

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

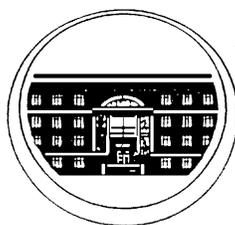
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 17

№ 2

2011



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 17, № 2. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. 302 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор чл.-корр. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора В. В. Кабанов

Редакционная коллегия

А. Г. Бабенко, Н. В. Величко,
М. И. Гусев, А. Р. Данилин,
А. Ф. Клейменов, А. С. Кондратьев, А. И. Короткий,
В. И. Максимов, О. Н. Ульянов (*отв. секретарь*)

Редакционный совет

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин,
акад. РАН А. М. Ильин, акад. РАН Н. Н. Красовский,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов

Отв. редакторы выпуска А. В. Кряжимский, В. И. Максимов



СОДЕРЖАНИЕ

К СЕМИДЕСЯТИПЯТИЛЕТИЮ АКАДЕМИКА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ЮРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ОСИПОВА	5
В. И. Бердышев. Объект и наблюдатель. Задача сопровождения	7
Д. С. Быков, Ю. Ф. Долгий. Канонические аппроксимации в задаче оптимальной стабилизации автономных систем с последствием	20
С. Н. Васильев, Г. М. Пономарев. Методы автоматизации логического вывода и их применение в управлении динамическими и интеллектуальными системами	35
В. В. Васин, Г. Я. Пересторонина. Метод Левенберга — Марквардта и его моди- фицированные варианты для решения нелинейных уравнений с приложением к обратной задаче гравиметрии	53
А. Д. Гвишиани, С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, А. И. Каган. Гравитационное сглаживание временных рядов	62
Н. Л. Григоренко, Д. В. Камзолкин, Л. Н. Лукьянова, Д. Г. Пивоварчук. Об од- ном классе задач управления в условиях неопределенности	71
А. А. Давыдов, Т. С. Шуткина. Единственность цикла с дисконтированием, опти- мального по средней временной выгоде	80
В. А. Ильин. О полном успокоении с помощью граничного управления на одном конце колебаний неоднородного стержня	88
Н. Н. Красовский, А. Н. Котельникова. Стохастический поводыр для объекта с последствием в позиционной дифференциальной игре	97
А. В. Кряжимский. Числовая кодировка дискретизованных управлений и аппрокси- мационный метрический критерий разрешимости игровой задачи наведения	105
В. И. Максимов. О восстановлении входов в линейных параболических уравнениях .	125
Г. И. Марчук, В. П. Шутяев. Сопряженные уравнения и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных	136
Е. И. Моисеев, А. А. Холомеева. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при заданной упругой силе на другом конце	151

Т. А. Сеньчонок, В. А. Баранский. Классификация элементов малой высоты в решетках полных многодольных графов.....	159
А. А. Соловьев. Моделирование динамики систем блоков и разломов и сейсмичности	174
Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с фазовыми ограничениями	191
В. Н. Ушаков, А. А. Успенский, А. Г. Малёв. Оценка дефекта стабильности множества позиционного поглощения, подвергнутого дискриминантным преобразованиям	209
А. Г. Ченцов. Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера	225
Ф. Л. Черноусько. Оптимальное перемещение многозвенной системы в среде с сопротивлением	240
А. А. Чикрий, И. И. Матичин. О линейных конфликтно управляемых процессах с дробными производными	256
S. Aseev, K. Besov, S.-E. Ollus, T. Palokangas. Optimal growth in a two-sector economy facing an expected random shock	271

**К СЕМИДЕСЯТИПЯТИЛЕТИЮ
АКАДЕМИКА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ЮРИЯ СЕРГЕЕВИЧА ОСИПОВА**

7 июля 2011 г. исполняется 75 лет выдающемуся ученому с мировым именем, крупному организатору науки, Президенту Российской академии наук, заведующему кафедрой оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова Юрию Сергеевичу Осипову.

Юрий Сергеевич родился в Тобольске (Тюменская область). Интерес к точным наукам определил выбор профессии: в 1954 г. он поступил на физико-математический факультет Уральского государственного университета и в 1959 г. успешно его окончил. После окончания работал инженером на одном из оборонных предприятий Свердловска, а с 1961 г. Юрий Сергеевич начал заниматься научной деятельностью. Первый этап был пройден в родном вузе: аспирант, ассистент, кандидат физико-математических наук, доцент. Затем работа в Институте математики и механики Уральского отделения АН СССР: защита докторской диссертации, руководство лабораторией, отделом, институтом. Здесь окончательно оформились научные интересы Юрия Сергеевича: его научное творчество протекало в русле традиционной “уральской” тематики — теории управления динамическими системами. В шестидесятые-семидесятые годы прошлого века стремительное развитие этого направления на Урале происходило, прежде всего, благодаря лидеру Уральской математической школы Николаю Николаевичу Красовскому, учителю Юрия Сергеевича. Продолжая исследования, Ю. С. Осипов воплощал в жизнь крупные научные и прикладные проекты, создавал свою научную школу. Вскоре он заслужил признание научного сообщества страны. Ю. С. Осипов преподает в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, заведует кафедрой оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики. В 1984 г. он был избран членом-корреспондентом, в 1987 г. — действительным членом Академии наук СССР.

С 1991 г. Ю. С. Осипов — Президент Российской академии наук. Несомненным подвигом Юрия Сергеевича является то, что в тяжёлые годы переходного периода он вместе с коллегами-единомышленниками смог сохранить дух, цели и статус Академии наук.

Основные научные исследования Ю. С. Осипова посвящены теории управления, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Можно отметить несколько “блоков” работ. В первом блоке, практически завершённом к концу шестидесятых годов, Ю. С. Осипов создал законченную теорию стабилизации систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Во втором, относящемся к семидесятым годам, Ю. С. Осипов разработал теорию дифференциальных игр для динамических систем с запаздывающим аргументом. Третий блок работ, выполненный Ю. С. Осиповым в восьмидесятые и девяностые годы, посвящён созданию теории устойчивого динамического обращения управляемых систем.

В разные периоды Ю. С. Осипов также получил серию оригинальных результатов в смежных направлениях. С начала восьмидесятых годов им выполнен ряд работ по оптимизации форм, в одной из которых дан ответ на трудный вопрос о существовании оптимума, поставленный известным французским математиком Ж.-Л. Лионсом.

С конца девяностых годов в сфере его научных интересов были задачи классической теории дифференциальных игр, эволюционные игры, обратные задачи динамики для нелинейных систем с распределёнными параметрами, задачи оптимизации форм. Ю. С. Осиповым построена

теория управления многомерными системами по принципу обратной связи в условиях неопределенности, охватывающая объекты, описываемые неоднородными граничными задачами для уравнений математической физики, дифференциально-функциональными уравнениями, абстрактными уравнениями с неограниченными операторами, а также объекты, обладающие эффектом последствия в управляющих силах и др.

Будучи талантливым ученым-теоретиком, Ю. С. Осипов реализовал свои научные достижения и в прикладной тематике, связанной с разработкой образцов новой техники специального назначения. В частности, Юрий Сергеевич руководил широким кругом опытно-конструкторских работ по созданию летательных аппаратов. Проведенные под его руководством и при личном участии фундаментальные и прикладные исследования были доведены до конкретных изделий.

Академик Ю. С. Осипов — создатель известной научной школы, включающей коллективы исследователей Математического института РАН им. В. А. Стеклова, Института математики и механики УрО РАН, факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, работающих в области качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и стабилизации динамических систем, теории оптимального управления и дифференциальных игр, математического моделирования, теории обратных задач. Среди его учеников — члены академии наук России и доктора наук, свыше 30 кандидатов наук.

В 1976 г. за работы в области математической теории управления Ю. С. Осипову присуждена Ленинская премия в составе авторского коллектива, возглавляемого академиком Н. Н. Красовским. В 1993 г. за работы по прикладной тематике Юрий Сергеевич удостоен Государственной премии России в области науки и техники. В 1981 г. он награжден орденом Трудового Красного Знамени. Ю. С. Осипов является кавалером высших орденов Российской Федерации включая ордена “За заслуги перед Отечеством” III, II и I степеней. В 2010 г. Юрию Сергеевичу вручена престижная Демидовская премия за выдающийся вклад в математику и механику, в том числе математическую теорию управления. Среди его наград — Золотая медаль им. Л. Эйлера за выдающиеся результаты в области математики и физики (РАН, 1997 г.), Золотая медаль им. А. Эйнштейна (ЮНЕСКО, 2002 г.) за выдающийся вклад в теорию управления. По достоинству оценены научные достижения Ю. С. Осипова и мировым сообществом. Он избран почетным членом и доктором многих зарубежных академий, научных и образовательных центров. В своей деятельности Юрий Сергеевич уделяет большое внимание не только научным, но и организационным и общественным проблемам. Его вклад в их решение отмечен орденом Благоверного князя Даниила Московского I степени, медалью лауреата премии Кирилла и Мефодия. Академик Ю. С. Осипов — кавалер ордена Белого креста Международного рыцарского движения, командор ордена Почетного легиона Франции, кавалер ордена “За заслуги перед Итальянской Республикой”.

Характерные черты научного стиля Юрия Сергеевича Осипова — динамичность и целеустремленность. Он периодически “освежает” тематику своих исследований, при этом начатые работы доводятся до крупных, ясных, окончательных результатов. Основные мотивы, которыми он руководствуется при выборе новых задач, — синтез дисциплин и практическая содержательность постановок. За долгие годы работы в науке Юрий Сергеевич вырастил яркий коллектив исследователей, продолжающих и развивающих созданные им научные направления. Отметим, что среди последователей Юрия Сергеевича немало активно работающих зарубежных ученых.

Юрий Сергеевич полон неиссякаемой энергии, новых творческих замыслов. Редколлегия журнала сердечно поздравляет Юрия Сергеевича Осипова с юбилеем и желает ему крепкого здоровья и дальнейших успехов в его деятельности.

*Н.Н. Красовский, И.И. Еремин, А.М. Ильин, А.В. Кряжимский, А.Б. Куржанский,
В.И. Бердышев, В.В. Васин, А.А. Махнев, С.В. Матвеев, Ю.Н. Субботин,
А.Г. Ченцов, В.Н. Ушаков, В.В. Кабанов, В.И. Максимов*

УДК 517.51

ОБЪЕКТ И НАБЛЮДАТЕЛЬ. ЗАДАЧА СОПРОВОЖДЕНИЯ¹**В. И. Бердышев**

Изучается свойство видимости объекта наблюдателем при движении в пространстве с фиксированным телесным множеством, препятствующим видимости. Вычисляются производные по направлениям функции видимости. Рассматривается задача сопровождения объекта наблюдателем, когда объект стремится минимизировать, а наблюдатель — максимизировать максимум функции видимости. В случае, когда наблюдатель действует наивыгоднейшим для себя образом, дан алгоритм построения наилучшей для объекта траектории.

Ключевые слова: объект, наблюдатель, функция видимости, задача сопровождения, траектория.

V. I. Berdyshev. Object and observer: A surveillance problem.

The property of the visibility of an object for an observer is studied in the case when the motion takes place in a space with a fixed bodily set impeding the visibility. Directional derivatives of the visibility function are calculated. The problem of tracking the object by the observer is considered, when the object aims to minimize and the observer aims to maximize the maximum of the visibility function. An algorithm for constructing a trajectory that is best for the object is given for the case when the observer acts optimally.

Keywords: object, observer, visibility function, tracking problem, trajectory.

1. Введение

Пусть t — движущийся в \mathbb{R}^n объект, $f \in \mathbb{R}^n$ — наблюдатель, который также может перемещаться. Будем предполагать, что местоположение наблюдателя известно с погрешностью $h \geq 0$, фактически известно лишь, что наблюдатель находится в шаре

$$V_h(f) = \{v \in \mathbb{R}^n: \|f - v\| \leq h\}.$$

В пространстве \mathbb{R}^n зафиксировано множество G , являющееся замыканием открытого множества. Это множество препятствует видимости и движению объекта и наблюдателя.

Наблюдатель заинтересован в том, чтобы из любой точки шара $V_h(f)$ был виден объект t вместе с его окрестностью $V_r(t)$ возможно большего радиуса $r \geq 0$. В [1] введена функция видимости

$$r(t, f) = r_h(t, f, G) = \min\{r: K_r(t, f) \cap G \neq \emptyset\},$$

где

$$K_r(t, f) = \text{conv}[V_r(t) \cup V_h(f)] \setminus V_h(f)$$

— усеченный конус при

$$r < \|t - f\| + h, \tag{1.1}$$

conv — выпуклая оболочка множества.

Наряду с функцией $r(t, f)$ для учета оптической проницаемости среды и расстояния $\|t - f\|$ целесообразно ввести функцию

$$\bar{r}(t, f) = \frac{r(t, f)}{\varphi(\|t - f\|)}$$

¹Исследования выполнены в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 09-П-1-1013) и РФФИ (проект 11-01-00445).

относительной видимости, где $\varphi(\cdot) > 0$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция. Поскольку дифференциальные свойства функции $\bar{r}(t, f)$ определяются свойствами функции $r(t, f)$, в дальнейшем ограничимся вычислением формул дифференцирования функции $r(t, f)$.

Для выбора тактики поведения объекта и наблюдателя важно знать величину производной функции видимости по направлениям. Через \tilde{t} , \tilde{f} будем обозначать направления движения объекта t и наблюдателя f соответственно, $\|\tilde{t}\| = \|\tilde{f}\| = 1$.

Предполагается, что объект и наблюдатель движутся с постоянными скоростями: объект — с единичной, наблюдатель — со скоростью a , $0 \leq a \leq 1$.

Раздел 2 посвящен вычислению функции

$$R(t, f, g) = R_h(t, f, g) = \min\{R: g \in K_R(t, f)\},$$

где $g \in G$ — точка, для которой выполнены условия

$$g \notin \text{conv}\{V_h(f) \cup t\}, \quad \langle g - f, t - f \rangle > 0, \quad (1.2)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение. Легко видеть, что функции $r(t, f, G)$ и $R(t, f, g)$ связаны соотношением

$$r_h(t, f, G) = \min\{R_h(t, f, g): g \in G\}.$$

В разд. 3 изучается дифференцируемость по направлениям функции $r_h(t, f, G)$ по паре переменных (t, f) :

$$\frac{\partial r_h(t, f, G)}{\partial(\tilde{t}, \tilde{f})} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{r(t + \lambda\tilde{t}, f + \lambda a\tilde{f}) - r(t, f)}{\lambda}.$$

В разд. 4 рассматривается задача, связанная с теорией игр (см., например, [3]): объект решает задачу выбора наименее видимой траектории движения, а задача наблюдателя f состоит в выборе направления движения, которое обеспечивает большее значение функции видимости $r(t, f)$. Рассматривается вариант задачи сопровождения объекта наблюдателем, когда наблюдатель действует наивыгоднейшим для себя образом. В этом случае функция $r(t, f)$ совпадает с расстоянием от t до множества G . В разд. 5 предлагается алгоритм построения наилучшей для объекта траектории.

2. Вычисление функции $R(t, f, g)$

Если выполнено неравенство (1.1), то граница тела $K_r(t, f)$ составлена из сферической части $s_r(t) = s_r(t, f)$ радиуса r с центром t , конической (цилиндрической при $r = h$) части $k_r(t, f)$ и сферической части радиуса h с центром f . В дальнейшем будем предполагать, что условие (1.1) выполняется.

Отметим, что справедлива следующая очевидная

Лемма 1. *Множества $s_r(t, f)$ и $k_r(t, f)$ непрерывно зависят от переменных t, f, r, h в хаусдорфовой метрике.*

Функция $R(t, f, g)$ непрерывна по переменным t, f, g . Непрерывность по t установлена в [1], непрерывность по f следует из формулы (2.6), приведенной далее.

Пусть $g \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (1.2), $R = R(t, f, g)$, тогда возможны случаи:

- 1) $g \in s_R(t) \setminus k_R(t, f)$,
 - 2) $g \in k_R(t, f) \setminus s_R(t)$,
 - 3) $g \in s_R(t) \cap k_R(t, f)$.
- (2.1)

Введем следующие обозначения при выбранном направлении \tilde{f} , $\|\tilde{f}\| = 1$, и малом λ : $f_\lambda = f + \lambda\tilde{f}$, $R_\lambda = R(t, f_\lambda, g)$, L_g^λ — образующая конической поверхности $k_{R_\lambda}(t, f_\lambda)$, содержащая точку g , если $g \in k_{R_\lambda}(t, f_\lambda)$, $v_\lambda = L_g^\lambda \cap V_h(f_\lambda)$.

Лемма 2. *Прямая L_g^λ лежит в двумерной плоскости, содержащей точки t , f_λ , g , и касается шаров $V_{R_\lambda}(t)$, $V_h(f_\lambda)$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 3. *Пусть A , B , C — попарно различные точки из \mathbb{R}^n , L_{AB} — прямая, содержащая точки A и B , $C \notin L_{AB}$, $\rho(C, L_{AB}) = \min\{\|C - W\| : W \in L_{AB}\} = \|C - W^*\|$, $W^* \in L_{AB}$. Тогда*

$$W^* = \frac{\langle A - C, A - B \rangle}{\|A - B\|^2} (B - A),$$

$$\rho(C, L_{AB})^2 = \|A - C\|^2 - \frac{\langle A - C, A - B \rangle^2}{\|A - B\|^2}.$$

Доказательство проводится с помощью соотношения $\langle W^* - C, B - A \rangle = 0$, справедливого для любого пространства со скалярным произведением. Из леммы 3 следует

Лемма 4. *Пусть $R = R(t, f, g)$, $g \in s_R(t) \cap k_R(t, f)$, $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq g$ и L_{gv} — прямая, содержащая точки g и v . Если $\langle g - t, v \rangle = \langle g - t, g \rangle$, то $\rho(t, L_{gv}) = R$. Если $\langle g - t, v \rangle \neq \langle g - t, g \rangle$, то $\rho(t, L_{gv}) < R$.*

Лемма 5. *Пусть $R = R(t, f, g)$, $R_\lambda = R(t, f_\lambda, g)$. При достаточно малых λ имеют место соотношения (см. (2.1)):*

- 1) если $g \in s_R(t) \setminus k_R(t, f)$, то $g \in s_{R_\lambda}(t)$ и $R_\lambda = R$;
- 2) если $g \in k_R(t, f) \setminus s_R(t, f_\lambda)$, то $g \in k_{R_\lambda}(t)$ и $R_\lambda = \rho(t, L_g^\lambda)$;
- 3) при $g \in s_R(t) \cap k_R(t, f)$:
 - а) если $\lambda \langle g - t, \tilde{f} \rangle > 0$, то $g \in k_{R_\lambda}(t, f_\lambda)$ и $R_\lambda = \rho(t, L_g^\lambda) < R$;
 - б) если $\lambda \langle g - t, \tilde{f} \rangle \leq 0$, то $g \in s_{R_\lambda}(t)$ и $R_\lambda = R$.

Доказательство. Утверждения 1, 2 следуют из леммы 1. Установим утверждение 3. Напомним, что $v_0 = L_g^0 \cap V_h(f)$. Если $\lambda \langle g - t, \tilde{f} \rangle > 0$, то ввиду равенства $\langle g - t, v_0 \rangle = \langle g - t, g \rangle$ имеем

$$\langle g - t, v_0 + \lambda\tilde{f} \rangle = \langle g - t, g + \lambda\tilde{f} \rangle = \langle g - t, g \rangle + \langle g - t, \lambda\tilde{f} \rangle > \langle g - t, g \rangle,$$

а если $\lambda \langle g - t, \tilde{f} \rangle \leq 0$, то $\langle g - t, v_0 + \lambda\tilde{f} \rangle \leq \langle g - t, g \rangle$. В силу леммы 2 прямая L_g^λ лежит в двумерной плоскости, содержащей точки t , g , f_λ . Легко видеть, что $\langle g - t, v_\lambda \rangle > \langle g - t, g \rangle$ в случае 3а и $\langle g - t, v_\lambda \rangle \leq \langle g - t, g \rangle$ в случае 3б. Для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 4. \square

З а м е ч а н и е. Леммы 1, 2, 4, 5 верны в случае произвольного (не евклидова) гладкого равномерно выпуклого пространства.

Вернемся к задаче вычисления величины $R(t, f, g)$. В случае, когда $g \in s_R(t) \setminus k_R(t, f)$, по лемме 5 величина $R(t, f, g)$ в окрестности точки f не зависит от λ и совпадает с величиной радиуса R . Пусть теперь $g \in k_R(t, f)$. Ради простоты будем считать, что $t = 0$. Сперва рассмотрим случай, когда $h = 0$. Имеем

$$R(t, f, g) = \rho(t, L_g),$$

где $L_g = L_g^0$ — образующая конической поверхности $k_R(t, f)$, содержащая точку g . В силу леммы 3

$$\begin{aligned} R^2(t, f, g) &= \|g\|^2 = \frac{\langle g, g-f \rangle^2}{\|g-f\|^2} \\ &= \|g\|^2 - \frac{(\langle f, g \rangle - \|g\|^2)^2}{\|g-f\|^2} = \frac{\|f\|^2 \|g\|^2 - \langle f, g \rangle^2}{\|g-f\|^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть теперь $h > 0$, $h \neq \rho(g, L_{tf})$, где L_{tf} — прямая, содержащая точки t и f . Найдем точку $F = \gamma f$ такую, что расстояние от f до прямой L_{gF} равно h . По лемме 3

$$h^2 = \|g-f\|^2 - \frac{\langle g-f, F-g \rangle^2}{\|F-g\|^2},$$

и элементарные вычисления дают

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma(f) &= \frac{\|f\|q_2^2 - h^2q_1 \pm \sqrt{(\|f\| - q_1)^2 + (q_2^2 - h^2)}}{\|f\|(q_2^2 - h^2)} \\ &= \frac{\|f\|q_2^2 - h^2q_1 \pm hq_2\sqrt{\|f-g\|^2 - h^2}}{\|f\|(q_2^2 - h^2)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$q_1 = \frac{\langle g, f \rangle}{\|f\|},$$

т. е. q_1 — координата δ ближайшей для g точки на прямой $L = \{\delta f : \delta \in \mathbb{R}\}$, а q_2 — расстояние от g до прямой L (см. лемму 3):

$$q_2 = \|g\|^2 - \frac{\langle g, f \rangle^2}{\|f\|^2} = \frac{\|f\|^2 \|g\|^2 - \langle f, g \rangle^2}{\|f\|^2}.$$

В формуле (2.3) перед знаком корня следует взять знак “+”, если $\rho(g, L) > h$ и знак “−”, если $\rho(g, L) < h$. Если же $\rho(g, L) = h$, то выполняется равенство $R(t, f, g) = h$.

В случае произвольного не равного нулю t найдем точку $F = t + \gamma(f-t)$ такую, что $\rho(f, L_{gF}) = h$. Подставив в (2.3) $f-t$ и $g-t$ вместо f и t соответственно, получим формулу для γ :

$$\gamma = \gamma(t, f) = \frac{\|f-t\|q_2^2 - h^2q_1 \pm hq_2\sqrt{\|f-g\|^2 - h^2}}{\|f-t\|(q_2^2 - h^2)}, \quad (2.4)$$

где

$$q_1 = \frac{\langle f-t, g-t \rangle}{\|f-t\|}, \quad q_2 = \|g-t\|^2 - \frac{\langle f-t, g-t \rangle^2}{\|f-t\|^2}. \quad (2.5)$$

Как легко видеть,

$$R_h(t, f, g) = \rho(t, L_{gF})$$

и

$$\frac{\rho(t, L_{gF})}{h} = \frac{\gamma \|f\|}{(\gamma-1)\|f\|} = \frac{\gamma}{\gamma-1}.$$

Отсюда

$$R_h(t, f, g) = \frac{\gamma h}{\gamma-1}.$$

Нетрудно проверить, что (см. (2.2))

$$\lim_{h \rightarrow +0} \left(\frac{\gamma h}{\gamma-1} \right)^2 = \frac{\|f\|^2 \|g\|^2 - \langle f, g \rangle^2}{\|f-g\|^2}.$$

Итак, доказана

Теорема 1. Если $g \in k_R(t, f)$, то

$$R_h(t, f, g) = \frac{\gamma(t, f)}{\gamma(t, f) - 1} h, \quad (2.6)$$

где $\gamma(t, f)$ выражается формулами (2.4), (2.5).

3. Дифференцирование функции $R_h(t, f, g)$

Пусть точка g удовлетворяет условию (1.2), т. е. $R(t, f, g) \geq 0$, задано направление \tilde{f} и $f_\lambda = f + \lambda\tilde{f}$, $\|\tilde{f}\| = 1$.

Теорема 2. Функция $R(t, f, g)$ непрерывно дифференцируема по f . Производная по направлению \tilde{f} , $\|\tilde{f}\| = 1$, вычисляется следующим образом:

- если $g \in s_R(t, f)$, то

$$\left. \frac{\partial R(t, f_\lambda, g)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0, \quad (3.1)$$

- если $g \in k_R(t, f) \setminus s_R(t, f)$, то $R(t, f, g)$ выражается формулой (2.6), где $\gamma = \gamma(t, f)$ имеет вид (2.4), и производная вычисляется дифференцированием по λ соотношения (2.6) после подстановки в него f_λ вместо f .

Доказательство. Если $g \in s_R(t, f) \setminus k_R(t, f)$, то ввиду леммы 5 для любой точки f_ε из малой ε -окрестности $V_\varepsilon(f)$ точки f имеем $R(t, f_\varepsilon, g) = R(t, f, g)$, поэтому справедливо (3.1). Если $g \in k_R(t, f) \setminus s_R(t, f)$, то для точек f_ε из окрестности точки f также верно включение $g \in k_R(t, f_\varepsilon) \setminus s_R(t, f_\varepsilon)$, где $R = R(t, f_\varepsilon, g)$, следовательно, при малых λ верны формулы (2.4)–(2.6) после подстановки в них f_λ вместо f . Пусть теперь $g \in s_R(t, f) \cap k_R(t, f)$. По лемме 3 функция расстояния $\rho(t, L_{gv})$ непрерывно дифференцируема по переменной $v \in V_\varepsilon(v_0)$, где $v_0 = L_g^0 \cap V_h(f)$. В соответствии с леммой 4 эта функция имеет максимум в точках $v \in V_\varepsilon(v_0)$, для которых

$$\langle g - t, v \rangle = \langle g - t, g \rangle.$$

Следовательно, в указанных точках производная по v функции $\rho(t, L_{gv})$ равна нулю. Поскольку $L_{gv_\lambda} = L_g^\lambda$, где L_g^λ — образующая конической поверхности $k_R(t, f_\lambda)$, а по лемме 5 (см. За) $\rho(t, L_g^\lambda) = R_\lambda$, то R_λ непрерывно дифференцируема, и ее производная при $\lambda = 0$ равна нулю. Доказательство завершено. \square

В следующей теореме выражение для производной от $R(t, f, g)$ при $g \in k_R(t, f)$ будет выписано в явной форме в случае $h = 0$.

Рассмотрим вопрос о дифференцировании функции $R(t, f, g)$ по обоим переменным t и f . Предположим, что объект и наблюдатель движутся с постоянными скоростями: объект — с единичной скоростью, а наблюдатель — со скоростью $a \geq 0$. Пусть \tilde{t} — направление движения объекта t , \tilde{f} — направление движения наблюдателя. Итак, если объект при прямолинейном движении оказался в точке $t_\lambda = t + \lambda\tilde{t}$, то наблюдатель к этому моменту переместился в точку $f_\lambda = f + \lambda a\tilde{f}$, $\|\tilde{t}\| = \|\tilde{f}\| = 1$. Найдем производную по λ при $\lambda = 0$ от функции $R_\lambda = R(t_\lambda, f_\lambda, g)$.

Положим сперва $h = 0$. Если $g \in k_R(t, f) \setminus s_R(t, f)$, то, как ранее отмечалось, при малом λ будет

$$g \in k_{R_\lambda}(t_\lambda, f_\lambda), \quad \text{где} \quad R_\lambda = \rho(t_\lambda, L_{gf_\lambda}),$$

и по лемме 3

$$R_\lambda^2 = \|g - t_\lambda\|^2 - \frac{\langle g - t_\lambda, g - f_\lambda \rangle^2}{\|g - f_\lambda\|^2}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \|g - t_\lambda\|_{\lambda=0}^2 &= 2\|g - t\| \frac{d}{d\lambda} \|g - t_\lambda\| = -2\|g - t\| \frac{\langle g - t, \tilde{t} \rangle}{\|g - t\|} = -2\langle g - t, \tilde{t} \rangle, \\ \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\langle g - t_\lambda, g - f_\lambda \rangle}{\|g - f_\lambda\|} \right)_{\lambda=0}^2 &= 2 \frac{\langle g - t, g - f \rangle}{\|g - f\|} \frac{d}{d\lambda} \frac{\langle g - t_\lambda, g - f_\lambda \rangle}{\|g - f_\lambda\|}, \\ \frac{d}{d\lambda} \|g - \tilde{f}_\lambda\| &= -a \frac{\langle g - f, \tilde{f} \rangle}{\|g - f\|}, \\ \frac{d}{d\lambda} \langle g - t_\lambda, g - f_\lambda \rangle &= -[a\langle g - t, \tilde{f} \rangle + \langle g - f, \tilde{t} \rangle], \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} R_\lambda^2 \Big|_{\lambda=0} &= \frac{d}{d\lambda} \|g - t_\lambda\|_{\lambda=0}^2 - \frac{d}{d\lambda} \frac{\langle g - t_\lambda, g - f_\lambda \rangle^2}{\|g - f_\lambda\|^2} \Big|_{\lambda=0} \\ &= 2 \frac{\langle g - t, g - f \rangle}{\|g - f\|^4} \left\{ (a\langle g - t, \tilde{f} \rangle + \langle g - f, \tilde{t} \rangle) \|g - f\|^2 - a\langle g - t, g - f \rangle \langle g - f, \tilde{f} \rangle \right\} - 2\langle g - t, \tilde{t} \rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если $g \in s_R(t, f) \setminus k_R(t, f)$, то $R_\lambda = \|t_\lambda - g\|$ и

$$\frac{dR_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = -\frac{\langle g - t, \tilde{t} \rangle}{\|g - t\|}. \quad (3.3)$$

Пусть $g \in s_R(t, f) \cap k_R(t, f)$, т. е. $\langle g - t, g - f \rangle = 0$. Легко видеть, что

а) если $\langle g - t_\lambda, g - f_\lambda \rangle \geq 0$, то $g \in s_{R_\lambda}(t_\lambda, f_\lambda)$ и $R_\lambda = \|t_\lambda - g\|$;

б) если $\langle g - t_\lambda, g - f_\lambda \rangle \leq 0$, то $g \in k_{R_\lambda}(t_\lambda, f_\lambda)$ и $R_\lambda = \rho(t_\lambda, L_{gf_\lambda})$.

Так, в первом случае отрезок $V_{\|g-t_\lambda\|}(t_\lambda) \cap L_{gf_\lambda}$ принадлежит отрезку $[g, f_\lambda]$, поэтому прямая L_{gf_λ} не может быть образующей конической поверхности $k_{R_\lambda}(t_\lambda, f_\lambda)$ и, значит, $g \in s_{R_\lambda}(t_\lambda, f_\lambda)$. Отметим, что в рассматриваемом случае при малых λ знак величины

$$\langle g - t_\lambda, g - f_\lambda \rangle = -\lambda[a\langle g - t, \tilde{f} \rangle + \langle g - f, \tilde{t} \rangle] + \lambda^2 a \langle \tilde{t}, \tilde{f} \rangle$$

определяется знаком первого слагаемого.

Производная по λ величины $\rho(t_\lambda, L_{gf_\lambda})$ вычислена выше (см. (3.2)). Так как $\langle g - t, g - f \rangle = 0$, то в случае б) $dR_\lambda^2/d\lambda = -2\langle g - t, g - t \rangle$. В случае а) верна формула (3.3). Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть \tilde{t}, \tilde{f} — направления движения объекта t и наблюдателя f , $\|\tilde{t}\| = \|\tilde{f}\| = 1$, $a > 0$, $h = 0$, $R = R(t, f, g) > 0$. Функция $R_\lambda = R(t + \lambda\tilde{t}, f + \lambda a\tilde{f}, g)$ дифференцируема по λ в нуле и

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} R_\lambda^2 \Big|_{\lambda=0} = \begin{cases} -\langle g - t, \tilde{t} \rangle & \text{при } g \in s_R(t, f), \\ -\langle g - t, \tilde{t} \rangle + \frac{\langle g - t, g - f \rangle}{\|g - f\|^2} \langle g - f, \tilde{t} \rangle + a \frac{\langle g - t, g - f \rangle}{\|g - f\|^4} & \\ \times [\langle g - t, \tilde{f} \rangle \|g - f\|^2 - \langle g - t, g - f \rangle \langle g - f, \tilde{f} \rangle] & \text{при } g \in k_R(t, f). \end{cases} \quad (3.4)$$

Отметим, что переменные \tilde{t}, \tilde{f} входят в выражение (3.4) линейно.

Следствие. Функция $R(t, f, g)$ непрерывно дифференцируема по (t, f) при условии $R(t, f, g) > 0$.

Пусть теперь $h > 0$. В этом случае имеет место аналог теоремы 3 о непрерывной дифференцируемости функции $R_h(t, f, g)$ по (t, f) при условии $R_h(t, f, g) > 0$. В случае, когда

$g \in s_R(t, f) \setminus k_R(t, f)$, справедлива формула (3.3). Если же $g \in k_R(t, f) \setminus s_R(t, f)$, то при малых λ имеет место соотношение

$$R_\lambda = \rho(t_\lambda, L_g^\lambda) = \rho(t_\lambda, L_{g_{F_\lambda}}), \quad (3.5)$$

где $F_\lambda = t_\lambda + \gamma_\lambda(f_\lambda - t_\lambda)$ и (см. (2.4), (2.5))

$$\gamma_\lambda = \gamma(t_\lambda, f_\lambda) = \frac{\|f_\lambda - t_\lambda\| q_2^2 - h^2 q_1 \pm h q_2 \sqrt{\|f_\lambda - g_\lambda\|^2 - h^2}}{\|f_\lambda - t_\lambda\| (q_2^2 - h^2)},$$

$$q_1 = \frac{\langle f_\lambda - t_\lambda, g - t_\lambda \rangle}{\|f_\lambda - t_\lambda\|}, \quad q_2 = \|g - t_\lambda\|^2 - \frac{\langle f_\lambda - t_\lambda, g - t_\lambda \rangle^2}{\|f_\lambda - t_\lambda\|^2}.$$

Учитывая (3.5), по лемме 3 получаем

$$R_\lambda^2 = \|g - t_\lambda\|^2 - \frac{\langle g - t_\lambda, g - F_\lambda \rangle^2}{\|g - F_\lambda\|^2}. \quad (3.6)$$

Выражение для $dR_\lambda^2/d\lambda$ следует из (3.3) в случае $g \in s_R(t, f)$ и определяется дифференцированием по λ равенства (3.6) при $g \in k_R(t, f)$.

Производные функции $r(t, f, G)$ выражаются через производные функции $R(t, f, g)$ с помощью следующей теоремы.

Теорема 4 (В. Ф. Демьянов [2]). Пусть \mathcal{T} — открытое множество в \mathbb{R}^n , G — компакт в \mathbb{R}^m ($n, m = 1, 2, \dots$), $R(t, g)$ — непрерывно дифференцируемая по t на $\mathcal{T} \times G$ функция. Тогда функция

$$r(t) = \max\{R(t, g) : g \in G\}$$

имеет в каждой точке $t \in \mathcal{T}$ производную по любому направлению \tilde{t} , $\|\tilde{t}\| = 1$, причем

$$\frac{\partial r(t, f)}{\partial \tilde{t}} = \max \left\{ \frac{\partial R(t, g)}{\partial \tilde{t}} : g \in G(t) \right\},$$

где

$$G(t) = \{g \in G : R(t, g) = r(t)\}.$$

Теорема 5. В условиях теоремы 3 функция $r(t, f, G)$ дифференцируема по любому “направлению” (\tilde{t}, \tilde{f}) , $\|\tilde{t}\| = \|\tilde{f}\| = 1$, в области $\{(t, f) : r(t, f, G) > 0\}$ и

$$\frac{\partial r(t, f)}{\partial (\tilde{t}, \tilde{f})} = \min \left\{ \frac{\partial R(t, f, g)}{\partial (\tilde{t}, \tilde{f})} : g \in G(t, f) \right\},$$

где

$$G(t, f) = \{g \in G : R(t, f, g) = r(t, f, G)\}.$$

4. Задача сопровождения

Пусть $t_*, t^* \in \mathbb{R}^3$, $t_* \neq t^*$ и объекту предстоит перейти из шара $V_* = V_{\rho(t_*)}(t_*)$ в шар $V^* = V_{\rho(t^*)}(t^*)$, где

$$\rho(t) = \rho(t, G) = \min \{\|t - g\| : g \in G\}$$

— расстояние от точки t до множества G . Движение объекта должно происходить по траектории внутри “коридора” \mathbb{C} , являющегося окрестностью заранее рассчитанной гладкой базовой траектории

$$\Gamma_0 = \{y(\tau) : \tau \in [0, 1]\}, \quad y(0) = t_*, \quad y(1) = t^*, \quad \Gamma_0 \cap G = \emptyset,$$

а именно

$$\mathbb{C} = \bigcup_{y \in \Gamma_0} V_{\rho(y)}(y) \quad (\rho(y) > 0, \quad y \in \Gamma_0).$$

Ради простоты будем считать, что “коридор” \mathbb{C} не имеет самопересечений. Движение наблюдателя осуществляется вне множества G . Объект намерен построить движение $\{t(\tau): \tau \in [0, 1]\}$ так, чтобы величина

$$\max\{r(t(\tau), f(\tau)): \tau \in [0, 1]\}$$

была возможно меньшей, а наблюдатель, выбирая $\{f(\tau): \tau \in [0, 1]\}$, стремится ее увеличить.

Будем в дальнейшем предполагать, что наблюдатель действует наивыгоднейшим для себя образом, т. е. в любой момент времени занимает такую позицию $f = f(\tau)$, что для $r = r(t, f)$ выполняется соотношение $V_r(t) \cap G \neq \emptyset$ и, значит,

$$r(t, f) = \rho(t, G).$$

Таким образом, для объекта задача в этом случае свелась к поиску траектории Γ с возможно меньшей величиной

$$\max\{\rho(t, G): t \in \Gamma\}.$$

Отметим, что функция $\rho = \rho(t, G)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\rho(t_1, G) - \rho(t_2, G)| \leq \|t_1 - t_2\|$$

и является дифференцируемой (см. [4]) по направлениям.

Будем использовать следующие обозначения:

$$P_G(y) = \{g \in G: \|y - g\| = \rho(y, G)\}$$

— метрическая проекция элемента y на множество G ,

$$\beta(y) = \min_{z \in P_G(y)} \frac{\rho(2y - z, P_G(y))}{\rho(y, G)}, \quad \alpha(y) = \frac{1}{2\rho(y, G)} \max_{z_1, z_2 \in P_G(y)} \|z_1 - z_2\| = \sqrt{1 - \left(\frac{\beta(y)}{2}\right)^2},$$

$$\alpha^* = \alpha^*(\Gamma_0) = \max\{\alpha(y): y \in \Gamma_0\}.$$

Имеем $0 \leq \alpha(y) \leq 1$,

$$\|z_1 - z_2\| \leq 2\alpha(y) \rho(y, G), \quad \left\|y - \frac{z_1 + z_2}{2}\right\| \geq \frac{1}{2} \beta(y) \rho(y, G) \quad \forall z_1, z_2 \in P_G(y) \quad (4.1)$$

и если $\beta(y) > 0$, то множество $P_G(y)$ не содержит диаметрально противоположных относительно y точек.

Сперва покажем принципиальную возможность уменьшить величину $\rho(y(\tau), G)$ в окрестности точки $\tau_0 \in (0, 1)$ локального максимума в случае, когда $\alpha(y(\tau_0)) < 1$.

Предполагая, что движущийся объект имеет ненулевые размеры, наряду с желанием объекта приблизить траекторию к множеству G естественно наложить условие достаточной удаленности (ε -удаленности) точек траектории от G .

Лемма 6. Пусть

$$\tau_0 \in (0, 1), \quad y_0 = y(\tau_0), \quad \rho_0 = \rho(y_0), \quad \alpha_0 = \alpha(y_0), \quad 0 < \varepsilon < \frac{\alpha_0^2}{2}, \quad \beta_0 = \beta(y_0) \quad (4.2)$$

и при некотором $\delta_0 > 0$ для Γ_0 выполняется условие

$$\rho(y(\tau)) < \rho_0 \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_0 - \delta_0, \tau_0 + \delta_0], \quad \tau \neq \tau_0.$$

Тогда найдутся δ , $0 < \delta \leq \delta_0$, гладкая кривая

$$\Gamma_\delta = \{y_\delta(\tau) : \tau \in [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]\}$$

и числа δ_* , $\delta^* \in [0, \delta]$ такие, что

$$(1 - \varepsilon) \rho(y(\tau)) \leq \rho(y_\delta(\tau)) \leq \alpha_0 \rho_0 \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_0 - \delta_*, \tau_0 + \delta^*],$$

$$\rho(y_\delta(\tau)) \leq \rho(y(\tau_0 - \delta)) \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_0 - \delta, \tau_0 - \delta_*],$$

$$\rho(y_\delta(\tau)) \leq \rho(y(\tau_0 + \delta)) \quad \text{при} \quad \tau \in [\tau_0 + \delta^*, \tau_0 + \delta],$$

$$y_\delta(\tau_0 \pm \delta) = y(\tau_0 \pm \delta),$$

и неравенство $\rho(y_\delta(\tau_0)) \leq \alpha_0 \rho_0$ неулучшаемо.

Доказательство. Для последовательности точек τ^- (точек τ^+), сходящейся к τ_0 слева (справа), найдется подпоследовательность точек $g(\tau^-) \in P_G(y(\tau^-))$ (точек $g(\tau^+) \in P_G(y(\tau^+))$), сходящаяся к некоторой точке $g^- \in P_G(y_0)$ (точке $g^+ \in P_G(y_0)$). В силу непрерывности функции $\rho(y)$ выполняется равенство $\|y_0 - g^\pm\| = \rho(y_0)$. Ввиду (4.1)

$$\|g^- - g^+\| \leq \rho_0 \sqrt{4 - \beta_0^2}.$$

Поэтому при

$$b = \frac{\|g^- - g^+\|}{2}$$

для $w_0 = (g^- + g^+)/2$ будем иметь

$$w_0 \in V_b(g^-) \cap V_b(g^+), \quad \|y_0 - w_0\| = \frac{1}{2} \beta_0 \rho_0,$$

$$\rho(z) \leq b \leq \alpha_0 \rho_0 \quad \forall z \in V_b(g^-) \cup V_b(g^+).$$

Поскольку $g(\tau^\pm) \rightarrow g^\pm$ ($\tau^\pm \rightarrow \tau_0$), то при достаточно малом $\delta \in (0, \delta_0)$ множество

$$\Delta^\pm = V_b(g^\pm) \cap V_{(1-\varepsilon)\rho_0}(y_0) \cap [y(\tau_0 \pm \delta), g(\tau_0 \pm \delta)]$$

непусто. Возьмем точки $y^\pm \in \Delta^\pm$. Как нетрудно видеть, функция $\rho(z)$ строго монотонна на отрезках $[y(\tau_0 - \delta), y^-]$, $[y(\tau_0 + \delta), y^+]$. Возможен случай, когда $y(\tau_0 \pm \delta) \in V_b(g^\pm)$; тогда положим $y^\pm = y(\tau_0 \pm \delta)$. Пусть

$$\|y_0 - w_0\| \leq \rho_0(1 - \varepsilon). \quad (4.3)$$

В качестве Γ_δ возьмем произвольную гладкую кривую, содержащую отрезки $[y(\tau_0 \pm \delta), y^\pm]$, средний участок от y^- до y^+ которой содержится в множестве

$$[V_b(g^-) \cup V_b(g^+)] \cap V_{(1-\varepsilon)\rho_0}(y_0), \quad b \leq \alpha_0 \rho_0, \quad (4.4)$$

и содержит точку $w_0 = (g^- + g^+)/2$. Направление касательного вектора к кривой Γ_δ в точке w_0 может быть задано произвольно, например, совпадающим с направлением касательного вектора к Γ_0 в точке y_0 . В случае, когда

$$\left\| y_0 - \frac{g^- + g^+}{2} \right\| > \rho_0(1 - \varepsilon), \quad (4.5)$$

например когда $g^- = g^+$, в качестве w_0 возьмем точку на отрезке $[y_0, (g^- + g^+)/2]$ такую, что $\|y_0 - w_0\| = (1 - \varepsilon)\rho_0$. Тогда

$$\|w_0 - g^+\|^2 = \|w_0 - g^-\|^2 = \left\| \frac{g^- - g^+}{2} \right\|^2 + \left[\left\| y_0 - \frac{g^- + g^+}{2} \right\| - (1 - \varepsilon)\rho_0 \right]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{g^- - g^+}{2} \right\|^2 + \left\| y_0 - \frac{g^- + g^+}{2} \right\|^2 - 2 \left\| y_0 - \frac{g^- + g^+}{2} \right\| (1 - \varepsilon) \rho_0 + (1 - \varepsilon)^2 \rho_0^2 \\
&= \rho_0^2 + (1 - \varepsilon)^2 \rho_0^2 - 2 \left\| y_0 - \frac{g^- + g^+}{2} \right\| (1 - \varepsilon) \rho_0
\end{aligned}$$

и в силу (4.5)

$$\|w_0 - g^-\|^2 \leq \varepsilon(2 - \varepsilon)\rho_0^2 \leq 2\varepsilon\rho_0^2.$$

Используя предположение (4.2), получаем

$$\|w_0 - g^-\| \leq \sqrt{2\varepsilon}\rho_0 \leq \alpha_0\rho_0.$$

В случае, когда выполняется (4.5), гладкая кривая Γ_δ строится как в случае (4.3), с той лишь разницей, что ее участок от y^- до y^+ содержится в множестве (4.4) при $b = \|w_0 - g^-\|$.

Полученную кривую Γ_δ параметризуем так, чтобы точки $y^- = y_\delta(\tau_0 - \delta_*)$, $y^+ = y_\delta(\tau_0 + \delta^*)$ были концевыми для кривой

$$\Gamma_\delta \cap [V_b(g^-) \cup V_b(g^+)] \quad \text{и} \quad y_\delta(\tau_0) = w_0.$$

Отметим, что, заменив на участке от $y(\tau_0 - \delta)$ до $y(\tau_0 + \delta)$ кривую Γ_0 на Γ_δ , мы получим гладкую кривую всюду, за исключением точек $y(\tau_0 \pm \delta)$, где гладкость легко восстанавливается. Лемма установлена. \square

Далее $\overset{\circ}{M}$ — внутренность множества M , а \overline{M} — его замыкание. Для $y \in \mathbb{C}$, $g \in P_G(y)$ будем обозначать

$$H(y, g) = V_{\alpha^*\rho(y)}(g) \cap \overset{\circ}{V}_{\rho(y)}(y), \quad H(y) = \bigcup_{g \in P_G(y)} H(y, g), \quad H = \bigcup_{y \in \Gamma_0} H(y);$$

множество $H(y, g)$ будем называть линзой.

Теорема 6. *Существует непрерывная траектория*

$$\Gamma^* = \{t(\tau) : \tau \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}, \quad t(0) \in H(t_*), \quad t(1) \in H(t^*), \quad (4.6)$$

такая, что

$$\rho(t(\tau), G) \leq \alpha^* \rho(y(\tau), G), \quad \tau \in [0, 1]. \quad (4.7)$$

Доказательство. Множество $H(y)$ связно, так как для любых $g_1, g_2 \in P_G(y)$ выполняется (см. (4.1)) неравенство

$$\|g_1 - g_2\| \leq 2\alpha(y)\rho(y) \leq 2\alpha^*\rho(y).$$

Покажем, что множество H связно. Допустим, что H разбивается на два подмножества $H = H_1 \cup H_2$, так что

$$\inf \{\|h_1 - h_2\| : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\} > 0,$$

значит, множество $P = \bigcup_{y \in \Gamma_0} P_G(y)$ разбивается на два непересекающихся множества $P = P_1 \cup P_2$ и в соответствии с разбиением $P_1 \cup P_2$ множество точек Γ_0 также разбивается на два подмножества. Для точки $\tilde{y} \in \Gamma_0$, граничной для этих множеств, ввиду непрерывности функции $\rho(y)$ будем иметь

$$P_G(\tilde{y}) \cap P_1 \neq \emptyset, \quad P_G(\tilde{y}) \cap P_2 \neq \emptyset,$$

и если $g_i \in P_G(\tilde{y}) \cap P_i$ ($i = 1, 2$), то $H(\tilde{y}, g_1) \cap H(\tilde{y}, g_2) \neq \emptyset$, и связное множество

$$H(\tilde{y}, g_1) \cup H(\tilde{y}, g_2)$$

соединяет множества H_1 и H_2 . Противоречие. Связность множества H влечет существование непрерывной траектории Γ^* , соединяющей точки из $H(t_*)$ и $H(t^*)$, которая принадлежит множеству H и, следовательно, удовлетворяет неравенству (4.7). Теорема доказана. \square

З а м е ч а н и е. Пусть $\alpha^* < 1$ и $0 < \delta < 1 - \alpha^*$. Траектория Γ^* (см. (4.6)) является компактом и покрыта совокупностью открытых множеств

$$\left\{ \overset{\circ}{V}_{(\alpha^*+\delta)\rho(y)}(g) \cap \overset{\circ}{V}_{\rho(y)}(y) : y \in \Gamma_0, g \in P_G(y) \right\},$$

поэтому существуют конечный набор чисел $\tau_i \in [0, 1]$, набор точек $g_i \in P_G(y_i)$, $y_i = y(\tau_i)$ ($i = 1, \dots, n$), таких что

$$\Gamma^* \subset \bigcup_{i=1}^n \left(\overset{\circ}{V}_{(\alpha^*+\delta)\rho(y_i)}(g_i) \cap V_{\rho(y_i)}(y_i) \right).$$

5. О построении гладкой траектории

Будем считать, что число ε подчиняется неравенству

$$0 < \varepsilon < \frac{(\alpha^*)^2}{2}, \quad (5.1)$$

и использовать следующее обозначение для линзы:

$$H_\varepsilon(y, g) = V_{(1-\varepsilon)\rho(y)}(y) \cap V_{\alpha^*\rho(y)}(g), \quad g \in P_G(y).$$

Отрезок $[0, 1]$ разобьем на подотрезки $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, в соответствии с которыми, базируясь на Γ_0 , построим гладкую траекторию $t(\tau) : \tau \in [0, 1]$, удовлетворяющую неравенству (4.7).

Опишем первый шаг алгоритма. Пусть $y_0 = y(\tau_0)$ и последовательность τ сходится к $\tau_0 = 0$ справа. Существует подпоследовательность τ , для каждой точки которой найдется элемент $g(\tau) \in P_G(y(\tau))$ такой, что существует предел $g_0^+ = \lim_{\tau \rightarrow +\tau_0} g(\tau)$. Ясно, что $g_0^+ \in P_G(y_0)$. Выберем произвольную точку $w_0 \in H_\varepsilon(y_0, g_0^+)$. При малых τ будем иметь

$$H_\varepsilon(y(\tau), g(\tau)) \cap H_\varepsilon(y_0, g_0^+) \neq \emptyset. \quad (5.2)$$

Пусть τ_1 — наибольшее из чисел $\tau \geq \tau_0$, для которых существует точка $g(\tau) \in P_G(y(\tau))$ такая, что выполняется соотношение (5.2). Отметим, что при $\tau > \tau_1$ соотношение (5.2) не выполняется. Обозначим

$$y_1 = y(\tau_1), \quad \rho_1 = \rho(y_1, G), \quad g_1 = g(y(\tau_1)) \in P_G(y_1)$$

и в качестве $w_{0,1}$ возьмем точку из множества $H_\varepsilon(y_0, g_0^+) \cap H_\varepsilon(y_1, g_1)$.

Опишем второй шаг. Из последовательности τ , сходящейся уже к τ_1 справа, выделим подпоследовательность такую, что есть сходящаяся последовательность точек $g(\tau) \in P_G(y(\tau))$. Ее предел g_1^+ принадлежит проекции $P_G(y_1)$. По определению величины α получаем

$$\|g_1 - g_1^+\| \leq 2\alpha(y_1)\rho_1 \leq 2\alpha^*\rho_1.$$

Если

$$\left\| y_1 - \frac{g_1 + g_1^+}{2} \right\| \leq (1 - \varepsilon)\rho_1, \quad (5.3)$$

то для точки $w = (g_1 + g_1^+)/2$ выполняется включение

$$w \in H_\varepsilon(y_1, g_1) \cap H_\varepsilon(y_1, g_1^+). \quad (5.4)$$

Если же имеет место обратное к (5.3) неравенство (если, в частности, $g_1 = g_1^+$), то в качестве w возьмем точку на отрезке $[y_1, (g_1 + g_1^+)/2]$, для которой

$$\|y_1 - w\| = (1 - \varepsilon) \rho_1,$$

тогда включение (5.4) также выполняется (см. (5.1) и доказательство леммы 6 в случае (4.5)). Итак, в обоих случаях

$$w \in H_\varepsilon(y_1, g_1) \cap H_\varepsilon(y_1, g_1^+) \neq \emptyset.$$

Определенную таким образом точку w обозначим через $w_{1,1}$. Пусть τ_2 — наибольшее из чисел $\tau \geq \tau_1$, для которых существует $g(\tau) \in P_G(y(\tau))$ такое, что выполняется соотношение

$$H_\varepsilon(y(\tau), g(\tau)) \cap H_\varepsilon(y_1, g_1^+) \neq \emptyset.$$

Для $\tau > \tau_2$ это соотношение не выполняется. Возьмем $w_{1,2} \in H_\varepsilon(y_1, g_1^+) \cap H_\varepsilon(y_2, g_2)$, где $y_2 = y(\tau_2)$, $g_2 = g(y(\tau_2))$. И так далее.

Для произвольного номера k определяются точки

$$y_k = y(\tau_k) \in \Gamma_0 \ (\tau_k > \tau_{k-1}), \quad g_k \in P_G(y_k), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\tau_k} g(\tau) = g_k^+ \in P_G(y_k) \ (g(\tau) \in P_G(y(\tau))),$$

$$w_{k-1,k} \in H_\varepsilon(y_{k-1}, g_{k-1}^+) \cap H_\varepsilon(y_k, g_k), \quad w_{k,k} \in H_\varepsilon(y_k, g_k) \cap H_\varepsilon(y_k, g_k^+).$$

Поскольку объем коридора \mathbb{C} конечен, а объем всех линз ограничен снизу общей положительной константой и в силу построения линз выполняется соотношение

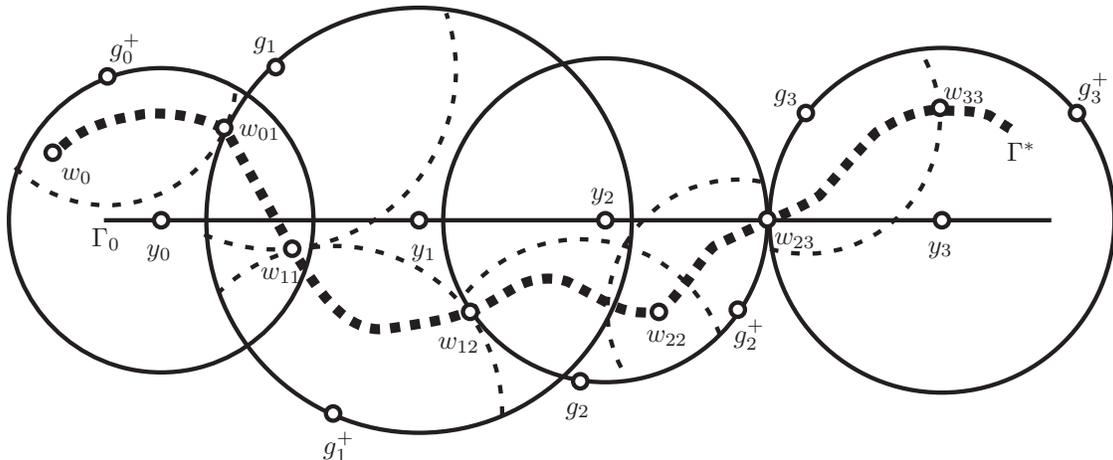
$$H_\varepsilon(y_k, g_k^+) \cap H_\varepsilon(y_{k+2}, g_{k+2}) = \emptyset,$$

то указанный процесс завершается за конечное число шагов. Объединение всех линз H_ε образует связное множество. Искомая траектория $\Gamma^* = \{t(\tau) : \tau \in [0, 1]\}$ (см. рисунок в случае \mathbb{R}^2 и $\varepsilon = 0$) последовательно соединяет точки

$$w_0, w_{0,1}, w_{1,1}, \dots, w_{k-1,k}, w_{k,k} \tag{5.5}$$

и содержится в объединении линз

$$H_\varepsilon(y_0, g_0^+), H_\varepsilon(y_1, g_1), \dots, H_\varepsilon(y_{k-1}, g_{k-1}^+), H_\varepsilon(y_k, g_k), \dots$$



Построенная траектория в \mathbb{R}^2 , $\varepsilon = 0$.

Нетрудно обеспечить гладкость траектории всюду, включая точки стыковки (5.5). Построенная траектория удовлетворяет неравенству

$$(1 - \varepsilon)\rho(y(\tau), G) \leq \rho(t(\tau), G) \leq \alpha^* \rho(y(\tau), G). \quad (5.6)$$

Правое неравенство в общем случае неулучшаемо.

Отметим, что при построении траектории на участках между точками (5.5) можно воспользоваться теоремой 5.

З а м е ч а н и е. Приведенный алгоритм построения траектории, удовлетворяющей условию (5.6), можно применять в случае произвольного конечномерного нормированного пространства.

Автор благодарен В. Б. Костоусову и В. С. Пацко за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Видимость объекта для наблюдателя с неточно заданными координатами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 21–28.
2. **Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
3. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. **Fitzpatric S.** Metric projections and the differentiability of distance functions // Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 22, no. 2. P. 291–312.

Бердышев Виталий Иванович
чл.-корр. РАН, директор
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 4.02.2011

УДК 517.929

КАНОНИЧЕСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ¹**Д. С. Быков, Ю. Ф. Долгий**

Канонические аппроксимации используются при построении приближенных управлений в задаче оптимальной стабилизации автономных систем с последействием. При реализации проекционного метода нахождения конечномерных аппроксимаций применяются представления проекторов в форме интеграла Рисса. Устанавливается их связь с координатными представлениями проекторов.

Ключевые слова: автономные системы с последействием, оптимальная стабилизация, проекционный метод, канонические аппроксимации.

D.S. Bykov, Yu.F. Dolgii. Canonical approximations in task of optimal stabilization of autonomous systems with aftereffect.

Canonical approximations are used for building of approximate control in task of optimal stabilization of autonomous system with aftereffect. Riesz's integral representations are used for projection method implementation of finite dimension approximation. Defined their relation with coordinate representation of projectors.

Keywords: autonomous systems with aftereffect, optimal stabilization, projection method, canonical approximation.

Введение

Объект управления описывается линейной системой дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 d\eta(\vartheta) x(t + \vartheta) + Bu, \quad (0.1)$$

где $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ — управление, η — матричнозначная функция с ограниченной вариацией на отрезке $[-\tau, 0]$, $\eta(0) = 0$, B — постоянная матрица.

Рассмотрим задачу нахождения управления, формируемого по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (0.1) и минимизирует следующий критерий качества переходных процессов

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) C^x x(t) + u^T(t) C^u u(t)] dt, \quad (0.2)$$

где C^x и C^u — положительно определенные матрицы.

Канонические аппроксимации применялись при нахождении стабилизирующих управлений для систем с последействием в работах Н.Н. Красовского и Ю.С. Осипова [1, 2], Е.М. Маркушина и С.Н. Шиманова [3–5], L. Pandolfi [6, 7]. Указанные авторы при решении задачи стабилизации использовали пространство состояний $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ и координатное описание канонических аппроксимаций. В настоящей работе применяется пространство состояний

¹Работа поддержана программой Президиума РАН “Математическая теория управления” (проект 09-П-1-1014).

$\mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ и спектральное описание канонических разложений с помощью интеграла Рисса.

При решении поставленной задачи удобно, следуя Н.Н. Красовскому [8, с. 151], перейти от конечномерной к бесконечномерной постановке, вводя с помощью формул $\mathbf{x}_t(\vartheta) = \mathbf{x}(t + \vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $t \geq 0$, функциональные элементы для решений системы (0.1), принадлежащие сепарабельному гильбертовому пространству $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top(0) \mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{y}^\top(\vartheta) \mathbf{x}(\vartheta) d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$.

В функциональном пространстве состояний \mathbb{H} системе (0.1) соответствует уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}_t + \mathbf{B} u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (0.3)$$

где замкнутый неограниченный оператор $\mathbf{A} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathbf{A} \mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad (\mathbf{A} \mathbf{x})(0) = \int_{-\tau}^0 d\eta(\vartheta) \mathbf{x}(\vartheta)$$

и имеет область определения $D(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\}$, а ограниченный оператор $\mathbf{B} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{H}$ — формулами

$$(\mathbf{B} u)(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad (\mathbf{B} u)(0) = Bu, \quad u \in \mathbb{R}^r.$$

Критерий качества (0.2) будет описываться формулой

$$J = \int_0^\infty \left((\mathbf{C}^x \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) + u^\top(t) C^u u(t) \right) dt,$$

где $(\mathbf{C}^x \mathbf{x})(0) = C^x x(0)$, $(\mathbf{C}^x \mathbf{x})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-\tau, 0)$.

1. Каноническое разложение пространства состояний

Используя комплексификацию пространства \mathbb{H} , будем рассматривать скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^*(0) \mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{y}^*(\vartheta) \mathbf{x}(\vartheta) d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$.

Корни характеристического уравнения

$$\delta(\lambda) = \det \Delta(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

где $\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-\tau}^0 d\eta(\vartheta) e^{\lambda\vartheta}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, являются собственными числами инфинитезимального оператора \mathbf{A} [8, с. 163]. Будем рассматривать невырожденный случай, когда это уравнение имеет счетное число корней λ_k , $k \in \mathbb{N}$. Для любого $\sigma \in \mathbb{R}$ в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq \sigma, \lambda \in \mathbb{C}\}$ лежит конечное число корней уравнения (1.1). Следовательно, они могут быть занумерованы в порядке убывания вещественных частей, при этом номера комплексно-сопряженных корней должны отличаться на единицу. Нумерация корней осуществляется без учета кратности. Пусть кратность корня λ_k равна n_k . Число цепочек Жордана для собственного числа λ_k обозначим через m_k , длину j ($j = 1, \dots, m_k$) цепочки — через m_{kj} , $k \in \mathbb{N}$.

Для некоторого натурального N' обозначим через $N = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{j=1}^{m_k} m_{kj}$. Пусть \mathbb{H}^N — объединение корневых подпространств оператора \mathbf{A} , отвечающих его собственным числам, принадлежащих множеству $\sigma_{N'} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{N'}\} \subset \sigma(\mathbf{A})$, где $\sigma(\mathbf{A})$ — спектральное множества оператора \mathbf{A} , состоящее только из собственных чисел этого оператора. Проектор \mathbf{P}_N ($\mathbf{P}_N \mathbb{H} = \mathbb{H}^N$)

задает каноническое разложение пространства \mathbb{H} в прямую сумму, при котором $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ однозначно определяет элементы $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^N$ и $\mathbf{z} \in (I - \mathbf{P}_N) \mathbb{H}$ такие, что $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$.

В случае замкнутого инфинитезимального оператора с вполне непрерывной резольвентой проекционный оператор можно определить формулой [9; 10, с. 228; 11, с. 118]

$$\mathbf{P}_N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{N'}} R(\lambda; \mathbf{A}) d\lambda,$$

где $\Gamma_{N'}$ — замкнутый спрямляемый контур, лежащий в резольвентном множестве $\rho(\mathbf{A})$, содержащий внутри себя множество $\sigma_{N'}$ и не содержащий точки $\sigma(\mathbf{A}) / \sigma_{N'}$. Ориентация контура $\Gamma_{N'}$ выбрана так, что при его обходе множество $\sigma_{N'}$ остается слева. Учитывая мероморфность резольвенты и конечность множества $\sigma_{N'}$, находим

$$\mathbf{P}_N = \sum_{k=1}^{N'} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} R(\lambda; \mathbf{A}). \quad (1.2)$$

Резольвентный оператор инфинитезимального оператора \mathbf{A} допускает представление [12]

$$(R(\lambda; \mathbf{A}) \mathbf{x})(\vartheta) = \Delta^{-1}(\lambda) \left(\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s e^{\lambda(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right) e^{\lambda\vartheta} \\ + \int_{\vartheta}^0 e^{\lambda(\vartheta-\xi)} \mathbf{x}(\xi) d\xi, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}.$$

Утверждение 1.1. Если все корни λ_k , $k = 1, \dots, N'$, характеристического уравнения (1.1) простые, то имеем $N' = N$, а представление проектора определяется формулой

$$(\mathbf{P}_N \mathbf{x})(\vartheta) = \sum_{k=1}^N \frac{D(\lambda_k)}{\delta'(\lambda_k)} \left(\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right) e^{\lambda_k \vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

где $D(\lambda)$ — присоединенная матрица для $\Delta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Используя формулу $\Delta^{-1}(\lambda) = D(\lambda) / \delta(\lambda)$, $\lambda \in \rho(\mathbf{A})$, для простого корня λ_k ($k = 1, \dots, N'$) характеристического уравнения (1.1) находим

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} (R(\lambda; \mathbf{A}) \mathbf{x})(\vartheta) = \frac{D(\lambda_k)}{\delta'(\lambda_k)} \left(\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right) e^{\lambda_k \vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0].$$

Тогда из (1.2) следует справедливость утверждения. \square

Утверждение 1.2. Если характеристическое уравнение (1.1) имеет кратные корни, то получаем $N' < N$, а представление проектора определяется формулой

$$(\mathbf{P}_N \mathbf{x})(\vartheta) = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{i=0}^{n_k-1} F_{ki} \left(\vartheta^i \mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s (\xi - s + \vartheta)^i e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right) e^{\lambda_k \vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

где $F_{ki} = C_{n_k-1}^i M_k^{(n_k-1-i)}(\lambda_k) / (n_k-1)!$, $i = 0, \dots, n_k-1$; $M_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{n_k} D(\lambda) / \delta(\lambda)$, $\lambda \in \rho(\mathbf{A})$, точка λ_k является устранимой особой точкой функции M_k , $k = 1, \dots, N'$.

Доказательство. Для кратного корня λ_k ($k = 1, \dots, N'$) характеристического уравнения (1.1) имеем [13, с. 241]

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} (R(\lambda; \mathbf{A}) \mathbf{x})(\vartheta) = \frac{1}{(n_k - 1)!} \frac{d^{n_k-1}}{d\lambda^{n_k-1}} [M_k(\lambda) K(\lambda, \mathbf{x}, \vartheta)] \Big|_{\lambda=\lambda_k}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

где

$$K(\lambda, \mathbf{x}, \vartheta) = \left(\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s e^{\lambda(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right) e^{\lambda\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}.$$

Используя формулу Лейбница, находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} (R(\lambda; \mathbf{A}) \mathbf{x})(\vartheta) &= \frac{1}{(n_k - 1)!} \sum_{i=0}^{n_k-1} C_{n_k-1}^i M_k^{(n_k-1-i)}(\lambda_k) \frac{d^i K(\lambda_k, \mathbf{x}, \vartheta)}{d\lambda^i} \\ &= \frac{1}{(n_k - 1)!} \sum_{i=0}^{n_k-1} C_{n_k-1}^i M_k^{(n_k-1-i)}(\lambda_k) \left(\vartheta^i \mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s (\xi - s + \vartheta)^i e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right) e^{\lambda_k \vartheta}, \end{aligned}$$

где $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$. Из (1.2) следует справедливость утверждения. \square

2. Канонические аппроксимации задачи оптимальной стабилизации

При построении канонических аппроксимаций задачи оптимальной стабилизации используется схема проекционного метода [14, с. 189]. Уравнение (0.3) с учетом равенства $\mathbf{P}_N \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{P}_N$ [10, с. 228] заменяется уравнением

$$\frac{d\mathbf{P}_N \mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}_N \mathbf{x}_t + \mathbf{B}_N u, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где конечномерные операторы $\mathbf{A}_N : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^N$, $\mathbf{B}_N : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{H}^N$ определяются формулами $\mathbf{A}_N = \mathbf{A} \mathbf{P}_N$, $\mathbf{B}_N = \mathbf{P}_N \mathbf{B}$. Новый критерий качества имеет вид

$$J_N = \int_0^\infty \left[(\mathbf{C}_N^x \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t) + u^\top(t) C^u u(t) \right] dt,$$

где конечномерный оператор $\mathbf{C}_N^x : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ определяется формулой $\mathbf{C}_N^x = \mathbf{P}_N^* \mathbf{C}^x \mathbf{P}_N$.

Утверждение 2.1. Если корни характеристического уравнения λ_k , $k = 1, \dots, N$, простые, то справедливы формулы

$$(\mathbf{A}_N \mathbf{x})(\vartheta) = (\mathbf{A} \mathbf{P}_N \mathbf{x})(\vartheta) = \sum_{k=1}^N \frac{D(\lambda_k)}{\delta'(\lambda_k)} \lambda_k \left(\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right) e^{\lambda_k \vartheta}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

$$(\mathbf{B}_N u)(\vartheta) = (\mathbf{P}_N \mathbf{B} u)(\vartheta) = \sum_{k=1}^N \frac{D(\lambda_k)}{\delta'(\lambda_k)} B u e^{\lambda_k \vartheta}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

$$(\mathbf{C}_N^x \mathbf{x})(0) = \sum_{k,m=1}^N \frac{D^\top(\bar{\lambda}_k) C^x D^\top(\lambda_m)}{\delta'(\bar{\lambda}_k) \delta'(\lambda_m)} \lambda_k \left(\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right),$$

$$(\mathbf{C}_N^x \mathbf{x})(\vartheta) = \int_{-\tau}^{\vartheta} e^{\bar{\lambda}_k(\xi-\vartheta)} d\eta^\top(\xi) (\mathbf{C}_N^x \mathbf{x})(0), \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}.$$

Доказательство. Справедливость первых двух формул следует из утверждения 1.1 и определения операторов \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Найдем представление сопряженного оператора \mathbf{P}_N^* . Используя равенство $(\mathbf{P}_N \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{P}_N^* \mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$, имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_N \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbf{y}^*(0) \sum_{k=1}^N \frac{D(\lambda_k)}{\delta'(\lambda_k)} \left[\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right] \\ &+ \int_{-\tau}^0 \mathbf{y}^*(\vartheta) \sum_{k=1}^N \frac{D(\lambda_k)}{\delta'(\lambda_k)} \left[\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right] e^{\lambda_k \vartheta} d\vartheta. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_N^* \mathbf{y})(0) &= \sum_{k=1}^N \frac{D^\top(\bar{\lambda}_k)}{\delta'(\bar{\lambda}_k)} \left[\mathbf{y}(0) + \int_{-\tau}^0 \mathbf{y}(\vartheta) e^{\bar{\lambda}_k \vartheta} d\vartheta \right], \\ (\mathbf{P}_N^* \mathbf{y})(\vartheta) &= \int_{-\tau}^{\vartheta} e^{\bar{\lambda}_k(\xi-\vartheta)} d\eta^\top(\xi) (\mathbf{P}_N^* \mathbf{y})(0), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Используя определения операторов \mathbf{C}^x и \mathbf{P}_N , получаем

$$(\mathbf{C}^x \mathbf{P}_N \mathbf{x})(0) = C^x \sum_{k=1}^N \frac{D(\lambda_k)}{\delta'(\lambda_k)} \lambda_k \left(\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right), \quad (\mathbf{C}^x \mathbf{P}_N \mathbf{x})(\vartheta) = 0,$$

где $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$. Откуда с учетом представления оператора \mathbf{P}_N^* следует справедливость утверждения. \square

Утверждение 2.2. Если среди корней λ_k , $k = 1, \dots, N'$, уравнения (1.1) есть кратные, то справедливы формулы

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_N \mathbf{x})(\vartheta) &= \sum_{k=1}^{N'} \sum_{i=0}^{n_k-1} \lambda_k F_{ki} \left(\vartheta^i \mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s (\xi-s+\vartheta)^i e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right) e^{\lambda_k \vartheta} \\ &+ \sum_{k=1}^{N'} \sum_{i=1}^{n_k-1} i F_{ki} \left(\vartheta^{i-1} \mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s (\xi-s+\vartheta)^{i-1} e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right) e^{\lambda_k \vartheta}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \\ (\mathbf{B}_N u)(\vartheta) &= \sum_{k=1}^{N'} \sum_{i=0}^{n_k-1} F_{ki} \vartheta^i B u e^{\lambda_k \vartheta}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \\ (\mathbf{C}_N^x \mathbf{x})(0) &= \sum_{k=1}^{N'} F_{k0}^* C^x \sum_{k=1}^{N'} \left(F_{k0} \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{n_k-1} F_{ki} \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s (\xi-s)^i e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right), \\ (\mathbf{C}_N^x \mathbf{x})(\vartheta) &= \sum_{l,k=1}^{N'} \sum_{j=0}^{m_l-1} \int_{-\tau}^{\vartheta} (\xi-\vartheta)^j e^{\bar{\lambda}_l(\xi-\vartheta)} d\eta^\top(\xi) F_{lj}^* \\ &\times C^x \left(F_{k0} \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{n_k-1} F_{ki} \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^s (\xi-s)^i e^{\lambda_k(\xi-s)} d\eta(\xi) \mathbf{x}(s) ds \right), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Доказательство. Производится по схеме доказательства утверждения 2.1. \square

Сужение аппроксимационной задачи оптимальной стабилизации на \mathbb{H}^N описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{y}_t}{dt} = \mathbf{A}_N \mathbf{y}_t + \mathbf{B}_N u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1)$$

с критерием качества

$$J_N = \int_0^\infty \left[(\mathbf{C}_N^x \mathbf{y}_t, \mathbf{y}_t) + u^\top(t) C^u u(t) \right] dt. \quad (2.2)$$

Пространство \mathbb{H}^N топологически изоморфно конечномерному гильбертовому пространству \mathbb{C}^N со скалярным произведением $y^{2*}y^1, y^1, y^2 \in \mathbb{C}^N$. Пусть отображение $\pi_N : \mathbb{H}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ определяет этот топологический изоморфизм.

Используя оператор π_N , уравнение (2.1) в пространстве \mathbb{H}^N можно заменить эквивалентным в пространстве \mathbb{C}^N

$$\frac{dy}{dt} = A_N y + B_N u, \quad (2.3)$$

где конечномерные операторы $A_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N, B_N : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^N$ определяются формулами $A_N = \pi_N \mathbf{A}_N \pi_N^{-1}, B_N = \pi_N \mathbf{B}_N$. Тогда (2.2) соответствует эквивалентный критерий

$$\hat{J}_N = \int_0^\infty \left[y^*(t) C_N^x y(t) + u^\top(t) C^u u(t) \right] dt, \quad (2.4)$$

где $C_N^x = \pi_N^{-1*} \mathbf{C}_N^x \pi_N^{-1}$.

Пусть уравнение Риккати

$$A_N^* \Pi_N + \Pi_N A_N + C_N^x - \Pi_N B_N (C^u)^{-1} B_N^* \Pi_N = 0 \quad (2.5)$$

имеет единственное положительно определенное решение. Тогда оптимальное стабилизирующее управление системы (2.3) с критерием качества (2.4) может быть описано формулой [15, с. 509]

$$\hat{u}_N^0[y] = -(C^u)^{-1} B_N^* \Pi_N y, \quad y \in \mathbb{C}^N,$$

где $\Pi_N : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ — положительный самосопряженный конечномерный оператор.

Теорема. Пусть уравнение Риккати (2.5) имеет единственное положительно определенное решение, все собственные числа оператора \mathbf{A} , принадлежащие множеству $\sigma(\mathbf{A}) / \sigma_{N'}$, имеют отрицательные действительные части, тогда управление

$$u_N[\mathbf{x}] = -(C^u)^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P}_N^* \mathfrak{P}_N \mathbf{P}_N \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H} \quad (2.6)$$

является стабилизирующим для системы с последствием (0.1). Здесь конечномерный оператор $\mathfrak{P}_N : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ определяется формулой $\mathfrak{P}_N = \pi_N^* \Pi_N \pi_N$.

Доказательство. Движение системы (0.3) под воздействием управления (2.6) описывается однородным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{B} (C^u)^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P}_N^* \mathfrak{P}_N \mathbf{P}_N \right) \mathbf{x}_t, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.7)$$

Используя каноническое разложение пространства \mathbb{H} , предыдущее уравнение заменяем системой

$$\frac{d\mathbf{y}_t}{dt} = \left(\mathbf{A}_N - \mathbf{B}_N (C^u)^{-1} \mathbf{B}_N^* \mathfrak{P}_N \right) \mathbf{y}_t, \quad (2.8)$$

$$\frac{d\mathbf{z}_t}{dt} = \mathbf{A} (I - \mathbf{P}_N) \mathbf{z}_t - (I - \mathbf{P}_N) \mathbf{B} (C^u)^{-1} \mathbf{B}_N^* \mathfrak{P}_N \mathbf{y}_t. \quad (2.9)$$

Используя изоморфизм пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{C}^N , получаем, что управление

$$u_N^0[\mathbf{y}] = -(C^u)^{-1} \mathbf{B}_N^* \mathfrak{P}_N \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}^N,$$

будет оптимальным стабилизирующим управлением системы (2.1) с критерием качества (2.2). Эволюционные операторы $T_N(t)$, $T_{Nd}(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, уравнения (2.8) и однородной части уравнения (2.9) соответственно экспоненциально ограничены с отрицательным показателем экспоненты [16]. Решение уравнения (2.9) определяется формулой

$$\mathbf{z}_t(\mathbf{z}_0) = T_{Nd}(t) \mathbf{z}_0 - \int_0^t T_{Nd}(t - \xi) (I - \mathbf{P}_N) \mathbf{B} (C^u)^{-1} \mathbf{B}_N^* \mathfrak{P}_N T_N(\xi) d\xi \mathbf{y}_0,$$

где $\mathbf{y}_0 = \mathbf{P}_N \mathbf{x}_0$, $\mathbf{z}_0 = (I - \mathbf{P}_N) \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}$, из которой следует его экспоненциальная ограниченность с отрицательным показателем.

Таким образом, решение $\mathbf{x}_t(\mathbf{x}_0)$, $t \in \mathbb{R}^+$, уравнения (2.7) экспоненциально убывает. Значит, управление (2.6) стабилизирует систему (0.3). \square

Для описания представлений топологического изоморфизма π_N используем базисы пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{H}^{N*} . Здесь \mathbb{H}^{N*} — объединение корневых подпространств оператора \mathbf{A}^* , отвечающих его собственным числам $\bar{\lambda}_k$, $k = 1, \dots, N'$.

3. Топологический изоморфизм пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{C}^N в случае простых собственных чисел оператора \mathbf{A}

В случае простых собственных чисел оператора \mathbf{A} в пространстве \mathbb{H}^N можно ввести базис, состоящий из собственных функций этого оператора, отвечающих собственным числам λ_k , $k = 1, \dots, N$, а в пространстве \mathbb{H}^{N*} — из собственных функций оператора \mathbf{A}^* , отвечающих собственным числам $\bar{\lambda}_k$, $k = 1, \dots, N$.

Лемма 3.1. *Если собственные числа λ_k , $k = 1, \dots, N$, оператора \mathbf{A} простые, то базис пространства \mathbb{H}^N , состоящий из собственных функций оператора \mathbf{A} , определяется формулами*

$$\Phi^k(\vartheta) = \Phi^k(0) e^{\lambda_k \vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

где $\Phi^k(0)$ — нетривиальные решения алгебраических систем

$$\left(\lambda_k I_n - \int_{-\tau}^0 d\eta(\vartheta) e^{\lambda_k \vartheta} \right) \Phi^k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Лемма 3.2. Если собственные числа λ_k , $k = 1, \dots, N$, оператора \mathbf{A} простые, то базис пространства \mathbb{H}^{N*} , состоящий из собственных функций оператора \mathbf{A}^* , определяется формулами

$$\Psi^k(\vartheta) = e^{-\bar{\lambda}_k \vartheta} \left(\bar{\lambda}_k I_n - \int_{\vartheta}^0 e^{\bar{\lambda}_k s} d\eta^\top(s) \right) \Psi^k(0), \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad \Psi^k(0) = \Psi^k(0),$$

где $\Psi^k(0)$ — нетривиальные решения алгебраических систем

$$\left(\bar{\lambda}_k I_n - \int_{-\tau}^0 e^{\bar{\lambda}_k s} d\eta^\top(s) \right) \Psi^k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

Описание элементов базиса пространства \mathbb{H}^{N*} можно сделать более компактным, если использовать оператор $\mathfrak{N} : C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{H}$, определяемый формулами

$$(\mathfrak{N}\psi)(0) = \psi(0), \quad (\mathfrak{N}\psi)(\vartheta) = \int_{-\tau}^{\vartheta} d\eta^\top(s) \psi(s - \vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad \psi \in C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n).$$

Введем в пространстве \mathbb{H} неиндефинитную метрику [17] с помощью билинейной формы $\langle \varphi, \psi \rangle = (\varphi, \mathfrak{N}\psi)$, $\varphi \in \mathbb{H}$, $\psi \in D(\mathfrak{N})$. Неограниченный оператор \mathfrak{N} , порождающий неиндефинитную метрику, имеет область определения $D(\mathfrak{N}) = C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n)$ всюду плотную в \mathbb{H} и не является самосопряженным. Поэтому определенная метрика не является даже индефинитной [18]. В рассматриваемой метрике из всех свойств скалярного произведения сохраняется только свойство полуторалинейности. Оно позволяет с помощью формулы $\langle \mathbf{A}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \mathbf{A}^c\psi \rangle$, $\varphi \in D(\mathbf{A})$, $\psi \in D(\mathbf{A}^c)$, ввести понятие формально сопряженного оператора \mathbf{A}^c .

Лемма 3.3. Имеют место равенства

$$\Psi^k = \mathfrak{N}\widehat{\Psi}^k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

Здесь $\widehat{\Psi}^k$ — собственные функции оператора \mathbf{A}^c , отвечающие собственным числам $\bar{\lambda}_k$, $k = 1, \dots, N$, и определяемые равенствами

$$\widehat{\Psi}^k(\vartheta) = e^{\bar{\lambda}_k \vartheta} \Psi^k(0), \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.4)$$

где $\Psi^k(0)$, $k = 1, \dots, N$, — нетривиальные решения системы (3.2).

Доказательство. Найдем представление оператора \mathbf{A}^c . Имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}\varphi, \psi \rangle &= (\mathbf{A}\varphi, \mathfrak{N}\psi) = (\mathfrak{N}\psi)^*(0) (\mathbf{A}\varphi)(0) + \int_{-\tau}^0 (\mathfrak{N}\psi)^*(\xi) (\mathbf{A}\varphi)(\xi) d\xi \\ &= \psi^*(0) \int_{-\tau}^0 d\eta(\xi) \varphi(\xi) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^{\xi} \psi^*(s - \xi) d\eta(s) \varphi'(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

При выполнении условия $\psi \in \mathbb{W}_2^1([- \tau, 0], \mathbb{C}^n)$ можно продолжить преобразования

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \varphi, \psi) &= \psi^*(0) \int_{-\tau}^0 d\eta(\xi) \varphi(\xi) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^{\xi} \psi^*(s - \xi) d\eta(s) \varphi'(\xi) d\xi \\ &= \psi^*(0) \int_{-\tau}^0 d\eta(\xi) \varphi(\xi) + \int_{-\tau}^0 \int_s^0 \psi^*(s - \xi) d\eta(s) \varphi'(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\tau}^0 \psi^*(s) d\eta(s) \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \int_s^0 \psi^{*'}(s - \xi) d\eta(s) \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mathbf{A}^c \psi \rangle &= (\varphi, \mathfrak{N} \mathbf{A}^c \psi) = (\mathfrak{N} \mathbf{A}^c \psi)^*(0) \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 (\mathfrak{N} \mathbf{A}^c \psi)^*(\xi) \varphi(\xi) d\xi \\ &= (\mathbf{A}^c \psi)^*(0) \varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^{\xi} (\mathbf{A}^c \psi)^*(s - \xi) d\eta(s) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, неограниченный замкнутый оператор \mathbf{A}^c определяется формулами

$$(\mathbf{A}^c \psi)(0) = \int_{-\tau}^0 d\eta^\top(s) \psi(s), \quad (\mathbf{A}^c \psi)(\vartheta) = \frac{d\psi(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0),$$

на всюду плотном в \mathbb{H} множестве $D(\mathbf{A}^c) = \mathbb{W}_2^1([- \tau, 0], \mathbb{C}^n)$.

Из определения оператора \mathbf{A}^c следует, что $\sigma(\mathbf{A}^c) = \sigma(\mathbf{A})$ и его собственные функции, отвечающие собственным числам $\bar{\lambda}_k$, $k = 1, \dots, N$, определяются формулами (3.4). Убедимся в справедливости равенств (3.3)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{N} \widehat{\Psi}^k)(0) &= \widehat{\Psi}^k(0) = \Psi^k(0), \\ (\mathfrak{N} \widehat{\Psi}^k)(\vartheta) &= \int_{-\tau}^{\vartheta} d\eta^\top(s) e^{\bar{\lambda}_k(s-\vartheta)} \Psi^k(0) = e^{-\bar{\lambda}_k \vartheta} \left(\int_{-\tau}^0 d\eta^\top(s) e^{\bar{\lambda}_k s} - \int_{\vartheta}^0 d\eta^\top(s) e^{\bar{\lambda}_k s} \right) \Psi^k(0) \\ &= e^{-\bar{\lambda}_k \vartheta} \left(\bar{\lambda}_k I_n - \int_{\vartheta}^0 d\eta^\top(s) e^{\bar{\lambda}_k s} \right) \Psi^k(0) = \Psi^k(\vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0). \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 3.4. *Базисы пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{H}^{N*} , определяемые формулами*

$$\varphi^k = \sum_{j=1}^N x_{kj} \Phi^j, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.5)$$

и

$$\psi^k = \sum_{j=1}^N y_{kj} \Psi^j, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

соответственно, биортогональны. Здесь $X = \|x_{kj}\|_{k,j=1}^N$, $\det X \neq 0$, $Y = \|y_{kj}\|_{k,j=1}^N = X^{-1*}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что базисы $\{\Phi^k\}_{k=1}^N$ и $\{\Psi^k\}_{k=1}^N$ пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{H}^{N*} биортогональны. Учитывая свойства собственных функций операторов \mathbf{A} и \mathbf{A}^* , в случае простых собственных чисел имеем $(\Phi^k, \Psi^j) = 0$ при $k \neq j$ и $(\Phi^k, \Psi^k) \neq 0$, $k, j = 1, \dots, N$. Свободой выбора Φ^k , $k = 1, \dots, N$, можно распорядиться таким образом, чтобы $(\Phi^k, \Psi^k) = 1$, $k = 1, \dots, N$.

Матрица Грама Γ_φ системы функций (3.5) определяется формулой

$$\Gamma_\varphi = \|(\varphi^i, \psi^j)\|_{i,j=1}^N = \left\| \sum_{k,l=1}^N x_{ik} \bar{x}_{jl} (\Phi^k, \Phi^l) \right\|_{i,j=1}^N = X \Gamma_\Phi X^*.$$

Аналогично матрица Грама Γ_ψ системы функций (3.6) может быть вычислена по формуле $\Gamma_\psi = Y \Gamma_\Psi Y^*$. Таким образом, матрицы Γ_φ , Γ_ψ неособые, а системы функций (3.5) и (3.6) образуют базисы пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{H}^{N*} .

Биортогональность базисов (3.5) и (3.6) следует из биортогональности базисов $\{\Phi^k\}_{k=1}^N$ и $\{\Psi^k\}_{k=1}^N$, так как

$$\|(\varphi^i, \psi^j)\|_{i,j=1}^N = \left\| \sum_{k,l=1}^N x_{ik} \bar{y}_{jl} (\Phi^k, \Psi^l) \right\|_{i,j=1}^N = \left\| \sum_{k=1}^N x_{ik} \bar{y}_{jl} \right\|_{i,j=1}^N = XY^* = I. \quad \square$$

Биортогональность базисов (3.5) и (3.6) позволяет определить координатное представление проектора \mathbf{P}_N по следующей формуле

$$\mathbf{P}_N \mathbf{x} = \sum_{k=1}^N (\mathbf{x}, \psi^k) \varphi^k, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}^N.$$

Утверждение 3.1. Если собственные числа λ_k , $k = 1, \dots, N$, оператора \mathbf{A} простые, то отображение π_N , заданное формулой

$$\pi_N \mathbf{y} = \left\| (\mathbf{y}, \psi^k) \right\|_{k=1}^N = \|y_k\|_{k=1}^N = y, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}^N,$$

определяет топологический изоморфизм пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{C}^N .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор π_N является ограниченным, поскольку

$$\|\pi_N \mathbf{y}\| = \left(\sum_{k=1}^N |(\mathbf{y}, \psi^k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^N \|\psi^k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{y}\|, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}^N,$$

т. е. $\|\pi_N\| \leq \left(\sum_{k=1}^N \|\psi^k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Оператор π_N имеет обратный оператор

$$\pi_N^{-1} y = \mathbf{y} = \sum_{k=1}^N y_k \varphi^k, \quad y \in \mathbb{C}^N,$$

который также является ограниченным

$$\|\pi_N^{-1} y\| = \left(\sum_{k=1}^N y_k \varphi^k, \sum_{m=1}^N y_m \varphi^m \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k,m=1}^N y_k \bar{y}_m (\varphi^k, \varphi^m) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_{\max} |y|, \quad y \in \mathbb{C}^N,$$

т. е. $\|\pi_N^{-1}\| \leq \lambda_{\max}$, где λ_{\max} — спектральный радиус матрицы $\|(\varphi^k, \varphi^m)\|_{k,m=1}^N$. \square

Используя базисы (3.5) и (3.6) пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{H}^{N*} соответственно, конкретизируем задачу оптимальной стабилизации в пространстве \mathbb{C}^N .

Утверждение 3.2. Если все собственные числа λ_k , $k = 1, \dots, N$, оператора \mathbf{A} простые, в базисе (3.5) представления конечномерных операторов A_N , B_N , C_N^x задачи оптимальной стабилизации (2.3), (2.4) определяются матрицами

$$A_N = X^{-1\top} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) X^\top, B_N = X^{-1\top} \|\Psi^{j*}(0)\|_{j=1}^N B, C_N^x = \bar{X} \|\Phi^{k*}(0) C^x \Phi^l(0)\|_{k,l=1}^N X^\top.$$

При выполнении условий теоремы из разд. 2 стабилизирующее управление системы (0.1) вычисляется по формуле

$$u_N^0[\mathbf{x}] = -(C^u)^{-1} B^\top \|\Psi^{iT}(0)\|_{i=1, \dots, N}^\top (\bar{X})^{-1} \Pi_N X^{-1\top} \|(\mathbf{x}, \Psi^i)\|_{i=1}^N. \quad (3.7)$$

Доказательство. Воспользовавшись координатным представлением оператора \mathbf{P}_N , получим

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{A} \mathbf{P}_N = \sum_{i=1}^N (\cdot, \psi^i) \mathbf{A} \varphi^i.$$

Для любого $y \in \mathbb{C}^N$ находим

$$\begin{aligned} \pi_N \mathbf{A}_N \pi_N^{-1} y &= \sum_{j=1}^N (\pi_N^{-1} y, \psi^j) \pi_N \mathbf{A} \varphi^j = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N y_k \varphi^k, \psi^j \right) \|(\mathbf{A} \varphi^j, \psi^l)\|_{l=1}^N \\ &= \sum_{j=1}^N y_j \|(\mathbf{A} \varphi^j, \psi^l)\|_{l=1}^N. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем $A_N = \|(\mathbf{A} \varphi^j, \psi^i)\|_{i,j=1}^N$. Используя представления (3.5), (3.6) и простоту собственных чисел, получим

$$\begin{aligned} A_N &= \|(\mathbf{A} \varphi^j, \psi^i)\|_{i,j=1}^N = \sum_{k,l=1}^N x_{jk} \bar{y}_{il} (\mathbf{A} \Phi^k, \Psi^l) = \bar{Y} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) X^\top \\ &= X^{-1\top} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) X^\top. \end{aligned}$$

Для любого $u \in \mathbb{C}^r$ находим

$$\pi_N \mathbf{P}_N \mathbf{B} u = \|(\mathbf{P}_N \mathbf{B} u, \psi^i)\|_{i=1}^N = \left\| \sum_{k=1}^N (\mathbf{B} u, \psi^k) (\varphi^k, \psi^i) \right\|_{i=1}^N = \|\psi^{i*}(0)\|_{i=1}^N B u.$$

Следовательно, имеем

$$B_N = \|\psi^{i*}(0)\|_{i=1}^N B = \left\| \sum_{j=1}^N \bar{y}_{ij} \Psi^{j*}(0) \right\|_{i=1}^N B = \bar{Y} \|\Psi^{j*}(0)\|_{j=1}^N B = X^{-1\top} \|\Psi^{j*}(0)\|_{j=1}^N B.$$

Для любого $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^N$ имеем

$$\mathbf{C}_N^x \mathbf{y} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{y}, \psi^i) \mathbf{P}_N^* \mathbf{C}^x \varphi^i = \sum_{i,j=1}^N (\mathbf{y}, \psi^i) (\mathbf{C}^x \varphi^i, \varphi^j) \psi^j.$$

Отсюда для любого $y \in \mathbb{C}^N$ получим

$$\pi_N^{-1*} \mathbf{C}_N^x \pi_N^{-1} y = \sum_{i,j=1}^N (\pi_N^{-1} y, \psi^i) (\mathbf{C}^x \varphi^i, \varphi^j) \pi_N^{-1*} \psi^j.$$

Найдем представление оператора π_N^{-1*} . По определению сопряженного оператора находим $(\pi_N^{-1}y, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^N y_k (\varphi^k, \mathbf{y}) = (\pi_N^{-1*} \mathbf{y})^* y$. Следовательно, имеем $\pi_N^{-1*} \mathbf{y} = \|(\mathbf{y}, \varphi^k)\|_{k=1}^N$. Тогда находим

$$\pi_N^{-1*} \mathbf{C}_N^x \pi_N^{-1} y = \sum_{j,k=1}^N y_j (\mathbf{C}^x \varphi^j, \varphi^k) \|(\psi^k, \varphi^i)\|_{i=1}^N = \sum_{j=1}^N y_j \|(\mathbf{C}^x \varphi^j, \varphi^i)\|_{i=1}^N.$$

Следовательно, имеем

$$\mathbf{C}_N^x = \|\varphi^{i*}(0) \mathbf{C}^x \varphi^j(0)\|_{i,j=1}^N = \left\| \sum_{k,l=1}^N \bar{x}_{ik} x_{jl} \Phi^{k*}(0) \mathbf{C}^x \Phi^l(0) \right\|_{i,j=1}^N = \bar{X} \|\Phi^{k*}(0) \mathbf{C}^x \Phi^l(0)\|_{k,l=1}^N X^\top.$$

Используя формулы

$$\pi_N \mathbf{P}_N \mathbf{x} = \|(\mathbf{x}, \psi^i)\|_{i=1}^N, \quad \mathbf{P}_N^* \pi_N^* y = \sum_{i=1}^N y_i \psi^i(0) = \|\psi^{iT}(0)\|_{i=1, \dots, N}^\top y, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad y \in \mathbb{C}^N,$$

и теорему разд. 2, получим

$$u_N^0[\mathbf{x}] = -(\mathbf{C}^u)^{-1} B^\top \|\psi^{iT}(0)\|_{i=1, \dots, N}^\top \Pi_N \|(\mathbf{x}, \psi^i)\|_{i=1}^N.$$

Из представления (3.6) следует требуемая формула. \square

4. Топологический изоморфизм пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{C}^N в случае кратных собственных чисел оператора \mathbf{A}

В случае кратных собственных чисел оператора \mathbf{A} в пространстве \mathbb{H}^N можно ввести базис, состоящий из корневых элементов этого оператора, отвечающих собственным числам λ_k , $k = 1, \dots, N'$, а в пространстве \mathbb{H}^{N*} — из корневых элементов оператора \mathbf{A}^* , отвечающих собственным числам $\bar{\lambda}_k$, $k = 1, \dots, N'$.

