно выбрать так, чтобы шары этих систем целиком содержались в шарах систем $\mathcal{B}$ и $\widetilde{\mathcal{B}}$ соответственно. Предложение доказано.

Лемма 3. *Пусть пары* $(F \times I, K')$ *и* $(T^2 \times I, K'')$, *где* T^2 *— двумерный тор, получаются из пары* $(F \times I, K)$ *в результате нетривиальной редукции типа* 3 *вдоль пары параллельных колец. Тогда* $\varphi(F \times I, K') < \varphi(F \times I, K)$ *и* $\varphi(T^2 \times I, K'') < \varphi(F \times I, K)$.

Доказательство. Пусть $A_1, A_2 \subset F \times I$ — пара параллельных колец, задающая нетривиальную редукцию типа 3, и $\mathcal{T} = A_1 \times [1,2]$ — утолщенное кольцо, ограничиваемое парой A_1, A_2. Рассмотрим сначала случай, когда $g(F) > 1$. Одно из требуемых неравенств $\varphi(T^2 \times I, K'') < \varphi(F \times I, K)$ выполняется, так как $g(T^2) < g(F)$.

Выберем систему контрольных колец $\mathcal{C} \subset F \times I$, реализующую вес узла K. В силу предложения 1 можно считать, что пересечение $C_i \cap \mathcal{T}$, где $i = 1, \ldots, 2g(F)$, либо пусто, либо состоит только из сквозных полос, причем хотя бы одно контрольное кольцо пересекается с $\mathcal{T}$. Допустим, что в $\mathcal{T}$ найдется сквозная полоса, не пересекающая узла K. Тогда дуга $K \cap \mathcal{T}$ содержит локальный узел, который лежит в $(F \times I, K)$, но не лежит в $(F \times I, K')$. Поэтому $s(F \times I, K') < s(F \times I, K)$. Следовательно $\varphi(F \times I, K') < \varphi(F \times I, K)$.

Предположим теперь, что узел K пересекает все сквозные полосы в $\mathcal{T}$. Пусть C_m — первое кольцо набора $\mathcal{C}$, которое имеет непустое пересечение с $\mathcal{T}$. Обозначим через k число сквозных полос в пересечении $C_m \cap \mathcal{T}$. Через x и y обозначим число тех точек из $K \cap C_m$, которые лежат в $\mathcal{T}$ и вне $\mathcal{T}$ соответственно. Заметим, что компонента w_m вектора $w(K)$ равна $x + y$. Так как K пересекает каждую сквозную полосу по крайней мере в одной точке, то $x \geqslant k > 0$.

Из определения редукции типа 3 следует, что узел K' совпадает с узлом K вне $\mathcal{T} = A_1 \times [1,2]$, а внутри $\mathcal{T}$ он является дугой, монотонной по отношению к параметру t отрезка $[1,2]$. Монотонную дугу в $\mathcal{T}$ можно выбрать так, чтобы она пересекала не более половины сквозных полос в $C_m \cap \mathcal{T}$, причем каждую из них не более одного раза. Поэтому компоненты w_i' вектора $w(K')$ удовлетворяют соотношениям: $w_i' = w_i$, где $1 \leqslant i < m$, и $w_m' \leqslant k/2 + y$. Из неравенства $k/2 + y < x + y$ следует, что $w(K') < w(K)$. В силу предложения 2 справедливо неравенство $s(F \times I, K') \leqslant s(F \times I, K)$, что влечет неравенство $\varphi(F \times I, K') < \varphi(F \times I, K)$.

Случай $g(F) = 1$ рассматривается аналогично. Кольца A_1 и A_2 разбивают все многообразие $F \times I$ на две части $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, каждую из которых можно отождествить с многообразием $A_i \times [1,2]$ при $i = 1, 2$ соответственно. Для доказательства неравенств $\varphi(F \times I, K') < \varphi(F \times I, K)$ и $\varphi(T^2 \times I, K'') < \varphi(F \times I, K)$ достаточно два раза применить предыдущие рассуждения, один раз для $\mathcal{T}_1$, второй раз для $\mathcal{T}_2$. Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 следует, что построенная функция φ действительно является функцией сложности.

Определение 8. Пусть $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ — такая последовательность нетривиальных редукций типов 1–4, что каждая редукция ξ_i определяет многозначное отображение $\psi_i \colon V_{i-1} \to V_i$ вершин графа Γ. Пара $(F \times I, K) \in V_{i-1}$ называется *активной*, если ребро $\overrightarrow{V_{i-1}V_i}$ отвечает нетривиальной редукции пары $(F \times I, K)$. Последовательность пар $\{(F_i \times I, K_i) \in V_i \mid i \geqslant 0\}$ называется *согласованной* с последовательностью ξ, если для каждого $i \geqslant 1$ справедливо включение $(F_i \times I, K_i) \in \psi_i(F_{i-1} \times I, K_{i-1})$.

Лемма 4. *Если последовательность нетривиальных редукций бесконечна, то существует хотя бы одна согласованная с ней последовательность, содержащая бесконечное число активных пар.*

Доказательство. Пусть $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ — бесконечная последовательность нетривиальных редукций, причем редукция ξ_i определяет ребро $\overrightarrow{V_{i-1}V_i}$ графа Γ и многозначное отображение $\psi_i \colon V_{i-1} \to V_i$. Пусть $(F \times I, K) \in V_i$. Обозначим через $\Psi(F \times I, K)$ множество всех пар, получающихся в результате последовательного применения к паре $(F \times I, K)$ и получающимся из нее парам отображений $\psi_{i+1}, \psi_{i+2}, \ldots$. Так как последовательность ξ бесконечна, то объединение $\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ содержит бесконечное число активных пар. Будем называть пару $(F \times I, K) \in V_i$, $i = 1, 2, \ldots$, *отмеченной*, если множество $\Psi(F \times I, K)$ содержит бесконечное число активных пар.

Для доказательства леммы достаточно показать, что существует согласованная с ξ бесконечная последовательность $\{(F_i \times I, K_i) \in V_i \mid i \geqslant 0\}$, состоящая только из отмеченных пар. Построение этой последовательности будем осуществлять по индукции. Так как вершина V_0 содержит конечное число пар, а общее число активных пар бесконечно, то найдется отмеченная пара $(F_0 \times I, K_0) \in V_0$.

Предположим, что последовательность $\{(F_0 \times I, K_0), \ldots, (F_n \times I, K_n)\}$ отмеченных пар согласована с последовательностью $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Пара $(F_n \times I, K_n)$ отмечена, следовательно, множество $\Psi(F_n \times I, K_n)$ содержит бесконечное число активных пар. Образ $\psi_{n+1}(F_n \times I, K_n) \subset V_{n+1}$ состоит из конечного числа пар (одной или двух, в зависимости от типа редукции ξ_{n+1}), следовательно, хотя бы одна из них отмечена. Ее и берем в качестве следующей отмеченной пары $(F_{n+1} \times I, K_{n+1}) \in V_{n+1}$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Граф* Γ *обладает свойством* (CF).

Доказательство. Предположим противное: граф Γ содержит бесконечный путь по ориентированным ребрам. Это означает, что существует бесконечная последовательность ξ нетривиальных редукций. Тогда по лемме 4 существует согласованная с ξ последовательность, в которой содержится бесконечное число активных пар. Однако, из лемм 2 и 3 следует, что при нетривиальной редукции сложность активной пары строго уменьшается. Поэтому число таких пар в этой последовательности конечно. Противоречие. Теорема доказана.

3.3. Доказательство свойства (MF)

Пусть для каждого $i = 1, 2$ ребро $\overrightarrow{UV_i} \in \mathbb{E}(\Gamma)$ отвечает нетривиальной редукции пары $(F_i \times I, K_i) \in U$ вдоль поверхности $X_i \subset F_i \times I$. Пары $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ могут совпадать. По определению 2 каждая из поверхностей X_i, где $i = 1, 2$, является либо вертикальным несжимаемым кольцом, либо парой вертикальных неразбивающих колец, либо сферой. Можно считать, что X_1 и X_2 находятся в общем положении.

Определим функцию $\mu\colon \mathbb{E}^2(\Gamma) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ следующим образом: значение $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2})$ равно минимальному числу $\min \#(X_1 \cap X_2)$ компонент связности пересечения $X_1 \cap X_2$, где минимум берется по всем поверхностям X_1, X_2, редукции вдоль которых задают ребра $\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}$ соответственно. Отметим, что если вершины V_1 и V_2 совпадают, то $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = 0$.

Лемма 5. *Граф* Γ *обладает свойством* (MF1).

Доказательство. Пусть пара ребер $(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) \in \mathbb{E}^2(\Gamma)$ такова, что $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = 0$. Это означает, что найдутся непересекающиеся поверхности X_1 и X_2, нетривиальным редукциям вдоль которых отвечают ребра $\overrightarrow{UV_1}$ и $\overrightarrow{UV_2}$ соответственно. Если вершины V_1 и V_2 совпадают, то искомая вершина $W \in \mathbb{V}(\Gamma)$ совпадает с V_1 и V_2. Предположим, что вершины V_1 и V_2 различны. Рассмотрим несколько случаев взаимного расположения поверхностей X_1 и X_2.

Если X_1 и X_2 лежат в разных утолщенных поверхностях вершины U, то к одной из пар, составляющих вершину V_1, можно применить редукцию вдоль поверхности X_2. Тот же самый результат получается при применении редукции вдоль поверхности X_1 к одной из пар, составляющих вершину V_2.

Теперь рассмотрим случай, когда X_1 и X_2 лежат в одной и той же утолщенной поверхности $F \times I$ вершины U, задают нетривиальные редукции типа 3 и поверхность $X_1 \cup X_2 \subset F \times I$ состоит из четырех колец, причем при обходе узла K в $F \times I$ кольца из X_1, X_2 встречаются поочередно. Тогда искомая вершина W (см. определение свойства (MF1)) получается из каждой вершины V_i при $i = 1, 2$ двумя редукциями по образам соседних колец из $X_1 \cup X_2$.

Последняя возможность: обе поверхности X_1, X_2 лежат в одной утолщенной поверхности $F \times I$ вершины U и при этом не удовлетворяют предыдущему случаю. Тогда поверхность X_1 задает редукцию одной из пар $(F'' \times I, K'')$ вершины V_2. При этом, если X_1 — сжимаемое кольцо в $F'' \times I$, то мы заменяем его на сферу, приклеив диски, ограничиваемые краем кольца на крае $\partial F'' \times I$, и продавив эту сферу внутрь многообразия. То же самое верно для поверхности X_2 и одной из пар $(F' \times I, K')$ вершины V_1. Если редукции пар $(F' \times I, K')$ и $(F'' \times I, K'')$ вдоль поверхностей X_2 и X_1 соответственно нетривиальны, то они приводят к одной и той же вершине W графа Γ.

Предположим, что редукция пары $(F' \times I, K)$ вдоль поверхности X_2 тривиальна. Если поверхность X_2 задает нетривиальную редукцию типа 1, 2 или 4 пары $(F \times I, K)$, то поверхности X_1 и X_2 параллельны в $(F \times I, K)$. Это невозможно, так как вершины V_1 и V_2 различны. Если поверхность X_2 задает нетривиальную редукцию типа 3 пары $(F \times I, K)$, то либо снова поверхности X_1 и X_2 параллельны в $(F \times I, K)$, либо искомая вершина W совпадает с V_1 и получается из пары $(F'' \times I, K)$ в результате применения редукции вдоль поверхности X_1 и последующей дестабилизации получившегося в результате утолщенного тора с узлом вида $l \times \{*\} \subset T^2 \times I$, где $l \subset T^2$ — простая замкнутая кривая. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 9. Пусть ребра $\overrightarrow{UV_1}$ и $\overrightarrow{UV_2}$ графа Γ отвечают нетривиальным редукциям пары $(F \times I, K) \in U$ вдоль пересекающихся поверхностей X_1 и X_2 соответственно. *Поверхностью-посредником* называется такая поверхность $X \subset F \times I$, что редукция вдоль нее нетривиальна и $\#(X \cap X_i) < \#(X_1 \cap X_2)$ при $i = 1, 2$.

Суть нахождения ребра $\overrightarrow{UW}$, участвующего в формулировке свойства (MF2), заключается в построении поверхности-посредника для поверхностей X_1 и X_2, задающих пару ребер $(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) \in \mathbb{E}^{(2)}(\Gamma)$ и имеющих минимальное пересечение среди всех таких поверхностей. В дальнейшем будем предполагать, что ребра $\overrightarrow{UV_1}$ и $\overrightarrow{UV_2}$ графа Γ различны. Из определения 2 следует, что пересечение $X_1 \cap X_2$ может состоять из кривых только следующих четырех типов:

1) тривиальные окружности (в силу несжимаемости поверхностей X_1, X_2, эти окружности одновременно тривиальны на X_1 и X_2);

2) тривиальные дуги (т. е. дуги пересечения $X_1 \cap X_2$, каждая из которых примыкает к одной компоненте края $\partial(F \times I)$);

3) нетривиальные окружности;

4) радиальные дуги (т. е. нетривиальные дуги пересечения $X_1 \cap X_2$).

Лемма 6. *Пусть $X_1, X_2 \subset F \times I$ — поверхности, каждая из которых задает нетривиальную редукцию пары $(F \times I, K)$, и пересечение $X_1 \cap X_2$ содержит либо окружность, либо тривиальную дугу на X_1, X_2. Тогда для X_1, X_2 существует поверхность-посредник.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим несколько случаев в зависимости от типов кривых пересечения $X_1 \cap X_2$.

С л у ч а й 1. Пусть $X_1 \cap X_2$ содержит тривиальную окружность. Тогда найдется такой диск $D \subset X_1$, что $D \cap X_2 = \partial D$. Сделаем перестройку поверхности X_2, разрезав ее по кривой ∂D и приклеив две параллельные копии диска D (рис. 2(a)). Получим сферу S и новую поверхность X_2', причем после малой изотопии справедливы соотношения $\#(S \cap X_1), \#(X_2' \cap X_1) < \#(X_1 \cap X_2)$ и $\#(S \cap X_2) = \#(X_2' \cap X_2) = 0$. Так как сфера S разбивающая, а кривая K пересекается с каждой из поверхностей X_1, X_2 в 0 или 2 точках, то каждое из пересечений $X_2' \cap K$, $S \cap K$ состоит из 0, 2 или 4 точек. Также отметим, что поверхности X_2 и X_2' изотопны в $F \times I$ (искомую изотопию доставляет шар, ограничиваемый сферой S).

Если пересечение $X_2' \cap K$ состоит из 0 или 2 точек, то простой анализ показывает, что в зависимости от того, является X_2' сферой или нет, хотя бы одна из поверхностей S или X_2' задает нетривиальную редукцию. Эта поверхность — искомый посредник для X_1, X_2. Если пересечение $X_2' \cap K$ состоит из четырех точек и сфера S задает нетривиальную редукцию, то посредником является сфера S. Последний случай: пересечение $X_2' \cap K$ состоит из четырех точек, и сфера S задает тривиальную редукцию. В частности, в этом случае $\#(D \cap K) = 2$. Тогда край ∂D ограничивает диск D' на поверхности X_2 (рис. 2(a)), причем $\#(D' \cap K) = 0$.

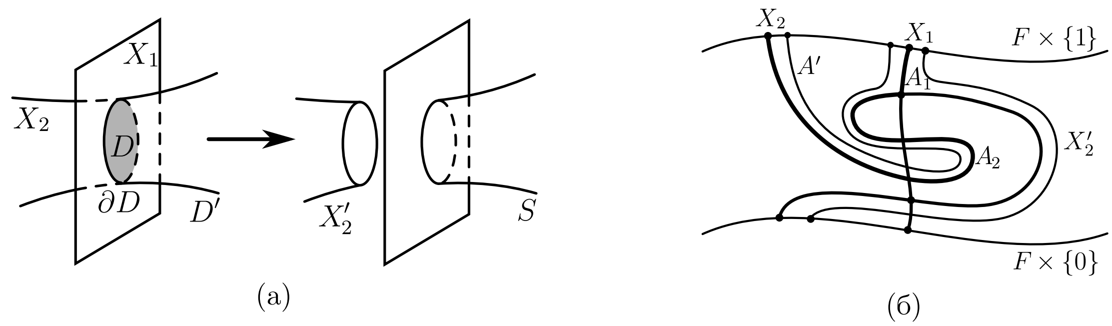


Рис. 2. Построение посредника для случаев, когда пересечение $X_1 \cap X_2$ содержит тривиальную (а) и нетривиальную (б) окружности.

Применяя к X_1 и самому внутреннему диску на D', ограничиваемому кривыми пересечения $X_1 \cap X_2$, предыдущие рассуждения, получим справедливость леммы в этом случае.

С л у ч а й 2. Пусть пересечение $X_1 \cap X_2$ не содержит тривиальных окружностей, но содержит тривиальные дуги. В этом случае доказательство аналогично предыдущему случаю, только на X_1 вместо самого внутреннего диска надо выбрать самый внешний полудиск, отрезаемый тривиальными дугами пересечения $X_1 \cap X_2$.

В дальнейшем можно считать, что $X_1 \cap X_2$ не содержит тривиальных окружностей и дуг.

С л у ч а й 3. Пусть $X_1 \cap X_2$ состоит из нетривиальных окружностей. В этом случае X_1 и X_2 являются кольцами или парами колец. Среди колец, на которые X_1 разбивается окружностями пересечения $X_1 \cap X_2$, выберем такое кольцо $A_1 \subset X_1$, что $A_1 \cap \partial(F \times I) \neq \varnothing$ и $\#(A_1 \cap K) = 0$. Если оба подкольца на X_1, примыкающие к краю $\partial(F \times I)$, пересекаются с кривой K, то в качестве A_1 выбираем любое такое кольцо $A_1 \subset X_1$, что $A_1 \cap \partial(F \times I) \neq \varnothing$ и $\#(A_1 \cap K) = 1$. Данное кольцо всегда найдется, поскольку пересечение $X_1 \cap K$ состоит из 0 или 2 точек. Обозначим через $A_2 \subset X_2$ одно из колец, на которые X_2 разрезается окружностью $X_2 \cap A_1$, и которое примыкает к той же компоненте края многообразия $F \times I$, что и A_1.

Перестроим поверхность X_2, разрезав ее по окружности $X_2 \cap A_1$ и приклеив две параллельные копии кольца A_1 (рис. 2(б)). Получим кольцо A' и несжимаемую поверхность X_2' (несжимаемость следует из того, что края поверхностей X_2 и X_2' параллельны на $\partial(F \times I)$). Кольцо A' разбивающее, так как обе компоненты края $\partial A'$ лежат на одной компоненте края $\partial(F \times I)$ и параллельны. С точностью до малой изотопии можно считать, что $\#(X_2 \cap X_2') = 0$ и $\#(X_1 \cap X_2') < \#(X_1 \cap X_2)$. Покажем, что поверхность X_2' является посредником. Для этого достаточно проверить, что либо $\#(X_2' \cap K) = \#(X_2 \cap K)$, либо $\#(X_2' \cap K) = 0$.

Предположим, что $\#(A_2 \cap K) \leqslant 1$. Тогда из разбиваемости кольца A' следуе, что $\#(A_1 \cap K) = \#(A_2 \cap K)$. Это влечет $\#(X_2' \cap K) = \#(X_2 \cap K)$. Предположим теперь, что $\#(A_2 \cap K) = 2$ (других возможностей нет, так как $\#(X_2 \cap K) \leqslant 2$). Тогда равенство $\#(X_2' \cap K) = 0$ следует из того, что пересечение $A' \cap K$ не может состоять из трех точек. Лемма доказана.

Осталось рассмотреть случай, когда пересечение поверхностей $X_1, X_2 \subset F \times I$ состоит из радиальных отрезков. Можно считать, что объединение $X_1 \cup X_2$ имеет вид $(c_1 \cup c_2) \times I$, где c_1, c_2 — одномерные подмногообразия в F, каждое из которых состоит из одной или двух нетривиальных окружностей. Если окружность одна, то она должна либо не пересекаться с проекцией $\overline{K} \subset F$ узла K, либо пересекать $\overline{K}$ в двух точках и быть разбивающей. Если окружностей две, то каждая из них должна пересекать проекцию $\overline{K}$ в одной точке, а вместе они должны разбивать F. Кривую $l \subset F$ будем называть *чистой*, если $\#(l \cap \overline{K}) = 0$.

Будем говорить, что одномерное многообразие $c \subset F$ *задает нетривиальную редукцию типа* 1, 2, 3 *или* 4, если поверхность $c \times I \subset F \times I$ задает нетривиальную редукцию пары $(F \times I, K)$ типа 1, 2, 3 или 4 соответственно. Отметим, что нетривиальную редукцию типа 4 задает такая кривая $c \subset F$, ограничивающая диск, что кольцо $c \times I \subset F \times I$ отрезает шар, который либо целиком содержит узел K, либо пересекается с ним по одной заузленной дуге.

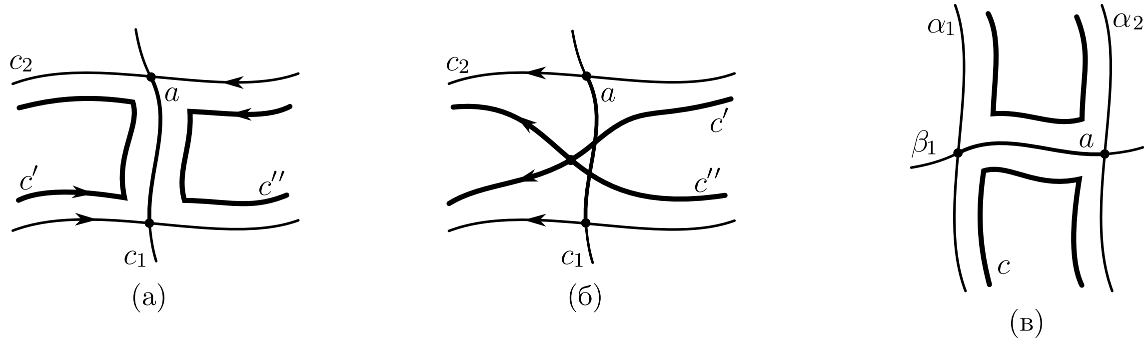


Рис. 3. Перестройки кривой c_2 (а), (б) и пары кривых α_1, α_2 (в).

В дальнейшем мы будем использовать термин *кривая*, если одномерное многообразие заведомо состоит из одной компоненты связности. Во всех остальных случаях мы будем использовать термин *одномерное многообразие*.

Предложение 3. *Пусть пересекающиеся нетривиальные простые замкнутые кривые* $c_1, c_2 \subset F$ *таковы, что каждая из них либо не пересекается с проекцией* $\overline{K} \subset F$, *либо пересекается с ней в одной точке, либо пересекается с ней в двух точках и разбивает* F. *Пусть хотя бы одна из дуг* $c_1 \setminus (c_1 \cap c_2)$ *является чистой. Тогда найдется такое одномерное многообразие* $l \subset F$, *что* $\#(l \cap c_2) = 0$, $\#(l \cap c_1) < \#(c_1 \cap c_2)$ *и либо* l *задает нетривиальную редукцию типа* 1, 2 *или* 3, *либо* l *изотопно кривой* c_2 *в* F, *причем при этой изотопии пересечение с проекцией* $\overline{K}$ *состоит из одной точки. Более того, если либо* c_2 *не разбивает* F, *либо* $\#(c_2 \cap \overline{K}) \neq 2$, *то* l *лежит в малой регулярной окрестности объединения* $c_1 \cup c_2$.

Доказательство. Обозначим через a чистую дугу кривой c_1, примыкающую к кривой c_2. Сделаем перестройку кривой c_2, разрезав ее по точкам ∂a и приклеив две копии дуги a так, чтобы получились две замкнутые кривые c' и c'' (на рис. 3(а), (б) изображены две возможности в зависимости от того, подходит дуга a к кривой c_2 с одной стороны или нет). После малой изотопии каждая из них не пересекается с кривой c_2, и справедливы неравенства $\#(c' \cap c_1), \#(c'' \cap c_1) < \#(c_1 \cap c_2)$. Рассмотрим несколько случаев в зависимости от того, каковы кривые c' и c''.

Случай 1. Хотя бы одна из кривых c', c'' не разбивает поверхность F и не пересекает проекции $\overline{K}$. Тогда эта кривая задает редукцию типа 2, следовательно, ее можно взять в качестве искомого одномерного многообразия l.

Случай 2. Хотя бы одна кривая c' или c'' является разбивающей и не пересекается с проекцией $\overline{K} \subset F$. Для определенности будем считать, что кривая c' удовлетворяет этому требованию. Если кривая c' не ограничивает диск, то она задает нетривиальную редукцию типа 2, поэтому ее можно взять в качестве искомого одномерного многообразия l. Если кривая c' ограничивает диск, то кривые c_2 и c'' изотопны в F, причем $\#(c_2 \cap \overline{K}) = \#(c'' \cap \overline{K})$. Если пересечение $c'' \cap \overline{K}$ состоит из 0 или 2 точек, то кривая c'' задает нетривиальную редукцию типа 2 или 1 соответственно и ее можно взять в качестве многообразия l. Если $\#(c'' \cap \overline{K}) = 1$, то диск, ограничиваемый кривой c', не содержит проекции $\overline{K}$. Следовательно, кривую c'' можно взять в качестве l, так как она изотопна кривой c_2, причем при этой изотопии пересечение с проекцией $\overline{K}$ состоит из одной точки (изотопию задает диск, ограничиваемый кривой c').

Случай 3. Каждая из кривых c', c'' разбивает F и пересекается с проекцией $\overline{K}$. В этом случае общее число точек пересечения кривой c_2 с проекций $\overline{K}$ не меньше четырех, что невозможно.

Случай 4. Кривые c', c'' являются неразбивающими кривыми, которые пересекаются с проекцией $\overline{K}$. В этом случае исходная кривая c_2 пересекается с $\overline{K}$ в двух точках и задает редукцию типа 1, следовательно, является разбивающей. В частности, дуга a подходит к кривой c_2 с одной стороны. Тогда объединение $c' \cup c''$ разбивает поверхность F, причем каждая из кривых c', c'' пересекается с проекцией $\overline{K}$ в одной точке. Если пара кривых c', c'' задает нетривиальную редукцию типа 3, то ее можно взять в качестве искомого одномерного многообразия l (в этом случае l состоит из двух компонент).

Предположим, что объединение $c' \cup c''$ задает тривиальную редукцию типа 3. Обозначим через $A \subset F$ кольцо, ограничиваемое $c' \cup c''$. Так как кривая c_2 разбивает F и не ограничивает диск, то она не содержится в A. Дуга $\alpha = (A \times I) \cap K$ является незаузленной дугой, соединяющей кольца $c' \times I$ и $c'' \times I$. Пересечение $\widehat{c_1} = c_1 \cap A$ либо пусто, либо состоит из нескольких дуг, с которыми проекция $\overline{\alpha}$ дуги α на поверхность F имеет не более двух общих точек.

Допустим, что пересечение $\widehat{c_1} \cap \overline{\alpha}$ либо пусто, либо состоит из одной точки. Тогда дугу α можно сдвинуть с помощью неподвижной на $(\partial A \cup \widehat{c_1}) \times I$ изотопии $A \times I \to A \times I$ так, чтобы ее проекция $\overline{\alpha}$ не имела самопересечений. Пусть β — дуга, которая соединяет кривые c' и c'' в окрестности дуги a на F и пересекает a в одной точке. Край $\partial(\beta \cup \overline{\alpha})$ разбивает пару кривых c', c'' на четыре дуги. Составим из этих четырех дуг и отрезков $\overline{\alpha}, \beta$ две чистые неразбивающие непересекающиеся окружности. Прямой подсчет показывает, что одна из построенных кривых пересекается с c_1 в меньшем числе точек, чем кривая c_2, следовательно, ее можно взять в качестве искомого одномерного многообразия l (по построению $\#(l \cap c_2) = 0$).

Если $\widehat{c_1} \cap \overline{\alpha}$ состоит из двух точек, то все точки пересечения кривой c_1 с проекцией $\overline{K}$ содержатся в продырявленном торе, ограничиваемом кривой c_2. Поэтому любая из дуг $c_1 \setminus (c_1 \cap c_2)$, не содержащаяся целиком в этом продырявленном торе, является чистой. Возьмем ее в качестве дуги $a \subset c_1$. Повторим все рассуждения доказательства с самого начала. На этот раз случай $\#(\widehat{c_1} \cap \overline{\alpha}) = 2$ встретиться не может. Предложение доказано.

Пусть одномерные многообразия $c_1, c_2 \subset F$ пересекаются и каждое из них задает нетривиальную редукцию типа 1, 2 или 3. Наша цель состоит в построении *одномерного посредника* $c \subset F$, т. е. одномерного подмногообразия, удовлетворяющего двум условиям: оно задает нетривиальную редукцию типа 1, 2, 3 или 4 и $\#(c \cap c_i) < \#(c_1 \cap c_2)$ при $i = 1, 2$.

Лемма 7. *Пусть одномерные многообразия $c_1, c_2 \subset F$ пересекаются и каждое из них задает нетривиальную редукцию типа* 1, 2 *или* 3. *Тогда существует одномерный посредник для c_1 и c_2.*

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев в зависимости от типов редукций, задаваемых многообразиями c_1 и c_2.

Случай 1. Каждое из многообразий c_1 и c_2 является кривой, задающей нетривиальную редукцию типа 1 или 2. Отметим, что если в этом случае пересечение $c_1 \cap c_2$ состоит из одной точки, то редукции пары $(F \times I, K)$, выполненные вдоль колец $c_1 \times I$ и $c_2 \times I$, приводят к одному результату, что невозможно, так как они задают различные ребра графа Г. Тогда кривые c_1 и c_2 разбиваются точками пересечения $c_1 \cap c_2$ на дуги. Если хотя бы одна из этих дуг чистая, то одномерный посредник существует по предложению 3. Если все дуги, на которые разбиваются кривые c_1, c_2 точками пересечения $c_1 \cap c_2$, не являются чистыми, то c_1 и c_2 задают нетривиальные редукции типа 1 и пересекаются в двух точках.

Простой анализ расположения кривых c_1 и c_2 на поверхности F показывает, что в этом случае все четыре кривые края регулярной окрестности $\partial N(c_1 \cup c_2)$ являются разбивающими и пересекают проекцию $\overline{K}$ в двух точках. Так как кривые c_1, c_2 определяют нетривиальные редукции типа 1, то каждая из них не ограничивает на поверхности F диск. Тогда хотя бы одна кривая края $\partial N(c_1 \cup c_2)$ также не ограничивает на F диск. Эта кривая — одномерный посредник для c_1, c_2.

Случай 2. Оба одномерных многообразия c_1 и c_2 являются парами кривых и задают нетривиальные редукции типа 3. Пусть одномерное многообразие c_1 состоит из двух кривых α_1, α_2, а многообразие c_2 состоит из двух кривых β_1 и β_2. Предположим, что хотя бы одна из дуг, на которые многообразия c_1 и c_2 разбиваются точками пересечения $c_1 \cap c_2$, примыкает к обеим кривым многообразия c_1 или c_2 (обозначим эту дугу через a). С точностью до обозначений можно считать, что дуга $a \subset \beta_1$ примыкает к кривым α_1 и α_2. Так как $\#(\beta_1 \cap \overline{K}) = 1$, то также можно считать, что $\#(a \cap \overline{K}) = 0$.

Сделаем перестройку многообразия c_1, разрезав его по точкам ∂a и приклеив две копии дуги a так, чтобы получилась одна кривая $c \subset F$ (рис. 3(в)). Пересечение $c \cap \overline{K}$ состоит из двух точек. Из того, что пара кривых α_1 и α_2 задает нетривиальную редукцию типа 3, следует, что кривая c является посредником, так как она задает нетривиальную редукцию типа 1 или 4 в зависимости от того, ограничивает она диск на поверхности F или нет.

Предположим теперь, что кривая β_1 пересекается только с кривой α_1, а кривая β_2 пересекается только с кривой α_2. В частности, каждое из этих пересечений может быть пустым. Обозначим через a одну из чистых дуг, на которые кривая α_1 разбивается точками пересечения $\alpha_1 \cap \beta_1$. Тогда по предложению 3 (в качестве кривых c_1 и c_2 берутся кривые α_1 и β_1 соответственно) существует такое одномерное многообразие l, что посредником является либо многообразие l, либо пара l, β_2.

С л у ч а й 3. Пусть одномерное многообразие c_1 задает нетривиальную редукцию типа 3 и состоит из кривых α_1 и α_2 и одномерное многообразие c_2 задает нетривиальную редукцию типа 1 или 2. Если одна из дуг, на которые кривая c_2 разбивается точками пересечения $c_1 \cap c_2$, является чистой, то одномерный посредник для c_1 и c_2 строится аналогично случаям 1 и 2. Если чистых дуг нет, то можно считать, что $\#(\alpha_1 \cap c_2) = 2$, $\#(\alpha_2 \cap c_2) = 0$ и обе дуги, на которые c_2 разбивается точками пересечения $\alpha_1 \cap c_2$, пересекаются с проекцией $\overline{K}$. Пусть $a \subset c_2$ — одна из этих дуг. Сделаем перестройку кривой α_1, разрезав ее по точкам ∂a и приклеив две параллельные копии дуги a. Получим разбивающую кривую c' и неразбивающую кривую c'', причем $\#(c' \cap \overline{K}) = 2$ и $\#(c'' \cap \overline{K}) = 1$. Тогда одномерным посредником является либо кривая c', либо пара c'', α_2. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 следует из определения 4, леммы 1 и того, что граф Γ обладает свойством (CF) по теореме 3 и свойством (MF) по леммам 5, 6 и 7.

4. Примарные разложения виртуальных узлов

Будем говорить, что два узла в утолщенных поверхностях *стабильно эквивалентны*, если от одного к другому можно перейти с помощью операций дестабилизации (редукций типа 2) и обратных преобразований *стабилизации*. Стабилизация пары $(F \times I, K)$ заключается в следующем: выберем два таких непересекающихся диска $D_1, D_2 \subset F$, что $(D_i \times I) \cap K = \varnothing$ при $i = 1, 2$. Вырежем из многообразия $F \times I$ цилиндры $D_1 \times I, D_2 \times I$ и склеим кольца $\partial D_i \times I$, $i = 1, 2$, на крае многообразия $(F \setminus (D_1 \cup D_2)) \times I$ по такому гомеоморфизму $\partial D_1 \times I \to \partial D_2 \times I$, что в результате получается утолщенная поверхность, содержащая узел. Из [1; 4] следует, что множество классов стабильно эквивалентных узлов в утолщенных поверхностях совпадает со множеством виртуальных узлов. Каждый виртуальный узел можно реализовать бесконечным числом различных узлов в утолщенных поверхностях, сводимых один к другому с помощью дестабилизаций и стабилизаций. Реализацию виртуального узла v узлом $(F \times I, K)$ будем называть *минимальной*, если пара $(F \times I, K)$ не допускает дестабилизаций. В работе [4] доказано, что минимальная реализация виртуального узла единственна.

О п р е д е л е н и е 10. Будем говорить, что виртуальный узел v представляется в виде *связной суммой* виртуальных узлов v_1 и v_2 (обозначается $v = v_1 \# v_2$), если какая-нибудь реализация узла v узлом в утолщенной поверхности допускает редукцию типа 1 или 4, в результате которой получаются реализации узлов v_1 и v_2.

Отметим, что если узлы $(F_1 \times I, K_1)$, $(F_2 \times I, K_2)$ и $(F_3 \times I, K_3)$ являются реализациями виртуальных узлов v_1, v_2 и v_3 соответственно, а узлы $(F_2 \times I, K_2)$ и $(F_3 \times I, K_3)$ получаются из узла $(F_1 \times I, K_1)$ с помощью редукции типа 3, то $v_1 = v_2 \# v_3$. Это следует из того, что редукция типа 3 является суперпозицией стабилизации и редукции типа 1.

Предложение 4. *Если $v = v_1 \# v_2$, то минимальная реализация узла v допускает редукцию типа 1, 3 или 4, в результате которой получаются реализации узлов v_1 и v_2.*

Доказательство. Пусть $(F \times I, K)$ — не минимальная реализация узла v, допускающая редукцию типа 1, 3 или 4, и пусть результатом этой редукции являются реализации узлов v_1 и v_2. Пусть $X \subset F \times I$ — поверхность, задающая эту редукцию. Покажем, что результат дестабилизации пары $(F \times I, K)$ допускает редукцию типа 1, 3 или 4, и под действием этой редукции получаются реализации узлов v_1 и v_2. Пусть $A \subset F \times I$ — неразбивающее кольцо, задающее дестабилизацию пары $(F \times I, K)$. Если $X \cap A = \varnothing$, то поверхность X сохраняется при дестабилизации вдоль кольца A. Следовательно копия поверхности X задает редукцию типа 1, 3 или 4, в результате которой получаются реализации узлов v_1 и v_2.

Предположим, что пара $(F \times I, K)$ не допускает дестабилизаций вдоль неразбивающих колец, которые не пересекаются с поверхностью X. Будем устранять пересечения кольца A с поверхностью X с помощью техники устранения пересечений так, как это описано в доказательствах леммы 6 и предложения 3. Этот процесс остановится в одном из следующих случаев.

1. Пересечение $X \cap A$ содержит тривиальную окружность, ограничивающую такой диск $D \subset X$, что $A \cap IntD = \varnothing$ и $\#(D \cap K) = 2$. Сделаем перестройку кольца A, разрезав его по окружности ∂D и приклеив две копии диска D. Сфера S, получившаяся в результате такой перестройки, с точностью до малой изотопии не пересекается с кольцом A, и $\#(S \cap K) = 2$. Непосредственно проверяется, что результатом редукции пары $(F \times I, K)$ вдоль сферы S являются реализации узлов v_1 и v_2. Следовательно, в качестве исходной поверхности X можно взять сферу S, и тогда пара $(F \times I, K)$ допускает дестабилизацию вдоль неразбивающего кольца, не пересекающегося с X.

2. Пересечение $X \cap A$ не содержит тривиальных окружностей, но содержит тривиальную дугу, ограничивающую такой полудиск $D \subset X$, что $A \cap IntD = \varnothing$ и $\#(D \cap K) = 2$. В этом случае рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

3. Поверхность X задает редукцию типа 1, и пересечение $X \cap A$ состоит из двух радиальных дуг, причем оба диска, на которые поверхность X разрезается этими дугами, пересекаются с узлом K. Обозначим через $(F' \times I, K')$ результат дестабилизации пары $(F \times I, K)$ вдоль кольца A. Построим поверхность в $F' \times I$ следующим образом: разрезаем кольцо X по двум дугам $X \cap A$ и склеиваем каждый из кусков по копиям дуг $X \cap A$ на их краях так, чтобы получилась поверхность, задающая редукцию типа 3 пары $(F' \times I, K')$. Непосредственно проверяется, что результатом редукции типа 3 вдоль построенной поверхности являются реализации узлов v_1 и v_2.

4. Поверхность X задает редукцию типа 3, и каждое из колец, составляющих поверхность X, пересекается с кольцом A по одной радиальной дуге. Построим поверхность в $F' \times I$ следующим образом: разрезаем поверхность X по дугам $X \cap A$ и склеиваем получившиеся два диска между собой по копиям дуг $X \cap A$ на их краях так, чтобы получилась поверхность, задающая редукцию типа 1 пары $(F' \times I, K')$. Непосредственно проверяется, что в результате этой редукции типа 1 вдоль построенной поверхности получаются реализации узлов v_1 и v_2.

Повторяем рассуждения доказательства с самого начала несколько раз до тех пор, пока не сведем реализацию $(F \times I, K)$ узла v к минимальной с помощью дестабилизаций вдоль неразбивающих вертикальных колец. Предложение доказано.

Определение 11. Будем говорить, что разложение $v = v_1 \# v_2$ одного виртуального узла v в связную сумму узлов v_1 и v_2 *тривиально*, если один из этих узлов совпадает с v, а второй тривиален. Нетривиальный виртуальный узел называется *примарным*, если его нельзя представить в виде нетривиальной связной суммы двух виртуальных узлов.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.

Существование. Пусть v — виртуальный узел, $(F \times I, K)$ — его реализация узлом в утолщенной поверхности, $V \in \mathbb{V}(\Gamma)$ — вершина, состоящая из одной пары $(F \times I, K)$. Пусть узлы в утолщенных поверхностях, составляющие корень вершины V, задают виртуальные узлы $v_1, \ldots, v_n$. Тогда из определения 10 следует, что виртуальный узел v представляется в виде связной суммы виртуальных узлов $v_1, \ldots, v_n$ и, возможно, нескольких тривиальных узлов. Действительно, как упоминалось ранее, редукции типа 2 не меняют виртуальных узлов, и каждая редукция типа 3 является суперпозицией стабилизации и редукции типа 1. Дополнительные тривиальные слагаемые появляются за счет того, что вершины графа Γ рассматриваются с точностью до добавления или удаления тривиальных узлов в утолщенных сферах. Из предложения 4 следует, что узлы $v_1, \ldots, v_n$ примарны, так как их минимальными реализациями являются узлы, не допускающие нетривиальных редукций.

Единственность. Пусть v — виртуальный узел. Будем говорить, что набор примарных узлов $\{v_1, \ldots, v_n\}$ является *каноническим* для узла v, если узлы $v_1, \ldots, v_n$ задаются корнем вершины графа Γ, состоящей из какой-нибудь реализации узла v. Из теоремы 1 следует, что канонический набор примарных виртуальный узлов определен однозначно, т. е. зависит только от исходного узла v и не зависит от его конкретной реализации. Будем называть виртуальный узел v *сингулярным*, если он представляется в виде связной суммы тривиальных узлов и примарных узлов $v_1, \ldots, v_n$, причем набор $\{v_1, \ldots, v_n\}$ не является каноническим для узла v.

Отметим, что если $v = v_1 \# v_2$, то корень вершины графа Γ, состоящей из реализации узла v, совпадает с объединением корней двух вершин графа Γ, одна из которых состоит из реализации узла v_1, а вторая — из реализации узла v_2. Тогда из сингулярности узла v следует сингулярность хотя бы одного из узлов v_1, v_2. С другой стороны, примарный узел не является сингулярным, так как его нельзя представить в виде нетривиальной связной суммы виртуальных узлов. Следовательно, сингулярных виртуальных узлов нет. Теорема доказана.

Автор благодарен С.В. Матвееву за полезные дискуссии и помощь в доказательстве утверждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carter J. S., Kamada S., Saito M.** Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms // J. Knot Theory Ramifications. 2002. Vol. 11. P. 311–322.
2. **Hog-Angelony C., Matveev S.** Roots in 3-manifold topology // Geometry and Topology Monograph. 2008. Vol. 14. P. 295–319.
3. **Kishino T., Satoh S.** A note on non-classical virtual knots // J. Knot Theory Ramifications. 2004. Vol. 13, no. 7. P. 845–856.
4. **Kuperberg G.** What is a virtual link? // Algebraic and Geometric Topology. 2003. Vol. 3. P. 587–591.
5. **Miyazaki K.** Conjugation and prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 313. P. 785–804.
6. **Кауффман Л., Мантуров В.О.** Виртуальные узлы и зацепления // Тр. МИРАН. 2006. Т. 252, № 1. С. 114–134.
7. **Матвеев С.В.** Разложение гомологически тривиальных узлов в $F \times I$ // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 1. С. 13–15.

Кораблев Филипп Глебович
старший преподаватель
Челябинский государственный университет
ведущий математик
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: korablev@csu.ru

Поступила 9.04.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.54

ОБ ОДНОЙ ПОДГРУППЕ БЕРНСАЙДОВОЙ ГРУППЫ $B_0(2,5)$ [1]

А. А. Кузнецов

Пусть x, y — порождающие универсальной двупорожденной конечной группы периода 5 ($B_0(2,5)$-группы). Исследована структура ее подгруппы $G = \langle xy, yx \rangle$. Показано, что $|G| = 5^{14}$, а ступени нильпотентности и разрешимости группы G равны 6 и 3 соответственно. Построены нижний и верхний центральные ряды для G. Показано, что G является наибольшей двупорожденной группой периода 5 ступени нильпотентности 6.

A. A. Kuznetsov. On a subgroup of the Burnside group $B_0(2,5)$.

Let x, y be generators of the universal 2-generated finite group of exponent 5 (the $B_0(2,5)$-group). The structure of its subgroup $G = \langle xy, yx \rangle$ is investigated. It is shown that $|G| = 5^{14}$ and the nilpotency class and derived length of G are equal to 6 and 3, respectively. The lower and upper central series of G are constructed. It is shown that G is the largest 2-generated group of exponent 5 and nilpotency class 6.

Keywords: Burnside problem, $B_0(2,5)$-group.

Введение

В 1902 г. У. Бернсайд сформулировал следующую проблему: "Будет ли всякая группа с конечным числом m образующих и тождественным соотношением $x^n = 1$ конечной?". В общем случае ответ на эту задачу отрицательный [1]. По данной проблеме имеется внушительный машинный эксперимент [2–4]. В большинстве работ в этом направлении используют комбинаторно-перечислительные методы в коммутаторном исчислении, базирующиеся на конструкциях алгебр Ли. Однако до сих пор остается открытым вопрос о конечности некоторых бернсайдовых групп. Так, например, неизвестно, конечна ли группа с двумя образующими ($m = 2$) и тождественным соотношением $x^5 = 1$ ($B(2,5)$-группа).

В 1955 г. А.И. Кострикин [5] решил ослабленную проблему Бернсайда для показателя 5, доказав, что существует универсальная конечная группа с двумя образующими и тождественным соотношением $x^5 = 1$ ($B_0(2,5)$-группа), для которой $5^{31} \leq |B_0(2,5)| \leq |5^{34}|$. Позднее, в 1974 г. Г. Хавас, Г. Уолл и Ж. Уэмсли [6] при помощи компьютерных вычислений показали, что $|B_0(2,5)| = 5^{34}$.

Если группа $B(2,5)$ конечна, то $B_0(2,5) \simeq B(2,5)$.

Пусть x, y — образующие групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$. В работе [7] был предложен компьютерный алгоритм для сравнения групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$. В [8] на основе этого алгоритма была доказана

Теорема 1. *Пусть v, w — два слова в алфавите образующих $\{x, y\}$, длины которых не превосходят 29. В таком случае $v = w$ — соотношение в группе $B_0(2,5)$ тогда и только тогда, когда $v = w$ — соотношение в группе $B(2,5)$.*

Однако длина 30 явилась своеобразной "точкой расхождения" групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$. При длинах слов от 30 до 35 в $B_0(2,5)$ имеются соотношения, доказать справедливость которых в $B(2,5)$ по алгоритмам из [7; 8] при применении соотношений, длины левой и правой части которых не превосходят 35, не удается.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/3023) и РФФИ (проект 10-01-00509).

В 1991 г. Ч. Симсом [9] в группе $B_0(2,5)$ были найдены два соотношения длины 30, справедливость которых ему не удалось доказать в группе $B(2,5)$. Для вывода соотношений в группе $B(2,5)$ Симс использовал компьютерные вычисления, основанные на процедуре Кнута — Бендикса (см. [3]). В [9] Симс поставил вопрос: имеются ли в $B_0(2,5)$ более короткие соотношения (с длинами слов, меньшими 30), которые не удастся доказать в группе $B(2,5)$, используя процедуру Кнута — Бендикса? Из вышеприведенной теоремы 1 следует отрицательное решение вопроса Симса.

Поскольку порядок группы $B_0(2,5)$ достаточно большой, то дальнейший сравнительный анализ данных групп по алгоритмам из [7; 8] оказался затруднительным. Поэтому значительный интерес представляет задача поиска подгрупп в $B_0(2,5)$, порядки которых существенно меньше порядка $B_0(2,5)$, для их дальнейшего сравнения с аналогичными подгруппами группы $B(2,5)$.

Рассмотрим следующую подгруппу в $B_0(2,5)$: $G = \langle xy, yx\rangle$. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2. *Для группы G верны следующие утверждения*:
1. *Ступени нильпотентности и разрешимости для G равны* 6 *и* 3 *соответственно.*
2. $|G| = 5^{14}$.
3. *G является наибольшей двупорожденной группой периода* 5 *ступени нильпотентности* 6.

1. Доказательство теоремы 2

Как и в [6], будем представлять элементы $B_0(2,5)$ в виде нормальных коммутаторных слов. В качестве первых двух коммутаторов возьмем образующие группы $B_0(2,5)$, которые обозначим через 1 и 2, а последующие, с 3-го по 34-й, коммутаторы вычисляются рекурсивно через 1 и 2 [6].

Ниже приведены нетривиальные соотношения для базисных коммутаторов.
$[2,1] = 3$, $[3,1] = 4$, $[3,2] = 5$, $[4,1] = 6$,
$[4,2] = 7^1 9^2 10^1 11^4 12^1 13^3 14^1 15^1 16^2 17^1 18^2 19^3 21^2 22^4 23^1 24^3 26^4 30^3 31^3 32^1 34^1$,
$[4,3] = 9^3 11^1 12^4 13^2 15^1 17^3 18^3 19^4 20^4 21^4 22^4 23^2 24^2 25^2 26^4 27^4 29^2 30^2 32^1 33^4$, $[5,1] = 7$, $[5,2] = 8$,
$[5,3] = 10^4 13^1 14^4 15^1 17^2 19^1 20^2 21^1 22^2 23^1 24^2 25^2 26^3 27^1 29^1 30^2 31^2 32^3 33^1$,
$[5,4] = 12^1 13^2 15^4 16^3 17^3 18^4 19^4 20^4 21^1 23^3 24^1 25^2 26^4 27^3 29^3 30^4 32^4 33^1$,
$[6,1] = 11^3 16^3 19^2 23^2 24^1 25^2 26^2 29^2 30^4 31^1 32^3 33^2 34^2$,
$[6,2] = 9^3 11^3 12^2 13^2 15^2 16^2 17^1 18^2 19^2 22^1 23^2 25^3 27^2 29^3 31^2 32^4 33^3 34^1$,
$[6,3] = 11^3 15^4 16^2 20^3 21^3 24^3 25^3 27^4 29^3 32^3 33^3$,
$[6,4] = 19^2 23^4 24^4 25^4 29^1 30^2 32^2 34^1$, $[6,5] = 15^1 16^2 19^4 21^4 24^4 26^2 27^1 29^4 30^2 31^3 32^4 33^1 34^3$, $[7,1] = 9$,
$[7,2] = 10^2 12^1 13^2 14^2 16^1 17^2 18^3 19^1 20^4 21^1 23^4 24^1 28^4 29^2 30^3 32^3 33^3 34^4$,
$[7,3] = 12^4 13^2 15^4 16^4 17^2 19^3 20^2 21^1 25^3 26^4 27^4 29^2 30^4 31^2 32^3 33^1$,
$[7,4] = 15^2 16^4 19^4 20^3 21^3 23^3 25^1 26^2 27^1 29^1 31^3 32^4 33^3 34^4$, $[7,5] = 17^2 18^1 20^2 21^2 22^2 24^3 26^3 29^1 30^1 33^4$,
$[7,6] = 19^4 23^1 24^3 30^3 33^1 34^3$, $[8,1] = 10$, $[8,2] = 14^1 17^2 18^1 20^2 21^4 22^1 24^1 25^3 26^4 28^2 29^4 30^3 31^3 33^2 34^1$,
$[8,3] = 14^4 17^1 20^4 21^2 22^1 24^3 25^1 26^3 29^3 31^1 32^2 33^3$, $[8,4] = 17^1 18^3 20^1 21^1 22^4 24^1 25^4 27^1 30^3 31^4 34^2$,
$[8,5] = 22^4 26^3 27^3 28^4 30^1 32^3 33^4 34^2$, $[8,6] = 20^4 21^3 24^3 25^3 26^2 27^4 29^3 30^2 31^4 32^2 33^3$,
$[8,7] = 22^2 26^1 27^3 30^1 31^1 32^2 34^4$, $[9,1] = 11$, $[9,2] = 12$,
$[9,3] = 15^2 16^3 19^2 20^4 21^2 23^1 25^4 26^3 27^4 29^1 31^2 32^1 34^2$, $[9,4] = 19^3 23^4 25^3 29^4 30^3 32^3 33^1 34^1$,
$[9,5] = 20^2 21^1 24^1 25^4 27^2 30^4 32^4 34^1$, $[9,6] = 23^4 29^1 32^2 34^4$, $[9,7] = 24^1 25^3 29^3 30^1 32^2 34^3$,
$[9,8] = 26^1 27^1 30^4 31^4 32^3 33^1 34^3$, $[10,1] = 13$, $[10,2] = 14$,
$[10,3] = 17^4 18^1 20^3 21^4 22^1 24^4 25^3 26^3 27^3 29^3 30^1 31^1 33^4 34^3$, $[10,4] = 20^2 24^4 26^3 30^2 31^1 34^2$,
$[10,5] = 22^3 26^3 27^3 31^4 34^1$, $[10,6] = 24^4 25^3 29^3 30^2 32^4 33^1$, $[10,7] = 26^1 27^3 30^2 31^4 32^4 33^1 34^2$,
$[10,8] = 28^4 31^4 33^1 34^3$, $[10,9] = 33^3 34^2$, $[11,1] = 29^1 32^1$,
$[11,2] = 15^4 16^2 19^4 20^3 21^3 24^2 25^3 26^4 27^4 29^1 30^4 31^4 32^2 33^1 34^1$, $[11,3] = 19^4 23^4 24^4 25^4 29^4 30^1 32^2 33^2$,

$[11,4]=23^4 29^4 32^1 34^2$, $[11,5]=24^1 25^3 29^2 30^1 32^1 34^2$, $[11,7]=29^1 32^1$, $[11,8]=30^1 32^3 33^4$, $[11,10]=32^1 34^4$, $[12,1]=15$, $[12,2]=17^2 18^2 20^2 21^2 25^3 26^4 28^1 29^4 30^3 32^3 33^3 34^3$, $[12,3]=20^3 26^3 27^2 29^1 30^2 31^4 32^2 33^2 34^1$, $[12,4]=24^4 25^1 29^1 30^4 32^4 33^3$, $[12,5]=26^2 30^3 31^4 32^1 33^2 34^1$, $[12,6]=29^1 32^4 34^2$, $[12,7]=30^1 32^4$, $[12,8]=31^4 33^1 34^3$, $[12,9]=32^4 34^4$, $[12,10]=33^2$, $[13,1]=16$, $[13,2]=17$, $[13,3]=20^2 21^1 24^1 25^2 26^2 27^1 29^2 31^4 32^3 33^3 34^3$, $[13,4]=24^3 25^2 29^2 30^3 32^3 33^1 34^4$, $[13,5]=26^4 30^3 31^1 33^1 34^3$, $[13,6]=29^4 34^4$, $[13,7]=30^3 32^1 33^3 34^3$, $[13,8]=31^4 33^2$, $[13,9]=32^1 34^2$, $[13,10]=33^2 34^1$, $[14,1]=18$, $[14,2]=22^1 26^3 27^2 28^4 30^1 32^3 33^4 34^1$, $[14,3]=22^4 26^1 30^3 31^3 32^3 33^1 34^3$, $[14,4]=26^1 27^3 30^1 31^1 33^4 34^2$, $[14,5]=28^4 31^3 33^2 34^4$, $[14,6]=30^3 32^3 33^2 34^1$, $[14,7]=31^4 33^1 34^3$, $[14,9]=33^2$, $[15,1]=19$, $[15,2]=20^4 21^2 24^3 25^3 26^1 27^4 29^3 30^2 32^2 33^4 34^3$, $[15,3]=24^4 25^4 29^1 30^3 32^1 33^2 34^4$, $[15,4]=29^3 34^1$, $[15,5]=30^4 32^2 33^3 34^3$, $[15,7]=32^2 34^1$, $[15,8]=33^2 34^4$, $[15,10]=34^2$, $[16,1]=34^2$, $[16,2]=20^4 21^4 25^4 26^4 27^3 29^3 30^1 31^4 32^2 33^3 34^4$, $[16,3]=24^4 25^4 30^3 32^4 33^2 34^1$, $[16,4]=29^4 32^3 34^2$, $[16,5]=30^2 33^1 34^1$, $[16,7]=32^2 34^1$, $[16,8]=33^2 34^4$, $[16,10]=34^2$, $[17,1]=20$, $[17,2]=22^4 26^3 27^1 28^2 30^3 31^2 32^3 33^1 34^4$, $[17,3]=26^4 27^1 30^1 31^2 32^4 33^2 34^1$, $[17,4]=30^2 33^1 34^3$, $[17,5]=31^2 33^3 34^3$, $[17,6]=32^3 34^2$, $[17,7]=33^2 34^4$, $[17,9]=34^2$, $[18,1]=21$, $[18,2]=22$, $[18,3]=26^4 27^1 30^4 31^4 32^3 33^3 34^2$, $[18,4]=33^1 34^2$, $[18,6]=32^3 34^2$, $[18,7]=33^2 34^4$, $[18,9]=34^2$, $[19,1]=23$, $[19,2]=25^3 29^1 30^3 32^2 33^1$, $[19,3]=29^1 32^3 34^1$, $[19,5]=32^2 34^2$, $[20,1]=24$, $[20,2]=26^1 27^3 30^1 31^1 32^2 33^1 34^1$, $[20,3]=30^4 32^2 33^4$, $[20,4]=32^4 34^4$, $[20,5]=34^4$, $[21,1]=25$, $[21,2]=26$, $[21,3]=30^1 32^2 33^1 34^2$, $[21,4]=32^2 34^4$, $[21,5]=33^3 34^1$, $[22,1]=27$, $[22,2]=28$, $[22,3]=31^1 33^2$, $[22,4]=33^3 34^2$, $[23,2]=29^4 32^3 34^4$, $[24,1]=29$, $[24,2]=30^4 32^4 33^1$, $[25,2]=30^4 32^4 33^2 34^1$, $[25,3]=32^4 34^2$, $[25,5]=34^3$, $[26,1]=33^2 34^1$, $[26,2]=31^4 33^1 34^1$, $[26,3]=33^4 34^1$, $[26,4]=34^4$, $[27,1]=30$, $[27,2]=34^3$, $[27,3]=33^3 34^2$, $[27,4]=34^3$, $[28,1]=31$, $[29,2]=32^4 34^1$, $[30,1]=32$, $[30,2]=33^2 34^3$, $[31,1]=33$, $[32,2]=34^2$, $[33,1]=34$.

В этом случае каждый элемент $g\in B_0(2,5)$ однозначно представляется упорядоченным произведением базисных коммутаторов в определенных степенях

$$g=1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\dots 34^{\alpha_{34}},$$

где $\alpha_i\in\{0,1,2,3,4\}$ $(i=1,2,\dots,34)$.

Далее для краткости мы будем писать $g=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{34})$.

Рассмотрим два элемента из $B_0(2,5)$, которые порождают подгруппу G: $k_1=1\cdot 2$ и $k_2=2\cdot 1$. Используя соотношения из [6], приведем указанные элементы к нормальной коммутаторной форме:

$$k_1=(1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0),$$

$$k_2=(1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0).$$

Теперь получим следующие элементы в коммутаторной форме:

$$k_3=[k_2,k_1]=(0,0,0,1,1,0,1,0,2,1,4,2,0,1,0,0,4,1,2,4,3,4,4,4,2,3,3,0,3,4,3,2,2,2),$$

$$k_4=[k_3,k_1]=(0,0,0,0,0,1,2,1,1,0,4,3,0,1,0,0,3,1,0,4,2,3,3,2,1,1,2,0,0,0,2,2,1,4),$$

$$k_5=[k_3,k_2]=(0,0,0,0,0,1,2,1,4,4,3,4,4,4,4,3,4,0,2,4,3,4,3,2,4,4,2,1,1,1,1,4,1,3),$$

$$k_6=[k_4,k_1]=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,2,1,1,2,3,3,1,3,2,0,2,2,0,1,4,0,2,2,2,0,0,1,1),$$

$$k_7=[k_4,k_2]=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,3,1,0,4,0,1,2,1,1,4,0,2,0,0,0,4,1,4),$$

$$k_8=[k_5,k_2]=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,3,4,4,1,3,4,0,1,3,0,2,0,3,1,3,0,3,0,2,4,4,0,4),$$

$$k_9=[k_6,k_2]=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,3,1,4,1,2,0,4,2,4,3,2,0,0,2,2),$$

$$k_{10}=[k_7,k_2]=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,2,3,0,0,3,3,1,2,3,1,4,4,0,0),$$

$$k_{11}=[k_9,k_1]=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,3,0,4,3,4,1,3,3,0,3,4),$$

$$k_{12}=[k_9,k_2]=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,3,0,4,3,4,4,1,2,2,1,2),$$

$$k_{13}=[k_{10},k_1]=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,3,1,3,0,4,0,4,0,2),$$

$$k_{14}=[k_{10},k_2]=(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,3,1,3,1,0,3,0,2,3).$$

При помощи компьютерных вычислений находим, что $[k_l,k_m,k_n,k_p,k_r,k_s,k_t]=e$ при любых $l,m,n,p,r,s,t\in\{1,2\}$, но, например, $[k_2,k_1,k_1,k_2,k_2,k_2]=k_{14}\neq e$. Поэтому ступень нильпотентности группы G равна 6.

Используя вышеприведенные элементы k_i $(i=1,2,\ldots,14)$, на основе алгоритма из [3] получим группу $G=\langle k_1,k_2\rangle$ в коммутаторном pc-представлении (для краткости вместо k_i пишем i).

Коммутаторы веса 1:

$1=k_1$,
$2=k_2$.

Коммутаторы веса 2:

$3=[2,1]$.

Коммутаторы веса 3:

$4=[3,1]=[2,1,1]$,
$5=[3,2]=[2,1,2]$.

Коммутаторы веса 4:

$6=[4,1]=[2,1,1,1]$,
$7=[4,2]=[2,1,1,2]$,
$8=[5,2]=[2,1,2,2]$.

Коммутаторы веса 5:

$9=[6,2]=[2,1,1,1,2]$,
$10=[7,2]=[2,1,1,2,2]$.

Коммутаторы веса 6:

$11=[9,1]=[2,1,1,1,2,1]$,
$12=[9,2]=[2,1,1,1,2,2]$,
$13=[10,1]=[2,1,1,2,2,1]$,
$14=[10,2]=[2,1,1,2,2,2]$.

Ниже приведены нетривиальные соотношения для базисных коммутаторов (например, $[6,4]=e$ – тривиальное соотношение):

$[2,1]=3$, $[3,1]=4$, $[3,2]=5$, $[4,1]=6$, $[4,2]=7$, $[4,3]=9\cdot 11\cdot 12^4$, $[5,1]=7\cdot 9\cdot 10^2\cdot 11\cdot 12^2\cdot 13^3\cdot 14^4$, $[5,2]=8$, $[5,3]=10^2\cdot 12^3\cdot 13\cdot 14^4$, $[5,4]=12^2\cdot 13$, $[6,1]=11$, $[6,2]=9$, $[6,3]=11$, $[7,1]=9^2\cdot 11^2\cdot 12^2\cdot 13$, $[7,2]=10$, $[7,3]=12^3\cdot 13$, $[8,1]=10^3\cdot 12^2\cdot 13^2\cdot 14^3$, $[8,2]=14^3$, $[8,3]=14^2$, $[9,1]=11$, $[9,2]=12$, $[10,1]=13$, $[10,2]=14$.

Любой элемент $g\in G$ представим в виде нормального коммутаторного слова

$$g=1^{\alpha_1}\cdot 2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot 14^{\alpha_{14}},$$

$\alpha_i\in\{0,1,2,3,4\}$ $(i=1,2,\ldots,14)$. Отсюда, в частности, следует, что $|G|=5^{14}$.

Используя вышеприведенное коммутаторное представление, построим нижний центральный ряд группы G:

$$G\supset G_1\supset G_2\supset G_3\supset G_4\supset G_5\supset G_6=e,$$

где $G_1=[G,G]=\langle 3,4,\ldots,14\rangle$, $G_2=[G_1,G]=\langle 4,5,\ldots,14\rangle$, $G_3=[G_2,G]=\langle 6,7,\ldots,14\rangle$, $G_4=[G_3,G]=\langle 9,10,\ldots,14\rangle$, $G_5=[G_4,G]=\langle 11,12,13,14\rangle$.

Теперь построим верхний центральный ряд группы G:

$$e=Z_0\subset Z_1\subset Z_2\subset Z_3\subset Z_4\subset Z_5\subset Z_6=G,$$

где $Z_1=G_5$, $Z_2=G_4$, $Z_3=G_3$, $Z_4=G_2$, $Z_5=G_1$.

Далее вычислим ступень разрешимости группы G. Имеем $G^{(1)} = [G, G] = G_1$. Из полученных выше соотношений следует, что $G^{(2)} = [G^{(1)}, G^{(1)}]$ является абелевой подгруппой, поэтому ступень разрешимости группы G равна 3.

При помощи системы компьютерной алгебры GAP с использованием пакета ANUPQ строим наибольшую двупорожденную группу периода 5 ступени нильпотентности 6 в коммутаторном pc-представлении. В результате получаем, что вычисленная группа имеет такой же генетический код, что и группа G. Таким образом, G является наибольшей двупорожденной группой периода 5 ступени нильпотентности 6. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Адян С.И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 336 с.
2. **Vaughan Lee M.** The restricted Burnside problem. New York: Clarendon Press, 1993. 256 p.
3. **Sims C.** Computation with finitely presented groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 604 p.
4. **Holt D., Eick B., O'Brien E.** Handbook of computational group theory. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2005. 514 p.
5. **Кострикин А.И.** Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5 // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1955. Т. 19, № 3. С. 233–244.
6. **Havas G., Wall G., Wamsley J.** The two generator restricted Burnside group of exponent five // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. Vol. 10. P. 459–470.
7. **Кузнецов А.А., Шлёпкин А.К.** Сравнительный анализ бернсайдовых групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 125–132.
8. **Кузнецов А.А., Шлёпкин А.К.** О различии бернсайдовых групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 133–138.
9. **Sims C.** The Knuth-Bendix procedure for strings as a substitute for coset enumeration // J. Symbolic Comput. 1991. Vol. 12, no. 4–5. P. 439–442.

Кузнецов Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой
Сибирский государственный аэрокосмический университет
e-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru

Поступила 16.08.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С РАЗЛОЖИМЫМИ КОФАКТОРАМИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП[1]

И. В. Лемешев, В. С. Монахов

Устанавливается, что у конечной группы с нильпотентной π-холловой подгруппой и π-разложимыми кофакторами максимальных подгрупп фактор-группа по подгруппе Фиттинга π-разложима. Отсюда вытекает метанильпотентность группы с нильпотентными кофакторами максимальных подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, p-разрешимая группа, максимальная подгруппа, кофактор.

I. V. Lemeshev, V. S. Monakhov. Finite groups with decomposable cofactors of maximal subgroups.

A finite group with a nilpotent π-Hall subgroup and π-decomposable cofactors of maximal subgroups is studied. It is established that the quotient of this group by the Fitting subgroup is π-decomposable, which implies that a finite group with nilpotent cofactors of maximal subgroups is metanilpotent.

Keywords: finite group, p-solvable group, maximal subgroup, cofactor.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Терминология и обозначения соответствуют [1; 2]. *Кофактором* $\mathrm{cof}_G H$ подгруппы H группы G называется фактор-группа H/H_G, где $H_G = \bigcap_{x\in G} x^{-1}Hx$ — ядро подгруппы H в группе G.

Естественно ожидать, что строение группы существенно зависит от свойств кофакторов некоторых ее подгрупп. Одной из первых работ в этом направлении является работа Я. Г. Берковича [3], в которой, в частности, устанавливалась разрешимость группы с нильпотентными кофакторами максимальных подгрупп.

В работе С. М. Евтуховой и В. С. Монахова [4] исследовались группы, у которых кофакторы максимальных подгрупп сверхразрешимы. В частности, доказано, что неабелевы композиционные факторы такой неразрешимой группы изоморфны $PSL(2,p)$, $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, а если группа разрешима, то она имеет нильпотентную длину не выше 3 и p-длину не выше 2 для всех простых чисел p.

С. А. Русаков [5] установил, что группа, в которой каждая ненормальная максимальная подгруппа p-разложима, содержит нормальную силовскую подгруппу, фактор-группа по которой p-разложима.

В. А. Ведерников [6] доказал, что если в D_π-группе все максимальные подгруппы π-разложимы, то она либо π-разложима, либо является группой Шмидта.

В настоящей заметке развивается тематика подобных исследований и исследуются группы с π-разложимыми кофакторами максимальных подгрупп. В частности, доказывается теорема о том, что у группы с нильпотентной π-холловой подгруппой и π-разложимыми кофакторами максимальных подгрупп фактор-группа по подгруппе Фиттинга π-разложима. Эта теорема дополняет результаты В. А. Ведерникова и С. А. Русакова. Отсюда вытекает также метанильпотентность группы с нильпотентными кофакторами максимальных подгрупп, что улучшает приведенный выше результат Я. Г. Берковича.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ-БРФФИ (проект Ф 10Р-231).

1. Вспомогательные результаты

Через $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G, A_n и S_n — знакопеременная и симметрическая группы степени n соответственно.

Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — дополнение к π во множестве всех простых чисел. Группа, порядок которой делится на простое число $p \in \pi$, называется *πd-группой*, а *π-подгруппа* — это подгруппа, порядок которой делится только на простые числа из π. Если индекс π-подгруппы H в группе G делится только на простые числа из π', то H называют *π-холловой* подгруппой группы G. Говорят, что группа G обладает свойством D_π, если в G имеется π-холлова подгруппа, любые две π-холловы подгруппы сопряжены и каждая π-подгруппа содержится в некоторой π-холловой подгруппе. Группу со свойством D_π называют *D_π-группой*, группу с нормальной π-холловой подгруппой — *π-замкнутой*, а группу с нормальной π'-холловой подгруппой — *π-нильпотентной.* Группа, которая одновременно π-замкнута и π-нильпотентна, называется *π-разложимой. Мета-π-разложимая* (соответственно *мета-π-нильпотентная*) группа — это группа, содержащая нормальную π-разложимую (соответственно π-нильпотентную) подгруппу, фактор-группа по которой также π-разложима (соответственно π-нильпотентна). π-длина и нильпотентная π-длина π-разрешимой группы G обозначаются, как в [7], через $l_\pi(G)$ и $l_\pi^n(G)$ соответственно; $l_p(G)$ — p-длина p-разрешимой группы G. Запись $N \trianglelefteq G$ означает, что N — нормальная в G подгруппа. Если в группе G имеется максимальная подгруппа M с $M_G = 1$, то группу G называют *примитивной*, а M ее *примитиватором.* Ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны, называют *группой Шмидта.* Хорошо известно, что порядок группы Шмидта делится в точности на два различных простых числа. Запись $G = [A]B$ означает, что группа G является полупрямым произведением A и B, причем A нормальна в G.

Лемма 1. 1. *Если K и H — подгруппы группы G и $K \subseteq H$, то $K_G \leq K_H$.*
2. *Пусть $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H \leq G$. Тогда $N \leq H_G$ и $(H/N)_{G/N} = H_G/N$.*
3. *Пусть $N \trianglelefteq G$ и $H \leq G$. Тогда $(H_G)N \leq (HN)_G$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Так как K_G — наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в K, то $K_G \leq K \leq H$ и, кроме того, $K_G \trianglelefteq H$. Но K_H — наибольшая нормальная в H подгруппа, содержащаяся в K, поэтому $K_G \leq K_H$.

2. Ясно, что $N \leq H_G$ и H_G/N — нормальная в G/N подгруппа, содержащаяся в H/N, поэтому $H_G/N \leq (H/N)_{G/N}$. С другой стороны, пусть $(H/N)_{G/N} = K/N$. Так как $K/N \trianglelefteq G/N$, то $K \trianglelefteq G$ и $K \leq H$. Поскольку H_G — наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H, то $K \leq H_G$. Следовательно,

$$K/N = (H/N)_{G/N} \leq H_G/N.$$

Из двух включений получаем требуемое равенство.

3. Так как H_G — наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H и $N \trianglelefteq G$, то $(H_G)N \trianglelefteq G$ и $(H_G)N \leq HN$. Но $(HN)_G$ — наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в HN, поэтому $(H_G)N \leq (HN)_G$. Лемма доказана.

П р и м е р 1. Пусть $G = S_5 = [A_5]\langle i\rangle$, $i^2 = 1$, $N = A_5$ и $H = \langle i\rangle$. Тогда $N \triangleleft G$, а $H_G = 1$ и $(H_G)N = N$. С другой стороны, $G = HN$ и $(HN)_G = G$, поэтому $N = (H_G)N$ — собственная подгруппа в группе $(HN)_G = G$. Данный пример показывает, что в утверждении 3 леммы 1 равенство $(H_G)N = (HN)_G$ не всегда возможно.

Лемма 2. *Пусть H и N — подгруппы группы G, $N \trianglelefteq G$ и $N \subseteq H$. Тогда* $\mathrm{cof}_{G/N}H/N \simeq \mathrm{cof}_G H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $N \subseteq H_G$. По определению

$$\mathrm{cof}_G H = H/H_G, \quad \mathrm{cof}_{G/N}H/N = (H/N)/(H/N)_{G/N},$$

а по лемме 1 $(H/N)_{G/N} = H_G/N$. Поэтому

$$\mathrm{cof}_G H = H/H_G \simeq (H/N)/(H_G/N) = (H/N)/(H/N)_{G/N} = \mathrm{cof}_{G/N} H/N.$$

Лемма доказана.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 2]. Пусть $\mathfrak{E}$ — формация всех конечных групп, $\mathfrak{F}$ — некоторая формация и G — группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — некоторая формация и π — некоторое множество простых чисел, то $\mathfrak{F}_\pi$ — класс всех π-групп из $\mathfrak{F}$. В частности, $\mathfrak{E}_\pi$ — класс всех π-групп, а $\mathfrak{E}_{\pi'}$ — класс всех π'-групп. Формацию всех нильпотентных групп обозначают через $\mathfrak{N}$. Если $\mathfrak{X}$ — формация, то $\pi(\mathfrak{X}) = \cup_{G\in\mathfrak{X}}\pi(G)$. Здесь $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G.

Следующая лемма непосредственно вытекает из приведенных определений.

Лемма 3. *Пусть G — группа.*

1. *Группа $G/F(G)$ тогда и только тогда π-нильпотентна или π-разложима, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_\pi$ или $G \in \mathfrak{N}(\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_\pi)$ соответственно.*

2. *Группа G тогда и только тогда мета-π-нильпотентна или мета-π-разложима, когда $G \in (\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_\pi)^2$ или $G \in (\mathfrak{E}_\pi\mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_\pi)^2$ соответственно.*

Лемма 4. 1. *Если $\mathfrak{F}$ — формация, π — некоторое непустое множество простых чисел и $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi$, то $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. В частности, если $\mathfrak{F}$ — формация, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.*

2. *Произведение насыщенных формаций является насыщенной формацией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Согласно [2, с. 36], произведение $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация — эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}_\pi\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.

2. Согласно [2] произведение локальных формаций является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация — эквивалентные понятия, то произведение насыщенных формаций — это насыщенная формация.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Предположим, что группа G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G/K \in \mathfrak{F}$ для всех неединичных нормальных в G подгрупп K. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi(G) = 1$;

2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N*;

3) *G — примитивная группа и $G = NM$ для примитиватора M группы G*;

4) *либо $N = C_G(N)$ и $G = [N]M$, либо $C_G(N) = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Если $\Phi(G) \neq 1$, то по условию $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, а поскольку $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$, противоречие. Значит, $\Phi(G) = 1$.

2. Если в группе G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, то $N_1 \cap N_2 = 1$. По условию $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, а поскольку $\mathfrak{F}$ — формация, то $G = G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$, противоречие. Значит, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N.

3. Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M, не содержащая подгруппу N. Ясно, что $G = MN$. Если $M_G \neq 1$, то из единственности минимальной нормальной

подгруппы N следует, что $N \subseteq M_G$ и $G = MN = M$, противоречие. Поэтому $M_G = 1$ и G — примитивная группа с примитиватором M.

4. Остается применить [1, теорема 4.41], по которой либо $N = C_G(N)$ и $G = [N]M$, либо $C_G(N) = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 6. 1. *Если группа G мета-π-разложима, то $l_\pi(G) \leq 1$.*

2. *Если группа G мета-π-нильпотентна, то $l_\pi(G) \leq 2$.*

Доказательство. 1. В силу индукции $l_\pi(G/N) \leq 1$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы N. По [7, лемма 2] $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$ и $G = O_\pi(G)M$ для некоторой максимальной в G подгруппы M. Из мета-π-разложимости группы G следует, что M π-разложима. Но $O_\pi(M) = 1$, поэтому M — π'-подгруппа и $l_\pi(G) \leq 1$.

2. Поскольку мета-π-нильпотентность группы G по лемме 3 равносильна включению $G \in (\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_\pi)^2$, то ясно, что $l_\pi(G) \leq 2$.

Лемма доказана.

Лемма 7 [6, теорема 3]. *Пусть π — некоторое непустое множество простых чисел и G — D_π-группа. Если каждая максимальная подгруппа группы G π-разложима, а сама группа G не является π-разложимой, то G является группой Шмидта.*

Лемма 8. *Пусть H — максимальная подгруппа конечной группы G и D — пересечение всех максимальных подгрупп группы G, не сопряженных с подгруппой H. Тогда подгруппа D метанильпотентна.*

Доказательство. Ясно, что $D \cap H_G = \Phi(G)$ и D нормальна в G. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $D/\Phi(G)$ метанильпотентна по индукции, а по [2, следствие 4.2.1] подгруппа D метанильпотентна. Пусть $\Phi(G) = 1$ и N — минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в D. Тогда N не содержится в H и $G = HN$. Поэтому $D/N = \Phi(G/N)$ и D/N нильпотентна. Предположим, что N непримарна. Пусть P — силовская p-подгруппа из N для $p \in \pi(N)$. По лемме Фраттини $G = NN_G(P)$ и $N_G(P) \neq G$. Если $N_G(P) \subseteq K$, где K — максимальная в G подгруппа и $K \neq H^g$ для всех $g \in G$, то $G = NN_G(P) \subseteq K$, противоречие. Поэтому $N_G(P) \subseteq H^x$ для некоторого $x \in G$ и $P^{x^{-1}} \subseteq H \cap N$. Итак, для каждого простого числа $p \in \pi(N)$ некоторая силовская p-подгруппа из N содержится в H. Поэтому $N \subseteq H$, противоречие. Значит, N примарна, а подгруппа D метанильпотентна. Лемма доказана.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и G — группа с нильпотентной π-холловой подгруппой. Если в группе G кофактор каждой максимальной подгруппы π-разложим, то $G/F(G)$ π-разложима. В частности, группа G π-разрешима и $l^n_\pi(G) \leq 1$.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна и группа G — контрпример минимального порядка к теореме. Можно считать, что $\pi \subseteq \pi(G)$. Так как группа G не π-разложима, то $\varnothing \neq \pi \neq \pi(G)$. Заметим, что в силу [8, теорема III.5.8] группа G является D_π-группой. Если ядра всех максимальных подгрупп единичны, то каждая собственная в группе G подгруппа π-разложима. По лемме 7 группа G либо π-разложима, либо группа Шмидта; в частности, G — непростая группа. Пусть K — собственная нормальная в G подгруппа и M — максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу K. Тогда $K \subseteq M_G$, что противоречит предположению. Поэтому группа G непроста, и в ней существует максимальная подгруппа с неединичным ядром.

Пусть K — нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим фактор-группу G/K. Пусть M/K — максимальная подгруппа в G/K. По лемме 1 $(M/K)_{G/K} = M_G/K$, а по лемме 2 кофактор подгруппы M/K в G/K π-разложим. Следовательно, условия теоремы наследуют все фактор-группы группы G.

В силу леммы 3 π-разложимость группы $G/F(G)$ равносильна включению $G \in \mathfrak{N}(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{E}_{\pi'} \mathfrak{E}_\pi)$. Поскольку по лемме 4 произведение $\mathfrak{N}(\mathfrak{E}_\pi \mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{E}_{\pi'} \mathfrak{E}_\pi)$ — насыщенная формация, то по лемме 5 группа G примитивна и выполняются все утверждения этой леммы. В частности, $\Phi(G) = 1$ и в группе G минимальная нормальная подгруппа N единственна.

Пусть H — максимальная подгруппа, не содержащая подгруппу N, она существует, поскольку $\Phi(G) = 1$. Ясно, что $G = HN$. Если $H_G \neq 1$, то $N \subseteq H_G$ и $G = HN = H$, противоречие. Это означает, что каждая максимальная в G подгруппа, не содержащая подгруппу N, имеет единичное ядро и, следовательно, π-разложима. Кроме того, фактор-группа $G/N \simeq H/H \cap N$ π-разложима. Если подгруппа N нильпотентна, то теорема справедлива. Поэтому в дальнейшем считаем, что подгруппа N не является нильпотентной, а так как N — минимальная нормальная подгруппа, то N будет неразрешимой подгруппой.

Предположим, что G/N является π'-группой, т. е. π-холлова подгруппа P из N является π-холловой в G. По обобщенной лемме Фраттини [2, лемма 4.3] имеем $G = N_G(P)N$, а так как нильпотентная подгруппа P не нормальна в G, то $N_G(P) \neq G$. Пусть H — максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P)$. Тогда H не содержит N, а значит, $H_G = 1$ и H π-разложима, т. е. $H = P \times K$, где K — нормальная π'-холлова подгруппа из H. Ясно, что $H = N_G(P)$ и $G = NK$. Если P_1 — произвольная нееденичная p-подгруппа из P для $p \in \pi$, то $K \subseteq N_G(P_1)$ и $G = NK \subseteq NN_G(P_1)$. Так как $N_G(P_1) \neq G$, то существует максимальная в G подгруппа T, содержащая подгруппу $N_G(P_1)$. Из равенства $G = NT$ следует, что T не содержит подгруппу N, поэтому подгруппа T π-разложима. Поскольку G — D_π-группа с нильпотентной π-холловой подгруппой, то подгруппа T_π нильпотентна и T p-разложима. Теперь и подгруппа $N_G(P_1)$ p-разложима. Итак, нормализатор каждой нееденичной p-подгруппы из N для $p \in \pi$ является p-разложимой группой. По [8, теорема IV.5.8] подгруппа N p-нильпотентна. Так как p — произвольное число из π, то подгруппа N π-нильпотентна. В частности, группа G π-разрешима и подгруппа N либо π-группа, либо π'-группа. Но N содержит нильпотентную π-холлову подгруппу группы G, поэтому N — π-группа и N содержится в $F(G)$, что противоречит неразрешимости подгруппы N.

Теперь рассмотрим случай, когда фактор-группа G/N не является π'-группой. Это означает, что существует $p \in \pi$, которое делит $|G\colon N|$. Тогда каждая не содержащая N максимальная в G подгруппа H будет π-разложимой pd-подгруппой: $H = H_\pi \times H_{\pi'}$. По [8, теорема III.5.8] существует π-холлова подгруппа G_π группы G, содержащая подгруппу H_π. Если $H_\pi \neq G_\pi$, то H_π — собственная подгруппа в $N_{G_\pi}(H_\pi)$, поэтому H_π нормальна G. Но H_π — нееденичная ненормальная в G подгруппа, поэтому $H_\pi = G_\pi$ — π-холлова подгруппа в G и $H = N_G(G_\pi)$. Таким образом, каждая не содержащая N максимальная в G подгруппа является нормализатором π-холловой подгруппы группы G. По [8, теорема III.5.8] в группе G π-холловы подгруппы сопряжены между собой, поэтому сопряжены и их нормализаторы. Значит, все не содержащие подгруппу N максимальные в G подгруппы сопряжены; отсюда N метанильпотентна по лемме 8. Так как N — минимальная нормальная в G подгруппа, то $N \subseteq F(G)$. В частности, группа G π-разрешима и $l_\pi(G) \leq 1$ по лемме 6. Так как у π-разрешимой группы с нильпотентной π-холловой подгруппой значения $l_\pi(G)$ и $l_\pi^n(G)$ совпадают (см. [7]), то $l_\pi^n(G) \leq 1$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Зафиксируем простое число p. Если в группе G кофактор каждой максимальной подгруппы p-разложим, то $G/F(G)$ p-разложима. В частности, группа G p-разрешима и имеет единичную p-длину.*

Доказательство. При $\pi = \{p\}$ из доказанной теоремы вытекает, что $G/F(G)$ p-разложима. Поэтому группа G p-разрешима. Из леммы 6 вытекает, что $l_p(G) \leq 1$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Если в группе G кофакторы всех максимальных подгрупп нильпотентны, то G метанильпотентна.*

Доказательство. По условию кофактор любой максимальной в группе G подгруппы p-разложим для каждого $p \in \pi(G)$. Из предыдущего следствия получаем, что $G/F(G)$ p-разложима для всех $p \in \pi(G)$, поэтому $G/F(G)$ нильпотентна и G метанильпотентна. Следствие доказано.

Следствие 3 [5, теорема 1]. *Зафиксируем простое число p. Если в группе G каждая ненормальная максимальная подгруппа p-разложима, то G содержит нормальную силовскую подгруппу, фактор-группа по которой p-разложима.*

Доказательство. Можно считать, что силовская p-подгруппа P группы G не нормальна в G, а ее нормализатор содержится в ненормальной максимальной подгруппе H, которая по условию p-разложима: $H = N_G(P) = P \times K$. Из следствия 1 получаем, что $G/F(G)$ p-разложима, поэтому подгруппа $PF(G)$ нормальна в G. Если $F(G)$ содержится в H, то подгруппа $PF(G) = P \times (F(G))_{p'}$ нормальна в G, откуда и P становится нормальной в G, противоречие. Значит, $G = HF(G)$ и $G = HR_1$ для некоторой силовской r-подгруппы R_1 из $F(G)$. Теперь KR_1 — нормальная p'-холлова подгруппа группы G и $G = N_G(R)K$ для силовской r-подгруппы R из KR_1. Предположим, что R ненормальна в G. Тогда в G существует ненормальная максимальная подгруппа M, содержащая $N_G(R)$. Подгруппа M p-разложима по условию, поэтому $N_G(R)$ содержит нильпотентную $\{p, r\}$-холлову подгруппу $P^x \times R$ для некоторого $x \in G$. Но теперь $N_G(P^x) = N_G(P)^x = H^x$ содержит R, поэтому индекс подгруппы H в группе G не делится на r, что противоречит равенству $G = HR_1$. Значит, допущение неверно, $R \trianglelefteq G$ и $G/R \simeq H/H \cap R$ p-разложима. Следствие доказано.