Лемма 4.1. *Если среди собственных чисел λ_k , $k = 1, \dots, N'$, оператора \mathbf{A} есть кратные, то базис пространства \mathbb{H}^N , состоящий из корневых функций оператора \mathbf{A} , получаем из формул*

$$\Phi_{ij}^k(\vartheta) = e^{\lambda_k \vartheta} \sum_{l=0}^j \frac{\Phi_{i, j-l}^k(0)}{l!} \vartheta^l, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad j = 0, \dots, m_{ki}, \quad i = 1, \dots, m_k, \quad k = 1, \dots, N',$$

в которых $\Phi_{ij}^k(0) \in \mathbb{C}^N$, $j = 0, \dots, m_{ki}$ ($i = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, N'$), определяются из следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{l=0}^j \frac{1}{l!} \Delta^{(l)}(\lambda_k) \Phi_{i, j-l}^k(0) = 0, \quad j = 0, \dots, m_{ki},$$

где Φ_{i0}^k — i -я ($i = 1, \dots, m_k$) линейно независимая собственная функция оператора \mathbf{A} , отвечающая кратному собственному числу λ_k оператора \mathbf{A} .

Лемма 4.2. *Если среди собственных чисел λ_k , $k = 1, \dots, N'$, оператора \mathbf{A} есть кратные, то базис пространства \mathbb{H}^{N*} , состоящий из корневых функций оператора \mathbf{A}^* , определяется формулами*

$$\Psi_{ij}^k = \mathfrak{N} \widehat{\Psi}_{ij}^k, \quad j = 0, \dots, m_{ki}, \quad i = 1, \dots, m_k, \quad k = 1, \dots, N'.$$

Здесь функции $\widehat{\Psi}_{ij}^k$, $j = 0, \dots, m_{ki}$, $i = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, N'$, задают базис объединения корневых подпространств оператора \mathbf{A}^c , соответствующих собственным числам $\bar{\lambda}_k$, $k = 1, \dots, N'$, и вычисляются по формуле

$$\widehat{\Psi}_{ij}^k(\vartheta) = e^{\bar{\lambda}_k \vartheta} \sum_{l=j}^{m_{ki}} \frac{\widehat{\Psi}_{il}^k(0)}{(l-j)!} \vartheta^{l-j}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad j = 0, \dots, m_{ki}, \quad i = 1, \dots, m_k, \quad k = 1, \dots, N',$$

где $\widehat{\Psi}_{ij}^k(0) \in \mathbb{C}^N$, $j = 0, \dots, m_{ki}$, определяются из следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{l=j}^{m_{ki}} \frac{1}{(l-j)!} \Delta^{(l-j)\top} (\bar{\lambda}_k) \widehat{\Psi}_{il}^k(0) = 0, \quad j = 0, \dots, m_{ki},$$

$\widehat{\Psi}_{i0}^k$ — i -я ($i = 1, \dots, m_k$) — линейно независимая собственная функция оператора \mathbf{A}^c , отвечающая кратному собственному числу $\bar{\lambda}_k$.

Таким образом, корневые элементы собственного числа $\bar{\lambda}_k$ ($k = 1, \dots, N'$) i -й ($i = 1, \dots, m_k$) цепочки оператора \mathbf{A}^* могут быть вычислены по формулам

$$\Psi_{ij}^k(\vartheta) = \sum_{l=j}^{m_{ki}} \frac{1}{(l-j)!} \int_{-\tau}^0 d\eta(s) e^{\bar{\lambda}_k s} s^{l-j} \widehat{\Psi}_{ij}^k(0), \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

$$\Psi_{ij}^k(0) = \widehat{\Psi}_{ij}^k(0), \quad j = 0, \dots, m_{ki}.$$

Для сокращения дальнейших выкладок введем индексное множество

$$\Omega = \left\{ \omega = (k, i, j)^\top : j = 0, \dots, m_{ki}, \quad i = 1, \dots, m_k, \quad k = 1, \dots, N' \right\}$$

и обозначения $\Phi_\omega = \Phi_{ij}^k$, $\Psi_\omega = \Psi_{ij}^k$ при $\omega = (k, i, j)^\top \in \Omega$.

Лемма 4.3. Если среди собственных чисел λ_k , $k = 1, \dots, N'$, оператора \mathbf{A} есть кратные, то базисы пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{H}^{N^*} , определяемые формулами

$$\varphi_\omega = \sum_{\omega' \in \Omega} x_{\omega\omega'} \Phi_{\omega'}, \quad \omega \in \Omega, \quad (4.1)$$

и

$$\psi_\omega = \sum_{\omega' \in \Omega} y_{\omega\omega'} \Psi_{\omega'}, \quad \omega \in \Omega, \quad (4.2)$$

соответственно, биортогональны. Здесь $X = \|x_{\omega'\omega''}\|_{\omega', \omega'' \in \Omega}$, $\det X \neq 0$, $Y = \|y_{\omega'\omega''}\|_{\omega', \omega'' \in \Omega} = X^{-1*}$.

Утверждение 4.1. Если среди собственных чисел λ_k , $k = 1, \dots, N'$, оператора \mathbf{A} есть кратные, то отображение π_N , заданное формулой

$$\pi_N \mathbf{y} = \|(\mathbf{y}, \psi_\omega)\|_{\omega \in \Omega} = \|y_\omega\|_{\omega \in \Omega} = y, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}^N,$$

определяет топологический изоморфизм пространств \mathbb{H}^N и \mathbb{C}^N .

Утверждение 4.2. Если среди собственных чисел λ_k , $k = 1, \dots, N'$, оператора \mathbf{A} есть кратные, в базисе (4.1) представления конечномерных операторов A_N , B_N , C_N^x задачи оптимальной стабилизации (2.3), (2.4) определяются матрицами

$$A_N = X^{-1\top} \text{diag}(J(\lambda_1), \dots, J(\lambda_{N'})) X^\top, \quad B_N = X^{-1\top} \|\Psi_\omega^*(0)\|_{\omega \in \Omega} B,$$

$$C_N^x = \bar{X} \|\Phi_{\omega'}^*(0) C^x \Phi_{\omega''}(0)\|_{\omega', \omega'' \in \Omega} X^\top,$$

где $J(\lambda_k)$ — клетка Жордана, соответствующая числу λ_k , $k = 1, \dots, N'$. При выполнении условий теоремы разд. 2 стабилизирующее управление системы (0.1) равно

$$u_N^0[\mathbf{x}] = -(C^u)^{-1} B^\top \left\| \Psi_\omega^\top(0) \right\|_{\omega \in \Omega}^\top \bar{X}^{-1} \Pi_N X^{-1\top} \|(\mathbf{x}, \Psi_\omega)\|_{\omega \in \Omega}.$$

5. Пример

Требуется стабилизировать следующую систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) + u, \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t) - \frac{1}{2}x_2(t - \pi) \quad (5.1)$$

с критерием качества $J = \int_0^\infty [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt$.

Для согласования с описанием задачи стабилизации (0.1), (0.2) следует положить $\eta(0) = 0$, $\eta(\vartheta) = -A_0$, $\vartheta \in (-\pi, 0)$, $\eta(-\pi) = -A_0 - A_\pi$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^u = (1).$$

Характеристическое уравнение (1.1) системы (5.1) имеет вид

$$\delta(\lambda) = 1 + \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\pi\lambda}\right) \lambda + \lambda^2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Зафиксируем $N' = 4$. Используя результаты работы [12], находим корни характеристического уравнения с наибольшими действительными частями

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i, \quad \lambda_3 = -0.458 + 2.495i, \quad \lambda_4 = -0.458 - 2.495i.$$

Приведенные корни являются простыми. Остальные корни характеристического уравнения имеют действительные части меньше -0.458 .

Используя результаты леммы 3.1, находим базис из собственных функций оператора \mathbf{A} пространства \mathbb{H}^4 :

$$\begin{aligned} \Phi^{1,2}(\vartheta) &= (-0.508 \pm 0.490i, -0.490 \mp 0.508i)^\top e^{\pm i\vartheta}, \\ \Phi^{3,4}(\vartheta) &= ((-0.180 \pm 0.319i), (-0.714 \mp 0.595i))^\top e^{(-0.458 \pm 2.495i)\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\pi, 0]. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.2, вычисляем базис пространства \mathbb{H}^{4*} :

$$\begin{aligned} \Psi^{1,2}(\vartheta) &= (0, -0.137 \mp 0.142i)^\top e^{\pm i\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\pi, 0), \\ \Psi^{1,2}(0) &= (-0.285 \pm 0.274i, -0.274 \mp 0.285i)^\top, \\ \Psi^{3,4}(\vartheta) &= (0, -0.295 \mp 0.169i)^\top e^{(0.458 \pm 2.495i)\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\pi, 0), \\ \Psi^{3,4}(0) &= (-0.047 \mp 0.041i, 0.082 \mp 0.138i)^\top. \end{aligned}$$

Приведенные базисы являются биортогональными.

Используя формулы утверждения 3.2, находим матрицы A_4 , B_4 , C_4^x задачи стабилизации (2.3), (2.4)

$$\begin{aligned} A_4 &= \text{diag}(i, -i, -0.458 + 2.495i, -0.458 - 2.495i), \\ B_4 &= (-0.285 - 0.274i, -0.285 + 0.274i, -0.047 + 0.041i, -0.047 - 0.041i)^\top, \\ C_4^x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.902 + 0.145i & -0.017 + 0.405i \\ 0 & 1 & -0.017 - 0.405i & 0.902 - 0.145i \\ 0.902 - 0.145i & -0.017 + 0.405i & 1 & 0.085 + 0.736i \\ -0.017 - 0.405i & 0.902 + 0.145i & 0.085 - 0.736i & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Используя метод, предложенный в работе [19, с. 143], находим положительное определенное решение уравнение Риккати (2.5)

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0.506 & 0.134 - 0.058i & 0.014 - 0.005i & 0 - 0.008i \\ -0.134 + 0.058i & 0.506 & 0.008i & 0.014 + 0.005i \\ 0.014 + 0.005i & -0.008i & 0.004 & 0 \\ 0.008i & 0.014 - 0.005i & 0 & 0.004 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (3.7), находим стабилизирующее управление системы (5.1)

$$u_4^1[\mathbf{x}] = -0.416 \mathbf{x}_1(0) - 0.627 \mathbf{x}_2(0) - \int_{-\pi}^0 \left[0.521 \cos \xi - 0.203 \sin \xi - (0.010 \cos 2.495(\pi + \xi) + 0.014 \sin 2.495(\pi + \xi)) e^{0.458(\pi + \xi)} \right] \mathbf{x}_2(\xi) d\xi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
2. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
3. **Маркушин Е.М., Шиманов С.Н.** Приближенное решение задачи аналитического регулятора для систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 8. С. 1018–1026.
4. **Маркушин Е.М.** Приближенное решение задачи аналитического конструирования регулятора для систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1968. № 3. С. 13–20.
5. **Маркушин Е.М.** Оптимальные системы автоматического регулирования с запаздыванием по времени. Саратов: Изд. Саратов. ун-та, 1971. 92 с.
6. **Pandolfi L.** Stabilization of neutral functional differential equations // J. Optim. Theory Appl. 1976. Vol. 20, no. 2. P. 191–204.
7. **Pandolfi L.** Canonical realizations of systems with delays // SIAM J. Control Optim. 1983. Vol. 21, no. 4. P. 598–613.
8. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
9. **Phillips R.S.** Perturbation theory for semi-groups of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 74. P. 199–221.
10. **Хилле Э., Филлипс Р.** Функциональный анализ и полугруппы. М.: Иностран. лит., 1962. 830 с.
11. Функциональный анализ / под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.
12. **Быков Д.С., Долгий Ю.Ф.** Аппроксимирующие характеристические уравнения для автономных систем дифференциальных уравнений с последствием // Изв. вузов. Математика. 2011. Вып. 1. С. 10–23.
13. **Привалов И.И.** Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1960. 444 с.
14. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. М.: Наука, 1969. 456 с.
15. **Красовский Н.Н.** Проблемы стабилизации управляемых движений // И.Г. Малкина: Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М.: Наука, 1966. С. 475–515.
16. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с последствием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.
17. **Гинзбург Ю.П., Иохвидов И.С.** Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, вып. 4. С. 3–56.
18. **Азизов Т.А., Иохвидов И.С.** Основы теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986. 352 с.
19. **Икрамов Х.Д.** Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984. 192 с.

Быков Данил Сергеевич
математик

Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: bykovdanila@gmail.com

Долгий Юрий Филиппович
д-р физ.-мат. наук,
ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: yurii.dolgi@usu.ru

Поступила 01.03.2011

УДК 519.7

МЕТОДЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В УПРАВЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИМИ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

С. Н. Васильев, Г. М. Пономарев

Данная статья посвящена развитию методов представления и обработки знаний для автоматизации решения некоторых классов задач, в том числе поиска логических выводов, синтеза условий существования выводов и планирования действий. Возможности методов иллюстрируются на примерах задач достижимости целевых состояний в динамических и интеллектуальных системах.

Ключевые слова: динамические системы, интеллектуальные системы, теория управления, математическая логика, искусственный интеллект, управляемость, функции Ляпунова.

S. N. Vassilyev, G. M. Ponomarev. Automation methods for logical derivation and their application in the control of dynamic and intelligent systems.

The paper is devoted to developing methods of knowledge representation and processing for automated solving of some classes of problems, including the search for logical derivations, synthesis of conditions for derivability, and action planning. The capabilities of the methods are illustrated by examples of problems of attaining target states in dynamic and intelligent systems.

Keywords: dynamic systems, intelligent systems, control theory, mathematical logic, artificial intelligence, controllability, Lyapunov functions.

1. Введение

Статья относится к пограничной области математической логики и искусственного интеллекта, а именно к области представления и автоматической обработки знаний. Предлагаемые методы предназначены для автоматического решения некоторых классов задач с иллюстрацией на примерах задач достижимости целевых состояний в динамических и интеллектуальных системах.

Задача достижимости заданного множества процессами той или иной изучаемой динамической системы, состоящая в отыскании таких управляющих воздействий на систему, которые переводят ее из начального состояния в требуемое (целевое), является одной из основных задач теории управления. Существование искомых воздействий еще называют управляемостью, гарантированным наведением и т. д. При этом начальное и целевое состояния могут, например, быть фиксированными либо принадлежать некоторым фиксированным подмножествам фазового пространства (множеству начальных и множеству целевых состояний), а момент попадания в целевое множество быть произвольным либо как-то ограниченным. Так, в теории позиционного управления [1, 2] рассматриваются, например, постановки задач гарантированного попадания в фиксированный момент времени в сколь угодно малую окрестность целевого множества, в том числе в условиях постоянно действующих возмущений. Разнообразие возможных определений свойства управляемости может возникать также из-за разной квантификации переменных t_0, x_0, x_1, x (т. е. использования либо квантора “для любого ...”, либо квантора “существует ...”), обозначающих соответственно начальный момент времени, начальное состояние, целевое состояние и процесс. Определения могут варьироваться и из-за разной желаемой равномерности выбираемого управления относительно t_0, x_0, x_1 и т. д.

Разнообразие определений изучаемых свойств, обилие математических моделей систем, а также обнаружившаяся широта применений качественных методов, таких как метод функций

Ляпунова [3–6] в динамике систем и теории управления, метод морфизмов в алгебре [7, 8], инициировали стремление к алгоритмизации получения и обоснования условий наличия требуемых свойств [9–13]. В развитие этих результатов в данной работе предлагается дедуктивно-абдуктивный метод — метод ПОЗИТИВ как математическая технология получения и обоснования таких условий.

Одним из непосредственных первоисточников метода ПОЗИТИВ является логическое исчисление J [14] для представления и обработки знаний в языке L позитивно-образованных формул (метод ПОФ). С точки зрения математической логики это универсальный метод автоматического доказательства теорем (АДТ), представимых и выводимых средствами исчисления предикатов (первого порядка). Метод ПОФ имеет ряд преимуществ по сравнению с методом резолюций Дж. Робинсона [15, 16], разработанным (как и обратный метод С.Ю. Маслова [17, 18]) еще в 60-е гг. и являющимся одним из наиболее популярных методов в логическом подходе к построению интеллектуальных систем [19–21]. В частности, достижимость целевых состояний реализуется в них с помощью интеллектуальной функции планирования действий в конструктивной семантике логических построений (см. также [22–24]).

Метод ПОЗИТИВ охватывает метод ПОФ и использует помимо дедукции абдуктивное правило синтеза дополнительных посылок для обеспечения принципиальной доказуемости недоказуемого (или ускорения поиска вывода). В отличие от [25], метод ПОЗИТИВ ориентирован на расширение возможностей метода редукции [13] как своего второго первоисточника. Метод редукции позволяет решать логические уравнения специального класса и тем самым синтезировать тексты математических теорем, доказуемых индукцией по формульной структуре известных членов логического уравнения. В свою очередь, непосредственными источниками метода редукции являются метод сравнения с векторными функциями Ляпунова (ВФЛ) [10] и результаты о сохранении свойств алгебраических систем при морфизмах [7, 8], поэтому содержательно одним из главных с прикладной точки зрения подклассов класса синтезируемых методом редукции теорем являются теоремы о модельных аналогиях. В методе ПОЗИТИВ, с одной стороны, уменьшается комбинаторность метода из [25], а с другой — снимаются некоторые ограничения метода редукции.

На примере свойств типа управляемости демонстрируется применение метода ПОЗИТИВ.

В своем указанном выше назначении — алгоритмическое получение и обоснование утверждений о свойствах изучаемых моделей — метод ПОЗИТИВ использует классическую семантику языка L и средств вывода. Задачи с конструктивной семантикой рассматриваются в разд. 4 настоящей статьи. Такой задачей, например, является задача, цель которой специфицируется формулой $A \vee B$. Тогда конструктивный логический вывод должен давать возможность распознавания, какой конкретно из этих двух случаев имеет место. Так, классический вывод цели, представленной формулой $A \vee \neg A$, где, например, A — утверждение “система управляема”, тривиален и ничего не дает, поэтому необходимы конструктивные логики для решения задач в конструктивной семантике, возникающих в проблематике автоматического планирования действий, автоматического синтеза программ для ЭВМ и т. п.

Поскольку метод ПОЗИТИВ является средством не только доказательства теорем, но и синтеза условий их доказуемости, то применительно к конструктивным задачам он позволяет синтезировать дескриптивные условия и спецификации недостающих конструктивных средств, что и обосновывается в конце статьи.

1.1. О языке L позитивно-образованных формул (ПОФ)

Структура всякой ПОФ представима в форме дерева, каждому узлу которого отвечает так называемый позитивный квантор (ПК), т. е. последовательность символов, состоящая из знака квантора \forall или \exists , перечня \bar{x} индивидуальных переменных x_i и перечня A атомов как условий, накладываемых (логически конъюнктивно) на значения всех ранее квантифицированных переменных. Всякий атом является выражением вида $P(t_1, \dots, t_m)$, где t_i — какие-то инди-

видные переменные в количестве m , совпадающем с арностью предикатного символа P . Перечень A называем конъюнктом. Перечни A и \bar{x} могут быть пустыми. Если \bar{x} — пустой набор переменных, то говорим о фиктивной кванторной переменной. Если A пусто (нет условий на переменные), то конъюнкт A обозначается $True$ и понимается как тождественно истинный предикат. Вводится также конъюнкт $False$, объемлющий любой конъюнкт A , т. е. $A \subseteq False$, и понимаемый как тождественно ложный предикат.

По каждой ветви дерева ПОФ знаки \forall, \exists соответственно ПК всеобщности (ПКВ) и существования (ПКС) чередуются. Возможные ветвления в структуре ПОФ понимаются либо дизъюнктивно — после ПКВ, либо конъюнктивно — после ПКС. Без ограничения общности считаем, что дерево ПОФ начинается с корня $\forall: True$ и в качестве листьев содержит только ПКС с непустыми конъюнктами.

Рассмотрим ПОФ $\forall x_1, \dots, x_m : A (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, где $m \geq 0, n \geq 1$ и при $n \geq 2$ ветвление после указанного ПКВ представлено скобочной структурой. Семантика этой формулы понимается как классическая семантика соответствующей формулы исчисления предикатов (ИП) $\forall x_1 \dots \forall x_m (A^{\&} \rightarrow \Phi_1^{ИП} \vee \dots \vee \Phi_n^{ИП})$, где $\Phi_i^{ИП}$ — образ Φ_i в языке ИП, а через $A^{\&}$ обозначена конъюнкция атомов, входящих в A , если A отличен от $True$ и $False$, иначе $A^{\&} = A$. ПОФ $\exists x_1, \dots, x_m : A (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ понимается как формула ИП $\exists x_1 \dots \exists x_m (A^{\&} \& \Phi_1^{ИП} \& \dots \& \Phi_n^{ИП})$. При этом возможно, что $n = 0$; это в том случае, когда рассматриваемый ПКС является листом, например имеющим вид $\exists: False$.

Введенный язык ПОФ обозначим через L . Если H — формула языка ИП, то через H^L обозначаем одно из возможных представлений H в языке L .

Пример 1. Рассмотрим утверждение: “Каждое производственное помещение завода доступно некоторым мобильным роботам. Ни одному роботу административные помещения не доступны. Следовательно, ни одно производственное помещение не является административным.” Одна из возможных формализаций этого утверждения в языке исчисления предикатов [26] имеет вид $A_1 \& A_2 \rightarrow B$, где

$$\begin{aligned} A_1 &= \forall x (\Pi(x) \rightarrow \exists y (P(y) \& D(x, y))), \\ A_2 &= \forall z \forall u (P(z) \& A(u) \rightarrow \neg D(u, z)), \\ B &= \forall w (\Pi(w) \rightarrow \neg A(w)); \end{aligned}$$

предикаты $\Pi(x), P(y), A(u)$ означают “ x — Производственное помещение”, “ y — Робот”, “ u — Административное помещение”, а предикат $D(x, y)$ — “ x Доступно для y ”.

Метод ПОЗИТИВ ориентирован на доказательство от противного. Отрицание формулы $C = A_1 \& A_2 \rightarrow B$, т. е. формула $\neg C$, эквивалентная формуле $A_1 \& A_2 \& \neg B$, в языке L представимо, например, формулой

$$\Omega = \forall: True \exists: True (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3),$$

где $\Omega_1 = \forall x: \Pi(x) \exists y: P(y), D(x, y)$, $\Omega_2 = \forall z, u: P(z), A(u), D(u, z) \exists: False$, $\Omega_3 = \forall: True \exists w: \Pi(w), A(w)$.

1.2. Исчисление J позитивно-образованных формул

В языке L определяется логическое исчисление J . Для этого в качестве аксиомы вводится ПОФ $\forall: True \exists: False$ и единственное правило вывода ω . ПОФ $\forall: True \exists: False$, имеющая смысл $False$ (противоречия), объявляется аксиомой, поскольку выводы в исчислении J формализуют доказательство от противного, т. е. всякий вывод в J имеет смысл опровержения отрицания подлежащего доказательству утверждения H : вместо $\vdash_{ИП} H$ осуществляется $\vdash_J (\neg H)^L$, где символ \vdash в математической логике означает выводимость в соответствующем исчислении [26].

Пусть $(\neg H)^L = \Omega = \forall: True (\exists \bar{x} : A (\Phi), \Psi)$.

Определение правила дедукции ω . Пусть Φ включает подформулу $\forall \bar{y} : B (\exists \bar{z}_1 : A_1 (\Phi_1), \dots, \exists \bar{z}_n : A_n (\Phi_n))$. ПКВ $\forall \bar{y} : B$ именуется *вопросом* к базе фактов $\exists \bar{x} : A$ и, если $B\Theta \subseteq A$, где $\Theta : \bar{y} \rightarrow \bar{x}$ — подстановка вместо каждой из переменных набора \bar{y} некоторых переменных из \bar{x} , а $B\Theta$ — результат замены переменных, то говорим, что вопрос $\forall \bar{y} : B$ имеет *ответ* Θ . В такой ситуации правило ω применимо к вопросу $\forall \bar{y} : B$ с результатом $\omega\Omega = \forall: True (\Xi_1, \dots, \Xi_n, \Psi)$, где для $j = \overline{1, n}$ формула Ξ_j имеет вид $\exists \bar{x} \cup \bar{z}_j^* : A \cup A_j \Theta^* (\Phi, \Phi_j \Theta^*)$, $\Theta^* = \Theta \cup \left(\bigcup_{j=\overline{1, n}} \{\bar{z}_j \rightarrow \bar{z}_j^*\} \right)$, а \bar{z}_j^* состоят из новых, попарно различных переменных. Используются упрощающие, логически эквивалентные, замены $\exists: False / \exists \bar{u} : A \cup False (\Phi)$ и $\forall: True (\Psi) / \forall: True (\exists: False, \Psi)$, если Ψ непусто.

Выводом ПОФ Ω называется последовательность формул языка L , начинающаяся с Ω и заканчивающаяся аксиомой $\forall: True \exists: False$, где, начиная со второй формулы, каждая формула получается применением к непосредственно предшествующей формуле правила вывода ω .

П р и м е р 1 (продолжение). Рассмотрим формулу Ω . После ответа на вопрос из Ω_3 (с тривиальной — пустой — подстановкой) получим

$$\omega\Omega = \forall: True \exists w : \Pi(w), A(w) (\Omega_1, \Omega_2).$$

Применяя правило ω к вопросу из Ω_1 с подстановкой w вместо x , получим

$$\omega^2\Omega = \forall: True \exists w, y_1 : B(w, y_1) (\Omega_1, \Omega_2),$$

где $B(w, y_1) = \{\Pi(w), A(w), P(y_1), D(w, y_1)\}$. Отсюда, используя для ответа на вопрос из Ω_2 замены u на w , z на y_1 , получим $\omega^3\Omega = \forall: True \exists: False$. Завершение вывода ПОФ Ω означает опровержение формулы $\neg C$, т. е. доказательство C .

Именно этот метод АДТ называем методом ПОФ. С помощью правила ω ПОФ преобразуется в логически эквивалентную формулу, и в исчислении J выводима любая теорема в следующем смысле: если H — формула исчисления предикатов, то $\vdash_{\text{ИП}} H$ тогда и только тогда, когда $\vdash_L (\neg H)^L$ [14]. Для компьютерной реализации поиска ответных подстановок полезен алгоритм из [27].

2. Расширение метода ПОФ (метод ПОЗИТИВ)

Если ПОФ Ω не выводима, то для отыскания условий ее выводимости в методе ПОЗИТИВ предлагается использовать правило β , применение которого (вообще говоря, многошаговое) в сочетании с правилом ω приводит к формированию некоторого искомого условия V . Будем называть это правило правилом абдукции, так как в результате получаем такое условие V , что $\vdash_J \forall: True \exists: True (\Omega, V)$, т. е. $\vdash_{\text{ИП}} (V)^{\text{ИП}} \rightarrow \neg(\Omega)^{\text{ИП}}$. Определим правило β .

Рассмотрим формулу $\Omega = \forall: True (\Sigma_1, \dots, \Sigma_m)$, где $\Sigma_i = \exists \bar{x}_i : A_i (\Phi_i)$, $m \geq 1$. Не зная, выводима она в исчислении J или нет, преобразуем Ω в частично известную ПОФ

$$H = \forall: True (\exists \bar{x}_1 : A_1 (\Phi_1, V_1), \dots, \exists \bar{x}_m : A_m (\Phi_m, V_m)), \quad (2.1)$$

где в конъюнкт A_i могут входить только переменные из \bar{x}_i , $\Phi_i \subseteq L$, V_i — буква, не встречавшаяся в других частях из Ω и называемая неизвестной. Конкретизацией вида V_i мы обеспечиваем выводимость формулы Ω (если она не выводима в J).

Пусть Φ_i есть набор формул

$$\forall y_{i1} : B_{i1} (\Phi_{i1}), \dots, \forall y_{ik_i} : B_{ik_i} (\Phi_{ik_i}), \quad k_i \geq 0.$$

Здесь без ограничения общности можно считать, что y_{ij} — скалярные или фиктивные переменные.

Аналогично многосортным логикам мы будем предполагать, что каждая кванторная переменная имеет свой тип (сорт). Если, например, для переменных y_{is}, y_{it} выполняется $B_{is} \subseteq B_{it}$, то считаем их однотипными. Более тонкое сравнение типов переменных предполагает использование дедуктивной теории типов и собственной аксиоматики систем и оценочных множеств. В целях компактности изложения здесь это не рассматривается, но в силу сказанного однотипность в тонком смысле не будет с необходимостью означать, что $B_{is} \subseteq B_{it}$. Кроме того, для тонкой типизации применимы синтаксические критерии, например, учитывающие графический контекст вхождения типизируемой переменной в область действия ее квантора. Будем считать, что вдоль ветвей формулы H типы не повторяются (хотя бы после той или иной тонкой типизации), а используя упорядочение типов вершин вдоль каждой ветви, будем говорить о минимальности вершины (ее кванторной переменной). По критерию минимальности из переменных y_{i1}, \dots, y_{ik_i} выбираем одну из минимальных (эвристика минимальности вершин), обозначив ее y_{ij^*} .

Определение правила β . В применении к неизвестной V_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, правило β предлагает замену V_i на частично известную формулу \tilde{V}_i вида:

а) $\tilde{V}_i = \forall \bar{x}_i : A_i (\exists y_{ij^*} : \tilde{B}_{ij^*} (V_{ij^*}))$, если $k_i > 0$, где V_{ij^*} — новая (т.е. ранее не встречавшаяся) неизвестная; $j^* \in \{1, \dots, k_i\}$; $\tilde{B}_{ij^*} = B_{ij^*} \cup B$, где B — объединение конъюнктов других вопросов по однотипным с y_{ij^*} переменным среди набора $y_{i1}, \dots, y_{ij^*-1}, y_{ij^*+1}, \dots, y_{ik_i}$; если таких нет, $B = \Lambda$ (под Λ здесь и далее будем понимать пустое выражение);

б) $\tilde{V}_i = \forall \bar{x}_i : A_i \exists: False$, если $k_i = 0$ или на вопросы Φ_i нет новых ответов.

При этом будем далее всюду подразумевать три особенности применения β :

1) β применяется только в том случае, когда не применимо правило ω (эвристика предпосылки ω), и сразу после синтеза \tilde{V}_i к вопросу $\forall \bar{x}_i : A_i$ применяется ω (назовем это применение правила ω сопряженным применением правила β);

2) если база имеет вопрос с n ветвями и некоторую неизвестную ветвь W , то при ответе на этот вопрос возникает n новых баз, в каждую из которых вместо W вводится набор из n новых неизвестных ветвей W_1, \dots, W_n , после чего каждая неизвестная W_i далее конкретизируется в своей (i -й) базе, а результат только копируется в остальные ветви. Тем самым неизвестная ветвь W ищется в виде

$$(W)^{\text{ИП}} = \big\&_{j=1}^n (W_j)^{\text{ИП}},$$

несмотря на то, что каждое W_j ищется независимо;

3) при любом следующем применении β (дальнейшей конкретизации \tilde{V}_i) в синтезируемый вопрос включаются только те переменные базы и те ее атомы, которые возникли в результате применений ω после предыдущего применения β и т. д.;

4) после применения правила β и сопряженного применения правила ω некоторые переменные базы могут совпасть с некоторыми из переменных y_{i1}, \dots, y_{ik_i} , что приводит к необходимости использования в дальнейшем тождественных ответных подстановок.

После получения опровержения все неконкретизированные в \tilde{V}_i неизвестные считаются пустыми формулами.

Рассмотрим два иллюстративных примера совместного применения правил ω и β , используя при этом β только в случае неприменимости ω .

Пример 2. Пусть дана формула $C' = A_1 \rightarrow B$. Ее отрицание в языке L представимо формулой

$$\Omega' = \forall: True \exists: True (\Omega_1, \Omega_3),$$

где Ω_1, Ω_3 — формулы из примера 1. Аналогично тому, как были выведены формулы $\omega\Omega, \omega^2\Omega$, получим

$$\omega\Omega' = \forall: True \exists w : \Pi(w), A(w) (\Omega_1),$$

$$\omega^2\Omega' = \forall: True \exists w, y_1 : \Pi(w), A(w), P(y_1), D(w, y_1) (\Omega_1).$$

Теперь правило ω не применимо (нет других ответных подстановок для вопроса из Ω_1 , кроме уже использованного ответа). Для проталкивания вывода применим правило β , сформировав сначала частично известную формулу $\forall: True \exists w, y_1 : B(w, y_1) (\Omega_1, V_1)$, где $B(w, y_1) = \{\Pi(w), A(w), P(y_1), D(w, y_1)\}$. Тогда по п. б) определения правила β в качестве \tilde{V}_1 получим формулу $\forall w', y'_1 : B(w', y'_1) \exists: False$, которая логически слабее, чем A_2 из примера 1, так как эквивалентна формуле ИП

$$A'_2 = \forall w' \forall y'_1 (\Pi(w') \& A(w') \& P(y'_1) \rightarrow \neg D(w', y'_1)).$$

Эта формула может быть тривиально усилена вычеркиванием атома $\Pi(w')$, логически совпав тогда с A_2 из примера 1.

П р и м е р 3. Рассмотрим абстрактную управляемую систему (АУС) [10] как отношение $r \subseteq H \times \Phi$, где $H \subseteq T^0 \times X^0 \times \mathcal{U} \times \mathcal{P}$, $\Phi \subseteq X^{(T)}$ — множество частичных функций времени $x(t)$, именуемых процессами; T — множество моментов времени, частично упорядоченное отношением нестрогого частичного порядка “ \geq ” (сужение этого отношения до строгого частичного порядка обозначается “ $>$ ”). Для любых допустимых исходных данных $h = (t_0, x_0, u, p) \in H$ процессы $x \in rh$ определены в начальный момент времени t_0 и $x(t_0)$ совпадает с начальным состоянием x_0 ; $t_0 \in T^0$, $x_0 \in X^0$, u — управление ($u \in \mathcal{U}$), p — возмущение ($p \in \mathcal{P}$). Поведение АУС может изучаться относительно семейств начальных и текущих оценочных множеств P^0 и P соответственно, где $P^0 \in \mathcal{R}^0$, $P \in \mathcal{R}$, $P^0 \subseteq T^0 \times X^0$, $P \subseteq T \times X$, $P^0 \neq \emptyset$, $P \neq \emptyset$.

Рассмотрим следующее свойство типа достижимости (при некотором управлении $u \in \mathcal{U}$ и некотором $t_0 \in T^0$) каждого из множеств P из любого начального состояния x_0 и при любом возмущении $p \in \mathcal{P}$:

$$Q_1 = \exists u \in \mathcal{U} \exists t_0 \in T^0 \forall P \in \mathcal{R} \forall x_0 \in X^0 F,$$

$$F = \forall p \in \mathcal{P} \forall x \in r(t_0, x_0, u, p) \exists t \geq t_0 \exists x = x(t) \quad x \in P(t),$$

а также несколько отличное свойство типа достижимости множества $\bigcup_{P \in \mathcal{R}} P$:

$$Q_2 = \exists u \in \mathcal{U} \forall x_0 \in X^0 \exists P \in \mathcal{R} \exists t_0 \in T^0 F.$$

Нетрудно видеть за этими формулами их представление в языке исчисления предикатов, и поэтому мы будем отождествлять их с формулами этого исчисления. Очевидно, что, если $\mathcal{R} \neq \emptyset$, из Q_1 следует Q_2 . Проверим это путем опровержения $Q_1 \& \neg Q_2$ в исчислении J с правилами β, ω :

$$\begin{aligned} (Q_1 \& \neg Q_2)^L = \forall: True \exists: True \left(\right. \\ \forall: True \exists u: u \in \mathcal{U} \forall: True \exists t_0: t_0 \in T^0 \forall P: P \in \mathcal{R} \exists: True \\ \forall x_0: x_0 \in X^0 \exists: True (F)^L, \\ \left. \forall u: u \in \mathcal{U} \exists x_0: x_0 \in X^0 \forall P: P \in \mathcal{R} \exists: True \forall t_0: t_0 \in T^0 (\neg F)^L, V_1 \right), \end{aligned}$$

где в $(F)^L$ и $(\neg F)^L$ все кванторные переменные — скалярные или фиктивные.

После трех применений ω и одного применения β получим

$$\begin{aligned} \forall: True \exists u, t_0, x_0: u \in \mathcal{U}, t_0 \in T^0, x_0 \in X_0 \left(\right. \\ \forall P: P \in \mathcal{R} \exists: True \forall x_0: x_0 \in X^0 \exists: True (F)^L, \\ \left. \forall P: P \in \mathcal{R} \exists: True \forall t_0: t_0 \in T^0 (\neg F)^L, \tilde{V}_1 \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{V}_1 = \forall u, t_0, x_0 : u \in \mathcal{U}, t_0 \in T^0, x_0 \in X^0 \exists P : P \in \mathcal{R} (V_{11})$, а после еще четырех применений ω формулу

$$\forall: True \exists u, t_0, x_0, P : u \in \mathcal{U}, t_0 \in T^0, x_0 \in X_0, P \in \mathcal{R} ((F)^L, \forall t_0 : t_0 \in T^0 (-F)^L, V_{11}),$$

из которой очевидно выводимо (в том числе при пустой формуле V_{11}) противоречие, т. е. ПОФ $\forall: True \exists: False$. \square

Таким образом условие $\mathcal{X} = \tilde{V}_1$ (как условие непустоты семейства \mathcal{R}) является решением логического уравнения $\mathcal{X} \rightarrow (Q_1 \rightarrow Q_2)$. Заметим, что известные члены этого уравнения Q_1 и Q_2 не удовлетворяют требованиям согласованности метода редукции [13], т. е. метод ПОЗИТИВ обладает большей широтой применений.

З а м е ч а н и е 1. В этих примерах пока не потребовалось использовать понятие минимальной кванторной переменной. В отличие от [25], вводя правило β , мы не предполагаем такого ограничения в ПОФ (2.1) на вид формул Φ_i как хорновость. Однако, ориентируясь на более сложные задачи, чем, к примеру, планирование действий робота в известной среде, а именно — на автоматизацию вывода математических теорем о модельных аналогиях, и пользуясь такими достоинствами исчисления J (по сравнению с другими методами автоматического поиска логических выводов, например методом резолюций [15, 16, 28]), как бóльшая совместимость с эвристиками, мы вводим другие ограничения для сокращения излишней вариативности при синтезе условий \mathcal{X} . Одним из таких ограничений является сделанное выше предположение о бесповторности типов вершин вдоль ветвей ПОФ, что обычно имеет место в задачах о модельных аналогиях в динамике систем и теории управления. Сформулируем другие предположения. Мы считаем, что связи моделей могут задаваться одним или несколькими отображениями (или отношениями). Отображения могут действовать в разных направлениях относительно рассматриваемого направления сохранения изучаемого свойства. Определяющие соотношения для этих связей обозначим через \mathbf{M} (условие связи), а свойство, которое изучается, — через \mathbf{P}_1 в одной модели и через \mathbf{P}_2 во второй.

Возникает логическое уравнение $\mathcal{X} \rightarrow (\mathbf{M} \& \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_1)$, т. е. частично известная ПОФ $H = \forall: True \exists: True (\Phi_1, V_1) (m = 1)$, где $\Phi_1 = ((\mathbf{M})^L, (\mathbf{P}_2)^L, (-\mathbf{P}_1)^L)$ и все кванторные переменные — скалярные или фиктивные. Каждой ветви позитивно-образованной структуры каждой из известных посылок \mathbf{M}, \mathbf{P}_2 в формуле \mathbf{P}_1 соответствует некоторая ветвь, и мы говорим, что упомянутая ветвь из \mathbf{M} или \mathbf{P}_2 “ответственна” за указанную ветвь в \mathbf{P}_1 . Для каждой ветви из \mathbf{P}_1 имеются “ответственные” за нее ветви из одной или обеих посылок \mathbf{M}, \mathbf{P}_2 .

Содержательно “ответственность” может обеспечиваться аналогичностью свойств \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 , а также тем, что условие связи \mathbf{M} (с обычно не ветвящейся структурой) в случае ветвлений в \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 может быть переписано в логически эквивалентной форме с конъюнктивными ветвлениями, тем более — при обычно универсальной квантификации переменных (последнее довольно типично для определения морфизма [8] или вектор-функции сравнения [10]). Заметим, что аналогичность \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 (как синтаксическую, так и семантическую) надо понимать в контексте аналогичности самих моделей. Например, обе модели могут быть представлены дифференциальными уравнениями.

Назовем процесс применения правил ω, β для вывода H (с параллельным синтезом подформулы \tilde{V}_1) ограниченным (ω, β) -процессом, если:

- 1) правило β применяется только в случае неприменимости правила ω и
- 2) каждый раз ответ на вопрос из H (или получаемых далее формул) однократен, т. е. копия ветви с этим вопросом не создается (в отличие от общего определения правила ω , предусматривающего такое копирование для возможных использований копии с другими ответными подстановками).

Ограниченный (ω, β) -процесс в применении к формулам

$$\forall: True \exists x_1, \dots, x_l : A_1, \dots, A_n \forall x_i : A_i (\exists z_1 : B_1 (\Phi_1), \dots, \exists z_s : B_s (\Phi_s), \Omega)$$

приводит к укороченным формулам

$$\forall: True \left(\exists x_1, \dots, x_l, z_1 : A_1, \dots, A_n, B_1 (\Phi_1, \Omega), \dots, \exists x_1, \dots, x_l, z_s : A_1, \dots, A_n, B_s (\Phi_s, \Omega) \right).$$

В частности, если вопрос $\forall x_i : A_i$ синтезирован правилом β , то по определению правила β в этом случае $s = 1$ и $\Phi_1 = \Omega = \Lambda$. Применение правила ω в (ω, β) -процессе учитывает в подформулах выведенной формулы, содержащих конкретные ветви из $\neg \mathbf{P}_1$, только те ветви из \mathbf{P}_2, \mathbf{M} , которые ответственны за указанные ветви из $\neg \mathbf{P}_1$ (эвристика релевантности ветвей).

Теорема 1. *Ограниченный (ω, β) -процесс синтеза формулы \tilde{V}_1 конечен, и справедливо $(\tilde{V}_1)^{\text{ИП}} \rightarrow (\mathbf{M} \& \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_1)$.*

Доказательство. Конечность (ω, β) -процесса следует из того, что

- а) с каждым применением ω к несинтезированному вопросу рассматриваемая ветвь укорачивается на две вершины, хотя бы в размноженном варианте (если вопрос был с ветвлением);
- б) применение правила β влечет за собой применение правила ω к синтезированному вопросу, что не меняет длины ветвей, но появляется возможность ответа на несинтезированные вопросы с эффектами укорочения ветвей в смысле п. а).

Применение правила β приводит к ПОФ, из которой логически следует исходная формула, поскольку для ПОФ, как нетрудно проверить, справедливо правило подстановочности импликации. А правило ω разве лишь ослабляет исходную формулу, что приводит к усилению ПОФ, получаемой по правилу β . Поэтому (ω, β) -процесс разве лишь усиливает логически исходную формулу. Укорочение известных ветвей у каждой базы $\exists y : D (\Phi, W)$ приводит через конечное число шагов к формуле $\exists y : D' (\tilde{W})$, т.е. с пустой подформулой Φ . Далее по п. б) определения правила β синтезируется ветвь $\tilde{W} = \forall y : D' \exists: False$ и по правилу ω получается база $\exists: False$ (т.е. вся формула приобретает вид противоречия $\forall: True \exists: False$). Подформулы \tilde{W} такого вида (одна или несколько) являются последними из непустых недостающих фрагментов искомой ПОФ \tilde{V}_1 . Из противоречивости формулы $H(\tilde{V}_1/V_1)$ следует, что верно $(\tilde{V}_1)^{\text{ИП}} \rightarrow (\mathbf{M} \& \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_1)$. \square

3. Пример применения (ω, β) -процесса

Рассмотрим следующее свойство АУС r :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 = \forall t_0 \in T^0 \quad \forall P^0 \in \mathcal{R}^0 : Z_{P^0} \quad \exists u \in \mathcal{U} \quad \forall x_0 \in P^0(t_0) \quad \forall p \in \mathcal{P} \left(\right. \\ \quad \exists P \in \mathcal{R}_1 : Z_P^1 \quad \forall x \in r(t_0, x_0, u, p) \quad \forall t \in T : Z_t^1(t_0) \quad \forall x = x(t) \quad x \in P(t) \\ \quad \& \\ \quad \left. \forall P \in \mathcal{R}_2 : Z_P^2 \quad \forall x \in r(t_0, x_0, u, p) \quad \exists t_1 \in T : Z_{t_1}(t_0) \right. \\ \quad \left. \forall t \in T : Z_t^2(t_0, t_1) \forall x = x(t) \quad x \in P(t) \right). \quad (3.1) \end{aligned}$$

Здесь Z_y, Z_y^i — некоторые дополнительные условия на переменную y ; указание в скобках переменных означает возможное их вхождение в условие (помимо y). Такая параметризация условий, накладываемых на кванторные переменные, позволяет в качестве частных случаев \mathbf{P}_1 охватить большее разнообразие определений динамических свойств. Если никаких дополнительных условий на переменную не накладываемся, будем считать, что $Z_y = \Lambda$. Для переменных t типа моментов времени со значениями в некоторых подмножествах из T используется обозначение $\mathbf{Z}_t \stackrel{df}{=} \{t : t \in T \& Z_t\}$ (аналогично для Z_t^i и для переменных t_c).

Поставим задачу отыскания условий наличия свойства \mathbf{P}_1 в системе r . Для этого введем в рассмотрение другую АУС r_c и ее аналогичное свойство:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 = & \forall t_{0c} \in T_c^0 \quad \forall P_c^0 \in \mathcal{R}_c^0 : Z_{P_c^0} \quad \exists u_c \in \mathcal{U}_c \quad \forall x_{0c} \in P_c^0(t_{0c}) \quad \forall p_c \in \mathcal{P}_c \left(\right. \\ & \exists P_c \in \mathcal{R}_{1c} : Z_{P_c}^1 \quad \forall x_c \in r_c(t_{0c}, x_{0c}, u_c, p_c) \quad \forall t_c \in T_c : Z_{t_c}^1(t_{0c}) \\ & \quad \left. \forall x_c = x_c(t_c) \quad x_c \in P_c(t_c) \right) \\ & \& \\ & \forall P_c \in \mathcal{R}_{2c} : Z_{P_c}^2 \quad \forall x_c \in r_c(t_{0c}, x_{0c}, u_c, p_c) \quad \exists t_{1c} \in T_c : Z_{t_{1c}}(t_0) \quad \forall t_c \in T_c : Z_{t_c}^2(t_{0c}, t_{1c}) \\ & \quad \left. \forall x_c = x_c(t_c) \quad x_c \in P_c(t_c) \right), \end{aligned}$$

где буквы Z с индексами понимаются аналогично предыдущему. Зададим связь между этими системами, например, в виде траекторного гомоморфизма $v : T \times X \rightarrow X_c$, а также отображений $s : \mathcal{U}_c \rightarrow \mathcal{U}$ и $w : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_c$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \forall t_0 \in T^0 \quad \forall t_{0c} \in T_c^0 : t_{0c} = t_0 \quad \forall u_c \in \mathcal{U}_c \quad \exists u \in \mathcal{U} : u = s(u_c) \\ & \forall x_0 \in X^0 \quad \forall x_{0c} \in X_c^0 : v(t_0, x_0) = x_{0c} \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad \forall p_c \in \mathcal{P}_c : p_c = w(p) \left(\right. \\ & \quad \forall x \in r(t_0, x_0, u, p) \quad \exists x_c \in r_c(t_{0c}, x_{0c}, u_c, p_c) \quad \forall t \in T \quad \forall t_c \in T_c : t_c = t \\ & \quad \left. \forall x = x(t) \quad \forall x_c = x_c(t) \quad v(t, x) = x_c \right) \\ & \& \\ & \forall x \in r(t_0, x_0, u, p) \quad \exists x_c \in r_c(t_{0c}, x_{0c}, u_c, p_c) \quad \forall t \in T \quad \forall t_c \in T_c : t_c = t \\ & \quad \left. \forall x = x(t) \quad \forall x_c = x_c(t) \quad v(t, x) = x_c \right). \quad (3.2) \end{aligned}$$

Переформулируем задачу в терминах логического уравнения

$$\mathcal{X} \rightarrow (\mathbf{P}_2 \& \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{P}_1).$$

Для его решения воспользуемся методом ПОЗИТИВ. Перепишем $\neg \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{M}$ в виде трех ПОФ, объединим их и пока неизвестную формулу V_1 конъюнктивно в одну ПОФ и будем искать ее вывод в исчислении J , т. е. ее опровержение (с синтезом решения $\mathcal{X} = (\tilde{V}_1)^{\text{ИП}}$ путем применения правила абдукции).

Пусть

$$\begin{aligned} \Omega = (\neg \mathbf{P}_1 \& \mathbf{P}_2 \& \mathbf{M} \& V_1)^L = & \forall : True \quad \exists : True \left(\forall : True \quad \exists t_0 \ A, \quad \forall t_{0c} \quad \exists : True \ B, \right. \\ & \left. \forall t_0 \quad \exists : True \ C, \ V_1 \right). \end{aligned}$$

Для компактности записи здесь и далее, если явно не выписана область определения кванторной переменной, она подразумевается такой, какой была ранее для данной переменной ($t_0 \in T^0$ и $t_{0c} \in T_c^0$), а подформулы A, B, C понимаются как части формул $(\neg \mathbf{P}_1)^L, (\mathbf{P}_2)^L$ и $(\mathbf{M})^L$ соответственно, начиная со следующего квантора после выписанного выше явно. В дальнейшем буквы A, B, C с индексами будут иметь тот же смысл.

На первом шаге вывода возникает возможность либо ответить на тривиальный вопрос в первой ветке Ω , либо синтезировать начальный фрагмент условия \tilde{V}_1 для ответа на первые вопросы второй или третьей ветвей. По эвристике предпочтения правила ω перед β выбирая первое (т. е. применение ω), получим

$$\omega \Omega = \forall : True \quad \exists t_0 : t_0 \in T^0 \left(\forall : True \quad \exists P_0 \ A_1, \quad \forall t_{0c} \quad \exists : True \ B, \quad \forall t_0 \quad \exists : True \ C, \ V_1 \right).$$

Применив по тем же соображениям еще два раза ω , имеем

$$\omega^3\Omega = \forall: True \exists t_0, P^0 : t_0 \in T^0, P^0 \in \mathcal{R}_0, Z_{P^0} \left(\forall u \exists x_0 A_2, \forall t_{0c} \exists: True B, \right. \\ \left. \forall t_{0c} \exists: True C_1, V_1 \right).$$

Поскольку теперь правило ω не применимо, используем правило β . При этом, с учетом эвристики выбора минимальной вершины из вопросов по переменным t_{0c} и u , выбираем вопрос с кванторной переменной t_{0c} , поскольку в структуре $(\mathbf{M})^L$ вершина t_{0c} предшествует вершине u . Получим

$$\tilde{V}_1 = \forall t_0, P^0 : t_0 \in T^0, P^0 \in \mathcal{R}_0, Z_{P^0} \exists t_{0c} : t_{0c} \in T_c^0, t_{0c} = t_0 \quad V_{1t_{0c}},$$

где $V_{1t_{0c}}$ — новая неизвестная. Условия на t_{0c} в \tilde{V}_1 получаются объединением условий однотипных переменных из второй и третьей ветвей $\omega^3\Omega$. После этого, в соответствии с определением β и его применением в композиции с ω , сразу применяется правило ω к синтезированному вопросу из \tilde{V}_1 . Получим

$$\omega\beta\omega^3\Omega = \forall: True \exists t_0, P^0, t_{0c} : \\ t_0 \in T^0, P^0 \in \mathcal{R}_0, Z_{P^0}, t_{0c} \in T_c^0, t_{0c} = t_0 \left(\forall u \exists x_0 A_2, \right. \\ \left. \forall t_{0c} \exists: True B, \right. \\ \left. \forall t_{0c} \exists: True C_1, V_{1t_{0c}} \right).$$

Дважды применяя ω , имеем

$$\omega^3\beta\omega^3 = \forall: True \exists t_0, P^0, t_{0c} : \\ t_0 \in T^0, P^0 \in \mathcal{R}_0, Z_{P^0}, t_{0c} \in T_c^0, t_{0c} = t_0 \left(\forall u \exists x_0 A_2, \right. \\ \left. \forall P_{0c} \exists u_c B_1, \right. \\ \left. \forall u_c \exists u C_2, V_{1t_{0c}} \right).$$

Поскольку ω не применимо, применяем β . С учетом минимальности P_c^0 получим $\tilde{V}_{1t_{0c}} = \forall: True \exists P_c^0 : P_c^0 \in \mathcal{R}_c^0 \quad V_{1t_{0c}P_c^0}$, где $V_{1t_{0c}P_c^0}$ — новая переменная. И т.д.

Продолжая таким же образом (ω, β) -процесс, получим формулу $\omega^5\beta\omega^2\beta\omega^4\beta\omega^3\beta\omega^3\Omega$. Здесь в первой ветви (отвечающей $\neg\mathbf{P}_1$) появляется возможность ответа на тривиальный вопрос с дизъюнктивным ветвлением. После ответа базы размножатся и в соответствии с определением β к каждой базе будет приписан набор новых неизвестных. В процессе дальнейшего вывода и прохождения конъюнктивных ветвлений в формулах \mathbf{P}_2 и \mathbf{M} (ω, β) -процесс учитывает релевантность ветвей друг другу.

В итоге после 58 применений ω , перемежаемых 14 применениями β , будет получена формула $\mathcal{X} = (\tilde{V}_1)^{\text{ИП}}$ вида

$$\mathcal{X} = \forall t_0 \quad \forall P^0 \quad \exists t_{0c} : t_{0c} \in T_c^0, t_{0c} = t_0 \quad \exists P_c^0 \quad \forall u_c \quad \forall u : u \in \mathcal{U}, u = s(u_c) \\ \forall x_0 : x_0 \in P^0(t_0) \quad \exists : x_0 \in X^0 \quad \exists x_{0c} : x_{0c} \in P_c^0(t_{0c}), x_{0c} \in X_c^0, v(t_0, x_0) = x_{0c} \\ \left(\forall p \quad \exists p_c : p_c \in \mathcal{P}_c, p_c = w(p) \quad \forall P_c \quad \exists P \quad \forall x \quad \forall x_c \quad \forall t \quad \exists t_c : t_c \in T_c, Z_{t_c}^1(t_{0c}), t_c = t \quad \forall x \quad \exists x_c \right. \\ \left. ((x_c \in P_c(t_c) \ \& \ v(t, x) = x_c \rightarrow x \in P(t)) \right) \\ \& \\ \forall p \quad \forall P \quad \exists p_c : p_c \in \mathcal{P}_c, p_c = w(p) \quad \forall x \quad \exists P_c \quad \forall x_c \quad \forall t_{1c} \quad \exists t_1 \quad \forall t \quad \exists t_c : t_c \in T_c, Z_{t_c}^2(t_{0c}), t_c = t \\ \forall x \quad \exists x_c \quad ((x_c \in P_c(t_c) \ \& \ v(t, x) = x_c \rightarrow x \in P(t))).$$

Она логически слабее решений, получаемых по методу редукции [13]. Расцепим условие \mathcal{X} на более просто проверяемые условия по алгоритму из [13].

Выделим условие

$$D_{t_0c} \stackrel{df}{=} \forall t_0 \in T^0 \quad \forall P^0 : P^0 \in \mathcal{R}^0, Z_{P^0} \quad \exists t_{0c} : t_{0c} \in T_c^0, \quad t_{0c} = t_0,$$

а из \mathcal{X} исключим квантор по t_{0c} и везде далее произведем подстановку t_0/t_{0c} (т.е. t_0 вместо t_{0c}), обозначив результат $\mathcal{X}_{t_{0c}}$. Можно видеть, что $D_{t_{0c}} \& \mathcal{X}_{t_{0c}} \rightarrow \mathcal{X}$. Поступая аналогичным образом с $\exists x_{0c}$ в $\mathcal{X}_{t_{0c}}$ и далее, получим

$$D_{x_{0c}} \stackrel{df}{=} D_{t_{0c}}(\Lambda/\exists t_{0c}) \quad \exists P_c^0 : P_c^0 \in \mathcal{R}_c^0, Z_{P_c^0} \quad \forall u_c \in \mathcal{U}_c \quad \forall u : u \in \mathcal{U}, \quad u = s(u_c) \quad \forall x_0 : x_0 \in P^0(t_0) \\ \exists : x_0 \in X^0 \quad \exists x_{0c} : x_{0c} \in P_c^0(t_0), \quad x_{0c} \in X_c^0, \quad v(t_0, x_0) = x_{0c},$$

$$D_{p_c}^1 \stackrel{df}{=} D_{x_{0c}}(\forall P_c^0/\exists P_c^0, \forall x_{0c}/\exists x_{0c}) \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad \exists p_c : p_c \in \mathcal{P}_c, \quad p_c = w(p)$$

(верхний индекс отражает факт, что мы расцепляем \mathcal{X} по первой ветке после ветвления),

$$D_{t_c}^1 \stackrel{df}{=} D_{p_c}^1(\forall p_c/\exists p_c) \quad \forall P_c : P_c \in \mathcal{R}_{1c}, \quad Z_{P_c}^1 \quad \forall P : P \in \mathcal{R}_1, \quad Z_P^1 \quad \forall x : x \in r(t_0, x_0, u, p) \\ \forall x_c : x_c \in r_c(t_0, x_{0c}, u_c, p_c) \quad \forall t : t \in T, \quad Z_t^1(t_0) \quad \exists t_c : t_c \in T_c, \quad Z_{t_c}^1(t_0), \quad t_c = t,$$

$$D_{x_c}^1 \stackrel{df}{=} D_{t_c}^1(\Lambda/t_c) \quad \exists x_c : x_c = x_c(t),$$

$$\mathcal{X}_{x_c}^1 \stackrel{df}{=} D_{x_c}^1(\forall x_c/\exists x_c) \quad ((x_c \in P_c(t) \& v(t, x) = x_c \rightarrow x \in P(t)).$$

Теперь по аналогии получаем $D_{p_c}^2$ (совпадающее с $D_{p_c}^1$), $D_{t_1}^2, D_{t_c}^2, D_{x_c}^2, \mathcal{X}_{x_c}^2$. Верно, что

$$D_{t_0c} \& D_{x_{0c}} \& D_{p_c}^1 \& D_{t_c}^1 \& D_{x_c}^1 \& \mathcal{X}_{x_c}^1 \& D_{t_1}^2 \& D_{t_c}^2 \& D_{x_c}^2 \& \mathcal{X}_{x_c}^2 \rightarrow \mathcal{X}. \quad (3.3)$$

Заменяя в $\mathcal{X}_{x_c}^i$ области изменения переменных x, x_c на $x \in X, x_c \in X_c$ и удаляя несущественные кванторы (подобные квантору по P^0 в $D_{t_{0c}}$), получим условия, на основе которых можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть для АУС r и АУС r_c существуют функции $v : T \times X \rightarrow X_c, s : \mathcal{U}_c \rightarrow \mathcal{U}, w : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_c$ такие, что выполняется условие связи \mathbf{M} в форме (3.2), а также следующие условия:

1°) процессы x_c в системе r_c для любых $t_0 \in T^0, x_{0c} \in v\left(t_0, \bigcup_{P^0 \in \mathcal{R}^0} P^0(t_0)\right), u_c \in \mathcal{U}_c, p_c \in w(\mathcal{P})$ продолжимы на множество

$$\cup \{\mathbf{Z}_t^2(t_0, t') : t' \in \mathbf{Z}_{t_{1c}}(t_0)\} \cup \mathbf{Z}_t^1(t_0);$$

2°) $T^0 \subseteq T_c^0, w(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}_c$ и для любых $t_0 \in T^0$ функция v удовлетворяет следующим требованиям:

3°) $\forall P^0 \in \mathcal{R}^0 : Z_{P^0} \quad \exists P_c^0 \in \mathcal{R}_c^0 : Z_{P_c^0} \quad v(t_0, P^0(t_0)) \subseteq P_c^0(t_0)$ (если $Z_{P^0} \equiv Z_{P_c^0} \equiv \Lambda$, это условие типа ограниченности функции $v(t_0, \cdot)$ относительно $\mathcal{R}^0, \mathcal{R}_c^0$);

4°) $\mathbf{Z}_t^1(t_0) \subseteq \mathbf{Z}_{t_c}^1(t_0)$, а также $\forall t' \in \mathbf{Z}_{t_{1c}}(t_0) \quad t' \in \mathbf{Z}_{t_1}(t_0)$ и $\mathbf{Z}_t^2(t_0, t') \subseteq \mathbf{Z}_{t_c}^2(t_0, t')$ (условия, связывающие области определения $\text{dom } x$ и $\text{dom } x_c$ соответствующих друг другу процессов x и x_c в АУС r и r_c);

5°) $\forall P_c \in \mathcal{R}_{1c} : Z_{P_c}^1 \quad \exists P \in \mathcal{R}_1 : Z_P^1 \quad \forall t \in \mathbf{Z}_t^1(t_0) \quad v(t, X \setminus P(t)) \subseteq X_c \setminus P_c(t)$ (если $Z_P^1 \equiv Z_{P_c}^1 \equiv \Lambda$, то это — условие типа равномерного по t бесконечно большого нижнего предела функции $v(t, \cdot)$ относительно $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_{1c}$);

6°) $\forall P \in \mathcal{R}_2 : Z_P^2 \quad \exists P_c \in \mathcal{R}_{2c} : Z_{P_c}^2 \quad \forall t' \in \mathbf{Z}_{t_{1c}}(t_0) \quad \forall t'' \in \mathbf{Z}_t^2(t_0, t') \quad v(t'', X \setminus P(t'')) \subseteq X_c \setminus P_c(t'')$ (если $Z_P^2 \equiv Z_{P_c}^2 \equiv \Lambda$, то это условие типа равномерной по t ограниченности функции $v(t, \cdot)$, относительно семейств множеств $X \setminus P(t), X_c \setminus P_c(t)$).

Тогда из наличия свойства \mathbf{P}_c в системе r_c следует наличие свойства \mathbf{P} в системе r .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия 1°–6° теоремы 2 эквивалентны либо являются усилениями условий $D_{t_{0c}}, D_{x_{0c}}, D_{p_c}^1, D_{t_c}^1, D_{x_c}^1, \mathcal{X}_{x_c}^1, D_{t_1}^2, D_{t_c}^2, D_{x_c}^2, \mathcal{X}_{x_c}^2$, из совокупности которых в силу (3.3) следует \mathcal{X} . Поскольку \mathcal{X} получено (ω, β) -процессом, то по теореме 1

$$\mathcal{X} \& \mathbf{M} \rightarrow (\mathbf{P}_c \rightarrow \mathbf{P}),$$

□

З а м е ч а н и е 2. Если функция $v(t, \cdot)$ обратима, то в теореме 2 заключительные условия $v(t, X \setminus P(t)) \subseteq X_c \setminus P_c(t)$ в 5° и 6° могут быть заменены на $v^{-1}(t, P_c(t)) \subseteq P(t)$. При $Z_{P_c} \equiv Z_P \equiv \Lambda$ новые условия имеют смысл условий типа равномерной по t ограниченности и равномерной по t непрерывности функции $v^{-1}(t, \cdot)$ соответственно.

З а м е ч а н и е 3. Если в условии связи \mathbf{M} теоремы 2 равенства $v(t_0, x_0) = x_{0c}$, $v(t, x) = x_c$ заменить соответственно на $v(t_0, x_0) \leq x_{0c}$ и $v(t, x) \leq x_c$, то заключительное условие в 3° может быть ослаблено заменой на неравенство

$$\sup\{v(t_0, x_0) : x_0 \in P^0(t_0)\} < \sup\{x_{0c} : x_{0c} \in P_c^0(t_0)\},$$

а заключительные условия из 5° и 6° потребуют усиления заменой на

$$\inf\{v(t, x) : x \in X \setminus P(t)\} \not\leq \sup\{x_c : x_c \in P_c(t)\}.$$

После таких замен условие 5° приобретет смысл условия типа равномерного по t бесконечно большого низшего предела для функции $v(t, \cdot)$, а условие 6° — типа равномерного по t условия векторной определенной неотрицательности функции $v(t, \cdot)$. Условие связи \mathbf{M} вида (3.2) с заменой указанных равенств на неравенства далее обозначаем \mathbf{M}_{\leq} .

З а м е ч а н и е 4. Из теоремы 2 путем конкретизации объектов $(r, r_c, \mathcal{R}^0, \mathcal{R}, \dots)$ и параметров (т. е. условий типа Z_y, Z_{y_c}, \dots) могут быть получены следствия для разных математических моделей динамики систем и теории управления и их разных свойств типа достижимости, диссипативности, ограниченности, притяжения, положительной инвариантности и их комбинаций, в том числе с учетом фазовых ограничений и разнообразных ограничений на момент попадания в целевое множество или в множество диссипативности, характеризующее, например, точность стабилизации или наведения.

П р и м е р 4. Пусть АУС r представлена решениями $x(t)$ в смысле Каратеодори (K -решениями) обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) в вещественном n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n с управлениями u из класса \mathcal{U} (например, измеримых функций):

$$\dot{x} = \Phi(t, x, u(x)), \quad t \in T = [t_0, +\infty] \subseteq \mathbb{R}^1, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.4)$$

$$\Phi: T \times X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x: T \rightarrow X, \quad u: X \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m, \quad X \subseteq \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in X^0 \subseteq X, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Предполагается, что для Φ выполняются условия существования K -решений для любых исходных данных $h = (t_0, x_0, u) \in \{t_0\} \times X \times \mathcal{U}$.

Пусть изучается следующий частный случай свойства (3.1), а именно свойство достижимости целевого множества M с “точностью до ε ” при фазовых ограничениях X^* ($X^* \subset X$):

$$\mathbf{P}_1 = \exists u \in \mathcal{U} \quad \forall x_0 \in X^0 \quad \forall x \in r(t_0, x_0, u) \quad (\forall t \in T : t \geq t_0 \quad \forall x = x(t) \quad x \in X^* \\ \& \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists t \in T : t \geq t_0 \quad \forall x = x(t) \quad x \in M^\varepsilon),$$

где $T^0 = \{t_0\}$ — *singl*, $M \subset X$, $X^0 \cap M = \emptyset$, $M^\varepsilon = \{x \in X : \exists y \in M \quad \|x - y\| < \varepsilon\}$. Этот частный случай выделяется из определения (3.1) при сделанных и следующих предположениях: $\mathcal{R}^0 = \{X^0\}$ — *singl*, $Z_{P^0} \equiv Z_P^1 \equiv Z_P^2 \equiv \Lambda$, $h \in \{t_0\} \times X^0 \times \mathcal{U}$ (т. е. возмущения отсутствуют), $\mathcal{R}_1 = \{X^*\}$ — *singl*, $\mathcal{R}_2 = \{T \times M^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$, $Z_{t_1}(t_0) \equiv t_1 \geq t_0$, $Z_t^2(t_0, t_1) \equiv t = t_1$.

Аналогичное свойство \mathbf{P}_2 (попадания в M_c^ε при фазовых ограничениях X_c^*) рассмотрим во второй АУС r_c , заданной семейством K -решений ОДУ

$$\dot{x}_c = \Phi_c(t, x_c, u_c(x_c)), \quad t \in T, \quad x_c(t_0) = x_{0c}, \quad (3.5)$$

$$\Phi_c: T \times X_c \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad x_c: T \rightarrow X_c, \quad u_c: X_c \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad X_c \subseteq \mathbb{R}^k, \quad x_{0c} \in X_c^0 \subseteq X_c, \quad u_c \in \mathcal{U}_c.$$

В соответствии с замечанием 3 привлечем условие связи \mathbf{M}_\leq . Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. А. Если решения ОДУ (3.4) и (3.5) продолжимы вправо,

$$1^\circ) \forall t_0 \in T^0 \quad \sup\{v(t_0, x_0) : x_0 \in X^0\} < \sup\{x_{0c} : x_{0c} \in X_c^0\},$$

$$2^\circ) \forall t \in T \quad \inf\{v(t, x) : x \in X \setminus X^*\} \not\leq \sup\{x_c : x_c \in X_c \setminus X_c^*\},$$

$$3^\circ) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varepsilon_c > 0 \quad \forall t \in T \quad \inf\{v(t, x) : x \in X \setminus M^\varepsilon\} \not\leq \sup\{x_c : x_c \in X \setminus M_c^{\varepsilon_c}\},$$

то из условия \mathbf{M}_\leq и наличия в ОДУ (3.5) свойства \mathbf{P}_2 вытекает, что в ОДУ (3.4) имеет место свойство \mathbf{P}_1 .

Б. В случае, когда ОДУ (3.4) и (3.5) связаны условием траекторного гомоморфизма \mathbf{M} в виде (3.2), то утверждение **А** может быть модифицировано путем замены условий 1° – 3° соответственно на следующие:

$$1) \forall t_0 \in T^0 \quad v(t_0, X_0) \subseteq X_c^0,$$

$$2) \forall t \in T \quad v(t, X \setminus X^*) \subseteq X_c \setminus X_c^* \text{ (или, в случае обратимости } v, v^{-1}(t, X_c^*) \subseteq X^*),$$

$$3) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varepsilon_c > 0 \quad \forall t \in T \quad v(t, X \setminus M^\varepsilon) \subseteq X_c \setminus M_c^{\varepsilon_c} \text{ (или, в случае обратимости } v, v^{-1}(t, M_c^{\varepsilon_c}) \subseteq M^\varepsilon).$$

Рассмотрим случай $M = \{0\}$. Пусть (3.4) имеет вид одномерного ОДУ

$$\dot{x}_c = -\beta x_c^{1-\frac{1}{\alpha}}, \quad t \in T, \quad x_c \in X_c = [0, +\infty), \quad (3.6)$$

где $\alpha, \beta > 0$ фиксированы, $X_c^0 = (0, K]$, $K > 0$, $t_{0c} = t_0$, $X_c^* = [0, K]$, $M_c = \{0\}$ (можно считать, что $u_c \equiv 0$ входит в правую часть аддитивно и $\mathcal{U}_c = \{u_c\}$ — *singl*).

Будем интересоваться ослабленным свойством \mathbf{P}_1 , полагая, что требуется соблюдение фазовых ограничений лишь до момента попадания в $\{0\}$. Аналогично — для \mathbf{P}_2 .

Следствие 2. Пусть функция $v : X \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая в $X \setminus \{0\}$. Решения $x(t)$ ОДУ (3.4) продолжимы на отрезок $[t_0, \tau]$, где

$$\tau(t_0, x_0) = \frac{(\alpha v(x_0))^{\frac{1}{\alpha}} + \beta t_0}{\beta}.$$

Пусть для функции v при некотором управлении $u_0 \in \mathcal{U}$ выполнены условия:

$$1^\circ) \sup\{v(x_0) : x_0 \in X^0\} \leq K,$$

$$2^\circ) v(X \setminus X^*) \subseteq (K, +\infty),$$

$$3^\circ) v(0) = 0, \quad \forall x \in X \setminus \{0\} \quad v(x) > 0,$$

$$4^\circ) \forall x \in X \setminus \{0\} \quad \dot{v}_{(3.4)}(x, u_0(x)) \leq -\beta v^{1-\frac{1}{\alpha}}(x),$$

где

$$\dot{v}_{(3.4)}(x, u_0(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \Phi_i(t_0, x, u_0(x))$$

есть полная производная по времени функции v в силу (3.4).

Тогда для управления $u_0(x)$ имеет место попадание в $\{0\}$ с временем попадания не позже $\tau(t_0, x_0)$ и с соблюдением фазовых ограничений, по крайней мере, до момента попадания.

Доказательство. Для рассматриваемых ослабленных определений $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ достаточно требовать \mathbf{M}_{\leq} тоже в ослабленном варианте, т. е. лишь до попадания решений x в целевое множество. Из локальной липшицевости $v(x)$ и дифференциального неравенства 4° вытекает справедливость указанного ослабления условия связи \mathbf{M}_{\leq} . Оно вместе с ослабленным \mathbf{P}_2 при условиях теоремы обеспечивает ослабленное \mathbf{P}_1 , т. е. как попадание решений x в $\{0\}$, так и удовлетворение фазовым ограничениям до момента попадания. Действительно, если $x(t)$ не попадает в $\{0\}$, то условие \mathbf{M}_{\leq} выполняется на всем T . Тогда из попадания решения $x_c(t)$ (с подходящим в силу 1° начальным состоянием x_{0c}) в $\{0\}$ и неравенства $v(t, x(t)) \leq x_c(t)$ получаем, что $v(t, x(t)) = 0$, а это в силу 3° означает, что и $x(t) \in \{0\}$. Полученное противоречие доказывает, что попадание $x(t)$ в $\{0\}$ состоится, и не позже чем в (3.6). Из общего вида решения ОДУ (3.6) легко устанавливается, что $x_c(t)$ попадают в $\{0\}$ в момент

$$\tau(t_0, x_0) = \frac{(\alpha v(x_0)^{\frac{1}{\alpha}} + \beta t_0)}{\beta}$$

и до этого момента $x_c(t) \in (0, K] \subset X_c^*$, т. е. в (3.6) выполняются фазовые ограничения. Поэтому на основании 2° фазовые ограничения выполняются и в (3.4), по крайней мере до $\tau(t_0, x_0)$. \square

Таким образом, если в теореме 2 свойство попадания в целевое множество сочетается с разнообразными другими, представленными параметрически в определении \mathbf{P}_1 , то в следствиях 1 и 2 в качестве таких дополнительных требований выступают лишь фазовые ограничения, требуемые соответственно либо для любого $t \geq t_0$, либо до момента попадания $x(t)$ в $\{0\}$. Аналогично следствию 1 из теоремы 2 легко получаются следствия для других частных случаев \mathbf{P}_1 , о которых говорилось в замечании 4.

Первые теоремы для управляемости в терминах функций типа Ляпунова получены в [29, 30]. Условия управляемости из [30] соотносятся с условиями из [29] как теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости с теоремами сравнения В.М. Матросова для устойчивости в терминах ВФЛ [9, 10, 12]. При этом так же, как теорема А.М. Ляпунова об устойчивости получается из соответствующей теоремы сравнения для устойчивости выбором системы сравнения с правой частью, тождественно равной нулю, условия управляемости из [30] могут быть получены из условий теоремы сравнения для управляемости выбором системы сравнения в форме (3.6), введенной в [30] (см. также [31]).

4. (ω, β') -процесс в пропозициональном фрагменте исчисления J

В предыдущих разделах развитие логических средств автоматизации велось, во-первых, в языке, полном относительно выразительных возможностей языка классического исчисления предикатов (первого порядка), а во-вторых, в классической (дескриптивной) семантике. В данном разделе путем сужения языка (до пропозиционального фрагмента языка L) и соответствующей модификации правила β предлагается алгоритм дедуктивно-абдуктивного синтеза необходимых и достаточных условий выводимости ПОФ. Затем в этом разделе будет рассмотрена возможность использования этого алгоритма в конструктивных задачах.

Эвристика однократности ответов в (ω, β) -процессе в пропозициональном фрагменте исчисления J не сужает общности рассмотрения. При этом тождественность ответов обеспечивать не надо, поскольку кванторные переменные отсутствуют. Само понятие “ответа на вопрос” приобретает смысл не существования ответной подстановки, а просто вложимости конъюнкта вершины вопроса в конъюнкт базы. Одновременно теряется и возможность использования понятий однотипности и минимальности кванторных переменных. Поэтому преобразуем правило β в правило β' , причем вне контекста и тех допущений, которые были оговорены в замечании 1, а именно мы рассматриваем теперь пропозициональное уравнение $\mathcal{X} \rightarrow A$, где $(\neg A)^L$ — произвольная хорновская формула, т. е. ПОФ, не имеющая дизъюнктивных ветвлений, а \mathcal{X} в

случае невыводимости A в исчислении высказываний должно обеспечить выводимость формулы $\mathcal{X} \rightarrow A$.

Рассматривается ограниченный (ω, β') -процесс (т. е. правило ω предпочитается правилу β'), где β' определяется следующей процедурой. Вначале к формуле $(\neg A)^L$ добавляется неизвестная V . В полученной формуле $\forall: True \exists: True ((\neg A)^L, V)$ выражение $(\neg A)^L$ имеет вид набора формул $\forall: A_1 (\Phi_1), \dots, \forall: A_m (\Phi_m)$, где $m \geq 1$. Синтезируется начальный фрагмент решения $\mathcal{X} = (\tilde{V})^{ИП}$, т. е.

$$\tilde{V} = \forall: True (\exists: A_1 (V_1), \dots, \exists: A_m (V_m)), \quad (4.1)$$

где V_i — новые (попарно различные) неизвестные. При ответе на этот вопрос база $\exists: True$ размножится и каждая новая база будет иметь вид

$$\exists: A_i (\forall: A_1 (\Phi_1), \dots, \forall: A_m (\Phi_m), V_i) \quad (4.2)$$

как объект независимого опровержения путем накопления атомов вплоть до получения противоречия. После по меньшей мере одного применения ω (в том числе к вопросу $\forall: A_i (\Phi_i)$) получим формулы следующей структуры: либо $\exists: False$, либо $\exists: B (V_i)$, либо $\exists: B (\forall: B_1 (\Psi_1), \dots, \forall: B_k (\Psi_k), V_i)$ с более неприменимым ω . В первом случае i -я ветвь в \tilde{V} опровергнута и $\tilde{V}_i = \Lambda$. Во втором случае $\tilde{V}_i = \forall: B \exists: False$, после чего i -я ветвь снова опровергается с указанным результатом \tilde{V}_i . В третьем случае синтезируется

$$\tilde{V}_i = \forall: B (\exists: B_1 (V_{i1}), \dots, \exists: B_k (V_{ik})) \quad (4.3)$$

и после ответа на этот вопрос база $\exists: B$ размножается. Каждая новая база примет вид

$$\exists: B \cup B_j (\forall: B_1 (\Psi_1), \dots, \forall: B_k (\Psi_k), V_{ij}), \quad j = \overline{1, k}.$$

Дальше процесс повторяет те же шаги, которые описаны для (4.2).

Теорема 3. Пусть дано пропозициональное уравнение $\mathcal{X} \rightarrow A$, где $(\neg A)^L$ — известная хорновская ПОФ, а \mathcal{X} неизвестно. Тогда ограниченный (ω, β') -процесс синтеза \tilde{V} конечен и приводит к необходимому и достаточному условию $\mathcal{X} = (\tilde{V})^{ИВ}$, т. е. $\vdash_{ИВ} (\tilde{V})^{ИВ} \leftrightarrow A$, где символ $\vdash_{ИВ}$ означает выводимость в исчислении высказываний.

Доказательство. Конечность (ω, β') -процесса и справедливость того, что $\vdash_{ИВ} (\tilde{V})^{ИВ} \rightarrow A$, доказываются как в теореме 1. Рассмотрим выводимость $\vdash_{ИВ} A \rightarrow (\tilde{V})^{ИВ}$. Правило β' в соответствии с ограниченностью процесса применяется только в случае неприменимости ω . В отличие от правила β во всех рассмотренных случаях синтеза очередных фрагментов решения \tilde{V} (см. первый шаг (4.1) и последующие шаги синтеза, а именно $\tilde{V}_i = \Lambda$, $\tilde{V}_i = \forall: B \exists: False$ и (4.3)) синтезируемые формулы являются логически минимальными по импликации. Поэтому с учетом “вынужденности” применения β' (для продолжимости вывода) окончательное решение \tilde{V} является логически необходимым условием для A . \square

Для решения конструктивных задач в [32] предложено интуиционистское исчисление, а в [33] — интерпретация интуиционистских исчислений как исчислений задач. Для применения исчисления J в задачах с конструктивной семантикой в [14] оно преобразовано в исчисление конструктивных задач J_c . Задачами J_c являются выражения $F \rightarrow G$, где $F, G \in L$, а содержательно F — совокупность дескриптивных знаний и конструктивных средств, G — спецификация цели, причем G имеет вид $\forall \bar{x} : D (\exists \bar{y}_1 : E_1, \dots, \exists \bar{y}_k : E_k)$. В [14] доказано, что любая задача имеет решение в J_c тогда и только тогда, когда $(F)^{ИП} \rightarrow (G)^{ИП}$ доказуемо интуиционистски, например в секвенциальном конструктивном исчислении LJ [34] (в частности, без закона исключенного третьего $H \vee \neg H$). Доказано, что любая задача J_c может быть заменена на задачу вывода формулы $((F)^{ИП} \& \neg(G)^{ИП})^L$ в J , и, если последняя разрешима,

то вывод конструктивен в том смысле, что каждой \exists -переменной и каждому \vee -ветвлению в G можно сопоставить процедуры, представленные как композиция процедур, сопоставленных \exists -переменным и \vee -ветвлениям в F .

Таким образом, в [14] дано обоснование корректного использования конструктивной семантики в языке L и выделен первопорядковый конструктивный фрагмент этого языка и исчисления с правилом ω . Теорема 3 допускает следующее дополнение, вытекающее из нее и из [14, теоремы 2.8–2.10 и следствие 2.1, с. 150–153], в проекции на пропозициональный хорновский фрагмент исчисления J .

Следствие 3. Пусть задача A имеет вид $B \rightarrow C$, где $(B)^L$ — произвольная пропозициональная хорновская ПОФ, имеющая смысл совокупности дескриптивно-конструктивных средств решения задачи (иначе говоря, средств достижения цели), а $(C)^L$ — спецификация цели этой задачи в классе пропозициональных ПОФ не шире, чем $\forall: D$ ($\exists: E_1, \dots, \exists: E_n$). Тогда всякий ограниченный (ω, β') -процесс отыскания условия выводимости формулы $(B \& \neg C)^L$ конечен и конструктивен, а синтезируемое решение \tilde{V} — спецификация искомого минимального дескриптивно-конструктивного дооснащения.

Рассмотрим простейший пример, иллюстрирующий планирование достижения целевого состояния из заданного начального с попутным синтезом условий достижимости, если целевое состояние по исходным условиям задачи недостижимо.

Пример 5. Начальное состояние — α , целевое — δ . Имеются средства перехода из состояния β в состояние γ , а также из β в состояние δ . 1) Спланировать переход в δ и, если он невозможен, синтезировать условия достижимости δ (недостающие дескриптивные знания и спецификации конструктивных средств). 2) Построить средство перехода из состояния γ в состояние δ .

В случае 1) отрицание достижимости состояния δ в языке L примет вид

$$\forall: True \exists: \alpha (\forall: \beta \exists: \gamma, \forall: \beta \exists: \delta, \forall: \delta \exists: False, V).$$

По правилу β' синтезируется $\tilde{V} = \forall: \alpha (\exists: \beta V_1, \exists: \delta V_2)$. После ответа на этот вопрос получим

$$\begin{aligned} \forall: True \left(\exists: \alpha, \beta (\forall: \beta \exists: \gamma, \forall: \beta \exists: \delta, \forall: \delta \exists: False, V_1), \right. \\ \left. \exists: \alpha, \delta (\forall: \beta \exists: \gamma, \forall: \beta \exists: \delta, \forall: \delta \exists: False, V_2) \right), \end{aligned}$$

а после еще трех или четырех применений ω (в зависимости от порядка ответов на вопросы) получим $\forall: True \exists: False$ (поэтому $V_1 = V_2 = \Lambda$).

Из вывода извлекаются минимально необходимое дооснащение (оно должно быть способно переводить состояние α либо в состояние β , либо в δ) и порядок задействования знаний и конструктивных средств: синтезировать условия разрешимости задачи $\forall: \alpha (\exists: \beta, \exists: \delta)$ (поскольку ω неприменимо) с распознаванием получения либо β , либо δ ; в первом случае применить средство $\forall: \beta \exists: \delta$ — и цель достигнута, а во втором случае цель сразу достигнута.

В случае 2) формализация в языке L отрицания конструируемости средства перехода из состояния γ в δ приводит к ПОФ

$$\forall: True \exists: \alpha (\forall: \beta \exists: \gamma, \forall: \beta \exists: \delta, \forall: True \exists: \gamma \forall: \delta \exists: False, V).$$

По правилу ω имеем

$$\forall: True \exists: \alpha, \gamma (\forall: \beta \exists: \gamma, \forall: \beta \exists: \delta, \forall: \delta \exists: False, V).$$

Далее по правилу β' синтезируется $\tilde{V} = \forall: \alpha, \gamma (\exists: \beta V_1, \exists: \delta V_2)$ и после ответа на вопрос $\forall: \alpha, \gamma$ получим

$$\forall: True \left(\exists: \alpha, \gamma, \beta (\forall: \beta \exists: \gamma, \forall: \beta \exists: \delta, \forall: \delta \exists: False, V_1), \right. \\ \left. \exists: \alpha, \gamma, \delta (\forall: \beta \exists: \gamma, \forall: \beta \exists: \delta, \forall: \delta \exists: False, V_2) \right).$$

После трех или четырех применений ω получим $\forall: True \exists: False$.

Таким образом, переход из состояния γ в состояние δ является реализуемым с конкретным, извлекаемым из вывода, порядком применения имеющихся дескриптивных знаний и конструктивных средств и с минимальным дооснащением в виде средства преобразования состояния α & γ в состояние β либо δ . В частности, если под состоянием понимать состояние информационной обеспеченности, а под переходами — преобразование информации, то α & γ интерпретируется как наличие обоих видов информации, а спецификация недостающего средства $\forall: \alpha, \gamma (\exists: \beta, \exists: \delta)$ означает функцию преобразователя информационного обеспечения α & γ в информацию β или δ .

Заключение

Предложены дедуктивные и абдуктивные методы представления и обработки знаний для решения задач поиска логических выводов, синтеза условий доказуемости недоказуемых утверждений, формализованных в языке позитивно-образованных формул, а также планирования действий, в том числе с минимальным дооснащением в случае первоначальной недостижимости целевых состояний. Рассмотрены примеры, иллюстрирующие предложенные методы.

Представляется актуальным распространение предложенных методов на языки с функциональными символами, равенством и встроенными (вычислимыми арифметически) предикатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Осипов Ю.С. Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
3. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Физматлит, 1935. 320 с.
4. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Физматлит, 1965. 208 с.
5. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
6. Румянцев В.В. Метод функций Ляпунова в теории устойчивости // Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. Общая и прикладная механика: сб. ст. М.: Наука, 1968. С. 7–66.
7. Lyndon R.C. Properties preserved under homomorphism // Pacific J. Math. 1959. Vol. 9. P. 143–154.
8. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.
9. Матросов В.М. Метод сравнения в динамике систем. I, II // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 9. С. 1547–1559; 1975. Т. 11, № 3. С. 403–417.
10. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 480 с.
11. Алгоритмы вывода теорем метода векторных функций Ляпунова / В.М. Матросов [и др.]. Новосибирск: Наука, 1981. 271 с.
12. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.
13. Васильев С.Н. Метод редукции и качественный анализ динамических систем. I, II // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 21–29; № 2. С. 5–17.
14. Интеллектуальное управление динамическими системами / С.Н. Васильев [и др.]. М.: Физматлит, 2000. 352 с.

15. **Robinson J.A.** A machine-oriented logic based on the resolution principle // J. Assoc. Comput. Mach. 1965. Vol. 12. P. 23–41.
16. **Robinson J.A.** The generalised resolution principle // Machine Intelligence / ed. D. Michie. No. 3. New York: American Elsevier, 1968. P. 77–94.
17. **Маслов С.Ю.** Обратный метод установления выводимости в классическом исчислении предикатов // Докл. АН СССР. 1964 Т. 159, № 1. С. 17–20.
18. **Маслов С.Ю.** Обратный метод установления выводимости непренесных формул исчисления предикатов // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172, № 1. С. 22–25.
19. **Рассел С., Норвиг П.** Искусственный интеллект: современный подход. М.: Вильямс, 2006. 1408 с.
20. **Riazanov A., Voronkov A.** Limited resource strategy in resolution theorem proving / J. Symbolic Comput. 2003. Vol. 36, iss. 1-2. P. 101–115.
21. **Kalman J.A.** Automated reasoning with Otter. Princeton; New York : Rinton Press, 2001. 536 p.
22. **Kowalski R.** Predicate logic as a programming language // Proc. IFIP-74 Congress. 1974. P. 569–574.
23. **Ершов Ю.Л.** Σ -определимость на допустимых множествах // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285, № 4. С. 792–794.
24. **Гончаров С.С., Свириденко Д.И.** Σ -программирование // Вычисл. системы. 1985. № 107. С. 3–29.
25. **Васильев С.Н.** Метод синтеза условий выводимости хорновских и некоторых других формул // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 5. С. 1034–1046.
26. **Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.** Математическая логика. М.: Наука, 1979. 320 с.
27. A complete subsumption algorithm / S. Ferilli [et al.] // Advances in Artificial Intelligence: Proc. 6th Congress of the Italian Association for Artificial Intelligence / eds. A. Cappelli, F. Turini. 2003. P. 1–13.
28. **Chang C.-L., Lee R.C.-T.** Symbolic logic and mechanical theorem proving. New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1973.
29. **Васильев С.Н.** Некоторые вопросы математической теории систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 1976. 133 с.
30. **Коробов В.И.** Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат. сб. 1979. Т. 109, вып. 4. С. 582–606.
31. **Лакеев А.В., Чагина О.М.** Метод функций Ляпунова в задачах синтеза управлений // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, 1987. С. 272–280.
32. **Heyting A.** Die Formalen Regeln der Intuitionistischen Logik // Sitzungsber. preuss. Berlin: Akad. Wiss., 1930. P. 42–56.
33. **Kolmogoroff A.N.** Zur Deutung der Intuitionistischen Logik // Math. Z. 1932. No. 35. P. 58–65.
34. **Такеути Г.** Теория доказательств. М.: Мир, 1978. 412 с.

Васильев Станислав Николаевич
академик РАН

д-р физ.-мат. наук
директор

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
snv@ipu.ru

Поступила 14.12.2010

Пonomarev Григорий Михайлович
аспирант

ст. математик

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
ponomarev_g@mail.ru

УДК 517.988.68

МЕТОД ЛЕВЕНБЕРГА — МАРКВАРДТА И ЕГО МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ВАРИАНТЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГРАВИМЕТРИИ¹

В. В. Васин, Г. Я. Пересторонина

Исследуется метод Левенберга — Марквардта и его модифицированные варианты. При некоторых локальных условиях (в окрестности решения) на оператор устанавливается слабая и сильная сходимость итераций с монотонным убыванием погрешности решения. Показывается, что эти условия выполняются для одного класса нелинейных интегральных уравнений, в частности, для структурной задачи гравиметрии. Приводятся результаты модельных численных экспериментов для обратной нелинейной задачи гравиметрии.

Ключевые слова: Метод Левенберга — Марквардта, модифицированный процесс, априорная информация, обратная задача гравиметрии.

V. V. Vasin, G. Ya. Perestoronina. Levenberg–Marquardt method and its modified versions for solving nonlinear equations with application to the inverse gravimetry problem.

The Levenberg–Marquardt method and its modified versions are studied. Under some local conditions on the operator (in a neighborhood of a solution), strong and weak convergence of iterations is established with the solution error monotonically decreasing. The conditions are shown to be true for one class of nonlinear integral equations, in particular, for the structural gravimetry problem. Results of model numerical experiments for the inverse nonlinear gravimetry problem are presented.

Keywords: Levenberg–Marquardt method, modified process, a priori information, inverse gravimetry problem.

1. Введение

Метод Левенберга — Марквардта принадлежит к классу итеративно регуляризованных методов Гаусса — Ньютона и с успехом применяется для решения разнообразных некорректно поставленных обратных задач фильтрации, геофизики, зондирования атмосферы (см. [1, 2, 5–7]). Для нелинейного операторного уравнения

$$A(u) = f \tag{1.1}$$

с дифференцируемым по Фреше оператором A , действующим на паре гильбертовых пространств U, F , итерации в этом методе строятся следующим образом:

$$u^{k+1} = u^k - [A'(u^k)^* A'(u^k) + \alpha_k I]^{-1} A'(u^k)^* (A(u^k) - f), \tag{1.2}$$

где α_k — некоторая положительная последовательность управляющих параметров.

Теоретическое исследование процесса (1.2) можно найти в [1, 2, 7]. При доказательстве сходимости итераций приходится накладывать определенные условия на выбор параметра α_k . Например, в статье [7] был предложен следующий принцип выбора параметра: параметр $\alpha = \alpha_k$ должен быть таким, чтобы выполнялось соотношение

$$\|f_\delta - A(u^k) - A'(u^k)(u^{k+1}(\alpha) - u^k)\| = q \|f_\delta - A(u^k)\|, \tag{1.3}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00053) и Уральского отделения РАН в рамках Междисциплинарного проекта 09-М-15-2001.

где $0 < q < 1$, $\|f - f_\delta\| \leq \delta$. При этом существование единственного решения α^k гарантируется, если имеет место неравенство

$$\|f_\delta - A(u^k) - A'(u^k)(z - u^k)\| \leq \frac{q}{\gamma} \|f_\delta - A(u^k)\|, \quad (1.4)$$

где $\gamma > 1$, z — решение уравнения (1.1) с минимальной нормой, существование которого предполагается в некоторой окрестности $S_\rho(u^0) = \{u : \|u - u^0\| \leq \rho\}$. При предположении, что для оператора A выполняется условие

$$\|A(u) - A(\tilde{u}) - A'(u)(u - \tilde{u})\| \leq c\|A(u) - A(\tilde{u})\| \quad \forall u, \tilde{u} \in S_{2\rho}(u^0) \subset D(A)$$

и номер $k(\delta)$ останова итераций осуществляется по принципу невязки

$$\|f_\delta - A(u^{k(\delta)})\| \leq \tau\delta < \|f_\delta - A(u^k)\|, \quad 0 \leq k < k(\delta), \quad (1.5)$$

доказана сильная сходимость итераций к нормальному решению уравнения (1.1) при $\delta \rightarrow 0$.

В книге [2, §6] сформулирована теорема о слабой сходимости следующего варианта метода Левенберга — Марквардта

$$u^{k+1} = u^k - \beta[A'(u^k)^*A'(u^k) + \alpha_k I]^{-1}A'(u^k)^*(A(u^k) - f) \equiv T_k(u^k), \quad (1.6)$$

где введен дополнительный параметр $\beta > 0$. В этом случае доказывается слабая сходимость итераций (1.6) при выполнении локального условия на оператор A в форме

$$\|A(u) - f\|^2 \leq \varkappa \langle A'(u)(u - z), A(u) - f \rangle, \quad (1.7)$$

слабо-сильной замкнутости оператора $S(u) = A'(u)^*(A(u) - f)$ и $0 < \beta < 2\alpha/(\varkappa N_1^2)$, где $\alpha_k \geq \alpha > 0$, $\|A'(u)\| \leq N$, $u \in S_\rho(z)$. При этом фактически в доказательстве использовано условие на выбор параметра α_k , гарантирующее выполнение неравенств

$$\|u^{k+1} - z\|_{k+1} \leq \|u^{k+1} - z\|_k, \quad (1.8)$$

где $\|u\|_k^2 = \langle B_k u, u \rangle$, $B_k = A'(u^k)^*A'(u^k) + \alpha_k I$, z — решение уравнения (1.1).

Следует отметить, что выбор параметра α_k согласно (1.3), (1.4), (1.7) или (1.8) не является конструктивным, поскольку эти соотношения содержат точное решение, которое нам неизвестно для реальных данных. Однако мы показываем, что условие (1.7) выполняется в достаточно малой окрестности искомого решения для некоторого класса нелинейных интегральных уравнений, в частности, уравнения гравиметрии.

Заметим, что при исследовании слабой сходимости процесса (1.6) достаточно требовать выполнения условия (1.7) только в итерационных точках, т. е. при $u = u^k$. В этом случае условие (1.7) можно рассматривать и как условие на выбор параметра регуляризации подобно (1.4), которое является более сильным условием, чем (1.7).

В настоящей статье при исследовании сходимости метода (1.6) вводится несколько отличное от (1.7) локальное условие

$$\|A(u) - f\|^2 \leq \bar{\varkappa} \langle B_k^{-1}(u)S(u), u - z \rangle, \quad \bar{\varkappa} > 0, \quad (1.9)$$

где $B_k(u) = A'(u)^*A'(u) + \alpha_k I$, и устанавливается слабая сходимость.

Чтобы получить сильную сходимость итераций, мы переходим от метода (1.6) к процессу (см. (2.7)) с дополнительной операцией метрического проектирования на выпуклое компактное множество Q , которому, по предположению, принадлежит искомого решение. Исследование метода (1.6) и его варианта с проекцией составляет содержание разд. 2.

Наряду с процессом (1.6) рассматривается модифицированный метод Левенберга — Марквардта в форме

$$u^{k+1} = u^k - \gamma[A'(u^0)^*A'(u^0) + \alpha_k I]^{-1}A'(u^k)^*(A(u^k) - f) \equiv T_0(u^k), \quad (1.10)$$

где в отличие от (1.6) параметр $\alpha_k = \alpha$ фиксирован и в обращаемом операторе u^k заменяется на постоянный элемент u^0 , который играет роль начального приближения. Слабую сходимость процесса (1.10) удастся установить при выполнении локального условия (1.7), которое, как уже было упомянуто выше, справедливо для одного важного класса интегральных уравнений. Вопросы сходимости метода (1.10) и его модификации содержатся в разд. 3. В разд. 4 дается сравнительный анализ численной эффективности исследуемых итерационных процессов.

2. Сходимость метода Левенберга — Марквардта

2.1. Мы рассматриваем процесс в форме (1.6), где $\beta > 0$, последовательность параметров α_k такова, что $\bar{\alpha} \geq \alpha_k \geq \bar{\alpha} > 0$. В дальнейшем предполагаем, что в некоторой окрестности $S_\rho(z)$ искомого решения $z \sup\{\|A'(u)\| : u \in S_\rho(z)\} \leq N_1 < \infty$, причем шар $S_\rho(z) = \{u : \|u - z\| \leq \rho\}$ не содержит других решений.

Теорема 2.1. Пусть оператор A , действующий на паре гильбертовых пространств U, F , дифференцируем по Фреше и слабо-сильно замкнут, т. е.

$$u^k \rightarrow \bar{u} \quad (\text{слабо}), \quad A(u^k) \rightarrow \bar{f} \Rightarrow \bar{u} \in D(A), \quad A(\bar{u}) = \bar{f}. \quad (2.1)$$

Пусть выполнено локальное условие (1.9).

Тогда при $\beta < \frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}N_1^2}$ для процесса (1.6) справедливы свойства:

- 1) $u^k \rightarrow z$ (слабо);
- 2) либо $\|u^{k+1} - z\| < \|u^k - z\|$ для любых k , либо u^k стационарна при $k \geq k_0$ и $u^{k_0} = z$;
- 3) $\sum_{k=0}^{\infty} \|u^{k+1} - u^k\|^2 \leq \frac{\|u^0 - z\|^2}{\nu}$, $\nu = \frac{2\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}N_1^2\beta} - 1$;
- 4) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A(u^k) - f\| = 0$.

Доказательство. Убедимся, что выполнено неравенство

$$\|T_k(u) - z\|^2 - \|u - z\|^2 + \nu\|u - T_k(u)\|^2 \leq 0 \quad (2.2)$$

при некотором $\nu > 0$, т. е. условие псевдосжимаемости T_k . С учетом выражения (1.6) неравенство преобразуется к виду

$$-\frac{2}{(1+\nu)\beta} \langle B_k^{-1}S(u), u - z \rangle + \|B_k^{-1}S(u)\|^2 \leq 0. \quad (2.3)$$

Поскольку $\|B_k^{-1}\| \leq 1/\bar{\alpha}$, $\|A'(u^k)\| \leq N_1$, то при выполнении неравенства

$$-\frac{2}{(1+\nu)\beta} \langle B_k^{-1}S(u), u^k - z \rangle + \frac{N_1^2}{\alpha^2} \|A(u) - f\|^2 \leq 0 \quad (2.4)$$

соотношение (2.3) также справедливо. Объединяя (2.4) и (1.9), получаем, что при

$$\beta < \frac{2\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}N_1^2}$$

выполнено соотношение (2.2) для

$$\nu \leq \frac{2\bar{\alpha}^2}{\bar{\alpha}N_1^2\beta} - 1.$$

Из неравенства (2.2) при $u = u^k$ вытекает соотношение

$$\|u^{k+1} - z\| \leq \|u^k - z\|, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - z\| = d(z) \geq 0, \quad (2.5)$$

$$u^{k+1} - u^k = -\beta B_k^{-1} S(u^k) \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Так как $\|B_k\| \leq N_1^2 + \bar{\alpha}$, то (2.6) влечет сходимость $S(u^k) \rightarrow 0$, а из (2.5) вытекает существование слабо сходящейся подпоследовательности $u^{k_i} \rightarrow \bar{u}$ (слабо). Из полученных соотношений и (1.9) имеем $A(u^{k_i}) \rightarrow f$. Ввиду слабо-сильной замкнутости оператора A и (2.5) заключаем, что $\bar{u} \in D(A) \cap S_\rho(z)$, $A(\bar{u}) = f$, т.е. $\bar{u} = z$ — решение уравнения (1.1). Таким образом, $\bar{u} = z$ — единственная слабо предельная точка последовательности $\{u^k\}$; это влечет выполнение свойств 1), 4).

Проверка свойств 2, 3 осуществляется аналогично общему случаю для псевдосжимающих операторов [3].

Теорема 2.2. Пусть для оператора A выполнены предположения теоремы 2.1 с заменой условия (1.9) на локальное условие (1.7).

Пусть в итерационных точках процесса (1.2) выполнено соотношение (1.4) и параметр α_k выбирается по правилу (1.3) для $f_\delta = f$, при этом имеет место оценка $\alpha_k \geq \bar{\alpha} > 0$.

Тогда последовательность $\{u^k\}$, порождаемая процессом (1.2), удовлетворяет свойствам 1)–4) из теоремы 2.1.

Доказательство. В [1, proposition 4.1] при предположениях теоремы доказано неравенство

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \leq \|u^k - z\|^2 - \|u^{k+1} - u^k\|^2,$$

которое можно переписать в форме

$$\|T_k(u^k) - z\|^2 \leq \|u^k - z\|^2 - \|T_k(u^k) - u^k\|^2,$$

что влечет соотношения (2.5), (2.6) при $\beta = 1$. Завершение доказательства аналогично теореме 2.1.

2.2. Предположим, что имеется дополнительная априорная информация о принадлежности искомого решения z выпуклому компактному или ограниченно компактному (см. [4]) множеству Q . Рассмотрим итерационный процесс

$$v^{k+1} = P_Q(T_k(v^k)) \equiv F_k(v^k), \quad v^0 \in S_\rho(z), \quad (2.7)$$

где P_Q — метрическая проекция на множество Q , а T_k — оператор шага в методе (1.6).

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 за исключением слабо-сильной замкнутости оператора A .

Тогда процесс (2.7) порождает последовательность $\{v^k\}$, сильно сходящуюся к решению z уравнения (1.1).

Доказательство. Так как операторы P_Q , T_k псевдосжимающие, т.е. для каждого из них выполнено соотношение (2.2) при некотором $\nu > 0$, то их суперпозиция $F_k = P_Q T_k$ является псевдосжимающим отображением (см. [2]), для которого z — единственная неподвижная точка.

Последовательно воспользовавшись свойством псевдосжимаемости, имеем

$$\begin{aligned} \|v^{k+1} - z\| &= \|P_Q(T_k(v^k)) - z\| \leq \|T_k(v^k) - z\| \leq \|T_k(v^k) - P_Q(T_k(v^k))\| \\ &\leq \|v^k - z\| - \nu \|v^k - T_k(v^k)\| \leq \|v^k - z\| - \nu \|v^k - P_Q(T_k(v^k))\|, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \|v^{k+1} - z\| &\leq \|v^k - z\|, \quad \|v^k\| \leq c - \text{const}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|v^{k+1} - z\| &= d(z) \geq 0, \quad v^k - T_k(v^k) \rightarrow 0, \quad T_k(v^k) - P_Q(T_k(v^k)) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ввиду компактности Q и $v^k \in Q$ существует сходящаяся подпоследовательность

$$v^{k_i} \rightarrow \bar{v} \in Q \cap S_\rho(z). \quad (2.9)$$

Из соотношений (2.8) и (2.9) следует

$$v^{k_i} - T_{k_i}(v^{k_i}) = \beta B_{k_i}^{-1}(v^{k_i})S(v^{k_i}) \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Объединяя (2.10) и (1.9) при $u = v^{k_i}$, приходим к

$$A(v^{k_i}) - f \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Поскольку оператор A непрерывен, что следует из дифференцируемости, то из (2.9) и (2.11) получаем $A(\bar{v}) = f$, т. е. \bar{v} совпадает с искомым решением z . Ввиду единственности решения на множестве $Q \cap S_\rho(z)$ имеет место сходимость всей последовательности $\{v^k\}$ к решению z .

3. Модифицированный метод Левенберга — Марквардта

3.1. Рассмотрим теперь модифицированный процесс Левенберга — Марквардта (1.10), где в отличие от основного процесса производная $A'(u)$ в обрабатываемом операторе вычисляется в фиксированной точке u_0 , рассматриваемой как начальное приближение.

Введем в пространство U новую гильбертову норму

$$\|u\|_0^2 = \langle B_0 u, u \rangle, \quad B_0 = A'(u_0)^* A'(u_0) + \alpha I, \quad \alpha > 0. \quad (3.1)$$

Обозначим гильбертово пространство с этой нормой через U_0 .

Теорема 3.1. Пусть дифференцируемый по Фреше слабо-сильно замкнутый оператор (см. (2.1)) удовлетворяет локальному условию (1.7) в некоторой окрестности искомого решения z .

Тогда при $0 < \gamma < \frac{2\alpha}{\varkappa N_1^2}$ и $u^0 \in S_\rho(z)$ для процесса (1.10) справедливы следующие свойства:

- 1) $u^k \rightarrow z$ (слабо) в пространстве U ;
- 2) либо $\|u^{k+1} - z\|_0 < \|u^k - z\|_0$ для любого k , либо u^k стационарна при $k \geq k_0$, причем $u^{k_0} = z$;
- 3) $\sum_{k=0}^{\infty} \|u^{k+1} - u^k\|_0^2 \leq \frac{\|u^0 - z\|_0^2}{\nu}$;
- 4) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A(u^k) - f\| = 0$.

Доказательство. Убедимся, что в новой гильбертовой норме, определяемой соотношениями (3.1), оператор шага

$$T_0(u) = u - \gamma B_0^{-1} S(u), \quad S(u) = A'(u)^* (A(u) - f),$$

является псевдосжимающим, т. е. для некоторого $\nu > 0$ выполняется неравенство

$$\|T_0(u) - z\|_0^2 - \|u - z\|_0^2 + \nu \|u - T_0(u)\|_0^2 \leq 0. \quad (3.2)$$

Используя выражение для оператора T_0 , из (3.2) получаем неравенство

$$-\frac{2}{(1+\nu)\gamma} \langle u - z, S(u) \rangle + \langle S(u), B_0^{-1} S(u) \rangle \leq 0,$$

которое заведомо выполняется, если имеет место соотношение

$$-\frac{2}{(1+\nu)\gamma}\langle u-z, S(u)\rangle + \frac{N_1^2}{\alpha}\|A(u)-f\|^2 \leq 0. \quad (3.3)$$

В свою очередь, на основании (1.7) неравенство (3.3) будет выполнено, если потребовать

$$\frac{2\alpha}{(1+\nu)\gamma N_1^2} \geq \varkappa,$$

откуда получаем условие на параметр шага

$$\gamma < \frac{2\alpha}{\varkappa N_1^2};$$

при этом параметр ν в (3.2) может быть выбран в соответствии с условием

$$\nu \leq \frac{2\alpha}{\varkappa\gamma N_1^2} - 1.$$

Из (3.2) при $u = u^k$ следуют соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - z\|_0 = d(z), \quad \|u^k\|_0 \leq c - \text{const}, \quad (3.4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|T(u^k) - u^k\|_0 = \gamma \|B_0^{-1}S(u^k)\|_0 = 0. \quad (3.5)$$

Поскольку выполнены очевидные неравенства

$$\alpha\|u\|^2 \leq \|u\|_0^2 \leq (N_1^2 + \alpha)\|u\|^2,$$

означающие эквивалентность норм, то из (3.4) следует ограниченность последовательности $\{u^k\}$ в исходном пространстве U .

Поэтому существует слабо сходящаяся подпоследовательность

$$u^{k_i} \rightarrow \bar{u} \quad (\text{слабо}), \quad i \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

в пространстве U .

В силу эквивалентности норм и непрерывности оператора B_0 из (3.5) вытекает

$$S(u^k) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Из условия (1.7) и соотношений (3.6), (3.7) находим, что

$$A(u^{k_i}) - f \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Принимая во внимание слабо-сильную замкнутость оператора A , из (3.6), (3.8) имеем $\bar{u} \in D(A)$, $A(\bar{u}) = f$. В силу монотонности $\|u^{k+1} - z\|_0 \leq \|u^k - z\|_0$, которая следует из (3.2) при $u = u^k$, и условия $u^0 \in S_\rho(z) = \{u : \|u - z\|_0 \leq \rho\}$ все итерационные точки u^k принадлежат $S_\rho(z)$. Ввиду слабой замкнутости $S_\rho(z)$ предельная точка \bar{u} из (3.6) также принадлежит $S_\rho(z)$. Поскольку предполагается, что в $S_\rho(z)$ нет других решений, кроме z , то $\bar{u} = z$.

Завершение доказательства проводится по обычной схеме для псевдосжимающих операторов (см. [2, 3]).

3.2. Как и в случае основного процесса, предположим, что имеется априорная информация о существовании выпуклого компактного или ограниченно компактного подмножества $Q \subset U$, которому принадлежит искомое решение z . Через P_Q обозначим метрическую проекцию в пространстве U_0 . Известно, что P_Q — однозначное непрерывное псевдосжимающее отображение (см. например, [3]). Теперь мы можем сформулировать аналог теоремы 2.3 для итерационного процесса

$$w^{k+1} = P_Q(T_0(w^k)) \equiv F_0(w^k), \quad w^0 \in S_\rho(z), \quad (3.9)$$

где T_0 — оператор шага в методе (1.10).

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы (3.1) за исключением слабо-сильной замкнутости оператора A .

Тогда процесс (3.9) генерирует последовательность $\{w^k\}$, которая сильно сходится к решению z уравнения (1.1).

При доказательстве используются свойство псевдосжимаемости оператора $F_0 = P_Q T_0$ в пространстве U_0 , эквивалентность норм пространств U, U_0 и схема рассуждений по аналогии с теоремой 2.3.

З а м е ч а н и е 3.3. Переход от методов (1.6), (1.10) к процессам (2.7), (3.9) с проектированием на априорное множество позволяет нам избавиться от трудно проверяемого условия слабо-сильной замкнутости оператора A и получить сильную сходимость итераций при точных данных.

З а м е ч а н и е 3.4. Необходимо отметить, что в более общей ситуации, когда априорное множество Q не удовлетворяет условию компактности, по-видимому, нельзя гарантировать (без дополнительных условий) сильную сходимость итерационных процессов (2.7), (3.9). Однако для выпуклого замкнутого множества Q , оставаясь в рамках слабой сходимости, можно вместо проекции P_Q использовать псевдосжимающее отображение, которое, в отличие от метрической проекции, конструктивно строится для широкого класса ограничений. Например, если

$$Q = \{u: g_i(u) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\},$$

где g_i — дифференцируемые функционалы, градиенты которых — ограниченные операторы, отображение

$$P_Q(u) = u - \lambda d(u) \frac{e(u)}{\|e(u)\|},$$

где $d(u) = \sum_{i=1}^m c_i [f^+(u)]^2$, $e(u) = \nabla d(u)$, является псевдосжимающим (см. [2]) и, следовательно, процессы (2.7), (3.9) генерируют слабо сходящиеся к решению итерационные последовательности (см. [3]).

З а м е ч а н и е 3.5. В теоремах, представленных выше, для сходимости итерационных процессов требуется выполнение локального условия (1.7) (теоремы 2.2, 3.1, 3.2) или условия (1.9) (теоремы 2.1, 2.3). В работе [8] установлено, что для интегрального уравнения

$$A[u](x) \equiv \int_{\Pi} K(x, x', u(x')) dx' = f(x)$$

при требовании на ядро $K(x, x', u)$ вида

$$K_2 \geq |K'_n(x, x', z)| \geq K_1 > 0, \quad |K'_u(x, x', u) - K'_u(x, x', z)| \leq L|u - z|$$

в достаточно малой окрестности $S_\rho(z)$ ($\rho < K_1/2L$) искомого решения z выполняется условие (1.7); здесь $x, x' \in \Pi \subset \mathbb{R}^n$, $z, u \in M \cap S_\rho(z)$, где M — выпуклое замкнутое подмножество. При этом если множество M задано в виде $M = \{u : 0 \leq m_0 \leq u(x) \leq m_1\}$, то условие (1.7) имеет место для уравнения гравиметрии.

С учетом этих свойств достаточно от итерационной схемы (3.9) перейти к процессу

$$w^{k+1} = P_Q(T_0(P_M(w^k))), \tag{3.10}$$

чтобы получить сходимость итераций для уравнения гравиметрии (см. (4.2)). Введение дополнительной операции проектирования P_M связано с тем, что локальное условие (1.7) для оператора гравиметрии (см. (4.2)) удается установить лишь на множестве $S_\rho(z) \cap M$.

3.3. Пусть правая часть в уравнении (1.1) задана с погрешностью: $\|f - f_\delta\| \leq \delta$. Для итерационных процессов (2.7), (3.9) принцип останова итераций по невязке означает выбор $k(\delta)$ в

соответствии с правилом (1.5) при некотором $\tau > 1$. Если для непрерывного взаимнооднозначного оператора A существование такого номера имеет место для $0 < \delta \leq \delta_0$, то эти процессы порождают регуляризирующие алгоритмы. Это следует из оценки

$$\|A(u^{k(\delta)}) - A(z)\| \leq \|A(u^{k(\delta)}) - f_\delta\| + \|f_\delta - f\| \leq (1 + \tau)\delta$$

и леммы Хаусдорфа — Тихонова о непрерывности обратного оператора на компакте.

4. Численные эксперименты

Для проверки эффективности итерационных процессов (1.6), (1.10) были выполнены численные эксперименты по восстановлению модельного решения

$$z(x_1, x_2) = 5 + \frac{4}{\pi} \arctan\left(\frac{2}{5x_1 - 10}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{30x_2}\right), \quad (4.1)$$

взятого из работы [8], для уравнения гравиметрии

$$A[u](x) \equiv \Gamma \Delta \sigma \left\{ \int_{\Pi} \frac{dx'}{[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + H^2]^{1/2}} - \int_{\Pi} \frac{dx'}{[(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + u^2(x')]^{1/2}} \right\} = f(x); \quad (4.2)$$

здесь $x = (x_1, x_2)$, $dx' = dx'_1 dx'_2$, скачок плотности $\Delta \sigma = 0.5$ г/см³, $H = 5$ км. Модельное аномальное поле вычислялось по $z(x_1, x_2)$ из (4.1) для области $\Pi = \{0 \leq x_1 \leq 50 \text{ км}, 0 \leq x_2 \leq 60 \text{ км}\}$ и рассматривалось в качестве точных расчетных данных.

Интегральное уравнение (4.2) сводилось к системе нелинейных уравнений с помощью двумерного аналога формулы прямоугольников на сетке 100×30 с равномерным шагом по каждой переменной.

При использовании процесса (1.6) с начальным приближением $u^0 = 6$ км и параметрами $\beta = 1$, $\alpha = 1$ после 30 итераций невязка уменьшилась в 3000 раз и относительная среднеквадратичная погрешность решения составила $\varepsilon_1^{30} = \|u^{30} - z\|/\|z\| \simeq 0.6 \cdot 10^{-2}$, а невязки $\varepsilon_2^{30} = \|A(u^{30}) - f\|/\|f\| = 0.4 \cdot 10^{-3}$. При этом наблюдалось монотонное убывание величин

$$\Delta_1^k = \|u^k - z\|, \quad \Delta_2^k = \|A(u^k) - f\|.$$

Монотонное убывание погрешности Δ_1^k обусловлено тем, что в итерационных точках ($2 \leq k \leq 30$) выполняются локальное условие (1.9) при $\bar{\varkappa} \geq 3.07$ и условие (1.7) при $\varkappa \geq 1.05$. Это гарантирует справедливость соотношения (2.2) при $u = u^k$, и, следовательно, $\|u^{k+1} - z\|^2 < \|u^k - z\|^2$ (см. теоремы 2.1, 2.2).

При возмущенной правой части с ошибкой около 5% относительная погрешность решения имела величину $\varepsilon_1^{30} = \|\tilde{u}^{30} - z\|/\|z\| \simeq 0.02$.

Модифицированным процессом (1.10) с параметрами $\gamma = 1$, $\alpha_k = 10$ для того же модельного решения и начального приближения $u^0 = \bar{u}^2$, где \bar{u}^2 — вектор, полученный после двух итераций основного процесса, были выполнены 60 итераций. При невозмущенных данных относительная погрешность решения составила величину $\varepsilon_1^{60} = \|u^{60} - z\|/\|z\| \simeq 0.01$, а невязка $\varepsilon_2^{60} = \|A(u^{60}) - f\|/\|f\| \simeq 0.9 \cdot 10^{-2}$.

Как и в случае основного процесса, имеет место монотонное убывание погрешности $\Delta_1^k = \|u^k - z\|_0$ ($k = 2, 3, \dots, 60$), поскольку в итерационных точках выполняется соотношение (3.2). Если сравнить с основным процессом, то мы видим, что при модифицированном процессе обнаруживается более медленная сходимость. Так, основной процесс уже после 4-й итерации дает по решению и по невязке примерно ту же точность, что и модифицированный метод после 60-й итерации. Кроме того, начальную точку u^0 приходится выбирать из окрестности решения меньшего радиуса. Например, при $u^0 = 6$ основной процесс, как отмечено выше, сходится, а модифицированный — расходится.

Заключение

Предложен модифицированный вариант метода Левенберга — Марквардта, в котором фиксируется элемент в обрабатываемом операторе. При выполнении локальных условий в окрестности искомого решения сформулированы теоремы слабой и сильной сходимости для метода Левенберга — Марквардта и его модификаций. Локальное условие (1.7) выполняется для одного класса нелинейных интегральных уравнений, в частности для обратной задачи гравиметрии. Другое условие для основного процесса в модельных вычислениях может быть проверено в итерационных точках, что гарантирует монотонное убывание погрешности решения. Численные эксперименты показали, что при одном и том же числе итераций основной процесс Левенберга — Марквардта существенно превосходит по точности модифицированный вариант и не требует жестких условий на начальное приближение. Однако модифицированный вариант метода более прост в реализации и существенно более экономичен по затратам машинного времени, так как не требует пересчета обрабатываемого оператора. Та же тенденция сохраняется при сравнении метода Левенберга — Марквардта с процессами градиентного типа, такими как методы минимальной ошибки и градиентного спуска: для достижения одной и той же точности при численной реализации метода Левенберга — Марквардта требуется на два порядка времени больше, чем для градиентных процессов (см. [8]).

Заметим, что во всех численных экспериментах наблюдалось устойчивое поведение итераций, поэтому не было необходимости использования операций проектирования P_Q, P_M на априорные множества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O.** Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2008. 194 p.
2. **Vasin V.V., Eremin I.I.** Operators and iterative processes of Fejèr type. Theory and applications. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2009. 155 p.
3. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht, etc. : VSP, 1995. 255 p.
4. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Theory of linear ill-posed problems and its applications. Utrecht etc.: VSP, 2002. 281 p. (Translation from Russian book, 1978).
5. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойной среды / В.В. Васин [и др.] // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 2. С. 69–76.
6. Модифицированный метод Левенберга — Марквардта для решения задачи деконволюции / В.В. Васин [и др.] // Тез. докл. молодеж. междунар. науч. шк.-конф. “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”. Новосибирск: Изд.-во ИМ СО РАН, 2009. С. 13–14.
7. **Hanke M.** A regularization Levenberg–Marquardt scheme, with applications to inverse groundwater filtration problems // Inverse Problems. 1997. Vol. 13. P. 79–95.
8. **Vasin V.V., Skorik G.G.** Iterative processes of gradient type with applications to gravimetry and magnetometry inverse problems // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2010. Vol. 18, № 8. P. 855–876.

Васин Владимир Васильевич
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Поступила 19.10.2010

Пересторонина Галина Яковлевна
гл. программист
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: pgja@imm.uran.ru

УДК 519.68

ГРАВИТАЦИОННОЕ СГЛАЖИВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ¹**А. Д. Гвишиани, С. М. Агаян, Ш. Р. Богоутдинов, А. И. Каган**

В работе строится сглаживание функций, заданных на конечных метрических пространствах, основанное на понятии гравитационной непрерывности. Как следствие получается новое сглаживание временных рядов, предельным образом связанное с квадратичной регрессией.

Ключевые слова: гравитационное сглаживание, невязка гравитационной гладкости, меры близости.

A.D. Gvishiani, S.M. Agayan, Sh.R. Bogoutdinov, A.I. Kagan. Gravitational smoothing of time series.

This work describes the plotting of the smoothing of functions determined on the finite metric spaces based on the concept of the gravitational continuity. Eventually the result is the new type of time series smoothing which is connected with a quadratic regression on a limit way.

Keywords: gravitational smoothing, gravitational smoothness discrepancy, measures of nearness.

Введение

Настоящая статья продолжает цикл работ авторов по разработке математических аспектов методов искусственного интеллекта для обработки наблюдений [1–7]. Она посвящена новому универсальному методу сглаживания, первоначально предназначенному для анализа геофизических временных рядов.

Временные ряды — это одна из наиболее распространенных форм представления исходных данных систем мониторинга в задачах физики, геофизики, метеорологии, экологии, экономики, социологии и многих других наук. Последовательные значения исследуемых характеристик отражают как внутреннюю динамику объектов, так и их взаимные связи и изменчивость этих связей во времени.

Сглаживание временных рядов является одним из наиболее мощных инструментов их изучения. В общей стохастической обстановке сглаживание временного ряда можно рассматривать как возможный вариант его идеального течения. Двойственным образом это обстоятельство дает подход к аномалиям на временных рядах: ими можно считать фрагменты значительных отклонений временных рядов от своих сглаживаний.

Кроме того, сглаживания зачастую устроены проще, поддаются более простому анализу и потому служат эффективной аппроксимацией временных рядов.

На сегодняшний день наиболее известными методами сглаживания являются регрессионный анализ, метод конечных элементов и сплайнов, Фурье- и вейвлет-сглаживания и их обобщения на основе разложений по ортогональным системам функций и частотно-временного анализа [8–13].

Представленный в настоящей статье метод расширяет этот список новым типом сглаживания, способным успешно работать в произвольных конечных метрических пространствах.

¹Настоящая работа выполнена в рамках РФФИ (проект 09-07-91051-ЦНИИ_a).

1. Постановка задачи. Общая концепция

Пусть $\text{BP}[a, b]$ — пространство временных рядов на дискретном отрезке $[a, b]$ с узлами $t_i = a + (i - 1)h$, $i = 1, \dots, n$, $h = \frac{b - a}{n - 1}$. Элементы $\text{BP}[a, b]$ обозначаются буквами x , y , z, \dots . Если $z \in \text{BP}[a, b]$, то $z_i = z(t_i)$ и соответствие $z \sim (z_i)_{i=1}^n$ превращает $\text{BP}[a, b]$ в n -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n(z_1, \dots, z_n)$.

Для заданного временного ряда $y \in \text{BP}[a, b]$ рассматривается задача построения его сглаживания $\text{Sm } y \stackrel{\text{def}}{=} x \in \text{BP}[a, b]$. Ее решение представляет собой последовательную формализацию следующей конъюнкции:

$$“x \text{ — сглаживание } y” \equiv (x \text{ — приближение } y) \wedge (x \text{ — гладкий временной ряд}). \quad (1)$$

Обозначим через z переменный ряд в $\text{BP}[a, b]$. Приближение в (1) формализуется функционалом квадратичной невязки $\text{Sc}(z | y) = \|z - y\|^2$, а гладкость — неотрицательной квадратичной формой $\text{CGr}(z)$, которую будем называть невязкой гравитационной гладкости. В ее основе лежит свойство гравитационной непрерывности, представляющее собой один из вариантов дискретной непрерывности. Невязка $\text{CGr}(z)$ является мерой отклонения от этого свойства для ряда z на отрезке $[a, b]$. Чем значения $\text{Sc}(z | y)$ и $\text{CGr}(z)$ меньше, тем больше основания считать z сглаживанием y . Следовательно, нужна содержательная одновременная минимизация функционалов $\text{Sc}(z | y)$ и $\text{CGr}(z)$. Для этого рассматривается их нетривиальная выпуклая комбинация

$$\text{SM}_\lambda(z | y) = \lambda \text{CGr}(z) + (1 - \lambda) \text{Sc}(z | y), \quad \lambda \in (0, 1), \quad (2)$$

и поиск сглаживания $x = \text{Sm } y$ для y сводится к минимизации на $\text{BP}[a, b]$ при подходящем $\lambda \in (0, 1)$ функционала $\text{SM}_\lambda(z | y)$, т. е. к решению линейной системы n -го порядка

$$x = \text{Sm}_\lambda y \quad \Leftrightarrow \quad \text{Grad } \text{SM}_\lambda(x | y) = 0. \quad (3)$$

Таким образом, в качестве сглаживания $\text{Sm } y$ предлагается семейство $\{\text{Sm}_\lambda y, \lambda \in (0, 1)\}$. Найдем градиент $\text{Grad } \text{SM}_\lambda(x | y)$ в явном виде. Для этого сначала введем в рассмотрение неотрицательный на $\text{BP}[a, b]$ оператор Gr , порождающий невязку гравитационной гладкости $\text{CGr}(z) = (\text{Gr } z, z)$, и затем преобразуем $\text{SM}_\lambda(z | y)$:

$$\begin{aligned} \text{SM}_\lambda(z | y) &= \lambda(\text{Gr } z, z) + (1 - \lambda) \|z - y\|^2 = \lambda(\text{Gr } z, z) + (1 - \lambda)(z - y, z - y) \\ &= \lambda(\text{Gr } z, z) + (1 - \lambda)(z, z) - 2(1 - \lambda)(z, y) + (1 - \lambda) \|y\|^2 \\ &= ((\lambda \text{Gr} + (1 - \lambda) E) z, z) - 2(1 - \lambda)(z, y) + (1 - \lambda) \|y\|^2. \end{aligned}$$

Здесь E — единичный оператор на $\text{BP}[a, b]$. Следовательно, минимизация $\text{SM}_\lambda(z | y)$ равносильна минимизации функционала

$$\widetilde{\text{SM}}_\lambda(z | y) = \frac{1}{2}((\lambda \text{Gr} + (1 - \lambda) E) z, z) - ((1 - \lambda) z, y).$$

Для него градиент в точке z выражается через Gr так [11]:

$$\text{Grad } \widetilde{\text{SM}}_\lambda(z | y) = (\lambda \text{Gr} + (1 - \lambda) E) z - (1 - \lambda) y.$$

Следовательно,

$$x = \text{Sm}_\lambda y \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda \text{Gr} + (1 - \lambda) E) x = (1 - \lambda) y. \quad (4)$$

Если $\lambda \in (0, 1)$, то оператор $\lambda \text{Gr} + (1 - \lambda) E$ положителен на $\text{BP}[a, b]$, а потому — обратим. Следовательно, сглаживание $x = \text{Sm}_\lambda y$ всегда существует, однозначно определено для любого $y \in \text{BP}[a, b]$ и представляет собой результат применения к нему оператора $(\lambda \text{Gr} + (1 - \lambda) E)^{-1}$, так что

$$\text{Sm}_\lambda = (1 - \lambda)(\lambda \text{Gr} + (1 - \lambda) E)^{-1}. \quad (5)$$

Свойства оператора Sm_λ будут рассмотрены ниже, а сейчас обратимся к определению невязки $\text{CGr}(z)$.

2. Гравитационная невязка гладкости

Пусть f — непрерывная функция в интервале (c, d) . Если $t \in (c, d)$, то $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $|f|_{[t-\delta, t+\delta]} - f(t)| < \varepsilon$, следовательно, справедлива цепь импликаций

$$|f|_{[t-\delta, t+\delta]} - f(t)| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{2\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} f(\bar{t}) d\bar{t} - f(t) \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} f(\bar{t}) d\bar{t} = f(t). \quad (6)$$

Таким образом, из обычной непрерывности функции f в точке t следует последнее равенство в (6), которое естественно назвать гравитационной непрерывностью f в t (\equiv инфинитезимальное среднее f в t совпадает с $f(t)$). Она уже переводится на дискретный язык, и этот перевод представляет собой начальный, нулевой этап в построении невязки гладкости.

Невязка гравитационной гладкости: 0-й уровень. Возвращаемся к дискретному отрезку $[a, b]$. Роль окрестности всякого его узла t_i будет играть нечеткая структура δ_{t_i} на $[a, b]$, выражающая свойство близости к t_i : $\delta_{t_i}(t_j)$ — степень близости t_j к t_i на $[a, b]$. Всегда справедливо $\delta_{t_i}(t_j) \in [0, 1]$ и $\delta_{t_i}(t_i) = 1$, но, вообще говоря, не всегда $\delta_{t_i}(t_j) = \delta_{t_j}(t_i)$.

Пример 1. $\delta_{t_i}(t_j) = 1 - \frac{|t_j - t_i|}{\max(|t_i - a|, |t_i - b|) + h}$ (рис. 1).

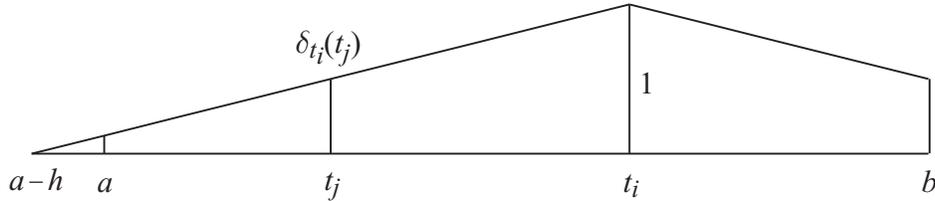


Рис. 1.

Свяжем с δ квадратную матрицу n -го порядка $A \in \text{Mat}(n)$:

$$A = A(\delta) = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \frac{\delta_{t_i}(t_j)}{\sum_{p=1}^n \delta_{t_i}(t_p)}. \quad (7)$$

Тогда дискретное выражение гравитационной непрерывности (6) для ряда z в узле t_i означает равенство

$$z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j, \quad (8)$$

а потому отклонение $\text{CGr}^0(z)(t_i)$ от него нужно считать невязкой гравитационной непрерывности z в t_i :

$$\text{CGr}^0(z)(t_i) = \left(z_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right)^2.$$

Общая невязка гравитационной непрерывности $\text{CGr}^0(z)$ для z на $[a, b]$ получается суммированием по всем узлам:

$$\begin{aligned} \text{CGr}^0(z) &= \sum_{i=1}^n \text{CGr}^0(z)(t_i) = \sum_{i=1}^n \left(z_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right)^2 \\ &= ((A - E)z, (A - E)z) = ((A - E)^*(A - E)z, z) = (\text{Gr}^0 z, z). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, для невязки гравитационной непрерывности $\text{CGr}^0(z)$ порождающий ее оператор Gr^0 определяется нечеткой структурой δ и равен

$$\text{Gr}^0 = \text{Gr}^0(\delta) = (A(\delta) - 1)^*(A(\delta) - 1). \quad (10)$$

Невязка гравитационной гладкости: s -й уровень. Пусть D^s — оператор дискретного дифференцирования s -го порядка на $\text{BP}[a, b]$. Если z — временной ряд на отрезке $[a, b]$, то его s -я производная $z^s = D^s z$ будет временным рядом уже на отрезке $[a, b^s]$, $b^s = b - sh$, так что $D^s: \text{BP}[a, b] \rightarrow \text{BP}[a, b^s] = \mathbb{R}^{n-s}$ и в каждом узле $t_i \in [a, b^s]$

$$z^s(t_i) = \frac{\sum_{l=0}^s (-1)^{s-l} C_s^l z_{i+l}}{h^s}.$$

Функционалом невязки $\text{CGr}^s(z)$ s -й гравитационной гладкости ряда z будем считать невязку гравитационной непрерывности его s -й производной z^s :

$$\text{CGr}^s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \text{CGr}^0(z^s) = (\text{Gr}^0 D^s z, D^s z) = (D^{s*} \text{Gr}^0 D^s z, z). \quad (11)$$

Таким образом, порождающий невязку $\text{CGr}^s(z)$ на пространстве $\text{BP}[a, b]$ оператор Gr^s выражается через оператор D^s , его сопряженный D^{s*} и оператор гравитационной непрерывности Gr^0 на пространстве $\text{BP}[a, b^s]$:

$$\text{CGr}^s(z) = (\text{Gr}^s z, z), \quad \text{Gr}^s = D^{s*} \text{Gr}^0 D^s. \quad (12)$$

Невязка гравитационной гладкости: итоговый уровень. Окончательная невязка гравитационной гладкости $\text{CGr}(z)$ является взвешенной суммой определенных выше невязок:

$$\text{CGr}(z) = \sum_{s=0}^{n-1} \omega_s \text{CGr}^s(z), \quad (13)$$

где ω_s — неотрицательные веса (параметры сглаживания). С учетом (12)

$$\text{CGr}(z) = (\text{Gr} z, z), \quad \text{Gr} = \sum_{s=0}^{n-1} \omega_s \text{Gr}^s. \quad (14)$$

Невязка гладкости (14) является неотрицательной квадратичной формой на $\text{BP}[a, b]$, поэтому оператор Gr неотрицателен и, в частности, самосопряжен. Следовательно, имеет место разложение $\text{BP}[a, b] = \text{Ker Gr} \oplus \text{Im Gr}$, где \oplus означает прямую ортогональную сумму, а Im Gr — подпространство, порожденное собственными векторами Gr с нетривиальными собственными значениями.

Идеальные с точки зрения гравитационной непрерывности ряды на отрезке $[a, b]$ принадлежат ядру невязки CGr и описываются утверждением 1, которое приводим без доказательств.

Утверждение 1. 1) $\text{Ker Gr} = \text{Ker CGr} = \text{Ker } D^{s_*+1} = P_{s_*}[a, b]$, где s_* — номер первого нетривиального веса ω_s в невязке CGr (13), $P_{s_*}[a, b]$ — временные ряды на $[a, b]$, индуцированные полиномами степени $\leq s_*$.

2) $\dim \text{Ker Gr} = s_* + 1$, $\dim \text{Im Gr} = n - s_* - 1$.

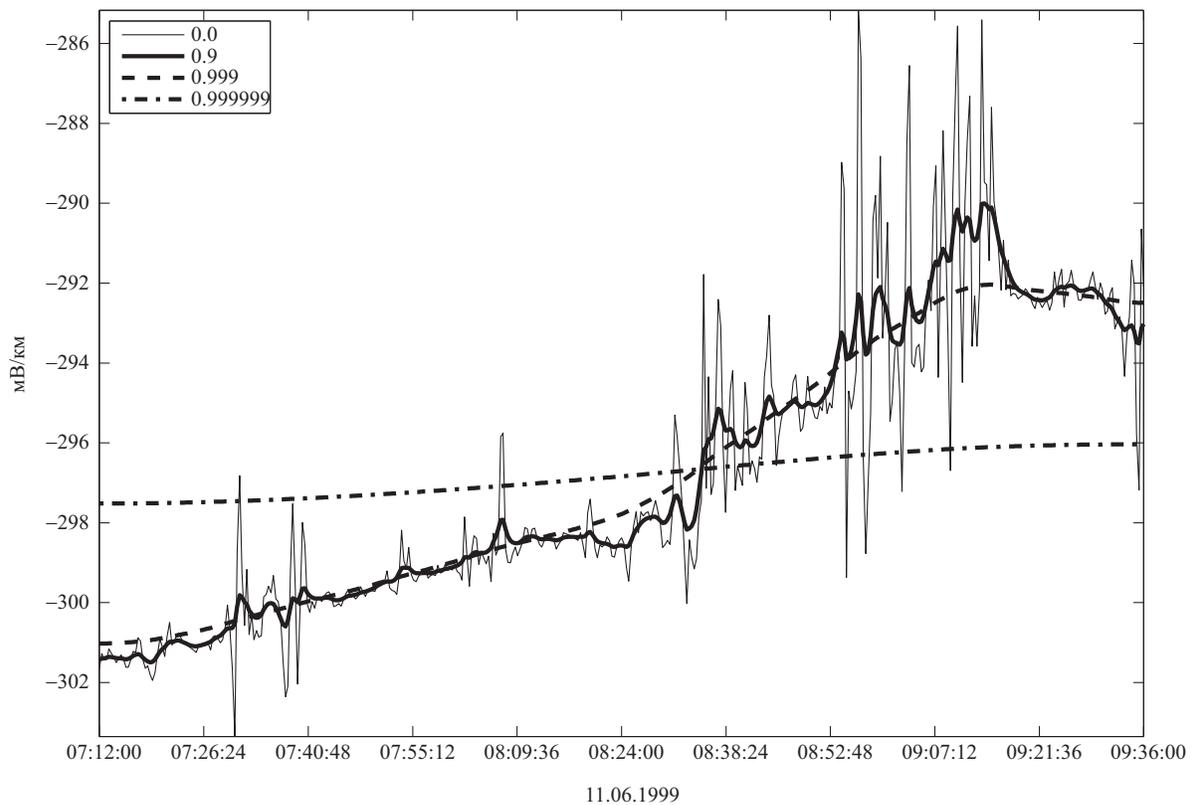


Рис. 2. Гравитационное сглаживание. Зависимость от λ . Запись естественного электрического потенциала, вулкан Ла Фурнез (о. Реюньон, Франция).

3. Свойства гравитационного сглаживания

Сглаживание $y \rightarrow \text{Sm}_\lambda y$ (5) оказывается самосопряженным, обратимым оператором на пространстве $\text{BP}[a, b]$, тесно связанным с оператором Gr . Приведем без доказательства его свойства. Они получены с помощью спектрального разложения оператора Gr .

Утверждение 2. *Сглаживание $y \rightarrow \text{Sm}_\lambda y$ оставляет инвариантными подпространства Ker Gr и Im Gr : на ядре Ker Gr оно действует тождественно, а на образе Im Gr является сжатием.*

Отсюда, в частности, следует равенство $\|\text{Sm}_\lambda y\| = 1$, что естественно, поскольку все, претендующее на роль сглаживания временного ряда, не должно увеличивать его норму, в данном случае евклидову.

Утверждение 3. 1) *Сглаживание $y \rightarrow \text{Sm}_\lambda y$ увеличивает гравитационную гладкость:*

$$\text{CGr}(\text{Sm}_\lambda y) \leq \text{CGr}(y) \text{ для любого } y \in \text{BP}[a, b].$$

При этом равенство возможно только в идеальном случае:

$$\text{CGr}(\text{Sm}_\lambda y) = \text{CGr}(y) \Leftrightarrow \text{CGr}(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \text{Ker Gr}.$$

2) *Невязки $\text{CGr}(\text{Sm}_\lambda y)$ убывают по λ к нулю монотонно: $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \text{CGr}(\text{Sm}_\lambda y) = 0$.*

Это утверждение доказывает естественную согласованность между гравитационными сглаживаниями и гравитационной непрерывностью, а следующее утверждение уточняет связь между ними.

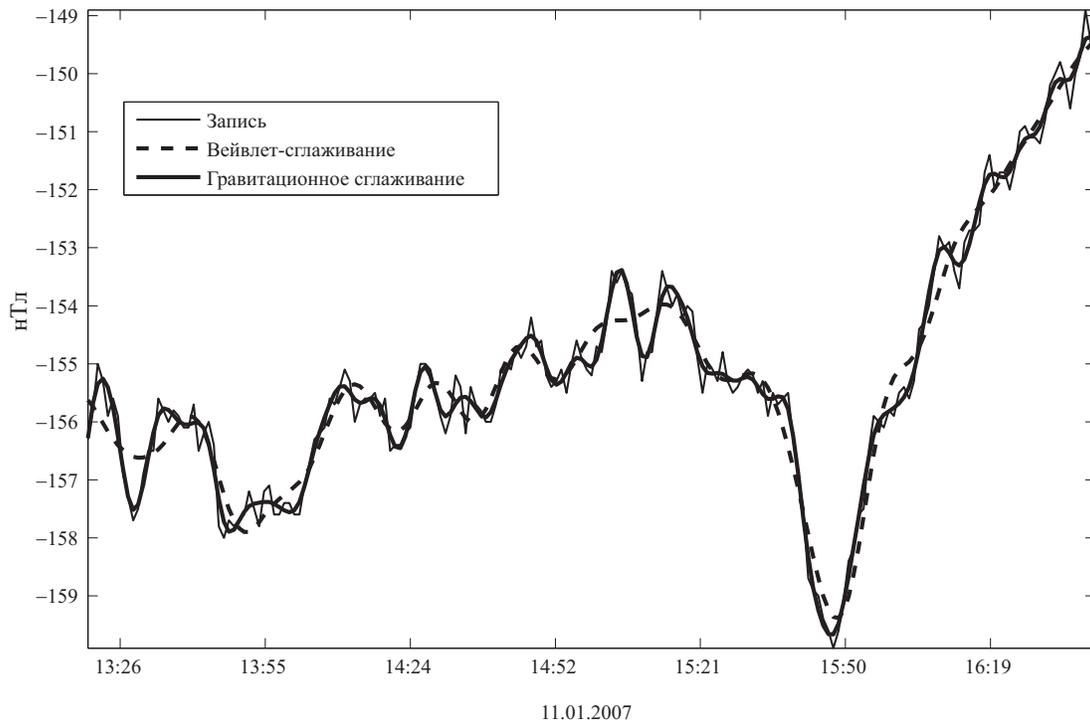


Рис. 3. Сравнение гравитационного сглаживания со сглаживанием вейвлетом Добеши. Магнитная запись (станция DOU, компонента y).

Утверждение 4. Для любого $y \in \text{BP}[a, b]$ семейство его сглаживаний $\text{Sm}_\lambda y$ сходится при $\lambda \rightarrow 1$ к ортогональной проекции $\ker y$ ряда y на ядро Ker Gr .

Согласно утверждению 1 ядро $\ker y$ совпадает с квадратичной регрессией $\text{Regr}^{s_*} y$ порядка s_* , где $s_* = \dim \text{Ker Gr} - 1$. Поэтому сглаживание $\text{Sm}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \text{Sm}_\lambda$ является регрессией.

Итак, с каждым рядом y на отрезке $[a, b]$ связана серия сглаживаний $\{\text{Sm}_\lambda y, \lambda \in [0, 1]\}$, начинающаяся с самого y и заканчивающаяся его регрессией. Это обстоятельство подчеркивает надрегрессионный характер гравитационных сглаживаний.

Остановимся на нескольких примерах такого сглаживания. Первый из них иллюстрирует зависимость $\text{Sm}_\lambda x$ от λ (рис. 2), т.е. утверждения 3, 4.

В следующем примере гравитационное сглаживание сравнивается с вейвлет-сглаживанием, основанным на вейвлете Добеши 6-го порядка (рис. 3) [12, 13].

Как видно из приведенного примера, гравитационное сглаживание при одинаковой с вейвлетом Добеши гладкостью обладает большей сканируемостью. Справедливости ради отметим, что вейвлеты с вычислительной точки зрения более просты.

4. Гравитационное сглаживание в конечных метрических пространствах

Гравитационное сглаживание без привлечения производных не требует равномерного характера дискретного отрезка $[a, b]$ и потому может быть реализовано для функций на произвольном конечном метрическом пространстве T с метрикой d . Для этого нужна лишь мера близости на T .

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $t \in T$. Мера близости δ_t — функция принадлежности на T нечеткого понятия “близость к t в T ”: значение $\delta_t(\bar{t})$ выражает в шкале отрезка $[0, 1]$ с нормировкой $\delta_t(t) = 1$ степень близости точки $\bar{t} \in T$ к точке t в пространстве (T, d) .

О п р е д е л е н и е 2. Мера близости δ на T — нечеткое отображение, ставящее в соответствие каждой точке $t \in T$ близость δ_t к ней в T :

$$\begin{aligned} \delta : T \rightarrow \text{Fuzzy}(T) & \Leftrightarrow \delta : T \times T \rightarrow [0, 1] \\ \delta(t) = \delta_t & \Leftrightarrow \delta(t, \bar{t}) = \delta_t(\bar{t}) \end{aligned} .$$

Близость δ_t играет роль нечеткой окрестности для t в T . В общем случае значение $\delta_t(\bar{t})$ не только убывает с ростом расстояния $d(t, \bar{t})$, но и зависит от топологии T вокруг t . Меры близости существуют на T всегда, способы их построения рассмотрены в [3]. Они бывают несимметричными ($\delta_t(\bar{t}) \neq \delta_{\bar{t}}(t)$), несмотря на изначальную симметричность d ($d(t, \bar{t}) = d(\bar{t}, t)$).

П р и м е р 2. T — изображенное на рис. 4 множество точек на плоскости, d — обычное евклидово расстояние, $\delta_t(\bar{t})$ — мера близости, основанная на “голосовании”: за близость \bar{t} к t в T “голосуют” сама точка \bar{t} и все точки из $\{T - t - \bar{t}\}$, отстоящие от t дальше, чем \bar{t} :

$$\delta_t(\bar{t}) = \frac{|\{\tilde{t} \in T : d(t, \tilde{t}) > d(t, \bar{t})\}| + 1}{|T|} .$$

В T выбраны две точки и относительно них показано разбиение T на очень близкие ($\delta_t(\bar{t}) \in [0.75, 1]$, черный цвет), близкие ($\delta_t(\bar{t}) \in [0.5, 0.75]$, светло-серый цвет), не очень далекие ($\delta_t(\bar{t}) \in [0.25, 0.5]$, серый цвет) и далекие ($\delta_t(\bar{t}) \in [0, 0.25]$, темно-серый цвет) точки.

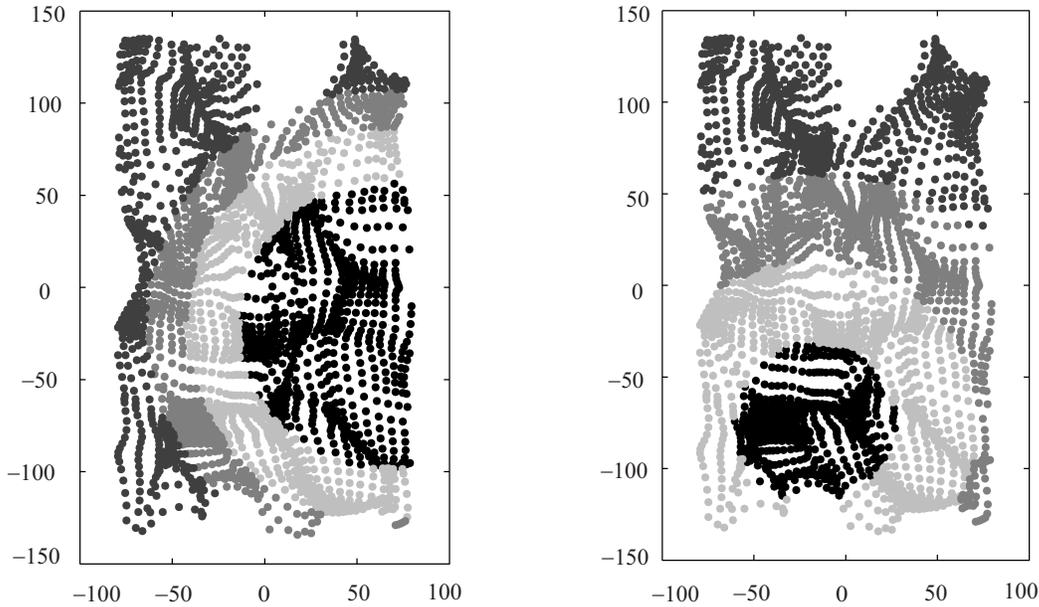


Рис. 4.

Сценарий гравитационного сглаживания на T полностью повторяет сценарий гравитационного сглаживания без производных на отрезке, зафиксированный в (1)–(5), (7)–(10). Поэтому дадим его тезисно.

1. $F(T)$ — пространство функций на T , δ — мера близости на T .

2. $A = A(\delta) = \{a_{t\bar{t}} : t, \bar{t} \in T\}$, $a_{t\bar{t}} = \frac{\delta_t(\bar{t})}{\sum_{\tilde{t} \in T} \delta_t(\tilde{t})}$.

3. $\text{Gr} = \text{Gr}^0(\delta) = (A - E)^*(A - E)$.

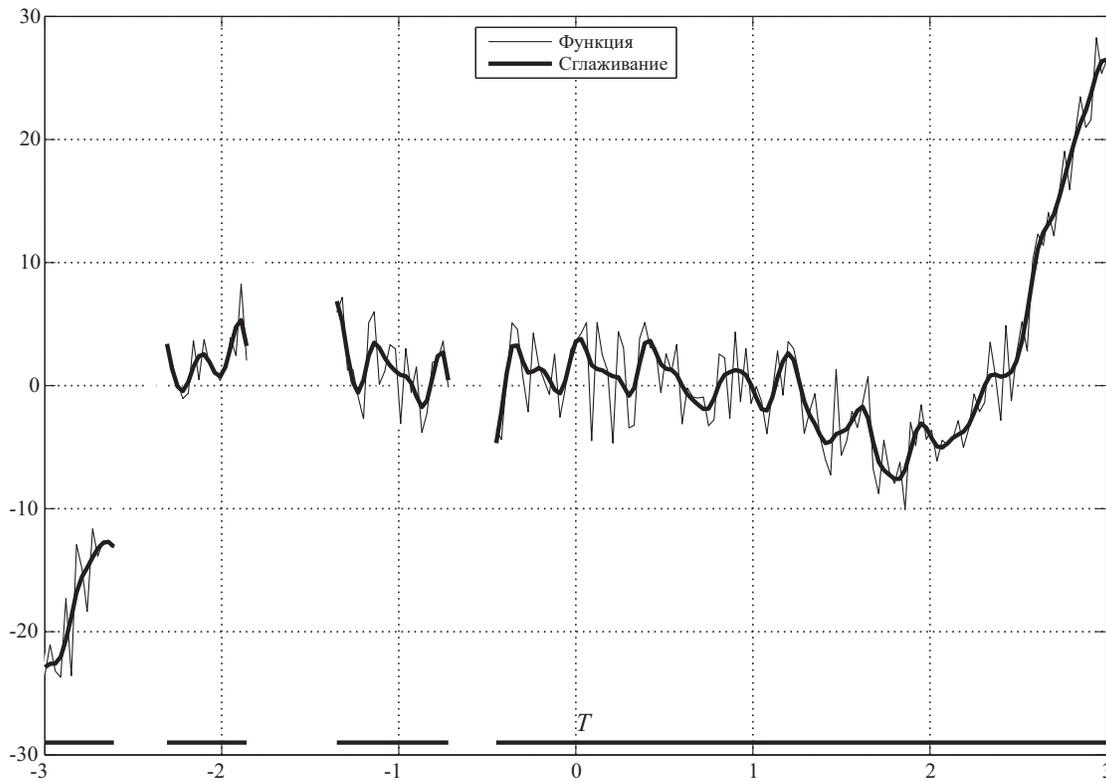


Рис. 5. Зашумленная функция $x^3 \cos 2x$ и ее гравитационное сглаживание на пространстве T .

4. Сглаживание функции $y \in F(T) \equiv$ применение к ней оператора Sm_λ :

$$\text{Sm}_\lambda = (1 - \lambda)(\lambda \text{Gr} + (1 - \lambda)E)^{-1},$$

$$y \rightarrow \text{Sm}_\lambda y = (1 - \lambda)(\lambda \text{Gr} + (1 - \lambda)E)^{-1}y.$$

Пример 3. Пространство T — проколотый в четырех местах отрезок $[a, b]$. На всем $[a, b]$ задана функция, показанная тонкой линией. Толстой линией показано гравитационное сглаживание ее ограничения на T , продолженное по линейности на проколотые промежутки (рис. 5).

З а м е ч а н и е. Гравитационное сглаживание в конечных метрических пространствах дает возможность решить задачу аппроксимации и интерполяции в максимальной общности. Отметим, что известные методы сглаживания, приведенные выше, таким свойством не обладают.

Заключение

Построенное в работе гравитационное сглаживание временных рядов обладает большой универсальностью: оно способно работать в произвольном конечном метрическом пространстве и, подобно регрессии или сплайнам, может сглаживать многозначные и взвешенные ряды. С другой стороны, в регулярных случаях оно не уступает сглаживаниям, основанным на Фурье- и вейвлет-анализах.

Справедливости ради надо отметить трудоемкость гравитационного сглаживания: его построение связано с решением линейных систем большого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгоритмы искусственного интеллекта для кластеризации магнитных аномалий / А.Д. Гвишиани [и др.] // Физика Земли. 2002. № 7. С. 13–28.
2. Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering / V. Mikhailov [et al.] // Geophysics. 2003. Vol. 68, no. 1. P. 168–180.
3. **Агаян С.М., Соловьёв А.А.** Выделение плотных областей в метрических пространствах на основе кристаллизации // System Research & Information Technologies. 2004. No. 2. P. 7–23.
4. Определение вектора магнитного момента при помощи кластерного анализа результатов локальной линейной псевдоинверсии аномалий ΔT / А.А. Соловьёв [и др.] // Докл. АН. 2005. Т. 404, № 1. С. 109–112.
5. Алгоритмы нечеткой логики в анализе электротеллурических данных в связи с мониторингом вулканической активности / Ш.Р. Богоутдинов [и др.] // Физика Земли. 2007. № 7. С. 72–85.
6. **Гвишиани А.Д., Агаян С.М., Богоутдинов Ш.Р.** Определение аномалий на временных рядах методами нечеткого распознавания // Докл. АН. 2008. Т. 421, № 1. С. 101–105.
7. Распознавание возмущений с заданной морфологией на временных рядах. I. Выбросы на магнитограммах всемирной сети ИНТЕРМАГНЕТ / Ш.Р. Богоутдинов [и др.] // Физика Земли. 2010. № 11. С. 99–112.
8. **Самарский А.А.** Введение в численные методы. М.: Наука, 1982. 269 с.
9. **Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
10. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. М.: Изд-во “Лаборатория базовых знаний”, 2003. 632 с.
11. **Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.** Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 319 с.
12. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. М.: РХД, 2001. 461 с.
13. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

Гвишиани Алексей Джерменович
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
директор
Геофизический центр РАН
e-mail: adg@gcras.ru

Поступила 01.12.2010

Агаян Сергей Мартикович
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Геофизический центр РАН
e-mail: s.agayan@gcras.ru

Богоутдинов Шамиль Рафикович
канд. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Геофизический центр РАН
e-mail: shm@wdcb.ru

Каган Александр Иосифович
науч. сотрудник
Геофизический центр РАН
e-mail: aleck.kagan@gmail.com

УДК 517.977

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ¹****Н. Л. Григоренко, Д. В. Камзолкин, Л. Н. Лукьянова, Д. Г. Пивоварчук**

В статье описывается подход к решению задачи управления нелинейной динамической системой содержащей управляемые и неопределенные параметры с терминальным функционалом качества. Параметры управляемого процесса таковы, что вектор неопределенности является доминирующим, по отношению к вектору управления. Предложено игровое управление в классе контрстратегий, доставляющее функционалу значение, зависящее от реализовавшейся неопределенности. Качество контрстратегии оценивается сравнением значения функционала при игровом управлении и оптимальном управлении. Приведены результаты расчета управления и значения функционала для тестовых параметров модели и класса неопределенностей.

Ключевые слова: управляемая система, оптимальное управление, управление в условиях неопределенности.

N. L. Grigorenko, D. V. Kamzolkin, L. N. Luk'yanova, D. G. Pivovarchuk. On one class of control problem under uncertainty.

An approach to solving a control problem for a nonlinear dynamic system containing control and uncertain parameters with terminal performance functional is described. The parameters of the controlled process are such that the uncertainty vector dominates over the control vector. A game control in the class of counterstrategies is suggested such that the value of the functional depends on the realized uncertainty. The quality of a counterstrategy is estimated by comparing the values of the functional under the game control and under the optimal control. The results of calculating the control and values of the functional for test parameters of the model and of the class of uncertainties are presented.

Keywords: control system, optimal control, control of uncertain system.

Введение

Рассматривается задача управления нестационарной, нелинейной динамической системой на не фиксированном отрезке времени, с неопределенным параметром и терминальным функционалом. Рассматриваемый вариант влияния неопределенного параметра на динамическую систему относится к случаю, когда воздействие неопределенного параметра является доминирующим и не может быть компенсировано управлением. Считается что информация о неопределенном параметре поступает в режиме реального времени и будущее поведение неопределенности не известно. Приведенный далее явный вид управления зависит от параметров модели и доставляет функционалу значение, зависящее от неопределенности и сравнимое с оптимальным для типовых значений неопределенностей. Приведены результаты расчета управления для тестовых параметров модели и неопределенности.

1. Постановка задачи управления в условиях неопределенности

Рассмотрим следующую задачу управления с неопределенным параметром:

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(\Theta) = x_1, \quad t \in [0, \Theta], \quad P \leq u(t) \leq Q, \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проект 09-01-00378), РГНФ (проект 10-02-00191), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5443.2008.1) и программы Президиума РАН "Математическая теория управления".

$$\dot{z} = e^{-\nu t} \left(-mu(t) - pP + s(t)P \left(1 - \frac{P^2}{3u^2(t)} \right) \right) - \nu_1 g_1 P^{\gamma_1} e^{\nu_1 t} - \nu_2 g_2 Q^{\gamma_2} e^{\nu_2 t}, \quad (1.2)$$

$$z(0) = -g_1 P^{\gamma_1} - g_2 Q^{\gamma_2}, \quad s_0 \leq s(t) \leq s_1.$$

Здесь x, z — фазовые переменные, $u(t)$ — управление, $\Theta = \Theta(u(\cdot))$ — нефиксированный момент окончания процесса, $x, z, u \in \mathbb{R}^1$; $g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, \nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0, 0 \leq \gamma_1 \leq 1, 0 \leq \gamma_2 \leq 1, x_1, P, Q, P \leq Q; \nu, m, p, s_0, s_1, s_0 \leq s_1$, — положительные параметры, $s(t)$ — неопределенный параметр: непрерывная функция, о которой в момент t известны значения $s(\tau), \tau \in [0, t]$. Цель процесса управления — формируя управление $u(t)$, добиться возможно большего значения $z(\Theta)$. Назовем предысторией неопределенного параметра $s(t)$ в момент $t, t \geq 0$, функцию $s_t(\cdot) = \{s(\tau): s(\tau) \in [s_0, s_1], \tau \in [0, t], s(\tau)$ непрерывна}. Управление выбирается в классе контрстратегий $u(t, s_t(\cdot))$ — отображений $U(t, x(0), x_1, z(0), s_t(\cdot))$, ставящих в соответствие начальным состояниям $x(0), z(0)$, конечному состоянию x_1 , каждому моменту $t \geq 0$ и произвольной предыстории неопределенного параметра $s_t(\cdot)$ измеримую функцию $u(t) = U(t, x(0), x_1, z(0), s_t(\cdot)), t \geq 0$, со значениями из области управления $[P, Q]$, удовлетворяющую условию “физической осуществимости” [1, 2]. Рассматривается задача о построении контрстратегии $u(t, s_t(\cdot))$ и соответствующей оценочной функции $\xi(t, s_t(\cdot))$, доставляющих при реализовавшейся неопределенности $s_t(\cdot)$ соотношение $z(t, s_t(\cdot)) \geq \xi(t, s_t(\cdot))$, при этом $\xi(\Theta, s_\Theta^i(\cdot)) \in [0.7 \bar{z}(T, s_T^i(\cdot)), \bar{z}(T, s_T^i(\cdot))]$, где $\bar{z}(T, s_T^i(\cdot))$ — значение $z(T, s_T^i(\cdot))$ в соответствующей задаче оптимального управления с известным заранее параметром $s^i(t), t \in [0, T]$, для $s^i(t) \in S, S$ — множество, состоящее из конечного числа непрерывных функций, определенных для $t \in [0, x_1/P], T$ — момент окончания процесса в задаче оптимального управления. Таким образом, искомая контрстратегия совместно с реализующейся в режиме реального времени неопределенностью порождает значение показателя качества, сопоставимое со значением функционала в соответствующей задаче оптимального управления с известной наперед неопределенностью.

2. Вспомогательные построения

Управляемый процесс (1.1), (1.2), рассматриваемый как антагонистическая дифференциальная игра двух игроков, первый из которых распоряжается выбором управления $u(t)$, а второй — выбором параметра $s(t)$, не имеет седловой точки в “маленькой игре” [1, 2]. Ограничения s_0, s_1 на параметр $s(t)$ в рассматриваемой задаче таковы, что величина $s_0 > 0$ достаточно мала, а величина s_1 достаточно велика. Таким образом, параметр неопределенности $s(t)$ доминирует над параметром управления $u(t)$ и условия компенсации [3–5] параметром управления параметра помехи не выполнены. Эти свойства процесса (1.1), (1.2) затрудняют использование фундаментальных результатов теории дифференциальных игр [1, 3, 4]. Для нахождения искомой контрстратегии рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления, в которой $s(t)$ — известная функция времени:

$$\dot{y} = v(t), \quad y(0) = 0, \quad y(T(v(\cdot))) = x_1, \quad t \in [0, T], \quad P \leq v(t) \leq Q, \quad (2.1)$$

$$\dot{w} = e^{-\nu t} \left(-mv(t) - pP + s(t)P \left(1 - \frac{P^2}{3v^2(t)} \right) \right) - \nu_1 g_1 P^{\gamma_1} e^{\nu_1 t} - \nu_2 g_2 Q^{\gamma_2} e^{\nu_2 t}, \quad (2.2)$$

$$w(0) = -g_1 P^{\gamma_1} - g_2 Q^{\gamma_2}, \quad w(T) \longrightarrow \max_{v(t) \in [P, Q]}.$$

Здесь y, w — фазовые переменные, $v(t)$ — управление, T — нефиксированный момент окончания процесса, $y, v \in \mathbb{R}^1$; $g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, \nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0, 0 \leq \gamma_1 \leq 1, 0 \leq \gamma_2 \leq 1, x_1, P, Q, 0 < P \leq Q, \nu, m, p$ — положительные параметры, $s(t) \in [s_0, s_1]$ — известная непрерывная функция. В задаче (2.1), (2.2) существует оптимальное управление в классе измеримых по Лебегу функций [6]. Для исследования задачи оптимального управления (2.1), (2.2) мы применим

необходимые условия оптимальности процессов с параметрами в форме принципа максимума Понтрягина для задач с нефиксированным моментом времени. Согласно [7–9] для задачи с нефиксированным временем имеет место следующее утверждение: если $(v^*(t), y^*(t), T)$ — решение задачи (2.1), (2.2), то существуют вектор $a = (a_0, a_1)$ и функция $\psi(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющие условиям

$$H(t, v, \psi, a) = -a_0 e^{-\nu t} \left(m v(t) + p P - s(t) P \left(1 - \frac{P^2}{3 v(t)^2} \right) \right) + \psi v,$$

$$l(\xi, z, t, T, a) = l(x_0, x(T), t_0, T, a) = -a_0 (A e^{\nu_1 T} + B e^{\nu_2 T}) + a_1 (x(T) - x_1),$$

$$v^*(t, a_0) = \arg \max_{v \in [P, Q]} H(t, v, \psi, a_0), \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \psi(T) = -\frac{\partial l}{\partial z} = -a_1, \quad a_0 \geq 0,$$

$$(a_0, a_1) \neq 0, \quad H(T, v^*, \psi, a) = \frac{\partial l}{\partial T} = -a_0 (A \nu_1 e^{\nu_1 T} + B \nu_2 e^{\nu_2 T}), \quad A = g_1 P^{\gamma_1}, \quad B = g_2 Q^{\gamma_2}.$$

Максимизатор функции Понтрягина зависит от a_0 , a_1 , t . Если $a_0 = 0$ (анормальный случай), то $H = -a_1 v$ и экстремальное управление таково:

$$v^*(t, q) = \begin{cases} P, & \text{если } a_1 > 0, \\ Q, & \text{если } a_1 < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Пусть $a_0 > 0$ (нормальный случай). Тогда

$$H(t, q, v) = a_0 e^{-\nu t} K(t, q, v),$$

где

$$K(t, q, v) = K(b, s(t), v) = (s(t) - p)P - bv - \frac{s(t)P^3}{3v^2}, \quad b = b(q, t) = m + qe^{\nu t}, \quad q = \frac{a_1}{a_0}.$$

Лемма 1. Максимизатор функции $K(b, s, v)$ имеет вид

$$v^*(t, q) = v^* \left(\frac{b(q, t)}{s(t)} \right) = \begin{cases} Q, & \text{если } \frac{b}{s} < \frac{2}{3} \left(\frac{P}{Q} \right)^3, \\ P \sqrt[3]{\frac{2s}{3b}}, & \text{если } \frac{2}{3} \left(\frac{P}{Q} \right)^3 \leq \frac{b}{s} \leq \frac{2}{3}, \\ P, & \text{если } \frac{b}{s} > \frac{2}{3}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Доказательство. Функция $K(b, s, v)$ обладает свойствами

$$K'_v = -b + \frac{2s(t)P^3}{3v^3}, \quad K''_v = -\frac{2s(t)P^3}{v^4} < 0. \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что функция $K(b, s, v)$ вогнута при $v \in [P, Q]$. Таким образом, экстремальное управление вычисляется по формуле (2.4). Лемма 1 доказана. \square

Краевая задача принципа максимума имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y} = v^* \left(\frac{b(q, t)}{s(t)} \right), & y|_{t=0} = 0, & y|_{t=T} = y_1, \\ \dot{\psi} = 0, & \psi|_{t=0} = -a_1, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$a_0 e^{-\nu T} K \left(T, q, v^* \left(\frac{b(q, T)}{s(T)} \right) \right) = -a_0 (A \nu_1 e^{\nu_1 T} + B \nu_2 e^{\nu_2 T}), \quad 0 \leq t \leq T,$$

и заключается в нахождении параметров a_0, a_1, T , при которых она имеет решение. Управление $v^*\left(\frac{b(q, t)}{s(t)}\right)$, стоящее в правой части краевой задачи (2.6), согласно (2.4) зависит от расположения величины $\frac{b(q, t)}{s(t)}$ по отношению к интервалам $\left(-\infty, \frac{2}{3}\left(\frac{P}{Q}\right)^3\right), \left[\frac{2}{3}\left(\frac{P}{Q}\right)^3, \frac{2}{3}\right], \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, определяющим вид экстремального управления. В зависимости от параметра q при известном $s(t)$ из (2.4) имеем

$$v^*(q, t) = v^*\left(\frac{b(q, t)}{s(t)}\right) = \begin{cases} Q, & \text{если } q < \frac{2/3 \cdot (P/Q)^3 s(t) - m}{e^{\nu t}}, \\ P \sqrt[3]{\frac{2s}{3b}}, & \text{если } \frac{2/3 \cdot (P/Q)^3 s(t) - m}{e^{\nu t}} \leq q \leq \frac{2/3 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}}, \\ P, & \text{если } q > \frac{2/3 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}}. \end{cases} \quad (2.7)$$

При управлении (2.4) краевая задача (2.6) сводится к решению системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} y(T, q) = y_1, \\ K\left(T, q, v^*\left(\frac{b(q, T)}{s(T)}\right)\right) = -(A\nu_1 e^{(\nu_1+\nu)T} + B\nu_2 e^{(\nu_2+\nu)T}) \end{cases} \quad (2.8)$$

относительно двух неизвестных параметров T и q . Второе уравнение системы (2.8) может быть одного из следующих трех видов:

$$(s(T) - p)P - (m + qe^{\nu T})Q - \frac{s(T)P^3}{3Q^2} = -A\nu_1 e^{(\nu_1+\nu)T} - B\nu_2 e^{(\nu_2+\nu)T} \quad (2.9)$$

при $v^*(T, q) = Q_1$;

$$(s(T) - p)P - b(T)P \sqrt[3]{\frac{2s(T)}{3b(T)}} - \frac{s(T)P}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{2s(T)}{3b(T)}\right)^2}} = -A\nu_1 e^{(\nu_1+\nu)T} - B\nu_2 e^{(\nu_2+\nu)T} \quad (2.10)$$

при $v^*(T, q) = P \sqrt[3]{\frac{2s(T)}{3b(T)}}$;

$$\left(\frac{2}{3}s(T) - p\right)P - (m + qe^{\nu T})P = -A\nu_1 e^{(\nu_1+\nu)T} - B\nu_2 e^{(\nu_2+\nu)T} \quad (2.11)$$

при $v^*(T, q) = P$.

В уравнения (2.9)–(2.11) параметр q входит линейно. Таким образом, из второго уравнения системы (2.8) можно получить соотношения вида $q = F_i(T)$, $i = 1, 2, 3$. Приведем их. Из (2.9) имеем

$$q = F_1(T) \quad \text{при } v^*(T, q) = Q,$$

$$F_1(T) = \frac{e^{-\nu T}}{Q} \left((s(T) - p)P + A\nu_1 e^{(\nu_1+\nu)T} + B\nu_2 e^{(\nu_2+\nu)T} - \frac{s(T)P^3}{3Q^2} - mQ \right). \quad (2.12)$$

Из (2.11) получаем

$$q = F_3(T) \quad \text{при } v^*(T, q) = P,$$

$$F_3(T) = \frac{e^{-\nu T}}{P} \left(\left(\frac{2}{3}s(T) - p\right)P + A\nu_1 e^{(\nu_1+\nu)T} + B\nu_2 e^{(\nu_2+\nu)T} - mP \right). \quad (2.13)$$

Из (2.10) имеем

$$q = F_2(T) \quad \text{при} \quad v^*(T, q) = P \sqrt[3]{\frac{2s(T)}{3b(T)}},$$

$$F_2(T) = e^{-\nu T} \left[\left(\frac{\sqrt[3]{12}((s(T) - p)P + A\nu_1 e^{(\nu_1 + \nu)T} + B\nu_2 e^{(\nu_2 + \nu)T})}{(\sqrt[3]{8} + 1)P \sqrt[3]{s(T)}} \right)^{\frac{3}{2}} - m \right]. \quad (2.14)$$

Первое уравнение системы (2.8) при произвольной непрерывной функции $s(t)$ содержит сумму интегралов трех функций, значение которых при соответствующих параметрах модели (2.1), (2.2) принимает управление (2.4) и пределы интегрирования для которых зависят от $q, s(t)$. Определим множество

$$L = \left\{ (t, q) : \frac{2/3 \cdot (P/Q)^3 s(t) - m}{e^{\nu t}} \leq q \leq \frac{2/3 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}} \right\}.$$

Из (2.4) следует, что если в момент t параметр q лежит выше верхней границы множества L , то

$$v^*\left(\frac{b(q, t)}{s(t)}\right) = P;$$

если в момент t параметр q лежит между верхней и нижней границами множества L , то

$$v^*\left(\frac{b(q, t)}{s(t)}\right) = v_3\left(\frac{b(q, t)}{s(t)}\right);$$

если в момент t параметр q лежит ниже нижней границы множества L , то

$$v^*\left(\frac{b(q, t)}{s(t)}\right) = Q.$$

При фиксированном $q = q_0$ пределы интегрирования — моменты пересечения прямой $q = q_0$ и границ области L . Для верхней границы точки пересечения обозначим $\tau_i(q_0)$, для нижней границы точки пересечения обозначим $\eta_i(q_0)$. Общий вид первого уравнения системы (2.8)

$$\int_{S_1} P dt + \int_{S_2} v_3\left(\frac{b(t, q)}{s(t)}\right) dt + \int_{S_3} Q dt = y_1, \quad (2.15)$$

где

$$S_1 = \left\{ t: q_0 > \frac{2/3 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}} \right\}, \quad S_2 = \left\{ t: \frac{2/3 \cdot (P/Q)^3 s(t) - m}{e^{\nu t}} \leq q_0 \leq \frac{2/3 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ t: q_0 < \frac{2/3 \cdot (P/Q)^3 s(t) - m}{e^{\nu t}} \right\}, \quad S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [0, T].$$

Вид первого уравнения системы (2.8) определяется свойствами функции $s(t)$, которые, в частности, влияют на количество переключений экстремальных режимов.

Обозначим $l_1(t) = \frac{2/3 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}}$, $l_2(t) = \frac{2/3 \cdot (P/Q)^3 s(t) - m}{e^{\nu t}}$. Напомним: $x_1/Q \leq T \leq x_1/P$. Алгоритм вычисления q, T , являющихся решением краевой задачи (2.8), состоит в следующем.

Шаг 1. Рассмотрим соотношение $q = F_3(T)$ для $T \in G_3 = \{T : F_3(T) \geq l_1(T)\}$. На множестве G_3 выбираем достаточно мелкую сетку. Для каждого T_i из этой сетки находим $q_i = F_3(T_i)$. По значению q_i находим τ_{ij} , $j = 1, \dots : l_1(\tau_{ij}) = q_i$, η_{ik} , $k = 1, \dots : l_2(\tau_{ik}) = q_i$, которые определяют моменты переключения экстремальных управлений и множества S_n , $n = 1, 2, 3$, фигурирующие в (2.15). Далее вычисляем норму разности левой и правой частей соотношения (2.15). Если норма меньше ε , то q_i, T_i причисляем к решениям краевой задачи.

Шаг 2. Рассмотрим соотношение $q = F_2(T)$ для $T \in G_2 = \{T : l_2(T) \leq F_2(T) \leq l_1(T)\}$. На множестве G_2 выбираем достаточно мелкую сетку. Для каждого T_i из этой сетки находим $q_i = F_2(T_i)$. По значению q_i находим τ_{ij} , $j = 1, \dots, l_1(\tau_{ij}) = q_i$, η_{ik} , $k = 1, \dots, l_2(\tau_{ik}) = q_i$, которые определяют моменты переключения экстремальных управлений и множества S_n , $n = 1, 2, 3$, фигурирующие в (2.15). Далее вычисляем норму разности левой и правой частей соотношения (2.15). Если норма меньше ε , то q_i , T_i причисляем к решениям краевой задачи.

Шаг 3. Рассмотрим соотношение $q = F_1(T)$ для $T \in G_1 = \{T : F_1(T) \leq l_2(T)\}$. На множестве G_2 выбираем достаточно мелкую сетку. Для каждого T_i из этой сетки находим $q_i = F_1(T_i)$. По значению q_i находим τ_{ij} , $j = 1, \dots, l_1(\tau_{ij}) = q_i$, η_{ik} , $k = 1, \dots, l_2(\tau_{ik}) = q_i$, которые определяют моменты переключения экстремальных управлений и множества S_n , $n = 1, 2, 3$, фигурирующие в (2.15). Далее вычисляем норму разности левой и правой частей соотношения (2.15). Если норма меньше ε , то q_i , T_i причисляем к решениям краевой задачи.

Шаг 4. Найденным при выполнении шагов 1–3 значениям q , T соответствуют управления $v^*(q, t)$, определяемые соотношением (2.4). Эти управления и управления (2.3) сравниваются по функционалу (2.2) и выбирается управление, его максимизирующее.

Приведем результаты расчетов оптимального управления для следующих параметров: $x_1 = 2 \cdot 10^8$, $P = 2 \cdot 10^7$, $Q = 6 \cdot 10^7$, $m = 1$, $p = 5$, $\nu = 0.1$, $\nu_1 = 0.05$, $\nu_2 = 0.04$, $g_1 = 1$, $g_2 = 1$, $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 0.8$. В качестве элементов множества S рассмотрим одиннадцать непрерывных функций, аппроксимирующих ежемесячные данные за 1999–2010 гг. [10] о биржевых ценах на медь, кобальт, цинк, свинец, олово, никель, палладий, платину, серебро, золото, уран. Графики двух из этих функций, цен на олово и цинк, приведены на рис. 1 и рис. 3 соответственно.

Пусть функция $s(t)$ имеет вид, приведенный на рис. 1. Для рассматриваемых значений параметров процесса имеет место соотношение $F_2(t) < l_2(t) < F_1(t) < l_1(t) \leq F_3(t)$ и, таким образом, множество $G_1 = \emptyset$, $G_3 = \left[\frac{x_1}{Q}, \frac{x_1}{P}\right]$, $G_2 = \emptyset$. Численная реализация шага 2 приводит к единственному минимуму значения нормы разности левой и правой частей соотношения (2.15), достигаемому при $T = 9.998$, $q = 7591.637203$. Вычисление $\omega(T)$ (2.2) на управлении (2.7) с такими значениями T , q и управлении (2.3) и сравнение полученных значений показывают, что максимальное значение $\omega(T)$ равно $0.8763987248 \cdot 10^{12}$. График оптимального управления приведен на рис. 2.

Пусть функция $s(t)$ имеет вид, приведенный на рис. 3. Для рассматриваемых значений параметров процесса имеет место соотношение $F_2(t) < l_2(t) < F_1(t) < l_1(t) \leq F_3(t)$ и, таким образом, множество $G_1 = \emptyset$, $G_3 = \left[\frac{x_1}{Q}, \frac{x_1}{P}\right]$, $G_2 = \emptyset$. Численная реализация шага 2 приводит к единственному минимуму значения нормы разности левой и правой частей соотношения (2.15), достигаемому при $T = 9.2202$, $q = 603.7974078$. Вычисление $\omega(T)$ (2.2) на управлении (2.7) с такими значениями T , q и управлении (2.3) и сравнение полученных значений показывают, что максимальное значение $\omega(T)$ равно $0.1521627876 \cdot 10^{12}$. График оптимального управления приведен на рис. 4.

Решение задач оптимального управления для остальных девяти функций проводится аналогично, и мы его не приводим. Эти решения используются в следующем разделе для оценки качества игрового управления.

3. Задача управления в условиях неопределенности

Управление в задаче (1.1), (1.2) построим на основе решения вспомогательной задачи оптимального управления из разд. 2. Будем рассматривать в качестве отображения, определяющего контрстратегию, управление (2.4), полученное из принципа максимума и принадлежащее параметрическому семейству функций (2.4) с параметром q . Параметр q выберем далее такой,

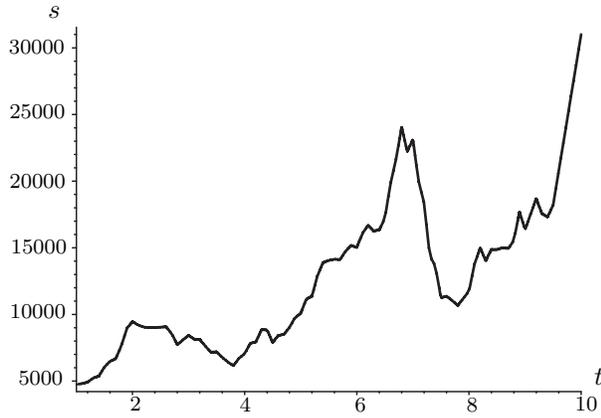


Рис. 1. Функция $s^1(t)$, аппроксимирующая цены на олово.

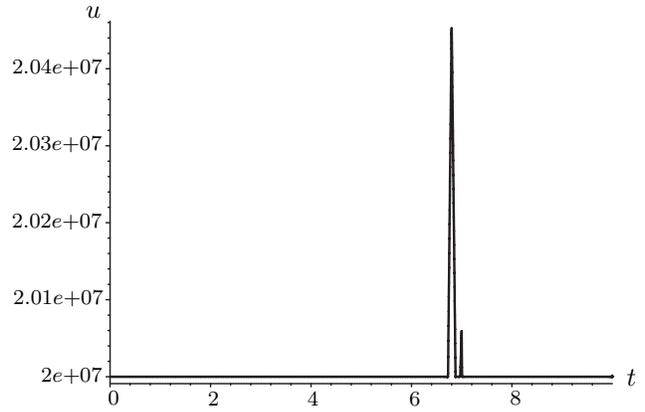


Рис. 2. Оптимальное управление $v^*(t)$, отвечающее функции $s^1(t)$.

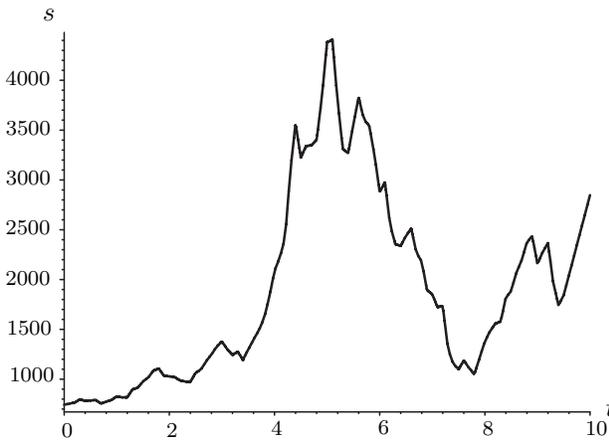


Рис. 3. Функция $s^2(t)$, аппроксимирующая цены на цинк.

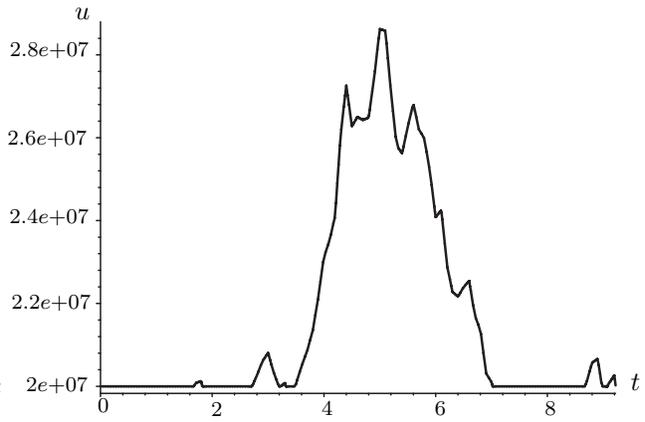


Рис. 4. Оптимальное управление $v^*(t)$, отвечающее функции $s^2(t)$.

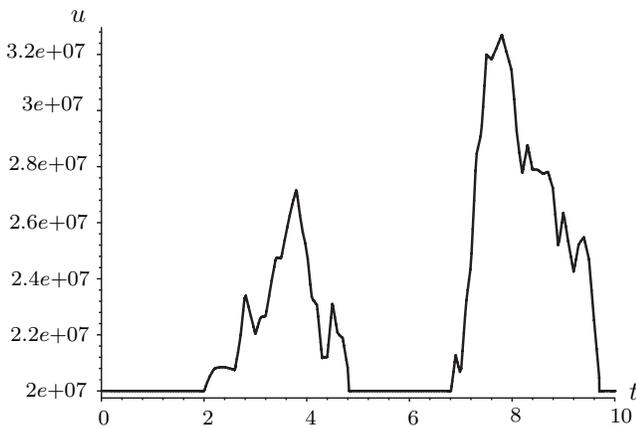


Рис. 5. График игрового управления $u(t, s_t^1(\cdot))$.

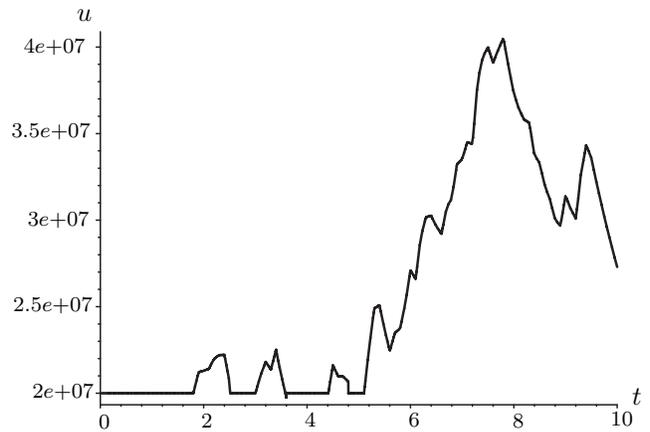


Рис. 6. График игрового управления $u(t, s_t^2(\cdot))$.

при котором для функций $s^i(t) \in S$ выполнено условие близости по функционалу решений игровой задачи и задачи оптимального управления. Расчеты оптимального управления для задачи (1.1), (1.2) при конкретных параметрах модели для функций $s(t) \in S$ выявляют следующие качественные свойства оптимального управления. Во-первых, значение $v^*(t)$ в момент t определяется соотношением $e^{-\nu t} s(t)$ и $e^{-\nu T} s(T)$, где $T = T(v^*(\cdot))$. В игровой постановке значение $s(\tau)$, $\tau > t$, неизвестно, и при конструировании контруправления была использована предыстория поведения функции $s(\tau)$: $\tau \in [0, t]$. Во-вторых, параметры q, T , полученные из решения краевой задачи (2.3), таковы, что максимальное значение функции $v^*\left(\frac{b(t)}{s(t)}\right)$ на отрезке $t \in [0, T]$ при данном q совпадает со значением kQ , $P/Q \leq k \leq 1$. Используя эти соображения, при конструировании контрстратегии выберем

$$q(t) = e^{-\nu t} \left[\frac{2P^3 s(t) s_1(t)}{3(\sqrt[3]{s_1(t)}(P + kQ) - kQ \sqrt[3]{s(t)})^3} - m \right],$$

где $s_1(t) = \max_{\tau \in [0, t]} s(\tau)$, $P/Q \leq k \leq 1$. Получаем следующее управление:

$$u(t, s_t(\cdot)) = \begin{cases} P + kQ - kQ \sqrt[3]{\frac{s(t)}{s_1(t)}}, & s(t) \geq \left(\frac{P}{kQ}\right)^3 s_1(t), \\ kQ, & s(t) < \left(\frac{P}{kQ}\right)^3 s_1(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

Управление (3.1) является допустимым. Для $t \geq 0$ обозначим

$$\xi(t, s_t(\cdot)) = \int_0^t e^{-\nu \tau} \left(-m u(\tau, s_\tau(\cdot)) - pP + s(\tau)P \left(1 - \frac{P^2}{3u^2(\tau, s_\tau(\cdot))}\right) \right) d\tau - g_1 e^{\nu_1 t} P^{\gamma_1} - g_2 e^{\nu_2 t} Q^{\gamma_2}. \quad (3.2)$$

Утверждение 1. Пусть для $s(t) \in [s_1, s_2]$, $s_1 > 0$, определена функция (3.2) и $\Theta(s_t(\cdot))$ – первый момент времени, когда

$$\int_0^{\Theta(s_t(\cdot))} u(t, s_t(\cdot)) dt \geq x_1.$$

Тогда функция (3.2) оценивает снизу максимальное по $u(t) \in [P, Q]$ значение $z(t)$, $t \in [0, \Theta(s_t(\cdot))]$ (см. (1.2)).

В силу $u \in [P, Q]$, $P > 0$, такой момент $\Theta(s_t(\cdot))$ обязательно существует. В управлении (3.1) выбор параметра $k \in [P/Q, 1]$ отводится первому игроку. При управлении конкретным процессом он выбирается в зависимости от ожидаемых колебаний значения неопределенности на отрезке управления (напомним, что $x_1/(kQ) \leq \Theta(s(\cdot)) \leq x_1/P$). Для функции $\xi(t, s_t(\cdot))$ имеет место также оценка снизу, отражающая зависимость $\xi(\Theta, s_\Theta(\cdot))$ от параметров задачи $\xi(\Theta, s_\Theta(\cdot)) \geq \xi_1(\Theta, s_\Theta(\cdot))$, где

$$\xi_1(\Theta, s_\Theta(\cdot)) = -(mQ + pP) \frac{1 - e^{-\nu \Theta}}{\nu} + \frac{2P}{3} \int_0^\Theta e^{-\nu \tau} s(\tau) d\tau - g_1 e^{\nu_1 \Theta} P^{\gamma_1} - g_2 e^{\nu_2 \Theta} Q^{\gamma_2}. \quad (3.3)$$

Проиллюстрируем сказанное для параметров модели, приведенных в разд. 2, и функций $s(t)$, приведенных на рис. 1, 3.

Значение $z(\Theta)$ (1.2) при $s(t)$, соответствующей рис. 1, и игровому управлению (3.1) (при $k = 0.9$) равно $0.809472344098739 \cdot 10^{12}$ (0.923 от оптимального значения), время окончания

процесса $\Theta(s(\cdot)) = 8.80349$. На рис. 5 изображен график игрового управления (3.1) при неопределенности, соответствующей рис. 1.

Значение $z(\Theta)$ (1.2) при $s(t)$, соответствующей рис. 3, и игровом управлении (3.1) (при $k = 0.9$) равно $0.139179130222819 \cdot 10^{12}$ (0.914 от оптимального значения), время окончания процесса $\Theta(s(\cdot)) = 8.17181$. На рис. 6 изображен график игрового управления (3.1) при неопределенности, соответствующей рис. 3.

Для функций $s^i(t) \in S$ численные расчеты соответствующих задач управления в условиях неопределенности и задач оптимального управления показывают, что выполнено соотношение $z(\Theta, s^i(\cdot)) \in [0.78w(T, s^i(\cdot)), w(T, s^i(\cdot))]$ (константа 0.78 получена численно для множества функций из S).

Авторы благодарят М.С. Никольского за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
3. **Понтрягин Л.С.** Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004. 552 с.
4. **Осипов Ю.С.** Избранные труды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 656 с.
5. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
6. **Cesari L.** Optimization—Theory and applications. Problems with ordinary differential equations // Appl. of Math. Vol. 17. New York: Springer-Verlag, 1983. 542 с.
7. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.] М.: Наука, 1961. 391 с.
8. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал-Пресс, 2002. 820 с.
9. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1973.
10. Построение графиков мировых экономических индексов и показателей.
URL: <http://www.ereport.ru/stat.php?selnum=2>.

Григоренко Николай Леонтьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
фак. ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова
e-mail: grigor@cs.msu.su

Поступила 10.01.2011

Камзолкин Дмитрий Владимирович
канд. физ.-мат. наук, ассистент
фак. ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова
e-mail: kamzolkin@cs.msu.su

Лукьянова Лиля Николаевна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
фак. ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова
e-mail: lln@cs.msu.su

Пивоварчук Денис Геннадиевич
канд. физ.-мат. наук, ассистент
фак. ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова
e-mail: dpivovartchuk@gmail.com

УДК 517.977.1

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЦИКЛА С ДИСКОНТИРОВАНИЕМ,
ОПТИМАЛЬНОГО ПО СРЕДНЕЙ ВРЕМЕННОЙ ВЫГОДЕ¹**

А. А. Давыдов, Т. С. Шуткина

В работе для циклических процессов, моделируемых периодическими движениями непрерывной управляемой системы на окружности, доказана теорема единственности цикла, доставляющего максимальную среднюю временную выгоду за один период при наличии дисконтирования при условии, что минимальная и максимальная скорости движения системы совпадают лишь в отдельных точках, а плотность выгоды является дифференцируемой функцией с конечным числом критических точек. Эта теорема — аналог теоремы В.И. Арнольда о единственности такого цикла в случае, когда дисконтирование собираемой вдоль цикла выгоды отсутствует.

Ключевые слова: усредненная оптимизация, периодический процесс, необходимое условие оптимальности, дисконтирование.

A. A. Davydov, T. S. Shutkina. Uniqueness of a cycle with discounting that is optimal with respect to the average time profit.

For cyclic processes modeled by periodic motions of a continuous control system on a circle, we prove the uniqueness of a cycle maximizing the average one-period time profit in the case of discounting provided that the minimum and maximum velocities of the system coincide at some points only and the profit density is a differentiable function with a finite number of critical points. The uniqueness theorem is an analog of Arnol'd's theorem on the uniqueness of such a cycle in the case when the profit gathered along the cycle is not discounted.

Keywords: average optimization, periodic process, necessary optimality condition, discounting.

1. Введение

Циклический процесс моделируется управляемой системой на окружности. Эта система задается полем скоростей v , гладко зависящим от точки x окружности и управляющего параметра u . Предполагается, что параметр u пробегает гладкое компактное многообразие (или объединение таковых) и принимает не менее двух различных значений, а все допустимые скорости положительные, т. е. $v > 0$.

Допустимым движением системы называется абсолютно непрерывное отображение $x: t \mapsto x(t)$ отрезка временной оси в фазовое пространство, в точках дифференцируемости которого его производная лежит в выпуклой оболочке множества допустимых скоростей этой точки. В силу положительности скоростей системы любое ее допустимое движение, определенное при всех временах, совершает вращение на окружности в одном направлении.

Циклическим движением или просто *циклом* с периодом T , $T > 0$, называют периодическое допустимое движение $x, x(t+T) \equiv x(t)$. При наличии непрерывной *плотности выгоды* f на окружности возникает задача выбора циклического процесса с максимальной средней временной выгодой за один оборот

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt \longrightarrow \max.$$

В.И. Арнольд показал, что в этом случае оптимальная стратегия существует и устроена просто — соответствующее ей движение использует максимальные и минимальные допустимые

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-91004-АНФ-а) и АВЦП РНПВШ (проект 2.1.1/5568).

скорости на участках, где плотность выгоды меньше или больше максимальной средней временной выгоды за цикл [1–4].

В частности, когда плотность выгоды дифференцируема и имеет лишь конечное число критических точек, то движение вдоль оптимального цикла и сам цикл определены однозначно. Действительно, в этом случае любой уровень плотности состоит из конечного числа точек, вне которых выбор скорости движения по оптимальному циклу однозначен, а выбор скорости движения в самих точках не влияет на движение по циклу.

В этой работе получен аналогичный результат для циклов при наличии положительного дисконта σ , $\sigma > 0$: доказана единственность оптимального цикла в задаче

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-\sigma t} f(x(t)) dt \longrightarrow \max \quad (1.1)$$

при разумных ограничениях на управляемую систему и плотность выгоды.