Пример 2. В группе $G = A_4 \times S_3$ кофактор каждой максимальной подгруппы имеет простой порядок. Подгруппа $F(G)$ имеет порядок 12, и G не обладает нормальной силовской подгруппой. Поэтому в теореме 1 и в следствиях 1 и 2 нельзя заменить $F(G)$ на силовскую подгруппу.

Теорема 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел и G — группа с нильпотентной π-холловой подгруппой. При $2 \in \pi$ дополнительно положим, что G разрешима. Если в группе G кофактор каждой максимальной подгруппы π-нильпотентен, то $G/F(G)$ π-нильпотентна. В частности, группа G π-разрешима и $l_\pi^n(G) \leq 2$.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна и группа G — контрпример минимального порядка к теореме. Можно считать, что $\pi \subseteq \pi(G)$. Так как группа G не π-нильпотентна, то $\varnothing \neq \pi \neq \pi(G)$. Заметим, что в силу [8, теорема III.5.8] группа G является D_π-группой, поэтому каждая π-подгруппа в группе G нильпотентна. Зафиксируем $p \in \pi$. Предположим, что ядра всех максимальных подгрупп в G единичны. Тогда каждая собственная в G подгруппа π-нильпотентна, а значит, и p-нильпотента. По [8, теорема IV.5.4] группа G либо p-нильпотентна, либо бипримарна; в частности, G — непростая группа. Пусть K — собственная нормальная в G подгруппа и M — максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу K. Тогда $K \subseteq M_G$, что противоречит предположению. Поэтому в G существует максимальная подгруппа с неединичным ядром, так что группа G непроста.

Пусть K — нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим фактор-группу G/K. Пусть M/K — максимальная подгруппа в G/K. По лемме 1 $(M/K)_{G/K} = M_G/K$, а по лемме 2 кофактор подгруппы M/K в G/K π-нильпотентен. Таким образом, условия теоремы наследуют все фактор-группы группы G. Это позволяет воспользоваться индукцией по порядку группы.

В силу леммы 3 π-нильпотентность группы $G/F(G)$ равносильна включению $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_\pi$. Поскольку по лемме 4 произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{E}_{\pi'}\mathfrak{E}_\pi$ — насыщенная формация, то по лемме 5 группа G примитивна и выполняются все утверждения этой леммы. В частности, $\Phi(G) = 1$ и в группе G минимальная нормальная подгруппа N единственна. Пусть H — произвольная максимальная подгруппа, не содержащая подгруппу N. Ясно, что $G = HN$. Если $H_G \neq 1$, то $N \subseteq H_G$ и $G = HN = H$, противоречие. Это означает, что каждая максимальная в G подгруппа, не содержащая подгруппу N, имеет единичное ядро, а следовательно, π-нильпотентна. Кроме того, фактор-группа $G/N \simeq H/H \cap N$ π-нильпотентна. Если N — π'-группа, то из π-нильпотентности фактор-группы G/N следует π-нильпотентность самой группы G. Поэтому в дальнейшем считаем, что N является πd-подгруппой, т. е. $\pi \cap \pi(N) \neq \varnothing$.

Если $2 \in \pi$, то по условию группа G разрешима. Поэтому N примарна и N содержится в $F(G)$. В этом случае $G/F(G)$ π-нильпотентна.

Пусть $2 \notin \pi$. Зафиксируем простое число $p \in \pi \cap \pi(N)$. Пусть P — силовская p-подгруппа из N и $P_1 \in \{Z(P), J(P)\}$, где $Z(P)$ — центр подгруппы P, а $J(P)$ — подгруппа, определенная в [8, IV.6.1]. Обе подгруппы $Z(P)$ и $J(P)$ характеристические в P, они неединичны и не нормальны в группе G. Поэтому $N_G(P_1)$ — собственная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P)$. По лемме Фраттини $G = NN_G(P) \subseteq NN_G(P_1)$. Пусть H — максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $N_G(P_1)$. Тогда H не содержит N, а значит, $H_G = 1$ и H π-нильпотентна. Поскольку π-холлова подгруппа в H нильпотентна, то H p-нильпотентна. Поэтому подгруппа $N_N(P_1)$ p-нильпотентна. По [8, теорема IV.6.2] подгруппа N p-нильпотентна. Теперь N — минимальная нормальная в G подгруппа и N является p-нильпотентной pd-подгруппой. Это возможно только в случае, когда N является p-группой. Но в этом случае N содержится в $F(G)$.

Итак, в любом случае $G/F(G)$ π-нильпотентна. Из леммы 6 следует, что $l_\pi(G) \leq 2$. Так как у π-разрешимой группы с нильпотентной π-холловой подгруппой значения $l_\pi(G)$ и $l_\pi^n(G)$ совпадают (см. [7]), то $l_\pi^n(G) \leq 2$. Теорема 2 доказана.

При $\pi = \{p\}$ из теоремы 2 получаем два следствия.

Следствие 4. *Пусть G — группа и p — простое число. При $p = 2$ дополнительно предположим, что группа G разрешима. Если в группе G кофактор каждой максимальной подгруппы p-нильпотентен, то $G/F(G)$ p-нильпотентна. В частности, группа G p-разрешима и $l_p(G) \leq 2$.*

Следствие 5 [9, теорема 3]. *Если p — нечетное простое число и в группе кофактор каждой максимальной подгруппы p-нильпотентен, то эта группа p-разрешима.*

Пример 3. При $p = 2$ аналог этого результата неверен. Поскольку сверхразрешимые группы 2-нильпотентны и в неразрешимой группе $PGL(2, p)$ при $p \equiv \pm 1 \pmod 8$ кофактор каждой максимальной подгруппы сверхразрешим [4, пример 1], то эта группа служит примером неразрешимой группы с 2-нильпотентными кофакторами максимальных подгрупп.

Следующие два примера показывают, что оценка p-длины в теореме 2 и в следствии 4 точна при любом p.

Пример 4. В группе S_4 кофакторы максимальных подгрупп 2-нильпотентны и $l_2(S_4) = 2$.

Пример 5. Пусть p и q —произвольные простые числа и a — показатель числа p по модулю q. В группе $GL(a, p)$ существует элемент β порядка q. Полупрямое произведение $[E_{p^a}]\langle\beta\rangle$ с нормальной элементарной абелевой p-подгруппой E_{p^a} будет ненильпотентной группой, в которой все собственные подгруппы примарны. Пусть Q — группа порядка q. В сплетении G групп Q и $[E_{p^a}]\langle\beta\rangle$ кофакторы всех максимальных подгрупп q-нильпотентны и $l_q(G) = 2$.

Пример 6. Для простого числа $p > 3$ простая группа $PSL(2, 3^p)$ обладает автоморфизмом α порядка p, все собственные подгруппы в $PSL(2, 3^p)$ разрешимы и порядок группы $PSL(2, 3^p)$ не делится на p. Полупрямое произведение $G = [PSL(2, 3^p)]\langle\alpha\rangle$ будет p-разрешимой группой, у которой кофактор каждой максимальной подгруппы является разрешимой p-нильпотентной подгруппой. Для $p = 3$ аналогичный пример строится с простой группой $Sz(2^3)$

и автоморфизмом α порядка 3. Таким образом, группа с разрешимыми p-нильпотентными кофакторами максимальных подгрупп не обязана быть разрешимой.

П р и м е р 7. При простом $p > 3$ в группе $PSL(2, p)$ каждая собственная подгруппа p-замкнута. В группе $SL(2, 8)$ каждая собственная подгруппа 3-замкнута. Поэтому аналоги теоремы 2 с заменой π-нильпотентности на π-замкнутость не имеют места.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Монахов В. С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйш. шк., 2006. 207 с.
2. **Шеметков Л. А.** Формации конечных групп. Москва: Наука. 1978. 272 с.
3. **Беркович Я. Г.** Конечные группы с большими ядрами максимальных подгрупп // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 2. С. 243–248.
4. **Евтухова С. М., Монахов В. С.** О конечных группах со сверхразрешимыми кофакторами подгрупп // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2008. № 4. С. 53–57.
5. **Русаков С. А.** О группах с максимальными подгруппами данного вида // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1968. № 1. С. 49–53.
6. **Ведерников В. А.** О π-свойствах конечных групп // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 13–19.
7. **Монахов В. С., Шпырко О. А.** О нильпотентной π-длине конечной π-разрешимой группы // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, вып. 3. С. 145–152.
8. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
9. **Dixon J., Poland J., Rhemtula A.** A generalization of Hamiltonian and nilpotent groups // Math. Z. 1969. Vol. 112. P. 335–339.

Лемешев Илья Валерьевич
аспирант
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: limity5@gmail.com

Поступила 15.02.2011

Монахов Виктор Степанович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: Victor.Monakhov@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 519.17

О ГРАФАХ, В КОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН ИЗОМОРФНЫ ГРАФУ ХИГМЕНА — СИМСА[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Граф Хигмена — Симса — это единственный сильно регулярный граф с параметрами $(100, 22, 0, 6)$. В работе классифицированы вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хигмена — Симса. Данный результат продолжает изучение вполне регулярных локально $\mathcal{F}$-графов, где $\mathcal{F}$ — класс сильно регулярных графов без треугольников.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, граф Хигмена — Симса, локально $\mathcal{F}$-граф.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. On graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Higman–Sims graph.

The Higman–Sims graph is the unique strongly regular graph with parameters $(100, 22, 0, 6)$. In this paper, amply regular graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Higman–Sims graph are classified. This result continues the investigation of amply regular locally $\mathcal{F}$-graphs, where $\mathcal{F}$ is the class of strongly regular graphs without triangles.

Keywords: strongly regular graph, Higman–Sims graph, locally $\mathcal{F}$-graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Для подграфа Δ пусть $X_i(\Delta)$ — множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1, \ldots, m_n$. Если $m_1 = \ldots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m \geq 2$, то граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой.*

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathcal{F}$-графом*, если $[a]$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ. Если при этом класс $\mathcal{F}$ состоит из графов, изоморфных некоторому графу Δ, то граф Γ назовем *локально Δ-графом.*

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00019), программы отделения математических наук РАН (проект 09-Т-1-1004) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-С-1-1007) и с НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009).

Пусть сильно регулярный граф Γ имеет параметры $(v,k,0,\mu)$. Если Γ — граф в половинном случае, то $k=2,\mu=1$ и Γ — пятиугольник. Если же Γ не является пятиугольником, то $\mu^2+4(k-\mu)=n^2$ для некоторого натурального числа n. Поэтому $n=\mu+2r, k=(r+1)\mu+r^2$ и Γ имеет собственные значения $k,r,-(\mu+r)$, причем кратность r равна $(\mu+r-1)k(k+\mu+r)/(\mu^2+2r\mu)$, в частности, μ делит $r^2(r^2-1)$ и $\mu+2r$ делит $r^2(r+1)(r+2)(r+3)$.

Так как $\mu+2r$ делит $\mu^2(\mu-2)(\mu-4)(\mu-6)$, то для любого $0<\mu<k$, отличного от 2,4 и 6, имеется лишь конечное число сильно регулярных графов без треугольников с данным μ.

Сильно регулярные графы без треугольников обычно разбивают на 4 семейства:

(I) несвязные графы (параметр μ равен 0), а именно коклики и объединения изолированных ребер;

(II) полные двудольные графы (параметр μ равен k и $v=2k$);

(III) графы Мура (параметр μ равен 1);

(IV) графы с $1<\mu<k$.

Если регулярный граф степени k и диаметра d имеет v вершин, то выполняется неравенство $v\le 1+k+k(k-1)+\ldots+k(k-1)^{d-1}$. Графы, для которых достигается равенство в этой оценке, называются графами Мура. Простейший пример графа Мура представляет $(2d+1)$-угольник. Дамерелл [1] доказал, что граф Мура степени $k>2$ имеет диаметр 2, тем самым он является сильно регулярным с параметрами $(k^2+1,k,0,1)$, где $k=r^2+r+1$. По условию целочисленности $2r+1$ делит $(r+2)(r+3)$ и $2r+1$ делит 15. Отсюда $r=1,2$ или 7, а $k=3,7$ или 57. Для $k=3$ и 7 существуют единственные графы Мура — это граф Петерсена и граф Хофмана — Синглтона. Существование графа Мура степени 57 неизвестно, однако Ашбахер [2] доказал, что этот граф не может быть графом ранга 3. Поэтому сильно регулярный граф с параметрами $(3250,57,0,1)$ называют графом Ашбахера.

Известно существование точно четырех графов из класса (IV). Это граф Клебша с параметрами $(16,5,0,2)$, граф Гевиртца с параметрами $(56,10,0,2)$, граф Хигмена — Симса с параметрами $(100,22,0,6)$ и граф Матье с параметрами $(77,16,0,4)$.

В [3] классифицированы вполне регулярные графы Γ, в которых для любой вершины w подграф $[w]$ является сильно регулярным графом с собственным значением 1. В данной работе продолжено изучение вполне регулярных локально $\mathcal{F}$-графов, где $\mathcal{F}$ — класс сильно регулярных графов без треугольников со вторым собственным значением 2.

Предложение. *Пусть Γ — сильно регулярный граф без треугольников со вторым собственным значением 2. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ — *граф Хофмана — Синглтона*;

(2) Γ — *граф Гевиртца*;

(3) Γ — *граф Хигмена — Симса*;

(4) Γ — *граф Матье.*

Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона или графу Гевиртца, классифицированы в [4] и [5] соответственно.

Теорема. *Пусть Γ — связный вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хигмена — Симса. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *диаметр Γ равен 2 и Γ имеет параметры* $(486,100,22,20)$;

(2) *диаметр Γ равен 3, $\mu=25$, $k_3=2$, $v=411$ и Γ не является антиподальным графом, или $\mu=28$ и либо*

(*i*) *$k_3=2$ и если Γ является антиподальным графом, то антиподальное частное графа Γ — сильно регулярный граф с параметрами* $(126,100,78,84)$;

(*ii*) *$k_3=5$ и $v=381$.*

1. Предварительные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты и доказано предложение.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* $r, s,\ s < 0$*. Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \le d - \frac{w(k-d)}{v-w} \le r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение хорошо известно (см., например, [6, §2]).

Лемма 1.2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ)*. Тогда либо* $k = 2\mu,\ \lambda = \mu - 1$ *(так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения* $n - m,\ -m$ *графа* Γ *— целые числа, где* $n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)$*,* $n - \lambda + \mu = 2m$ *и кратность* $n - m$ *равна* $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$*. Далее, если* m *— целое число, большее* 1*, то* $m-1$ *делит* $k - \lambda - 1$ *и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \frac{k-\lambda-1}{m-1}, \quad n = m - 1 + \frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это лемма 3.1 из [7].

Лемма 1.3. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ)*,* Δ *— индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1, \ldots, d_N$*. Тогда*

$$(v-N) - (kN - 2M) + \left(\lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}\right) = x_0 + \sum_{i=3}^{N}\binom{i-1}{2}x_i,$$

где $x_i = |X_i(\Delta)|$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число троек вида $(a, \{b, c\})$, где $a \in \Gamma - \Delta, b, c \in \Delta \cap [a]$, получим равенства:

$$v - N = \sum x_i,$$

$$kN - 2M = \sum i x_i$$

и

$$\lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2} = \sum \binom{i}{2} x_i.$$

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое.

Лемма 1.4. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(100, 22, 0, 6)$*,* Δ *является регулярным подграфом из* Γ *степени* 6 *на* n *вершинах,* $X_i = X_i(\Delta)$*,* $x_i = |X_i|$*. Если* $x_0 > 0$*, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $|\Delta| = 22$*, и* $x_0 = 1, x_4 = 55, x_6 = 22$*;*

(2) $|\Delta| = 23$*, и либо* $x_0 = 1, x_3 = 10, x_4 = 21, x_5 = 24, x_6 = 13, x_7 = 8$*, либо* $x_0 = 1$*,* $x_3 = 11, x_4 = 18, x_5 = 26, x_6 = 15, x_7 = 5, x_8 = 1$*;*

(3) $|\Delta| = 24$*, и либо* $x_0 = 1$*, либо* $x_0 = 2$ *и* X_0 *является кокликой;*

(4) $|\Delta| = 25$*,* $x_0 = 2$ *и* X_0 *является кокликой, далее, либо* $x_3 = 8, x_4 = 10, x_5 = 20$*,* $x_6 = 17, x_7 = 12, x_8 = 4, x_9 = 2$*, либо* $x_3 = 10, x_4 = 5, x_5 = 22, x_6 = 20, x_7 = 10, x_8 = 5, x_{10} = 1$*;*

(5) $|\Delta| = 26$, *$x_0 \in \{1,2,3\}$ и X_0 является кокликой;*

(6) $|\Delta| = 28$, *и либо $x_0 = 2, x_4 = 28, x_8 = 42$ и X_0 является кликой, либо $x_0 \in \{1,2,3,4\}$, X_0 является кокликой и*

(*i*) $x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 7, x_4 = 3, x_5 = 6, x_6 = 10, x_7 = 23, x_8 = 6, x_9 = 11, x_{10} = 1$, *или*

(*ii*) $x_0 = 1, x_2 = 8, x_4 = 6, x_6 = 28, x_8 = 25, x_{10} = 4$, *или*

(*iii*) $x_0 = 2, x_2 = 6, x_4 = 5, x_6 = 32, x_8 = 24, x_{10} = 2, x_{12} = 1$, *или*

(*iv*) $x_0 = 3, x_2 = 3, x_4 = 6, x_5 = 6, x_6 = 19, x_7 = 20, x_8 = 6, x_9 = 6, x_{10} = 2, x_{12} = 1$, *или*

(*v*) $x_0 = 4, x_4 = 8, x_6 = 40, x_8 = 12, x_{10} = 8$, *или*

(*vi*) $x_0 = 4, x_4 = 9, x_6 = 36, x_8 = 18, x_{10} = 4, x_{12} = 1$, *или*

(*vii*) $x_0 = 4, x_4 = 10, x_6 = 32, x_8 = 24, x_{12} = 2$;

(7) $|\Delta| = 30$ *и либо* $x_0 = 3, x_4 = 15, x_6 = 10, x_8 = 30, x_{10} = 12$ *и X_0 — объединение изолированной вершины и ребра, либо* $x_0 = 5, x_6 = 30, x_8 = 30, x_{12} = 5$ *и X_0 является кокликой;*

(8) $|\Delta| = 32$ *и либо* $x_0 = 4, x_4 = 4, x_6 = 16, x_8 = 24, x_{10} = 16, x_{12} = 4$ *и X_0 — объединение двух изолированных вершин и ребра, либо* $x_0 = 4, x_4 = 8, x_8 = 48, x_{12} = 8$ *и X_0 является кокликой, либо* $x_0 = 6, x_8 = 60, x_{16} = 2$ *и X_0 является кокликой;*

(9) $|\Delta| = 36$, $x_0 = 4, x_8 = 36, x_{12} = 24$ *и X_0 — объединение двух изолированных ребер;*

(10) $|\Delta| = 40$, $x_0 = 3, x_{10} = 32, x_{12} = 20, x_{16} = 5$ *и X_0 является 2-путем;*

(11) $|\Delta| = 42$, *и* $x_0 = 1, x_6 = 7, x_{12} = 35, x_{14} = 15$.

При этом число 28-вершинных подграфов Δ с $x_0 \geq 3$ равно $8 \cdot 28$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Компьютерные вычисления в GAP.

Лемма 1.5. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(100, 22, 0, 6)$, Δ является индуцированным n-угольником из Γ, $X_0 = X_0(\Delta)$, $x_i = |X_i(\Delta)|$, Ω — объединение изолированных n-угольников из X_0, $y_i = |X_i(\Delta \cup \Omega)|$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) $n = 4$, *X_0 — объединение шести изолированных четырехугольников,* $x_0 = 24, x_1 = 64, x_2 = 8$; $y_7 = 64, y_{14} = 8$;

(2) $n = 5$, *X_0 — объединение четырех изолированных пятиугольников,* $x_0 = 20, x_1 = 50, x_2 = 25$; $y_5 = 50, y_{10} = 25$;

(3) $n = 6$, *X_0 — объединение трех изолированных шестиугольников,* $x_0 = 18, x_1 = 36, x_2 = 36, x_3 = 4$; $y_4 = 36, y_8 = 36, y_{12} = 4$;

(4) $n = 6$, *X_0 — объединение двух изолированных шестиугольников, 4-лапы и вершины,* $x_0 = 18, x_1 = 36, x_2 = 36, x_3 = 4$; $y_0 = 6, y_3 = 36, y_6 = 36, y_9 = 4$;

(5) $n = 7$, *X_0 — объединение двух изолированных семиугольников и ребра* $x_0 = 16, x_1 = 28, x_2 = 35, x_3 = 14$; $y_0 = 2, y_3 = 28, y_6 = 35, y_9 = 14$;

(6) $n = 8$, *X_0 — объединение трех изолированных подграфов на $6, 6, 3$ вершинах соответственно,* $x_0 = 15, x_1 = 20, x_2 = 34, x_3 = 20, x_4 = 3$;

(7) $n = 8$, *X_0 — объединение изолированного восьмиугольника и дерева на 6 вершинах,* $x_0 = 14, x_1 = 24, x_2 = 28, x_3 = 24, x_4 = 2$; $y_0 = 6, y_2 = 24, y_4 = 28, y_6 = 24, y_8 = 2$;

(8) $n = 8$, *X_0 — объединение изолированного восьмиугольника и трех изолированных подграфов на $6, 1, 1$ вершинах соответственно,* $x_0 = 16, x_1 = 16, x_2 = 40, x_3 = 16, x_4 = 4$; $y_0 = 8, y_2 = 16, y_4 = 40, y_6 = 16, y_8 = 4$;

(9) $n = 9$, *X_0 — объединение изолированного девятиугольника и дерева на 4 вершинах,* $x_0 = 13, x_1 = 18, x_2 = 27, x_3 = 24, x_4 = 9$; $y_0 = 4, y_2 = 18, y_4 = 27, y_6 = 24, y_8 = 9$;

(10) $n = 10$, *X_0 — объединение двух изолированных подграфов на $7, 5$ вершинах соответственно,* $x_0 = 12, x_1 = 14, x_2 = 24, x_3 = 24, x_4 = 14, x_5 = 2$;

(11) $n = 10$, *X_0 — десятиугольник,* $x_0 = 10, x_1 = 20, x_2 = 20, x_3 = 20, x_4 = 20$; $y_2 = 20, y_4 = 20, y_6 = 20, y_8 = 20$;

(12) $n = 10$, *X_0 — объединение изолированного десятиугольника и дерева на 3 вершинах,* $x_0 = 13, x_1 = 10, x_2 = 30, x_3 = 20, x_4 = 15, x_5 = 2$; $y_0 = 3, y_2 = 10, y_4 = 30, y_6 = 20, y_8 = 15, y_{10} = 2$;

(13) $n=10$, *X_0 — объединение десятиугольника и двух изолированных вершин,* $x_0=12, x_1=15, x_2=20, x_3=30, x_4=10, x_5=3$; $y_0=2, y_2=15, y_4=20, y_6=30, y_8=10, y_{10}=3$;

(14) $n=12$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=10$, $x_1=8, x_2=22, x_3=16, x_4=22, x_5=8, x_6=2$;

(15) $n=12$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=9$, $x_1=12, x_2=16, x_3=20, x_4=21, x_5=8, x_6=2$;

(16) $n=12$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=10, x_1=9, x_2=18, x_3=22, x_4=18, x_5=9, x_6=2$;

(17) $n=12$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=9, x_1=12, x_2=15, x_3=24, x_4=15, x_5=12, x_6=1$;

(18) $n=12$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=11, x_1=6, x_2=21, x_3=20, x_4=21, x_5=6, x_6=3$;

(19) $n=13$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=8, x_1=10, x_2=14, x_3=20, x_4=18, x_5=12, x_6=5$;

(20) $n=16$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=4, x_1=8, x_2=10, x_3=16, x_4=13, x_5=12, x_6=16, x_7=4, x_8=1$;

(21) $n=16$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=5, x_1=8, x_2=6, x_3=16, x_4=18, x_5=16, x_6=6, x_7=8, x_8=1$;

(22) $n=16$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=6, x_1=4, x_2=12, x_3=12, x_4=20, x_5=12, x_6=12, x_7=4, x_8=2$;

(23) $n=16$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=5, x_1=6, x_2=12, x_3=12, x_4=15, x_5=18, x_6=10, x_7=4, x_8=2$;

(24) $n=18$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=2, x_1=6, x_2=9, x_3=13, x_4=12, x_5=12, x_6=13, x_7=9, x_8=6$;

(25) $n=18$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=2, x_1=6, x_2=12, x_3=6, x_4=15, x_5=12, x_6=18, x_7=6, x_8=3, x_9=2$;

(26) $n=18$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=3, x_1=6, x_2=6, x_3=13, x_4=12, x_5=18, x_6=10, x_7=9, x_8=3, x_9=2$;

(27) $n=18$, *X_0 — объединение изолированных деревьев,* $x_0=4, x_1=3, x_2=9, x_3=10, x_4=18, x_5=12, x_6=13, x_7=6, x_8=6, x_9=1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Компьютерные вычисления в GAP.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения. Пусть Γ является сильно регулярным графом с собственным значением 2 и параметрами $(v,k,0,\mu)$. Если Γ — граф в половинном случае, то он имеет параметры $(5,2,0,1)$, и его второе собственное значение не равно $+2$. Значит, $n^2=\mu^2+4(k-\mu)=(\mu+2r)^2$, поэтому $k=r\mu+\mu+r^2$ и Γ имеет собственные значения $r,-(\mu+r)$. В случае $r=2$ имеем $n=\mu+4$, $k=3\mu+4$ и кратность собственного значения 2 равна $(\mu+1)(3\mu+4)(4\mu+6)/(\mu^2+4\mu)$. Отсюда μ делит 24 и $\mu+4$ делит $24\cdot 10$, поэтому $\mu\in\{1,2,4,6,8,12\}$. Но в случае $\mu=8$ имеем $k=28$ и μ не делит $k(k-1)$, противоречие. В случаях $\mu\in\{1,2,4,6\}$ граф Γ является графом Хофмана — Синглтона, графом Гевиртца, второй окрестностью вершины в графе Хигмена — Симса и графом Хигмена — Симса соответственно. В случае $\mu=12$ граф Γ имеет параметры $(171,40,0,12)$, собственные значения 2 и -14, причем кратность 2 равна $13\cdot 40\cdot 54/(16\cdot 12)$, противоречие. Предложение доказано.

2. Редукция к случаю $\mu = 28$

В этом разделе Г — вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хигмена — Симса.

Лемма 2.1. *Если диаметр* Γ *равен* 2, *то* Γ *имеет параметры* $(486, 100, 22, 20)$.

Доказательство. Пусть Γ — сильно регулярный граф с собственным значением $-m$, и окрестность любой вершины в Γ имеет параметры $(100, 22, 0, 6)$.

По лемме 1.2 число $m-1$ делит 77, $n = m-1+77/(m-1)$ и $\mu = 24+(m-1)-77/(m-1)$.

Если $m-1 = 11$, то $\mu = 28, n = 18$, Γ имеет собственные значения $6, -12$ и кратность 6 равна $11 \cdot 100 \cdot 112/(18 \cdot 28)$, противоречие.

Если $m-1 = 7$, то $\mu = 20, n = 18$, Γ имеет собственные значения $10, -8$ и кратность 10 равна $7 \cdot 100 \cdot 108/(18 \cdot 20) = 210$. Итак, если диаметр Γ равен 2, то Γ имеет параметры $(486, 100, 22, 20)$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если диаметр* d *графа* Γ *больше* 2, *то* $d = 3$ *и* $\mu \in \{22, 25, 28\}$.

Доказательство. Пусть диаметр Γ больше 2. Тогда μ делит $100 \cdot 77$ и ввиду леммы 1.4 имеем $\mu \in \{22, 25, 28\}$.

Пусть Γ имеет диаметр, больший 3, и u, w, x, y, z — геодезический 4-путь в Γ. Положим $X = [u] \cap [x]$, $Y = [x] \cap [z]$. Тогда X и Y — регулярные графы степени 6. Далее, $[x]$ — сильно регулярный граф со вторым собственным значением $+2$, и собственные значения подграфа $X \cup Y$ переплетают собственные значения графа $[x]$. Противоречие с тем, что X и Y имеют собственное значение 6. Лемма доказана.

Пусть до конца раздела Γ — вполне регулярный граф диаметра 3, в котором окрестности вершин изоморфны сильно регулярному графу Δ с параметрами $(100, 22, 0, 6)$. Зафиксируем геодезический путь u, w, y, z и положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Очевидно, что значения k_i не зависят от выбора вершины u. Пусть $\Sigma = [u] \cap [y]$, X_i — множество вершин из $[y] - \Sigma$, смежных точно с i вершинами из Σ, $x_i = |X_i|$, $\Phi = [u] \cap \Gamma_2(y)$ и $\Psi = [y] \cap \Gamma_2(u)$. По лемме 2.2 имеем $\mu \in \{22, 25, 28\}$.

Лемма 2.3. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* a, b, c *является* 3*-кокликой из* Γ *и* $e \in [a] \cap [b] \cap [c]$, *то степень* e *в графе* $[a] \cap [b] \cap [c]$ *равна* 2 *и* $4 \le |[a] \cap [b] \cap [c]| \le 3\mu/5$;

(2) *если* a, b *— смежные вершины из* Γ, *то пара* $([a] \cap [b], [b] - a^{\perp})$ *является* 3-$(22, 6, 1)$-*схемой.*

Доказательство. Пусть a, b, c является 3-кокликой из Γ и $e \in [a] \cap [b] \cap [c]$. Так как любая 3-коклика из графа Хигмена — Симса попадает в окрестности точно двух вершин, то степень e в графе $[a] \cap [b] \cap [c]$ равна 2. Далее, число ребер между $[a] \cap [b] \cap [c]$ и $([a] \cap [b]) - [c]$ равно $4|[a] \cap [b] \cap [c]|$. Так как каждая вершина из $([a] \cap [b]) - [c]$ смежна не более чем с 6 вершинами из $[a] \cap [b] \cap [c]$, то $|[a] \cap [b] \cap [c]| \le 3\mu/5$. Утверждение (1) доказано.

Пусть a, b — смежные вершины из Γ и $e \in [b] - a^{\perp}$. Тогда $|[a] \cap [b]| = 22$. Так как степень вершины b в графе $[a] \cap [e]$ равна 6, то $|[a] \cap [b] \cap [e]| = 6$. Наконец, для любых трех вершин $c_1, c_2, c_3 \in [a] \cap [b]$ степени вершин a, b в графе $[c_1] \cap [c_2] \cap [c_3]$ равны 2. Поэтому $[c_1] \cap [c_2] \cap [c_3]$ содержит единственную вершину из $[b] - a^{\perp}$. Утверждение (2), а вместе с ним лемма доказаны.

Лемма 2.4. *Параметр* μ *не равен* 22.

Доказательство. Пусть $\mu = 22$. Тогда $k_2 = 350$. Ввиду леммы 1.4 имеем $b_2(u, y) \le 1$ для любых двух вершин u, y, находящихся на расстоянии 2. Отсюда $c_3(u, z) = 100$, иначе для $z' \in \Gamma_3(u) \cap [z]$ вершина z имеет степень 6 в графе $[y] \cap [z']$, что невозможно.

Теперь расстояние в Γ между любыми двумя вершинами из $\Gamma_3(u)$ равно 3 и $k_3 \le 3$. Так как $vk\lambda$ делится на 3, то $k_3 = 2$. Поэтому антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(151, 100, 66, 66)$, противоречие с тем, что $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 136$ не является квадратом. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Если $\mu = 25$, то $k_3 = 2$ и Γ не является антиподальным графом.*

Доказательство. Пусть $\mu = 25$. Тогда $k_2 = 308$. Ввиду леммы 1.4 подграф X_0 является 2-кокликой, поэтому $b_2(u,y) \le 2$ для любых двух вершин u, y, находящихся на расстоянии 2. Отсюда $c_3(u,z) = 100$, иначе для $z' \in \Gamma_3(u) \cap [z]$ вершина z имеет степень 6 в графе $[y] \cap [z']$, что невозможно.

Число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ равно $100k_3$, но не больше $308 \cdot 2$, поэтому $k_3 \le 6$. Так как $vk\lambda$ делится на 3, то $k_3 \in \{2, 5\}$.

Пусть S_i — множество вершин из $\Gamma_2(u)$, смежных точно с i вершинами из $\Gamma_3(u)$, $s_i = |S_i|$. Тогда $s_0 + s_1 + s_2 = 308$, $s_1 + 2s_2 = 100k_3$ и $s_2/25$ — это число пар вершин в $\Gamma_3(u)$, находящихся на расстоянии 2 в Γ.

Если $k_3 = 2$, то либо $s_2 = 0$, $s_1 = 200$ и $s_0 = 108$, либо $s_2 = 25$, $s_1 = 150$ и $s_0 = 133$. Если второй случай не встречается, то антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(137, 100, 72, 75)$, противоречие с тем, что $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 136$ не является квадратом.

Пусть $k_3 = 5$. Тогда $s_1 = 500 - 2s_2$, $s_0 = s_2 - 192$ и $s_2 \in \{200, 225, 250\}$. Положим $\Gamma_3(u) = \{z_1, \ldots, z_5\}$. Пусть вершина $e \in S_0$ смежна с γ_i вершинами из S_i. Тогда $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = k - \mu = 75$.

Если $s_2 = 250$, то $s_0 = 58$ и $s_1 = 0$. Так как $k_3(k_3 - 1) < s_0$, то некоторая вершина $e \in S_0$ находится на расстоянии 2 от $z_1, z_2, \ldots, z_5$ и для e верно равенство $\gamma_1 + 2\gamma_2 = k_3\mu = 125$. Отсюда получаем, что $s_1 \ge \gamma_1 > 0$, противоречие.

Пусть $s_2 = 225$. Тогда $s_0 = 33$ и $s_1 = 50$. Без ограничения общности, $d(z_1, z_2) = 3$ и $|[z_1] \cap S_1| = |[z_2] \cap S_1| = 25$. В этом случае S_0 содержит вершину e, находящуюся на расстоянии 2 от $\{z_3, z_4, z_5\}$ и число 2-путей с началом e и концом в $\{z_3, z_4, z_5\}$ равно 75. Противоречие с тем, что $[z_3] \cup [z_4] \cup [z_5]$ не пересекает S_1.

Пусть $s_2 = 200$. Тогда $s_0 = 8$ и $s_1 = 100$. Допустим, что $d(z_1, z_2) = d(z_1, z_3) = 3$. Тогда $|[z_1] \cap S_1| = 50$ и $|[z_2] \cap S_1| = |[z_3] \cap S_1| = 25$. Положим $\Gamma_3(z_1) = \{u, z_2, z_3, u_4, u_5\}$. Если $u_4 \in [z_4] \cap [z_5]$, то $[u_4]$ содержит 6 вершин из $[z_4] \cap [z_5]$, по 16 вершин из $[z_4] - [z_5]$, $[z_5] - [z_4]$ (попадающих в $[z_2] \cup [z_3]$), β вершин из $[z_2] \cap [z_3]$ и по $25 - \beta$ вершин из $[z_2] - [z_3]$, $[z_3] - [z_2]$ (из них $18 - 2\beta$ вершин попадают в S_1). Противоречие с тем, что $|[u] \cap S_0| = 17 + \beta$. Если же $u_4 \in S_0$, то $[u_4]$ содержит δ вершин из $[z_4] \cap [z_5]$, по $25 - \delta$ вершин из $[z_4] - [z_5]$, $[z_5] - [z_4]$ (попадающих в $[z_2] \cup [z_3]$), β вершин из $[z_2] \cap [z_3]$ и по $25 - \beta$ вершин из $[z_2] - [z_3]$, $[z_3] - [z_2]$ (из них $2\delta - 2\beta$ вершин попадают в S_1). Отсюда $|[u] \cap S_0| = 25 + \beta - \delta \le 7$ и $\delta \ge 18 + \beta$, противоречие с тем, что число ребер между $[u_4] \cap [z_4] \cap [z_5]$ и $[z_4] \cap [z_5] - [u_4]$ не меньше 72 и некоторая вершина из $[z_4] \cap [z_5] - [u_4]$ смежна с 11 вершинами из $[u_4] \cap [z_4] \cap [z_5]$.

Без ограничения общности, $d(z_1, z_2) = 3$ и $d(z_3, z_4) = 3$. Тогда $[z_5] \subset S_2$. Если вершина $e \in S_0$ находится на расстоянии 3 от по крайней мере двух вершин из $\{z_1, z_2, \ldots, z_5\}$, то $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 75$ и $\gamma_1 + 2\gamma_2 = 75$, поэтому $\gamma_0 = \gamma_2 \le 7$, $\gamma_1 \ge 61$ и $d(e, z_5) = 3$. Пусть, для определенности, $d(e, z_1) = 3$. Тогда $[e] \cap S_2$ содержится в $([z_2] \cap [z_3]) \cup ([z_2] \cap [z_4])$ и можно считать, что $|[e] \cap ([z_2] \cup [z_3])| \le 3$. Противоречие с тем, что $[e] \cap ([z_2] \cup [z_3])$ — регулярный граф степени 2.

Если вершина $e \in S_0$ находится на расстоянии 3 от единственной вершины z_i, то $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 75$ и $\gamma_1 + 2\gamma_2 = 100$, поэтому $\gamma_2 = 25 + \gamma_0$ и $\gamma_1 = 50 - 2\gamma_0$. В случае $i \ne 5$, скажем, $i = 1$, подграф $[e] \cap [z_5]$ содержит 25 вершин из S_2. Отсюда $\gamma_0 = 0$ или $\gamma_0 \ge 4$ и $[e] \cap S_2 - [z_5]$ содержится в $[z_2] \cap [z_3]$ либо в $[z_2] \cap [z_4]$.

Пусть $a \in [z_i] \cap [z_j]$. Тогда $[a]$ содержит 6 вершин из $[z_i] \cap [z_j]$, по 16 вершин из $[z_i] - [z_j]$, $[z_j] - [z_i]|$ и 35 вершин из $\Gamma_2(u) - ([z_i] \cup [z_j])$. Отсюда a находится на расстоянии 3 не более чем от одной вершины из $\{z_1, \ldots, z_5\}$. Допустим, что $a \in \Gamma_3(z_1)$ и, для определенности, $i = 3, j = 5$. Тогда $([a] \cap \Gamma_2(u)) - ([z_3] \cup [z_5])$ содержится в $[z_2] \cup [z_4]$. Далее, $[a]$ содержит m вершин из $[z_2] \cap ([z_3] - [z_5])$, n вершин из $[z_2] \cap ([z_5] - [z_3])$, l вершин из $[z_4] \cap ([z_5] - [z_3])$, p вершин из $[z_2] \cap [z_4]$, o вершин из S_0, $n + l = 25$ и $p + m = o - 10$, противоречие.

Пусть $b \in [z_i] \cap S_1$. Если $b \in \Gamma_3(z_1)$, то $i \in \{3, 4\}$. Без ограничения общности $b \in [z_3]$, подграф $[b]$ содержит l вершин из $[z_2] \cap [z_3]$, m вершин из $[z_3] \cap [z_5]$, l' вершин из $[z_2] \cap [z_4]$, m'

вершин из $[z_4]\cap[z_5]$, n вершин из $[z_2]\cap[z_5]$, o вершин из S_0, поэтому $m+m'+n\in\{0,25\}$. Если $d(b,z_4)=3$, то $l'=m'=0$, $m+n=25$ и $l+m+n=o-2$, противоречие. Если $d(b,z_5)=3$, то $m=m'=n=0$ и $l+l'=o-2$. Если $d(b,z_2)=d(b,z_4)=d(b,z_5)=2$, то снова $l+l'=o-2$. Если $l>0$, то $l\geq 3$, если же $l'>0$, то $l'\geq 4$, Поэтому одно из чисел l,l' равно 0. Если $l=0$, то $o\geq 6$, если же $l'=0$, то $o\geq 5$.

Напомним, что $\Gamma_3(z_1)$ содержит 2 пары вершин u,z_2 и x,x', с $d(u,z_2)=d(x,x')=3$. Как показано выше, $x,x'\in S_0\cup S_1$. В случае $x,x'\in S_1$ подграф $[x]\cap[x']\cap S_0$ содержит не менее двух вершин, противоречие.

В случае $x,x'\in S_0$ одна из вершин x,x' изолирована в S_0, а другая смежна не более чем с 6 вершинами из S_0. Противоречие с тем, что $[x]\cap[x']$ содержит не менее $50+44-75$ вершин из $S_1-[z_1]$,

Итак, можно считать, что $x\in S_0, x'\in S_1$. Так как $|[x']\cap S_0|\geq 5$, то вершина x изолирована в S_0. Противоречие с тем, что $[x]\cap[x']$ содержит не менее $50+42-75$ вершин из $S_1-[z_1]$, Лемма доказана.

3. Случай $\mu=28$

В этом разделе Γ — вполне регулярный граф диаметра 3 с $\mu=28$, в котором окрестности вершин изоморфны графу Δ с параметрами $(100,22,0,6)$. Зафиксируем геодезический путь u,w,y,z и положим $k_i=|\Gamma_i(u)|$. Пусть $\Sigma=[u]\cap[y]$, X_i — множество вершин из $[y]-\Sigma$, смежных точно с i вершинами из Σ, $x_i=|X_i|$, $\Phi=[u]\cap\Gamma_2(y)$ и $\Psi=[y]\cap\Gamma_2(u)$. Положим $\Gamma_3(u)=\{z_1,z_2,\dots,z_{k_3}\}$.

Лемма 3.1. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) X_0 *является подграфом из 4-коклики или ребром,* $k_2=275$*,* k_3-2 *делится на* 3; *если* $k_3=2$ *и* Γ *является антиподальным графом, то антиподальное частное графа* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(126,100,78,84)$;

(2) $k_3\leq 11$ *и* $\Gamma_3(u)$ *не содержит геодезических* 2*-путей и* 3*-клик*;

(3) *если* $\Gamma_3(u)$ *содержит ребро* $\{z_1,z_2\}$*, то для* $Z_0=X_0(\{z_1,z_2\})\cap\Gamma_2(u)$*,* $Z_i=X_1(\{z_1,z_2\})\cap[z_i]\cap\Gamma_2(u)$ *и* $Z_{12}=[z_1]\cap[z_2]$. *Имеем* $|Z_{12}|=22$*,* $|Z_1|=|Z_2|=77$*,* $|Z_0|=99$;

(4) *если* $k_3=11$*, то* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{100,77,4;1,28,100\}$.

Доказательство. Ввиду леммы 1.4 имеем $x_0\leq 4$, причем X_0 является подграфом из 4-коклики или ребром. Далее, $k_2=275$. Так как v делится на 3, то k_3-2 делится на 3.

Пусть $k_3=2$. Если Γ является антиподальным графом, то антиподальное частное графа Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(126,100,78,84)$ и собственными значениями $2,-8$. Утверждение (1) доказано.

Так как Φ содержит ребро $\{b,b'\}$, то $[b]\cup[b']$ содержит не менее 35 вершин из Ψ, поэтому число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $275\cdot 4$, но не меньше $35k_3$. Отсюда $k_3\leq 31$ и $|\Psi|\geq 70$. Повторив указанное рассуждение, убедимся, что $k_3\leq 11$.

Если $\Gamma_3(u)$ содержит геодезический 2-путь z_1,z_2,z_3, то ввиду утверждения (1) подграф $[z_1]\cap[z_3]$ содержит 6 вершин $e_1,\dots,e_6$ из $\Gamma_3(z_2)$. Аналогично $[z_1]\cap[z_3]$ содержит 6 вершин из $\Gamma_3(e_1)$, противоречие с тем, что $|\Gamma_3(u)|\leq 11$.

Итак, $\Gamma_3(u)$ — объединение изолированных клик. Пусть $\Gamma_3(u)$ содержит 3-клику $\{z_1,z_2,z_3\}$, $Z_{ij}=[z_i]\cap[z_j]\cap\Gamma_2(u)$, $Z_i=X_1(\{z_1,z_2,z_3\})\cap[z_i]\cap\Gamma_2(u)$ и $Z_0=X_0(\{z_1,z_2,z_3\})\cap\Gamma_2(u)$. Тогда $|Z_{ij}|=21$, $|Z_i|=56$ и $|Z_0|=44$. По лемме 2.3 для любых двух вершин $a,b\in[z_1]\cap[z_2]\cap\Gamma_2(u)$ подграф $[a]\cap[b]\cap[z_3]$ содержит единственную вершину из $[z_2]-z_1^{\perp}$, поэтому пара (Z_{12},Z_{23}) является симметричной 2-(21,5,1) схемой, т. е., проективной плоскостью порядка 4. Для вершины $a\in Z_{12}$ подграф $[a]$ содержит z_1,z_2, по 5 вершин из Z_{13},Z_{23}, по 16 вершин из Z_1,Z_2,Z_3 и 12 вершин из Z_0. Пусть $c\in Z_3$ и $[c]$ содержит β вершин из Z_{12}, γ вершин из $\Gamma_3(u)-\{z_1,z_2,z_3\}$. Тогда $[c]$ содержит z_3, по 6 вершин из Z_{13},Z_{23}, по $21-\beta$ вершин из Z_1,Z_2, 10 вершин из Z_3 и $7+\beta-\gamma$ вершин из Z_0. Для двух несмежных вершин $c, c' \in Z_3$ подграф $[c]\cap[c']$ содержит z_3, по 2 вершины из Z_{13}, Z_{23} и 2 вершины из Z_3. Таким образом, Z_3 — сильно регулярный подграф с параметрами $(56,10,0,2)$. Наконец, пара (Z_{12}, Z_2) является 2-(21,6,4) схемой.

Заметим, что $\Gamma_3(u)-\{z_1,z_2,z_3\}$ не содержит ребер, иначе для ребра $\{z_4,z_5\}$ подграф $[z_4]\cap[z_5]$ содержит 22 вершины из Z_0. В этом случае $z_4\in\Gamma_3(z_i)$ и $z_5\in\Gamma_3(z_j)$ для подходящих $i,j\in\{1,2,3\}$, противоречие с тем, что $[z_4]\cap[z_5]$ содержит не менее 42 вершин из Z_0.

Так как число ребер между $Z_{12}\cup Z_{13}\cup Z_{23}$ и Z_0 равно $63\cdot 12$, то некоторая вершина $e\in Z_0$ смежна по крайней мере с 18 вершинами из $Z_{12}\cup Z_{13}\cup Z_{23}$, попадающими в $X_4([u]\cap[e])$, противоречие с тем, что ввиду леммы 1.4 имеем $|X_4([u]\cap[e])\cap[e]|\le 10$. Утверждение (2) доказано.

Допустим, что $\Gamma_3(u)$ содержит ребро $\{z_1,z_2\}$. Положим $Z_0 = X_0(\{z_1,z_2\})\cap\Gamma_2(u)$, $Z_i = X_1(\{z_1,z_2\})\cap[z_i]\cap\Gamma_2(u)$ и $Z_{12}=[z_1]\cap[z_2]$. Тогда $|Z_{12}|=22$, $|Z_1|=|Z_2|=77$ и $|Z_0|=99$. Отсюда $\Gamma_3(u)$ содержит не более 5 ребер. Для вершины $a\in Z_{12}$ подграф $[a]$ содержит z_1,z_2, по 21 вершин из Z_1,Z_2 и 28 вершин из Z_0. Пусть $c\in Z_1$. Тогда $[c]$ содержит γ вершин из $\Gamma_3(u)$, 6 вершин из Z_{12}, 16 вершин из Z_1, 21 вершину из Z_2 и $29-\gamma$ вершин из Z_0. Утверждение (3) доказано.

Если $\Gamma_3(u)$ содержит $i>0$ ребер и $k_3=11$, то число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ равно $2i\cdot 99+100(11-2i)=1100-2i$, но не больше $22i\cdot 2+4(275-22i)=1100-44i$, поэтому $i=0$ и Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{100,77,4;1,28,100\}$. Утверждение (4), а вместе с ним лемма доказаны.

З а м е ч а н и е. В дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{100,77,4,1;1,28,100\}$ имеем $p^3_{33}<0$, поэтому такой граф не существует.

Лемма 3.2. *Пусть $\Gamma_3(u)$ содержит ребро $\{z_1,z_2\}$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *для любого $i>2$ по крайней мере одна из вершин z_1,z_2 не попадает в $\Gamma_3(z_i)$*;

(2) *если $\Gamma_3(u)$ содержит другое ребро $\{z_3,z_4\}$, то $\Gamma_3(u)-\{z_1,\dots,z_4\}$ является кокликой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Gamma_3(z_3)$ содержит ребро $\{z_1,z_2\}$, $Z_0=X_0(\{z_1,z_2\})\cap\Gamma_2(u)$, $Z_i=X_1(\{z_1,z_2\})\cap[z_i]\cap\Gamma_2(u)$ и $Z_{12}=[z_1]\cap[z_2]$. Тогда $[z_3]\cap\Gamma_2(u)$ содержится в Z_0, поэтому $[z_3]\cap\Gamma_2(u)=Z_0$ и $\Gamma_3(u)$ содержит ребро $\{z_3,z_4\}$. Противоречие с тем, что $[z_4]$ содержит по 28 вершин из Z_1,Z_2 и 43 вершины из Z_0. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\Gamma_3(u)$ содержит другое ребро $\{z_3,z_4\}$. Тогда $[z_3]\cap[z_4]$ содержит 22 вершины из Z_0, $[z_3]-[z_4]$ содержит по 28 вершин из Z_1, Z_2 и 21 вершину из Z_0. Если $\Gamma_3(u)$ содержит третье ребро $\{z_5,z_6\}$, то для $Z_0'=Z_0-(([z_3]\cap[z_4])\cup([z_5]\cap[z_6]))$ получим $|Z_0'|=55$. С другой стороны, $[z_7]$ и $[z_8]$ содержат 43 или 44 вершины из Z_0', противоречие с тем, что $[z_7]\cap[z_8]$ содержат не менее 31 вершины из Z_0'. Итак, $\Gamma_3(u)-\{z_1,\dots,z_4\}$ является кокликой. Утверждение (2), а вместе с ним лемма доказаны.

Лемма 3.3. *Верно неравенство $k_3\ne 8$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k_3=8$, T_i — множество вершин из $\Gamma_2(u)$, смежных точно с i вершинами из $\Gamma_3(u)$, $t_i=|T_i|$, и r — число пар вершин, находящихся на расстоянии 3 в $\Gamma_3(u)$.

Если $\Gamma_3(u)$ содержит два ребра $\{z_1,z_2\}$, то $\sum t_i=275$, $\sum it_i=796$, $\sum\binom{i}{2}t_i=772-28r$. Отсюда $t_0+t_3+3t_4=251-28r$, $t_2+3t_3+6t_4=772-28r$ и $t_1=3t_3+8t_4-748+56r$, поэтому $3t_3+9t_4=753-84r-3t_0$, $3t_3+8t_4=748-56r+t_1$ и $t_4=5-28r-3t_0-t_1$.

Если $\Gamma_3(u)$ содержит точно одно ребро $\{z_1,z_2\}$, то $\sum t_i=275$, $\sum it_i=798$, $\sum\binom{i}{2}t_i=778-28r$, где r — число пар вершин, находящихся на расстоянии 3 в $\Gamma_3(u)$. Отсюда $t_0+t_3+3t_4=255-28r$, $t_2+3t_3+6t_4=778-28r$ и $t_1=3t_3+8t_4-758+56r$, поэтому $3t_3+9t_4=765-84r-3t_0$, $3t_3+8t_4=758-56r+t_1$ и $t_4=7-28r-3t_0-t_1$.

Если $\Gamma_3(u)$ — коклика, то $\sum t_i = 275$, $\sum it_i = 800$, $\sum \binom{i}{2} t_i = 784 - 28r$, где r — число пар вершин, находящихся на расстоянии 3 в $\Gamma_3(u)$. Отсюда $t_0 + t_3 + 3t_4 = 259 - 28r$, $t_2 + 3t_3 + 6t_4 = 784 - 28r$ и $t_1 = 3t_3 + 8t_4 - 768 + 56r$, поэтому $3t_3 + 9t_4 = 777 - 84r - 3t_0$, $3t_3 + 8t_4 = 768 - 56r - t_1$ и $t_4 = 9 - 28r - 3t_0 - t_1$.

Итак, любые две вершины из $\Gamma_3(u)$ находятся на расстоянии 2 в Γ и $3t_0 + t_1 + t_4$ равно 5, если $\Gamma_3(u)$ содержит 2 ребра, равно 7, если $\Gamma_3(u)$ содержит одно ребро, и равно 9, если $\Gamma_3(u)$ — коклика.

Если $\Gamma_3(u)$ содержит ребро $\{z_1, z_2\}$, то $[z_1] \cap [z_2]$ содержится в T_2, число ребер между $\{z_3, \ldots, z_8\}$ и $[z_1] - z_2^{\perp}$ равно $6 \cdot 28 = 168$. Так как $77 \cdot 2 = 154$, то $[z_1] - z_2^{\perp}$ содержит не менее 14 вершин, смежных с 3 вершинами из $\{z_3, \ldots, z_8\}$, противоречие с тем, что $t_4 \le 7$.

Итак, $\Gamma_3(u)$ — коклика, $t_3 = 259 - t_0 - 3t_4$, $t_2 = 784 - 3t_3 - 6t_4 = 3t_0 + 3t_4 + 7$ и $t_1 = 9 - 3t_0 - t_4$.

Заметим, что для различных $i, j \in \{1, \ldots, 8\}$ имеем $\Gamma_3(z_i) \cap \Gamma_3(z_j) = \{u\}$. В противном случае для $y \in \Gamma_3(z_1) \cap \Gamma_3(z_2) - \{u\}$ подграф $[y]$ содержит ν вершин из $\Gamma_3(u)$, 28 вершин из $[u]$ и $72 - \nu$ вершин из $\Gamma_2(u) - ([z_1] \cup [z_2])$, причем $|\Gamma_2(u) - ([z_1] \cup [z_2])| = 103$. Теперь число ребер между $\Gamma_3(u)$ и $\Gamma_2(u) - ([z_1] \cup [z_2] \cup y^{\perp})$ не меньше $22\nu + 16(6 - \nu)$. Так как $3(30 + \nu) = 90 + 3\nu$, то $\Gamma_2(u) - ([z_1] \cup [z_2] \cup y^{\perp})$ содержит не менее $6 + 3\nu$ вершин из T_4. Отсюда $\nu = 0$, $T_0 = \{y\}$ и $\Gamma_2(u) - ([z_1] \cup [z_2] \cup y^{\perp})$ содержит ровно 6 вершин из T_4, поэтому $t_1 = 0, t_2 = 28$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Gamma_3(u)$ и $\Gamma_2(u) \cap [y]$ равно $6 \cdot 28 = 168$, но не меньше $28 \cdot 2 + 44 \cdot 3 = 188$.

Если $y \in T_4 \cap \Gamma_3(z_8)$, то число ребер между $\Gamma_3(u)$ и $\Gamma_2(u) - ([z_8] \cup y^{\perp})$ равно $3 \cdot 44 + 4 \cdot 50 = 332$, но не больше $4 \cdot 8 + 3 \cdot 98 = 326$, противоречие. Если $y \in T_3 \cap \Gamma_3(z_8)$, то число ребер между $\Gamma_3(u)$ и $\Gamma_2(u) - ([z_8] \cup y^{\perp})$ равно $4 \cdot 44 + 3 \cdot 50 = 326$, но не больше $4 \cdot 9 + 3 \cdot 96 = 324$, снова противоречие.

Так как $|\cup_i \Gamma_3(z_i) - \{u\}| = 56$, то $t_0 + t_1 + t_2 \ge 56$. С другой стороны, $t_0 + t_1 + t_2 = t_0 + (9 - 3t_0 - t_4) + (3t_0 + 3t_4 + 7)$ и $t_0 + 2t_4 \ge 40$, противоречие. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Damerell R.M.** On Moore graphs // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1973. Vol. 74. P. 227–236.
2. **Aschbacher M.** The nonexistence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57 // J. Algebra. 1971. Vol. 19, № 3. P. 538–540.
3. **Карданова М.Л., Махнев А.А.** О графах, в которых окрестности вершин являются графами, дополнительными к графу Зейделя // Тр. Междунар. алгебр. конф., посвященной 80-летию А. И. Кострикина. Нальчик, 2009. С. 63–66.
4. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 2. С. 157–160.
5. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А., Падучих Д.В.** О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 3. С. 300–304.
6. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407.
7. **Махнев А.А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 28.01.2011

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 519.17

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (210,95,40,45) [1]

А. А. Махнев, Н. В. Чуксина

Найдены возможные порядки автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (210, 95, 40, 45), и строение подграфов неподвижных точек этих автоморфизмов.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, автоморфизм.

A. A. Makhnev, N. V. Chuksina. On automorphisms of a strongly regular graph with parameters (210,95,40,45).

Possible orders of automorphisms of a strongly regular graph with parameters (210,95,40,45) and the structure of fixed-point subgraphs of these automorphisms are found.

Keywords: strongly regular graph, automorphism.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью* вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство графов. Граф Γ называется *локально $\mathcal{F}$-графом*, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ состоит из v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a] \cap [b]$ состоит изμ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (соответственно $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ ($d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем *(μ-) λ-подграфом.*

Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1, \ldots, m_n$. Если $m_1 = \ldots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m \geq 2$, то граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой.* Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин, а через $X_i(\Delta)$ — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Частичной геометрией $pG_\alpha(s, t)$ называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая прямая состоит из $s+1$ точек, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (две прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L. Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается через $GQ(s, t)$. Если $\alpha = t$, то геометрия называется *сетью. Точечным графом* частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке российско-словенского проекта 2010–2011 гг., программы отделения математических наук РАН (проект 09-T-1-1004) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 09-C-1-1007) и с НАН Беларуси (проект 09-C-1-1009).

если они лежат на одной прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=(s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu=\alpha(t+1)$. Любой сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых α,s,t называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

В [1] доказано, что связный вполне регулярный граф, окрестности вершин которого являются псевдогеометрическими графами для $pG_2(4,t)$, либо является графом Тэйлора, либо сильно регулярен с параметрами $(210,95,40,45)$ (и окрестности его вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_2(4,9)$, в частности, сильно регулярны с параметрами (95,40, 12,20)). В [2] найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (95,40,12,20). В данной работе найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (210,95,40,45) и определены подграфы их неподвижных точек. Для автоморфизма g через $\alpha_i(g)$ обозначим число пар вершин (u,u^g) таких, что $d(u,u^g)=i$, а через $\mathrm{Fix}(g)$ — подграф, индуцированный множеством вершин a таких, что $a=a^g$. Для конечной группы G через $\pi(G)$ обозначим множество простых делителей $|G|$.

Теорема. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(210,95,40,45)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,19\}$ *и верно одно из следующих утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф и либо* $p=2$, $\alpha_1(g)=210$, *либо* $p=3$ *и* $\alpha_1(g)/15\equiv-1(\mathrm{mod}3)$, *либо* $p=5$ *и* $\alpha_1(g)$ *делится на* 75, *либо* $p=7$ *и* $\alpha_1(g)\in\{0,105,210\}$;

(2) Ω *является* n*-кликой и либо* $p=19$, $n=1$ *и* $\alpha_1(g)=95$, *либо* $p=2$, $n\in\{2,4,6,8,10\}$ *и* $10n+\alpha_1(g)$ *делится на* 15, *либо* $p=3$, $n\in\{3,6,9\}$ *и* $(10n+\alpha_1(g))/15\equiv-1(\mathrm{mod}3)$;

(3) Ω *является* m*-кокликой,* $p=5$, $m\in\{5,10,15,20\}$ *и* $\alpha_1(g)+10m$ *делится на* 75;

(4) Ω *является объединением* l $(l\geq 2)$ *изолированных клик порядков* $n_1,\ldots,n_l$, $p=3$, n_i *делится на* 3 *для любого* $i\in\{1,\ldots,l\}$ *и либо* $\alpha_1(g)\neq 0$, $|\Omega|\leq 45$, *либо* $\alpha_1(g)=0$, $|\Omega|\leq 57$;

(5) Ω *содержит* 2*-лапу и либо*

(i) $p=7$, $|\Omega|=42$ *и* $\alpha_1(g)=0$, *либо*

(ii) $p=5$, $|\Omega|=5r$, $2\leq r\leq 9$ *и* $50r+\alpha_1(g)$ *делится на* 75, *либо*

(iii) $p=3$, $|\Omega|=3s$, $2s+\alpha_1(g)/15\equiv-1(\mathrm{mod}3)$ *и* $4\leq s\leq 15$ *или* $s\in\{16,19\}$ *и* $\alpha_1(g)=0$, *либо*

(iiv) $p=2$, $|\Omega|=2t$, $20t+\alpha_1(g)$ *делится на* 15 *и* $2\leq t\leq 51$.

1. Предварительные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1 [3, §2]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ) *и неглавными собственными значениями* r *и* s, $s<0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s\leq d-\frac{w(k-d)}{v-w}\leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma-\Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(210,95,40,45)$ и неглавными собственными значениями $5,-10$. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то

$$-10\leq d-\frac{w(95-d)}{210-w}\leq 5.$$

Поэтому число вершин в коклике (клике) не больше 20 (не больше 10). Если C является 20-кокликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma-C$ смежна точно с 10 вершинами из C.

Лемма 1.2 [4, лемма 3.1]. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф, имеющий параметры* (v, k, λ, μ). *Тогда либо* $k = 2\mu$ *и* $\lambda = \mu - 1$ (*так называемый половинный случай*), *либо неглавные собственные значения* $n-m$, $-m$ *графа* Γ — *целые числа, причем* $n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)$, $n-\lambda+\mu = 2m$ *и кратность собственного значения* $n-m$ *равна* $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. *Далее, если* m — *целое число, большее* 1, *то* $m-1$ *делит* $k-\lambda-1$ *и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \frac{k-\lambda-1}{m-1},\ n = m - 1 + \frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом графу Γ отвечает симметричная схема отношений $(X, \{R_0, \dots, R_2\})$, где X — множество вершин графа Γ, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\bar\Gamma$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений этой схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает мономиальное матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$-инвариантных подпространств W_0, W_1, W_2 матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления $\psi/_{W_i}$. Тогда для любого $g \in G$ имеем равенство

$$\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{2} Q_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами и если правая часть равенства для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1.3. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(210, 95, 40, 45)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент простого порядка из* G *и* χ_1 — *характер ограничения* ψ *на подпространство* W_1. *Тогда* $\chi_1(1) = 133$, $\chi_1(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/15 - 7$, $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого* l, *не кратного* p, *и* $133 - \chi_1(g)$ *делится на* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(210, 95, 40, 45)$. Тогда Γ имеет неглавные собственные значения $n - m = 5$ и $-m = -10$ кратностей 133 и 76 соответственно,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 95 & 5 & -10 \\ 114 & -6 & 9 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 133 & 7 & -7 \\ 76 & -8 & 6 \end{pmatrix},$$

откуда $\chi_1(1) = 133$, и $\chi_1(g) = (19\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_2(g))/30$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/15 - 7$. В частности, 5 делит $\alpha_1(g)$.

Два последних утверждения леммы следуют из [6, лемма 2]. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(210, 95, 40, 45)$, U — *трехвершинный подграф из* Γ, $Y_i = X_i(U)$, $y_i = |Y_i|$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $y_0 + y_3 = 57$, *если* U *является кокликой*;
(2) $y_0 + y_3 = 45$, *если* U *является кликой*;
(3) $y_0 + y_3 = 50$, *если* U *является* 2*-путем*;
(4) $y_0 + y_3 = 54$, *если* U *является объединением изолированной вершины и ребра.*

Доказательство. Для двух несмежных вершин u, w граф Γ содержит 45 вершин из $[u] \cap [w]$, по 50 вершин из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ и 63 вершины из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$. Для смежных вершин u, w граф Γ содержит 40 вершин из $[u] \cap [w]$, по 54 вершины из $[u] - w^\perp$ и $[w] - u^\perp$ и 60 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$.

Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(45 - y_3)$ вершины из Y_2, $3(5 + y_3)$ вершины из Y_1 и $57 - y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0 + y_3 = 57$. Аналогично доказывается, что $y_0 + y_3 = 45$, если U является кликой.

Если U является геодезическим 2-путем $u_1u_2u_3$, то Y_2 содержит $44 - y_3$ вершины из $[u_1] \cap [u_3]$ и по $40 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_2]$ и $[u_2] \cap [u_3]$, Y_1 содержит $13 + y_3$ вершин из $[u_2]$ и по $10 + y_3$ вершин из $[u_1]$, $[u_3]$, Y_0 содержит $50 - y_3$ вершин, поэтому $y_0 + y_3 = 50$.

Если U является объединением изолированной вершины u_1 и ребра $\{u_2, u_3\}$, то Y_2 содержит $40 - y_3$ вершин из $[u_2] \cap [u_3]$ и по $45 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_2]$ и $[u_1] \cap [u_3]$, Y_1 содержит $5 + y_3$ вершин из $[u_1]$ и по $9 + y_3$ вершин из $[u_2]$, $[u_3]$, Y_0 содержит $54 - y_3$ вершин, поэтому $y_0 + y_3 = 54$. Лемма доказана.

Лемма 1.5 [7, теорема 3.2]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и собственными значениями* $k, r, -m$. *Если* g — *автоморфизм* Γ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, *то* $|\Omega| \le v \cdot \max\{\lambda, \mu\}/(k - r)$.

В случае сильно регулярного графа с параметрами $(210, 95, 40, 45)$ лемма 1.5 дает $|\Omega| \le 105$.

2. Автоморфизмы графа с параметрами (210,95,40,45)

В этом разделе Γ — сильно регулярный граф с параметрами (210,95,40,45), g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 2.1. *Если* Ω — *пустой граф, то выполняется одно из утверждений*:
(1) $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 210$;
(2) $p = 3$ *и* $\alpha_1(g)/15 \equiv -1(\mathrm{mod} 3)$;
(3) $p = 5$ *и* $\alpha_1(g)$ *делится на* 75;
(4) $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) \in \{0, 105, 210\}$.

Доказательство. Так как $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то $p \in \{2, 3, 5, 7\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда g действует на графе $[u] \cap [u^g]$ для любой вершины $u \in \Gamma$. Если вершины u, u^g не смежны, то g фиксирует вершину графа $[u] \cap [u^g]$, противоречие. Поэтому $\alpha_1(g) = 210$.

Пусть $p = 3$. По лемме 1.3 число $\chi_1(g) - 133$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g)/15 \equiv -1(\mathrm{mod} 3)$.

Пусть $p = 5$. По лемме 1.3 число $\chi_1(g) - 133$ делится на 5, поэтому $\alpha_1(g)$ делится на 75.

Пусть $p = 7$. Тогда 7 делит $\alpha_1(g)$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что 105 делит $\alpha_1(g)$. Поэтому $\alpha_1(g) \in \{0, 105, 210\}$. Лемма доказана.

В леммах 2.2–2.8 предполагается, что g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ — непустой граф. Положим $X_i = X_i(\Omega)$ и $x_i = |X_i|$.

Лемма 2.2. *Пусть* Ω *является* n*-кликой. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:
(1) $p = 19$, $n = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 95$;
(2) $p = 2$ *и* $n \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\alpha_1(g) = 10(3l - n)$ *и* $\alpha_1(g) = 100$ *при* $n = 2$;
(3) $p = 3$, $n \in \{3, 6, 9\}$ *и* $(10n + \alpha_1(g))/15$ *сравнимо с* -1 *по модулю* 3.

Доказательство. Пусть $n = 1$. Тогда p делит 95 и 114, поэтому $p = 19$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g) = 95$.

Пусть $n \geq 2$ и $a, b \in \Omega$. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^{\perp}$ и на $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$, то p делит 54 и 60, поэтому $p \in \{2, 3\}$. Далее, g действует полурегулярно на $[a] \cap [b] - \Omega$, поэтому p делит $40 - (n - 2)$, $p = 2$ при $n \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ и $p = 3$ при $n \in \{3, 6, 9\}$.

Пусть $p = 2$, $u \notin \Omega$ и $\psi = |[u] \cap \Omega|$. Тогда g действует полурегулярно на $[u] \cap [u^g] - \Omega$. Если $d(u, u^g) = 1$, то 2 делит $40 - \psi$, поэтому ψ четно. Если же $d(u, u^g) = 2$, то 2 делит $45 - \psi$ и ψ нечетно. Далее, $\chi_1(g) = (10n + \alpha_1(g))/15 - 7$, поэтому $\alpha_1(g) = 10(3l - n)$. Если $n = 2$ и $\Omega = \{a, b\}$, то $\alpha_1(g) = 40 + 60 = 100$.

Если $p = 3$, то из леммы 1.3 следует, что $(10n + \alpha_1(g))/15 \equiv -1(\mathrm{mod} 3)$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть Ω является m-кокликой ($m \geq 2$). Тогда $p = 5$, $m \in \{5, 10, 15, 20\}$ и $\alpha_1(g) + 10m$ делится на 75.*

Доказательство. Для различных вершин $a, b \in \Omega$ элемент g действует полурегулярно на $[a] \cap [b]$, $[a] - b^{\perp}$ и на $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b) - \Omega$, поэтому p делит 45, 50 и $63 - (m - 2)$. Отсюда $p = 5$ и m делится на 5. По лемме 1.3 число $\chi_1(g) - 133$ делится на 5, поэтому $\alpha_1(g) + 10m$ делится на 75. Лемма доказана.

В условиях леммы 2.3 $m \leq 20$ и в случае $m = 20$ любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 10 вершинами из Ω. В этом случае пара $(\Omega, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B} = \{[u] \cap \Omega \mid u \in \Gamma - \Omega\}$, является 2-(20,38,19,10,9) схемой.

Лемма 2.4. *Пусть Ω является объединением m ($m \geq 2$) изолированных клик порядков $n_1, \ldots, n_m$ и $n_1 \geq 2$. Тогда $p = 3$, n_i делится на 3 для $i \in \{1, \ldots, m\}$ и либо $\alpha_1(g) \neq 0$ и $|\Omega| \leq 45$, либо $\alpha_1(g) = 0$ и $|\Omega| \leq 48$.*

Доказательство. Если a, c — несмежные вершины из Ω, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [c]$ и p делит 45.

Пусть a, b — смежные вершины из n_1-клики, лежащей в Ω. Так как g действует полурегулярно на $[a] - b^{\perp}$ и на $[a] \cap [b] - \Omega$, то p делит 54 и $40 - (n_1 - 2)$, поэтому $p = 3$ и n_1 делится на 3. Таким образом, $n_i = 1$ или n_i делится на 3. Если вершина c изолирована в Ω и $d \in \Omega - \{c\}$, то g действует полурегулярно на $[c] - d^{\perp}$ и p делит 50, противоречие.

По лемме 1.3 число $\chi_1(g) - 133$ делится на 3, поэтому $(\alpha_1(g) + 10|\Omega|)/15 \equiv -1(\mathrm{mod} 3)$. По лемме 1.4 имеем $\alpha_1(g) \neq 0$ и $|\Omega| \leq 45$ или $\alpha_1(g) = 0$ и $|\Omega| \leq 57$. Лемма доказана.

До конца раздела будем предполагать, что Ω содержит геодезический 2-путь a, c, b.

Лемма 2.5. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) *если Γ содержит полный двудольный подграф $K_{m,n}$, то $mn \leq 100$;*
(2) *для любых вершин $x \in \Omega, u \in \Gamma - (\Omega \cup [x])$ подграф $[x] \cap [u]$ не содержится в Ω;*
(3) *Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v', k', 40, 45)$ и $p \leq 43$.*

Доказательство. Если Γ содержит полный двудольный подграф $\Delta = K_{m,n}$, то наименьшее собственное значение графа Δ равно $-\sqrt{mn}$ и не меньше -10, поэтому $mn \leq 100$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $x \in \Omega$ и $u \in \Gamma - (\Omega \cup [x])$. Если $[x] \cap [u] \subset \Omega$, то $|\Omega \cap [u]| \geq 45$ и подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой. Отсюда $|\Omega \cap [u]| = |\Omega \cap [u^g]| = 45$ и $[u] \cap \Omega = [u^g] \cap \Omega$. Заметим, что $|\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)| = 63$ и степень вершины x в графе $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$ равна 50. Если $p > 2$, то $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$ содержит вершину u^{g^2} и степень вершины u^{g^2} в графе $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(u^g)$ равна 50. Противоречие с тем, что $[x] \cap [u^{g^2}] = [u] \cap [u^g]$. Значит, $p = 2$. Теперь для $w \in [u] - \Omega$ число $|\Omega \cap [u] \cap [w]|$ четно, а число $|\Omega \cap [u^g] \cap [w]|$ нечетно (так как вершины u^g, w не смежны), противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 40, 45)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' - 155$ и 45 делит $k'(k' - 41)$. Поэтому $k' \in \{45, 81, 86\}$ и $n \in \{5, 13, 17\}$. Так как в двух последних случаях нарушается условие целочисленности для Ω, то $\Omega = K_{10\times 5}$, противоречие с леммой 1.1.

Допустим, что $p \geq 47$. Тогда $\lambda_\Omega = 40$, $\mu_\Omega = 45$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 40, 45)$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *$p < 41$, $p \neq 37$ и $p \neq 31$.*

Доказательство. Пусть $p = 43$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 40 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ состоит из 2 или 45 вершин. Заметим, что вершина из Ω смежна с 43 или 86 вершинами из $\Gamma - \Omega$. По лемме 1.4 имеем $|\Omega| \leq 57$, поэтому $|\Gamma - \Omega| = 172$ и $|\Omega| = 38$, противоречие.

Пусть $p = 41$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в 40 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ состоит из 4 или 45 вершин. Заметим, что вершина из Ω смежна с 41 или 82 вершинами из $\Gamma - \Omega$. По лемме 1.4 имеем $|\Omega| \leq 57$, поэтому $|\Gamma - \Omega| = 164$, $|\Omega| = 46$ и Ω — регулярный граф степени 13, противоречие.

Пусть $p = 37$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в 3 или в 40 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ состоит из 8 или 45 вершин. Далее, вершина из Ω смежна с 37 или 74 вершинами из $\Gamma - \Omega$. С другой стороны, по лемме 1.4 имеем $|\Omega| \leq 57$, поэтому $|\Gamma - \Omega| = 185$, $|\Omega| = 25$ и Ω — регулярный граф степени 21 на 25 вершинах, противоречие.

Пусть $p = 31$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в 9 или в 40 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ состоит из 14 или 45 вершин. Заметим, что вершина из Ω смежна с 31 или 62 вершинами из $\Gamma - \Omega$. По лемме 1.4 имеем $|\Omega| \leq 57$, поэтому $|\Gamma - \Omega| = 155$, $|\Omega| = 55$ и Ω — регулярный граф степени 33 на 55 вершинах, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *$p \notin \{19, 23, 29\}$.*

Доказательство. Пусть $p = 29$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в 11 или в 40 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ состоит из 16 или 45 вершин. Далее, вершина из Ω смежна с 29, 58 или 87 вершинами из $\Gamma - \Omega$. С другой стороны, по лемме 2.4 имеем $|\Omega| \leq 57$, поэтому $|\Gamma - \Omega| = 174$, $|\Omega| = 36$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами (36,8,11,16), противоречие.

Пусть $p = 23$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в 17 или в 40 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ состоит из 22 или 45 вершин. Заметим, что вершина из Ω смежна с 23, 46 или 69 вершинами из $\Gamma - \Omega$. По лемме 1.4 имеем $|\Omega| \leq 57$, поэтому $|\Gamma - \Omega| = 161$, $|\Omega| = 49$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами (49,26,17,22), противоречие с тем, что 22 не делит $26 \cdot 8$.

Пусть $p = 19$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в 2, 21 или в 40 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ состоит из 7, 26 или 45 вершин. Далее, вершина из Ω смежна с 19, 38, 57, 76 или 95 вершинами из $\Gamma - \Omega$. С другой стороны, по лемме 1.4 имеем $|\Omega| \leq 57$, поэтому $|\Gamma - \Omega| = 171$ и $|\Omega| = 39$. Отсюда степени вершин в Ω равны 0, 19 или 38. Допустим, что для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ состоит из 26 вершин. Тогда $|\Omega| \geq 2 + 24 + 26$, противоречие. Допустим, что для смежных вершин $a, c \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ состоит из 21 вершины. Тогда $|\Omega| \geq 2 + 32 + 21$, снова противоречие. Значит, Ω — сильно регулярный граф с $\lambda' = 2, \mu' = 7$ и $k'(k' - 3) = (38 - k')7$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.8. *$p \notin \{11, 13, 17\}$.*

Доказательство. Пусть $p = 17$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в 6, 23 или в 40 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ состоит из 11, 28 или 45 вершин. Далее, вершина из Ω смежна с 17, 34, 51, 68 или 85 вершинами из

$\Gamma-\Omega$. По лемме 1.4 имеем $|\Omega|\le 57$, поэтому $|\Gamma-\Omega|\in\{153,170,187\}$ и $|\Omega|\in\{57,40,23\}$. Если $|\Omega|=23$, то Ω — сильно регулярный граф с $\lambda'=6,\mu'=11$ и $k'(k'-7)=(22-k')11$, противоречие.

Пусть $|\Omega|=57$. Ввиду леммы 1.4 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 17 является кокликой. Противоречие с тем, что тогда для 3-вершинного подмножества U из $u^{\langle g\rangle}$ подграф $X_0(U)\cup X_3(U)$ содержит точно 14 вершин из $u^{\langle g\rangle}$ и не более 43 вершин из Ω.

Пусть $|\Omega|=40$. Тогда степень каждой вершины в Ω равна 27. Если a,b — две несмежные вершины из Ω, то $\Omega(a)\cap\Omega(b)$ содержит точно 11 вершин и $|\Omega|\ge 2+32+11$, противоречие.

Пусть $p=13$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в 1, 14, 27 или в 40 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a,b\in\Omega$ подграф $\Omega(a)\cap[b]$ состоит из 6, 19, 32 или 45 вершин. Далее, вершина из Ω смежна с 39, 52, 65 или 78 вершинами из $\Gamma-\Omega$. По лемме 1.4 имеем $|\Omega|\le 57$, поэтому $|\Gamma-\Omega|\in\{156,169,182\}$ и $|\Omega|\in\{54,41,28\}$. Если $|\Omega|=28$, то Ω — регулярный граф степени 17. Допустим, что для смежных вершин $a,b\in\Omega$ имеем $|\Omega(a)\cap[b]|=1$. Тогда $\Omega(a)\cup\Omega(b)$ состоит из 33 вершин, противоречие. Поэтому Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(28,17,14,6)$, противоречие.

Пусть $|\Omega|=54$. Ввиду леммы 1.4 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 13 является кокликой, поэтому $|\Omega|\le 47$, противоречие.

Пусть $|\Omega|=41$. Тогда степень каждой вершины в Ω равна 17 или 30. Если a,b — две несмежные вершины из Ω, то $|\Omega(a)-[b]\ge 11$, поэтому Ω не содержит вершин степени 30. Противоречие с тем, что Ω — регулярный граф степени 17 на 41 вершине.

Пусть $p=11$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в 7, 18, 29 или в 40 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a,b\in\Omega$ подграф $\Omega(a)\cap[b]$ состоит из 1, 12, 23, 34 или 45 вершин. Далее, вершина из Ω смежна с 44, 55, 66 или 77 вершинами из $\Gamma-\Omega$. По лемме 1.4 имеем $|\Omega|\le 57$, поэтому $|\Gamma-\Omega|\in\{154,165,176,187\}$ и $|\Omega|\in\{56,45,34,23\}$. Если $|\Omega|=23$, то Ω — регулярный граф степени 18. Допустим, что для несмежных вершин $a,b\in\Omega$ имеем $|\Omega(a)\cap[b]|=1$. Тогда $\Omega(a)\cup\Omega(b)$ содержит не менее 35 вершин, противоречие. Поэтому Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(23,18,7,12)$, противоречие.

Пусть $|\Omega|=56$. Ввиду леммы 1.4 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 11 является кокликой, откуда $|\Omega|\le 49$, противоречие.

Пусть $|\Omega|=34$. Тогда степень каждой вершины в Ω равна 18 или 29. Если a,b — две несмежные вершины из Ω, то $|\Omega(a)-[b]|\ge 6$, поэтому Ω не содержит вершин степени 29. Если a,b — две несмежные вершины из Ω и $\Omega(a)\cap[b]$ содержит точно 1 вершину, то $|\Omega|\ge 2+34+1$, противоречие. Поэтому Ω — сильно регулярный граф с параметрами (34,18,7,12) и собственными значениями 1 и -6. Противоречие с тем, что кратность 1 равна $5\cdot 18\cdot 24/(7\cdot 12)$.

Итак, $|\Omega|=45$ и степень каждой вершины в Ω равна 18, 29 или 40. Если a,b — две несмежные вершины из Ω, то $|\Omega(a)-[b]|\ge 6$, поэтому Ω не содержит вершин степени 40. Допустим, что Ω — регулярный граф степени 18. Тогда Ω — реберно регулярный граф с параметрами (45,18,7). Если $a\in\Omega$, X — множество вершин из $\Omega-a^{\perp}$, смежных с единственной вершиной из $\Omega(a)$, и $x=|X|$, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $18\cdot 10=x+12(26-x)$, поэтому $x=12$. Пусть $\Delta=\Omega-a^{\perp}$, $b\in X$. Тогда Δ содержит b, точно 17 вершин из $[b]$ и 8 вершин вне $b^{\perp}$. Поэтому $\Delta(b)$ содержит вершину e из X. Противоречие с тем, что Δ содержит b,e, не более 7 вершин из $[b]\cap[e]$ и по 9 вершин из $[b]-e^{\perp}$ и $[e]-b^{\perp}$.

Пусть Φ — множество вершин степени 29 в Ω и $\Psi=\Omega-\Phi$. Для $a\in\Phi$ число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $29\cdot 10=23|\Phi-a^{\perp}|+12|\Psi-a^{\perp}|$. Поэтому $|\Phi-a^{\perp}|=10$, $|\Psi-a^{\perp}|=5$ и число ребер между Φ и Ψ равно $|\Phi|(|\Psi|-5)$. Для $b\in\Psi$ число ребер между $\Omega(b)$ и $\Omega_2(b)$ равно $26\cdot 12=21|\Phi\cap[b]|+10|\Psi(b)|$, следовательно, $|\Phi\cap[b]|=12$. Так как $|\Phi|+|\Psi|=45$, то число ребер между Φ и Ψ равно $(45-|\Psi|)(|\Psi|-5)=12|\Psi|$, противоречие с тем, что $|\Psi|^2-38|\Psi|+225=0$. Лемма доказана.

3. Автоморфизмы малых порядков

В этом разделе Γ — сильно регулярный граф с параметрами (210,95,40,45), g — автоморфизм простого порядка p графа Γ, $p \le 7$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит геодезический 2-путь.

Лемма 3.1. *Если $p = 7$, то $|\Omega| = 42$ и $\alpha_1(g) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 7$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в $5 + 7i$ треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ состоит из $3 + 7j$ вершин. Далее, вершина из Ω смежна с $4 + 7l$ вершинами из Ω, где $l \le 13$. По лемме 1.3 число $10|\Omega| + \alpha_1(g)$ делится на 15.

По лемме 1.4 имеем $|\Omega| \le 57$, поэтому $|\Gamma - \Omega| \in \{154, 161, \ldots, 196\}$ и $|\Omega| \in \{56, 49, \ldots, 14\}$. Если a — вершина степени 11 в Ω, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 5 на 11 вершинах, противоречие.

Пусть $a \in \Omega$, $\Omega' = \Omega - a^\perp$, $M_i = M_i(a)$ — множество вершин из $\Omega(a)$, смежных точно с $5 + 7i$ вершинами из $\Omega - a^\perp$, $m_i = |M_i|$, N_j — множество вершин из $\Omega - a^\perp$, смежных точно с $3 + 7j$ вершинами из $\Omega(a)$, $n_j = |N_j|$.

Если $|\Omega| = 21$, то Ω — регулярный граф степени 18. Пусть $b \in \Omega(a)$. Тогда $|\Omega(b) - a^\perp| \ge 5$, противоречие.

Если $|\Omega| = 28$, то Ω — регулярный граф степени 18 и $|[b] \cap \Omega(a)| = 12$ (иначе $|\Omega(a) \cup \Omega(b)| \ge 31$, противоречие). Пусть $c \in \Omega'$ и $|[c] \cap \Omega(a)| = 3$. Тогда $|\{a, c\} \cup \Omega(a) \cup \Omega(b)| \ge 35$, противоречие. Поэтому Ω — сильно регулярный граф с параметрами (28,18,12,10) и собственными значениями 4, -2. Кратность собственного значения 4 равна $f = 18 \cdot 20/(6 \cdot 10) = 6$, противоречие с тем, что $v \le f(f + 3)/2$ (абсолютная граница).

Пусть $|\Omega| = 35$. Тогда степени вершин в Ω равны 18 или 25. Если a — вершина степени 25 из Ω, то $|\Omega'| = 9$ и степень вершины в графе Ω' равна 1 или 8. Поэтому либо Ω' является 9-кликой, либо $\Omega'(b)$ является 8-кокликой для некоторой вершины $b \in \Omega'$. Далее, каждая вершина из $\Omega'(b)$ смежна с 17 вершинами из $\Omega(a)$, $m_0 = 25$, $n_1 + n_2 = 9$ и $125 = 10n_1 + 17n_2$. Отсюда $n_2 = 5$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 18. Если $b \in N_2$ и $c \in \Omega(a) - [b]$, то $\Omega(c) \cap [b]$ содержит точно $5 + 7i$ вершин из $[a]$ и не более одной вершины из $\Omega - a^\perp$, противоречие. Если $b \in N_0$, $c \in \Omega(a) \cap [b]$ и $|\Omega(c) \cap [a] \cap [b]| = \gamma$, то Ω содержится в $a^\perp \cup b^\perp$ и число $|\Omega(c)| \equiv 5 - \gamma (\mathrm{mod} 7)$. Поэтому $\gamma = 1$ и $\Omega(a) \cap [b]$ — регулярный граф степени 1 на 3 вершинах, противоречие. Значит, $m_0 + m_1 = 18$, $n_1 = 16$ и $5m_0 + 12m_1 = 160$. Отсюда $m_1 = 10$ и $m_0 = 8$.