2. Существование оптимальной стратегии

Здесь для полноты изложения мы приводим полученные в [5, 6] теорему существования оптимального цикла с дисконтированием по критерию средней временной выгоды и соответствующее необходимое условие экстремума.

2.1. Переформулировка проблемы

Следуя В.И. Арнольду [1], для допустимого движения x определим плотность ρ , $\rho(x(t)) = 1/\dot{x}(t)$. В силу абсолютной непрерывности допустимого движения эта плотность определена почти всюду, а в остальных точках за ее значение можно выбрать любое возможное. Таким образом, почти всюду мы имеем $dx(t) = \dot{x}(t)dt$ или $dt = \rho(x(t))dx(t)$. С этой плотностью задача (1.1) может быть переписана в виде

$$A_\rho(f) := \frac{\int_0^{2\pi} f(x) d(e^{-\sigma\phi(x)})}{-\sigma \int_0^{2\pi} d(\phi(x))} \longrightarrow \max, \quad (2.1)$$

где $\phi(x) = \int_0^x \rho(z)dz$, а интегралы в (2.1) являются интегралами Римана — Стильеса. Теперь для решения задачи нужно найти измеримую плотность ρ (или соответствующую функцию ϕ), доставляющую максимум функционала в (2.1) и удовлетворяющую ограничениям

$$r_1 \leq \rho \leq r_2. \quad (2.2)$$

Здесь r_1 и r_2 — положительные функции, обратные значениям максимума и минимума допустимой скорости соответственно, а 0 и 2π — это начальная и конечная точки цикла. Измеримую плотность, удовлетворяющую ограничениям (2.2), будем называть *допустимой*.

2.2. Теорема существования и условие экстремума

Теорема 1. *Для непрерывных плотности выгоды f и положительных функций ограничения $r_1, r_2, r_1 \leq r_2$, существует допустимая плотность, доставляющая точную верхнюю грань значений функционала в (2.1) по всем допустимым плотностям.*

Эта теорема доказана в [5,6], где также получено следующее необходимое условие экстремума.

Теорема 2. *Если для непрерывных плотности выгоды f и положительных функций ограничения $r_1, r_2, r_1 \leq r_2$, допустимая плотность ρ доставляет максимум A функционала в (2.1), то в любой точке x , где эта плотность является производной от своего интеграла и $r_1(x) \neq r_2(x)$, значение $S(x)$ функции*

$$S(x) = e^{-\sigma \int_0^x \rho(z) dz} f(x) - \sigma \int_x^{2\pi} e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f(y) \rho(y) dy - A \quad (2.3)$$

является неположительным, неотрицательным либо равным нулю, если $\rho(x)$ принимает значение $r_1(x)$ или $r_2(x)$ либо принадлежит интервалу $(r_1(x), r_2(x))$ соответственно.

Функция S играет роль функции переключения. В [5,6] ее значение получено прямыми вычислениями изменения средней временной выгоды при вариации допустимой плотности ρ на величину h на отрезке $[x, x+\nu]$ при $x \in (0, 2\pi)$ (при граничных x рассуждения аналогичны) и достаточно малом $\nu > 0$. Это изменение имеет вид

$$\frac{h\nu}{T} \left[e^{-\sigma \int_0^x \rho(z) dz} f(x) - \sigma \int_x^{2\pi} e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f(y) \rho(y) dy - A \right] + \dots, \quad (2.4)$$

где $A = A_\rho(f)$ и T — период исходного цикла, а многоточие означает члены более высокого порядка по h и ν .

Таким образом, для малых h и $\nu > 0$ ($|h| = \nu$) знак полученной разности определяется знаками h и выражения, стоящего в квадратных скобках, так как значения периода T и ν положительные. Для оптимальной плотности ρ это значение должно быть неположительное. Следовательно, выражение, стоящее в квадратных скобках, неположительно, неотрицательно или равно нулю, если значение $\rho(x)$ равно r_1, r_2 либо принадлежит интервалу (r_1, r_2) соответственно, так как в этих случаях h может принимать любые достаточно малые неотрицательные, неположительные и произвольные значения соответственно.

Нетрудно видеть, что функцию переключения можно переписать в виде

$$e^{-\sigma \int_0^x \rho(z) dz} f(x) + \sigma \int_0^x e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f(y) \rho(y) dy - \sigma P - A, \quad (2.5)$$

где

$$P = \int_0^{2\pi} e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f(y) \rho(y) dy$$

есть выгода вдоль цикла. Отметим, что при $\sigma = 0$ функция переключения та же, что и в случае без дисконта [1–4].

В новой форме функции переключения величина $-\sigma P - A$ нам неизвестна, но на оптимальном цикле она равна некоторой константе. После выбора значения c этой константы функция переключения примет вид

$$e^{-\sigma \int_0^x \rho(z) dz} f(x) + \sigma \int_0^x e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f(y) \rho(y) dy + c. \quad (2.6)$$

Эта функция однозначно определяет допустимое движение с вычислением точек переключения по ходу движения как нулей этой функции, если у этой функции конечное число критических точек. Но в этой форме функция переключения дифференцируема, если плотность выгоды дифференцируема, и имеет производную

$$S'(x) = e^{-\sigma \phi(x)} f'(x), \quad x \in [0, 2\pi).$$

В этом случае число критических точек у функции переключения то же, что и у плотности выгоды, а значит, число точек переключения может быть больше числа критических точек плотности выгоды не более, чем на единицу.

Цикл, доставляемый таким допустимым движением с точками переключения в нулях функции (2.6), будем называть *циклом уровня c* , а само c — *уровнем* этого цикла.

Отметим также, что (любой) оптимальный цикл является циклом некоторого уровня.

Для дифференцируемой плотности выгоды функцию переключения можно записать в виде

$$f(0) + \int_0^x e^{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz} f'(y) dy - \sigma P - A, \quad (2.7)$$

проинтегрировав по частям (2.5).

3. Единственность оптимального цикла

Здесь мы сначала устанавливаем определенную сбалансированность цикла с максимальной средней временной выгодой, а затем формулируем и доказываем теорему о его единственности.

3.1. Сбалансированность оптимального цикла

Теорема 3. *Для положительной (отрицательной) непрерывной плотности выгоды и непрерывных положительных функций r_1, r_2 , $r_1 \leq r_2$, совпадающих не более, чем в конечном числе точек, движение с минимальной (соответственно максимальной) скоростью не доставляет максимума средней временной выгоды.*

Доказательство. Допустим противное, что при $f > 0$ либо $f < 0$ движение с минимальной либо максимальной скоростью соответственно доставляет максимум средней временной выгоды. По теореме о среднем значении интеграла имеем

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-\sigma\phi(x)} f(x) r_j(x) dx}{\int_0^{2\pi} r_j(x) dx} = e^{-\sigma\phi(x_j)} f(x_j)$$

для некоторой точки $x_j \in (0, 2\pi)$, ибо плотность r_j непрерывна и положительна, где $j = 1, 2$, соответственно. Подставляя такое значение A в формулу (2.3), найдем значение функции переключения в этой точке

$$S(x_j) = -\sigma \int_{x_j}^{2\pi} e^{-\sigma\phi(y)} f(y) r_j(y) dy.$$

Это значение отрицательно, если плотность f положительна, и, наоборот, положительно, если эта плотность отрицательна.

Следовательно, в силу необходимого условия оптимальности из теоремы 2 в этих двух случаях оптимальное движение должно использовать вблизи точки x_j плотность r_j , $j = 1, 2$, т. е. использовать максимальную скорость при положительной плотности выгоды и минимальную при отрицательной. Учитывая, что по условию теоремы эти плотности совпадают лишь в отдельных точках, получаем противоречие. Следовательно, наше предположение ошибочно, и справедливо утверждение теоремы.

Утверждение доказанной теоремы доставляет определенную сбалансированность цикла с максимальной средней временной выгодой: когда непрерывная плотность выгоды всюду положительна (отрицательна), оптимальный цикл тем не менее имеет участки, где используется максимальная (минимальная) скорость движения.

3.2. Теорема единственности

Теорема 4. *Для дифференцируемой плотности выгоды f с конечным числом критических точек и положительных функций ограничения $r_1, r_2, r_1 \leq r_2$, совпадающих лишь в отдельных точках, цикл, доставляющий максимальную среднюю временную выгоду, определен однозначно, если эта плотность неотрицательна.*

Эта теорема доказана в следующих двух подразделах. Возможно, что единственность оптимального цикла есть и без условия неотрицательности средней временной выгоды, но наше доказательство это условие использует.

3.3. Монотонность периода

При конечности числа критических точек плотности выгоды любой уровень функции переключения состоит из конечного числа точек, в частности, таковым является и ее нулевой уровень, доставляющий точки переключения между максимальной и минимальной допустимыми скоростями движения.

Как мы отметили выше, для дифференцируемой плотности выгоды с конечным числом критических точек цикл с максимальной средней временной выгодой обязательно является некоторым циклом, поэтому для доказательства теоремы 4 достаточно убедиться в единственности цикла уровня, доставляющего максимальную среднюю временную выгоду.

Рассмотрим теперь минимальное и максимальное значения m, M функции переключения в нуле такие, что при $c < m$ и $c > M$ движение по циклу уровня c происходит с допустимой минимальной и максимальной плотностями, соответственно. Понятно, что такие значения существуют и что при $c \leq m$ (либо $c \geq M$) период цикла уровня и выгода вдоль него постоянны как функции уровня c , а значит, постоянна и усредненная выгода. Таким образом, цикл с наибольшей средней временной выгодой является циклом некоторого уровня $c \in [m, M]$.

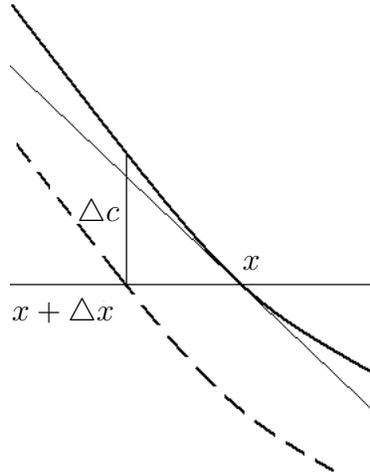
Предложение 1. *Для дифференцируемой плотности выгоды с конечным числом критических и непрерывных функций ограничения r_1 и $r_2, r_1 \leq r_2$, совпадающих лишь в отдельных точках, период цикла уровня c — непрерывная возрастающая функция на отрезке $[m, M]$, имеющая вне значений уровня, для которых функция переключения имеет критические точки или концевые точки цикла на нулевом уровне, производную*

$$T'(c) = \sum_{\{x_i\}} \frac{(r_2(x_i) - r_1(x_i))}{e^{-\sigma\varphi(x_i)} |f'(x_i)|}, \quad (3.1)$$

где суммирование идет по точкам переключения.

Доказательство. Непрерывность периода в условиях теоремы очевидна. Докажем монотонность и дифференцируемость.

Сначала предположим, что имеется лишь одна точка переключения x_1 , отличная от начальной и концевой точек цикла, в которой производная плотности выгоды, а, значит, и функции переключения, ненулевая. При изменении уровня цикла c на достаточно малую величину Δc новых точек переключения на участке движения до этой точки не появится, а сама эта



Изменения уровня цикла и точки переключения.

точка переключения изменится на величину Δx , которая зависит от Δc и производной $S'(x_1)$ и вычисляется по формуле

$$\Delta x = \frac{-\Delta c}{S'(x)} + \dots = \frac{-\Delta c}{e^{-\sigma\varphi(x_1)} f'(x_1)} + \dots, \quad (3.2)$$

что нетрудно видеть (см. рис.). Здесь и ниже многоточие означает члены более высокой степени по приращению (в данном случае по Δc).

Но при малых изменениях точки x_1 функция S мало изменяется и на участке после точки переключения в силу формулы (2.6). Следовательно, и на этом участке новых точек переключения также не появится. Таким образом, при изменении уровня цикла c на Δc скорость движения вдоль цикла изменяется лишь на малом интервале от x_1 до $x_1 + \Delta x$.

При $r_1(x_1) \neq r_2(x_1)$ соответствующее изменение периода ΔT вычисляется по формуле

$$\frac{r_2(x_1) - r_1(x_1)}{S'(x_1)} \Delta c + \dots \quad \text{либо} \quad \frac{r_1(x_1) - r_2(x_1)}{S'(x_1)} \Delta c + \dots,$$

если производная $S'(x_1)$ положительна либо отрицательна, соответственно. Таким образом, это изменение имеет тот же знак, что и Δc . Отсюда получаем

$$\Delta T = \Delta c \frac{r_2(x_1) - r_1(x_1)}{e^{-\sigma\varphi(x_1)} |f'(x_1)|} + \dots$$

Разделив последнее равенство на Δc и перейдя к пределу при $\Delta c \rightarrow 0$, получим, что функция периода дифференцируема в уровне c , и ее производная в этой точке вычисляется по формуле

$$\frac{dT}{dc}(c) = \frac{r_2(x_1) - r_1(x_1)}{e^{-\sigma\varphi(x_1)} |f'(x_1)|},$$

где в правой части точка x_1 есть функция от уровня c . Нетрудно видеть, что эта производная положительна, если $r_2(x_1) \neq r_1(x_1)$.

Если же при выбранном c функция переключения имеет несколько точек переключения — невырожденных нулей этой функции, не лежащих на концах цикла, то рассуждения практически повторяют предыдущие. Нужно только заметить, что на изменение конкретной точки переключения влияют изменение самого уровня, т. е. Δc (и оно дает основной вклад) и изменения предыдущих точек переключения, которые дают вклад большего порядка малости по Δc . Отсюда, применяя индукцию, мы и получаем формулу (3.1).

Наконец, критические уровни функции переключения монотонно растут с ростом уровня c , что нетрудно видеть. Следовательно, прохождению этих уровней через ноль соответствует конечное число уровней c в силу конечности числа критических точек плотности выгоды, а в силу формулы (2.7) и функции переключения. Прохождение нулевого уровня через концы цикла также происходит при не более чем двух уровнях c .

Таким образом, в условиях теоремы период цикла является непрерывной функцией на отрезке $[m, M]$, дифференцируемой на этом отрезке всюду за исключением конечного числа точек и имеющей вне конечного числа точек положительную производную. Следовательно, период цикла уровня c — непрерывная возрастающая функция от $c \in [m, M]$.

Предложение 1 доказано.

3.4. Дифференцируемость усредненной выгоды

Обозначим через τ_m и τ_M минимальный и максимальный периоды циклов уровня. В условиях предложения 1 на отрезке $[\tau_m, \tau_M]$ определена и непрерывна обратная функция $c : T \mapsto c(T)$ к функции периода цикла уровня $T : c \mapsto T(c)$. В этом случае среднюю временную выгоду $A = A(c)$, $c \in [m, M]$, вдоль цикла уровня мы можем рассматривать как функцию периода этого цикла, т. е. $A = A(c(T))$, $T \in [\tau_m, \tau_M]$.

Предложение 2. Если числа критических точек дифференцируемой плотности выгоды и точек совпадений значений непрерывных функций ограничения r_1 и r_2 , $r_1 \leq r_2$, конечны, то средняя временная выгода как функция периода цикла уровня является дифференцируемой на отрезке $[\tau_m, \tau_M]$ с производной

$$A'_T(c(T)) = -\frac{c(T) + \sigma P(c(T)) + A(c(T))}{T}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Приращение выгоды ΔP при малом изменении Δc уровня цикла, для которого функция переключения не обращается в ноль в своих критических точках и на концах цикла, вычисляется по аналогии с приращением периода цикла и имеет вид

$$\Delta c \sum_{x_i} \frac{(r_2(x_i) - r_1(x_i)) \left[e^{-\sigma\phi(x_i)} f(x_i) + \sigma \int_0^{x_i} e^{-\sigma\phi(y)} f(y) \rho(y) dy - \sigma P(c) \right]}{e^{-\sigma\phi(x_i)} |f'(x_i)|} + \dots$$

Отсюда, учитывая вид (2.6) функции переключения, а также ее обращение в ноль в точках x_i , получаем

$$\Delta P = -\Delta c [c + \sigma P(c)] \sum_{x_i} \frac{(r_2(x_i) - r_1(x_i))}{e^{-\sigma\phi(x_i)} |f'(x_i)|} + \dots$$

Теперь, используя формулу (3.1), находим производные выгоды и средней временной выгоды по периоду цикла уровня c

$$\begin{aligned} P_T(c) &= -c - \sigma P(c), \\ A'_T(c) &= -\frac{c + \sigma P(c) + A(c)}{T}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Следовательно, средняя выгода вдоль цикла уровня есть дифференцируемая функция его периода на отрезке $[\tau_m, \tau_M]$ с производной, вычисляемой по формуле (3.3). Предложение 2 доказано.

Докажем теперь теорему 4. В силу дифференцируемости средней временной выгоды по периоду ее максимум достигается или на концах отрезка $[\tau_m, \tau_M]$, или в нуле $\tau \in (\tau_m, \tau_M)$ производной этой функции. В последнем случае имеем

$$c(\tau) + \sigma P(c(\tau)) + A(c(\tau)) = 0 \quad \text{или} \quad -c(\tau) - \sigma P(c(\tau)) = A(c(\tau))$$

и, в частности, значение $-c(\tau) - \sigma P(c(\tau))$ равно максимальной средней временной выгоде. Вычисляя теперь вторую производную выгоды A по периоду цикла уровня, находим

$$A_T''(c(T)) = -\frac{c_T(T) - \sigma(c(T) + \sigma P(c(T)) + A_T(c(T)))}{T} + \frac{c + \sigma P(c) + A(c)}{T^2}.$$

Эта производная определена всюду, где определена производная $c_T(T)$, т.е. почти всюду на этом отрезке вблизи точки τ в силу конечности числа критических точек плотности выгоды и числа точек совпадения функций ограничения r_1 и r_2 . Имеем

$$A_T''(c(\tau)) = -\frac{c_T(\tau) + \sigma A(c(\tau))}{T},$$

если в точке τ эта производная определена, а первая обращается в ноль, что нетрудно видеть. Первое слагаемое в числителе почти всюду положительно, а второе положительно в силу неотрицательности плотности выгоды и конечности числа ее критических точек.

Следовательно, вторая производная A_T'' почти всюду отрицательна вблизи точки τ , где первая производная обращается в ноль. Отсюда и из непрерывности первой производной получаем, что вблизи любой критической точки средней временной выгоды ее первая производная убывает. Следовательно, у этой выгоды не больше одного максимального значения на отрезке $[\tau_m, \tau_M]$.

Таким образом, в условиях теоремы 4 цикл уровня с максимальной средней временной выгодой определен однозначно.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арнольд В. И.** Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функциональный анализ и его приложения. 2002. Vol. 36, вып. 2. С. 1–11.
2. **Давыдов А. А.** Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов // Тр. МИАН. 2005. Vol. 250. С. 79–94.
3. **Давыдов А. А., Мена Матос Е.** Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда // Мат. сб. 2007. Vol. 198, № 1. С. 21–42.
4. **Davydov A. A., Mena-Matos H.** Singularity theory approach to time averaged optimization // Singularities in Geometry and Topology: Proc. of the Trieste singularity summer school and workshop. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2007. P. 598–628.
5. **Давыдов А. А., Шуткина Т. С.** Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по его средней временной выгоде // Успехи мат. наук. 2009. Vol. 64, № 1 (385). С. 143–144.
6. **Davydov A., Shutkina T.** Time averaged optimization of cyclic processes with discount // Nonlinear Analysis and Optimization Problems: Proc. from the Internat. conf. / Montenegro Academy of Sciences and Arts. 2009. P. 93–100.

Давыдов Алексей Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Владимирский государственный университет
e-mail: davydov@vlsu.ru

Поступила 10.10.2010

Шуткина Татьяна Сергеевна
аспирант
Владимирский государственный университет
e-mail: shutkina@vlsu.ru

УДК 517.926

О ПОЛНОМ УСПОКОЕНИИ С ПОМОЩЬЮ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОДНОМ КОНЦЕ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ¹

В. А. Ильин

Рассматривается процесс успокоения колебаний закрепленного на одном конце и состоящего из двух разнородных участков стержня, осуществляемый с помощью граничного управления на другом его конце.

Ключевые слова: успокоение колебаний, теория граничного управления.

V. A. Il'in. On the complete damping of oscillations of an inhomogeneous rod by means of a boundary control at one end.

The process of damping oscillations of a rod consisting of two dissimilar segments and fixed at one end is considered. The damping is carried out by means of a boundary control at the other end of the rod.

Keywords: damping of oscillations, boundary control theory.

В этой работе мы предъявляем в явном аналитическом виде граничное управление смещением на одном конце состоящего из двух разнородных участков стержня, которое при закрепленном втором его конце переводит за заданный промежуток времени процесс колебаний этого стержня из произвольно заданного начального состояния в финальное состояние полного покоя.

Рассмотрение ведется в терминах обобщенного решения возникающей при этом смешанной задачи для разрывного волнового уравнения из некоторого специально введенного нами класса, допускающего существование конечной энергии.

Получению основных результатов предшествует отыскание решения указанной смешанной задачи для произвольного конечного промежутка времени T .

Найденное решение берется для промежутка времени T , позволяющего при произвольно заданных начальном смещении и начальной скорости выразить через них искомое граничное управление, переводящее процесс колебаний в состояние полного покоя.

Переходим к строгому изложению полученных результатов.

Для произвольных положительных l_1 и l_2 рассмотрим расположенный вдоль отрезка $-l_1 \leq x \leq l_2$ стержень, внутренняя точка $x = 0$ которого делит его на два участка: участок $-l_1 \leq x \leq 0$ длины l_1 , имеющий линейную плотность $\rho_1 = \text{const}$ и модуль Юнга $k_1 = \text{const}$, и участок $0 \leq x \leq l_2$ длины l_2 , имеющий линейную плотность $\rho_2 = \text{const}$ и модуль Юнга $k_2 = \text{const}$.

Изучение продольных колебаний такого закрепленного в точке $x = l_2$ стержня, возбуждаемых на его конце $x = -l_1$ смещением $u(-l_1, t) = \mu(t)$ и затухающих за промежуток времени $0 \leq t \leq T$, сводится к изучению математической задачи об отыскании в прямоугольнике $Q = [-l_1 \leq x \leq l_2] \times [0 \leq t \leq T]$ при $a_1 = \sqrt{k_1/\rho_1}$ и $a_2 = \sqrt{k_2/\rho_2}$ решения $u(x, t)$ смешанной задачи для разрывного волнового уравнения

$$u_{tt}(x, t) = \begin{cases} a_1^2 u_{xx}(x, t) & \text{в прямоугольнике } Q_1 = [-l_1 \leq x \leq 0] \times [0 \leq t \leq T], \\ a_2^2 u_{xx}(x, t) & \text{в прямоугольнике } Q_2 = [0 \leq x \leq l_2] \times [0 \leq t \leq T] \end{cases} \quad (1)$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-12155-офи-м) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-3514.2010.1).

с граничными условиями

$$u(-l_1, t) = \mu(t), \quad u(l_2, t) = 0, \quad (2)$$

с условиями сопряжения в точке $x = 0$ стыка участков

$$u(0 - 0, t) = u(0 + 0, t), \quad (3)$$

$$a_1^2 \rho_1 u_x(0 - 0, t) = a_2^2 \rho_2 u_x(0 + 0, t) \quad (4)$$

и с нулевыми финальными условиями

$$u(x, T) = 0, \quad u_t(x, T) = 0. \quad (5)$$

При рассмотрении этой задачи мы сначала предположим, что время прохождения волны по участку $-l_1 \leq x \leq 0$, равное l_1/a_1 , совпадает со временем прохождения волны по участку $0 \leq x \leq l_2$, равному l_2/a_2 , т. е. $l_1/a_1 = l_2/a_2$.

Кроме того, для сокращения записи обозначим символом \hat{l} число, определяемое равенством

$$\hat{l} = 2 \frac{l_1}{a_1} = 2 \frac{l_2}{a_2}. \quad (6)$$

Мы будем рассматривать обобщенное решение смешанной задачи (1)–(5) из введенного нами еще в [1] и [2] класса $\widehat{W}_2^1(Q)$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что функция $u(x, t)$ принадлежит в прямоугольнике $Q = [-l_1 \leq x \leq l_2] \times [0 \leq t \leq T]$ классу $\widehat{W}_2^1(Q)$, если эта функция непрерывна в замкнутом прямоугольнике Q и имеет в нем обе обобщенные частные производные $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, каждая из которых принадлежит не только классу $L_2(Q)$, но и классу $L_2[-l_1 \leq x \leq l_2]$ при всех $t \in [0, T]$ и классу $L_2[0 \leq t \leq T]$ при всех $x \in [-l_1, l_2]$.

О п р е д е л е н и е 2. Назовем обобщенным из класса $\widehat{W}_2^1(Q)$ решением смешанной задачи (1)–(5) функцию $u(x, t)$ из этого класса, удовлетворяющую условию $u(x, T) \equiv 0$ и интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{-l_1}^0 \int_0^T u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - a_1^2 \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \int_0^{l_2} \int_0^T u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - a_2^2 \Phi_{xx}(x, t)] dx dt \\ & = a_1^2 \int_0^T \mu(t) \Phi_x(-l_1, t) dt \end{aligned} \quad (7)$$

для любой “пробной” функции $\Phi(x, t)$, принадлежащей классу $C^{(2)}$ в каждом из замкнутых прямоугольников $Q_1 = [-l_1 \leq x \leq 0] \times [0 \leq t \leq T]$ и $Q_2 = [0 \leq x \leq l_2] \times [0 \leq t \leq T]$ и удовлетворяющей нулевым граничным условиям

$$\Phi(-l_1, t) \equiv 0, \quad \Phi(-l_2, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T,$$

разрывным условиям сопряжения в точке $x = 0$

$$\frac{1}{\rho_1} \Phi(0 - 0, t) = \frac{1}{\rho_2} \Phi(0 + 0, t), \quad a_1^2 \Phi_x(0 - 0, t) = a_2^2 \Phi_x(0 + 0, t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T \quad (8)$$

и нулевым начальным условиям

$$\Phi(x, 0) = 0, \quad \Phi_t(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad -l_1 \leq x \leq l_2.$$

Сразу же заметим, что так как обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1)–(5) по определению принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q)$, то необходимыми условиями существования этого решения являются требование принадлежности функции $\mu(t)$ из граничного условия (2) классу

$$\mu(t) \in W_2^1[0, T] \quad (9)$$

и удовлетворение равенству

$$\mu(T) = 0. \quad (10)$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q)$ смешанной задачи (1)–(5) удовлетворяет начальным условиям $u(x, 0) = \varphi(x)$ и $u_t(x, 0) = \psi(x)$, то по определению класса $\widehat{W}_2^1(Q)$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ обязаны удовлетворять требованиям

$$\varphi(x) \in W_2^1[-l_1, l_2], \quad \psi(x) \in L_2[-l_1, l_2], \quad \varphi(l_2) = 0. \quad (11)$$

При выполнении условия $l_1/a_1 = l_2/a_2$ вопрос о единственности обобщенного из класса $\widehat{W}_2^1(Q)$ решения смешанной задачи (1)–(5) с точностью до обозначений решен в нашей работе [3].

В этой работе на сегменте $[-l_1, l_2]$ исследована задача на собственные функции для разрывного обыкновенного дифференциального оператора

$$Lv = \begin{cases} a_1^2 v''(x), & \text{при } -l_1 \leq x \leq 0, \\ a_2^2 v''(x), & \text{при } 0 \leq x \leq l_2 \end{cases}$$

с однородными краевыми условиями первого рода $v(-l_1) = 0$, $v(l_2) = 0$ и со следующими условиями сопряжения в точке $x = 0$ разрыва оператора

$$\frac{1}{\rho_1} v(0-0) = \frac{1}{\rho_2} v(0+0), \quad a_1^2 v'(0-0) = a_2^2 v'(0+0).$$

В [3] доказана полнота системы собственных функций указанной задачи и с помощью нее дано доказательство единственности решения из класса $\widehat{W}_2^1(Q)$ смешанной задачи (1)–(5), основанное на использовании метода, развитого в §9 нашей работы [4] (см. также [5, т. 2, с. 385–386]).

Первым результатом настоящей работы является установление при выполнении условия

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l_2}{a_2} \quad (12)$$

явного аналитического вида обобщенного из класса $\widehat{W}_2^1(Q)$ решения $u(x, t)$ смешанной задачи (1)–(5).

Теорема 1. При выполнении равенства (12) для любого $T > 0$ и для произвольной функции $\mu(t)$, удовлетворяющей условиям (9) и (10), единственное обобщенное из класса $\widehat{W}_2^1(Q)$ решение $u(x, t)$ смешанной задачи (1)–(5) определяется следующими равенствами:

а) при $-l_1 \leq x \leq 0$

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t + \frac{x}{a_1} + \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{x}{a_1} - \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) + \frac{a_1 \rho_1 - a_2 \rho_2}{a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{x}{a_1} + \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t + \frac{x}{a_1} - \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) \right\}; \quad (13)$$

б) при $0 \leq x \leq l_2$

$$u(x, t) = \frac{2a_1\rho_1}{a_1\rho_1 + a_2\rho_2} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t + \frac{x}{a_2} + \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{x}{a_2} - \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) \right\}, \quad (14)$$

в которых символ $\bar{\mu}(\tau)$ обозначает функцию, совпадающую с $\mu(\tau)$ при $\tau \leq T$ и равную нулю при $\tau \geq T$, а \hat{l} определяется равенством (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что для любого фиксированного $T > 0$ каждая из сумм, стоящих в равенствах (13) и (14), содержит только конечное число отличных от нуля слагаемых. Поскольку функция $\mu(t)$ принадлежит классу (9) и удовлетворяет условию (10), можно утверждать, что функция $\bar{\mu}(t)$ принадлежит классу $W_2^1[0, \infty)$, а отсюда следует, что функция (13) принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_1)$ и непрерывна в прямоугольнике $Q_1 = [-l_1 \leq x \leq 0] \times [0 \leq t \leq T]$, а функция (14) принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_2)$ и непрерывна в прямоугольнике $Q_2 = [0 \leq x \leq l_2] \times [0 \leq t \leq T]$.

Тот факт, что функция $u(x, t)$, определяемая равенствами (13) и (14), принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q)$ в прямоугольнике Q , являющемся объединением прямоугольников Q_1 и Q_2 , вытекает из того, что при $x = 0$ правая часть (13) совпадает с правой частью (14). Выполнение условия $u(x, T) = 0$ обеспечивается тем, что при $t = T$ аргументы у всех стоящих в (13) и (14) функций $\bar{\mu}$ не меньше числа T .

Остается доказать, что функция $u(x, t)$, определяемая равенствами (13) и (14), удовлетворяет тождеству (7) для любой "пробной" функции $\Phi(x, t)$, удовлетворяющей всем условиям определения 2.

Обозначим через I сумму двух двойных интегралов, стоящих в левой части (7), и перепишем эту сумму в виде

$$\begin{aligned} I = & \int_{-l_1}^0 \left[\int_0^T u(x, t) \Phi_{tt}(x, t) dt \right] dx - a_1^2 \int_0^T \left[\int_{-l_1}^0 u(x, t) \Phi_{xx}(x, t) dx \right] dt \\ & + \int_0^{l_2} \left[\int_0^T u(x, t) \Phi_{tt}(x, t) dt \right] dx - a_2^2 \int_0^T \left[\int_0^{l_2} u(x, t) \Phi_{xx}(x, t) dx \right] dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Производя интегрирование по частям всех стоящих в (15) в квадратных скобках интегралов, получим

$$\begin{aligned} I = & \int_{-l_1}^0 [u(x, T) \Phi_t(x, T) - u(x, 0) \Phi_t(x, 0)] dx - \int_{-l_1}^0 \int_0^T u_t(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt \\ & - a_1^2 \int_0^T [u(0 - 0, t) \Phi_x(0 - 0, t) - u(-l_1, t) \Phi_x(-l_1, t)] dt + a_1^2 \int_{-l_1}^0 \int_0^T u_x(x, t) \Phi_x(x, t) dx dt \\ & + \int_0^{l_2} [u(x, T) \Phi_t(x, T) - u(x, 0) \Phi_t(x, 0)] dx - \int_0^{l_2} \int_0^T u_t(x, t) \Phi_t(x, t) dx dt \\ & - a_2^2 \int_0^T [u(l_2, t) \Phi_x(l_2, t) - u(0 + 0, t) \Phi_x(0 + 0, t)] dt + a_2^2 \int_0^{l_2} \int_0^T u_x(x, t) \Phi_x(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что $u(x, T) = 0$, $\Phi_t(x, 0) = 0$ для всех $-l_1 \leq x \leq l_2$, а $u(-l_1, t) = \mu(t)$, $u(l_2, t) = 0$ для всех $0 \leq t \leq T$ и принимая во внимание соотношения $u(0-0, t) = u(0+0, t)$, $a_1^2 \Phi_x(0-0, t) = a_2^2 \Phi_x(0+0, t)$, справедливые для всех $0 \leq t \leq T$, мы получим из (16)

$$I = a_1^2 \int_0^T \mu(t) \Phi_x(-l_1, t) dt - \int_0^T \left[\int_{-l_1}^0 u_t(x, t) \Phi_t(x, t) dx \right] dt + \int_{-l_1}^0 \left[\int_0^T a_1^2 u_x(x, t) \Phi_x(x, t) dt \right] dx - \int_0^T \left[\int_0^{l_2} u_t(x, t) \Phi_t(x, t) dx \right] dt + \int_0^{l_2} \left[\int_0^T a_2^2 u_x(x, t) \Phi_x(x, t) dt \right] dx. \quad (17)$$

Для дальнейшего преобразования (17) введем в рассмотрение функцию $U(x, t)$, определив ее равенствами:

а) при $-l_1 \leq x \leq 0$

$$U(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t + \frac{x}{a_1} + \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{x}{a_1} - \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) - \frac{a_1 \rho_1 - a_2 \rho_2}{a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{x}{a_1} + \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t + \frac{x}{a_1} - \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) \right\}; \quad (18)$$

б) при $0 \leq x \leq l_2$

$$U(x, t) = \frac{2a_1 \rho_1}{a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t + \frac{x}{a_2} + \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{x}{a_2} - \frac{\hat{l}}{2} + 2m\hat{l} \right) \right\}. \quad (19)$$

Аналогично тому, как это сделано для $u(x, t)$, устанавливается, что функция $U(x, t)$, определяемая равенством (18), принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_1)$ и непрерывна в прямоугольнике $Q_1 = [-l_1 \leq x \leq 0] \times [0 \leq t \leq T]$, а функция $U(x, t)$, определяемая равенством (19), принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_2)$ и непрерывна в прямоугольнике $Q_2 = [0 \leq x \leq l_2] \times [0 \leq t \leq T]$. Так же, как для $u(x, t)$, устанавливается, что $U(x, T) = 0$ для всех $-l_1 \leq x \leq l_2$.

Вместе с тем функция $U(x, t)$ не является непрерывной в объединении Q прямоугольников Q_1 и Q_2 и, как легко проверить, удовлетворяет условию скачка

$$a_1 \rho_1 U(0-0, t) = a_2 \rho_2 U(0+0, t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (20)$$

С помощью равенств (13), (14), (18) и (19) легко проверить, что производные функций $U(x, t)$ и $u(x, t)$ связаны следующими соотношениями:

а) в случае $-l_1 \leq x < 0$

$$u_t(x, t) = a_1 U_x(x, t), \quad U_t(x, t) = a_1 u_x(x, t), \quad (21)$$

причем равенства (21) справедливы в прямоугольнике $[-l_1 \leq x < 0] \times [0 \leq t \leq T]$ либо для любого x из интервала $-l_1 \leq x < 0$ и почти всех t из сегмента $0 \leq t \leq T$, либо для любого t из сегмента $0 \leq t \leq T$ и почти всех x из интервала $-l_1 \leq x < 0$;

б) в случае $0 < x \leq l_2$

$$u_t(x, t) = a_2 U_x(x, t), \quad U_t(x, t) = a_2 u_x(x, t), \quad (22)$$

причем равенства (22) справедливы в прямоугольнике $(0 < x \leq l_2] \times [0 \leq t \leq T]$ либо для любого x из интервала $0 < x \leq l_2$ и почти всех t из сегмента $0 \leq t \leq T$, либо для любого t из сегмента $0 \leq t \leq T$ и почти всех x из интервала $0 < x \leq l_2$.

Соотношения (21) и (22) позволяют переписать равенство (17) в виде

$$\begin{aligned}
 I = a_1^2 \int_0^T \mu(t) \Phi_x(-l_1, t) dt - \int_0^T \left[\int_{-l_1}^0 a_1 U_x(x, t) \Phi_t(x, t) dx \right] dt + \int_{-l_1}^0 \left[\int_0^T a_1 U_t(x, t) \Phi_x(x, t) dt \right] dx \\
 - \int_0^T \left[\int_0^{l_2} a_2 U_x(x, t) \Phi_t(x, t) dx \right] dt + \int_0^{l_2} \left[\int_0^T a_2 U_t(x, t) \Phi_x(x, t) dt \right] dx. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Производя интегрирование по частям всех стоящих в (23) в квадратных скобках интегралов, мы приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
 I = a_1^2 \int_0^T \mu(t) \Phi_x(-l_1, t) dt \\
 - \int_0^T [a_1 U(0-0, t) \Phi_t(0-0, t) - a_1 U(-l_1, t) \Phi_t(-l_1, t)] dt + a_1 \int_{-l_1}^0 \int_0^T U(x, t) \Phi_{tx}(x, t) dx dt \\
 + \int_{-l_1}^0 [a_1 U(x, T) \Phi_x(x, T) - a_1 U(x, 0) \Phi_x(x, 0)] dx - a_1 \int_{-l_1}^0 \int_0^T U(x, t) \Phi_{xt}(x, t) dx dt \\
 - \int_0^T [a_2 U(l_2, t) \Phi_t(l_2, t) - a_2 U(0+0, t) \Phi_t(0+0, t)] dt + a_2 \int_0^{l_2} \int_0^T U(x, t) \Phi_{tx}(x, t) dx dt \\
 + \int_0^{l_2} [a_2 U(x, T) \Phi_x(x, T) - a_2 U(x, 0) \Phi_x(x, 0)] dx - a_2 \int_0^{l_2} \int_0^T U(x, t) \Phi_{xt}(x, t) dx dt. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Учитывая взаимное уничтожение в (24) двойных интегралов, принимая во внимание равенства $\Phi_t(-l_1, t) \equiv 0$, $\Phi_t(l_2, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$ и равенства $U(x, T) = 0$, $\Phi_x(x, 0) = 0$ при $-l_1 \leq x \leq l_2$, а также используя соотношение (20) и вытекающее из первого равенства (8) соотношение $1/\rho_1 \Phi_t(0-0, t) = 1/\rho_2 \Phi_t(0+0, t)$, мы получаем из (24) равенство

$$I = a_1^2 \int_0^T \mu(t) \Phi_x(-l_1, t) dt,$$

которое завершает вывод тождества (7) и доказательство теоремы 1. \square

Теперь, предполагая выполненным условие (12) и используя теорему 1 для значения $T = 2\hat{l} = 4l_1/a_1 = 4l_2/a_2$, мы установим явный аналитический вид граничного управления $u(-l_1, t) = \mu(t)$, переводящего за промежуток времени $T = 2\hat{l} = 2(l_1/a_1 + l_2/a_2)$ процесс колебаний закрепленного в точке $x = l_2$ стержня из произвольно заданного начального состояния $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ в финальное состояние полного покоя $u(x, T) = 0$, $u_t(x, T) = 0$.

Теорема 2. При выполнении соотношения (12) для промежутка времени $T = 2\hat{l}$ при $\hat{l} = l_1/a_1 + l_2/a_2$ и для произвольных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющих условиям $\varphi(x) \in W_2^1[-l_1, l_2]$, $\psi(x) \in L_2[-l_1, l_2]$, $\varphi(l_2) = 0$, на сегменте $0 \leq t \leq 2\hat{l}$ существует единственное граничное управление $u(-l_1, t) = \mu(t)$, переводящее колебания закрепленного в точке $x = l_2$ стержня из начального состояния $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ в финальное состояние полного покоя $u(x, T) = 0$, $u_t(x, T) = 0$.

Это граничное управление $\mu(t)$ определяется равенствами:

а) при $0 \leq t \leq \widehat{l}/2$

$$\mu(t) = \frac{1}{2}\varphi(a_1t - l_1) + \frac{1}{2a_1} \int_0^{a_1t-l_1} \psi(\tau) d\tau - \frac{a_1\rho_1 - a_2\rho_2}{4a_1\rho_1} \left[\varphi(l_2 - a_2t) - \frac{1}{a_2} \int_0^{l_2-a_2t} \psi(\tau) d\tau \right] + C; \quad (25)$$

б) при $\widehat{l}/2 \leq t \leq \widehat{l}$

$$\mu(t) = \frac{a_1\rho_1 + a_2\rho_2}{4a_1\rho_1} \left[\varphi(-l_2 + a_2t) + \frac{1}{a_2} \int_0^{-l_2+a_2t} \psi(\tau) d\tau \right] + C; \quad (26)$$

в) при $\widehat{l} \leq t \leq 3\widehat{l}/2$

$$\mu(t) = -\frac{a_1\rho_1 + a_2\rho_2}{4a_1\rho_1} \left[\varphi(3l_2 - a_2t) - \frac{1}{a_2} \int_0^{3l_2-a_2t} \psi(\tau) d\tau \right] + C; \quad (27)$$

г) при $3\widehat{l}/2 \leq t \leq 2\widehat{l}$

$$\mu(t) = -\frac{1}{2}\varphi(3l_1 - a_1t) + \frac{1}{2a_1} \int_0^{3l_1-a_1t} \psi(\tau) d\tau + \frac{a_1\rho_1 - a_2\rho_2}{4a_1\rho_1} \left[\varphi(-3l_2 + a_2t) + \int_0^{-3l_2+a_2t} \psi(\tau) d\tau \right] + C; \quad (28)$$

в которых постоянная C имеет вид

$$C = \frac{1}{2}\varphi(-l_1) - \frac{1}{2a_1} \int_0^{-l_1} \psi(\tau) d\tau - \frac{a_1\rho_1 - a_2\rho_2}{4a_1\rho_1 a_2} \int_0^{l_2} \psi(\tau) d\tau. \quad (29)$$

Это граничное управление $\mu(t)$ принадлежит классу $W_2^1 [0, 2\widehat{l}]$ и удовлетворяет условиям:

$$\mu(0) = \varphi(-l_1), \quad \mu(2\widehat{l}) = 0.$$

Доказательство. При $T = 2\widehat{l}$ в каждой из сумм, стоящих в правых частях равенств (13) и (14), будут отличны от нуля только первые слагаемые и мы получим для решения $u(x, t)$ следующие выражения:

а) при $-l_1 \leq x \leq 0$

$$u(x, t) = \bar{\mu}\left(t + \frac{x}{a_1} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a_1} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) + \frac{a_1\rho_1 - a_2\rho_2}{a_1\rho_1 + a_2\rho_2} \left[\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a_1} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \bar{\mu}\left(t + \frac{x}{a_1} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) \right]; \quad (30)$$

б) при $0 \leq x \leq l_2$

$$u(x, t) = \frac{2a_1\rho_1}{a_1\rho_1 + a_2\rho_2} \left[\bar{\mu}\left(t + \frac{x}{a_2} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a_2} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) \right]. \quad (31)$$

Дифференцируя равенства (30) и (31) по t , мы приходим к следующим соотношениям:

а) при $-l_1 \leq x \leq 0$

$$u_t(x, t) = \bar{\mu}'\left(t + \frac{x}{a_1} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \bar{\mu}'\left(t - \frac{x}{a_1} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) + \frac{a_1\rho_1 - a_2\rho_2}{a_1\rho_1 + a_2\rho_2} \left[\bar{\mu}'\left(t - \frac{x}{a_1} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \bar{\mu}'\left(t + \frac{x}{a_1} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) \right]; \quad (32)$$

б) при $0 \leq x \leq l_2$

$$u_t(x, t) = \frac{2a_1\rho_1}{a_1\rho_1 + a_2\rho_2} \left[\bar{\mu}'\left(t + \frac{x}{a_2} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \bar{\mu}'\left(t - \frac{x}{a_2} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) \right], \quad (33)$$

являющимися при любом t из сегмента $[0, 2\widehat{l}]$ равенствами элементов классов $L_2[-l_1 \leq x \leq 0]$ и $L_2[0 \leq x \leq l_2]$ соответственно.

Полагая в соотношениях (30)–(33) $t = 0$ и учитывая, что $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции, удовлетворяющие условиям (11), мы приходим к следующим соотношениям:

а) при $-l_1 \leq x \leq 0$

$$\varphi(x) = \mu\left(\frac{x}{a_1} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \mu\left(-\frac{x}{a_1} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) + \frac{a_1\rho_1 - a_2\rho_2}{a_1\rho_1 + a_2\rho_2} \left[\mu\left(-\frac{x}{a_1} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \mu\left(\frac{x}{a_1} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) \right], \quad (34)$$

$$\psi(x) = \mu'\left(\frac{x}{a_1} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \mu'\left(-\frac{x}{a_1} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) + \frac{a_1\rho_1 - a_2\rho_2}{a_1\rho_1 + a_2\rho_2} \left[\mu'\left(-\frac{x}{a_1} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \mu'\left(\frac{x}{a_1} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) \right]; \quad (35)$$

б) при $0 \leq x \leq l_2$

$$\varphi(x) = \frac{2a_1\rho_1}{a_1\rho_1 + a_2\rho_2} \left[\mu\left(\frac{x}{a_2} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \mu\left(-\frac{x}{a_2} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) \right], \quad (36)$$

$$\psi(x) = \frac{2a_1\rho_1}{a_1\rho_1 + a_2\rho_2} \left[\mu'\left(\frac{x}{a_2} + \frac{\widehat{l}}{2}\right) - \mu'\left(-\frac{x}{a_2} + \frac{3\widehat{l}}{2}\right) \right]. \quad (37)$$

(При этом соотношения (35) и (37) понимаются как равенства элементов классов $L_2[-l_1 \leq x \leq 0]$ и $L_2[0 \leq x \leq l_2]$ соответственно.)

Из равенств (34)–(37) и устанавливаются выражения (25)–(29) для граничного управления $\mu(t)$. Чтобы освободить читателя от длинных выкладок, сохраняя при этом строгость доказательства, достаточно, опираясь на единственность решения $u(x, t)$ смешанной задачи из класса $\widehat{W}_2^1(Q_{2\widehat{l}})$, проверить, что, подставляя во взятые при $t = 0$ правые части соотношений (30) и (31) значения $\mu(t)$, определяемые равенствами (25)–(29), мы приходим к соотношению $u(x, 0) = \varphi(x)$, а подставляя во взятые при $t = 0$ правые части соотношений (32) и (33) значения $\mu'(t)$, полученные дифференцированием по t равенств (25)–(29), мы приходим к соотношению $u_t(x, 0) = \psi(x)$, понимаемому как равенство элементов классов $L_2[-l_1 \leq x \leq 0]$ и $L_2[0 \leq x \leq l_2]$ соответственно. Теорема 2 доказана. \square

Итак, при $T = 2\widehat{l} = 2(l_1/a_1 + l_2/a_2)$ и при условии равенства $l_1/a_1 = l_2/a_2$ времени прохождения волны по каждому из участков $-l_1 \leq x \leq 0$ и $0 \leq x \leq l_2$ мы установили явный аналитический вид (25)–(29) граничного управления, переводящего процесс колебаний закрепленного

в точке $x = l_2$ стержня из произвольного начального состояния $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ в финальное состояние полного покоя $u(x, T) = 0$, $u_t(x, T) = 0$.

Используя схему нашей последней работы [6], укажем, как найти это граничное управление, если равенство $l_1/a_1 = l_2/a_2$ не выполнено и имеет место неравенство

$$\frac{l_1}{a_1} < \frac{l_2}{a_2}.$$

В этом случае найдется число $l'_1 > l_1 > 0$ такое, что справедливо равенство

$$\frac{l'_1}{a_1} = \frac{l_2}{a_2}. \quad (38)$$

В рассматриваемом случае мы продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, первоначально заданные на сегменте $-l_1 \leq x \leq l_2$, на сегмент $-l'_1 \leq x \leq l_2$, положив их на сегменте $[-l'_1, -l_1]$ равными $\varphi(x) = \varphi(-l_1) = \text{const}$, $\psi(x) = 0$. При таком продолжении функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будут принадлежать на продолженном сегменте $[-l'_1, l_2]$ классам $\varphi(x) \in W_2^1[-l'_1, l_2]$, $\psi(x) \in L_2[-l'_1, l_2]$ и останется выполненным условие $\varphi(l_2) = 0$.

Поскольку справедливо равенство (38), то в силу теорем 1 и 2 при $T = 2(l'_1/a_1 + l_2/a_2)$ мы найдем решение смешанной задачи (1)–(5), которое будет определяться теми же самыми равенствами (30) и (31), но с заменой в них l_1 на l'_1 , а $\hat{l} = l_1/a_1 + l_2/a_2$ на $\hat{l} = l'_1/a_1 + l_2/a_2$. Решение указанной смешанной задачи мы обозначим через $\hat{u}(x, t)$ и, используя теорему 2, найдем явный вид фигурирующей в равенствах (30) и (31) функции $\hat{\mu}(t) = \hat{u}(-l'_1, t)$, который при продолженных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ будет определяться равенствами (25)–(29) с заменой в них l_1 на l'_1 , а $\hat{l} = l_1/a_1 + l_2/a_2$ на $\hat{l} = l'_1/a_1 + l_2/a_2$.

Взятое при $x = -l_1$ решение $\hat{u}(x, t)$ и даст нам искомое граничное управление $\mu(t) = \hat{u}(-l_1, t)$, определенное для значений t из сегмента $0 \leq t \leq 2(l'_1/a_1 + l_2/a_2)$.

Соединяя результаты настоящей работы с результатами работы [6], можно перенести полученные результаты на случай перевода процесса колебаний из произвольного начального состояния в произвольное финальное.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин В.А.** Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528.
2. **Ильин В.А.** Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1670–1686.
3. **Ильин В.А.** Смешанная задача, описывающая процесс успокоения колебаний стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из участков // Тр. математического ин-та имени В.А. Стеклова. 2010. Т. 269. С. 133–142.
4. **Ильин В.А.** О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.
5. **Ильин В.А.** Избранные труды. М.: Макс-Пресс, 2008. 730 с.
6. **Ильин В.А.** О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. 2010. Т. 435, № 6. С. 732–735.

Ильин Владимир Александрович
академик РАН

д-р физ.-мат. наук, профессор
факультет ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: iline@cs.msu.su

Поступила 10.01.2011

УДК 517.977

**СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОВОДЫРЬ ДЛЯ ОБЪЕКТА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ
В ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ¹****Н. Н. Красовский, А. Н. Котельникова**

Для конфликтно-управляемого объекта с последствием рассматривается позиционная дифференциальная игра на быстродействие. Дается построение минимаксного и максиминного управлений по принципу обратной связи в схеме, содержащей промежуточный моделирующий объект, который описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, и включающей стохастический поводырь, который описывается дифференциальным уравнением Ито. Движение поводыря формируется на основе решения в истинном масштабе времени последовательности вспомогательных краевых задач для параболического уравнения с вырождающимся диффузионным членом.

Ключевые слова: объект с последствием, минимакс-максимин времени до встречи, стохастический поводырь.

N. N. Krasovskii, A. N. Kotel'nikova. Stochastic guide for a time-delay object in a positional differential game.

A positional differential time-optimal game is considered for a conflict-controlled time-delay object. Minimax and maximin feedback controls are constructed within a scheme that includes an intermediate model object described by an ordinary differential equation and a stochastic guide described by the Ito differential equation. The motion of the guide is based on the real-time solution of a sequence of auxiliary boundary value problems for a parabolic equation with degenerate diffusion term.

Keywords: time-delay object, minimax–maximin time of rendezvous, stochastic guide.

Введение

Для конфликтно-управляемого объекта, который описывается уравнением с запаздыванием времени, рассматривается дифференциальная игра на минимакс-максимин времени до встречи с заданным множеством M внутри заданного множества N в фазовом x -пространстве данного объекта [1–3]. Дается построение аппроксимационных минимаксного и максиминного управлений по принципу обратной связи на базе стохастических поводырей, включенных в эту цепь. При этом связь между исходным x -объектом, который описывается уравнением с запаздыванием времени, и стохастическим w -поводырем, который описывается дифференциальным уравнением Ито, замыкается через промежуточный аппроксимационный модельный y -объект, который описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. Движения поводыря формируются на базе решения в истинном масштабе времени последовательности вспомогательных аппроксимационных краевых задач для параболических уравнений с вырождающимся диффузионным членом. Это делается методом, развитым в работах [4–6], в случаях исходных x -объектов, описываемых обыкновенным дифференциальным уравнением. Для предлагаемого способа построения управлений для исходного x -объекта с последствием существенна теорема о близости движений этого x -объекта и аппроксимирующего его обыкновенного y -объекта при достаточно большой размерности данного y -объекта. Аппроксимация x -объекта y -объектом, подобная используемой в этой статье, применялась во многих исследованиях задач устойчивости и управления для систем с последствием (см. например, [7–11]). Предложенное формирование управлений со стохастическим поводырем для систем с последствием реализуем на базе известной теории параболических уравнений [12].

¹Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, при финансовой поддержке УрО РАН (проект 09-П-1-1015), а также РФФИ (проект 09-01-00313).

1. Дифференциальная игра сближения-уклонения для системы с последствием

Рассмотрим уравнение движения управляемого x -объекта:

$$\dot{x}[t] = f(t, x[t], x[t-h], u, v), \quad t_0 \leq t \leq \tau, \quad |x| < \infty. \quad (1.1)$$

Здесь x — n -мерный фазовый вектор-столбец $x = \{x_i, i = \overline{1, n}\}$, $|x|$ — евклидова норма, минимизирующее и максимизирующее управления u и v стеснены условиями

$$u \in P, \quad v \in Q,$$

P и Q — конечномерные компакты. Функция f непрерывна и по величинам $x[t]$ и $x[t-h]$ удовлетворяет локальным условиям Липшица. Полагаем, что выполнены условие

$$|f(t, x, x^*, u, v)| \leq k(1 + |x| + |x^*|), \quad k = \text{const} > 0,$$

и условие седловой точки маленькой игры, т. е. условие Айзекса — Беллмана,

$$\min_u \max_v l' f(t, x, x^*, u, v) = \max_v \min_u l' f(t, x, x^*, u, v)$$

при всех возможных l, t, x, x^* . Верхний индекс “штрих” означает транспонирование.

Для определенности полагаем постоянную $h = 1$. В согласии с принимаемой концепцией дифференциальной игры для системы с последствием в качестве позиционного элемента выбираем текущую историю x -движения, сложившуюся к моменту времени t :

$$x_t(\vartheta) = \{x[t + \vartheta], -h \leq \vartheta < 0\}.$$

Допустимы непрерывные функции $x_t(\vartheta)$ — элементы пространства $C_{[-h, 0]}$. В качестве исходных историй $x_{t_*}(\vartheta)$ допускаем истории, отвечающие исходным моментам $t_* \in [t_0, \tau]$ и лежащие в области $|x| \leq C e^{K(t - (t_0 - h))} - 1$, $C > 0$ — const, $K > 0$ — достаточно большие числа. В качестве допустимых стратегий выбираем произвольные функции от историй $u(x_t(\vartheta)), v(x_t(\vartheta))$, стесненные ограничением

$$u(x_t(\vartheta)) \in P, \quad v(x_t(\vartheta)) \in Q.$$

В согласии с принятой концепцией дифференциальной игры под x -движениями, порожденными из данной исходной истории стратегией u и реализациями v , или стратегией v и реализациями u , или парой стратегий u и v , понимаем обобщенные конструктивные решения уравнения (1.1), которые определяются как пределы соответствующих аппроксимационных ломаных Эйлера при стремлении шага этих ломаных к нулю. В фазовом x -пространстве заданы замкнутые множества M и N :

$$M \subset N.$$

Пусть даны отрезок $[t_0, \tau]$ и исходная история $x_{t_*}(\vartheta)$, $t_0 \leq t_* < \tau$. Дифференциальная игра сближения с множеством M — уклонения от множества M внутри множества N на данном отрезке $[t_0, \tau]$ из исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$ складывается из двух задач.

Задача I* о сближении. Найти стратегию $u^*(\cdot)$ сближения, которая для движений $x^{[u]}[t]$, $t_* \leq t$, порожденных ею из данной исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$, гарантирует выполнение условия

$$\forall x^{[u]}[\cdot] \exists \tau_{x[\cdot]}^* \in [t_0, \tau]: \left(x^{[u]}[\tau_{x[\cdot]}^*] \in M \right) \wedge \left(x^{[u]}[t] \in N, t_* \leq t \leq \tau_{x[\cdot]}^* \right).$$

Обозначим символами $M^{[\varepsilon]}$ и $N^{[\varepsilon]}$ ε -окрестности множеств M и N .

Задача II* об ε -уклонении. Найти стратегию $v^{[\varepsilon]}(\cdot)$ ε -уклонения, которая для движений $x^{[v]}[t]$, $t_* \leq t$, порожденных ею из данной исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$, гарантирует выполнение условия:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 : \forall x^{[v]}[\cdot] \left[\left(\exists \tau_{x[\cdot]}^{[\varepsilon]} \in [t_0, \tau] : x^{[v]}[\tau_{x[\cdot]}^{[\varepsilon]}] \notin N^{[\varepsilon]} \right) \wedge \left(x^{[v]}[t] \notin M^{[\varepsilon]}, t_* \leq t \leq \tau_{x[\cdot]}^{[\varepsilon]} \right) \right] \\ \vee \left[\left(x^{[v]}[t] \in N^{[\varepsilon]}, t_* \leq t \leq \tau \right) \wedge \left(x^{[v]}[t] \notin M^{[\varepsilon]}, t_* \leq t \leq \tau \right) \right]. \end{aligned}$$

Справедлива теорема об альтернативе [2].

Теорема 1. При данных отрезке $[t_0, \tau]$ и исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$, $t_0 \leq t_* < \tau$, верно одно и только одно из двух: или разрешима задача о сближении, или разрешима задача об ε -уклонении.

Пусть для данной исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$ существует отрезок $[t_0, \tau]$, для которого при данной исходной истории разрешима задача I* о сближении. Тогда справедлива теорема [1, 3]. Существует наименьшее значение τ^0 : $t_* \leq \tau^0 \leq \tau$, для которого разрешима задача о сближении. При этом для любого значения τ_* : $t_* \leq \tau_* < \tau^0$ существует $\varepsilon_* > 0$ такое, что для данной исходной истории разрешима задача II* об ε -уклонении при $\varepsilon = \varepsilon_*$.

Эти теоремы являются дескриптивными.

В предлагаемой статье дается конструктивный метод построения аппроксимационных минимаксного и максиминного управлений для рассматриваемого объекта с последствием. Это является развитием для систем с последствием метода построения минимаксного и максиминного управлений на базе стохастического поводыря для объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [5, 6]. Здесь существенную роль играет аппроксимация данного объекта с последствием подходящим модельным объектом, который описывается весьма многомерным обыкновенным дифференциальным уравнением.

2. Аппроксимационный y -объект

Данному исходному управляемому x -объекту с последствием при данной исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$ на данном отрезке $[t_0, \tau]$ поставим в соответствие y -объект, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнением в $(m+1) \times n$ -мерном фазовом пространстве векторов

$$y = \{y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(m)}\}.$$

Здесь $y^{(0)}, y^{(i)}, i = \overline{0, m}$, — n -мерные компоненты, идентичные фазовому вектору x . В качестве m будет выбираться достаточно большое натуральное число.

Уравнение движения для y -объекта имеет вид

$$\dot{y}[t] = F(t, y[t], u, v) = \begin{pmatrix} \dot{y}^{(0)} = f(t, y^{(0)}[t], y^{(m)}[t], u, v) \\ \dot{y}^{(1)} = m \cdot (y^{(0)}[t] - y^{(1)}[t]) \\ \dots \\ \dot{y}^{(i)} = m \cdot (y^{(i-1)}[t] - y^{(i)}[t]) \\ \dots \\ \dot{y}^{(m)} = m \cdot (y^{(m-1)}[t] - y^{(m)}[t]) \end{pmatrix}, \quad t_* \leq t \leq \vartheta. \quad (2.1)$$

Исходная позиция $y[t_*]$, которая соответствует данной исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$, определяется равенствами

$$y^{(0)}[t_*] = x[t_*], \quad y^{(i)}[t_*] = \int_{t_* - \frac{i}{m}}^{t_* - \frac{i-1}{m}} x(\vartheta) d\vartheta. \quad (2.2)$$

Подобная аппроксимация решений уравнения с запаздыванием времени (1.1) решениями обыкновенного дифференциального уравнения вида (2.1) использовалась многими авторами при исследовании различных задач об устойчивости и управлении для систем с последствием (см. например, [7–11]). Обоснование такой аппроксимации для задачи о стабилизации управляемой системы с последствием было дано в работе [9]. При заданных исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$ и исходной позиции $y[t_*]$ (2.2) для уравнений (1.1) и (2.1) будем рассматривать их аппроксимационные решения — ломаные Эйлера $x[t]$ и $y[t]$, которые являются решениями следующих конечно-разностных уравнений. В случае минимаксного управления полагаем

$$\begin{aligned}\dot{x}[t] &= f(\tau_j, x[\tau_j], x[\tau_j - 1], u^{[x]}[\tau_j], v[t]), \\ \dot{y}[t] &= F(\tau_j, y[\tau_j], u[t], v^{[y]}[\tau_j]), \\ \tau_j &\leq t < \tau_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \tau_1 = t_*, \\ \tau_{j+1} - \tau_j &\leq \delta, \quad \delta > 0.\end{aligned}$$

Здесь $v[t]$ и $u[t]$ — произвольные допустимые кусочно-непрерывные реализации.

$$u[t] \in P, \quad v[t] \in Q, \quad (2.3)$$

а управления $u^{[x]}[\tau_j]$ и $v^{[y]}[\tau_j]$ выбираются из условий

$$u^{[x]}[\tau_j] \in \arg \max_u \min_v l'[\tau_j] f(\tau_j, x[\tau_j], x[\tau_j - h], u, v), \quad (2.4)$$

$$v^{[y]}[\tau_j] \in \arg \min_v \max_u l'[\tau_j] f(\tau_j, y^{(0)}[\tau_j], y^{(m)}[\tau_j], u, v).$$

В случае максиминного управления полагаем

$$\dot{x}[t] = f(\tau_j, x[\tau_j], x[\tau_j - 1], u[t], v^{[x]}[\tau_j]), \quad (2.5)$$

$$\dot{y}[t] = F(\tau_j, y[\tau_j], u^{[y]}[\tau_j], v[t]). \quad (2.6)$$

Здесь $v[t]$ и $u[t]$ — произвольные допустимые кусочно-непрерывные реализации, удовлетворяющие условиям (2.3), а управления $u^{[y]}[\tau_j]$ и $v^{[x]}[\tau_j]$ выбираются из условий

$$v^{[x]}[\tau_j] \in \arg \max_v \min_u l'[\tau_j] f(\tau_j, x[\tau_j], x[\tau_j - 1], u, v), \quad (2.7)$$

$$u^{[y]}[\tau_j] \in \arg \min_u \max_v l'[\tau_j] f(\tau_j, y^{(0)}[\tau_j], y^{(m)}[\tau_j], u, v). \quad (2.8)$$

Здесь в (2.5)–(2.8) имеем

$$l[\tau_j] = y^{(0)}[\tau_j] - x[\tau_j].$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. При данном отрезке $[t_0, \tau]$ и выбранных исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$ и исходной позиции $y[t_*]$ (см. (2.2)) для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое число m^* и достаточно малое значение $\delta(m) > 0$ такие, что будет выполнено неравенство

$$|x[t] - y^{(0)}[t]| < \varepsilon, \quad t_* \leq t \leq \tau,$$

если только $m > m^*$ и $\delta < \delta(m)$.

Количество выкладок, которые используются при доказательстве этой теоремы о близости, значительно превосходит объем, допустимый рамками этой статьи. Поэтому доказательство теоремы 2 мы опускаем. Оно проводится по схеме доказательства аналогичной теоремы о близости из работы [9] и отличается в деталях, связанных с различием в конкретной форме уравнений и характере рассматриваемых задач.

3. Аппроксимационный стохастический w -поводьрь

Из теоремы 2 о близости движений исходного x -объекта с последствием и модельного y -объекта следует, что для построения аппроксимационных минимаксного и максиминного управлений для x -объекта достаточно построить соответствующие управления для y -модели и в соответствии с теоремой о близости организовать отслеживание y -движений x -движениями. В свою очередь для формирования аппроксимационных минимаксного и максиминного управлений для y -объекта, описываемого обыкновенным дифференциальным уравнением, можно использовать процедуру управления в схеме со стохастическим w -поводьрем. Эта процедура была предложена в работе [4] и подробно рассматривается и обосновывается в работах [5,6] для дифференциальных игр того класса, к которому относится дифференциальная игра, исследуемая в предлагаемой статье. Поэтому ограничимся здесь только формулировкой результатов, отсылая к их подробному разбору и доказательству в упомянутых работах.

Выбираем фазовое пространство $\{w\}$, идентичное фазовому пространству $\{y\}$. Пусть имеем исходную позицию $y[t_*]$ для y -объекта на некотором полуинтервале времени $[t_0, \tau^*)$, т.е. $t_0 \leq t_* < \tau^*$. Стохастический w -поводьрь стартует из такой же исходной позиции $w[t_*] = y[t_*]$, и его движение определяется как решение аппроксимационного конечно-разностного стохастического дифференциального уравнения Ито [13].

В случае, если для исходной позиции $y[t_*]$ разрешима задача о сближении с некоторым множеством M^* внутри множества N^* на отрезке $[t_0, \tau^*]$, это уравнение для $w[t]$ имеет вид

$$dw[t] = F(\tau_j, w[\tau_j], u^{[w]}[\tau_j], v^{[w]}[\tau_j])dt + \alpha dW_\omega[t], \quad (3.1)$$

$$\tau_j \leq t \leq \tau_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \tau_{j+1} - \tau_j < \delta, \quad \delta > 0.$$

Здесь $W_\omega[t]$ — стандартный $(m+1) \times n$ -мерный винеровский процесс, а аппроксимационное движение y -объекта описывается конечно-разностным уравнением

$$\dot{y}[t] = F(\tau_j, y[\tau_j], u^{[y]}[\tau_j], v[t]).$$

Здесь управления u и v выбираются из условий

$$\begin{aligned} u^{[w]}[\tau_j] &\in \arg \min_u \max_v \lambda_w^{0'}[\tau_j] f(\tau_j, w^{(0)}[\tau_j], w^{(m)}[\tau_j], u, v), \\ v^{[w]}[\tau_j] &\in \arg \min_v \max_u l'_*[\tau_j] f(\tau_j, w^{(0)}[\tau_j], w^{(m)}[\tau_j], u, v), \\ u^{[y]}[\tau_j] &\in \arg \max_u \min_v l'_*[\tau_j] f(\tau_j, y^{(0)}[\tau_j], y^{(m)}[\tau_j], u, v); \end{aligned} \quad (3.2)$$

$v[t]$ — допустимая кусочно-непрерывная реализация $v[t] \in Q$; $l_* = w^{(0)}[\tau_j] - y^{(0)}[\tau_j]$; $\lambda_w^{0'}[\tau_j]$ — нулевая n -мерная компонента градиента функции $\lambda^{[\nu, \alpha, \delta^*]}(t, w)$, которая является решением вспомогательной краевой задачи для параболического уравнения

$$\frac{\alpha^2}{2} \lambda_{ww} + \lambda_t + \xi_{\delta^*}[t, w, \lambda_w] = 0 \quad (3.3)$$

при краевых условиях, должным образом отвечающих минимаксному случаю управления и зависящих от малых параметров ν , α и δ^* . Здесь в уравнении (3.3) $\xi_{\delta^*}[t, w, \lambda_w]$ есть непрерывно-дифференцируемая функция, которая аппроксимирует величину

$$\xi[t, w, \lambda_w] = \min_u \max_v \lambda_w F(t, w, u, v)$$

в достаточно большой области пространства $\{t, w\}$ и при $|\lambda_w| < \infty$ так, что выполняется условие

$$\xi_{\delta^*}[t, w, \lambda_w] - \xi[t, w, \lambda_w] < \delta^*.$$

В случае, если для исходной позиции $y[t_*]$ разрешима задача об ε -уклонении на отрезке $[t_0, \tau_*]$ от множества M^* внутри множества N^* при некотором фиксированном $\varepsilon^* > 0$, уравнение для w -поводыря имеет тот же вид (3.1), но движение y -объекта приобретает вид

$$\dot{y}[t] = F(\tau_j, y[\tau_j], u[t], v^{[y]}[\tau_j])$$

и при этом управления u и v будут определяться из условий

$$\begin{aligned} u^{[w]}[\tau_j] &\in \arg \min_u \max_v l'_*[\tau_j] f(\tau_j, w^{(0)}[\tau_j], w^{(m)}[\tau_j], u, v), \\ v^{[w]}[\tau_j] &\in \arg \max_v \min_u \lambda_w^{0'}[\tau_j] f(\tau_j, w^{(0)}[\tau_j], w^{(m)}[\tau_j], u, v), \\ v^{[y]}[\tau_j] &\in \arg \max_v \min_u l'_*[\tau_j] f(\tau_j, y^{(0)}[\tau_j], y^{(m)}[\tau_j], u, v), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$u[t]$ — допустимая кусочно-непрерывная реализация $u[t] \in P$. Здесь $\lambda_w^{0'}[\tau_j]$ — нулевая n -мерная компонента градиента функции $\lambda^{[\nu, \alpha, \delta^*]}(t, w)$, которая является решением вспомогательной краевой задачи для параболического уравнения

$$\frac{\alpha^2}{2} \lambda_{ww} + \lambda_t + \xi_{\delta^*}[t, w, \lambda_w] = 0$$

при краевых условиях, должным образом отвечающих максиминному случаю управления и зависящих от малых параметров ν , α и δ^* .

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. В случае минимаксного управления для любых $\varepsilon > 0$ и $\beta < 1$ можно указать столь малые значения ν , α , δ^* и δ , что для y -движения будет обеспечена встреча $y^{(0)}[t]$ с ε -окрестностью $M^{*(\varepsilon)}$ внутри ε -окрестности $N^{*(\varepsilon)}$ на отрезке $[t_0, \tau^*]$ с вероятностью P , не меньшей, чем β .

Утверждение 2. В случае максиминного управления для любого $\varepsilon < \varepsilon^*$ и $\beta < 1$ можно указать столь малые значения ν , α , δ^* и δ , что для y -движения будет обеспечено уклонение $y^{(0)}[t]$ от ε -окрестности $M^{*(\varepsilon)}$ внутри ε -окрестности $N^{*(\varepsilon)}$ на отрезке $[t_0, \tau^*]$ с вероятностью P , не меньшей, чем β .

4. Минимаксное аппроксимационное управление исходным x -объектом с последствием

Замкнем систему, состоящую из исходного x -объекта с последствием, промежуточной y -модели, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, и стохастического w -поводыря, описываемого дифференциальным уравнением Ито, полагая в минимаксном случае в теореме о близости x и y движений, что управление $u[t]$ для y -модели назначается по правилу, указанному в (3.2), а $v[t]$ для y -модели из разд. 3 назначается по правилу, указанному в теореме о близости x и y движений (2.4). Тогда будет справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть для исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$ разрешима задача Γ^* о сближении движения $x[t]$ с множеством M внутри множества N на отрезке $[t_0, \tau^*]$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\beta < 1$ можно указать столь большое значение m , столь малые значения $\delta(m)$ и параметры ν , α , δ^* , что будет гарантирована встреча движения $x[t]$ с ε -окрестностью $M^{(\varepsilon)}$ внутри ε -окрестности $N^{(\varepsilon)}$ с вероятностью, не меньшей, чем β .

5. Максиминное аппроксимационное управление исходным x -объектом с последствием

Замкнем систему, состоящую из исходного x -объекта с последствием, промежуточной y -модели, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, и стохастического w -поводыря, описываемого дифференциальным уравнением Ито, полагая в максиминном случае в теореме о близости x и y движений, что управление $v[t]$ для y -модели назначается по правилу, указанному в (3.4), а $u[t]$ для y -модели из разд. 3 назначается по правилу, указанному в теореме о близости x и y движений (2.8). Тогда будет справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть для исходной истории $x_{t_*}(\vartheta)$ разрешима задача Π^* об ε -уклонении движения $x[t]$ от множества M внутри множества N на отрезке $[t_0, \tau_*]$ при фиксированном $\varepsilon = \varepsilon_*$. Тогда для любых $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ и $\beta < 1$ можно указать столь большое значение m , столь малые значения $\delta(m)$ и параметры ν, α, δ^* , что будет гарантировано ε -уклонение движения $x[t]$ от ε -окрестности $M^{(\varepsilon)}$ внутри ε -окрестности $N^{(\varepsilon)}$ на отрезке $[t_0, \tau_*]$ с вероятностью, не меньшей, чем β .

Описанные построения управления со стохастическим поводырем, базирующиеся на решении вспомогательных аппроксимационных краевых задач для рассматриваемых параболических уравнений, осуществимы в весьма широком случае множеств M и N в соответствии с классическими методами теории параболических уравнений [12]. Однако практическая реализация этого метода вряд ли возможна из-за огромного количества вычислений, которые он требует осуществлять в истинном масштабе времени.

Для рассматриваемой аппроксимации дифференциальной игры в системе с последствием характерно, что условия на управления в x -объекте, y -модели и w -поводыре смыкаются с условиями экстремального сдвига в системе с последствием, установленными и используемыми в работах [1–3], и с условиями экстремального сдвига в обыкновенной и стохастической системах, которые используются в работах [5, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С.** Дифференциальные игры систем с последствием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
2. **Осипов Ю.С.** Альтернатива в дифференциально-разностной игре // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 5. С. 1022–1025.
3. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр систем с последствием // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 2. С. 300–311.
4. **Красовский Н.Н.** Игра сближения-уклонения со стохастическим поводырем // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 5. С. 1020–1023.
5. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** Стохастическое управление в детерминированной дифференциальной игре сближения-уклонения // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. С. 93–110.
6. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** О дифференциальной игре на перехват // Тр. МИАН. 2010. Т. 268. С. 168–214.
7. **Салуквадзе М.Е.** К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженных постоянно действующим возмущениям // Автоматика и телемеханика. 1962. Т. 23, № 12. С. 1595–1601.
8. **Репин Ю.М., Третьяков В.Е.** Решение задачи об аналитическом конструировании регулятора на моделирующих устройствах // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24, № 6. С. 738–748.
9. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
10. **Репин Ю.М.** О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.
11. **Куржанский А.Б.** К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2094–2107.

12. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейная и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
13. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.

Красовский Николай Николаевич
академик РАН
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: nnkras@imm.uran.ru

Поступила 1.02.2011

Котельникова Анна Николаевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: annk222@rambler.ru

УДК 517.977.8

ЧИСЛОВАЯ КОДИРОВКА ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ УПРАВЛЕНИЙ И АППРОКСИМАЦИОННЫЙ МЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ РАЗРЕШИМОСТИ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ НАВЕДЕНИЯ¹

А. В. Кряжимский

Для конфликтно управляемой системы со скалярными управлениями, аффинно входящими в уравнение системы, рассматривается игровая задача о гарантированном наведении в классе позиционных стратегий. Вводятся упрощенные дискретизованные аналоги квазистратегий — неупреждающих программных реакций первого игрока на управления второго игрока. Свойство неупреждаемости характеризуется в метрических терминах с использованием числовых образов (кодов) управлений-аргументов и управлений-реакций. Вводится класс неупреждающих преобразований, приближенно равносильный — по критерию разрешимости игровой задачи — классу позиционных стратегий, элементы которого как преобразования числовых кодов управлений характеризуются свойством 1-липшицевости. Описывается численный алгоритм для проверки разрешимости задачи в данном классе, который по порядку сложности мало отличается от аппроксимационного варианта классической программной конструкции.

Ключевые слова: позиционные дифференциальные игры, квазистратегии, вычислительные методы.

A. V. Kryazhimskii. Numerical encoding of sampled controls and an approximation metric criterion for the solvability of an aiming game problem.

A game problem of guaranteed aiming in the class of positional strategies is considered for a conflict controlled system with affine scalar controls in the equation of the system. Simplified sampled analogs of quasi-strategies, i.e., of nonanticipating program reactions of the first player to the controls of the second player, are introduced. The nonanticipating property is characterized in metric terms with the use of numerical images (codes) of argument controls and reaction controls. A class of nonanticipating transformations is introduced that is approximately equivalent by the criterion of the solvability of the game problem to the class of positional strategies. The elements of this class as transformations of the numerical codes of controls are characterized by the 1-Lipschitz property. A numerical algorithm for checking the solvability of the problem in this class is described. The complexity order of the algorithm is close to that of the approximation variant of the classical program construction.

Keywords: positional differential games, quasi-strategies, numerical methods.

Введение

Настоящая работа обращается к одному из центральных вопросов теории позиционных дифференциальных игр [1–6] — вопросу о критериях разрешимости задач гарантирующего позиционного управления. К числу первых подходов к разрешению этого вопроса относится метод программных конструкций [1, 2], позволивший в ряде случаев (известных, как регулярные случаи) сформулировать необходимый критерий в терминах программных управлений. Универсальными обобщениями метода программных конструкций выступили метод квази-стратегий [3], связанный с ним метод программных итераций [3] и метод стохастического программного максимина [4]. Метод стохастического программного максимина, реализуя общую схему программной конструкции, переходит от детерминированных управлений к более сложным стохастическим программным управлениям. Метод программных итераций осуществляет программные конструкции многократно, адаптируя каждую последующую к результату применения предыдущей. Метод квазистратегий подчиняет программную конструкцию дополнительному функциональному ограничению, отражающему свойство “физической осуществимости” программной реакции игрока на программный выбор оппонента.

¹Работа частично поддержана РФФИ, проект 09-01-00624-а.

Материал настоящей работы опирается на метод квазистратегий. Отметим, что ранее этот метод использовался для получения вычислительных критериев разрешимости задач игрового управления [7, 8] и аналитических критериев разрешимости задач управления с неполной информацией [9–11]. Метод квазистратегий основан на аксиоматическом дифференциально-игровом подходе [12, 13], он представляет действия управляющей стороны, обычно именуемой первым игроком, в виде “физически осуществимых” программных реакций на программные управления противодействующей стороны — второго игрока. Каждый способ такого программного реагирования формализуется как квазистратегия — отображение множества всех программных управлений второго игрока во множество всех программных управлений первого игрока. Данное отображение подчиняется требованию неупреждаемости: при совпадении аргументов — управлений второго игрока — на некотором начальном отрезке времени это свойство наследуется соответствующими управлениями первого игрока. Фундаментальный результат состоит в том, что разрешимость задачи управления в классе квазистратегий, рассматриваемых как формальные процедуры управления со стороны первого игрока, служит критерием ее разрешимости в классе позиционных стратегий первого игрока.

Этот результат служит отправной точкой нашего исследования. Мы формулируем его в аппроксимационной форме, переходя от всех допустимых программных управлений игроков к их двузначным кусочно-постоянным представителям с переключениями в точках заданной конечной временной сетки; мы называем их дискретизованными управлениями. Адекватность выбора таких управлений в качестве аппроксимаций всех допустимых управлений обусловлена предположениями о скалярности управляющих переменных и об аффинности по этим переменным рассматриваемой управляемой системы (данные предположения не играют принципиальной роли и приняты ради упрощения изложения). Для определенности мы концентрируемся лишь на одной задаче из традиционного спектра задач гарантирующего позиционного управления — задаче о наведении на заданное целевое множество в заданный момент времени, краткое описание задачи дано в разд. 1.

На классе дискретизованных управлений (без нарушения общности множества дискретизованных управлений первого и второго игроков считаем совпадающими) мы определяем два класса преобразований, выступающих аналогами квазистратегий, называем их нижними и верхними неупреждающими преобразованиями; первый из этих классов содержится во втором. Отталкиваясь от того, что приближенная разрешимость задачи наведения в каждом из этих классов равносильна ее приближенной разрешимости в классе позиционных стратегий (аналог упомянутого выше результата из теории квазистратегий), мы делаем аналогичное заключение о равносильной приближенной разрешимости для произвольного класса преобразований, заключенного между классами нижних и верхних неупреждающих преобразований. Такие “промежуточные” классы преобразований мы называем тестовыми. Этот материал представлен в разд. 2. Наш основной результат состоит в построении конкретного тестового класса преобразований такого, что в этом классе проверка приближенной разрешимости задачи наведения (а значит, и ее приближенной разрешимости в классе позиционных стратегий) проводится достаточно экономно. Экономность достигается за счет того, что так называемые коды преобразований из тестового класса — их функциональные образы в силу некоторого отображения — характеризуются простым свойством липшицевости с единичной константой Липшица. Понятие кода вводится (в разд. 3) для всех преобразований на множестве дискретизованных управлений. Код такого преобразования — это отображение числового образа (кода) дискретизованного управления, выступающего в качестве аргумента, в числовой код дискретизованного управления, выступающего в качестве значения. В свою очередь, код дискретизованного управления определяется как взвешенная сумма его значений на промежутках между (зафиксированными заранее) допустимыми точками разрыва. Весовые коэффициенты подбираются таким образом, что между дискретизованными управлениями и их кодами имеет место взаимно однозначное соответствие. Важно, что при такой кодировке свойства нижней и верхней неупреждаемости выражаются в метрических терминах — в терминах зависимостей

расстояний между кодами управлений-значений от расстояний между кодами управлений-аргументов. Благодаря этому сконструированный тестовый класс и приобретает обозначенное выше характеристическое свойство 1-липшицевости в пространстве кодов.

В разд. 4 мы описываем численный алгоритм для проверки приближенной разрешимости задачи наведения в тестовом классе преобразований. В заключение мы отмечаем, что благодаря характеристическому свойству тестового класса переборная процедура предложенного численного алгоритма по порядку сложности мало отличается от переборной процедуры классической программной конструкции (точнее, от ее аппроксимационного варианта, в котором все допустимые управления игроков заменены на аппроксимирующие их дискретизованные управления).

1. Игровая задача наведения

Данный раздел имеет вводный характер, используемые здесь сведения стандартны для теории позиционных дифференциальных игр.

Рассмотрим конфликтно управляемую систему, описываемую задачей Коши

$$\dot{x}(t) = f_0(t, x(t)) + f_1(t, x(t))u(t) + f_2(t, x(t))v(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

в N -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^N на ограниченном отрезке $[t_0, \vartheta]$ времени ненулевой длины. Здесь t — переменная времени, $x(t)$ — состояние системы в момент t , $x_0 \in \mathbb{R}^N$ — заданное начальное состояние системы, $u(t)$ — значение в момент t скалярного управления первого игрока, осуществляющего целенаправленное регулирование системой, $v(t)$ — значение в момент t скалярного управления второго игрока, препятствующего первому игроку в достижении его цели. Функции $f_0, f_1, f_2: [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^N$ непрерывны, удовлетворяют условию $|f_i(t, x)| \leq K(1 + |x|)$ при всех $x \in \mathbb{R}^N$ (здесь $|\cdot|$ — норма в \mathbb{R}^m и K — положительная константа), а также липшицевы по второму аргументу на каждом ограниченном подмножестве произведения $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^N$. Управления игроков принимают значения в заданных ограниченных отрезках с ненулевыми длинами. Без нарушения общности (переопределяя, если нужно, функции f_0, f_1 и f_2) принимаем эти отрезки совпадающими и равными $[0, 1]$.

З а м е ч а н и е 1.1. Предположение о скалярности значений управлений игроков не принципиально, оно принято для придания большей ясности построениям, описываемым в следующих разделах. Аффинность правой части системы (1.1) относительно значений управлений также не носит принципиального характера, использование обобщенных управлений [14, гл. 4] позволит без значительного труда перенести предлагаемый ниже метод на случай конфликтно управляемой системы общего вида.

Отправной точкой наших дальнейших рассуждений служит, в применении к системе (1.1), одна из традиционных задач теории позиционных дифференциальных игр (теории гарантированного управления) — задача о наведении в конечный момент времени в классе позиционных стратегий.

З а м е ч а н и е 1.2. Мы ограничиваемся рассмотрением этой, простейшей, задачи игрового управления для наглядности изложения. Предлагаемая ниже методология может быть естественным образом перенесена на другие традиционные постановки игровых задач, такие как задача наведения до конечного момента, задача выдерживания фазовых ограничений, задача уклонения в конечный момент и задача уклонения до конечного момента [2].

Кратко опишем рассматриваемую задачу. Пусть зафиксированы начальное состояние $x_0 \in \mathbb{R}^N$ системы (1.1) и замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^N$, которое, как принято, будем называть *целевым множеством*. Под *позиционной стратегией* понимается произвольная функция $U: [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^N \mapsto \{0, 1\}$, под *допустимым управлением* — произвольная измеримая по Лебегу

функция $v(\cdot): [t_0, \vartheta] \mapsto [0, 1]$. *Временной сеткой* назовем всякое конечное семейство $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$ точек отрезка $[t_0, \vartheta]$ такое, что $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+1} = \vartheta$. *Движение* системы, порожденное позиционной стратегией U и допустимым управлением $v(\cdot)$ на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$, определяется как решение (Каратеодори) $x(\cdot)$ на $[t_0, \vartheta]$ уравнения (1.1), где $u(t) = U(\tau_i, x(\tau_i))$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ ($i = 0, \dots, n$); определенное выше допустимое управление $u(\cdot)$ будем при этом называть *реализацией* позиционной стратегии U на сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$, соответствующей допустимому управлению $v(\cdot)$.

Позиционную стратегию U назовем ε -*наводящей* на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$ ($\varepsilon > 0$), если для движения $x(\cdot)$ системы, порожденного позиционной стратегией U и произвольным допустимым управлением $v(\cdot)$ на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$, выполняется включение $x(\vartheta) \in [M]^\varepsilon$; здесь и далее $[M]^\varepsilon$ обозначает замкнутую ε -окрестность множества M .

Скажем, что задача о наведении (в конечный момент времени) *разрешима в классе позиционных стратегий*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует позиционная стратегия, являющаяся ε -наводящей на некоторой временной сетке.

З а м е ч а н и е 1.3. Приведенное определение разрешимости задачи наведения в классе позиционных стратегий несколько слабее стандартного определения (см. [2–6]), которое требует существования позиционной стратегии, являющейся ε -наводящей на всех достаточно частых временных сетках при произвольном выборе $\varepsilon > 0$. На самом деле определения равносильны; это легко обосновать применением метода стабильных мостов [2].

В альтернативном варианте задачи наведения решающим элементом выступают, вместо позиционных стратегий, *квазистратегии* [3] — неупреждающие отображения Q множества всех допустимых управлений в себя. Условие неупреждаемости (физической реализуемости) такого отображения Q заключается в том, что при совпадении сужений двух допустимых управлений на некоторый начальный отрезок $[t_0, \tau]$ времени это свойство наследуется образами этих допустимых управлений в силу отображения Q . *Движение* системы, порожденное квазистратегией Q и допустимым управлением $v(\cdot)$, понимается, как решение (Каратеодори) $x(\cdot)$ на $[t_0, \vartheta]$ задачи Коши (1.1), где $u(\cdot)$ есть образ $v(\cdot)$ в силу отображения Q . Квазистратегию Q назовем ε -*наводящей* ($\varepsilon > 0$), если для движения $x(\cdot)$ системы, порожденного квазистратегией Q и произвольным допустимым управлением $v(\cdot)$, выполняется включение $x(\vartheta) \in [M]^\varepsilon$. Задача о наведении (в конечный момент времени) *разрешима в классе квазистратегий*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε -наводящая квазистратегия.

Известно (см. [3] и замечание 1.3), что задача наведения разрешима в классе позиционных стратегий тогда и только тогда, когда она разрешима в классе квазистратегий.

В следующем разделе мы воспроизведем этот результат в приближенном виде, переходя от допустимых управлений к их кусочно-постоянным представителям со значениями в двухточечном множестве $\{0, 1\}$ (аналогичные рассуждения приведены в [7, 8]). При этом с позиционными стратегиями мы свяжем некоторые упрощенные аналоги квазистратегий, которые будем называть нижними и верхними неупреждающими преобразованиями.

2. Неупреждающие преобразования и приближенный критерий разрешимости

Зафиксируем временную сетку $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$, максимальный шаг

$$\delta = \max_{i=0, \dots, n} (\tau_{i+1} - \tau_i),$$

которой достаточно мал. *Дискретизованным управлением* будем называть всякую последовательность $v = (v_1, \dots, v_n)$ длины n , где $v_i \in \{0, 1\}$ ($i = 1, \dots, n$). Множество всех дискретизованных управлений будем обозначать через \mathcal{C} . *Разверткой* дискретизованного управления v будем называть допустимое управление $v(\cdot)$ такое, что $v(t) = v_{i+1}$ при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$,

$i = 0, 1, \dots, n-1$. Поскольку содержательно (по влиянию на управляемую систему) мы различаем допустимые управления первого и второго игроков, то понятным образом, сообразуясь с контекстом (в зависимости от смысла, придаваемого соответствующим разверткам), также будем иногда относить дискретизованные управления к первому либо второму игроку.

Для каждого $k = 2, \dots, n$ к классу \mathcal{C}_k^2 отнесем все пары $(v^{(1)}, v^{(2)})$ дискретизованных управлений (второго игрока), первые $k-1$ элементов которых одинаковы, а k -е элементы различны: $v_i^{(1)} = v_i^{(2)}$ при $i = 1, \dots, k-1$ и $v_k^{(1)} \neq v_k^{(2)}$. Через \mathcal{C}_{n+1}^2 будем обозначать множество всех пар (v, v) совпадающих дискретизованных управлений.

З а м е ч а н и е 2.1. Очевидно, что при $k_1 \neq k_2$ классы $\mathcal{C}_{k_1}^2$ и $\mathcal{C}_{k_2}^2$ не пересекаются. Также ясно, что дискретизованные управления $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ различны тогда и только тогда, когда $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_k^2$ для некоторого $k = 1, \dots, n$.

Нижним неупреждающим преобразованием назовем всякое отображение $\alpha: \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$ такое, что для любых $k \in \{2, \dots, n\}$ и $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_k^2$ выполняется $(\alpha(v^{(1)}), \alpha(v^{(2)})) \in \mathcal{C}_m^2$ при некотором $m \in \{k+1, \dots, n+1\}$. Таким образом, для всяких дискретизованных управлений $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ (второго игрока), различие между которыми начинается с компоненты с номером $k \geq 2$, их образы $\alpha(v^{(1)})$ и $\alpha(v^{(2)})$ в силу нижнего неупреждающего преобразования α (трактуемые как дискретизованные управления первого игрока) могут начинать различаться между собой не раньше, чем с компоненты с номером $k+1$ (в случае $k = n$ образы $\alpha(v^{(1)})$ и $\alpha(v^{(2)})$ обязаны совпадать).

Движением, порожденным нижним неупреждающим преобразованием α и дискретизованным управлением v (второго игрока), назовем решение (Каратеодори) $x(\cdot)$ на $[t_0, \vartheta]$ задачи Коши (1.1), где $u(\cdot)$ есть развертка дискретизованного управления $u = \alpha(v)$ (первого игрока) и $v(\cdot)$ есть развертка дискретизованного управления v (второго игрока). Нижнее неупреждающее преобразование α назовем ε -*наводящим* ($\varepsilon > 0$), если для движения $x(\cdot)$ системы, порожденного данным нижним неупреждающим преобразованием и произвольным дискретизованным управлением v , выполняется включение $x(\vartheta) \in [M]^\varepsilon$.

Связь нижних неупреждающих преобразований с позиционными стратегиями заключается в том, что по каждой позиционной стратегии U естественным образом восстанавливается нижнее неупреждающее преобразование α_U такое, что отвечающее ему множество движений вкладывается во множество движений, отвечающих позиционной стратегии U . Именно для всякого дискретизованного управления v определим $\alpha_U(v)$ как дискретизованное управление u такое, что его развертка является реализацией позиционной стратегии U на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$, соответствующей развертке дискретизованного управления v . Ясно, что α_U есть нижнее неупреждающее преобразование. Про вышеопределенное нижнее неупреждающее преобразование α_U будем говорить, что оно *определено* позиционной стратегией U .

З а м е ч а н и е 2.2. Ясно, что для всякой позиционной стратегии U движение, порожденное определенным ею нижним неупреждающим преобразованием α_U и произвольным дискретизованным управлением v , является движением, порожденным данной позиционной стратегией U и разверткой дискретизованного управления v на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$.

Верхним неупреждающим преобразованием назовем всякое отображение $\alpha: \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$ такое, что для любых $k \in \{2, \dots, n\}$ и $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_k^2$ выполняется $(\alpha(v^{(1)}), \alpha(v^{(2)})) \in \mathcal{C}_m^2$ при некотором $m \in \{k, \dots, n+1\}$. Таким образом, для всяких дискретизованных управлений $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ (второго игрока), различие между которыми начинается с компоненты с номером $k \geq 2$, их образы $\alpha(v^{(1)})$ и $\alpha(v^{(2)})$ (трактуемые как дискретизованные управления первого игрока) в силу верхнего неупреждающего преобразования α могут начинать различаться между собой не позже, чем с компоненты с этим же номером k .

З а м е ч а н и е 2.3. Легко видеть, что класс всех верхних неупреждающих преобразований содержит в себе класс всех нижних неупреждающих преобразований.

Движением, порожденным верхним неупреждающим преобразованием α и дискретизованным управлением v (второго игрока), назовем решение (Каратеодори) $x(\cdot)$ на $[t_0, \vartheta]$ задачи Коши (1.1), где $u(\cdot)$ есть развертка дискретизованного управления $u = \alpha(v)$ (первого игрока) и $v(\cdot)$ есть развертка дискретизованного управления v (второго игрока). Верхнее неупреждающее преобразование α назовем ε -наводящим ($\varepsilon > 0$), если для движения $x(\cdot)$ системы, порожденного данным верхним неупреждающим преобразованием и произвольным дискретизованным управлением v , выполняется включение $x(\vartheta) \in [M]^\varepsilon$.

Верхние неупреждающие преобразования суть, очевидно, прямые аналоги квазистратегий — сужения последних на класс разверток дискретизованных управлений. Связь между верхними неупреждающими преобразованиями и позиционными стратегиями проявляется в том, что множество позиций, которые “замегаются” движениями, порожденными произвольным верхним неупреждающим преобразованием, может быть приближенно отслежено движениями, порожденными некоторой позиционной стратегией на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$. Точное утверждение дается леммой 2.1.

В лемме использованы константы c_0 , c_1 и c_2 , определяемые следующим образом. Введем в рассмотрение какое-либо ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}^N$, в котором принимает значение решение $x(\cdot)$ (Каратеодори) на $[t_0, \vartheta]$ задачи Коши (1.1) при произвольных допустимых управлениях $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. Наложим выше условия на функции f_0, f_1, f_2 обеспечивающие существование такого множества. Через c_0 обозначим какое-либо число, мажорирующее расстояния между двумя произвольными точками множества X , через c_1 — какое-либо число, мажорирующее нормы значений правой части дифференциального уравнения из (1.1) для всех значений аргументов $t \in [t_0, \vartheta]$, $x(t) \in X$, $u(t), v(t) \in [0, 1]$ и через c_2 — константу Липшица этой правой части по второму аргументу на множестве X , общую для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $u(t), v(t) \in [0, 1]$.

Лемма 2.1. Пусть α — верхнее неупреждающее преобразование и $W(t)$ для каждого $t \in [t_0, \vartheta]$ есть множество значений в момент t движений, порожденных верхним неупреждающим преобразованием α и всеми дискретизованными управлениями (второго игрока). Тогда найдется позиционная стратегия U_α такая, что для движения $x(\cdot)$, порожденной данной позиционной стратегией и произвольным допустимым управлением $v(\cdot)$ (второго игрока) на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$, при всех $i = 0, \dots, n+1$, имеет место оценка

$$\text{dist}(x(\tau_i), W(\tau_i)) \leq \kappa(\tau_i, \delta), \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \text{dist}(x(\tau_i), W(\tau_i)) &= \inf \{|x(\tau_i) - x| : x \in W(\tau_i)\}, \\ \kappa(t, \delta) &= \left[(2c_0c_1 + c_1^2)e^{c_2(t-t_0)}(t-t_0)\delta \right]^{1/2} \quad (t \in [t_0, \vartheta]). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Доказательство. Позиционную стратегию U_α с нужным свойством строим как стратегию экстремального сдвига [2] на множества $W(\tau_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Именно для каждой пары $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ задаем $U_\alpha(t, x)$ как решение задачи минимизации

$$\langle x - w(t), f_1(t, x)u \rangle \rightarrow \min, \quad u \in [0, 1],$$

где $w(t)$ — какой-либо ближайший к x элемент множества $W(t)$. Поскольку множество $W(t)$ с очевидностью конечно, элемент $w(t)$ существует. Пусть $x(\cdot)$ — движение, порожденное позиционной стратегией U_α и произвольным допустимым управлением $v(\cdot)$ на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$. Так как $x(t_0) = x_0 \in W(t_0) = W(\tau_0)$, то $\text{dist}(x(\tau_0), W(\tau_0)) = 0 = \kappa(\tau_0, \delta)$, т. е. при $i = 0$ (2.1) справедливо. Предположим, что (2.1) выполняется при некотором $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, и покажем, что

$$\text{dist}(x(\tau_{i+1}), W(\tau_{i+1})) \leq \kappa(\tau_{i+1}, \delta). \quad (2.3)$$

Это завершит доказательство по методу индукции. Запишем (2.1) как

$$|x(\tau_i) - w(\tau_i)|^2 \leq \kappa^2(\tau_i, \delta) = (2c_0c_1 + c_1^2)e^{c_2(\tau_i - t_0)}(\tau_i - t_0)\delta. \quad (2.4)$$

Так как $w(\tau_i) \in W(\tau_i)$, то $w(\tau_i) = x^*(\tau_i)$, где $x^*(\cdot)$ — движение, порожденное верхним неупреждающим преобразованием α и некоторым дискретизованным управлением $v^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$. Возьмем дискретизованное управление $\bar{v}^* = (\bar{v}_1^*, \dots, \bar{v}_n^*)$, первые i компонент которого совпадают с соответствующими компонентами дискретизованного управления v^* ($v_j^* = \bar{v}_j^*$ при $j = 1, \dots, i$), а $(i+1)$ -я компонента \bar{v}_{i+1}^* решает задачу максимизации

$$\langle x - x^*(\tau_i), f_2(\tau_i, x)v \rangle \rightarrow \max, \quad v \in [0, 1];$$

отметим, что в силу линейности максимизируемой функции решение данной задачи, принадлежащее множеству $\{0, 1\}$, существует и, стало быть, сделанное определение корректно. Пусть $\bar{x}^*(\cdot)$ — движение, порожденное верхним неупреждающим преобразованием α и дискретизованным управлением \bar{v}^* . Заметим, что в соответствии с определением множества $W(\tau_{i+1})$ имеем

$$\bar{x}^*(\tau_{i+1}) \in W(\tau_{i+1}). \quad (2.5)$$

По построению $(v^*, \bar{v}^*) \in \mathcal{C}_j^2$, где $j \geq i$, поэтому, по определению верхнего неупреждающего преобразования, $(\alpha(v^*), \alpha(\bar{v}^*)) \in \mathcal{C}_m^2$ при некотором $m \in \{i, \dots, n+1\}$. Тогда, очевидно, $\bar{x}^*(t) = x^*(t)$ при $t \in [t_0, \vartheta]$. Следовательно, $U_\alpha(\tau_i, x(\tau_i))$ можно представить как решение задачи минимизации

$$\langle x(\tau_i) - \bar{x}^*(\tau_i), f_1(\tau_i, x(\tau_i))u \rangle \rightarrow \min, \quad u \in [0, 1],$$

а \bar{v}_{i+1}^* — как решение задачи максимизации

$$\langle x(\tau_i) - \bar{x}^*(\tau_i), f_2(\tau_i, x(\tau_i))v \rangle \rightarrow \max, \quad v \in [0, 1].$$

Отсюда, используя стандартную локальную оценку для рассогласования движений (см. [2]), извлекаем неравенство

$$|x(\tau_{i+1}) - \bar{x}^*(\tau_{i+1})|^2 \leq |x(\tau_i) - \bar{x}^*(\tau_i)|^2(1 + c_2(\tau_{i+1} - \tau_i)) + (2c_0c_1 + c_1^2)(\tau_{i+1} - \tau_i)^2.$$

Используя оценку (2.4), где $w(\tau_i)$ записываем как $\bar{x}^*(\tau_i)$, продолжаем следующим образом:

$$\begin{aligned} |x(\tau_{i+1}) - \bar{x}^*(\tau_{i+1})|^2 &\leq (2c_0c_1 + c_1^2)e^{c_2(\tau_i - t_0)}(\tau_i - t_0)(1 + c_2(\tau_{i+1} - \tau_i))\delta \\ &\quad + (2c_0c_1 + c_1^2)(\tau_{i+1} - \tau_i)^2 \\ &\leq (2c_0c_1 + c_1^2)e^{c_2(\tau_{i+1} - t_0)}(\tau_i - t_0)\delta \\ &\quad + (2c_0c_1 + c_1^2)e^{c_2(\tau_{i+1} - t_0)}(\tau_{i+1} - \tau_i)\delta \\ &= (2c_0c_1 + c_1^2)e^{c_2(\tau_{i+1} - t_0)}(\tau_{i+1} - t_0)\delta \\ &= \kappa^2(\tau_{i+1}, \delta). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.5) вытекает (2.3). Доказательство закончено. \square

Далее зафиксируем функцию $t \mapsto \kappa(t, \delta)$, задаваемую формулой (2.2), и положим

$$\eta = \kappa(\vartheta, \delta). \quad (2.6)$$

Про позиционную стратегию U_α , определенную в лемме 2.1, будем говорить, что она *аппроксимирует* верхнее неупреждающее преобразование α . Из леммы 2.1 с очевидностью вытекает следующее.

Следствие 2.1. *Для всякого ε -наводящего верхнего неупреждающего преобразования α аппроксимирующая его позиционная стратегия U_α является $(\varepsilon + \eta)$ -наводящей на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$.*

Из следствия 2.1 и замечания 2.2 легко извлекаем “базовый” критерий приближенной разрешимости задачи наведения в классе позиционных стратегий, на который будем опираться в дальнейшем. Этот критерий в аппроксимационной форме воспроизводит обозначенный выше классический результат об эквивалентности задачи наведения в классах позиционных стратегий и задачи наведения в классе квазистратегий и формулируется в терминах произвольного множества A преобразований, заключенного между множествами всех нижних и всех верхних неупреждающих преобразований (см. замечание 2.3). Точная формулировка такова.

Следствие 2.2. *Пусть A — какое-либо множество верхних неупреждающих преобразований, содержащее множество всех нижних неупреждающих преобразований. Справедливы следующие утверждения.*

- 1) *Если A содержит ε -наводящее верхнее неупреждающее преобразование, то существует позиционная стратегия, $(\varepsilon + \eta)$ -наводящая на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$.*
- 2) *Если A не содержит ε -наводящих верхних неупреждающих преобразований, то не существует позиционной стратегии, ε -наводящей на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$.*

Доказательство. Утверждение 1 сразу вытекает из следствия 2.1. Докажем утверждение 2. Предположим, что оно неверно, т.е. A не содержит ε -наводящих верхних неупреждающих преобразований, но существует позиционная стратегия U , ε -наводящая на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$. Пользуясь замечанием 2.2, заключаем, что нижнее неупреждающее преобразование α_U , определенное позиционной стратегией U , является ε -наводящим. Поскольку A содержит все нижние неупреждающие преобразования, то $\alpha_U \in A$. Это противоречит предположению о том, что A не содержит ε -наводящих верхних неупреждающих преобразований. Стало быть, утверждение 2 справедливо. Доказательство закончено. \square

Примем во внимание следующий результат, получающийся очевидным применением метода стабильных мостов [2].

Лемма 2.2. *Пусть существует позиционная стратегия, являющаяся ε -наводящей на какой-либо временной сетке. Тогда существует позиционная стратегия, являющаяся $(\varepsilon + \eta)$ -наводящей на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$.*

Используя лемму 2.2, приходим к следующему варианту следствия 2.2.

Следствие 2.3. *Пусть A — какое-либо множество верхних неупреждающих преобразований, содержащее множество всех нижних неупреждающих преобразований и $\varepsilon > \eta$. Справедливы следующие утверждения.*

- 1) *Если A содержит $(\varepsilon - \eta)$ -наводящее верхнее неупреждающее преобразование, то существует позиционная стратегия, ε -наводящая на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$.*
- 2) *Если A не содержит $(\varepsilon + \eta)$ -наводящих верхних неупреждающих преобразований, то не существует позиционной стратегии, являющейся ε -наводящей на какой-либо временной сетке.*

Доказательство. Утверждение 1 есть переформулировка утверждения 1 следствия 2.2, где ε заменено на $\varepsilon - \eta$. Обратимся к утверждению 2. Допустим, оно неверно, т.е. A не содержит $(\varepsilon + \eta)$ -наводящих верхних неупреждающих преобразований, но существует позиционная стратегия, ε -наводящая на какой-либо временной сетке. По утверждению 2 следствия 2.2 (где ε заменено на $\varepsilon + \eta$) не существует позиционной стратегии, являющейся $(\varepsilon + \eta)$ -наводящей на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$, а по лемме 2.2 такая позиционная стратегия существует. Противоречие показывает справедливость утверждения 2. \square

Прокомментируем следствие 2.3 в содержательных терминах. Встанем на точку зрения первого игрока. Возьмем $\varepsilon > 0$ и примем за удовлетворительный результат гарантию приведения системы в замкнутую ε -окрестность целевого множества M . Соответственно, зададимся вопросом о разрешимости задачи ε -наведения: возможно ли построить позиционную стратегию, являющуюся ε -наводящей на какой-либо временной сетке? (В случае положительного ответа желательно указать эту позиционную стратегию и эту временную сетку.)

Отметим, что поскольку максимальный шаг δ выбранной временной сетки $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$ мал, то значение η (см. (2.6), (2.2)) также мало. Примем, что $\eta < \varepsilon$. Возьмем какое-либо удобное для нас множество A верхних неупреждающих преобразований, которое объемлет множество всех нижних неупреждающих преобразований, — назовем его *тестовым множеством* — и задействуем его в следующем *приближенном алгоритмическом критерии* разрешимости задачи ε -наведения.

Проверим, содержит ли тестовое множество A какое-либо $(\varepsilon - \eta)$ -наводящее верхнее неупреждающее преобразование α . Если содержит, то в соответствии с утверждением 1 следствия 2.3 мы гарантируем существование позиционной стратегии, ε -наводящей на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$; данную позиционную стратегию строим по рецепту, указанному в доказательстве леммы 2.1.

В случае, если тестовое множество A не содержит $(\varepsilon - \eta)$ -наводящих верхних неупреждающих преобразований, проверим, содержит ли оно хоть одно $(\varepsilon + \eta)$ -наводящее верхнее неупреждающее преобразование. Если не содержит, то в соответствии с утверждением 2 следствия 2.3 констатируем, что позиционной стратегии, являющейся ε -наводящей на какой бы то ни было временной сетке, не существует.

Наконец, если исключены обозначенные выше случаи, рассматриваем третий, пограничный случай: тестовое множество A не содержит $(\varepsilon - \eta)$ -наводящих верхних неупреждающих преобразований, но содержит $(\varepsilon + \eta)$ -наводящее верхнее неупреждающее преобразование. В этом случае мы не можем утверждать, что разрешима (либо не разрешима) задача ε -наведения. Однако, применяя утверждение 1 следствия 2.3, в котором заменим $(\varepsilon - \eta)$ на $(\varepsilon + \eta)$, мы можем утверждать, что разрешима задача $(\varepsilon + 2\eta)$ -наведения: существует позиционная стратегия, являющаяся $(\varepsilon + 2\eta)$ -наводящей на временной сетке $(\tau_i)_{i=0}^{n+1}$. Стало быть, если в пограничном случае мы соглашаемся на гарантию $(\varepsilon + 2\eta)$ -наведения (вместо гарантии ε -наведения), то мы констатируем, что интересующая нас задача разрешима при малом ослаблении ее постановки.

Наличие пограничного случая, не позволяющего дать точный ответ на изначально поставленный вопрос о разрешимости задачи ε -наведения, есть отражение приближенности, неточности описанного алгоритмического критерия разрешимости. Однако с практической, инженерной точки зрения наличие такой неточности, возникающей лишь в специфическом пограничном случае и вдобавок устраняемой за счет малого ослабления постановки, не является, как представляется, существенным препятствием для принципиального прояснения вопроса о разрешимости.

При применении описанного алгоритмического критерия основной операцией выступает, очевидно, проверка того, содержится ли в тестовом множестве A какое-либо $(\varepsilon - \eta)$ -наводящее либо $(\varepsilon + \eta)$ -наводящее верхнее неупреждающее преобразование. Дальнейшее изложение, составляющее основное содержание этой работы, посвящено построению тестового множества A верхних неупреждающих преобразований, для которого указанная проверка может быть проведена в известном смысле экономно, и описанию соответствующего *проверочного алгоритма*. Экономность проверочного алгоритма достигается за счет переноса основных действий в пространство числовых функций, которые некоторым образом кодируют преобразования множества S дискретизованных управлений. Элементы построенного тестового множества A кодируются весьма простыми, именно 1-липпицевыми, функциями, что, собственно, и служит главным упрощающим фактором при реализации проверочного алгоритма.

3. Числовая кодировка дискретизованных управлений и коды неупреждающих преобразований

Зафиксируем положительное $a \leq 1/2$. Кодом дискретизованного управления v будем называть число

$$h(v) = \sum_{i=1}^n a^i v_i. \quad (3.1)$$

Ясно, что код каждого дискретизованного управления заключен в отрезке $[0, \bar{a}]$, где

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^n a^i = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a}. \quad (3.2)$$

Будем называть h кодировочим отображением.

Используя коды дискретизованных управлений, дадим метрическую характеристику принадлежности пар дискретизованных управлений к классам \mathcal{C}_k^2 ($k = 1, \dots, n$), определенных в разд. 2.

Лемма 3.1. Пусть $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_k^2$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$. Тогда

$$\rho_k^- \leq \left| h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \right| \leq \rho_k^+, \quad (3.3)$$

где

$$\rho_k^- = a^k \frac{1 - 2a + a^{n-k+1}}{1 - a}, \quad \rho_k^+ = a^k \frac{1 - a^{n-k+1}}{1 - a}; \quad (3.4)$$

при этом $\rho_k^- > 0$.

Доказательство. Заметим сначала, что неравенство $\rho_k^- > 0$ следует из предположения $a \leq 1/2$. Не нарушая общности, примем, что $v_k^{(1)} = 1$ и $v_k^{(2)} = 0$. Если $k = n$, то

$$h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) = a^n = \rho_n^- = \rho_n^+$$

и лемма доказана. Пусть $k < n$. Тогда

$$\begin{aligned} h(v^{(1)}) &\geq \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i^{(1)} + a^k, \\ h(v^{(2)}) &\leq \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i^{(2)} + \sum_{i=k+1}^n a^i = \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i^{(1)} + a^{k+1} \frac{1 - a^{n-k}}{1 - a}, \end{aligned}$$

откуда

$$h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \geq a^k \left(1 - \frac{1 - a^{n-k}}{1 - a} \right) = a^k \frac{1 - 2a + a^{n-k+1}}{1 - a} = \rho_k^-.$$

Так как $\rho_k^- > 0$, выполнено первое неравенство цепочки (3.3). Далее,

$$\begin{aligned} h(v^{(1)}) &\leq \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i^{(1)} + \sum_{i=k}^n a^i = \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i^{(1)} + a^k \frac{1 - a^{n-k+1}}{1 - a}, \\ h(v^{(2)}) &\geq \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{k-1} a^i v_i^{(1)}, \end{aligned}$$

откуда

$$h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \leq a^k \frac{1 - a^{n-k+1}}{1 - a} = \rho_k^+.$$

Таким образом, выполнено второе неравенство цепочки (3.3). Лемма доказана. \square

Из леммы 3.1 (см. первое неравенство в цепочке (3.3)) с учетом замечания 2.1 с очевидностью получаем следующее.

Следствие 3.1. *Кодирующее отображение h взаимно однозначно.*

Ниже для всех $k = 1, \dots, n$ зафиксируем числа ρ_k^- и ρ_k^+ , определенные согласно (3.4).

З а м е ч а н и е 3.1. Обратим внимание, что $\rho_k^+ > \rho_k^-$ для всякого $k \in \{1, \dots, n-1\}$; в самом деле,

$$\rho_k^+ - \rho_k^- = \frac{a^k}{1-a} (2a - 2a^{n-k+1}) > 0.$$

Кроме того, как отмечено в доказательстве леммы 3.1, имеем $\rho_n^+ = \rho_n^- = a^n$.

Лемма 3.2. *Пусть $a \leq 1/3$. Тогда $\rho_{k+1}^+ < \rho_k^-$ для каждого $k = 1, \dots, n-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с (3.4)

$$\begin{aligned} \rho_{k+1}^+ - \rho_k^- &= a^{k+1} \frac{1 - a^{n-k}}{1 - a} - a^k \frac{1 - 2a + a^{n-k+1}}{1 - a} \\ &= \frac{a^k}{1 - a} \left[a(1 - a^{n-k}) - (1 - 2a + a^{n-k+1}) \right] \\ &= \frac{a^k}{1 - a} (3a - 1 - 2a^{n-k+1}) < 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

В условиях леммы 3.2, т. е. при $a \leq 1/3$, лемма 3.1 допускает обратное утверждение, точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $a \leq 1/3$. Тогда для произвольных различных дискретизованных управлений $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ индекс $k \in \{1, \dots, n\}$ такой, что $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_k^2$, однозначно определяется условием*

$$\rho_k^- \leq \left| h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \right| \leq \rho_k^+. \quad (3.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные различные дискретизованные управления $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$. Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ таково, что $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_k^2$ (см. замечание 2.1). Тогда по лемме 3.1 выполняется (3.5). Обратно. Пусть для $k \in \{1, \dots, n\}$ выполняется (3.5). Поскольку левая часть цепочки (3.5) по лемме 3.1 положительна, то $h(v^{(1)}) \neq h(v^{(2)})$. Но по следствию 3.1 отображение h взаимно однозначно. Значит, $v^{(1)} \neq v^{(2)}$. Следовательно, в соответствии с замечанием 2.1 $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_m^2$ при некотором $m \in \{1, \dots, n\}$. Отсюда по лемме 3.1

$$\rho_m^- \leq \left| h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \right| \leq \rho_m^+. \quad (3.6)$$

Для завершения доказательства осталось показать, что $m = k$. Предположим что это не так, например, $m > k$. Тогда, применяя лемму 3.2, заключаем, что $\rho_m^+ < \rho_k^-$. Следовательно, второе неравенство в цепочке (3.6) противоречит первому неравенству в цепочке (3.5). Противоречие показывает, что предположение $m > k$ неверно. Аналогично исключаем случай $m < k$. Теорема доказана. \square

Теорема 3.1 говорит о том, что если $a \leq 1/3$, то для произвольных различных дискретизованных управлений $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ минимальный индекс k , для которого $v_k^{(1)} \neq v_k^{(2)}$, или, иначе, класс \mathcal{C}_k^2 , содержащий пару $(v^{(1)}, v^{(2)})$, однозначно восстанавливается по значению модуля разности $h(v^{(1)}) - h(v^{(2)})$ кодов этих дискретизованных управлений.

Далее примем, что $a \leq 1/3$. Таким образом, всюду ниже справедливо утверждение теоремы 3.1.

Введем числовое множество

$$H = \{h(v) : v \in \mathcal{C}\}$$

кодов всех дискретизованных управлений. Опираясь на взаимную однозначность кодирующего отображения h (следствие 3.1), будем естественным образом ассоциировать отображения в себя множества \mathcal{C} дискретизованных управлений с отображениями в себя множества H . Именно каждому отображению $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ поставим в соответствие функцию $\varphi_\alpha : H \rightarrow H$ такую, что для всякого $q \in H$ значение $\varphi_\alpha(q)$ есть код $h(v)$ дискретизованного управления v , кодом которого служит q :

$$\varphi_\alpha(q) = h(\alpha(h^{-1}(q))); \quad (3.7)$$

ясно, что функция φ_α определена корректно и однозначно; функцию φ_α будем называть *кодом* отображения α .

Коды φ_α отображений $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ исчерпывают все отображения множества H в себя. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Для любого отображения $\varphi : H \rightarrow H$ существует единственное отображение $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ такое, что $\varphi = \varphi_\alpha$.*

Доказательство. Возьмем произвольное отображение $\varphi : H \rightarrow H$. Определим α тем условием, что для каждого $v \in \mathcal{C}$

$$\alpha(v) = h^{-1}(\varphi(h(v))).$$

Тогда для каждого $q \in H$

$$\alpha(h^{-1}(q)) = h^{-1}(\varphi(h(q^{-1}(q)))) = h^{-1}(\varphi(q)).$$

Переходя к кодам дискретизованных управлений, записанных в левой и правой частях, получаем

$$h(\alpha(q^{-1}(q))) = \varphi(q),$$

это в силу произвольности $q \in H$ означает, что $\varphi = \varphi_\alpha$. Покажем, что α — единственное отображение множества \mathcal{C} в себя, обладающее этим свойством. Предположим противное: существует отображение $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, отличное от α и такое, что $\varphi = \varphi_\beta$. Пусть $v \in \mathcal{C}$ таково, что $\alpha(v) \neq \beta(v)$. Положим $q = h(v)$. Поскольку $\varphi = \varphi_\alpha = \varphi_\beta$, имеем

$$\varphi(q) = h(\alpha(q^{-1}(q))) = h(\beta(q^{-1}(q)))$$

или

$$h(\alpha(v)) = h(\beta(v)).$$

В силу взаимной однозначности кодирующего отображения $\alpha(v) = \beta(v)$, что противоречит определению дискретизованного управления v . Противоречие подтверждает, что α есть единственное отображение множества \mathcal{C} в себя такое, что $\varphi = \varphi_\alpha$. Доказательство леммы закончено. \square

Лемма 3.3 показывает следующее.

Следствие 3.2. *Функция $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ взаимно однозначно отображает класс всех отображений множества \mathcal{C} в себя на класс всех отображений множества H в себя.*

Наш следующий шаг — описать функциональные классы, которым принадлежат коды нижних и верхних неупреждающих преобразований (см. их определения в разд. 2).

Начнем с того, что, пользуясь теоремой 3.1, охарактеризуем нижние неупреждающие преобразования в терминах кодов их аргументов и значений. Ниже, в дополнение к обозначениям (3.4), принятым ранее для $k = 1, \dots, n$, полагаем $\rho_{n+1}^+ = 0$.

Лемма 3.4. *Функция $\alpha: \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$ есть нижнее неупреждающее преобразование тогда и только тогда, когда для любых $k \in \{2, \dots, n\}$ и $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathcal{C}$ таких, что*

$$\rho_k^- \leq \left| h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \right| \leq \rho_k^+, \quad (3.8)$$

выполняется

$$\left| h(\alpha(v^{(1)})) - h(\alpha(v^{(2)})) \right| \leq \rho_{k+1}^+. \quad (3.9)$$

Доказательство. Пусть α — нижнее неупреждающее преобразование. Возьмем $k \in \{2, \dots, n\}$ и $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathcal{C}$, удовлетворяющие (3.8). По теореме 3.1 $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_k^2$. Тогда, поскольку α есть нижнее неупреждающее преобразование, имеем $(\alpha(v^{(1)}), \alpha(v^{(2)})) \in \mathcal{C}_m^2$ при некотором $m \in \{k+1, \dots, n+1\}$. Следовательно, по теореме 3.1

$$\left| h(\alpha(v^{(1)})) - \alpha(h(v^{(2)})) \right| \leq \rho_m^+.$$

Пользуясь замечанием 3.1, леммой 3.2 и, в случае $m = n+1$, тем, что $\rho_{n+1}^+ = 0$, заключаем, что $\rho_m^+ \leq \rho_{k+1}^+$. Поэтому справедливо неравенство (3.9).

Обратно. Пусть функция α обладает тем свойством, что для любых $k \in \{2, \dots, n\}$ и $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathcal{C}$, удовлетворяющих (3.8), выполняется (3.9). Покажем, что α есть нижнее неупреждающее преобразование. Возьмем произвольные $k \in \{2, \dots, n\}$ и $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_k^2$. По теореме 3.1 верно (3.8). Тогда в соответствии со сделанным предположением имеет место (3.9). Если $h(\alpha(v^{(1)})) = h(\alpha(v^{(2)}))$, то, из-за взаимной однозначности кодирующего отображения (следствие 3.1), $\alpha(v^{(1)}) = \alpha(v^{(2)})$ и $(\alpha(v^{(1)}), \alpha(v^{(2)})) \in \mathcal{C}_{n+1}^2$. Пусть $h(\alpha(v^{(1)})) \neq h(\alpha(v^{(2)}))$. Тогда в силу взаимной однозначности кодирующего отображения $\alpha(v^{(1)}) \neq \alpha(v^{(2)})$. Значит (см. замечание 2.1),

$$(\alpha(v^{(1)}), \alpha(v^{(2)})) \in \mathcal{C}_m^2 \quad (3.10)$$

при некотором $m \in \{1, \dots, n\}$. Осталось установить, что $m \geq k+1$. Из (3.10), применяя теорему 3.1, извлекаем, что

$$\rho_m^- \leq \left| h(\alpha(v^{(1)})) - h(\alpha(v^{(2)})) \right|.$$

Тогда в силу (3.9) $\rho_m^- \leq \rho_{k+1}^+$. Если допустить, что $m < k+1$, то в соответствии с замечанием 3.1 и леммой 3.2, наоборот, $\rho_{k+1}^+ < \rho_m^-$. Противоречие показывает, что $m \geq k+1$. Доказательство закончено. \square

Пусть $\mathcal{C}^{(0)}$ — множество всех дискретизованных управлений $v = (v_1, \dots, v_n)$ таких, что $v_1 = 0$, и $\mathcal{C}^{(1)}$ — множество всех дискретизованных управлений $v = (v_1, \dots, v_n)$ таких, что $v_1 = 1$. Положим

$$H^{(0)} = \{h(v): v \in \mathcal{C}^{(0)}\}, \quad H^{(1)} = \{h(v): v \in \mathcal{C}^{(1)}\}. \quad (3.11)$$

Ясно, что $\mathcal{C}^{(0)}$ и $\mathcal{C}^{(1)}$ не пересекаются и в объединении дают \mathcal{C} . Отсюда в силу взаимной однозначности кодирующего отображения (следствие 3.1) заключаем, что $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$ также не пересекаются и в объединении дают H . Легко видеть, что

$$H^{(0)} \subset [0, \bar{a} - a], \quad H^{(1)} \subset [a, \bar{a}], \quad \bar{a} - a < a; \quad (3.12)$$

напомним, что \bar{a} задано по (3.2).

Лемма 3.4 позволяет установить такое важное для нас свойство кодов нижних неупреждающих отображений, как их принадлежность классу функций, липшицевых с единичной константой Липшица на каждом из множеств $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$.

Лемма 3.5. Пусть функция $\varphi: H \mapsto H$ есть код произвольного нижнего неупреждающего отображения α , т. е. $\varphi = \varphi_\alpha$. Тогда φ липшицева с единичной константой Липшица на каждом из множеств $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$, т. е.

$$|\varphi(q_1) - \varphi(q_2)| \leq |q_1 - q_2| \quad (3.13)$$

для всех $q_1, q_2 \in H^{(0)}$ и для всех $q_1, q_2 \in H^{(1)}$.

Доказательство. Возьмем произвольные $q_1, q_2 \in H^{(0)}$ (случай $q_1, q_2 \in H^{(1)}$ рассматривается аналогично). Покажем, что справедливо неравенство (3.13). При $q_1 = q_2$ оно выполняется тривиально. Пусть $q_1 \neq q_2$. Из-за взаимной однозначности кодирующего отображения (следствие 3.1) существуют единственные дискретизованные управления $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathcal{C}^{(0)}$ такие, что $h(v^{(i)}) = q_i$ ($i = 1, 2$). Поскольку $\varphi = \varphi_\alpha$, доказываемое неравенство (3.13) может быть переписано как

$$\left| h(\alpha(v^{(1)})) - h(\alpha(v^{(2)})) \right| \leq \left| h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \right|. \quad (3.14)$$

Поскольку $q_1 \neq q_2$, то $v^{(1)} \neq v^{(2)}$. Тогда $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_k^2$ для некоторого $k \in \{2, \dots, n\}$ (k — наименьший индекс, с которого элементы последовательностей $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ начинают различаться), и по лемме 3.1

$$\rho_k^- \leq \left| h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \right| \leq \rho_k^+. \quad (3.15)$$

Отсюда и из того, что α — нижнее неупреждающее преобразование, по лемме 3.4 заключаем, что

$$\left| h(\alpha(v^{(1)})) - h(\alpha(v^{(2)})) \right| \leq \rho_{k+1}^+. \quad (3.16)$$

Но по лемме 3.2 $\rho_{k+1}^+ < \rho_k^-$, поэтому из (3.16) и (3.15) следует (3.14). Доказательство закончено. \square

Обратимся к верхним неупреждающим преобразованиям. Следующая лемма и по формулировке, и по обоснованию аналогична лемме 3.4, ее доказательство поэтому опускаем.

Лемма 3.6. Функция $\alpha: \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$ есть верхнее неупреждающее преобразование тогда и только тогда, когда для любых $k \in \{2, \dots, n\}$ и $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathcal{C}$ таких, что

$$\rho_k^- \leq \left| h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \right| \leq \rho_k^+, \quad (3.17)$$

выполняется

$$\left| h(\alpha(v^{(1)})) - h(\alpha(v^{(2)})) \right| \leq \rho_k^+. \quad (3.18)$$

Опираясь на лемму 3.6, покажем, что множество кодов верхних неупреждающих отображений содержит в себе класс всех функций $\varphi: H \mapsto H$, обладающих свойством липшицевости с единичной константой Липшица на каждом из множеств $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$.

Лемма 3.7. Пусть функция $\varphi: H \mapsto H$ липшицева с единичной константой Липшица на каждом из множеств $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$, т. е.

$$|\varphi(q_1) - \varphi(q_2)| \leq |q_1 - q_2| \quad (3.19)$$

для всех $q_1, q_2 \in H^{(0)}$ и для всех $q_1, q_2 \in H^{(1)}$. Тогда φ есть код некоторого верхнего неупреждающего отображения α , т. е. $\varphi = \varphi_\alpha$.

Доказательство. По лемме 3.3 существует единственное отображение $\alpha: \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$ такое, что $\varphi = \varphi_\alpha$. Последнее по определению означает, что

$$\varphi_\alpha(q) = h(\alpha(h^{-1}(q))) \quad (3.20)$$

для всякого $q \in H$. Покажем, что α есть верхнее неупреждающее отображение. Воспользуемся леммой 3.6. Именно возьмем произвольные $k \in \{2, \dots, n\}$ и $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathcal{C}$, удовлетворяющие (3.17), и проверим, что выполняется (3.18). Неравенства (3.17) по лемме 3.1 означают, что $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}_k^2$. Стало быть, первые элементы последовательностей $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ совпадают, т. е. $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}^{(0)}$ либо $(v^{(1)}, v^{(2)}) \in \mathcal{C}^{(1)}$. Пусть, для определенности, имеет место первый из этих случаев. Тогда $(h(v^{(1)}), h(v^{(2)})) \in H^{(0)}$. Отсюда на основании предположения леммы (см. (3.19)) заключаем, что

$$\left| \varphi_\alpha(h(v^{(1)})) - \varphi_\alpha(h(v^{(2)})) \right| \leq \left| h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \right|;$$

последнее ввиду (3.20) можно переписать как

$$\left| h(\alpha(v^{(1)})) - h(\alpha(v^{(2)})) \right| \leq \left| h(v^{(1)}) - h(v^{(2)}) \right|.$$

Отсюда и из второго неравенства из (3.17) получаем (3.18). Доказательство закончено. \square

4. Тестовое множество и проверочный алгоритм

Введем в рассмотрение множество L всех функций $\varphi: H \mapsto H$, липшицевых с единичной константой Липшица на каждом из множеств $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$, т. е. таких, что $|\varphi(q_1) - \varphi(q_2)| \leq |q_1 - q_2|$ для всех $q_1, q_2 \in H^{(0)}$ и для всех $q_1, q_2 \in H^{(1)}$. Из лемм 3.5 и 3.7 вытекает следующее.

Следствие 4.1. *Множество L содержит класс кодов всех нижних неупреждающих преобразований и содержится в классе кодов всех верхних неупреждающих преобразований.*

Определим A как множество всех верхних неупреждающих преобразований, коды которых содержатся в L . В соответствии со следствием 4.1 и с учетом следствия 3.2 заключаем, что A содержит множество всех нижних неупреждающих преобразований. Стало быть, множество A удовлетворяет условию следствия 2.3. Учитывая это, будем использовать его для реализации описанного в разд. 2 приближенного алгоритмического критерия разрешимости задачи ε -наведения, т. е. примем A в качестве тестового множества.

Как отмечено в разд. 2, основной операцией при реализации этого алгоритмического критерия выступает проверка того, содержится ли в тестовом множестве A ν -наводящее верхнее неупреждающее преобразование, где ν есть одно из чисел $\varepsilon - \eta$ и $\varepsilon + \eta$. Опишем алгоритм такой проверки — проверочный алгоритм $\mathcal{A}(\nu)$, опирающийся на специфику введенного тестового множества A , именно на то, что коды элементов этого множества исчерпывают множество L .

Прежде всего, проведем естественное упорядочивание элементов числовых множеств $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$ (см. (3.11)) — положим

$$H^{(0)} = \{q_1^{(0)}, \dots, q_s^{(0)}\}, \quad q_1^{(0)} < \dots < q_s^{(0)},$$

$$H^{(1)} = \{q_1^{(1)}, \dots, q_s^{(1)}\}, \quad q_1^{(1)} < \dots < q_s^{(1)}.$$

Ясно, что s есть число всех дискретизованных управлений, первый элемент которых равен 0 (число элементов множества $\mathcal{C}^{(0)}$), и число всех дискретизованных управлений, первый элемент которых равен 1 (число элементов множества $\mathcal{C}^{(1)}$):

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} C_i^{n-1} = 2^{n-1}$$

(использован бином Ньютона). Как видно из (3.11), (3.12) и (3.2),

$$q_1^{(0)} = 0, \quad q_s^{(0)} = \bar{a} - a < a = q_1^{(1)}, \quad q_s^{(1)} = \bar{a}.$$

Напомним, что объединение множеств $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$ есть множество H кодов всех дискретизованных управлений, служащее областью определения и областью значений всех функций из класса L .

Для каждого $k = 1, \dots, s$ обозначим:

$$H_k^{(0)} = \{q_1^{(0)}, \dots, q_k^{(0)}\}, \quad H_k^{(1)} = \{q_1^{(1)}, \dots, q_k^{(1)}\};$$

множества $H_k^{(0)}$ и $H_k^{(1)}$ представляют собой суженные, “частичные” области определения функций из класса L , при этом, очевидно,

$$H_s^{(0)} = H^{(0)}, \quad H_s^{(1)} = H^{(1)}. \quad (4.1)$$

Часто выполняемой (элементарной) операцией алгоритма $\mathcal{A}(\nu)$ выступает проверка того, что числовая пара $(p, q) \in H^2$ кодирует дискретизованные управления, развертки которых наводят систему на замкнутую ν -окрестность $[M]^\nu$ целевого множества. Такие пары будем называть ν -наводящими. Точное определение таково. Пару $(p, q) \in H^2$ будем называть ν -наводящей, если дискретизованные управления u и v , кодами которых выступают соответственно p и q ($p = h(u)$, $q = h(v)$), обладают следующим свойством: для решения (Каратеодори) $x(\cdot)$ на $[t_0, \vartheta]$ задачи Коши (1.1), где $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — развертки дискретизованных управлений u и v соответственно, выполняется включение $x(\vartheta) \in [M]^\nu$.

Таким образом, чтобы проверить, является ли пара $(p, q) \in H^2$ ν -наводящей, следует провести следующие действия: во-первых, “раскодировать” числа p и q — найти дискретизованные управления $u = h^{-1}(p)$ и $v = h^{-1}(q)$, во-вторых, “развернуть u и v во времени” — сформировать допустимое управление $u(\cdot)$ первого игрока и допустимое управление $v(\cdot)$ второго игрока, являющиеся развертками дискретизованных управлений u и v соответственно, в-третьих, найти решение $x(\cdot)$ задачи Коши (1.1) для построенных допустимых управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, в-четвертых, проверить, удовлетворяется ли для решения $x(\cdot)$ включение $x(\vartheta) \in [M]^\nu$. Если оно удовлетворяется, пара (p, q) является ν -наводящей, если не удовлетворяется, пара (p, q) не является ν -наводящей.

Работа проверочного алгоритма $\mathcal{A}(\nu)$ опирается на критерий, приведенный ниже в теореме 4.1 и вытекающий из определения тестового множества A .

Для $i = 0, 1$ назовем i -кортежем последовательность $(D_k^{(i)}(\nu))_{k=1}^s$ подмножеств H , определяемую по индукции следующим образом. Множество $D_1^{(i)}(\nu)$ есть совокупность всех $p_1^{(i)} \in H$ таких, что пара $(p_1^{(i)}, q_1^{(i)})$ является ν -наводящей. Если $D_1^{(i)}(\nu)$ пусто, то $D_2^{(i)}(\nu), \dots, D_s^{(i)}(\nu)$ пусты. Если для $k \in \{1, \dots, s-1\}$ определены непустые $D_1^{(i)}(\nu), \dots, D_k^{(i)}(\nu) \subset H$, то $D_{k+1}^{(i)}(\nu)$ есть множество всех $p_{k+1}^{(i)} \in H$ таких, что пара $(p_{k+1}^{(i)}, q_{k+1}^{(i)})$ является ν -наводящей и

$$\left| p_{k+1}^{(i)} - p_k^{(i)} \right| \leq q_{k+1}^{(i)} - q_k^{(i)} \quad (4.2)$$

при некотором $p_k^{(i)} \in D_k^{(i)}(\nu)$. Если $D_{k+1}^{(i)}(\nu)$ пусто и $k+1 < s$, то $D_{k+2}^{(i)}(\nu), \dots, D_s^{(i)}(\nu)$ пусты. Будем говорить, что i -кортеж $(D_k^{(i)}(\nu))_{k=1}^s$ *непуст*, если множества $D_1^{(i)}(\nu), \dots, D_s^{(i)}(\nu)$ непусты.

Теорема 4.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Тестовое множество A содержит ν -наводящее верхнее неупреждающее преобразование тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \{0, 1\}$ i -кортеж $(D_k^{(i)}(\nu))_{k=1}^s$ непуст.*

2) *Если для каждого $i \in \{0, 1\}$ i -кортеж $(D_k^{(i)}(\nu))_{k=1}^s$ непуст, то*

(i) существует функция $\psi: H \mapsto H$ такая, что

$$\psi(q_k^{(i)}) \in D_k^{(i)}(\nu) \quad (4.3)$$

для всех $k = 1, \dots, s$, $i = 0, 1$ и

$$\left| \psi(q_{k+1}^{(i)}) - \psi(q_k^{(i)}) \right| \leq q_{k+1}^{(i)} - q_k^{(i)} \quad (4.4)$$

для всех $k = 1, \dots, s-1$, $i = 0, 1$;

(ii) ψ есть код некоторого ν -наводящего верхнего неупреждающего преобразования $\alpha \in A$.

Доказательство. Обратимся к утверждению 1. Допустим, что тестовое множество A содержит ν -наводящее верхнее неупреждающее преобразование α . Тогда по определению множества A код ψ верхнего неупреждающего преобразования α принадлежит множеству L , т. е. удовлетворяет условию Липшица с единичной константой Липшица на каждом из множеств $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$. Ввиду (4.1) это условие эквивалентно (4.4). Поскольку верхнее неупреждающее преобразование α ν -наводящее и ψ — его код, то легко видеть, что для каждого $q \in H$ пара $(\psi(q), q) \in H^2$ является ν -наводящей. Отсюда, применяя индукцию, выводим, что $\psi(q_k^{(i)}) \in D_k^{(i)}(\nu)$ ($k = 1, \dots, s$, $i = 0, 1$). Следовательно, для каждого $i \in \{0, 1\}$ i -кортеж $(D_k^{(i)}(\nu))_{k=1}^s$ непуст.

Установим обратное. Пусть для каждого $i \in \{0, 1\}$ i -кортеж $(D_k^{(i)}(\nu))_{k=1}^s$ непуст. Покажем, что справедливы заключения (i), (ii) утверждения 2. Тем самым мы докажем утверждение 2 и завершим доказательство утверждения 1. Пусть $i \in \{0, 1\}$. Возьмем произвольный элемент $p_s^{(i)} \in D_s^{(i)}(\nu)$ и положим

$$\psi(q_s^{(i)}) = p_s^{(i)}.$$

По определению i -кортежа пара $(p_s^{(i)}, q_s^{(i)})$ является ν -наводящей, и при этом существует $p_{s-1}^{(i)} \in D_{s-1}^{(i)}(\nu)$ такое, что

$$\left| p_s^{(i)} - p_{s-1}^{(i)} \right| \leq q_s^{(i)} - q_{s-1}^{(i)}.$$

Положим

$$\psi(q_{s-1}^{(i)}) = p_{s-1}^{(i)}.$$

Тогда имеем (4.3) для $k = s, s-1$ и (4.4) для $k = s-1$. Рассматривая данное заключение как базу индукции и аналогичным образом проводя шаг индукции, приходим к существованию функции $\psi: H \mapsto H$, удовлетворяющей включению (4.3) для всех $k = 1, \dots, s$, $i = 0, 1$ и неравенству (4.4) для всех $k = 1, \dots, s-1$, $i = 0, 1$. Выполнение неравенства (4.4) для всех $k = 1, \dots, s-1$, $i = 0, 1$ означает, что $\psi \in L$. Тогда в соответствии с леммой 3.7 ψ есть код некоторого верхнего неупреждающего преобразования α , т. е. $\psi = \varphi_\alpha$. Отсюда по определению тестового множества A имеем $\alpha \in A$.

Осталось проверить, что верхнее неупреждающее преобразование α является ν -наводящим. Рассмотрим движение $x(\cdot)$, порожденное верхним неупреждающим преобразованием α и произвольным дискретизованным управлением v . Следует установить, что $x(\vartheta) \in [M]^\nu$.

По определению (см. разд. 2) $x(\cdot)$ есть решение на $[t_0, \vartheta]$ задачи Коши (1.1), где $u(\cdot)$ — развертка дискретизованного управления $u = \alpha(v)$ и $v(\cdot)$ — развертка дискретизованного управления v . Пусть q — код дискретизованного управления v , т. е. $v = h^{-1}(q)$. Так как $q \in H$, то $q = q_k^{(i)}$ для некоторых $k = 1, \dots, s-1$, $i = 0, 1$. Поскольку ψ есть код α , то (см. (3.7))

$$\psi(q_k^{(i)}) = \varphi_\alpha(q_k^{(i)}) = h(\alpha(h^{-1}(q_k^{(i)}))) = h(\alpha(v)) = h(u). \quad (4.5)$$

Как установлено выше, справедливо включение (4.3). Отсюда, привлекая определение его правой части, множества $D_k^{(i)}(\nu)$, заключаем, что пара $(\psi(q_k^{(i)}), q_k^{(i)})$ является ν -наводящей. Последнее вместе с (4.5) означает, что для вышеопределенного решения $x(\cdot)$ выполняется $x(\vartheta) \in [M]^\nu$. Доказательство закончено. \square

Переходим к собственно описанию проверочного алгоритма $\mathcal{A}(\nu)$. Алгоритм складывается из трех последовательно выполняемых этапов, которые назовем *этап построения 0-кортежа*, *этап построения 1-кортежа* и *этап синтеза*. Каждый из первых двух этапов выполняется максимум за s шагов и может оборваться на любом из них заключением о пустоте — об отсутствии в тестовом множестве A ν -наводящих верхних неупреждающих преобразований. Заключение о пустоте завершает работу алгоритма. Если первые два этапа выполняются полностью и не ведут к заключению о пустоте, то на этапе синтеза делается заключение о непустоте — о наличии в тестовом множестве A ν -наводящих верхних неупреждающих преобразований — и предъявляется такое верхнее неупреждающее преобразование.

Опишем этап построения 0-кортежа.

Шаг 1. Фиксируем (единственный) элемент $q_1^{(0)}$ множества $H_1^{(0)}$ и, перебирая числа $p_1^{(0)} \in H$, отмечаем те из них, для которых пара $(p_1^{(0)}, q_1^{(0)})$ является ν -наводящей. Формируем множество $D_1^{(0)}(\nu)$ всех $p_1^{(0)} \in H$ с этим свойством. Если $D_1^{(0)}(\nu)$ пусто, делаем заключение о пустоте и заканчиваем работу алгоритма. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Фиксируем наибольший элемент $q_2^{(0)}$ множества $H_2^{(0)}$ и, перебирая числа $p_2^{(0)} \in H$, отмечаем те из них, для которых выполняются два условия: во-первых, пара $(p_2^{(0)}, q_2^{(0)})$ является ν -наводящей, во-вторых, для некоторого $p_1^{(0)} \in D_1^{(0)}(\nu)$ справедливо неравенство $|p_2^{(0)} - p_1^{(0)}| \leq q_2^{(0)} - q_1^{(0)}$ (см. (4.2)). Формируем множество $D_2^{(0)}(\nu)$ всех $p_2^{(0)} \in H$, удовлетворяющих этим двум условиям. Если $D_2^{(0)}(\nu)$ пусто, делаем заключение о пустоте и заканчиваем работу алгоритма. В противном случае переходим к шагу 3.

Пусть выполнены шаги $1, \dots, k$, где $1 \leq k \leq s - 1$, и ни на одном из них не сделано заключение о пустоте. Тогда построены непустые множества $D_1^{(0)}(\nu), \dots, D_k^{(0)}(\nu) \subset H$. С использованием множества $D_k^{(0)}(\nu)$ выполняем шаг $k + 1$.

Шаг $k + 1$. Фиксируем наибольший элемент $q_{k+1}^{(0)}$ множества $H_{k+1}^{(0)}$. Перебирая числа $p_{k+1}^{(0)} \in H$, отмечаем те из них, для которых выполняются два условия: во-первых, пара $(p_{k+1}^{(0)}, q_{k+1}^{(0)})$ является ν -наводящей, во-вторых, для некоторого $p_k^{(0)} \in D_k^{(0)}(\nu)$ справедливо неравенство $|p_{k+1}^{(0)} - p_k^{(0)}| \leq q_{k+1}^{(0)} - q_k^{(0)}$ (см. (4.2)). Формируем множество $D_{k+1}^{(0)}(\nu)$ всех $p_{k+1}^{(0)} \in H$, удовлетворяющих этим двум условиям. Если $D_{k+1}^{(0)}(\nu)$ пусто, делаем заключение о пустоте и заканчиваем работу алгоритма. В противном случае переходим к шагу $k + 2$, если $k + 1 < s$, либо к следующему этапу, если $k + 1 = s$.

Если ни на одном из шагов $1, \dots, s$ не сделано заключение о пустоте, построен, как легко видеть, непустой 0-кортеж $(D_k^{(0)}(\nu))_{k=1}^s$.

Описание этапа построения 1-кортежа опускаем. Оно дословно повторяет описание этапа построения 0-кортежа с заменой верхнего индекса 0 на 1.

Если ни на одном из этапов построения 0- и 1-кортежей не сделано заключение о пустоте, построены непустые 0-кортеж $(D_k^{(0)}(\nu))_{k=1}^s$ и 1-кортеж $(D_k^{(1)}(\nu))_{k=1}^s$. В этом случае переходим к этапу синтеза.

Опишем этап синтеза.

Опираясь на теорему 4.1, делаем заключение о непустоте — о наличии в тестовом множестве A ν -наводящего неупреждающего преобразования и строим такое преобразование. Построение проводим за $s + 1$ шагов, следуя алгоритму, описанному в доказательстве теоремы 4.1.

Шаг 1. Для $i = 0, 1$ отмечаем произвольные $p_s^{(i)} \in D_s^{(i)}(\nu)$ и полагаем $\psi(q_s^{(i)}) = p_s^{(i)}$.

Шаг 2. Для $i = 0, 1$ находим $p_{s-1}^{(i)} \in D_{s-1}^{(i)}(\nu)$ такие, что $|p_s^{(i)} - p_{s-1}^{(i)}| \leq q_s^{(i)} - q_{s-1}^{(i)}$, и полагаем $\psi(q_{s-1}^{(i)}) = p_{s-1}^{(i)}$.

Переход к шагу $k + 1$, где $1 \leq k \leq s - 1$, предварен построением значений $\psi(q_s^{(i)}) = p_s^{(i)} \in D_s^{(i)}(\nu), \dots, \psi(q_{s-k}^{(i)}) = p_{s-k}^{(i)} \in D_{s-k}^{(i)}(\nu)$.

Шаг $k + 1$. Для $i = 0, 1$ находим $p_{s-k-1}^{(i)} \in D_{s-k-1}^{(i)}(\nu)$ такие, что $|p_{s-k}^{(i)} - p_{s-k-1}^{(i)}| \leq q_{s-k}^{(i)} - q_{s-k-1}^{(i)}$, и полагаем $\psi(q_{s-k-1}^{(i)}) = p_{s-k-1}^{(i)}$.

После завершения шага s построена функция $\psi: H \mapsto H$ такая, что $\psi(q_k^{(i)}) = p_k^{(i)} \in D_s^{(i)}(\nu)$ ($k = s, \dots, 1, i = 0, 1$). Как показано в доказательстве теоремы 4.1, ψ есть код ν -наводящего верхнего неупреждающего преобразования α . На шаге $s + 1$ производим построение α .

Шаг $s + 1$. В соответствии с (3.7) для каждого дискретизованного управления v полагаем $\alpha(v) = h^{-1}(\psi(h(v)))$.

Завершим материал неформальным комментарием о сложности проверочного алгоритма $\mathcal{A}(\nu)$.

Как видим, на этапах построения i -кортежей ($i = 0, 1$) проверочный алгоритм $\mathcal{A}(\nu)$ производит направленный перебор всех пар дискретизованных управлений: на каждом шаге $k + 1$ при фиксации дискретизованного управления v второго игрока (или, что то же, его кода $q_{k+1}^{(i)}$) перебираются все дискретизованные управления u первого игрока, при этом часть дискретизованных управлений u (или, что то же, их кодов $p_{k+1}^{(i)}$) выделяется и запоминается. Выделяемые дискретизованные управления u подчиняются естественному требованию наведения — u и v наводят систему на множество $[M]^\nu$ — и, дополнительно (на всех шагах, кроме первого), описанному выше простому метрическому ограничению на их коды $p_{k+1}^{(i)}$ (см. (4.2)). Последнее метрическое ограничение обусловлено свойством 1-липшицевости отображений из класса L кодов преобразований из тестового множества A . Выполнение этого ограничения на всех шагах ведет к тому, что в итоге перебора формируются 0- и 1-кортежи, которые на этапе синтеза (в отсутствии заключения о пустоте) выливаются в конструкцию верхнего неупреждающего отображения из тестового множества A .

Заметим, что если обозначенную переборную процедуру освободить на каждом шаге от проверки дополнительного метрического ограничения (см. (4.2)), то эта процедура сведется к проверке гарантированной разрешимости (первым игроком) задачи ν -наведения (в классе дискретизованных управлений) в условиях, когда первому игроку заранее сообщается дискретизованное управление второго игрока. В теории позиционных дифференциальных игр решение задачи наведения в таких информационных условиях (правда, с привлечением всех допустимых управлений игроков) называют программной конструкцией (см. [2]). В определенных случаях, известных как регулярные случаи, программная конструкция ведет к разрешимости задачи наведения в классе позиционных стратегий. Методологическое значение таких случаев состоит в принципиальном упрощении перебора, необходимого для проверки разрешимости последней задачи: перебор адекватных этой задаче управляющих пар, составленных из позиционных стратегий первого игрока и допустимых управлений второго игрока, заменяется перебором пар допустимых управлений игроков.

Переборная процедура проверочного алгоритма \mathcal{A} по порядку сложности, как видим, мало отличается от переборной процедуры программной конструкции (точнее, от ее аппроксимационного варианта, в котором все допустимые управления игроков заменены на дискретизованные управления). Действительно, дополнительные вычислительные операции проверочного алгоритма \mathcal{A} — проверка выполнения метрических ограничений (см. (4.2)) — сводятся к оценкам расстояний между числовыми кодами дискретизованных управлений первого игрока (текущего и построенных ранее); сложность этих операций, очевидно, значительно ниже сложности операций по проверке свойства наведения для перебираемых управлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
5. **Krasovskii A.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New-York: Springer Verlag, 1988. 517 p.
6. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Boston: Birkhäuser, 1995. 322 p.
7. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Аппроксимационная линеаризация в дифференциальных играх наведения-уклонения // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 1998. Т. 220. С. 173–194.
8. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Об одном алгоритмическом критерии разрешимости игровых задач для линейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1. С. 2–10.
9. **Quincampoix M., Veliov V.M.** Optimal control of uncertain systems with incomplete information for the disturbances // SIAM J. Control Optim. 2005. Vol. 43, no. 4. P. 1373–1399.
10. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
11. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
12. **Roxin E.** Axiomatic approach in differential games // J. Opt. Theory Appl. 1969. Vol. 3. P. 156–163.
13. **Rull-Nardzewski C.** A theory of pursuit and evasion // Advances in Game Theory, Princeton Univ. Press. 1964. P. 113–126.
14. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

Кряжимский Аркадий Викторович

Поступила 01.03.2011

д-р физ.-мат. наук, академик РАН

Математический ин-т им. В.А. Стеклова РАН, Москва

Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия

e-mail: kryazhim@mi.ras.ru

УДК 517.2, 519.63

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВХОДОВ В ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ¹

В. И. Максимов

Исследуется задача восстановления распределенных входных воздействий в линейных параболических уравнениях. Указывается алгоритм решения этой задачи, являющийся устойчивым к информационным помехам и погрешностям вычислений. Алгоритм, основанный на соединении методов теории некорректных задач и теории позиционного управления, позволяет осуществить процесс восстановления неизвестных входных воздействий на основе неточных измерений фазовых координат системы в дискретные достаточно частые моменты времени. В случае, когда вход — функция с ограниченной вариацией, устанавливается оценка сверху скорости сходимости.

Ключевые слова: динамическое восстановление, метод управляемых моделей.

V. I. Maksimov. On the reconstruction of inputs in linear parabolic equations.

The problem of reconstructing distributed inputs in linear parabolic equations is investigated. The algorithm proposed for solving this problem is stable with respect to information disturbances and computational errors. It is based on the combination of methods from the theory of ill-posed problems and from the theory of positional control. The process of reconstructing unknown inputs implemented by the algorithm employs inaccurate measurements of phase coordinates of the system at discrete sufficiently frequent times. In the case when the input is a function of bounded variation, an upper estimate is established for the convergence rate.

Keywords: dynamic reconstruction, method of controlled models.

1. Введение

Рассматривается задача восстановления распределенных входных воздействий в линейных параболических уравнениях по результатам неточных измерений фазовых состояний. Предполагается, что на заданном конечном временном интервале функционирует некоторая система, описываемая параболическим уравнением. Эволюция фазового состояния системы, т. е. решение уравнения, определяется неизвестным входом. Необходимо в “реальном времени” организовать процесс восстановления входа при условии, что в дискретные (достаточно частые) моменты неточно замеряются фазовые состояния. Точное восстановление истинного, действующего на уравнение, входа, вообще говоря, невозможно в силу погрешности измерений. Поэтому мы предполагаем построить некоторую его аппроксимацию. Потребуем, чтобы аппроксимация была сколь угодно близка к истинному входу при условии достаточной малости измерительных ошибок и расстояния между моментами измерений фазовых состояний.

Описанная задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем и в более общем контексте вкладывается в проблематику теории некорректных задач. Один из подходов к исследованию этой задачи, основанный на идеях теории позиционного управления [1] и теории некорректных задач [2], был предложен в работе [3] и развит в монографии [4]. Суть описанной в цитированных выше работах методики состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления некоторой вспомогательной динамической системой, моделью. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени “аппроксимирует” неизвестный

¹Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 09-01-00378 и 11-01-00042), программ Президиума УрО РАН (09-П-1-1014 и 09-С-1-1010) и Программы поддержки ведущих научных школ России (НШ-65590.2010).

вход. В настоящей работе, продолжающей исследования [3, 4], конструируется алгоритм решения описанной задачи, который является устойчивым к информационным и вычислительным ошибкам. При этом рассматривается случай отсутствия “мгновенных” ограничений на входные воздействия. Другие алгоритмы динамического восстановления “неограниченных” управлений в распределенных системах, основанные на принципе обратной связи, см. в работах [5–9], в которых приведена достаточно обширная библиография.

2. Постановка задачи. Метод решения

Рассматривается параболическое уравнение

$$x_t(t, \eta) - \sum_{k,l=1}^m (a_{k,l}(\eta)x_{\eta_k}(t, \eta))_{\eta_l} = u(t, \eta), \quad (t, \eta) \in Q = T \times \Omega \quad (2.1)$$

с краевым

$$x(t, \sigma) = 0 \quad \text{при} \quad (t, \sigma) \in \Sigma = T \times \Gamma$$

и начальным

$$x(t_0, \eta) = x_0(\eta) \in L_2(\Omega)$$

условиями. Здесь $T = [t_0, \vartheta]$ — временной интервал, $x_{\eta_k}(t, \eta) = \frac{\partial x(t, \eta)}{\partial \eta_k}$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ($m = 1, 2$ или 3) — ограниченная достаточно гладкая (например, класса C^2) область с границей Γ . Коэффициенты $a_{k,l}(\cdot)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k,l=1}^m a_{k,l}(\eta)\xi_k\xi_l \geq \omega|\xi|_{\mathbb{R}^m}^2 \quad \text{при всех} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m \quad \text{и п.в.} \quad \eta \in \Omega, \quad \omega = \text{const} > 0, \quad (2.2)$$

$$a_{k,l}(\eta) = a_{l,k}(\eta) \quad \text{п.в. на} \quad \Omega \quad \forall k, l \in [1 : m], \quad a_{k,l}(\cdot) \in C^1(\Omega).$$

Уравнение (2.1) может быть формализовано в операторном виде [10]

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = u(t), \quad t \in T, \quad (2.3)$$

где $A : V \rightarrow V^*$ — эллиптический оператор, порожденный

$$A_0x = - \sum_{k,l=1}^m (a_{k,l}(\eta)x_{\eta_k}(\eta))_{\eta_l},$$

т. е. линейный непрерывный оператор, определяемый соотношением

$$\langle Ay, z \rangle = \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^m a_{k,l}(\eta)y_{\eta_k}(\eta)z_{\eta_l}(\eta)d\eta \quad \forall y, z \in V.$$

Решение уравнения (2.1) будем, следуя [10, 11], понимать в слабом смысле. Именно пусть $u(\cdot) \in L_2(T; H)$, $x_0 \in H$. Функция $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ называется слабым решением уравнения (2.1) ((2.3)), если $x(\cdot) \in L_2(T; V)$, $\dot{x}(\cdot) \in L_2(T; V^*)$ и выполняется соотношение

$$\langle \dot{x}(t) + Ax(t), v \rangle = \langle u(t), v \rangle \quad \forall v \in V \quad \text{и п.в.} \quad t \in T.$$

Здесь и ниже $V^* = (H_0^1(\Omega))^* = H^{-1}(\Omega)$ — сопряженное пространство; символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает двойственность между V^* и V , а символ (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в пространстве H ; $H_2(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ — стандартные соболевские пространства [10, 11].

Как известно, множество собственных чисел $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^{+\infty}$ оператора A может быть упорядочено

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lambda_j \rightarrow +\infty \text{ при } j \rightarrow +\infty.$$

Этому множеству соответствует множество собственных функций $\{l_j\}_{j=1}^{+\infty}$, $l_j \in H_2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, образующих ортонормированный в $L_2(\Omega)$ базис.

Рассматриваемая в настоящей работе задача состоит в следующем. На промежутке времени T реализуется решение $x(\cdot) = x^r(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u_r(\cdot))$ уравнения (2.1), зависящее от изменяющегося во времени управления $u_r(\cdot) \in L_2(T; H)$. Будем предполагать: начальное состояние x_0 и правая часть $u_r(\cdot)$ таковы, что решение уравнения (2.1) — $x^r(\cdot)$ является непрерывной функцией со значениями в V , т. е. $x^r(\cdot) \in C(T; V)$. Достаточные условия такой гладкости решения можно найти, например, в монографиях [11, 12]. Интервал T разбит на конечное число полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m - 1]$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$. В моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, измеряются (приближенно) величины $x^r(\tau_i)$, т. е. находятся элементы $\xi_i^h \in V$ со свойствами:

$$\|x^r(\tau_i) - \xi_i^h\|_V \leq h. \quad (2.4)$$

Здесь $h \in (0, 1)$ — уровень информационной погрешности. Решение уравнения (2.1) — $x^r(\cdot)$ неизвестно. Задача состоит в приближенном вычислении $u_r(\cdot)$ на основе неточного измерения $x^r(\tau_i)$.

В дальнейшем полагаем, что известно ограниченное (в метрике пространства V) множество K , в котором остается траектория $x^r(\cdot)$, т. е.

$$x^r(t) \in K, \quad t \in T.$$

В таком случае всякое h -точное измерение $\xi^h(\cdot)$, т. е. $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x^r(\cdot), h)$, не покидает замыкание (в пространстве V) единичной окрестности множества K (обозначим это замыкание символом \bar{K}_1). Здесь Ξ_T — множество измерений, т. е. множество всех кусочно-постоянных функций $\xi(\cdot) : T \rightarrow V$, $\Xi(x^r(\cdot), h)$ — множество всех h -точных результатов измерений, т. е. множество всех функций $\xi^h(\cdot) \in \Xi_T$, удовлетворяющих (2.4). Таким образом,

$$\xi^h(t) \in \bar{K}_1, \quad t \in T.$$

Заметим, что пространство V вложено в пространство H компактно (теорема Реллиха — Кондрашова). Учитывая критерий компактности в пространстве с базисом [13, с. 247], заключаем, что ряды Фурье

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\xi, l_j) l_j$$

сходятся к элементам $\xi \in \bar{K}_1$ равномерно. В дальнейшем символом y_j будем обозначать коэффициенты ряда Фурье элемента $y \in H$, т. е.

$$y_j = (y, l_j).$$

Таким образом, реализация (в момент τ_i) траектории $x^r(\tau_i)$ представима в виде

$$x^r(\tau_i, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} l_j(\eta), \quad \eta \in \Omega,$$

где

$$x_{ij} = (x^r(\tau_i), l_j).$$

Для того чтобы приближенно вычислить $u_r(\cdot)$, мы воспользуемся методом позиционного управления с моделью [3–9]. В соответствии с этим методом задача восстановления неизвестного управления по результатам измерения величин ξ_i^h заменяется некоторой другой задачей, а именно задачей позиционного управления вспомогательной системой M (моделью).

Таким образом, задача восстановления $u_r(\cdot)$ сводится к следующим двум задачам:

- (1) задаче выбора вспомогательной системы M (функционирующей “синхронно” с реальной системой);
- (2) задаче управления этой системой по принципу обратной связи.

В работе [7, гл. I] было отмечено, что для достаточно широкого класса параболических систем в качестве моделей удобно брать “копии” реальных систем в случае, если $u(\cdot) \in \{v(\cdot) \in L_2(T; H): v(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}$, $P \subset H$ — выпуклое, замкнутое и ограниченное множество. Там же приведены примеры таких систем. В настоящей работе мы рассмотрим случай отсутствия ограничений (типа $u \in P$) на входные воздействия. Оказывается, что и в этой ситуации в качестве модели M можно брать “копию” реальной системы, т. е., в данном случае, системы (2.1). Эта копия имеет следующий вид:

$$\dot{w}^h(t) + Aw^h(t) = u^h(t), \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.5)$$

Начальное состояние модели — $w^h(t_0) = \xi_0^h$. Решение модели (2.5) определяется аналогично решению уравнения (2.1). Правило выбора управления $u^h(\cdot)$ (при каждом $h \in (0, 1)$) в модели отождествляется с парой $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$, где

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$$

есть разбиение отрезка T на полуинтервалы $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta$, $\delta = \delta(h)$, $\tau_{h,0} = t_0$, $\tau_{h,m_h} = \vartheta$, \mathcal{U}_h — отображение, ставящее в соответствие каждой тройке $(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h)$, $i \in [1 : m_h]$, функцию

$$v_i^h(\tau) = \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h) \in H, \quad \tau \in [0, \delta). \quad (2.6)$$

Здесь $\tau_i = \tau_{h,i}$, $\xi_i^h = \xi^h(\tau_i)$, $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x^r(\cdot), h)$. При этом управление $u^h(\cdot)$ в правой части уравнения (2.5) определяется по правилу

$$u^h(t) = v_i^h(t - \tau_{i-1}), \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i). \quad (2.7)$$

Семейство S_h , $h \in (0, 1)$ естественно, следуя [4], назвать семейством алгоритмов формирования управления в модели запаздывающего типа.

Введем

О п р е д е л е н и е 1. Семейство алгоритмов $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$, $h \in (0, 1)$, формирования управления в модели называется *реконструирующим*, если существуют функции $k_1(\cdot)$, $k_2(\cdot)$, $k_3(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такие, что

$$k_1(h) \rightarrow 1, \quad k_2(h) \rightarrow 0, \quad k_3(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

и для всякого измерения $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x^r(\cdot), h)$ выполняются неравенства

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T; H)} \leq k_1(h)|u_r(\cdot)|_{L_2(T; H)} + k_2(h),$$

$$\sup_{t \in T} |x^r(t) - w^h(t)|_H \leq k_3(h).$$

Цель работы состоит в построении реконструирующего семейства S_h , $h \in (0, 1)$, алгоритмов формирования управления в модели запаздывающего типа.

Из теоремы 3.1 [7, с. 34] вытекает

Теорема 1. Пусть семейство алгоритмов S_h формирования управления в модели — реконструирующее. Тогда имеет место сходимость

$$u^h(\cdot) \rightarrow u_r(\cdot) \quad \text{в } L_2(T; H) \quad \text{при } h \rightarrow 0+.$$

3. Алгоритм решения

Опишем алгоритм решения рассматриваемой задачи.

Сначала выбираем модель M и семейство S_h . После того как модель M и семейство $S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h)$ выбраны, работу алгоритма восстановления $u_r(\cdot)$ осуществляем по следующей схеме. До начального момента t_0 фиксируем погрешность h и разбиение $\Delta = \Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, ($\tau_i = \tau_{h,i}$, $m = m_h$) отрезка T . На i -м шаге алгоритма, осуществляемом на промежутке времени $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, выполняем следующие операции. Сначала измеряем (с ошибкой) фазовое состояние $x^r(\tau_i)$, т. е. находим элемент $\xi_i^h \in V$ со свойством (2.4). Затем, зная ξ_{i-1}^h и ξ_i^h , по правилу (2.6), (2.7) определяем управление в модели (2.5). После этого вместо траектории $w^h(t)$, $t \in [t_0, \tau_{i-1}]$, формируем фазовую траекторию $w^h(t) = w^h(t; \tau_{i-1}, w^h(\tau_{i-1}), u^h(\cdot))$, $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i]$, т. е. осуществляем корректировку памяти.

Пусть фиксировано число $\mu > 0$. Введем отображение $n(\delta) : (0, 1) \rightarrow \mathcal{N}$ (\mathcal{N} — множество натуральных чисел) по правилу

$$2 \sum_{j=n(\delta)+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \leq \delta^{2+\mu} \quad \forall \xi \in \bar{K}_1. \quad (3.1)$$

Здесь $\xi_j = (\xi, l_j)$ — коэффициенты ряда Фурье. Возьмем функцию $\alpha(\delta) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ вида

$$\alpha = \alpha(\delta) = \delta^{3+\mu} e^{-\lambda_n(\delta)\delta}.$$

Будем предполагать: отображение $n(\delta)$ таково, что

$$\lambda_{n(\delta)} \rightarrow +\infty, \quad \alpha(\delta) \rightarrow +0, \quad \delta \alpha^{-1}(\delta) = e^{-\lambda_{n(\delta)}\delta} \delta^{-2-\mu} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Положим

$$v_i^h(\tau, \eta) = \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h) = \sum_{j=1}^{+\infty} v_{ij}^h(\tau) l_j(\eta), \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} v_{ij}^h(\tau) &= -\frac{\delta}{\alpha} (\chi_{ij}^h(\delta) - \xi_{ji}) e^{\lambda_j(\tau-\delta)}, \\ \xi_{i-1}^h(\eta) &= \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{ji-1}^h l_j(\eta), \quad \xi_i^h(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{ji}^h l_j(\eta), \quad \eta \in \Omega, \\ \chi_{ji}^h(\delta) &= \xi_{ji-1}^h e^{-\lambda_j \delta} (1 - \varrho_{ji}(\delta)) + \xi_{ji}^h \varrho_{ji}(\delta), \\ \varrho_{ji}(\tau) &= \frac{\delta(e^{\lambda_j \tau} - e^{-\lambda_j \tau})}{2\lambda_j \alpha e^{\lambda_j \delta} + \delta(e^{\lambda_j \delta} - e^{-\lambda_j \delta})}. \end{aligned}$$

На промежутке $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ управление в модели задается по правилу (2.7), (3.3). Затем состояние $w^h(\tau_{i-1})$ преобразуется в $w^h(\tau_i)$. Процесс заканчивается в момент ϑ .

Справедлива

Теорема 2. Пусть $\delta(h) \rightarrow 0$, $h^2 \alpha^{-1}(\delta(h)) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и выполнены условия (3.2). Тогда семейство алгоритмов формирования управления в модели S_h вида (3.3), (2.7) — регуляризирующее семейство запаздывающего типа.

Доказательство. Для доказательства теоремы оценим изменение величины

$$\varepsilon(t) = |x^r(t) - w^h(t)|_H^2 \quad (3.4)$$

при изменении $i \in [0 : m-1]$ и $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $m = m_h$. Рассмотрим задачу оптимального управления системой

$$\dot{y}(\tau) + Ay(\tau) = f(\tau), \quad \tau \in [0, \delta] \quad (\delta = \delta(h)), \quad (3.5)$$

с начальным условием

$$y(0) = \xi_i^h.$$

Решение уравнения (3.5) обозначим символом $y(\cdot; 0, y(0), f(\cdot))$. Пусть критерий качества имеет вид

$$I(f(\cdot), y(\cdot); \delta, \alpha, \xi_{i+1}^h) = \delta |y(\delta) - \xi_{i+1}^h|_H^2 + \alpha \int_0^\delta |f(\tau)|_H^2 d\tau.$$

Требуется найти пару $(f_{\text{opt}}(\cdot), y_{\text{opt}}(\cdot))$, $y_{\text{opt}} = y(\cdot; 0, y(0), f_{\text{opt}}(\cdot))$ такую, что

$$I(f_{\text{opt}}(\cdot), y_{\text{opt}}(\cdot); \delta, \alpha, \xi_{i+1}^h) = \inf \{ I(f(\cdot), y(\cdot); \delta, \alpha, \xi_{i+1}^h) : f(\cdot) \in L_2(\delta; H), y(\cdot) = y(\cdot; 0, y(0), f(\cdot)) \}.$$

Как известно [14, с. 295–296], решение сформулированной выше задачи существует и представимо в виде

$$y_{\text{opt}}(\tau, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} y_{ji}^{\text{opt}}(\tau) l_j(\eta), \quad f_{\text{opt}}(\tau, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{ji}(\tau) l_j(\eta), \quad \tau \in [0, \delta],$$

где

$$y_{ji}^{\text{opt}}(\tau) = \xi_{ji}^h (e^{-\lambda_j \tau} - \varrho_{ji}(\tau) e^{-\lambda_j \delta}) + \xi_{j+1i}^h \varrho_{ji}(\tau),$$

$$f_{ji}(\tau) = -\frac{\delta}{\alpha} (y_{ji}^{\text{opt}}(\delta) - \xi_{j+1i}^h) e^{\lambda_j(\tau-\delta)}.$$

Кроме того (см. [14, с. 299]), верно неравенство

$$|y_{\text{opt}}(\delta) - \xi_{i+1}^h|_H^2 \leq \frac{2\alpha^2}{\delta^4} |\xi_i^h|_H^2 + \frac{8\alpha^2}{\delta^2} \sup_{1 \leq j \leq n} \frac{|\lambda_j|^2}{(1 - e^{-2\lambda_j \delta})^2} \sum_{j=1}^n |\xi_{i+1j}^h|^2 + 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_{i+1j}^h|^2.$$

Здесь и ниже символ $|a|$ означает модуль числа a . В силу неравенств

$$\sum_{j=1}^n |\xi_{i+1j}^h|^2 \leq |\xi_{i+1}^h|_H^2 \leq d^2, \quad 2 \sum_{j=n+1}^{+\infty} |\xi_{i+1j}^h|^2 \leq \delta^{2+\mu},$$

$$\frac{|\lambda_j|^2}{(e^{\lambda_j \delta} - e^{-\lambda_j \delta})^2} \leq \frac{1}{4\delta^2}$$

(последние неравенства справедливы для любого $j = 1, 2, \dots$) имеем

$$|y_{\text{opt}}(\delta) - \xi_{i+1}^h|_H^2 \leq 2d^2 \frac{\alpha^2}{\delta^4} + 2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_{i+1j}^h|^2 + 2d^2 \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_n \delta}}{\delta^4} \leq 2(1 + 2d^2) \delta^{2+\mu}. \quad (3.6)$$

При выводе (3.6) мы также воспользовались неравенствами (3.1). Введем обозначение

$$z(t) = y_{\text{opt}}(t - \tau_i) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Тогда в силу (3.5) функция $z(\cdot)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ является решением уравнения

$$\dot{z}(t) + Az(t) = u^h(t) \quad (3.7)$$

с начальным условием

$$z(\tau_i) = \xi_i^h$$

и управлением

$$u^h(t) = f_{\text{opt}}(t - \tau_i) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]. \quad (3.8)$$

Таким образом, из (2.5), (3.7) получаем

$$\dot{z}(t) - \dot{w}^h(t) + A(z(t) - w^h(t)) = 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]. \quad (3.9)$$

В силу (2.2) оператор A обладает свойством

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \omega \|x - y\|_V^2 \quad \forall x, y \in V. \quad (3.10)$$

Умножив правую и левую части равенства (3.9) на $z(t) - w^h(t)$ и проинтегрировав в силу (3.10), имеем

$$|z(t) - w^h(t)|_H^2 + \omega \int_{\tau_i}^t \|z(\tau) - w^h(\tau)\|_V^2 d\tau \leq |\xi_i^h - w^h(\tau_i)|_H^2, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]. \quad (3.11)$$

Учитывая правило определения функции $z(t)$, из (3.11) получаем

$$|y_{\text{opt}}(\delta) - w^h(\tau_{i+1})|_H \leq |\xi_i^h - w^h(\tau_i)|_H. \quad (3.12)$$

Воспользовавшись (3.6), (3.12), будем иметь при всех $i \in [0 : m - 1]$

$$\begin{aligned} |\xi_{i+1}^h - w^h(\tau_{i+1})|_H &\leq |y_{\text{opt}}(\delta) - w^h(\tau_{i+1})|_H + |y_{\text{opt}}(\delta) - \xi_{i+1}^h|_H \\ &\leq |\xi_i^h - w^h(\tau_i)|_H + \{2(1 + 2d^2)\}^{1/2} \delta^{1+\mu/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, при всех $i \in [1 : m]$

$$|\xi_i^h - w^h(\tau_i)|_H \leq |\xi_0^h - w^h(t_0)|_H + c_1 \delta^{\mu/2}, \quad c_1 = (\vartheta - t_0) \{2(1 + 2d^2)\}^{1/2}.$$

В силу неравенства $\|\xi_0^h - x(t_0)\|_V \leq h$ следует

$$|x^r(\tau_i) - w^h(\tau_i)|_H \leq c_1 \delta^{\mu/2} + c_2 h. \quad (3.13)$$

Рассмотрим также задачу оптимального управления системой (3.5) с начальным условием

$$y(0) = x^r(\tau_i)$$

и критерием качества $I(f(\cdot), y(\cdot); \delta, \alpha, x^r(\tau_{i+1}))$. Обозначим оптимальное управление в этой задаче символом $f^\delta(\cdot)$, а оптимальную траекторию символом $y^\delta(\cdot) = y(\cdot; 0, x^r(\tau_i), f^\delta(\cdot))$. Легко видеть, что верно неравенство

$$\begin{aligned} I(f_{\text{opt}}(\cdot), y_{\text{opt}}(\cdot); \delta, \alpha, \xi_{i+1}^h) &= \delta |y(\delta; 0, \xi_i^h, f_{\text{opt}}(\cdot)) - \xi_{i+1}^h|_H^2 + \alpha \int_0^\delta |f_{\text{opt}}(\tau)|_H^2 d\tau \\ &\leq \delta |y(\delta; 0, \xi_i^h, f^\delta(\cdot)) - \xi_{i+1}^h|_H^2 + \alpha \int_0^\delta |f^\delta(\tau)|_H^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Заметим, что вложение пространства V в пространство H непрерывно, т. е. существует число $c > 0$ такое, что для любых $x \in V$ $|x|_H \leq c \|x\|_V$. Кроме того,

$$|y^\delta(\delta) - y(\delta; 0, \xi_i^h, f^\delta(\cdot))|_H \leq c_3 h.$$

В таком случае из (2.4), (3.14) следует

$$I(f_{\text{opt}}(\cdot), y_{\text{opt}}(\cdot); \delta, \alpha, \xi_{i+1}^h) \leq \delta \{ |y^\delta(\delta) - x^r(\tau_{i+1})|_H + c_4 h \}^2 + \alpha \int_0^\delta |f^\delta(\tau)|_H^2 d\tau. \quad (3.15)$$

Учитывая правило определения управления $f^\delta(\cdot)$, также имеем

$$\delta |y^\delta(\delta) - x^r(\tau_{i+1})|_H^2 + \alpha \int_0^\delta |f^\delta(\tau)|_H^2 d\tau \leq \alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_r(\tau)|_H^2 d\tau. \quad (3.16)$$

Заметим, что справедливы неравенства

$$I(f_{\text{opt}}, y_{\text{opt}}(\cdot); \delta, \alpha, \xi_{i+1}^h) \leq \delta |y(\delta; 0, \xi_i^h, 0) - \xi_i^h|_H^2.$$

Учитывая последнее неравенство, можно указать число $c_5 \in (0, +\infty)$ такое, что

$$\sup \{ |y^\delta(\delta; 0, x^r(\tau_i), f^\delta(\cdot))|_H : \delta \in (0, 1), \tau_i = t_0 + i\delta \leq \vartheta \} \leq c_5. \quad (3.17)$$

В таком случае, воспользовавшись (3.17), заключаем

$$\delta \{ |y^\delta(\delta) - x^r(\tau_{i+1})|_H + c_4 h \}^2 \leq \delta |y^\delta(\delta) - x^r(\tau_{i+1})|_H^2 + c_6 \delta h. \quad (3.18)$$

Заметим также, что верно неравенство

$$\alpha \int_0^\delta |f_{\text{opt}}(\tau)|_H^2 d\tau \leq I(f_{\text{opt}}(\cdot), y_{\text{opt}}(\cdot); \delta, \alpha, \xi_{i+1}^h).$$

Таким образом, в силу (3.18) и последнего неравенства имеем

$$\alpha \int_0^\delta |f_{\text{opt}}(\tau)|_H^2 d\tau \leq \delta |y^\delta(\delta) - x^r(\tau_{i+1})|_H^2 + c_7 \delta h + \alpha \int_0^\delta |f^\delta(\tau)|_H^2 d\tau. \quad (3.19)$$

В таком случае, воспользовавшись (3.8), (3.16), (3.19), получаем

$$\alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_H^2 d\tau \leq \alpha \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_r(\tau)|_H^2 d\tau + c_7 \delta h. \quad (3.20)$$

Следовательно,

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T; H)} \leq |u_r(\cdot)|_{L_2(T; H)} + c_7 h^{1/2} \alpha^{-1/2}. \quad (3.21)$$

Далее, учитывая (3.20), а также (3.13), имеем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$\begin{aligned} & |x^r(t) - w^h(t)|_H^2 + \omega \int_{\tau_i}^t \|x^r(\tau) - w^h(\tau)\|_V^2 d\tau \\ & \leq |x^r(\tau_i) - w^h(\tau_i)|_H^2 + \int_{\tau_i}^t |x^r(\tau) - w^h(\tau)|_H \{ |u_r(\tau)|_H + |u^h(\tau)|_H \} d\tau \\ & \leq (c_1 \delta^{\mu/2} + c_2 h)^2 + \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^t |x^r(\tau) - w^h(\tau)|_H^2 d\tau + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_r(\tau)|_H^2 d\tau + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_H^2 d\tau \end{aligned}$$

$$\leq c_8(\delta^\mu + h^2) + 2 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u_r(\tau)|_H^2 d\tau + c_9 \delta h \alpha^{-1} + \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^t |x^r(\tau) - w^h(\tau)|_H^2 d\tau.$$

Пусть

$$\omega_{u_r}(\delta) = \sup \left\{ \int_t^{t+\delta} |u_r(\tau)|_H^2 d\tau : t, t + \delta \in T \right\}.$$

Заметим, что

$$\omega_{u_r}(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Таким образом, при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$|x^r(t) - w^h(t)|_H^2 \leq c_{10}(\delta^\mu + h^2 + \delta h \alpha^{-1} + \omega_{u_r}(\delta)) + \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^t |x^r(\tau) - w^h(\tau)|_H^2 d\tau.$$

В силу леммы Гронуолла отсюда имеем при всех $t \in T$

$$\varepsilon(t) = |x^r(t) - w^h(t)|_H^2 \leq c_{11}(\delta^\mu + h^2 + \delta h \alpha^{-1} + \omega_{u_r}(\delta)). \quad (3.22)$$

Справедливость теоремы следует из соотношений (3.21), (3.22) и теоремы 1. Теорема доказана.

4. Скорость сходимости алгоритма

Установим оценку скорости сходимости алгоритма. В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1 [4; 7, с. 54]. Пусть заданы две функции: $t \rightarrow a(t) \in L_\infty(T; W^*)$ и $t \rightarrow b(t) \in W$, $t \in T$, причем $b(\cdot)$ является функцией с ограниченной вариацией. Если верны неравенства

$$\left| \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right|_{W^*} \leq \varepsilon, \quad |b(t)|_W \leq d, \quad t \in T,$$

то справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \langle a(t), b(t) \rangle_W d\tau \leq \varepsilon(\text{var}_T b(t) + d).$$

Здесь W — банахово пространство с нормой $|\cdot|_W$; символ $\text{var}_T b(t)$ означает полную вариацию функции $b(t)$ на промежутке T , а символ $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ — двойственность между W^* и W .

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, $\mu > 1$ и управление $t \rightarrow u_r(t) \in V$ при $t \in T$ является функцией с ограниченной вариацией. Тогда справедлива следующая оценка скорости сходимости алгоритма:

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |u_r(t) - u^h(t)|_H^2 dt \leq C \{ \mu(\delta, \alpha, h) + h \alpha^{-1} \}, \quad (4.1)$$

где $\mu(\delta, \alpha, h) = \{ \delta^{\mu/2} + h + \delta^{1/2} h^{1/2} \alpha^{-1/2} + \delta^{1/2} \}$.

Доказательство. Учитывая линейность и непрерывность оператора $A : V \rightarrow V^*$, заключаем, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t (u_r(\tau) - u^h(\tau)) d\tau \Big|_{V^*} \right. &= \sup_{\|v\|_V \leq 1} \left\langle \int_{t_0}^t \{ \dot{x}^r(\tau) - \dot{w}^h(\tau) - A(x^r(\tau) - w^h(\tau)) \} d\tau, v \right\rangle \\ &\leq |x^r(t) - w^h(t)|_{V^*} + |x^r(t_0) - w^h(t_0)|_{V^*} + L_A \int_{t_0}^t \|x^r(\tau) - w^h(\tau)\|_V d\tau, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где L_A — норма линейного непрерывного оператора $A : V \rightarrow V^*$, $|\cdot|_{V^*}$ — норма в пространстве V^* . Верно неравенство

$$\begin{aligned} &|x^r(t) - w^h(t)|_H^2 + \omega \int_{t_0}^t \|x^r(\tau) - w^h(\tau)\|_V^2 d\tau \\ &\leq |x^r(t_0) - w^h(t_0)|_H^2 + \int_{t_0}^t |x^r(\tau) - w^h(\tau)|_H \{ |u_r(\tau)|_H + |u^h(\tau)|_H \} d\tau \\ &\leq C_1 h^2 + \left(\int_{t_0}^t |x^r(\tau) - w^h(\tau)|_H^2 d\tau \right)^{1/2} + \left(\int_{t_0}^{\tau_{i+1}} |u_r(\tau)|_H^2 d\tau \right)^{1/2} + \left(\int_{t_0}^{\tau_{i+1}} |u^h(\tau)|_H^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В силу (3.21) и условия теоремы 2 имеем

$$\left(\int_{t_0}^{\vartheta} |u_r(\tau)|_H^2 d\tau \right)^{1/2} + \left(\int_{t_0}^{\vartheta} |u^h(\tau)|_H^2 d\tau \right)^{1/2} \leq C_2(1 + h^{1/2}\alpha^{-1/2}) \leq C_3. \quad (4.4)$$

В свою очередь, в силу (3.22) и ограниченности функции $u_r(\cdot)$ верно неравенство

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |x^r(\tau) - w^h(\tau)|_H^2 d\tau \leq C_4(\delta^\mu + h^2 + \delta h\alpha^{-1} + \delta). \quad (4.5)$$

Из (4.3), учитывая (4.4), (4.5), выводим

$$\int_{t_0}^t \|x^r(\tau) - w^h(\tau)\|_V^2 d\tau \leq C_5(\delta^\mu + h^2 + \delta h\alpha^{-1} + \delta).$$

Таким образом,

$$\int_{t_0}^t \|x^r(\tau) - w^h(\tau)\|_V^2 d\tau \leq C_6\mu(\delta, \alpha, h). \quad (4.6)$$

Учитывая непрерывность вложения пространства H в пространство V , а также ограниченность функции $u_r(\cdot)$, объединив (4.2), (4.4), (4.6), заключаем

$$\left| \int_{t_0}^t (u_r(\tau) - u^h(\tau)) d\tau \Big|_{V^*} \right. \leq C_7\mu(\delta, \alpha, h). \quad (4.7)$$

Воспользовавшись неравенством (3.21), получим

$$\begin{aligned} |u_r(\cdot) - u^h(\cdot)|_{L_2(T;H)}^2 &\leq 2|u_r(\cdot)|_{L_2(T;H)}^2 - 2 \int_{t_0}^{\vartheta} (u_r(\tau), u^h(\tau)) d\tau + c_8 h \\ &= 2 \int_{t_0}^{\vartheta} \langle J(u_r(\tau) - u^h(\tau)), u_r(\tau) \rangle d\tau + C_8 h \alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь J — оператор канонического вложения пространства H в пространство V^* . В силу леммы 1 из (4.8), (4.7) получаем (4.1). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
3. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
4. **Osipov Yu.S., Kryazhinskii A.V.** Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
5. **Максимов В.И.** Позиционное моделирование неограниченных управлений для нелинейных систем с диссипацией // Автоматика и телемеханика. 1988. № 4. С. 22–30.
6. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 579–597.
7. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
8. **Васильева Е.В., Максимов В.И.** О динамической реконструкции управления в дифференциальных уравнениях с памятью // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 6. С. 803–814.
9. **Кадиев А.М., Максимов В.И.** Об одной обратной задаче для параболического вариационного неравенства // Журнал вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 11. С. 1983–1992.
10. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 310 с.
11. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 452 с.
12. **Evans L.** Partial Differential Equations. Providence; Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1998. 667 с.
13. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. Москва. 1965. 520 с.
14. **Hou L.S., Imanuvilov O., Kwon H.D.** Eigen series solution to terminal-state tracking optimal control problems and exact controllability problems constrained by linear parabolic PDEs // J. Math. Anal. Appl. 2006. No. 313. P. 284–310.

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 12.01.2011

УДК 519.6

**СОПРЯЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ
В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО УСВОЕНИЯ ДАННЫХ¹****Г. И. Марчук, В. П. Шутяев**

На основе теории сопряженных уравнений разработаны и обоснованы итерационные алгоритмы решения одного класса задач об усвоении данных с целью восстановления начального условия, проведена оптимизация итерационных процессов с использованием спектральных свойств операторов управления. Результаты проиллюстрированы на примере квазилокальной модели турбулентного теплообмена в океане.

Ключевые слова: сопряженные уравнения, оптимальное управление, вариационное усвоение данных, итерационные алгоритмы.

G. I. Marchuk, V. P. Shutyaev. Adjoint equations and iterative algorithms in problems of variational data assimilation.

Based on the theory of adjoint equations, iterative algorithms for solving one class of problems of assimilating data for the reconstruction of the initial condition are developed and substantiated. The iterative processes are optimized with the use of the spectral properties of control operators. The results are illustrated by the example of the quasi-local model of turbulent heat transfer in the ocean.

Keywords: adjoint equations, optimal control, variational data assimilation, iterative algorithms.

Введение

Как показали исследования последних лет, теория сопряженных уравнений играет важную и незаменимую роль в анализе сложных систем, оценке чувствительности математических моделей [13, 16]. Теория чувствительности на основе сопряженных уравнений может быть с успехом применена к ретроспективному анализу процессов, описываемых имитационными моделями, а также к исследованию самих моделей, реализуемых с помощью современных вычислительных технологий.

В настоящее время в связи с исследованиями глобальных изменений очень важной является проблема получения и рационального использования данных измерений с целью ретроспективного анализа в различных областях знаний. Математическая модель данной проблемы может быть сформулирована как задача об усвоении и обработке многомерных (включающих зависимость от временной и пространственных переменных) данных, представляющая собой одну из задач оптимального управления (data assimilation problem). Эта проблема фактически сводится к задаче вычисления распределенных параметров процессов, описываемых эволюционными уравнениями, по результатам наблюдений. Начиная с работ Р. Беллмана, Л.С. Понтрягина, Н.Н. Красовского, А.М. Летова, Ж.Л. Лионса, Р. Гловинского, А. Балакришнана, Г.И. Марчука, Н.Н. Моисеева, Ю.С. Осипова, А.Б. Куржанского, Ф.П. Васильева, постановка и изучение таких задач на основе теории сопряженных уравнений привлекают внимание многих исследователей, занимающихся приложениями методов оптимального управления для практического решения тех или иных проблем. Наибольшее развитие эти методы получили в задачах ядерной энергетики, физики атмосферы и океана, метеорологии, прибрежной океанографии, экологии и др. (см. работы Г.И. Марчука (1961), В.В. Пененко и Н.Н. Образцова (1976), Дж. Льюиса и Дж. Дербера (1985), И. Навона (1987), Ф. Диме (1982), Ж.Л. Лионса (1988),

¹Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 09-01-12029-офи-м, 09-01-00284) и Программы ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России".

Ж. Блюма (1987), П. Куртье и О. Талаграна (1987), А. Лоренца (1988), В.И. Агошкова (1993), В.И. Агошкова и Г.И. Марчука (1993), Г.И. Марчука и В.Б. Залесного (1993), В.М. Ипатовой (1992), В.П. Шутяева (1994), В.Б. Залесного и М. Венцеля (1996), Е.И. Пармузина (2000) и др.). Эти работы тесно примыкают к исследованиям по обратным задачам (работы А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.К. Иванова, А.Л. Бухгейма, Ж.Л. Лионса, А.А. Самарского, А.И. Прилепко, Ю.Е. Аниконова, В. Исакова, А.В. Гончарского, В.Г. Романова, С.И. Кабанихина и др.). Оказалось, что задачи об усвоении данных эквивалентны, в определенном смысле, некорректно поставленным задачам, что обуславливает трудности решения этих задач и, одновременно, необходимость привлечения здесь методов регуляризации, разработанных в трудах А.Н. Тихонова, В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева, Ж.Л. Лионса и др.

Один из подходов к исследованию и численному решению задач об усвоении данных заключается в следующем. Сначала рассматривается линеаризованная задача идентификации, которая формулируется в эквивалентном виде как переопределенная система, включающая основное и сопряженное уравнения и дополнительное условие оптимальности. Из этой системы путем исключения основного и сопряженного уравнений выводится так называемое уравнение для управления вида $Lu = F$, где L — линейный оператор, u — искомая функция (управление), а правая часть F определяется через исходные данные задачи. Оператор L будем называть в дальнейшем оператором управления. Несмотря на всю сложность исходной задачи, операторы управления обладают, как правило, хорошими свойствами: они являются симметричными, неотрицательно определенными и зачастую вполне непрерывными. Оказалось [1, 25], что знание свойств этих операторов, и особенно их спектральных свойств, очень важно для исследования разрешимости исходной задачи оптимального управления, а также для разработки и обоснования численных алгоритмов ее решения. В настоящее время такие задачи решают методами, разработанными в классических работах Н.Н. Красовского, А.М. Летова, Н.Н. Моисеева, И.А. Крылова и Ф.Л. Черноусько, А.А. Самарского, Ф.П. Васильева, Р.П. Федоренко, Ю.Г. Евтушенко и др. Ряд новых итерационных алгоритмов решения задач ассимиляции данных предложен в работах В.И. Агошкова и Г.И. Марчука [1], Г.И. Марчука и В.Б. Залесного [14], Г.И. Марчука и В.П. Шутяева [15], а также в работах [19, 25]. Оказалось, что сходимость рассмотренных итерационных процессов непосредственно связана со свойствами спектра операторов управления [15, 25].

В настоящей работе на основе теории сопряженных уравнений разработаны и обоснованы итерационные алгоритмы решения одного класса задач об усвоении данных с целью восстановления начального условия, проведена оптимизация итерационных процессов с использованием спектральных свойств операторов управления. Результаты проиллюстрированы на примере квазилокальной модели турбулентного теплообмена в океане.

1. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель некоторого физического процесса, описываемого с помощью эволюционной задачи вида

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} + A(t)\varphi = f, & t \in (0, T), \\ \varphi|_{t=0} = u, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — неизвестная функция, $A(t)$ — оператор (в общем случае нелинейный), действующий для каждого t в гильбертовом пространстве X с областью определения $D(A) \subset X$, $u \in X$, $f = f(t)$ — заданные функции.

Введем в рассмотрение функционал

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^T (C(\varphi - \hat{\varphi}), \varphi - \hat{\varphi})_X dt + \frac{\alpha}{2} (\varphi|_{t=0} - \hat{\varphi}^\circ, \varphi|_{t=0} - \hat{\varphi}^\circ)_X, \quad (1.2)$$

где $\alpha = \text{const} \geq 0$, C — линейный оператор, $(\cdot, \cdot)_X$ — скалярное произведение в X . Функция $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(t)$ определяется, как правило, с помощью данных наблюдений, $\hat{\varphi}^\circ \in X$, а число α называют параметром регуляризации [24]. В дальнейшем все рассматриваемые пространства и функции предполагаются вещественными.

Рассмотрим задачу (1.1) с неизвестной функцией $u \in X$ в начальном условии. *Задача об усвоении данных* может быть сформулирована следующим образом: найти функции φ и u такие, что выполнено (1.1) и на решениях (1.1) функционал (1.2) принимает наименьшее значение. Запишем эту задачу в виде

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} + A(t)\varphi = f, & t \in (0, T), \\ \varphi(0) = u, \\ J(\varphi) = \inf_{\tilde{u} \in H} J(\tilde{\varphi}), \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\tilde{\varphi}$ — решение (1.1) при $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{u}$.

Задачи вида (1.3) рассматривались в работах Понтрягина [22], Лионса [11, 12] (см. также [1, 5, 10, 14–17] и др.). Для решения (1.3) можно воспользоваться различными подходами (см. например, [17]). Мы рассмотрим итерационные методы решения задачи (1.3), предполагая для простоты, что $A(t)$ — линейный оператор.

Необходимое условие оптимальности [11] сводит задачу (1.3) к системе для отыскания функций φ , φ^* , u :

$$\frac{d\varphi}{dt} + A(t)\varphi = f, \quad t \in (0, T); \quad \varphi(0) = u, \quad (1.4)$$

$$-\frac{d\varphi^*}{dt} + A(t)^*\varphi^* = C(\hat{\varphi} - \varphi), \quad t \in (0, T); \quad \varphi^*(T) = 0, \quad (1.5)$$

$$\alpha(u - \hat{\varphi}^\circ) - \varphi^*(0) = 0, \quad (1.6)$$

где $A(t)^*$ — оператор, сопряженный к $A(t)$. Заметим, что правая часть сопряженной задачи (1.5) содержит функцию данных наблюдений $\hat{\varphi}$ из функционала (1.2).