На множестве вершин из Ω определим новый граф Δ, считая две вершины x и x' смежными, если $|\Omega(x) \cap [x']| = 5$. Тогда окрестность вершины в Δ является 10-кокликой (для двух вершин $c, c' \in \Delta(a)$ подграф $\Omega(c) \cap [c']$ содержит не менее 8 вершин из $\Omega - a^\perp$) и число ребер между $\Delta(a)$ и $\Delta_2(a)$ равно 90. Если вершина $c \in M_1$ смежна с вершиной $e \in M_0$, то $\Omega(c) \cap [e]$ содержит a и не более 5 вершин в каждом из подграфов $[a]$, $\Omega - a^\perp$, поэтому вершины c и e смежны в Δ. Теперь число ребер в Δ между M_0 и M_1 не меньше 40, и некоторая вершина c из M_1 смежна, по крайней мере, с 4 вершинами из M_0. Если c смежна с 5 вершинами из M_0, то $\Delta_2(a) \cap \Delta_2(c)$ содержит 3 вершины из $M_0 - [c]$, 4 вершины из $\Omega_2(a) \cap \Omega_2(c)$ и 8 вершин из $M_0(c) - [a]$. В этом случае найдутся две вершины $e, e' \in M_1(c)$, смежные с 5 вершинами из $M_0(c)$ и $\Omega(e) \cap [e']$ содержит c, не менее двух вершин из $M_0(c)$ и не менее 8 вершин из $\Omega(c) - c^\perp$. Противоречие с тем, что тогда вершины e и e' смежны и $|\Omega(c) \cap [e]| \ge 6$. Теперь каждая вершина из M_1 смежна точно с 4 вершинами из M_0, и $\Delta_2(a) \cap \Delta_2(c)$ содержит по 4 вершины из $M_0 - [c]$, $\Omega_2(a) \cap \Omega_2(c)$ и из $M_0(c) - [a]$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 56$. Ввиду леммы 2.4 любая орбита $u^{\langle g \rangle}$ длины 7 является кокликой. Противоречие с тем, что тогда для 3-вершинного подмножества U из $u^{\langle g \rangle}$ подграф $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 4 вершины из $u^{\langle g \rangle}$ и не более 53 вершин из Ω.

Пусть $|\Omega| = 49$. Ввиду леммы 2.4 нет орбит $u^{\langle g \rangle}$ длины 7, содержащих 3-клику. Поэтому каждая орбита $u^{\langle g \rangle}$ длины 7 является кокликой или семиугольником. Так как $10|\Omega| + \alpha_1(g)$

делится на 15 и $\alpha_1(g) = 35w$, то $14 + w$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 35$. Если U является геодезическим 2-путем из $u^{\langle g\rangle}$, то $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 49 вершин из Ω и две вершины из $u^{\langle g\rangle}$, противоречие с леммой 2.4.

Пусть $|\Omega| = 42$. Если орбита $u^{\langle g\rangle}$ является 7-кликой и U является 3-вершинным подграфом из $u^{\langle g\rangle}$, то $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 42 вершины из Ω и 4 вершины из $u^{\langle g\rangle}$, противоречие с леммой 2.4. Значит, каждая орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 7 является кокликой, семиугольником или дополнительным графом к семиугольнику. Так как $\chi_1(g) = 21 + \alpha_1(g)/15$, то $\alpha_1(g) \in \{0, 105\}$, причем в случае $\alpha_1(g) = 105$ на $\Gamma - \Omega$ имеются $6+j$ $\langle g\rangle$-орбит, индуцирующих дополнительный граф к семиугольнику, $18 - 2j$ семиугольных $\langle g\rangle$-орбит и j кокликовых $\langle g\rangle$-орбит.

Пусть $u^{\langle g\rangle}$ индуцирует дополнительный граф к семиугольнику, $X_i = X_i(u^{\langle g\rangle})$ и $x_i = |X_i|$. Тогда $x_1 = x_6 = 0$, $|X_0 - \Omega| = 0$, $|X_7 - \Omega| = 0$, $\sum x_i = 203$, $\sum ix_i = 637$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 7 \cdot 42 + 7 \cdot 38 + 7 \cdot 39 = 833$. Отсюда $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 161$, $2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 7x_7 = 637$, $x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 21x_7 = 833$, поэтому $x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 5x_7 = 315$, $2x_3 + 5x_4 + 9x_5 + 21x_7 = 772$ и $x_4 + 3x_5 + 11x_7 = 142$. Итак, $x_4 = 142 - 3x_5 - 11x_7$, $x_3 = 315 - 2(142 - 3x_5 - 11x_7) - 3x_5 - 5x_7 = 31 + 3x_5 + 17x_7$, $x_2 = 161 - (31 + 3x_5 + 17x_7) - (142 - 3x_5 - 11x_7) = -12 - 6x_7$, противоречие.

Итак, $\alpha_1(g) = 0$ и имеется 24 кокликовых $\langle g\rangle$-орбиты длины 7. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Если $p = 5$, то $|\Omega| = 5r$, $2 \le r \le 9$ и $50r + \alpha_1(g)$ делится на 75.*

Доказательство. Пусть $p = 5$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в $5i$ треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ состоит из$5j$ вершин. Далее, вершина из Ω смежна с $5l$ вершинами из Ω и $|\Omega| = 5r$. По лемме 2.3 число $(50r+\alpha_1(g))/15$ делится на 5.

По лемме 1.4 имеем $|\Omega| \le 57$. Пусть $|\Omega| = 55$. Ввиду леммы 1.4 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 5 является кокликой. Противоречие с тем, что тогда $\alpha_1(g) = 0$ и $10|\Omega| + \alpha_1(g) = 550$ не делится на 75.

Пусть $|\Omega| = 50$. Ввиду леммы 1.4 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 5 является кокликой или пятиугольником. Так как $10|\Omega| + \alpha_1(g)$ делится на 75, то $\alpha_1(g) = 25$ и имеется 10 пятиугольных $\langle g\rangle$-орбит. Если U является 2-путем из $u^{\langle g\rangle}$, то по лемме 1.4 имеем $X_0(U) \cup X_3(U) = \Omega$. Если же U является объединением изолированной вершины и ребра из $u^{\langle g\rangle}$, то $|X_0(U) \cup X_3(U)| = 54$, поэтому найдутся четыре орбиты $w_i^{\langle g\rangle}$ такие, что $[w_i]$ содержит изолированную вершину и ребро из $u^{\langle g\rangle}$. Положим $X_i = X_i(u^{\langle g\rangle})$ и $x_i = |X_i|$. Тогда $x_3 = 20, x_4 = 0$, $\sum x_i = 205$, $\sum ix_i = 465$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 5 \cdot 40 + 5 \cdot 45 = 425$. Отсюда $x_0 = 145 - 6x_5$, $x_1 + x_2 - 5x_5 = 40$, $x_1 + 2x_2 + 3x_5 = 405$, поэтому $x_2 = 365 - 8x_5$, $x_1 = 13x_5 - 325$. Противоречие с тем, что $25 \le x_6 \le 145/6$.

Пусть $|\Omega| = 45$. Если орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 5 является кликой, то для 3-вершинного подграфа U из $u^{\langle g\rangle}$ множество $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит 45 вершин из Ω и две вершины из $u^{\langle g\rangle}$, противоречие с леммой 1.4. Далее, $450 + \alpha_1(g)$ делится на 75, поэтому $\alpha_1(g) \in \{0, 75\}$, причем в случае $\alpha_1(g) = 75$ имеется 30 пятиугольных $\langle g\rangle$-орбит. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Если $p = 3$, то $|\Omega| = 3s$ и либо $2s + \alpha_1(g)/15 \equiv -1 (\mathrm{mod} 3)$ и $4 \le s \le 15$, либо $\alpha_1(g) = 0$ и $s \in \{16, 19\}$.*

Доказательство. Пусть $p = 3$. Тогда любое ребро графа Ω лежит точно в $3i + 1$ треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ состоит из $3j$ вершин. Далее, вершина из Ω смежна с $3l + 2$ вершинами из Ω и $|\Omega| = 3s$. По лемме 1.3 число $2s + \alpha_1(g)/15 \equiv -1 (\mathrm{mod} 3)$. Если Ω содержит вершину a степени 2 в Ω, то $a^\perp \cap \Omega$ — изолированная 3-клика из Ω.

Пусть $|\Omega| = 9$. Тогда степени вершин в Ω равны 5 или 8. Поэтому Ω содержит либо 5 вершин степени 8 и Ω — сумма 5-клики и 4-коклики, либо 3 вершины степени 8 и Ω — сумма 3-клики и шестиугольника, либо единственную вершину a степени 8 и $\Omega(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами (8,4,0,2). В любом случае имеем противоречие.

По лемме 1.4 имеем $|\Omega| \le 57$. Пусть $|\Omega| = 57$. Ввиду леммы 2.4 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 3 является кокликой. Положим $X_i = X_i(u^{\langle g\rangle})$ и $x_i = |X_i|$. Тогда $\sum x_i = 207$, $\sum ix_i = 285$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 135$. Отсюда $x_0 + x_3 = 57$, $x_2 = 135 - 3x_3$, $x_1 = 3x_3 + 15$.

Пусть $|\Omega| = 54$. Ввиду леммы 1.4 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 3 является кокликой. Противоречие с тем, что тогда $\alpha_1(g) = 0$ и $2s = 36$ делится на 3.

Пусть $|\Omega| = 51$. Ввиду леммы 1.4 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 3 является кокликой. Противоречие с тем, что тогда $\alpha_1(g) = 0$ и $2s = 34$ сравнимо с 1 по модулю 3.

Пусть $|\Omega| = 48$. Ввиду леммы 1.4 любая орбита $u^{\langle g\rangle}$ длины 3 является кокликой и $\alpha_1(g) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Если $p = 2$, то $|\Omega| = 2t$, $20t + \alpha_1(g)$ делится на 15 и $2 \le t \le 51$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в четном числе треугольников из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ состоит из нечетного числа вершин. Далее, вершина из Ω смежна с нечетным числом вершин из Ω и $|\Omega| = 2t$. По лемме 1.3 число $20t+\alpha_1(g)$ делится на 15. Если Ω содержит вершину a степени 1 в Ω и $b \in \Omega(a)$, то $b^\perp$ содержит Ω.

Пусть $|\Omega| = 4$. Тогда степени вершин в Ω равны 1 или 3. Поэтому Ω является 3-лапой.

Пусть $|\Omega| = 6$. Тогда степени вершин в Ω равны 1, 3 или 5. Если Ω содержит вершину a степени 1 в Ω, $b \in \Omega(a)$, то $\Omega(b) - \{a\}$ является 4-кокликой или четырехугольником. Но в последнем случае ребро четырехугольника лежит в единственном треугольнике из Ω, противоречие.

Из доказательства леммы 1.4 следует, что $|\Omega| \le 100$, если $\alpha_1(g) \ne 0$. Ввиду леммы 1.5 имеем $|\Omega| \le 104$.

Если $|\Omega| = 104$, то $\alpha_1(g) = 0$ и t делится на 3, противоречие.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** О графах, окрестности вершин которых сильно регулярны с $k = 2\mu$ // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 89–104.
2. **Махнев А.А., Чуксина Н.В.** Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (95,40,12,20) // Владикавказ. мат. журн. 2009. Т. 11, № 4. С. 44–58.
3. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14, no. 5. P. 397–407.
4. **Махнев А.А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискр. анализ и исслед. операций 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.
5. **Cameron P.** Permutation Groups // London Math. Soc. Student Texts. Vol. 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
6. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
7. **Behbahani M., Lam C.** Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol. 311, no. 2–3. P. 132–144.

Поступила 17.01.2011

Махнев Александр Алексеевич
д-р. физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
email: makhnev@imm.uran.ru

Чуксина Наталия Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет
email: natalia_1@e1.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 515.128

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ $T(k,\tau)$ И $S(k,\tau)$

С. В. Медведев

Изучаются свойства двух семейств h-однородных борелевских множеств $\{T(k,\tau)\colon \omega \le \tau \le k\}$ и $\{S(k,\tau)\colon \omega \le \tau \le k\}$. Множества из первого семейства получаются в результате объединения пространства Бэра $B(k)$ и σ-дискретного пространства $Q(k)$, а множества из второго семейства — в результате объединения пространств $B(k)$ и $Q(k)\times C$. Доказаны теоремы о вложении этих множеств в абсолютные A-множества в качестве замкнутых подмножеств.

Ключевые слова: h-однородное пространство, A-множество, $\sigma LW(<k)$-пространство, пространство Бэра, вложение, гомеоморфизм.

S. V. Medvedev. Some properties of the spaces $T(k,\tau)$ and $S(k,\tau)$.

The properties of two families of h-homogeneous Borel sets $\{T(k,\tau)\colon \omega \le \tau \le k\}$ and $\{S(k,\tau)\colon \omega \le \tau \le k\}$ are studied. The sets of the former family are obtained as the result of taking the union of the Baire space $B(k)$ and the σ-discrete space $Q(k)$, while the sets of the latter family are obtained as the result of taking the union of the spaces $B(k)$ and $Q(k)\times C$. We prove theorems on the embedding of these sets into absolute Souslin sets as closed subsets.

Keywords: h-homogeneous space, Souslin set, $\sigma LW(<k)$-space, Baire space, embedding, homeomorphism.

Введение

В статье рассматриваются только метрические пространства.

В классической теории множеств большую роль играют пространство рациональных чисел Q, канторово совершенное множество C и пространство иррациональных чисел $\mathscr{N}$. Несепарабельным аналогом пространств C и $\mathscr{N}$ служит бэровское пространство $B(k)$ веса k; свойства этого пространства изучены Стоуном (см. [1;2]). Автором [3] было предложено рассматривать пространство $Q(k) = \{x \in k^\omega\colon \exists j\,\forall i(i \ge j \Rightarrow x_i = 0)\}$ веса k как обобщение пространства рациональных чисел Q на несепарабельный случай; в частности, $Q(\omega) \approx Q$.

Ранее автором (см. [4; 5]) были получены топологические характеристики произведений $Q(k)\times C$ и $Q(k)\times\mathscr{N}$ и указаны условия вложения этих пространств в абсолютные A-множества в качестве замкнутых подмножеств. В настоящей статье изучаются свойства h-однородных пространств $T(k,\tau)$ и $S(k,\tau)$, первое из которых получается в результате объединения (специальным образом, зависящим от кардинала τ, где $\omega \le \tau \le k$) бэровского пространства $B(k)$ и σ-дискретного пространства $Q(k)$, а второе — объединения пространств $B(k)$ и $Q(k)\times C$. Сначала мы устанавливаем некоторые свойства этих пространств, а затем доказываем теоремы о вложении пространств $T(k,\tau)$ и $S(k,\tau)$ в абсолютные A-множества в качестве замкнутых подмножеств (это так называемые теоремы типа теоремы Гуревича). Для метрических компактных пространств аналогичные результаты были получены ван Дауэном, ван Миллом и ван Энгеленом (см. [6]). В статье мы используем методы и идеи из работ [5–8].

1. Определения, обозначения и вспомогательные факты

Основные определения и обозначения взяты из монографии [9].

Запись $X \approx Y$ означает, что X и Y — гомеоморфные пространства. $w(X)$ — вес пространства X. Если $F \subseteq X$, то $\overline{F}$ — замыкание множества F в X. Для семейства множеств

$\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ из пространства X через $|\mathscr{U}|$ обозначается мощность этого семейства. $\mathrm{mesh}(\mathscr{U})$ — мелкость семейства $\mathscr{U}$. Положим $\cup\mathscr{U} = \cup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ и $[\mathscr{U}] = \{\overline{U}_\alpha : \alpha \in A\}$.

Под ординалом α понимается множество $\{\beta$ — ординал: $\beta < \alpha\}$, а под кардиналом — наименьший ординал данной мощности; в частности, $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Через k^+ обозначается кардинал, непосредственно следующий за кардиналом k. Для множества X через X^n обозначается множество кортежей $s = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ длины n, состоящих из элементов множества X. При этом $\langle x_{-1}\rangle = \Lambda$ — единственный кортеж нулевой длины. Если длина $\mathrm{lh}\, s$ кортежа s равна n и $i < n$, то $s{\restriction}i$ — начальный фрагмент $\langle x_0, \ldots, x_{i-1}\rangle$ длины i кортежа s. Если $s = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle \in X^n$ и $x_n \in X$, то $s\hat{\ }x_n = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n\rangle$. Положим $X^{<\omega} = \cup\{X^n : n \in \omega\}$. Если $s = \langle i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}\rangle \in \omega^n$, то положим $|s| = i_0 + i_1 + \ldots + i_{n-1}$; по определению $|\Lambda| = 0$.

Пусть $\mathscr{P}$ — некоторое топологическое свойство. Мы говорим, что пространство X *нигде не* $\mathscr{P}$, если никакое непустое открытое множество из X не обладает свойством $\mathscr{P}$. Пространство X *содержит* (*замкнутую*) *копию* пространства Y, если в X существует (замкнутое) множество F, гомеоморфное пространству Y. Нульмерное пространство X называется h-*однородным*, если любое непустое открыто-замкнутое множество из X гомеоморфно всему пространству X. Несложно проверить, что каждое h-однородное пространство является однородным пространством (обратное неверно). Пространство X называется *$LW(<k)$-пространством* [2], если у каждой точки из X найдется окрестность веса $<k$. Пространство X называется *$\sigma LW(<k)$-пространством* [2], если оно представимо в виде $X = \cup\{X_n : n \in \omega\}$, где каждое X_n является $LW(<k)$-пространством. В частности, $\sigma LW(<\omega)$-пространства — это σ-дискретные пространства. Стоун [2] доказал, что пространство $B(k)$ нигде не $\sigma LW(<k)$-пространство.

Множество Y называется *A-множеством* (или *суслинским множеством*) в пространстве X, если в X существует такое семейство замкнутых множеств $\{F_{t\restriction n}\}$, заиндексированных кортежами $t{\restriction}n \in \omega^n$, где $n \in \omega$ и $t = \langle t_0, t_1, \ldots\rangle \in \omega^\omega$, что $Y = \cup\{\bigcap\{F_{t\restriction n} : n \in \omega\} : t \in \omega^\omega\}$. Хансел [10] ввел понятие семейства *расширенных борелевских* множеств $HB(X)$ в пространстве X как наименьшей σ-алгебры множеств из X, содержащей все открытые множества и замкнутой относительно операции объединения σ-дискретных семейств множеств. Он доказал, что если множество Y и его дополнение $X\backslash Y$ являются A-множествами в полном метрическом пространстве X, то $Y \in HB(X)$. Для сепарабельного пространства X семейство $HB(X)$ совпадает с семейством обычных борелевских множеств из X. σ-дискретное семейство $\mathscr{B}$ называется *σ-дискретной базой* [10] для семейства $\mathscr{U}$ в пространстве X, если каждое множество из $\mathscr{U}$ является объединением некоторого подсемейства множеств из $\mathscr{B}$. Отображение $f : X \to Y$ называется *ко-σ-дискретным*, если образ любого дискретного семейства из X имеет σ-дискретную базу в Y. Хансел [10] доказал, что если $Y \in HB(X)$ для полного метрического пространства X и $w(Y) \le k$, то Y является взаимно однозначным непрерывным ко-σ-дискретным образом некоторого замкнутого множества из пространства Бэра $B(k)$.

Запись $Y \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ (или $Y \in \mathscr{G}_\delta(X)$) означает, что Y — множество типа F_σ (или G_δ) в пространстве X. Через $\mathscr{A}\mathscr{F}_\sigma$, $\mathscr{G}_\delta$ и $\mathscr{L}_k$ обозначаются соответственно семейства абсолютных F_σ-множеств, абсолютных G_δ-множеств и $\sigma LW(<k)$-пространств. Пусть $\mathscr{E}_k$ — семейство всех нульмерных (в смысле $\dim X = 0$) однородных по весу пространств веса k. Через $B^*(k)$ обозначаем пространство Бэра $B(k)$ веса k при $k > \omega$ или канторово множество C при $k = \omega$.

Если даны два семейства множеств $\mathscr{X}_1$ и $\mathscr{X}_2$, то $\mathscr{X}_1 + \mathscr{X}_2 = \{X : X = X_1 \cup X_2,$ где $X_1 \in \mathscr{X}_1, X_2 \in \mathscr{X}_2\}$, а $\mathscr{X}_1 - \mathscr{X}_2 = \{X : X = X_1 \backslash X_2,$ где $X_1 \in \mathscr{X}_1, X_2 \in \mathscr{X}_2\}$.

Топологическое описание пространства $Q(k)$ дается следующей теоремой.

Теорема 1 [3]. *Пусть X — метрическое σ-дискретное однородное по весу пространство веса k. Тогда X гомеоморфно пространству $Q(k)$.*

В дальнейшем мы будем использовать следующие теоремы о вложении пространств $B(k)$, $Q(k)$ и $Q(k) \times C$ в абсолютные A-множества.

Теорема 2 [11]. *Пусть X — метрическое пространство первой категории, в котором $w(U) \geq \tau$ для любого непустого открытого множества $U \subset X$. Тогда X содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное пространству $Q(\tau)$.*

Теорема 3 [8]. *Пусть дано A-множество Y в полном метрическом пространстве X и дан кардинал k, где $\omega \leq k \leq w(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. *Множество Y не представимо в виде $Y = F \cup L$, где $F \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ и $L \in \mathscr{L}_k$.*

2. *Множество $Z = X \backslash Y$ не представимо в виде $Z = G \backslash L$, где $G \in \mathscr{G}_\delta(X)$ и $L \in \mathscr{L}_k$.*

3. *Существует такое замкнутое множество $M \subseteq X$, что $M \approx B^*(k)$, $M \cap Y \approx B(k)$, $M \cap Z \approx Q(k)$ и $M \cap Z$ всюду плотно в M.*

Теорема 4 [5]. *Пусть Y и Z — A-множества в полном метрическом пространстве X и дан кардинал k, причем $Z = X \backslash Y$ и $\omega \leq k \leq w(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. *Множество Y не представимо в виде $Y = (F \cup L) \setminus D$, где $F \in \mathscr{F}_\sigma(X)$, $L \in \mathscr{L}_k$ и D — σ-дискретное множество.*

2. *Множество Z не представимо в виде $Z = (G \setminus L) \cup D$, где $G \in \mathscr{G}_\delta(X)$, $L \in \mathscr{L}_k$ и D — σ-дискретное множество.*

3. *Существует такое замкнутое множество $M \subseteq X$, что $M \approx B^*(k)$, $M \cap Y \approx B(k)$ и $M \cap Z \approx Q(k) \times C$.*

2. Описание пространств $T(k,\tau)$ и $S(k,\tau)$

Предварительно напомним одну конструкцию из [7], позволяющую с помощью одного h-однородного пространства Y построить другое h-однородное пространство.

Фиксируем h-однородное пространство Y. Для нульмерного пространства X по трансфинитной индукции построим последовательность множеств X_α следующим образом: $X_0 = X$, $X_{\alpha+1} = X_\alpha \setminus \cup\{U \colon U$ — открыто-замкнутое подмножество X_α и U гомеоморфно замкнутому нигде не плотному подмножеству из $Y\}$ и $X_\alpha = \cap\{X_\beta \colon \beta < \alpha\}$, если α — предельный ординал. Введем класс пространств $\mathscr{R}(Y) = \{X \colon \dim X = 0, \exists\, \alpha\, (X_\alpha = \varnothing)\}$. Для h-однородного пространства Y и кардинала k, где $w(Y) \leq k$, обозначим через $\mathscr{K}(Y,k)$ класс пространств X, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $\dim X = 0$; 2) $X = G \cup L$, причем $G \cap L = \varnothing$; 3) множество G всюду плотно в X и гомеоморфно $B(k)$; 4) если множество F замкнуто в X и $F \subset L$, то $F \in \mathscr{R}(Y)$; 5) для любого непустого открыто-замкнутого множества $U \subset X$ существует такое замкнутое множество F, что $F \subset U \cap L$ и $F \approx Y$. Из этого описания следует, что X — однородное по весу пространство веса k и множество L всюду плотно в X.

Теорема 5 [7]. *Пусть дано h-однородное пространство Y первой категории и дан кардинал k. Если $X_1 \in \mathscr{K}(Y,k)$ и $X_2 \in \mathscr{K}(Y,k)$, то X_1 и X_2 — гомеоморфные пространства.*

Для кардиналов τ и k, где $\omega \leq \tau \leq k$, построим пространство $T(k,\tau)$. В пространстве $B^*(\tau)$ возьмем всюду плотное множество $Q_1 \approx Q(\tau)$, а в пространстве $B^*(k)$ — всюду плотное множество $Q_2 \approx Q(k)$. Положим $T(k,\tau) = (B^*(\tau) \times (B^*(k) \setminus Q_2)) \cup (Q_1 \times Q_2)$.

Теорема 6. *Пусть для некоторых кардиналов τ и k, где $\omega \leq \tau \leq k$, пространство X удовлетворяет следующим условиям: $X \in \mathscr{E}_k$, $X \in \mathscr{G}_\delta + \mathscr{L}_\omega$, $X \in \mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_{\tau^+}$, X нигде не σ-дискретно и нигде не типа $\mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_\tau$. Тогда X гомеоморфно $T(k,\tau)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что пространство $T = T(k,\tau)$ удовлетворяет всем ограничениям, наложенным на пространство X. Ясно, что $T \in \mathscr{E}_k$. Далее, $B^*(\tau) \times (B^*(k) \backslash Q_2) \approx B(k)$, а $Q_1 \times Q_2 \approx Q(k)$. Значит, $T \in \mathscr{G}_\delta + \mathscr{L}_\omega$. По построению,

$$T = (B^*(\tau) \times B^*(k)) \setminus ((B^*(\tau) \setminus Q_1) \times Q_2) \in \mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_{\tau^+},$$

ведь $(B^*(\tau)\setminus Q_1)\times Q_2 \in \mathscr{L}_{\tau^+}$. Так как T содержит всюду плотное подмножество, гомеоморфное $B(k)$, то T нигде не σ-дискретно. Из h-однородности пространства $Q(\tau)$ и определения тихоновской топологии следует, что любое непустое открыто-замкнутое множество $V\subset T$ содержит замкнутое подмножество $V\cap(Q_1\times\{q\})$ для некоторой точки $q\in Q_2$, которое гомеоморфно $Q(\tau)$. Поэтому T нигде не типа $\mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_\tau$ по теореме 3.

По условию $X = G\cup L$, где $G\in\mathscr{G}_\delta$ и $L\in\mathscr{L}_\omega$. Так как $G\setminus L\in\mathscr{G}_\delta$, то можно считать, что $G\cap L=\varnothing$. По условию X нигде не σ-дискретно и нигде не $\mathscr{G}_\delta$, поэтому множества G и L всюду плотны в X. Так как $X\in\mathscr{E}_k$, то $G\in\mathscr{E}_k$. Поэтому $G\approx B(k)$ по теореме Стоуна [1].

Из теоремы 1 следует, что $Q(\tau)$ и $Q\times Q(\tau)$ — гомеоморфные пространства. Тогда в $Q(\tau)$ семейства замкнутых множеств и замкнутых нигде не плотных множеств совпадают. Возьмем замкнутое в X множество $F\subset L$. Определим по индукции последовательность множеств F_α следующим образом: $F_0 = F$, $F_{\alpha+1} = F_\alpha\setminus\cup\{U$ — открыто-замкнутое множество в $F_\alpha\colon U$ гомеоморфно замкнутому множеству из $Q(\tau)\}$ и $F_\alpha = \cap\{F_\beta\colon \beta<\alpha\}$ для предельного ординала α. Множества $\{F_\alpha\}$ образуют трансфинитную убывающую последовательность замкнутых множеств, поэтому найдется такой ординал α^*, что $F_{\alpha^*} = F_{\alpha^*+1}$. Покажем, что $F_{\alpha^*}=\varnothing$.

Допустим, что $F_{\alpha^*}\neq\varnothing$. Согласно [3, следствие 3] любое σ-дискретное пространство веса $\leq\tau$ гомеоморфно замкнутому множеству из $Q(\tau)$. По построению в F_{α^*} нет открытых множеств веса $\leq\tau$. Тогда σ-дискретное множество F_{α^*} является пространством первой категории и по теореме 2 множество F_{α^*} (следовательно, и пространство X) содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное $Q(\tau^+)$. По теореме 3 получаем, что $X\notin\mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_{\tau^+}$. Это противоречит определению пространства X, значит, допущение неверно и $F_{\alpha^*}=\varnothing$.

Далее, так как X нигде не типа $\mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_\tau$, то по теореме 3 любое открыто-замкнутое множество $U\subset X$ содержит замкнутую копию H пространства $Q(\tau)$. Множество $G\cap H$ нигде не плотно в H, поэтому существует такое замкнутое множество $H_1\subset H$, что $H_1\approx Q(\tau)$ и $H_1\cap G=\varnothing$, значит, $H_1\subset L$. Итак, $X\in\mathscr{K}(Q(\tau),k)$. Тогда $X\approx T(k,\tau)$ по теореме 5. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Ван Дауэн [6] описал сепарабельное h-однородное пространство $\mathscr{T}$, которое можно представить в виде объединения пространств Q и $\mathscr{N}$ и которое нигде не σ-компактно и является нигде не абсолютным G_δ-множеством. Отметим, что $\mathscr{T}\approx T(\omega,\omega)$.

Для кардиналов τ и k, где $\omega\leq\tau\leq k$, построим пространство $S(k,\tau)$. В пространстве $B^*(\tau)$ возьмем всюду плотное множество $Q_1\approx Q(\tau)\times C$, а в пространстве $B^*(k)$ — всюду плотное множество $Q_2\approx Q(k)$. Положим $S(k,\tau) = (B^*(\tau)\times(B^*(k)\setminus Q_2))\cup(Q_1\times Q_2)$.

Теорема 7. *Пусть для некоторых кардиналов τ и k, где $\omega\leq\tau\leq k$, пространство X удовлетворяет следующим условиям: $X\in\mathscr{E}_k$, $X\in\mathscr{G}_\delta + \mathscr{AF}_\sigma$, $X\in\mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_{\tau^+}$, X нигде не типа $\mathscr{AF}_\sigma$ и нигде не типа $(\mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_\tau) + \mathscr{L}_\omega$. Тогда X гомеоморфно $S(k,\tau)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя теорему 4, легко убедиться, что само пространство $S(k,\tau)$ удовлетворяет всем ограничениям, наложенным на пространство X.

По условию $X = G\cup L$, где $G\in\mathscr{G}_\delta$ и $L\in\mathscr{AF}_\sigma$. Так как $G\setminus L\in\mathscr{G}_\delta$, то можно считать, что $G\cap L=\varnothing$. По условию X нигде не $\mathscr{AF}_\sigma$ и нигде не $\mathscr{G}_\delta$, поэтому множества G и L всюду плотны в X. Так как $X\in\mathscr{E}_k$, то $G\in\mathscr{E}_k$; поэтому $G\approx B(k)$ по теореме Стоуна [1].

Из теоремы 1 следует, что $Q(\tau)\times C$ и $Q\times Q(\tau)\times C$ — гомеоморфные пространства, поэтому в $Q(\tau)\times C$ семейства замкнутых множеств и замкнутых нигде не плотных множеств совпадают. Возьмем замкнутое в X множество $F\subset L$. Определим по индукции последовательность множеств F_α следующим образом: $F_0=F$, $F_{\alpha+1} = F_\alpha\setminus\cup\{U$ — открыто-замкнутое множество в $F_\alpha\colon U$ гомеоморфно замкнутому множеству из $Q(\tau)\times C\}$ и $F_\alpha=\cap\{F_\beta\colon\beta<\alpha\}$ для предельного ординала α. Множества $\{F_\alpha\}$ образуют трансфинитную убывающую последовательность замкнутых множеств, поэтому найдется такой ординал α^*, что $F_{\alpha^*}=F_{\alpha^*+1}$.

Покажем, что $F_{\alpha^*}=\varnothing$. Допустим, что $F_{\alpha^*}\neq\varnothing$. Тогда $F_{\alpha^*}\in\mathscr{AF}_\sigma$, так как F_{α^*} замкнуто в L. По построению F_{α^*} не содержит открытых множеств, которые гомеоморфны замкнутым множествам из $Q(\tau)\times C$. Но любое нульмерное $\mathscr{AF}_\sigma$-множество веса $\leq\tau$ гомеоморфно замкнутому множеству из $Q(\tau)\times C$. Поэтому F_{α^*} является множеством первой категории и нигде не локально веса $\leq\tau$. Тогда F_{α^*} содержит замкнутую копию пространства $Q(\tau^+)$ по теореме 2. По теореме 3 получаем, что $X \notin \mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_{\tau^+}$. Это противоречит определению пространства X, значит, допущение неверно и $F_{\alpha^*} = \varnothing$.

Далее, так как X нигде не типа $(\mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_\tau) + \mathscr{L}_\omega$, то по теореме 4 любое открыто-замкнутое множество $U \subset X$ содержит замкнутую копию H пространства $Q(\tau)\times C$. Так как $Q(\tau)\times C$ — h-однородное пространство первой категории, то множество $G\cap H$ нигде не плотно в H, поэтому существует такое замкнутое множество $H_1 \subset H$, что $H_1 \approx Q(\tau)\times C$ и $H_1\cap G = \varnothing$, значит, $H_1 \subset L$. Таким образом, $X \in \mathscr{K}(Q(\tau)\times C, k)$. Тогда $X \approx S(k,\tau)$ по теореме 5. □

Следствие 1. *Для любых кардиналов τ и k, где $\omega \leq \tau \leq k$, пространства $S(k,\tau)$ и $T(k,\tau)$ являются h-однородными.*

З а м е ч а н и е 2. Ван Милл [6] построил сепарабельное h-однородное пространство $\mathscr{S}$, которое можно представить в виде объединения пространств $Q\times C$ и $\mathscr{N}$ и которое нигде не σ-компактно и нигде не типа $\mathscr{G}_\delta + \mathscr{L}_\omega$. Легко проверить, что $\mathscr{S} \approx S(\omega,\omega)$.

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что если $\tau_1 \neq \tau_2$, то пространство $T(k,\tau_1)$ не гомеоморфно пространству $T(k,\tau_2)$, а пространство $S(k,\tau_1)$ не гомеоморфно пространству $S(k,\tau_2)$.

Теорема 8. *Если $\omega \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq k$, то пространство $S(k,\tau_2)$ содержит замкнутое нигде не плотное множество, гомеоморфное пространству $S(k,\tau_1)$, а пространство $T(k,\tau_2)$ содержит замкнутое нигде не плотное множество, гомеоморфное пространству $T(k,\tau_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пространстве $B_i = B^*(\tau_i)$ возьмем всюду плотное множество $Q_i \approx Q(\tau_i)\times C$, где $i = 1, 2$, а в пространстве $B_3 = B^*(k)$ возьмем всюду плотное множество $Q_3 \approx Q(k)$. Произведение $G = B_1\times B_2\times(B_3 \setminus Q_3)$ гомеоморфно $B(k)$. Произведение $L = Q_1\times Q_2\times Q_3$ гомеоморфно $Q(k)\times C$ и $L \in \mathscr{AF}_\sigma$. По построению G и L — всюду плотные подмножества в произведении $B_1\times B_2\times B_3$. По теореме 7 множество $X = G\cup L$ из $B_1\times B_2\times B_3$ гомеоморфно $S(k,\tau_2)$. Зафиксируем точку $q \in Q_2$. Тогда пересечение $X \cap (B_1 \times \{q\} \times B_3)$ гомеоморфно $S(k,\tau_1)$ и является замкнутым нигде не плотным множеством в X.

Аналогично проверяется вторая часть теоремы. □

Теорема 9. *Если $\omega \leq \tau \leq k$, то пространство $S(k,\tau)$ содержит замкнутое нигде не плотное множество, гомеоморфное пространству $T(k,\tau)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B_1 = B_2 = B^*(\tau)$ и $B_3 = B^*(k)$. Для $i \in \{1,2,3\}$ в пространстве B_i возьмем всюду плотное множество Q_i, причем $Q_1 \approx Q(\tau)$, $Q_2 \approx Q(\tau)\times C$ и $Q_3 \approx Q(k)$. Произведение $G = B_1 \times B_2 \times (B_3\backslash Q_3)$ гомеоморфно $B(k)$. Произведение $L = Q_1\times Q_2\times Q_3$ гомеоморфно $Q(k)\times C$. По теореме 7 множество $X = G\cup L$ из произведения $B_1 \times B_2 \times B_3$ гомеоморфно $S(k,\tau)$. Зафиксируем точку $q \in Q_2$. Пересечение $X \cap (B_1\times\{q\}\times B_3)$ является замкнутым нигде не плотным множеством в X и гомеоморфно $T(k,\tau)$. □

3. Вложение пространства $T(k,\tau)$

Теорема 10. *Пусть Y — подмножество полного метрического пространства X. Пусть даны такие кардиналы τ и k, что $\omega \leq \tau \leq k \leq w(X)$. Если множество Y представимо в виде $Y = (L_1 \cup F_1) \setminus (L_2 \cup F_2)$, где F_1 и F_2 — множества типа F_σ в X, $L_1 \in \mathscr{L}_k$ и $L_2 \in \mathscr{L}_k$, то Y не содержит замкнутого (в Y) подмножества, гомеоморфного пространству $T(k,\tau)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 8 пространство $T(k,\tau)$ содержит замкнутую копию пространства $T(k,\omega)$, поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что Y не содержит замкнутого множества, гомеоморфного пространству $T(k,\omega)$.

Допустим, что существует замкнутое в Y множество $T \approx T(k,\omega)$. Без ограничения общности считаем, что T всюду плотно в X (иначе перейдем к множеству $X_1 = \overline{T}$), $L_1 \cap F_1 = \varnothing$ и $(L_2 \cup F_2) \subset F_1$ (иначе рассмотрим множество $L_1^* = L_1 \setminus (F_1 \cup L_2 \cup F_2) \in \mathscr{L}_k$).

По определению $T = G \cup L$, где множество G гомеоморфно $B(k)$, $L \cap G = \varnothing$, а множество L σ-дискретно. Расширим множество $L_1 \cup L_2$ до F_σ-множества L_3 так, чтобы $(L_1 \cup L_2) \subseteq L_3$ и $L_3 \in \mathscr{L}_k$. Так как пространство $B(k)$ нигде не $\mathscr{L}_k$, то $L_3 \cap G$ нигде не плотно в G. Поэтому $G \setminus L_3$ имеет тип G_δ в G и всюду плотно в G. Тогда по теореме Стоуна [1] $G \setminus L_3 \approx B(k)$.

С другой стороны, множество $G \setminus L_3 = F_1 \setminus (F_2 \cup L_3 \cup L)$ как пересечение F_σ-множества и G_δ-множества из X представимо в виде $G \setminus L_3 = \cup\{G_i \colon i \in \omega\}$, где каждое множество G_i замкнуто в $G \setminus L_3$ и является абсолютным G_δ-множеством. Так как пространство $T(k, \omega)$ нигде не типа $\mathscr{G}_\delta$, то каждое множество G_i нигде не плотно в T. Следовательно, каждое множество G_i нигде не плотно в $G \setminus L_3$, ведь $G \setminus L_3$ всюду плотно в T. В результате получаем, что множество $G \setminus L_3 \approx B(k)$ является множеством первой категории, что противоречит теореме Бэра о категории [9, теорема 3.9.3]. Значит, наше допущение неверно и такого множества T нет. $\square$

Теорема 11. *Пусть Y и $Z = X \setminus Y$ — A-множества в полном метрическом пространстве X и даны кардиналы k и τ, где $\omega \leq \tau \leq k \leq w(X)$. Пусть множество Y не представимо в виде $Y = (L_1 \cup F_1) \setminus (L_2 \cup F_2)$, где $L_1 \in \mathscr{L}_k$, $L_2 \in \mathscr{L}_\tau$, F_1 и F_2 — множества типа F_σ в X. Тогда существует такое замкнутое множество $M \subseteq X$, что $M \cap Y \approx T(k, \tau)$, $M \cap Z \approx Q(k) \times B(\tau)$ и $M \approx B^*(k)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество $\widetilde{U} = \cup\big\{U \subseteq Y \colon U$ открытое множество в Y вида $U = (L_{1U} \cup F_{1U}) \setminus (L_{2U} \cup F_{2U})$, где F_{1U}, F_{2U} — множества типа F_σ в X, $L_{1U} \in \mathscr{L}_k$, $L_{2U} \in \mathscr{L}_\tau$ и $L_{2U} \cup F_{2U} \subset Z\big\}$. Учитывая, что каждое локально $\sigma LW({<}k)$-пространство и в целом является $\sigma LW({<}k)$-пространством [2], а множество локального типа F_σ и в целом имеет тип F_σ (см. [9, задача 4.5.8]), делаем вывод, что $\widetilde{U} = (L_1 \cup F_1) \setminus (L_2 \cup F_2)$, где F_1, F_2 — множества типа F_σ в X, $L_1 \in \mathscr{L}_k$, $L_2 \in \mathscr{L}_\tau$ и $L_2 \cup F_2 \subset Z$. Так как $\widetilde{U}$ открыто в Y, то множество $D = Y \setminus \widetilde{U}$ замкнуто в Y. Из условия теоремы следует, что $D \neq \varnothing$.

Рассмотрим множество $E = \overline{D} \setminus Y = \overline{D} \setminus D$, где $\overline{D}$ — замыкание множества D в X. Ясно, что $E \subset Z$ и $Y \cap E = \varnothing$. Покажем, что E всюду плотно в $\overline{D}$. В самом деле, если бы нашлось непустое открытое в $\overline{D}$ множество U, которое не пересекается с E, то множество $U \cap D = U \cap \overline{D}$ имело бы тип F_σ в X, что противоречит свойствам множества D. Итак, $\overline{E} = D$.

Искомое множество M будет принадлежать множеству $\overline{D}$, поэтому в дальнейшем, для упрощения обозначений, мы будем считать, что $X = \overline{D}$, $Y = D$ и $Z = E$, причем Y нигде не типа $(\mathscr{F}_\sigma + \mathscr{L}_k) - (\mathscr{F}_\sigma + \mathscr{L}_\tau)$.

Доказательство теоремы разобъем на ряд утверждений.

Утверждение 1. *В условиях теоремы* 11 *существуют нульмерное полное метрическое пространство R и непрерывное отображение $\varphi \colon R \to Y$ такие, что $\overline{\varphi(R)} = X$ и для любого непустого открытого множества $V \subseteq R$ верно следующее*:

*t*1) *$\varphi(V)$ нигде не $\sigma LW({<}k)$-пространство*;

*t*2) *существует такое нигде не плотное замкнутое в X множество $F_V \approx B^*(\tau)$, что $F_V \subset \overline{\varphi(V)}$, F_V нигде не плотно в $F_V \cup \varphi(V)$, $F_V \cap Y \approx Q(\tau)$ и $F_V \cap Z \approx B(\tau)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [10, теорема 5.6] существует непрерывное взаимно однозначное ко-σ-дискретное отображение $\varphi \colon P \to Y$, где P — замкнутое подмножество пространства Бэра $B(k_1)$ и $k_1 = w(Y)$. Назовем открытое множество $U \subseteq P$ *особым*, если в пространстве X существуют такие множества $H_{1U} \in \mathscr{L}_k$, $H_{2U} \in \mathscr{L}_\tau$, $F_{1U} \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ и $F_{2U} \in \mathscr{F}_\sigma(X)$, что $\varphi(U) \subseteq (F_{1U} \cup H_{1U}) \setminus (F_{2U} \cup H_{2U}) \subseteq Y$ и $F_{2U} \cup H_{2U} \subset Z$; без ограничения общности можно считать, что $H_{1U} \subset Y$ и $(F_{2U} \cup H_{2U}) \subset (F_{1U} \cap Z)$. Множество $R_1 = \cup\{U \colon U$ — особое множество в $P\}$ открыто в P. Проверим, что R_1 — особое множество в P. Возьмем σ-дискретное покрытие γ множества R_1 из особых множеств. Тогда семейство $\{\varphi(U) \colon U \in \gamma\}$ имеет σ-дискретную базу $\mathscr{B} = \cup\{\mathscr{B}_n \colon n \in \omega\}$, где каждое семейство $\mathscr{B}_n$ ε_n-метрически дискретно в X для некоторого $\varepsilon_n > 0$ (см. [10]). Для каждого $B \in \mathscr{B}$ зафиксируем такое $U_B \in \gamma$, что $B \subseteq \varphi(U_B)$. Множества $F_1^* = \cup\{\overline{B} \cap F_{1U_B} \colon B \in \mathscr{B}\}$ и $F_2^* = \cup\{\overline{B} \cap F_{2U_B} \colon B \in \mathscr{B}\}$ имеют тип F_σ в X, так как они являются счетным объединением множеств локального типа F_σ.

Множество $H_1^* = \cup\{\overline{B}\cap H_{1U_B} : B \in \mathscr{B}\}$ является $\sigma LW(<k)$-пространством как счетное объединение локальных $\sigma LW(<k)$-пространств, а $H_2^* = \cup\{\overline{B} \cap H_{2U_B} : B \in \mathscr{B}\} \in \mathscr{L}_\tau$. По построению $\varphi(R_1) = \cup\mathscr{B} \subseteq Y^* \subseteq Y$, где $Y^* = (F_1^* \cup H_1^*) \setminus (F_2^* \cup H_2^*)$ и $F_2^* \cup H_2^* \subset Z$, следовательно, R_1 — особое множество в P. Так как Y нигде не типа $(\mathscr{F}_\sigma + \mathscr{L}_k) - (\mathscr{F}_\sigma + \mathscr{L}_\tau)$, то множество $Y\setminus Y^* = Y \setminus (H_1^* \cup F_1^*)$ всюду плотно в Y. Без ограничения общности [10] дополнительно можно считать, что H_1^* — множество типа F_σ в Y. Тогда $Y\setminus Y^*$ — всюду плотное множество типа G_δ в Y. Прообраз $R = \varphi^{-1}(Y \setminus Y^*)$ является множеством типа G_δ в P, следовательно, R — нульмерное пространство, на котором можно задать полную метрику. Образ $\varphi(R) = Y \setminus Y^*$ является всюду плотным множеством в Y, а значит, и в X. По построению $R \cap R_1 = \varnothing$.

Проверим свойство $t1$). Возьмем непустое открытое множество $V \subseteq R$. Допустим, что существует открытое в $\varphi(V)$ множество $W \in \mathscr{L}_k$. Возьмем такое открытое в P множество V_1, что $V \cap V_1 = \varphi^{-1}(W)$. Тогда $\varphi(V_1) = \varphi(V) \cup \varphi(V_1 \setminus R) \subset W \cup Y^*$, следовательно, V_1 — особое множество, поэтому $V_1 \subset R_1$. В результате получаем, что $V_1 \cap R = \varnothing$, откуда и $W = \varnothing$.

Проверим свойство $t2$). Пусть $V = V_1 \cap R$, где множество V_1 открыто в P. Тогда $\varphi(V_1) = \varphi(V) \cup \varphi(V_1 \setminus R) \subset \overline{\varphi(V)} \cup Y^*$. Так как множество $\overline{\varphi(V)}$ замкнуто в X, то пересечение $\overline{\varphi(V)} \cap Z$ непусто и не $(\mathscr{F}_\sigma + \mathscr{L}_\tau)$-множество (иначе V_1 окажется особым множеством). Тогда по теореме 3 существует такое замкнутое в $\overline{\varphi(V)}$ (следовательно, и в X) множество $F_V \subseteq \overline{\varphi(V)}$, что F_V гомеоморфно пространству $B^*(\tau)$, $F_V \cap Z \approx B(\tau)$ и $F_V \cap Y \approx Q(\tau)$, причем множество $F_V \cap Y$ всюду плотно в F_V. Проверим, что F_V нигде не плотно в $F_V \cup \varphi(V)$. Возьмем произвольное непустое открытое в $F_V \cup \varphi(V)$ множество W. Так как $F_V \subseteq \overline{\varphi(V)}$, то $W \cap \varphi(V)$ — непустое открытое подмножество $\varphi(V)$. Допустим, что $W \subset F_V$. Тогда $W \cap (F_V \cap Y) = W \cap Y \neq \varnothing$. По построению $W \cap Y$ — σ-дискретное множество. Так как $W \cap \varphi(V) \subseteq W \cap Y$, то и множество $W \cap \varphi(V)$ будет σ-дискретным. А это противоречит свойству $t1$). Поэтому случай $W \subset F_V$ невозможен. Так как множество F_V замкнуто в $F_V \cup \varphi(V)$, то открытое в $F_V \cup \varphi(V)$ множество $W \setminus F_V$ непусто. Следовательно, F_V нигде не плотно в $F_V \cup \varphi(V)$. □

Продолжаем д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Зафиксируем полную ограниченную метрику d на пространстве R и полную ограниченную метрику ρ на пространстве X, которые порождают исходные топологии на пространствах R и X соответственно.

Рассмотрим подробно случай $k > \omega$. Индукцией по n, где $n \in \omega$, построим замкнутые нигде не плотные в X множества $Z(s;\alpha)$, системы $\mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)$, где $i \in \omega$, из открытых в X множеств, открытые в X множества $V(s;\alpha)$, открыто-замкнутые множества $R(s;\alpha) \subset R$, семейства множеств $\mathscr{V}(s;\alpha) = \{V(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n) : i \in \omega, \alpha_n \in k\}$ и $\mathscr{R}(s;\alpha) = \{\varphi(R(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n)) : i \in \omega, \alpha_n \in k\}$, связанные следующими соотношениями при любых фиксированных $s \in \omega^n, \alpha \in k^n, n \in \omega$ (чертой сверху обозначаем замыкание множества в X):

$v1$) $Z(s;\alpha) \approx B^*(\tau)$, $Z(s;\alpha) \cap Y \approx Q(\tau)$ и $Z(s;\alpha) \cap Z \approx B(\tau)$;

$v2$) $Z(s;\alpha) \subset \overline{\varphi(R(s;\alpha))}$ и $Z(s;\alpha)$ нигде не плотно в $Z(s;\alpha) \cup \varphi(R(s;\alpha))$;

$v3$) для любого $i \in \omega$ семейство $\mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)$ образует дискретное покрытие множества $Z(s;\alpha)$ мелкости $\le 2^{-|s|-i}$, причем $\cap\{\bigcup \mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha) : i \in \omega\} = Z(s;\alpha)$;

$v4$) $\mathrm{cl}_X(\cup\mathscr{V}(s;\alpha)) = Z(s;\alpha) \cup (\bigcup[\mathscr{V}(s;\alpha)])$ и $Z(s;\alpha) \cap (\bigcup[\mathscr{V}(s;\alpha)]) = \varnothing$;

$v5$) $\mathrm{cl}_X(\cup\mathscr{R}(s;\alpha)) = Z(s;\alpha) \cup (\bigcup[\mathscr{R}(s;\alpha)])$ и $Z(s;\alpha) \cap (\bigcup[\mathscr{R}(s;\alpha)]) = \varnothing$;

$v6$) $\operatorname{diam} V(s;\alpha) \le 2^{-|s|-n}$ и $\operatorname{diam} R(s;\alpha) \le 2^{-n}$;

$v7$) $\overline{V(s;\alpha)} \cap \overline{V(t;\beta)} = \varnothing$, если $(s;\alpha) \neq (t;\beta)$ для $t \in \omega^n, \beta \in k^n$;

$v8$) семейство $\{V(s;\beta) : \beta \in k^n\}$ дискретно в X для любого фиксированного $s \in \omega^n$;

$v9$) семейство $[\mathscr{U}(s\hat{}(i+1);\alpha)]$ вписано в семейство $\mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)$ для любого $i \in \omega$, при этом семейство $\mathscr{U}(s\hat{}0;\alpha)$ содержит ровно одно множество $V(s;\alpha)$;

$v10$) для любого $i \in \omega$ и любого $U \in \mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)$ множество $\triangle\, U = U \setminus \overline{\cup[\mathscr{U}(s\hat{}(i+1);\alpha)]}$ непусто и содержит k множеств из семейства $\{\overline{V(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n)} : \alpha_n \in k\}$;

$v11$) для любого $i \in \omega$ и любого $U \in \mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)$ пересечение $\triangle\, U \cap \varphi(R(s;\alpha))$ непусто;

$v12$) $\overline{\varphi(R(s;\alpha))} \subset V(s;\alpha)$ и $R(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n) \subset R(s;\alpha)$ для любых $i \in \omega$ и $\alpha_n \in k$.

База индукции $n = 0$. Положим $V(\Lambda;\Lambda) = X$ и $R(\Lambda;\Lambda) = R$. По утверждению 1 существует замкнутое в X множество $Z(\Lambda;\Lambda) \subset \overline{\varphi(R(\Lambda;\Lambda))}$, которое гомеоморфно $B^*(\tau)$ и нигде не плотно в объединении $Z(\Lambda;\Lambda) \cup \varphi(R(\Lambda;\Lambda))$, причем $Z(\Lambda;\Lambda) \cap Y \approx Q(\tau)$ и $Z(\Lambda;\Lambda) \cap Z \approx B(\tau)$. Пусть семейство $\mathscr{U}(0;\Lambda)$ состоит из одного множества $V(\Lambda;\Lambda)$. В силу нульмерности множества $Z(\Lambda;\Lambda)$ для любого $i \in \omega$, $i \geq 1$, существует дискретное покрытие $\gamma(i;\Lambda) = \{W(i;\Lambda;\lambda)\colon \lambda \in A(i;\Lambda)\}$ множества $Z(\Lambda;\Lambda)$, состоящее из открыто-замкнутых в $Z(\Lambda;\Lambda)$ множеств диаметра $\leq 2^{-i-1}$, причем индексное множество $A(i;\Lambda)$ равно τ при $\tau > \omega$ и конечно при $\tau = \omega$. При этом считаем, что каждое покрытие $\gamma(i+1;\Lambda)$ вписано в $\gamma(i;\Lambda)$. По свойствам метрических пространств для любого $i \in \omega$ существует такое дискретное в X семейство $\mathscr{U}(i;\Lambda) = \{U(i;\Lambda;\lambda)\colon \lambda \in A(i;\Lambda)\}$, состоящее из открытых в X множеств диаметра $\leq 2^{-i}$, что семейство $\gamma(i;\Lambda)$ вписано в $\mathscr{U}(i;\Lambda)$. Без ограничения общности можно считать, что $\cap\{\cup\mathscr{U}(i;\Lambda)\colon i \in \omega\} = Z(\Lambda,\Lambda)$ и семейство $[\mathscr{U}(i+1;\Lambda)]$ вписано в $\mathscr{U}(i;\Lambda)$ для любого $i \in \omega$, причем для любого $U \in \mathscr{U}(i;\Lambda)$ множество $\triangle U = U \setminus \overline{\cup[\mathscr{U}(i+1;\Lambda)]}$ непусто. Поэтому $\triangle U \cap \varphi(R(\Lambda;\Lambda)) \neq \varnothing$, ведь $\varphi(R(\Lambda;\Lambda))$ всюду плотно в X. Применяя свойство $t1$) из утверждения 1, для любого $U \in \mathscr{U}(i;\Lambda)$ найдем такое дискретное в X семейство $\{W(i;\beta;U)\colon \beta \in k\}$ из открытых множеств диаметра $\leq 2^{-i-1}$, что $\overline{W(i;\beta;U)} \subset \triangle\, U$ для любого $\beta \in k$. Так как мощность семейства $\mathscr{U}(i;\Lambda)$ не превосходит τ и $\tau \leq k$, то семейство $\{W(i;\beta;U)\colon U \in \mathscr{U}(i;\Lambda), \beta \in k\}$ при фиксированном i можно переиндексировать в семейство $\{V(i;\alpha)\colon \alpha \in k\}$. Из дискретности семейства $\mathscr{U}(i;\Lambda)$ вытекает, что семейство $\{V(i;\alpha)\colon \alpha \in k\}$ дискретно в X. Из непрерывности отображения φ следует, что для любых $i \in \omega$ и $\alpha \in k$ существует такое открыто-замкнутое множество $R(i;\alpha) \subset R(\Lambda;\Lambda)$ диаметра $\leq 2^{-1}$, что $\overline{\varphi(R(i;\alpha))} \subset V(i;\alpha)$. При фиксированном i в силу дискретности семейства $\{V(i;\alpha)\colon \alpha \in k\}$ получаем, что семейство $\{R(i;\alpha)\colon \alpha \in k\}$ дискретно в R.

Пусть $\mathscr{V}(\Lambda;\Lambda) = \{V(i;\alpha)\colon i \in \omega, \alpha \in k\}$ и $\mathscr{R}(\Lambda;\Lambda) = \{\varphi(R(i;\alpha))\colon i \in \omega, \alpha \in k\}$. Несложно проверить, что $\mathrm{cl}_X(\cup\mathscr{V}(\Lambda;\Lambda)) = Z(\Lambda;\Lambda) \cup (\bigcup[\mathscr{V}(\Lambda;\Lambda)])$ и $\mathrm{cl}_X(\cup\mathscr{R}(\Lambda;\Lambda)) = Z(\Lambda;\Lambda) \cup (\bigcup[\mathscr{R}(\Lambda;\Lambda)])$, причем $Z(\Lambda;\Lambda) \cap \big(\bigcup[\mathscr{V}(\Lambda;\Lambda)]\big) = \varnothing$. Итак, условия $v1$)–$v12$) выполняются при $n = 0$.

Индуктивный переход. Зафиксируем $s \in \omega^n$, $\alpha \in k^n$ и $n \in \omega$. По утверждению 1 существует замкнутое множество $Z(s;\alpha)$, которое удовлетворяет условиям $v1$) и $v2$). Пусть семейство $\mathscr{U}(s\hat{}0;\alpha)$ состоит из одного множества $V(s;\alpha)$. Так как $\dim Z(s;\alpha) = 0$, то для любого $i \geq 1$ существует дискретное открыто-замкнутое покрытие $\gamma(s\hat{}i;\alpha) = \{W(s\hat{}i;\alpha;\lambda)\colon \lambda \in A(s\hat{}i;\alpha)\}$ множества $Z(s;\alpha)$ мелкости $\leq 2^{-|s|-i-1}$, причем индексное множество $A(s\hat{}i;\alpha)$ равно τ при $\tau > \omega$ и конечно при $\tau = \omega$, а покрытие $\gamma(s\hat{}(i+1);\alpha)$ вписано в $\gamma(s\hat{}i;\alpha)$. Для любого $i \in \omega$ найдем такое дискретное в X открытое семейство $\mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha) = \{U(s\hat{}i;\alpha;\lambda)\colon \lambda \in A(s\hat{}i;\alpha)\}$ мелкости $\leq 2^{-|s|-i}$, что $\{Z(s;\alpha) \cap U\colon U \in \mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)\} = \gamma(s\hat{}i;\alpha)$ и выполняются условия $v3$), $v9$)–$v11$). Применяя свойство $t1$), для каждого $U \in \mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)$ построим такое дискретное в X открытое семейство $\{W(s\hat{}i;\beta;U)\colon \beta \in k\}$ мелкости $\leq 2^{-|s|-i-1}$, что $\overline{W(s\hat{}i;\beta;U)} \subset \triangle\, U$ и $W(s\hat{}i;\beta;U) \cap \varphi(V(s;\alpha)) \neq \varnothing$ для любого $\beta \in k$. Семейство $\{W(s\hat{}i;\beta;U)\colon U \in \mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha), \beta \in k\}$ при фиксированном i переиндексируем в семейство $\{V(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n)\colon \alpha_n \in k\}$. Из дискретности семейства $\mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)$ при фиксированном i вытекают условия $v7$) и $v8$). Используя непрерывность отображения $\varphi\colon R \to Y$, для любых $i \in \omega$ и $\alpha_n \in k$ найдем открыто-замкнутые множества $R(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n) \subset R(s;\alpha)$ диаметра $\leq 2^{-n}$, для которых выполняется условие $v12$). Определим семейства $\mathscr{V}(s;\alpha) = \{V(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n)\colon i \in \omega, \alpha_n \in k\}$ и $\mathscr{R}(s;\alpha) = \{\varphi(R(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n))\colon i \in \omega, \alpha_n \in k\}$. Несложно проверить, что условия $v4$) и $v5$) выполняются. Индуктивный переход закончен.

Для любого $n \in \omega$ рассмотрим конечное индексное множество $S_n = \{s \in \omega^{<\omega}\colon |s| + \mathrm{lh}\, s = n\}$ и семейство $\mathscr{U}_n = \{U \in \mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)\colon s\hat{}i \in S_{n+1},\ i \in \omega,\ \mathrm{lh}\, s = \mathrm{lh}\, \alpha,\ \alpha \in k^{<\omega}\}$. В частности, $\mathscr{U}_0 = \mathscr{U}(0;\Lambda) = \{X\}$.

Утверждение 2. *Семейство $\mathscr{U}_n$ дискретно в X для любого $n \in \omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем два разных множества $U_1 = U(s\hat{}i;\alpha)$ и $U_2 = U(t\hat{}j;\beta)$ из семейства $\mathscr{U}_n$. Если $\mathrm{lh}\, s = \mathrm{lh}\, t$, то из условий $v7$), $v9$) и $v10$) вытекает, что $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \varnothing$. Если $\mathrm{lh}\, s < \mathrm{lh}\, t$, то найдем число $m = \max\{l \in \omega\colon s\hat{}i{\restriction}l = t\hat{}j{\restriction}l\}$. Так как $\mathrm{lh}\,(s\hat{}i) < \mathrm{lh}\,(t\hat{}j)$ и $|s\hat{}i| \leq |t\hat{}j|$, то случай $m = \mathrm{lh}\,(s\hat{}i)$ невозможен. Значит, $m < \mathrm{lh}\,(s\hat{}i)$. Из свойств $v9$) и $v10$) вытекает, что

$U_1 \subset V(s\hat{}i{\restriction}(m+1);\alpha{\restriction}(m+1))$ и $U_2 \subset V(t\hat{}j{\restriction}(m+1);\beta{\restriction}(m+1))$, следовательно, из свойства $v7)$ получаем, что $\overline{U_1}\cap\overline{U_2}=\varnothing$, ведь $s\hat{}i{\restriction}(m+1)\neq t\hat{}j{\restriction}(m+1)$. Случай $\mathrm{lh}\, s > \mathrm{lh}\, t$ разбирается аналогично. Итак, замыкания множеств из семейства $\mathscr{U}_n$ попарно не пересекаются. Множество S_n конечно, поэтому из свойств $v8), v9)$ и $v10)$ следует дискретность семейства $\mathscr{U}_n$ в X. $\square$

Для любого $n\in\omega$ рассмотрим множества $P_n=\cup\{\overline{\varphi(R(s;\alpha))}\colon s\in\omega^n,\ \alpha\in k^n\}$ и $\hat{Z}_n=\cup\{Z(s;\alpha)\colon s\in\omega^l,\alpha\in k^l, l\le n\}$; пусть $M_n=\hat{Z}_n\cup P_{n+1}$. Из свойств $v2)$, $v12)$, $v9)$ и $v10)$ следует, что $M_{n+1}\subset M_n$. Положим $\hat{Z}=\cup\{\hat{Z}_n\colon n\in\omega\}$. Из свойств $v2)$ и $v12)$ вытекает, что $\hat{Z}\subset M_n$ для любого $n\in\omega$. Определим множество $M=\cap\{M_n\colon n\in\omega\}$. Тогда $\hat{Z}\subset M$.

Утверждение 3. *Множество M замкнуто в пространстве X и гомеоморфно бэровскому пространству $B(k)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что множество $\hat{Z}$ всюду плотно в M. Возьмем точку $x\in M\setminus\hat{Z}$ и ее окрестность U_x радиуса 2^{-n}. Тогда $x\in\overline{\varphi(R(s;\alpha))}\subset P_{n+1}$ для некоторых $s\in\omega^{n+1}$ и $\alpha\in k^{n+1}$. Из свойств $v2)$, $v6)$ и $v12)$ вытекает, что пересечение $U_x\cap Z(s;\alpha)$ непусто, следовательно, и пересечение $U_x\cap\hat{Z}$ непусто. В силу произвольности выбора n приходим к выводу, что множество $\hat{Z}$ всюду плотно в M.

Из свойств $v10)$, $v12)$ и $v2)$ следует, что в любой окрестности любой точки $z\in Z(s;\alpha)\subset Z^*$ можно найти k разных множеств вида $Z(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n)$, поэтому $\hat{Z}$ — однородное по весу пространство веса k. Тогда и M — однородное по весу пространство веса k.

Проверим, что каждое множество M_n замкнуто в X. Проведем индукцию по n, где $n\in\omega$. Множество M_0 замкнуто в X согласно свойству $v5)$. Предположим, что M_{n-1} замкнуто в X. Так как $M_n\subset M_{n-1}$, то $\overline{M_n}\subset M_{n-1}$. Возьмем произвольную точку $x\in\overline{M_n}$. Если $x\in\hat{Z}$, то $x\in M_{n-1}$. Пусть $x\notin\hat{Z}$. Тогда $x\in\overline{\varphi(R(s;\alpha))}\subset P_n$ для некоторых $s\in\omega^n$ и $\alpha\in k^n$. Согласно $v7)$ и $v12)$, эти кортежи s и α определяются однозначно. С учетом свойств $v5)$ и $v12)$ получаем

$$x\in\overline{\varphi(R(s;\alpha))}\cap\overline{P_{n+1}}\subset \mathrm{cl}_X\left(\bigcup\{\varphi(R(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n))\colon i\in\omega,\alpha_n\in k\}\right)$$
$$=Z(s;\alpha)\cup\left(\bigcup\{\overline{U}\colon U\in\mathscr{R}(s;\alpha)\}\right).$$

Замыкания множеств из семейства $\mathscr{R}(s;\alpha)$ попарно не пересекаются, поэтому найдутся такие $j\in\omega$ и $\alpha_n\in k$, что $x\in\overline{\varphi(R(s\hat{}j;\alpha\hat{}\alpha_n))}$, следовательно, $x\in P_{n+1}\subset M_n$. Итак, каждое множество M_n замкнуто в X. Тогда множество $M=\cap\{M_n\colon n\in\omega\}$ замкнуто в пространстве X. Так как X — полное метрическое пространство, то и M – полное метрическое пространство.

Докажем, что $\dim M=0$. Сначала проверим, что $M_n\subset\cup\mathscr{U}_n$ для любого $n\in\omega$. Пусть точка $x\in\hat{Z}_n$. Тогда $x\in Z(s;\alpha)$ для некоторых $s\in\omega^l$, $\alpha\in k^l$ и $l\le n$. Обозначим $j=|s|+\mathrm{lh}\, s$. Если $j\le n$, то $s\hat{}(n-j)\in S_{n+1}$ и $x\in\cup\mathscr{U}_n$ по свойству $v3)$. Если $j>n$, то семейство $\mathscr{U}_j$ вписано в $\mathscr{U}_n$. Поэтому $x\in\cup\mathscr{U}_j\subset\cup\mathscr{U}_n$. Далее, пусть точка $x\in P_{n+1}$. Согласно $v12)$ получаем, что $x\in\overline{\varphi(R(s;\alpha))}\subset V(s;\alpha)$ для некоторых $s\in\omega^{n+1}$ и $\alpha\in k^{n+1}$. Но $\mathscr{U}(s\hat{}0;\alpha)=\{V(s;\alpha)\}$ и $j=|s\hat{}0|+\mathrm{lh}\, s+1>n+1$. Поэтому $x\in\cup\mathscr{U}_j\subset\cup\mathscr{U}_n$. Включение $M_n\subset\cup\mathscr{U}_n$ доказано.

Из утверждения 2 следует, что для любого $n\in\omega$ семейство $\{U\cap M\colon U\in\mathscr{U}_n\}$ образует дискретное покрытие множества M мелкости $\le 2^{-n}$. Согласно [9, теорема 7.3.1] получаем, что $\dim M=0$. Итак, M — нульмерное однородное по весу полное метрическое пространство веса k. Тогда по теореме Стоуна [1] $M\approx B(k)$. $\square$

Утверждение 4. 1) *$\hat{Z}$ — множество первой категории и типа F_σ в пространстве X.*
2) *$M\cap Z=\hat{Z}\cap Z\approx Q(k)\times B(\tau)$ и $M\cap Y\approx T(k,\tau)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим по индукции, что каждое множество $\hat{Z}_n$ замкнуто в X. Множество $\hat{Z}_0=Z(\Lambda,\Lambda)$ было выбрано замкнутым. По построению множество $\hat{Z}_{n+1}\setminus\hat{Z}_n$ является объединением дизъюнктного семейства замкнутых множеств $\{Z(s;\alpha)\colon s\in\omega^{n+1},\alpha\in k^{n+1}\}$, причем множество $\hat{Z}_n$ состоит из предельных точек для множества $\hat{Z}_{n+1}\setminus\hat{Z}_n$ (это вытекает из свойств $v2)$ и $v4)$). Поэтому из индуктивного предположения о замкнутости множества $\hat{Z}_n$ следует замкнутость множества $\hat{Z}_{n+1}$.

Далее, из свойств $v3$) и $v10$) вытекает, что внутри любой окрестности произвольной точки $x \in Z(s;\alpha)$ найдется открытое в $\hat{Z}_{n+1}$ множество вида $Z(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n)$, которое не пересекается с $\hat{Z}_n$, следовательно, множество $\hat{Z}_n$ нигде не плотно в $\hat{Z}_{n+1}$, поэтому множество $\hat{Z}_n$ нигде не плотно и в $\hat{Z}$. Итак, доказано, что $\hat{Z} = \cup\{\hat{Z}_n \colon n \in \omega\}$ — множество первой категории и типа F_σ в пространстве X.

Из свойств $v2$), $v12$) и $v8$) вытекает, что множество $Z^*(s) = \cup\{Z(s;\alpha)\colon \alpha \in k^n\}$ замкнуто в X для любого фиксированного $s \in \omega^n$. Поэтому каждое множество $Z^*(s)\cap Z$ замкнуто в Z и гомеоморфно прямой сумме k копий бэровского пространства $B(\tau)$ по свойству $v1$). Множество индексов $\{s \in \omega^{<\omega}\}$ счетно, следовательно, множество $Z \cap \hat{Z}$ является счетным объединением непересекающихся абсолютных G_δ-множеств вида $Z^*(s)\cap Z$. В ходе доказательства утверждения 3 было показано, что $\hat{Z} \in \mathscr{E}_k$, поэтому и $\hat{Z} \cap Z \in \mathscr{E}_k$. Так как $Z^*(s)\cap Z$ — множество первой категории, то по [7, следствие 4] множество $Z \cap \hat{Z}$ гомеоморфно произведению $Q(k) \times B(\tau)$.

Проверим, что $M \setminus \hat{Z} \subset Y$. Возьмем точку $y \in M \setminus \hat{Z}$. Тогда $y \in P_n$ для любого $n \in \omega$. Из свойств $v2$), $v12$) и $v7$) следует, что существуют единственные кортежи $s(y,n) \in \omega^n$ и $\alpha(y,n) \in k^n$ такие, что $y \in \overline{\varphi(R(s(y,n);\alpha(y,n)))}$. С учетом свойства вложенности $v12$) построим последовательности $\lambda \in \omega^\omega$ и $\delta \in k^\omega$ так, что $\lambda{\restriction}n = s(y,n)$ и $\delta{\restriction}n = \alpha(y,n)$ для любого $n \in \omega$. По теореме о вложенных шарах [9, теорема 4.3.8] в полном метрическом пространстве R в силу $v6$) пересечение $\cap\{\varphi(R(\lambda{\restriction}n, \delta{\restriction}n))\colon n \in \omega\}$ непусто и состоит из одной точки x. Тогда $\varphi(x) = y \in Y$. Итак, $M \setminus \hat{Z} \subset Y$. Тогда $M \cap Z = \hat{Z} \cap Z$, следовательно, $M \cap Z \approx Q(k) \times B(\tau)$.

Множество $M\setminus\hat{Z}$ имеет тип G_δ и всюду плотно в M, поэтому $M\setminus\hat{Z} \approx B(k)$ (см. [1]). Так как $\hat{Z} \in \mathscr{F}_\sigma(X)$, то из $v1$) следует, что $Y\cap\hat{Z}$ — σ-дискретное множество. Кроме этого, из свойства $v1$) и теоремы 3 следует, что Y нигде не $\mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_\tau$. Так как $M \cap Z \in \mathscr{L}_{\tau^+}$, то по теореме 6, примененной к пространству M, получаем, что $M \cap Y \approx T(k,\tau)$. □

Для случая $k > \omega$ доказательство теоремы 11 окончено.

В случае $k = \omega$ доказательство упрощается; укажем на основные изменения. Вместо множеств $Z(s;\alpha)$, $V(s;\alpha)$ и $R(s;\alpha)$, систем $\mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)$, $\mathscr{V}(s;\alpha)$ и $\mathscr{R}(s;\alpha)$ строим множества $Z(s)$, $V(s)$ и $R(s)$, системы $\mathscr{U}(s\hat{}i)$, $\mathscr{V}(s) = \{V(s\hat{}i)\colon i \in \omega\}$ и $\mathscr{R}(s) = \{\varphi(R(s\hat{}i))\colon i \in \omega\}$, удовлетворяющие условиям $v1$)–$v12$), если везде опустить второй индекс α. При этом каждое множество $Z(s) \approx C$ является компактом, следовательно, каждое покрытие $\mathscr{U}(s\hat{}i)$ множества $Z(s)$ будет конечным, а тогда и дискретное покрытие $\mathscr{U}_n$ множества M будет конечным для любого $n \in \omega$; при этом $\mathrm{mesh}\mathscr{U}_n \le 2^{-n}$. Отсюда вытекает, что множество M вполне ограничено в полном метрическом пространстве X, следовательно, M — нульмерный компакт без изолированных точек. Тогда по теореме Брауэра $M \approx C$. Теорема 11 доказана.

Теорема 12. *Пусть Y и Z — A-множества в полном метрическом пространстве X, причем $Z = X \setminus Y$. Тогда для любых кардиналов k и τ, где $\omega \le \tau \le k \le w(X)$, следующие условия эквивалентны*:

1. *Множество Y не представимо в виде $Y = (F_1\cup L_1)\setminus(F_2\cup L_2)$, где F_1 и F_2 — множества типа F_σ в X, $L_1 \in \mathscr{L}_k$ и $L_2 \in \mathscr{L}_\tau$.*

2. *Множество Z не представимо в виде $Z = (G \setminus L_1) \cup (F \cup L_2)$, где G — множество типа G_δ в X, F — множество типа F_σ в X, $L_1 \in \mathscr{L}_k$ и $L_2 \in \mathscr{L}_\tau$.*

3. *Существует такое замкнутое множество $M \subseteq X$, что $M \approx B^*(k)$, $M \cap Y \approx T(k,\tau)$ и $M \cap Z \approx Q(k) \times B(\tau)$.*

Доказательство. Проверим импикацию $1 \Rightarrow 2$ методом от противного. Допустим, что $Z = (G\setminus L_1) \cup (F \cup L_2)$, где $L_1 \in \mathscr{L}_k$, $L_2 \in \mathscr{L}_\tau$, $F \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ и $G \in \mathscr{G}_\delta(X)$. Заменим G на множество $G\setminus F \in \mathscr{G}_\delta(X)$, а L_2 — на $L_2 \setminus (G\setminus L_1) \in \mathscr{L}_\tau$. Тогда $(G\setminus L_1) \cap (F \cup L_2) = \varnothing$. Без ограничения общности $L_1 \subseteq G$. Тогда $Y = X \setminus Z = (X \setminus (G \setminus L_1)) \cap (X \setminus (F \cup L_2)) = ((X \setminus G) \cup L_1) \setminus (F \cup L_2)$, что противоречит описанию Y (ведь $X\setminus G = F_1 \in \mathscr{F}_\sigma(X)$). Импликация $1 \Rightarrow 2$ доказана.

Аналогично проверяется импликация $2 \Rightarrow 1$. Импликация $1 \Rightarrow 3$ — это теорема 11. Импликация $3 \Rightarrow 1$ вытекает из теоремы 10, так как $\mathscr{L}_\tau \subset \mathscr{L}_k$. □

Следствие 2. *Пусть множество Y и его дополнение $X\backslash Y$ являются A-множествами в полном метрическом пространстве X. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. *Множество Y не представимо в виде $Y = F \cap G$, где $F \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ и $G \in \mathscr{G}_\delta(X)$.*

2. *Существует такое замкнутое множество $M \subseteq X$, что $M \approx C$, $M \cap Y \approx T(\omega,\omega)$ и $M \setminus Y \approx Q \times \mathscr{N}$.*

Доказательство. Проверим, что следствие 2 — это частный случай теоремы 12, если положить $k = \tau = \omega$. Преобразуем условие 1 из теоремы 12 в условие 1 следствия 2. Так как L_1 и L_2 — σ-дискретные множества, то $L_1 \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ и $L_2 \in \mathscr{F}_\sigma(X)$. Поэтому $L_1 \cup F_1 = F \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ и $L_2 \cup F_2 = F^* \in \mathscr{F}_\sigma(X)$. Но $X\backslash F^* = G \in \mathscr{G}_\delta(X)$, следовательно, $F\backslash F^* = F \cap G$. ☐

4. Вложение пространства $S(k,\tau)$

Теорема 13. *Пусть дано множество Y в полном метрическом пространстве X и даны кардиналы τ и k, причем $\omega \le \tau \le k \le w(X)$. Если $Y = L_3 \cup ((L_1 \cup F_1) \setminus (L_2 \cup F_2))$, где $L_1 \in \mathscr{L}_k$, $L_2 \in \mathscr{L}_k$, $L_3 \in \mathscr{L}_\omega$, F_1 и F_2 — множества типа F_σ в X, то Y не содержит замкнутого (в Y) подмножества, гомеоморфного $S(k,\tau)$.*

Доказательство. По теореме 8 пространство $S(k,\tau)$ содержит замкнутую копию пространства $S(k,\omega)$, поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что Y не содержит замкнутого множества, гомеоморфного пространству $S(k,\omega)$.

Допустим, что существует замкнутое в Y множество S, которое гомеоморфно пространству $S(k,\omega)$. Без ограничения общности считаем, что S всюду плотно в X (иначе переходим к множеству $X_1 = \overline{S}$), $L_3 \cap (L_1 \cup F_1) = \varnothing$, $L_1 \cap F_1 = \varnothing$ и $L_2 \cup F_2 \subset F_1$. По определению $S = G \cup L$, где множество G всюду плотно в S, $G \approx B(k)$, $G \cap L = \varnothing$ и $L \approx Q(k) \times C$. Расширим множество $L_1 \cup L_2$ до F_σ-множества L_4 так, что $(L_1 \cup L_2) \subseteq L_4$ и $L_4 \in \mathscr{L}_k$. Так как $B(k)$ нигде не типа $\mathscr{L}_k$, то множество $(L_3 \cup L_4) \cap G$ нигде не плотно в G. Тогда множество $G^* = G \setminus (L_3 \cup L_4)$ имеет тип G_δ в G и всюду плотно в G. Следовательно, по теореме Стоуна $G^* \approx B(k)$.

С другой стороны, множество $G^* = F_1 \setminus (F_2 \cup L_4) = \cup\{G_i \colon i \in \omega\}$, где каждое множество G_i замкнуто в G^* и является абсолютным G_δ-множеством. Из теоремы 7 следует, что каждое множество G_i нигде не плотно в S. Следовательно, каждое G_i нигде не плотно в G^*, ведь G^* всюду плотно в S. В результате получаем, что $G^* \approx B(k)$ — множество первой категории, что противоречит теореме Бэра о категории. Значит, сделанное выше допущение неверно. ☐

Теорема 14. *Пусть Y и $Z = X \setminus Y$ — A-множества в полном метрическом пространстве X и даны кардиналы k и τ, причем $\omega \le \tau \le k \le w(X)$. Пусть множество Y не представимо в виде $Y = L_3 \cup ((L_1 \cup F_1) \setminus (L_2 \cup F_2))$, где F_1 и F_2 — множества типа F_σ в X, $L_1 \in \mathscr{L}_k$, $L_2 \in \mathscr{L}_\tau$, а L_3 — σ-дискретное множество. Тогда существует такое замкнутое множество $M \subseteq X$, что $M \cap Y \approx S(k,\tau)$, $M \cap Z \approx Q(k) \times B(\tau)$ и $M \approx B^*(k)$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 11; поэтому мы укажем только отличия в доказательствах, пропуская некоторые детали.

Пусть $\widetilde{U} = \cup\{U \subseteq Y \colon U$ открытое множество в Y вида $U = L_{3U} \cup ((L_{1U} \cup F_{1U}) \setminus (L_{2U} \cup F_{2U}))$, где F_{1U}, F_{2U} — множества типа F_σ в X, $L_{1U} \in \mathscr{L}_k$, $L_{2U} \in \mathscr{L}_\tau$, L_{3U} — σ-дискретное множество и $((L_{2U} \cup F_{2U}) \setminus L_{3U}) \subset Z\}$. Тогда $D = Y \setminus \widetilde{U}$ — непустое замкнутое множество в Y, причем D нигде не типа $\mathscr{L}_\omega + ((\mathscr{F}_\sigma + \mathscr{L}_k) - (\mathscr{F}_\sigma + \mathscr{L}_\tau))$. Определим множество $E = \overline{D} \setminus Y = \overline{D} \setminus D$. Тогда $E \subset Z$ и E всюду плотно в $\overline{D}$. Искомое множество M будет принадлежать множеству $\overline{D}$, поэтому в дальнейшем считаем, что $X = \overline{D}$, $Y = D$, $Z = E$.

Утверждение 5. *В условиях теоремы 14 существуют нульмерное полное метрическое пространство R и непрерывное отображение $\varphi\colon R \to Y$ такие, что $\overline{\varphi(R)} = X$ и для любого непустого открытого множества $V \subseteq R$ верно следующее*:

$s1)$ $\varphi(V)$ *нигде не* $\sigma LW(<k)$*-пространство*;

$s2)$ *существует такое нигде не плотное замкнутое в* X *множество* $F_V \approx B^*(\tau)$, *что* $F_V \subset \overline{\varphi(V)}$, F_V *нигде не плотно в* $F_V \cup \varphi(V)$, $F_V \cap Y \approx Q(\tau) \times C$ *и* $F_V \cap Z \approx B(\tau)$.

Доказательство утверждения 5 проводится по схеме доказательства утверждения 1. Согласно [10, теорема 5.6] множество Y является взаимно однозначным непрерывным образом замкнутого множества P из пространства $B(k_1)$, где $k_1 = w(Y)$, для некоторого ко-σ-дискретного отображения $\varphi\colon P \to Y$. Назовем открытое множество $U \subseteq P$ *особым*, если в пространстве X существуют такие множества $H_{1U} \in \mathscr{L}_k$, $H_{2U} \in \mathscr{L}_\tau$, σ-дискретное множество H_{3U}, $F_{1U} \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ и $F_{2U} \in \mathscr{F}_\sigma(X)$, что $\varphi(U) \subseteq (F_{1U} \cup H_{1U}) \setminus ((F_{2U} \cup H_{2U}) \setminus H_{3U}) \subseteq Y$, $((F_{2U} \cup H_{2U}) \setminus H_{3U}) \subset Z$ и $H_{3U} \subseteq Y$. Множество $R_1 = \cup\{U\colon U$ — особое множество в $P\}$ открыто в P и само является особым множеством в P. Свойство $s1)$ проверяется как свойство $t1)$. При выводе свойства $s2)$ вместо теоремы 3 применяем теорему 4. □

Далее, в случае $k > \omega$ индукцией по n, где $n \in \omega$, построим замкнутые нигде не плотные в X множества $Z(s;\alpha)$, системы $\mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)$, $i \in \omega$, из открытых в X множеств, открытые в X множества $V(s;\alpha)$, открыто-замкнутые множества $R(s;\alpha) \subset R$, семейства множеств $\mathscr{V}(s;\alpha) = \{V(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n)\colon i \in \omega,\ \alpha_n \in k\}$ и $\mathscr{R}(s;\alpha) = \{\varphi(R(s\hat{}i;\alpha\hat{}\alpha_n))\colon i \in \omega,\ \alpha_n \in k\}$, связанные соотношениями $v1)$–$v12)$ (как в теореме 11), с заменой свойства $v1)$ на следующее свойство:

$v1^*)$ $Z(s;\alpha) \approx B^*(\tau)$, $Z(s;\alpha) \cap Y \approx Q(\tau) \times C$ и $Z(s;\alpha) \cap Z \approx B(\tau)$.

Для любого $n \in \omega$ рассмотрим конечное индексное множество $S_n = \{s \in \omega^{<\omega}\colon |s| + \operatorname{lh} s = n\}$, дискретное семейство $\mathscr{U}_n = \{U \in \mathscr{U}(s\hat{}i;\alpha)\colon s\hat{}i \in S_{n+1},\ i \in \omega,\ \operatorname{lh} s = \operatorname{lh}\alpha,\ \alpha \in k^{<\omega}\}$ и множества $P_n = \cup\{\overline{\varphi(R(s;\alpha))}\colon s \in \omega^n,\ \alpha \in k^n\}$, $\hat{Z}_n = \cup\{Z(s;\alpha)\colon s \in \omega^l,\ \alpha \in k^l,\ l \le n\}$. Пусть $M_n = \hat{Z}_n \cup P_{n+1}$. По построению $\hat{Z}_n \subset \hat{Z}_{n+1}$ и $M_{n+1} \subset M_n$. Множество $\hat{Z} = \cup\{\hat{Z}_i\colon i \in \omega\}$ содержится в M_n для любого $n \in \omega$. Определим множество $M = \cap\{M_n\colon n \in \omega\}$. Тогда $\hat{Z} \subset M$. Множество M будет замкнуто в пространстве X и гомеоморфно пространству $B(k)$. □

Утверждение 6. 1) $\hat{Z}$ — *множество первой категории и типа* F_σ *в пространстве* X.
2) $M \cap Z = \hat{Z} \cap Z \approx Q(k) \times B(\tau)$ *и* $M \cap Y \approx S(k,\tau)$.