2. Оператор управления и его свойства

Пусть $Y = L_2(0, T; X)$ — пространство абстрактных функций $u(t)$ со значениями в X , снабженное скалярным произведением и нормой:

$$(u, v) = \int_0^T (u, v)_X dt, \quad \|u\| = \left(\int_0^T \|u\|_X^2 dt \right)^{1/2}, \quad u, v \in Y.$$

В дальнейшем мы предполагаем, что для исходной математической модели выполнены следующие условия:

(i) решение задачи

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} + A(t)\psi = f, & t \in (0, T), \\ \psi|_{t=0} = v \end{cases} \quad (2.1)$$

принадлежит Y и удовлетворяет неравенству

$$\|\psi\|_Y \leq c_1(\|f\|_Y + \|v\|_X), \quad c_1 = \text{const} > 0; \quad (2.2)$$

(ii) решение сопряженной задачи

$$\begin{cases} -\frac{d\psi^*}{dt} + A^*(t)\psi^* = p, & t \in (0, T), \\ \psi^*|_{t=T} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

принадлежит Y и удовлетворяет неравенству

$$\|\psi^*\|_Y + \|\psi^*|_{t=0}\|_X \leq c_1^* \|p\|_Y, \quad c_1^* = \text{const} > 0. \quad (2.4)$$

З а м е ч а н и е. Предполагается, что существуют решения задач (2.1) и (2.3) такие, что $\psi, \psi^* \in Y$, рассматриваемые в классическом или обобщенном смысле. Условия (i), (ii) выполняются, например, в случае, когда оператор $A(t)$ положительно определен: $(A(t)w, w)_Y \geq \gamma \|w\|_Y^2$, $\gamma = \text{const} > 0 \forall w \in Y$. В самом деле, из (2.1) имеем

$$\left(\frac{d\psi}{dt}, \psi\right)_X + (A(t)\psi, \psi)_X = (f, \psi)_X,$$

откуда

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{d}{dt} (\psi, \psi)_X dt + \int_0^T (A(t)\psi, \psi)_X dt = \int_0^T (f, \psi)_X dt,$$

и, в силу положительной определенности $A(t)$,

$$\frac{1}{2} \|\psi|_{t=T}\|_X^2 + \gamma \|\psi\|_Y^2 \leq (f, \psi)_Y + \frac{1}{2} \|\psi|_{t=0}\|_X^2 \leq \|f\|_Y \|\psi\|_Y + \frac{1}{2} \|v\|_X^2$$

или

$$\gamma \|\psi\|_Y^2 \leq \frac{1}{2\gamma} \|f\|_Y^2 + \frac{\gamma}{2} \|\psi\|_Y^2 + \frac{1}{2} \|v\|_X^2.$$

Последнее неравенство дает (2.2) при $c_1 = \max(\gamma^{-1}, \gamma^{-1/2})$. Аналогично получается неравенство (2.4). В конечномерном случае, когда $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, неравенства (2.2), (2.4) справедливы без требования положительной определенности, если элементы $n \times n$ -матрицы $A(t)$ достаточно гладкие (например, непрерывны по t).

Введем оператор $L: X \rightarrow X$, определяемый последовательным решением следующих задач:

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{dt} + A(t)\psi = 0, & t \in (0, T), \\ \psi|_{t=0} = v, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} -\frac{d\psi^*}{dt} + A^*(t)\psi^* = -C\psi, & t \in (0, T), \\ \psi^*|_{t=T} = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$Lv = \alpha v - \psi^*(0). \quad (2.7)$$

Определим также $F \in X$ с помощью последовательного решения прямой и сопряженной задач:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} + A(t)\phi = f, & t \in (0, T), \\ \phi|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} -\frac{d\phi^*}{dt} + A^*(t)\phi^* = C(\hat{\varphi} - \phi), & t \in (0, T) \\ \phi^*|_{t=T} = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

$$F = \alpha \hat{\varphi}^\circ + \phi^*(0), \quad (2.10)$$

где $f, \hat{\varphi} \in Y$, $\hat{\varphi}^\circ \in X$ (введены в (1.4)–(1.6)). Предположим далее, что $C: Y \rightarrow Y$ — линейный ограниченный самосопряженный и положительно полуопределенный оператор.

Тогда система (1.4)–(1.6) сводится к уравнению для управления u :

$$Lu = F, \quad (2.11)$$

а оператор $L: X \rightarrow X$ называется *оператором управления* [25].

В предположениях (i), (ii) справедлива

Лемма 2.1. *Оператор L действует в X с областью определения $D(L) = X$, он ограничен, самосопряжен и положительно полуопределен. Если $\alpha > 0$, то оператор L положительно определен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v \in X$, а ψ — решение задачи (2.5). В силу (2.2) $\|\psi\|_Y \leq c_1\|v\|_X$. Для решения ψ^* задачи (2.6) справедливо неравенство (2.4)

$$\|\psi^*\|_Y + \|\psi^*|_{t=0}\|_X \leq c_1^* \|C\psi\|_Y.$$

Тогда из (2.7) получим

$$\begin{aligned} \|Lv\|_X &= \|\alpha v - \psi^*|_{t=0}\|_X \leq \alpha\|v\|_X + \|\psi^*|_{t=0}\|_X \\ &\leq \alpha\|v\|_X + c_1^* \|C\psi\|_Y \leq \alpha\|v\|_X + c_1^* c_1 \|C\| \|v\|_X, \end{aligned}$$

следовательно, L ограничен. Далее для $v, w \in X$ имеем

$$\begin{aligned} (Lv, w)_X &= (\alpha v - \psi^*|_{t=0}, w)_X = \alpha(v, w)_X - (\psi^*|_{t=0}, w)_X \\ &= \alpha(v, w)_X + (C\psi, \psi_1)_Y = \alpha(v, w)_X + (\psi, C\psi_1)_Y = (v, Lw)_X, \end{aligned}$$

где ψ_1 — решение задачи (2.5) при $v = w$. Отсюда L — самосопряжен и

$$(Lv, v)_X = \alpha(v, v)_X + (C\psi, \psi)_Y \geq 0,$$

т. е. L положительно полуопределен. Более того, L положительно определен, если $\alpha > 0$.

Следствие 2.1. *Справедлива следующая оценка:*

$$(Lv, v)_X \geq \mu_{\min}(v, v)_X \quad \forall v \in X, \quad (2.12)$$

где μ_{\min} — нижняя граница спектра оператора L , при этом $\mu_{\min} \geq \alpha$.

Справедлива также

Лемма 2.2. *В предположениях (i), (ii) при $\alpha > 0$ уравнение для управления (2.11) имеет единственное решение $u \in X$, и справедлива оценка*

$$\|u\|_X \leq \frac{\alpha}{\mu_{\min}} \|\hat{\varphi}^\circ\|_X + \frac{c_1^*}{\mu_{\min}} \|C\hat{\varphi}\|_Y + \frac{c_1 c_1^*}{\mu_{\min}} \|C\| \|f\|_Y. \quad (2.13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\alpha > 0$ из следствия 2.1 заключаем, что существует единственное решение u уравнения для управления (2.11) и

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\mu_{\min}} \|F\|_X, \quad (2.14)$$

где F определена через (2.8)–(2.10). Решение ϕ^* задачи (2.9) удовлетворяет неравенству (2.4), и тогда

$$\|F\|_X = \alpha\|\hat{\varphi}^\circ\|_X + \|\phi^*(0)\|_X \leq \alpha\|\hat{\varphi}^\circ\|_X + c_1^* \|C(\hat{\varphi} - \phi)\|_Y,$$

где ϕ — решение задачи (2.8). В силу (2.2) $\|\phi\|_Y \leq c_1\|f\|_Y$, и тогда

$$\|F\|_X \leq \alpha\|\hat{\varphi}^\circ\|_X + c_1^* \|C\hat{\varphi}\|_Y + c_1^* c_1 \|C\| \|f\|_Y. \quad (2.15)$$

Из (2.14), (2.15) получаем (2.13). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. При $\alpha = 0$ лемма 2.2 остается справедливой, если $\mu_{\min} > 0$. Это имеет место, например, в конечномерном случае, когда $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $C = E$ (тождественный оператор).

3. Спектр оператора управления

В общем случае согласно (2.12) нижняя граница спектра оператора управления L определяется неравенством $\mu_{\min} \geq \alpha$. Более того, из доказательства леммы 2.1 имеем:

$$(Lv, v)_X = \alpha(v, v)_X + (C\psi, \psi)_Y, \quad v \in X,$$

где ψ — решение задачи (2.5). Отсюда в силу (2.2)

$$(Lv, v)_X \leq \alpha(v, v)_X + \|C\| \|\psi\|_Y^2 \leq \alpha \|v\|_X^2 + c_1 \|C\| \|v\|_X^2,$$

и для верхней границы спектра μ_{\max} оператора L получаем

$$\mu_{\max} \leq \alpha + c_1 \|C\|. \quad (3.1)$$

В случае, когда $C = E$ (тождественный оператор), можно получить более тонкие, чем (3.1), оценки спектра. Справедлива

Теорема 3.1. *Спектр $\sigma(L)$ оператора L , определенного равенствами (2.5)–(2.7) при $C = E$, лежит на отрезке*

$$m \leq \sigma(L) \leq M, \quad (3.2)$$

где

$$m = \alpha + \int_0^T e^{-\int_0^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau} dt, \quad M = \alpha + \int_0^T e^{-\int_0^t \lambda_{\min}(\tau) d\tau} dt,$$

$\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ — соответственно нижняя и верхняя границы спектра оператора $A + A^*$.

Доказательство. Для оператора L , определяемого с помощью (2.5)–(2.7) при $C = E$, справедливо представление

$$(Lu, u) = \alpha(u, u) + \int_0^T (\varphi(t), \varphi(t)) dt, \quad u \in X, \quad (3.3)$$

где $\varphi(t)$ — решение (2.5) при $v = u$. Из (2.5) имеем

$$\frac{d}{dt} \|\varphi\|^2 + ((A + A^*)\varphi, \varphi) = 0,$$

тогда

$$-\lambda_{\max}(t) \|\varphi\|^2 \leq \frac{d}{dt} \|\varphi\|^2 \leq -\lambda_{\min}(t) \|\varphi\|^2,$$

где λ_{\max} и λ_{\min} — нижняя и верхняя границы спектра оператора $A + A^*$ соответственно. Следовательно, функция $F(t) = \ln \|\varphi\|^2$ удовлетворяет неравенству

$$-\lambda_{\max}(t) \leq \frac{dF}{dt} \leq \lambda_{\min}(t).$$

Интегрируя это неравенство по t от 0 до t , получаем

$$-\int_0^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau \leq F(t) - F(0) \leq -\int_0^t \lambda_{\min}(\tau) d\tau$$

или

$$-\int_0^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau \leq \ln \frac{\|\varphi(t)\|^2}{\|u\|^2} \leq -\int_0^t \lambda_{\min}(\tau) d\tau.$$

Отсюда

$$e^{-\int_0^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau} \leq \frac{\|\varphi(t)\|^2}{\|u\|^2} \leq e^{-\int_0^t \lambda_{\min}(\tau) d\tau}.$$

Интегрируя последнее неравенство по t от 0 до T и принимая во внимание (3.3), получаем

$$\int_0^T e^{-\int_0^t \lambda_{\max}(\tau) d\tau} dt \leq \frac{(\bar{L}u, u)}{(u, u)} \leq \int_0^T e^{-\int_0^t \lambda_{\min}(\tau) d\tau} dt,$$

где \bar{L} — оператор L при $\alpha = 0$. Таким образом, спектр оператора L лежит на отрезке (3.2). Теорема доказана.

Если $A(t) = A : X \rightarrow X$ — линейный замкнутый оператор, который не зависит от времени и является неограниченным самосопряженным положительно определенным в X с компактным обратным, то спектр оператора \bar{L} точечный и его собственные значения μ_k определяются по формуле [25]

$$\mu_k = \frac{1 - e^{-2\lambda_k T}}{2\lambda_k},$$

где λ_k — собственные значения оператора A . Тогда в (3.2) $\lambda_{\min} = 2\lambda_1$, $\lambda_{\max} = \infty$, и m, M определяются в явном виде:

$$m = \alpha, \quad M = \alpha + \frac{1 - e^{-2\lambda_1 T}}{2\lambda_1},$$

где λ_1 — наименьшее собственное значение оператора A . Это означает, что оценки (3.2) не улучшаемы.

4. Итерационные алгоритмы

Для решения системы оптимальности (1.4)–(1.6) рассмотрим класс итерационных алгоритмов, содержащих основные и сопряженные уравнения, вида

$$\frac{d\varphi^k}{dt} + A(t)\varphi^k = f, \quad t \in (0, T); \quad \varphi^k(0) = u^k, \quad (4.1)$$

$$-\frac{d\varphi^{*k}}{dt} + A^*(t)\varphi^{*k} = C(\hat{\varphi} - \varphi^k), \quad t \in (0, T); \quad \varphi^{*k}(T) = 0, \quad (4.2)$$

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{k+1} B_k \left(\alpha(u^k - \hat{\varphi}^\circ) - \varphi^{*k} \Big|_{t=0} \right) + \beta_{k+1} C_k (u^k - u^{k-1}), \quad (4.3)$$

где $B_k, C_k : X \rightarrow X$ — некоторые операторы, $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ — итерационные параметры. Пусть m и M — нижняя и верхняя границы спектра оператора управления L , определяемые (3.2). Введем следующие обозначения:

$$\tau_{opt} = 2(M + m)^{-1}, \quad \theta = (M + m)(M - m)^{-1}, \quad (4.4)$$

$$\tau_k = 2(M + m - (M - m) \cos \omega_k \pi)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (4.5)$$

$$\alpha_{k+1} = \begin{cases} 2(M + m)^{-1}, & k = 0, \\ 4(M - m)^{-1} \frac{T_k(\theta)}{T_{k+1}(\theta)}, & k > 0; \end{cases}$$

$$\beta_{k+1} = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \frac{T_{k-1}(\theta)}{T_{k+1}(\theta)}, & k > 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$e_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ p_k \|\xi^k\|_H^2 / \|\xi^{k-1}\|_H^2, & k > 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$p_{k+1} = \alpha + (\eta^k, \eta^k) / \|\xi^k\|_H^2 - e_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.8)$$

где $\omega_k = (2i - 1)/2s$, T_k — полином Чебышева k -й степени, $\xi^k = \alpha u^k - \varphi^{*k}(0)$, η^k — решение задачи $\frac{d\eta^k}{dt} + A\eta^k = 0$, $t \in (0, T)$; $\eta^k(0) = \xi^k$.

Теорема 4.1. (I) Если $\alpha_{k+1} = \tau$, $B_k = E$, $\beta_{k+1} = 0$, то условие $0 < \tau < 2/(M + m)$ является достаточным условием сходимости итерационного процесса (4.1)–(4.3). При $\tau = \tau_{opt}$, определенном формулой (4.4), справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$\|\varphi - \varphi^k\|_W \leq c_1 q_k, \quad \|\varphi^* - \varphi^{*k}\|_W \leq c_2 q_k, \quad \|u - u^k\|_H \leq c_3 q_k, \quad (4.9)$$

где $q_k = 1/\theta^k$, θ определяется по формуле (4.4), а постоянные c_1 , c_2 , c_3 , c_4 не зависят от числа итераций и от функций φ , φ^k , φ^* , φ^{*k} , u , u^k , $k > 0$.

(II) Если $B_k = E$, $\beta_{k+1} = 0$ и $\alpha_{k+1} = \tau_k$, где параметры τ_k определяются формулой (4.5) и циклически повторяются с периодом s , то ошибка итерационного процесса (4.1)–(4.3) подавляется после каждого цикла длины s . После $k = ls$ итераций справедливы оценки скорости сходимости (4.9) при $q_k = (T_s(\theta))^{-l}$.

(III) Если $B_k = C_k = E$ и $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}$ определяются формулами (4.6), то ошибка итерационного алгоритма (4.1)–(4.3) подавляется для каждого $k \geq 1$ и справедливы оценки скорости сходимости (4.9) при $q_k = (T_k(\theta))^{-1}$.

(IV) Если $B_k = C_k = E$ и $\alpha_{k+1} = 1/p_{k+1}$, $\beta_{k+1} = e_k/p_{k+1}$, где e_k , p_{k+1} определены равенствами (4.7), (4.8), то итерационный процесс (4.1)–(4.3) сходится и справедливы оценки скорости сходимости (4.9) при $q_k = (T_k(\theta))^{-1}$.

Доказательство. Можно показать, что итерационный процесс (4.1)–(4.3) эквивалентен итерационному алгоритму

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{k+1} B_k (L u^k - F) + \beta_{k+1} C_k (u^k - u^{k-1}) \quad (4.10)$$

для решения уравнения для управления (2.11) с правой частью F , определяемой с помощью (2.8)–(2.10).

Границы m и M спектра оператора управления L определяются неравенствами (3.2). Тогда при $\alpha > 0$ для решения уравнения $Lu = F$ можно воспользоваться известными алгоритмами с оптимальным выбором итерационных параметров. Теория этих методов хорошо разработана [18]. Принимая во внимание явные формулы для границ спектра m , M и применяя для решения уравнения $Lu = F$ метод простой итерации, методы Чебышевского ускорения (s -циклический и двухшаговый) и метод сопряженных градиентов в виде (4.10), приходим к утверждению теоремы с использованием известных результатов [18] для этих методов.

З а м е ч а н и е. В случае $\alpha_k = 1/\alpha$, $B_k = E$, $\beta_k = 0$ итерационный алгоритм (4.1)–(4.3) совпадает с известным методом Крылова — Черноусько [9].

Численный анализ некоторых из сформулированных алгоритмов можно найти в работах [2, 20, 21]. В последующих разделах мы рассмотрим применение разработанных алгоритмов для конкретной задачи об усвоении данных для квазилокальной модели турбулентного теплообмена в океане.

5. Квазилокальная модель вертикального теплообмена в океане

Предположим, что процесс переноса тепла при моделировании динамики океана можно описать с помощью квазилокальной модели вертикального теплообмена со специальным нелинейным коэффициентом диффузии. Конкретный вид математической квазилокальной модели вертикального теплообмена в океане может быть задан в виде

$$\begin{cases} T_t + a_1 w T_z + a_2 (wT)_z = (\mu T_z)_z - \lambda T + f \text{ в } (0, \bar{t}) \times Q, \\ \mu T_z = R(T - T_{\text{surf}}), \quad z = 0, \\ \mu T_z = 0, \quad z = H, \\ T|_{t=0} = T_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $t \in (0, \bar{t})$, $(x, y) \in \Omega$, $z \in (0, H)$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $Q = \Omega \times (0, H)$, $a_1, a_2 = \text{const} \geq 0$, $a_1 + a_2 = 1$, $w = w(t, x, y, z)$, $\lambda = \lambda(t, x, y, z) \geq 0$, $R = R(t) \geq 0$, $T_{\text{surf}} = T_{\text{surf}}(t, x, y)$ — ограниченные функции, $T_0 \in L_2(Q)$, $f \in L_2((0, \bar{t}) \times Q)$, $\bar{t}, H < \infty$.

Здесь T — температура, w — вертикальная скорость, μ — коэффициент турбулентного теплообмена, $z = 0$ — невозмущенная поверхность океана, H — глубина океана, z — вертикальная координата, направленная вниз. Коэффициент теплообмена μ [8, 23] задается по формуле

$$\mu = \mu_{\min} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \tanh(\gamma T_z) \right] \ln \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} \right\},$$

где $\gamma, \mu_{\min}, \mu_{\max} = \text{const} > 0$.

Вертикальная скорость w может определяться из трехмерной модели гидротермодинамики океана [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - lv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathcal{D}_u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + lu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathcal{D}_v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = g\rho_w, \quad \rho_w = \rho_w(T, S, p), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \mathcal{D}_T, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \mathcal{D}_S, \end{cases} \quad (5.2)$$

где $t \in (0, \bar{t})$, $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $z \in (0, H)$,

$$\mathcal{D}_\phi \phi = \frac{\partial}{\partial x} \mu_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \nu_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \phi = u, v, T, S$$

с соответствующими граничными и начальными условиями [3]. Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости $\underline{U} = (u, v, w)$ по координатным осям $0x, 0y, 0z$, соответственно p — давление, S — соленость, $\rho = \text{const} > 0$.

Таким образом, вертикальная скорость w на каждом последующем временном интервале может определяться из трехмерной модели гидротермодинамики океана (5.2) с предыдущего временного интервала.

Мы рассмотрим задачу о восстановлении начального условия T_0 с использованием квазилокальной модели (5.1). Разработанный алгоритм усвоения бытть использован совместно с трехмерной моделью (5.2). Мы начнем изложение с операторной формулировки задачи (5.1) и исследуем некоторые свойства нелинейного оператора задачи.

Пусть

$$Y = L_2(0, \bar{t}; W_2^1(Q)), \quad Y^* = L_2(0, \bar{t}; W_2^{-1}(Q)), \quad W = \{\varphi \in Y: \varphi_t \in Y^*\}.$$

Рассмотрим интегральное тождество

$$\begin{aligned} & (T_t, v) + a_1(wT_z, v) - a_2(wT, v_z) + a_2 \int_{\Omega} \int_0^{\bar{t}} (wTv) \Big|_{z=0}^{z=H} dt dx dy \\ &= -(\mu T_z, v_z) - \int_{\Omega} \int_0^{\bar{t}} R(T|_{z=0} - T_{\text{surf}}) v|_{z=0} dt dx dy - (\lambda T, v) + (f, v) \end{aligned}$$

$\forall v \in Y$, где $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L_2(0, \bar{t}; Q)}$.

Определим операторы $A, F : Y \rightarrow Y^*$ по формулам

$$\begin{aligned} (AT, v) &= a_1(wT_z, v) - a_2(wT, v_z) + a_2 \int_{\Omega} \int_0^{\bar{t}} (wTv) \Big|_{z=0}^{z=H} dt dx dy \\ &+ \int_{\Omega} \int_0^{\bar{t}} RT|_{z=0} v|_{z=0} dt dx dy + (\lambda T, v), \quad (F(T), v) = (\mu T_z, v_z), \quad T, v \in Y. \end{aligned}$$

Тогда задача (5.1) запишется в виде

$$\begin{cases} T_t + AT + F(T) = \bar{f}, & t \in (0, \bar{t}), \\ T|_{t=0} = T_0, \end{cases} \quad (5.3)$$

где $\bar{f} \in Y^*$ определяется по формуле

$$(\bar{f}, v) = (f, v) + \int_{\Omega} \int_0^{\bar{t}} RT_{\text{surf}} v|_{z=0} dt dx dy, \quad v \in Y.$$

Справедливы следующие утверждения, вытекающие из определений операторов A и F .

Лемма 5.1. *Оператор $A : Y \rightarrow Y^*$ — линейный, ограниченный, с областью определения $D(A) = Y$. При $a_1 = a_2$ оператор A симметричен и справедливо представление*

$$(AT, T) = a_2 \int_{\Omega} \int_0^{\bar{t}} (wT^2) \Big|_{z=0}^{z=H} dt dx dy + \int_{\Omega} \int_0^{\bar{t}} RT^2|_{z=0} dt dx dy + (\lambda T, T), \quad T \in Y.$$

В дальнейшем будем предполагать, что $w|_{z=H} = 0$.

Следствие 5.2. *Если $R \geq a_2 w|_{z=0}$, $\lambda \neq 0$, то оператор A положителен:*

$$(AT, T) > 0 \quad \forall T \in Y, \quad T \neq 0.$$

Лемма 5.2. *Оператор $F : Y \rightarrow Y^*$ ограничен.*

Лемма 5.3. В любой точке $T \in Y$ оператор F имеет производную Гато $F'(T)$, определяемую по формуле

$$(F'(T)u, v) = (\mu u_z, v_z) + (\mu' T_z u_z, v_z), \quad T, u, v \in Y,$$

где

$$\mu' = \mu q_1 \gamma (1 - \tanh^2(\gamma T_z)), \quad q_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}.$$

Оператор $F'(T)$ ограничен из Y в Y^* и

$$\|F'(T)u\|_{Y^*} \leq k \|u\|_Y,$$

где

$$k = \mu_{\max}(1 + q_1 q_2), \quad q_2 = 2(e^{2x_0} - e^{-2x_0})^{-1},$$

x_0 — положительный корень уравнения $\tanh x = 1/(2x)$.

Лемма 5.4. Пусть $R \geq a_2 w|_{z=0}$. При $a_1 = a_2$, $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, $q_1 q_2 < 1$ оператор $A + F$ сильно монотонный:

$$(Au + F(u) - Av - F(v), u - v) \geq m \|u - v\|_Y^2 \quad \forall u, v \in Y,$$

где $m = \min(\lambda_0, \mu_{\min}(1 - q_1 q_2))$.

З а м е ч а н и е. Утверждение леммы 5.4 о сильной монотонности оператора $A + F$ остается справедливым, если условие $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ заменить на условие $R \neq 0$, $w|_{z=0} = 0$.

Из лемм 5.1–5.4 с использованием результатов [4, 20] вытекает следующая

Теорема 5.1. Пусть $R \geq a_2 w|_{z=0}$, $a_1 = a_2$, $\lambda = \lambda_0 > 0$, $q_1 q_2 < 1$, $\bar{f} \in L_2((0, \bar{t}) \times Q)$, $T_0 \in L_2(Q)$. Тогда существует единственное решение $T \in W$ задачи (5.3).

6. Задача об усвоении данных для квазилокальной модели

Рассмотрим задачу (5.1) с неизвестной функцией $T_0 \in L_2(Q)$ (т.е. с неизвестным управлением T_0) в начальном условии. Задача об усвоении данных может быть сформулирована следующим образом: найти функцию $T_0 \in L_2(Q)$ такую, что

$$\begin{cases} T_t + AT + F(T) = \bar{f}, & t \in (0, \bar{t}), \\ T|_{t=0} = T_0, \\ S(T_0) = \inf_v S(v), \end{cases} \quad (6.1)$$

где

$$S(T_0) = \frac{\alpha}{2} \|T_0 - \hat{T}_0\|_{L_2(Q)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \|T - \hat{T}\|_{L_2(\Omega)}^2 dt, \quad (6.2)$$

$\hat{T} = T_{\text{surf}}$, \hat{T}_0 — заданные функции, $\alpha = \text{const} \geq 0$.

Таким образом, задача об усвоении данных состоит в отыскании функций T_0 и T таких, что они удовлетворяют задаче (5.1), причем на множестве решений уравнения (5.1) функционал (6.2) принимает наименьшее значение. Функции \hat{T} , \hat{T}_0 определяются, как правило, априорными данными наблюдений [1, 6, 14, 17].

Если $T_0 \in L_2(Q)$ — решение задачи (6.1), то оно удовлетворяет системе оптимальности (необходимое условие оптимальности):

$$\begin{cases} T_t + AT + F(T) = \bar{f}, & t \in (0, \bar{t}), \\ T|_{t=0} = T_0, \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} -T_t^* + A^*T^* + (F'(T))^*T^* = (\hat{T} - T), & t \in (0, \bar{t}), \\ T^*|_{t=\bar{t}} = 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\alpha(T_0 - \hat{T}_0) - T^*|_{t=0} = 0 \quad (6.5)$$

с неизвестными T , T^* , T_0 . Для гладких T , T^* система (6.3)–(6.5) принимает вид

$$\begin{cases} T_t + a_1 w T_z + a_2 (wT)_z = (\mu T_z)_z - \lambda T + f, \\ \mu T_z = R(T - T_{\text{surf}}), & z = 0, \\ \mu T_z = 0, & z = H, \\ T|_{t=0} = T_0, \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\begin{cases} -T_t^* - a_1 (wT^*)_z - a_2 w T_z^* = ((\mu + \mu' T_z) T_z^*)_z - \lambda T^* + (\hat{T} - T), \\ w T^* + (\mu + \mu' T_z) T_z^* = R T^*, & z = 0, \\ w T^* + \mu T_z^* = 0, & z = H, \\ T|_{t=T} = 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\alpha(T_0 - \hat{T}_0) - T^*|_{t=0} = 0. \quad (6.8)$$

Один из возможных методов решения системы оптимальности (6.6)–(6.8) — метод последовательных приближений вида [25]

$$\begin{cases} T_t^{(n+1)} + AT^{(n+1)} + BT^{(n+1)} + F(T^{(n)}) = BT^{(n)} + \bar{f}, \\ T^{(n+1)}|_{t=0} = T_0^{(n+1)}, \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\begin{cases} -T_t^{*(n+1)} + A^*T^{*(n+1)} + B^*T^{*(n+1)} + (F'(T^{(n)}))^*T^{*(n)} = B^*T^{*(n)} + (\hat{T} - T^{(n+1)}), \\ T^{*(n+1)}|_{t=\bar{t}} = 0, \end{cases} \quad (6.10)$$

$$\alpha(T_0^{(n+1)} - \hat{T}_0) - T^{*(n+1)}|_{t=0} = 0, \quad (6.11)$$

где

$$t \in (0, \bar{t}), \quad B : Y \rightarrow Y^*, \quad (BT, v) = \frac{1}{\beta} (T_z, v_z),$$

$$\beta = 2[\mu_{\min}(1 - q_1 q_2) + \mu_{\max}(1 + q_1 q_2)]^{-1}.$$

Из результатов работы [25] вытекает

Теорема 6.1. *В условиях теоремы 5.1 при $\alpha > 0$ метод (6.9)–(6.11) сходится.*

7. Итерационные методы для решения линейной задачи

На каждом шаге метода последовательных приближений (6.9)–(6.11) мы имеем линейную задачу об усвоении данных вида

$$\begin{cases} T_t + AT + BT = \tilde{f}, & t \in (0, \bar{t}), \\ T|_{t=0} = T_0, \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} -T_t^* + A^*T^* + B^*T^* = (\tilde{T} - T), & t \in (0, \bar{t}), \\ T^*|_{t=\bar{t}} = 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\alpha(T_0 - \hat{T}_0) - T^*|_{t=0} = 0, \quad (7.3)$$

где \tilde{f} , \tilde{T} — заданные функции. Для решения этой системы можно воспользоваться классом итерационных алгоритмов, представленных в разд. 4, вида

$$\begin{cases} T_t^k + AT^k + BT^k = \tilde{f}, & t \in (0, \bar{t}), \\ T^k|_{t=0} = T_0^k, \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\begin{cases} -T_t^{*k} + A^*T^{*k} + B^*T^{*k} = (\tilde{T} - T^k), & t \in (0, \bar{t}), \\ T^{*k}|_{t=\bar{t}} = 0, \end{cases} \quad (7.5)$$

$$T_0^{k+1} = T_0^k - \alpha_{k+1}C_k \left(\alpha(T_0^k - \hat{T}_0) - T^{*k}|_{t=0} \right) + \beta_{k+1}D_k(T_0^k - T_0^{k-1}), \quad (7.6)$$

где $C_k, D_k: L_2(0, H) \rightarrow L_2(0, H)$ — некоторые операторы, α_k, β_k — итерационные параметры. Выбор итерационных параметров обсуждается в разд. 4.

Метод сопряженных градиентов для линейной задачи (7.1)–(7.3) имеет вид

$$\begin{cases} T_t^k + AT^k + BT^k = \tilde{f}, & t \in (0, \bar{t}), \\ T^k|_{t=0} = T_0^k, \end{cases} \quad (7.7)$$

$$\begin{cases} -T_t^{*k} + A^*T^{*k} + B^*T^{*k} = (\tilde{T} - T^k), & t \in (0, \bar{t}), \\ T^{*k}|_{t=\bar{t}} = 0, \end{cases} \quad (7.8)$$

$$T_0^{k+1} = T_0^k - \alpha_{k+1} \left(\alpha(T_0^k - \hat{T}_0) - T^{*k}|_{t=0} \right) + \beta_{k+1}(T_0^k - T_0^{k-1}), \quad (7.9)$$

где $\alpha_{k+1} = 1/p_{k+1}$, $\beta_{k+1} = e_k/p_{k+1}$ и

$$e_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ p_k \|\xi^k\|_{L_2}^2 / \|\xi^{k-1}\|_{L_2}^2, & k > 0, \end{cases}$$

$$p_{k+1} = \alpha + \|\eta^k\|_{L_2}^2 / \|\xi^k\|_{L_2}^2 - e_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Здесь $\xi^k = \alpha T_0^k - T^{*k}|_{t=0}$, а η^k — решение задачи

$$\frac{d\eta^k}{dt} + A\eta^k + B\eta^k = 0, \quad t \in (0, T); \quad \eta^k(0) = \xi^k.$$

Из результатов разд. 4 вытекает

Теорема 7.1. *В условиях теоремы 5.1 при $\alpha > 0$ итерационный процесс (7.7)–(7.9) сходится.*

В отличие от метода простой итерации и чебышевских методов вида (7.4)–(7.6), метод сопряженных градиентов (7.7)–(7.9) не требует знания границ спектра оператора управления [25].

Численные эксперименты подтверждают теоретические результаты о сходимости итерационных алгоритмов с использованием сопряженных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Agoshkov V.I., Marchuk G.I.** On solvability and numerical solution of data assimilation problems // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1993. Vol. 8, no. 1. P. 1–16.
2. **Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.** Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // *Журн. выч. математики и мат. физики.* 2008. Т. 48, № 8. С. 1371–1391.
3. **Алексеев В.В., Залесный В.Б.** Численная модель крупномасштабной динамики океана // *Вычислитель. процессы и системы* / под ред. Г.И. Марчука. Вып. 10. М.: Наука, 1984. С. 232–252.
4. **Gajewski H., Gröeger K., Zacharias K.** Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Berlin: Acad. Verlag, 1974. 336 s.
5. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.** On analysis error covariances in variational data assimilation // *SIAM J. Sci. Comput.* 2008. Vol. 30, no. 4. P. 1847–1874.
6. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.** On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // *J. Comp. Phys.* 2010. Vol. 229, no. 6. P. 2159–2178.
7. **Glowinski R., Lions J.-L.** Exact and approximate controllability for distributed parameter systems // *Acta Numerica.* 1994. Vol. 1. P. 269–378.
8. **Kazantsev Chr., Moshonkin S.N., Zalesny V.B.** Mathematical modelling of the global ocean dynamics: solvability, numerical algorithm, calculations // *Variability and Predictability of Atmospheric and Oceanic Circulations.* Moscow: MGU, 1999. P. 153–168.
9. **Крылов И.А., Черноушко Ф.Л.** О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // *Журн. выч. математики и мат. физики.* 1962. Т. 2, № 6. С. 1132–1139.
10. **Le Dimet F.-X., Talagrand O.** Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // *Tellus.* 1986. Vol. 38A. P. 97–110.
11. **Lions J.L.** *Contrôle Optimal des Systèmes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles.* Paris: Dunod, 1968. 367 p.
12. **Lions J.-L.** On the controllability of distributed systems // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 1997. Vol. 94. P. 4828–4835.
13. **Марчук Г.И.** Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992. 335 с.
14. **Marchuk G.I., Zalesny V.B.** A numerical technique for geophysical data assimilation problem using Pontryagin's principle and splitting-up method // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1993. Vol. 8. P. 311–326.
15. **Marchuk G.I., Shutyaev V.P.** Iteration methods for solving a data assimilation problem // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1994. Vol. 9. P. 265–279.
16. **Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Shutyaev V.P.** Adjoint equations and perturbation algorithms in nonlinear problems. New York: CRC Press Inc., 1996. 275 p.
17. **Marchuk G., Shutyaev V., Zalesny V.** Approaches to the solution of data assimilation problems // *Optimal Control and Partial Differential Equations.* Amsterdam: IOS Press, 2001. P. 489–497.
18. **Марчук Г.И., Лебедев В.И.** Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981. 454 с.
19. **Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.** Numerical analysis of iterative methods for solving evolution data assimilation problems // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1999. Vol. 14, no. 3. P. 275–289.
20. **Parmuzin E., Shutyaev V.** Variational data assimilation for a nonstationary heat conduction problem with nonlinear diffusion // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 2005. Vol. 20, no. 1. P. 81–95.
21. **Parmuzin E.I., Shutyaev V.P., Diansky N.A.** Numerical solution of a variational data assimilation problem for a 3D ocean thermohydrodynamics model with a nonlinear vertical heat exchange // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 2007. Vol. 22, no. 2. P. 177–198.
22. *The mathematical theory of optimal processes* / L.S. Pontryagin [et al.] New York: John Wiley, 1962. 365 p.
23. **Schmidt G.A., Mysak L.A.** The stability of a zonally averaged thermohaline circulation model // *Tellus.* 1996. Vol. 48A. P. 158–178.

24. **Тихонов А.Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
25. **Шутяев В.П.** Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. М.: Наука, 2001. 239 с.

Марчук Гурий Иванович
академик РАН
Почетный директор
Институт вычислительной математики РАН
e-mail: guri@inm.ras.ru

Поступила 22.09.2010

Шутяев Виктор Петрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ученый секретарь, ведущий науч. сотрудник
Институт вычислительной математики РАН
e-mail: shutyaev@inm.ras.ru

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СМЕЩЕНИЕМ НА ОДНОМ КОНЦЕ СТРУНЫ ПРИ ЗАДАННОЙ УПРУГОЙ СИЛЕ НА ДРУГОМ КОНЦЕ¹**Е. И. Моисеев, А. А. Холомеева**

В работе изучена задача оптимального граничного управления смещением на одном конце струны при наличии заданного режима силы на другом конце. Задача изучается в смысле обобщенного решения соответствующей смешанной начально-краевой задачи из пространства Соболева. Решена проблема выбора оптимального граничного управления среди бесконечного числа допустимых управлений. Обобщенное решение смешанной начально-краевой задачи строится в явном виде, доказана единственность решения.

Ключевые слова: оптимальное управление, граничное управление, гиперболические уравнения, волновое уравнение.

E. I. Moiseev, A. A. Kholomeeva. Optimal boundary control by displacement at one end of a string under a given elastic force at the other end.

The problem of optimal boundary control by displacement at one end of a string in the presence of a specified force mode at the other end is studied in the sense of a generalized solution of the corresponding mixed initial-boundary value problem from a Sobolev space. The problem of choosing an optimal boundary control from the infinite number of admissible controls is solved. A generalized solution of the mixed initial-boundary value problem is constructed explicitly and the uniqueness of the solution is proved.

Keywords: optimal control, boundary control, hyperbolic equations, wave equation.

1. Постановка задачи

Рассмотрим колебания одномерной упругой струны, которые описываются одномерным волновым уравнением

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad (1.1)$$

в прямоугольнике $Q_T = [0 < x < l] \times [0 < t < T]$, где T — некоторый достаточно большой промежуток времени, а l — длина струны. На левом конце струны осуществляется управление смещением

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

а на правом конце струны действует некоторая известная заранее детерминированная сила

$$u_x(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.3)$$

Ставится задача отыскания такого граничного управления $\mu(t)$, которое бы перевело процесс колебаний струны из заданного начального состояния

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.4)$$

в произвольное финальное состояние

$$u(x, T) = \widehat{\varphi}(x), \quad u_t(x, T) = \widehat{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.5)$$

¹Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-7332.2010.9).

Поставленная задача граничного управления будет пониматься в смысле обобщенного решения соответствующей смешанной начально-краевой задачи из класса $W_p^1(Q_T)$ при $p \geq 1$. При этом от начальных, финальных и граничных функций мы требуем выполнения условия принадлежности классам

$$\begin{aligned} \varphi(x), \widehat{\varphi}(x) \in W_p^1[0, l], \quad \psi(x), \widehat{\psi}(x) \in L_p[0, l], \\ \mu(t) \in W_p^1[0, T], \quad \nu(t) \in L_p[0, T]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Поскольку при промежутках времени $T > 2l$ таких управлений существует бесконечное число, ставится задача об отыскании оптимального граничного управления, т. е. такой функции $\mu(t)$, которая переводит колебательный процесс из состояния (1.4) в состояние (1.5), и на которой, помимо того, достигается минимум интеграла

$$\inf \int_0^T |\mu'(t)|^p dt. \quad (1.7)$$

Ранее похожие задачи оптимального граничного управления при наличии заданного режима возникали при исследовании нелокальных задач оптимального граничного управления (см., например, [1]).

Проблемам граничного управления колебательными процессами и вопросам управляемости, в частности, посвящены работы [2–5].

2. Исследование смешанной краевой задачи

Исследуем смешанную задачу, соответствующую исходной задаче граничного управления,

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) &= \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) &= \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (2.1)$$

требуя выполнения условия согласования $\varphi(0) = \mu(0)$.

О п р е д е л е н и е. Обобщенным решением из класса $W_p^1(Q_T)$ смешанной задачи (2.1) будем называть функцию $u(x, t) \in W_p^1(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^T u(x, t) (\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)) dx dt - \int_0^T \mu(t) \Phi_x(0, t) dt \\ + \int_0^l \varphi(x) \Phi_t(x, 0) dx - \int_0^l \psi(x) \Phi(x, 0) dx - \int_0^T \nu(t) \Phi(l, t) dt = 0 \end{aligned}$$

для произвольных функций $\Phi(x, t) \in C^{(2)}(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \Phi(x, T) \equiv 0, \quad \Phi_t(x, T) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq L, \\ \Phi(0, t) \equiv 0, \quad \Phi_x(l, t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.1. Единственность решения

Теорема 2.1. *Обобщенное решение смешанной задачи (2.1) если существует, то единственно.*

Доказательство. Предположим, что существуют 2 различных обобщенных решения начально-краевой задачи $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Тогда, обозначив $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, получим, что $u(x, t)$ является обобщенным решением смешанной задачи для волнового уравнения (1.1) с нулевыми начальными условиями $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ и однородными краевыми условиями $u(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = 0$. По определению $u(x, t)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l \int_0^T u(x, t) (\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)) dx dt = 0 \quad (2.3)$$

для произвольной функции $\Phi(x, t)$ из класса $C^2(\bar{Q}_T)$, удовлетворяющей требованиям (2.2). Покажем, что $u(x, t) = 0$ как элемент $W_p^1(Q_T)$. В качестве пробных функций $\Phi(x, t)$ возьмем следующую систему функций:

$$\Phi^{n,m}(x, t) = \begin{cases} \sin(\alpha_n x) \left[\frac{\sin((T-t)\alpha_n) - \sin((T-t)\beta_m)}{\alpha_n - \beta_m} - \frac{\sin((T-t)\alpha_n) + \sin((T-t)\beta_m)}{\alpha_n + \beta_m} \right] \\ \text{при } n = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots, \alpha_n \neq \beta_m; \\ \sin(\alpha_n x) \left[(T-t) \cos((T-t)\alpha_n) - \frac{\sin((T-t)\alpha_n)}{\alpha_n} \right] \\ \text{при } n = 0, 1, \dots, \alpha_n = \beta_m, \end{cases} \quad (2.4)$$

где $\alpha_n = (n + 1/2)\pi/l$, $n = 0, 1, \dots$, $\beta_m = \pi m/T$, $m = 1, 2, \dots$. Соответствующая разность будет иметь вид

$$\Phi_{tt}^{n,m}(x, t) - \Phi_{xx}^{n,m}(x, t) = -2\alpha \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m(T-t)), \quad n = 0, 1, \dots, m = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Подставим построенную систему функций (2.4) в (2.3), воспользовавшись (2.5). Сведем в полученном равенстве двойной интеграл к повторному. По теореме Фуббини для почти всех x из $[0, l]$ и почти всех t из $[0, T]$ интеграл существует и верно равенство

$$\int_0^l \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right) \left(\int_0^T u(x, t) \sin \frac{m\pi(T-t)}{T} dt \right) dx = 0. \quad (2.6)$$

Поскольку равенство (2.6) верно для всех $n = 0, 1, \dots$, то в силу леммы, которая будет сформулирована и доказана ниже, для почти всех x из $[0, l]$ и для всех $m = 1, 2, \dots$ будет выполнено

$$\int_0^T u(x, t) \sin \frac{m\pi(T-t)}{T} dt = 0. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что $u(x, t) = 0$ в смысле пространства $L_1[Q_T]$, а значит и пространства $W_p^1[Q_T]$ (см. [6, с. 27]).

Лемма. *Ортонормированная система функций*

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \right\}_{n=0}^{\infty} \quad (2.8)$$

полна в пространстве $L_1[0, \pi]$, т. е. если

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) dx = 0 \quad \forall n = 0, 1, \dots,$$

то $f(x) = 0$ в смысле пространства $L_1[0, \pi]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = 2f(x) \cos(x/2)$, тогда $\forall n = 1, 2, \dots$

$$\int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx = \int_0^{\pi} f(x) \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x dx + \int_0^{\pi} f(x) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x dx = 0$$

по условию леммы. В силу полноты системы $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_1[0, \pi]$ (это следует из теоремы Фейера для пространства L_1 , см. [7, с. 437]) построенная $g(x) = 0$ почти всюду, а значит и $f(x) = 0$ почти всюду.

Замечание 1. В работе [8] исследовалась более общая система синусов $\{\sin(n - \beta/2)\theta\}_{n=1}^{\infty}$ с точки зрения базисности в пространстве $L_p[0, \pi]$, однако только для $p > 1$.

2.2. Существование решения

Теорема 2.2. *Обобщенное решение смешанной задачи (2.1) существует.*

Замечание 2. Обобщенное решение смешанной задачи (2.1) будет принадлежать не только $W_p^1(Q_T)$, но и более узкому $\widehat{W}_p^1(Q_T)$, который представляет собой множество функций двух переменных $u(x, t)$, непрерывных в замкнутом прямоугольнике Q_T и имеющих в нем обе обобщенные частные производные $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, каждая из которых принадлежит не только классу $L_p(Q_T)$, но и классу $L_p[0, l]$ при каждом t из сегмента $[0, T]$ и классу $L_p[0, T]$ при каждом x из сегмента $[0, l]$.

Предъявим решение в явном аналитическом виде. Смешанная задача (2.1) уже изучалась в работах [9, 10] в смысле обобщенного решения из класса $\widehat{W}_p^1(Q_T)$. В этих работах данная смешанная задача возникала в связи с задачей оптимального граничного управления смещением на одном конце струны и силой — на другом конце. Позаимствуем из этих работ явный аналитический вид решения $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) + \hat{u}(x, t),$$

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x+t) + \varphi(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi & \text{в } \Delta_1, \\ \frac{1}{2} [\varphi(x+t) + \varphi(0)] + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \psi(\xi) d\xi & \text{в } \Delta_2, \\ \frac{1}{2} [\varphi(l) + \varphi(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^l \psi(\xi) d\xi & \text{в } \Delta_3, \\ \frac{1}{2} [\varphi(0) + \varphi(l)] + \frac{1}{2} \int_0^l \psi(\xi) d\xi = C_0 & \text{в } \Delta_4, \end{cases} \quad (2.9)$$

где Δ_1 — треугольник, ограниченный отрезками прямых $x - t = 0$, $x + t - l = 0$ и $t = 0$, Δ_2 ограничен отрезками прямых $x - t = 0$, $x + t - l = 0$ и $x = 0$, Δ_3 ограничен отрезками

прямых $x - t = 0$, $x + t - l = 0$ и $x = l$, пятиугольник Δ_4 ограничен отрезками прямых $x = t$, $x + t - l = 0$, $x = 0$, $x = l$ и $t - T = 0$. Построенная функция будет являться решением смешанной задачи с начальными условиями $\tilde{u}(x, 0) = \varphi(x)$, $\tilde{u}_t(x, 0) = \psi(x)$ и некоторыми граничными условиями $\tilde{u}(0, t) = \tilde{\mu}(t)$, $\tilde{u}_x(l, t) = \tilde{\nu}(t)$, где функции $\tilde{\mu}(t)$, $\tilde{\nu}(t)$ можно построить явно, пользуясь (2.9).

$$\begin{aligned}
 \hat{u}(x, t) &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \hat{\mu}(t - x - 2kl) - \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \hat{\mu}(t + x - 2kl) \\
 &+ \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \int_0^{t-l+x-2kl} \hat{\nu}(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \int_0^{t+l-x-2kl} \hat{\nu}(\tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

где через $\hat{\mu}(t)$ и $\hat{\nu}(t)$ обозначены функции, совпадающие с $\hat{\mu}(t) = \mu(t) - \tilde{\mu}(t)$ и $\hat{\nu}(t) = \nu(t) - \tilde{\nu}(t)$ соответственно при $0 \leq t \leq T$ и равные нулю при $t < 0$.

3. Оптимизация

3.1. Случай управления из $W_2^1[0, T]$

Будем решать задачу нахождения оптимального граничного управления при $p = 2$, т.е. будем рассматривать задачу граничного управления в смысле обобщенного решения (2.1) из класса $W_2^1(Q_T)$, а функцию оптимального управления $\mu(t)$ будем искать в классе $W_2^1[0, T]$. Для относительного упрощения итоговых формул будем рассматривать промежутки времени, кратные длине струны, умноженной на 4, т.е. $T = 4l(n + 1)$, $n = 0, 1, \dots$. Найденное ранее в явном виде обобщенное решение начально-краевой задачи позволяет нам задать условия связи, которые мы можем учесть при минимизации интеграла (1.7):

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \mu'(2kl + x) = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \nu(2kl - l + x) - \frac{\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)}{2}, \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \mu'(2kl - x) = - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \nu(2kl + l - x) - \frac{\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\psi}(x)}{2},$$

$x \in [0, l]$, где $\tilde{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(x) - \varphi(x)$, $\tilde{\psi}(x) = \hat{\psi}(x) - \psi(x)$, а сами равенства понимаются в смысле равенства элементов пространства $L_2[0, T]$. Кроме этих двух условий мы будем требовать выполнения равенства

$$\int_0^T \mu'(t) dt = \tilde{\varphi}(0). \quad (3.2)$$

При выполнении условий (3.1), (3.2) известными методами можно сначала найти формулы, задающие первую производную оптимального граничного управления:

$$\begin{aligned}
 \mu'(2ml + x) &= \frac{(-1)^m}{2(n+1)} \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \nu(2kl - l + x) \\
 &- \frac{(-1)^m}{4(n+1)} [\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x)] + \frac{\tilde{\varphi}(0)}{T}, \quad k = 0, \dots, 2n+1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mu'(2ml - x) &= \frac{-(-1)^m}{2(n+1)} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \nu(2kl + l - x) \\
 &- \frac{(-1)^m}{4(n+1)} [\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\psi}(x)] + \frac{\tilde{\varphi}(0)}{T}, \quad k = 1, \dots, 2n+2,
 \end{aligned}$$

а затем и само оптимальное управление.

Теорема 3.1. *Оптимальное граничное управление задачи (1.1)–(1.7) может быть представлено в виде*

$$\mu(t) = L(t) + \alpha(t) + \beta(t), \quad (3.3)$$

где $L(t)$ — главный линейный член, который определяется равенством

$$L(t) = \varphi(0) + \frac{t}{T} \tilde{\varphi}(0), \quad (3.4)$$

а $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — периодические добавочные члены, которые для любого $k = 0, 1, \dots, n$ и для любого $x \in [0, l]$ задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \alpha(4kl + x) &= -\frac{1}{4(n+1)} \left(\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(0) + \int_0^x \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right), \\ \alpha(2l(2k+1) - x) &= -\frac{1}{4(n+1)} \left(\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(0) + \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi + \int_x^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right), \\ \alpha(2l(2k+1) + x) &= \frac{1}{4(n+1)} \left(\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(0) - \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi - \int_x^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right), \\ \alpha(4l(k+1) - x) &= \frac{1}{4(n+1)} \left(\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(0) - \int_0^x \tilde{\psi}(\xi) d\xi \right); \\ \beta(4kl + x) &= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^m \int_0^x \nu(2ml - l + \xi) d\xi, \\ \beta(2l(2k+1) - x) &= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^m \left(\int_0^l \nu(2ml - l + \xi) d\xi - \int_x^l \nu(2ml - l - \xi) d\xi \right), \\ \beta(2l(2k+1) + x) &= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^m \left(-\int_0^l \nu(2ml - l - \xi) d\xi + \int_x^l \nu(2ml - l + \xi) d\xi \right), \\ \beta(4l(k+1) - x) &= -\frac{1}{2(n+1)} \sum_{m=1}^{2n+2} (-1)^m \int_0^x \nu(2ml - l - \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\tilde{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(x) - \varphi(x)$, $\tilde{\psi}(x) = \hat{\psi}(x) - \psi(x)$.

З а м е ч а н и е 3. Если в задаче положить $\nu(t) = 0$ в смысле равенства элементов из $L_2[0, T]$, то задача с заданным режимом перейдет в задачу граничного управления смещением на одном конце струны при свободном втором конце, которая была подробно исследована, например, в [9]. В этом случае для периодического добавочного члена $\beta(t)$, который задается формулами (3.6), $\beta(t) = 0$ в смысле равенства элементов из $W_2^1[0, T]$, а функции $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ могут быть продолжены четным образом с отрезка $[0, l]$ на отрезок $[0, 2l]$, тем самым мы получим формулы (3.3)–(3.6), задающие оптимальное граничное управление, полностью идентичные соответствующим формулам в указанной работе.

З а м е ч а н и е 4. Если $\tilde{\varphi}(0) = 0$, то формулы (3.3)–(3.6) задают оптимальное граничное управление при всех $p \neq 2$.

З а м е ч а н и е 5. При $p \neq 2$ и $\tilde{\varphi}(0) \neq 0$ найденное оптимальное управление, вообще говоря, не будет оптимальным, однако будет допустимым, т. е. переведет струну из заданного состояния (1.4) в финальное (1.5) за заданное время T .

Рассмотрим этот случай подробнее.

3.2. Случай управления из $W_p^1[0, T]$, $p \neq 2$

На примере одного частного случая покажем, что при $p \neq 2$ и при отсутствии специальных предположений на функции начальных и финальных условий зависимость оптимального управления от исходных данных будет, вообще говоря, нелинейной. Положим в (1.3) $\nu(t) = 0$ в смысле пространства $L_p[0, T]$, т. е. правый конец струны свободен.

В работе [11] показано, что в этом частном случае оптимальное граничное управление единственно и может быть найдено из уравнений

$$|\mu'(x)|^{p-1} \operatorname{sign} \mu'(x) + \left| \mu'(x) - \frac{f(x)}{n+1} \right|^{p-1} \operatorname{sign} \left(\mu'(x) - \frac{f(x)}{n+1} \right) = C, \quad (3.7)$$

где

$$f(x) = -\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\psi}(x),$$

а константа C выбирается так, чтобы найденное $\mu'(x, C)$ удовлетворяло условию

$$2 \int_0^{2l} \mu'(x) dx = \int_0^{2l} \frac{f(x)}{n+1} dx + \frac{\tilde{\varphi}(0)}{n+1}.$$

Из этих формул видно, что найденное таким образом оптимальное граничное управление будет нелинейно зависеть от $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$. Например, в частном случае при $p = 4$ (3.7) переходит в кубическое уравнение

$$(\mu'(x))^3 + \left(\mu'(x) - \frac{f(x)}{n+1} \right)^3 = C,$$

которое может быть решено с помощью формул Кардано.

Авторы благодарят А.М. Седлецкого за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Моисеев Е.И., Холомеева А.А.** Оптимальное граничное управление смещением колебаниями струны с нелокальным условием нечетности первого рода // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 11. С. 1623–1630.
2. **Lions J.-L.** Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. Vol. 30, no. 2. P. 1–68.
3. **Васильев Ф.П.** О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1893–1900.
4. **Бутковский А.Г.** Теория оптимального граничного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
5. **Егоров А.И.** Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР. Математика. 1965. Т. 29, № 6. С. 1205–1256.
6. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965. 615 с.
7. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006. 570 с.
8. **Моисеев Е.И.** О базисности систем синусов и косинусов // Докл. РАН. 1984. Т. 275, № 4. С. 794–798.

9. **Ильин В.А., Моисеев Е.И.** Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 6. С. 89–114.
10. **Блошанская Л.И., Смирнов И.Н.** Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце и смещением на втором конце за произвольный достаточно большой промежуток времени для задачи колебания струны // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 860–870.
11. **Моисеев Е.И.** Оптимальное граничное управление смещением в W_p^1 струной со свободным концом // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. С. 709–711.

Моисеев Евгений Иванович
академик РАН
д-р физ.-мат. наук, профессор
фак. ВМК МГУ им. М.В.Ломоносова,
Вычислительный Центр РАН им. А.А. Дородницына
e-mail: dean@cs.msu.su

Поступила 12.12.2010

Холومهева Анна Андреевна
младший науч. сотрудник
фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: kholomeyeva@gmail.com

УДК 519.174

КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАЛОЙ ВЫСОТЫ В РЕШЕТКАХ ПОЛНЫХ МНОГОДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Т. А. Сеньчонок, В. А. Баранский

Целью работы является классификация элементов высоты 2 и 3 в решетках $NPL(n, t)$ полных многодольных графов при $t \geq 4$. Приводится так же описание нижних этажей решеток $NPL(n, t)$ с указанием дополнительной информации о двух хроматических инвариантах, используемой при изучении хроматической определяемости полных многодольных графов.

Ключевые слова: разбиение натурального числа, решетка, граф, полный многодольный граф, хроматический многочлен, хроматическая определяемость.

T. A. Senchonok, V. A. Baransky. Classification of elements of small height in lattices of complete multipartite graphs.

The purpose of the paper is to classify elements of height 2 and 3 in lattices $NPL(n, t)$ of complete multipartite graphs for $t \geq 4$. In addition, lower floors of the lattices $NPL(n, t)$ are described and information on two chromatic invariants is specified. This information is used for studying the chromatic uniqueness of complete multipartite graphs.

Keywords: integer partition, lattice, graph, complete multipartite graph, chromatic polynomial, chromatic uniqueness.

Введение

Разбиением натурального числа n [1] называется невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $u = (u_1, u_2, \dots)$ такая, что $u_1 \geq u_2 \geq \dots$, причем u содержит лишь конечное число ненулевых компонент и $n = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. Число l такое, что $u_l > 0$ и $u_{l+1} = u_{l+2} = \dots = 0$, будем называть длиной разбиения u и обозначать через $l(u)$. Для удобства разбиение u будем записывать в одном из следующих видов $u = (u_1, u_2, \dots) = (u_1, \dots, u_l) = (u_1, \dots, u_l, u_{l+1}) = (u_1, \dots, u_l, u_{l+1}, u_{l+2}) = \dots$. Будем также писать $n = \text{sum}(u)$.

Разбиение натурального числа удобно изображать в виде *диаграммы Ферре*, которую можно представлять себе как вертикальную стенку, сложенную из кубических блоков одинакового размера. Вот пример такой диаграммы (см. рис. 1).

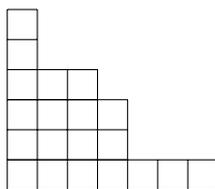


Рис. 1.

На рис. 1 представлено разбиение $20 = 6 + 4 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1$ числа 20 на 7 слагаемых. Здесь 7 — длина разбиения $(6, 4, 4, 3, 1, 1, 1)$.

Через $NPL(n, t)$ обозначим множество всех разбиений длины t натурального числа n , где $1 \leq t \leq n$. Определим понятие *элементарного преобразования* разбиения $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ числа n [2]. Пусть натуральные числа i и j таковы, что 1) $1 \leq i < j \leq t$; 2) $u_i - 1 \geq u_{i+1}$ и $u_{j-1} \geq u_j + 1$; 3) $u_i = u_j + \delta$, где $\delta \geq 2$. Будем говорить, что разбиение $v = (u_1, \dots, u_i - 1, \dots,$

$u_j + 1, \dots, u_t$) получено элементарным преобразованием (или перекидыванием блока) разбиения $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_t)$. Отметим, что v отличается от u лишь на двух компонентах с номерами i и j .

Рассмотрим отношение \geq на множестве $NPL(n, t)$ [2], полагая $u \geq v$, если v можно получить из u с помощью последовательного выполнения конечного числа (возможно нулевого) элементарных преобразований. Отметим, что выполняется

$$u = (u_1, \dots, u_t) \geq (v_1, \dots, v_t) = v$$

тогда и только тогда, когда $u_1 + \dots + u_i \geq v_1 + \dots + v_i$ для любого $i = 1, 2, \dots, t - 1$. В [2] показано, что $NPL(n, t)$ является решеткой относительно \geq .

Элементарное преобразование разбиения будем называть *падением блока*, если $j = i + 1$ и $\delta > 2$, и *сдвигом блока*, если $i + 1 < j$, $u_i = u_{i+1} + 1$, $u_{i+1} = u_{i+2} = \dots = u_{j-1}$ и $u_{j-1} = u_j + 1$, или если $j = i + 1$ и $\delta = 2$ (см. рис. 2).

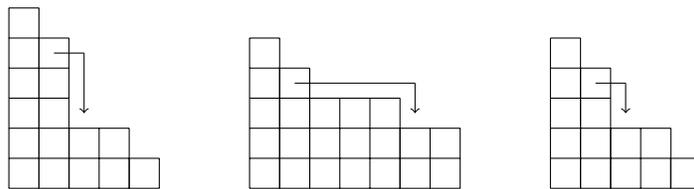


Рис. 2.

Рассмотрим отношение \Rightarrow на $NPL(n, t)$, полагая $u \Rightarrow v$, если разбиение v получается из разбиения u падением или сдвигом блока. В [2] доказано, что отношение \Rightarrow совпадает с отношением покрытия в решетке $NPL(n, t)$.

Пусть $n = t \cdot q + r$, где q — натуральное число и r — неотрицательное целое число такие, что $0 \leq r < t$. Нетрудно заметить, что разбиение $(q + 1, \dots, q + 1, q, \dots, q)$, где число $q + 1$ повторяется r раз, а число q повторяется $t - r$ раз, является наименьшим элементом решетки $NPL(n, t)$.

Пусть $n = n_1 + n_2 + \dots + n_t$ — разбиение числа n , где $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq 1$. Через $K(n_1, n_2, \dots, n_t)$ будем обозначать полный t -дольный граф на n вершинах с долями размеров n_1, n_2, \dots, n_t . Очевидно, с точностью до изоморфизма существует взаимно однозначное соответствие между полными t -дольными графами на n вершинах и элементами решетки $NPL(n, t)$. Поэтому мы можем отождествлять полный многодольный граф на n вершинах с соответствующим ему разбиением числа n . Конечно, порядок \geq на $NPL(n, t)$ можно рассматривать как порядок на множестве полных t -дольных графов на n вершинах.

Пусть G — произвольный обыкновенный (т. е. без петель и кратных ребер) граф, имеющий n вершин. Для натурального числа x через $P(G, x)$ обозначим число всевозможных раскрасок графа G в x заданных цветов, причем не предполагается, что в раскраске должны быть использованы все x цветов. Хорошо известно (см., например, [3]), что функция $P(G, x)$ есть многочлен степени n от x , который называют *хроматическим многочленом* графа G .

Два графа называются *хроматически эквивалентными* [4], если они имеют одинаковые хроматические многочлены. Граф называется *хроматически определяемым*, если он изоморфен любому хроматически эквивалентному ему графу. Это понятие было введено в работе [5]. Поиску хроматически определяемых графов было посвящено значительное число исследований (см. обзор [6]). В частности, в работе [7] доказано, что хроматически определяемы полные t -дольные графы вида $K(q + 1, \dots, q + 1, q, \dots, q)$. Иными словами, хроматически определяемы полные многодольные графы, являющиеся наименьшими элементами в решетках $NPL(n, t)$. В работе [8] установлена хроматическая определяемость атомов в решетках $NPL(n, t)$.

В ходе многочисленных исследований сформировалась следующая гипотеза: хроматически определяем любой полный многодольный граф $K(n_1, n_2, \dots, n_t)$ при $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq 2$.

К настоящему времени эта гипотеза подтверждена при больших значениях n_t в зависимости от числа вершин графа [6] и, как мы видим, для элементов высоты 0 и 1 в решетках $NPL(n, t)$.

Рассмотренное нами отношение \geq на решетках $NPL(n, t)$ дает удобный инструмент для исследования хроматической определяемости полных многодольных графов. Мы планируем опубликовать в дальнейшем результаты о хроматической определяемости элементов высоты 2 и 3 в решетках $NPL(n, t)$. В связи с этим нам необходимо решить задачу о классификации элементов малой высоты в решетках $NPL(n, t)$.

Таким образом, основной целью нашей работы является классификация элементов высоты 2 и 3 в решетках $NPL(n, t)$, которая приведена в таблице теоремы. Кроме того, мы дадим описание нижних этажей решеток $NPL(n, t)$ с указанием некоторой дополнительной информации об отношении покрытия. Мы рассмотрим также некоторые элементы высоты 4 в решетке $NPL(n, t)$, которые нам понадобятся в дальнейшем при изучении хроматической определяемости полных многодольных графов.

Приведем теперь необходимые для дальнейшего изложения определения.

Будем считать, что любое разбиение состоит из *кластеров*, причем каждый кластер состоит из максимального множества равных между собой компонент. Например, разбиение $(7, 7, 6, 4, 4, 4, 2, 2, 1)$ состоит из пяти кластеров, отвечающих числам 7, 6, 4, 2, 1. Здесь кластер, отвечающий числу 4, состоит из трех компонент. Кластер, отвечающий числу s , будем называть *s-кластером*.

Предположим, что выполняется $u \Rightarrow v$ в решетке $NPL(n, t)$. Если v получается из u с помощью падения блока, то будем говорить, что u получается из v с помощью *подъема блока*. Если v получается из u с помощью сдвига блока, то будем говорить, что u получается из v с помощью *косдвига блока*. Пусть $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_t) \Rightarrow (v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_t) = v$, где $1 \leq i < j \leq t$, $v_i = u_i - 1$ и $v_j = u_j + 1$. Случай подъема блока отвечает ситуации, когда один блок перемещается влево из одноэлементного кластера в соседний одноэлементный кластер (см. рис. 3(а)). В случае косдвига из последней компоненты v_j -кластера один блок перемещается в первую компоненту этого же кластера (см. рис. 3(б)).

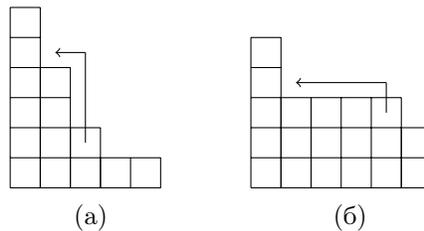


Рис. 3.

1. Классификация элементов высоты 2 и 3 в $NPL(n, t)$ при $t \geq 4$

Перейдем теперь к рассмотрению элементов малой высоты в решетках $NPL(n, t)$, где $1 < t < n$.

В работах [9–11] доказано, что любой полный трехдольный граф $K(n_1, n_2, n_3)$ высоты ≤ 3 в решетке $NPL(n, 3)$ хроматически определяем при $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 2$, там же дана классификация элементов высоты 2 и 3 в решетке $NPL(n, 3)$. В работе же [12] установлено, что полный двухдольный граф $K(n_1, n_2)$ хроматически определяем при $n_1 \geq n_2 \geq 2$. В силу этих фактов будем в дальнейшем считать, что $t \geq 4$.

Сначала мы рассмотрим всевозможные покрытия наименьшего элемента решетки $NPL(n, t)$ (т.е. ее атомы), затем — покрытия найденных элементов (т.е. элементы высоты 2 в решетке $NPL(n, t)$) и т.д. Для этого мы будем находить для заданного элемента v из $NPL(n, t)$ элементы u такие, что $u \Rightarrow v$. Элементы u такого вида могут быть получены из v с помощью подъема блока или косдвига блока.

1. Итак, пусть $b_1 = (\underbrace{q+1, \dots, q+1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r})$ — наименьший элемент решетки $NPL(n, t)$.

Это элемент высоты 0, условие его существования имеет вид $0 \leq r \leq t-1$.

1.1. Очевидно, подъем блока из $(q+1)$ -кластера невозможен.

1.2. Косдвиг блока в $(q+1)$ -кластере дает элемент высоты 1

$$b_2 = (q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+1}).$$

Условие существования этого элемента имеет вид $2 \leq r \leq t-1$.

1.3. Подъем блока из q -кластера возможен при условиях $r=1$ и $t-r=1$, но тогда $t=2$, что невозможно.

1.4. Косдвиг блока в q -кластере дает элемент высоты 1

$$b_3 = (\underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r+1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q-1),$$

который существует при $q \geq 2$ и $t-r \geq 2$, т.е. при $q \geq 2$ и $0 \leq r \leq t-2$.

2. Найдем теперь покрытия элемента b_2 , где $2 \leq r \leq t-1$.

2.1. Подъем и косдвиг блока из $(q+2)$ -кластера невозможны, так как этот кластер является первым и одноэлементным.

2.2. Подъем блока из $(q+1)$ -кластера возможен при условии $r-2=1$, т.е. при $3=r \leq t-1$ мы получаем элемент высоты 2

$$c_1 = (q+3, \underbrace{q, \dots, q}_{t-1}) = (q+3, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+2}).$$

2.3. Косдвиг блока в $(q+1)$ -кластере возможен при условии $r-2 \geq 2$, т.е. $r \geq 4$. Таким образом, при условии $4 \leq r \leq t-1$ мы получаем элемент высоты 2

$$b_4 = (q+2, q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-4}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+2}).$$

2.4. Рассмотрим подъем блока из q -кластера.

2.4.1. Подъем блока происходит в $(q+2)$ -кластер. Тогда $(q+1)$ -кластер пуст, т.е. $r-2=0$, и $t-r+1=1$. Отсюда получаем $t=2$, что невозможно.

2.4.2. Подъем блока происходит в $(q+1)$ -кластер. Тогда $r-2=1$ и $t-r+1=1$. Отсюда получаем $t=3$, что невозможно.

2.5. Косдвиг блока в q -кластере возможен при условии $t-r+1 \geq 2$, т.е. $2 \leq r \leq t-1$. При этом условии мы получаем элемент высоты 2

$$b_5 = (q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-1}, q-1)$$

(конечно, при условии $q-1 \geq 1$, т.е. $q \geq 2$). Далее условия на q мы будем опускать, так как они указываются очевидным образом (последняя компонента разбиения должна быть ≥ 1).

3. Найдем теперь покрытия элемента b_3 , где $0 \leq r \leq t-2$.

3.1. Очевидно, подъем блока из $(q+1)$ -кластера невозможен.

3.2. Косдвиг блока в $(q+1)$ -кластере при условии $r+1 \geq 2$, т.е. при $1 \leq r \leq t-2$, дает элемент высоты 2

$$b_5 = (q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-1}, q-1).$$

3.3. Подъем блока из q -кластера возможен при $r + 1 = 1$ и $t - r - 2 = 1$, т. е. при $r = 0$ и $t = 3$, что невозможно.

3.4. Косдвиг блока в q -кластере возможен при $t - r - 2 \geq 2$, т. е. при $0 \leq r \leq t - 4$, и мы получаем элемент высоты 2

$$b_6 = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-4}, q - 1, q - 1).$$

3.5. Рассмотрим подъем блока из $(q - 1)$ -кластера.

3.5.1. Подъем блока происходит в $(q + 1)$ -кластер. Тогда $r + 1 = 1$ и $t - r - 2 = 0$, т. е. $r = 0$ и $t = 2$, что невозможно.

3.5.2. Подъем блока происходит в q -кластер. Это возможно при $t - r - 2 = 1$, т. е. при $0 \leq r = t - 3$, и мы получаем элемент высоты 2

$$c_2 = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1, q - 2}_{r+2}) = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-3}, q - 2).$$

3.6. Косдвиг блока в $(q - 1)$ -кластере невозможен, так как этот кластер одноэлементен.

4. Найдем теперь покрытия элемента b_4 , где $4 \leq r \leq t - 1$.

4.1. Очевидно, подъем блока из $(q + 2)$ -кластера невозможен.

4.2. Косдвиг блока в $(q + 2)$ -кластере при условии $4 \leq r \leq t - 1$ дает элемент высоты 3

$$b_7 = (q + 3, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+2}).$$

4.3. Очевидно, подъем блока из $(q + 1)$ -кластера невозможен.

4.4. Косдвиг блока в $(q + 1)$ -кластере возможен при $r - 4 \geq 2$, т. е. при $6 \leq r \leq t - 1$ мы получаем элемент высоты 3

$$b_8 = (q + 2, q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-6}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+3}).$$

4.5. Рассмотрим подъем блока из q -кластера.

4.5.1. Очевидно, подъем блока в $(q + 2)$ -кластер невозможен.

4.5.2. Подъем блока происходит в $(q + 1)$ -кластер. Тогда $r - 4 = 1$ и $t - r + 2 = 1$, т. е. $r = 5$ и $t = 4$, что невозможно, так как $r \leq t - 1$.

4.6. Косдвиг блока в q -кластере возможен при условии $t - r + 2 \geq 2$, т. е. при $4 \leq r \leq t - 1$ мы получаем элемент высоты 3

$$b_9 = (q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r}, q - 1).$$

5. Найдем теперь покрытия элемента b_5 , где $2 \leq r \leq t - 1$ или $1 \leq r \leq t - 2$. Поскольку при $1 = r = t - 1$ мы получаем $t = 2$, условие можно записать в виде $1 \leq r \leq t - 1$.

5.1. Подъем и косдвиг блока из $(q + 2)$ -кластера невозможны, так как этот кластер является первым и одноэлементным.

5.2. Подъем блока из $(q + 1)$ -кластера возможен при $r - 1 = 1$, т. е. при $2 = r \leq t - 1$, и мы получаем элемент высоты 3

$$c_3 = (q + 3, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r}, q - 1) = (q + 3, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r}, q - 1).$$

5.3. Косдвиг блока в $(q + 1)$ -кластере возможен при $r - 1 \geq 2$, т. е. при $3 \leq r \leq t - 1$ мы получаем элемент высоты 3

$$b_9 = (q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r}, q - 1).$$

5.4. Рассмотрим подъем блока из q -кластера.

5.4.1. Подъем блока происходит в $(q + 2)$ -кластер. Тогда $r - 1 = 0$ и $t - r - 1 = 1$, т. е. $t = 3$, что невозможно.

5.4.2. Подъем блока происходит в $(q + 1)$ -кластер. Это возможно при $r - 1 = 1$ и $t - r - 1 = 1$, т. е. при $2 = r < t = 4$, и мы получаем элемент высоты 3

$$c_4 = (q + 2, q + 2, q - 1, q - 1) = (q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q - 1, q - 1).$$

5.5. Косдвиг блока в q -кластере возможен при условии $t - r - 1 \geq 2$, т. е. при $1 \leq r \leq t - 3$ мы получаем элемент высоты 3

$$b_{10} = (q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-3}, q - 1, q - 1).$$

5.6. Рассмотрим подъем блока из $(q - 1)$ -кластера.

5.6.1. Подъем блока происходит в $(q + 2)$ -кластер. Тогда $r - 1 = 0$ и $t - r - 1 = 0$, т. е. $t = 2$, что невозможно.

5.6.2. Подъем блока происходит в $(q + 1)$ -кластер. Тогда $r - 1 = 1$ и $t - r - 1 = 0$, т. е. $t = 3$, что невозможно.

5.6.3. Подъем блока происходит в q -кластер. Это возможно при $t - r - 1 = 1$, т. е. при $1 \leq r = t - 2$, и мы получаем элемент высоты 3

$$c_5 = (q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_r, q - 2) = (q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q - 2).$$

5.7. Косдвиг блока в $(q - 1)$ -кластере невозможен, так как кластер одноэлементен.

6. Найдем теперь покрытия элемента b_6 , где $0 \leq r \leq t - 4$.

6.1. Очевидно, подъем блока из $(q + 1)$ -кластера невозможен.

6.2. Косдвиг блока в $(q + 1)$ -кластере возможен при $r + 2 \geq 2$, и при $0 \leq r \leq t - 4$ мы получаем элемент высоты 3

$$b_{10} = (q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-3}, q - 1, q - 1).$$

6.3. Подъем блока из q -кластера возможен при $r + 2 = 1$ и $t - r - 4 = 1$, т. е. $r = -1$, что невозможно.

6.4. Косдвиг блока в q -кластере возможен при условии $t - r - 4 \geq 2$, т. е. при $0 \leq r \leq t - 6$ мы получаем элемент высоты 3

$$b_{11} = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-6}, q - 1, q - 1, q - 1).$$

6.5. Очевидно, подъем блока из $(q - 1)$ -кластера невозможен.

6.6. Косдвиг блока в $(q - 1)$ -кластере при $0 \leq r \leq t - 4$ дает элемент высоты 3

$$b_{12} = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-3}, q - 2).$$

7. Найдем теперь покрытия элемента b_7 , который при $3 = r \leq t - 1$ совпадает с c_1 и является элементом высоты 2, а при $4 \leq r \leq t - 1$ имеет высоту 3.

7.1. Подъем и косдвиг блока из $(q + 3)$ -кластера невозможны, так как этот кластер является первым и одноэлементным.

7.2. Подъем блока из $(q + 1)$ -кластера возможен при условии $r - 3 = 1$, т. е. при $4 = r \leq t - 1$ мы получаем элемент высоты 4

$$c_6 = (q + 4, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+3}) = (q + 4, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-4}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+3}).$$

7.3. Косдвиг блока в $(q + 1)$ -кластере возможен при $r - 3 \geq 2$, т. е. при $5 \leq r \leq t - 1$ мы получаем элемент высоты 4

$$b_{13} = (q + 3, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-5}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+3}).$$

7.4. Рассмотрим подъем блока из q -кластера.

7.4.1. Подъем блока происходит в $(q + 3)$ -кластер. Тогда $r - 3 = 0$ и $t - r + 2 = 1$, т. е. $t = 2$, что невозможно.

7.4.2. Подъем блока происходит в $(q + 1)$ -кластер. Тогда $r - 3 = 1$ и $t - r + 2 = 1$, т. е. $t = 3$, что невозможно.

7.5. Косдвиг блока в q -кластере возможен при условии $t - r + 2 \geq 2$. Тогда при $3 = r \leq t - 1$ мы получаем элемент высоты 3, а при $4 \leq r \leq t - 1$ — элемент высоты 4

$$b_{14} = (q + 3, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r}, q - 1).$$

Условие существования этого элемента имеет вид $3 \leq r \leq t - 1$.

8. Найдем теперь покрытия элемента b_8 , где $6 \leq r \leq t - 1$.

8.1. Очевидно, подъем блока из $(q + 2)$ -кластера невозможен.

8.2. Косдвигом блока в $(q + 2)$ -кластере при $6 \leq r \leq t - 1$ получаем элемент высоты 4

$$b_{13} = (q + 3, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-5}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+3}).$$

8.3. Подъем блока из $(q + 1)$ -кластера невозможен, так как предыдущий кластер неодноэлементен.

8.4. Косдвиг блока в $(q + 1)$ -кластере возможен при условии $r - 6 \geq 2$, т. е. при $8 \leq r \leq t - 1$ мы получаем элемент высоты 4

$$b_{15} = (\underbrace{q + 2, \dots, q + 2}_4, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-8}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+4}).$$

8.5. Рассмотрим подъем блока из q -кластера.

8.5.1. Очевидно, подъем блока в $(q + 2)$ -кластер невозможен.

8.5.2. Подъем блока происходит в $(q + 1)$ -кластер. Тогда $r - 6 = 1$ и $t - r + 3 = 1$, т. е. $r = 7$ и $t = 5$, что невозможно, так как $r \leq t - 1$.

8.6. Косдвиг блока в q -кластере возможен при $t - r + 3 \geq 2$, и при условии $6 \leq r \leq t - 1$ мы получаем элемент высоты 4

$$b_{16} = (q + 2, q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-5}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+1}, q - 1).$$

9. Найдем теперь покрытия элемента b_9 , где $4 \leq r \leq t - 1$ или $3 \leq r \leq t - 1$, т. е. $3 \leq r \leq t - 1$.

9.1. Очевидно, подъем блока из $(q + 2)$ -кластера невозможен.

9.2. Косдвигом блока в $(q + 2)$ -кластере при $3 \leq r \leq t - 1$ получаем элемент высоты 4

$$b_{14} = (q + 3, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r}, q - 1).$$

9.3. Очевидно, подъем блока из $(q + 1)$ -кластера невозможен.

9.4. Косдвиг блока в $(q + 1)$ -кластере возможен при $r - 3 \geq 2$, т. е. при $5 \leq r \leq t - 1$, и мы получаем элемент высоты 4

$$b_{16} = (q + 2, q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-5}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+1}, q - 1).$$

9.5. Рассмотрим подъем блока из q -кластера.

9.5.1. Очевидно, подъем блока в $(q + 2)$ -кластер невозможен.

9.5.2. Подъем блока происходит в $(q + 1)$ -кластер. Тогда $r - 3 = 1$ и $t - r = 1$, т. е. при $4 = r < t = 5$ мы получаем элемент высоты 4

$$c_7 = (q + 2, q + 2, q + 2, q - 1, q - 1) = (q + 2, q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-4}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-1}, q - 1, q - 1).$$

9.6. Косдвиг блока в q -кластере возможен при условии $t - r \geq 2$, т. е. при $3 \leq r \leq t - 2$ мы получаем элемент высоты 4

$$b_{17} = (q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q - 1, q - 1).$$

9.7. Рассмотрим подъем блока из $(q - 1)$ -кластера.

9.7.1. Очевидно, подъем блока в $(q + 2)$ -кластер невозможен.

9.7.2. Подъем блока происходит в $(q + 1)$ -кластер. Тогда $r - 3 = 1$ и $t - r = 0$, т. е. $r = 4$ и $t = 4$, что невозможно, так как $r \leq t - 1$.

9.7.3. Подъем блока происходит в q -кластер. Это возможно при $t - r = 1$, т. е. при $3 \leq r = t - 1$ мы получаем элемент высоты 4

$$c_8 = (q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-2}, q - 2) = (q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-1}, q - 2).$$

9.8. Косдвиг блока в $(q - 1)$ -кластере невозможен, так как этот кластер одноэлементен.

10. Найдем теперь покрытия элемента b_{10} , где $1 \leq r \leq t - 3$ или $0 \leq r \leq t - 4$. Так как при $0 = r = t - 3$ мы получаем $t = 3$, условие можно записать в виде $0 \leq r \leq t - 3$.

10.1. Подъем и косдвиг блока из $(q + 2)$ -кластера невозможны, так как этот кластер является первым и одноэлементным.

10.2. Подъем блока из $(q + 1)$ -кластера возможен при $r = 1$, таким образом при $1 = r \leq t - 3$ мы получаем элемент высоты 4

$$c_9 = (q + 3, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q - 1, q - 1) = (q + 3, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q - 1, q - 1).$$

10.3. Косдвиг блока в $(q + 1)$ -кластере возможен при $r \geq 2$, таким образом, при $2 \leq r \leq t - 3$ мы получаем элемент высоты 4

$$b_{17} = (q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q - 1, q - 1).$$

10.4. Рассмотрим подъем блока из q -кластера.

10.4.1. Подъем блока происходит в $(q + 2)$ -кластер. Тогда $r = 0$ и $t - r - 3 = 1$, т. е. при $0 = r < t = 4$ мы получаем элемент высоты 4

$$c_{10} = (q + 3, q - 1, q - 1, q - 1) = (q + 3, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-4}, q - 1, q - 1, q - 1).$$

10.4.2. Подъем блока происходит в $(q+1)$ -кластер. Это возможно при $r = 1$ и $t-r-3 = 1$, т. е. при $1 = r < t = 5$ мы получаем элемент высоты 4

$$c_{11} = (q + 2, q + 2, q - 1, q - 1, q - 1) = (q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-4}, q - 1, q - 1, q - 1).$$

10.5. Косдвиг блока в q -кластере возможен при условии $t - r - 3 \geq 2$, т. е. при $0 \leq r \leq t - 5$ мы получаем элемент высоты 4

$$b_{18} = (q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-5}, q - 1, q - 1, q - 1).$$

10.6. Очевидно, подъем блока из $(q - 1)$ -кластера невозможен.

10.7. Косдвиг блока в $(q - 1)$ -кластере при $0 \leq r \leq t - 3$ получаем элемент высоты 4

$$b_{19} = (q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q - 2).$$

11. Найдем теперь покрытия элемента b_{11} , где $0 \leq r \leq t - 6$.

11.1. Очевидно, подъем блока из $(q + 1)$ -кластера невозможен.

11.2. Косдвиг блока в $(q + 1)$ -кластере возможен при $r + 3 \geq 2$, и при условии $0 \leq r \leq t - 6$ мы получаем элемент высоты 4

$$b_{18} = (q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-5}, q - 1, q - 1, q - 1).$$

11.3. Подъем блока из q -кластера возможен при $r + 3 = 1$ и $t - r - 6 = 1$, т. е. при $r = -2$, что невозможно.

11.4. Косдвиг блока в q -кластере возможен при условии $t - r - 6 \geq 2$, т. е. при $0 \leq r \leq t - 8$ мы получаем элемент высоты 4

$$b_{20} = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+4}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-8}, \underbrace{q - 1, \dots, q - 1}_4).$$

11.5. Очевидно, подъем блока из $(q - 1)$ -кластера невозможен.

11.6. Косдвиг блока в $(q - 1)$ -кластере при $0 \leq r \leq t - 6$ дает элемент высоты 4

$$b_{21} = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-5}, q - 1, q - 2).$$

12. Найдем теперь покрытия элемента b_{12} , который при $0 \leq r = t - 3$ совпадает с элементом c_2 высоты 2, а при $0 \leq r \leq t - 4$ имеет высоту 3.

12.1. Очевидно, подъем блока из $(q + 1)$ -кластера невозможен.

12.2. Косдвиг блока в $(q + 1)$ -кластере возможен при $r + 2 \geq 2$. Поэтому при $0 \leq r = t - 3$ мы получаем элемент высоты 3, а при $0 \leq r \leq t - 4$ — элемент высоты 4

$$b_{19} = (q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q - 2).$$

Условие существования этого элемента имеет вид $0 \leq r \leq t - 3$.

12.3. Подъем блока из q -кластера возможен при $r + 2 = 1$ и $t - r - 3 = 1$, т. е. при $r = -1$, что невозможно.

12.4. Косдвиг блока в q -кластере возможен при условии $t - r - 3 \geq 2$, т. е. при $0 \leq r \leq t - 5$ мы получаем элемент высоты 4

$$b_{21} = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-5}, q - 1, q - 2).$$

12.5. Рассмотрим подъем блока из $(q - 2)$ -кластера.

12.5.1. Подъем блока происходит в $(q + 1)$ -кластер. Тогда $r + 2 = 1$ и $t - r - 3 = 0$, т. е. $r = -1$, что невозможно.

12.5.2. Подъем блока происходит в q -кластер. Это возможно при $t - r - 3 = 1$, т. е. при $0 \leq r = t - 4$ мы получаем элемент высоты 4

$$c_{12} = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+3}, q - 3) = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-4}, q - 3).$$

12.6. Косдвиг блока в $(q - 2)$ -кластере невозможен, так как этот кластер одноэлементен. \square

Результаты полученных преобразований представлены в теореме в виде таблицы. В ней перечислены полученные элементы, условия их существования, способ их получения, а также некоторые их числовые характеристики. В частности, в колонке “Высота” указана высота этих элементов в решетке $NPL(n, t)$, т. е. длина кратчайшего пути в решетке от наименьшего элемента до представленного. В колонке “Уровень” мы указали разницу в количестве ребер между наименьшим элементом и рассматриваемым. В колонке “Покрываемые элементы” над символом элементарного преобразования стоит величина, на которую изменяется инвариант $pt(G, \chi + 1)$ при выполнении этого преобразования. Сведения об инвариантах более подробно обсуждаются в разд. 2.

Теорема. Следующая таблица дает классификацию элементов высоты ≤ 3 и покрывающих их элементов в решетках $NPL(n, t)$ при $t \geq 4$.

Классификация элементов решетки $NPL(n, t)$ при $t \geq 4$

Элемент	Условие существования	Покрываемые элементы	Высота	Уровень
$b_1 = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r})$	$0 \leq r \leq t - 1$	Наименьший	0	0
$b_2 = (q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+1})$	$2 \leq r \leq t - 1$	$b_2 \xrightarrow{-2^{q-1}} b_1$	1	1
$b_3 = (\underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r+1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q - 1)$	$0 \leq r \leq t - 2$	$b_3 \xrightarrow{-2^{q-2}} b_1$	1	1
$b_4 = (q + 2, q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-4}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+2})$	$4 \leq r \leq t - 1$	$b_4 \xrightarrow{-2^{q-1}} b_2$	2	2
$b_5 = (q + 2, \underbrace{q + 1, \dots, q + 1}_{r-1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-1}, q - 1)$	$1 \leq r \leq t - 1$	$b_5 \xrightarrow{-2^{q-2}} b_2$ $2 \leq r \leq t - 1$	2	2
		$b_5 \xrightarrow{-2^{q-1}} b_3$ $1 \leq r \leq t - 2$	2	2

Продолжение таблицы

Элемент	Условие существования	Покрываемые элементы	Высота	Уровень
$b_6 = (\underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r+2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-4}, q-1, q-1)$	$0 \leq r \leq t-4$	$b_6 \xrightarrow{-2^{q-2}} b_3$	2	2
$b_7 = (q+3, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+2})$	$3 \leq r \leq t-1$	$b_7 = c_1 \xrightarrow{-3 \cdot 2^{q-1}} b_2$ $3 = r \leq t-1$	2	3
		$b_7 \xrightarrow{-2^q} b_4$ $4 \leq r \leq t-1$	3	3
$b_8 = (\underbrace{q+2, \dots, q+2}_3, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-6}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+3})$	$6 \leq r \leq t-1$	$b_8 \xrightarrow{-2^{q-1}} b_4$	3	3
$b_9 = (q+2, q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r}, q-1)$	$3 \leq r \leq t-1$	$b_9 \xrightarrow{-2^{q-2}} b_4$ $4 \leq r \leq t-1$	3	3
		$b_9 \xrightarrow{-2^{q-1}} b_5$ $3 \leq r \leq t-1$	3	3
$b_{10} = (q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-3}, q-1, q-1)$	$0 \leq r \leq t-3$	$b_{10} \xrightarrow{-2^{q-2}} b_5$ $1 \leq r \leq t-3$	3	3
		$b_{10} \xrightarrow{-2^{q-1}} b_6$ $0 \leq r \leq t-4$	3	3
$b_{11} = (\underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r+3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-6}, \underbrace{q-1, \dots, q-1}_3)$	$0 \leq r \leq t-6$	$b_{11} \xrightarrow{-2^{q-2}} b_6$	3	3
$b_{12} = (\underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r+2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-3}, q-2)$	$0 \leq r \leq t-3$	$b_{12} = c_2 \xrightarrow{-3 \cdot 2^{q-3}} b_3$ $0 \leq r = t-3$	2	3
		$b_{12} \xrightarrow{-2^{q-3}} b_6$ $0 \leq r \leq t-4$	3	3
$c_6 = (q+4, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-4}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+3})$	$4 = r \leq t-1$	$c_6 \xrightarrow{-7 \cdot 2^{q-1}} b_7$	4	6
$b_{13} = (q+3, q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-5}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+3})$	$5 \leq r \leq t-1$	$b_{13} \xrightarrow{-2^{q-1}} b_7$ $5 \leq r \leq t-1$	4	4
		$b_{13} \xrightarrow{-2^q} b_8$ $6 \leq r \leq t-1$	4	4
$b_{14} = (q+3, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r}, q-1)$	$2 \leq r \leq t-1$	$b_{14} = c_3 \xrightarrow{-3 \cdot 2^{q-1}} b_5$ $2 = r \leq t-1$	3	4
		$b_{14} \xrightarrow{-2^{q-2}} c_1 = b_7$ $3 = r \leq t-1$	3	4
		$b_{14} \xrightarrow{-2^{q-2}} b_7$ $4 \leq r \leq t-1$	4	4
		$b_{14} \xrightarrow{-2^q} b_9$ $3 = r \leq t-1$	3	4
		$b_{14} \xrightarrow{-2^q} b_9$ $4 \leq r \leq t-1$	4	4
$b_{15} = (\underbrace{q+2, \dots, q+2}_4, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-8}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+4})$	$8 \leq r \leq t-1$	$b_{15} \xrightarrow{-2^{q-1}} b_8$	4	4

Продолжение таблицы

Элемент	Условие существования	Покрываемые элементы	Высота	Уровень
$b_{16} = (\underbrace{q+2, \dots, q+2}_3, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-5}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r+1}, q-1)$	$5 \leq r \leq t-1$	$b_{16} \xrightarrow{-2^{q-2}} b_8$ $6 \leq r \leq t-1$	4	4
		$b_{16} \xrightarrow{-2^{q-1}} b_9$ $5 \leq r \leq t-1$	4	4
$c_7 = (\underbrace{q+2, \dots, q+2}_3, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-4}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-1}, q-1, q-1)$	$4 = r < t = 5$	$c_7 \xrightarrow{-3 \cdot 2^{q-2}} b_9$	4	5
$b_{17} = (q+2, q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q-1, q-1)$	$2 \leq r \leq t-2$	$b_{17} = c_4 \xrightarrow{-3 \cdot 2^{q-2}} b_5$ $2 = r < t = 4$	3	4
		$b_{17} \xrightarrow{-2^{q-2}} b_9$ $3 \leq r \leq t-2$	4	4
		$b_{17} \xrightarrow{-2^{q-1}} b_{10}$ $2 \leq r \leq t-3$	4	4
$c_8 = (q+2, q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-2}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-1}, q-2)$	$3 \leq r = t-1$	$c_8 \xrightarrow{-3 \cdot 2^{q-3}} b_9$	4	5
$c_9 = (q+3, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q-1, q-1)$	$1 = r \leq t-3$	$c_9 \xrightarrow{-3 \cdot 2^{q-1}} b_{10}$	4	5
$c_{10} = (q+3, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-4}, \underbrace{q-1, \dots, q-1}_3)$	$0 = r < t = 4$	$c_{10} \xrightarrow{-7 \cdot 2^{q-2}} b_{10}$	4	6
$c_{11} = (q+2, q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r-1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-4}, \underbrace{q-1, \dots, q-1}_3)$	$1 = r < t = 5$	$c_{11} \xrightarrow{-3 \cdot 2^{q-2}} b_{10}$	4	5
$b_{18} = (q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r+1}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-5}, \underbrace{q-1, \dots, q-1}_3)$	$0 \leq r \leq t-5$	$b_{18} \xrightarrow{-2^{q-2}} b_{10}$ $0 \leq r \leq t-5$	4	4
		$b_{18} \xrightarrow{-2^{q-1}} b_{11}$ $0 \leq r \leq t-6$	4	4
$b_{19} = (q+2, \underbrace{q+1, \dots, q+1}_r, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-2}, q-2)$	$0 \leq r \leq t-2$	$b_{19} = c_5 \xrightarrow{-3 \cdot 2^{q-3}} b_5$ $1 \leq r = t-2$	3	4
		$b_{19} \xrightarrow{-2^{q-3}} b_{10}$ $0 \leq r \leq t-3$	4	4
		$b_{19} \xrightarrow{-2^{q-1}} c_2 = b_{12}$ $0 \leq r = t-3$	3	4
		$b_{19} \xrightarrow{-2^{q-1}} b_{12}$ $0 \leq r \leq t-4$	4	4
$b_{20} = (\underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r+4}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-8}, \underbrace{q-1, \dots, q-1}_4)$	$0 \leq r \leq t-8$	$b_{20} \xrightarrow{-2^{q-2}} b_{11}$	4	4
$b_{21} = (\underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r+3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-5}, q-1, q-2)$	$0 \leq r \leq t-5$	$b_{21} \xrightarrow{-2^{q-3}} b_{11}$ $0 \leq r \leq t-6$	4	4
		$b_{21} \xrightarrow{-2^{q-2}} b_{12}$ $0 \leq r \leq t-5$	4	4
$c_{12} = (\underbrace{q+1, \dots, q+1}_{r+3}, \underbrace{q, \dots, q}_{t-r-4}, q-3)$	$0 \leq r = t-4$	$c_{12} \xrightarrow{-7 \cdot 2^{q-4}} b_{12}$	4	6

2. О хроматических инвариантах и нижних этажах решеток $NPL(n, t)$

Предположим, что каждому графу приписано некоторым образом число. Это число называют *хроматическим инвариантом*, если оно одинаково для любых двух хроматически эквивалентных графов. Для дальнейшего нам интересны два инварианта: $I_2(G)$ — число ребер графа G и $\text{pt}(G, \chi+1)$ — число разбиений множества вершин графа G на $\chi+1$ непустых коклик, т.е. подмножеств, состоящих из попарно несмежных вершин графа, где χ — хроматическое число графа G [3].

Зафиксируем элементарное преобразование разбиений из $NPL(n, t)$:
 $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_t) \Rightarrow v = (u_1, \dots, u_i - 1, \dots, u_j + 1, \dots, u_t)$, где $i < j$, $u_i = u_j + \delta$ и $\delta \geq 2$.

Для графа $K(u_1, u_2, \dots, u_t)$ хроматический инвариант I_2 кратко будем записывать в виде $I_2(u)$. Аналогично мы будем поступать и для других хроматических инвариантов.

Лемма 1. $I_2(u) - I_2(v) = -(\delta - 1)$.

Доказательство. Очевидно, $I_2(u) = \binom{n}{2} - \binom{u_1}{2} - \dots - \binom{u_t}{2}$. В силу этого получаем $I_2(u) - I_2(v) = -\binom{u_i}{2} + \binom{u_j}{2} + \binom{u_i - 1}{2} - \binom{u_j + 1}{2} = -(u_i - 1) + u_j = -\delta + 1 = -(\delta - 1)$. Лемма доказана. \square

Лемма 2. $\text{pt}(u, t + 1) - \text{pt}(v, t + 1) = 2^{u_j - 1}(2^{\delta - 1} - 1)$.

Доказательство. Для полного t -дольного графа хроматическое число χ равно t , и раскраска графа в t цветов дает единственное разбиение множества его вершин на t коклик — долей этого графа. Разбиение на $t + 1$ непустых коклик получается из предыдущего разбиения делением одной из его долей на два непустых подмножества. Следовательно, $\text{pt}(u, t + 1) = 2^{u_1 - 1} - 1 + \dots + 2^{u_t - 1} - 1 = 2^{u_1 - 1} + \dots + 2^{u_t - 1} - t$. В силу этого получаем $\text{pt}(u, t + 1) - \text{pt}(v, t + 1) = 2^{u_1 - 1} + \dots + 2^{u_i - 1} + \dots + 2^{u_j - 1} + \dots + 2^{u_t - 1} - t - 2^{u_1 - 1} - \dots - 2^{u_i - 1} - \dots - 2^{u_j + 1 - 1} - \dots - 2^{u_t - 1} + t = 2^{u_i - 1} + 2^{u_j - 1} - 2^{u_i - 2} + 2^{u_j} = 2^{u_i - 2} - 2^{u_j - 1} = 2^{u_j + \delta - 2} - 2^{u_j - 1} = 2^{u_j - 1 + \delta - 1} - 2^{u_j - 1} = 2^{u_j - 1}(2^{\delta - 1} - 1)$. Лемма доказана. \square

Используя таблицу, можно построить нижние этажи любой решетки $NPL(n, t)$ для $t \geq 4$ и $0 \leq r < t$, в которых будут перечислены все элементы высоты 3 и ниже, а также некоторые элементы высоты 4. Если зафиксировать r и t , то по ним из таблицы можно выбрать элементы, которые будут присутствовать на соответствующих этажах решетки $NPL(n, t)$. Используя информацию о покрывающих элементах, можно определить положение в решетке всех выбранных элементов относительно друг друга.

Если сравнивать условия существования элементов решеток $NPL(n, t)$, то можно заметить, что при $6 \leq r \leq t - 6$ будут существовать все элементы вида b высоты ≤ 3 и для любых r и t , удовлетворяющих этому условию, нижние этажи решетки $NPL(n, t)$ будут выглядеть так, как изображено на рис. 4.

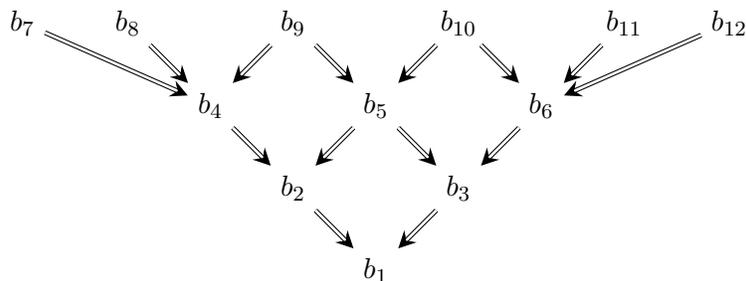


Рис. 4.

При рассмотрении в таблице условий существования элементов можно заметить, что отдельно выделяется случай $3 = r \leq t - 1$. В данном случае элемент b_7 не является элементом высоты 3, а в виде c_1 имеет высоту 2. Из-за этого множество элементов высоты 3 пополняется элементом b_{14} , покрывающим b_7 , а элемент b_{14} находится уже на четвертом уровне, поэтому нижние этажи решетки $NPL(n, t)$ в этом случае выглядят так, как изображено на рис. 5.

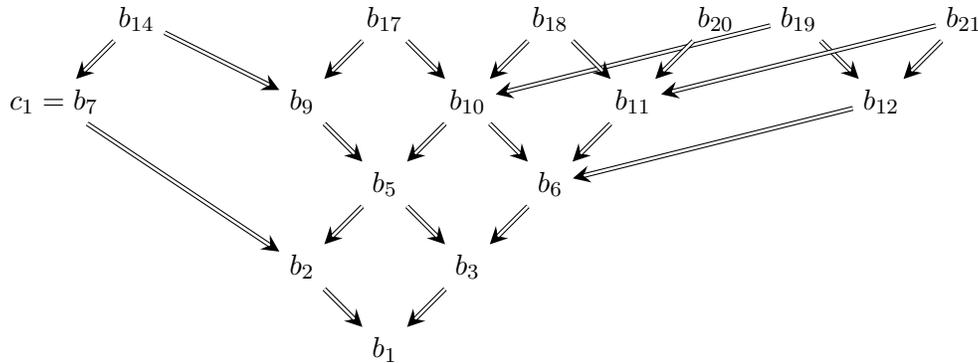


Рис. 5.

Симметрично в условиях существования выделяется случай $0 \leq r = t - 3$. Здесь элемент b_{12} в виде c_2 имеет высоту 2, а покрывающий его элемент b_{19} присоединяется к элементам высоты 3. Приведем соответствующее этому случаю изображение нижних этажей решетки $NPL(n, t)$ на рис. 6.

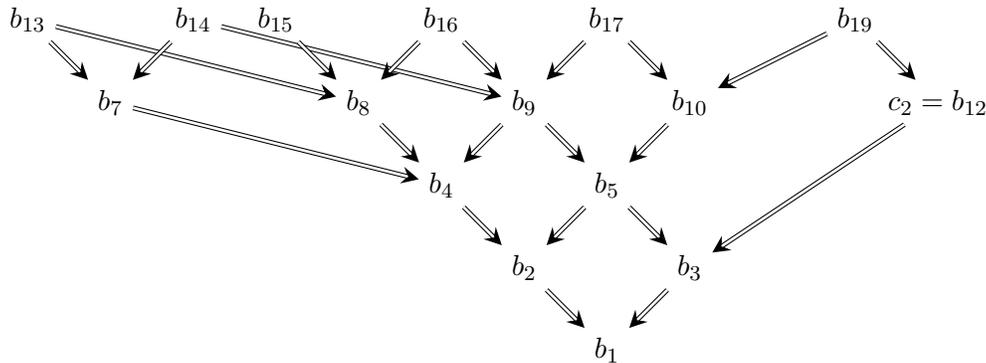


Рис. 6.

Для достаточно больших t нижние этажи решетки $NPL(n, t)$ выглядят одним из трех представленных выше образов. Для небольших t в соответствующих решетках будет меньше элементов, однако они вкладываются в одно из трех представленных частично упорядоченных множеств. Например, нижние этажи решетки $NPL(n, 6)$ при $r = 4$, изображенные на рис. 7, вкладываются в третье из представленных частично упорядоченных множеств.

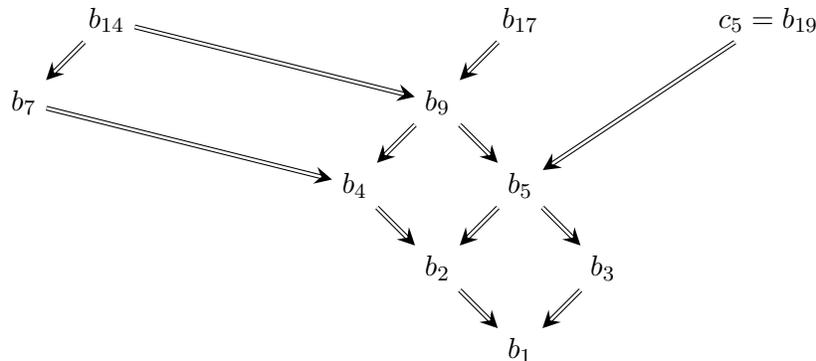


Рис. 7.

Полученное описание элементов высоты 2 и 3 в решетках полных многодольных графов может быть эффективно использовано при изучении хроматической определяемости соответствующих графов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.
2. Баранский В.А., Королева Т.А. Решетка разбиений натурального числа // Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 4. С. 439–442.
3. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. СПб.: “Лань”, 2010. 368 с.
4. Read R.C. An introduction to chromatic polynomials // J. Comb. Theory. 1968. Vol. 4. P. 52–71.
5. Chao C.Y., Whitehead Jr. E.G. On chromatic equivalence of graphs // Theory and Appl. Graphs. 1978. Vol. 642. P. 121–131.
6. Zhao H. Chromaticity and adjoint polynomials of graphs. Zutphen: Wöhrmann Print Service, 2005. 169 p.
7. Chao C.Y., Novacky Jr. G.A. On maximally saturated graphs // Discrete Math. 1982. Vol. 41. P. 139–143.
8. Баранский В.А., Королева Т.А. Хроматическая определяемость атомов в решетках полных многодольных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 22–29.
9. Королева Т.А. Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 65–83.
10. Королева Т.А. Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов. II // Изв. Урал. гос. ун-та. 2010. № 74. С. 39–56.
11. Баранский В.А., Королева Т.А. Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов // Изв. Урал. гос. ун-та. 2010. № 74. С. 5–26.
12. Koh K.M., Teo K.L. The search for chromatically unique graphs // Graphs Combin. 1990. Vol. 6. P. 259–285.

Баранский Виталий Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский государственный университет
e-mail: Vitali.Baranski@usu.ru

Поступила 15.03.2011

Сеньчонок Татьяна Александровна
аспирант
Уральский государственный университет
e-mail: Tatiana.Senchonok@usu.ru

УДК 550.34

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМ БЛОКОВ И РАЗЛОМОВ И СЕЙСМИЧНОСТИ¹

А. А. Соловьев

Модель динамики системы блоков и разломов (блоковая модель) разработана для анализа зависимости основных свойств сейсмичности от структуры литосферы в рассматриваемом регионе и особенностей ее динамики. Литосфера региона представляется в виде системы абсолютно жестких блоков, разделенных бесконечно тонкими плоскостями разломов. Задается вязкоупругое взаимодействие блоков между собой и с подстилающей средой. Смещения и повороты блоков в каждый момент времени вычисляются таким образом, чтобы вся система блоков находилась в состоянии квазистатического равновесия. Когда в какой-либо части разлома отношение напряжения к давлению превосходит заданный порог, возникает разрыв, который рассматривается в модели как землетрясение. В статье приводится обзор результатов, полученных путем численного моделирования динамики различных блоковых структур, включая структуры, аппроксимирующие строение литосферы конкретных сейсмоактивных регионов. Эти результаты позволяют надеяться, что блоковая модель является полезным инструментом для изучения влияния геометрии разломов и движений блоков на свойства сейсмичности.

Ключевые слова: динамика блоковой структуры, сейсмичность, численное моделирование, структура литосферы.

A. A. Soloviev. Modeling dynamics of block-and-fault systems and seismicity.

A model of block-and-fault system dynamics (a block model) has been developed to analyze how the basic features of seismicity depend on the lithosphere structure in a region under consideration and peculiarities of its dynamics. The lithosphere in the region is modeled by a system of perfectly rigid blocks divided by infinitely thin fault planes. The viscoelastic interaction between blocks themselves and with the underlying medium is specified. Displacements and rotations of blocks at each time moment are determined so that the whole block system would be in a quasistatic equilibrium state. When the ratio of the stress to the pressure exceeds the critical level in some part of a fault zone, a stress drop occurs that is considered in the model as an earthquake. The paper contains a review of results obtained by numerical simulation of different block structures' dynamics including the structures approximating the lithosphere structure in specific active regions. These results give a hope that the block model is a useful tool for studying relations between geometry and movements of faults and blocks and seismicity features.

Keywords: block structure dynamics, seismicity, numerical simulation, lithosphere structure.

Введение

Изучение сейсмичности и особенно ее вариаций во времени на основе каталогов наблюдаемых землетрясений затруднено крайне короткой историей инструментальных наблюдений, покрывающей период порядка 100 лет, по сравнению со временем действия тектонических факторов, обуславливающих сейсмичность в том или ином регионе. Явления, обнаруженные в таком каталоге землетрясений, могут быть лишь видимостью и не повторяться в будущем. Искусственные каталоги землетрясений, полученные путем численного моделирования, могут покрывать длительные интервалы времени, что позволяет анализировать статистическую значимость рассматриваемого явления.

¹Работа была поддержана в рамках программы № 23 фундаментальных исследований Президиума РАН «Научные основы инновационных энергоресурсосберегающих экологически безопасных технологий оценки и освоения природных и техногенных ресурсов» и частично выполнялась в Международном центре теоретической физики им. Абдуса Салама ЮНЕСКО — МАГАТЭ (Триест, Италия).

Сейсмологические наблюдения показывают, что в разных сейсмоактивных регионах определенные свойства сейсмичности могут быть различными (см., например, [1, 2]). Естественно предположить, что эти различия среди прочих факторов обусловлены спецификой тектонических структур регионов и основными движениями, определяющими динамику литосферы в них. Лабораторные эксперименты [3–5] дают аргументы в пользу того, что эти различия во многом зависят от степени раздробленности среды и типа доминирующих движений.

Из анализа данных сейсмологических наблюдений трудно выделить влияние на свойства сейсмичности некоторого единственного фактора, поскольку сейсмичность подвержена влиянию многих факторов, среди которых могут быть более сильные, чем рассматриваемый. Эта трудность может быть преодолена путем численного моделирования процессов генерации сейсмичности (см., например, [6–10]) и изучения полученных искусственных каталогов землетрясений.

Пока не существует адекватной теории сейсмотектонического процесса, но на основе имеющихся данных можно предположить, что различные свойства литосферы (пространственная неоднородность, иерархическая блоковая структура, различные типы нелинейной реологии, гравитационные и термодинамические процессы, физико-химические и фазовые переходы, миграция флюид, коррозия под напряжением) соотносятся со свойствами последовательностей землетрясений. Устойчивость этих свойств на количественном уровне в различных регионах позволяет сделать вывод, что можно моделировать литосферу как большую диссипативную систему, поведение которой не зависит существенно от частных деталей конкретных процессов, протекающих в геологической системе.

Блоковая модель основывается на концепции иерархической блоковой структуры литосферы, предложенной в [11]. Основные принципы модели сформулированы в [12, 13]. В модели предполагается, что блоки литосферы разделены сравнительно тонкими, слабыми, менее жесткими зонами разломов и в сейсмотектоническом процессе основные деформации и большинство землетрясений возникают в таких зонах разломов. Сейсмоактивный регион моделируется системой абсолютно жестких блоков, разделенных бесконечно тонкими плоскостями разломов. Это допущение основано на том, что в литосфере эффективные модули упругости в зонах разломов значительно ниже, чем внутри блоков. Предполагается, что относительные смещения блоков бесконечно малы по сравнению с их геометрическими размерами. Блоки взаимодействуют друг с другом и с подстилающей средой. Движения в системе блоков являются следствием задаваемых движений границ структуры и подстилающей среды. Поскольку блоки абсолютно жесткие, то все деформации происходят в плоскостях разломов и на подошвах блоков, находящихся в контакте с подстилающей средой. Относительные смещения блоков происходят вдоль плоскостей разломов. Напряжения аккумулируются в зонах разломов, что соответствует накоплению напряжений, вызываемому деформациями границ плит. Взаимодействие блоков с подстилающей средой является вязкоупругим. Взаимодействие между блоками в зонах разломов также вязкоупругое (“нормальное состояние”), пока отношение напряжения к давлению не превосходит заданный порог. При достижении этого порога в соответствии с моделью сухого трения возникает разрыв, и происходит сброс напряжения, что может вызвать разрывы в других частях зон разломов. Эти разрывы образуют землетрясения. В течение некоторого времени после разрыва соответствующие части зон разломов находятся в состоянии крипа, в котором пластичность зоны разлома предполагается более высокой, чем в нормальном состоянии. В результате численного моделирования генерируется искусственный каталог землетрясений.

Значительные упрощения, сделанные в модели, позволяют прояснить характер зависимости потока землетрясений от структуры литосферы рассматриваемого региона и типа основных тектонических движений в нем. Детальное описание модели можно найти в [14]. Оно также приведено ниже.

Модель применялась для изучения зависимости свойств искусственного потока землетрясений от степени раздробленности структуры и типа движения ее границ [15], а также иссле-

дования общих свойства искусственного потока землетрясений, полученного при различных типах тектонического движения [16]. Каталоги землетрясений, полученные в модели, анализировались с целью поиска пространственно-временных корреляций между искусственными землетрясениями (например, [14, 17–21]), включая предвестниковое поведение фоновой сейсмичности перед сильными событиями [22].

В [23, 24] выполнено численное моделирование динамики блоковой структуры, аппроксимирующей дуговую зону субдукции, которая типична для регионов островных дуг. Была также рассмотрена блоковая структура, аппроксимирующая Зондскую дугу (Зондские острова), и для нее была изучена зависимость свойств искусственной сейсмичности от задаваемых движений [14].

Реальная геометрия разломов была рассмотрена в модели системы основных разломов Ближнего Востока [25], в модели сейсмоактивного региона Вранча (Румыния) [26–29], в модели Западных Альп [30], в модели Италии и соседних регионов [31] и в модели Тибетско-Гималайского региона [32].

1. Методика моделирования динамики блоковой структуры

Геометрия блоковой структуры. Рассматривается слой глубиной H между двумя горизонтальными плоскостями (рис. 1). Блоковая структура представляет собой ограниченную и связанную часть этого слоя. Боковые границы структуры образованы частями плоскостей, секущих слой. Плоскости, секущие слой, также разделяют структуру на блоки. Части этих плоскостей, находящиеся внутри блоковой структуры или являющиеся ее боковыми гранями, называются *плоскостями разломов*.

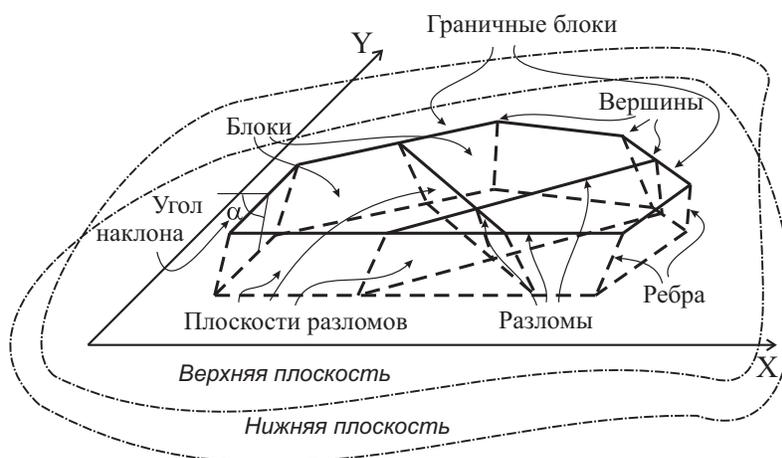


Рис. 1. Элементы блоковой структуры.

Геометрия блоковой структуры определяется путем задания линий пересечения разломов с верхней плоскостью (эти линии также называются *разломами*) и углов наклона плоскостей разломов к верхней плоскости. Считается, что в одной точке верхней плоскости могут пересекаться не более двух разломов. Точка пересечения двух разломов называется *вершиной*. Для каждого разлома задается направление, и угол наклона плоскости разлома измеряется слева от разлома. Положения вершины на верхней и нижней плоскостях, ограничивающих слой, соединены отрезком (*ребром*) линии пересечения соответствующих плоскостей разломов. Часть плоскости разлома между двумя ребрами, соответствующими соседним вершинам на этом разломе, называется *сегментом*. Сегмент имеет форму трапеции. Общие части блока с верхней и нижней плоскостями представляют собой многоугольники, а общая часть блока с нижней плоскостью называется *подошвой*.

Предполагается, что блоковая структура окружена ограничивающей ее средой, движение которой задается на непрерывных частях границы структуры, заключенных между двумя ребрами. Соответствующие части ограничивающей среды, примыкающие к блоковой структуре, называются *граничными блоками*.

Движение блоков. Предполагается, что блоки абсолютно жесткие и все их относительные смещения происходят в плоскостях разломов, разделяющих их. Взаимодействие блоков с подстилающей средой происходит вдоль нижней плоскости, причем возможны любые типы проскальзывания.

Движение границ блоковой структуры (граничных блоков) и подстилающей среды под блоками является внешним воздействием на структуру. Предполагается, что скорости этих движений лежат в горизонтальной плоскости и известны.

В модели используется безразмерное время, и все величины, которые должны содержать в размерности время, относятся к единице безразмерного времени, а их размерность не содержит время. Например, в модели скорости измеряются в единицах длины, и скорость 5 см означает 5 см в единицу безразмерного времени. При интерпретации результатов реальное значение ставится в соответствие единице безразмерного времени. Например, если единица безразмерного времени полагается равной году, то заданная в модели скорость 5 см означает 5 см/год.

В каждый момент времени смещения блоков определяются таким образом, что структура находится в квазистатическом равновесии. Предполагается, что все смещения являются бесконечно малыми по сравнению с размерами блоков и в процессе моделирования не происходит изменение геометрии блоковой структуры и ее движения как целого.

Взаимодействие блоков с подстилающей средой. Предполагается, что плотность (на единицу площади) упругой силы, вызванной относительным смещением блока и подстилающей среды в некоторой точке подошвы блока, пропорциональна разности между вектором полного относительного смещения и вектором проскальзывания (неупругого смещения) в рассматриваемой точке.

Плотность упругой силы $\mathbf{f}^u = (f_x^u, f_y^u)$, действующей в точке с координатами (X, Y) в некоторый момент времени t , определяется из формул

$$\begin{aligned} f_x^u &= K_u(x - x_u - (Y - Y_c)(\varphi - \varphi_u) - x_a), \\ f_y^u &= K_u(y - y_u + (X - X_c)(\varphi - \varphi_u) - y_a). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь X_c, Y_c — координаты геометрического центра подошвы блока; (x_u, y_u) и φ_u — вектор сдвига подстилающей среды под блоком и угол ее поворота (положительное направление принимается против часовой стрелки) вокруг геометрического центра подошвы блока в момент t ; (x, y) и φ — вектор сдвига и угол поворота блока вокруг геометрического центра его подошвы в момент t ; (x_a, y_a) — вектор неупругого смещения в точке (X, Y) в момент t .

Компоненты вектора неупругого смещения в точке (X, Y) изменяются в соответствии с уравнениями

$$\frac{dx_a}{dt} = W_u f_x^u, \quad \frac{dy_a}{dt} = W_u f_y^u. \quad (2)$$

Коэффициенты K_u и W_u в (1) и (2) могут иметь различные значения для различных блоков.

Взаимодействие блоков в плоскостях разломов. Пусть разлом разделяет блоки с номерами i и j ; i -й блок расположен слева от разлома, j -й — справа. Компоненты относительного смещения блоков $\Delta x, \Delta y$ в некоторой точке разлома (X, Y) в момент t определяются из формул

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_i - x_j - (Y - Y_c^i)\varphi_i + (Y - Y_c^j)\varphi_j, \\ \Delta y &= y_i - y_j + (X - X_c^i)\varphi_i - (X - X_c^j)\varphi_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $X_c^i, Y_c^i, X_c^j, Y_c^j$ — координаты геометрических центров подошв блоков; (x_i, y_i) и (x_j, y_j) — векторы сдвига блоков в момент t ; φ_i, φ_j — углы поворота блоков вокруг геометрических центров их подошв в момент t .

В соответствии с предположением, что относительные смещения блоков происходят только вдоль плоскостей разломов, эти смещения в плоскости разлома связаны с относительными горизонтальными смещениями блоков посредством формул

$$\begin{aligned} \Delta_t &= e_x \Delta x + e_y \Delta y, \\ \Delta_l &= \frac{\Delta_n}{\cos \alpha}, \quad \text{где} \quad \Delta_n = e_x \Delta y - e_y \Delta x. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь Δ_t, Δ_l — смещения в точке вдоль плоскости разлома, параллельное (Δ_t) и перпендикулярное (Δ_l) линии пересечения плоскости разлома с верхней плоскостью; (e_x, e_y) — единичный вектор, направленный вдоль этой линии (рис. 2); α — угол наклона плоскости разлома; Δ_n — горизонтальное смещение, перпендикулярное линии пересечения плоскости разлома с верхней плоскостью. Отметим, что в соответствии с (4) Δ_n является проекцией Δ_l на горизонтальную плоскость (рис. 3).

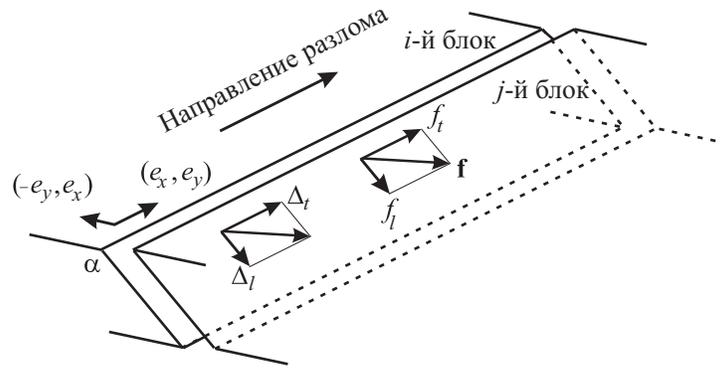


Рис. 2. Смещения и силы в плоскости разлома.

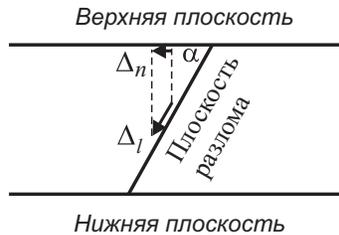


Рис. 3. Вертикальное сечение, ортогональное плоскости разлома. Относительные смещения блоков.

Плотность упругой силы $\mathbf{f} = (f_t, f_l)$, действующей в точке (X, Y) в плоскости разлома, определяется из формул

$$\begin{aligned} f_t &= K(\Delta_t - \delta_t), \\ f_l &= K(\Delta_l - \delta_l). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь δ_t, δ_l — неупругие смещения вдоль плоскости разлома, параллельное (δ_t) и перпендикулярное (δ_l) линии пересечения плоскости разлома с верхней плоскостью, в точке (X, Y) в момент t .

Неупругие смещения в точке (X, Y) изменяются в соответствии с уравнениями

$$\frac{d\delta_t}{dt} = W f_t, \quad \frac{d\delta_l}{dt} = W f_l. \quad (6)$$

Коэффициенты K и W в формулах (5) и (6) могут отличаться для различных разломов. Коэффициент K может быть интерпретирован как модуль сдвига зоны разлома, деленный на ее ширину.

Кроме упругой силы действует также сила реакции, которая перпендикулярна плоскости разлома. Эта сила не совершает работу, поскольку все относительные движения параллельны плоскости разлома, и плотность упругой энергии в точке (X, Y) равна

$$e = \frac{f_t(\Delta_t - \delta_t) + f_l(\Delta_l - \delta_l)}{2}. \quad (7)$$

Из формул (4) и (7) может быть получена горизонтальная компонента f_n плотности упругой силы, перпендикулярная линии пересечения плоскости разлома с верхней плоскостью

$$f_n = \frac{\partial e}{\partial \Delta_n} = \frac{f_l}{\cos \alpha}. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что суммарная сила, действующая в точке плоскости разлома, горизонтальна, если есть сила реакции, которая перпендикулярна плоскости разлома (рис. 4). Плотность p_0 силы реакции равна

$$p_0 = f_l \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

При наличии силы реакции (9) отсутствует вертикальная компонента у сил, действующих на блоки, и нет вертикальных смещений блоков.



Рис. 4. Вертикальное сечение, ортогональное плоскости разлома. Силы.

Формулы (3) верны и для граничных разломов. В этом случае один из блоков, разделяемых разломом, является граничным. Для таких блоков угол поворота задается относительно начала координат. Следовательно, в формуле (3) в случае граничного блока вместо координат геометрического центра его подошвы должны быть подставлены нули. Например, если блок номер j граничный, то в формуле (3) $X_c^j = Y_c^j = 0$.

Уравнения равновесия. Компоненты векторов сдвигов блоков и углы их поворота вокруг геометрических центров подошв определяются из условия, что сумма сил, действующих на каждый блок, и суммарный момент этих сил равны нулю. Это условие квазистатического равновесия системы и в то же самое время условие минимума энергии. В уравнениях равновесия рассматриваются только силы, возникающие вследствие задаваемых движений подстилающей среды и границ блоковой структуры. Фактически предполагается, что действие всех других сил (гравитационных и т.п.) на блоковую структуру уравновешено и не вызывает смещений блоков.

В соответствии с формулами (1), (3)–(5), (8) и (9) зависимость сил, действующих на блоки, от векторов сдвигов блоков и углов их поворота линейна. Поэтому система уравнений, которая описывает равновесие, линейна и имеет следующий вид:

$$\mathbf{Az} = \mathbf{b}, \quad (10)$$

где компонентами неизвестного вектора $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{3n})$ являются компоненты векторов сдвигов блоков и углы их поворота вокруг геометрических центров подошв (n — число блоков), т.е. $z_{3m-2} = x_m$, $z_{3m-1} = y_m$, $z_{3m} = \varphi_m$ (m — номер блока, $m = 1, 2, \dots, n$).

Матрица \mathbf{A} не зависит от времени, и ее элементы вычисляются из формул (1), (3)–(5), (8) и (9). Для каждого блока момент действующих сил определяется относительно геометрического центра его подошвы. Выражения для элементов матрицы \mathbf{A} содержат интегралы по поверхностям сегментов разломов и подошв блоков. Каждый из интегралов заменяется конечной суммой в соответствии с пространственной дискретизацией, описанной ниже.

Компоненты вектора \mathbf{b} также определяются из формул (1), (3)–(5), (8) и (9). Они зависят от времени явно — через смещения и углы поворота подстилающей среды и границ структуры и неявно — через неупругие смещения.

Дискретизация. Состояние блоковой структуры рассматривается в дискретные моменты времени $t_i = t_0 + i\Delta t$ ($i = 1, 2, \dots$), где t_0 — начальный момент, а Δt — постоянный шаг. Переход от состояния в момент t_i к состоянию в t_{i+1} осуществляется следующим образом: (а) вычисляются новые значения неупругих смещений $x_a, y_a, \delta_t, \delta_l$ из уравнений (2) и (6); (б) вычисляются компоненты векторов сдвигов и углы поворота граничных блоков и подстилающей среды в момент t_{i+1} ; (в) вычисляются компоненты вектора правых частей \mathbf{b} системы уравнений (10), и из нее определяются компоненты векторов сдвигов и углы поворота блоков структуры. Поскольку элементы матрицы \mathbf{A} системы (10) не зависят от времени, то они и элементы соответствующей обратной матрицы могут быть вычислены один раз до начала численного моделирования.

Формулы (1)–(9) описывают силы, относительные смещения и неупругие смещения в точках сегментов разломов и подошв блоков. Поэтому для выполнения численного моделирования требуется дискретизация этих поверхностей. Эта дискретизация определяется параметром ε .

Дискретизация сегмента разлома выполняется следующим образом. Поскольку любой сегмент разлома является трапецией, то обозначим через a, b и h ее основания и высоту ($h = H/\sin \alpha$, где H — глубина слоя, а α — угол наклона плоскости разлома). Обозначим

$$n_1 = \text{Int} \left(\frac{h}{\varepsilon} \right) + 1, \quad n_2 = \text{Int} \left(\frac{\max(a, b)}{\varepsilon} \right) + 1,$$

где $\text{Int}(x)$ — целая часть числа x .

Трапеция разделяется на $n_1 n_2$ малых трапеций путем проведения двух групп линий внутри нее: $n_1 - 1$ линий, параллельных основаниям трапеции, с интервалом h/n_1 и $n_2 - 1$ линий, соединяющих точки, равномерно расположенные на основаниях a и b с шагами a/n_2 и b/n_2 соответственно. Полученные малые трапеции называются *ячейками*. Полагается, что координаты X, Y в (3) и неупругие смещения δ_t, δ_l имеют одни и те же значения во всех точках ячейки. Эти значения рассматриваются как средние по ячейке значения координат и неупругих смещений. При подстановке в формулы (3)–(5), (8) и (9) они дают средние по ячейке значения сил упругости и реакции, действующих на единицу площади. Умножая их на площадь ячейки, получаем силы, действующие на ячейку в целом.

Подошва блока представляет собой многоугольник. Перед дискретизацией он делится на трапеции (треугольники) линиями, проходящими через его вершины и параллельными оси Y . Дискретизация полученных трапеций (треугольников) выполняется тем же самым путем, что и в случае сегментов разломов. Полученные малые трапеции (треугольники) также называются *ячейками*. Для всех точек ячейки значения координат X, Y и неупругих смещений x_a, y_a в (1) предполагаются одинаковыми.

Землетрясение и крип. Обозначим

$$\kappa = \frac{|\mathbf{f}|}{P - p_0}, \quad (11)$$

где $\mathbf{f} = (f_t, f_l)$ — вектор плотности (на единицу площади) упругой силы, определяемый из (5); P — постоянная, которая для всех разломов полагается равной одному и тому же значению и может быть интерпретирована как разность между литостатическим и гидростатическим давлением; p_0 — плотность силы реакции, которая определяется из формулы (9).

Для каждого разлома задаются величины трех порогов для κ

$$B > H_f \geq H_s.$$

Начальные условия для моделирования динамики блоковой структуры задаются так, чтобы неравенство $\kappa < B$ было выполнено для всех ячеек сегментов разломов. Если в некоторый момент t_i величина κ в некоторой ячейке достигает порога B соответствующего разлома, то возникает разрыв (“землетрясение”). Разрыв означает проскальзывание, в результате которого неупругие смещения δ_t, δ_l в ячейке резко изменяются так, что величина κ уменьшается до значения порога H_f , т.е. землетрясение происходит согласно модели сухого трения.

Новые значения неупругих смещений в этой ячейке вычисляются из формул

$$\delta_t^e = \delta_t + \gamma f_t, \quad \delta_l^e = \delta_l + \gamma f_l, \quad (12)$$

где $\delta_t, \delta_l, f_t, f_l$ — неупругие смещения и компоненты вектора плотности упругой силы перед разрывом. Коэффициент γ определяется из формулы

$$\gamma = \frac{1}{K} - \frac{PH_f}{K(|\mathbf{f}| + H_f f_l \operatorname{tg} \alpha)}. \quad (13)$$

Из формул (5), (9) и (11)–(13) следует, что после вычисления новых значений неупругих смещений в рассматриваемой ячейке величина κ равна порогу H_f .

После вычисления новых величин неупругих смещений ячеек, в которых произошли разрывы, пересчитываются компоненты вектора \mathbf{b} и из системы уравнений (10) определяются векторы сдвига и углы поворота для блоков структуры. Если после этого в некоторой ячейке $\kappa > B$, то приведенная выше процедура повторяется для этой ячейки (или ячеек). В противном случае землетрясение закончилось, и состояние блоковой структуры в момент t_{i+1} определяется обычным способом: вычисляются векторы сдвига и углы поворота (в момент t_{i+1}) для граничных блоков и подстилающей среды и компоненты вектора \mathbf{b} правых частей системы (10), и затем решается система (10).

Ячейки одной и той же зоны разлома, в которых произошли разрывы в одно и то же время, объединяются в одно землетрясение. Параметры землетрясения определяются следующим образом: время — t_i ; координаты эпицентра и глубина — взвешенные суммы координат и глубин ячеек, в которых произошли разрывы (вес ячейки — это ее площадь, деленная на сумму площадей ячеек, объединенных в землетрясение); магнитуда вычисляется по формуле

$$M = D \lg S + E, \quad (14)$$

где D и E — постоянные; S — сумма площадей ячеек (в км²), объединенных в землетрясение.

После землетрясения ячейки, в которых произошли разрывы, считаются находящимися в состоянии крипа. Это означает что для этих ячеек параметр W_s ($W_s > W$) используется вместо W в уравнениях (6), которые описывают изменение неупругого смещения. Значения W_s могут быть различны для различных разломов. Ячейка находится в состоянии крипа до тех пор, пока в ней $\kappa > H_s$. Когда $\kappa \leq H_s$, ячейка возвращается в обычное состояние, и после этого параметр W опять используется в уравнениях (6) для этой ячейки.

2. Результаты, полученные с использованием блоковой модели

Одно из первых направлений исследований с использованием блоковой модели состояло в изучении возможности воспроизвести в модели известные свойства реальной сейсмичности. К таким свойствам относится группируемость моментов землетрясений, которая исследована, например, в [33–36]. Из численных экспериментов, выполненных с блоковой моделью, следует, что явление группируемости моментов событий наблюдается в полученных каталогах искусственных землетрясений [18] даже в случае задания простой геометрии блоковой структуры и

простых движений на ее границе. Более детальный анализ временных характеристик потока модельных событий, генерируемых в блоковой модели, был выполнен в [20], где исследовалось не только группирование, но и фрактальные свойства последовательности моментов событий. Группируемость событий в искусственных каталогах оценивалась с помощью значения меры группируемости, которая ранее была использована, в частности, в работе [37] для исследования долговременной группируемости сильнейших землетрясений мира. Наличие или отсутствие группируемости для рассмотренных блоковых структур, а также степень группируемости определяются типом задаваемых движений границ, типом структуры и уровнем ее раздробленности, решающую роль при этом играют движения границ. Результаты вычисления фрактальных размерностей $d(2)$ и $d(0)$ [38, 39] для последовательностей событий, генерируемых рассмотренными блоковыми структурами, показывают, что они практически не зависят от геометрии структуры, но определяются типом движения границ. Полученные значения $d(2)$ и $d(0)$ согласуются со значением меры группируемости, т.е. при отсутствии группируемости $d(2)$ близко к 1, а $d(0)$ близко к 0.

Еще одним важным свойством наблюдаемой сейсмичности является наличие удаленного взаимодействия землетрясений. Впервые гипотеза о возможной взаимной зависимости землетрясений с магнитудой $M \geq 8.0$ была выдвинута Х. Беньоффом [40]. С. Дуда [41] установил, что эту гипотезу можно распространить на землетрясения с $M \geq 7.0$. Отмеченное явление было обнаружено и исследовано также рядом других авторов (см., например, [42–45]). Численные эксперименты с простой блоковой структурой дают аргументы в пользу того, что существует удаленное взаимодействие между искусственными землетрясениями [21]. Это выявлено путем статистического анализа полученных искусственных каталогов землетрясений. В то же время увеличение порога прочности отдельных разломов в целях предотвращения возникновения на них землетрясений существенно воздействует на последовательности землетрясений, возникающих на других разломах. Это означает, что удаленное взаимодействие, обнаруженное при анализе сейсмических наблюдений, может быть объяснено на основе гипотезы о том, что литосферные блоки считаются абсолютно жесткими по сравнению с разделяющими их зонами разломов и подстилающей средой. Если в численных экспериментах с блоковыми моделями конкретных сейсмоактивных регионов, где удаленное взаимодействие между землетрясениями было обнаружено при анализе сейсмических наблюдений, будет получена искусственная сейсмичность, которая адекватно отражает сейсмичность, наблюдаемую в регионе, то искусственный каталог землетрясений, покрывающий длительный период, может быть использован для изучения удаленного взаимодействия между реальными землетрясениями в этом регионе.

Блоковая модель применялась для изучения зависимости свойств искусственного потока землетрясений от степени раздробленности структуры и типа движения ее границ [15]. Искусственные каталоги землетрясений были получены для трех групп структур с увеличением раздробленности структуры внутри каждой из групп и для двух типов движения границ. Искусственная сейсмичность характеризовалась несколькими свойствами, включая соотношение между магнитудой и частотой событий (кривая Гутенберга — Рихтера). Полученные результаты показывают, что свойства потока искусственных землетрясений зависят от геометрии блоковой структуры и от типа движения границ. При возрастании раздробленности структуры наклон кривой Гутенберга — Рихтера изменяется монотонно в одном и том же направлении внутри каждой из рассмотренных групп структур при условии, что задано одинаковое движение границ. Характер этой зависимости изменяется на противоположный, когда задается другой тип движения границ. Причем в случае, когда это движение включает существенную вращательную компоненту, наклон кривой Гутенберга — Рихтера уменьшается при увеличении степени раздробленности структуры.

Сейсмичность многих наиболее активных регионов мира вызывается взаимодействием континентов с океаническими плитами вдоль зон субдукции. Свойства потока землетрясений отличаются на разных сегментах этих зон, и источник этого различия не вполне ясен. Естественно предположить, что эти отличия обусловлены помимо других факторов наклоном зоны

субдукции и направлением относительного движения континентальной и океанической плит. В [23, 24] выполнено численное моделирование динамики блоковой структуры, аппроксимирующей дуговую зону субдукции, которая типична для регионов островных дуг. Целью исследования являлось выделение влияния отдельных факторов на искусственную сейсмичность. Моделирование было выполнено при различных значениях угла α наклона зоны субдукции и различных направлениях движения “океанической плиты”, которое определялось углом β отклонения этого направления от встречного движения океанической плиты и зоны субдукции. Анализировались распределение эпицентров и другие характеристики искусственного потока землетрясений. При изменении угла α сейсмическая активность в модели максимальна, когда $40^\circ < \alpha < 50^\circ$. В зависимости от угла β сейсмическая активность достигает максимума при $\beta \approx 40^\circ$. В модели обнаружена миграция землетрясений вдоль зоны субдукции. Целью исследования был поиск основных зависимостей, которые являются общими для различных зон субдукции. Поэтому рассматривалась упрощенная структура, которая не воспроизводит конкретную зону субдукции. В то же время модель дает возможность рассматривать структуры, аппроксимирующие реальную геометрию разломов сейсмоактивного региона. Была рассмотрена блоковая структура, аппроксимирующая Зондскую дугу (Зондские острова), и для нее была изучена зависимость свойств искусственной сейсмичности от задаваемых движений [14]. Оказалось, что кривая Гутенберга — Рихтера, полученная для сейсмичности, генерируемой в модели, ближе всего к этой кривой, наблюдаемой в регионе, в случае, когда движения задаются в соответствии с моделью HS2-NUVEL1 [46].

Одна из первых блоковых моделей, отражающих реальную геометрию разломов, была исследована в [25]. В этой работе блоковая структура построена на основе системы основных разломов Ближнего Востока, и полученная искусственная сейсмичность отражает некоторые особенности распределения эпицентров землетрясений, которые произошли в регионе.

Реальная геометрия разломов была также рассмотрена в модели сейсмоактивного региона Вранча (Румыния) [26]. В результате численных экспериментов были получены значения параметров модели, при которых искусственный каталог землетрясений имеет пространственное распределение эпицентров, близкое к реальному распределению эпицентров в регионе Вранча, и кривую Гутенберга — Рихтера, которая похожа на соответствующую кривую, полученную для реальной сейсмичности Вранча. С использованием этих значений параметров в качестве исходных была исследована зависимость свойств искусственного каталога землетрясений от значений параметров модели [27, 28]. С этой целью параметры варьировались до тех пор, пока следующие характеристики исходного искусственного каталога существенно не изменялись: пространственное распределение эпицентров, наклон кривой Гутенберга — Рихтера, уровень сейсмической активности, максимальная магнитуда происшедших землетрясений, относительная активность зоны субдукции Вранча по сравнению с другими рассмотренными разломами. Рассмотрены также механизмы очагов искусственных землетрясений [29]. При этом механизмы сильнейших искусственных землетрясений оказались сходными с механизмами трех сильнейших землетрясений Вранча, происшедших за последние 30 лет.

На основе схемы морфоструктурного районирования Западных Альп [47] была построена блоковая модель этого региона [30]. В результате численного моделирования при различных значениях параметров блоковой модели получено несколько искусственных каталогов. Сравнение кривых Гутенберга — Рихтера для искусственных и наблюдаемых землетрясений показало, что их сходство максимально, когда задаваемое движение восточной границы блоковой структуры, моделирующей Западные Альпы, близко к оценкам направления движения Апеннинской плиты. Результаты моделирования не противоречат данным макросейсмических наблюдений о возможности в Западных Альпах землетрясений с магнитудой более 7 [48, 49], что важно для оценки сейсмоопасности этого региона. Пространственное распределение эпицентров искусственных землетрясений отражает некоторые особенности распределения эпицентров реальных землетрясений Западных Альп. Отмечена концентрация искусственных событий в тех местах в Западных Альпах, где не было зарегистрировано сильных событий, но которые бы-

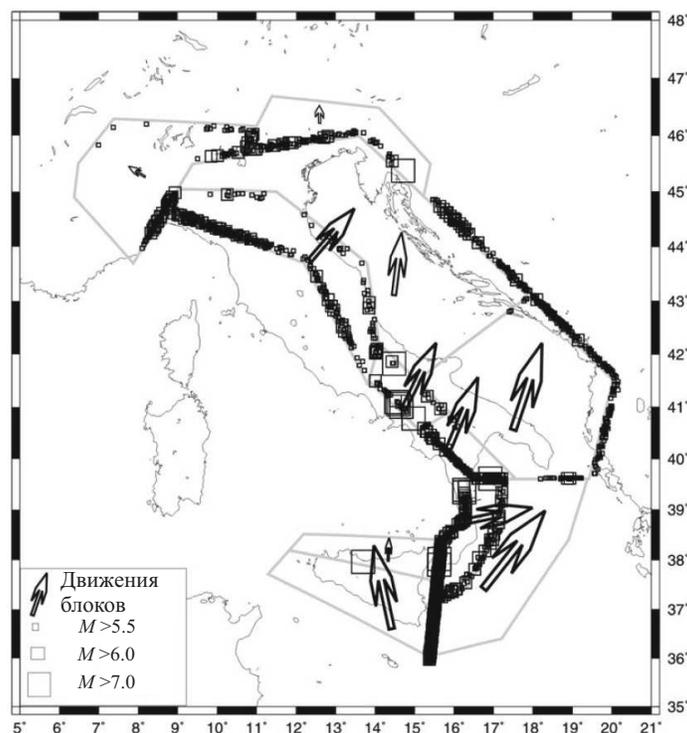


Рис. 5. Блоковая модель Италии: квадраты — эпицентры землетрясений, полученных в модели (размеры квадратов пропорциональны магнитудам соответствующих землетрясений); стрелки — полученные в модели направления движений блоков.

ли распознаны в [50, 51] как места возможного возникновения землетрясений с магнитудой $M \geq 5.0$.

Блоковая модель использована для генерации сейсмичности Италии и соседних регионов на основе имеющейся информации об их структуре и геодинамике [31]. Цель исследования состояла в понимании того, какие тектонические процессы контролируют главные свойства наблюдаемой сейсмичности и кинематику региона. Также изучалось влияние реологии системы разломов. Искусственная сейсмичность (рис. 5), полученная в модели, демонстрирует сходство с наблюдаемой в наиболее активных областях рассматриваемого региона. Для искусственного каталога землетрясений получена линейная частотно-магнитудная зависимость. Наклон кривой Гутенберга — Рихтера значительно выше в Северной и Центральной Италии, чем в Южной Италии, что соответствует данным сейсмологических наблюдений. Анализ механизмов очагов искусственных землетрясений демонстрирует хорошее соответствие с механизмами, полученными из данных сейсмологических наблюдений. Модель верно воспроизводит зону растяжения вдоль Апеннин и зону сжатия вдоль северо-западной границы Адриатического моря. Воспроизведено вращение плиты Адрия против часовой стрелки. Полученные движения блоков в целом согласуются с данными GPS наблюдений (рис. 6). Результаты численных экспериментов с моделью дают возможность предположить, что основные особенности динамики и сейсмичности в регионе Центрального Средиземноморья не могут быть удовлетворительно объяснены исключительно следствием сближения Африки и Евразии; существенны также пассивная субдукция в Калабрийской дуге и различия в реологии разломов.

В [32] рассмотрена блоковая модель Тибетско-Гималайского региона (рис. 7). Тибет и Гималаи возникли в результате непрерывного сближения Индийской и Евразийской плит, являющегося следствием их начального столкновения, произошедшего примерно 55 миллионов лет назад. Блоковая модель использовалась для понимания основных особенностей и движения коры и сейсмичности в Тибетско-Гималайском регионе. Построенная блоковая структура со-

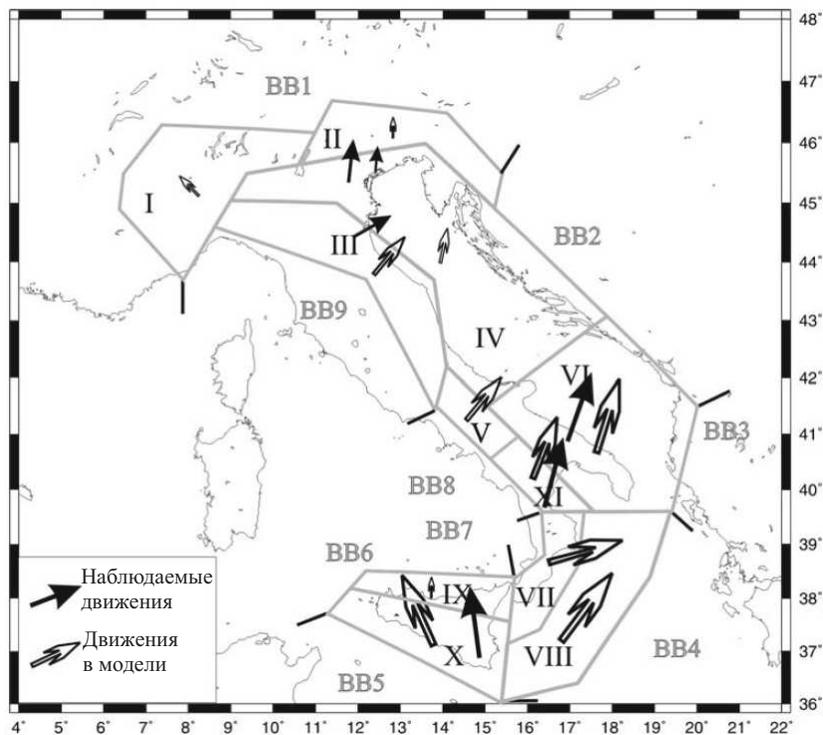


Рис. 6. Сравнение движений блоков, полученных в блоковой модели Италии (контурные стрелки), и наблюдаемые движения блоков в соответствии с [52] (сплошные стрелки); I–XI — блоки, образующие структуру; BB1–BB9 — граничные блоки.

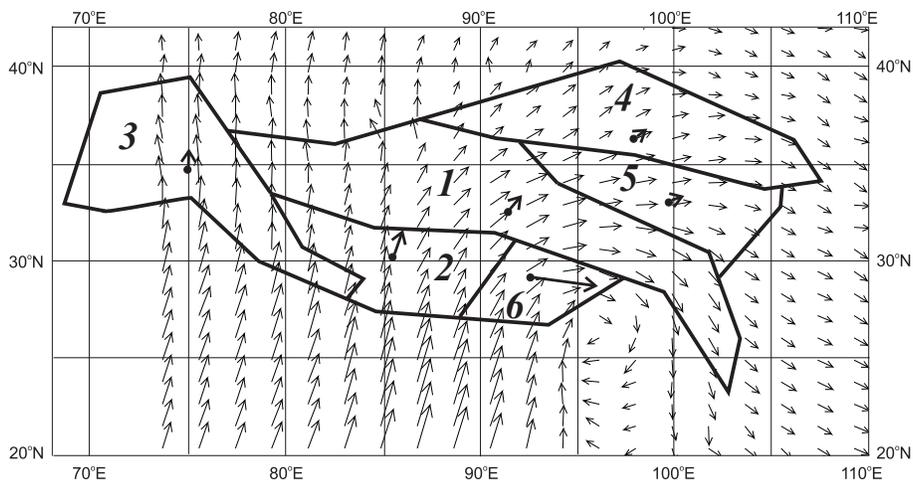


Рис. 7. Блоковая модель Тибетско-Гималайского региона (1–6 — блоки, образующие структуру), горизонтальные движения в регионе (показаны полем тонких стрелок), полученные на основе данных GPS, и движения геометрических центров блоков (показаны жирными стрелками, исходящими из точек, соответствующих геометрическим центрам), полученные в одном из численных экспериментов с блоковой моделью.

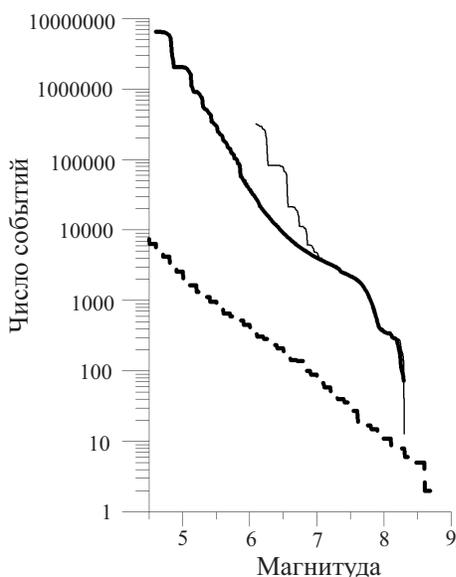


Рис. 8. Сравнение кумулятивных графиков частотно-магнитудной зависимости, полученных для наблюдаемой сейсмичности Тибетско-Гималайского региона (толстая пунктирная линия) и искусственной сейсмичности, соответствующей одному из численных экспериментов с блоковой моделью при разных значениях параметра ε , определяющего детальность пространственной дискретизации: 16 км (тонкая сплошная линия) и 3 км (толстая сплошная линия).

стоит из шести главных блоков, движение которых вызывается давлением Индийской плиты и движением подстилающей среды (нижней коры). Выполнено несколько наборов численных экспериментов с целью анализа расположения землетрясений, генерируемых в модели, частотно-магнитудных соотношений для них, их механизмов очагов и относительных скоростей смещений блоков вдоль разломов. Эпицентры сильных землетрясений, полученных в модели, расположены на сегментах разломов, связанных с Гималаями, а также на некоторых внутренних разломах Тибета. Наклон графика частотно-магнитудной зависимости для землетрясений, полученных в модели при достаточно малом значении параметра ε , определяющего детальность пространственной дискретизации, близок к наклону этого графика для сейсмичности, наблюдаемой в регионе (рис. 8).

Наличие эпицентров землетрясений на конкретном разломе связано в большей степени с динамикой всей региональной системы разломов, чем с движениями только на этом разломе. Показано, что вариации частотно-магнитудной зависимости связаны с изменениями в движениях блоков и зависят от реологических свойств зон разломов. Механизмы очагов, полученные в модели, согласуются с механизмами очагов землетрясений, наблюдаемыми в регионе. Модель демонстрирует, что современные движения коры в регионе и наблюдаемая сейсмичность определяются северо-северо-восточным движением Индии в сторону Евразии и движением нижней коры. Вариации реологических свойств зон разломов и/или движения нижней коры влияют на скорости смещений коровых блоков и относительных смещений вдоль разломов. Это может объяснить расхождения в оценках скоростей смещений на главных разломах региона, полученных в коротких и длинных временных масштабах. Рассмотренная блоковая модель Тибетско-Гималайского региона достаточно проста, и ее дальнейшее развитие могло бы включать модификацию блоковой структуры с целью более адекватного представления системы блоков и разломов региона и введение нелинейной реологии зон разломов с целью анализа ее влияния на сейсмичность, генерируемую в модели, и на получаемые скорости относительных смещений вдоль разломов.

Заклучение

Исследования, выполненные с использованием блоковой модели, показывают ее эффективность в качестве инструмента для исследования динамики блоков и разломов и ее связи с сейсмичностью. В то же время блоковая модель обладает и некоторыми недостатками. Одним из них является невозможность учета сферичности Земли, что важно при рассмотрении достаточно больших регионов. Для преодоления этого недостатка в Учреждении Российской академии наук Институте математики и механики Уральского отделения РАН разработан сферический вариант блоковой модели. Реализация сферического варианта блоковой модели на ЭВМ требует гораздо больше памяти и времени работы процессора, чем “плоский” вариант блоковой модели, описанный выше. Поэтому для работы со сферическим вариантом необходимо было использовать многопроцессорную ЭВМ и создавать программы, реализующие параллельные вычисления [53]. С помощью этого варианта блоковой модели удалось осуществить моделирование динамики и сейсмичности для глобальной системы тектонических плит [54–56]. Получены обнадеживающие результаты, которые показали перспективность дальнейших исследований в этом направлении.

Еще одним направлением модификации блоковой модели является использование в ней более сложного механизма возникновения землетрясений, чем описанный выше. Это даст возможность адекватнее воспроизвести в модели реальные процессы возникновения землетрясений и получить аналогичные наблюдаемым афтершоковые последовательности. Одна из таких попыток была предпринята в [57], где блоковая модель была модифицирована путем использования в ней процесса возникновения землетрясения в соответствии с моделью SOFT [8]. Полученные результаты дают аргументы в пользу перспективности дальнейшего развития этого направления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hattori S.** Regional distribution of b -value in the world // *Bull. Int. Inst. Seismol. Earth Eng.* 1974. Vol. 12. P. 39–58.
2. **Кронрод Т.И.** Параметры сейсмичности для основных высокосейсмичных районов мира // *Логические и вычислительные методы в сейсмологии*. М.: Наука, 1984. С. 36–58. (Вычисл. сейсмология; вып. 17.)
3. **Mogi K.** Magnitude-frequency relation for elastic shocks accompanying fractures of various materials and some related problems in earthquakes // *Bull. Earthquake Inst. Tokyo Univ.* 1962. Vol. 40. P. 831–853.
4. Лабораторные эксперименты по физике очага землетрясения / О.Г. Шамина [и др.] // *Физические процессы в очагах землетрясений*. М.: Наука, 1980. С. 56–68.
5. **Шерман С.И., Борняков С.А., Буддо В.Ю.** Области динамического влияния разломов (Результаты моделирования). Новосибирск: Наука, 1983. 110 с.
6. **Shaw B.E., Carlson J.M., Langer J.S.** Patterns of seismic activity preceding large earthquakes // *J. Geophys. Res.* 1992. Vol. 97. P. 479–488.
7. **Gabrielov A.M., Newman W.I.** Seismicity modelling and earthquake prediction: A review // *Nonlinear Dynamics and Predictability of Geophysical Phenomena*. Geophys. Monogr. Ser. 83. Washington: American Geophysical Union, 1994. P. 7–13.
8. Scaling organization of fracture tectonics (SOFT) and earthquake mechanism / C.J. Allegre [et al.] // *Phys. Earth. Planet. Inter.* 1995. Vol. 92. P. 215–233.
9. **Newman W.I., Turcotte D.L., Gabrielov A.M.** Log-periodic behaviour of a hierarchical failure model with application to precursory seismic activation // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 52, iss. 5. P. 4827–4835.
10. **Turcotte D.L.** Fractals and chaos in geology and geophysics. 2nd edn. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 398 p.
11. Морфоструктурное районирование горных стран по формализованным признакам / М.А. Алексеевская [и др.] // *Распознавание и спектральный анализ в сейсмологии*. М.: Наука, 1977. С. 33–49. (Вычисл. сейсмология; вып. 10.)

12. Блоковая модель динамики литосферы / А.М. Габриэлов [и др.] // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. М.: Наука, 1986. С. 168–178. (Вычисл. сейсмология; вып. 19.)
13. **Gabrielov A.M., Levshina T.A., Rotwain I.M.** Block model of earthquake sequence // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1990. Vol. 61, no. 1–2. P. 18–28.
14. **Soloviev A., Ismail-Zadeh A.** Models of dynamics of block-and-fault systems // *Nonlinear Dynamics of the Lithosphere and Earthquake Prediction*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. P. 71–139.
15. **Keilis-Borok V.I., Rotwain I.M., Soloviev A.A.** Numerical modeling of block structure dynamics: dependence of a synthetic earthquake flow on the structure separateness and boundary movements // *J. of Seismol.* 1997. Vol. 1, no. 2. P. 151–160.
16. **Гарьянова Т.В., Ротвайн И.М.** Свойства потока сейсмичности простейших типов тектонических движений. Блоковая модель и реальность // *Вопросы геодинамики и сейсмологии*. М.: ГЕОС, 1998. С. 289–299. (Вычисл. сейсмология; вып. 30.)
17. **Гасилов В.Л., Прозоров А.Г., Соловьев А.А.** Локальное взаимодействие сейсмических событий искусственного каталога в модели динамики блоковой структуры // *Современные проблемы сейсмичности и динамики Земли*. М.: Наука, 1996. С. 110–130. (Вычисл. сейсмология; вып. 28.)
18. **Максимов В.И., Соловьев А.А.** Группирование землетрясений в блоковой модели динамики литосферы // *Современные проблемы сейсмичности и динамики Земли*. М.: Наука, 1996. С. 148–152. (Вычисл. сейсмология; Вып. 28.)
19. On dynamics of seismicity simulated by the models of blocks-and-faults systems / A. Gorshkov [et al.] // *Annali di Geofisica*. 1997. Vol. XL, no. 5. P. 1217–1232.
20. **Ротвайн И.М., Соловьев А.А.** Численное моделирование динамики блоковых структур: временные характеристики потока модельных землетрясений // *Вопросы геодинамики и сейсмологии*. М.: ГЕОС, 1998. С. 275–288. (Вычисл. сейсмология; вып. 30.)
21. **Воробьева И.А., Соловьев А.А.** Удаленное взаимодействие между искусственными землетрясениями в блоковой модели динамики литосферы // *Проблемы динамики литосферы и сейсмичности*. М.: ГЕОС, 2001. С. 202–211. (Вычисл. сейсмология; вып. 32.)
22. **Soloviev A.** Transformation of frequency-magnitude relation prior to large events in the model of block structure dynamics // *Nonlin. Processes in Geophys.* 2008. Vol. 15, no. 1. P. 209–220.
23. **Соловьев А.А., Рундквист Д.В.** Моделирование сейсмичности дугообразной зоны субдукции // *Докл. АН*. 1998. Т. 362, № 2. С. 256–260.
24. **Rundquist D.V., Soloviev A.A.** Numerical modeling of block structure dynamics: an arc subduction zone // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1999. Vol. 111, no. 3–4. P. 241–252.
25. **Соболев П.О., Соловьев А.А., Ротвайн И.М.** Моделирование литосферы и сейсмичности для региона Ближнего Востока // *Современные проблемы сейсмичности и динамики Земли*. М.: Наука, 1996. С. 131–147. (Вычисл. сейсмология; вып. 28.)
26. **Panza G.F., Soloviev A.A., Vorobieva I.A.** Numerical modelling of block-structure dynamics: application to the Vrancea region // *Pure and Appl. Geophys.* 1997. Vol. 149. P. 313–336.
27. **Воробьева И.А., Соловьев А.А.** Связь пространственного распределения эпицентров землетрясений и движения литосферных блоков // *Докл. АН*. 1997. Т. 354, № 5. С. 672–675.
28. **Soloviev A.A., Vorobieva I.A., Panza G.F.** Modelling of block-structure dynamics: Parametric study for Vrancea // *Pure and Appl. Geophys.* 1999. Vol. 156, no. 3. P. 395–420.
29. **Soloviev A.A., Vorobieva I.A., Panza G.F.** Modelling of block structure dynamics for the Vrancea region: Source mechanisms of the synthetic earthquakes // *Pure and Appl. Geophys.* 2000. Vol. 157, no. 1–2. P. 97–110.
30. **Воробьева И.А., Горшков А.И., Соловьев А.А.** Моделирование динамики блоковой структуры и сейсмичности Западных Альп // *Проблемы динамики и сейсмичности Земли*. М.: ГЕОС, 2000. С. 154–169. (Вычисл. сейсмология. вып. 31.)
31. Simulation of seismicity in the block-structure model of Italy and its surroundings / A. Peresan [et al.] // *Pure and Appl. Geophys.* 2007. Vol. 164, no. 11. P. 2193–2234.
32. Numerical modeling of crustal block-and-fault dynamics, earthquakes and slip rates in the Tibet-Himalayan region / A. Ismail-Zadeh [et al.] // *Earth and Planet. Sci. Lett.* 2007. Vol. 258, no. 3–4. P. 465–485.

33. **Kagan Y., Knopoff L.** Statistical study of the occurrence of shallow earthquakes // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1978. Vol. 55. P. 67–86.
34. **Keilis-Borok V.I., Knopoff L., Rotwain I.M.** Bursts of aftershocks, long-term precursors of strong earthquakes // *Nature*. 1980. Vol. 283. P. 258–263.
35. **Дзиевонский А.М., Прозоров А.Г.** Автомодельное определение группирования землетрясений // *Математическое моделирование и интерпретация геофизических данных*. М.: Наука, 1984. С. 10–21. (Вычисл. сейсмология; вып. 16.)
36. **Молчан Г.М., Дмитриева О.Е.** Идентификация афтершоков: обзор и новые проблемы // *Современные методы интерпретации сейсмологических данных*. М.: Наука, 1991. С. 19–50. (Вычисл. сейсмология; вып. 24.)
37. **Kagan Y.Y., Jackson D.D.** Long-term earthquake clustering // *Geophys. J. Int.* 1991. Vol. 104. P. 117–133.
38. Fractal measure and their singularities: The characterization of strange sets / T.C. Halsey [et al.] // *Phys. Rev. A*. 1986. Vol. 33, no. A2. P. 1141–1151.
39. **Гейликман М.Б., Голубева Т.В., Писаренко В.Ф.** Самоподобная иерархическая структура поля эпицентров землетрясений // *Компьютерный анализ геофизических полей*. М.: Наука, 1990. С. 123–139. (Вычисл. сейсмология; вып. 23.)
40. **Benioff H.** Global strain accumulation and release as related by great earthquakes // *Bull. Geol. Soc. Amer.* 1951. Vol. 62. P. 331–338.
41. **Duda S.J.** Secular seismic energy release in the circum Pacific belt // *Tectonophysics*. 1965. Vol. 2, no. 5. P. 409–452.
42. **Keilis-Borok V.I., Malinovskaya L.N.** On regularity in the occurrence of strong earthquakes // *J. Geophys. Res.* 1964. Vol. 69. P. 3019–3024.
43. **Прозоров А.Г.** Алгоритм прогноза землетрясений для региона Памира и Тянь-Шаня по комбинации удаленных афтершоков и затиший // *Компьютерный анализ геофизических полей*. М.: Наука, 1990. С. 75–84. (Вычисл. сейсмология; вып. 23.)
44. **Прозоров А.Г.** Новый критерий проверки статистической значимости удаленного взаимодействия сильных землетрясений // *Математическое моделирование сеймотектонических процессов в литосфере, ориентированное на проблему прогноза землетрясений*. Вып.1. М.: МИТП РАН, 1993. С. 69–73.
45. **Press F., Allen C.** Patterns of seismic release in the southern California region // *J. Geophys. Res.* 1995. Vol. 100, no. B4. P. 6421–6430.
46. **Gripp A.E., Gordon R.G.** Current plate velocities relative to the hotspots incorporating the NUVEL-1 global plate motion model // *Geophys. Res. Lett.* 1990. Vol. 17, no. 8. P. 1109–1112.
47. **Горшков А.И., Ранцман Е.Я.** Морфоструктурные линеаменты Западных Альп // *Геоморфология*. 1982. № 4. С. 64–72.
48. **Caputo M.** Critical study of ENEL catalogue of Italian earthquakes from the year 1000 through 1975 // *Rassegna Lavori Pubblici*. 1981. No. 2. P. 3–16.
49. **Vogt J.** Les treblements de terre en France // *Mémoires du Bureau de recherches géologiques et minières*. 1979. No. 96. 245 p.
50. Распознавание мест возможного возникновения сильных землетрясений. XII. Два подхода к прогнозу мест возможного возникновения сильных землетрясений в Западных Альпах / К. Вебер [и др.] // *Теория и анализ сейсмологической информации*. М.: Наука, 1985. С. 139–154. (Вычисл. сейсмология; вып. 18.)
51. A dual approach to recognition of earthquake prone areas in the Western Alps / A. Cisternas [et al.] // *Annales Geophysicae*. 1985. Vol. 3, no. 2. P. 249–270.
52. Geophysical interpretation of geodetic deformations in the Central Mediterranean area / R. Devoti [et al.] // *Plate Boundary Zones. Geodynam. Ser.* 2002. Vol. 30. P. 57–65.
53. **Мельникова Л.А., Розенберг В.Л.** Параллельная реализация сферической модификации блоковой модели // *Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений*. Вып.3. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. С. 186–200.
54. Численное моделирование динамики системы тектонических плит: сферическая модификация блоковой модели / Л.А. Мельникова [и др.] // *Проблемы динамики и сейсмичности Земли*. М.: ГЕОС, 2000. С. 138–153. (Вычисл. сейсмология; вып. 31.)

55. Сферическая блоковая модель: изучение динамики и сейсмичности глобальной системы тектонических плит / Л.А. Мельникова [и др.] // Анализ геодинамических и сейсмических процессов. М.: ГЕОС, 2004. С. 82–106. (Вычисл. сейсмология; вып. 35.)
56. The spherical block model: Dynamics of the global system of tectonic plates and seismicity / V.L. Rozenberg [et al.] // Pure and Appl. Geophys. 2005. Vol. 162, no. 1. P. 145–164.
57. **Shebalin P., Soloviev A., Le Mouél J.-L.** Scaling organization in the dynamics of blocks-and-faults systems // Phys. Earth and Planet. Inter. 2002. Vol. 131, no. 2. P. 141–153.

Соловьев Александр Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
директор

Поступила 29.10.2010

Учреждение Российской академии наук

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН

e-mail: soloviev@mitp.ru

УДК 517.95+517.977

**О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹****Н. Н. Субботина, Л. Г. Шагалова**

Рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби, возникающая в молекулярной биологии для модели Кроу — Кимуры молекулярной эволюции. На основе вязкостного (и/или минимаксного) подхода вводится понятие непрерывного обобщенного решения рассматриваемой задачи с фазовыми ограничениями. Предложена конструкция обобщенного решения этой задачи с помощью функции цены во вспомогательной задаче оптимального управления с заданным целевым множеством. Показано, что обобщенное решение в рассматриваемой задаче неединственно. Исследования опираются на обобщенный метод характеристик для уравнений Гамильтона — Якоби в задаче Дирихле.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона — Якоби, метод характеристик, вязкостные решения, минимаксные решения, оптимальное управление, функция цены.

N. N. Subbotina, L. G. Shagalova. On a solution to the Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation with state constraints.

The Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation, which appears in molecular biology for the Crow–Kimura model of molecular evolution, is considered. The notion of a continuous generalized solution of this problem with state constraints is introduced on the basis of the viscosity (and/or minimax) approach. A construction of the generalized solution of the problem is proposed, which uses the value function in an auxiliary optimal control problem with a given target set. It is shown that the generalized solution in the considered problem is not unique. The research is based on the generalized method of characteristics for the Hamilton–Jacobi equations in the Dirichlet problem.

Keywords: Hamilton–Jacobi equations, method of characteristics, viscosity solutions, minimax solutions, optimal control, value function.

Введение

В работе представлены результаты исследования решения уравнения Гамильтона — Якоби, возникающего в молекулярной биологии для модели эволюции Кроу — Кимуры. Гамильтониан уравнения нелинеен и зависит от фазовой и импульсной переменных. Помимо заданного начального условия решение должно удовлетворять фазовым ограничениям.

Рассматриваемую задачу Коши нельзя решить классическими методами, а также путем применения методов, разработанных для задач без фазовых ограничений. В работе ставится цель определить обобщенное решение рассматриваемой задачи и исследовать вопросы его существования и единственности.

Обобщенное решение вводится на основе вязкостного (и/или минимаксного) подхода с помощью неравенств для суб- и супердифференциалов решения.

Нелинейный гамильтониан уравнения в области, задаваемой фазовыми ограничениями, является вогнутым по фазовой переменной, заданная начальная функция также является нелинейной, а искомое решение должно быть непрерывным в замыкании этой области.

Эти обстоятельства позволяют поставить вспомогательную задачу оптимального управления с целевым множеством, состоящим из заданного начального множества и границы фазовых ограничений, на которую гладким образом продолжается начальная функция. Показано, что введенное непрерывное обобщенное решение в исходной задаче можно построить

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00214), программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-64508.2010.1).

с помощью функции цены вспомогательной задачи оптимального управления. Неединственность возможного гладкого продолжения начальной функции на границы фазовых ограничений приводит к неединственности обобщенного решения.

Исследования базируются на результатах, полученных в математической теории оптимального управления [1, 6] и теории обобщенных (минимаксных [11, 17] и вязкостных [13–15]) решений уравнений Гамильтона — Якоби и опираются на обобщенный метод характеристик [18].

Результаты проведенных исследований примыкают к результатам работ [7, 12].

1. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби в модели Кроу — Кимуры молекулярной эволюции

1.1. Уравнение Гамильтона — Якоби в модели Кроу — Кимуры

В работе [16] для модели Кроу — Кимуры молекулярной эволюции было получено следующее уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad (1.1)$$

где

$$H(x, p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2} e^{2p} - \frac{1-x}{2} e^{-2p}. \quad (1.2)$$

Входящая в (1.2) функция $f(\cdot)$ называется фитнесом. Уравнение (1.1) рассматривается при $t \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$. Предполагается также, что задана функция $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и выполняется начальное условие

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [-1; 1]. \quad (1.3)$$

В работе [16] исследовалось поведение с течением времени максимума решения $u(\cdot)$ задачи (1.1)–(1.3) в случае квадратичного фитнеса $f(x) = x^2$ для начальной функции вида $u_0(x) = -a(x - x_0)^2$, $a > 0$. Анализ основывался на физических интерпретациях.

Целью данной работы является определение обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) и исследование вопросов его существования и единственности.

1.2. Метод характеристик

Предположим, что задано число $T > 0$. Далее задачу (1.1)–(1.3) будем рассматривать в замкнутой области $\bar{\Pi}_T = [0; T] \times [-1; 1]$ и полагать, что начальная функция $u_0(x)$ непрерывно дифференцируема.

Классическим решением задачи Коши (1.1)–(1.3) называется непрерывная функция $u(\cdot) : \bar{\Pi}_T \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируемая в открытой области $\Pi_T = (0; T) \times (-1; 1)$, удовлетворяющая уравнению (1.1) во всех точках области Π_T , а также удовлетворяющая начальному условию (1.3).

Одним из основных методов исследования задач Коши для уравнений в частных производных первого порядка и нахождения классических решений таких задач является метод характеристик Коши (см., например, [5]). Этот метод сводит интегрирование уравнения в частных производных к интегрированию характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Характеристическая система для уравнения (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x, p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x, p) = f'(x) + \frac{e^{2p} - e^{-2p}}{2}, \\ \dot{z} &= pH_p(x, p) - H(x, p), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $H_x(x, p) = \partial H(x, p)/\partial x$, $H_p(x, p) = \partial H(x, p)/\partial p$.

Система (1.4) рассматривается со следующими начальными условиями, согласованными с (1.3):

$$x(0, y) = y, \quad p(0, y) = u'_0(y), \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y \in [-1; 1]. \quad (1.5)$$

Решения

$$(x(\cdot, y), p(\cdot, y), z(\cdot, y)) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (1.6)$$

системы (1.4), зависящие от параметра y , называются характеристиками уравнения (1.1).

Метод характеристик Коши применим для построения классического решения уравнения Гамильтона — Якоби (1.1) в точке $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$, если выполнены условия

$$x(t, y) = x, \quad \frac{\partial x(t, y)}{\partial y} \neq 0 \quad \text{для } t \in [0; T], \quad y \in [-1; 1].$$

В этом случае графики компонент $x(\cdot, y)$ характеристик (1.6) не пересекаются в точке $(t, x) \in \Pi_T$, и множество параметров

$$Y(t, x) = \{y \in [-1, 1] \mid x(t, y) = x\} = \{y(t, x)\}$$

одноэлементно. Тогда классическое решение представимо в виде

$$u(t, x) = z(t, y(t, x)), \quad (t, x) \in \Pi_T.$$

Поскольку в рассматриваемой задаче гамильтониан $H(x, p)$ (1.2) и начальная функция $u_0(x)$ нелинейны, сколь бы гладкими ни были функция фитнеса $f(\cdot)$ и начальная функция $u_0(\cdot)$, характеристики не пересекаются лишь в достаточно малой окрестности начальных условий $t = 0$, $u(0, x) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Вне этой окрестности классического решения не существует. Кроме того, как следует из приведенной ниже леммы 1, в множестве $\bar{\Pi}_T$ существуют точки, через которые не проходит ни одна проекция характеристик (1.4), (1.5).

Таким образом, с помощью метода характеристик решение задачи (1.1)–(1.3) можно построить лишь локально. В данной задаче не существует глобального классического решения, поэтому решение следует рассматривать в обобщенном смысле.

На приведенных рисунках изображены проекции $x(t, y)$ характеристик уравнения (1.1). Рис. 1 соответствует случаю $f(x) = x^2$, $u_0(x) = -x^2/4$. Для рис. 2 $f(x) = (x - 0, 4)^2/8$, $u_0(x) = -(x + 0, 8)^2$, для рис. 3 $f(x) = (x - 0, 4)^2/8$, $u_0(x) = 2x^3 - (x + 0, 8)^2$.

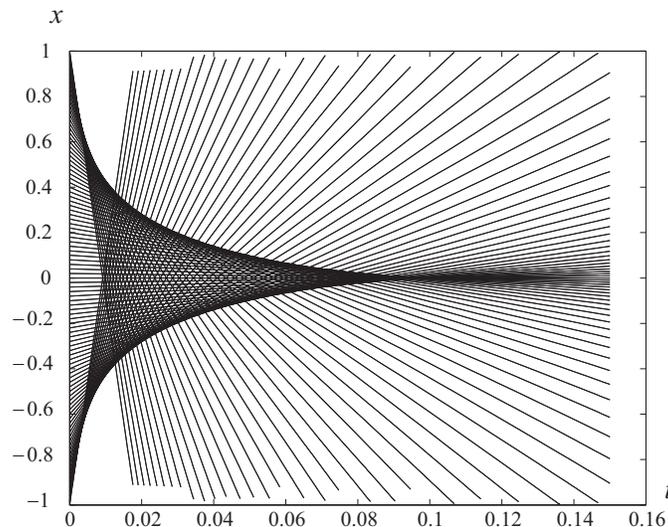


Рис. 1.

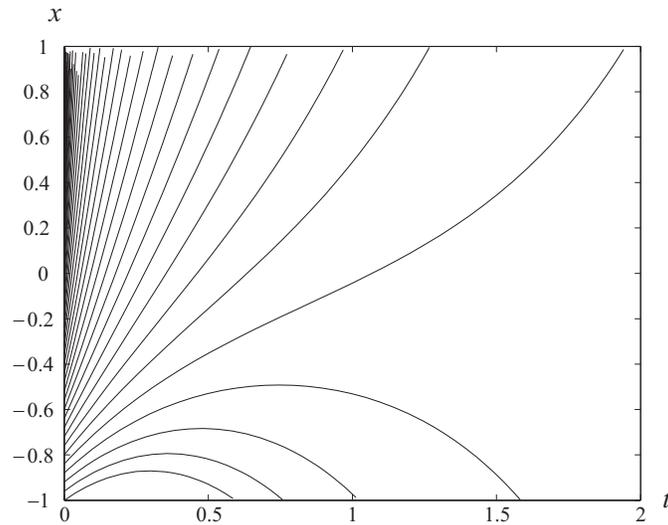


Рис. 2.

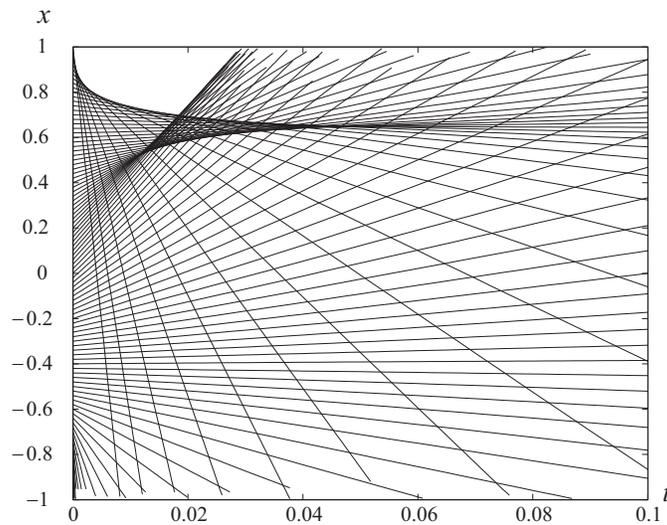


Рис. 3.

1.3. Обобщенное решение для задачи с фазовыми ограничениями

Нас будет интересовать непрерывное на множестве $\overline{\Pi}_T$ обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3). В теории уравнений Гамильтона — Якоби рассматривались различные определения обобщенных решений (см., например, [4]). В начале 1980-х г. М. Крэндаллом и П.Л. Лионсом [14] было введено понятие вязкостного решения. Независимо А.И. Субботиным [11, 17] была разработана эквивалентная концепция минимаксного решения.

Напомним определение вязкостного решения. Пусть задано множество $W \subset \mathbb{R}^2$. Символом \overline{W} будем обозначать его замыкание. Символом $C(W)$ будем обозначать класс функций, непрерывных на множестве W .

Пусть $u(\cdot) \in C(\overline{W})$ и $(t, x) \in \overline{W}$. Субдифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$D^-u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \left| \liminf_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in \overline{W}}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right. \right\}. \quad (1.7)$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$D^+u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \left| \limsup_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in \overline{W}}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leq 0 \right. \right\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Функция $u \in C(\overline{W})$ называется нижним вязкостным решением уравнения (1.1) на множестве W , если

$$a + H(x, s) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in W, \quad \forall (a, s) \in D^+u(t, x). \quad (1.8)$$

Функция $u \in C(\overline{W})$ называется верхним вязкостным решением уравнения (1.1) на W , если

$$a + H(x, s) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in W, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x). \quad (1.9)$$

Непрерывная функция $u(\cdot)$ называется вязкостным решением уравнения (1.1) на W , если она является одновременно нижним и верхним решением (1.1) на W .

Если множество W ограничено и замкнуто, функция $u(\cdot)$, являющаяся вязкостным решением уравнения (1.1) на этом множестве, согласно определению 1 должна удовлетворять обоим неравенствам (1.8), (1.9) как во внутренних, так и в граничных точках множества W .

В работе [13] обобщенное решение уравнения (1.1) на множестве \overline{W} определялось как функция, являющаяся вязкостным решением на внутренности множества W и верхним вязкостным решением на границе ∂W этого множества. Таким образом, в граничных точках множества W для обобщенного в смысле [13] решения следует проверять только неравенство (1.9).

Отметим, что в граничных точках множества W субдифференциал $D^-u(t, x)$, если он непуст, является неограниченным множеством. Действительно, пусть $(t_*, x_*) \in \partial W$, $(a, s) \in D^-u(t_*, x_*)$, а вектор (n_1, n_2) является внешней нормалью к множеству \overline{W} в точке (t_*, x_*) . Тогда, как нетрудно заметить из определения (1.7) субдифференциала, для любого положительного числа k справедливо

$$(a + kn_1, s + kn_2) \in D^-u(t_*, x_*). \quad (1.10)$$

Из отмеченного обстоятельства и (1.2) следует, что если в задаче (1.1)–(1.3), рассматриваемой на множестве $\overline{\Pi}_T$, точка $(t_*, x_*) \in \partial \overline{\Pi}_T$ такова, что $x_* = \pm 1$ и $D^-u(t_*, x_*) \neq \emptyset$, тогда в этой точке не выполнено условие (1.9). В самом деле, пусть $0 \leq t_* \leq T$ и, для определенности, $x_* = 1$. Тогда единичный вектор $(0, 1)$ задает направление внешней нормали к множеству $\overline{\Pi}_T$ в точке (t_*, x_*) . Пусть $(a, s) \in D^-u(t_*, x_*)$, тогда, согласно (1.10)

$$(a, s + k) \in D^-u(t_*, x_*) \quad \forall k \geq 0,$$

и для выполнения условия (1.9) необходимо

$$a + H(1, s + k) = a - f(x) + 1 - e^{s+k} \geq 0 \quad \forall k \geq 0,$$

что, очевидно, не выполняется.

В [13] были получены условия, обеспечивающие выполнение теорем существования и единственности обобщенного решения. При этом одним из основных условий, при которых обобщенное решение существует, является следующее условие коэрцитивности гамильтониана:

$$H(x, p) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Для гамильтониана, задаваемого соотношением (1.2), условие (1.11) не выполнено, например, при $x = 1$ и $x = -1$, поэтому известные теоремы существования обобщенного в смысле [13] решения неприменимы для задачи (1.1)–(1.3).

В силу отмеченных фактов обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) на множестве $\overline{\Pi}_T$ следует определять иначе, таким образом, чтобы решение существовало.

Пусть функция $u(\cdot) \in C(\overline{\Pi}_T)$ и точка $(t, x) \in \overline{\Pi}_T$. Символом $\text{Dif}(u)$ обозначим множество точек, в которых функция $u(\cdot)$ дифференцируема. Определим множество

$$\partial_C u(t, x) = \text{co} \left\{ (a, s) \mid a = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial t}, s = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial x}; \right. \\ \left. (t_i, x_i) \rightarrow (t, x) \text{ при } i \rightarrow \infty, (t_i, x_i) \in \overline{\Pi}_T \cap \text{Dif}(u) \right\}. \quad (1.12)$$

Заметим, что в случае липшицевости функции $u(\cdot)$ множество (1.12) совпадает с субдифференциалом Кларка [3].

О п р е д е л е н и е 2. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) в области $\overline{\Pi}_T$ назовем непрерывную функцию $u(\cdot)$, удовлетворяющую начальному условию (1.3), являющуюся вязкостным решением уравнения (1.1) на множестве $\Pi_T = (0, T) \times (-1, 1)$ и такую, что для точек из множества

$$\Gamma_T = \{(t, x) \mid 0 < t < T, x = 1\} \cup \{(t, x) \mid 0 < t < T, x = -1\}$$

выполнено неравенство

$$a + H(x, s) \geq 0 \quad \forall (a, s) \in D^- u(t, x) \cap \partial_C u(t, x). \quad (1.13)$$

З а м е ч а н и е 1. В определении 2 требуется, чтобы обобщенное решение для точек границы Γ_T удовлетворяло неравенству (1.13) для *субдифференциала*. Это связано с вогнутостью гамильтониана (1.2) по переменной p в области $\overline{\Pi}_T$. Введение пересечения субдифференциала $D^- u(t, x)$ с множеством $\partial_C u(t, x)$ позволяет, в отличие от определения 1, осуществлять проверку неравенства (1.13) для точек границы Γ_T только на компактном множестве.

2. Свойства решений характеристической системы

В этом разделе исследуются свойства решений характеристической системы (1.4), рассматриваемой совместно с начальными условиями (1.5). Здесь и всюду далее начальная функция $u_0(\cdot)$ предполагается непрерывно дифференцируемой, а функция фитнеса $f(\cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемой.

Символом $O_\varepsilon(t_*, x_*)$ будем обозначать окрестность заданной точки (t_*, x_*) в множестве $\overline{\Pi}_T$:

$$O_\varepsilon(t_*, x_*) = \{(x, y) \in \overline{\Pi}_T \mid |x - x_*| + |t - t_*| \leq \varepsilon\}.$$

Лемма 1. Пусть $0 < t_* < T$, $x_* \in \{-1; 1\}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $y \in [-1; 1]$ график компоненты $x(\cdot, y)$ характеристики (1.6) не имеет общих точек с окрестностью $O_\varepsilon(t_*, x_*)$, т. е. $\{(t, x(t, y)) \mid 0 < t < T\} \cap O_\varepsilon(t_*, x_*) = \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим от противного: существуют такая точка (t_*, x_*) , $t_* \in (0, T]$, $x_* = 1$, либо $x_* = -1$, что для любого положительного ε найдется такое значение параметра $y_\varepsilon \in [-1, 1]$, для которого $\{(t, x(t, y_\varepsilon)) \mid 0 < t < T\} \cap O_\varepsilon(t_*, x_*) \neq \emptyset$. Тогда, устремив ε к нулю, из компактности трубки $X_T([-1, 1])$,

$$X_T([-1, 1]) = \{(t, x) = (t, x(t, y)) \mid y \in [-1, 1], t \in [0, T]\} \cap \overline{\Pi}_T,$$

получим, что существует такое значение y_* , $-1 \leq y_* \leq 1$, что $x(t_*, y_*) = x_*$.

Пусть $x_* = 1$. В этом случае в точке t_* функция $x(\cdot, y_*)$ имеет локальный максимум или возрастает. Таким образом, значение производной $\dot{x}(t_*) \geq 0$. С другой стороны, из первого уравнения системы (1.4) следует, что $\dot{x} < 0$ при $x = 1$, и мы приходим к противоречию.

Если $x_* = -1$, функция $x(\cdot, y_*)$ в точке t_* имеет локальный минимум или убывает, и для значения производной должно выполняться неравенство $\dot{x}(t_*) \leq 0$. Но из первого уравнения системы (1.4) следует, что $\dot{x} > 0$ при $x = -1$, и мы вновь приходим к противоречию. \square

Лемма 2. Для любого $y \in [-1; 1]$ компонента $p(\cdot, y)$ характеристики (1.6) ограничена на множестве $[0, T]$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что $|x(t, y)| \leq 1$. Поскольку функция $f(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, существует число $M \geq 0$ такое, что $|f'(x)| \leq M$, если $x \in [-1, 1]$. Из системы (1.4) получаем

$$-M + \frac{e^{2p} - e^{-2p}}{2} \leq \dot{p} \leq M + \frac{e^{2p} - e^{-2p}}{2}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{p}_1 = \frac{e^{2p_1} - e^{-2p_1}}{2}, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

В случае, когда $p_1(0) = 0$, решением уравнения (2.2) является функция, тождественно равная нулю. Если $p_1(0) \neq 0$, можно показать, что решением этого дифференциального уравнения с разделяющимися переменными является функция

$$p_1(t) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{Ce^{-2t} - 1}{1 + Ce^{-2t}} \right|, \quad (2.3)$$

где константа C определяется следующим образом:

$$C = \frac{1 + e^{-2p_1(0)}}{|1 - e^{-2p_1(0)}|} \quad (2.4)$$

и для всех $t \geq 0$ справедливо

$$|Ce^{-2t} - 1| > 0. \quad (2.5)$$

Пусть $p_1(\cdot, y)$ — решение уравнения (2.2) с начальным условием

$$p_1(0) = p(0) = u'_0(y),$$

соответствующим (1.5). Из (2.3) следует, что существует константа $K > 0$ такая, что

$$|p_1(t, y)| < K, \quad 0 \leq t \leq T, \quad y \in [0; 1]. \quad (2.6)$$

Из (2.1) и (2.6) получаем

$$|p(t, y)| \leq |p_1(t, y)| + M \cdot T \leq K + M \cdot T, \quad 0 \leq t \leq T, \quad y \in [0; 1]. \quad (2.7)$$

\square

3. Вспомогательная задача оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления, решение которой будет использовано для построения обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3).

Введем следующие обозначения. Пусть $\bar{\Pi}_T^0 = [0, T) \times (-1; 1)$, $G_T = \bar{\Pi}_T \setminus \bar{\Pi}_T^0$. Символом P обозначим отрезок

$$P = [-K - MT; K + MT],$$

где $K + M \cdot T$ — число из оценки (2.7).

3.1. Постановка задачи

Предположим, что на множестве $\{(t, x) \mid t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ задана некоторая функция $\varphi(\cdot)$.

Рассмотрим задачу **ОСР** оптимального управления системой, динамика которой описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = -H_p(x, p) = (1+x)e^{2p} - (1-x)e^{-2p}, \quad p \in P. \quad (3.1)$$

Система рассматривается на множестве $\bar{\Pi}_T = [0, T] \times [-1, 1]$. Значения управляющего параметра p выбираются из множества P . Если задано начальное состояние системы $x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in \bar{\Pi}_T$, то допустимыми управлениями являются измеримые функции $p(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow P$. Множество всех допустимых управлений обозначим символом $\mathbf{P}_{[t_0, T]}$.

На движениях системы (3.1) определим функционал платы

$$I_{(t_0, x_0)}(p(\cdot)) = \int_{t_0}^{t^\sharp} p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau)) d\tau + \varphi(t^\sharp, x(t^\sharp)), \quad (3.2)$$

где $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, p(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow [-1, 1]$ — траектория системы (3.1), стартующая из начальной точки (t_0, x_0) под воздействием управления $p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0, T]}$, $t^\sharp = t^\sharp(t_0, x_0, p(\cdot))$ — момент первого выхода этой траектории на целевое множество \bar{G}_T :

$$\bar{G}_T = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x = 1\} \cup \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x = -1\} \cup \{(t, x) \mid t = T, -1 \leq x \leq 1\},$$

$$t^\sharp = \min_{t \in [t_0, T]} \{t \mid x(t, t_0, x_0, p(\cdot)) \in \bar{G}_T\}. \quad (3.3)$$

Задача **ОСР** оптимального управления состоит в управлении системой (3.1) таким образом, чтобы обеспечить оптимальный результат (цену) $V(t_0, x_0)$, который определяется следующим соотношением:

$$V(t_0, x_0) = \sup_{p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0, T]}} I_{(t_0, x_0)}(p(\cdot)) \quad (3.4)$$

для начальной точки $(t_0, x_0) \in \bar{\Pi}_T$.

3.2. Терминальная функция

В постановке задачи **ОСР** участвует функция $\varphi(\cdot)$. Будем считать, что эта функция, называемая терминальной, является непрерывно дифференцируемой. Из (3.2) следует, что значения функции $\varphi(\cdot)$ достаточно знать лишь на целевом множестве \bar{G}_T . Располагая начальной функцией $u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, продолжим ее на границу Γ_T функцией $\varphi(\cdot)$ с помощью описанных далее построений.

Зафиксируем значение параметра $x^* = \pm 1$. Рассмотрим на отрезке времени $[0, T]$ следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= H_x(x^*, p) = -f'(x^*) - \frac{e^{2p} - e^{-2p}}{2}, \\ \dot{z}(t) &= H(x^*, p) - p\dot{x}(t, x^*) = H(y, x^*). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Краевые условия для системы (3.5) заданы в конечный момент времени T и имеют вид

$$p(T, x^*) = u'_0(x^*), \quad z(T, x^*) = u_0(x^*), \quad x^* = \pm 1. \quad (3.6)$$

С помощью решений системы (3.5), (3.6) зададим значения функции $\varphi(\cdot)$ на множестве \bar{G}_T следующим образом:

$$\varphi(t, x) = \begin{cases} u_0(x), & t = T, & x \in [-1; 1]; \\ z(t, -1), & t \in [0; T], & x = -1; \\ z(t, 1), & t \in [0; T], & x = 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Будем считать также, что на множестве \overline{G}_T функция $\varphi(t, x)$ удовлетворяет уравнению Беллмана для задачи (3.1)–(3.4). Таким образом, справедливы соотношения

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} = \begin{cases} u'_0(x), & t = T, & x \in [-1; 1]; \\ p(t, -1), & t \in [0; T], & x = -1; \\ p(t, 1), & t \in [0; T], & x = 1; \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \begin{cases} H(x, u'_0(x)), & t = T, & x \in [-1; 1]; \\ H(-1, p(t, -1)), & t \in [0; T], & x = -1; \\ H(1, p(t, 1)), & t \in [0; T], & x = 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

3.3. Гамильтониан

Гамильтониан \tilde{H} задачи **ОСР** имеет вид

$$\tilde{H}(x, s) = \max_{p \in P} \left[-sH_p(x, p) + pH_p(x, p) - H(x, p) \right]. \quad (3.10)$$

Покажем, что в области $[-1; 1] \times P \ni (x, s)$ справедливо соотношение

$$\tilde{H}(x, s) = -H(x, s), \quad (3.11)$$

связывающее гамильтониан $\tilde{H}(\cdot)$ задачи **ОСР** с гамильтонианом $H(\cdot)$ (1.2) уравнения (1.1).

Преобразуя выражение, стоящее в (3.10) под знаком максимума, получим

$$\left(-sH_p(x, p) + pH_p(x, p) + (H(x, s) - H(x, p)) \right) - H(x, s).$$

Из (1.2) следует, что при $x \in [-1; 1]$ гамильтониан $H(x, s)$ является вогнутым по s , поэтому имеем

$$H(x, s) - H(x, p) \leq (s - p)H_p(x, p).$$

Отсюда вытекает, что

$$-sH_p(x, p) + pH_p(x, p) - H(x, p) + H(x, s) \leq 0.$$

Поэтому, если $s \in P$, максимум в (3.10) достигается на элементе $p = s$, и равенство (3.11) доказано.

3.4. Необходимые условия оптимальности в задаче ОСР

Пусть функция $\varphi(\cdot)$ определена в соответствии с (3.7), (3.8). Обозначим через $\mathbf{P}_{[t_0, T]}^0$ множество всех абсолютно непрерывных функций $p(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow P$. Понятно, что $\mathbf{P}_{[t_0, T]}^0 \subset \mathbf{P}_{[t_0, T]}$.