Доказательство. Пункт 1), свойство $M \cap Z = \hat{Z} \cap Z \approx Q(k) \times B(\tau)$ и вложение $M\backslash\hat{Z} \subset Y$ проверяются точно так же, как в утверждении 4.

Множество $M\backslash\hat{Z}$ имеет тип G_δ и всюду плотно в M, поэтому $M\backslash\hat{Z} \approx B(k)$. Так как $\hat{Z} \in \mathscr{F}_\sigma(X)$, то из свойства $v1^*)$ следует, что $Y \cap \hat{Z} \approx Q(k) \times C \in \mathscr{A}\mathscr{F}_\sigma$. Кроме этого, из свойства $v1^*)$ и теоремы 4 следует, что Y нигде не $(\mathscr{G}_\delta - \mathscr{L}_\tau) + \mathscr{L}_\omega$. Так как $M \cap Z \in \mathscr{L}_{\tau+}$, то по теореме 7, примененной к пространству M, получаем, что $M \cap Y \approx S(k,\tau)$.

Для случая $k > \omega$ доказательство теоремы 14 окончено.

Случай $k = \omega$ разбирается как в теореме 11. Доказательство теоремы 14 закончено.

Теорема 15. *Пусть* Y *и* Z — A*-множества в полном метрическом пространстве* X *и даны кардиналы* k *и* τ, *причем* $Z = X \setminus Y$ *и* $\omega \le \tau \le k \le w(X)$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. *Множество* Y *не представимо в виде* $Y = L_3 \cup ((L_1 \cup F_1) \setminus (L_2 \cup F_2))$, *где* $L_1 \in \mathscr{L}_k$, $L_2 \in \mathscr{L}_\tau$, $L_3 \in \mathscr{L}_\omega$, F_1 *и* F_2 — *множества типа* F_σ *в* X.

2. *Множество* Z *не представимо в виде* $Z = (G \setminus L_1) \cup L_2 \cup (F\backslash L_3)$, *где* $L_1 \in \mathscr{L}_k$, $L_2 \in \mathscr{L}_\tau$, $L_3 \in \mathscr{L}_\omega$, $F \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ *и* $G \in \mathscr{G}_\delta(X)$.

3. *Существует такое замкнутое множество* $M \subseteq X$, *что* $M \approx B^*(k)$, $M \cap Y \approx S(k,\tau)$ *и* $M \cap Z \approx Q(k) \times B(\tau)$.

Доказательство. Проверим импликацию $1 \Rightarrow 2$ методом от противного. Допустим, что $Z = (G\backslash L_1) \cup L_2 \cup (F\backslash L_3)$, где $L_1 \in \mathscr{L}_k$, $L_2 \in \mathscr{L}_\tau$, $L_3 \in \mathscr{L}_\omega$, $F \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ и $G \in \mathscr{G}_\delta(X)$. Заменяя G на множество $G\backslash F \in \mathscr{G}_\delta(X)$, а множество L_2 — на $L_2 \setminus ((G\backslash L_1) \cup (F\backslash L_3)) \in \mathscr{L}_\tau$, можно считать, что множества $G\backslash L_1$, L_2 и $F\backslash L_3$ попарно не пересекаются. Далее, без ограничения общности, $L_1 \subset G$ и $L_3 \subset F$. Тогда $Y = X \setminus Z = ((X\backslash G) \cup L_1) \setminus (L_2 \cup F)) \cup (L_3\backslash L_2)$, что противоречит описанию множества Y (ведь $X\backslash G = F_1 \in \mathscr{F}_\sigma(X)$, а множество $L_3\backslash L_2$ — σ-дискретно). Итак, предположение о структуре множества Z оказалось неверным.

Аналогично проверяется импликация $2 \Rightarrow 1$. Импликация $1 \Rightarrow 3$ — это теорема 14. Утверждение $3 \Rightarrow 1$ вытекает из теоремы 13, так как $\mathscr{L}_\tau \subset \mathscr{L}_k$. □

Следствие 3. *Пусть множество Y и его дополнение $X\backslash Y$ являются A-множествами в полном метрическом пространстве X. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Множество Y не представимо в виде $Y = L \cup (G \cap F)$, где $G \in \mathscr{G}_\delta(X)$, $F \in \mathscr{F}_\sigma(X)$, а L — σ-дискретное множество.*

2. *Существует такое замкнутое множество $M \subseteq X$, что $M \approx C$, $M \cap Y \approx S(\omega,\omega)$ и $M \setminus Y \approx Q \times \mathscr{N}$.*

Доказательство. Следствие 3 — это частный случай теоремы 15, когда $k = \tau = \omega$. Преобразуем условие 1 из теоремы 15 в условие 1 следствия 3. Положим $L = L_3$. Так как L_1 и L_2 — σ-дискретные множества, то $L_1 \cup F_1 = F \in \mathscr{F}_\sigma(X)$ и $L_2 \cup F_2 = F^* \in \mathscr{F}_\sigma(X)$. Тогда $F\backslash F^* = F \cap G$, где $G = X \setminus F^* \in \mathscr{G}_\delta(X)$. □

Замечание 4. Следствия 2 и 3 были доказаны в статье [6] для случая метрического компактного пространства X.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Stone A.H.** Non-separable Borel sets // Rozpr. Mat. 1962. Vol. 28. P. 1–40.
2. **Stone A.H.** Non-separable Borel sets, II // Gen. Topol. Appl. 1972. Vol. 2. P. 249–270.
3. **Медведев С.В.** Топологические характеристики пространств $Q(k)$ и $Q \times B(k)$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. 1986. Т. 1. С. 47–49. (Математика. Механика.)
4. **Медведев С.В.** Нульмерные однородные борелевские множества // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, вып. 3. С. 542–545.
5. **Медведев С.В.** Вложение произведений $Q(k) \times C$ и $Q(k) \times B(\omega)$ в абсолютные A-множества // Изв. Челяб. науч. центра. 2009. Т. 4(46). С. 7–12.
6. **Engelen F. van, Mill J. van**. Borel sets in compact spaces: some Hurewicz type theorems // Fund. Math. 1984. Vol. 124, no. 3. P. 271–286.
7. **Медведев С.В.** О связи между h-однородными пространствами первой и второй категорий // Отображения и расширения топологических пространств: сб. научн. тр. / Удмурт. гос. ун-т. Устинов, 1985. С. 33–42.
8. **Медведев С.В.** О вложении бэровского пространства $B(k)$ в абсолютные A-множества // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. 2009. Т. 10(143), вып. 12. С. 27–32. (Математика, физика, химия.)
9. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
10. **Hansell R.W.** On characterizing non-separable analytic and extended Borel sets as types of continuous images // Proc. London Math. Soc. (3). 1974. Vol. 28. P. 683–699.
11. **Медведев С.В.** К вопросу о пространствах первой категории // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. 1986. Т. 2. С. 84–86. (Математика. Механика.)

Медведев Сергей Васильевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: medv@is74.ru

Поступила 10.07.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.54 +519.17

$Aut_0(\Lambda^2)$-СИММЕТРИЧЕСКИЕ 4-РАСШИРЕНИЯ 2-МЕРНОЙ РЕШЕТКИ Λ^2 *

Е. А. Неганова

В работе на основе полученного ранее совместно автором и В.И.Трофимовым доказательства конечности числа $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 4-расширений 2-мерной решетки Λ^2 найдены все $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрические 4-расширения решетки Λ^2.

Ключевые слова: d-мерная решетка, симметрическое q-расширение.

E. A. Neganova. $Aut_0(\Lambda^2)$-symmetrical 4-extensions of the 2-dimensional grid Λ^2.

Using an earlier proof by the author and V.I. Trofimov that there are only finitely many $Aut_0(\Lambda^2)$-symmetrical 4-extensions of the 2-dimensional grid Λ^2, we find all $Aut_0(\Lambda^2)$-symmetrical 4-extensions of grid Λ^2.

Keywords: d-dimensional grid, symmetrical q-extension.

1. Введение

Под d-мерной решеткой Λ^d для целого положительного числа d далее, как обычно, понимается граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы $(a_1, \ldots a_d)$ из d целых чисел и две вершины $(a'_1, \ldots, a'_d)$ и $(a''_1, \ldots, a''_d)$ смежны тогда и только тогда, когда выполняется условие $|a'_1 - a''_1| + \ldots + |a'_d - a''_d| = 1$. Сдвигом решетки Λ^d называется ее автоморфизм, который переводит произвольную вершину $(a_1, \ldots, a_d)$ в вершину $(a_1 + k_1, \ldots, a_d + k_d)$ для некоторых фиксированных целых чисел $k_1, \ldots, k_d$. Через $Aut_0(\Lambda^d)$ обозначается изоморфная $\mathbb{Z}^d$ подгруппа группы автоморфизмов решетки Λ^d, состоящая из всех ее сдвигов. Следуя [1], для целого положительного числа q связный граф Γ назовем $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическим q-расширением решетки Λ^d, если существуют такая вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Γ и такая система импримитивности σ группы G на $V(\Gamma)$ с блоками порядка q, что для некоторого изоморфизма φ графа Γ/σ на решетку Λ^d справедливо равенство $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} = Aut_0(\Lambda^d)$. Именно $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические q-расширения решетки Λ^d для $d \geq 1$ и $q > 1$ представляют интерес в связи с кристаллографией частиц (“молекул”) с внутренней структурой и теорией струн.

В работе [2] найдены все $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические 2-расширения решеток Λ^d для любого целого положительного числа d. В [3, теорема 3] для произвольного целого положительного числа q был получен критерий конечности множества симметрических q-расширений решетки Λ^2. На основе этого критерия в [3] была доказана, в частности, конечность множества $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических q-расширений решетки Λ^2 для каждого простого числа q. Кроме того, в [3] приведен список всех $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 3-расширений решетки Λ^2.

В [4] на основе критерия [3, теорема 3] доказана конечность множества $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^2 (см.[4, теорема]). В настоящей работе с использованием доказательства теоремы из [4] получен список всех $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^2.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00349-а), программы Отделения математических наук РАН (проект 09-Т-1-1004) и программ совместных исследований УрО РАН с НАН Беларуси (проект 09-С-1-1009).

2. Основные обозначения и используемые результаты

Для удобства обозначений обобщенных $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^2 введем новые обозначения для графов $\Gamma_n^{1,4}$, $1 \le n \le 34$, из полученного в [4, разд. 3] списка обобщенных $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^1. Напомним, что графы $\Gamma_n^{1,4}$, $1 \le n \le 34$, из [4, разд. 3] задаются следующим образом: для каждого $1 \le n \le 34$ множество вершин $V(\Gamma_n^{1,4})$ графа $\Gamma_n^{1,4}$ равно $\{(i,k)\colon i \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\}$, для каждого $1 \le n \le 34$ множество ребер $V(\Gamma_n^{1,4})$ графа $\Gamma_n^{1,4}$ равно $E_0(\Gamma_n^{1,4}) \cup E_1(\Gamma_n^{1,4})$, где для $D_0 = \big\{\{(i,k),(i,l)\}\colon i \in \mathbb{Z},\ k,l \in \{1,2,3,4\},\ k \neq l\big\}$ и $D_1 = \big\{\{(i,k),(i+1,l)\}\colon i \in \mathbb{Z},\ k,l \in \{1,2,3,4\}\big\}$ полагаем $E_0(\Gamma_n^{1,4}) = E(\Gamma_n^{1,4}) \cap D_0$ и $E_1(\Gamma_n^{1,4}) = E(\Gamma_n^{1,4}) \cap D_1$. Переобозначим графы из списка (см. [4, разд. 3]) следующим образом: $\Gamma_{l,m}^{1,4} = \Gamma_n^{1,4}$, где первый индекс l указывает на структуру множества $E_0(\Gamma_{l,m}^{1,4})$ соответствующего расширения, а второй индекс m — на структуру множества $E_1(\Gamma_{l,m}^{1,4})$ этого расширения. В обозначении графа $\Gamma_{\overline{l},\overline{m}}^{1,4}$ черта над первым индексом означает, что рассматривается граф, дополнительный к графу $\Gamma_{l,m}^{1,4}$ относительно множества $E_0(\Gamma_{l,m}^{1,4})$, черта над вторым индексом означает, что рассматривается граф, дополнительный к графу $\Gamma_{l,m}^{1,4}$ относительно множества $E_1(\Gamma_{l,m}^{1,4})$. Граф может быть дополнительным по одному из указанных множеств или по обоим множествам одновременно. Для того чтобы перенумеровать графы, заметим, что множество $E_0(\Gamma_{l,m}^{1,4})$ совпадает с одним из следующих множеств:

$E_0(\Gamma_{1,m}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,2)\},\{(i,2),(i,3)\},\{(i,3),(i,4)\},\{(i,4),(i,1)\},\{(i,1),(i,3)\},\{(i,2),(i,4)\}\big\}$;

$E_0(\Gamma_{\overline{1},m}^{1,4}) = D_0 \setminus E_0(\Gamma_{1,m}^{1,4})$;

$E_0(\Gamma_{2,m}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i,2)\},\{(i,2),(i,3)\},\{(i,3),(i,4)\},\{(i,4),(i,1)\}\big\}$;

$E_0(\Gamma_{\overline{2},m}^{1,4}) = D_0 \setminus E_0(\Gamma_{2,m}^{1,4})$;

а множество $E_1(\Gamma_{l,m}^{1,4})$ совпадает с одним из следующих множеств:

$E_1(\Gamma_{l,1}^{1,4}) = \big\{\{(i,k),(i+1,k)\}\colon\ i \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\big\}$;

$E_1(\Gamma_{l,\overline{1}}^{1,4}) = D_1 \setminus E_1(\Gamma_{l,1}^{1,4})$;

$E_1(\Gamma_{l,2}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i+1,1)\},\{(i,2),(i+1,2)\},\{(i,3),(i+1,4)\},\{(i,4),(i+1,3)\}\big\}$;

$E_1(\Gamma_{l,\overline{2}}^{1,4}) = D_1 \setminus E_1(\Gamma_{l,2}^{1,4})$;

$E_1(\Gamma_{l,3}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i+1,1)\},\{(i,2),(i+1,3)\},\{(i,3),(i+1,4)\},\{(i,4),(i+1,2)\}\big\}$;

$E_1(\Gamma_{l,\overline{3}}^{1,4}) = D_1 \setminus E_1(\Gamma_{l,3}^{1,4})$;

$E_1(\Gamma_{l,4}^{1,4}) = \big\{\{(i,k),(i+1,k)\}\colon i \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\big\} \cup \big\{\{(i,1),(i+1,2)\},\{(i,2),(i+1,1)\},\{(i,3),(i+1,4)\},\{(i,4),(i+1,3)\}\colon i \in \mathbb{Z}\big\}$;

$E_1(\Gamma_{l,5}^{1,4}) = \big\{\{(i,k),(i+1,k)\}\colon i \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\big\} \cup \big\{\{(i,1),(i+1,3)\},\{(i,2),(i+1,4)\},\{(i,3),(i+1,1)\},\{(i,4),(i+1,2)\}\colon i \in \mathbb{Z}\big\}$;

$E_1(\Gamma_{l,6}^{1,4}) = \big\{\{(i,1),(i+1,1)\},\{(i,1),(i+1,3)\},\{(i,2),(i+1,1)\},\{(i,2),(i+1,3)\},\{(i,3),(i+1,2)\},\{(i,3),(i+1,4)\},\{(i,4),(i+1,2)\},\{(i,4),(i+1,4)\}\colon i \in \mathbb{Z}\big\}$;

$E_1(\Gamma_{l,7}^{1,4}) = \big\{\{(i,k),(i+1,k)\}\colon i \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\big\} \cup \big\{\{(i,1),(i+1,2)\},\{(i,2),(i+1,3)\},\{(i,3),(i+1,4)\},\{(i,4),(i+1,1)\}\colon i \in \mathbb{Z}\big\}$;

$E_1(\Gamma_{l,8}^{1,4}) = \big\{\{(i,k),(i+1,k)\}\colon i \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\big\} \cup \big\{\{(i,1),(i+1,2)\},\{(i,1),(i+1,3)\},\{(i,1),(i+1,4)\},\{(i,2),(i+1,1)\},\{(i,2),(i+1,3)\},\{(i,2),(i+1,4)\},\{(i,3),(i+1,1)\},\{(i,3),(i+1,2)\},\{(i,3),(i+1,4)\},\{(i,4),(i+1,1)\},\{(i,4),(i+1,2)\},\{(i,4),(i+1,3)\}\colon i \in \mathbb{Z}\big\}$.

Используя введенные обозначения, получим следующий список всех обобщенных $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^1:

$$\Gamma_{1,1}^{1,4} = \Gamma_1^{1,4},\quad \Gamma_{2,1}^{1,4} = \Gamma_2^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{1},1}^{1,4} = \Gamma_{31}^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{2},1}^{1,4} = \Gamma_{32}^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{1},2}^{1,4} = \Gamma_3^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{2},2}^{1,4} = \Gamma_4^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{1},3}^{1,4} = \Gamma_5^{1,4};$$
$$\Gamma_{\overline{2},3}^{1,4} = \Gamma_6^{1,4},\quad \Gamma_{1,4}^{1,4} = \Gamma_7^{1,4},\quad \Gamma_{2,4}^{1,4} = \Gamma_8^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{1},1}^{1,4} = \Gamma_{33}^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{2},1}^{1,4} = \Gamma_{10}^{1,4},\quad \Gamma_{2,5}^{1,4} = \Gamma_9^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{2},5}^{1,4} = \Gamma_{34}^{1,4};$$
$$\Gamma_{1,6}^{1,4} = \Gamma_{11}^{1,4},\quad \Gamma_{2,6}^{1,4} = \Gamma_{12}^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{1},6}^{1,4} = \Gamma_{14}^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{2},6}^{1,4} = \Gamma_{13}^{1,4},\quad \Gamma_{1,7}^{1,4} = \Gamma_{15}^{1,4},\quad \Gamma_{2,7}^{1,4} = \Gamma_{16}^{1,4},\quad \Gamma_{\overline{1},7}^{1,4} = \Gamma_{18}^{1,4};$$

$\Gamma^{1,4}_{2,7}=\Gamma^{1,4}_{17}$, $\Gamma^{1,4}_{1,\overline{1}}=\Gamma^{1,4}_{19}$, $\Gamma^{1,4}_{2,\overline{1}}=\Gamma^{1,4}_{20}$; $\Gamma^{1,4}_{\overline{1},\overline{1}}=\Gamma^{1,4}_{22}$, $\Gamma^{1,4}_{\overline{2},\overline{1}}=\Gamma^{1,4}_{21}$, $\Gamma^{1,4}_{\overline{1},\overline{2}}=\Gamma^{1,4}_{23}$, $\Gamma^{1,4}_{\overline{2},\overline{2}}=\Gamma^{1,4}_{24}$; $\Gamma^{1,4}_{\overline{1},\overline{3}}=\Gamma^{1,4}_{25}$, $\Gamma^{1,4}_{\overline{2},\overline{3}}=\Gamma^{1,4}_{26}$, $\Gamma^{1,4}_{1,8}=\Gamma^{1,4}_{27}$, $\Gamma^{1,4}_{2,8}=\Gamma^{1,4}_{28}$, $\Gamma^{1,4}_{\overline{1},8}=\Gamma^{1,4}_{30}$, $\Gamma^{1,4}_{\overline{2},8}=\Gamma^{1,4}_{29}$.

Заметим, что $\Gamma^{1,4}_{l,\overline{m}}\cong\Gamma^{1,4}_{l,m}$ для $l\in\{1,2,\overline{1},\overline{2}\}$, $m\in\{4,6,7\}$ и для $l\in\{2,\overline{2}\}$, $m=5$.

Пусть Γ — обобщенное $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическое 4-расширение решетки Λ^2, реализуемое некоторыми G, σ, φ (определение см. в [3, разд. 1]). Согласно замечанию 1 из [4] можно считать, что $G=Aut_0(\Gamma)$. Для произвольных $i,j\in\mathbb{Z}$ обозначим через $B_{i,j}$ полный прообраз при отображении φ вершины (i,j) решетки Λ^2. Подграф графа Γ, порожденный множеством $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}B_{i,0}$, является обобщенным $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрическим 4-расширением решетки Λ^1 и, следовательно, для некоторых $l\in\{1,2,\overline{1},\overline{2}\}$ и $m\in\{1,2,3,\overline{1},\overline{2},\overline{3},4,5,6,7,8\}$ изоморфен определенному выше графу $\Gamma^{1,4}_{l,m}$ из списка обобщенных $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^1. Зафиксируем некоторый изоморфизм ψ графа $\Gamma^{1,4}_{l,m}$ на подграф графа Γ, порожденный множеством $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}B_{i,0}$. Не теряя общности, будем при этом считать, что $\psi(B_i)=B_{i,0}$ для каждого $i\in\mathbb{Z}$, где B_i есть подмножество $\{(i,1),(i,2),(i,3),(i,4)\}$ множества вершин графа $\Gamma^{1,4}_{l,m}$ (см. [4, разд. 3]). Зафиксируем, кроме того, некоторый автоморфизм a' графа Γ такой, что $(a')^\sigma=t_2$ (при этом $a'(B_{i,j})=B_{i,j+1}$ для любых $i,j\in\mathbb{Z}$) и $\{\psi((0,1)),a'(\psi((0,1)))\}\in E(\Gamma)$. Для произвольных $i,j\in\mathbb{Z}$ определим биекцию $\iota_{i,j}\colon B_{i,j}\to\{1,2,3,4\}$, полагая $\iota_{i,j}(x)=k$, если $x=(a')^j(\psi((i,k)))$. Тогда для произвольной вершины x графа Γ найдутся $i,j\in\mathbb{Z}$ и $k\in\{1,2,3,4\}$ такие, что $x\in B_{i,j}$ и $\iota_{i,j}(x)=k$, причем сопоставление $x\mapsto(i,j,k)$ есть, очевидно, биекция множества $V(\Gamma)$ на множество $\{(i,j,k)\colon i,j\in\mathbb{Z},\ k\in\{1,2,3,4\}\}$. Используя эту биекцию, отождествим $V(\Gamma)$ с множеством $\{(i,j,k)\colon i,j\in\mathbb{Z},\ k\in\{1,2,3,4\}\}$. Заметим, что при этом для любых $i,j,j'\in\mathbb{Z}$, $k,l\in\{1,2,3,4\}$ имеем $\{(i,j,k),(i,j+1,l)\}\in E(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\{(i,j',k),(i,j'+1,l)\}\in E(\Gamma)$. Кроме того, $\{(0,0,1),(0,1,1)\}\in E(\Gamma)$.

Далее, подграф графа Γ, порожденный множеством $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}B_{0,j}$, является обобщенным $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрическим 4-расширением решетки Λ^1 и, следовательно, для некоторого $n\in\{1,2,3,\overline{1},\overline{2},\overline{3},4,5,6,7,8\}$ изоморфен определенному выше графу $\Gamma^{1,4}_{l,n}$ из списка обобщенных $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрических 4-расширений решетки Λ^1.

Пусть $\Gamma^{2,4}_{l,m,n}$ — $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическое 4-расширение решетки Λ^2. Для каждого $l\in\{1,2\}$, $m,n\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ множество вершин $V(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$ графа $\Gamma^{2,4}_{l,m,n}$ равно $\{(i,j,k)\colon i,j\in\mathbb{Z},k\in\{1,2,3,4\}\}$. Для каждого $l\in\{1,2\}$, $m,n\in\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ множество ребер $E(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$ графа $\Gamma^{2,4}_{l,m,n}$ равно $E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})\cup E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})\cup E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$, где для $D_0=\big\{\{(i,j,k),(i,j,l)\}\colon i,j\in\mathbb{Z},\ k,l\in\{1,2,3,4\},\ k\neq l\big\}$; $D_1=\big\{\{(i,j,k),(i+1,j,l)\}\colon i,j\in\mathbb{Z},\ k,l\in\{1,2,3,4\}\big\}$ и $D_2=\big\{\{(i,j,k),(i,j+1,l)\}\colon i,j\in\mathbb{Z},\ k,l\in\{1,2,3,4\}\big\}$ полагаем $E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})=E(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})\cap D_0$; $E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})=E(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})\cap D_1$ и $E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})=E(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})\cap D_2$.

Тогда рассмотрим графы, заданные следующим образом:

$V(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},m,n})=V(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$ и

$E_0(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},m,n})=D_0\setminus E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_1(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},m,n})=E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_2(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},m,n})=E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$;

$V(\Gamma^{2,4}_{l,\overline{m},n})=V(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$ и

$E_0(\Gamma^{2,4}_{l,\overline{m},n})=E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_1(\Gamma^{2,4}_{l,\overline{m},n})=D_1\setminus E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_2(\Gamma^{2,4}_{l,\overline{m},n})=E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$;

$V(\Gamma^{2,4}_{l,m,\overline{n}})=V(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$ и

$E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,\overline{n}})=E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,\overline{n}})=E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,\overline{n}})=D_2\setminus E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$;

$V(\Gamma^{2,4}_{l,\overline{m},\overline{n}})=V(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$ и

$E_0(\Gamma^{2,4}_{l,\overline{m},\overline{n}})=E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_1(\Gamma^{2,4}_{l,\overline{m},\overline{n}})=D_1\setminus E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_2(\Gamma^{2,4}_{l,\overline{m},\overline{n}})=D_2\setminus E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$;

$V(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},\overline{m},n})=V(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$ и

$E_0(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},\overline{m},n})=D_0\setminus E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_1(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},\overline{m},n})=D_1\setminus E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_2(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},\overline{m},n})=E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$;

$V(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},m,\overline{n}})=V(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$ и

$E_0(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},m,\overline{n}})=D_0\setminus E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_1(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},m,\overline{n}})=E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$; $E_2(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},m,\overline{n}})=D_2\setminus E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$;

$V(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},\overline{m},\overline{n}}) = V(\Gamma^{2,4}_{l,m,n})$ и

$$E_0(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},\overline{m},\overline{n}}) = D_0 \setminus E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,n}); \quad E_1(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},\overline{m},\overline{n}}) = D_1 \setminus E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,n}); \quad E_2(\Gamma^{2,4}_{\overline{l},\overline{m},\overline{n}}) = D_2 \setminus E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n}).$$

Все указанные графы будем называть *частично-дополнительными к графу* $\Gamma^{2,4}_{l,m,n}$. В зависимости от различных значений параметров l, m и n реализуется один из следующих случаев.

С л у ч а й 1. $l \in \{1,2,\overline{1},\overline{2}\}$, $m,n \in \{1,2,3,\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$.

Перечисление графов Γ в случае 1 сводится (см. выше) к перечислению графов Γ с $l \in \{1,2\}$, $m,n \in \{1,2,3\}$, т. е. графов Γ с условием $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i+1,j}| = 1$ и $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i,j+1}| = 1$ для любых $i,j \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1,2,3,4\}$, — такие графы будем называть *базисными для случая* 1 — и перечислению графов, являющихся частично дополнительными к базисным для случая 1.

С л у ч а й 2. $l \in \{1,2,\overline{1},\overline{2}\}$, $m \in \{4,5,6,7\}$, $n \in \{1,2,3,\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$.

Перечисление графов Γ в случае 2 сводится (см. выше) к перечислению графов Γ с $l \in \{1,2\}$, $m \in \{4,5,6,7\}$, $n \in \{1,2,3\}$, т. е. графов Γ с условием $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i+1,j}| = 2$ и $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i,j+1}| = 1$ для любых $i,j \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1,2,3,4\}$, — такие графы будем называть *базисными для случая* 2 — и перечислению графов, являющихся частично дополнительными к базисным для случая 2.

С л у ч а й 3. $l \in \{1,2,\overline{1},\overline{2}\}$, $m,n \in \{4,5,6,7\}$.

Перечисление графов Γ в случае 3 сводится (см. выше) к перечислению графов Γ с $l \in \{1,2\}$, $m,n \in \{4,5,6,7\}$, т. е. графов Γ с условием $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i+1,j}| = 2$ и $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i,j+1}| = 2$ для любых $i,j \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1,2,3,4\}$, — такие графы будем называть *базисными для случая* 3 — и перечислению графов, являющихся частично дополнительными к базисным для случая 3.

С л у ч а й 4. $l \in \{1,2,\overline{1},\overline{2}\}$, $m = 8$, $n \in \{1,2,3,\overline{1},\overline{2},\overline{3},4,5,6,7,8\}$.

Перечисление графов Γ в случае 4 сводится (см. выше) к перечислению графов Γ с $l \in \{1,2\}$, $m = 8$, $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, т. е. к перечислению графов Γ с условием $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i+1,j}| = 4$ и $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i,j+1}| = 1$ для любых $i,j \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1,2,3,4\}$, или с условием $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i+1,j}| = 4$ и $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i,j+1}| = 2$ для любых $i,j \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1,2,3,4\}$, или с условием $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i+1,j}| = 4$ и $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i,j+1}| = 4$ для любых $i,j \in \mathbb{Z}$, $k \in \{1,2,3,4\}$, — такие графы будем называть *базисными для случая* 4 — и перечислению графов, являющихся частично дополнительными к базисным для случая 4.

Перечислению графов в случаях 1, 2, 3 и 4 посвящен разд. 3, 4, 5 и 6 соответственно. Рассмотрение случаев 1–4 разбивается на ряд подслучаев. Получающиеся в процессе перечисления графы обозначаются через $\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$, где параметры l, m, n были определены выше, верхние индексы 2,4 означают, что $\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$ являются $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическими 4-*расширениями* 2-*мерной* решетки Λ^2, а t — порядковый номер графа в списке базисных графов соответствующего (определяемого по l, m, n) случая 1, 2, 3 или 4.

Все базисные графы, относящиеся к каждому подслучаю, представлены в виде отдельной таблицы (номер таблицы совпадает с номером соответствующего ей подслучая). В левой колонке приводится обозначение $\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$ графа, в правой колонке указано множество ребер $E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$ $\big($множества $E_0(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$ и $E_1(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$ однозначно определяются по l и m, см. выше$\big)$. После каждой таблицы приведены все частично дополнительные графы к перечисленным в таблице. При этом несвязные графы помечены аббревиатурой “(несв.)”.

Пусть Γ — базисный граф, соответствующий одному из случаев 1–4. Напомним, см. [3], что Γ называется удовлетворяющим условию $[n_1,1]$-периодичности, где n_1 — целое положительное число, если существуют такие автоморфизмы g_1, g_2 графа Γ, сохраняющие разбиение σ, что $[g_1,g_2] = 1$, $\varphi g_1^\sigma \varphi^{-1} = t_1^{n_1}$ и $\varphi g_2^\sigma \varphi^{-1} = t_2$. Аналогично Γ называется удовлетворяющим условию $[1,n_2]$-периодичности, где n_2 — целое положительное число, если существуют такие автоморфизмы g_1, g_2 графа Γ, сохраняющие разбиение σ, что $[g_1,g_2] = 1$, $\varphi g_1^\sigma \varphi^{-1} = t_1$ и $\varphi g_2^\sigma \varphi^{-1} = t_2^{n_2}$.

Согласно [3, теорема 1] Γ удовлетворяет условиям $[n_1,1]$-периодичности и $[1,n_2]$-периодичности для некоторых целых положительных чисел n_1, n_2. Наименьшее из чисел n_1 таких, что Γ удовлетворяет условию $[n_1,1]$-периодичности, будем называть периодом Γ в направлении $\{1\}$ и обозначать $p_1(\Gamma)$. Аналогично наименьшее из чисел n_2 таких, что Γ удовлетворяет условию $[1, n_2]$-периодичности, будем называть периодом Γ в направлении $\{2\}$ и обозначать $p_2(\Gamma)$. Периодом графа Γ назовем число $p(\Gamma)$, равное минимуму из чисел $p_1(\Gamma)$ и $p_2(\Gamma)$. (Период $p(\Gamma)$ графа Γ определяется его изоморфным типом.) Не теряя общности можем считать, что в случаях 1 и 3 граф Γ удовлетворяет условию $[p(\Gamma), 1]$-периодичности. В таком виде Γ представлены в приведенных ниже таблицах 1.1–1.3, 3.1.1–3.1.4, 3.2 и 3.3. Графы, удовлетворяющие условиям различных подслучаев, не могут, как легко видеть, быть изоморфными. Далее, ясно, что графы $\Gamma^{1,4}_{l,m,n,t}$, у которых не совпадают наборы параметров (l, m, n), где $(l \in \{1, 2\},\ m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\})$, не могут быть изоморфными. Если базисные графы, удовлетворяющие условиям одного и того же подслучая, имеют одинаковые наборы параметров (l, m, n), то в комментариях после соответствующей этому подслучаю таблицы мы указываем свойства, позволяющие сделать заключение, что эти графы не изоморфны. Для этого, в частности (помимо периода), анализируется наличие в графах циклов определенного типа. Здесь под типом пути (i_1, j_1, k_1), (i_2, j_2, k_2),..., (i_l, j_l, k_l), где $i_1, i_2, \dots, i_l, j_1, j_2 \dots, j_l \in \mathbb{Z}$ и $k_1, k_2, \dots, k_l \in \{1, 2, 3, 4\}$, базисного графа понимается последовательность (i_1, j_1), $(i_2, j_2), \dots,$ (i_l, j_l).

3. Графы, удовлетворяющие условиям случая 1

Пусть Γ — граф, удовлетворяющий условиям случая 1. Если Γ — базисный для случая 1, т. е. $l \in \{1, 2\}$, $m, n \in \{1, 2, 3\}$, то рассмотрим граф Δ, изоморфный графу с множеством вершин $B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1}$ для $i, j \in \mathbb{Z}$ и множеством ребер $E(\Delta) = E(\langle B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1}\rangle_\Gamma) \setminus E_0(\Gamma)$, т. е. граф Δ, который получается из $\langle B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1}\rangle_\Gamma$ удалением ребер внутри блоков $B_{i,j}$, $B_{i+1,j}$, $B_{i+1,j+1}$, $B_{i,j+1}$. (Ясно, что определенный с точностью до изоморфизма граф Δ не зависит от выбора $i, j \in \mathbb{Z}$.) Тогда Δ является графом на 16 вершинах, каждая из которых имеет валентность 2. С учетом транзитивности группы $G^{B_{i,j}}_{\{B_{i,j}\}}$ отсюда следует, что Δ является либо дизъюнктным объединением четырех циклов длины 4, либо дизъюнктным объединением двух циклов длины 8, либо циклом длины 16. В зависимости от того, какая из этих возможностей для графа Δ выполняется, мы скажем, что для базисного графа Γ реализуется соответственно подслучай 1.1 или 1.2, или 1.3. Кроме того, в каждый из этих подслучаев мы включаем частично дополнительные графы к этим базисным графам (и только их).

В принципе перебор базисных для случая 1 графов Γ может быть осуществлен на основе следующего замечания. Легко видеть, что для некоторого $1 \le r \le 4$ в графе Γ имеется замкнутый путь типа $(0, 0)$, $(1, 0), \dots, (r, 0)$, $(r, 1)$, $(r-1, 1), \dots, (0, 1)$, $(0, 0)$. При этом подграф $\langle B_{0,0} \cup B_{1,0} \cup \ldots \cup B_{r-1,0} \cup B_{0,1} \cup B_{1,1} \cup \ldots \cup B_{r-1,1}\rangle_\Gamma$ однозначно определяет весь граф Γ. Действительно, для произвольных $i \ge r$ и $k, k' \in \{1, 2, 3, 4\}$ вершины $(i, 0, k)$, $(i, 1, k')$ соединены ребром в графе Γ тогда и только тогда, когда в графе Γ ребром соединены конечная вершина пути типа $(i, 0)$, $(i-1, 0), \dots, (i-qr, 0)$ с началом в вершине $(i, 0, k)$ и конечная вершина пути типа $(i, 1)$, $(i-1, 1), \dots, (i-qr, 1)$ с началом в вершине $(i, 1, k')$, где q — целая часть числа i/r. Аналогично для произвольных $i \le 0$ и $k, k' \in \{1, 2, 3, 4\}$ вершины $(i, 0, k)$, $(i, 1, k')$ соединены ребром в графе Γ тогда и только тогда, когда в графе Γ ребром соединены конечная вершина пути типа $(i, 0)$, $(i+1, 0), \dots, (i+qr, 0)$ с началом в вершине $(i, 0, k)$ и конечная вершина пути типа $(i, 1)$ $(i+1, 1), \dots, (i+qr, 1)$ с началом в вершине $(i, 1, k')$, где q — наименьшее целое число с условием $q \ge -i/r$.

Подслучай 1.1. Либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям случая 1 (т. е. $l \in \{1, 2\}$, $m, n \in \{1, 2, 3\}$), и для любых $i, j \in \mathbb{Z}$ в подграфе $\langle B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1}\rangle_\Gamma$ существует замкнутый путь (i, j, k_1), $(i+1, j, k_2)$, $(i+1, j+1, k_3)$, $(i, j+1, k_4)$, (i, j, k_1), где $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$, либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т. е. $l \in \{1, 2, \overline{1}, \overline{2}\}$, $m, n \in \{1, 2, 3, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$).

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 1.1, приведены в табл. 1.1.

Т а б л и ц а 1.1

$\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$	$E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$
$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,1}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}: \ i,j\in\mathbb{Z}, \ k\in\{1,2,3,4\}\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,1,2}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,1,1,1})$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,2,3}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}: i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,3,4}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}: i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,2,2,5}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{2,1,2,3})$
$\Gamma^{2,4}_{2,2,3,6}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}: i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}: i,$ $j\in\mathbb{Z}, \ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,3,3,7}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{2,1,3,4})$

Поскольку в таблице не существует двух графов с одинаковыми наборами параметров (l,m,n), то все графы из табл. 1.1 попарно не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 1.1 даются следующим списком:

$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},1,1,1}$ (несв.); $\Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},1,1}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},\overline{1},1}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},1,1}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},\overline{1},1}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},1,1,2}$(несв.); $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},1,2}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},\overline{1},2}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},1,2}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},\overline{1},2}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},1,2,3}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},2,3}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},\overline{2},3}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},2,3}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},\overline{2},3}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},1,3,4}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},3,4}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},\overline{3},4}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},3,4}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},\overline{3},4}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},2,2,5}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{2},2,5}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{2},\overline{2},5}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{2},2,5}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{2},\overline{2},5}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},2,3,6}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{2},3,6}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{2},\overline{3},6}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{2},3,6}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{2},\overline{3},6}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},3,3,7}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{3},3,7}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{3},\overline{3},7}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{3},3,7}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{3},\overline{3},7}$.

П о д с л у ч а й 1.2. Либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям случая 1 (т.е. $l\in\{1,2\}$, $m,n\in\{1,2,3\}$), и для любых $i,j\in\mathbb{Z}$ в подграфе $\langle B_{i,j}\cup B_{i+1,j}\cup B_{i+1,j+1}\cup B_{i,j+1}\rangle_\Gamma$ существует замкнутый путь $(i,j,k_1),(i{+}1,j,k_2),(i{+}1,j{+}1,k_3),(i,j{+}1,k_4),(i,j,k_5),(i+1,j,k_6),(i+1,j+1,k_7),(i,j+1,k_8),(i,j,k_1)$, где $k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6,k_7,k_8\in\{1,2,3,4\}$ и $k_1\neq k_5$, $k_2\neq k_6$, $k_3\neq k_7$, $k_4\neq k_8$, либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т.е. $l\in\{1,2,\overline{1},\overline{2}\}$, $m,n\in\{1,2,3,\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$).

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 1.2, приведены в табл. 1.2.

Т а б л и ц а 1.2

$\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$	$E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$
$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}: i,j\in\mathbb{Z}, \ \ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2), \ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),$ $(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}: i,j\in\mathbb{Z}, \ \ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\},: \ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},(\{(i,j,4),$ $(i,j+1,1)\}: i,j\in\mathbb{Z}, \ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\},: i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z}, \ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}: \ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z}, \ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),$ $(i,j+1,4)\}: i,j\in\mathbb{Z}, \ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 3)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,1,12}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8})$

Продолжение табл. 1.2

$\Gamma^{2,4}_{2,1,1,13}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 2,\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 2\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,1,14}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 2\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 2\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,1,15}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 3,\ k\in\{1,2,3,4\},\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 3\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2 \pmod 3\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,1,16}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 4,\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3 \pmod 4\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,1,17}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3 \pmod 4\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,2,18}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 2\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 2\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,2,19}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 2,\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 2\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,2,20}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3 \pmod 4\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,3,21}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 2\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 2\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,3,22}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 2\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 2\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,3,23}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 3\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 3\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2 \pmod 3\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,3,24}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2 \pmod 4\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3 \pmod 4\}$

Окончание табл. 1.2

$\Gamma^{2,4}_{2,1,3,25}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),$ $(i,j+1,3)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},$ $\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,2,2,26}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{2,1,2,18})$
$\Gamma^{2,4}_{2,2,2,27}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{2,1,2,19})$
$\Gamma^{2,4}_{2,2,3,28}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,3,3,29}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),$ $(i,j+1,4)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 3)\}$

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,t}$, $8\le t\le 11$, попарно не изоморфны, вытекает из следующих наблюдений. Поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$, то граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,11}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$. Далее, поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8}$ несвязный, а графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$ связные, то граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,8}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$. Наконец, граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(0,3)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, в то время как граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(0,3)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$. Следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,9}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,10}$ не изоморфны.

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,t}$, $12\le t\le 17$, попарно не изоморфны, выводим из следующих наблюдений. Поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,15}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,12}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,13}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,14}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,16}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,17}$, то граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,15}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,12}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,13}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,14}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,16}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,17}$. Далее, поскольку периоды графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,12}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,13}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,14}$ равны между собой, но отличны от периодов каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,16}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,17}$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,12}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,13}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,14}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,16}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,17}$. Граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,12}$ содержит замкнутые пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, $(0,0)$; типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,-1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,0)$; типа $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, $(0,0)$ и типа $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,0)$, в то время как граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,13}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, $(0,0)$. Следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,12}$ и $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,13}$ не изоморфны. Далее, граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,12}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,13}$ тоже содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,14}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$. Следовательно, граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,14}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,12}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,13}$. Наконец, графы $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,16}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,17}$ не изоморфны, так как граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,16}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,17}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$.

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,t}$, $18\le t\le 20$, попарно не изоморфны, получаем из следующих наблюдений. Поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,20}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,18}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,19}$, то граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,20}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,18}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,19}$. Далее, поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,18}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, в то время как граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,19}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, то графы $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,18}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,2,19}$ не изоморфны.

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,t}$, $21 \le t \le 25$, попарно не изоморфны, вытекает из следующих наблюдений. Поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,23}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,21}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,22}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,24}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,25}$, то граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,23}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,21}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,22}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,24}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,25}$. Далее, поскольку периоды графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,21}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,22}$ равны между собой, но отличны от периодов каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,24}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,25}$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,21}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,22}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,24}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,25}$. Далее, заметим, что граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,21}$ содержит замкнутые пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, $(0,0)$; типа $(0,0)$, $(0,-1)$, $(0,-2)$, $(1,-2)$, $(1,-1)$, $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,0)$; типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(-1,2)$, $(-1,1)$, $(-1,0)$, $(0,0)$, $(0,0)$ и типа $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$, $(-1,-2)$, $(0,-2)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,22}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, $(0,0)$. Следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,21}$ и $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,22}$ не изоморфны. Далее, аналогично, граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,24}$ содержит замкнутые пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, $(0,0)$; типа $(0,0)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$, $(2,-1)$, $(2,0)$, $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,0)$; типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, $(-2,1)$, $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$, $(0,0)$; типа $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-2,0)$, $(-2,-1)$, $(-1,-1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, $(0,0)$, в то время как граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,25}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, $(0,0)$. Следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,24}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,3,25}$ не изоморфны. Наконец, граф $\Gamma^{2,4}_{2,2,2,26}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, в то время как граф $\Gamma^{2,4}_{2,2,2,27}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{2,2,2,26}$, $\Gamma^{2,4}_{2,2,2,27}$ не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 1.2 даются следующим списком:

$\Gamma^{2,4}_{\bar{1},1,1,8}$(несв.); $\Gamma^{2,4}_{1,\bar{1},1,8}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\bar{1},\bar{1},8}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},\bar{1},1,8}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},\bar{1},\bar{1},8}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{1},1,1,10}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\bar{1},1,10}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\bar{1},\bar{1},10}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},\bar{1},1,10}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},\bar{1},\bar{1},10}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,1,12}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},1,12}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{1},12}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},1,12}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{1},12}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,1,14}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},1,14}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{1},14}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},1,14}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{1},14}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,1,16}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},1,16}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{1},16}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},1,16}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{1},16}$
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,2,18}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},2,18}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{2},18}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},2,18}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{2},18}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,2,20}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},2,20}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{2},20}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},2,20}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{2},20}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,3,22}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},3,22}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{3},22}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},3,22}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{3},22}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,3,24}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},3,24}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{3},24}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},3,24}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{3},24}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},2,2,26}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{2},2,26}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{2},\bar{2},26}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{2},2,26}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{2},\bar{2},26}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},2,3,28}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{2},3,28}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{2},\bar{3},28}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{2},3,28}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{2},\bar{3},28}$;

$\Gamma^{2,4}_{\bar{1},1,1,9}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\bar{1},1,9}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\bar{1},\bar{1},9}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},\bar{1},1,9}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},\bar{1},\bar{1},9}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{1},1,1,11}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\bar{1},1,11}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\bar{1},\bar{1},11}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},\bar{1},1,11}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{1},\bar{1},\bar{1},11}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,1,13}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},1,13}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{1},13}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},1,13}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{1},13}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,1,15}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},1,15}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{1},15}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},1,15}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{1},15}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,1,17}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},1,17}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{1},17}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},1,17}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{1},17}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,2,19}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},2,19}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{2},19}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},2,19}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{2},19}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,3,21}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},3,21}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{3},21}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},3,21}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{3},21}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,3,23}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},3,23}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{3},23}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},3,23}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{3},23}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},1,3,25}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},3,25}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{1},\bar{3},25}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},3,25}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{1},\bar{3},25}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},2,2,27}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{2},2,27}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{2},\bar{2},27}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{2},2,27}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{2},\bar{2},27}$;
$\Gamma^{2,4}_{\bar{2},3,3,29}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{3},3,29}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\bar{3},\bar{3},29}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{3},3,29}$; $\Gamma^{2,4}_{\bar{2},\bar{3},\bar{3},29}$.

П о д с л у ч а й 1.3. Либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям случая 1 (т. е. $l \in \{1,2\}$, $m,n \in \{1,2,3\}$), и для любых $i,j \in \mathbb{Z}$ в подграфе $\langle B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1} \rangle_\Gamma$ существует замкнутый путь (i,j,k_1), $(i+1,j,k_2)$, $(i+1,j+1,k_3)$, $(i,j+1,k_4)$, (i,j,k_5), $(i+1,j,k_6)$, $(i+1,j+1,k_7)$, $(i,j+1,k_8)$, (i,j,k_9), $(i+1,j,k_{10})$, $(i+1,j+1,k_{11})$, $(i,j+1,k_{12})$, (i,j,k_{13}), $(i+1,j,k_{14})$, $(i+1,j+1,k_{15})$, $(i,j+1,k_{16})$, (i,j,k_1), где $k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6,k_7,k_8,k_9,k_{10},k_{11},k_{12},k_{13},k_{14},k_{15}$, $k_{16} \in \{1,2,3,4\}$ и $k_1 \ne k_5 \ne k_9 \ne k_{13}$, $k_2 \ne k_6 \ne k_{10} \ne k_{14}$, $k_3 \ne k_7 \ne k_{11} \ne k_{15}$, $k_4 \ne k_8 \ne k_{12} \ne k_{16}$, либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т. е. $l \in \{1,2,\bar{1},\bar{2}\}$, $m,n \in \{1,2,3,\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$.)

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 1.3, приведены в табл. 1.3.

Т а б л и ц а 1.3

$\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$	$E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$
$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,30}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,31}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,1,1,32}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4),\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,1,33}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,1,1,30})$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,1,34}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2),\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,1,35}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4),\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,1,2,36}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,1,1,31})$

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,t}, 30\le t\le 32$, попарно не изоморфны, вытекает из следующих наблюдений. Поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,32}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,30}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,31}$, то граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,32}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,30}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,31}$. Далее, поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,30}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, в то время как граф $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,31}$ содержит замкнутые пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, то графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,30}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,31}$ не изоморфны.

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,t}$, $33\le t\le 35$, попарно не изоморфны, выводим из следующих наблюдений. Поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,35}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,33}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,34}$, то граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,35}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,33}$, $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,34}$. Далее, поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,33}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, в то время как граф $\Gamma^{2,4}_{2,1,1,34}$ содержит замкнутые пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, то графы $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,33}$, $\Gamma^{2,4}_{1,1,1,34}$ не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 1.3 даются следующим списком:

$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},1,1,30}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},1,30}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},\overline{1},30}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},1,30}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},\overline{1},30}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},1,1,31}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},1,31}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},\overline{1},31}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},1,31}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},\overline{1},31}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},1,1,32}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},1,32}$; $\Gamma^{2,4}_{1,\overline{1},\overline{1},32}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},1,32}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},\overline{1},\overline{1},32}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},1,1,33}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},1,33}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},\overline{1},33}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},1,33}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},\overline{1},33}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},1,1,34}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},1,34}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},\overline{1},34}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},1,34}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},\overline{1},34}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},1,1,35}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},1,35}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},\overline{1},35}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},1,35}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},\overline{1},35}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},1,2,36}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},2,36}$; $\Gamma^{2,4}_{2,\overline{1},\overline{2},36}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},2,36}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},\overline{1},\overline{2},36}$.

4. Графы, удовлетворяющие условиям случая 2

Пусть Γ — граф, удовлетворяющий условиям случая 2. Если Γ — базисный для случая 2, т.е. $l\in\{1,2\}$, $m\in\{4,5,6,7\}$, $n\in\{1,2,3\}$, то рассмотрим граф Δ, изоморфный графу с множеством вершин $B_{i,j}\cup B_{i+1,j}$ для $i,j\in\mathbb{Z}$ и множеством ребер $E(\Delta)=E(\langle B_{i,j}\cup B_{i+1,j}\rangle_\Gamma)\setminus$

$E_0(\Gamma)$, т. е. граф Δ, который получается из $\langle B_{i,j} \cup B_{i+1,j}\rangle_\Gamma$ удалением ребер внутри блоков $B_{i,j}$, $B_{i+1,j}$ для любых $i, j \in \mathbb{Z}$. (Ясно, что определенный с точностью до изоморфизма граф Δ не зависит от выбора $i, j \in \mathbb{Z}$.) Тогда, с учетом транзитивности группы $G^{B_{i,j}}_{\{B_{i,j}\}}$, отсюда следует, что граф Δ является либо дизъюнктным объединением двух циклов длины 4, либо циклом длины 8. В зависимости от того, какая из этих возможностей для графа Δ выполняется, мы скажем, что для базисного графа Γ реализуется соответственно подслучай 2.1 или 2.2. Кроме того, в каждый из этих подслучаев мы включаем частично дополнительные графы к этим базисным графам (и только их).

В подслучае 2.1 определим следующим образом системы импримитивности $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ группы G: две вершины графа Γ принадлежат одному блоку системы $\widetilde{\alpha}$, если для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$ они содержатся в $B_{i,j}$ и имеют общую смежную вершину в $B_{i+1,j}$; две вершины графа Γ принадлежат одному блоку системы $\widetilde{\beta}$, если для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$ они содержатся в $B_{i,j}$ и имеют общую смежную вершину в $B_{i-1,j}$. В подслучае 2.2 определим следующим образом систему импримитивности $\widetilde{\alpha}$ группы G: две вершины графа Γ принадлежат одному блоку системы $\widetilde{\alpha}$, если для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$ они содержатся в $B_{i,j}$ и не имеют общих смежных вершин в $B_{i+1,j}$ (или, что эквивалентно, не имеют общих смежных вершин в $B_{i-1,j}$). Как в подслучае 2.1, так и в подслучае 2.2, группа $G^{B_{i,j}}_{\{B_{i,j}\}}$ имеет систему импримитивности, состоящую из двух блоков мощности 2. Следовательно, порядок группы $G^{B_{i,j}}_{\{B_{i,j}\}}$ делит 8. Поскольку $|\Gamma((i,j,k)) \cap B_{i,j+1}| = 1$ для любых i,$j\in \mathbb{Z}$, $k \in \{1,2,3,4\}$, то $G^{B_{i+1,j}}_{B_{i,j}}$ совпадает с ограничением на $B_{i+1,j}$ поточечного стабилизатора в группе G множества $\bigcup\limits_{i',j'\in\mathbb{Z},\ i'\leq i} B_{i',j'}$ и, таким образом, $r_1 = 0$. Анализ доказательства теоремы 1 из [3] показывает теперь, что Γ удовлетворяет условию $[n_1, 1]$-периодичности, где $n_1 \leq 8$. Последнее свойство позволяет осуществить перебор базисных для случая 2 графов.

П о д с л у ч а й 2.1. Либо граф Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям подслучая 2.1 (т. е. $l \in \{1,2\}$, $m \in \{4,5,6\}$, $n \in \{1,2,3\}$), либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т. е. $l \in \{1,2,\overline{1},\overline{2}\}$, $m \in \{4,5,6\}$, $n \in \{1,2,3,\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$).

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 2.1, приведены в табл. 2.1.

Т а б л и ц а 2.1

$\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$	$E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$
$\Gamma^{2,4}_{1,4,1,1}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ k\in\{1,2,3,4\}\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,4,1,3}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,4,1,4}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2),\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),$ $(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,4,1,5}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2),\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),$ $(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,4,1,6}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,6,1,7}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,1})$
$\Gamma^{2,4}_{1,6,1,8}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2})$
$\Gamma^{2,4}_{1,6,1,9}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,3})$

Продолжение табл. 2.1

$\Gamma^{2,4}_{1,6,1,10}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2),\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,6,1,11}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\ \}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,6,1,12}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 3),\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 3)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,6,1,13}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\}\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 3)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,6,1,14}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 3)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 3)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,6,1,15}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,4,1,16}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,1})$
$\Gamma^{2,4}_{2,4,1,17}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,4})$
$\Gamma^{2,4}_{2,4,2,18}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,4,2,19}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2})$
$\Gamma^{2,4}_{2,4,2,20}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,5})$
$\Gamma^{2,4}_{2,4,3,21}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,3})$
$\Gamma^{2,4}_{2,4,3,22}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,6})$
$\Gamma^{2,4}_{2,5,1,23}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,1})$
$\Gamma^{2,4}_{2,5,1,24}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ k\in\{1,2,3,4\},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,5,2,25}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2})$
$\Gamma^{2,4}_{2,5,2,26}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,5})$
$\Gamma^{2,4}_{2,5,3,27}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,5,3,28}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,6,1,29}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,1})$
$\Gamma^{2,4}_{2,6,1,30}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,6,1,10})$
$\Gamma^{2,4}_{2,6,1,31}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,6,1,12})$
$\Gamma^{2,4}_{2,6,2,32}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2})$
$\Gamma^{2,4}_{2,6,2,33}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,6,1,11})$

Окончание табл. 2.1

$\Gamma^{2,4}_{2,6,2,34}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,6,1,15})$
$\Gamma^{2,4}_{2,6,3,35}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,3})$
$\Gamma^{2,4}_{2,6,3,36}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,6,1,13})$
$\Gamma^{2,4}_{2,6,3,37}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,6,1,14})$

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,t}$, $1 \le t \le 6$, попарно не изоморфны, вытекает из следующих наблюдений. Поскольку графы $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,1}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,3}$ имеют одинаковые периоды, отличные от периодов каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,4}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,5}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,6}$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,1}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,3}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,4}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,5}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,6}$. Далее, поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,1}$ является несвязным, а каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,3}$ является связным, то граф $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,1}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,3}$. Заметим, что в графе $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2}$ все пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ начинаются и заканчиваются в одном и том же блоке $\widetilde{\alpha}$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,3}$ содержит путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, который начинается и заканчивается в различных блоках $\widetilde{\alpha}$. Следовательно, граф $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,2}$ не изоморфен графу $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,3}$. Наконец, фактор-граф $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,4}/\widetilde{\alpha}$ не изоморфен ни одному из фактор-графов $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,5}/\widetilde{\alpha}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,6}/\widetilde{\alpha}$. Следовательно, граф $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,4}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,5}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,6}$. Далее, все пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ в графе $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,5}$ начинаются и заканчиваются в различных блоках $\widetilde{\alpha}$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,6}$ содержит путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, который начинается и заканчивается в одном и том же блоке $\widetilde{\alpha}$. Следовательно, граф $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,5}$ не изоморфен графу $\Gamma^{2,4}_{1,4,1,6}$.

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,t}$, $7 \le t \le 15$, попарно не изоморфны, вытекает из следующих наблюдений. Поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,15}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,t}$, $7 \le t \le 14$, то граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,15}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,t}$, $7 \le t \le 14$. Далее, поскольку графы $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,t}$, $7 \le t \le 9$, имеют одинаковые периоды, отличные от периодов графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,t}$, $10 \le t \le 14$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,t}$, $7 \le t \le 9$, не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,t}$, $10 \le t \le 14$. Аналогично поскольку графы $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,10}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,11}$ имеют одинаковые периоды, отличные от периодов каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,12}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,13}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,14}$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,10}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,11}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,12}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,13}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,14}$. Далее, фактор-граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,7}/\widetilde{\alpha}$ не изоморфен ни одному из фактор-графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,8}/\widetilde{\alpha}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,9}/\widetilde{\alpha}$, следовательно, граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,7}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,8}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,9}$. Заметим, что в графе $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,8}$ все пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$ начинаются и заканчиваются в одном и том же блоке $\widetilde{\alpha}$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,9}$ содержит путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$, $(0,1)$, $(0,0)$, который начинается и заканчивается в различных блоках $\widetilde{\alpha}$. Следовательно, граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,8}$ не изоморфен графу $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,9}$. Аналогично фактор-граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,10}/\widetilde{\alpha}$ не изоморфен фактор-графу $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,11}/\widetilde{\alpha}$, следовательно, граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,10}$ не изоморфен графу $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,11}$. Наконец, фактор-граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,12}/\widetilde{\alpha}$ не изоморфен ни одному из фактор-графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,13}/\widetilde{\alpha}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,14}/\widetilde{\alpha}$. Следовательно, граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,12}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,13}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,14}$. Граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,14}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(1,-1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$ такой, что начальная и конечная вершины его подпути типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ не являются смежными, и содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$ такой, что начальная и конечная вершины его подпути типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, $(-1,0)$, $(0,0)$ не являются смежными. Граф $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,13}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(1,-1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$ такой, что начальная и конечная вершины его подпути типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ не являются смежными. Следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,13}$, $\Gamma^{2,4}_{1,6,1,14}$ не изоморфны.

Графы $\Gamma^{2,4}_{2,4,1,16}$, $\Gamma^{2,4}_{2,4,1,17}$ не изоморфны, так как они имеют различные периоды.

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,18}$, $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,19}$, $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,20}$ попарно не изоморфны, вытекает из следующих наблюдений. Поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,20}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,18}$, $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,19}$, то граф $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,20}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,18}$, $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,19}$. А так как фактор-граф $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,18}/\widetilde{\alpha}$ не изоморфен фактор-графу $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,19}/\widetilde{\alpha}$, следовательно, граф $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,18}$ не изоморфен графу $\Gamma^{2,4}_{2,4,2,19}$.

Графы $\Gamma^{2,4}_{2,4,3,21}$, $\Gamma^{2,4}_{2,4,3,22}$ не изоморфны, так как они имеют различные периоды. По этому же признаку не изоморфны графы $\Gamma^{2,4}_{2,5,1,23}$ и $\Gamma^{2,4}_{2,5,1,24}$, $\Gamma^{2,4}_{2,5,2,25}$ и $\Gamma^{2,4}_{2,5,2,26}$, $\Gamma^{2,4}_{2,5,3,27}$ и $\Gamma^{2,4}_{2,5,3,28}$, а также графы $\Gamma^{2,4}_{2,6,1,t}$, $29 \le t \le 31$, попарно не изоморфны и графы $\Gamma^{2,4}_{2,6,2,t}$, $32 \le t \le 34$, попарно не изоморфны.

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,t}$, $35 \le t \le 37$, попарно не изоморфны, вытекает из следующих наблюдений. Поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,35}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,36}$, $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,37}$, то граф $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,35}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,36}$, $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,37}$. Граф $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,37}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(1,-1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, такой что начальная и конечная вершины его подпути типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ не являются смежными, и содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, такой что начальная и конечная вершины его подпути типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, $(-1,0)$, $(0,0)$ не смежны. Граф $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,36}$ не содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(1,-1)$, $(0,-1)$,$(0,0)$, такой что начальная и конечная вершины его подпути типа $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ не смежны. Следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,36}$, $\Gamma^{2,4}_{2,6,3,37}$ не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 2.1 даются следующим списком:

$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,1,1}$(несв.); $\Gamma^{2,4}_{1,4,\overline{1},1}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,\overline{1},1}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,1,2}$; $\Gamma^{2,4}_{1,4,\overline{1},2}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,\overline{1},2}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,1,3}$; $\Gamma^{2,4}_{1,4,\overline{1},3}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,\overline{1},3}$
$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,1,4}$; $\Gamma^{2,4}_{1,4,\overline{1},4}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,\overline{1},4}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,1,5}$; $\Gamma^{2,4}_{1,4,\overline{1},5}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,\overline{1},5}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,1,6}$; $\Gamma^{2,4}_{1,4,\overline{1},6}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,\overline{1},6}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,1,7}$; $\Gamma^{2,4}_{1,6,\overline{1},7}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,\overline{1},7}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,1,8}$; $\Gamma^{2,4}_{1,6,\overline{1},8}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,\overline{1},8}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,1,9}$; $\Gamma^{2,4}_{1,6,\overline{1},9}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,\overline{1},9}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,1,10}$; $\Gamma^{2,4}_{1,6,\overline{1},10}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,\overline{1},10}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,1,11}$; $\Gamma^{2,4}_{1,6,\overline{1},11}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,\overline{1},11}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,1,12}$; $\Gamma^{2,4}_{1,6,\overline{1},12}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,\overline{1},12}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,1,13}$; $\Gamma^{2,4}_{1,6,\overline{1},13}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,\overline{1},13}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,1,14}$; $\Gamma^{2,4}_{1,6,\overline{1},14}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,\overline{1},14}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,1,15}$; $\Gamma^{2,4}_{1,6,\overline{1},15}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,\overline{1},15}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,1,16}$; $\Gamma^{2,4}_{2,4,\overline{1},16}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,\overline{1},16}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,1,17}$; $\Gamma^{2,4}_{2,4,\overline{1},17}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,\overline{1},17}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,2,18}$; $\Gamma^{2,4}_{2,4,\overline{2},18}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,\overline{2},18}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,2,19}$; $\Gamma^{2,4}_{2,4,\overline{2},19}$; $\Gamma_{\overline{2},4,\overline{2},19}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,2,20}$; $\Gamma^{2,4}_{2,4,\overline{2},20}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,\overline{2},20}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,3,21}$; $\Gamma^{2,4}_{2,4,\overline{3},21}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,\overline{3},21}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,3,22}$; $\Gamma^{2,4}_{2,4,\overline{3},22}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,\overline{3},22}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,1,23}$(несв.); $\Gamma^{2,4}_{2,5,\overline{1},23}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,\overline{1},23}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,1,24}$; $\Gamma^{2,4}_{2,5,\overline{1},24}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,\overline{1},24}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,2,25}$; $\Gamma^{2,4}_{2,5,\overline{2},25}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,\overline{2},25}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,2,26}$; $\Gamma^{2,4}_{2,5,\overline{2},26}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,\overline{2},26}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,3,27}$; $\Gamma^{2,4}_{2,5,\overline{3},27}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,\overline{3},27}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,3,28}$; $\Gamma^{2,4}_{2,5,\overline{3},28}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,\overline{3},28}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,1,29}$; $\Gamma^{2,4}_{2,6,\overline{1},29}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,\overline{1},29}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,1,30}$; $\Gamma^{2,4}_{2,6,\overline{1},30}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,\overline{1},30}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,1,31}$; $\Gamma^{2,4}_{2,6,\overline{1},31}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,\overline{1},31}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,2,32}$; $\Gamma^{2,4}_{2,6,\overline{2},32}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,\overline{2},32}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,2,33}$; $\Gamma^{2,4}_{2,6,\overline{2},33}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,\overline{2},33}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,2,34}$; $\Gamma^{2,4}_{2,6,\overline{2},34}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,\overline{2},34}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,3,35}$; $\Gamma^{2,4}_{2,6,\overline{3},35}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,\overline{3},35}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,3,36}$; $\Gamma^{2,4}_{2,6,\overline{3},36}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,\overline{3},36}$;
$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,3,37}$; $\Gamma^{2,4}_{2,6,\overline{3},37}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,\overline{3},37}$.

П о д с л у ч а й 2.2. Либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям подслучая 2.2 (т. е. $l \in \{1,2\}$, $m = 7$, $n \in \{1,2,3\}$), либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т. е. $l \in \{1,2,\overline{1},\overline{2}\}$, $m = 7$, $n \in \{1,2,3,\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$).

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 2.2, приведены в табл. 2.2.

Т а б л и ц а 2.2

$\Gamma^{2,4}_{1,7,1,38}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,1})$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,1,39}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\} :\ i,j \in \mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,1,40}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,1,4})$

Окончание табл. 2.2

$\Gamma^{2,4}_{1,7,1,41}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,1,42}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),$ $(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},$ $\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),$ $(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}: i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,1,43}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),$ $(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},$ $\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,1,44}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},$ $i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:$ $i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),$ $(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},$ $\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 4)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,1,45}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,1,38})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,1,46}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,1,40})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,1,47}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,1,42})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,2,48}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,1,39})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,2,49}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,1,41})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,2,50}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,1,43})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,2,51}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,1,44})$

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,t}$, $38\le t\le 44$, попарно не изоморфны, вытекает из следующих наблюдений. Поскольку графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,38}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,39}$ имеют одинаковые периоды, отличные от периодов графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,t}$, $40\le t\le 44$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,38}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,39}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,t}$, $40\le t\le 44$. Аналогично поскольку графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,40}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,41}$ имеют одинаковые периоды, отличные от периодов графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,42}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,43}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,44}$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,40}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,41}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,42}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,43}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,44}$. Далее, поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,39}$ содержит путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, который соединяет противоположные вершины в цикле длины 8, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,38}$ не содержит путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, который соединяет противоположные вершины в цикле длины 8, то графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,38}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,39}$ не изоморфны. Так как граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,41}$ содержит замкнутый путь типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,40}$ не содержит ни одного замкнутого пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и ни одного замкнутого пути типа $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, то графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,40}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,41}$ не изоморфны. Наконец, графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,42}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,43}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,44}$ имеют одинаковый период. Но граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,42}$ содержит четыре замкнутых пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,43}$ содержит восемь замкнутых путей типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,42}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,43}$ не изоморфны. Поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,42}$ содержит четыре замкнутых пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,44}$ не содержит ни одного замкнутого пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и ни одного замкнутого пути типа $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, то графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,42}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,44}$ не изоморфны. И, наконец, так как граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,43}$ содержит восемь замкнутых путей типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,44}$ не содержит ни одного замкнутого пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и ни одного замкнутого пути типа $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, то графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,43}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,1,44}$ не изоморфны.

Графы $\Gamma^{2,4}_{2,7,1,t}$, $45 \le t \le 47$, попарно не изоморфны, так как они имеют попарно различные периоды.

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,t}$, $48 \le t \le 51$, попарно не изоморфны, подтверждают следующие наблюдения. Поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,48}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,49}$, $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,50}$, $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,51}$, то граф $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,48}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,49}$, $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,50}$, $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,51}$. Далее, поскольку период графа $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,49}$ отличен от периода каждого из графов $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,50}$, $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,51}$, то граф $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,49}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,50}$, $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,51}$.

Наконец, графы $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,50}$, $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,51}$ имеют одинаковый период, но граф $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,50}$ содержит восемь замкнутых путей типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,51}$ не содержит ни одного замкнутого пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$ и ни одного замкнутого пути типа $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$. Следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,50}$, $\Gamma^{2,4}_{2,7,2,51}$ не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 2.2 даются следующим списком:

$$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,1,38};\ \Gamma^{2,4}_{1,7,\overline{1},38};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,\overline{1},38};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,1,39};\ \Gamma^{2,4}_{1,7,\overline{1},39};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,\overline{1},39};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,1,40};\ \Gamma^{2,4}_{1,7,\overline{1},40};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,\overline{1},40};$$
$$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,1,41};\ \Gamma^{2,4}_{1,7,\overline{1},41};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,\overline{1},41};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,1,42};\ \Gamma^{2,4}_{1,7,\overline{1},42};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,\overline{1},42};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,1,43};\ \Gamma^{2,4}_{1,7,\overline{1},43};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,\overline{1},43};$$
$$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,1,44};\ \Gamma^{2,4}_{1,7,\overline{1},44};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,\overline{1},44};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,1,45};\ \Gamma^{2,4}_{2,7,\overline{1},45};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,\overline{1},45};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,1,46};\ \Gamma^{2,4}_{2,7,\overline{1},46};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,\overline{1},46};$$
$$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,1,47};\ \Gamma^{2,4}_{2,7,\overline{1},47};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,\overline{1},47};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,2,48};\ \Gamma^{2,4}_{2,7,\overline{2},48};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,\overline{2},48};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,2,49};\ \Gamma^{2,4}_{2,7,\overline{2},49};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,\overline{2},49};$$
$$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,2,50};\ \Gamma^{2,4}_{2,7,\overline{2},50};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,\overline{2},50};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,2,51};\ \Gamma^{2,4}_{2,7,\overline{2},51};\ \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,\overline{2},51}.$$

5. Графы, удовлетворяющие условиям случая 3

Пусть Γ — граф, удовлетворяющий условиям случая 3. Если Γ — базисный для случая 3, т. е. $l \in \{1,2\}$, $m,n \in \{4,5,6,7\}$, то рассмотрим граф Δ_1, изоморфный графу с множеством вершин $B_{i,j} \cup B_{i+1,j}$ для $i,j \in \mathbb{Z}$ и множеством ребер $E(\Delta_1) = E(\langle B_{i,j} \cup B_{i+1,j}\rangle_\Gamma) \setminus E_0(\Gamma)$, т. е. граф Δ_1, который получается из $\langle B_{i,j} \cup B_{i+1,j}\rangle_\Gamma$ удалением ребер внутри блоков $B_{i,j}$, $B_{i+1,j}$. (Ясно, что определенный с точностью до изоморфизма граф Δ_1 не зависит от выбора $i,j \in \mathbb{Z}$.) Тогда Δ_1 является графом на 8 вершинах, каждая из которых имеет валентность 2. С учетом транзитивности группы $G^{B_{i,j}}_{\{B_{i,j}\}}$ отсюда следует, что граф Δ_1 является либо дизъюнктным объединением двух циклов длины 4, либо циклом длины 8. Аналогично граф Δ_2, изоморфный графу с множеством вершин $B_{i,j} \cup B_{i,j+1}$ для $i,j \in \mathbb{Z}$ и множеством ребер $E(\Delta_2) = E(\langle B_{i,j} \cup B_{i,j+1}\rangle_\Gamma) \setminus E_0(\Gamma)$, является либо дизъюнктным объединением двух циклов длины 4, либо циклом длины 8. Поэтому имеем следующие возможности для графов Δ_1 и Δ_2: оба графа являются дизъюнктным объединением двух циклов длины 4, оба графа являются циклом длины 8 и, наконец, граф Δ_1 является циклом длины 8, а граф Δ_2 — дизъюнктным объединением двух циклов длины 4. В зависимости от того, какая из этих возможностей для графов Δ_1 и Δ_2 выполняется, мы скажем, что для базисного графа Γ реализуется соответственно подслучай 3.1, 3.2 или 3.3. Кроме того, в каждый из этих подслучаев мы включаем частично дополнительные графы к этим базисным графам (и только их).

В подслучае 3.1 определим следующим образом системы импримитивности $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$,$\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\delta}$ группы G: две вершины графа Γ принадлежат одному блоку системы $\widetilde{\alpha}$, если для некоторых $i,j \in \mathbb{Z}$ они содержатся в $B_{i,j}$ и имеют общую смежную вершину в $B_{i+1,j}$; две вершины графа Γ принадлежат одному блоку системы $\widetilde{\beta}$, если для некоторых $i,j \in \mathbb{Z}$ они содержатся в $B_{i,j}$ и имеют общую смежную вершину в $B_{i-1,j}$; две вершины графа Γ принадлежат одному блоку системы $\widetilde{\gamma}$, если для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$ они содержатся в $B_{i,j}$ и имеют общую смежную вершину в $B_{i,j-1}$; две вершины графа Γ принадлежат одному блоку системы $\widetilde{\delta}$, если для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$ они содержатся в $B_{i,j}$ и имеют общую смежную вершину в $B_{i,j+1}$. Очевидно, рассмотрение подслучая 3.1 сводится к рассмотрению следующих подслучаев 3.1.1 – 3.1.4. Для базисного графа Γ реализуется подслучай 3.1.1, если $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma} = \widetilde{\delta}$. Для базисного графа Γ реализуется подслучай 3.1.2, если $\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} \neq \widetilde{\delta}$. Для базисного графа Γ реализуется подслучай 3.1.3, если $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\delta} \neq \widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma}$ или $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\gamma} \neq \widetilde{\beta} = \widetilde{\delta}$. Наконец, для базисного графа Γ реализуется подслучай 3.1.4, если либо $\widetilde{\beta} \neq \widetilde{\alpha} = \widetilde{\gamma} \neq \widetilde{\delta}$ и $\widetilde{\beta} \neq \widetilde{\delta}$, либо $\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{\alpha} = \widetilde{\delta} \neq \widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\beta} \neq \widetilde{\gamma}$. Согласно доказательству теоремы из [4] ситуации $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma} \neq \widetilde{\delta}$ и $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} = \widetilde{\delta} \neq \widetilde{\gamma}$ не реализуются.

В подслучае 3.2 определим следующим образом систему импримитивности $\widetilde{\alpha}$ группы G: две вершины графа Γ принадлежат одному блоку системы $\widetilde{\alpha}$, если для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$ они содержатся в $B_{i,j}$ и не имеют общих смежных вершин в $B_{i+1,j}$ (или, что эквивалентно, не имеют общих смежных вершин в $B_{i-1,j}$).

В подслучае 3.3 определим следующим образом систему импримитивности $\widetilde{\alpha}$ группы G: две вершины графа Γ принадлежат одному блоку системы $\widetilde{\alpha}$, если для некоторых $i, j \in \mathbb{Z}$ они содержатся в $B_{i,j}$ и не имеют общих смежных вершин в $B_{i+1,j}$ (или, что эквивалентно, не имеют общих смежных вершин в $B_{i-1,j}$), но имеют общую смежную вершину в $B_{i,j+1}$ (или, что эквивалентно, имеют общую смежную вершину в $B_{i,j-1}$).

В подслучаях 3.1, 3.2, 3.3 группа $G_{\{B_{i,j}\}}^{B_{i,j}}$ имеет систему импримитивности, состоящую из двух блоков мощности 2. Следовательно, порядок группы $G_{\{B_{i,j}\}}^{B_{i,j}}$ делит 8. По теореме из [4] $r_1 = 0$ или $r_2 = 0$. Анализ доказательства теоремы 1 из [3] показывает теперь, что период графа Γ (определение см. в разд. 2) не превосходит 8 и, таким образом, можно считать, что Γ удовлетворяет условию $[n_1, 1]$-периодичности, где $n_1 \leq 8$. Последнее свойство позволяет осуществить перебор базисных для случая 3 графов.

П о д с л у ч а й 3.1.1. Либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям подслучая 3.1 (т. е. $l \in \{1, 2\}$, $m, n \in \{4, 5, 6\}$), и для любых $i, j \in \mathbb{Z}$ в подграфе $\langle B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1} \rangle_\Gamma$ выполняется условие $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma} = \widetilde{\delta}$, либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т. е. $l \in \{\overline{1}, \overline{2}\}$, $m, n \in \{4, 5, 6\}$).

Все графы, удовлетворяющие условиям подслучая 3.1.1 были получены в [4, разд. 4]. Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 3.1.1, приведены в табл. 3.1.1.

Т а б л и ц а 3.1.1

$\Gamma_{l,m,n,t}^{2,4}$	$E_2(\Gamma_{l,m,n,t}^{2,4})$
$\Gamma_{1,4,4,1}^{2,4}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j \in \mathbb{Z}\}$
$\Gamma_{1,4,4,2}^{2,4}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}: i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma_{2,4,4,3}^{2,4}$	совпадает с $E_2(\Gamma_{1,4,4,1}^{2,4})$
$\Gamma_{2,4,4,4}^{2,4}$	совпадает с $E_2(\Gamma_{1,4,4,2}^{2,4})$
$\Gamma_{2,5,5,5}^{2,4}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j \in \mathbb{Z}\}$
$\Gamma_{2,5,5,6}^{2,4}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j \in \mathbb{Z},\ k \in \{1,2,3,4\}\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}\ : i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2)\}$

Графы $\Gamma^{2,4}_{1,4,4,1}$, $\Gamma^{2,4}_{1,4,4,2}$ не изоморфны, так как они имеют различные периоды. По этой же причине графы $\Gamma^{2,4}_{2,4,4,3}$, $\Gamma^{2,4}_{2,4,4,4}$ не изоморфны и графы $\Gamma^{2,4}_{2,5,5,5}$, $\Gamma^{2,4}_{2,5,5,6}$ не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 3.1.1 даются следующим списком:

$$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,4,1}(\text{несв.});\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,4,2};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,4,3}\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,4,4};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,5,5}(\text{несв.});\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,5,6}.$$

П о д с л у ч а й 3.1.2. Либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям подслучая 3.1 (т. е. $l\in\{1,2\}$, $m,n\in\{4,5,6\}$), и для любых $i,j\in\mathbb{Z}$ в подграфе $\langle B_{i,j}\cup B_{i+1,j}\cup B_{i+1,j+1}\cup B_{i,j+1}\rangle_\Gamma$ выполняется условие $\widetilde{\gamma}\neq\widetilde{\alpha}=\widetilde{\beta}\neq\widetilde{\delta}$, либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т. е. $l\in\{\overline{1},\overline{2}\}$, $m,n\in\{4,5,6\}$).

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 3.1.2, приведены в табл. 3.1.2.

Т а б л и ц а 3.1.2

$\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$	$E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$
$\Gamma^{2,4}_{1,4,4,7}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,4,6,8}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,4,4,9}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,4,5,10}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,4,7})$
$\Gamma^{2,4}_{2,5,5,11}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{2,4,4,9})$
$\Gamma^{2,4}_{2,4,6,12}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,6,8})$
$\Gamma^{2,4}_{2,5,6,13}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z}\}$

Так как графы $\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$, $7\le t\le 13$, имеют различные наборы параметров $(l,m,n))$, то они попарно не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 3.1.2 даются следующим списком:

$$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,4,7};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},4,6,8};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,4,9};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,5,10};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,5,11};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},4,6,12};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},5,6,13}.$$

П о д с л у ч а й 3.1.3. Либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям подслучая 3.1 (т. е. $l\in\{1,2\}$, $m,n=6$), и для любых $i,j\in\mathbb{Z}$ в подграфе $\langle B_{i,j}\cup B_{i+1,j}\cup B_{i+1,j+1}\cup B_{i,j+1}\rangle_\Gamma$ выполняется условие $\widetilde{\alpha}=\widetilde{\delta}\neq\widetilde{\beta}=\widetilde{\gamma}$ или условие $\widetilde{\alpha}=\widetilde{\gamma}\neq\widetilde{\beta}=\widetilde{\delta}$, либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т. е. $l\in\{\overline{1},\overline{2}\}$, $m,n=6$).

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 3.1.3, приведены в табл. 3.1.3.

Т а б л и ц а 3.1.3

$\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$	$E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$
$\Gamma^{2,4}_{1,6,6,14}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,6,6,15}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,6,6,14})$

Так как графы $\Gamma^{2,4}_{1,6,6,14}$, $\Gamma^{2,4}_{2,6,6,15}$ имеют различные наборы параметров (l,m,n), то они не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 3.1.3 даются следующим списком: $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,6,14}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,6,15}$.

П о д с л у ч а й 3.1.4. Либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям подслучая 3.1, (т.е. $l \in \{1,2\}$, $m,n = 6$) и для любых $i,j \in \mathbb{Z}$ в подграфе $\langle B_{i,j} \cup B_{i+1,j} \cup B_{i+1,j+1} \cup B_{i,j+1}\rangle_\Gamma$ выполняется условие $\widetilde{\beta} \neq \widetilde{\alpha} = \widetilde{\gamma} \neq \widetilde{\delta}$ и $\widetilde{\beta} \neq \widetilde{\delta}$ или условие $\widetilde{\gamma} \neq \widetilde{\alpha} = \widetilde{\delta} \neq \widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\beta} \neq \widetilde{\gamma}$, либо Γ является частично дополнительным к такому графу.

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 3.1.4, приведены в табл. 3.1.4.

Т а б л и ц а 3.1.4

$\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$	$E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$
$\Gamma^{2,4}_{1,6,6,16}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),$ $(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\} :\ i,j \in \mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,6,6,17}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,6,6,16})$

Так как графы $\Gamma^{2,4}_{1,6,6,16}$, $\Gamma^{2,4}_{2,6,6,17}$ имеют различные наборы параметров (l,m,n), то они не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 3.1.4 даются следующим списком:

$$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},6,6,16}; \Gamma^{2,4}_{\overline{2},6,6,17}.$$

П о д с л у ч а й 3.2. Либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям подслучая 3.2 (т.е. $l \in \{1,2\}$, $m,n = 7$), либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т.е. $l \in \{\overline{1},\overline{2}\}$, $m,n = 7$).

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 3.2, приведены в табл. 3.2.

Т а б л и ц а 3.2

$\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$	$E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,7,18}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},$ $\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\} :\ i,j \in \mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,7,19}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},$ $\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\} :\ i,j \in \mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,7,20}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},$ $\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)\} \cup \{\{(i,j,1),$ $(i,j+1,2)\},\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),$ $(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,7,21}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},$ $\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)\},\{\{(i,j,1),$ $(i,j+1,3)\},\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),$ $(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\} : i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,7,22}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},$ $\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 4)\} \cup \{\{(i,j,1),$ $(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),$ $(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},$ $\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},$ $\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\ 4)\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,1),$ $(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),$ $(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,7,23}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},$ $\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 4)\} \cup \{\{(i,j,1),$ $(i,j+1,2)\},\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),$

Окончание табл. 3.2

	$(i,j+1,4)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,4)\} : i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 1 \pmod 4\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,1),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,2)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,1)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,2)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,1)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 2 \pmod 4\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\}, \{(i,j,1),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,2)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,1)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,2)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 3 \pmod 4\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,7,24}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\}, \{(i,j,1),(i,j+1,2)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,1)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,2)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,3)\} :\ i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 0 \pmod 4\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\}, \{(i,j,1),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,2)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,1)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,2)\} : i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 1 \pmod 4\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,1),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,2)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,1)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,2)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,1)\} : i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 2 \pmod 4\} \cup \{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\}, \{(i,j,1),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,1)\}, \{(i,j,2),(i,j+1,2)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,1)\}, \{(i,j,3),(i,j+1,4)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,3)\}, \{(i,j,4),(i,j+1,4)\} : i,j \in \mathbb{Z},\ i \equiv 3 \pmod 4\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,7,25}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,7,18})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,7,26}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,7,19})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,7,27}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,7,20})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,7,28}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,7,21})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,7,29}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,7,22})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,7,30}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,7,23})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,7,31}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,7,24})$

То, что графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,t}$, $18 \le t \le 24$, попарно не изоморфны, вытекает из следующих наблюдений. Поскольку графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,18}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,19}$ имеют одинаковые периоды, отличные от периодов графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,t}$, $20 \le t \le 24$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,18}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,19}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,t}$, $20 \le t \le 24$. Поскольку графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,20}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,21}$ имеют одинаковые периоды, отличные от периодов графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,t}$, $22 \le t \le 24$, то каждый из графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,20}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,21}$ не изоморфен ни одному из графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,t}$, $22 \le t \le 24$. Далее, поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,18}$ содержит шесть замкнутых путей типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,19}$ содержит четыре замкнутых пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, то графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,18}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,19}$ не изоморфны. Поскольку граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,20}$ содержит два замкнутых пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,21}$ содержит четыре замкнутых пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, то графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,20}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,21}$ не изоморфны. Граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,22}$ содержит шестнадцать замкнутых путей типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,23}$ содержит двадцать четыре замкнутых пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,22}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,23}$ не изоморфны. Граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,22}$ содержит шестнадцать замкнутых путей типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,24}$ содержит восемь замкнутых путей типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,22}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,24}$ не изоморфны. Наконец, граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,23}$ содержит двадцать четыре замкнутых пути типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, а граф $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,24}$ содержит восемь замкнутых путей типа $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, следовательно, графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,23}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,24}$ не изоморфны. Попарная неизоморфность графов $\Gamma^{2,4}_{2,7,7,t}$, $25 \le t \le 31$, вытекает из тех же наблюдений, что и попарная неизоморфность графов $\Gamma^{2,4}_{1,7,7,t}$, $18 \le t \le 24$, соответственно.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 3.2 даются следующим списком:

$$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,7,18}\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,7,19};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,7,20};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,7,21};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,7,22}\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,7,23};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,7,24};$$
$$\Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,7,25};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,7,26};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,7,27};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,7,28};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,7,29};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,7,30};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,7,31}.$$

П о д с л у ч а й 3.3. Либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям подслучая 3.3 (т. е. $l \in \{1, 2\}$, $m = 7$, $n = 4, 5$), либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т. е. $l \in \{\overline{1}, \overline{2}\}$, $m = 7$, $n = 4, 5$).

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям подслучая 3.3, приведены в табл. 3.3.

Т а б л и ц а 3.3

$\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$	$E_2(\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t})$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,4,32}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},$ $\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z}\}$
$\Gamma^{2,4}_{1,7,4,33}$	$\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},$ $\{(i,j,3),(i,j+1,3)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,4)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\}\cup\{\{(i,j,1),$ $(i,j+1,2)\},\{(i,j,1),(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),$ $(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2)\}$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,5,34}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,4,32})$
$\Gamma^{2,4}_{2,7,5,35}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,4,33})$

Графы $\Gamma^{2,4}_{1,7,4,32}$, $\Gamma^{2,4}_{1,7,4,33}$ не изоморфны, так как они имеют различные периоды. По этой же причине графы $\Gamma^{2,4}_{2,7,5,34}$, $\Gamma^{2,4}_{2,7,5,35}$ не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 3.3 даются следующим списком:

$$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,4,32};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{1},7,4,33};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,5,34};\quad \Gamma^{2,4}_{\overline{2},7,5,35}.$$

6. Графы, удовлетворяющие условиям случая 4

Пусть Γ — граф, удовлетворяющий условиям случая 4. Тогда либо Γ — базисный граф, удовлетворяющий условиям случая 4 (т. е. $l \in \{1, 2\}$, $m = 8$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$), либо Γ является частично дополнительным к такому графу (т. е. $l \in \{1, 2, \overline{1}, \overline{2}\}$, $m = 8$, $n \in \{1, 2, 3, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, 4, 5, 6, 7, 8\}$).

Поскольку в случае 4 имеем $m = 8$, то изоморфный тип графа Γ однозначно определяется изоморфным типом подграфа $\langle\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} B_{0,j}\rangle_\Gamma$.

Все базисные графы, удовлетворяющие условиям случая 4, приведены в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

$\Gamma^{2,4}_{1,8,1,1}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,1,1,1})$
$\Gamma^{2,4}_{1,8,4,2}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,4,1})$
$\Gamma^{2,4}_{1,8,6,3}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,6,6,14})$
$\Gamma^{2,4}_{1,8,7,4}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,7,18})$
$\Gamma^{2,4}_{1,8,8,5}$	$\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ k\in\{1,2,3,4\}\}\cup\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,1),$ $(i,j+1,4)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,4)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),$ $(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,4)\},\{(i,j,4),(i,j+1,1)\},\{(i,j,4),(i,j+1,2)\},\{(i,j,4),(i,j+1,3)\}:i,j\in\mathbb{Z}\}$

Окончание табл. 4

$\Gamma^{2,4}_{2,8,1,6}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,1,1,1})$
$\Gamma^{2,4}_{2,8,2,7}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{2,1,2,3})$
$\Gamma^{2,4}_{2,8,3,8}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{2,1,3,4})$
$\Gamma^{2,4}_{2,8,4,9}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,4,4,1})$
$\Gamma^{2,4}_{2,8,5,10}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{2,5,5,5})$
$\Gamma^{2,4}_{2,8,6,11}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,6,6,14})$
$\Gamma^{2,4}_{2,8,7,12}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,7,7,18})$
$\Gamma^{2,4}_{2,8,8,13}$	совпадает с $E_2(\Gamma^{2,4}_{1,8,8,5})$

Так как графы $\Gamma^{2,4}_{l,m,n,t}$, $1 \le t \le 13$, из табл. 4 имеют различные наборы параметров (l, m, n), то они попарно не изоморфны.

Все (с точностью до изоморфизма) частично дополнительные графы к графам из табл. 4 даются следующим списком:

$\Gamma^{2,4}_{\overline{1},8,1,1}$; $\Gamma^{2,4}_{1,8,\overline{1},1}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},8,\overline{1},1}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},8,4,2}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},8,6,3}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},8,7,4}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{1},8,8,5}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,1,6}$; $\Gamma^{2,4}_{2,8,\overline{1},6}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,\overline{1},6}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,2,7}$; $\Gamma^{2,4}_{2,8,\overline{2},7}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,\overline{2},7}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,3,8}$; $\Gamma^{2,4}_{2,8,\overline{3},8}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,\overline{3},8}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,4,9}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,5,10}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,6,11}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,7,12}$; $\Gamma^{2,4}_{\overline{2},8,8,13}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Trofimov V.I.** Some topics in graph theory related with group theory // Сиб. электр. мат. изв. 2011. Vol. 8. P. 62–67.
2. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические 2-расширения решеток Λ^d // Проблемы теоретич. и прикл. математики: тез. докл. 41-й Всерос. мол. шк.-конф. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2010. С. 64–70.
3. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** О симметрических q-расширениях 2-мерной решетки // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 199–209.
4. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** О симметрических 4-расширениях 2-мерной решетки // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 242–257.

Неганова Елена Александровна
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: nega-le@yandex.ru

Поступила 13.01.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 519.17

СИЛЬНО $(s-2)$-ОДНОРОДНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ $pG_\alpha(s,t)$ [1]

М. С. Нирова

Геометрией ранга 2 называется система инцидентности $(P,\mathcal{B})$, где P — множество точек и $\mathcal{B}$ — некоторый набор подмножеств из P, называемых блоками. Две точки из P называются коллинеарными, если они лежат в общем блоке из $\mathcal{B}$. Пара (a,B) из $(P,\mathcal{B})$ называется флагом, если точка a принадлежит блоку B, и антифлагом — в противном случае. Геометрия называется φ-однородной, если для любого антифлага (a,B) число точек в блоке B, коллинеарных точке a, равно 0 или φ, и сильно φ-однородной, если это число всегда равно φ. В данной работе исследуются сильно $(s-2)$-однородные расширения частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$.

Ключевые слова: частичная геометрия, однородное расширение.

M. S. Nirova. Strongly $(s-2)$-uniform extensions of partial geometries $pG_\alpha(s,t)$.

A geometry of rank 2 is an incidence system $(P,\mathcal{B})$, where P is a set of points and $\mathcal{B}$ is a family of subsets from P, which are called blocks. Two points from P are called collinear if they lie in the same block from $\mathcal{B}$. A pair (a,B) from $(P,\mathcal{B})$ is called a flag if the point a belongs to the block B and an antiflag otherwise. A geometry is called φ-uniform if, for any antiflag (a,B), the number of points in the block B that are collinear to the point a is either 0 or φ; it is called strongly φ-uniform if this number is always φ. In this paper, we study strongly $(s-2)$-uniform extensions of partial geometries $pG_\alpha(s,t)$.

Keywords: partial geometry, uniform extension.

Введение

Геометрия $\mathcal{S}$ ранга 2 — это система инцидентности $(P,\mathcal{B})$, где P — множество точек и $\mathcal{B}$ — некоторый набор подмножеств из P, называемых *блоками*. Две точки из P называются *коллинеарными*, если они лежат в общем блоке из $\mathcal{B}$. В случае, когда $\mathcal{S}$ является геометрией ранга 2, точечный граф $\Gamma=\Gamma(\mathcal{S})$ есть граф с множеством вершин P, в котором две различные вершины смежны, если они коллинеарны. Геометрия $\mathcal{S}$ будет называться *связной, регулярной* и т. д. в соответствии со свойствами графа Γ. *Блочный граф* геометрии $\mathcal{S}$ ранга 2 — это граф с множеством вершин $\mathcal{B}$, в котором два различных блока смежны, если они пересекаются.

Пара (a,B) из $(P,\mathcal{B})$ называется *флагом*, если точка a принадлежит блоку B, и антифлагом — в противном случае. Если (a,B) является антифлагом, то через $f(a,B)$ обозначим число точек в B, коллинеарных a. Геометрия называется *φ-однородной*, если для любого антифлага (a,B) число $f(a,B)$ равно 0 или φ, и *сильно φ-однородной*, если это число всегда равно φ.

Вычет $\mathcal{S}_a$ геометрии $\mathcal{S}$ в точке a — это геометрия $(P_a,\mathcal{B}_a)$ ранга 2, где P_a — множество всех точек, коллинеарных a, и $\mathcal{B}_a=\{B-\{a\}\mid a\in B\in\mathcal{B}\}$. Пусть $\mathcal{F}$ – семейство геометрий ранга 2, и всякий вычет $\mathcal{S}_a$ геометрии S лежит в $\mathcal{F}$. Тогда говорят, что $\mathcal{S}$ является *расширением* $\mathcal{F}$. Геометрия $\mathcal{S}$ называется *треугольной*, если для любых ее попарно коллинеарных точек a,b и c найдется по крайней мере один блок, содержащий все три точки a,b и c. Точечный граф $\Gamma(\mathcal{S}_a)$ — это (возможно, собственный) подграф графа, индуцированного на окрестности вершины графом Γ, и эти два графа совпадают для любой точки a тогда и только тогда, когда геометрия $\mathcal{S}$ треугольна.

Блоки геометрии $\mathcal{S}$ называются *прямыми*, если два различных ее блока пересекаются не более чем по одной точке. В этом случае множество блоков называется множеством прямых,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российско-Словенского проекта 2010-2011 г.

и мы будем пользоваться такими выражениями, как "прямая проходит через точку", "точка лежит на прямой" и т. д.

Если $\mathcal{S}$ — такая геометрия точек и прямых, что каждая прямая имеет ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой ($s > 0$, $t > 0$) и $\mathcal{S}$ сильно α-однородна ($\alpha > 0$), то $\mathcal{S}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t) (для краткости $pG_\alpha(s,t)$ или даже pG_α). Точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ является сильно регулярным графом с параметрами $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с параметрами $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$ для некоторых натуральных чисел s,t,α называется *псевдогеометрическим* для $pG_\alpha(s,t)$. Связное расширение семейства частичных геометрий pG_α обозначается через EpG_α (или даже EpG).

Легко понять, что в EpG_α-геометрии $\mathcal{S}$ для любого антифлага (a,B) с $f(a,B) \neq 0$ имеем $f(a,B) \geq \alpha+1$ и что $\mathcal{S}$ является треугольной геометрией тогда и только тогда, когда она $(\alpha+1)$-однородна.

Если $\mathcal{S}$ — частичная геометрия $pG_\alpha(s,t)$, то двойственная ей геометрия $(\mathcal{B},P)$, в которой каждая точка отождествляется с пучком проходящих через нее прямых, является частичной геометрией $pG_\alpha(t,s)$. *Обобщенный четырехугольник* $GQ(s,t)$ — это частичная геометрия $pG_1(s,t)$. Коклика из $1+st/\alpha$ точек в псевдогеометрическом графе для $pG_\alpha(s,t)$ называется *овоидом*, а подмножество K точек частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ — $(0,n)$-*множеством*, если каждая прямая, пересекающая K, пересекает K по n точкам. Если, кроме того, каждая прямая пересекает K, то K называется *n-овоидом*.

Пусть геометрия $\mathcal{S}$ является φ-однородной $EpG_\alpha(s,t)$. Если $\varphi = s+2$, то $\mathcal{S}$ называется *одноточечным расширением* (и граф $\Gamma(\mathcal{S})$ является полным). Например, 3-$(22,6,1)$ схема Матье — это одноточечное расширение проективной плоскости $PG(2,4)$.

Если $\varphi = s+1$, то геометрия $\mathcal{S}$ будет сильно $(s+1)$-однородной, а Γ — полным многодольным графом $K_{(s+2)\times(1+st/\alpha)}$. В этом случае для любой точки a множество точек вычета $\mathcal{S}_a$ имеет разбиение $s+1$ овоидами. Среди известных обобщенных четырехугольников только $GQ(s,1)$, $GQ(1,t)$, $GQ(2^\alpha,2^\alpha)$, $GQ(q^2,q)$, $GQ(q-1,q+1)$ и $GQ(q+1,q-1)$, где q – степень простого числа, допускают разбиение точечного множества овоидами.

Случаи s-однородных и сильно $(s-1)$-однородных геометрий $EpG_\alpha(s,t)$ рассмотрены в [1]. В данной статье изучаются сильно $(s-2)$-однородные геометрии $EpG_\alpha(s,t)$. Доказана

Теорема. *Пусть $\mathcal{S}$ — сильно $(s-2)$-однородная геометрия $EpG_\alpha(s,t)$ и $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$. Тогда либо геометрия $\mathcal{S}$ является расширением двойственной 2-схемы $pG_{t+1}(2t+2,t)$, Γ — псевдогеометрический граф для сети $pG_{2t}(2t+3,2t)$ и дополнительный граф к блочному графу является псевдогеометрическим графом для $pG_{t+2}(2t+3,t^2+2t)$, либо выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$\alpha = 1$, Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9,8)$, $pG_2(5,8)$, $pG_4(7,24)$, $pG_6(9,32)$ или $pG_{10}(13,120)$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EGQ(8,1)$, $EGQ(4,2)$, $EGQ(6,4)$, $EGQ(8,4)$ или $EGQ(12,10)$ соответственно;*

(2) *$t = \alpha > 1$, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_6(9,8)$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_t(8,t)$ для некоторого $t \in \{2,3,4,5\}$;*

(3) *Γ — псевдогеометрический граф для $pG_3(6,20)$, $pG_4(7,3)$, $pG_4(7,4)$, $pG_4(7,8)$ или $pG_4(7,20)$ и $\mathcal{S}$ — это $EpG_2(5,8)$, $EpG_2(6,1)$, $EpG_3(6,2)$, $EpG_3(6,4)$ или $EpG_3(6,10)$ соответственно;*

(4) *Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_5(8,140)$, $pG_6(9,56)$, $pG_6(9,8r)$ ($r \in \{2,4\}$), $pG_6(9,2t)$ ($t \in \{3,7,13\}$), $pG_6(9,32)$, $pG_8(11,40)$, $pG_8(11,95)$ или $pG_8(11,2u)$ ($u \in \{4,16\}$) и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_4(7,80)$, $EpG_2(8,14)$, $EpG_3(8,3r)$, $EpG_4(8,t)$, $EpG_5(8,20)$, $EpG_3(10,12)$, $EpG_4(10,38)$ или $EpG_5(10,u)$ соответственно;*

(5) *$10 < s \leq 20$, Γ — псевдогеометрический граф для одной из геометрий $pG_9(12,99)$, $pG_{12}(15,56)$, $pG_{12}(15,16)$, $pG_{12}(15,26)$, $pG_{15}(18,170)$, $pG_{16}(19,56)$, $pG_{17}(20,323)$, $pG_{18}(21,150)$*

или $pG_{18}(21,24)$ *и* $\mathcal{S}$ *— это* $EpG_\alpha(11,9\alpha)$ $(\alpha\in\{3,4,6\})$, $EpG_\alpha(14,4\alpha)$ $(\alpha\in\{2,3,5,9\})$, $EpG_7(14,8)$, $EpG_7(14,13)$, $EpG_\alpha(17,10\alpha)$ $(\alpha\in\{2,3,8\})$, $EpG_9(18,28)$, $EpG_\alpha(19,17\alpha)$ $(\alpha\in\{3,10,13\})$, $EpG_6(20,45)$ *или* $EpG_{15}(20,18)$ *соответственно*;

(6) $20<s\le 40$, Γ *— псевдогеометрический граф для одной из геометрий* $pG_{32}(35,136)$, $pG_{32}(35,136)$, $pG_{32}(35,136)$ *или* $pG_{32}(35,104)$ *и* $\mathcal{S}$ *— это одна из геометрий* $EpG_{11}(34,44)$, $EpG_{28}(34,112)$, $EpG_7(34,28)$ *или* $EpG_{17}(34,52)$ *соответственно*;

(7) $40<s$, Γ *является псевдогеометрическим графом для* $pG_{48}(51,880)$ *или* $pG_{48}(51,200)$ *и* $\mathcal{S}$ *— одна из геометрий* $EpG_{15}(50,264)$ *или* $EpG_\alpha(50,4\alpha)$ $(\alpha\in\{3,8,23,33\})$ *соответственно.*

1. Предварительные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *— псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(s,t)$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *в дополнительном графе* $\bar\Gamma$ *имеем* $\bar\mu=(s+1-\alpha)(s-\alpha)t/\alpha$;

(2) $\alpha(s+t+1-\alpha)$ *делит* $st(s+1)(t+1)$ (*условие целочисленности*);

(3) $(s+1-2\alpha)t\le(s-1)(s+1-\alpha)^2$ (*граница Крейна*);

(4) *если* $\alpha<s$, *то* $t\le(2\alpha-1)(s+1-\alpha)^2$.

Доказательство. Утверждения (2), (3) доказаны в [3, теорема 1.1]. Далее, $\bar\mu=\bar k-b_1=kb_1\mu-b_1=b_1(s/\alpha-1)=(s+1-\alpha)(s-\alpha)t/\alpha$. Наконец, утверждение (4) следует из доказательства [4, теорема 4.5]. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть* $\mathcal{S}$ *—* φ*-однородная геометрия* $EpG_\alpha(s,t)$. *Тогда точечный граф* $\Gamma(\mathcal{S})$ *является реберно регулярным с* $\lambda=s+st(\varphi-1)/\alpha$. *Кроме того,* $\alpha\varphi$ *делит* $st(s+1)(s+2)$ *и в случае* $\varphi=\alpha+2$ *число* φ *четно.*

Доказательство. См. [3, леммы 2.1 и 2.2] для доказательства первого и второго утверждений.

Пусть, далее, $\varphi=\alpha+2$ и (a,B) — это антифлаг с $f(a,B)=\varphi$. По структуре вычета $\mathcal{S}_b$ для $b\in B\cap P_a$ точка a лежит на α прямых в $\mathcal{B}_b$, пересекающих $B\cap P_a$, так что $B\cap P_a$ содержит единственную точку b^* такую, что тройка a,b,b^* не лежит ни в одном из блоков множества $\mathcal{B}$. Ясно, что $(b^*)^*=b$, поэтому число $|B\cap P_a|=\varphi$ четно. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть* $\mathcal{S}$ *— сильно* φ*-однородная геометрия* $EpG_\alpha(s,t)$, *где* $\varphi<s+2$, *и* $\Gamma=\Gamma(S)$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_\varphi(s+1,st/\alpha)$;

(2) *для любых двух несмежных вершин* u, w *из* Γ *подграф* $[u]\cap[w]$ *является* φ*-овоидом частичной геометрии* $[u]$;

(3) *в дополнительном графе* $\bar\Gamma$ *имеем* $\bar\mu=s(s+2-\varphi)(s+1-\varphi)t/(\alpha\varphi)$.

Доказательство. Утверждения (1), (2) доказаны в [5, теорема 1.2]. Утверждение (3) следует из леммы 1.1. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть* $\mathcal{S}$ *— сильно* $(s-2)$*-однородная геометрия* $EGQ(s,t)$ *и* $\Gamma=\Gamma(\mathcal{S})$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ *— псевдогеометрический граф для* $pG_{s-2}(s+1,st)$, s *четно,* $t\le16(2s-5)/s$, $s-2$ *делит* $24t$ *и в случае* $t=1$ *граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_6(9,8)$;

(2) *если* $s=4$, *то* $(t,\mu)=(2,18)$ *и* Γ *— граф с параметрами* $(126,45,12,18)$ *на множестве векторов нормы* 1 *в* 6*-мерном ортогональном пространстве типа “$-$” над* $GF(3)$;

(3) *если* $t>1$ *и* $6\le s\le12$, *то* Γ *— псевдогеометрический граф для* $pG_2(5,4)$, $pG_4(7,24)$, $pG_6(9,32)$ *или* $pG_{10}(13,120)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.3 точечный граф $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$ является псевдогеометрическим для $pG_{s-2}(s+1, st)$. Далее, s четно и по лемме 1.1 имеем $t \le 16(2s-5)/s$ и $s-2$ делит $24t/(t,\alpha)$. В случае $t=1$ по условию целочисленности $(s-2)(s+4)$ делит $s(s+1)^2(s+2)$. Поэтому $(s-2)(s+4)$ делит $16 \cdot 27$, $s=8$ и Γ является псевдогеометрическим для $pG_6(9,8)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $s=4$. Тогда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_2(5,4t)$ и $t+1$ делит $15t(4t+1)$, поэтому $t \in \{2,4,8\}$. Существование и единственность локально $GQ(4,2)$ графа с параметрами $(126,45,12,18)$ хорошо известны. Это граф на множестве векторов нормы 1 в 6-мерном ортогональном пространстве над $GF(3)$ типа “$-$” с отношением смежности, задаваемым ортогональностью. По [2, теорема] имеем $t \ne 4$. Несуществование локально $GQ(4,8)$-графа с параметрами $(486,165,36,66)$ доказано в [6]. Утверждение (2) доказано.

Пусть $s=6$. Тогда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_4(7,6t)$ и $3t+2$ делит $42t(6t+1)$, поэтому $3t+2$ делит 28 и $t=4$. Утверждение (3) доказано.

Пусть $s=8$ и $t>1$. Тогда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9,8t)$, $t \le 22$ и $2t+1$ делит $30t(8t+1)$, поэтому $2t+1$ делит 90 и $t \in \{4,22\}$. Но в случае $t=22$ число $8+t=30$ не делит $st(s+1)(t+1)$.

Пусть $s=10$. Тогда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_8(11,10t)$, $t \le 24$ и $2(5t+2)$ делит $55t(10t+1)$, поэтому $5t+2$ делит 66 и $t=4$. Но в этом случае число $10+t=14$ не делит $st(s+1)(t+1)$.

Пусть $s=12$. Тогда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_{10}(13,12t)$, $t \le 25$, t делится на 5 и $2t+1$ делит $30t(8t+1)$, поэтому $2t+1$ делит $63 \cdot 13$ и $t=10$. Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если $2\alpha \le s$, то $(s+1-2\alpha)t \le (s-1)(s+1-\alpha)^2$*;

(2) *если $\alpha < s \le 2\alpha$, то $(s-\alpha)t \le (s+1-\alpha)^2\alpha(2s-2\alpha-1)$, причем в случае равенства имеем $s-\alpha = t(t+1)(2t+1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) следует из условия Крейна [5, лемма 2.1].

Если $\alpha < s \le 2\alpha$, то утверждение (2) следует из доказательства [4, теорема 4.5]. Лемма доказана.

2. Редукция к геометриям $EpG_\alpha(s,t)$ с $10 < s \le 70$

Предположим, что $\mathcal{S}$ — сильно $(s-2)$-однородная геометрия $EpG_\alpha(s,t)$. Тогда $\alpha+1 \le s-2$ и по лемме 1.2 число $\alpha(s-2)$ делит $st(s+1)(s+2)$, поэтому $s-2$ делит $24t$. По лемме 1.3 точечный граф $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$ является псевдогеометрическим для частичной геометрии $pG_{s-2}(s+1, st/\alpha)$. В частности, α делит st. Далее, собственные значения графа Γ равны $k=(s+1)(1+st/\alpha)$, 3 и $-(1+st/\alpha)$, а в дополнительном графе $\bar{\Gamma}$ имеем $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2))$.

Лемма 2.1. *Верны следующие утверждения*:

(1) *$\alpha(s+t-1-\alpha)$ делит $st(s+1)(t+1)$ и $(s-2)(4+st/\alpha)$ делит $s(s+1)(s+2)t(1+st/\alpha)/\alpha$*;

(2) *$t \le 80\alpha(s-2)/(3s)$*;

(3) *если $s \le 6$, то либо $\alpha=1$, либо $\mathcal{S}$ — это одна из геометрий $EpG_2(5,8)$, $EpG_2(6,1)$, $EpG_3(6,2)$, $EpG_3(6,4)$ или $EpG_3(6,10)$*;

(4) *если $t=\alpha$, то $\mathcal{S}$ — это геометрия $EpG_t(8,t)$ для некоторого $1 \le t \le 5$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) следует из условий целочисленности для pG_α и Γ.

По лемме 1.5, примененной к Γ, получим $3st/\alpha \le 16(s-2)\cdot 5$, т. е. верно неравенство (2).

Пусть $s \le 6$ и $\alpha > 1$. Если $s=5$, то $\alpha=2$, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_3(6,5t/2)$ и $5t/2+4$ делит $35t(5t/2+1)$. Поэтому $t \in \{4,8,32\}$. Но в случае $t=4$ нарушается утверждение (1), а в случае $t=32$ по [6] частичная геометрия $pG_2(5,32)$ не существует.

Пусть $s = 6$. Если $\alpha = 2$, то Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_4(7, 3t)$ и $3t+4$ делит $42t(3t+1)$. Поэтому $t \in \{1, 8\}$. Но в случае $t = 8$ нарушается утверждение (1). Если $\alpha = 3$, то Γ — псевдогеометрический граф для $pG_4(7, 2t)$ и $2t+4$ делит $28t(2t+1)$. Поэтому $t \in \{2, 4, 5, 10, 12, 19, 26, 40\}$. Но в случаях $t \in \{5, 12, 19, 26, 40\}$ нарушается утверждение (1). Утверждение (3) доказано.

Если $t = \alpha$, то Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_{s-2}(s+1, s)$, $s-2$ делит 12 и $(s-2)(s+4)$ делит $s(s+1)^2(s+2)$. Поэтому $s = 8$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_t(8, t)$ для $1 \le t \le 5$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если $6 < s \le 10$ и $1 < \alpha \ne t$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$s = 7$, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_5(8, 140)$ и геометрия $\mathcal{S}$ расширяет $pG_4(7, 80)$;*

(2) *$s = 8$ и $\mathcal{S}$ — одна из геометрий $EpG_2(8, 14)$, $EpG_3(8, 3r)$ ($r \in \{2, 4\}$), $EpG_4(8, t)$ ($t \in \{3, 7, 13\}$) или $EpG_5(8, 20)$;*

(3) *$s = 10$ и $\mathcal{S}$ — одна из геометрий $EpG_3(10, 12)$, $EpG_4(10, 38)$ или $EpG_5(10, t)$ ($t \in \{4, 16\}$).*

Доказательство. Пусть $s = 7$. Тогда $t = 5r$ и α делит t. Поэтому $r = r'\alpha \le 26$, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_5(8, 35r')$ и $35r'+4$ делит $72 \cdot 12$. Поэтому $r' = 4$, геометрия $\mathcal{S}$ расширяет $pG_\alpha(7, 20\alpha)$ и $19\alpha + 8$ делит $56 \cdot 60 \cdot 47$. Отсюда $\alpha = 4$ и $t = 80$, т. е. справедливо утверждение (1).

Пусть $s = 8$. Тогда $t \le 20\alpha$ и $\alpha \in \{2, 3, 4, 5\}$. Если $\alpha = 2$, то $t+7$ делит $36t(t+1)$ и $t+1$ делит 45. Отсюда $t = 14$ и Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9, 56)$. Если $\alpha = 3$, то $t = 3r \le 60$, $r+2$ делит 240 и $2r+1$ делит 45. Отсюда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9, 8r)$ и $r \in \{2, 4\}$.

Если $\alpha = 4$, то $t+5$ делит $18t(t+1)$ и $t+2$ делит 90. Отсюда Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9, 2t)$ и $t \in \{3, 7, 13\}$. Если $\alpha = 5$, то $t = 5r$, $5r+4$ делит $72r(5r+1)$, $2r+1$ делит 45, $r = 4$ и Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9, 32)$. Таким образом, справедливо утверждение (2).

Пусть $s = 9$. Тогда $t = 7r$, $r \le 34$ и $1 \le \alpha \le 6$. Если α взаимно просто с s, то $r = \alpha r'$ и $63r'+4$ делит 440, противоречие. Если $\alpha = 3$, то $r+1$ делит $30(7r+1)$ и $21r+4$ делит 440, противоречие. Если $\alpha = 6$, то Γ — псевдогеометрический граф для $pG_7(10, 21r/2)$, $r = 2r'$ и $21r'+4$ делит $10 \cdot 11 \cdot 12$, поэтому $r' = 4$, противоречие с тем, что $pG_5(9, 56)$ не удовлетворяет условию целочисленности.

Пусть $s = 10$. Тогда $t \le 64\alpha/3$ и $2 \le \alpha \le 7$. Если α делит t, то $t = r\alpha$, Γ — псевдогеометрический граф для $pG_8(11, 10r)$, $5r+2$ делит $99r$ и r нечетно или делится на 4. Отсюда $r = 4$, $3\alpha + 11$ делит $440(4\alpha+1)$, $\alpha = 3$ и геометрия $\mathcal{S}$ является расширением $pG_3(10, 12)$. Если $\alpha = 2$ и t нечетно, то $t+9$ делит $55t(t+1)$, $5t+4$ делит 99. Отсюда $t = 1$ и Γ — псевдогеометрический граф для $pG_8(11, 5)$, расширяющий $pG_2(10, 1)$. Противоречие с тем, что окрестности вершин в Γ являются 11×11-решетками и $\mu \le 22$.

Если $\alpha = 4$ и $t = 2r$, r нечетно, то $2r+7$ делит $55r(2r+1)$, $2(5r+4)$ делит 99. Отсюда $r = 19$ и Γ — псевдогеометрический граф для $pG_8(11, 95)$, расширяющий $pG_4(10, 38)$. Если $\alpha = 5$ и t не делится на 5, то $t+6$ делит $22t(t+1)$, $t+2$ делит $99t$ и t делится на 4. Отсюда $t \in \{4, 16\}$ и Γ — псевдогеометрический граф для $pG_8(11, 2t)$, расширяющий $pG_5(10, t)$. Если $\alpha = 6$ и $t = 3r$, r нечетно, то $3r+5$ делит $55r(3r+1)$, $2(5r+4)$ делит $33(5r+1)$, противоречие. Таким образом, справедливо утверждение (3). Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если $\bar{\mu} = 16$, то Γ — псевдогеометрический граф для $pG_6(9, 8)$, а если $\bar{\mu} = 12$, то $\mathcal{S}$ является расширением двойственной 2-схемы $pG_{t+1}(2t+2, t)$, Γ — псевдогеометрический граф для сети $pG_{2t}(2t+3, 2t)$ и дополнительный граф для блочного графа является псевдогеометрическим графом для $pG_{t+2}(2t+3, t^2+2t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar\mu = 16$. Тогда $3st = 4\alpha(s-2)$ и $s(4\alpha - 3t) = 8$. Отсюда либо $s = 4, \alpha = 1$ и $4 - 3t = 2$, либо $s = 8, 4\alpha - 3t = 1$ и $\alpha = t = 1$. Поэтому Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_6(9,8)$.

Пусть $\bar\mu = 12$. Тогда $st = \alpha(s-2)$ и $\alpha = t+1$. Отсюда $2t = s-2$ и Γ — расширение двойственной 2-схемы $pG_{t+1}(2t+2,t)$. Далее, Γ — псевдогеометрический граф для сети $pG_{2t}(2t+3,2t)$. По [7] блочный граф геометрии $\mathcal{S}$ — это псевдогеометрический граф для $pG_{t^2+t}((2t+3)t,t+1)$, поэтому дополнительный граф для блочного графа является псевдогеометрическим для $pG_{t+2}(2t+3,t^2+2t)$. Лемма доказана.

Ввиду лемм 2.1–2.3 можно предполагать, что $\bar\mu \notin \{12,16\}$, $s > 10$ и $t \neq \alpha$.

Лемма 2.4. *Выполняется неравенство* $s \le 74$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В дополнительном графе $\bar\Gamma$ имеем $\bar m = 4$, $\bar n = st/\alpha + 4$ и $\bar\mu = 12st/(\alpha(s-2))$. По [4, теорема 4.7], примененной к графу $\bar\Gamma$, имеем $st/\alpha + 4 \le 6(12st/(\alpha(s-2)) + 1) + 3$, поэтому $s(s-2) \le 72s + 5\alpha(s-2)/t$ и $s < 72 + 144/(s-2) + 5\alpha/t$. Пусть $s > 74$. Тогда $s-2$ делит $24t$, $t \ge 4$ и $s \le 80$.

Если $s = 75$, то $\bar\mu = 12st/(\alpha(s-2)) = 12\cdot 75t/(73\alpha)$, поэтому $t = 73r < 5\alpha, r \le 5$ и $75r = r'\alpha$. По лемме 2.1 число $73r' + 4$ делит $76\cdot 77\cdot 12$, противоречие.

Если $s = 76$, то $t = 37r < 5\alpha/2, r \le 5$ и $76r = r'\alpha$. По лемме 2.1 число $37r' + 4$ делит $77\cdot 78\cdot 12$, противоречие.

Если $s = 77$, то $t = 25r < 5\alpha/3, r \le 5$ и $77r = r'\alpha$. По лемме 2.1 число $25r' + 4$ делит $78\cdot 79\cdot 12$, противоречие.

Если $s = 78$, то $t = 19r$, $r \le 5$ и $78r = r'\alpha$. По лемме 2.1 число $19r' + 4$ делит $79\cdot 80\cdot 12$, противоречие.

Если $s \ge 79$, то $\alpha = t+1$, $s < 72 + 144/77 + 5 + 1/t$ и $t \le 7$, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Выполняется неравенство* $s \le 70$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $s = 71$, то $t = 23r, r \le 80\alpha/71$ и α делит t. Поэтому $r = r'\alpha$ и $1633r' + 4$ делит $72\cdot 73\cdot 4$, противоречие.

Если $s = 72$, то $t = 35r, r \le 20\alpha/27$ и $72r = r'\alpha$. По лемме 2.1 число $35r' + 4$ делит $12\cdot 73\cdot 37$, противоречие.

Если $s = 73$, то $t = 71r, r \le 26$ и α делит r. Поэтому $r = r'\alpha$ и $71r' + 4$ делит $74\cdot 75\cdot 12$, противоречие.

Если $s = 74$, то $\bar\mu = 37t/(3\alpha)$, $t = 3r$, $r \le 640$ и α делит $37r$. Допустим, что $\alpha = 37$. Тогда $r \ge 12$ и $3r + 2$ делит $2\cdot 25\cdot 19$. Если 19 делит $3r + 2$, то $r = 12 + 19u$ и $3u + 2$ делит 50. Поэтому $u \in \{0,1,16\}$. В случае $u = 0$ получим $\bar\mu = 12$, а если $u > 0$, то нарушается условие целочисленности для $pG_{37}(74, 36 + 57u)$. Значит, $3r + 2$ делит 50, $r = 16$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{37}(74,48)$.

Итак, $t = 3r'\alpha$ и по лемме 2.1 число $111r' + 2$ делит $25\cdot 4$, противоречие.

Лемма доказана.

3. Геометрии $EpG_\alpha(s,t)$ с $40 < s \le 70$

В этом разделе предполагается, что $\mathcal{S}$ — сильно $(s-2)$-однородная геометрия $EpG_\alpha(s,t)$, где $40 < s \le 70$. Ввиду лемм 2.1–2.3 можно предполагать, что $\bar\mu \notin \{12,16\}$ и $t \neq \alpha$.

Лемма 3.1. *Параметр* s *не превосходит* 60.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s = 61$. Тогда $t = 59r$, $r \le 80\alpha/183$ и α делит r. Противоречие с тем, что $r = r'\alpha$ и $r' \le 80/183$.

Пусть $s = 62$. Тогда $\bar{\mu} = 62t/(5\alpha)$, $t = 5r$ и $r \le 160\alpha/31$. Если $\alpha = 31$, то по лемме 2.1 число $5r + 32$ делит $63 \cdot 64 \cdot 31$ и $5r + 2$ делит $32 \cdot 21 \cdot 6$. Если 31 делит $5r + 32$, то $r = 6 + 31u$, $5r + 2 = 155u + 32$ делит $32 \cdot 21 \cdot 6$, $u = 0$ и $\bar{\mu} = 12$, противоречие. Значит, α делит $2r$. Заметим, что наибольший общий делитель чисел $5r + 32$ и $5r + 2$ делит 30, и если $5r + 2$ делится на 7, то $r = 8$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(62, 40)$ число $\alpha(103 - \alpha)$ делит $62 \cdot 63 \cdot 40 \cdot 41$, противоречие. Если $5r + 32$ делится на 7, то $r = 2 + 7u$ и $5r + 2 = 35u + 12$ делит $64 \cdot 9$, поэтому $u = 0$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(62, 10)$ число $\alpha(73 - \alpha)$ делит $62 \cdot 63 \cdot 10 \cdot 11$, противоречие. Итак, $5r + 32$ делит $9 \cdot 64$ и $5r + 2$ делит $64 \cdot 3$, противоречие.

Пусть $s = 63$. Тогда $t = 61r$, $r \le 80\alpha/189$ и α делит r. Противоречие с тем, что $r = r'\alpha$ и $r' \le 80/189$.

Пусть $s = 64$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 6t \cdot 64/(31\alpha)$, поэтому $t = 31r$ и $r \le 5\alpha/6$. Далее, α делит $64r$, $64r = r'\alpha$ и $r' \le 160/3$. По лемме 2.1 число $31r' + 4$ делит $65 \cdot 33 \cdot 12$. Если 13 делит $31r' + 4$, то $r' = 7 + 13u \in \{20, 46\}$. Но в случае $r' = 20$ имеем $31r' + 4 = 13 \cdot 48$, поэтому $r' = 46$, $r = 23, \alpha = 32$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{32}(64, 31 \cdot 23)$. Если 11 делит $31r' + 4$, то $r' = 2 + 11u \in \{2, 24, 46\}$. Но в случае $r' = 24$ имеем $31r' + 4 = 187 \cdot 4$, поэтому $r' = 2$, $32r = \alpha$ и $\bar{\mu} = 12$, противоречие. Значит, $31r' + 4$ делит $15 \cdot 12$, противоречие.

Пусть $s = 65$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 260t/(21\alpha)$, $t = 21r$ и $r \le 80\alpha/65$. Далее, α делит $65r$, поэтому $65r = r'\alpha$, $r' \le 80$, r' не взаимно просто с 65 и по лемме 2.1 число $21r' + 4$ делит $4 \cdot 22 \cdot 67$. Если 67 делит $21r' + 4$, то с учетом равенства $(67, 21r' + 4) = (67, r' - 3)$ получим $r' = 70$. Поэтому $13r = 14\alpha$ и $(r, \alpha) \in \{(13, 14), (28, 26), (42, 39), (56, 52)\}$. В любом случае нарушается условие целочисленности для $pG_\alpha(s, t)$.

Значит, $21r' + 4$ делит $12 \cdot 22$ и 11 делит $r' - 4$. Поэтому $r' \in \{15, 26, 70\}$. В любом случае $21r' + 4 > 12 \cdot 22$, противоречие.

Пусть $s = 66$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 99t/(8\alpha)$, поэтому $t = 8r$ и $r \le 5 \cdot 64\alpha/99$. Далее, α делит $(66t, 99r)$, поэтому $33r = r'\alpha$ и $r' \le 1280/3$, r' не взаимно просто с 33 и по лемме 2.1 число $1 + 2r'$ делит $67 \cdot 51$. Если 67 делит $1 + 2r'$, то $r' = 33$, $\alpha = 2r$ и $r \le 31$. По условию целочисленности для $pG_{2r}(66, 8r)$ число $67 + 6r$ делит $33 \cdot 67(8r + 1)$. Так как $(67 + 6r, 33) = (11, 6r + 1)$ и $(67 + 6r, 8r + 1) = (67 + 6r, r - 33)$ делит $265 = 5 \cdot 53$, то $r = 33$, противоречие.

Итак, $2r' + 1$ делит 51 и $r' = 8$. Поэтому $\alpha = 33, r = 4$ и $\bar{\mu} = 12$, противоречие.

Пусть $s = 67$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 12 \cdot 67t/(65\alpha)$, поэтому $t = 65r$, $r = r'\alpha$ и $r' \le 80 \cdot 65/201$. По лемме 2.1 число $67 \cdot 65r' + 4$ делит $12 \cdot 68 \cdot 69$, противоречие.

Пусть $s = 68$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 136t/(11\alpha)$, поэтому $t = 11r$ и $r \le 40\alpha/17$. Далее, α делит $68r$, $68r = r'\alpha$ и $r' \le 160$. По лемме 2.1 число $11r' + 4$ делит $12 \cdot 23 \cdot 35$. Если 23 делит $11r' + 4$, то $r' = 8 + 23u \in \{8, 54, 100, 146\}$. В случае $r' = 8$ имеем $17r = 2\alpha$. Если $\alpha = 17$, то $r = 2$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(68, 22)$. Если $\alpha = 34$, то $r = 4$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{34}(68, 44)$. Если $\alpha = 51$, то $r = 6$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{51}(68, 66)$. В случае $r' = 54$ имеем $r = 27, \alpha = 34$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{34}(68, 297)$. В случае $r' = 100$ имеем $17r = 25\alpha$. Если $\alpha = 17$, то $r = 25$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(68, 275)$. Если $\alpha = 34$, то $r = 50$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{34}(68, 550)$. Если $\alpha = 51$, то $r = 75$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{51}(68, 825)$. В случае $r' = 146$ имеем $r = 73, \alpha = 34$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{34}(68, 803)$.

Значит, $11r' + 4$ делит $12 \cdot 35$. Если 7 делит $11r' + 4$, то $r' = 6$, противоречие с тем, что тогда $\bar{\mu} = 12$. Значит, $11r' + 4$ делит 60, противоречие.

Пусть $s = 69$. Тогда $t = 67r$, $69r = r'\alpha$ и $r' \le 80/3$. По лемме 2.1 число $67r' + 4$ делит $12 \cdot 70 \cdot 71$. Если 71 делит $67r' + 4$, то $r' = 1$, противоречие. Значит, $67r' + 4$ делит $12 \cdot 70$, снова противоречие.

Пусть $s = 70$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 210t/(17\alpha)$, поэтому $t = 17r$ и $r \le 32\alpha/21$. Далее, α делит $70r$, $70r = r'\alpha$ и $r' \le 320/3$. По лемме 2.1 число $17r' + 4$ делит $12 \cdot 71 \cdot 18$. Если 71 делит $17r' + 4$, то $r' = 100$, $7r = 10\alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{7u}(70, 170u), u \le 9$.

Значит, $17r'+4$ делит $12\cdot 18$ и $r'=4$. Поэтому $r=2, \alpha=35$, противоречие с тем, что $\bar\mu=12$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Параметр s не превосходит* 50.

Доказательство. Пусть $s=51$. Тогда $t=49r$, $r\le 80\alpha/153$ и α делит $51r$. Положим $51r=r'\alpha$. Тогда $st/\alpha=49r'$, $r'\le 80/3$ и по лемме 2.1 число $49r'+4$ делит $12\cdot 52\cdot 53$. Если 53 делит $49r'+4$, то $r'=1$, противоречие. Значит, $49r'+4$ делит $12\cdot 52$, $r'=4u$ и $49u+1$ делит 156, противоречие.

Пусть $s=52$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=312t/(25\alpha)$, поэтому $t=25r$ и $r\le 40\alpha/39$. Далее, α делит $52r$, поэтому $52r=r'\alpha$, $r'\le 160/3$ и по лемме 2.1 число $25r'+4$ делит $12\cdot 53\cdot 27$. Если 53 делит $25r'+4$, то 53 делит $r'+15$ и $r'=38$. В этом случае $r=19, \alpha=26$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{26}(52, 25\cdot 19)$. Значит, $25r'+4$ делит $12\cdot 27$, поэтому 27 делит $r'-2$, $r'=2$, $r=1, \alpha=26$, противоречие с тем, что тогда $\bar\mu=12$.

Пусть $s=53$. Тогда $t=17r$, $r\le 80\alpha/53$ и α делит r. Так как $r=r'\alpha$ и $r'\le 80/53$, то $r=\alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{51}(54, 53\cdot 17)$.

Пусть $s=54$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=162t/(13\alpha)$, поэтому $t=13r$ и $r\le 160\alpha/81$. Далее, α делит $54r$, поэтому $54r=r'\alpha$, $r'\le 320/3$ и по лемме 2.1 число $13r'+4$ делит $12\cdot 55\cdot 56$. Если 11 делит $13r'+4$, то $r'=20$, $r=10, \alpha=27$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{27}(54,130)$. Если 7 делит $13r'+4$, то $r'=4+7u\in\{4,32\}$. В случае $r'=4$ имеем $r=2, \alpha=27$ и $\bar\mu=12$. В случае $r'=32$ имеем $r=16, \alpha=27$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{27}(54,208)$. Значит, $13r'+4$ делит 480, $r'=12$, $9r=2\alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{9u}(54,26u)$, $u\le 5$.

Пусть $s=55$. Тогда $t=53r$ и $r\le 80\alpha/165$. Далее, α делит $55r$, поэтому $55r=r'\alpha$, $r'\le 80/3$ и по лемме 2.1 $53r'+4$ делит $12\cdot 56\cdot 57$. Если 19 делит $53r'+4$, то $r'=20$, $11r=4\alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{11u}(55,212u)$. Если 7 делит $53r'+4$, то снова $r'=20$. Значит, $53r'+4$ делит $2^5\cdot 3^2$, противоречие.

Пусть $s=56$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=112t/(9\alpha)$, поэтому $t=9r$ и $r\le 180\alpha/7$. Далее, α делит $56r$. Положим $56r=r'\alpha$. Тогда $r'\le 8\cdot 180$ и по лемме 2.1 число $9r'+1$ делит $4\cdot 19\cdot 29$. Отсюда 29 делит $9r'+1$, $r'=16+29u$, $u\le 49$ и $9r'+1$ делится на 19. Поэтому $5u-12$ делится на 19 и $u\in\{10,29\}$. В любом случае $9r'+1$ больше $4\cdot 19\cdot 29$, противоречие.

Пусть $s=57$. Тогда $t=55r$, $r=r'\alpha$ и $r\le 80\cdot 55\alpha/171$. По лемме 2.1 число $57\cdot 55r'+4$ делит $12\cdot 58\cdot 59$, противоречие.

Пусть $s=58$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=87t/(7\alpha)$, поэтому $t=7r$ и $r\le 320\alpha/87$. Далее, α делит $58r$, $58r=r'\alpha$, $r'\le 640/3$ и по лемме 2.1 число $7r'+4$ делит $12\cdot 59\cdot 15$. Если 59 делит $7r'+4$, то $r'=50+59u\in\{50,168\}$. В случае $r'=50$ имеем $r=25, \alpha=29$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{29}(58,175)$. В случае $r'=168$ имеем $r=84\alpha=29$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{29}(58,588)$. Значит, $7r'+4$ делит $12\cdot 15$ и $r'=8$. В этом случае $r=4, \alpha=29$, противоречие с тем, что $\bar\mu=12$.

Пусть $s=59$. Тогда $t=19r$, $r=r'\alpha$ и $r'\le 80\cdot 19/59$. По лемме 2.1 число $59\cdot 19r'+4$ делит $12\cdot 20\cdot 61$. Если 61 делит $59\cdot 19r'+4$, то $r'=44$, противоречие. Значит, $59\cdot 19r'+4$ делит $12\cdot 20$, снова противоречие.

Пусть $s=60$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=360t/(29\alpha)$, поэтому $t=29r$ и $r\le 8\alpha/9$. Далее, α делит $60r$, $60r=r'\alpha$ и $r'\le 160/3$. По лемме 2.1 число $29r'+4$ делит $12\cdot 61\cdot 31$. Если 61 делит $29r'+4$, то $r'=23$, противоречие. Теперь 31 делит $29r'+4$ и $r'\in\{2,33\}$. В случае $r'=2$ имеем $r=1, \alpha=30$ и $\bar\mu=12$, противоречие. В случае $r'=33$ имеем $r=11, \alpha=20$ или $r=22, \alpha=40$. В любом случае нарушается условие целочисленности для $pG_\alpha(s,t)$.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Если $40<s\le 50$, то $\mathcal{S}$ — одна из геометрий $EpG_{15}(50,264)$ или $EpG_\alpha(50,4\alpha)$, $\alpha\in\{3,8,23,33\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s = 41$. Тогда $t = 13r$, $r \leq 1040\alpha/41$ и α делит r. Положим $r = r'\alpha$. Тогда $r' \leq 1040/41$ и по лемме 2.1 число $41 \cdot 13r' + 4$ делит $12 \cdot 14 \cdot 43$. Если 43 делит $41 \cdot 13r' + 4$, то 43 делит $13r' - 2$, противоречие. Значит, $49r' + 4$ делит $12 \cdot 52$, $r' = 4u$ и $49u + 1$ делит 156, противоречие.

Пусть $s = 42$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 63t/(5\alpha)$, поэтому $t = 5r$ и $r \leq 320\alpha/63$. Далее, α делит $42r$, поэтому $42r = r'\alpha$, $r' \leq 640/3$ и по лемме 2.1 число $5r' + 4$ делит $12 \cdot 43 \cdot 22$. Если 43 делит $5r' + 4$, то $r' = 68$, $r = 34, \alpha = 21$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{21}(42, 170)$.

Значит, $5r' + 4$ делит $12 \cdot 22$ и $r' \leq 52$. Если 11 делит $5r' + 4$, то $r' \in \{8, 30, 52\}$. В случае $r' = 8$ имеем $r = 4, \alpha = 21$ и $\bar{\mu} = 12$, противоречие. В случае $r' = 30$ имеем $7r = 5\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_{7r}(42, 25r)$ число $18r + 43$ делит $6 \cdot 43 \cdot 25(25r + 1)$, $r \leq 5$, противоречие. В случае $r' = 52$ имеем $r = 26, \alpha = 21$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{21}(42, 130)$, противоречие.

Значит, $5r' + 4$ делит 24, $r' = 4$, $r = 2, \alpha = 21$ и $t + 1 < \alpha$, противоречие.

Пусть $s = 43$. Тогда $t = 41r$, $r \leq 80\alpha/129$ и α делит r. Так как $r = r'\alpha$ и $r' \leq 80/129$, то $r = \alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{41}(44, 41 \cdot 43)$.

Пусть $s = 44$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 88t/(7\alpha)$, поэтому $t = 7r$ и $r \leq 280\alpha/11$. Далее, α делит $44r$, поэтому $44r = r'\alpha$, $r' \leq 1120$ и по лемме 2.1 число $7r' + 4$ делит $12 \cdot 15 \cdot 23$. Если 23 делит $7r' + 4$, то $r' = 6 + 23u$, $7u + 2$ делит $12 \cdot 15$ и $u \leq 48$. Если 5 делит $7u + 2$, то $u = 4 + 5w$, $7w + 6$ делит 36 и $w \leq 8$. В этом случае $w = 8, u = 44, r' = 1018$, $r = 509, \alpha = 22$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{22}(44, 3563)$. Значит, $7u + 2$ делит 36, $u = 1, r' = 29$ и $\alpha = 44$, противоречие.

Итак, $7r' + 4$ делит $12 \cdot 15$. Если 5 делит $7r' + 4$, то $r' = 3 + 5u$, $7u + 5$ делит 36, $u = 1, r' = 8$, $11r = 2\alpha$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{11r}(44, 14r)$. Значит, $7r' + 4$ делит 36, $r' = 2$, $\alpha = 22$ и $r + 1 < \alpha$, противоречие.

Пусть $s = 45$. Тогда $t = 43r$ и $r \leq 16\alpha/27$. Далее, α делит $45r$, поэтому $45r = r'\alpha$, $r' \leq 80/3$ и по лемме 2.1 $43r' + 4$ делит $12 \cdot 46 \cdot 47$. Если 47 делит $43r' + 4$, то $r' = 1$ и $45 = \alpha$, противоречие. Значит, $43r' + 4$ делит $12 \cdot 46$ и $r' \leq 12$. Если 23 делит $43r' + 4$, то $r' = 9$, $5r = \alpha$ и по условию целочисленности для $pG_{5r}(45, 43r)$, $r \leq 8$ число $19r + 23$ делит $9 \cdot 23 \cdot 43(43r + 1)$, противоречие. Итак, $43r' + 4$ делит 24, противоречие.

Пусть $s = 46$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 138t/(11\alpha)$, поэтому $t = 11r$ и $r \leq 1320\alpha/23$. Далее, α делит $46r$, $46r = r'\alpha$, $r' \leq 2640$ и по лемме 2.1 число $11r' + 1$ делит $12 \cdot 47 \cdot 12$. Отсюда 47 делит $11r' + 1$, $r' = 17 + 47u$ и $11u + 4$ делит 144, противоречие.

Пусть $s = 47$. Тогда $t = 15r$, $r = r'\alpha$ и $r' \leq 1200/47$. По лемме 2.1 число $47 \cdot 15r' + 4$ делит $12 \cdot 16 \cdot 49$, поэтому $r' = 4u$, $u \leq 3$, противоречие.

Пусть $s = 48$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 288t/(23\alpha)$, поэтому $t = 23r$ и $r \leq 230\alpha/9$. Далее, α делит $48r$, $48r = r'\alpha$, $r' \leq 2680/3$ и по лемме 2.1 число $23r' + 4$ делит $12 \cdot 49 \cdot 25$. Если $23r' + 4$ не делится на 15, то $23r' + 4$ делит $12 \cdot 49$ или $12 \cdot 25$, противоречие. Значит, 15 делит $23r' + 4$ и $r' = 7 + 15u$. Отсюда $23u + 11$ делит $12 \cdot 35$, $23u + 11$ делится на 35, $u = 35w - 2$ и $23w - 1$ делит 12, противоречие.

Пусть $s = 49$. Тогда $t = 47r$, $49r = r'\alpha$ и $r' \leq 80/3$. По лемме 2.1 число $47r' + 4$ делит $12 \cdot 50 \cdot 51$. Если 17 делит $47r' + 4$, то $r' = 1 + 17u$, поэтому $47u + 3$ делит $36 \cdot 50$ и $47u + 3$ делится на 5. Отсюда $u = 1 + 5w$, $47w + 10$ делит 360, $u = 1$, $r' = 18$ и $\alpha = 49$, противоречие. Значит, $47r' + 4$ делит $36 \cdot 50$, $47r' + 4$ делится на 5, следовательно, $r' = 3 + 5u$, $47u + 29$ делит 360, противоречие.

Пусть $s = 50$. Тогда $\bar{\mu} = 12st/(\alpha(s-2)) = 25t/(2\alpha)$, поэтому $t = 2r$ и $r \leq 64\alpha/5$. Далее, α делит $50r$, $50r = r'\alpha$ и $r' \leq 640$. По лемме 2.1 число $r' + 2$ делит $6 \cdot 17 \cdot 13$. Если 17 делит $r' + 2$, а 13 не делит $r' + 2$, то $r' \in \{15, 32, 100\}$. В случае $r' = 15$ имеем $10r = 3\alpha$ и $t + 1 < \alpha$. В случае $r' = 32$ имеем $r = 16, \alpha = 25$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{25}(50, 32)$. В случае $r' = 100$ имеем $r = 2\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(50, 4\alpha)$ число $\alpha + 17$ делит $50 \cdot 68(4\alpha + 1)$. Заметим, что $(\alpha + 17, 4\alpha + 1)$ делит 67, $\alpha \leq 47$, поэтому $\alpha + 17$ делит $50 \cdot 68$.

Если α не делится на 17, то $\alpha+17$ делит 200, $\alpha \in \{3,8,23,33\}$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_\alpha(50,4\alpha)$.

Если 13 делит $r'+2$, а 17 не делит $r'+2$, то $r'=24$, $r=12, \alpha=25$ и $\bar\mu=12$.

Пусть 13 и 17 делят $2r'+1$.Тогда $r'=15+17u$, $u+1\in\{13,26\}$. В случае $u=12$ имеем $r'=219$, $50r=219\alpha$ и $\alpha=50$, противоречие. В случае $u=25$ имеем $r'=440$, $5r=44\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_{5r}(50,88r)$ $r\le 9$ и число $83r+51$ делит $10\cdot 51\cdot 88(88r+1)$. Отсюда $r=3$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_{15}(50,264)$.

Лемма доказана.

4. Геометрии $EpG_\alpha(s,t)$ с $10<s\le 40$

В этом разделе предполагается, что $\mathcal{S}$ — сильно $(s-2)$-однородная геометрия $EpG_\alpha(s,t)$, $10<s\le 40$. Ввиду лемм 2.1–2.3 можно предполагать, что $\bar\mu\notin\{12,16\}$ и $t\ne\alpha$.

Лемма 4.1. *Если* $30<s\le 40$, *то* $\mathcal{S}$ *— одна из геометрий* $EpG_{11}(34,44)$, $EpG_{28}(34,112)$, $EpG_7(34,28)$ *или* $EpG_{17}(34,52)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s=31$. Тогда $t=29r$, $r\le 80\alpha/93$ и α делит r. Поэтому $r=r'\alpha$, $r'\le 80/93$, противоречие.

Пусть $s=32$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=64t/(5\alpha)$, поэтому $t=5r$ и $r\le 5\alpha$. Далее, α делит $32r$, поэтому $32r=r'\alpha$, $r'\le 160$ и по лемме 2.1 число $5r'+4$ делит $12\cdot 11\cdot 17$. Если 17 делит $5r'+4$, то $r'=6+17u$, $u\le 9$ и $5u+2$ делит $12\cdot 11$. Если 11 делит $5u+2$, то $u=4$, $r'=74$, $r=37,\alpha=16$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{16}(32,185)$. Пусть 11 не делит $5u+2$. Тогда $5u+2$ делит 12 и $u\in\{0,2\}$. В случае $u=0$ имеем $r'=6$, $r=3,\alpha=16$ и $\bar\mu=12$. В случае $u=2$ получим $r'=40$, $4r=5\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_{4r}(32,25r)$ число $21r+31$ делит $8\cdot 33\cdot 25(25r+1)$. Заметим, что $(25r+1,21r+31)=(4r-30,r+181)$ делит 2. Если 11 делит $21r+31$, то 11 делит $r+2$, противоречие. Если 5 делит $21r+31$, то $r=4$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{16}(32,100)$. Значит, $21+31r$ делит 48, противоречие.

Итак, $5r'+4$ делит $12\cdot 11$, $r'\le 25$, поэтому 11 делит $5r'+4$, $r'=8$, $r=4\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(32,20\alpha)$ число $19\alpha+33$ делит $32\cdot 33\cdot 20(20\alpha+1)$. Заметим, что $(19\alpha+33,20\alpha+1)=(\alpha-32,641)=1$. Если 11 делит $19\alpha+33$, то $\alpha=11u$ и $u=1,2$, противоречие. Если 5 делит $19\alpha+33$, то $\alpha=3+5w$, $w\le 5$, $19w+18$ делит $32\cdot 12$, противоречие. Значит, $19\alpha+33$ делит $32\cdot 12$, поэтому $\alpha=3e$, $19e+11$ делит 64, противоречие.

Пусть $s=33$. Тогда $t=31r$, $r\le 80\alpha/99$, $33r=r'\alpha$ и $r'\le 80/3$. По лемме 2.1 число $31r'+4$ делит $12\cdot 34\cdot 35$. Если 17 делит $31r'+4$, то $r'=7+17u$, $31u+3$ делит $24\cdot 35$, поэтому $u=0$, $r'=7,\alpha=33$, противоречие.

Значит, $31r'+4$ делит $24\cdot 35$. Если 7 делит $31r'+4$, то $r'=1+7u$, $31u+5$ делит 120, поэтому $u=0,r'=1,\alpha=33$, противоречие. Итак, $31r'+4$ делит 120, снова противоречие.

Пусть $s=34$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=51t/(4\alpha)$, поэтому $t=4r$ и $r\le 320\alpha/51$. Далее, α делит $34r$, $34r=r'\alpha$ и $r'\le 640/3$. По лемме 2.1 число $r'+1$ делит $3\cdot 35\cdot 9$. Если 7 делит $r'+1$, то $r'=7u-1$, u делит $27\cdot 5$. Для $u\in\{1,3,9,27\}$ получим $r'\in\{6,20,62,188\}$. В случае $r'=6$ имеем $r=3,\alpha=17$ и $t+1<\alpha$. В случае $r'=20$ имеем $r=10,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,40)$. В случае $r'=62$ имеем $r=31,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,124)$. В случае $r'=188$ имеем $r=94,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,376)$.

Для $u\in\{15,45,135\}$ получим $r'\in\{104,314,945\}$. В случае $r'=104$ имеем $r=52,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,208)$. В случае $r'=314$ имеем $r=157,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,628)$. В случае $r'=945$ имеем $\alpha=34$, противоречие. Пусть $u=5$. Тогда $r'=34$ и $r=\alpha$. По условию целочисленности для $pG_\alpha(34,4\alpha)$ число $3\alpha+35$ делит $68\cdot 70(4\alpha+1)$. Заметим, что $(3\alpha+35,4\alpha+1)=(\alpha-34,167)=1$. Если 17 делит $3\alpha+35$, то $\alpha=11+17u$, $u\le 1$ и $3u+4$ делит 280. В случае $u=0$ имеем $\alpha=11$ и

$\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_{11}(34,44)$. В случае $u=1$ имеем $\alpha=28$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_{28}(34,112)$. Пусть $3\alpha+35$ делит 280. Если 7 делит $3\alpha+35$, то $\alpha=7u$, $u\le 4$ и $3u+5$ делит 40. Поэтому $u=1$, $\alpha=7$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_7(34,28)$. Если же 7 не делит $3\alpha+35$, то $3\alpha+35$ делит 40, противоречие.

Пусть $r'+1$ делит $15\cdot 9$. Если 5 делит $r'+1$, то $r'=5w-1$, w делит 27. Для $w\in\{3,9,27\}$ получим $r'\in\{29,44,134\}$. В случае $r'=29$ имеем $\alpha=34$, противоречие. В случае $r'=44$ имеем $r=22,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,88)$. В случае $r'=134$ имеем $r=67,\alpha=17$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{17}(34,268)$.

Пусть $r'+1$ делит 27. В случае $r'=8$ имеем $r=4,\alpha=17$ и $\bar\mu=12$. В случае $r'=26$ имеем $r=13,\alpha=17$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_{17}(34,52)$.

Пусть $s=35$. Тогда $t=11r$ и $r\le 176\alpha/7$. Далее, α делит $35r$, поэтому $35r=r'\alpha$, $r'\le 880$ и по лемме 2.1 $11r'+4$ делит $12\cdot 12\cdot 37$. Если 37 делит $11r'+4$, то $r'=1+37u$, $u\le 23$, $11u+1$ делит $12\cdot 12$ и $u\in\{1,13\}$. В случае $u=1$ получим $r'=38$, $\alpha=35$, противоречие. В случае $u=13$ получим $r'=482$, $\alpha=35$, противоречие. Значит, $11r'+4$ делит $12\cdot 12$, $r'=4$ и $\alpha=35$.

Пусть $s=36$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=6\cdot 36t/(17\alpha)$, поэтому $t=17r$ и $r\le 40\alpha/27$. Далее, α делит $36r$, $36r=r'\alpha$, $r'\le 160/3$ и по лемме 2.1 число $17r'+1$ делит $12\cdot 37\cdot 19$. Отсюда 37 делит $17r'+1$, $r'=13+37u$, $17u+6$ делит $12\cdot 19$, $u=0$ и $\alpha=36$, противоречие.

Пусть $s=37$. Тогда $t=35r$, $r=r'\alpha$ и $r'\le 80/111$, противоречие.

Пусть $s=38$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=38t/(3\alpha)$, поэтому $t=3r$ и $r\le 160\alpha/19$. Далее, α делит $38r$, $38r=r'\alpha$, $r'\le 320$ и по лемме 2.1 число $3r'+4$ делит $12\cdot 13\cdot 10$. Если $3r'+4$ не делится на 13, то $3r'+4$ делит 40, $r'=12$, $r=6,\alpha=19$ и $\bar\mu=12$, противоречие. Значит, 13 делит $3r'+4$ и $r'=3+13u$. Отсюда $3u+1$ делит 40, $u\in\{1,3,13\}$ и $r'\in\{16,42,172\}$. В случае $r'=16$ получим $r=8,\alpha=19$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{19}(38,24)$. В случае $r'=42$ получим $r=21,\alpha=19$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{19}(38,63)$. В случае $r'=172$ получим $r=86,\alpha=19$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{19}(38,258)$.

Пусть $s=39$. Тогда $t=37r$, $39r=r'\alpha$ и $r'\le 80/3$. По лемме 2.1 число $37r'+4$ делит $12\cdot 40\cdot 41$. Если 41 делит $37r'+4$, то $r'=1,\alpha=39$, противоречие. Значит, $37r'+4$ делит $12\cdot 40$, $37r'+4$ делится на 5, следовательно, $r'=3+5u$, $37u+23$ делит 96, противоречие.

Пусть $s=40$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=240t/(19\alpha)$, поэтому $t=19r$ и $r\le 4\alpha/3$. Далее, α делит $40r$, $40r=r'\alpha$ и $r'\le 160/3$. По лемме 2.1 число $19r'+4$ делит $12\cdot 41\cdot 21$. Если 41 делит $19r'+4$, то $r'=41u-11$, $19u-5$ делит $12\cdot 21$, $u=1,r'=30$, $4r=3\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_{4r}(40,57r)$ число $53r+41$ делит $10\cdot 41\cdot 57(57r+1)$. Заметим, что $(53r+41,57r+1)=(r-10,571)=1$, поэтому $53r+41$ делит 570, противоречие.

Значит, $19r'+4$ делит $12\cdot 21$, $r'=2$, $r=1,\alpha=20$ и $\bar\mu=12$, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Если $s\le 30$, то $s\le 20$.*

Доказательство. Пусть $s=21$. Тогда $t=19r$, $r\le 80\alpha/63$, α делит $21r$, поэтому $21r=r'\alpha$ и $r'\le 80/3$. По лемме 2.1 число $19r'+4$ делит $12\cdot 22\cdot 23$. Если 23 делит $19r'+4$, то $r'=24$, $r=8u,\alpha=7u$ и по условию целочисленности для $pG_{7u}(21,152u)$ число $145u+22$ делит $66\cdot 152(152u+1)$, противоречие. Если 11 делит $19r'+4$, то $r'=5$, $r=5,\alpha=21$, противоречие. Значит, $19r'+4$ делит 24, противоречие.

Пусть $s=22$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=66t/(5\alpha)$, поэтому $t=5r$ и $r\le 160\alpha/33$. Далее, α делит $22r$, поэтому $22r=r'\alpha$, $r'\le 320$ и по лемме 2.1 число $5r'+4$ делит $12\cdot 23\cdot 6$. Если 23 делит $5r'+4$, то $r'=13+23u$, $u\le 14$ и $5u+3$ делит 72. В этом случае $u\in\{1,3\}$ и $r'\in\{36,82\}$. В случае $r'=36$ имеем $r=18,\alpha=11$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{11}(22,90)$. В случае $r'=82$ имеем $r=41,\alpha=11$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{11}(22,205)$.

Значит, $5r'+4$ делит 72, $r'=4$, $r=2,\alpha=11$ и $\bar\mu=12$.

Пусть $s=23$. Тогда $t=7r$, $r\le 80\alpha/23$, $r=r'\alpha$ и $r'\le 80/23$. По лемме 2.1 число $23\cdot 7r'+4$ делит $12\cdot 8\cdot 25$, противоречие.

Пусть $s=24$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=144t/(11\alpha)$, поэтому $t=11r$ и $r\le 20\alpha/9$. Далее, α делит $24r$, $24r=r'\alpha$ и $r'\le 160/3$. По лемме 2.1 число $11r'+4$ делит $12\cdot 25\cdot 13$. Если 13 делит $11r'+4$, то $r'=13u+2$, $11u+2$ делит $12\cdot 25$ и $u=0$. В этом случае $r'=2$, $r=1,\alpha=12$ и $\bar\mu=12$. Значит, $11r'+4$ делит $12\cdot 25$, поэтому 5 делит $11r'+4$, $r'=5w+1$, $11w+3$ делит 60, $w=0$ и $\alpha=24$, противоречие.

Пусть $s=25$. Тогда $t=23r$ и $r\le 16\alpha/15$. Далее, α делит $25r$, поэтому $25r=r'\alpha$, $r'\le 80/3$ и по лемме 2.1 $23r'+4$ делит $12\cdot 26\cdot 27$. Если 13 делит $23r'+4$, то $r'=13u+10$, $u\le 1$ и $23u+4$ делит $24\cdot 27$. В случае $u=0$ получим $r'=13$, а в случае $u=1$ получим $r'=27$. В любом случае $\alpha=25$, противоречие. Значит, $23r'+4$ делит $24\cdot 27$, 9 делит $23r'+4$, $r'=9w+1$, $23w+3$ делит 72, $w=3, r'=28$ и $\alpha=25$, противоречие.

Пусть $s=26$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=13t/(3\alpha)$, поэтому $t=3r$ и $r\le 320\alpha/39$. Далее, α делит $26r$, $26r=r'\alpha$, $r'\le 640/3$ и по лемме 2.1 число $3r'+1$ делит $4\cdot 7$. Отсюда $r'\in\{2,9\}$ и в случае $r'=9$ имеем $\alpha=26$, противоречие. Поэтому $r'=2$, $r=1,\alpha=13$ и $t+1<\alpha$, противоречие.

Пусть $s=27$. Тогда $t=25r$, $27r=r'\alpha$ и $r'\le 80/3$. По лемме 2.1 число $25r'+1$ делит $12{\cdot}28{\cdot}29$. Если 29 делит $25r'+1$, то $r'=12$, $r=4,\alpha=9$ и нарушается условие целочисленности для $pG_9(27,100)$. Значит, $25r'+1$ делит $12\cdot 28$. Если 7 делит $25r'+1$, то $r'=7u+5$, $25u+18$ делит 48, противоречие. Итак, $25r'+1$ делит 48, противоречие.

Пусть $s=28$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=168t/(13\alpha)$, поэтому $t=13r$ и $r\le 40\alpha/21$. Далее, α делит $28r$, $28r=r'\alpha$, $r'\le 160/3$ и по лемме 2.1 число $13r'+4$ делит $12\cdot 29\cdot 15$. Если 29 делит $13r'+4$, то $r'=22$, $r=11,\alpha=14$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{14}(28,143)$. Значит, $13r'+4$ делит $12\cdot 15$. Если 5 делит $13r'+4$, то $r'=5u+2$, $13u+6$ делит 36, $u=0$, $r'=2$, $r=1,\alpha=14$ и $\bar\mu=12$. Поэтому $13r'+4$ делит 36, противоречие.

Пусть $s=29$. Тогда $t=9r$, $r=r'\alpha$ и $r'\le 80/29$. По лемме 2.1 число $9r'+4$ делит $4\cdot 10\cdot 31$, противоречие.

Пусть $s=30$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=90t/(7\alpha)$, поэтому $t=7r$ и $r\le 32\alpha/9$. Далее, α делит $30r$, $30r=r'\alpha$ и $r'\le 320/3$. По лемме 2.1 число $7r'+4$ делит $12\cdot 31\cdot 32$. Если 31 делит $7r'+4$, то $r'=31u-5$, $u\le 3$ и $7u-1$ делит $12\cdot 32$. Поэтому $u=1, r'=26$, $r=13,\alpha=15$ и нарушается условие целочисленности для $pG_{15}(30,91)$. Значит, $7r'+4$ делит $12\cdot 32$. Если 3 делит $7r'+4$, то $r'=3u+2$, $u\le 34$ и $7u+6$ делит 128, противоречие. Поэтому $7r'+4$ делит 128, поэтому $r'=4$, $r=2,\alpha=15$ и $\bar\mu=12$.

Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Если* $10<s\le 20$*, то* $\mathcal{S}$ *— одна из геометрий* $EpG_\alpha(11,9\alpha)$ $(\alpha\in\{3,4,6\})$, $EpG_\alpha(14,4\alpha)$ $(\alpha\in\{2,3,5,9\})$, $EpG_7(14,8)$ *или* $EpG_7(14,13)$, $EpG_\alpha(17,10\alpha)$ $(\alpha\in\{2,3,8\})$, $EpG_9(18,28)$, $EpG_\alpha(19,17\alpha)$ $(\alpha\in\{3,10,13\})$, $EpG_6(20,45)$ *или* $EpG_{15}(20,18)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $s=11$. Тогда $t=3r$, $r\le 80\alpha/11$, $\alpha>1$ и α делит r, поэтому $r=r'\alpha$ и $r'\le 80/11$. По лемме 2.1 число $3r'+4$ делит $4\cdot 4\cdot 13$. Если 13 делит $3r'+4$, то $r'=13u+3$, $3u+1$ делит 16, $u=0$, $r=3\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(11,9\alpha)$ число $2\alpha+3$ делит $11\cdot 27(9\alpha+1)$. Заметим, что $(2\alpha+3,9\alpha+1)=(\alpha-11,5)$. Если 11 делит $2\alpha+3$, то $\alpha=4$ и $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_4(11,36)$. Если же 11 не делит $2\alpha+3$, то $2\alpha+3$ делит $27\cdot 5$, $\mathcal{S}$ — геометрия $EpG_\alpha(11,9\alpha)$ для $\alpha\in\{3,6\}$.

Пусть $s=12$. Тогда $\bar\mu=12st/(\alpha(s-2))=72t/(5\alpha)$, поэтому $t=5r$ и $r\le 200\alpha/9$. Далее, α делит $12r$, поэтому $12r=r'\alpha$, $r'\le 800/3$ и по лемме 2.1 число $5r'+4$ делит $12\cdot 13\cdot 7$. Если 13 делит $5r'+4$, то $r'=13u-6$, $u\le 20$ и $5u-2$ делит 84. В этом случае $u\in\{1,6\}$ и $r'\in\{7,72\}$. В случае $r'=7$ имеем $\alpha=12$, противоречие. В случае $r'=72$ имеем $r=6\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(12,30\alpha)$ число $29\alpha+13$ делит $12\cdot 13\cdot 30(30\alpha+1)$. Заметим, что $(29\alpha+13,30\alpha+1)=(\alpha-12,361)=1$. Если 5 делит $29\alpha+13$, то $\alpha=3$ и 100 не делит $12\cdot 30$. Значит, что $29\alpha+13$ делит 36, противоречие. Если же 13 не делит $5r'+4$, то $5r'+4$ делит 84, $r'=2$, $r=1,\alpha=6$ и $\bar\mu=12$.

Пусть $s = 13$. Тогда $t = 11r$, $r \le 80\alpha/39$, $r = r'\alpha$ и $r' \le 80/39$. По лемме 2.1 число $13\cdot 11r'+4$ делит $12\cdot 14\cdot 15$, противоречие.

Пусть $s = 14$. Тогда $\bar\mu = 12st/(\alpha(s-2)) = 14t/\alpha$ и $t \le 160\alpha/7$. Далее, α делит $14t$, $14t = r\alpha$ и $r \le 320$. По лемме 2.1 число $r+4$ делит $12\cdot 5\cdot 4$. Если 5 делит $r+4$, то $r = 5u+1$, $u+1$ делит 48, $u \in \{1,2,3,5,7,11,15,23,47\}$ и $r \in \{6,16,26,36,56,76,116,236\}$. Если $r \ne 56$, то $\alpha = 7$ и по условию целочисленности для $pG_7(14, r/2)$ геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_7(14,8)$ или $EpG_7(14,13)$.

Пусть $r = 56$. Тогда $t = 4\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(14,4\alpha)$ число $\alpha+5$ делит $14\cdot 20\alpha(4\alpha+1)$. Заметим, что $(\alpha+5, 4\alpha+1) = 1$. Если 7 делит $\alpha+5$, то геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_\alpha(14,4\alpha)$, $\alpha \in \{2,9\}$. Если 5 делит $\alpha+5$, то геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_5(14,20)$. Если же $\alpha+5$ взаимно просто с 35, то $\alpha+5$ делит 8, $\alpha = 3$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_3(14,12)$.

Пусть $s = 15$. Тогда $t = 13r$ и $r \le 16\alpha/9$. Далее, α делит $15r$, поэтому $15r = r'\alpha$, $r' \le 80/3$ и по лемме 2.1 $13r'+4$ делит $12\cdot 16\cdot 17$. Если 17 делит $13r'+4$, то $r' = 18$, противоречие. Значит, $13r'+4$ делит $12\cdot 16$, противоречие.

Пусть $s = 16$. Тогда $\bar\mu = 12st/(\alpha(s-2)) = 96t/(7\alpha)$, поэтому $t = 7r$ и $r \le 10\alpha/3$. Далее, α делит $16r$, $16r = r'\alpha$, $r' \le 160/3$ и по лемме 2.1 число $7r'+1$ делит $12\cdot 17\cdot 9$. Если 17 делит $7r'+4$, то $r' = 17u-3$, $7u-1$ делит $12\cdot 9$, $u = 1, r' = 14$, $r = 7, \alpha = 8$ и нарушается условие целочисленности для $pG_8(16,49)$. Поэтому $7r'+1$ делит 108, $r' = 5$ и $\alpha = 16$, противоречие.

Пусть $s = 17$. Тогда $t = 5r$, $r = r'\alpha$ и $r' \le 80/17$. По лемме 2.1 число $85r'+1$ делит $12\cdot 6\cdot 19$. Поэтому 19 делит $85r'+1$, $r' = 2$, $r = 2\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(17,10\alpha)$ число $\alpha+2$ делит $17\cdot 20(10\alpha+1)$. Заметим, что $(\alpha+2, 10\alpha+1)$ делит 19. Значит, $\alpha+2$ делит 20, геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_\alpha(17,10\alpha)$ и $\alpha \in \{2,3,8\}$.

Пусть $s = 18$. Тогда $\bar\mu = 12st/(\alpha(s-2)) = 27t/(2\alpha)$, поэтому $t = 2r$ и $r \le 320\alpha/27$. Далее, α делит $18r$, $18r = r'\alpha$, $r' \le 640/3$ и по лемме 2.1 число $r'+2$ делит $6\cdot 19\cdot 5$. Если 19 делит $r'+2$, то $r' = 19u-2$, u делит 30, $u \in \{1,2,3,5,6,10\}$ и $r' \in \{17,36,55,93,112,188\}$. Заметим, что r' не взаимно просто с 18. В случае $r' = 36$ имеем $r = 2\alpha$ и по условию целочисленности для $pG_\alpha(18,4\alpha)$ число $3\alpha+19$ делит $19\cdot 8(4\alpha+1)$. Так как $(3\alpha+19, 4\alpha+1) = (\alpha-18, 73) = 1$, то $3\alpha+19$ делит 8, противоречие. В случае $r' = 93$ имеем $r = 31, \alpha = 6$ и нарушается условие целочисленности для $pG_6(18,62)$.

Значит, 19 не делит $r'+2$ и $r'+2$ делит 30, поэтому $r' \in \{3,4,8,28\}$. В случае $r' = 3$ имеем $r = 1$ и $\alpha = 6$. В случае $r' = 4$ имеем $r = 2, \alpha = 9$. В любом из этих случаев $t+1 < \alpha$. В случае $r' = 8$ имеем $r = 4, \alpha = 9$ и $\bar\mu = 12$. В случае $r' = 28$ имеем $r = 14, \alpha = 9$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_9(18,28)$.

Пусть $s = 19$. Тогда $\alpha > 1$, $t = 17r$, $r = r'\alpha$, $r' \le 80/57$ и $r' = 1$. По лемме 2.1 число $17r'+4 = 21$ делит $12\cdot 20\cdot 21$. По условию целочисленности для $pG_\alpha(19,17\alpha)$ число $4\alpha+5$ делит $19\cdot 5\cdot 17(17\alpha+1)$. Заметим, что $(4\alpha+5, 17\alpha+1) = (\alpha-19, 81)$. Если 19 делит $4\alpha+5$, то $\alpha = 13$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_{13}(19,221)$. Если 17 делит $4\alpha+5$, то $\alpha = 3$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_3(19,51)$. Если же $4\alpha+5$ взаимно просто с $17\cdot 19$, то $4\alpha+5$ делит 45 и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_{10}(19,170)$.

Пусть $s = 20$. Тогда $\bar\mu = 12st/(\alpha(s-2)) = 40t/(3\alpha)$, поэтому $t = 3r$ и $r \le 8\alpha$. Далее, α делит $20r$, $20r = r'\alpha$ и $r' \le 160$. По лемме 2.1 число $3r'+4$ делит $4\cdot 7\cdot 11$. Если 11 делит $3r'+4$, то $r' = 11u+6$, $u \le 14$ и $3u+2$ делит 28. Поэтому $u \in \{0,4\}$ и $r' \in \{6,50\}$. В случае $r' = 6$ имеем $r = 3, \alpha = 10$ и $\bar\mu = 12$. В случае $r' = 50$ имеем $r = 5u, \alpha = 2u$, $u \le 3$ и по условию целочисленности для $pG_{2u}(20,15u)$ число $13u+21$ делит $10\cdot 21\cdot 15(15u+1)$. Отсюда $u = 3$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_6(20,45)$.

Если 7 делит $3r'+4$, то $r' = 7u+1$ и $3u+1$ делит 4. Поэтому $u = 1, r' = 8$, $r = 2w, \alpha = 5w$, $w \le 3$ и по условию целочисленности для $pG_{5w}(20,6w)$ число $w+21$ делит $4\cdot 21\cdot 6(6w+1)$. Отсюда $w = 3$ и геометрия $\mathcal{S}$ — это $EpG_{15}(20,18)$.

Если $3r'+4$ взаимно просто с $7\cdot 11$, то $3r'+4$ делит 4, противоречие. Лемма доказана.

Теорема следует из лемм 2.1–2.5, 3.1–3.3, 4.1–4.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А., Нирова М.С.** Об однородных расширениях частичных геометрий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 148–157.
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М.** О вполне регулярных локально $GQ(4,4)$-графах // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 5. С. 583–586.
3. **Hobart S.A., Hughes D.R.** EpGs with minimal μ. II // Geom. Dedic. 1992. Vol. 42, no. 2. P. 129–138.
4. **Neumaier A.** Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$ // Arch. Math. 1979. Vol. 33, no. 4. P. 392–400.
5. **Hobart S.A., Hughes D.R.** Extended partial geometries: nets and dual nets // Europ. J. Comb. 1990. Vol. 11, no. 4. P. 357–372.
6. **Махнев А.А.** О несуществовании сильно регулярных графов с параметрами (486,165,36,66) // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 941–949.

Нирова Марина Сефовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Кабардино-Балкарский гос. университет
г. Нальчик
e-mail: nirova_m@mail.ru

Поступила 10.04.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 517.982.272+515.122.55

СВОЙСТВА C-КОМПАКТНО-ОТКРЫТОЙ ТОПОЛОГИИ НА ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ[1]

А. В. Осипов

Изучается C-компактно-открытая топология на множестве $C(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X. Исследуются взаимоотношения C-компактно-открытой топологии с компактно-открытой и ограниченно-открытой топологиями на множестве $C(X)$. Изучаются также кардинальнозначные характеристики пространства $C(X)$, наделенного C-компактно-открытой топологией, такие как число Суслина, число Линделёфа, вес, плотность.

Ключевые слова: пространство непрерывных функций, множественно-открытая топология, компактно-открытая топология, C-компактное подмножество, топология равномерной сходимости.

A. V. Osipov. Properties of the C-compact-open topology on a function space.

We study the C-compact-open topology on the set $C(X)$ of all continuous real-valued functions defined on a Tikhonov space X. The relations between the C-compact-open topology and the compact-open and bounded-open topologies on the set X are studied. We also investigate the cardinal-valued characteristics of the space $C(X)$ equipped with the C-compact-open topology, for example, the Suslin number, Lindelöf number, weight, and density.

Keywords: space of continuous functions, set-open topology, compact-open topology, C-compact subset, topology of uniform convergence.

Введение

Множество $C(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций на тихоновском пространстве X обладает различными топологиями. Идея прозрачного описания предельного перехода во множестве функций достигается средствами общей топологии — путем определения той или иной естественной топологии на множестве непрерывных функций $C(X)$, отражающей свойства связываемых функциями пространств. На множестве $C(X)$ топологии можно вводить несколькими неэквивалентными способами, и каждая из возникающих топологий имеет свои преимущества в определенных ситуациях. Главными являются компактно-открытая топология, топология равномерной сходимости и топология поточечной сходимости.

Топология равномерной сходимости задается базой в каждой точке $f \in C(X)$. Эта база состоит из всех множеств вида $\big\{g \in C(X)\colon \sup\{|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X\}\big\}$. Естественным обобщением этой топологии является топология равномерной сходимости на элементах семейства λ (λ-топология), где λ — фиксированное семейство непустых подмножеств пространства X. Базу λ-топологии в точке $f \in C(X)$ образуют все множества вида $\big\{g \in C(X)\colon \sup\{|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in F\}\big\}$, где $F \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$. Топологическое пространство $C(X)$ с топологией равномерной сходимости на семействе λ будем обозначать через $C_{\lambda,u}(X)$. Если $X \in \lambda$, то через $C_u(X)$.

Если в качестве семейства λ взять все конечные подмножества пространства X, то получившаяся топология называется топологией поточечной сходимости; если взять все компактные подмножества X — топологией равномерной сходимости на компактах, или компактно-открытой топологией. Компактно-открытую топологию впервые определил Р. Фокс [18] как топологию, предбазу которой образуют все множества вида $\{f \in C(X)\colon f(F) \subseteq U\}$, где F —

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00139-а) и программы отделения математических наук РАН (проект 09-T-1-1004).

компактное подмножество пространства X, а U — открытое подмножество числовой прямой. Заметим, что топология поточечной сходимости может быть определена похожим образом: заменой в определении предбазы компактных подмножеств конечными.

Множественно-открытая топология является обобщением компактно-открытой топологии и топологии поточечной сходимости. Множественно-открытая топология на семействе λ непустых подмножеств пространства X (λ-открытая топология) была впервые введена Р. Аренсом и Ж. Дугунджи [4]. Предбазу λ-открытой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X)\colon f(F) \subseteq U\}$, где $F \in \lambda$, а U — открытое подмножество числовой прямой. Топологическое пространство $C(X)$ с множественно-открытой топологией на семействе λ будем обозначать через $C_\lambda(X)$.

Топология равномерной сходимости на ограниченных подмножествах (ограниченно-открытая топология) была определена в 1970 г. Бучволтером [14]. Предбазу такой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X)\colon \overline{f(F)} \subseteq U\}$, где F — ограниченное подмножество пространства X, а U — открытое подмножество числовой прямой. Топологическое пространство $C(X)$ с ограниченно-открытой топологией на семействе всех ограниченных подмножеств пространства X будем обозначать через $C_b(X)$.

В данной работе на множестве $C(X)$ определяется C-компактно-открытая топология, изучаются ее топологические свойства и взаимоотношения с другими топологиями на множестве $C(X)$.

Все пространства, рассматриваемые в работе, предполагаем тихоновскими. Элементы стандартных предбаз множественно-открытой топологии и λ-топологии будем обозначать следующим образом:

$[F, U] = \{f \in C(X)\colon f(F) \subseteq U\}$

$\langle f, F, \varepsilon\rangle = \big\{g \in C(X)\colon \sup\{|g(x) - f(x)| < \varepsilon\colon x \in F\}\big\}$.

Если X и Y — два топологических пространства, то запись $X \geqslant Y$ ($X > Y$, $X = Y$) означает, что X и Y совпадают как множества и топология на X сильнее или равна (строго сильнее, равна) топологии на Y. Символы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ обозначают множества вещественных и натуральных чисел соответственно; $\mathbb{R}^\omega$ — счетную степень пространства $\mathbb{R}$. Функцию, тождественно равную нулю, будем обозначать через f_0. Нуль-множеством называется множество, имеющее вид $f^{-1}(0)$ для некоторой функции $f \in C(X)$; ко-нуль множеством (или функционально открытым) — дополнение до нуль-множества. Покрытие называется функционально открытым, если оно состоит из функционально открытых множеств. Если X — топологическое пространство, а $G \subseteq C(X)$, то подмножество $A \subseteq X$ называют G-ограниченным при условии, что $f(A)$ — ограниченное подмножество из $\mathbb{R}$ для любой функции $f \in G$. Если множество A является G-ограниченным при $G = C(X)$, то A называют ограниченным на X. Пространство X называют μ-пространством (иногда гиперизокомпакным или пространством Нахбина — Широта), если каждое замкнутое ограниченное множество является компактом. Замыкание множества A будем обозначать через $\overline{A}$, символом $\varnothing$ — пустое множество. Если $A \subseteq X$ и $f \in C(X)$, то через $f|_A$ обозначаем сужение функции f на множество A. Как обычно, $f(A)$ и $f^{-1}(A)$ — это соответственно образ и полный прообраз множества A при отображении f. Остальные обозначения можно найти в [3].

1. Основные свойства C-компактных подмножеств

Напомним, что пространство X называется псевдокомпактным, если $f(X)$ — ограниченное подмножество в $\mathbb{R}$ для любой функции $f \in C(X)$. Подмножество A пространства X называют псевдокомпактным, если A с индуцированной из X топологией является псевдокомпактным пространством.

Определение 1.1. Подмножество A пространства X называется *C-компактным* (иногда $\mathbb{R}$-компактным), если для любой непрерывной на X вещественнозначной функции f множество $f(A)$ компактно в $\mathbb{R}$.

Отметим, что в определении компактность множества $f(A)$ можно заменить просто на его замкнутость. Действительно, если $f(A)$ замкнуто, но не ограничено, то можно рассмотреть функцию $h(t) = \operatorname{arctg}(t)$, тогда $h(f(x)) \in C(X)$ и образ $h(f(A))$ не замкнут.

В случае $A = X$ свойство множества A быть C-компактным совпадает с псевдокомпактностью пространства X.

Очевидно, что любое псевдокомпактное подмножество C-компактно и любое C-компактное множество является ограниченным по определению. В [3] приведен известный пример пространства Исбела — Фролика — Мрувки, в котором понятия “псевдокомпактность”, “C-компактность” и “ограниченность” отличаются даже для замкнутых подмножеств. Отметим некоторые важные свойства C-компактных подмножеств (см. [1; 2] и [6]).

1. Замыкание C-компактного множества — это C-компактное множество.

2. C-компактность не сохраняется при пересечении и при переходе к замкнутому подмножеству.

3. Если A — C-компактное подмножество, то A также C_n-компактное подмножество (т. е. для любой непрерывной функции, действующей из X в $\mathbb{R}^n$, образ A является компактным подмножеством в $\mathbb{R}^n$).

4. Если любое замкнутое подмножество пространства X C-компактно, то X — это счетно компактное пространство.

5. Замыкание C-компактного подмножества в пространстве, полном по Дьедонне, есть компактное подмножество.

6. Стоун-чеховское замыкание C-компактного подмножества пространства X содержится в Хьюиттовском пополнении νX пространства X. Таким образом, любое замкнутое C-компактное подмножество в пополнении по Хьюитту является компактным.

Множество всех точек, обладающих свойством, что любое G_δ-множество, содержащие точку, пересекает множество A, называют G_δ-замыканием множества A.

7. G_δ-замыкание C-компактного подмножества A тихоновского пространства X совпадает с замыканием $\overline{A}$.

8. Если $A \subseteq X$ — C-компактное множество, то A является C_ω-компактным множеством (т. е. для любой непрерывной функции, действующей из X в $\mathbb{R}^\omega$, образ A является компактным подмножеством в $\mathbb{R}^\omega$).

9. Множество A является C-компактным подмножеством в X тогда и только тогда, когда из любого счетного функционально открытого покрытия множества A можно выделить конечное подпокрытие (см. [2]).

10. Пересечение C-компактного множества и нуль-множества — это C-компактное множество. Отметим, что существует вполне регулярное псевдокомпактное пространство, содержащее нуль-множество, которое не является псевдокомпактным [17].

11. Подмножество A пространства X является C-компактным тогда и только тогда, когда из любого счетного функционально открытого покрытия множества A можно выделить конечное подсемейство, замыкание объединения элементов которого содержит множество A. Заметим, что в тихоновских пространствах псевдокомпактность пространства X эквивалентна его слабо компактности (feebly compact), где слабо компактность означает, что из любого счетного открытого покрытия пространства X можно выделить конечное подсемейство, объединение которого будет всюду плотно в X.

Хорошо известно, что замыкание псевдокомпактного (ограниченного) подмножества X будет псевдокомпактным (ограниченным) подмножеством. Это утверждение справедливо и для C-компактных множеств [1].

Отметим (см. [23]), что для замкнутого подмножества A в нормальном пространстве X следующие свойства эквивалентны.

1. A — счетно-компактное подмножество пространства X.
2. A — псевдокомпактное подмножество пространства X.
3. A — C-компактное подмножество пространства X.
4. A — ограниченное подмножество пространства X.

Напомним, что пространство X называется субметризуемым, если X уплотняется (т. е. взаимнооднозначно и непрерывно отображается) на метризуемое пространство.

Если A — подмножество субметризуемого пространства X, то следующие свойства эквивалентны.

1. A — счетно-компактное подмножество пространства X.
2. A — псевдокомпактное подмножество пространства X.
3. A — секвенциально компактное подмножество пространства X.
4. A — C-компактное подмножество пространства X.
5. A — компактное подмножество пространства X.
6. A — метризуемый компакт.

Отметим, что любое замкнутое ограниченное подмножество полного по Дьедонне пространства является компактным (см. [23]).

2. C-компактно-открытая топология на $C(X)$: различные подходы к определению

Для любого подмножества A пространства X и любого открытого в $\mathbb{R}$ множества V положим $[A, V] = \{f \in C(X)\colon f(A) \subseteq V\}$.

Пусть λ будет семейством непустых подмножеств в X. На множестве $C(X)$ можно задать множественно-открытую топологию, предбаза которой состоит из множеств $\{[A, V]\colon A \in \lambda, V$ открыто в $\mathbb{R}\}$; соответствующее топологическое пространство обозначается через $C_\lambda(X)$.

Заметим, что данное определение согласуется с обычной "множественно-открытой" терминологией для компактно-открытой топологии.

Изучение множественно-открытой топологии на множестве $C(X)$ становится более насыщенным и интересным, если на семейство λ накладывать ограничения. Это связано с тем, что если λ обладает некоторыми свойствами, то пространство $C_\lambda(X)$ может обладать достаточно интересными структурами. Например, если λ — множество всех конечных (метризуемо компактных, компактных, счетно компактных, секвенциально компактных, псевдокомпактных, C-компактных) подмножеств X, то $C_\lambda(X)$ является не только однородным тихоновским топологическим пространством, но и топологической группой и локально выпуклым топологическим векторным пространством, а также пространством, на котором множественно-открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости на семействе λ.

Далее будут использоваться следующие обозначения подсемейств ограниченных подмножеств пространства X.

$F(X)$ — семейство всех конечных подмножеств в X.

$K(X)$ — семейство всех компактных подмножеств в X.

$KC(X)$ — семейство всех счетно компактных подмножеств в X.

$PS(X)$ — семейство всех псевдокомпактных подмножеств в X.

$RC(X)$ — семейство всех C-компактных подмножеств в X.

$B(X)$ — семейство всех ограниченных подмножеств в X.

Заметим, что $F(X) \subseteq K(X) \subseteq KC(X) \subseteq PS(X) \subseteq RC(X) \subseteq B(X)$.

Соответствующие топологические пространства $C_\lambda(X)$ будем обозначать так:

$C_p(X)$ при $\lambda = F(X)$ (топология поточечной сходимости);

$C_c(X)$ при $\lambda = K(X)$ (компактно-открытая топология);

$C_{kc}(X)$ при $\lambda = KC(X)$ (счетно компактно-открытая топология);

$C_{ps}(X)$ при $\lambda = PS(X)$ (псевдокомпактно-открытая топология);

$C_{rc}(X)$ при $\lambda = RC(X)$ (C-компактно-открытая топология).

Слабо множественно-открытая топология на множестве $C(X)$ задается предбазой множеств вида $\{f \in C(X)\colon \overline{f(F)} \subseteq U\}$, где $F \in \lambda$, а U — открытое подмножество числовой прямой. Некоторые интересные свойства слабо множественно-открытой топологии изучались в работе [2].

З а м е ч а н и е 2.1. Если $\lambda \subseteq B(X)$, то множественно-открытая топология может не совпадать со слабо множественно-открытой топологией.

П р и м е р 2.1. Пусть $X = \mathbb{R}$ и λ — множество ограниченных интервалов в X. Рассмотрим открытое множество $[(0,1),(0,1)] = \{f \in C(X)\colon f((0,1)) \subseteq (0,1)\}$ во множественно-открытой топологии на $C(X)$. Оно не является открытым в слабо множественно-открытой топологии на $C(X)$. Действительно, достаточно взять функцию $f(x) = x$ и заметить, что $f \in [(0,1),(0,1)]$, но никакая базисная окрестность функции f в слабо множественно-открытой топологии не содержится в $[(0,1),(0,1)]$.

Слабо множественно-открытая топология на множестве $C(X)$ при $\lambda = B(X)$ называется ограниченно-открытой топологией на семействе всех ограниченных подмножеств X и обозначатся через $C_b(X)$. Отметим, что ограниченно-открытая топология $C_b(X)$ совпадает с топологией равномерной сходимости $C_{b,u}(X)$ на семействе всех ограниченных подмножеств пространства X (см. [2]).

З а м е ч а н и е 2.2. Если $\lambda \subseteq RC(X)$, то $f(A)$ является замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}$ для любой функции $f \in C(X)$ и любого множества $A \in \lambda$, а значит, в этом случае множественно-открытая топология совпадает со слабо множественно-открытой топологией.

Далее в работе мы будем рассматривать пространство $C_\lambda(X)$ при следующих естественных ограничениях на семейство λ.

1. λ состоит из замкнутых C-компактных подмножеств пространства X.

Так как замыкание любого C-компактного подмножества является C-компактным подмножеством и так как $\overline{f(\overline{A})} = \overline{f(A)}$ для любой функции $f \in C(X)$, мы можем всегда в $[A, V]$ множество A полагать замкнутым C-компактным подмножеством.

2. λ — π-сеть в X.

Отметим, что это свойство является необходимым и достаточным для хаусдорфовости пространства $C_\lambda(X)$ (см. [1]).

3. λ замкнуто относительно конечных объединений элементов из λ.

Добавление к семейству λ конечных объединений не меняет множественно-открытой топологии. Достаточно заметить, что $[\bigcup_{i=1}^{k} F_i, U] = \bigcap_{i=1}^{k} [F_i, U]$.

4. λ замкнуто относительно C-компактных подмножеств. Это значит, что любое C-компактное подмножество B, лежащее в некотором $A \in \lambda$, принадлежит λ.

Оказывается, что пространство $C(X)$, наделенное множественно-открытой топологией, обладает некоторыми классическими алгебраическими структурами (например, топологической группой, топологическим векторным пространством, локально выпуклым пространством), когда λ замкнуто относительно C-компактных подмножеств.

Рассмотрим топологию равномерной сходимости на семействе C-компактных подмножеств пространства X. Для любых $A \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$ положим

$A_\varepsilon = \{(f,g) \in C(X) \times C(X)\colon |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in A\}$.

Легко заметить, что семейство $\{A_\varepsilon\colon A \in \lambda, \varepsilon > 0\}$ является базой для некоторой равномерности на $C(X)$. Обозначим множество $C(X)$ с топологией, индуцированной равномерностью, через $C_{\lambda,u}(X)$, а в случае $\lambda = RC(X)$ — через $C_{rc,u}(X)$. Эта топология называется топологией равномерной сходимости на семействе λ. Для любых $f \in C(X)$, $A \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$ положим $\langle f, A, \varepsilon\rangle = \{g \in C(X)\colon |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in A\}$. Тогда для любого $f \in C(X)$ семейство $\{\langle f, A, \varepsilon\rangle\colon A \in \lambda,\ \varepsilon > 0\}$ образует базу (не обязательно открытую) в точке f в пространстве $C_{\lambda,u}(X)$. Тем самым семейство $\{\langle f, A, \varepsilon\rangle\colon f \in C(X), A \in \lambda,\ \varepsilon > 0\}$ образует базу топологии равномерной сходимости на λ.

Топологию равномерной сходимости на семействе λ можно определить и другим путем (см. [26]). Для любых $A \in \lambda$ определим полунорму p_A на $C(X)$: $p_A(f) = \sup\{|f(x)|\colon x \in A\}$.

Для любых $A \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$ положим

$V_{A,\varepsilon} = \{f \in C(X)\colon p_A(f) < \varepsilon\}$ и $\Psi = \{V_{A,\varepsilon}\colon A \in \lambda, \varepsilon > 0\}$.

Очевидно, что для каждой точки $f \in C(X)$ семейство $f + \Psi = \{f + V\colon V \in \Psi\}$ является базой в точке f. Так как топология определяется семейством полунорм, она локально выпукла.

Оказывается, что при тех ограничениях, которые мы накладываем на семейство λ, все три топологии — множественно-открытая, топология равномерной сходимости на семействе λ и топология, определяемая с помощью полунорм, совпадают. Так множественно-открытая топология и топология равномерной сходимости на семействе λ будут совпадать по следующей

Теорема 2.1 [1]. *Пусть λ состоит из C-компактных множеств пространства X и вместе с каждым своим элементом содержит все содержащиеся в нем C-компактные подмножества. Тогда множественно-открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости на семействе λ, т. е. $C_\lambda(X) = C_{\lambda,u}(X)$.*

Заметим, что для каждого $f \in C(X)$ справедливы включения $f + V_{A,\varepsilon} \subseteq \langle f, A, \varepsilon\rangle$ и $\langle f, A, \varepsilon/2\rangle \subseteq f + V_{A,\varepsilon}$ для любого $A \in \lambda$. Отсюда следует, что топология равномерной сходимости на элементах из семейства λ совпадает с топологией, порожденной семейством полунорм $\{p_A\colon A \in \lambda\}$. Таким образом, $C_\lambda(X)$ есть локально выпуклое пространство. Поскольку семейство λ является π-сетью, $C_\lambda(X)$ является хаусдорфовым пространством и, следовательно, тихоновским пространством.

Теорема 2.2 [1]. *C-компактно-открытая топология на $C(X)$ для любого пространства X совпадает с топологией равномерной сходимости на C-компактных подмножествах пространства X, т. е. $C_{rc}(X) = C_{rc,u}(X)$. Более того, $C_{rc}(X)$ — хаусдорфово локально выпуклое пространство.*

Следствие 2.1. *$C_{rc}(X)$ — тихоновское пространство для любого пространства X.*

Это следует из того, что локально выпуклая топология всегда вполне регулярна.

Если τ — семейство открытых подмножеств в $\mathbb{R}$ и λ — семейство подмножеств в X, то через $C_\lambda^\tau(X)$ обозначим множество $C(X)$ с топологией, порожденной семейством предбазисных подмножеств $[F, U] = \{f \in C(X)\colon f(F) \subseteq U\}$, где $F \in \lambda$ и $U \in \tau$.

Понятно, что $C_\lambda^\tau(X) \leqslant C_\lambda(X)$. В общем случае топологические пространства $C_\lambda^\tau(X)$ и $C_\lambda(X)$ могут отличаться (даже если τ состоит из элементов некоторой базы).

П р и м е р 2.2. Пусть $X = \mathbb{R}$ и λ — семейство всех дискретных подмножеств в $\mathbb{R}$, а τ состоит из конечных объединений интервалов в $\mathbb{R}$. Очевидно, что $[\mathbb{N}, \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(i - 1/3, i + 1/3)]$ является открытым множеством в $C_\lambda(X)$, но не является открытым множеством в $C_\lambda^\tau(X)$.

Теорема 2.3. *Семейство $\{[A, V]\colon A \in \lambda,\ V$ — ограниченный интервал в $\mathbb{R}\}$ образует предбазу для $C_\lambda(X)$ для любого пространства X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $[A, V]$ — предбазисное открытое множество в $C_\lambda(X)$ и $f \in [A, V]$. Так как $f(A)$ — компакт, существуют такие точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в $f(A)$ и такие положительные числа $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$, что

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(z_i - \epsilon_i, z_i + \epsilon_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(z_i - 2\epsilon_i, z_i + 2\epsilon_i) \subseteq V.$$

Пусть $W_i = (z_i - 2\epsilon_i, z_i + 2\epsilon_i)$ и $A_i = A \bigcap f^{-1}([z_i - \epsilon_i, z_i + \epsilon_i])$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как пересечение C-компактного подмножества с нуль-множеством является C-компактным подмножеством, все A_i — C-компактные подмножества, а значит, принадлежат семейству λ. Очевидно, что

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{и} \quad f \in \bigcap_{i=1}^{n} [A_i, W_i] \subseteq [A, W].$$

Теорема доказана.

В завершении этого раздела рассмотрим множество $C^*(X)$ всех ограниченных вещественнозначных непрерывных функций на X.

Теорема 2.4. *Множество $C^*(X)$ всюду плотно в $C_\lambda(X)$ для любого пространства X.*

Доказательство. Пусть $\bigcap_{i=1}^{n}[A_i, V_i]$ — базисное открытое множество в пространстве $C_\lambda(X)$, содержащее функцию f. В силу того что все A_i являются C-компактными подмножествами в X, $\bigcup_{i=1}^{n} f(A_i)$ есть компактное подмножество в $\mathbb{R}$, а значит, содержится в некотором интервале (a, b). Определим функцию $g \in C^*(X)$ таким образом: $g(x) = f(x)$, если $a \leq f(x) \leq b$, $g(x) = a$, если $f(x) < a$ и $g(x) = b$, если $b < f(x)$. Получаем, что $g \in C^*(X) \bigcap \big(\bigcap_{i=1}^{n}[A_i, V_i]\big)$. Теорема доказана.

3. Сравнение топологий

Проведем сравнение C-компактно-открытой топологии с компактно-открытой топологией и топологией равномерной сходимости на $C(X)$. Напомним определение последних двух топологий. Пусть $K(X)$ — семейство всех компактных подмножеств в X. Тогда набор $\{\langle f, K, \epsilon\rangle \colon K \in K(X), \epsilon > 0\}$ формирует базу в точке f в компактно-открытой топологии на $C(X)$. Соответствующее топологическое пространство обозначается $C_c(X)$. Для топологии равномерной сходимости на $C(X)$ набор $\{\langle f, X, \epsilon\rangle \colon \epsilon > 0\}$ формирует базу для каждой точки $f \in C(X)$. Если $C(X)$ наделено топологией равномерной сходимости, то соответствующее пространство обозначают через $C_u(X)$. Из определений топологий следует, что выполняются следующие неравенства.

Теорема 3.1. *$C_c(X) \leq C_{rc}(X) \leq C_u(X)$ для любого пространства X.*

Выполнение строгих неравенств в теореме 3.1 будет представлено в примерах ниже.

Теорема 3.2. *Для любого пространства X верны следующие утверждения.*

1. $C_c(X) = C_{rc}(X)$ тогда и только тогда, когда каждое замкнутое C-компактное подмножество пространства X является компактом.

2. $C_{rc}(X) = C_u(X)$ тогда и только тогда, когда X — псевдокомпактное пространство.

Доказательство. 1. Заметим, что для любого подмножества $A \subseteq X$, $\langle f, \overline{A}, \epsilon\rangle \subseteq \langle f, A, \epsilon\rangle$. Так как любое замкнутое C-компактное подмножество X является компактом, то $C_{rc}(X) \leq C_c(X)$. Следовательно, $C_c(X) = C_{rc}(X)$.

Обратно, пусть $C_c(X) = C_{rc}(X)$ и A — произвольное замкнутое C-компактное подмножество в X. Так как $\langle f_0, A, 1\rangle$ открыто в $C_c(X)$, то существуют компактное множество K и $\epsilon > 0$ такие, что $\langle f_0, K, \epsilon\rangle \subseteq \langle f_0, A, 1\rangle$. Если $x \in A \setminus K$, то существует непрерывная функция $g \colon X \to [0, 1]$ такая, что $g(x) = 1$ и $g(y) = 0$ для любого $y \in K$. Заметим, что $g \in \langle f_0, K, \epsilon\rangle \setminus \langle f_0, A, 1\rangle$. Получили противоречие. Значит, $A \subseteq K$ и, следовательно, A — компакт.

2. Предположим, что X — псевдокомпакт. Тогда X — C-компактное подмножество в себе и для любых $f \in C(X)$, $\epsilon > 0$ множество $\langle f, X, \epsilon\rangle$ есть базисное открытое в $C_{rc}(X)$. Следовательно, $C_u(X) = C_{rc}(X)$.

Обратно, пусть $C_{rc}(X) = C_u(X)$. Так как $\langle f_0, X, 1\rangle$ — базисная окрестность функции f_0 в $C_u(X)$, существуют C-компактное множество $A \subseteq X$ и $\epsilon > 0$ такие, что $\langle f_0, A, \epsilon\rangle \subseteq \langle f_0, X, 1\rangle$. Так же как и в 1, используя вполне регулярность X, мы показываем, что $X = \overline{A}$. Но замыкание C-компактного подмножества является C-компактным подмножеством. Следовательно, X — C-компактное подмножество в себе, а значит, псевдокомпактно. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Для любого нормального пространства X равенство $C_c(X) = C_{rc}(X)$ верно тогда и только тогда, когда каждое замкнутое счетно компактное подмножество X является компактом.*

Следствие 3.2. $C_c(X) = C_{rc}(X)$ *для любого субметризуемого пространства X.*

Проведем некоторые исследования пространств, обладающих тем свойством, что каждое замкнутое C-компактное подмножество в нем компактно.

Определение 3.1. Пространство X назовем изокомпактным (p-изокомпактным, rc-изокомпактным), если каждое замкнутое счетно компактное (псевдокомпактное, C-компактное) подмножество в X является компактным.

Используя определение 3.1, теорему 3.2 и следствие 3.1 можно записать соответственно.

1. $C_c(X) = C_{rc}(X)$ тогда и только тогда, когда X — rc-изокомпакт.

2. Если X — нормальное пространство, то $C_c(X) = C_{rc}(X)$ тогда и только тогда, когда X — изокомпактно.

Изокомпакты и p-изокомпакты достаточно хорошо исследованы (см., например, [12; 13; 15; 31; 34]).

Заметим, что псевдокомпактное пространство X является компактом, если оно полно по Хьюитту или паракомпактно. Так как полнота по Хьюитту и паракомпактность наследственны относительно замкнутых подмножеств, то пространства, обладающие этими свойствами, p-изокомпактны. Оказывается, что выполняется более сильное утверждение.

Теорема 3.3. *Если пространство X паракомпактно или является μ-пространством, то X — rc-изокомпактно.*

Доказательство. Если X паракомпактно, то X — нормальное пространство. В нормальных пространствах замыкание C-компактного множества счетно компактно (а значит, псевдокомпактно). Если X — μ-пространство, то утверждение теоремы очевидно, так как любое C-компактное подмножество ограниченно. Теорема доказана.

Так как любое полное по Хьюитту пространство является μ-пространством, получаем

Следствие 3.3. *Если X полно по Хъюитту пространство, то X rc-изокомпактно.*

Пространство X называют P-пространством, если каждое G_δ-множество в X является открытым в X. Известно, что в P-пространстве любое ограниченное множество конечно, а значит, любое P-пространство является μ-пространством.

Следствие 3.4. *Если X — P-пространство, то X rc-изокомпактно.*

Далее приведем несколько примеров, различающих на множестве $C(X)$ псевдокомпактно-открытую и ограниченно-открытую топологию от C-компактно-открытой топологии.

Пример 3.1 (плоскость Дьедонне). Пусть $X = [0, \omega_1] \times [0, \omega_0] \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\}$. Топология τ порождена базой: открытыми являются все точки из множества $[0, \omega_1) \times [0, \omega_0)$, а также множества вида $U_\alpha(\beta) = \{(\beta, \gamma)\colon \alpha < \gamma \leq \omega_0\}$ и $V_\alpha(\beta) = \{(\gamma, \beta)\colon \alpha < \gamma \leq \omega_1\}$.

Пусть $A = \{(\omega_1, n)\colon 0 \leq n < \omega_0\}$. Возьмем произвольное C-компактное подмножество B пространства X. Так как для любого $\alpha < \omega_1$ множество $\{\alpha\} \times [0, \omega_0]$ открыто-замкнуто (и, следовательно, функционально открыто), то для любого $\beta \leq \omega_0$ множество $([0, \omega_1] \times \{\beta\}) \bigcap B$ конечно. Отсюда следует, что B — компактное подмножество в X. В [23] было доказано, что A — замкнутое ограниченное подмножество в X и $C_c(X) < C_b(X)$. Поскольку любое C-компактное подмножество в X компактно, то $C_{rc}(X) = C_c(X) < C_b(X)$. Таким образом, существует пространство $C(X)$, у которого ограниченно-открытая топология строго сильнее, чем C-компактно-открытая.

П р и м е р 3.2. Пусть $Y = [0, \omega_2] \times [0, \omega_1] \setminus \{(\omega_2, \omega_1)\}$ с топологией τ, порождаемой следующей базой: открытыми являются каждая точка из множества $[0, \omega_2) \times [0, \omega_1)$, а также множества вида $U_P(\beta) = \{(\beta, \gamma) \colon \gamma \in ([0, \omega_1] \setminus P)$, где P — конечное множество и $(\beta, \omega_1) \notin P\}$ и $V_\alpha(\beta) = \{(\gamma, \beta) \colon \alpha < \gamma \leq \omega_2\}$.

Пусть $A = \{(\omega_2, \gamma) \colon 0 \leq \gamma < \omega_1\}$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in C(Y)$. Предположим, что $f(A)$ не замкнуто. Тогда существуют точка $c \in \overline{f(A)} \setminus f(A)$ и последовательность $\{a_n\} \subset A$ такие, что $\{f(a_n)\} \to c$. Так как $a_n = (\omega_2, \gamma_n)$, то по свойству ординалов существует α_n такое, что $f(\alpha, \gamma_n) = f(a_n)$ для всех $\alpha > \alpha_n$. Более того, существует такое β, что $f(\alpha, \gamma) = f(\omega_2, \gamma)$ для любых $\gamma \in [0, \omega_1]$ и $\alpha \geq \beta$. Ясно, что $f(\beta, \omega_1) = c$. Следовательно, существует такое δ, что $f(\beta, \gamma) = c$ для всех $\gamma \geq \delta$. Отсюда следует, что $f(\omega_2, \gamma) = c$, но $(\omega_2, \gamma) \in A$ и $c \notin f(A)$. Получили противоречие. Таким образом, A является C-компактным подмножеством в Y.

Пусть B — произвольное псевдокомпактное подмножество пространства Y. Так как для любого $\alpha < \omega_2$ множество $\{\alpha\} \times [0, \omega_1]$ открыто-замкнуто (и, следовательно, функционально открыто), то для любого $\beta \leq \omega_1$ множество $([0, \omega_2] \times \{\beta\}) \bigcap B$ конечно. Отсюда следует, что B — компактное подмножество в Y. Тем самым никакое псевдокомпактное подмножество из Y не покрывает множество A. Таким образом, псевдокомпактно-открытая топология строго слабее C-компактно-открытой топологии на множестве $C(Y)$. Следовательно, $C_c(Y) = C_{ps}(Y) < C_{rc}(Y)$.

П р и м е р 3.3. Пусть X и Y — топологические пространства из примеров 3.1 и 3.2 соответственно. Рассмотрим прямую сумму этих пространств: $Z = X \bigoplus Y$. Тогда для топологического пространства Z верны неравенства

$$C_c(Z) = C_{ps}(Z) < C_{rc}(Z) < C_b(Z).$$

З а м е ч а н и е 3.1. В работе [23] был построен пример топологического пространства X (пример 3.17, замечание 3.18), для которого

$$C_p(X) < C_c(X) < C_{kc}(X) < C_{ps}(X) < C_b(X) < C_u(X).$$

П р и м е р 3.4. Рассмотрим прямую сумму $S = X \bigoplus Z$, где Z — из примера 3.3. Получаем, что для топологического пространства S верны неравенства

$$C_p(S) < C_c(S) < C_{kc}(S) < C_{ps}(S) < C_{rc}(S) < C_b(S) < C_u(S).$$

4. Индуцированные отображения

Одним из наиболее используемых инструментов изучения пространства функций является индуцированное отображение. Если X и Y — топологические пространства и $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение, то индуцированным отображением к отображению f будем называть отображение $f^* \colon C(Y) \to C(X)$, определенное по правилу $f^*(g) = g \circ f$ для всех $g \in C(Y)$. В данной работе мы изучим индуцированное отображение при условии, что $C(Y)$ и $C(X)$ наделены C-компактно-открытой топологией. В первой теореме этого раздела мы используем почти сюрьективные отображения. Отображение $f \colon X \to Y$, где X — непустое множество и Y — топологическое пространство, называется почти сюрьективным, если образ $f(X)$ всюду плотен в Y. Через $f(\lambda)$ обозначим семейство $\{f(A) \colon A \in \lambda\}$.

Теорема 4.1. *Пусть $f \colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда*

1. $f^* \colon C_{f(\lambda)}(Y) \to C_\lambda(X)$ *— непрерывное отображение.*

2. $f^* \colon C(Y) \to C(X)$ *взаимооднозначно тогда и только тогда, когда f почти сюрьективно.*

3. *Если $f^* \colon C(Y) \to C_{rc}(X)$ почти сюрьективно, то f взаимооднозначно.*

Доказательство. 1. Предположим, что $g \in C_{f(\lambda)}(Y)$. Пусть $\langle f^*(g), A, \epsilon\rangle$ — базисная окрестность функции $f^*(g)$ в $C_\lambda(X)$. Тогда $f^*(\langle g, f(A), \epsilon\rangle) \subseteq \langle f^*(g), A, \epsilon\rangle$ и, следовательно, f^* непрерывно.

Доказательство пп. 2 и 3 аналогично [26, теорема 2.2.6].

Обратимость условия 3 можно получить при некоторых дополнительных условиях на пространства X и Y. Для формулирования этих условий нам понадобится несколько определений.

Определение 4.1. Пространство X называется S_4-пространством (иногда C-замкнутым пространством), если каждое счетно компактное подмножество из X замкнуто в X. Эквивалентно X есть S_4-пространство, если каждое незамкнутое подмножество A пространства X содержит последовательность $\{x_n\}$, которая не имеет предельной точки в A.

Заметим, что класс S_4-пространств достаточно широк, например, он содержит секвенциальные пространства. В частности, пространства с первой аксиомой счетности и пространства Фреше — Урысона являются S_4-пространствами. Более детально о S_4-пространствах можно найти в [7; 21].

Определение 4.2. Пространство X будем называть слабо rc-изокомпактным, если каждое замкнутое C-компактное подмножество в X счетно компактно.

Заметим, что пространство Мрувки — Исбела — Фролика Ψ, (см. [19]), хотя и C-компактно в себе (так как псевдокомпактно), не является слабо rc-компактным. Каждое счетно компактное подмножество Ψ компактно (см. [33]). Следовательно, Ψ изокомпактно, но не p-изокомпактно.

Пространство $[0, \omega_1)$ счетных ординалов не изокомпактно, а следовательно, не rc-изокомпактно. Так как $[0, \omega_1)$ счетно компактно, оно слабо rc-компактно. Очевидно, что счетно компактные и нормальные пространства слабо rc-изокомпактны.

Определение 4.3. Пространство X называется функционально нормальным, если для любых двух дизъюнктных замкнутых подмножеств A и B в X существует непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $f(A) \bigcap f(B) = \varnothing$.

Очевидно, что нормальное пространство является функционально нормальным. Обратное неверно. В качестве примера можно рассмотреть плоскость Тихонова (см. [31]), которая функционально нормальное, но не нормальное пространство. Также отметим, что счетно компактное функционально компактное пространство нормально и каждое замкнутое псевдокомпактное подмножество в функционально нормальном пространстве является C-вложенным (см. [8; 10; 11]).

Функционально нормальные пространства были определены в 1951 г. В.Т. ван Естом и Ханс Фреденталем [16] и были достаточно подробно изучены С.Е. Ауллом [7; 8].

Теорема 4.2. *Пусть X — слабо rc-изокомпактное пространство и Y — функционально нормальное S_4-пространство. Если $f\colon X \to Y$ уплотнение, то отображение $f^*\colon C(Y) \to C_\lambda(X)$ почти сюрьективно.*

Доказательство. Покажем, что $f^*(C(Y))$ плотно в $C_\lambda(X)$. Пусть $g \in C(X)$ и $\langle g, A, \epsilon\rangle$ — базисная окрестность функции $g \in C_\lambda(X)$, где A — замкнутое C-компактное подмножество в X и $\epsilon > 0$. Так как X слабо rc-изокомпактно, A счетно компактно в X. Поскольку f взаимооднозначно и Y — S_4-пространство, $f|_A\colon A \to f(A)$ — гомеоморфизм. Следовательно, отображение $g \circ (f|_A)^{-1}\colon f(A) \to \mathbb{R}$ непрерывно. Заметим, что $f(A)$ — замкнутое счетно компактное множество в Y, которое функционально нормально. Получаем, что $f(A)$ — C-вложенное подмножество в Y и, следовательно, существует $h \in C(Y)$ такое, что $h|_{f(A)} = g \circ (f|_A)^{-1}$. Пусть $\phi = h \circ f$. Тогда $\phi = f^*(h) \in f^*(C(Y))$ и $\phi = g$ на A. Поэтому $\phi \in \langle g, A, \epsilon\rangle \cap f^*(C(Y))$ и, следовательно, f^* почти сюрьективно. Теорема доказана.

Далее исследуем условия, при которых f^* является гомеоморфным вложением. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется λ_Y-накрывающим, если для любого C-компактного подмножества A из λ_Y существует C-компактное подмножество B из λ_X такое, что $A \subseteq \overline{f(B)}$.

Теорема 4.3. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Если $f^*\colon C_{\lambda_Y}(Y) \to C_{\lambda_X}(X)$ — гомеоморфное вложение, то f является λ_Y-накрывающим отображением.*

Доказательство. Пусть $A \in \lambda_Y$. Тогда $f^*(\langle 0_Y, A, 1\rangle)$ — открытая окрестность функции 0_X в $f^*(C_{\lambda_Y}(Y))$. Выберем C-компактное подмножество $B \in \lambda_X$ и $\epsilon > 0$ так, чтобы $0_X \in \langle 0_X, B, \epsilon\rangle \bigcap f^*(C_{\lambda_Y}(Y)) \subseteq f^*(\langle 0_Y, A, 1\rangle)$. Мы докажем, что $A \subseteq \overline{f(B)}$. Допустим, что существует $y \in A\setminus\overline{f(B)}$. В силу вполне-регулярности пространства Y существует непрерывная функция $g\colon Y \to [0,1]$ такая, что $g(y) = 1$ и $g(\overline{f(B)}) = 0$. Так как $g(f(B)) = 0$, $f^*(g) \in \langle 0_X, B, \epsilon\rangle \cap f^*(C_{\lambda_Y}(Y)) \subseteq f^*(\langle 0_Y, A, 1\rangle)$. Поскольку f^* иньективно, $g \in \langle 0_Y, A, 1\rangle$. Из включения $y \in A$ следует, что $|g(y)| < 1$. Получили противоречие, поэтому $A \subseteq \overline{f(B)}$. Из этого следует, что f является λ_Y-накрывающим отображением. Теорема доказана.

Напомним, что в данной работе семейство λ есть π-сеть из замкнутых C-компактных подмножеств. Рассмотрим строго λ_Y-накрывающее отображение, подразумевая λ_Y-накрывающее отображение без оператора замыкания (т. е. для любого C-компактного подмножества A из λ_Y существует C-компактное подмножество B из λ_X такое, что $A \subseteq f(B)$).

В этом случае справедливо и некоторое обратное утверждение.

Теорема 4.4. *Если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ является строго λ_Y-накрывающим, то $f^*\colon C_{\lambda_Y}(Y) \to C_{\lambda_X}(X)$ — гомеоморфное вложение.*

Доказательство. Так как λ_Y является π-сетью, а f — строго λ_Y-накрывающим, то f почти сюрьективно и по теореме 4.1 f^* — взаимооднозначное непрерывное отображение. Осталось показать, что f^* — открытое отображение. Пусть $\langle g, A, \epsilon\rangle$ — базисное открытое множество в $C_{\lambda_Y}(Y)$, где $A \in \lambda_Y$ и $\epsilon > 0$. Пусть $h \in f^*(\langle g, A, \epsilon\rangle)$. Тогда существует $h_1 \in \langle g, A, \epsilon\rangle$ такое, что $f^*(h_1) = h$. Поскольку $\langle g, A, \epsilon\rangle$ — открытое множество в $C_{\lambda_Y}(Y)$, существуют C-компактное подмножество $B \in \lambda_Y$ и $\delta > 0$ такие, что $\langle h_1, B, \delta\rangle \subseteq \langle g, A, \epsilon\rangle$. Так как f есть λ_Y-накрывающее отображение, существует $D \in \lambda_X$ такое, что $B \subseteq f(D)$.

Докажем, что $\langle h, D, \delta\rangle \cap f^*(C_{\lambda_Y}(Y)) \subseteq f^*(\langle h_1, B, \delta\rangle)$. Возьмем произвольное $l \in C(Y)$ так, чтобы $f^*(l) \in \langle h, D, \delta\rangle \cap f^*(C_{\lambda_Y}(Y))$. Поскольку $B \subseteq f(D)$, для каждого $b \in B$ существует $d \in D$ такое, что $b = f(d)$. Так как $f^*(l) \in \langle h, D, \delta\rangle$,

$$|l(b) - h_1(b)| = |l(f(d)) - h_1(f(d))| = |f^*(l)(d) - f^*(h_1)(d)| = |f^*(l)(d) - h(d)| < \delta.$$

Отсюда следует, что $l \in \langle h_1, B, \delta\rangle$, а значит, $f^*(l) \in f^*(\langle h_1, B, \delta\rangle)$. Поэтому

$$\langle h, D, \delta\rangle \cap f^*(C_{\lambda_Y}(Y)) \subseteq f^*(\langle h_1, B, \delta\rangle) \subseteq f^*(\langle g, A, \epsilon\rangle)$$

и, следовательно, $f^*(\langle g, A, \epsilon\rangle)$ открыто в $f^*(C_{\lambda_Y}(Y))$. Теорема доказана.

Другой вид отображений, который часто применяется на функциональных пространствах, можно называть “функцией суммы”. Пусть $\{X_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ — семейство топологических пространств. Если $\oplus X_\alpha$ обозначает их топологическую сумму, то функция суммы определяется как отображение $s\colon C(\oplus X_\alpha) \to \prod\{C(X_\alpha)\colon \alpha \in \Lambda\}$, где $s(f) = \langle f|_{X_\alpha}\rangle$ для любого $f \in C(\oplus X_\alpha)$. Заметим, что для любого топологического пространства Y отображение $f\colon \oplus X_\alpha \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда ограничение $f|_{X_\alpha}$ непрерывно для каждого $\alpha \in \Lambda$.

Очевидно, справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть $\{X_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ — семейство пространств и A — подмножество в $\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Тогда A — C-компактное подмножество в $\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ тогда и только тогда, когда $A \cap X_\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha \in \Lambda$, кроме конечного числа, и каждое непустое пересечение $A \cap X_\alpha$ является C-компактным подмножеством в X_α.*

Пусть $\lambda \cap X_\alpha = \{A\colon A \subseteq X_\alpha, A \in \lambda\}$.

Теорема 4.5. *Пусть $\{X_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ — семейство пространств. Тогда функция суммы $s\colon C_\lambda(\oplus X_\alpha) \to \Pi\{C_{\lambda\cap X_\alpha}(X_\alpha)\colon \alpha \in \Lambda\}$ — гомеоморфизм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим отображение $t\colon \Pi\{C(X_\alpha)\colon \alpha \in \Lambda\} \to C(\oplus X_\alpha)$ по правилу $t(\langle g_\alpha\rangle_{\alpha\in\Lambda}) = g$, где $g|_{X_\alpha} = g_\alpha$.

Так как $s \circ t$ и $t \circ s$ — тождественные отображения на $\Pi\{C(X_\alpha)\colon \alpha \in \Lambda\}$ и $C(\oplus X_\alpha)$ соответственно, s — биекция и $s^{-1} = t$. Докажем, что s и s^{-1} — непрерывные отображения.

Положим $[A,V]_\oplus = \{f \in C(\oplus X_\alpha)\colon f(A) \subseteq V\}$, где $A \in \lambda$ и V — открытое множество в $\mathbb{R}$ и $[A,V]_\alpha = \{f \in C(X_\alpha)\colon f(A) \subseteq V\}$, где $A \in \lambda \cap X_\alpha$ и V — открытое множество в $\mathbb{R}$. Пусть $p_\alpha\colon \Pi\{C_{\lambda\cap X_\alpha}(X_\alpha)\colon \alpha \in \Lambda\} \to C_{\lambda\cap X_\alpha}(X_\alpha)$ является α-проекцией. Отметим, что $p^{-1}_{\alpha_1}([A_1,V_1]_{\alpha_1})\cap\ldots\cap p^{-1}_{\alpha_n}([A_n,V_n]_{\alpha_n})$ есть базисное открытое множество в $\Pi\{C_{\lambda\cap X_\alpha}(X_\alpha)\colon \alpha \in \Lambda\}$, где $A_i \in \lambda \cap X_\alpha$ и каждое V_i открыто в $\mathbb{R}$ для $1 \le i \le n$. Тогда $s^{-1}(p^{-1}_{\alpha_1}([A_1,V_1]_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap p^{-1}_{\alpha_n}([A_n,V_n]_{\alpha_n})) = s^{-1}p^{-1}_{\alpha_1}([A_1,V_1]_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap s^{-1}p^{-1}_{\alpha_n}([A_n,V_n]_{\alpha_n}) = [A_1,V_1]_\oplus \cap \ldots \cap [A_n,V_n]_\oplus$. Таким образом, s непрерывно.

Пусть $[A,V]_\oplus$ — предбазисное открытое множество в $C_\lambda(\oplus X_\alpha)$, где $A \in \lambda$ и V открыто в $\mathbb{R}$. Так как A является C-компактным подмножеством в $\oplus X_\alpha$, то по лемме 4.1 $A \cap X_\alpha = \varnothing$ для всех α, кроме конечного числа. Предположим, что $A \cap X_{\alpha_i} \neq \varnothing$ для $1 \le i \le n$. Пусть $A_i = A \cap X_{\alpha_i}$. Тогда $A_i \in \lambda\cap X_{\alpha_i}$ для $1 \le i \le n$ и $s([A,V]_\oplus) = p^{-1}_{\alpha_1}([A_1,V_1]_{\alpha_1})\cap\ldots\cap p^{-1}_{\alpha_n}([A_n,V_n]_{\alpha_n})$. Таким образом, s — открытое отображение и, следовательно, гомеоморфизм. Теорема доказана.

5. Метризуемость

В этом разделе мы исследуем свойство метризуемости пространства $C_\lambda(X)$. Начнем со свойства субметризуемости, более слабого, чем метризуемость.

О п р е д е л е н и е 5.1. Тихоновское пространство X называется субметризуемым, если X обладает более слабой метризуемой топологией, т. е. если существует уплотнение $f\colon (X,\tau) \to (Y,d)$, где (Y,d) — метрическое пространство.

З а м е ч а н и е 5.1. Если X имеет G_δ-диагональ, т. е. если множество $\{(x,x)\colon x \in X\}$ является G_δ-множеством в произведении $X \times X$, то каждая точка в X есть G_δ-множество. Заметим, что в каждом метризуемом пространтстве диагональ является нуль-множеством.

Каждое компактное (псевдокомпактное) подмножество в субметризуемом пространстве — G_δ-множество. Пространство X называется E_0-пространством, если каждая его точка является G_δ-множеством. Субметризуемые пространства являются E_0-пространствами.

Исследования E_0-пространств и субметризуемых пространств можно найти в [9; 20].

О п р е д е л е н и е 5.2. Пространство X называется σ-C-компактным, если в X существует последовательность $\{A_n\}$ C-компактных подмножеств таких, что $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Пространство X называется почти σ-C-компактным, если в X существует плотное σ-C-компактное подмножество.

Если в определении 5.2 дополнительно потребовать, чтобы все A_n принадлежали некоторому семейству C-компактных подмножеств λ, то пространство X называется σ_λ-C-компактным и почти σ_λ-C-компактным соответственно.

Пусть $\overline{A}^{\nu X}$ есть замыкание множества A в Хьюиттовском пополнении νX. Положим $\nu\lambda = \{\overline{A}^{\nu X}\colon A \in \lambda\}$.

Лемма 5.1. *Пространство $C_\lambda(X)$ линейно гомеоморфно пространству $C_{\nu\lambda}(\nu X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой функции $f \in C(X)$ поставим в соответствие $\widetilde{f} \in C(\nu X)$ — непрерывное продолжение f на νX. Это продолжение единственно, так как X всюду плотно в νX. Полученное соответствие между $C(X)$ и $C(\nu X)$ обозначим через φ. Заметим, что φ является изоморфизмом (см. [19]). Для любого предбазисного множества $[A,V]$ пространства $C_\lambda(X)$ выполняется равенство $\varphi([A,V]) = [\overline{A}^{\nu X},V]$. Действительно, пусть $f \in [A,V]$. Тогда $f(A) \subseteq V$. Допустим, что $\widetilde{f}(\overline{A}^{\nu X}) \nsubseteq V$. Тогда существует $t \in \widetilde{f}(\overline{A}^{\nu X}) \setminus \widetilde{f}(A)$. Так как $\widetilde{f}(A)$ равно $f(A)$ и является компактным подмножеством в $\mathbb{R}$, то любая точка $x \in \widetilde{f}^{-1}(t)$ функционально отделима от множества A, но $x \in \overline{A}^{\nu X}$; противоречие. Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть X — C-вложенное C-компактное подмножество тихоновского пространства Y, A — G_δ-плотное подмножество в X и $\lambda_A = \{A \cap F : F$ — нуль-множество из $Y\}$. Тогда множественно-открытая топология на $C(X)$ относительно семейства $\lambda = \{\overline{B} \colon B \in \lambda_A\}$ совпадает с метризуемой sup-топологией равномерной сходимости на X.*

Доказательство. Так как A — G_δ-плотное подмножество C-компактного подмножества в X, A является C-компактным подмножеством в Y. Значит, семейство λ_A состоит из C-компактных в Y подмножеств из A. Пусть $\langle f, X, \epsilon\rangle = \{g \in C(X) \colon \forall x \in X |f(x) - g(x)| < \epsilon\}$ — базисная окрестность точки $f \in C(X)$. Обозначим через $\widetilde{f}$ непрерывное продолжение функции f на пространство Y. X — C-компактное подмножество в Y; отсюда $\widetilde{f}(X)$ — компактное подмножество в $\mathbb{R}$. Построим покрытие $\beta = \{(t - \epsilon/4, t + \epsilon/4) \colon t \in \widetilde{f}(X)\}$ множества $\widetilde{f}(X)$ и выделим из него конечное подпокрытие $\{(t_i - \epsilon/4, t_i + \epsilon/4) \colon t_i \in \widetilde{f}(X), i = 1, \dots, k\}$. Заметим, что множества $\widetilde{f}^{-1}([t_i - \epsilon/4, t_i + \epsilon/4])$ являются нуль-множествами пространства Y и, значит, $B_i = \widetilde{f}^{-1}([t_i - \epsilon/4, t_i + \epsilon/4]) \cap A$ принадлежат λ_A для всех $i = 1, \dots, k$. В силу леммы 5.1 $\widetilde{f}(B_i) = \widetilde{f}(\overline{B_i})$, поэтому $f \in \cap_{i=1}^{k}[\overline{B_i}, (t_i - \epsilon/2, t_i + \epsilon/2)] \subseteq \langle f, X, \epsilon\rangle$. Таким образом, любая базисная окрестность точки в пространстве $C(X)$ в метризуемой sup-топологии есть открытое множество во множественно-открытой топологии на семействе λ. Обратное утверждение, что любое предбазисное открытое множество во множественно-открытой топологии будет открытым и в sup-топологии, очевидно. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Для любого пространства X следующие утверждения эквивалентны.*
1. *$C_\lambda(X)$ субметризуемо.*
2. *$C_\lambda(X)$ есть E_0-пространство.*
3. *X почти σ_λ-C-компактно.*

Доказательство. Импликация (1)⇒(2) следует из замечания 5.1.

(2)⇒(3). Если $C_\lambda(X)$ — E_0-пространство, то нуль-функция 0_X является G_δ-множеством. Пусть $\{0_X\} = \cap_{n=1}^{\infty}\langle 0_X, A_n, \epsilon_n\rangle$, где $A_n \in \lambda$ и $\epsilon_n > 0$ для всех n. Докажем, что $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$.

Предположим, что $x_0 \in X \setminus \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$. Тогда существует непрерывная функция $f \colon X \to [0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$ для любого $x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ и $f(x_0) = 1$. Поскольку $f(x) = 0$ для любого $x \in A_n$, $f \in \langle 0_X, A_n, \epsilon_n\rangle$ для любого n и, следовательно, $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\langle 0_X, A_n, \epsilon_n\rangle\} = \{0_X\}$. Получили противоречие. Таким образом, X почти σ-C-компактно.

(3)⇒(1). В силу леммы 5.1 достаточно доказать субметризуемость пространства $C_{\nu\lambda}(\nu X)$. Заметим, что семейство $\nu\lambda = \{\overline{A}^{\nu X} : A \in \lambda\}$ состоит из компактных подмножеств в νX. Пусть $\cup\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ — плотное подмножество в X, где $A_n \in \lambda$ для всех n. Тогда $\cup\{\overline{A_n}^{\nu X} : n \in \mathbb{N}\}$ — плотное подмножество в νX, так как X всюду плотно в νX. Пусть $S = \bigoplus\{\overline{A}_n^{\nu X} : n \in \mathbb{N}\}$ — топологическая сумма пространств $\overline{A}_n^{\nu X}$ и $\phi \colon S \to \nu X$ — естественное отображение. Тогда индуцированное отображение $\phi^* \colon C_{\nu\lambda}(\nu X) \to C_{\nu\lambda_S}(S)$, где $\nu\lambda_S = \{\overline{B}^{\nu X} : B \subseteq A_n, B \in \lambda, n \in \mathbb{N}\}$, определенное равенством $\phi^*(f) = f \circ \phi$, непрерывно. Так как ϕ почти сюрьективно, то по теореме 4.1 отображение ϕ^* взаимнооднозначно. По теореме 4.5 пространства $C_{\nu\lambda_S}(\bigoplus\{\overline{A}_n^{\nu X} : n \in \mathbb{N}\})$ и $\prod\{C_{\nu\lambda_{A_n}}(\overline{A}_n^{\nu X}) \colon n \in \mathbb{N}\}$, где $\nu\lambda_{A_n} = \{\overline{B}^{\nu X} : B \subseteq A_n, B \in \lambda\}$, гомеоморфны. Но каждое $C_{\nu\lambda_{A_n}}(\overline{A}_n^{\nu X})$ является метризуемым пространством, так как sup-топология на компактном множестве $\overline{A}_n^{\nu X}$ метризуема. Отсюда следует, что $C_{\nu\lambda_S}(S)$ — метризуемое пространство и ϕ^* — уплотнение. Таким образом, $C_{\nu\lambda}(\nu X)$ — субметризуемое пространство. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Для любого пространства X следующие утверждения эквивалентны.*
1. *$C_{rc}(X)$ субметризуемо.*
2. *$C_{rc}(X)$ есть E_0-пространство.*
3. *X почти σ-C-компактно.*

Отметим, что субметризуемые пространства являются полными по Дьедонне и, значит, замыкание любого ограниченного множества в субметризуемом пространстве компактно.

Теорема 5.3. *Предположим, что X — почти σ_λ-C-компактное пространство. Если K — подмножество в $C_\lambda(X)$, то следующие утверждения эквивалентны.*

1. K — *компакт.*
2. K — *счетно компактно.*
3. K — *псевдокомпактно.*
4. K — *замкнутое C-компактное подмножество.*
5. K — *замкнутое ограниченное подмножество.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) очевидны.

(5) $\Rightarrow$ (1). По теореме 5.2 пространство $C_\lambda(X)$ является субметризуемым. Теорема доказана.

Далее мы приведем несколько топологических свойств, которые эквивалентны метризуемости пространства $C_\lambda(X)$.

Определение 5.3. Подмножество S пространства X имеет счетный характер, если существует последовательность $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых подмножеств в X такая, что $S \subseteq W_n$ для каждого n; если W — любое открытое множество, содержащее S, то существует n_0 такое, что $W_{n_0} \subseteq W$.

Пространство X (точечно) счетного типа, если любое компактное множество (любая точка) содержится в компактном множестве счетного типа.

Пространство X называют q-пространством, если для каждой точки $x \in X$ существует последовательность $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ окрестностей точки x такая, что если $x_n \in U_n$ для каждого n, то последовательность $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ имеет предельную точку.

Более сильным свойством, чем быть q-пространством, является свойство быть M-пространством. Пространство X называют M-пространством, если X может быть отображено на метрическое пространство квазисовершенным отображением (т. е. непрерывным замкнутым отображением, в котором полный прообраз любой точки счетно компактен).

Пространства точечно счетного типа и M-пространства являются q-пространствами. Заметим, что метризуемые пространства имеют счетный тип.

Более подробно о вышеприведенных свойствах можно найти в работах [5; 27–29].

Приведем несколько характеристик метризуемости пространства $C_\lambda(X)$.

Теорема 5.4. *Для любого пространства X следующие утверждения эквивалентны.*

1. $C_\lambda(X)$ *метризуемо.*
2. $C_\lambda(X)$ — *первой счетности.*
3. $C_\lambda(X)$ — *счетного типа.*
4. $C_\lambda(X)$ — *точечно счетного типа.*
5. $C_\lambda(X)$ *имеет всюду плотное подмножество точечно счетного типа.*
6. $C_\lambda(X)$ — *M-пространство.*
7. $C_\lambda(X)$ — *q-пространство.*
8. X *хеми-λ-C-компактно (т. е. в X существует последовательность $\{A_n : A_n \in \lambda, n \in \mathbb{N}\}$ C-компактных подмножеств такая, что $\forall A \in \lambda\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : A \subseteq A_{n_0}$.)*

Доказательство. Из замечаний выше следует, что (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (7) и (1) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7) и (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (7).

(4) $\Longleftrightarrow$ (5). Заметим, что если D — плотное подмножество в X и A — компактное подмножество в D, то A имеет счетный характер в D тогда и только тогда, когда A имеет счетный характер в X. Так как $C_\lambda(X)$ локально выпукло, оно является однородным. Из этих двух фактов следует эквивалентность условий (4) и (5).

(7) $\Rightarrow$ (8). Предположим, что $C_\lambda(X)$ есть q-пространство. Следовательно, существует последовательность $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ окрестностей нуль-функции 0_X в $C_\lambda(X)$ такая, что если $f_n \in U_n$ для каждого n, то $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ имеет предельную точку в $C_\lambda(X)$. Тогда для каждого n существуют замкнутое C-компактное подмножество A_n и число $\epsilon_n > 0$ такие, что $0_X \in \langle 0_X, A_n, \epsilon_n \rangle \subseteq U_n$.

Пусть $A \in \lambda$. Предположим, что A не является подмножеством в A_n для любого n. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $a_n \in A \setminus A_n$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует непрерывная функция $f_n\colon X \to [0,1]$ такая, что $f_n(a_n) = n$ и $f_n(x) = 0$ для любого $x \in A_n$. Ясно, что $f_n \in \langle 0_X, A_n, \epsilon_n\rangle$. Но последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не имеет предельной точки в $C_\lambda(X)$. Действительно, предположим, что $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку $f \in C_\lambda(X)$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $n_k > k$ такое, что $f_{n_k} \in \langle f, A, 1\rangle$. Тогда $f(a_{n_k}) > f(a_{n_k}) - 1 = n_k - 1 \geq k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Значит, f не ограничено на C-компактном множестве A. Таким образом, $C_\lambda(X)$ не является q-пространством. Следовательно, X хеми-λ-C-компактно.

(8) $\Rightarrow$ (1). Хорошо известно, что если топология локально выпуклого хаусдорфова пространства X порождена счетным семейством полунорм, то она метризуема (см. [32, с. 199]). Поэтому локально выпуклая топология на $C(X)$, порожденная счетным семейством полунорм $\{p_{A_n}\colon n \in \mathbb{N}\}$, метризуема и слабее, чем топология на $C_\lambda(X)$. С другой стороны, поскольку для каждого $A \in \lambda$ существует A_n такое, что $A \subseteq A_n$, локально выпуклая топология, порожденная семейством $\{p_A\colon A \in \lambda\}$, слабее, чем локально выпуклая топология на $C(X)$, порожденная счетным семейством полунорм $\{p_{A_n}\colon n \in \mathbb{N}\}$. Таким образом, эти топологии совпадают и $C_\lambda(X)$ метризуемо. Теорема доказана.

Следствие 5.2. *Для любого пространства X следующие утверждения эквивалентны.*

1. $C_{rc}(X)$ *метризуемо.*
2. $C_{rc}(X)$ — *первой счетности.*
3. $C_{rc}(X)$ — *счетного типа.*
4. $C_{rc}(X)$ — *точечно счетного типа.*
5. $C_{rc}(X)$ *имеет всюду плотное подмножество точечно счетного типа.*
6. $C_{rc}(X)$ — *M-пространство.*
7. $C_{rc}(X)$ — *q-пространство.*
8. *X хеми-C-компактно (т. е. существует последовательность C-компактных подмножеств $\{A_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ в X такая, что для любого C-компактного подмножества A существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $A \subseteq A_{n_0}$).*

6. Вполне τ-ограниченность и сепарабельность

Пусть G — топологическая группа (относительно сложения) и τ — бесконечный кардинал. Тогда G вполне τ-ограничена, если для каждой окрестности U группового нулевого элемента в G существует подмножество S из G такое, что $|S| \leqslant \tau$ и $G = \{s + u\colon s \in S \text{ и } u \in U\}$. Заметим, что G вполне τ-ограничена тогда и только тогда, когда G изоморфна подгруппе группы с числом Суслина, не превосходящим τ. Отметим, что $C_p(X)$ обладает счетным числом Суслина и, значит, является вполне $\aleph_0$-ограниченным.

Маккой и Нтанту (см. [26, теорема 4.2.6]) показали, что $C_\lambda(X)$ вполне τ-ограничено тогда и только тогда, когда $w_\lambda(X) \leqslant \tau$, где $w_\lambda(X) = \sup\{w(A)\colon A \in \lambda\}$, и λ — наследственно замкнутая компактная сеть на X.

$\upsilon\lambda$-вес $w_{\upsilon\lambda}(X)$ пространства X определяется как $w_{\upsilon\lambda}(X) = \sup\{w(\overline{A}^{\upsilon X})\colon A \in \lambda\}$, где $\overline{A}^{\upsilon X}$ — замыкание в Хьюиттовском пополнении υX множества A. Следующий результат является критерием вполне τ-ограниченности для топологической группы (по сложению) $C_\lambda(X)$.

Теорема 6.1. *Пространство $C_\lambda(X)$ вполне τ-ограничено тогда и только тогда, когда $w_{\upsilon\lambda}(X) \leqslant \tau$.*

Доказательство. Предположим, что $C_\lambda(X)$ вполне τ-ограничено. Если $A \in \lambda$, то A — C-компактное подмножество в X и $\overline{A}^{\upsilon X}$ — компактое подмножество в Хьюиттовском пополнении υX. Пусть $\lambda_\upsilon = \{\overline{A}^{\upsilon X}: A \in \lambda\}$. Тогда $C_\lambda(X)$ линейно гомеоморфно пространству $C_{\lambda_\upsilon}(\upsilon X)$. Таким образом, $C(\upsilon X) = [\overline{A}^{\upsilon X}, (-\epsilon, \epsilon)] + S$, где $|S| \leqslant \tau$. Пусть $f = \Delta S$ — диагональное произведение элементов из S. Тогда f — непрерывное отображение пространства υX

в $\mathbb{R}^\tau$, а значит, $w(f(\upsilon X)) \leqslant \tau$. Сужение функции f на $\overline{A}^{\upsilon X}$ является непрерывной иньекцией пространства $\overline{A}^{\upsilon X}$ в $\mathbb{R}^\tau$. В самом деле, если x и y — различные точки из $\overline{A}^{\upsilon X}$, то в $\overline{A}^{\upsilon X}$ существуют непересекающиеся нуль-множества F и K такие, что $x \in F$ и $y \in K$. Пусть h — непрерывное отображение υX в $\mathbb{R}$ такое, что $h[F] = \{0\}$ и $h[K] = \{3\epsilon\}$. Тогда $h = p + s$ для некоторых $p \in [\overline{A}^{\upsilon X}, (-\epsilon, \epsilon)]$ и $s \in S$. Отсюда следует, что $s = h - p$ и $s(x) \neq s(y)$.

Так как $\overline{A}^{\upsilon X}$ — компактное подмножество, сужение функции f в $\overline{A}^{\upsilon X}$ есть вложение. Следовательно, $w(\overline{A}^{\upsilon X}) \leqslant \tau$, и поэтому $w_{\upsilon\lambda}(X) \leqslant \tau$.

Обратно, предположим, что $w_{\upsilon\lambda}(X) \leqslant \tau$. Тогда для каждого $A \in \lambda$ имеем $w(\overline{A}^{\upsilon X}) \leqslant \tau$. Пусть $[\overline{A}^{\upsilon X}, (-\epsilon, \epsilon)]$ — произвольная базисная окрестность нуль-функции $0_{\upsilon X}$. Рассмотрим пространство $C_u(\overline{A}^{\upsilon X})$ с топологией равномерной сходимости на $\overline{A}^{\upsilon X}$. Так как $w(\overline{A}^{\upsilon X}) \leqslant \tau$, плотность $C_u(\overline{A}^{\upsilon X})$ не превосходит τ (см. [3]). Пусть $\epsilon > 0$ и D — плотное подмножество в $C_u(\overline{A}^{\upsilon X})$ мощности $d(C_u(\overline{A}^{\upsilon X}))$. Множество $\overline{A}^{\upsilon X}$ является компактным подмножеством, следовательно, оно C-вложено в υX. Для каждого $d \in D$ существует $\tilde{d} \in C(\upsilon X)$ такое, что $\tilde{d}|_{\overline{A}^{\upsilon X}} = d$. Пусть $S = \{\tilde{d}\colon d \in D\}$. Для любого $f \in C(\upsilon X)$ существует $\tilde{d} \in S$ такое, что $\tilde{d} \in f + [\overline{A}^{\upsilon X}, (-\epsilon, \epsilon)]$ и, следовательно, $\tilde{d} = f + p$ для некоторого $p \in [\overline{A}^{\upsilon X}, (-\epsilon, \epsilon)]$. Отсюда вытекает, что $C(\upsilon X) = [\overline{A}^{\upsilon X}, (-\epsilon, \epsilon)] + S$ и, таким образом, $C_\lambda(X)$ вполне τ-ограничено. Теорема доказана.

Теорема 6.2. *Если пространство $C_\lambda(X)$ вполне τ-ограничено, то $w_\lambda(X) \leqslant \tau$.*

Доказательство. Пусть $A \in \lambda$. Тогда существует подмножество S из $C(X)$ такое, что $|S| \leqslant \tau$ и $C(X) = \{s+g\colon s \in S \text{ и } g \in [A, (-1/2, 1/2)]\}$. Пусть V — открытое множество в X и $x \in V \bigcap A$. Тогда существует непрерывное отображение из X в отрезок $[0,1]$ такое, что $f(x) = 0$ и $f(X \setminus V) \subseteq \{1\}$. Поскольку $f \in C(X)$, $f = g + s$, где $g \in [A, (-1/2, 1/2)]$ и $s \in S$. Ясно, что $x \in s^{-1}(-1/2, 1/2)$ и $s^{-1}(-1/2, 1/2) \bigcap (A \setminus V) = \varnothing$. Семейство $\gamma = \{s^{-1}(-1/2, 1/2) \bigcap A\colon s \in S\}$ есть база в A и $|\gamma| \leqslant \tau$. Теорема доказана.

Напомним, что через $l(C_\lambda(X))$ и $c(C_\lambda(X))$ мы обозначим число Линделёфа и число Суслина пространства $C_\lambda(X)$ соответственно.

Теорема 6.3. *Пусть X — произвольное пространство. Тогда*
1. *Если $l(C_\lambda(X)) \leq \tau$, то $w_{\upsilon\lambda}(X) \leqslant \tau$ и $w_\lambda(X) \leqslant \tau$.*
2. *Если $c(C_\lambda(X)) \leq \tau$, то $w_{\upsilon\lambda}(X) \leqslant \tau$ и $w_\lambda(X) \leqslant \tau$.*

Доказательство. Очевидно, так как для любой топологической группы G из $l(G) \leqslant \tau$ (или $c(G) \leqslant \tau$) следует ее вполне τ-ограниченность (см. [6]).

Теорема 6.4. *Топологическая группа $C_\lambda(X)$ вполне $\aleph_0$-ограничена тогда и только тогда, когда λ есть семейство метризуемых компактных подмножеств пространства X.*

Доказательство. По теореме 6.2 для каждого $A \in \lambda$ множество $\gamma = \{s^{-1}(-1/2, 1/2) \bigcap A\colon s \in S\}$ — счетная база в A и $|\gamma| \leqslant \aleph_0$. Заметим, что $\{s^{-1}(-1/2, 1/2)\colon s \in S\}$ — семейство функционально открытых подмножеств в X. Отсюда следует, что A — метризуемое компактное подмножество в X. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *Пространство $C_\lambda(X)$ топологически изоморфно подгруппе топологической группы со счетным числом Суслина тогда и только тогда, когда λ — семейство метризуемых компактных подмножеств в X.*

Следствие 6.2. *Если $C_\lambda(X)$ линделёфово, то λ — семейство метризуемых компактных подмножеств в X.*

Интересен следующий результат о сепарабельности пространства $C_\lambda(X)$.

Теорема 6.5. *Пусть λ — сеть пространства X. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. $C_\lambda(X)$ *сепарабельно.*
2. $C_{rc}(X)$ *сепарабельно.*
3. $C_c(X)$ *сепарабельно.*
4. $C_p(X)$ *сепарабельно.*
5. X *уплотняется на сепарабельное метризуемое пространство.*
6. X *субметризуемо и плотность* $d(X)$ *не превосходит* 2^{ω_0}.

Доказательство. Равносильности (3) $\iff$ (4) $\iff$ (5) $\iff$ (6) следуют из [22, теорема 2.1].

(2) $\Rightarrow$ (3). Так как любое компактное подмножество является C-компактным, то $C_c(X) \leq C_{rc}(X)$, а значит, $C_c(X)$ сепарабельно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $C_c(X)$ — сепарабельное пространство. Тогда X субметризуемо. Субметризуемые пространства являются полными по Дьедонне и, значит, замыкание любого C-компактного подмножества будет компактным. Значит, $C_\lambda(X) \leq C_c(X)$ и, следовательно, $C_\lambda(X)$ сепарабельно.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $C_\lambda(X)$ сепарабельно. Тогда в силу того, что λ — сеть, все конечные подмножества принадлежат λ, и $C_p(X)$ сепарабельно. Следовательно, X — субметризуемое пространство и $C_{rc}(X) = C_c(X)$. Таким образом, $C_{rc}(X)$ сепарабельно. Теорема доказана.

Следствие 6.3. *Если X — псевдокомпактное пространство, то следующие утверждения эквивалентны.*

1. $C_{rc}(X)$ *сепарабельно.*
2. $C_{rc}(X)$ *имеет счетное число Суслина.*
3. X *метризуемо.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(2) $\Rightarrow$ (3). Если $C_{rc}(X)$ имеет счетное число Суслина, то $C_{rc}(X)$ вполне $\aleph_0$-ограничено, а значит, по теореме 6.2 пространство X — метризуемый компакт.

(3) $\Rightarrow$ (1). Если X — метризуемое и псевдокомпактное пространство, то X — сепарабельное компактное пространство. Тогда по теореме 6.5 пространство $C_{rc}(X)$ сепарабельно.

Заметим, что если $C_{rc}(X)$ обладает счетным числом Суслина, то и $C_c(X)$ обладает счетным числом Суслина. Возникает вопрос о существовании пространства, у которого пространство $C_c(X)$ обладает счетным числом Суслина, а $C_{rc}(X)$ не обладает этим свойством. Далее будет приведен пример 8.3, который положительно отвечает на вопрос о существовании такого пространства.

7. Вторая аксиома счетности

Исследования условий, при которых $C_p(X)$ и $C_c(X)$ обладают второй аксиомой счетности, можно найти в работах [24; 25], а $C_{ps}(X)$ — в [22]. Приведем основные теоремы С. Кунду и П. Гарга [22, теоремы 4.2 и 4.6], характеризующие свойство существования счетной базы у пространств $C_p(X)$, $C_c(X)$ и $C_{ps}(X)$.

Теорема 7.1 [22]. *Для произвольного пространства X следующие условия эквивалентны.*

1. $C_p(X)$ — *второй счетности.*
2. $C_p(X)$ *метризуемо.*
3. $C_p(X)$ — *первой счетности.*
4. $C_p(X)$ — *q-пространство.*
5. X *счетно.*

Напомним, что π-база пространства X — это семейство непустых открытых подмножеств в X таких, что каждое непустое открытое подмножество пространства X содержит некоторый элемент этого семейства. Пространство X называют σ-пространством, если X имеет σ-дискретную сеть, и называют $\aleph_0$-пространством, если оно обладает счетной k-сетью.

Теорема 7.2 [22]. *Для произвольного пространства X следующие утверждения эквивалентны.*

1. $C_{ps}(X)$ *содержит плотное подпространство, которое имеет счетную π-базу.*
2. $C_{ps}(X)$ *имеет счетную π-базу.*
3. $C_{ps}(X)$ *— второй счетности.*
4. $C_c(X)$ *— второй счетности.*
5. X *— хемикомпакт и X субметризуемо.*
6. X *— хемикомпакт и $\aleph_0$-пространство.*
7. X *имеет счетную сеть и хемикомпакт.*
8. X *— хемикомпакт и σ-пространство.*

Пусть λ — сеть пространства X. Отметим, что если $C_\lambda(X)$ и $C_c(X)$ обладают второй аксиомой счетности, то они сепарабельны и, значит, пространство X субметризуемо. Отсюда следует, что $C_\lambda(X) \leq C_c(X)$. Таким образом, $C_{rc}(X)$ второй счетности тогда и только тогда, когда $C_c(X)$ второй счетности.

Теорема 7.3. *Для произвольного пространства X следующие утверждения эквивалентны.*

1. $C_{rc}(X)$ *содержит плотное подпространство которое имеет счетную π-базу.*
2. $C_{rc}(X)$ *имеет счетную π-базу.*
3. $C_{rc}(X)$ *— второй счетности.*
4. $C_c(X)$ *— второй счетности.*
5. X *— хемикомпакт и X субметризуемо.*
6. X *— хемикомпакт и $\aleph_0$-пространство.*
7. X *имеет счетную сеть и хемикомпакт.*
8. X *— хемикомпакт и σ-пространство.*

8. Примеры

В заключение приведем несколько примеров, показывающих уникальность некоторых свойств C-компактно-открытой топологии.

Пример 8.1. Предположим, что X — произвольное псевдокомпактное пространство, которое не является метризуемым. Так как произвольное субметризуемое псевдокомпактное пространство метризуемо, пространство X не субметризуемо. Таким образом, по теореме 6.5 пространство $C_{rc}(X)$ не сепарабельно. В частности, если $X = [0, \omega_1)$ и $Y = [0, \omega_1]$, то $C_{rc}(X)$ и $C_{rc}(Y)$ не являются сепарабельными, а значит, $C_c(X)$ и $C_c(Y)$ — не сепарабельные пространства. Заметим, что $C_p(X) < C_c(X) < C_{rc}(X)$ и $C_p(Y) < C_c(Y) = C_{rc}(Y)$.

Пример 8.2. Так как $\mathbb{R}$ — сепарабельное метрическое пространство, $C_{rc}(X)$ — сепарабельное пространство. Для этого пространства мы получаем, что $C_p(\mathbb{R}) < C_c(\mathbb{R}) = C_{rc}(\mathbb{R})$.

Пример 8.3. Для каждого бесконечного подмножества $Z \subseteq \mathbb{N}$ пусть x_Z — точка из пространства $cl_{\beta X}(Z) \setminus \mathbb{N}$. Рассмотрим пространство $X = \mathbb{N} \cup \{x_Z \colon\ Z$ — бесконечное подмножество в $\mathbb{N}\}$ с топологией, индуцированной из $\beta\mathbb{N}$. Отметим, что пространство X является тихоновским и псевдокомпактным. Каждое компактное подмножество в этом пространстве конечно. Так как X псевдокомпактно, но не компактно, X — не субметризуемое пространство. Следовательно, $C_{rc}(X)$ не является сепарабельным. Для этого пространства мы получаем, что $C_p(X) = C_c(X) < C_{rc}(X)$.

Пример 8.4. Рассмотрим так называемое “Фортиссимо пространство” F (см. [30, пример 25, с. 53]). Пространство F имеет несчетную мощность. Это пространство линделёфово, и каждое компактное подмножество в F конечно. Следовательно, в силу нормальности пространства каждое замкнутое C-компактное подмножество является псевдокомпактным и, значит, конечным. Но пространство F не субметризуемо, так как в нем существует точка, не являющаяся G_δ-множеством. Таким образом, $C_p(X)$ не сепарабельно. Для пространства F мы получаем, что

$$C_p(F) = C_c(F) = C_{rc}(F).$$

Пример 8.5. Предположим, что X — счетное дискретное пространство. Тогда $C_{rc}(X)$ сепарабельно. Для пространства X мы получаем, что

$$C_p(X) = C_c(X) = C_{rc}(X).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нохрин С.Э., Осипов А.В.** К вопросу о совпадении множественно-открытой и равномерной топологий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 177–184.
2. **Осипов А.В.** Слабо множественно-открытая топология // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 167–176.
3. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
4. **Arens R., Dugundji J.** Topologies for function spaces // Pacific J. Math. 1951. Vol. 1, no. 1. P. 5–31.
5. **Arhangel'skii A.V.** On a class of spaces containing all metric and all locally bicompact spaces // Soviet Math. Dokl. 1963. Vol. 4. 1963. P. 1051–1055.
6. **Arhangel'skii A.V., Tkachenko M.** Topological group and related structures. Ser.: Atlantis Stud. Math. Vol. 1. Paris: Atlantis Press, 2008. 800 p.
7. **Aull C.E.** Sequences in topological spaces // Prace Mat. 1968. Vol. 11. 329–336.
8. **Aull C.E.** Notes on separation by continuous functions // Indag. Math. 1969. Vol. 31. P. 458–461.
9. **Aull C.E.** Some base axioms for topology involving enumerability // General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, III: Proc. Conf. (Kanpur,1968.) Prague: Academia, 1971. P. 55–61.
10. **Aull C.E.** On C- and C^*-embeddings // Indag. Math. 1975. Vol. 37. P. 26–33.
11. **Aull C.E.** Absolute C-embedding in functionally normal spaces and related spaces // Topology. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. Vol. 23. Amsterdam; New York: North-Holland, 1980. P. 129–136.
12. **Blai R.L, Douwen E.K. van** Nearly realcompact spaces // Topology Appl. 1992. Vol. 47, no. 3. P. 209–221.
13. **Blair R.L., Swardson M.A.** Spaces with an Oz Stone-Čech compactification // Topology Appl. 1990. Vol. 36, no. 1. P.73–92.
14. **Buchwalter H.** Parties barnées d'un espace topologique complétment régulier // Sem. Choquet: 1969/70. Initiation á l' Analyse Fasc. 2, Exp. 14. Paris: Secrétariat mathématique, 1970. 15 p.
15. **Davis S.W.** A cushioning-type weak covering property // Pacific J. Math. 1979. Vol. 80, no. 2. P. 359–370.
16. **Est W.T. van, Freudenthal H.** Trennung durch stetige funktionen in topologischen rdaumen // Indag. Math. 1951. Vol. 13. P. 359–368.
17. **Frolík Z.** Generalizations of compact and Lindelöf spaces // Czech. Math. J. 1959. Vol. 9, no. 2. P. 172–217.
18. **Fox R.H.** On topologies for function spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 51. P. 429–432.
19. **Gillman L., Jerison M.** Rings of continuous functions. The University Series in Higher Mathematics. Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Co., Inc., 1960. 300 p.
20. **Gruenhage G.** Generalized metric spaces // Handbook of set-theoretic topology / Eds. K. Kunen, J.E. Vaughan. North-Holland, 1984. P. 423–501.
21. **Ismail M., Nyikos P.** On spaces in which countably compact sets are closed, and hereditary properties // Topology Appl. 1980. Vol. 11, no. 3. P. 281–292.
22. **Kundu S., Garg P.** Countability properties of the pseudocompact-open topology on $C(X)$: A comparative study // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. Vol. 39. 2007. P. 421–444.

23. **Kundu S., Raha A.B.** The bounded-open topology and its relatives // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 1995. Vol. 27. P. 61–77.
24. **McCoy R.A.** Countability properties of function spaces // Rocky Mountain J. Math. 1980. Vol. 10, no. 4. P. 717–730.
25. **McCoy R.A.** Necessary conditions for function spaces to be Lindelöf // Glasnik Matematicki. 1980. Vol. 15, no. 35. P. 163–168.
26. **McCoy R.A., Ntantu I.** Topological properties of spaces of continuous functions. Lecture Notes in Mathematics, 1315. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 124 p.
27. **Michael E.** $\aleph_0$-spaces // J. Math. Mech. 1966. Vol. 15. P. 983–1002.
28. **Morita K.** Products of normal spaces with metric spaces // Math. Ann. 1964. Vol. 154. P. 365–382.
29. **Siwiec F.** Generalizations of the first axiom of countability // Rocky Mountain J. Math. 1975. Vol. 5. P. 1–60.
30. **Steen L.A., Seebach J.A., Jr.** Counterexamples in topology. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1978. 244 p.
31. **Swardson M.A., Szeptycki P.J.** When X^* is a $P^{'}$-space? // Canad. Math. Bull. 1996. Vol. 39. P. 476–485.
32. **Taylor A.E., Lay D.C.** Introduction to functional analysis. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1980. 244 p.
33. **Todd A.R.** Pseudocompact sets, absolutely Warner bounded sets and continuous function spaces // Arch. Math. (Basel). 1991. Vol. 56, no. 5. P. 474–481.
34. **Vaughan J.E.** Countably compact and sequentially compact spaces // Handbook of set-theoretic topology / Eds. K. Kunen, J. Vaughan. Amsterdam, 1984. P. 569–602.

Осипов Александр Владимирович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: OAB@list.ru

Поступила 12.05.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.562

О КОНЕЧНЫХ КРИТИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ. II

О. Е. Перминова

Рассматриваются критические решетки, т. е. решетки без нетривиальных эндоморфизмов, не имеющие нетривиальных собственных подрешеток без нетривиальных эндоморфизмов. Доказано, что для $n = 7$ и $n \geq 9$ существуют n-элементные критические решетки.

Ключевые слова: решетка, подрешетка, эндоморфизм, критическая решетка.

O. E. Perminova. On finite critical lattices. II.

Critical lattices are considered, i.e., lattices without nontrivial endomorphisms and not containing nontrivial proper sublattices without nontrivial endomorphisms. It is proved that there exist n-element critical lattices for $n = 7$ and $n \geq 9$.

Keywords: lattice, sublattice, endomorphism, critical lattice.

Введение

Решетка называется *жесткой*, если любой ее эндоморфизм является постоянным эндоморфизмом (т. е. преобразует все элементы в какой-либо один элемент) или тождественным эндоморфизмом. *Критической* назовем жесткую решетку, у которой нет собственных жестких подрешеток, исключая *тривиальные*, т. е. одноэлементные и двухэлементные, подрешетки.

В работе [1] доказано, что для натурального числа n тогда и только тогда существует n-элементная жесткая решетка, когда $n \leq 2$ либо $n \geq 7$. Отсюда следует, что для других натуральных n $(3 \leq n \leq 6)$ не существует жестких и, следовательно, критических решеток. Легко понять, что жесткая семиэлементная решетка из работы [1] является нетривиальной критической решеткой с наименьшим возможным числом элементов. В работе [2] доказано, что для натуральных чисел $n \in \{7, 15, 18, 19\}$ и $n \geq 21$ существуют n-элементные критические решетки.

В данной работе завершено описание всех натуральных чисел n, для которых существуют n-элементные критические решетки. А именно доказана

Теорема. *Пусть n — натуральное число, $n \geq 3$. Тогда n-элементная критическая решетка существует в том и только в том случае, когда $n = 7$ или $n \geq 9$.*

Так же, как и в работе [2], в доказательстве теоремы определяющую роль играют свойства проективных интервалов, автоморфизмов и эндоморфизмов решеток. Наряду с этим используются свойство слабой проективности [3] и новые вспомогательные решеточные конструкции.

Критические решетки, построенные нами для доказательства теоремы, обладают важным свойством разборности. Конечная решетка L порядка n называется *разборной* [4], если она содержит цепь $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n = L$ подрешеток решетки L таких, что $|L_i| = i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Указанное определение эквивалентно следующему. Разборной является решетка, полученная из одноэлементной решетки с помощью конечного числа процедур одноэлементного расширения решетки и присоединения к решетке внешнего нуля 0 или внешней единицы 1, описанных в работе [2]. Таким образом, понятие разборности имеет алгоритмическую природу, что облегчает описание конечных разборных решеток. С использованием свойства разборности написана программа на языке *Delphi* для порождения из множества всех $(n-1)$-элементных разборных решеток всех неизоморфных n-элементных разборных решеток. Критические решетки порядков $n = 9, 10, 11, 12$ найдены с помощью этой программы. Отметим, что программой построены 53 семиэлементные решетки, что совпадает с числом семиэлементных решеток, указанным в работе [5].

С помощью этой программы построены также с точностью до двойственности диаграммы всех восьмиэлементных решеток (см. [6]). Несложный анализ диаграмм позволяет установить, что не существует критических восьмиэлементных решеток.

В разд. 1 работы приводятся диаграммы необходимых для доказательства теоремы решеток. В разд. 2 приводится доказательство жесткости, а в разд. 3 — критичности этих решеток.

1. Диаграммы критических решеток

Для доказательства теоремы нам потребуются решетки порядков $n = 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 20$, диаграммы и обозначения которых представлены на рис. 1. Обозначим множество (далее, класс) указанных решеток через Cr. Тот факт, что приведенные диаграммы задают разборные решетки, проверяется тривиальным образом.

2. Доказательство жесткости решеток из класса Cr

Для решеток будем придерживаться системы понятий и обозначений, принятых в книге [3]. В частности, нам потребуются отношение $\sim$, транзитивное замыкание $\approx$ отношения $\sim$, отношение $\rightarrow$ между интервалами (иначе, факторами) решетки. Будем говорить, что интервал $[b, a]$ *проективен* интервалу $[d, c]$, если $[b, a] \approx [d, c]$; интервал $[d, c]$ *слабо проективен* интервалу $[b, a]$, если $[b, a] \rightarrow [d, c]$. Кроме того, будем использовать определения простой решетки и склеивающего эндоморфизма из [2].

Лемма 1. *Решетки из класса Cr не имеют склеивающих эндоморфизмов, отличных от постоянных.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что если все простые интервалы конечной решетки проективны, то отсюда на основании леммы 1 работы [2] следует, что решетка является простой и поэтому любой ее склеивающий эндоморфизм является постоянным.

Наиболее сложно показывается проективность простых интервалов решетки R_{17}.

Все простые интервалы решетки R_{17} следующим образом связаны отношением $\approx$:

$$[b_1,\, c_3] \sim [c_2,\, d_2] \sim [b_1,\, c_1] \sim [d_3,\, 1] \sim [c_3,\, d_2] \sim [b_1,\, c_2] \sim [c_1,\, d_2] \sim [d_1,\, 1] \sim [0,\, a_3] \sim [a_2,\, b_5]$$

$$\sim [b_4,\, c_4] \sim [a_2,\, b_3] \sim [0,\, a_1] \sim [b_5,\, c_4] \sim [a_2,\, b_4] \sim [b_3,\, c_4], \qquad [0,\, a_3] \sim [b_2,\, d_3],$$

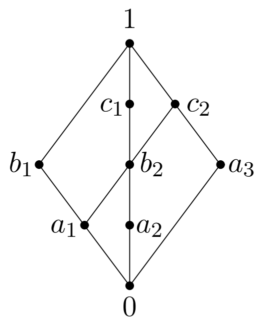
$$[a_3,\, b_5] \sim [0,\, a_2] \sim [a_1,\, b_3] \sim [b_2,\, d_3] \sim [a_1,\, b_1] \sim [c_4,\, d_3] \sim [a_1,\, b_2] \sim [c_3,\, d_3] \sim [d_2,\, 1] \sim [c_1,\, d_1].$$

Для всех решеток из класса Cr, за исключением решеток R_{12} и R_{14}, аналогично доказывается их простота.

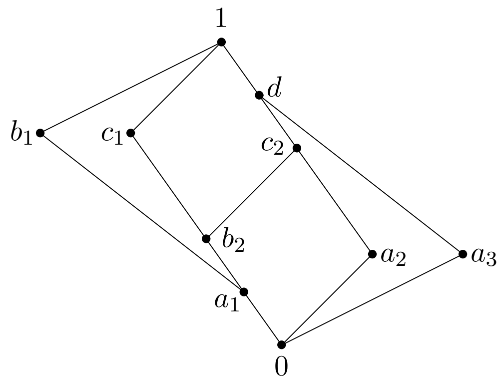
Для простых интервалов решетки R_{12} справедливо

$$[a_1, b_2] \sim [b_3, c_3] \sim [a_3, b_4] \sim [c_1, 1] \sim [b_3, c_2] \sim [c_3, 1] \sim [a_1, b_1] \sim [b_3, c_1] \sim [c_2, 1],$$

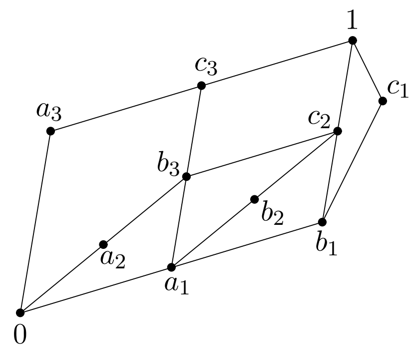
$$[b_2, c_3] \sim [a_1, b_3] \sim [0, a_2] \sim [a_3, b_3] \sim [b_4, c_3] \sim [0, a_1] \sim [a_2, b_3] \sim [0, a_3] \sim [b_1, c_1].$$



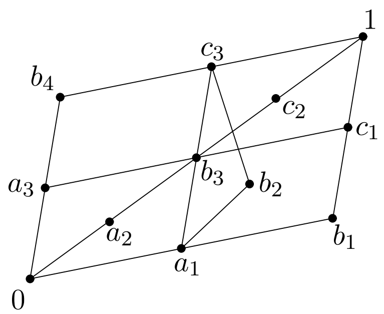
Решетка R_9.



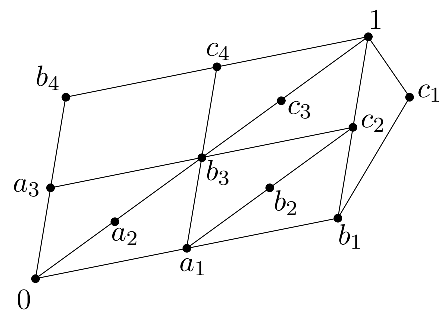
Решетка R_{10}.



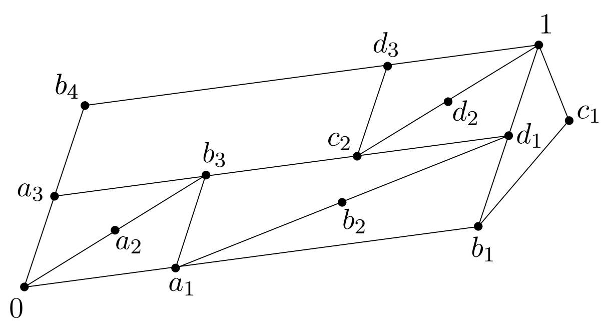
Решетка R_{11}.



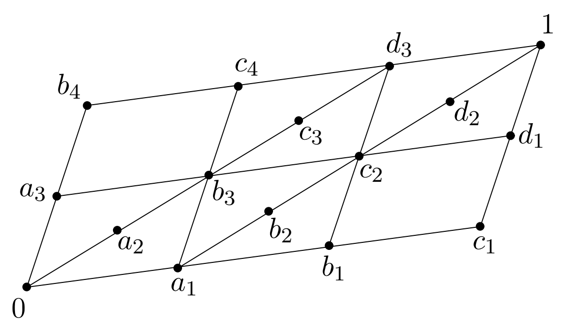
Решетка R_{12}.



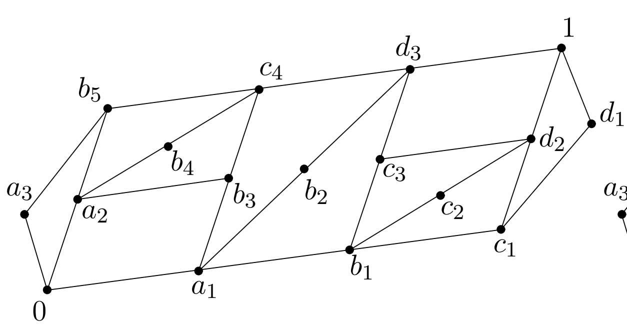
Решетка R_{13}.



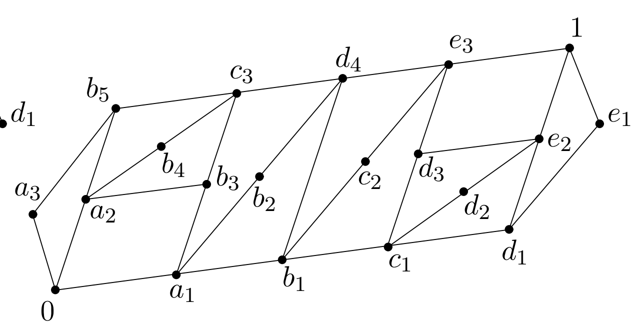
Решетка R_{14}.



Решетка R_{16}.



Решетка R_{17}.



Решетка R_{20}.

Рис. 1. Критические решетки класса Cr.

Тогда из

$$[a_1, b_2] \to [b_1, c_1], \qquad [b_2, c_3] \to [a_3, b_4]$$

следует, что любой гомоморфизм является тривиальным, т. е. гомоморфизмом, отображающим решетку в изоморфную ей или одноэлементную решетку. Поэтому, очевидно, решетка R_{12} является простой.

Докажем теперь, что любой склеивающий эндоморфизм решетки R_{14} является постоянным. Все простые интервалы решетки R_{14}, за исключением $[b_3, c_2]$, следующим образом связаны отношением $\approx$:

$$[0, a_2] \sim [b_4, d_3] \sim [a_3, b_3] \sim [0, a_1] \sim [a_2, b_3] \sim [0, a_3] \sim [a_1, b_3] \sim [b_2, d_1] \sim [a_1, b_1] \sim [c_2, d_1] \sim [d_2, 1]$$
$$\sim [c_2, d_3] \sim [a_3, b_4] \sim [d_1, 1] \sim [c_2, d_2] \sim [d_3, 1],$$
$$[c_2, d_1] \sim [a_1, b_2] \sim [b_1, d_1] \sim [c_1, 1], \qquad [d_1, 1] \sim [b_1, c_1].$$

Тогда из $[b_4, d_3] \to [b_3, c_2]$ следует, что непостоянными склеивающими эндоморфизмами решетки R_{14} могут быть только отображения

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} b_3, & x = c_2, \\ x, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

или

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} c_2, & x = b_3, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но оба эти отображения — гомоморфизмы, но не эндоморфизмы решетки R_{14}, так как $\varphi_i R_{14}$ $(i = 1, 2)$ есть решетка, не являющаяся подрешеткой решетки R_{14}. Лемма доказана.

Лемма 2. *Решетки из класса Cr не имеют автоморфизмов, отличных от тождественного.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее будем использовать следующие свойства, которые выполняются для произвольного автоморфизма φ решетки.

1. $x \prec y$ тогда и только тогда, когда $\varphi x \prec \varphi y$, где $\prec$ — отношение покрываемости [3].

2. Элемент, покрывающий t попарно несравнимых элементов (покрываемый t попарно несравнимыми элементами), отображается в элемент с таким же свойством.

3. Сохраняется длина наибольшей по числу элементов цепи между сравнимыми элементами.

Отметим, что все решетки из класса Cr являются конечными. Следовательно, произвольный автоморфизм решетки, принадлежащей классу Cr, действует тождественно на ее наименьшем и наибольшем элементах 0 и 1.

Пусть v — произвольный элемент решетки из класса Cr, отличный от 0 и 1. Через $l(0, v)$ обозначим длину наибольшей по числу элементов цепи между элементами 0 и v, через $l(v, 1)$ — длину наибольшей по числу элементов цепи между элементами v и 1, через $q(\prec v)$ — число попарно несравнимых элементов, покрываемых элементом v, через $q(v \prec)$ — число попарно несравнимых элементов, покрывающих элемент v. Четверку чисел $(l(0, v), l(v, 1), q(\prec v), q(v \prec))$ назовем *типом* элемента v. Отметим, что в силу свойств 2 и 3 тип элемента и тип образа этого элемента при произвольном автоморфизме φ решетки совпадают.

Типы отличных от 0 и 1 элементов решеток из класса Cr приведены ниже в таблице.

Типы элементов решеток класса Cr

Решетка R_9	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	c_1	c_2
$l(0, v)$	1	1	1	2	2	3	3
$l(v, 1)$	3	3	2	1	2	1	1
$q(\prec v)$	1	1	1	1	2	1	2
$q(v \prec)$	2	1	1	1	2	1	1

Продолжение таблицы

Решетка R_{10}	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	c_1	c_2	d
$l(0,v)$	1	1	1	2	2	3	3	4
$l(v,1)$	4	3	2	1	3	1	2	1
$q(\prec v)$	1	1	1	1	1	1	2	2
$q(v \prec)$	2	1	1	1	2	1	1	1

Решетка R_{11}	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3
$l(0,v)$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$l(v,1)$	3	3	2	2	2	2	1	1	1
$q(\prec v)$	1	1	1	1	1	2	1	3	2
$q(v \prec)$	3	1	1	2	1	2	1	1	1

Решетка R_{12}	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3
$l(0,v)$	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
$l(v,1)$	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1
$q(\prec v)$	1	1	1	1	1	3	1	2	1	3
$q(v \prec)$	3	1	2	1	1	3	1	1	1	1

Решетка R_{13}	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4
$l(0,v)$	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
$l(v,1)$	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1
$q(\prec v)$	1	1	1	1	1	3	1	1	3	1	2
$q(v \prec)$	3	1	2	2	1	3	1	1	1	1	1

Решетка R_{14}	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	d_1	d_2	d_3
$l(0,v)$	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4
$l(v,1)$	4	4	4	2	2	3	2	1	2	1	1	1
$q(\prec v)$	1	1	1	1	1	3	1	1	1	3	1	2
$q(v \prec)$	3	1	2	2	1	1	1	1	3	1	1	1

Решетка R_{16}	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4	d_1	d_2	d_3
$l(0,v)$	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
$l(v,1)$	4	4	4	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1
$q(\prec v)$	1	1	1	1	1	3	1	1	3	1	2	2	1	3
$q(v \prec)$	3	1	2	2	1	3	1	1	3	1	1	1	1	1

Решетка R_{17}	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	d_1	d_2	d_3
$l(0,v)$	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
$l(v,1)$	4	4	4	3	2	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1
$q(\prec v)$	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	3	1	3	3
$q(v \prec)$	3	3	1	3	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	1

Решетка R_{20}	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	d_1	d_2	d_3	d_4	e_1	e_2	e_3
$l(0,v)$	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
$l(v,1)$	5	5	5	4	3	4	4	4	3	2	3	2	2	2	2	1	1	1
$q(\prec v)$	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	3	1	1	1	3	1	3	3
$q(v \prec)$	3	3	1	3	1	1	1	1	3	1	1	2	1	2	1	1	1	1

Поскольку типы элементов в каждой решетке R_9, R_{10} и R_{11} попарно различны, указанные решетки обладают только тождественным автоморфизмом.

Рассмотрим произвольный автоморфизм φ решетки R_{12}. Сравнение типов элементов, приведенных в таблице для R_{12}, показывает, что φ действует тождественно на элементах a_1, a_2, a_3, b_3, c_1, c_2 и c_3. В силу свойства 1 из $b_1 \prec c_1$, $b_3 \prec c_1$, $\varphi c_1 = c_1$ и $\varphi b_3 = b_3$ следует $\varphi b_1 = b_1$. Поскольку решетка R_{12} является самодвойственной, из $\varphi b_1 = b_1$ вытекает $\varphi b_4 = b_4$. Тогда $\varphi b_2 = b_2$ и φ — тождественный автоморфизм на R_{12}.

Рассмотрим произвольный автоморфизм φ решетки R_{13}. Сравнение типов элементов для R_{13} (см. таблицу) показывает, что φ действует тождественно на элементах a_1, a_2, a_3, b_1, b_3, c_2 и c_4. Поскольку элементы b_2, b_4, c_1 и c_3 покрывают различные элементы a_1, a_3, b_1 и b_3 соответственно, в силу свойства 1 автоморфизм φ действует тождественно на указанных элементах. Следовательно, φ — тождественный автоморфизм на R_{13}.

Рассмотрим произвольный автоморфизм φ решетки R_{14}. Сравнение типов элементов, приведенных в таблице для R_{14}, показывает, что φ действует тождественно на элементах a_1, a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2, d_1, d_2 и d_3. Поскольку элементы b_2, b_4 покрывают различные элементы a_1, a_3 соответственно, в силу свойства 1 автоморфизм φ действует тождественно на указанных элементах. Следовательно, φ — тождественный автоморфизм на R_{14}.

Рассмотрим произвольный автоморфизм φ решетки R_{16}. Сравнение типов элементов для R_{16} (см. таблицу) показывает, что φ действует тождественно на элементах a_1, a_2, a_3, b_1, b_3, c_2, c_4, d_1, d_2 и d_3. Поскольку элементы b_2, b_4, c_1 и c_3 покрывают различные элементы a_1, a_3, b_1 и b_3 соответственно, в силу свойства 1 автоморфизм φ действует тождественно на указанных элементах. Следовательно, φ — тождественный автоморфизм на R_{16}.

Рассмотрим произвольный автоморфизм φ решетки R_{17}. Сравнение типов элементов, приведенных в таблице для R_{17}, показывает, что φ действует тождественно на элементах a_3, b_1, b_2, b_4, c_2, c_4 и d_1. В силу свойства 1 из $a_1 \prec b_2$ и $\varphi b_2 = b_2$ следует $\varphi a_1 = a_1$, из $a_2 \prec b_4$ и $\varphi b_4 = b_4$ следует $\varphi a_2 = a_2$, из $a_3 \prec b_5$ и $\varphi a_3 = a_3$ следует $\varphi b_5 = b_5$. Тогда $\varphi b_3 = b_3$. Поскольку решетка R_{17} является самодвойственной, φ действует тождественно также на элементах c_1, c_3, d_2 и d_3. Следовательно, φ — тождественный автоморфизм на R_{17}.

Рассмотрим произвольный автоморфизм φ решетки R_{20}. Сравнение типов элементов, приведенных в таблице для R_{20}, показывает, что φ действует тождественно на элементах a_3, b_1, b_2, b_4, c_1, c_2, c_3, d_2, d_4 и e_1. В силу свойства 1 из $a_1 \prec b_1$ и $\varphi b_1 = b_1$ следует $\varphi a_1 = a_1$, из $a_2 \prec b_4$ и $\varphi b_4 = b_4$ следует $\varphi a_2 = a_2$, из $a_3 \prec b_5$ и $\varphi a_3 = a_3$ следует $\varphi b_5 = b_5$. Тогда $\varphi b_3 = b_3$. Поскольку решетка R_{20} является самодвойственной, φ действует тождественно также на элементах d_1, d_3, e_2 и e_3. Следовательно, φ — тождественный автоморфизм на R_{20}. Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 вытекает

Лемма 3. *Решетки из класса Cr являются жесткими.*

3. Доказательство критичности решеток из класса Cr

Рассмотрим сначала жесткие семиэлементную и восьмиэлементую решетки (см. рис. 2, 3) из работы [1], необходимые для доказательства критичности решеток из класса Cr. Обозначим их через R_7 и R_8 соответственно. Отметим, что анализ диаграмм всех семиэлементных и восьмиэлементных решеток (см. [6]), построенных с помощью компьютера, позволяет установить, что решетка R_7 является единственной жесткой (критической) семиэлементной решеткой, решетка R_8 — единственной жесткой восьмиэлементной решеткой. Решетка R_8 не является критической, так как содержит в качестве собственной подрешетки решетку R_7.

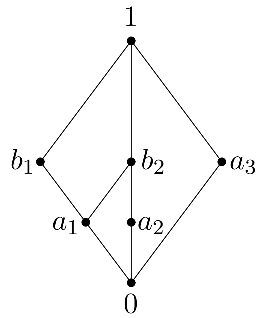


Рис. 2. Решетка R_7.

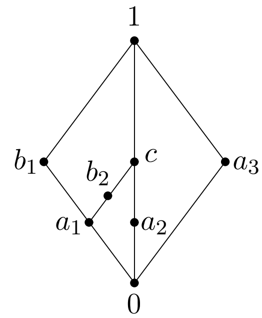


Рис. 3. Решетка R_8.

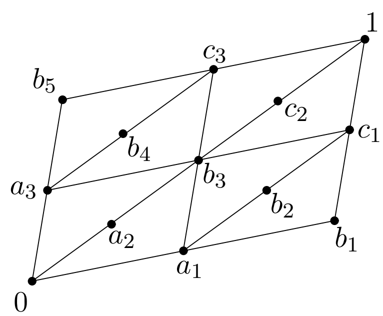


Рис. 4. Решетка B_4.

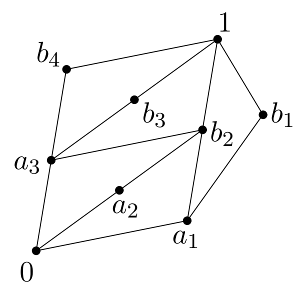


Рис. 5. Решетка B_2.

Для доказательства критичности решеток из класса Cr нам понадобятся следующие леммы 4–7.

Лемма 4 [1, лемма 2]. *Если решетку L можно разбить в объединение двух подрешеток L_1 и L_2 так, что хотя бы одна из них неодноэлементна и для любых $x \in L_1$, $y \in L_2$ либо x меньше y, либо x и y несравнимы, то L обладает нетривиальным эндоморфизмом, т. е. не является жесткой.*

Обозначим через B_4 и B_2 решетки, изображенные соответственно на рис. 4 и 5.

Напомним, что тривиальными мы называем одно- и двухэлементные решетки.

При доказательстве лемм 5–7 через S будем обозначать произвольную нетривиальную подрешетку рассматриваемой решетки. Поскольку подрешетка S является нежесткой в случае, когда $3 \leq |S| \leq 6$, достаточно рассматривать подрешетки S такие, что $|S| \geq 7$.

Лемма 5. *Решетка B_4 и все ее нетривиальные подрешетки являются нежесткими.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решетка B_4 имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} b_1, & x = b_2, \\ b_2, & x = b_1, \\ x, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

поэтому является нежесткой.

Теперь докажем утверждение леммы для любой нетривиальной подрешетки S решетки B_4. Рассмотрим 4 случая.

1. Пусть $b_1, b_2 \in S$ или $b_4, b_5 \in S$. Если $b_1, b_2 \in S$, то S имеет автоморфизм φ указанного выше типа. Если $b_4, b_5 \in S$, то S имеет автоморфизм φ, отображающий элементы b_4 и b_5 друг в друга и действующий тождественно на других элементах.

2. Пусть теперь $|\{b_1, b_2\} \cap S| = 1$ и $|\{b_4, b_5\} \cap S| = 1$. Можно считать, что $b_1, b_5 \in S$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Ясно, что $0, 1 \in S$. Пусть $a_2 \notin S$ или $c_2 \notin S$. Если $a_2 \notin S$, то S имеет две подрешетки — $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq b_1\}$ и $S_2 \subset \{y \mid y \geq a_3\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. В силу самодвойственности решетки B_4 случай $c_2 \notin S$ рассматривается аналогично случаю $a_2 \notin S$. Пусть теперь $a_2, c_2 \in S$. Ясно, что $a_1, a_3, b_3, c_1, c_3 \in S$. Тогда S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_3 & b_5 & c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & b_5 & b_3 & b_1 & c_3 & c_2 & c_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть $|\{b_1, b_2, b_4, b_5\} \cap S| = 1$. Предположим, что $b_1 \in S$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Если $a_2, a_3 \in S$ (или $c_2, c_3 \in S$), то S имеет автоморфизм φ, отображающий элементы a_2 и a_3 (или c_2 и c_3) друг в друга и действующий тождественно на других элементах. Пусть теперь $|\{a_2, a_3\} \cap S| \leq 1$ и $|\{c_2, c_3\} \cap S| \leq 1$. Тогда $|S| \leq 8$. Поскольку в этом случае подрешетка S имеет не более двух атомов и двух коатомов, S не изоморфна ни решетке R_7, ни решетке R_8 и, следовательно, не является жесткой.

4. Пусть $\{b_1, b_2, b_4, b_5\} \cap S = \varnothing$. Если $|S| \geq 3$, то подрешетка S имеет нетождественный автоморфизм либо является цепью. Лемма доказана.

Лемма 6. *Решетка B_2 и все ее нетривиальные подрешетки являются нежесткими.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решетка B_2 имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} b_3, & x = b_4, \\ b_4, & x = b_3, \\ x, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

поэтому является нежесткой.

Теперь докажем утверждение леммы для любой нетривиальной подрешетки S решетки B_2.

Если $b_1 \notin S$, то подрешетка S является собственной подрешеткой решетки B_4 и, следовательно, для нее справедлива лемма 5.

Пусть теперь $b_1 \in S$. Если $|S| = 8$, то длина подрешетки S (см. длина ч. у. множества в [3]) равна 3. Следовательно, S не изоморфна жесткой решетке R_8 длины 4. Пусть теперь $|S| = 7$. Легко понять, что $0, a_1, a_3, b_2, 1 \in S$ и $|\{a_2, b_3, b_4\} \cap S| = 1$. Поскольку S не содержит элемента, покрывающего 0 и покрываемого 1, подрешетка S не изоморфна жесткой решетке R_7. Следовательно, S не является жесткой. В остальных случаях $|S| \leq 6$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Каждая решетка из класса Cr не содержит собственных нетривиальных жестких подрешеток.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем справедливость леммы для решетки R_9.

Если $|\{0, b_2, 1\} \cap S| \leq 2$, то легко понять, что $|S| \leq 6$. Пусть $0, b_2, 1 \in S$. Тогда $|S| \geq 3$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $a_2 \notin S$ или $c_1 \notin S$. В силу самодвойственности решетки R_9 достаточно рассмотреть только случай, когда $a_2 \notin S$. Тогда S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq a_3\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{0\}$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторого y.

2. Пусть $a_2, c_1 \in S$. Тогда подрешетка S имеет длину 4, так как содержит цепь $\{0, a_2, b_2, c_1, 1\}$. Если $|S| = 7$, то подрешетка S не изоморфна решетке R_7, имеющей длину 3. Если $|S| = 8$, то

легко понять, что $a_1, c_2 \in S$. В этом случае элемент b_2 подрешетки S имеет тип $(2,2,2,2)$. Поскольку решетка R_8 не содержит элементов указанного типа, подрешетка S не изоморфна R_8. Следовательно, S не является жесткой. В остальных случаях $|S| \le 6$ либо $S = R_9$.

Докажем справедливость леммы для решетки R_{10}. Рассмотрим три случая.

1. Предположим сначала, что $a_3 \notin S, b_1 \in S$. Если $0 \in S$ или $a_2 \in S$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \le a_2\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \ge a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Пусть $0, a_2 \notin S$. Ясно, что $|S| \le 7$. Если $|S| = 7$, то подрешетка S не изоморфна решетке R_7, так как содержит цепь $\{a_1, b_2, c_2, d, 1\}$ длины 4. Следовательно, S не является жесткой.

Поскольку решетка R_{10} является самодвойственной, рассуждениями, двойственными проведенным, нетрудно показать, что при $a_3 \in S, b_1 \notin S$ подрешетка S нежесткая.

2. Пусть $a_3, b_1 \notin S$ и $|S| \ge 3$. Если в подрешетке S содержатся элементы x такие, что $x \le c_1$, и элементы y такие, что $y \ge a_2$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \le c_1\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \ge a_2\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Пусть подрешетка S не содержит элементов x таких, что $x \le c_1$, либо не содержит элементов y таких, что $y \ge a_2$. Тогда S является цепью, следовательно, S — нежесткая подрешетка.

3. Предположим теперь, что $a_3, b_1 \in S$. Ясно, что $0, 1 \in S$. Пусть сначала $a_2 \notin S, c_1 \in S$. Тогда $a_1, d, b_2 \in S$. В этом случае S имеет две подрешетки $S_1 = \{0, a_3\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \ge a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{0\}$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторого y. Рассуждениями, двойственными проведенным, нетрудно показать, что при $a_2 \in S, c_1 \notin S$ подрешетка S нежесткая. Если $a_2, c_1 \notin S$, то в силу леммы 4 подрешетка S также нежесткая. Если $a_2, c_1 \in S$, то $a_1, b_2, c_2, d \in S$ и $S = R_{10}$.

Итак, утверждение леммы 7 справедливо для решетки R_{10}.

Докажем справедливость леммы для решетки R_{11}. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $a_2 \in S$, $a_3 \notin S$ и $|S| \ge 3$. Случай $a_3 \in S$, $a_2 \notin S$ и $|S| \ge 3$ рассматривается аналогично. Если $0 \in S$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{0, a_2\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \ge a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{0\}$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторого y. Если $0 \notin S$, то $a_1, b_1, b_2, c_1 \notin S$ и $|S| \le 5$.

2. Предположим, что $a_2, a_3 \notin S$ и $|S| \ge 3$. Если $0 \in S$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{0\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \ge a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{0\}$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторого y. Если $0 \notin S$, то S изоморфна некоторой собственной подрешетке решетки B_2, следовательно, на основании леммы 6 не является жесткой.

3. Пусть теперь $a_2, a_3 \in S$. Ясно, что $0, c_3 \in S$.

Пусть сначала $b_2 \notin S$. Если в подрешетке S содержатся элементы y такие, что $y \ge b_1$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \le c_3\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \ge b_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Если подрешетка S не содержит элементов y таких, что $y \ge b_1$, то $|S| \le 6$.

Пусть теперь $b_2 \in S$. Ясно, что $a_1, b_3, c_2, 1 \in S$. Если $c_1 \in S$, то $b_1 \in S$ и $S = R_{11}$. Пусть $c_1 \notin S$. Если $b_1 \in S$, то S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} b_1, & x = b_2, \\ b_2, & x = b_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $b_1 \notin S$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{x \mid x \le c_3\}$ и $S_2 = \{b_2, c_2, 1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y.

Итак, утверждение леммы 7 справедливо для решетки R_{11}.

Докажем справедливость леммы для решетки R_{12}.

Пусть $b_2 \notin S$. Ясно, что подрешетка S изоморфна некоторой собственной подрешетке решетки B_4, следовательно, на основании леммы 5 не является жесткой.

Пусть теперь $b_2 \in S$. Рассмотрим здесь три случая.

1. Пусть сначала $a_2 \notin S, c_2 \in S$ и $|S| \ge 3$. Если в подрешетке S содержатся элементы x такие, что $x \le b_4$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \le b_4\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \ge a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Если подрешетка S не содержит элементы x такие, что $x \le b_4$, то S изоморфна некоторой собственной подрешетке решетки, двойственной решетке B_2, поэтому не является жесткой.

Поскольку решетка R_{12} является самодвойственной, рассуждениями, двойственными проведенным, нетрудно показать, что при $a_2 \in S, c_2 \notin S$ и $|S| \ge 3$ подрешетка S нежесткая.

2. Если $a_2, c_2 \notin S$ и $|S| \ge 3$, то в силу леммы 4 подрешетка S также нежесткая.

3. Пусть теперь $a_2, c_2 \in S$. Ясно, что $0, c_3, b_3, a_1, 1 \in S$. Предположим, что $b_1 \notin S$. Если $c_1 \in S$, то S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_1, & x = c_2, \\ c_2, & x = c_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $c_1 \notin S$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \le c_3\}$ и $S_2 = \{c_2, 1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ для некоторого x и $\varphi S_2 = \{1\}$. Рассуждениями, двойственными проведенным при $b_1 \notin S$, нетрудно показать, что подрешетка S нежесткая также и в случае, когда $b_4 \notin S$. Если $b_1, b_4 \in S$, то $a_3, c_1 \in S$ и $S = R_{12}$.

Итак, утверждение леммы 7 справедливо для решетки R_{12}.

Докажем справедливость леммы для решетки R_{13}.

Предположим, что $c_1 \notin S$. Ясно, что подрешетка S изоморфна некоторой собственной подрешетке решетки B_4, следовательно, на основании леммы 5 не является жесткой.

Пусть $c_1 \in S$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть сначала $a_2 \notin S$ и $|S| \ge 3$. Если в подрешетке S содержатся элементы x такие, что $x \le b_4$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \le b_4\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \ge a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Если подрешетка S не содержит элементы x такие, что $x \le b_4$, то S изоморфна решетке B_2 либо некоторой собственной подрешетке решетки B_2, следовательно, на основании леммы 6 не является жесткой.

2. Пусть теперь $a_2 \in S$. Ясно, что $0, 1 \in S$.

Предположим, что $b_4 \notin S$. Если $a_3 \in S$, то S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_2, & x = a_3, \\ a_3, & x = a_2, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $a_3 \notin S$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{0, a_2\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \ge a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{0\}$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторого y.

Пусть $b_4 \in S$. Ясно, что $c_4, a_1, b_3, a_3 \in S$. Рассмотрим здесь два случая.

(2.1) Пусть $b_2 \in S$. Тогда $c_2, b_1 \in S$. Если $c_3 \in S$, то $S = R_{13}$. Если $c_3 \notin S$, то S имеет эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_3, & x = b_4, \\ b_3, & x = c_4, \\ c_2, & x = 1, \\ b_1, & x = c_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(2.2) Пусть $b_2 \notin S$.

Если $c_3 \notin S$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{x \mid x \leq c_4\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq b_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y.

Предположим, что $c_3 \in S$. Если $c_2 \in S$, то $b_1 \in S$. Тогда S имеет эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_3, & x = b_4, \\ b_3, & x = c_2, c_3, c_4, 1, \\ a_1, & x = b_1, c_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $c_2 \notin S$, то $b_1 \notin S$. Поэтому S имеет эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_3, & x = b_4, \\ b_3, & x = c_3, c_4, 1, \\ a_1, & x = c_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, утверждение леммы 7 справедливо для решетки R_{13}.

Докажем справедливость леммы для решетки R_{14}.

Предположим сначала, что $a_2 \notin S$ и $|S| \geq 3$. Рассмотрим здесь три случая.

1. Пусть в подрешетке S содержатся элементы x такие, что $x \leq b_4$, и элементы y такие, что $y \geq a_1$. Тогда S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq b_4\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y.

2. Пусть подрешетка S не содержит элементы y такие, что $y \geq a_1$. Тогда S является трехэлементной цепью.

3. Пусть подрешетка S не содержит элементы x такие, что $x \leq b_4$. Если $b_3 \notin S$, то подрешетка S изоморфна решетке B_2 либо собственной подрешетке решетки B_2, следовательно, на основании леммы 6 подрешетка S не является жесткой. Пусть теперь $b_3 \in S$. Если $c_2 \in S$, то S имеет эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} b_3, & x = c_2, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $c_2 \notin S$. Ясно, что $|\{d_1, d_2, d_3\} \cap S| \leq 1$. Если $d_2, d_3 \notin S$, то подрешетка S изоморфна некоторой собственной подрешетке решетки B_2. Если $d_1, d_2 \notin S$ или $d_1, d_3 \notin S$, то $b_1, b_2 \notin S$. Поэтому $|S| \leq 5$.

Предположим теперь, что $a_2 \in S$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $b_4 \notin S$. Если $a_3 \in S$, то S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_2, & x = a_3, \\ a_3, & x = a_2, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $a_3 \notin S$. Если в подрешетке S содержатся элементы y такие, что $y \geq a_1$ и $|S| \geq 3$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq a_2\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Если подрешетка S не содержит элементы y такие, что $y \geq a_1$, то S является одноэлементной либо двухэлементной решеткой.

2. Пусть $b_4 \in S$. Ясно, что $0, d_3 \in S$. Рассмотрим два случая.

(2.1) Предположим, что $d_2 \notin S$.

Пусть сначала $b_2 \notin S$. Если в подрешетке S содержатся элементы y такие, что $y \geq b_1$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq d_3\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq b_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Если подрешетка S не содержит элементы y такие, что $y \geq b_1$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq c_2\}$ и $S_2 = \{b_4, d_3\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ для некоторого x и $\varphi S_2 = \{d_3\}$.

Пусть теперь $b_2 \in S$. Ясно, что $a_1, 1, b_3, d_1, c_2, a_3 \in S$. Если $c_1 \in S$, то $b_1 \in S$. В этом случае S имеет эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_3, & x = b_4, \\ b_3, & x = c_2, d_3, \\ d_1, & x = 1, \\ b_1, & x = c_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предположим, что $c_1 \notin S$. Если $b_1 \in S$, то S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} b_1, & x = b_2, \\ b_2, & x = b_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $b_1 \notin S$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{x \mid x \leq d_3\}$ и $S_2 = \{b_2, d_1, 1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ для некоторого x и $\varphi S_2 = \{1\}$.

(2.2) Пусть $d_2 \in S$. Ясно, что $c_2, 1, a_3, b_3 \in S$.

Пусть сначала $d_1 \notin S$. Ясно, что $b_1, b_2 \notin S$. Если $c_1 \in S$, то $a_1 \in S$. В этом случае S имеет эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_3, & x = b_4, \\ b_3, & x = c_2, d_2, d_3, 1, \\ a_1, & x = c_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $c_1 \notin S$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq d_3\}$ и $S_2 = \{d_2, 1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ для некоторого x и $\varphi S_2 = \{1\}$.

Пусть теперь $d_1 \in S$.

Предположим сначала, что $c_1 \in S$. Ясно, что $b_1, a_1 \in S$. Если $b_2 \in S$, то $S = R_{14}$. Пусть $b_2 \notin S$. В этом случае S имеет эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_3, & x = b_4, \\ b_3, & x = c_2, d_1, d_2, d_3, 1, \\ a_1, & x = b_1, c_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предположим теперь, что $c_1 \notin S$.

Если $b_1, b_2 \in S$, то $a_1 \in S$ и подрешетка S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} b_1, & x = b_2, \\ b_2, & x = b_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $b_1 \in S$, $b_2 \notin S$, то $a_1 \in S$ и подрешетка S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_3 & b_4 & c_2 & d_1 & d_2 & d_3 & 1 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & b_4 & b_3 & b_1 & c_2 & d_3 & d_2 & d_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай $b_1 \notin S$, $b_2 \in S$ рассматривается аналогично.

Если $b_1, b_2 \notin S$, то подрешетка S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} d_1, & x = d_2, \\ d_2, & x = d_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, утверждение леммы 7 справедливо для решетки R_{14}.

Докажем справедливость леммы для решетки R_{16}. Рассмотрим три случая.

1. Пусть сначала $a_2 \notin S, d_2 \in S$ и $|S| \geq 3$. Если в подрешетке S содержатся элементы x такие, что $x \leq b_4$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq b_4\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Если подрешетка S не содержит элементы x такие, что $x \leq b_4$, то S изоморфна некоторой собственной подрешетке решетки B_4. Следовательно, в силу леммы 5 подрешетка S не является жесткой. Поскольку решетка R_{16} является самодвойственной, рассуждениями, двойственными проведенным, нетрудно показать, что при $a_2 \in S, d_2 \notin S$ и $|S| \geq 3$ подрешетка S является нежесткой.

2. Пусть $a_2, d_2 \notin S$ и $|S| \geq 3$. Тогда, как и в случае (1), легко убедиться, что на основании леммы 4 либо леммы 5 подрешетка S нежесткая.

3. Пусть теперь $a_2, d_2 \in S$. Ясно, что $0, 1 \in S$.

Пусть сначала $b_4 \notin S, c_1 \in S$. Если $a_3 \in S$, то S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_2, & x = a_3, \\ a_3, & x = a_2, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $a_3 \notin S$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{0, a_2\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{0\}$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторого y. Если $b_4 \in S, c_1 \notin S$, то рассуждениями, двойственными проведенным, нетрудно показать, что подрешетка S нежесткая.

Если $b_4, c_1 \notin S$, то подрешетка S имеет нетождественный автоморфизм либо в силу леммы 4 обладает нетривиальным эндоморфизмом, поэтому является нежесткой.

Пусть теперь $b_4, c_1 \in S$. Ясно, что $c_4, a_1, b_3, a_3, b_1, c_2, d_3, d_1 \in S$.

Если $b_2, c_3 \in S$, то $S = R_{16}$.

Если $b_2 \notin S$, $c_3 \in S$, то S имеет эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} b_3, & x = 0, a_1, a_2, a_3, \\ c_4, & x = b_4, \\ c_2, & x = b_1, \\ d_1, & x = c_1, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $b_2 \in S$, $c_3 \notin S$, то рассуждениями, двойственными проведенным, нетрудно показать, что подрешетка S нежесткая.

Если $b_2, c_3 \notin S$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{x \mid x \leq c_4\}$ и $S_2 = \{y \mid y \geq b_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y.

Итак, утверждение леммы 7 справедливо для решетки R_{16}.

Докажем справедливость леммы для решетки R_{17}.

Предположим сначала, что $b_2 \notin S$ и $|S| \geq 3$. Если в подрешетке S содержатся элементы x такие, что $x \leq c_4$ и элементы y такие, что $y \geq b_1$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq c_4\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq b_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Если подрешетка S не содержит элементы x такие, что $x \leq c_4$, то S изоморфна некоторой собственной подрешетке решетки B_2, следовательно, на основании леммы 6 не является жесткой. Если подрешетка S не содержит элементы y такие, что $y \geq b_1$, то S изоморфна некоторой собственной подрешетке решетки, двойственной решетке B_2, следовательно, не является жесткой.

Предположим теперь, что $b_2 \in S$.

Пусть сначала $b_4 \notin S, c_2 \in S$. Ясно, что $a_1, 1 \in S$. Если в подрешетке S содержатся элементы x такие, что $x \leq b_5$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq b_5\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Если подрешетка S не содержит элементы x такие, что $x \leq b_5$, то S изоморфна некоторой собственной подрешетке критической решетки R (см. [2, теорема 1, рис. 1]), следовательно, не является жесткой. Поскольку решетка R_{17} является самодвойственной, подрешетка S является нежесткой также в случае, когда $b_4 \in S, c_2 \notin S$.

Если $b_4, c_2 \notin S$ и $|S| \geq 3$, то рассуждениями, подобными проведенным, легко убедиться, что подрешетка S нежесткая.

Пусть теперь $b_4, c_2 \in S$. Ясно, что $0, d_3, a_1, 1, c_4, b_1 \in S$. Рассмотрим здесь три случая.

1. Если все элементы множества $A = \{a_2, a_3, b_3, b_5, c_1, c_3, d_1, d_2\}$ принадлежат S, то подрешетка S совпадает с решеткой R_{17}.

2. Пусть $A \cap S = \varnothing$. Тогда подрешетка S имеет две подрешетки $S_1 = \{0, b_4\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{0\}$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторого y.

3. Пусть $\varnothing \neq A \cap S \neq A$.

Предположим, что хотя бы один элемент множества $\{a_2, a_3, b_3, b_5\} \subset A$ не принадлежит S.

Пусть сначала $a_3 \notin S$. Если $b_5 \in S$, то $a_2, b_3 \in S$. Поэтому S имеет автоморфизм φ такой,

что
$$\varphi(x) = \begin{cases} b_4, & x = b_5, \\ b_5, & x = b_4, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $b_5 \notin S$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subseteq \{x \mid x \leq b_4\}$ и $S_2 \subseteq \{y \mid y \geq a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y.

Пусть теперь $a_3 \in S$. Если $b_5 \notin S$, то $a_2, b_3 \notin S$. Поэтому S имеет автоморфизм φ такой, что
$$\varphi(x) = \begin{cases} a_3, & x = b_4, \\ b_4, & x = a_3, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $b_5 \in S$, то $a_2, b_3 \in S$. Поэтому все элементы множества $\{a_2, a_3, b_3, b_5\}$ принадлежат S.

Остается рассмотреть случай, при котором хотя бы один элемент множества $\{c_1, c_3, d_1, d_2\} \subset A$ не принадлежит S. В силу самодвойственности решетки R_{17} подрешетка S в этом случае также является нежесткой.

Итак, утверждение леммы 7 справедливо для решетки R_{17}.

Доказательство утверждения леммы 7 для решетки R_{20} аналогично вышеприведенному доказательству для решетки R_{17}. Лемма доказана.

Как было отмечено ранее, не существует критических восьмиэлементных решеток. Поэтому из [2, теорема 1], лемм 3, 7 вытекает доказываемая теорема.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В.А. Баранскому за постоянное внимание к работе, ценные советы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Важенин Ю.М., Перминов Е.А.** О жестких решетках и графах // Исслед. по соврем. алгебре: межвуз. сб. ст. Т. 2, № 3. Свердловск, 1979. С. 3–21. (Мат. записки.)
2. **Перминова О.Е.** О конечных критических решетках // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 185–193.
3. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
4. **Rival I.** Lattices with doubly irreducible elements // Can. Math. Bull. 1974. Vol. 17. P. 91–95.
5. О двух задачах теории решеток / А.М. Кутьин, А.В. Пургин, М.В. Кеврин, В.В. Гульнов // Междунар. алгебраич. конф., посвящ. памяти Д. К. Фадеева: тез. докл. С.-Петербург, 1997. С. 231–232.
6. **Перминова О.Е.** Диаграммы семиэлементных и восьмиэлементных решеток // Кафедра алгебры и дискретной математики УрФУ: [сайт].
URL: www.kadm.math.usu.ru/pages.php?id=perminova_papers (дата обращения 3.08.2011).

Перминова Ольга Евгеньевна
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: perminova_oe@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 517.972.8

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА УЛЬТРАФИЛЬТРОВ АЛГЕБРЫ МНОЖЕСТВ[1]

А. Г. Ченцов

В абстрактных задачах о достижимости с ограничениями асимптотического характера нередко возникает ситуация, когда класс секвенциальных приближенных решений-последовательностей (соответствующий на идейном уровне подходу Дж. Варги в задачах теории управления) оказывается недостаточным для воспроизведения эффектов, связанных с реализацией предельных состояний, соответствующих соблюдению "асимптотических" ограничений. Приходится применять направленности в исходном пространстве решений или фильтры. В последнем случае можно, как легко видеть, ограничиться использованием ультрафильтров в качестве аналогов приближенных решений Дж. Варги. Однако наиболее интересные с этой точки зрения варианты ультрафильтров — свободные ультрафильтры — не допускают конструктивного описания. Ситуация "исправляется" в ряде случаев использования ультрафильтров алгебры множеств, что оказывается допустимым в некоторых задачах вышеупомянутого типа. В этой связи представляют интерес классы измеримых пространств с алгебрами (или, что практически одно и то же, с полуалгебрами) множеств, для которых удается получить описание множества всех свободных ультрафильтров. В настоящей работе анализируется один пример такого рода. Попутно обсуждаются некоторые общие конструкции, связанные с представлениями пространства ультрафильтров.

A. G. Chentsov. On one example of representing the ultrafilter space for an algebra of sets.

Abstract problems on attainability with constraints of asymptotic nature often involve a situation when the class of sequential approximate sequence solutions (which corresponds conceptually to Varga's approach in control theory problems) is insufficient for the reproduction of effects related to the realization of limit states corresponding to the observance of "asymptotic" constraints. In this situation, it is necessary to use filters or nets in the original space of solutions. In the case of using filters, as easily seen, it is sufficient to take ultrafilters as analogs of Varga's approximate solutions. However, free ultrafilters, which are the most interesting form this point of view variants of ultrafilters, do not admit a constructive description. The situation can be "corrected" in some cases of using ultrafilters of an algebra of sets, which turns out to be acceptable in some problems of the above type. In this context, classes of measurable spaces with algebras (or, which is practically the same, with semialgebras) of sets are of interest, as they can be used to describe the set of all free ultrafilters. We analyze an example of this kind and discuss some general constructions related to representations of the space of ultrafilters.

1. Введение

В дальнейшем используются следующие сокращения: БУ — база ультрафильтра; БФ — база фильтра, в/з — вещественнозначная (функция), ИП — измеримое пространство, к.-а. — конечно-аддитивная (мера), п/м — подмножество, у/ф — ультрафильтр.

Хорошо известно [1, гл. III], что в задачах управления с ограничениями нередко отсутствует устойчивость при ослаблении последних, что, однако, представляется в ряде случаев полезным, так как приводит, вообще говоря, к выигрышу в качестве. В этой связи естественно использовать так называемые приближенные решения, которые во многих случаях сводятся к последовательностям в пространстве обычных решений. Эти случаи применительно к задачам управления подробно рассматриваются в [1]; известны и другие классы задач такого рода. Так, в [2; 3] рассматриваются подобные, по сути дела, конструкции для задач математического программирования. Особо отметим фундаментальное понятие стабильности множеств в теории дифференциальных игр, введенное Н.Н. Красовским и сыгравшее наряду с правилом

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00436) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математическая теория управления".

экстремального сдвига, важную роль в доказательстве основополагающей теоремы Н.Н. Красовского и А.И. Субботина об альтернативе (см. [4]). В определении стабильности предусматривалось использование обобщенной реакции на обычное управление игрока-противника, что на идейном уровне отвечает замыканию асимптотических режимов, связанных с приближенным соблюдением фазовых ограничений в виде стабильного моста [4].

Вместе с тем в некоторых случаях секвенциальная реализация приближенных решений, подобная [1, гл. III], недостаточна, и по ряду причин (см. обсуждение в [5;6]) оказывается полезным использование в качестве аналогов приближенных решений Дж. Варги у/ф пространства обычных решений. Среди них имеются тривиальные, сводящиеся к точкам упомянутого пространства, и свободные, действие которых позволяет достаточно полно охарактеризовать предельные эффекты, связываемые, в частности, с соблюдением ограничений асимптотического характера. К сожалению, свободные у/ф “не визуализируются”, и сам факт их существования устанавливается с применением леммы Цорна. Иногда, однако, имеется возможность перейти к работе с у/ф некоторых специальных семейств множеств. В качестве таких семейств естественно использовать алгебры множеств, имея в виду работу с у/ф ИП с алгеброй множеств. В свою очередь, для целей “визуализации” свободных у/ф таких ИП оказываются в ряде случаев полезны представления свободных у/ф полуалгебры, порождающей упомянутую алгебру. Имея в виду естественную связь у/ф и к.-а. (0,1)-мер, можно указать ряд случаев, когда такие представления реализуются достаточно просто (см., в частности, [7, § 7.6]). В настоящей работе мы рассмотрим еще один вариант ИП, для которого также удается получить исчерпывающее описание множества свободных у/ф. При этом используется одно общее свойство БФ, порождающих у/ф; в дальнейшем такие БФ именуются БУ. Это свойство может оказаться полезным и в других случаях (не только в рассматриваемом примере); по этой причине в статье имеется часть, посвященная общим конструкциям. В связи с последующими построениями полезно иметь в виду конструкции [6; 8; 9].

Отметим, наконец, что представления пространства свободных у/ф могут быть полезными и для других целей. Так, в частности, имея “хорошие” представления такого рода, можно исследовать некоторые свойства ярусных [8] в/з функций (имеются в виду равномерные пределы ступенчатых, относительно соответствующего ИП, в/з функций). Один из вопросов такого рода рассматривается в заключительной части статьи.

2. Общие определения и обозначения

Используем кванторы и пропозициональные связки; $\exists!$ заменяет фразу “существует и единственно”; def — фразу “по определению”; $\overset{\triangle}{=}$ — равенство по определению; $\varnothing$ — пустое множество. Принимаем аксиому выбора. Семейством именуем множество, все элементы которого сами являются множествами.

Если x и y — объекты, то через $\{x;y\}$ обозначаем их неупорядоченную пару (двоеточие), т. е. множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов; см. [10, гл. II]. Для произвольного объекта u полагаем, как обычно, $\{u\} \overset{\triangle}{=} \{u;u\}$. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B; при $f \in B^A$ используем обычное выражение $f\colon A \longrightarrow B$. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \overset{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ (образ C при действии отображения f).

Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \overset{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\}$; полагаем $\overline{1,n} \overset{\triangle}{=} \{i \in \mathbb{N} \mid i \le n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Если $\mathcal{E}$ — произвольное семейство, то полагаем, что

$$\{\cup\}(\mathcal{E}) \overset{\triangle}{=} \Big\{ \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\colon\ \mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \Big\},$$

снова получая семейство (точнее, семейство всевозможных объединений подсемейств $\mathcal{E}$). Если $\mathcal{M}$ — непустое семейство и N — множество, то $\mathcal{M}|_N \stackrel{\triangle}{=} \{M \cap N \colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(N))$.

Специальные семейства. Фиксируем в пределах настоящего пункта множество I. Тогда

$$\pi[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{L})\ \&\ (I \in \mathcal{L})\ \&\ (A \cap B \in \mathcal{L}\ \ \forall A \in \mathcal{L}\ \forall B \in \mathcal{L})\} \tag{2.1}$$

есть множество всех π-систем [11] п/м I с "нулем" $\varnothing$ и "единицей" I. Тогда

$$(\mathrm{alg})[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid I \setminus L \in \mathcal{L}\ \ \forall L \in \mathcal{L}\} \tag{2.2}$$

есть множество всех алгебр п/м множества I. Если $\mathcal{L} \in \pi[I],\ A \in \mathcal{P}(I)$ и $n \in \mathbb{N}$, то через $\Delta_n(A, \mathcal{L})$ обозначаем множество всех отображений $(L_i)_{i \in \overline{1,n}} \colon \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{L}$, для каждого из которых

$$\Big(A = \bigcup_{i=1}^{n} L_i\Big)\ \&\ (L_p \cap L_q = \varnothing\ \ \forall p \in \overline{1,n}\ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\})$$

(введено множество упорядоченных $\mathcal{L}$-разбиений A "длины" n). Тогда

$$\Pi[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \exists n \in \mathbb{N} \colon\ \Delta_n(I \setminus L, \mathcal{L}) \neq \varnothing\} \tag{2.3}$$

есть множество всех полуалгебр п/м I. Каждая полуалгебра из множества (2.3) порождает алгебру п/м I по хорошо известному правилу:

$$\mathbf{a}^0_I(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon\ \Delta_n(A, \mathcal{L}) \neq \varnothing\} \in (\mathrm{alg})[I]\ \ \forall \mathcal{L} \in \Pi[I] \tag{2.4}$$

(в (2.4) каждой полуалгебре п/м I сопоставляется наименьшая по вложению алгебра п/м I, еще содержащая данную полуалгебру).

3. Фильтры и базы фильтров

Сначала напомним некоторые известные понятия [12, гл. I]: речь пойдет о фильтрах семейства всех п/м фиксированного непустого множества E. Полагаем, что $\beta_0[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B} \colon B_3 \subset B_1 \cap B_2\}$. Введено множество всех БФ множества E. Тогда

$$\mathfrak{F}[E] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}\ )\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall G \in \mathcal{P}(E)$$
$$((F \subset G) \Longrightarrow (G \in \mathcal{F})))\Big\} \tag{3.1}$$

есть множество всех фильтров E. Множество всех у/ф множества E имеет вид

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[E] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]\ \ ((\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F}))\}. \tag{3.2}$$

Точки множества E порождают тривиальные у/ф, а именно имеем с учетом (3.1), (3.2)

$$(E\text{-ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(E) \mid x \in H\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[H]\ \ \forall x \in E. \tag{3.3}$$

Пусть $\mathfrak{Z}(\mathcal{E}|E) \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists \Sigma \in \mathcal{E} \colon \Sigma \subset H\}\ \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Тогда $\beta_0[E] = \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid \mathfrak{Z}(\mathcal{B}|E) \in \mathfrak{F}[E]\}$. В частности, имеем

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{B}|E) \in \mathfrak{F}[E]\ \ \forall \mathfrak{B} \in \beta_0[E]. \tag{3.4}$$

Фиксируем до конца настоящего раздела π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Рассмотрим фильтры и у/ф семейства $\mathcal{L}$, именуя их в дальнейшем $\mathcal{L}$-фильтрами и $\mathcal{L}$-у/ф соответственно. Тогда

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\&(A \cap B \in \mathcal{F} \;\; \forall A \in \mathcal{F}\, \forall B \in \mathcal{F})$$
$$\&(\forall F \in \mathcal{F}\, \forall L \in \mathcal{L} \;\; ((F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F})))\Big\} \tag{3.5}$$

есть множество всех $\mathcal{L}$-фильтров. Соответственно множество всех $\mathcal{L}$-у/ф имеет вид

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \;\; ((\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F}))\}. \tag{3.6}$$

Разумеется, (3.5) допускает естественную аналогию с (3.1), а (3.6) — с (3.2). При этом [9, с. 29]

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\; \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \colon \; \mathcal{F} \subset \mathcal{U}. \tag{3.7}$$

Легко видеть, что справедливо следующее очевидное свойство: $\mathcal{F} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \;\; \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$. В частности, с учетом (3.3) имеем

$$(E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L} = \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \;\; \forall x \in E. \tag{3.8}$$

З а м е ч а н и е 3.1. Возможен случай, когда $(E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \;\; \forall x \in E$ (несмотря на максимальность тривиальных у/ф множества E). В самом деле, рассмотрим пример. Пусть $E = \mathbb{N}$ и $\overrightarrow{n, \infty} \stackrel{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid n \le k\} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \{\overrightarrow{m, \infty} \colon m \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing\} \in \pi[E]$ (более того, $\mathfrak{N}$ — топология на E). Полагаем сейчас, что $\mathcal{L} = \mathfrak{N}$. Если $k \in E$, то $(E\text{-ult})[k] \cap \mathcal{L} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, поскольку этот $\mathcal{L}$-фильтр мажорируется $\mathcal{L}$-фильтром $\mathcal{N}_\infty \stackrel{\triangle}{=} \{\overrightarrow{m, \infty} \colon \; m \in \mathbb{N}\}$ (последний есть $\mathcal{L}$-у/ф), но не совпадает с ним (так, например, имеем свойство

$$\overrightarrow{k+1, \infty} \in \mathcal{N}_\infty \setminus ((E\text{-ult})[k] \cap \mathcal{L}),$$

поскольку $k \notin \overrightarrow{k+1, \infty}$). Коль скоро выбор k был произвольным, требуемое свойство установлено. □

Полагаем, что $\beta^0_{\mathcal{L}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta_0[E] \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{L}\}$ (введены БФ, содержащиеся в $\mathcal{L}$); тогда, в частности, $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$. Пусть, кроме того,

$$(\mathcal{E}\text{-set})[E|\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid L \cap X \ne \varnothing \;\; \forall X \in \mathcal{E}\} \;\; \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{3.9}$$

Легко видеть, что $\mathcal{B}|_L \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E] \;\; \forall \mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]\; \forall L \in (\mathcal{B}\text{-set})[E|\mathcal{L}]$. В частности, $\mathcal{F}|_L \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E] \;\; \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\; \forall L \in (\mathcal{F}\text{-set})[E|\mathcal{L}]$. С учетом (3.4) имеем очевидное свойство

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{Z}(\mathcal{B}|E) \cap \mathcal{L} = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists B \in \mathcal{B} \colon \; B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \;\; \forall \mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]. \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует, в частности, что $\forall \mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]\; \forall L \in (\mathcal{B}\text{-set})[E|\mathcal{L}]$

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|_L|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \colon \; ((E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}] \subset (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|_L|\mathcal{L}]) \;\&\; (L \in (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|_L|\mathcal{L}]). \tag{3.11}$$

В (3.11) допустимо полагать, что $\mathcal{B} = \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, получая полезное следствие. Именно

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\; \forall L \in (\mathcal{F}\text{-set})[E|\mathcal{L}]\; \exists \tilde{\mathcal{F}} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \colon \; (\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}) \;\&\; (L \in \tilde{\mathcal{F}}). \tag{3.12}$$

В свою очередь, из (3.6) и (3.12) вытекает, что $(\mathcal{U}\text{-set})[E|\mathcal{L}] = \mathcal{U} \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Более того, с учетом (3.5) получаем, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{U} = (\mathcal{U}\text{-set})[E|\mathcal{L}]\}. \tag{3.13}$$

В связи с (3.13) отметим далее одно следствие, полагая, что

$$\beta^{00}_{\mathcal{L}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E] \mid (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\} \tag{3.14}$$

(введено множество всех баз $\mathcal{L}$-у/ф). Легко видеть, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \beta^{00}_{\mathcal{L}}[E]$.

Предложение 3.1. *Справедливо равенство*

$$\beta^{00}_{\mathcal{L}}[E] = \{\mathcal{B} \in \beta^{0}_{\mathcal{L}}[E] \mid \forall L \in (\mathcal{B}\text{-set})[E|\mathcal{L}]\ \exists B \in \mathcal{B}\colon\ B \subset L\}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Обозначим множество в правой части (3.15) через Ω. Выберем произвольно $\mathcal{T} \in \beta^{00}_{\mathcal{L}}[E]$. Тогда согласно (3.10) и (3.14)

$$\mathcal{F} \stackrel{\triangle}{=} (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{T}|\mathcal{L}] = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists B \in \mathcal{T}\colon\ B \subset L\} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \tag{3.16}$$

а тогда (см. (3.13)) $\mathcal{F} = (\mathcal{F}\text{-set})[E|\mathcal{L}]$. Выберем произвольно $\mathbb{L} \in (\mathcal{T}\text{-set})[E|\mathcal{L}]$. Тогда (см. (3.9)) $\mathbb{L} \in \mathcal{L}$ и

$$\mathbb{L} \cap T \neq \varnothing\ \ \forall T \in \mathcal{T}. \tag{3.17}$$

Если $\tilde{F} \in \mathcal{F}$, то $\tilde{F} \in \mathcal{L}$ и для некоторого $\tilde{B} \in \mathcal{T}$ справедливо вложение $\tilde{B} \subset \tilde{F}$. Поэтому согласно (3.17) $\mathbb{L} \cap \tilde{B} \neq \varnothing$ и, как следствие, $\mathbb{L} \cap \tilde{F} \neq \varnothing$. Поскольку выбор $\tilde{F}$ был произвольным, установлено, что $\mathbb{L} \cap F \neq \varnothing\ \ \forall F \in \mathcal{F}$. С учетом (3.9) получаем, что $\mathbb{L} \in (\mathcal{F}\text{-set})[E|\mathcal{L}]$ и, следовательно, $\mathbb{L} \in \mathcal{F}$. Согласно (3.16) получаем, что для некоторого $\mathbb{B} \in \mathcal{T}$ справедливо вложение $\mathbb{B} \subset \mathbb{L}$. Поскольку выбор $\mathbb{L}$ был произвольным, установлено, что

$$\forall L \in (\mathcal{T}\text{-set})[E|\mathcal{L}]\ \exists B \in \mathcal{T}\colon\ B \subset L. \tag{3.18}$$

Поскольку, в частности (см. (3.15)), $\mathcal{T} \in \beta^{0}_{\mathcal{L}}[E]$, имеем (см. (3.18)), что $\mathcal{T} \in \Omega$. Установлено вложение

$$\beta^{00}_{\mathcal{L}}[E] \subset \Omega. \tag{3.19}$$

Пусть $\mathfrak{B} \in \Omega$. Тогда по определению Ω имеем, что $\mathfrak{B} \in \beta^{0}_{\mathcal{L}}[E]$ и при этом

$$\forall L \in (\mathfrak{B}\text{-set})[E|\mathcal{L}]\ \exists B \in \mathfrak{B}\colon\ B \subset L. \tag{3.20}$$

Рассмотрим фильтр $\mathcal{V} \stackrel{\triangle}{=} (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathfrak{B}|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Пусть $V \in (\mathcal{V}\text{-set})[E|\mathcal{L}]$, т. е. $V \in \mathcal{L}$ и при этом

$$V \cap H \neq \varnothing\ \ \forall H \in \mathcal{V}. \tag{3.21}$$

Поскольку $\mathfrak{B} \subset \mathcal{V}$ (см. (3.10)), то из (3.21), в частности, следует, что $V \cap B \neq \varnothing\ \ \forall B \in \mathfrak{B}$. Это означает, что (см. (3.9)) $V \in (\mathfrak{B}\text{-set})[E|\mathcal{L}]$, а потому для некоторого $\mathbf{B} \in \mathfrak{B}$ имеет место вложение $\mathbf{B} \subset V$ (см. (3.20)). Поэтому согласно (3.10) $V \in \mathcal{V}$. Тем самым установлено вложение

$$(\mathcal{V}\text{-set})[E|\mathcal{L}] \subset \mathcal{V}.$$

С другой стороны, имеем с учетом (3.5), (3.6), что $\mathcal{V} \subset (\mathcal{V}\text{-set})[E|\mathcal{L}]$. Стало быть, $\mathcal{V} = (\mathcal{V}\text{-set})[E \mid \mathcal{L}]$, а тогда из (3.13) следует, что $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. Поэтому

$$\mathfrak{B} \in \beta^{0}_{\mathcal{L}}[E]\colon\ (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathfrak{B}|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}).$$

Согласно (3.14) $\mathfrak{B} \in \beta^{00}_{\mathcal{L}}[E]$. Итак, установлено, что $\Omega \subset \beta^{00}_{\mathcal{L}}[E]$, откуда с учетом (3.19) следует равенство $\beta^{00}_{\mathcal{L}}[E] = \Omega$. □

В отношении $\mathcal{L}$-фильтров и $\mathcal{L}$-у/ф будем придерживаться терминологии, используемой в отношении элементов множеств (3.1),(3.2): свободные и тривиальные у/ф, тривиальные фильтры. В связи с последним понятием отметим простое свойство: если $x \in E$, то

$$((E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})) \Longleftrightarrow (\forall L \in \mathcal{L}\ \ ((x \notin L) \Longrightarrow (\exists \Lambda \in (E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L}\colon\ \Lambda \cap L = \varnothing))).$$

Как следствие получаем, что справедливо положение

$$\Big((E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})\ \ \forall x \in E\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall L \in \mathcal{L}\ \forall x \in E \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{L}\colon\ (x \in \Lambda)\ \&\ (\Lambda \cap L = \varnothing)\Big). \tag{3.22}$$

Свойство в правой части (3.22) имеет следующий смысл: семейство $\mathcal{L}$ различает точки E и множества из $\mathcal{L}$ (не содержащие эти точки).

Каждый (тривиальный) фильтр (3.8) обладает непустым пересечением всех своих множеств. Введем в рассмотрение у/ф с противоположным свойством, называя их свободными по аналогии с [13, с. 271]: пусть

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \triangleq \Big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \varnothing\Big\}. \tag{3.23}$$

Легко видеть, что справедливо следующее свойство:

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \{(E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L}\colon\ x \in E\} = \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}). \tag{3.24}$$

З а м е ч а н и е 3.2. Проверим (3.24). Пусть Ω — множество в левой части (3.24). Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и при этом

$$\mathcal{V} \neq (E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L} \ \ \forall x \in E. \tag{3.25}$$

Покажем, что пересечение всех множеств из $\mathcal{V}$ пусто. Действительно, допустим противное:

$$\bigcap_{L \in \mathcal{V}} L \neq \varnothing. \tag{3.26}$$

С учетом (3.26) выберем и зафиксируем элемент q множества в левой части (3.26). Имеем $q \in L \ \ \forall L \in \mathcal{V}$. Тогда согласно (3.8) $\mathcal{V} \subset (E\text{-ult})[q] \cap \mathcal{L}$. Поэтому в силу максимальности $\mathcal{V}$ имеем (см. (3.6)) равенство $\mathcal{V} = (E\text{-ult})[q] \cap \mathcal{L}$, противоречащее свойству (3.25), так как $q \in E$. Таким образом, (3.26) невозможно и, следовательно, пересечение всех множеств из $\mathcal{V}$ пусто, т. е. $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. Итак, $\Omega \subset \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})$. Противоположное вложение очевидно (см. (3.8), (3.23)). $\square$

Отметим следующее весьма очевидное свойство:

$$\Big(\forall x_1 \in E\ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}\ \exists L \in \mathcal{L}\colon\ (x_1 \in L)\ \&\ (x_2 \notin L)\Big)$$
$$\Longrightarrow \Big(\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})\ \exists! x \in E\colon\ \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \{x\}\Big). \tag{3.27}$$

Свойство, упомянутое в посылке импликации (3.27), имеет следующий смысл: семейство $\mathcal{L}$ различает точки множества E. Разумеется (см. (3.8)), данное свойство достаточно для инъективности отображения

$$x \longmapsto (E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L}\colon\ E \longrightarrow \mathbb{F}^*(\mathcal{L}).$$

В общем случае обозначаем данное отображение через $w[\mathcal{L}]$, получая правило

$$w[\mathcal{L}] \triangleq ((E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L})_{x \in E} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})^E. \tag{3.28}$$

4. Ульрафильтры полуалгебры промежутков отрезка вещественной прямой

Всюду в пределах настоящего раздела фиксируем $a \in \mathbb{R},\ b \in]a, \infty[$ и полагаем, что $\mathbf{I} \triangleq [a, b]$. Здесь и ниже для обозначения промежутков в $\mathbb{R}$ используем только квадратные скобки (см., в частности, [14, с. 35, 36]). Через $\mathcal{J}$ обозначаем семейство всех промежутков в $\mathbb{R}$, содержащихся в $[a, b]$ (открытых, полуоткрытых и замкнутых):

$$\mathcal{J} \triangleq \{L \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists c \in \mathbf{I}\ \exists d \in \mathbf{I}\colon\ (]c, d[\subset L)\ \&\ (L \subset [c, d])\}; \tag{4.1}$$

получили полуалгебру п/м $\mathbf{I}$: $\mathcal{J} \in \Pi[\mathbf{I}]$. В частности, $\mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}]$. Итак, $(\mathbf{I}, \mathcal{J})$ может использоваться в качестве пространства $(E, \mathcal{L})$ предыдущего раздела. Ниже исследуется структура $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$, что сводится к отысканию представления множества $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J})$. В самом деле, $\{t\} = [t,t] \in \mathcal{J} \ \ \forall t \in \mathbf{I}$. Поэтому при $L \in \mathcal{J}$ и $x \in \mathbf{I} \setminus L$ непременно $\exists \Lambda \in \mathcal{J}$: $(x \in \Lambda)$ & $(\Lambda \cap L = \varnothing)$. С учетом (3.22) и (3.28) имеем, что

$$w[\mathcal{J}](x) = (\mathbf{I}\text{-ult})[x] \cap \mathcal{J} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \ \ \forall x \in \mathbf{I}. \tag{4.2}$$

Итак, все тривиальные $\mathcal{J}$-фильтры (см.(4.1)) являются у/ф. Пусть

$$\mathcal{J}_t^{(-)} \triangleq \{[c,t[:\ c \in [a,t[\} \ \ \forall t \in]a,b]. \tag{4.3}$$

Предложение 4.1. $\mathcal{J}_t^{(-)} \in \beta_{\mathcal{J}}^{00}[\mathbf{I}] \ \ \forall t \in]a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\theta \in]a,b]$. Тогда $\mathcal{J}_\theta^{(-)} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbf{I}))$. Кроме того, $\mathcal{J}_\theta^{(-)} \subset \mathcal{J}$ (см. (4.1)). Итак,

$$\mathcal{J}_\theta^{(-)} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}):\ \varnothing \notin \mathcal{J}_\theta^{(-)}. \tag{4.4}$$

При $c_1 \in [a,\theta[$ и $c_2 \in [a,\theta[$ имеем $\mathbf{c} \triangleq \sup(\{c_1;c_2\}) \in [a,\theta[$, $[\mathbf{c},\theta[\in \mathcal{J}_\theta^{(-)}$ и $[\mathbf{c},\theta[\subset [c_1,\theta[\cap [c_2,\theta[$. Тогда (см. (4.4))

$$\mathcal{J}_\theta^{(-)} \in \beta_{\mathcal{J}}^0[\mathbf{I}]. \tag{4.5}$$

Воспользуемся предложением 3.1, фиксируя $\Lambda \in (\mathcal{J}_\theta^{(-)}\text{-set})[\mathbf{I}|\mathcal{J}]$. Тогда $\Lambda \in \mathcal{J}$ и при этом

$$\Lambda \cap S \neq \varnothing \ \ \forall S \in \mathcal{J}_\theta^{(-)}. \tag{4.6}$$

В частности, $[a,\theta[\in \mathcal{J}_\theta^{(-)}$ и $\Lambda \cap [a,\theta[\neq \varnothing$. Тем более $\Lambda \neq \varnothing$, причем для некоторых $p \in \mathbf{I}$ и $q \in [p,b]$

$$(]p,q[\subset \Lambda) \ \& \ (\Lambda \subset [p,q]). \tag{4.7}$$

Из (4.3), (4.6) и (4.7) вытекает, что $p < \theta$ (действительно, $\varnothing \neq \Lambda \cap [a,\theta[\subset [p,q] \cap [a,\theta[\subset [p,\theta[$).

С другой стороны, $\theta \leq q$. В самом деле, допустим противное: $q < \theta$. Тогда

$$\tau \triangleq \frac{q+\theta}{2} \in [a,\theta[$$

и, следовательно, $[\tau,\theta[\in \mathcal{J}_\theta^{(-)}$, причем $[p,q] \cap [\tau,\theta[= \varnothing$, так как $q < \tau$. Тем более $\Lambda \cap [\tau,\theta[= \varnothing$, что невозможно (см. (4.6)). Итак, $\theta \leq q$. Тогда

$$\Big[\frac{p+\theta}{2},\theta\Big[\in \mathcal{J}_\theta^{(-)}:\ \Big[\frac{p+\theta}{2},\theta\Big[\ \subset \Big]p,q\Big[\subset \Lambda. \tag{4.8}$$

Поскольку выбор Λ был произвольным, получаем, что (см. (4.8)) $\forall L \in (\mathcal{J}_\theta^{(-)}\text{-set})[\mathbf{I}|\mathcal{J}] \ \exists B \in \mathcal{J}_\theta^{(-)}$: $B \subset L$. С учетом (4.5) получаем из предложения 3.1 свойство $\mathcal{J}_\theta^{(-)} \in \beta_{\mathcal{J}}^{00}[\mathbf{I}]$. Поскольку выбор θ был произвольным, предложение доказано. □

Из (3.14) и предложения 4.1 имеем, что $(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{J}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \ \ \forall t \in]a,b]$. При $t \in]a,b]$ пересечение всех множеств из $\mathcal{J}_t^{(-)}$ пусто, причем $\mathcal{J}_t^{(-)} \subset (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{J}]$ (см. (3.10)). Как следствие получаем, что (см. (3.6))

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{J}] = \{L \in \mathcal{J} \mid \exists c \in [a,t[:\ [c,t[\subset L\} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}) \ \ \forall t \in]a,b]. \tag{4.9}$$

Рассмотрим теперь другой вариант конструирования свободных $\mathcal{J}$-у/ф. Пусть

$$\mathcal{J}_t^{(+)} \triangleq \{]t,c]:\ c \in]t,b]\} \ \ \forall t \in [a,b[. \tag{4.10}$$

Предложение 4.2. $\mathcal{J}_t^{(+)} \in \beta_{\mathcal{J}}^{00}[\mathbf{I}] \ \ \forall t \in [a, b[$.

Доказательство осуществляется по схеме, подобной той, что использовалась при доказательстве предыдущего предложения. Также по аналогии с (4.9) устанавливается, что

$$(\mathbf{I\text{-}fi})[\mathcal{J}_t^{(+)} | \mathcal{J}] = \{L \in \mathcal{J} \mid \exists c \in]t, b] \colon \ ]t, c] \subset L\} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}) \ \ \forall t \in [a, b[. \tag{4.11}$$

Итак, в (4.9) и (4.11) введены два типа свободных у/ф ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{J})$ (с полуалгеброй множеств). Ниже будет показано, что этим и исчерпывается множество свободных $\mathcal{J}$-у/ф.

Через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем обычную $|\cdot|$-топологию $\mathbb{R}$; если $H \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, то через $\mathrm{cl}(H, \tau_{\mathbb{R}})$ обозначаем замыкание H в $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. С учетом компактности $\mathbf{I}$ в $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ имеем свойство: при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$ пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(U, \tau_{\mathbb{R}})$, $U \in \mathcal{U}$, непусто (используется свойство центрированных систем замкнутых множеств). Более того, справедливо свойство

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \ \exists! x \in \mathbf{I} \colon \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(U, \tau_{\mathbb{R}}) = \{x\}. \tag{4.12}$$

З а м е ч а н и е 4.1. Рассмотрим схему доказательства (4.12), фиксируя $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$. Используя ранее отмечавшееся свойство непустоты пересечения множеств-замыканий, выберем и зафиксируем

$$x_* \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(U, \tau_{\mathbb{R}}). \tag{4.13}$$

Поскольку $\mathbf{I}$ — замкнутое множество, содержащее множества из $\mathcal{U}$, имеем $x_* \in \mathbf{I}$. Пусть $\zeta \in]0, \infty[$. Тогда

$$I_* \stackrel{\triangle}{=}]x_* - \zeta, x_* + \zeta[\, \cap \mathbf{I} \in \mathcal{J} \tag{4.14}$$

(пересечение промежутков в $\mathbb{R}$ — промежуток), причем (см. (4.13)) в случае $U \in \mathcal{U}$

$$U \cap I_* = U \cap \mathbf{I} \, \cap]x_* - \zeta, x_* + \zeta[= U \cap \,]x_* - \zeta, x_* + \zeta[\, \neq \varnothing.$$

Получили свойство: $U \cap I_* \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}$. С учетом (3.9) и (4.14) имеем включение $I_* \in (\mathcal{U}\text{-set})[\mathbf{I} | \mathcal{J}]$. Из (3.13) вытекает, что $I_* \in \mathcal{U}$. Тогда

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(U, \tau_{\mathbb{R}}) \subset \mathrm{cl}(I_*, \tau_{\mathbb{R}}) \subset \mathrm{cl}(]x_* - \zeta, x_* + \zeta[, \tau_{\mathbb{R}}) = [x_* - \zeta, x_* + \zeta].$$

Поскольку выбор ζ был произвольным, установлено, что

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(U, \tau_{\mathbb{R}}) \subset [x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon] \ \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[.$$

Дальнейшее рассуждение очевидно (см. (4.13)). □

Заметим, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \neq \varnothing$. С учетом (4.12) введем отображение $\mathbf{t} \colon \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbf{I}$, действующее по следующему правилу: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$, то $\mathbf{t}(\mathcal{U}) \in \mathbf{I}$ def таково, что

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(U, \tau_{\mathbb{R}}) = \{\mathbf{t}(\mathcal{U})\}. \tag{4.15}$$

Если $x \in]a, b[$, то (см. (4.9),(4.11)) определены (свободные) $\mathcal{J}$-у/ф $(\mathbf{I\text{-}fi})[\mathcal{J}_x^{(-)} | \mathcal{J}] \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J})$ и $(\mathbf{I\text{-}fi})[\mathcal{J}_x^{(+)} | \mathcal{J}] \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J})$.

Предложение 4.3. *Пусть у/ф* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J})$ *обладает свойством*: $\mathbf{t}(\mathcal{U}) \in]a, b[$. *Тогда*

$$(\mathcal{U} = (\mathbf{I\text{-}fi})[\mathcal{J}_{\mathbf{t}(\mathcal{U})}^{(-)} | \mathcal{J}]) \ \vee \ (\mathcal{U} = (\mathbf{I\text{-}fi})[\mathcal{J}_{\mathbf{t}(\mathcal{U})}^{(+)} | \mathcal{J}]).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{J})$ и при этом $\mathbf{t}(\mathcal{U}) \in]a, b[$. При этом $\mathcal{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J})$ и, кроме того, согласно (3.23)

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \varnothing. \tag{4.16}$$

Отметим, что в силу (3.24) $\mathcal{U} \neq (\mathbf{I}\text{-ult})[x] \cap \mathcal{J} \ \ \forall x \in \mathbf{I}$. С учетом (4.16) имеем, что для некоторого множества $\tilde{U} \in \mathcal{U}$ справедливо свойство $\mathbf{t}(\mathcal{U}) \notin \tilde{U}$, хотя $\mathbf{t}(\mathcal{U}) \in \mathrm{cl}(\tilde{U}, \tau_{\mathbb{R}})$ по определению $\mathbf{t}(\mathcal{U})$ (см. (4.15)). Поскольку $\tilde{U} \in \mathcal{J}$, то для некоторых $u \in \mathbf{I}$ и $v \in \mathbf{I}$

$$(]u, v[\subset \tilde{U}) \ \& \ (\tilde{U} \subset [u, v]). \tag{4.17}$$

При этом $\tilde{U} \neq \varnothing$ по выбору $\tilde{U}$. Тогда из (4.17) имеем неравенство $u \leq v$. Более того, $u < v$. В самом деле, пусть, напротив, $u = v$. Тогда из (4.17) легко следует, что $\tilde{U} = \{u\}$, а потому с учетом (3.5) получаем, что $u \in U \ \ \forall U \in \mathcal{U}$. Последнее невозможно в силу (4.16). Противоречие доказывает вышеупомянутое строгое неравенство. Заметим, что в этом случае $u \in [a, b[$ и $v \in]a, b]$. Кроме того, $\mathbf{t}(\mathcal{U}) \notin]u, v[$ по выбору $\tilde{U}$, u и v. Тогда

$$(\mathbf{t}(\mathcal{U}) \leq u) \ \vee \ (v \leq \mathbf{t}(\mathcal{U})). \tag{4.18}$$

Рассмотрим отдельно оба случая в (4.18). Пусть сначала имеет место случай

1) $\mathbf{t}(\mathcal{U}) \leq u$. Поскольку из (4.17) вытекает равенство $\mathrm{cl}(\tilde{U}, \tau_{\mathbb{R}}) = [u, v]$ (напомним, что $u < v$), то $\mathbf{t}(\mathcal{U}) \in [u, v]$ и, как следствие, $u \leq \mathbf{t}(\mathcal{U})$. Используя предположение, приходим к равенству

$$\mathbf{t}(\mathcal{U}) = u. \tag{4.19}$$

Поэтому $u \notin \tilde{U}$, а тогда (см. (4.17)) имеем очевидное вложение

$$\tilde{U} \subset]u, v]. \tag{4.20}$$

Выберем произвольно $w \in]u, b]$. Тогда $w \notin \{\mathbf{t}(\mathcal{U})\}$, а потому (см. (4.15)) для некоторого множества $V \in \mathcal{U}$

$$w \notin \mathrm{cl}(V, \tau_{\mathbb{R}}). \tag{4.21}$$

Тогда $V \neq \varnothing$ и $V \in \mathcal{J}$, а потому для некоторых $v_1 \in \mathbf{I}$ и $v_2 \in \mathbf{I}$

$$(]v_1, v_2[\subset V) \ \& \ (V \subset [v_1, v_2]). \tag{4.22}$$

При этом $v_1 \leq v_2$ согласно (4.22) и, как легко видеть, $u \in [v_1, v_2]$. Более того, $v_1 < v_2$ (аналогичная проверка рассматривалась ранее). Тогда, как легко видеть,

$$\mathrm{cl}(V, \tau_{\mathbb{R}}) = [v_1, v_2]. \tag{4.23}$$

Из (4.21) и (4.23) получаем следующее свойство: $(w < v_1) \ \vee \ (v_2 < w)$. Однако (по выбору w) $v_1 \leq u < w$, а потому $v_2 < w$. При этом $\tilde{U} \cap V \in \mathcal{U}$ (см. (3.5)). Кроме того, в силу (4.20) и (4.22) $\tilde{U} \cap V \subset]u, v] \cap [v_1, v_2] \subset]u, v_2] \subset]u, w]$. Поскольку $]u, w] \in \mathcal{J}$, то согласно (3.5) $]u, w] \in \mathcal{U}$. Коль скоро выбор w был произвольным, установлено, что (см. (4.10)) $\mathcal{J}_u^{(+)} \subset \mathcal{U}$ (напомним, что $u \in [a, b[$). Тогда (см. (3.10)) $(\mathbf{I\text{-fi}})[\mathcal{J}_u^{(+)} | \mathcal{J}] \subset \mathcal{U}$ и, в силу максимальности $(\mathbf{I\text{-fi}})[\mathcal{J}_u^{(+)} | \mathcal{J}]$, справедливо (см. (4.11),(4.19)) равенство $\mathcal{U} = (\mathbf{I\text{-fi}})[\mathcal{J}_u^{(+)} | \mathcal{J}]$. Итак (см. (4.19)),

$$(\mathbf{t}(\mathcal{U}) \leq u) \Longrightarrow (\mathcal{U} = (\mathbf{I\text{-fi}})[\mathcal{J}_{\mathbf{t}(\mathcal{U})}^{(+)} | \mathcal{J}]). \tag{4.24}$$

2) Пусть $v \leq \mathbf{t}(\mathcal{U})$. Тогда $u < v \leq \mathbf{t}(\mathcal{U})$. Поскольку $\mathbf{t}(\mathcal{U}) \in [u, v]$, то $\mathbf{t}(\mathcal{U}) \leq v$ и мы получаем равенство $\mathbf{t}(\mathcal{U}) = v$, откуда по выбору $\tilde{U}$ следует, что $v \notin \tilde{U}$. В этом случае (см. (4.17))

$$\tilde{U} \subset [u, v[. \tag{4.25}$$

Выберем произвольно $\theta \in [a, v[$. Тогда, в частности, $\theta \in \mathbf{I}$ и при этом $\theta \neq \mathbf{t}(\mathcal{U})$. Поэтому (см. (4.15)) для некоторого множества $\Gamma \in \mathcal{U}$ имеем свойство

$$\theta \notin \mathrm{cl}(\Gamma, \tau_{\mathbb{R}}). \tag{4.26}$$

Вместе с тем из (4.15) вытекает следующее очевидное включение:

$$v = \mathbf{t}(\mathcal{U}) \in \mathrm{cl}(\Gamma, \tau_{\mathbb{R}}). \tag{4.27}$$

По выбору Γ имеем, что $\Gamma \in \mathcal{J},\ \Gamma \neq \varnothing$ и для некоторых $\gamma_1 \in \mathbf{I}$ и $\gamma_2 \in \mathbf{I}$

$$(]\gamma_1, \gamma_2[\, \subset \Gamma)\ \&\ (\Gamma \subset [\gamma_1, \gamma_2]). \tag{4.28}$$

Из (4.27), (4.28) следует включение $v \in [\gamma_1, \gamma_2]$. Разумеется, $(\gamma_1 = \gamma_2)\ \vee\ (\gamma_1 < \gamma_2)$. Равенство $\gamma_1 = \gamma_2$ невозможно (см. (3.5), (4.28)). Следовательно, $\gamma_1 < \gamma_2$, а тогда с учетом (4.28) имеем равенство $\mathrm{cl}(\Gamma, \tau_{\mathbb{R}}) = [\gamma_1, \gamma_2]$. В итоге (см. (4.26)) $\theta \notin [\gamma_1, \gamma_2]$. Поскольку (по выбору θ) $\theta < v \leq \gamma_2$, то $\theta < \gamma_1$. Заметим, что $\tilde{U} \cap \Gamma \in \mathcal{U}$. При этом (см. (4.25), (4.28))

$$\tilde{U} \cap \Gamma \subset [u, v[\, \cap [\gamma_1, \gamma_2] \subset [\gamma_1, v[\, \subset [\theta, v[. \tag{4.29}$$

Из (3.5), (4.29) имеем (коль скоро $[\theta, v[\, \in \mathcal{J}$) включение $[\theta, v[\, \in \mathcal{U}$. Поскольку выбор θ был произвольным, установлено, что

$$[c, v[\, \in \mathcal{U} \quad \forall c \in [a, v[. \tag{4.30}$$

При этом $v \in\,]a, b]$ (поскольку $a \leq u < v \leq b$) и определена БУ $\mathcal{J}_v^{(-)} = \{[c, v[\colon c \in [a, v[\} \in \beta_{\mathcal{J}}^{00}[\mathbf{I}]$. Из (4.30) следует вложение $\mathcal{J}_v^{(-)} \subset \mathcal{U}$ и, как следствие, $(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_v^{(-)}|\mathcal{J}] \subset \mathcal{U}$; в силу максимальности $\mathcal{J}$-фильтра $(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_v^{(-)}|\mathcal{J}]$ (см. предложение 4.1) $\mathcal{U} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_v^{(-)}|\mathcal{J}]$. С учетом (4.27) имеем равенство $\mathcal{U} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_{\mathbf{t}(\mathcal{U})}^{(-)}|\mathcal{J}]$ в случае 2). Итак,

$$(v \leq \mathbf{t}(\mathcal{U})) \Longrightarrow (\mathcal{U} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_{\mathbf{t}(\mathcal{U})}^{(-)}|\mathcal{J}]). \tag{4.31}$$

Из (4.18), (4.24) и (4.31) вытекает требуемое утверждение. □

Поскольку $a \in [a, b[$, имеем (см. предложение 4.2) согласно (4.10) БУ $\mathcal{J}_a^{(+)} = \{]a, c]\colon c \in\,]a, b]\} \in \beta_{\mathcal{J}}^{00}[\mathbf{I}]$.

Предложение 4.4. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J})$ *и* $\mathbf{t}(\mathcal{U}) = a$, *то* $\mathcal{U} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_a^{(+)}|\mathcal{J}]$.

Доказательство осуществляется по аналогии с доказательством предложения 4.3, и по этой причине в данном изложении опущено. Отметим, что $b \in]a, b]$, а потому согласно (4.3) определена БУ $\mathcal{J}_b^{(-)} = \{[c, b[\colon c \in [a, b[\} \in \beta_{\mathcal{J}}^{00}[\mathbf{I}]$.

Предложение 4.5. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J})$ *и* $\mathbf{t}(\mathcal{U}) = b$, *то* $\mathcal{U} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_b^{(-)}|\mathcal{J}]$.

Доказательство осуществляется по схеме, подобной обоснованию предложения 4.1.

Теорема 4.1. *Множество всех свободных $\mathcal{J}$-у/ф имеет следующий вид*:

$$\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}) = \big\{(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_c^{(-)}|\mathcal{J}]\colon\ c \in]a, b]\big\} \cup \big\{(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_c^{(+)}|\mathcal{J}]\colon\ c \in [a, b[\big\}. \tag{4.32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (4.9) имеем следующее очевидное вложение:

$$\Omega_1 \triangleq \{(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_c^{(-)}|\mathcal{J}]\colon\ c \in]a, b]\} \subset \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}). \tag{4.33}$$

Кроме того, из (4.11) получаем также следующее вложение:

$$\Omega_2 \overset{\triangle}{=} \{(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_c^{(+)}|\mathcal{J}]:\ c \in [a, b[\,\} \subset \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}). \tag{4.34}$$

Из (4.33) и (4.34) вытекает очевидная нижняя оценка множества $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J})$:

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}). \tag{4.35}$$

Выберем произвольный свободный $\mathcal{J}$-у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J})$. Согласно (3.23) имеем, в частности, что $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$. Тогда определено пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(U, \tau_{\mathbb{R}})$, $U \in \mathcal{U}$. Согласно (4.15) $\theta \overset{\triangle}{=} \mathbf{t}(\mathcal{U}) \in \mathbf{I}$. При этом (см. (4.15)) пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(U, \tau_{\mathbb{R}})$, $U \in \mathcal{U}$, совпадает с $\{\theta\}$. По определению $\mathbf{I}$ имеем равенство $\mathbf{I} =]a, b[\cup \{a; b\}$, а потому

$$(\theta \in]a, b[)\ \vee (\theta = a)\ \vee\ (\theta = b). \tag{4.36}$$

Рассмотрим отдельно каждый из случаев, упоминаемых в (4.36). Пусть сначала

1) $\theta \in\ ]a, b[$. Тогда согласно предложению 4.3 имеем свойство $(\mathcal{U} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_\theta^{(-)}|\mathcal{J}])\ \vee\ (\mathcal{U} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_\theta^{(+)}|\mathcal{J}])$. С учетом (4.33), (4.34) получаем теперь, что

$$(\mathcal{U} \in \Omega_1)\ \vee\ (\mathcal{U} \in \Omega_2). \tag{4.37}$$

Тем самым установлена (см. (4.37)) следующая импликация:

$$(\theta \in]a, b[) \Longrightarrow (\mathcal{U} \in \Omega_1 \cup \Omega_2). \tag{4.38}$$

2) Пусть $\theta = a$. Тогда с учетом предложения 4.4 получаем, что $\mathcal{U} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_a^{(+)}|\mathcal{J}]$. Поскольку $a \in [a, b[$, то $\mathcal{U} \in \Omega_2$ в силу (4.34). Итак,

$$(\theta = a) \Longrightarrow (\mathcal{U} \in \Omega_2). \tag{4.39}$$

3) Пусть $\theta = b$. Тогда согласно предложению 4.5 имеем равенство $\mathcal{U} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_b^{(-)}|\mathcal{J}]$. Поскольку $b \in]a, b]$, то (см. (4.33)) $\mathcal{U} \in \Omega_1$. Итак, установлена импликация

$$(\theta = b) \Longrightarrow (\mathcal{U} \in \Omega_1). \tag{4.40}$$

Из (4.36)–(4.40) следует, что во всех возможных случаях $\mathcal{U} \in \Omega_1 \cup \Omega_2$. Поскольку выбор $\mathcal{U}$ был произвольным, установлено вложение $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, откуда с учетом (4.35) вытекает равенство $\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}) = \Omega_1 \cup \Omega_2$. С учетом (4.33) и (4.34) получаем требуемое равенство (4.32). $\square$

Из (3.24), (3.28) и (4.2) получаем теперь, что

$$(\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}) \cup w[\mathcal{J}]^1(\mathbf{I}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}))\ \&\ (\mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{J}) \cap w[\mathcal{J}]^1(\mathbf{I}) = \varnothing). \tag{4.41}$$

В (4.41) реализуется конструктивное представление множества всех $\mathcal{J}$-у/ф.

5. Продолжение фильтров (общие сведения)

В настоящем разделе фиксируем произвольное непустое множество E и два семейства: $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и $\mathcal{M} \in \pi[E] \cap \mathcal{P}(\mathcal{L})$. Итак, $\mathcal{M} \in \pi[E]$ и при этом $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Будем рассматривать вопросы, связанные с построением по заданному $\mathcal{M}$-фильтру $\mathcal{L}$-фильтра, который в виде пересечения с $\mathcal{M}$ доставлял бы исходный $\mathcal{M}$-фильтр. Эту процедуру будем именовать продолжением $\mathcal{M}$-фильтра. Особый интерес представляет для нас продолжение $\mathcal{M}$-у/ф с сохранением свойства максимальности; в этом случае будем говорить о продолжении $\mathcal{M}$-у/ф (до $\mathcal{L}$-у/ф). При этом

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \subset \beta_{\mathcal{M}}^0[E] \subset \beta_{\mathcal{L}}^0[E]. \tag{5.1}$$

Используя (3.10) и (5.1), получаем, в частности, что

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{L}] = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon\ U \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}). \tag{5.2}$$

Ясно, что процедура, упомянутая в (5.2), может не сохранять максимальность фильтра.

П р и м е р. Пусть для определенности $E = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ соответствует разд. 4, т. е. $E = [a, b]$, где $a \in \mathbb{R}$ и $b \in]a, \infty[$. Полагаем в данном примере, что $\mathcal{M} = \{\varnothing; E\}$, а $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$. Тогда $\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ в силу (3.5). Более того, $\{E\}$ есть у/ф. Действительно, пусть $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ обладает свойством $\{E\} \subset \mathcal{F}$ (на самом деле каждый $\mathcal{M}$-фильтр обладает этим свойством). Поскольку $\varnothing \notin \mathcal{F}$ и $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, то $\mathcal{F} \subset \{E\}$, а потому $\mathcal{F} = \{E\}$. Поскольку выбор $\mathcal{F}$ был произвольным, установлено, что $\{E\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M})$ (получили одноэлементный $\mathcal{M}$-у/ф). Рассмотрим $\mathcal{L}$-фильтр $\mathcal{E} \stackrel{\triangle}{=} (E\text{-}\mathbf{fi})[\{E\}|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$; тогда согласно (5.2)

$$\mathcal{E} = \{L \in \mathcal{L} \mid E \subset L\} = \{L \in \mathcal{P}(E) \mid E \subset L\} = \{E\}.$$

Вместе с тем справедливо следующее свойство: фильтр

$$w[\mathcal{L}](a) = (E\text{-ult})[a] \cap \mathcal{L} = \{L \in \mathcal{L} \mid a \in L\} = \{L \in \mathcal{P}(E) \mid a \in L\} = (E\text{-ult})[a] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$$

непременно содержит E: $E \in w[\mathcal{L}](a)$ и, стало быть, $\{E\} \subset w[\mathcal{L}](a)$. При этом, однако, $\{a\} \in w[\mathcal{L}](a) \setminus \{E\}$, а потому $\{E\} \neq w[\mathcal{L}](a)$. Следовательно, $\mathcal{E} = \{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. □

Итак, продолжение у/ф не всегда является у/ф. Более того, из примера видно, что и продолжение тривиального $\mathcal{M}$-у/ф может не быть у/ф (в примере, рассмотренном выше, $\{E\} = (E\text{-ult})[a] \cap \mathcal{M}$). Отметим, однако, следующее очевидное

Предложение 5.1. *Если $x \in E$ и при этом $\forall L \in \mathcal{L}$*

$$(x \in L) \Longrightarrow (\exists M \in \mathcal{M}\colon\ (x \in M)\ \&\ (M \subset L)),$$

то справедливо равенство $(E\text{-}\mathbf{fi})[(E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{M}|\mathcal{L}] = (E\text{-}\mathbf{fi})[x] \cap \mathcal{L}$.

В качестве простого следствия отметим, что

$$(\mathcal{L} \subset \{\cup\}(\mathcal{M})) \Longrightarrow ((E\text{-}\mathbf{fi})[(E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{M}|\mathcal{L}] = (E\text{-}\mathbf{fi})[x] \cap \mathcal{L} \ \ \forall x \in E). \tag{5.3}$$

В (5.3) даны условия того, что тривиальные фильтры продолжаются снова до тривиальных фильтров. Из (3.28) и (5.3) вытекает, что

$$(\mathcal{L} \subset \{\cup\}(\mathcal{M})) \Longrightarrow ((E\text{-}\mathbf{fi})[w[\mathcal{M}](x)|\mathcal{L}] = w[\mathcal{L}](x) \ \ \forall x \in E). \tag{5.4}$$

В дополнение к (5.4) отметим, что $\forall x \in E$

$$((E\text{-}\mathbf{fi})[w[\mathcal{M}](x)|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \Longrightarrow ((E\text{-}\mathbf{fi})[w[\mathcal{M}](x)|\mathcal{L}] = w[\mathcal{L}](x)). \tag{5.5}$$

Доказательство (5.5) следует из определений (см. (3.8), (3.10)). Заметим здесь же, что

$$((\mathcal{M} \in \Pi[E])\ \&\ (\mathcal{L} = \mathbf{a}_E^0(\mathcal{M}))) \Longrightarrow ((E\text{-}\mathbf{fi})[w[\mathcal{M}](x)|\mathcal{L}] = w[\mathcal{L}](x) \ \ \forall x \in E). \tag{5.6}$$

Свойство (5.6), следующее из (2.4) и (5.4), можно рассматривать как условие сохранения тривиальности фильтра при его продолжении. Отметим еще несколько простых свойств. Так, в частности, $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{X}|\mathcal{L}] \cap \mathcal{M} = \mathcal{X} \tag{5.7}$$

(доказательство следует из определений; см. (3.5)). Кроме того,

$$\mathcal{Y} \cap \mathcal{M} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \ \ \forall \mathcal{Y} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{5.8}$$

С учетом (5.7) и (5.8) легко проверяется следующее равенство:

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{M}) = \{\mathcal{F} \cap \mathcal{M}\colon\ \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\}. \tag{5.9}$$

Разумеется, (5.9) применимо в случае $\mathcal{M} \in \Pi[E]$ и $\mathcal{L} = \mathbf{a}_E^0(\mathcal{M})$. В этом случае, однако, имеем и целый ряд других полезных свойств. Возвращаясь к общему случаю семейств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$, отметим

Предложение 5.2. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M})$, *то непременно* $\exists \tilde{\mathcal{U}} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\colon\ \mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}} \cap \mathcal{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (5.9) имеем для некоторого $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ равенство $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$. С учетом (3.7) подберем $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ так, что при этом $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$, получая вложение

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{W} \cap \mathcal{M}. \tag{5.10}$$

Заметим, что $\mathcal{W} \cap \mathcal{M} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ (см. (5.8),(5.9)). Из (3.6) и (5.10) получаем равенство $\mathcal{U} = \mathcal{W} \cap \mathcal{M}$. Поэтому $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\colon \mathcal{U} = \mathcal{W} \cap \mathcal{M}$. □

Итак, $\mathcal{M}$-у/ф допускают продолжение до $\mathcal{L}$-у/ф, но сам способ продолжения может не сводиться (см. пример) к процедуре на основе (3.10). В следующем предложении учитываем (3.10) и (5.1).

Предложение 5.3. *Если* $\mathcal{B} \in \beta^0_{\mathcal{M}}[E]$, *то* $\mathcal{M}$-*фильтр* $(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{M}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ *обладает свойством*

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{M}]|\mathcal{L}] = (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}]. \tag{5.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что $\mathcal{F} \triangleq (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{M}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M})$ и, в частности, $\mathcal{F} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$, причем $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ согласно (3.10). Тогда

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}] \subset (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{F}|\mathcal{L}]. \tag{5.12}$$

Пусть $T \in (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{F}|\mathcal{L}]$. Тогда согласно (3.10) имеем, что $T \in \mathcal{L}$ и для некоторого $F \in \mathcal{F}$ справедливо вложение $F \subset T$. С другой стороны, по определению $\mathcal{F}$ имеем из (3.10), что $F \in \mathcal{M}$ и при этом $\mathbb{B} \subset F$ для некоторого $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$. Тогда $T \in \mathcal{L}$ таково, что $\mathbb{B} \subset T$ и согласно (3.10) $T \in (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}]$. Вложение $(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{F}|\mathcal{L}] \subset (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}]$ установлено. С учетом (5.12) получаем требуемое равенство: $(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{F}|\mathcal{L}] = (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}]$. □

Отметим, что согласно (3.6) имеем при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, что $\mathcal{F}$ есть непустое семейство п/м E, а потому определено пересечение всех множеств из $\mathcal{F}$, являющееся п/м E. Возвращаясь к (5.2), получаем, что

$$\bigcap_{F \in (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{L}]} F = \varnothing \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{M}). \tag{5.13}$$

З а м е ч а н и е 5.1. Проверим (5.13), фиксируя $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{M})$. Согласно (5.1) $\mathcal{U} \in \beta^0_{\mathcal{L}}[E]$ и (см.(3.10))

$$\mathcal{V} \triangleq (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{L}] = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon\ U \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L});$$

определено пересечение всех множеств из $\mathcal{V}$. Поскольку $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, имеем вложение

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U. \tag{5.14}$$

С учетом (3.23) получаем, что пересечение всех множеств из $\mathcal{V}$ пусто, что и требовалось установить. □

Итак, продолжение свободного $\mathcal{M}$-у/ф на $\mathcal{L}$ — свободный $\mathcal{L}$-фильтр. Тогда $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{M})$

$$((E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \Longrightarrow ((E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L})). \tag{5.15}$$

В виде (5.15) получаем утверждение об условиях продолжения свободных у/ф.

Пусть до конца настоящего раздела $\mathcal{M} \in \Pi[E]$ и $\mathcal{L} = \mathbf{a}^0_E(\mathcal{M})$, т. е. обсуждаем далее проблему продолжения $\mathcal{M}$-фильтров и $\mathcal{M}$-у/ф до фильтров и у/ф алгебры, порожденной полуалгеброй $\mathcal{M}$. Напомним, что согласно (3.10)

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{L}] = (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathbf{a}_E^0(\mathcal{M})] = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon\ U \subset L\}$$
$$= \{L \in \mathbf{a}_E^0(\mathcal{M}) \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon\ U \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}). \tag{5.16}$$

Мы учли в (5.16) свойство (5.1). Отметим ряд легкопроверяемых фактов, связанных с (5.16). Так, в частности, имеем, что

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{M} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M})\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{5.17}$$

Доказательство использует конструкции [14, § 2.2] и [15, гл. 10], связывающие у/ф и к.-а. (0,1)-меры, а также свойства, связанные с продолжением таких мер, определенных первоначально на $\mathcal{M}$, до аналогичных мер на $\mathcal{L}$ (см. [15, с. 321, 322]). В связи с предложением 5.2 и (5.17) отметим, что (см. [9, с. 44])

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}). \tag{5.18}$$

При этом $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}) \neq \varnothing$ согласно (3.7). С учетом (5.18) определено отображение

$$\mathcal{U} \longmapsto (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U} \mid \mathcal{L}]\colon\ \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{5.19}$$

Предложение 5.4. *Отображение* (5.19) *является биекцией* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{M})$ *на* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим для краткости отображение (5.19) через θ. Тогда θ — сюръекция $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{M})$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. В самом деле, пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тогда согласно (5.17)

$$\tilde{\mathcal{V}} \overset{\triangle}{=} \mathcal{V} \cap \mathcal{M} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}). \tag{5.20}$$

Из (5.18) и (5.20) вытекает, что $\mathcal{W} \overset{\triangle}{=} \theta(\tilde{\mathcal{V}}) \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. С учетом (5.7) получаем, что $\mathcal{W} \cap \mathcal{M} = \tilde{\mathcal{V}}$ (см. определение θ (5.19)). Получили, что у/ф $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обладают свойством $\mathcal{V} \cap \mathcal{M} = \mathcal{W} \cap \mathcal{M} = \tilde{\mathcal{V}}$. Тогда $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ (мы снова используем положения [15, § 10.5], связывающие у/ф ИП и к.-а. (0,1)-меры, а также хорошо известное положение о единственности продолжения к.-а. меры с $\mathcal{M}$ на $\mathcal{L}$; см. [14, § 4.3; 16, гл. I]), а потому (см. (5.20)) $\mathcal{V} \in \theta^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}))$. Вложение $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \theta^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}))$ установлено, а потому $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \theta^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}))$ (см. (5.19)). Итак, θ — сюръекция. Пусть $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M})$ и $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M})$ таковы, что

$$\theta(\mathcal{U}_1) = \theta(\mathcal{U}_2). \tag{5.21}$$

С учетом (5.7) и (5.19) имеем, что $\theta(\mathcal{U}_1) \cap \mathcal{M} = \mathcal{U}_1$ и $\theta(\mathcal{U}_2) \cap \mathcal{M} = \mathcal{U}_2$. В соответствии с (5.21) следует поэтому, что $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$. Поскольку выбор $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ был произвольным, установлена инъективность отображения θ. □

Таким образом, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{M})$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ отождествимы посредством (5.19), где сама биекция (5.19) определяется конструкцией (5.16). Имеем, следовательно, вполне конструктивную процедуру преобразования множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{M})$ в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

Предложение 5.5. *Справедливо вложение* $\beta_{\mathcal{M}}^{00}[E] \subset \beta_{\mathcal{L}}^{00}[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{M}}^{00}[E]$. Тогда $\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{M}}^{0}[E]$ и при этом

$$\mathcal{U} = (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{M}] = \{M \in \mathcal{M} \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon\ B \subset M\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}). \tag{5.22}$$

Заметим, что (см. (5.1)) $\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{L}}^{0}[E]$, а потому определен (см. (5.16)) фильтр

$$\mathcal{V} = (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}] = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon\ B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \tag{5.23}$$

Согласно предложению 5.3 имеем, кроме того, что (см. (3.10))

$$\mathcal{V} = (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{L}] = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon\ U \subset L\}. \tag{5.24}$$

Однако согласно (5.18) и (5.24) имеем включение $(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, а тогда (см. (5.24)) $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Получили (см. (5.23)), что $\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{L}}^0[E]$: $(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. С учетом (3.14) имеем, что $\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{L}}^{00}[E]$. Поскольку выбор $\mathcal{B}$ был произвольным, требуемое вложение $\beta_{\mathcal{M}}^{00}[E] \subset \beta_{\mathcal{L}}^{00}[E]$ установлено. □

Из (3.14) и предложения 5.5 вытекает, в частности, что

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}] = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon\ B \subset L\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{M}}^{00}[E]. \tag{5.25}$$

Предложение 5.6. *Если $\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{L}}^{00}[E]$, то истинна импликация*

$$\Big(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \varnothing\Big) \Longrightarrow ((E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{L}] \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})). \tag{5.26}$$

Доказательство следует из определений (см., в частности, (3.10), (3.14)). С учетом предложений 5.5 и 5.6 имеем, конечно, что при $\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{M}}^{00}[E]$ истинна импликация (5.26). В заключение раздела отметим, что поскольку семейство $\mathcal{L}$ — алгебра множеств и, в частности, замкнуто относительно дополнений, то из (3.22) вытекает ввиду (3.28), что

$$w[\mathcal{L}](x) \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in E. \tag{5.27}$$

Итак (см. (5.27)), в рассматриваемом случае $w[\mathcal{L}]\colon E \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$.

В связи с конструкциями на основе у/ф ИП с алгебрами множеств отметим [16, *I.2.3], а также исследования [18; 19], связанные с изучением расширения Белла [20].

6. Ультрафильтры алгебры подмножеств отрезка вещественной прямой

Вернемся к случаю, рассматриваемому в разд. 4: $a \in \mathbb{R},\ b \in]a, \infty[,\ \mathbf{I} = [a, b],\ \mathcal{J}$ соответствует (4.1). Эти соглашения выдерживаются до конца настоящего раздела. Мы следуем далее обозначениям и определениям разд. 4, полагая также, что

$$\mathcal{A} \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{a}_{\mathbf{I}}^0(\mathcal{J}); \tag{6.1}$$

тогда $\mathcal{J} \in \Pi[\mathbf{I}]$ и $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$. Согласно (2.4) $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(A, \mathcal{J}) \neq \varnothing\}$. Используем также положения предыдущего раздела при условиях, что $\mathcal{M} = \mathcal{J}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{A}$. Тогда (см. (5.16), (5.18))

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{A}] = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon\ U \subset A\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}). \tag{6.2}$$

Более того (см. (5.19), предложение 5.4), отображение

$$\mathcal{U} \longmapsto (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{U}|\mathcal{A}]\colon\ \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \tag{6.3}$$

есть биекция $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Из предложения 5.5 вытекает, что

$$\beta_{\mathcal{J}}^{00}[\mathbf{I}] \subset \beta_{\mathcal{A}}^{00}[\mathbf{I}]. \tag{6.4}$$

Из (6.4), предложений 4.1 и 4.2 следует, в частности, что

$$(\mathcal{J}_t^{(-)} \in \beta_{\mathcal{A}}^{00}[\mathbf{I}] \ \ \forall t \in]a, b]) \ \&\ (\ \mathcal{J}_t^{(+)} \in \beta_{\mathcal{A}}^{00}[\mathbf{I}] \ \ \forall t \in [a, b[). \tag{6.5}$$

Заметим также в связи с (6.5), что согласно (3.14), (6.2) и предложению 5.3

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{J}]|\mathcal{A}] = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}|\mathcal{A}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{J}}^{00}[\mathbf{I}]. \tag{6.6}$$

Из (6.5), (6.6), предложений 4.1 и 4.2 вытекает, в частности, что

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{J}]|\mathcal{A}] = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{A}] \ \ \forall t \in]a, b], \tag{6.7}$$

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\mathcal{J}]|\mathcal{A}] = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\mathcal{A}] \ \ \forall t \in [a, b[. \tag{6.8}$$

Заметим, кстати, что из (4.3), (6.7) и предложения 5.6 вытекает, что

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{A}] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A}) \ \ \forall t \in]a, b]. \tag{6.9}$$

В свою очередь, из (4.10), (6.8) и предложения 5.6 следует, что

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\mathcal{A}] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A}) \ \ \forall t \in [a, b[. \tag{6.10}$$

Наконец, согласно (5.6) и (6.1) получаем очевидные представления для тривиальных у/ф ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{A})$:

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[w[\mathcal{J}](x)|\mathcal{A}] = w[\mathcal{A}](x) \ \ \forall x \in \mathbf{I}. \tag{6.11}$$

Предложение 6.1. *Справедливо следующее равенство*:

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A}) = \{(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{A}] \colon \ t \in]a, b]\} \ \cup \ \{(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\mathcal{A}] \colon \ t \in [a, b[\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Omega_1 \triangleq \{(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{A}] \colon t \in]a, b]\}$ и $\Omega_2 \triangleq \{(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\mathcal{A}] \colon t \in [a, b[\}$. Тогда согласно (6.9) и (6.10)

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A}). \tag{6.12}$$

Выберем произвольный у/ф $\tilde{\mathcal{U}} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A})$. Тогда (см. (3.23)) $\tilde{\mathcal{U}} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A})$, причем пересечение всех множеств из $\tilde{\mathcal{U}}$ пусто. Поскольку (6.3) — биекция, для некоторого у/ф $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{J})$ справедливо равенство

$$\tilde{\mathcal{U}} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{V}|\mathcal{A}]. \tag{6.13}$$

Из (4.41) вытекает, что $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{J})$ или $\mathcal{V} \in w[\mathcal{J}]^1(\mathbf{I})$. Допустим сначала последнее: пусть $\mathcal{V} \in w[\mathcal{J}]^1(\mathbf{I})$, т. е. для некоторого $\theta \in \mathbf{I}$ справедливо равенство

$$\mathcal{V} = w[\mathcal{J}](\theta). \tag{6.14}$$

Тогда в силу (6.13), (6.14) $\tilde{\mathcal{U}} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[w[\mathcal{J}](\theta)|\mathcal{A}]$ и согласно (6.11) справедлива цепочка равенств $\tilde{\mathcal{U}} = w[\mathcal{A}](\theta) = (\mathbf{I}\text{-ult})[\theta] \cap \mathcal{A} = \{A \in \mathcal{A} \mid \theta \in A\}$ (см. (3.3), (3.28)), причем $\tilde{\mathcal{U}}$ — непустое семейство. Тогда θ — элемент пересечения всех множеств из $\tilde{\mathcal{U}}$, что невозможно ($\tilde{\mathcal{U}}$ — свободный $\mathcal{A}$-у/ф). Противоречие показывает, что $\mathcal{V} \notin w[\mathcal{J}]^1(\mathbf{I})$, тогда

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{J}). \tag{6.15}$$

Из теоремы 4.1 и (6.15) вытекает следующее положение:

$$(\exists c \in]a, b] \colon \ \mathcal{V} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_c^{(-)}|\mathcal{J}]) \ \vee \ (\exists c \in [a, b[\colon \ \mathcal{V} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_c^{(+)}|\mathcal{J}]). \tag{6.16}$$

Каждый из случаев, упомянутых в (6.16), рассмотрим отдельно.

1) Пусть истинно первое положение в (6.16), т. е. $\mathcal{V} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_p^{(-)}|\mathcal{J}]$ для некоторого $p \in]a, b]$. Тогда согласно (6.7) и (6.13)

$$\tilde{\mathcal{U}} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_p^{(-)}|\mathcal{J}]|\mathcal{A}] = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_p^{(-)}|\mathcal{A}] \in \Omega_1.$$

Итак, установлена следующая импликация:

$$(\exists c \in]a, b] \colon \ \mathcal{V} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_c^{(-)}|\mathcal{J}]) \Longrightarrow (\tilde{\mathcal{U}} \in \Omega_1). \tag{6.17}$$

2) Пусть в (6.16) истинно второе положение, т. е. $\mathcal{V} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_q^{(+)}|\mathcal{J}]$ для некоторого $q \in [a, b[$. Тогда из (6.8) и (6.13) следует, что

$$\tilde{\mathcal{U}} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_q^{(+)}|\mathcal{J}]|\mathcal{A}] = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_q^{(+)}|\mathcal{A}] \in \Omega_2.$$

Итак, истинна следующая импликация:

$$(\exists c \in [a, b[\colon\ \mathcal{V} = (\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_c^{(+)}|\mathcal{J}]) \Longrightarrow (\tilde{\mathcal{U}} \in \Omega_2). \tag{6.18}$$

Из (6.16)–(6.18) получаем, что во всех возможных случаях $\tilde{\mathcal{U}} \in \Omega_1 \cup \Omega_2$. Итак, установлено вложение $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A}) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, откуда с учетом (6.12) вытекает равенство $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A}) = \Omega_1 \cup \Omega_2$, чем и завершается обоснование. □

Заметим в связи с (6.9), что согласно (3.10), (4.3) и (6.5)

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(-)}|\mathcal{A}] = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists c \in [a, t[\colon\ [c, t[\subset A\} \ \ \forall t \in]a, b]. \tag{6.19}$$

Аналогичным образом из (3.10), (4.10) и (6.5) следует, что

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_t^{(+)}|\mathcal{A}] = \{A \in \mathcal{A} \mid \exists c \in]t, b]\colon\ ]t, c] \subset A\} \ \ \forall t \in [a, b[. \tag{6.20}$$

Соотношения (6.19) и (6.20) доставляют исчерпывающее (см. предложение 6.1) описание множества $\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A})$, т. е. реализуют представление всевозможных свободных у/ф ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{A})$. Вместе с тем из (5.27) и (3.28) вытекает, что $w[\mathcal{A}]\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A})$. С учетом (3.24) и (3.28) получаем, что

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}) = w[\mathcal{A}]^1(\mathbf{I}) \cup \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{A}). \tag{6.21}$$

Таким образом (см. (6.19), (6.20), предложение 6.1), равенство (6.21) доставляет конструктивное описание всего множества $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A})$. Данное описание может, в частности, использоваться в конструкциях асимптотического анализа (см., например, [5;6]). Непустое множество (6.21) может быть при этом оснащено топологией, превращающей его в компакт. Ограничимся сейчас краткими замечаниями, полагая, что $\Phi_{\mathcal{A}}(A) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}) \mid A \in \mathcal{U}\} \ \ \forall A \in \mathcal{A}$. Тогда семейство $(\mathbb{UF})[\mathbf{I}; \mathcal{A}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{A}}(A)\colon A \in \mathcal{A}\}$ является базой (определяемой единственным образом) топологии $\mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[\mathbf{I}]$ множества $\mathbf{I}$; при этом

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[\mathbf{I}]) \tag{6.22}$$

есть непустой компакт. Отметим важное свойство (отсутствующее у исходного компакта $(\mathbf{I}, \tau_{\mathbb{R}}|_{\mathbf{I}})$), полагая что CL есть оператор замыкания в компакте (6.22). Именно $\forall A_1 \in \mathcal{A}\ \forall A_2 \in \mathcal{A}$

$$(A_1 \cap A_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\mathrm{CL}(w[\mathcal{A}]^1(A_1)) \cap \mathrm{CL}(w[\mathcal{A}]^1(A_2)) = \varnothing).$$

Данное свойство связано с тем, что $\mathrm{CL}(w[\mathcal{A}]^1(L)) = \Phi_{\mathcal{A}}(L) \ \ \forall L \in \mathcal{A}$.

7. Пример исследования пространства ярусных функций

В настоящем разделе следуем обозначениям и соглашениям разд. 4 и 6 при фиксированных значениях $a \in \mathbb{R}$ и $b \in]a, \infty[$; в частности, $\mathcal{J}$ есть полуалгебра п/м $\mathbf{I}$, а $\mathcal{A}$ удовлетворяет (6.1). Полагаем, что при $H \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ индикатор $\chi_H \in \mathbb{R}^{\mathbf{I}}$ множества H определяется стандартно [16, с. 56]:

$$\big(\chi_H(t) \triangleq 1 \ \ \forall t \in H\big) \ \&\ \big(\chi_H(\tau) \triangleq 0 \ \ \forall \tau \in \mathbf{I} \setminus H\big).$$

В качестве H можно, в частности, использовать множества из $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$. Вообще при $\mathcal{L} \in \Pi[\mathbf{I}]$ обозначаем через $B_0(\mathbf{I}, \mathcal{L})$ линейную оболочку множества $\{\chi_L\colon L \in \mathcal{L}\}$ (см. [14, с. 108]). Здесь и ниже линейные операции, умножение и порядок в пространстве в/з функций с общей областью определения полагаем поточечными.

Пространство $\mathbb{B}(\mathbf{I})$ (всех) ограниченных в/з функций на $\mathbf{I}$ оснащаем традиционной sup-нормой $\|\cdot\|$ (см. [14, с. 98; 17, с. 261]), получая банахово пространство $(\mathbb{B}(\mathbf{I}), \|\cdot\|)$. Если $\mathcal{L} \in \Pi[\mathbf{I}]$, то через $B(\mathbf{I}, \mathcal{L})$ обозначаем замыкание $B_0(\mathbf{I}, \mathcal{L})$ в топологии sup-нормы $\|\cdot\|$. В частности, получаем $B(\mathbf{I}, \mathcal{J})$ и $B(\mathbf{I}, \mathcal{A})$, причем [15, с. 39]

$$B(\mathbf{I}, \mathcal{J}) = B(\mathbf{I}, \mathcal{A}). \tag{7.1}$$

Функции — элементы (7.1) — называют ярусными [8]. Ниже на основе положений разд. 4 и 6 устанавливаются некоторые полезные свойства ярусных функций (отметим здесь же, что $B_0(\mathbf{I}, \mathcal{J}) = B_0(\mathbf{I}, \mathcal{A})$).

Через $\mathbb{A}(\mathcal{J})$ обозначаем множество всех в/з к.-а. мер на $\mathcal{J}$, имеющих ограниченную вариацию, а через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{J}]$ — конус всех неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{J}$, порождающий $\mathbb{A}(\mathcal{J})$ (см. [14, § 4.11]); $\mathbb{P}(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{J}] \mid \mu(\mathbf{I}) = 1\}$ есть множество всех к.-а. вероятностей на $\mathcal{J}$, а

$$\mathbb{T}(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{J}) \mid \forall L \in \mathcal{J} \ \ (\mu(L) = 0) \ \vee \ (\mu(L) = 1)\}$$

есть множество всех к.-а. (0,1)-мер на $\mathcal{J}$. Всюду в дальнейшем полагаем, что при $f \in B(\mathbf{I}, \mathcal{J})$ и $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{J})$ интеграл

$$\int\limits_{\mathbf{I}} f d\mu \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

определяется простейшей конструкцией [14, гл. 3]. Поскольку $(\mathrm{add})_+[\mathcal{J}] \subset \mathbb{A}(\mathcal{J})$, то интеграл (7.2) определен, в частности, при $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{J})$. В этой связи напомним некоторое полезное представление к.-а. (0,1)-мер в терминах у/ф полуалгебры $\mathcal{J}$. Для этого введем сначала одно общее определение: если $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{J})$, то полагаем, что $\mathbb{X}_{\mathcal{H}} \colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ есть def такая функция, что

$$(\mathbb{X}_{\mathcal{H}}(H) \overset{\triangle}{=} 1 \ \ \forall H \in \mathcal{H}) \ \& \ (\mathbb{X}_{\mathcal{H}}(L) \overset{\triangle}{=} 0 \ \ \forall L \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{H}).$$

Тем самым определен индикатор семейства $\mathcal{H}$, рассматриваемого как подсемейство $\mathcal{J}$. Заметим, что [15, с. 345] $\mathbb{X}_{\mathcal{U}} \in \mathbb{T}(\mathcal{J}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$. Более того (см. [15, с. 350]),

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathbb{X}_{\mathcal{U}} \colon \ \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{T}(\mathcal{J})$$

есть биекция $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$ на $\mathbb{T}(\mathcal{J})$. Соответствующая обратная биекция имеет вид

$$\mu \longmapsto \mu^{-1}(\{1\}) \colon \ \mathbb{T}(\mathcal{J}) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J}).$$

Напомним теперь одно свойство [15, с. 371]: если $f \in B(\mathbf{I}, \mathcal{J})$, $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{J})$ и $\mu = \mathbb{X}_{\mathcal{U}}$, то

$$\forall \varepsilon \in \,]0, \infty[\ \exists U \in \mathcal{U} \colon \ |f(x) - \int\limits_{\mathbf{I}} f d\mu| < \varepsilon \ \ \forall x \in U. \tag{7.3}$$

Предложение 7.1. *Если* $f \in B(\mathbf{I}, \mathcal{J})$, *то справедливы следующие три свойства*:

1) *функция* f *имеет предел справа в точке* a, *т. е.*

$$\exists! c \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists \delta \in]0, \infty[\colon |f(x) - c| < \varepsilon \ \ \forall x \in \,]a, a + \delta[\cap \mathbf{I};$$

2) *функция* f *имеет пределы справа и слева в каждой точке интервала* $]a, b[$, *т. е.* $\forall t \in \,]a, b[$

$$\Big(\exists! p \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists \delta \in]0, \infty[\colon \ |f(x) - p| < \varepsilon \ \forall x \in \,]t - \delta, t[\cap \mathbf{I}\Big)$$
$$\& \ \Big(\exists! q \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon \in \,]0, \infty[\ \exists \delta \in \,]0, \infty[\colon \ |f(x) - q| < \varepsilon \ \ \forall x \in]t, t + \delta[\cap \mathbf{I}\Big)$$

3) *функция* f *имеет предел слева в точке* b, *т. е.*

$$\exists! d \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon \in \,]0, \infty[\ \exists \delta \in \,]0, \infty[\colon \ |f(x) - d| < \varepsilon \ \ \forall x \in \,]b - \delta, b[\cap \mathbf{I}.$$

Доказательство получается простой комбинацией (6.9), (6.10), (6.19), (6.20) и (7.3). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Даффин Р.Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 263–267.
3. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука,1974. 456 с.
5. **Chentsov A.G.** Finitely additive measures and extensions of abstract control problems // J. Math. Sci. 2006. Vol. 133, no. 2. P. 1045–1206 (Contemporary Mathematics and its Applications; vol. 17).
6. **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна — Чеха // Современная математика и ее приложения / АН Грузии; Ин-т кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
7. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
8. **Меленцов А.А., Байдосов В.А., Змеев Г.М.** Элементы теории меры и интеграла / Свердловск: УрГУ, 1980. 100 с.
9. **Chentsov A.G. and Morina S.I.** Extensions and Relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
10. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
11. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
12. **Бурбаки Н.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
13. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
14. **Ченцов А.Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2008. 388 с.
15. **Ченцов А.Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2010. 541 с.
16. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
17. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М: ИЛ, 1962. 895 с.
18. **Бастрыков Е.С.** О некоторых точках расширения Белла счетного дискретного пространства// Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. Вып. 4. С. 3–6.
19. **Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А.** О точках одного бикомпактного расширения N // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
20. **Bell M.G.** Compact ccc non-separable spaces of small weight // Topology Proceedings. 1980. Vol. 5. P. 11–25.

Ченцов Александр Георгиевич Поступила 10.01.2011

чл.-кор. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.54

ФИНИТАРНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП[1]

Д. А. Швед

Исследуется строение групп финитарных автоморфизмов полупростых групп. В частности, показывается, что группа финитарных автоморфизмов произвольной полупростой группы имеет точное финитарное подстановочное представление.

Ключевые слова: группы финитарных автоморфизмов, группы финитарных подстановок, полупростые группы.

D. A. Shved. Finitary automorphisms of semisimple groups.

The structure of groups of finitary automorphisms of semisimple groups is investigated. In particular, it is shown that the group of finitary automorphisms of an arbitrary semisimple group has a faithful finitary permutation representation.

Keywords: finitary automorphism groups, finitary permutation groups, semisimple groups.

Введение

В [1] начато исследование строения групп финитарных автоморфизмов произвольной группы. Напомним, что *финитарными* мы называем такие автоморфизмы некоторой группы, которые имеют в этой группе централизатор конечного индекса. Финитарные автоморфизмы произвольной группы G, как легко видеть, образуют нормальную подгруппу в группе $\mathrm{Aut}\,G$ всех ее автоморфизмов. Мы называем эту подгруппу *группой всех финитарных автоморфизмов* группы G и обозначаем через $\mathrm{FAut}\,G$. Подгруппы группы $\mathrm{FAut}\,G$ мы называем просто *группами финитарных автоморфизмов* группы G.

Введенное нами понятие группы финитарных автоморфизмов в некотором смысле обобщает понятие группы $\mathrm{FGL}(V)$ финитарных линейных преобразований векторного пространства V. Группа $\mathrm{FGL}(V)$ состоит из тех линейных преобразований V, которые действуют тождественно на подпространстве конечной коразмерности в V. Очевидно, в том случае, когда V — пространство над конечным полем простого порядка, группы $\mathrm{FGL}(V)$ и $\mathrm{FAut}\,V$ совпадают. Строение групп финитарных линейных преобразований весьма полно изучено в [2].

В работе [1] было показано, что строение группы $\mathrm{FAut}\,G$ сильно зависит от строения FC-центра группы G (см. определение в следующем разделе). В настоящей работе мы докажем, что $\mathrm{FAut}\,G$ имеет точное финитарное подстановочное представление в случае, если FC-центр группы G является полупростой группой, т. е. не содержит неединичных абелевых нормальных подгрупп. Отсюда, конечно, следует, что если G — полупростая группа, то группа $\mathrm{FAut}\,G$ имеет точное финитарное подстановочное представление. Заметим, что группы финитарных подстановок являлись объектом исследования многих авторов (см., например, [3]), и этот класс групп является на сегодняшний день достаточно хорошо изученным. Известно (см. [3, с. 115]), что справедлива альтернатива: любая транзитивная группа финитарных подстановок либо почти примитивна, либо вполне импримитивна. Естественно возникает вопрос: каково действие на бесконечных орбитах полученного нами подстановочного представления $\mathrm{FAut}\,G$, в частности, может ли $\mathrm{FAut}\,G$ действовать вполне импримитивно на бесконечных орбитах? К сожалению, ответ на этот вопрос найти не удалось, он остается открытым.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00349) и АВПЦ “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/12136).

1. Вспомогательные результаты

Для формулировки основного результата нам понадобится стандартное понятие FC-центра произвольной группы.

О п р е д е л е н и е 1. Объединение всех конечных классов группы G называется ее *FC-центром* и обозначается через $\mathrm{FC}(G)$.

Нетрудно видеть, что $\mathrm{FC}(G)$ является характеристической подгруппой группы G, а также FC-группой. Мы будем использовать следующие известные свойства FC-групп (см. [4, с. 338, с. 504]).

Лемма 1. *Если G — FC-группа, то факторгруппа G по ее центру периодична.*

Лемма 2. *Всякая периодическая FC-группа локально нормальна.*

О п р е д е л е н и е 2. Группа, не содержащая неединичных нормальных абелевых подгрупп, называется *полупростой*.

Поскольку мы исследуем полупростые группы, отметим сразу одно свойство полупростых FC-групп, вытекающее из указанных лемм.

Предложение 1. *Всякая полупростая FC-группа локально нормальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — произвольная полупростая FC-группа. Из полупростоты G сразу следует, что ее центр $\mathrm{Z}(G)$ тривиален и, значит, $G \simeq G/\mathrm{Z}(G)$. Тогда по лемме 1 группа G периодична, и по лемме 2 она локально нормальна. $\square$

Мы также будем пользоваться оказавшимся весьма удобным понятием девиации автоморфизма группы.

О п р е д е л е н и е 3. *Девиацией* автоморфизма φ группы G называется множество $\mathrm{D}(G,\varphi) := \{[x,\varphi] \mid x \in G\}$, где $[x,\varphi] = x^{-1}\varphi(x)$.

Нетрудно понять, что автоморфизм группы является тождественным тогда и только тогда, когда его девиация состоит лишь из единицы группы. Более того, финитарность автоморфизма равносильна конечности его девиации (см. [1, лемма 1]).

Лемма 3. *Девиация любого финитарного автоморфизма произвольной группы содержится в ее FC-центре.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. [1, лемма 5].

2. Основной результат

Теорема. *Пусть G — группа с полупростым FC-центром. Тогда группа $\mathrm{FAut}\,G$ имеет точное финитарное подстановочное представление.*

Мы будем конструировать множество Ω_G и представление $\mu_G\colon\ \mathrm{FAut}\,G \to \mathrm{FSym}\,\Omega_G$, где $\mathrm{FSym}\,\Omega_G$ — группа всех финитарных подстановок на Ω_G, при помощи минимальных нормальных подгрупп группы G. Минимальными нормальными подгруппами произвольной группы G мы называем, как обычно, минимальные элементы множества всех неединичных нормальных подгрупп в G, упорядоченного по включению. Очевидно, что если группа G локально нормальна и нетривиальна, то в ней минимальные нормальные подгруппы существуют и конечны. Более того, любая нормальная подгруппа в G обязательно содержит минимальную нормальную в G подгруппу. Также очевидно, что любые две минимальные нормальные подгруппы имеют тривиальное пересечение.

Пусть теперь G — группа с полупростым FC-центром. Через Ω_G обозначим объединение всех минимальных нормальных подгрупп в $\mathrm{FC}(G)$. Заметим, что по предложению 1 группа $\mathrm{FC}(G)$ локально нормальна и из вышесказанного следует, что если $\mathrm{FC}(G) \neq 1$, то множество Ω_G непусто. Если же $\mathrm{FC}(G) = 1$, то множество Ω_G окажется пустым, что нас тоже вполне устраивает.

Предложение 2. *Пусть H — полупростая FC-группа и N — подгруппа в H, порожденная всеми минимальными нормальными подгруппами в H. Тогда $\mathrm{C}_H(N) = 1$.*

Доказательство. Очевидно, что N нормальна в H, а значит, и $\mathrm{C}_H(N)$ нормальна в H. По предложению 1 группа H локально нормальна. Следовательно, если $\mathrm{C}_H(N) \neq 1$, то в H найдется минимальная нормальная подгруппа M, лежащая в $\mathrm{C}_H(N)$. Но тогда получаем, что M поэлементно перестановочна с N и $M \leqslant N$, откуда следует, что M абелева. Однако этого не может быть, поскольку H полупроста. $\square$

Следствие 1. *Если G — группа с полупростым* FC*-центром, то*

$$\mathrm{C}_G(\langle\Omega_G\rangle) \cap \mathrm{FC}(G) = 1.$$

Доказательство. Достаточно применить предложение 2 к группе $H = \mathrm{FC}(G)$. $\square$

Очевидно, что множество Ω_G переходит в себя под действием любого автоморфизма группы G, в том числе и под действием любого финитарного автоморфизма. Это значит, что мы можем определить подстановочное представление $\mu_G\colon\ \mathrm{FAut}\,G \to \mathrm{Sym}\,\Omega_G$, ставящее в соответствие автоморфизмам группы G их ограничения на Ω_G.

Предложение 3. *Если G — группа с полупростым* FC*-центром, то представление μ_G : $\mathrm{FAut}\,G \to \mathrm{Sym}\,\Omega_G$ имеет тривиальное ядро.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{FAut}\,G$ и $\mu_G(\varphi) = 1$. Учитывая следствие 1, достаточно доказать, что $\mathrm{D}(G,\varphi) \subseteq \mathrm{FC}(G)$ и $\mathrm{D}(G,\varphi) \subseteq \mathrm{C}_G(\langle\Omega_G\rangle)$. Первое включение составляет утверждение леммы 3. Докажем второе.

Пусть $n \in \langle\Omega_G\rangle$, $a = [x,\, \varphi] \in \mathrm{D}(G,\varphi)$. Тогда

$$a^n = n^{-1}x^{-1}\varphi(x)n = (xn)^{-1}\varphi(xn) = [xn,\, \varphi] = \left[n^{x^{-1}}x, \varphi\right].$$

Заметим теперь, что подгруппа $\langle\Omega_G\rangle$ нормальна в G, а значит $n^{x^{-1}} \in \langle\Omega_G\rangle$ и $\varphi(n^{x^{-1}}) = n^{x^{-1}}$. Получаем $a^n = x^{-1}\left[n^{x^{-1}}, \varphi\right]\varphi(x) = x^{-1}\varphi(x) = a$. Итак, девиация $\mathrm{D}(G,\varphi)$ поэлементно перестановочна с $\langle\Omega_G\rangle$. Тем самым мы доказали включение $\mathrm{D}(G,\varphi) \subseteq \mathrm{C}_G(\langle\Omega_G\rangle)$, что и требовалось доказать. $\square$

Предложение 4. *Пусть G — группа с полупростым* FC*-центром и μ_G : $\mathrm{FAut}\,G \to \mathrm{Sym}\,\Omega_G$ — подстановочное представление, построенное выше. Тогда это представление финитарно, т. е. для любого $\varphi \in \mathrm{FAut}\,G$ подстановка $\mu_G(\varphi) = \varphi|_{\Omega_G}$ имеет конечный носитель.*

Доказательство. Пусть φ — произвольный финитарный автоморфизм группы G. В [1] отмечено, что пересечение K всех подгрупп в G, сопряженных с централизатором автоморфизма φ, есть нормальная подгруппа конечного индекса в G, на которой φ действует тождественно. Заметим, что все минимальные нормальные подгруппы в $\mathrm{FC}(G)$ конечны. Теперь, очевидно, достаточно доказать, что лишь конечное их число не содержится полностью в K.

Положим $\overline{G} = G/K$. Будем обозначать добавлением сверху черты образы различных подгрупп группы G при естественном гомоморфизме $G \to \overline{G}$. Пусть M и N — две различные минимальные нормальные подгруппы в $\mathrm{FC}(G)$, не содержащиеся в K. Докажем, что $\overline{M} \neq \overline{N}$. Предположим противное. Тогда, с одной стороны, имеем $\left[\overline{M},\, \overline{N}\right] = \left[\overline{M},\, \overline{M}\right] = \overline{[M,\, M]}$. Коммутант подгруппы M, очевидно, является в $\mathrm{FC}(G)$ нормальной подгруппой, и из минимальности M следует, что $[M,\, M]$ либо совпадает с M, либо тривиален. Поскольку M неабелева, последнее невозможно. Значит, $[M,\, M] = M$, и тогда $\left[\overline{M},\, \overline{N}\right] = \overline{M}$.

С другой стороны, M и N имеют тривиальное пересечение, следовательно, $[M, N] = 1$ и $[\overline{M}, \overline{N}] = \overline{1}$. Тем самым мы получили, что $\overline{M} = \overline{1}$, т.е. $M \leqslant K$; это противоречит нашему начальному предположению.

Итак, любые минимальные нормальные подгруппы в $\mathrm{FC}(G)$, не содержащиеся в K, имеют в G/K различные образы. А поскольку эта факторгруппа конечна, лишь конечное число этих минимальных подгрупп не содержится в K, что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы. Для группы G с полупростым FC-центром мы построили множество $\Omega_G \subseteq G$ и представление $\mu_G : \mathrm{FAut}\, G \to \mathrm{Sym}\, \Omega_G$. Предложение 4 показывает, что образ μ_G содержится в $\mathrm{FSym}\, \Omega_G$, т.е. представление финитарно. Предложение 3 устанавливает его точность. □

Следствие 2. *Если G — полупростая группа, то* $\mathrm{FAut}\, G$ *имеет точное финитарное подстановочное представление.*

Доказательство. По теореме достаточно доказать, что $\mathrm{FC}(G)$ — полупростая группа. Предположим противное. Тогда в $\mathrm{FC}(G)$ существует неединичная нормальная абелева подгруппа B.

Заметим, что подгруппа $\mathrm{Z}(\mathrm{FC}(G))$ абелева и нормальна в G. Поскольку G полупроста, получаем, что $\mathrm{Z}(\mathrm{FC}(G)) = 1$. Тогда по лемме 1 группа $\mathrm{FC}(G)$ периодична и по лемме 2 она локально нормальна. Из локальной нормальности $\mathrm{FC}(G)$, в свою очередь, следует, что в B найдется минимальная неединичная подгруппа, нормальная в $\mathrm{FC}(G)$.

Таким образом, непусто семейство $\{A_i\}_{i \in I}$ всех абелевых минимальных нормальных подгрупп в $\mathrm{FC}(G)$. Заметим, что $[A_i, A_j] = 1$ для любых $i, j \in I$. При $i = j$ это следует из абелевости A_i, а при $i \neq j$ — из того, что минимальные нормальные подгруппы имеют тривиальное пересечение. Отсюда имеем

$$\Big[\Big\langle \bigcup_{i \in I} A_i \Big\rangle, \ \Big\langle \bigcup_{j \in I} A_j \Big\rangle\Big] = 1.$$

Итак, мы получили в $\mathrm{FC}(G)$ абелеву неединичную характеристическую подгруппу $A = \big\langle \bigcup_{i \in I} A_i \big\rangle$. Эта подгруппа характеристична (и тем более нормальна) в G, что противоречит полупростоте группы G. □

Следствие 3. *Если G — полупростая группа, то* $\mathrm{FAut}\, G$ *имеет точное финитарное линейное представление над произвольным полем.*

Доказательство. По следствию 2 группа $\mathrm{FAut}\, G$ может быть вложена в группу финитарных подстановок $\mathrm{FSym}\, \Omega$ некоторого множества Ω. Последняя же очевидным образом может быть вложена в группу финитарных линейных преобразований векторного пространства с базисом Ω над произвольным полем. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев В.В., Швед Д.А.** Финитарные автоморфизмы групп // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 50–57.
2. **Беляев В.В.** Строение периодических групп финитарных преобразований // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 4. С. 531–551.
3. **Phillips R.E.** Finitary linear groups: a survey // Finite and Locally Finite Groups. (Istanbul, 1994). NATO ASI Ser. Ser. C: Math. Phys. Sci. Vol. 471. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 111–147.
4. **Курош А.Г.** Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.

Швед Даниил Андреевич
аспирант
Московский физико-технический институт (научно-исследовательский университет)
e-mail: danshved@gmail.com

Поступила 29.04.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 512.54 +519.17

SYMMETRICAL EXTENSIONS OF GRAPHS AND SOME OTHER TOPICS IN GRAPH THEORY RELATED WITH GROUP THEORY[1]

V. I. Trofimov

We discuss some concepts concerning graphs (mainly concepts of symmetrical extensions of graphs by graphs and of k-contractibility, k a positive integer, for graphs), which are related with the group theory and seem to be of interest.

Keywords: vertex-symmetric graph, symmetrical extension, k-contractibility.

Introduction

In this paper some concepts concerning graphs are considered. The considered concepts are related with group theory (roughly speaking, with the concept of an extension of a group by a group and the concept of a finitely presented group) and seem to be of interest. A preliminary short version of this paper was published electronically, see [1].

The graphs considered in this paper are undirected graphs without loops or multiple edges. Recall some standard terminology concerning such graphs. For a graph Γ, $V(\Gamma)$ is the vertex set of Γ and $E(\Gamma)$ is the edge set of Γ. A graph Γ is locally finite if the valency of any vertex of Γ is finite. A path of a graph Γ is a sequence $x_0,\dots,x_l$ of vertices of Γ such that $\{x_i,x_{i+1}\}\in E(\Gamma)$ for all $0\le i<l$, where l is an arbitrary non-negative integer (called the length of the path). We regard an isomorphism φ of a graph Γ_1 onto a graph Γ_2 as a bijection $V(\Gamma_1)$ onto $V(\Gamma_2)$ such that $\{x,y\}\in E(\Gamma_1)$ if and only if $\{\varphi(x),\varphi(y)\}\in E(\Gamma_2)$. Thus, we regard automorphisms of a graph Γ as permutations on $V(\Gamma)$, and the group $Aut(\Gamma)$ of all automorphisms of Γ as a permutation group on $V(\Gamma)$. A graph Γ admitting a vertex-transitive group of automorphisms is called vertex-symmetric. For a vertex-transitive group G of automorphisms of a graph Γ, an imprimitivity system σ of G is a partition of $V(\Gamma)$ (elements of σ are called blocks) such that $g(X)\in\sigma$ for any $X\in\sigma$ and any $g\in G$. If σ is an imprimitivity system of a vertex-transitive group G of automorphisms of a graph Γ, then the quotient graph of Γ over σ (i.e. the graph whose vertices are blocks of σ and edges are pairs $\{X,Y\}$ of blocks such that $X\ne Y$ and $\{x,y\}\in E(\Gamma)$ for some $x\in X, y\in Y$) is denoted by Γ/σ, and the group of automorphisms of Γ/σ induced by G is denoted by G^σ.

For a group G and $M\subseteq G$ satisfying $1\notin M=M^{-1}$, define $\Gamma_{G,M}$ to be the graph with $V(\Gamma_{G,M})=G$ and $E(\Gamma_{G,M})=\{\{x,xg\}\colon x\in G, g\in M\}$. (In the case $G=\langle M\rangle$ the connected graph $\Gamma_{G,M}$ is therefore the Cayley graph of the group G with respect to the generating set M.) The natural action of G on $\Gamma_{G,M}$ by automorphisms is defined by $g\colon x\mapsto gx$ for any $g\in G$ and any $x\in V(\Gamma_{G,M})=G$.

1. Symmetrical extensions of graphs by graphs

Let Γ and Δ be graphs, and let G be a vertex-transitive group of automorphisms of Γ. Define a connected graph $\tilde\Gamma$ to be a *G-symmetrical extension of* Γ *by* Δ if there exist a vertex-transitive

[1]Supported in part by RFBR Grant (project no. 10-01-00349).

group $\tilde{G}$ of automorphisms of $\tilde{\Gamma}$ and an imprimitivity system σ of $\tilde{G}$ (on $V(\tilde{\Gamma})$) such that the following assertions (i) and (ii) hold:

(i) there exists an isomorphism φ of $\tilde{\Gamma}/\sigma$ onto Γ such that $\varphi\tilde{G}^{\sigma}\varphi^{-1} = G$;

(ii) blocks of σ generate in $\tilde{\Gamma}$ subgraphs isomorphic to Δ.

If $\tilde{G}$ and σ can be chosen such that, in addition, blocks of σ are orbits of a normal subgroup of $\tilde{G}$, $\tilde{\Gamma}$ is a *normal G-symmetrical extension of* Γ *by* Δ.

It is obvious that if a G-symmetrical extension of Γ by Δ exists then Γ is connected and Δ is vertex-symmetric (and, on the other hand, that if Δ is vertex-symmetric then a normal G-symmetrical extension of Γ by Δ exists for any connected graph Γ and any vertex-transitive group G of automorphisms of Γ).

For graphs Γ and Δ, define a graph $\tilde{\Gamma}$ to be a (*normal*) *symmetrical extension of* Γ *by* Δ if $\tilde{\Gamma}$ is a (*normal*) *G-symmetrical extension of* Γ *by* Δ for some vertex-transitive group G of automorphisms of Γ. For a positive integer q and for a graph Γ and a vertex-transitive group G of automorphisms of Γ, define a graph $\tilde{\Gamma}$ to be a (*normal*) *G-symmetrical q-extension of* Γ if $\tilde{\Gamma}$ is a (normal) G-symmetrical extension of Γ by Δ for some graph Δ with $|V(\Delta)| = q$. Finally, for a graph Γ and a positive integer q, define a graph $\tilde{\Gamma}$ to be a (*normal*) *symmetrical q-extension of* Γ if $\tilde{\Gamma}$ is a (normal) G-symmetrical q-extension of Γ for some vertex-transitive group G of automorphisms of Γ.

In a sense, a symmetrical extension $\tilde{\Gamma}$ of a graph Γ by a graph Δ can be seen as Γ whose vertices, however, have an inner structure of Δ (or, more figuratively, are "molecules" of form Δ) and these inner structures are consistent with the structure of Γ in such a way that all vertices of the whole graph $\tilde{\Gamma}$ (which are "atoms") are indistinguishable from each other in $\tilde{\Gamma}$ (i.e. the whole graph $\tilde{\Gamma}$ admits a vertex-transitive group of automorphisms mapping "molecules" to "molecules"). $>$From this point of view, symmetrical extensions of grids by finite graphs or even T-symmetrical extensions of grids by finite graphs, where T are the groups of translations of grids, relate to crystallography of particles with inner structures and are of special interest.

Symmetrical extensions of graphs by graphs arise naturally in different contexts and are related with some well known constructions. Just to mention some of them:

(1) It is easy to see that if $\tilde{G}$ is a group generated by a set $\tilde{M}$ such that $1 \notin \tilde{M} = \tilde{M}^{-1}$ and if N is a normal subgroup of $\tilde{G}$ and $G := \tilde{G}/N$ (thus $\tilde{G}$ is an extension of the group G by the group N), then the Cayley graph $\Gamma_{\tilde{G},\tilde{M}}$ of $\tilde{G}$ with respect to $\tilde{M}$ is a normal G-symmetrical extension of $\Gamma_{G,M}$ by $\Gamma_{N,\tilde{M}\cap N}$, where $M = \{gN \colon g \in \tilde{M} \setminus N\}$ and G acts on $\Gamma_{G,M}$ in the natural way.

(2) If Γ is a connected graph admitting a vertex-transitive group of automorphisms G and if $\psi \colon V(\tilde{\Gamma}) \to V(\Gamma)$ is a covering of Γ by a connected graph $\tilde{\Gamma}$ such that the corresponding covering group $\tilde{G} := \{g \in Aut(\tilde{\Gamma}) \colon \psi g \in G\psi\}$ of G is a vertex-transitive group of automorphisms of $\tilde{\Gamma}$, then $\sigma := \{\psi^{-1}(x) \colon x \in V(\Gamma)\}$ is an imprimitivity system of $\tilde{G}$ (on $V(\tilde{\Gamma})$) and ψ induces an isomorphism φ of $\tilde{\Gamma}/\sigma$ onto Γ such that $\varphi\tilde{G}^{\sigma}\varphi^{-1}$ is a vertex-transitive subgroup of the group G. Thus $\tilde{\Gamma}$ is a $\varphi\tilde{G}^{\sigma}\varphi^{-1}$-symmetrical extension of Γ by Δ where Δ is the subgraph of the graph $\tilde{\Gamma}$ generated by a block of σ.

(3) For vertex-symmetric graphs Γ and Δ, any "standard" product (such as the Cartesian, strong, direct or lexicographic product) of Γ and Δ is a symmetrical extensions of Γ by Δ in the case it is connected.

We are mainly interested in symmetrical extensions of infinite locally finite graphs Γ by finite graphs Δ. For certain important classes of connected infinite locally finite vertex-symmetric graphs, there were obtained descriptions of the following form: graphs from the class are exactly G-symmetrical extensions of some explicitly given graphs Γ by finite graphs, where G are also explicitly given groups of automorphisms of graphs Γ. (Such type descriptions were obtained, for example, for the following classes of connected infinite locally finite vertex-symmetric graphs: graphs with polynomial growth (see [2]), graphs with recurrent symmetric random walk (see [3]), graphs with vertex-transitive bounded automorphism group (see [4]).) In this connection, investigation of such G-symmetrical extensions of graphs Γ by finite graphs could give a more detailed description of these important classes of graphs.

It is easy to give an example of a connected infinite locally finite vertex-symmetric graph Γ such that, for any positive integer q, there are (up to isomorphism) only finitely many symmetrical q-extensions of Γ. (For example, the 1-dimensional grid has this property.) On the other hand, the following result can be proved (the proof will be published elsewhere).

Theorem 1. *There exists a group G with a finite generating set $M = M^{-1}$, $1 \notin M$, such that, for any integer $q > 1$, the Cayley graph $\Gamma_{G,M}$ of G with respect to M has infinitely many pairwise non-isomorphic G-symmetrical q-extensions, where G acts on $\Gamma_{G,M}$ in the natural way. Moreover, the group G can be chosen to be a group whose subgroups different from 1 and G are of order p where p is some fixed prime number.*

It seems that even for some concrete rather simple connected infinite locally finite graphs Γ and finite graphs Δ a description (up to isomorphism) of all symmetrical extensions of Γ by Δ can be a problem (for example, for Γ to be a d-dimensional greed, $d > 1$, and Δ to be the complete graph K_q of order q, q a large power of 2). Moreover, it seems that for some concrete rather simple connected infinite locally finite graphs Γ and finite graphs Δ the question on the finiteness of the set of symmetrical extensions of Γ by Δ (considered up to isomorphism) can be a problem. In this connection the following questions are of interest.

Question 1. Let Γ be a connected locally finite graph, G a vertex-transitive group of automorphisms of Γ and q a positive integer. Suppose that there are only finitely many G-symmetrical q-extensions of Γ. Is it true that in this case there are only finitely many symmetrical q-extensions of Γ?

Question 2. Let Γ be a connected locally finite graph and q a positive integer. Suppose that there are only finitely many symmetrical extensions of Γ by the complete graph K_q of order q. Is it true that in this case there are only finitely many symmetrical q-extensions of Γ?

As it was mentioned before, T-symmetrical extensions of grids by finite graphs, where T are the groups of translations of grids, are to be of special interest. They relate to crystallography of particles with inner structures and to string theory. It can be proved that, for such type extensions, the corresponding imprimitivity systems σ (see the definition of symmetrical extensions in the beginning of this Section) are uniquely determined. Moreover, a stronger result can be proved (see Theorem 2 below). To formulate this result, recall (see [4]) that an automorphism g of a connected graph Σ is called *bounded*, if there exists a number bounding above the distance between v and $g(v)$ for every vertex v of Σ. The normal subgroup of $Aut(\Sigma)$ consisting of all bounded automorphisms of Σ is denoted by $Aut_0(\Sigma)$. (Note that, for a grid Σ, the group $Aut_0(\Sigma)$ coincides with the group of translations of Σ.) It follows easily from [4, Corollary 2 (i)] that, if Σ is locally finite, then the set $Tor(Aut_0(\Sigma))$ of all bounded automorphisms of Σ of finite order is a (normal) subgroup of $Aut(\Sigma)$.

Theorem 2. *Let Σ be a connected locally finite graph, H a vertex-transitive group of automorphisms of Σ and τ an imprimitivity system of H with finite blocks. Suppose that H^τ is a fixed-point-free and torsion-free group. Then blocks of τ are $Tor(Aut_0(\Sigma))$-orbits.*

Proof. Let K be the kernel of the natural homomorphism $H \to H^\tau$. Since blocks of τ are finite, we have $K \leq Tor(Aut_0(\Sigma))$. Since H is a vertex-transitive group of automorphisms of Σ and H^τ is a fixed-point-free group, we also have that blocks of τ are K-orbits on $V(\Sigma)$. Hence to complete the proof it remains to check that $Tor(Aut_0(\Sigma))$ stabilizes each block of τ.

Pick any $x \in V(\Sigma)$ and $g \in Tor(Aut_0(\Sigma))$. We need show that x and $g(x)$ are in one and the same block of τ. Let N be the normal closure of g in $Aut(\Sigma)$, i.e. the (normal) subgroup of $Aut(\Sigma)$ generated by all elements which are conjugate to g by elements of $Aut(\Sigma)$. Then, by [4, corollary 2], N-orbits on $V(\Sigma)$ are finite. By vertex-transitivity of H, there exists $h \in H$ such that $h(x) = g(x)$. Since x and $h(x)(= g(x))$ are in one and the same N-orbit where $N \trianglelefteq Aut(\Sigma)$, we have that h stabilizes this N-orbit. Since N-orbits are finite, it follows that the $\langle h\rangle$-orbit containing x is finite. But H^τ is fixed-point-free and torsion-free. Thus $h^\tau = 1$ and hence x and $g(x)(= h(x))$ are in one and the same block of τ. Theorem 2 is proved.

Let Γ be a d-dimensional grid, where d is some positive integer. We can put $V(\Gamma) = \mathbf{Z}^d$ and $E(\Gamma) = \{\{(i_1, \ldots, i_d), (j_1, \ldots, j_d)\} \colon |i_1 - j_1| + \ldots + |i_d - j_d| = 1\}$. Let $T = Aut_0(\Gamma)$ be the group of translations of the grid Γ. Then $T = \langle t_1 \rangle \times \ldots \times \langle t_d \rangle$, where, for arbitrary $m_1, \ldots, m_d \in \mathbf{Z}$,

$$t_1^{m_1} \ldots t_d^{m_d} \colon (i_1, \ldots, i_d) \mapsto (i_1 + m_1, \ldots, i_d + m_d), (i_1, \ldots, i_d) \in V(\Gamma).$$

If $\tilde{\Gamma}$ is a T-symmetrical extension of Γ by some finite graph Δ, then, by the definition, there are a vertex-transitive group $\tilde{T}$ of automorphisms of $\tilde{\Gamma}$ and an imprimitivity system σ of $\tilde{T}$ with finite blocks such that

(i) there exists an isomorphism φ of $\tilde{\Gamma}/\sigma$ onto Γ with $\varphi \tilde{T}^\sigma \varphi^{-1} = T$, and

(ii) blocks of σ generate in $\tilde{\Gamma}$ subgraphs isomorphic to Δ.

By Theorem 2 applied to $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{T}$ and σ (as Σ, H and τ, respectively), we get that blocks of σ are $Tor(Aut_0(\tilde{\Gamma}))$-orbits. Thus σ and hence Δ are uniquely determined by $\tilde{\Gamma}$ as a T-symmetrical extension of the grid Γ by some finite graph. Moreover, we can put $\tilde{T} = Aut_0(\tilde{\Gamma})$.

The following question concerning T-symmetrical extensions of grids is important:

Question 3. Is it true that, for any positive integer d and any finite graph Δ, there are only finitely many T-symmetrical extensions of the d-dimensional grid by Δ?

At the moment, the question is open even in the case $d = 2$. (It is easy to see that the question is answered positively in the case $d = 1$.)

Let d, Γ, T, Δ, $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{T}$, σ, φ be as above. (As it was mentioned before, $\tilde{\Gamma}$, as a T-symmetrical extension of the d-dimensional grid Γ by a finite graph, determines σ and Δ. In addition, we can put $\tilde{T} = Aut_0(\tilde{\Gamma})$.) We say that $(\tilde{\Gamma}, \varphi)$ satisfies the $[n_1, \ldots, n_d]$*-periodicity condition*, where $n_1, \ldots, n_d$ are positive integers, if there exist $g_1, \ldots, g_d \in Aut_0(\tilde{\Gamma})$ such that $[g_k, g_l] = 1$ for all $1 \leq k \leq l \leq d$ and $\varphi g_k^\sigma \varphi^{-1} = t_k^{n_k}$ for all $1 \leq k \leq d$.

Two other interesting questions are the following:

Question 4. Is it true that, for any d, Γ, T, $\tilde{\Gamma}$, φ as above, $(\tilde{\Gamma}, \varphi)$ satisfies the $[n_1, \ldots, n_d]$-periodicity condition for some positive integers $n_1, \ldots, n_d$ (depending, may be, on $\tilde{\Gamma}$ and φ)?

Question 5. Can here $n_1, \ldots, n_d$ be chosen to be dependent only on d and Δ?

If $d = 1$, then obviously $(\tilde{\Gamma}, \varphi)$ satisfies the $[1]$-periodicity condition. It follows from [5, Proposition 2], that if $d = 2$, then $(\tilde{\Gamma}, \varphi)$ satisfies the $[1, n]$-periodicity condition for some positive integer n (depending, may be, on $\tilde{\Gamma}$).

It can be easily seen that, for any d, any positive integers $n_1, \ldots, n_d$ and any Δ, there are only finitely many graphs $\tilde{\Gamma}$ such that, for some φ, $(\tilde{\Gamma}, \varphi)$ satisfies the $[n_1, \ldots, n_d]$-periodicity condition. Thus a positive answer to Question 5 would imply a positive answer to Question 3.

2. Graphs with k-contractible closed paths

We start with a translation of a part of Remark 2 on page 51 of [6]:

"Let Γ be a graph and k be a positive integer. For paths $X \colon x_0, \ldots, x_l$ and $X' \colon x'_0, \ldots, x'_{l'}$ of Γ put $X \overset{k}{\longleftrightarrow} X'$ if there exist non-negative integers m and m' such that $x_i = x'_i$ for all $0 \leq i \leq m$ and $x_{l-i} = x'_{l'-i}$ for all $0 \leq i \leq m'$ and such that $l - k \leq m + m' \leq l$ and $l' - k \leq m + m' \leq l'$. Let t be a positive integer. We say that a path X' of Γ is (k,t)-homotopic to a path X'' of Γ if there exists a sequence $X_0 = X', X_1, \ldots, X_n = X''$ of paths of Γ (where n is some positive integer) such that $X_j \overset{k}{\longleftrightarrow} X_{j+1}$ for all $0 \leq j < n$ and such that the length of X_j is not greater than t for all $0 \leq j \leq n$. A path of Γ (k,t)-homotopic to a path of length 0 is called (k,t)-contractible. Furthermore, if f is a function from the set of non-negative integers into itself such that any closed path X of Γ is $(k, f(|X|))$-contractible, where $|X|$ is the length of X, then we say that the graph Γ has the property of (k,f)-contractibility. Note that a locally finite Cayley graph of a group G has the property of (k, f)-contractibility for some f if and only if G is finitely presented (i.e. G has a presentation with a finite set of generators and a finite set of relations among those generators), and has the property of (k, f)-contractibility for some recursive function f if and only if the finitely presented group G has a solvable word problem."

For locally finite Cayley graphs of groups, these concepts are now well developed in the geometric group theory. But it seems interesting to consider also a more general case of connected locally finite vertex-symmetric graphs.

For short, we say that paths X and X' of a graph Γ are *k-homotopic*, where k is a positive integer, if X and X' are (k, t)-homotopic for some positive integer t. Next, for a positive integer k, we say that a closed path X of a graph Γ is *k-contractible* if X is (k, t)-contractible for some positive integer t, and we say that a graph Γ has the *property of k-contractibility* if any closed path X of Γ is k-contractible. (Of course, Γ has the property of k-contractibility if and only if the following holds: considering Γ topologically and gluing 2-dimensional discs along boundaries to all closed paths of Γ of lengths not greater than k, we get a topological space with trivial fundamental group.) In addition, we say that a graph Γ has the *property of recursive k-contractibility* if Γ has the property of (k, f)-contractibility for some recursive function f.

In this terminology, a locally finite Cayley graph of a group G has the property of k-contractibility if and only if G is finitely presented, and has the property of recursive k-contractibility if and only if G is finitely presented and has a solvable word problem. It is well known that there are complicated finitely presented groups with complicated locally finite Cayley graphs. In particular, there are many finitely presented groups with unsolvable word problem (see, for example,[7]). Nevertheless, there obviously are only countably many finitely presented groups (among continually many finitely generated groups) and only countably many locally finite Cayley graphs of finitely presented groups (among continually many locally finite Cayley graphs of finitely generated groups). But I do not see arguments why, for any positive integer k, it should be only countably many connected locally finite vertex-symmetric graphs with the property of k-contractibility or even with the property of recursive k-contractibility.

REFERENCES

1. **Trofimov V.I.** Some topics in graph theory related with group theory // Siberian Electronic Mathematical Riports. 2011. Vol. 8. P. 62–67.
2. **Trofimov V.I.** Graphs with polynomial growth // Math. USSR Sb. 1985. Vol. 51, no. 2 . P. 405–417.
3. **Woess W.** Topological groups and recurrence of quasitransitive graphs // Rend. Sem. Mat. Milano. 1996. Vol. 64. P. 185–213.
4. **Trofimov V.I.** Automorphisms of graphs and a characterization of lattices // Math. USSR Izvestiya. 1984. Vol. 22, no. 2. P. 379–391.
5. **Seifter N., Trofimov V.I.** Automorphism groups of graphs with quadratic growth // J. Combin. Theory. Ser. B. 1997. Vol. 71, no. 2. P. 205-210.
6. **Trofimov V.I.** Actions of groups on graphs: Doktor. Dissertation. Inst. Math. and Mech. UB Russian Acad. Sci. Ekaterinburg, 1992. 206 p. (Russian)
7. **Rotman J.** An introduction to the theory of groups. New York: Springer-Verlag, 1995. 513 p.

Trofimov Vladimir Ivanovich
Dr. Sci. (Phys.-Math.)
Leading Researcher
Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch RAS
Ural Federal University
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

Received January, 20, 2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

УДК 519.17+512.54

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ “АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ”, ПОСВЯЩЕННАЯ 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ А.И. СТАРОСТИНА

А. С. Кондратьев, А. А. Махнев

В этой статье представлены краткая биография А.И. Старостина и обзор основных событий вышеуказанной конференции.

A. S. Kondrat'ev, A. A. Makhnev. International Conference on Algebra and Geometry Dedicated to the 80th Birthday A.I. Starostin.

A.I. Starostin's brief biography and a survey of principal events at the conference are presented.

Конференция “Алгебра и геометрия”, проходившая в г. Екатеринбурге 22–27 августа 2011 г., была посвящена 80-летию со дня рождения выдающегося ученого математика А. И. Старостина.

Альберт Иванович Старостин родился 24 декабря 1931 г. в г. Сысерти Свердловской области. В 1954 г. он окончил физико-математический факультет Уральского университета по специальности “Математика”. В 1960 г. защитил кандидатскую диссертацию (научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор П. Г. Конторович), в 1963 г. получил ученое звание старшего научного сотрудника. В 1969 г. Альберт Иванович защитил докторскую диссертацию, в 1971 г. ему было присвоено ученое звание профессора.

Практически вся научная деятельность А. И. Старостина связана с Институтом математики и механики УрО РАН, в котором он работал с 1961 г. до своей кончины в 2001 г. Старостин был заведующим отделом алгебры и топологии (1965–1992), ведущим научным сотрудником этого отдела (1993–2001). С 1968 по 1972 г. занимал должность заместителя директора МИАН по Свердловскому отделению. За выдающиеся успехи ученый был награжден в 1971 г. орденом Трудового Красного Знамени.

Большое внимание А. И. Старостин уделял и педагогической деятельности. Так, на математико-механическом факультете Уральского государственного университета им. А. М. Горького, где Старостин преподавал с 1957 по 1994 г., им было прочитано большое количество общих и специальных математических курсов. По отзывам тех, кому посчастливилось у него учиться (например, академик РАН А. В. Кряжимский, член-кор. РАН В. Д. Мазуров и др.), Альберт Иванович был одним из самых ярких и популярных лекторов.

А.И. Старостин — крупный специалист по теории групп. Им разработана теория расщепляемых локально конечных групп, получены абстрактные характеризации различных классов конечных групп с помощью централизаторных условий, пересечений подгрупп, систем дополняемых подгрупп. Он является создателем уральской научной школы по теории конечных групп, подготовил 11 кандидатов наук и 7 докторов наук. А.И. Старостин — автор более 50 научных работ. В список наиболее известных научных публикаций Альберта Ивановича Старостина входят следующие работы:

1. О расщепляемых локально конечных группах. Математический сборник. 1963. Т. 62, № 3. С. 275–294 (в соавторстве с В. М. Бусаркиным).

2. Конечные группы, все собственные подгруппы которых обладают нильпотентным расщеплением. Известия АН СССР. Сер. математическая. 1965. Т. 29, № 1. С. 97–108 (в соавторстве с В. М. Бусаркиным).

3. О группах с расщепляемыми централизаторами. Известия АН СССР. Сер. математическая. 1965. Т. 29, № 3. С. 605–614.

4. Ядро расщепления локально конечной группы. Математический сборник. 1965. Т. 66, № 4. С. 551–567.

5. Конечные группы, близкие к расщепляемым. Доклады АН СССР. 1967. Т. 173, № 4. С. 773–776.

6. Конечные группы с централизаторным условием. Известия АН СССР. Сер. математическая. 1967. Т. 31, № 2. С. 305–334.

7. Конечные группы с нормальными пересечениями силовских 2-подгрупп. Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 6. С. 655–659 (в соавторстве с В. В. Кабановым, А. А. Махневым).

8. Конечные группы. Алгебра. Топология. Геометрия. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. Т. 24. М, 1986. С. 3–120 (в соавторстве с А. С. Кондратьевым, А. А. Махневым).

9. Finite p-groups. J. Math. Sci. 1998. Vol. 88, no. 4. P. 555–585.

Международная конференция “Алгебра и геометрия” собрала ведущих специалистов в области теории групп и ее приложений, а также в области алгебраической геометрии. Накануне конференции была проведена Международная школа молодых ученых по алгебре и алгебраической геометрии, в рамках которой прочитаны 6 циклов лекций по следующим направлениям.

1. Геометрия алгебраических поверхностей (д-р физ.-мат. наук Ф. А. Богомолов, институт Куранта, США).

2. Кольца и многообразия (профессор М. Рид, университет Уорвика, Англия).

3. Бирациональная геометрия поверхностей и трехмерных многообразий (д-р физ.-мат. наук И. А. Чельцов, университет Эдинбурга, Шотландия).

4. Введение в алгебраическую геометрию (канд. физ.-мат. наук А. Л. Городенцев, Высшая школа экономики).

5. Группы отражений (канд. физ.-мат. наук Е. Ю. Смирнов, Высшая школа экономики).

6. Введение в гомологическую алгебру (канд.физ.-мат. наук Л. Е. Посицельский, Институт проблем передачи информации РАН).

На открытии конференции, 22 августа, выступили зам. директора ИММ УрО РАН д-р физ.-мат. наук В. В. Кабанов, председатель Оргкомитета конференции чл.-кор. РАН А. А. Махнев, председатель Программного комитета конференции чл.-кор. РАН В.Д. Мазуров, руководитель секции геометрии д-р физ.-мат. наук Ф. А. Богомолов. В частности, В. В. Кабанов сообщил о том, что в 2011 г. исполняется 55 лет Институту математики и механики и 50 лет отделу алгебры Института.

В ходе работы конференции были заслушаны 23 пленарных доклада:

К. Альтман “Торические многообразия и полиэдральные дивизоры”;

В. А. Белоногов “О некоторых парах неприводимых характеров симметрических и знакопеременных групп”;

Ф. А. Богомолов “Обратная задача Римана”;

А. В. Васильев “Распознавание по спектру конечных простых классических групп”;

Е. П. Вдовин “О размере базы транзитивной конечной группы подстановок с разрешимым стабилизатором точки”;

В. И. Зенков “О пересечениях пар нильпотентных подгрупп в конечных группах”;

А. С. Кондратьев “О распознаваемости конечных групп по графу простых чисел”;

В. С. Куликов “Разложения на множители в конечных группах”;

В. М. Левчук “Перечислительные задачи в группах и модулях”;

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров “Вложения конечных групп в периодические группы”;

А. А. Махнев “Локально циклические графы и их автоморфизмы”;

Я. Н. Нужин “Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами”;

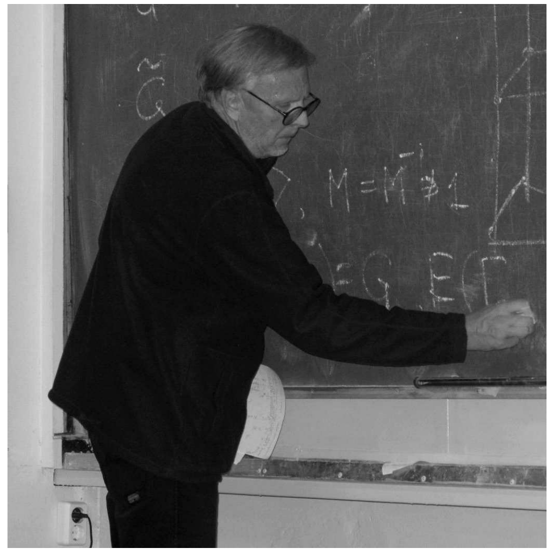
В. Петрович “Короли в обобщенных турнирах”;

А. Г. Пинус “Неявные операции на алгебрах. Семантический и синтаксический аспекты”;

Участники конференции “Алгебра и геометрия”. г. Екатеринбург, 2011 г.

На открытии конференции: Ф.А. Богомолов, В.Д. Мазуров, А.А. Махнев, В.В. Кабанов

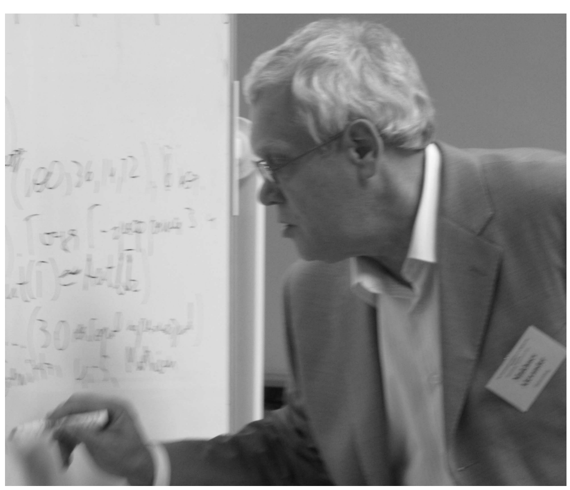
В.И. Зенков



В.И. Трофимов

В.Д. Мазуров

А.С. Кондратьев



А.А. Махнев

И. Н. Пономаренко “О квазитонких схемах отношений”;

Л. Е. Посицельский “Абсолютные группы Галуа и их свойства”;

М. Рид “Градуированные кольца и конструкция алгебраических многообразий”;

В. И. Сенашов, В. П. Шунков “Об одном признаке непростоты бесконечной группы”;

А. И. Созутов “Теорема Фробениуса в группах с условиями конечности”;

Д. Степанов “Некоторые приложения классификации изолированных факторособенностей”;

В. И. Трофимов “Симметрические расширения графов и смежные вопросы теории групп”;

К. А. Филиппов “Группы с условиями насыщенности”;

В. В. Щиголев “Модулярные правила ветвления для проективных представлений симметрических групп”.

На секции “Алгебра” было заслушано 29 докладов, а на секции “Геометрия” – 12.

Одним из наиболее сильных результатов, представленных на конференции, является сведение проблемы распознаваемости конечных простых групп по спектру практически к распознаваемости знакопеременных групп. Интенсивно изучаются вопросы вложения конечных групп в периодические группы, насыщенность групп различными классами конечных подгрупп, близких к простым. Ярким событием стал доклад И. Н. Пономаренко, в котором доступно и эффективно были изложены основные понятия схем отношений и представлена классификация квазитонких схем.

Большой интерес для участников представил вечер воспоминаний об А. И. Старостине, состоявшийся 24 августа. Участники конференции почтили память выдающегося ученого, много и тепло говорили о его достижениях, человеческих качествах и разносторонних интересах. В. Д. Мазуров рассказал о том, как Альберт Иванович, руководивший его дипломной работой, организовал “прибытие” рядового Советской Армии Мазурова для доклада на Международном математическом конгрессе, который проходил в Москве в 1966 г. А. А. Махнев говорил о сотрудниках и о творческой атмосфере, которая царила в отделе алгебры на момент его прихода после окончания Уральского университета, а также о спортивных увлечениях А.И. Старостина, увенчавшихся впечатляющей победой на авторалли “Золотое кольцо Урала” (водитель — Старостин, штурман — Махнев). Ю. Н. Мухин напомнил о вкладе А. И. Старостина в организацию многочисленных алгебраических конференций и симпозиумов по теории групп. А. С. Кондратьев рассказал об истории создания в ИММ по инициативе А. И. Старостина и Л. Н. Шеврина Совета по защите кандидатских диссертаций в 1991 г. (председатель Совета — А. И. Старостин, заместитель председателя — Ю. Н. Мухин, ученый секретарь — А. С. Кондратьев). Своими воспоминаниями об ученом поделились В. А. Антонов, В. А. Белоногов, Г. П. Егорычев, В. М. Левчук и А. К. Шлепкин.

Программой конференции была предусмотрена также экскурсия по памятным местам Екатеринбурга и к знаменитому обелиску на границе Европа — Азия.

Закрытие конференции состоялось в субботу, 27 августа. По традиции А. А. Махнев сообщил об алгебраических конференциях, запланированных на 2012 г. Это конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С. Н. Черникова (Екатеринбург, май), IX школа-конференция по теории групп, посвященная 90-летию со дня рождения З. И. Боревича (Владикавказ, июль) и конференция, посвященная 80-летию со дня рождения В. П. Шункова (Красноярск, сентябрь). Выступили также В. Д. Мазуров и А. К. Шлепкин. После закрытия была сделана фотография участников конференции и проведен шахматный блицтурнир, победу в котором разделили А. А. Гальт, В. И. Зенков и А. А. Махнев.

Поступила 12.09.2011

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
email: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Махнев Александр Алексеевич
д-р. физ.-мат. наук, чл.-кор.РАН
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
email: makhnev@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17 № 4 2011

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TeX-редактор Н. Н. Моргунова

Фото на с. 323 и с. 324 Н. Маслова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 15.11.11. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38. Уч.-изд. л. 27. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226