Применяя к задаче **ОСР** принцип максимума Понтрягина [6, 8], учитывая соотношение (3.11) и непрерывную дифференцируемость функций $\varphi(\cdot)$ и $H_p(\cdot)$, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in \bar{\Pi}_T$ оптимальный результат $V(t_0, x_0)$ (3.4) в задаче ОСР достигается на множестве $\mathbf{P}_{[t_0, T]}^0$, т. е.

$$V(t_0, x_0) = \max_{p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0, T]}^0} I_{(t_0, x_0)}(p(\cdot)). \quad (3.12)$$

При этом функция $p^0(\cdot)$, на которой достигается максимум в (3.12), удовлетворяет уравнению

$$\dot{p}^0(t) = H_x(x^0(t), p^0(t)) \quad \text{для почти всех } t \in (t_0, t^\sharp(t_0, x_0, p(\cdot)))$$

и условию трансверсальности

$$p(t^\sharp) = \frac{\partial \varphi(t^\sharp, x^0(t^\sharp))}{\partial x},$$

где $x^0(\cdot)$ — соответствующая траектория управляемой системы (3.1).

3.5. Репрезентативная формула для функции цены в задаче оптимального управления

Докажем следующую формулу, описывающую структуру функции цены $V(t, x)$ в задаче ОСР (3.1)–(3.4).

Теорема 2. Функция цены в задаче ОСР имеет представление

$$V(t, x) = \max_{\alpha \in \mathbf{A}} \omega(t, x, \alpha)$$

при всех $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$, где параметр α принимает значения из метрического компакта \mathbf{A} .

Функция $\omega(\cdot) : \bar{\Pi}_T \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, а функции

$$\bar{\Pi}_T \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \rightarrow \omega(t, x, \alpha), \quad \alpha \in \mathbf{A},$$

имеют при почти всех $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$ частные производные

$$\frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x},$$

равностепенно ограниченные константой $L > 0$, непрерывные в точках $(t, x) \in \Pi_T$ при

$$\alpha \in \mathbf{A}^0(t, x) = \{\alpha \in \mathbf{A} \mid \omega(t, x, \alpha) = V(t, x)\}.$$

Доказательство. Построим функции $(t, x) \rightarrow \omega(t, x, \alpha)$ следующим образом. Согласно теореме 1 оптимальный результат для начальной точки $(t, x) \in \Pi_T$ в рассматриваемой задаче достигается на множестве ограниченных, абсолютно непрерывных программных управлений $\mathbf{P}_{[t_0, T]}^0$. Пусть $\alpha = \alpha(\tau)$ — абсолютно непрерывная функция, определенная на стандартном интервале $[0, 1]$ со значениями на множестве P , т. е. рассматриваемая функция $\alpha(\cdot)$ является стандартизованным программным управлением. Положим

$$\mathbf{A} = \{\alpha \mid \alpha(\cdot) : [0, 1] \rightarrow P, \alpha \text{ — абсолютно непрерывная функция}\}.$$

Так же, как и определенные выше множества $\mathbf{P}_{[t_0, T]}^0$, множество \mathbf{A} всех стандартизованных обобщенных управлений является метрическим компактом в пространстве непрерывных функций [2].

Пусть $\xi(t, \tau)$ — линейное преобразование вида

$$\xi(t, \tau) = t + (T - t)\tau,$$

переводящее отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[t, T]$.

Определим функции

$$\omega(t, x, \alpha) = \varphi(\xi(t, \tau^\sharp), y(\tau^\sharp; 0, x, \alpha; t)) + z(\tau^\sharp; 0, 0, \alpha; t, x) = \varphi(\xi(t, \tau^\sharp), y(\tau^\sharp)) + z(\tau^\sharp), \quad (3.13)$$

где абсолютно непрерывные функции

$$y(\cdot) = y(\cdot; 0, x, \alpha; t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad z(\cdot) = z(\cdot; 0, 0, \alpha; t, x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

являются траекториями системы

$$\dot{y} = (T - t) \left(-H_p(y(\tau), \alpha(\tau)) \right), \quad 0 \leq \tau \leq \tau^\sharp, \quad (3.14)$$

$$\dot{z} = (T - t) \left(H(y(\tau), \alpha(\tau)) - \alpha(\tau) H_p(y(\tau), \alpha(\tau)) \right), \quad 0 \leq \tau \leq \tau^\sharp, \quad (3.15)$$

с начальным условием $y(0) = x$, $z(0) = 0$, под воздействием стандартизованного программного управления $\alpha \in \mathbf{A}$. Здесь t играет роль параметра, а $\tau^\sharp \in [0, 1]$, $\tau^\sharp = \tau^\sharp(t, x, \alpha)$ определяется как момент первого выхода траектории $y(\cdot; 0, x, \alpha; t)$ на множество \overline{G}_T , т. е.

$$\tau^\sharp = \tau^\sharp(t, x, \alpha) = \min_{\varsigma \in [0, 1]} \{ \varsigma \mid y(\varsigma; 0, x, \alpha; t) \in \overline{G}_T \}. \quad (3.16)$$

Итак, функции $(t, x) \rightarrow \omega(t, x, \alpha)$ (3.13) определяются с помощью суперпозиции от терминальной функции задачи $\varphi(\cdot)$, решений $y(\cdot; 0, x, \alpha; t)$ и $z(\cdot; 0, 0, \alpha; t, x)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (3.14), (3.15) и момента $\tau^\sharp(t, x, \alpha)$ (3.16) первого выхода траектории $y(\cdot; 0, x, \alpha; t)$ на множество \overline{G}_T .

Поскольку правые части обыкновенных дифференциальных уравнений (3.14), (3.15) являются непрерывно дифференцируемыми функциями, заявленные в утверждении теоремы свойства функций $\omega(t, x, \alpha)$ следуют из непрерывной дифференцируемости по параметрам и начальным данным решений этих уравнений (см., например, [2, 9]), а также из определения момента $\tau^\sharp(t, x, \alpha)$.

Если, например, для фиксированного управления α и выбранной точки $(t', x') \in \Pi_T$ найдется такая окрестность $O_\varepsilon(t', x')$, что для всех точек $(t, x) \in O_\varepsilon(t', x')$ справедливо $\tau^\sharp(t, x, \alpha) < 1$ и либо

$$y(\tau^\sharp) = y(\tau^\sharp(t, x, \alpha); 0, x, \alpha; t) = 1,$$

либо для всех точек $(t', x') \in O_\varepsilon(t, x)$ имеет место

$$y(\tau^\sharp) = y(\tau^\sharp(t, x, \alpha); 0, x, \alpha; t) = -1,$$

то, дифференцируя эти равенства по t и x , получим

$$\frac{dy(\tau^\sharp)}{d\tau} \frac{\partial \tau^\sharp(t, x, \alpha)}{\partial t} + \frac{\partial y(\tau^\sharp; 0, x, \alpha; t)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{dy(\tau^\sharp)}{d\tau} \frac{\partial \tau^\sharp(t, x, \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial y(\tau^\sharp; 0, x, \alpha; t)}{\partial x} = 0,$$

откуда, используя вид $dy(\tau)/d\tau$, имеем выражения

$$\frac{\partial \tau^\sharp(t, x, \alpha)}{\partial t} = - \frac{\partial y(\tau^\sharp; 0, x, \alpha; t) / \partial t}{(T - t) \left(-H_p(y(\tau^\sharp), \alpha(\tau^\sharp)) \right)}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \tau^\sharp(t, x, \alpha)}{\partial x} = - \frac{\partial y(\tau^\sharp; 0, x, \alpha; t) / \partial x}{(T - t) \left(-H_p(y(\tau^\sharp), \alpha(\tau^\sharp)) \right)}. \quad (3.18)$$

Из вида $dy(\tau^\sharp)/d\tau$ (3.14) вытекает, что в точках границы $y(\tau^\sharp) = \pm 1$ при $\tau^\sharp(t, x, \alpha) < 1$ справедливо

$$(T - t) \left(-H_p(\pm 1, \alpha(\tau^\sharp)) \right) \neq 0.$$

Таким образом, из непрерывности выражений, стоящих в правых частях выражений (3.17), (3.18), вытекает существование и непрерывность частных производных

$$\frac{\partial \tau^\sharp(t, x, \alpha)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tau^\sharp(t, x, \alpha)}{\partial x},$$

и, согласно (3.13), (3.14), существуют и непрерывны частные производные

$$\frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x},$$

которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \varphi(\xi(t, \tau^\sharp(t, x, \alpha)), y(\tau^\sharp(t, x, \alpha)))}{\partial \xi} (T - t) + \frac{dz(\tau^\sharp(t, x, \alpha))}{d\tau} \right) \frac{\partial \tau^\sharp(t, x, \alpha)}{\partial t} \\ &\quad + \frac{\partial \varphi(\xi(t, \tau^\sharp(t, x, \alpha)), y(\tau^\sharp(t, x, \alpha)))}{\partial \xi} (1 - \tau^\sharp(t, x, \alpha)) + \frac{\partial z(\tau^\sharp; t, x, \alpha)}{\partial t}, \\ \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \varphi(\xi(t, \tau^\sharp(t, x, \alpha)), y(\tau^\sharp(t, x, \alpha)))}{\partial \xi} (T - t) + \frac{dz(\tau^\sharp(t, x, \alpha))}{d\tau} \right) \frac{\partial \tau^\sharp(t, x, \alpha)}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial \varphi(\xi(t, \tau^\sharp(t, x, \alpha)), y(\tau^\sharp(t, x, \alpha)))}{\partial y} \left(\frac{dy(\tau^\sharp; t, x, \alpha)}{d\tau} \frac{\partial \tau^\sharp(t, x, \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial y(\tau^\sharp; t, x, \alpha)}{\partial x} \right) + \frac{\partial z(\tau^\sharp; t, x, \alpha)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Если же для выбранной точки $(t', x') \in \Pi_T$ найдется такая окрестность $O_\varepsilon(t', x')$, что для всех точек $(t, x) \in O_\varepsilon(t', x')$ справедливо

$$\tau^\sharp(t, x, \alpha) = 1, \quad \xi(t, \tau^\sharp(t, x, \alpha)) = T,$$

то снова существование и непрерывность частных производных

$$\frac{\partial y(T; t, x, \alpha)}{\partial t}, \quad \frac{\partial y(T; t, x, \alpha)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z(T; t, x, \alpha)}{\partial t}, \quad \frac{\partial z(T; t, x, \alpha)}{\partial x}$$

следуют из классических результатов о непрерывной дифференцируемости по параметрам и начальным данным решений уравнений (3.14), (3.15). Согласно (3.13), (3.14), в $O_\varepsilon(t', x')$ существуют и непрерывны частные производные

$$\frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x},$$

которые имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t} &= \frac{\partial u_0(y(1; t, x, \alpha))}{\partial y} \frac{\partial y(1; t, x, \alpha)}{\partial t} + \frac{\partial z(1; t, x, \alpha)}{\partial t}, \\ \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x} &= \frac{\partial u_0(y(1; t, x, \alpha))}{\partial y} \frac{\partial y(1; t, x, \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial z(1; t, x, \alpha)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда для точки $(t', x') \in \Pi_T$ существуют последовательность $(t_i, x_i) \rightarrow (t', x')$, $\tau^\sharp(t_i, x_i) < 1$, и последовательность $(t_j, x_j) \rightarrow (t', x')$, $\tau^\sharp(t_j, x_j) = 1$. Пусть $\alpha \in \mathbf{A}^0(t', x')$.

Используя выражения (3.13)–(3.18), условия трансверсальности

$$\alpha(\tau^\sharp(t_i, x_i)) = p(\xi(t_i, \tau^\sharp(t_i, x_i, \alpha))) = \frac{\partial\varphi(\xi(t_i, \tau^\sharp), y(\tau^\sharp; t_i, x_i, \alpha))}{\partial y}$$

и полученные выше выражения для $\partial\omega(t, x, \alpha)/\partial t$ и $\partial\omega(t, x, \alpha)/\partial x$, приходим к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial\omega(t', x', \alpha)}{\partial t} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial\omega(t_i, x_i, \alpha)}{\partial t} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\partial\omega(t_j, x_j, \alpha)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u_0(y(1; t', x', \alpha))}{\partial y} \frac{\partial y(1; t', x', \alpha)}{\partial t} + \frac{\partial z(1; t', x', \alpha)}{\partial t}, \\ \frac{\partial\omega(t', x', \alpha)}{\partial x} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial\omega(t_i, x_i, \alpha)}{\partial x} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\partial\omega(t_j, x_j, \alpha)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u_0(y(1; t', x', \alpha))}{\partial y} \frac{\partial y(1; t', x', \alpha)}{\partial x} + \frac{\partial z(1; t', x', \alpha)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Из формул для $\partial\omega(t, x, \alpha)/\partial t$ и $\partial\omega(t, x, \alpha)/\partial x$ вытекает следующая оценка для константы $L > 0$, заявленной в условиях этой теоремы:

$$L \leq \left((M_1 + M_2) + T(R(K_1 + K_3) + K_2) \right) \left(\frac{K_2}{TK_1} (e^{TK_1} - 1) + e^{TK_3} \right) + T(RK_2 + K_0),$$

где $R = K + M$ — число из оценки (2.7),

$$K_0 = \max_{p \in P, |x| \leq 1} |H(x, p)|, \quad K_1 = \max_{p \in P, |x| \leq 1} |H_{xp}(x, p)|,$$

$$K_2 = \max_{p \in P, |x| \leq 1} |H_p(x, p)|, \quad K_3 = \max_{p \in P, |x| \leq 1} |H_{pp}(x, p)|,$$

$$K_4 = \min_{p \in P} H_p(\pm 1, p) > 0, \quad M_1 = \frac{2K_0 + RK_2}{K_4},$$

$$M_2 = \max_{|x| \leq 1, t \in [0, T]} \left\{ |u'_0(x)|, \left| \frac{\partial\varphi(t, 1)}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial\varphi(t, -1)}{\partial t} \right| \right\}.$$

□

3.6. Свойства функции цены

Этот раздел посвящен дальнейшему изучению свойств функции цены в задаче **ОСР**. Пусть дано множество $W \subset \mathbb{R}^2$. Символом $\text{co}W$ будем обозначать его выпуклую оболочку [10].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Для любой точки $(t, x) \in (0, T) \times (-1, 1)$ справедливо

$$\emptyset \neq D^-V(t, x) = \text{co} \left\{ \left(\frac{\partial\omega(t, x, \alpha)}{\partial t}, \frac{\partial\omega(t, x, \alpha)}{\partial x} \right) \mid \alpha \in \mathbf{A}^0(t, x) \right\}. \quad (3.19)$$

Доказательство. Пусть $(t, x) \in (0, T) \times (-1, 1)$.

Докажем, что $D^-V(t, x) \neq \emptyset$ и справедливо включение

$$\text{co} \left\{ \left(\frac{\partial\omega(t, x, \alpha)}{\partial t}, \frac{\partial\omega(t, x, \alpha)}{\partial x} \right) \mid \alpha \in \mathbf{A}^0(t, x) \right\} \subset D^-V(t, x). \quad (3.20)$$

Пусть $\alpha \in \mathbf{A}^0(t, x)$, $(\tau, y) \in O_\varepsilon(t, x)$, где ε достаточно мало. Тогда, используя теорему 2, получим

$$V(\tau, y) - V(t, x) \geq \omega(\tau, y, \alpha) - \omega(t, x, \alpha) = \frac{\partial\omega(t, x, \alpha)}{\partial t}(\tau - t) + \frac{\partial\omega(t, x, \alpha)}{\partial x}(y - x) + o(|\tau - t| + |y - x|)$$

и, следовательно,

$$\liminf_{(\tau, y) \rightarrow (t, x)} \frac{V(\tau, y) - V(t, x) - \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t}(\tau - t) - \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x}(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0.$$

Последнее неравенство означает, что

$$\left(\frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t}, \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x} \right) \in D^-V(t, x) \neq \emptyset. \quad (3.21)$$

Поскольку множество $D^-V(t, x)$ выпукло, из (3.21) следует (3.20).

Перейдем к доказательству включения

$$D^-V(t, x) \subset \text{co} \left\{ \left(\frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t}, \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x} \right) \mid \alpha \in \mathbf{A}^0(t, x) \right\}. \quad (3.22)$$

Из теоремы 2 следует, что функция $V(\cdot)$ является липшицевой. Поскольку $D^-V(t, x) \neq \emptyset$, субдифференциал $D^-V(t, x)$ совпадает с субдифференциалом Кларка $\partial_C V(t, x)$. В данном случае

$$\partial_C V(t, x) = \text{co} \left\{ (a, s) \mid a = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial V(t_i, x_i)}{\partial t}, s = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial V(t_i, x_i)}{\partial x}; \right. \\ \left. (t_i, x_i) \rightarrow (t, x) \text{ при } i \rightarrow \infty, (t_i, x_i) \notin \Omega \right\}, \quad (3.23)$$

где Ω — множество точек недифференцируемости функции $V(\cdot)$, которое согласно теореме Радемахера имеет меру нуль.

Из теоремы 2 следует, что в точках дифференцируемости функции $V(\cdot)$ справедливо

$$\frac{\partial V(t_i, x_i)}{\partial t} = \frac{\partial \omega(t_i, x_i, \alpha_i)}{\partial t}, \quad \frac{\partial V(t_i, x_i)}{\partial x} = \frac{\omega(t_i, x_i, \alpha_i)}{\partial x}, \quad \alpha_i \in \mathbf{A}^0(t_i, x_i). \quad (3.24)$$

Отображение $(t, x) \rightarrow \mathbf{A}^0(t, x)$ компактнозначно и полунепрерывно сверху по включению. Поэтому если $\alpha_i \in \mathbf{A}^0(t_i, x_i)$ и $(t_i, x_i) \rightarrow (t, x)$, то $\alpha_i \rightarrow \alpha_* \in \mathbf{A}^0(t, x)$, и из (3.23), (3.24) следует

$$\partial_C V(t, x) = \text{co} \left\{ \left(\frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial t}, \frac{\partial \omega(t, x, \alpha)}{\partial x} \right) \mid \alpha \in \mathbf{A}^0(t, x) \right\}. \quad (3.25)$$

Из равенства $D^-V(t, x) = \partial_C V(t, x)$ и (3.25) следует (3.22). \square

Справедливо также следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $(t, x) \in (0, T) \times (-1, 1)$ и $(a, s) \in D^-V(t, x)$. Тогда

$$a - H(x, s) \leq 0.$$

Доказательство. В доказательстве теоремы 3 было отмечено, что $D^-V(t, x) = \partial_C V(t, x)$ и справедливо представление (3.23).

Известно[1], что в точках дифференцируемости функция $V(\cdot)$ оптимального результата задачи **ОСР** удовлетворяет уравнению Беллмана

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} - H \left(x, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.26)$$

Пусть

$$D^*V(t, x) = \left\{ (a, s) \mid a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i, s = \lim_{i \rightarrow \infty} s_i; s_i = \frac{\partial V(t_i, x_i)}{\partial t}, a_i = H(x_i, s_i), \right. \\ \left. (t_i, x_i) \rightarrow (t, x) \text{ при } i \rightarrow \infty, (t_i, x_i) \notin \Omega \right\}, \quad (3.27)$$

где Ω — множество точек недифференцируемости функции $V(\cdot)$.

Учитывая (3.26), из (3.23) получаем представление

$$D^-V(t, x) = \text{co}D^*V(t, x).$$

По теореме Каратеодори (см., например, [2]) любой элемент (a, s) из выпуклого замкнутого множества $D^-V(t, x)$ представим в виде линейной комбинации

$$a = \sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i, \quad s = \sum_{i=1}^3 \lambda_i s_i, \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad (3.28)$$

где $(a_i, s_i) \in D^*V(t, x)$.

Таким образом, в силу выпуклости функции $-H(x, \cdot)$ имеем из (3.28) и (3.27)

$$a - H(x, s) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i - H\left(x, \sum_{i=1}^3 \lambda_i s_i\right) \leq \sum_{i=1}^3 \lambda_i [a_i - H(x, s_i)] = 0.$$

□

Следующее утверждение характеризует поведение отображения $(t, x) \rightarrow D^-V(t, x)$ вблизи множества \overline{G}_T .

Лемма 4. Пусть $(t_*, x_*) \in \overline{G}_T$ и последовательность точек $(t_i, x_i) \in (0, T) \times (-1, 1)$ сходится к (t_*, x_*) при $i \rightarrow \infty$. Пусть $(a_i, s_i) \in D^-V(t_i, x_i)$, $i = \overline{1, \infty}$. Тогда

$$(a_i, s_i) \rightarrow \left(H\left(x_*, \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial x}\right), \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial x} \right) \text{ при } i \rightarrow \infty,$$

где $\varphi(\cdot)$ — терминальная функция, определенная в соответствии с (3.7)–(3.9).

Доказательство. Из (3.19) следует, что

$$(a_i, s_i) \in \text{co} \left\{ \left(\frac{\partial \omega(t_i, x_i, \alpha^i)}{\partial t}, \frac{\partial \omega(t_i, x_i, \alpha^i)}{\partial x} \right) \mid \alpha^i \in \mathbf{A}^0(t_i, x_i) \right\}, \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (3.29)$$

Пусть $i = \overline{1, \infty}$, $\alpha^i \in \mathbf{A}^0(t_i, x_i)$, $\tau_i^\# = \tau^\#(t_i, x_i, \alpha^i)$, где момент $\tau^\#(t, x, \alpha)$ определен согласно (3.16). Покажем, что

$$\tau_i^\# \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

По условию леммы $(t_*, x_*) \in \overline{G}_T$. Предположим сначала, что $x_* = 1$, $0 \leq t_* \leq T$. Тогда из (3.1) следует, что

$$-H_p(x_*, p) > 0 \quad \forall p \in P.$$

Поскольку функция $H_p(\cdot)$ непрерывна, существуют $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ такие, что

$$-H_p(x, p) > r \quad \forall p \in P \quad \forall x > x_* - \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

Пусть $p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0, T]}$. Будем считать также, переходя, если нужно, к подпоследовательности, что $x_i > 1 - \varepsilon$ для всех $i = \overline{1, \infty}$. Тогда из (3.3) и (3.30) получим

$$t_i < t^\sharp(t_i, x_i, p(\cdot)) < \frac{1 - x_i}{r} + t_i \quad \forall i = \overline{1, \infty},$$

откуда следует

$$t^\sharp(t_i, x_i, p(\cdot)) \rightarrow t_* \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \quad (3.31)$$

В силу произвольности $p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0, T]}$ из (3.31) и (3.16) получаем (3.30).

Когда $x_* = -1$, $0 \leq t_* \leq T$, соотношение (3.30) доказывается аналогично.

Рассмотрим случай, когда $-1 < x_* < 1$, $t_* = T$. Пусть $p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0, T]}$. Справедливо неравенство

$$t_i < t^\sharp(t_i, x_i, p(\cdot)) \leq T = t_* \quad \forall i = \overline{1, \infty}. \quad (3.32)$$

Так как $t_i \rightarrow t_*$ при $i \rightarrow \infty$, из (3.32) получаем (3.31), откуда следует (3.30). Итак, (3.30) доказано.

Поскольку $(t_*, x_*) \in \overline{G}_T$, из (3.30) и определения (3.13) функции $\omega(\cdot)$ следует

$$\omega(t_*, x_*, \alpha) = \varphi(t_*, x_*) \quad \forall \alpha \in \mathbf{A} = \mathbf{A}^0(t_*, x_*). \quad (3.33)$$

Таким образом, учитывая доказанные в теореме 2 свойства функции $\omega(\cdot)$, из (3.29) и (3.33) получаем

$$(a_i, s_i) \rightarrow \left(\frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t}, \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial x} \right) \quad \text{при } i \rightarrow \infty. \quad (3.34)$$

Из (3.34) и (3.9) следует

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (a_i, s_i) = \left(H \left(x_*, \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial x} \right), \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial x} \right).$$

□

4. Решение исходной задачи с фазовыми ограничениями

Справедливо следующее утверждение, устанавливающее связь функции цены $V(\cdot)$ в задаче ОСР с обобщенным в смысле определения 2 решением задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 4. *Функция*

$$u(t, x) = V(T - t, x), \quad t \in [0; T], \quad x \in [0, 1] \quad (4.1)$$

является обобщенным непрерывным решением задачи (1.1)–(1.3) в области $\overline{\Pi}_T$.

Доказательство. Поскольку для функции цены $V(\cdot)$ справедливо равенство

$$V(T, x) = u_0(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

из (4.1) следует

$$u(0, x) = u_0(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

т. е. функция $u(\cdot)$ удовлетворяет (1.3).

Покажем, что $u(\cdot)$ является вязкостным решением уравнения (1.1) на множестве Π_T . Пусть $(t, x) \in (0, T) \times (-1, 1)$. Покажем, что выполняются неравенства (1.8), (1.9).

Из (4.1) и теоремы 3 следует

$$\emptyset \neq D^- u(t, x) = \{(-a, s) \mid (a, s) \in D^- V(t, x)\}. \quad (4.2)$$

Таким образом, применяя лемму 3, получим

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad (a, s) \in D^-u(t, x).$$

Итак, неравенство (1.9) доказано.

Из (4.2) следует, что супердифференциал $D^+u(t, x)$ непуст лишь тогда, когда (t, x) является точкой дифференцируемости функции $u(\cdot)$. В этом случае

$$D^+u(t, x) = \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right).$$

Поскольку в точках дифференцируемости функция цены $V(\cdot)$ удовлетворяет уравнению Беллмана (3.26), из (4.1) получаем

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right) = 0.$$

Неравенство (1.8) доказано. Таким образом, функция $u(\cdot)$ является вязкостным решением уравнения (1.1) на множестве Π_T .

Выполнение неравенства (1.13) для точек из множества Γ_T следует из леммы 4.

Итак, функция $u(\cdot)$, определенная соотношением (4.1), является обобщенным решением задачи Коши (1.1)–(1.3) в области Π_T . \square

5. Неединственность обобщенного решения

Построенное выше обобщенное в смысле определения 2 решение задачи (1.1)–(1.3) получено с помощью функции цены вспомогательной задачи **ОСР** оптимального управления. В постановке задачи **ОСР** участвовала терминальная функция $\varphi(\cdot)$, определенная согласно (3.7)–(3.9).

Рассмотрим функцию

$$\psi(t, x) = \begin{cases} u_0(x), & t = T, \quad x \in [-1; 1]; \\ u_0(-1) - \int_t^T u'_0(-1)d\tau, & t \in [0; T], \quad x = -1; \\ u_0(1) - \int_t^T u'_0(1)d\tau, & t \in [0; T], \quad x = 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

такую, что

$$\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x} = u'_0(x), \quad \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = H(x, u'_0(x)), \quad (t, x) \in \overline{G}_T. \quad (5.2)$$

Можно показать, что, если в постановке задачи **ОСР** в качестве терминальной функции вместо $\varphi(\cdot)$ (3.7)–(3.9) использовать функцию $\psi(\cdot)$ (5.1), (5.2), все приведенные выше результаты останутся справедливыми.

Таким образом, обобщенное в смысле определения 2 решение задачи Коши (1.1)–(1.3) существует, но не является единственным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960. 400 с.
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

4. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I // *Мат. сб.* 1966. Т. 70(112), № 3. С. 394–415.
5. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 832 с.
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. М.: Наука, 1961. 392 с.
7. **Меликян А.А.** Граничные сингулярные характеристики уравнения Гамильтона — Якоби // *Прикл. математика и механика.* 2010. Т. 74, № 2. С. 202–215.
8. **Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.** Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во МГУ, 2004. 168 с.
9. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 332 с.
10. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
11. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
12. **Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.** Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhauser, 1997. 570 p.
13. **Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L.** Hamilton–Jacobi equations with state constraints // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1990. Vol. 318, no. 2. P. 643–683.
14. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
15. **Crandall M.G., Newcomb R.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations at the boundary // *Proc. of the Amer. Math. Soc.* 1985. Vol. 94, no. 2. P. 283–290.
16. **Saakian D.B., Rozanova O., Akmetzhanov A.** Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // *Phys. Rev. E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics.* 2008. Vol. 78, no. 4. 041908. 6 p.
17. **Subbotin A.I.** Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhauser, 1995. 312 p.
18. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // *J. Math. Sci.* 2006. Vol. 135, no. 3. P. 2955–3091.

Субботина Нина Николаевна
д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: subb@uran.ru

Поступила 6.12.2010

Шагалова Любовь Геннадьевна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: shag@imm.uran.ru

УДК 517.977

ОЦЕНКА ДЕФЕКТА СТАБИЛЬНОСТИ МНОЖЕСТВА ПОЗИЦИОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ, ПОДВЕРГНУТОГО ДИСКРИМИНАНТНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ¹

В. Н. Ушаков, А. А. Успенский, А. Г. Малёв

В работе изучаются окаймляющие “пути” — множества в пространстве позиций дифференциальной игры сближения-уклонения, которые содержат в себе множество позиционного поглощения. Множество позиционного поглощения доставляет точное (классическое) решение игры. При этом его границе свойственна негладкость, что существенным образом затрудняет построение этого множества. Напротив, множество, отличное от множества позиционного поглощения, может не обеспечивать точное решение игры, но при этом сравнительно просто конструироваться, например, с помощью аналитических формул. Могут быть иные доводы в пользу использования “путей” для разрешения игры. Например, гладкость границы выбранного “пути” позволяет эффективно формировать процедуры управления игроками, обеспечивающие решение игровой задачи в “мягкой” постановке, приводя движение конфликтно управляемой системы в некоторую окрестность целевого множества. В настоящей работе предлагается процедура сглаживания множества по части переменных, основанная на дискриминантных преобразованиях. Исследуется дефект стабильности, вызванный заменой в дифференциальной игре множества позиционного поглощения на множество-“путь” с гладкой по пространственным переменным границей. Приводится оценка для дефекта стабильности конструируемого множества. Результаты исследования иллюстрируются на примере известной дифференциальной игры.

Ключевые слова: игровая задача о сближении, управление, конфликтно управляемая система, стабильный мост, гамильтониан.

V. N. Ushakov, A. A. Uspenskii, A. G. Malev. Estimate of the stability defect for a positional absorption set subjected to discriminant transformations.

We study bordering “paths,” i.e., sets in the position space of an approach–evasion differential game that contain the positional absorption set. The positional absorption set provides an exact (classical) solution of the game. At the same time, its border is nonsmooth, which complicates the construction of this set. On the contrary, a set different from the positional absorption set may not provide an exact solution of the game but can be constructed with relative ease, for example, with the help of analytical formulas. There may be other arguments for using “paths” for solving a game. For example, the smoothness of the boundary of a chosen “path” allows one to efficiently form the players’ control procedures guaranteeing the solution of a game problem in the “soft” setting by taking the motion of a conflict-controlled system to a neighborhood of the target set. In this paper, we propose a procedure for smoothing a set in a part of variables; the procedure is based on discriminant transformations. We study the stability defect caused by changing the positional absorption set of a differential game by a set-“path” with boundary that is smooth in the space variables. An estimate for the stability defect of the constructed set is presented. The results are illustrated by the example of a known differential game.

Keywords: approach game problem, control, conflict-controlled system, stable bridge, Hamiltonian.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию свойства стабильности [1–8]. В ней рассматривается игровая задача о сближении конфликтно управляемой системы с целевым множеством в фиксированный момент времени. Свойство стабильности, введенное в работах [1–5], занимает одно из центральных мест в теории позиционных дифференциальных игр. Этим свойством в пространстве позиций дифференциальной игры обладает стабильный мост — множество, которое обеспечивает успешное завершение игры при надлежащем выборе позиционного управления. Задача точного построения стабильного моста является в общем случае сложной, в

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00587а, 10-01-96006), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-64508.2010.1) и программы Президиума РАН “Математическая теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 09-П-1-1015).

частности, из-за присущей таким множествам негладкости. Вычислительные процедуры построения аппроксимаций стабильного множества, как правило, являются алгоритмически трудоемкими и затратными по ресурсам [9–13]. В связи с этим представляется уместным рассмотрение задачи о построении другого множества, быть может, близкого в некоторой метрике к стабильному множеству и при этом обладающего такими полезными свойствами, как например, гладкость границы. Множество с гладкой границей позволяет более эффективно конструировать процедуры управления, но своеобразной платой за это является невозможность в общем случае решить задачу управления точно, в строгом классическом смысле, из-за возникающего у множества дефекта стабильности [14–16]. Приходится решать задачу управления в мягкой постановке. Под мягкой постановкой понимается такая постановка задачи о сближении, которая предполагает не точное попадание движения конфликтно управляемой системы на целевое множество, а попадание движения в некоторую окрестность целевого множества. В настоящей работе построено отображение, которое трехмерному множеству с кусочно-гладкой границей ставит в соответствие трехмерное множество с гладкой по части переменных границей. В основе предложенной процедуры лежит понятие дискриминантного множества [17]. Отображение позволяет заменить множество с негладкой границей в пространстве “время — фазовое пространство” множеством с гладкой по фазовым переменным границей, причем за счет выбора параметра гладкой регуляризации сделать его сколь угодно близким в хаусдорфовой метрике к исходному множеству. При этом если прообраз отображения является максимальным по вложению стабильным множеством в некоторой дифференциальной игре, то образ этого отображения имеет дефект стабильности, отличный от нуля. В работе получена оценка для дефекта стабильности. В заключительной части работы приведен пример игровой задачи сближения-уклонения, для которой стабильное множество имеет кусочно-гладкую границу. В соответствии с предложенной процедурой гладкой регуляризации осуществляется переход к множеству с почти всюду гладкой границей. Для последнего множества вычисляется приближенно дефект стабильности, показывается его соответствие теоретическим оценкам.

Настоящая работа примыкает к исследованиям [1–33].

1. Постановка задачи о сближении

Рассматривается конфликтно управляемая система, поведение которой на отрезке времени $[t_0, \vartheta]$, $(t_0 < \vartheta < \infty)$, описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, u, v), \\ u &\in P, \quad v \in Q. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x — m -мерный фазовый вектор системы, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, P и Q — компакты в евклидовых пространствах \mathbb{R}^p и \mathbb{R}^q соответственно.

Предполагается, что выполнены условия, стандартные для теории позиционных дифференциальных игр [1–8], обеспечивающие существование и единственность решения дифференциального уравнения (1.1) с начальными условиями $x[t_0] = x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$.

В качестве целевого множества в игре сближения-уклонения “в момент” рассматривается замкнутое множество $M \in \mathbb{R}^m$. Задача сближения заключается в построении процедуры управления первого игрока, распоряжающегося ресурсом P , которая обеспечивает попадание в момент $t = \vartheta$ фазового вектора $x = x[t]$ динамической системы (1.1) на целевое множество M . Решение задачи о сближении требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления первого игрока. Задача, стоящая перед вторым игроком, противоположна задаче первого игрока и заключается в уклонении фазового вектора $x = x[t]$ в момент $t = \vartheta$ от некоторой окрестности целевого множества M . Решение задачи об уклонении требуется обеспечить в классе контрпозиционных процедур управления второго игрока [4, 5]. Сформулированные содержательно задача сближения и задача уклонения составляют позиционную

дифференциальную игру “в момент”. Для этой игры имеет место теорема об альтернативе [5], согласно которой существует такое замкнутое множество $W^{(0)} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, что для всех исходных позиций $(t_*, x^*) \in W^{(0)}$ разрешима задача о сближении и для всех исходных позиций $(t_*, x^*) \in ([t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m) \setminus W^{(0)}$ разрешима задача об уклонении.

Задача построения $W^{(0)}$ является ключевой при решении дифференциальной игры. Знание этого множества позволяет формировать оптимальные для каждого из игроков процедуры управления игроками. Хорошо известно [5, 13], что это множество не является гладким даже для очень простых по своей динамике дифференциальных игр. В настоящей работе предложена процедура сглаживания по части переменных трехмерного множества с кусочно-гладкой границей. Если $W^{(0)}$ является трехмерным множеством с кусочно-гладкой границей, то новое множество W обладает свойством $W^{(0)} \subset W$, при этом $W^{(0)}$ отклоняется в хаусдорфовой метрике от W на изначально определенную величину $\rho > 0$, где ρ — параметр сглаживания.

2. Дискриминантные преобразования

В этом разделе напомним о преобразованиях гладких кривых, применяемых в дифференциальной геометрии [33] и в теории особенностей гладких отображений [17, 32], которые в этой работе распространены на случай кусочно-гладких кривых.

Рассмотрим параметрически заданное отображение $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Phi_\Lambda} \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} t &= t \\ x_1 &= a(\tau, t) \\ x_2 &= b(\tau, t). \end{cases} \quad (2.1)$$

С точки зрения геометрии в случае гладкости вектор-функции $x = r(\tau, t)$, $r(\tau, t) = (a(\tau, t), b(\tau, t))$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2] \subset \mathbb{R}$, $t \in [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}$ и невырожденности якобиана морфизма $(\tau, t) \mapsto r(\tau, t)$ образом отображения Φ_Λ является замкнутая поверхность $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$. Здесь и в дальнейшем скаляр $t \in [t_0, \vartheta]$ трактуется как время. Скаляр τ — параметр, посредством которого описывается сечение поверхности Λ в каждый момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$.

Зафиксируем момент времени $t \in [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}$, построим кривую $\Gamma_t = \{r(\tau, t) : \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}$. Не нарушая общности рассуждений, полагаем, что параметризация кривой Γ_t такова, что ограниченное множество $W(t) \subset \mathbb{R}^2$, границей которого является Γ_t , остается слева при обходе границы.

Рассмотрим семейство окружностей радиуса $\rho > 0$ с центрами на Γ_t

$$(y_1 - a(\tau, t))^2 + (y_2 - b(\tau, t))^2 = \rho^2.$$

Уравнение вида $\Phi(\tau, y) = 0$, где в данном случае $\Phi(\tau, y) = (y_1 - a(\tau, t))^2 + (y_2 - b(\tau, t))^2 - \rho^2$, определяет поверхность в трехмерном пространстве, которая интерпретируется [17] как семейство кривых, параметризованных посредством параметра τ . Нас интересует так называемый видимый контур поверхности — проекция на плоскость переменных y_1, y_2 точек поверхности, в которых касательная плоскость параллельна оси τ . Видимый контур называется дискриминантным множеством (дискриминантом).

Приведем [17] строгое определение.

О п р е д е л е н и е 1. Дискриминантным множеством семейства

$$\Phi(\tau, y) = 0$$

называется множество

$$D_\Phi = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \exists \tau \in [\tau_1, \tau_2] \Rightarrow \Phi(\tau, y) = \frac{\partial \Phi(\tau, y)}{\partial \tau} = 0 \right\}.$$

В случае, когда Γ_t является замкнутой кривой, дискриминантное множество состоит из объединения двух эквидистант $\Gamma_t^{\rho, >}$ и $\Gamma_t^{\rho, <}$, совпадающих в частном случае с огибающими семейства окружностей.

При этом дискриминантная кривая $\Gamma_t^{\rho, >}$ задается параметрически

$$y(\tau, t, \rho) = r(\tau, t) + \rho \|r'_\tau(\tau, t)\|^{-1} \nabla r(\tau, t). \quad (2.2)$$

Здесь $\nabla r(\tau, t) = (b'_\tau(\tau, t), -a'_\tau(\tau, t))$ — вектор, ортогональный вектору $r'_\tau(\tau, t) = (a'_\tau(\tau, t), b'_\tau(\tau, t))$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$. Предполагается, что $r'_\tau(\tau, t) \neq 0$ для всех $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, т. е. Γ_t является регулярной кривой.

В свою очередь дискриминантная кривая $\Gamma_t^{\rho, <}$ задается в векторном виде

$$y(\tau, t, \rho) = r(\tau, t) - \rho \|r'_\tau(\tau, t)\|^{-1} \nabla r(\tau, t). \quad (2.3)$$

Как известно (см. [17, 32]), эквидистанты (параллели) $\Gamma_t^{\rho, >}$ и $\Gamma_t^{\rho, <}$ могут терять гладкость, иметь точки самопересечения. Наличие у кривых точек самопересечения является следствием особенностей геометрии поверхности, определяемой уравнением $\Phi(\tau, y) = 0$, таких, например, особенностей, как “ласточкин хвост”. При определенных условиях кривые $\Gamma_t^{\rho, >}$ и $\Gamma_t^{\rho, <}$ наследуют гладкость исходной кривой Γ_t . Так, гладкость $\Gamma_t^{\rho, >}$ обеспечивается выбором параметра ρ при соблюдении неравенства

$$\min\{1 + \rho\chi(\tau, t) : \tau \in [\tau_1, \tau_2]\} > 0. \quad (2.4)$$

Здесь $\chi = \chi(\tau, t) = \frac{a'_\tau b''_{\tau\tau} - b'_\tau a''_{\tau\tau}}{\|r'_\tau\|^3}$ — кривизна кривой Γ_t в точке $x = (a(\tau, t), b(\tau, t))$.

Соответственно, гладкость кривой $\Gamma_t^{\rho, <}$ обеспечивается выбором параметра ρ , если выполняется неравенство

$$\min\{1 - \rho\chi(\tau, t) : \tau \in [\tau_1, \tau_2]\} > 0. \quad (2.5)$$

З а м е ч а н и е 1. Условия (2.4) и (2.5) позволяют при обосновании гладкости кривых $\Gamma_t^{\rho, >}$ и $\Gamma_t^{\rho, <}$ применить классическую теорему о существовании, единственности и дифференцируемости неявно заданного отображения.

Ослабим условия в части дифференцируемости, налагаемые на вектор-функцию $r(\tau, t) = (a(\tau, t), b(\tau, t))$, и опишем процедуру построения кривой $\Gamma_t^{\rho, >}$ с помощью дискриминантных преобразований вида (2.2).

Будем считать, что для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ Γ_t является замкнутой кривой, т. е. выполняется равенство $r(\tau_1, t) = r(\tau_2, t)$. При этом Γ_t является кусочно-гладкой кривой в следующем смысле. Вектор-функция $r(\tau, t) = (a(\tau, t), b(\tau, t))$ дифференцируема по параметру τ во всех точках отрезка $[\tau_1, \tau_2] \subset \mathbb{R}$, кроме конечной совокупности параметров $\{\tau^{(i)}\}_{i=1}^{i_t} \subset [\tau_1, \tau_2]$, $i_t < +\infty$, в которых, однако, существуют односторонние производные слева $r'_\tau(\tau^{(i)} - 0, t) = (a'_\tau(\tau^{(i)} - 0, t), b'_\tau(\tau^{(i)} - 0, t))$ и справа $r'_\tau(\tau^{(i)} + 0, t) = (a'_\tau(\tau^{(i)} + 0, t), b'_\tau(\tau^{(i)} + 0, t))$, $i = 1, \dots, i_t$. Здесь, как обычно, производная слева и производная справа при $\tau = \tau_*$ определяются как пределы дифференциальных отношений

$$r'_\tau(\tau_* - 0, t) = \lim_{\tau \rightarrow \delta \downarrow 0} \frac{r(\tau_* - \delta, t) - r(\tau_*, t)}{\delta},$$

$$r'_\tau(\tau_* + 0, t) = \lim_{\tau \rightarrow \delta \downarrow 0} \frac{r(\tau_* + \delta, t) - r(\tau_*, t)}{\delta}$$

соответственно. Не нарушая общности рассуждений, полагаем, что совокупность параметров $\{\tau^{(i)}\}_{i=1}^{i_t}$ упорядочена по возрастанию, причем параметризация кривой такова, что концы отрезка $[\tau_1, \tau_2] \subset \mathbb{R}$ не являются точками разрыва производной вектор-функции $r = r(\tau, t)$: $\tau_0 < \tau^{(1)} < \tau^{(2)} < \dots < \tau^{(i_t)} < \tau_1$. На каждом из интервалов $(\tau^{(i)}, \tau^{(i+1)}) \subset [\tau_0, \tau_1]$, $i = 1, \dots, i_t - 1$,

дифференцируемости вектор-функции $r = r(\tau, t)$ построим дугу дискриминантной кривой по формуле (2.2)

$$\Gamma_{t,i}^{\rho,>} = \left\{ r(\tau, t) + \rho \|r'_\tau(\tau, t)\|^{-1} \nabla r(\tau, t) : \tau \in (\tau^{(i)}, \tau^{(i+1)}) \right\}.$$

Дополним эту совокупность линий дугой дискриминантной кривой, которая отвечает “окрестности” начала и конца отрезка параметризации кривой Γ_t

$$\Gamma_{t,i_t}^{\rho,>} = \left\{ y(\tau, t, \rho) \in \mathbb{R}^2 : y(\tau, t, \rho) = r(\tau, t) + \rho \|r'_\tau(\tau, t)\|^{-1} \nabla r(\tau, t), \right. \\ \left. \tau \in (\tau^{(i_t)}, \tau_1] \cup (\tau_0, \tau^{(1)}) \right\}.$$

Перейдем к рассмотрению точек разрыва производной $r = r(\tau, t)$. Зафиксируем параметр $\tau^{(i)}$, $i \in \overline{1, i_t}$. Таким образом, $x(\tau^{(i)}, t) = (a(\tau^{(i)}, t), b(\tau^{(i)}, t))$ — точка негладкости кривой Γ_t . Определим конус внешних нормалей к границе множества $W(t)$, ограниченного кривой Γ_t . В силу наложенных условий в точке $x(\tau^{(i)}, t) = (a(\tau^{(i)}, t), b(\tau^{(i)}, t))$ существуют односторонние касательные векторы

$$r'_\tau(\tau^{(i)} - 0, t) = (a'_\tau(\tau^{(i)} - 0, t), b'_\tau(\tau^{(i)} - 0, t)),$$

$$r'_\tau(\tau^{(i)} + 0, t) = (a'_\tau(\tau^{(i)} + 0, t), b'_\tau(\tau^{(i)} + 0, t)).$$

Найдем отвечающие им ортогональные векторы — односторонние градиенты дискриминантной кривой, вычисленные в точке $x(\tau^{(i)}, t) \in \Gamma_t$

$$\nabla r(\tau^{(i)} - 0, t) = (b'_\tau(\tau^{(i)} - 0, t), -a'_\tau(\tau^{(i)} - 0, t)),$$

$$\nabla r(\tau^{(i)} + 0, t) = (b'_\tau(\tau^{(i)} + 0, t), -a'_\tau(\tau^{(i)} + 0, t)).$$

Векторы $\nabla r(\tau^{(i)} - 0, t)$ и $\nabla r(\tau^{(i)} + 0, t)$ задают крайние направления конуса внешних нормалей

$$L(x(\tau^{(i)}, t)) = \left\{ l \in \mathbb{R}^2 : \langle l, x - x(\tau^{(i)}, t) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in W(t) \right\}$$

к множеству $W(t)$ в точке $x(\tau^{(i)}, t) = (a(\tau^{(i)}, t), b(\tau^{(i)}, t))$. Конус $L(x(\tau^{(i)}, t))$ допускает параметризацию посредством угла $\alpha \in [0, \alpha_i]$, $\alpha_i = \arccos \frac{\langle \nabla r(\tau^{(i)} - 0, t), \nabla r(\tau^{(i)} + 0, t) \rangle}{\|\nabla r(\tau^{(i)} - 0, t)\| \cdot \|\nabla r(\tau^{(i)} + 0, t)\|}$. В дальнейшем полагаем, что сохраняется направленность параметризации, при которой конус $L(x(\tau^{(i)}, t))$ представляет собой коническую оболочку векторов, определяемых поворотом против часовой стрелки:

$$L(x(\tau^{(i)}, t)) = \text{con} \{ \Pi(\alpha) \nabla r(\tau^{(i)} - 0, t) : \alpha \in [0, \alpha_i] \}.$$

Здесь $\Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ — матрица поворота против часовой стрелки. Тогда выполняются равенства, связывающие крайние (направляющие) векторы конуса $L(x(\tau^{(i)}, t))$:

$$\Pi(0) \nabla r(\tau^{(i)} - 0, t) = \nabla r(\tau^{(i)} - 0, t),$$

$$\Pi(\alpha_i) \nabla r(\tau^{(i)} - 0, t) = \nabla r(\tau^{(i)} + 0, t).$$

Теперь каждому значению параметра из совокупности $\{\tau^{(i)}\}_{i=1}^{i_t}$ поставим в соответствие дугу окружности

$$\Gamma_{t,i}^{\rho,>}(\alpha) = \left\{ y(\tau^{(i)}, t, \rho, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : y(\tau^{(i)}, t, \rho, \alpha) = x(\tau^{(i)}, t) \right\}$$

$$+ \rho \|\nabla r(\tau^{(i)} - 0, t)\|^{-1} \Pi(\alpha) \nabla r(\tau^{(i)} - 0, t), \alpha \in [0, \alpha_i] \}. \quad (2.6)$$

Объединим построенные дуги дискриминантных кривых с дугами окружностей, приняв

$$\Gamma_t^{\rho, >} = \bigcup_{i=1}^{i_t} \Gamma_{t,i}^{\rho, >}(\alpha) \cup \Gamma_{t,i}^{\rho, >}(\tau).$$

В силу построений выполняются предельные соотношения, выражающие условия непрерывного сочленения дуг дискриминантных кривых и дуг окружностей:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \tau^{(i)} - 0} y(\tau, t, \rho) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} y(\tau^{(i)}, t, \rho, \alpha), \\ \lim_{\tau \rightarrow \tau^{(i)} + 0} y(\tau, t, \rho) &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_i - 0} y(\tau^{(i)}, t, \rho, \alpha), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$i = 1, \dots, i_t.$$

Подводя итог построениям, отметим, что кривая $\Gamma_t^{\rho, >}$ является либо дискриминантной кривой, либо кривой, “собранный” из конечного числа дуг дискриминантных кривых и дуг окружностей. В обоих случаях построенная означенным образом кривая $\Gamma_t^{\rho, >}$ отстоит от кривой Γ_t на расстояние $\rho > 0$ и является по отношению к Γ_t эквидистантой (параллелью) в классическом (см. [17, 32, 33]) или обобщенном (согласно выше приведенным конструкциям) смысле.

Укажем еще одну интерпретацию кривых вида $\Gamma_t^{\rho, >}$, $\rho > 0$. Эти линии являются плоскими волновыми фронтами в изотропной среде, или, что то же самое, сечениями множества управляемости в задаче быстрого действия с круговой индикатрисой (см. [18–20]).

В дальнейшем нас будут интересовать свойства поверхности

$$\Lambda^{\rho, >} = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} \Gamma_t^{\rho, >}.$$

3. Регуляризирующее отображение

Исходим из предпосылки, что уравнение

$$\varphi^{(0)}(t, x_1, x_2) = 0$$

задает замкнутую поверхность Λ , причем функция $\varphi^{(0)}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что множество решений этого уравнения допускает параметризацию

$$\Lambda = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2: x = r(\tau, t), \tau \in [\tau_1, \tau_2], t \in [t_0, \vartheta]\}. \quad (3.1)$$

При этом поверхность Λ является кусочно-гладкой в смысле приведенных ниже условий.

Итак, в дальнейшем предполагаем, что вектор-функция $r(\tau, t) = (a(\tau, t), b(\tau, t))$ удовлетворяет следующим условиям У1–У8.

У1) Для всех $t \in [t_0, \vartheta]$ выполняется равенство $r(\tau_1, t) = r(\tau_2, t)$, т. е. $\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^2: x = r(\tau, t), \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, являются замкнутыми кривыми.

У2) Параметризация кривой Γ_t такова, что множество $W(t)$, границей которого является Γ_t , остается слева при обходе границы.

У3) Для всех $t \in [t_0, \vartheta]$ множество $\Xi(t) = \{\tau_* \in [\tau_1, \tau_2]: \text{не существует } r'_\tau(\tau_*, t) = (a'(\tau_*, t), b'(\tau_*, t))\}$ конечно. При этом существуют односторонние конечные производные слева $r'_\tau(\tau_* - 0, t) = (a'(\tau_* - 0, t), b'(\tau_* - 0, t))$ и справа $r'_\tau(\tau_* + 0, t) = (a'(\tau_* + 0, t), b'(\tau_* + 0, t))$, $\tau_* \in \Xi(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Обозначим через $\Omega = \{(\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] : \tau \in \Xi(t)\}$ множество точек, в которых вектор-функция $r(\tau, t) = (a(\tau, t), b(\tau, t))$ недифференцируема.

У4) Для всех точек $(\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \setminus \Omega$ вектор-функция $r(\tau, t) = (a(\tau, t), b(\tau, t))$ является дважды непрерывно дифференцируемой по τ .

У5) Для всех точек $(\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \setminus \Omega$ касательный вектор $r'_\tau(\tau, t) = (a'_\tau(\tau, t), b'_\tau(\tau, t))$ таков, что $r'_\tau(\tau, t) \neq 0 \in \mathbb{R}^2$, т. е. кривые $\Gamma_t, t \in [t_0, \vartheta]$, являются регулярными кривыми.

У6) Для всех точек $(\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \setminus \Omega$ существует непрерывная производная $r'_t(\tau, t) = (a'_t(\tau, t), b'_t(\tau, t))$.

У7) Для всех точек $(\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \setminus \Omega$ касательный вектор $r'_\tau(\tau, t) = (a'_\tau(\tau, t), b'_\tau(\tau, t))$ дифференцируем по времени, т. е. существует вектор $r''_{t\tau} = (a''_{t\tau}, b''_{t\tau})$ из смешанных производных $a''_{t\tau} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a}{\partial \tau} \right)$ и $b''_{t\tau} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial b}{\partial \tau} \right)$.

У8) В точках $(a(\tau, t), b(\tau, t)) \in \Gamma_t, (\tau, t) \in \Omega$, сохраняется направленность параметризации кривой $\Gamma_t^{\rho, >}, \rho > 0$. Обход соответствующей дуги окружности кривой $\Gamma_t^{\rho, >}$ осуществляется против часовой стрелки.

З а м е ч а н и е 2. Несмотря на громоздкость и кажущуюся искусственность условий У1–У8, этот набор условий выполняется для определенных классов дифференциальных игр. Примеры поверхностей, ограничивающих множества позиционного поглощения, для которых выполняются условия У1–У8, приведены в работе [13], в которой построено точное решение одной нерегулярной дифференциальной игры на плоскости.

Далее сосредоточимся на построении поверхности, склеенной с помощью дискриминантных кривых только одного вида, а именно, кривых вида $\Gamma_t^{\rho, >}$. Величину $\rho > 0$ будем называть параметром гладкой регуляризации. Будем полагать, что выбор параметра $\rho > 0$ осуществляется при соблюдении условия, обобщающего неравенство (2.4)

$$\inf\{1 + \rho\chi(\tau, t) : (\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \setminus \Omega\} > 0. \quad (3.2)$$

З а м е ч а н и е 3. Условие (3.2) заведомо выполняется, например, для поверхностей, склеенных из замкнутых кривых, ограничивающих выпуклые множества, поскольку в этом случае кривизна кривых (там, где она определена) неотрицательная.

Построим отображение

$$\Phi_\rho : [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

регуляризующее поверхность Λ , а именно, отображение, ставящее ей в соответствие гладкую по части переменных поверхность $\Lambda^{\rho, >}$, причем отстоящую в хаусдорфовой метрике от Λ на величину, не большую ρ .

Для этого зафиксируем значение параметра $\rho > 0$ и будем считать его неизменным для всех $t \in [t_0, \vartheta]$. Далее выберем произвольно момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$. Определим отображение Φ_ρ , а вместе с тем и поверхность $\Lambda^{\rho, >}$, в зависимости от дифференциальных свойств исходной поверхности Λ .

Здесь возможны д в а с л у ч а я:

С л у ч а й 1 состоит в том, что $(\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \setminus \Omega$, т. е. точка $(t, x) = (t, r(\tau, t)) \in \mathbb{R}^3$ является точкой гладкости поверхности Λ . Тогда примем

$$\Phi_\rho(\tau, t) = (t, y),$$

где $y = y(\tau, t, \rho) \in \mathbb{R}^2$ определяется как точка дискриминантной кривой по формуле (2.2)

$$y(\tau, t, \rho) = r(\tau, t) + \rho \|r'_\tau(\tau, t)\|^{-1} \nabla \varphi^{(0)}(t, x).$$

Здесь $\nabla\varphi^{(0)}(t, x) = (b'_\tau(\tau, t), -a'_\tau(\tau, t))$ — градиент (нормаль) к кривой $\Gamma_t = \Lambda(t)$, $\Lambda(t) = \{x \in \mathbb{R}^2: (t, x) \in \Lambda\}$ — сечение поверхности Λ в фиксированный момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$. Заметим, что $\|r'_\tau(\tau, t)\| = \|\nabla\varphi^{(0)}(t, x)\|$, и в силу условия регулярности У5 $\|\nabla\varphi^{(0)}(t, x)\| \neq 0$. Стало быть,

$$y(\tau, t, \rho) = r(\tau, t) + \rho\|\nabla\varphi^{(0)}(t, x)\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}(t, x). \quad (3.3)$$

Случай 1 рассмотрен.

С л у ч а й 2 заключается в том, что $(\tau_*, t) \in \Omega$, т. е. точка $(t, x) = (t, r(\tau_*, t)) \in \mathbb{R}^3$ является точкой непрерывной, но не гладкой склейки поверхности Λ .

Примем

$$\Phi_\rho(\tau_*, t) = (t, y),$$

где $y = y(\tau_*, t, \rho, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ и согласно формуле (2.6) при $\tau^{(i)} = \tau_*$ и $\nabla r(\tau^{(i)} - 0, t) = \nabla\varphi_-^{(0)}(t, x(\tau_*, t))$

$$y(\tau_*, t, \rho, \alpha) = x(\tau_*, t) + \rho\|\nabla\varphi_-^{(0)}(t, x(\tau_*, t))\|^{-1}\Pi(\alpha)\nabla\varphi_-^{(0)}(t, x(\tau_*, t)). \quad (3.4)$$

Здесь угол $\alpha \in [0, \alpha_*]$, $\alpha_* = \arccos \frac{\langle \nabla\phi_-^{(0)}(t, x(\tau_*, t)), \nabla\phi_+^{(0)}(t, x(\tau_*, t)) \rangle}{\|\nabla\phi_-^{(0)}(t, x(\tau_*, t))\| \cdot \|\nabla\phi_+^{(0)}(t, x(\tau_*, t))\|}$. Напомним, что формула (3.4) задает дугу окружности. Существование одностороннего (слева от точки $x = x(\tau_*, t)$) градиента $\nabla\varphi_-^{(0)}(t, x(\tau_*, t))$ имеет место в силу условия У3.

З а м е ч а н и е 4. Если $\tau_* \in \Xi(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, т. е. (τ_*, ϑ) — прообраз точки $(t, x(\tau_*, t)) = (t, (a(\tau_*, t), b(\tau_*, t)))$ негладкости поверхности Λ , то по построению поверхности $\Lambda^{\rho, >}$ крайние точки $y = y(\tau_*, t, \rho, 0)$ и $y = y(\tau_*, t, \rho, \alpha_*)$ дуги окружности (3.4) являются точками сочленения этой дуги окружности и дуги соответствующей дискриминантной кривой и для них выполняются условия непрерывного сочленения дуг дискриминантных кривых и окружностей (см. (2.7)):

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \tau_* - 0} y(\tau, t, \rho) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0 + 0} y(\tau_*, t, \rho, \alpha), \\ \lim_{\tau \rightarrow \tau_* + 0} y(\tau, t, \rho) &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_* - 0} y(\tau_*, t, \rho, \alpha). \end{aligned}$$

При этом каждая кривая вида $\Lambda^{\rho, >}(t)$ является либо дискриминантной кривой, либо кривой, “собранный” (в силу условия У3) из конечного числа дуг дискриминантных кривых и дуг окружностей. В обоих случаях таким образом построенная кривая $\Lambda^{\rho, >}(t)$ отстоит от кривой $\Lambda(t)$ на расстояние $\rho > 0$ и является по отношению к $\Lambda(t)$ эквидистантой (иначе параллелью) (см. [17, 32, 33]). Случай 2 рассмотрен.

Непосредственно из построения поверхности $\Lambda^{\rho, >}$ следует, что она отклоняется в хаусдорфовой метрике от поверхности Λ на величину, не превосходящую параметр ρ . Вместе с тем формулы (3.3) и (3.4) определяют отображение $\Phi_\rho: [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ для всех точек области рассмотрения.

З а м е ч а н и е 5. Стоит обратить внимание на то, что отображение $\Phi_\rho: [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ по способу построения является композицией двух отображений: внутренним является отображение Φ_Λ прямоугольника $[\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta]$ в замкнутую поверхность Λ , а внешним — отображение $\Phi_{\Lambda, \rho}$ поверхности Λ в поверхность $\Lambda^{\rho, >}$

$$\Phi_\rho: [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \xrightarrow{\Phi_\Lambda} \Lambda \xrightarrow{\Phi_{\Lambda, \rho}} \Lambda^{\rho, >}.$$

Нетрудно показать, что имеет место

Теорема 1. Если параметр ρ подчинен неравенству (3.2), а вектор-функция $r(\tau, t) = (a(\tau, t), b(\tau, t))$ удовлетворяет условиям У1–У8, то поверхность $\Lambda^{\rho, >}$ — образ отображения $\Phi_\rho: [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — является гладкой в точках, отвечающих параметрам $(\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \setminus \Omega$. Кроме того, поверхность $\Lambda^{\rho, >}$ имеет гладкие сечения $\Lambda^{\rho, >}(t)$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$.

4. Оценка индекса стабильности для точек дискриминантных дуг, принадлежащих границе окаймляющего “пути”

Вернемся к дифференциальной игре с динамикой (1.1) и рассмотрим отвечающее ей уравнение в частных производных первого порядка типа Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H(t, x, \nabla \varphi) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь $\nabla \varphi = \nabla \varphi(t, x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t, x) \right)$ — градиент функции $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ по переменным $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $H: [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ — гамильтониан динамической системы (1.1), определяемый по формуле

$$H(t, x, l) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle.$$

Гамильтониан является положительно-однородной функцией по импульсным переменным

$$H(t, x, \lambda l) = \lambda H(t, x, l) \text{ для любых } \lambda > 0, \quad l \in \mathbb{R}^2.$$

Функция цены $\varphi = \varphi^{(0)}(t, x): [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дифференциальной игры сближения-уклонения с замкнутой целью $M \subset \mathbb{R}^2$ при соблюдении стандартных условий для теории позиционных дифференциальных игр [1–8] является минимаксным (обобщенным) решением уравнения (4.1) [27]. К стандартным условиям, в частности, относится условие Липшица для гамильтониана по фазовым переменным:

для любой ограниченной области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$ и любого вектора l из единичной сферы $S = \{l \in \mathbb{R}^2: \|l\| = 1\}$ существует постоянная $\lambda_H = \lambda_H(D) \in (0, +\infty)$ такая, что

$$\|H(t, x, l) - H(t, y, l)\| < \lambda_H \|x - y\|. \quad (4.2)$$

Для последующего изложения будет удобна операторная форма записи дифференциального уравнения (4.1)

$$LD\varphi = 0. \quad (4.3)$$

Здесь, естественно, $LD\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + H(t, x, \nabla \varphi)$. Стоит заметить, что дифференциальный оператор LD является положительно-однородным, а именно, для любого вектора $l \in \mathbb{R}^3$, для любого положительного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$LD(\lambda l) = \lambda LDl.$$

Рассмотрим множество уровня функции цены $\varphi = \varphi^{(0)}(t, x): [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, а именно, решение уравнения

$$\varphi^{(0)}(t, x_1, x_2) = 0. \quad (4.4)$$

Как и ранее, исходим из предположения, что уравнение $\varphi^{(0)}(t, x_1, x_2) = 0$ задает замкнутую поверхность Λ , причем функция $\varphi^{(0)}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что множество решений уравнения (4.4) допускает параметризацию

$$\Lambda = \{(t, r(\tau, t)): \tau \in [\tau_1, \tau_2], t \in [t_0, \vartheta]\}.$$

При этом вектор-функция $x = r(\tau, t)$ удовлетворяет набору условий У1–У8 разд. 3 и неравенству (3.2).

Выберем параметр регуляризации $\rho > 0$ и построим поверхность $\Lambda^{\rho, >}$ как образ отображения Φ_ρ , описанного в разд. 3:

$$\Phi_\rho: [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \xrightarrow{\Phi_\Lambda} \Lambda \xrightarrow{\Phi_{\Lambda\rho}} \Lambda^{\rho, >}.$$

Тем самым мы находимся в условиях теоремы 1.

Далее, построим замкнутую кривую $\Gamma_\vartheta = \{x \in \mathbb{R}^2: x = r(\vartheta, t), \tau \in [\tau_1, \tau_2]\}$. Не нарушая общности рассуждений, полагаем, что параметризация кривой Γ_ϑ такова, что ограниченное множество $W(\vartheta) \subset \mathbb{R}^2$, границей которого является Γ_ϑ , остается слева при обходе границы. Это множество назовем целью в игре с динамикой (1.1), т. е.

$$M = W(\vartheta). \quad (4.5)$$

Тогда ограниченное множество $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$, границей которого выступает поверхность Λ , является максимальным по вложению стабильным мостом, решающим в рамках дифференциальной игры задачу сближения с целевым множеством (4.5). В свою очередь Λ является интегральной поверхностью для уравнения (4.3) в том смысле, что функция $\varphi = \varphi^{(0)}(t, x): [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ почти всюду удовлетворяет уравнению (4.3).

Наряду со стабильным мостом $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$ рассмотрим множество $W^\rho \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$, которое построено с помощью дискриминантных преобразований над максимальным по вложению стабильным мостом W . Границей ∂W^ρ множества W^ρ выступает поверхность $\Lambda^{\rho, >}$. По построению $W \subset W^\rho$ для всех возможных значений параметра $\rho > 0$. Таким образом, W^ρ — окаймляющий “путь” в игровой задаче сближения с динамикой (1.1) и целью (4.5).

Напомним ранее введенное понятие индекса стабильности — числовой величины, характеризующей в зависимости от своего знака и абсолютной величины локальную меру стабильности или же неустойчивости рассматриваемого множества. Для этого рассмотрим уравнение

$$\varphi(t, y) = 0. \quad (4.6)$$

Пусть $(t, y) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$ — точка, в которой локально определенное решение уравнения (4.6) дифференцируемо. Следуя работе [16], введем

О п р е д е л е н и е 2. Величину

$$k(t, y) = \|\nabla\varphi(t, y)\|^{-1} LD\varphi(t, y)$$

будем называть индексом стабильности решения уравнения (4.6) в точке $(t, y) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$ дифференцируемости функции $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Приведем оценку для индекса стабильности точек множества W^ρ .

Пусть по-прежнему $\Omega \subset [\tau_1, \tau_2] \times (t_0, \vartheta)$ — множество точек $(\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times (t_0, \vartheta)$, в которых вектор-функция $r(\tau, t) = (a(\tau, t), b(\tau, t))$ недифференцируема. Выберем $(\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times [t_0, \vartheta] \setminus \Omega$. Стало быть, $(t, x) = (t, x(\tau, t))$ — точка гладкости поверхности Λ . Для краткости изложения результата примем следующие обозначения:

- $\nabla\varphi^{(0)} = \nabla\varphi^{(0)}(t, x)$ — градиент к сечению $\Lambda(t)$ поверхности Λ , вычисленный в точке $x = x(\tau, t)$;
- $\chi = \chi(\tau, t)$ — кривизна сечения $\Lambda(t)$ поверхности Λ в точке $x = x(\tau, t)$;
- $\varphi^{(\rho, >)}(t, y) = 0$ — уравнение поверхности $\Lambda^{\rho, >}$, которая определяется с помощью дискриминантных преобразований по правилу

$$\begin{cases} t = t, \\ y = x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1} \nabla\varphi^{(0)}; \end{cases} \quad (4.7)$$

- $\nabla\varphi^{(\rho, >)} = \nabla\varphi^{(\rho, >)}(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1} \nabla\varphi^{(0)})$ — градиент к сечению $\Lambda^{\rho, >}(t)$ поверхности $\Lambda^{\rho, >}$, вычисленный в точке $y = x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1} \nabla\varphi^{(0)}$.

Теорема 2. Если множество Λ решений уравнения (4.4) является интегральной поверхностью для уравнения типа Гамильтона — Якоби (4.3), параметр гладкой регуляризации ρ этой поверхности подчинен неравенству (3.2), при этом вектор-функция $r = r(\tau, t)$ удовлетворяет набору условий У1–У8, то индекс стабильности $k(t, y)$ окаймляющего “пути” W^ρ ,

вычисленный в точке $(t, y) = (t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}) \in \Lambda^{\rho, >}$, где $(t, x) = (t, r(\tau, t))$ — точка гладкости Λ , удовлетворяет оценке

$$k(t, y) \leq (1 + \rho\chi)\lambda_H\rho. \quad (4.8)$$

Доказательство. Выберем $(\tau, t) \in [\tau_1, \tau_2] \times (t_0, \vartheta) \setminus \Omega$. Построим согласно (2.1) $(t, x) = (t, r(\tau, t))$ — точку гладкости интегральной поверхности Λ

$$LD\varphi^{(0)}(t, x) = 0.$$

Следом за этим, зафиксировав удовлетворяющее неравенству (3.2) допустимое значение параметра $\rho > 0$, с помощью дискриминантных преобразований (4.7) найдем $(t, y) = (t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)})$ — точку гладкости поверхности $\Lambda^{\rho, >}$, определяемой уравнением

$$\varphi^{(\rho, >)}(t, y) = 0. \quad (4.9)$$

Воздействуем дифференциальным оператором LD на (4.9), последовательно воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned} \nabla\varphi^{(\rho, >)}(t, y) &= (1 + \rho\chi)\nabla\varphi^{(0)}, \\ \frac{\partial\varphi^{(\rho, >)}}{\partial t} &= (1 + \rho\chi) \begin{vmatrix} a'_\tau & b'_\tau \\ a'_t & b'_t \end{vmatrix} = -(1 + \rho\chi)\langle \nabla\varphi^{(0)}, r'_t \rangle, \end{aligned}$$

а также свойством положительной однородности дифференциального оператора LD

$$\begin{aligned} &LD\varphi^{(\rho, >)}(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}) \\ &= \frac{\partial\varphi^{(\rho, >)}}{\partial t}(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}) + H(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}, \nabla\varphi^{(\rho, >)}) \\ &= (1 + \rho\chi) \begin{vmatrix} a'_\tau & b'_\tau \\ a'_t & b'_t \end{vmatrix} + H(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}, (1 + \rho\chi)\nabla\varphi^{(0)}) \\ &= (1 + \rho\chi) \left(\begin{vmatrix} a'_\tau & b'_\tau \\ a'_t & b'_t \end{vmatrix} + H(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}, \nabla\varphi^{(0)}) \right) \\ &= (1 + \rho\chi) \left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial t} + H(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}, \nabla\varphi^{(0)}) \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$LD\varphi^{(\rho, >)}(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}) = (1 + \rho\chi) \left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial t} + H(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}, \nabla\varphi^{(0)}) \right). \quad (4.10)$$

Далее осуществим в (4.10) алгебраическое преобразование

$$\begin{aligned} &LD\varphi^{(\rho, >)}(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}) \\ &= (1 + \rho\chi) \left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial t} + H(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}, \nabla\varphi^{(0)}) \right) \\ &= (1 + \rho\chi) \left(\frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial t} + H(t, x, \nabla\varphi^{(0)}) - H(t, x, \nabla\varphi^{(0)}) \right. \\ &\quad \left. + H(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)}, \nabla\varphi^{(0)}) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $LD\varphi^{(0)}(t, x) = \partial\varphi^{(0)}/\partial t + H(t, x, \nabla\varphi^{(0)}) = 0$, то, продолжив цепочку равенств, имеем

$$LD\varphi^{(\rho, >)}(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1}\nabla\varphi^{(0)})$$

$$= (1 + \rho\chi) \left(H(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1} \nabla\varphi^{(0)}, \nabla\varphi^{(0)}) - H(t, x, \nabla\varphi^{(0)}) \right). \quad (4.11)$$

Отсюда, приняв во внимание условие Липшица (4.2) гамильтониана по фазовым переменным, получим оценку сверху для индекса стабильности

$$k(t, y) = LD\varphi^{(\rho, >)}(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1} \nabla\varphi^{(0)}) \leq (1 + \rho\chi)\lambda_H\rho.$$

Следствие 1. Если в условиях теоремы 2 гамильтониан не зависит от фазовой переменной, т. е. имеет вид

$$H = H(t, l), \quad (4.12)$$

то индекс стабильности окаймляющего “пути” W^ρ , вычисленный в точке $(t, y) = (t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1} \nabla\varphi^{(0)}) \in \Lambda^{\rho, >}$, равен нулю:

$$k(t, y) = 0.$$

Доказательство. Действительно, воспользовавшись равенством (4.11) и приняв во внимание структуру гамильтониана (4.12), получим

$$k(t, y) = LD\varphi^{(\rho, >)}(t, x + \rho \|\nabla\varphi^{(0)}\|^{-1} \nabla\varphi^{(0)}) = (1 + \rho\chi)(H(t, \nabla\varphi^{(0)}) - H(t, \nabla\varphi^{(0)})) = 0.$$

Следствие теоремы 2 выражает инвариантность дискриминантных преобразований относительно дифференциального оператора LD с гамильтонианом вида (4.12). Означает это следующее. Поверхность $\Lambda^{\rho, >}$, полученная из интегральной поверхности Λ дифференциального уравнения (4.3) с помощью дискриминантных преобразований (4.7) при соблюдении ограничения (3.2) на параметр гладкой регуляризации $\rho > 0$, также является интегральной поверхностью уравнения (4.3).

Следствие теоремы 2 полезно при исследовании дифференциальных игр с так называемыми простыми движениями.

В заключение раздела приведем определения величин, характеризующих нестабильность окаймляющего “пути”. Напомним [14–16], что величина

$$\varepsilon(t, y) = \max\{k(t, y), 0\}$$

называется дефектом стабильности множества W^* в точке гладкости $(t, y) \in \partial W^*$ границы этого множества, $t \in [t_0, \vartheta)$. В случае, когда $W^* = W^\rho$, где W^ρ — окаймляющий “путь”, $\varepsilon(t, y) = k(t, y)$. Величину

$$\varepsilon(t) = \sup\{\varepsilon(t, y) : (t, y) \in \Lambda^{\rho, >}(t)\} \quad (4.13)$$

будем называть дефектом стабильности окаймляющего “пути” в момент $t \in [t_0, \vartheta)$. В формуле (4.5) вычисление дефекта стабильности $\varepsilon(t, y)$ проводится в точках $(t, y) \in \Lambda^{\rho, >}(t)$ гладкости поверхности $\Lambda^{\rho, >}$.

5. Численное моделирование дефекта стабильности окаймляющего “пути” для линейной дифференциальной игры

В качестве примера рассмотрим дифференциальную игру с динамикой

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + v, \\ \frac{dx_2}{dt} = u \end{cases} \quad (5.1)$$

на отрезке времени $[t_0, \vartheta] = [0, 2]$. Скалярные управления игроков стеснены ограничениями $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$. Терминальный функционал платы задан равенством

$$\sigma(x(\cdot)) = \max\{x_1(2), x_2(2)\}. \quad (5.2)$$

В работе [13] построена функция цены $\varphi = \varphi^{(0)}(t, x): [0, 2] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дифференциальной игры (5.1), (5.2), которая является склейкой конечного числа явно и неявно заданных гладких функций. При этом $\varphi = \varphi^{(0)}(t, x)$ является минимаксным решением [27] уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right| - \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right| = 0. \quad (5.3)$$

Множество уровня $W = \{(t, x) \in [0, 2] \times \mathbb{R}^2: \varphi^{(0)}(t, x) \leq c\}$, $c \in \mathbb{R}$, этой функции является максимальным по вложению стабильным мостом, разрешающим задачу сближения в дифференциальной игре (5.1) с целевым множеством

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2: \sigma(x) \leq c\}. \quad (5.4)$$

Опишем стабильный мост W и его границу $\partial W = \Lambda$, являющуюся интегральной поверхностью уравнения (5.3), в аналитическом виде. Следуя [13], рассмотрим функции, задающие в плоскости переменных x_1, x_2 границу $\Lambda(t)$ сечения $W(t)$ стабильного моста в фиксированный момент времени $t \in (0, 2)$:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= (2-t)(1-0.5(2-t)), \\ \varphi_1(t, x_1, x_2) &= x_1 + (2-t)x_2 + \mu(t), \\ \varphi_2(t, x_1, x_2) &= x_2 - (2-t), \\ \varphi_3(t, x_1, x_2) &= -x_1 - (2-t)x_2 + \mu(t), \\ \varphi_4(t, x_1, x_2) &= -x_2 - (2-t), \\ \varphi_5(t, x_1, x_2) &= (2 - \varphi_2) - 2(1 - \varphi_1 - \varphi_2)^{1/2}, \\ \varphi_6(t, x_1, x_2) &= (2 - \varphi_4) - 2(1 - \varphi_3 - \varphi_4)^{1/2}. \end{aligned}$$

В дальнейшем полагаем, что уровень $c \geq 2$. В каждый момент времени $t \in (0, 2)$ кривая $\Lambda(t)$ является склейкой шести гладких дуг $\Gamma_i(t)$, определяемых уравнениями $\varphi_i(t, x_1, x_2) = c$, $i = 1, \dots, 6$. При этом координаты точек склейки как функции времени таковы:

$$\begin{aligned} A_1: & \begin{cases} x_1 = c - (2-t)(c + (2-t)) - \mu(t), \\ x_2 = c + (2-t), \end{cases} \\ B_1: & \begin{cases} x_1 = c - (2-t)(-c + (2-t)) - \mu(t), \\ x_2 = -c + (2-t), \end{cases} \\ C_1: & \begin{cases} x_1 = c - (2-t)(-c - (2-t)) - \mu(t) - (2-t)^2, \\ x_2 = -c - (2-t). \end{cases} \end{aligned}$$

Точки A'_1, B'_1, C'_1 симметричны относительно начала координат плоскости переменных x_1, x_2 точкам A_1, B_1, C_1 соответственно. Кривая $\Gamma_1(t)$ соединяет точки A_1 и B_1 , кривая $\Gamma_2(t)$ — точки C'_1 и A_1 , кривая $\Gamma_3(t)$ — точки A'_1 и B'_1 , кривая $\Gamma_4(t)$ — точки C_1 и A'_1 , кривая $\Gamma_5(t)$ — точки B_1 и C_1 , кривая $\Gamma_6(t)$ — точки B'_1 и C'_1 .

Заметим, что в каждый момент времени t сечение $W(t)$ стабильного моста W является выпуклым множеством с кусочно-гладкой границей. При этом уравнение (4.4) $\varphi^{(0)}(t, x) = 0$ для интегральной поверхности Λ дифференциального уравнения типа Гамильтона — Якоби (5.3) имеет кусочно-гладкую структуру с правой частью

$$\varphi^{(0)}(t, x) = \varphi_i^{(0)}(t, x) - c, \text{ когда } x \in \Gamma_i(t), \quad i \in \overline{1, 6}, \quad t \in (0, 2).$$

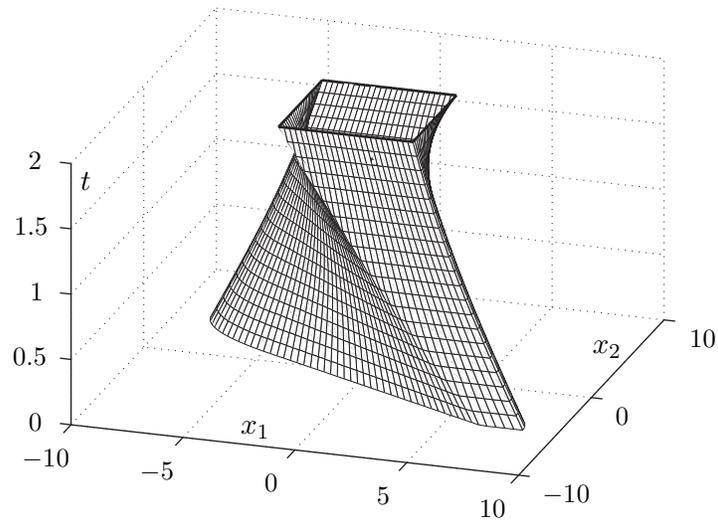


Рис. 1.

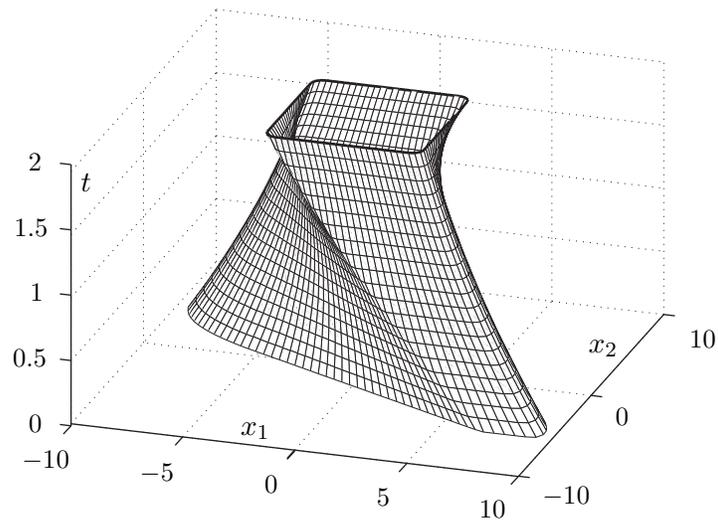


Рис. 2.

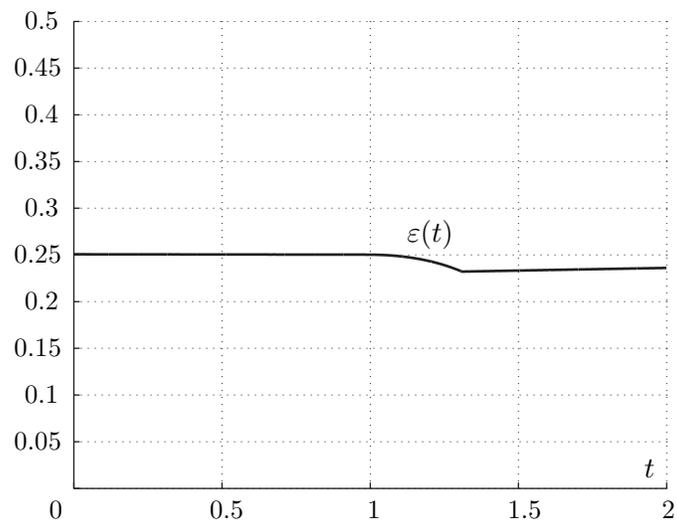


Рис. 3.

Завершив описание стабильного моста W , перейдем к построению с помощью дискриминантных преобразований окаймляющего “пути” W^ρ с границей $\partial W^\rho = \Lambda^{\rho, >}$. Зададимся параметром гладкой регуляризации $\rho > 0$, который в силу выпуклости множеств $W(t)$, $t \in (0, 2)$, может быть любым (см. замечание 3).

Здесь поверхность $\Lambda^{\rho, >} = \bigcup_{t \in (0, 2)} \Gamma_t^{\rho, >}$, где $\Gamma_t^{\rho, >}$, $t \in (0, 2)$, согласно теореме 1 являются гладкими кривыми. В рассматриваемом случае кривая $\Gamma_t^{\rho, >}$ составлена из десяти гладких выпуклых дуг

$$\Gamma_t^{\rho, >} = \{\tilde{\Gamma}_1(t), \dots, \tilde{\Gamma}_6(t)\} \cup \{\tilde{\Gamma}_{12}(t), \tilde{\Gamma}_{26}(t), \tilde{\Gamma}_{34}(t), \tilde{\Gamma}_{45}(t)\}.$$

При этом $\tilde{\Gamma}_1(t), \dots, \tilde{\Gamma}_6(t)$ — это дуги дискриминантных кривых, построенные по формуле (2.2). Кривые $\tilde{\Gamma}_{12}(t), \tilde{\Gamma}_{26}(t), \tilde{\Gamma}_{34}(t), \tilde{\Gamma}_{45}(t)$ — дуги окружности радиуса $\rho > 0$. Здесь двойной индекс у дуги окружности указывает номера соответствующей пары огибающих из набора $\{\tilde{\Gamma}_1(t), \dots, \tilde{\Gamma}_6(t)\}$, которые эта дуга окружности соединяет.

В рамках настоящего исследования было осуществлено численное моделирование разрешающих конструкций игры (5.1)–(5.4) для случая уровня $c = 3$. На рис. 1 представлен максимальный по вложению стабильный мост W .

На рис. 2 представлен окаймляющий “путь” W^ρ при значении параметра гладкой регуляризации $\rho = 0.5$.

На рис. 3 представлен вычисленный приближенно график дефекта стабильности окаймляющего “пути” $\varepsilon = \varepsilon(t)$ множества W^ρ .

Результаты численного моделирования дефекта стабильности соответствуют его оценке, полученной в теореме 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Смешанное управление в дифференциальной игре. I // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 4. С. 745–747.
3. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 3. С. 523–526.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. Красовский Н.Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
7. Красовский Н.Н. Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.
8. Guseinov H.G., Subbotin A.I., and Ushakov V.N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Problems Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, no. 6. P. 405–419.
9. Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
10. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения. Деп. в ВИНТИ, № 2454-83. Свердловск, 1983. 61 с.
11. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. математика и механика. 1987. Т.51, вып.2. С. 216–222.
12. Ushakov V.N., Taras'ev A.M., Tokmantsev T.B., Uspenskii A.A. On procedures for constructing solutions in differential games on a finite interval of time // J. Math. Sci. 2006. Vol. 139, no. 5. P. 6954–6975.
13. Тарасьев А.М. О построении функции цены в одной нерегулярной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания. Деп. в ВИНТИ, № 2455-83. Свердловск, 1983. 43 с.
14. Ушаков В.Н., Латушкин Я.А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 178–194.

15. Ushakov V.N., Brykalov S.A., Latushkin Y.A. Stable and unstable sets in problems of conflict control // *Funct. Diff. Eq.* 2008. Vol. 15, no. 3–4. P. 309–338.
16. Ушаков В.Н., Малёв А.Г. К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2010. Т. 16, № 1. С. 199–222.
17. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
18. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Геометрия и асимптотика волновых фронтов // *Изв. высш. учеб. заведений.* 2008. № 3. С. 27–37.
19. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
20. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение функции оптимального результата в задаче быстрого действия на основе множества симметрии // *Автоматика и телемеханика.* 2009. № 7. С. 50–57.
21. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. II // *Докл. АН СССР.* 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
22. Осипов Ю.С. Альтернатива в дифференциально-разностной игре // *Докл. АН СССР.* 1971. Т. 197, № 5. С. 619–624.
23. Алексейчик М.И. Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры // *Математический анализ и его приложения: сб. ст. Ростов-на-Дону,* 1975. Т. 7. С. 191–199.
24. Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // *Мат. сб.* 1976. Т. 99, № 3. С. 394–420.
25. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
26. Субботин А.И., Субботина Н.Н. Функция оптимального результата в задаче управления // *Докл. АН СССР.* 1982. Т. 266, № 2. С. 294–299.
27. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336 с.
28. Kurzhanski A.B., Variya P. Dynamic optimization for reachability problems // *J. Optim. Theor. Appl.* 2001. Vol. 108, no 2. P. 227–251.
29. Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений типа Гамильтона — Якоби в теории управления // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2006. Т. 12. № 1. С. 173–183.
30. Osipov Yu.S., Kryazhimski A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
31. Ухоботов В.И. Аналитическая схема построения стабильных мостов для операторов программного поглощения с инвариантными семействами множеств // *Изв. Ин-та математики и информатики Удм. ун-та.* 2005. № 2(32). С. 23–34.
32. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: “Фазис”, 1996. 334 с.
33. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 432 с.

Ушаков Владимир Николаевич
зав. отделом, чл.-корр. РАН
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Поступила 17.01.2011

Успенский Александр Александрович
ст. науч. сотрудник, канд. физ.-мат. наук
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: uspen@imm.uran.ru

Малёв Алексей Георгиевич
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: malevag@mail.ru

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЕЙСТВИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА¹

А. Г. Ченцов

Исследуется абстрактная задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера, определяемыми в виде непустого семейства подмножеств пространства обычных решений. Допускаются различные варианты реализации асимптотических эффектов (сходимость в топологическом пространстве, циклы и др.). Предлагается весьма общий способ представления результатов действия приближенных решений, обобщающий конструкции на основе последовательностей в пространстве обычных решений.

Ключевые слова: Множество притяжения, направленность, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. One representation of the results of action of approximate solutions in a problem with constraints of asymptotic nature.

We consider an abstract attainability problem with constraints of asymptotic nature defined in the form of a nonempty family of subsets in the space of usual solutions. Various variants of implementing asymptotic effects are considered (convergence in a topological space, cycles, and so on). A rather general method is suggested for presenting the results of action of approximate solutions; this method generalizes constructions based on sequences in the space of usual solutions.

Keywords: attraction set, net, ultrafilter.

1. Введение

В дальнейшем используются следующие сокращения: ИП — измеримое пространство, к.-а. — конечно-аддитивная, МП — множество притяжения, НМ — направленное множество, п/м — подмножество, п/п — подпространство, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр, ЭП — элемент притяжения.

В различных задачах прикладного характера возникает проблема приближенного соблюдения ограничений, нередко осложняемая явлением неустойчивости. Данное явление может играть отрицательную роль, но в других случаях, напротив, может быть полезным (например, при ослаблении ограничений в экстремальных задачах, когда реализуется выигрыш в качестве). Последний случай представляет определенный практический интерес; это касается, в частности, задач управления с ограничениями различных типов (см. [1–4] и др.). В самом деле, малые нарушения ограничений в задачах управления зачастую несут существенные, в то время как выигрыш в качестве может быть значительным. На деле, однако, приходится (в ряде случаев) говорить об исчезающе малом нарушении условий, поскольку конкретную степень допустимого ослабления ограничений зачастую указать трудно. Естественным выходом на этапе формализации представляется введение ограничений асимптотического характера и подходящего класса приближенных (а, по сути, асимптотических) решений; см. в этой связи, например, [1, гл. III]. Подобные ситуации возникают и в других разделах прикладной математики; можно отметить здесь также задачи математического программирования и эффекты, отмеченные в [5, 6].

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00436, 10-01-96020) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория” (проекты 09-П-1-1007, 09-П-1-1014).

Логично допустить и возможность возникновения “асимптотических ограничений” изначально, не связывая это уже с ослаблением каких-то стандартных ограничений, но сохраняя, однако, асимптотический характер используемых решений. Данный подход принят в настоящей работе, которую можно рассматривать как непосредственное продолжение построений разд. 4 работы [7].

В вышеупомянутых задачах могут возникать затруднения, связанные с представлением результатов действия “асимптотических решений”. Как правило, упомянутые результаты связываются с пределами результатов действия обычных решений, выстраиваемых в последовательность (см. [1, гл. III]) или в направленность (см. замечания в [5, 6]). Такой подход требует топологизации (оснащения топологией) самого пространства результатов или оценок (далее термин “оценка” будет пониматься только в этом смысле). Этот подход может оказаться недостаточным, т.к. асимптотика результатов действия обычных решений может не допускать описания в терминах сходимости. В этой связи в [7, разд. 4] предлагается, грубо говоря, объявить результатом саму эту асимптотику. Здесь оказывается зачастую недостаточным (см. [8, разд. 1]) секвенциальный подход, развиваемый, например, в [1, гл. III] (по ряду причин неудобно также использовать направленности). Поэтому в [7, разд. 4] для целей представления вариантов асимптотического поведения и достигаемых с их помощью результатов предлагается использовать $у/ф$ соответствующих множеств. Для описания процедуры преобразования так понимаемого решения в результат (оценку) в [7, разд. 4] используется аналог оператора [9, с. 212, 213], именуемый в [7] оператором Чеха. Мы напомним далее этот подход, который освобожден от парадигмы, связанной со сходимостью в смысле заданной априори топологии. Интересно, однако, что конструкция, соответствующая данной парадигме и использующая МП в пространстве оценок, сохраняет и в упомянутом общем случае свое значение (см. теорему 4.1 работы [7]).

Основное затруднение, связанное с применением конструкций [7, разд. 4], состоит в том, что в них используются $у/ф$ семейства всех п/м пространства оценок (результатов); важную роль играют при этом свободные [10, с. 271] $у/ф$, которые не определяются конструктивно. Грубо говоря, такие $у/ф$ даже в принципе не “визуализируемы”. Известно [11, § 7.6], однако, что в некоторых (нестандартных) ИП всевозможные $у/ф$ этих ИП допускают конструктивное описание (возникает, правда, необходимость в осуществлении ряда несущественных, но также конструктивных преобразований: сведение $у/ф$ к к.-а. $(0, 1)$ -мерам, продолжение $у/ф$ с полуалгебры на алгебру, порожденную исходной полуалгеброй и т.п.). В этой связи представляется полезной модификация подхода [7, разд. 4], в рамках которой асимптотика достигаемого результата отождествлялась бы с $у/ф$ того или иного ИП, что доставляет в некоторых (см. [11, § 7.6]) случаях возможность конструктивного описания упомянутой асимптотики. При этом, конечно, оснащение пространства оценок какой-либо измеримой структурой (а здесь интересны ИП, достаточно “бедные” множествами) может доставлять, как правило, лишь частичную информацию о складывающейся картине асимптотических эффектов. Речь идет о специально подбираемом варианте пространства стоуновского представления [12, с. 26]. Отметим здесь только одну возможность (см. [11, с. 304, 305]), связанную с использованием произведений к.-а. $(0, 1)$ -мер (в связи с общими свойствами $у/ф$ см. [10, 13, 14]; вопросы, связанные с представлениями $у/ф$ ИП, рассматривались, в частности, в [15, гл. 10]).

2. Общие обозначения

Мы используем обозначения и соглашения [7, разд. 3]; напомним наиболее существенные. Через $\{x\}$ обозначаем одноточечное множество, содержащее объект x . Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X . Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B . Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $(f | C) \in B^C$ есть def сужение f на множество C , т.е. $(f | C)(x) \stackrel{\Delta}{=} f(x) \quad \forall x \in C$ (здесь и ниже $\stackrel{\Delta}{=}$ — равенство по определению); $f^1(C) \stackrel{\Delta}{=}$

$\{f(x) : x \in C\}$. Далее потребуется использовать семейства образов и прообразов множеств того или иного семейства (см., в частности, [13, гл. I]): если X и Y — множества, а $f \in Y^X$, то

$$\begin{aligned} & (f^1[\mathcal{X}] \triangleq \{f^1(A) : A \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y)) \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))) \\ & \& (f^{-1}[\mathcal{Y}] = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{Y}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \quad \forall \mathcal{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))). \end{aligned}$$

Если \mathcal{M} — семейство, а N — множество, то $\mathcal{M}|_N \triangleq \{M \cap N : M \in \mathcal{M}\}$ есть след \mathcal{M} на N .

Элементы топологии. Если (X, τ) — ТП и $A \in \mathcal{P}(X)$, то $\text{cl}(A, \tau)$ есть def замыкание A в (X, τ) , а $(A, \tau|_A)$ — п/п (X, τ) . Через $C(X, \tau_1, Y, \tau_2)$ обозначаем множество всех (τ_1, τ_2) -непрерывных отображений из Y^X , где (X, τ_1) и (Y, τ_2) суть ТП. Если (X, τ) есть ТП и $x \in X$, то $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и $N_\tau(x) = \{H \in \mathcal{P}(X) \mid \exists G \in N_\tau^0(x) : G \subset H\}$ (фильтр окрестностей x в ТП (X, τ) ; см. [13, гл. I]). Через $(\tau\text{-comp})[X]$ обозначаем семейство всех компактных в ТП (X, τ) п/м X .

Фильтры и их базы. Если H — непустое множество, то через $\beta[H]$ (через $\beta_0[H]$) обозначаем семейство всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H))$ (всех $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(H))$) таких, что $\forall B_1 \in \mathcal{B} \quad \forall B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Семейства из $\beta_0[H]$ — суть базы фильтров H . Пусть

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[H] \triangleq \{ & \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(H)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{F}) \& (\forall F \in \mathcal{F} \quad \forall G \in \mathcal{P}(H) \\ & ((F \subset G) \implies (G \in \mathcal{F}))) \} \end{aligned}$$

(введено множество всех фильтров H) и, кроме того,

$$\mathfrak{F}_u[H] \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathfrak{F}[H] \mid \forall \mathcal{V} \in \mathfrak{F}[H] \quad ((\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \implies (\mathcal{U} = \mathcal{V})) \} \quad (2.1)$$

(множество всех у/ф H). Разумеется, имеем следующее свойство:

$$(H\text{-ult})[x] \triangleq \{S \in \mathcal{P}(H) \mid x \in S\} \in \mathfrak{F}_u[H] \quad \forall x \in H. \quad (2.2)$$

Как обычно, у/ф вида (2.2) называем тривиальными; у/ф $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u[H]$ называем свободным, если пересечение всех множеств из \mathcal{U} пусто. Как обычно, $(H\text{-ult})[\cdot]$ обозначает оператор из H в $\mathfrak{F}_u[H]$, сопоставляющий точке $x \in H$ у/ф $(H\text{-ult})[x]$.

Каждый у/ф из $\mathfrak{F}_u[H]$ (2.1) является либо тривиальным, либо свободным. Оператор

$$\varphi[H] : \mathcal{P}(H) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{F}_u[H])$$

определяем правилом: $\varphi[H](A) \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u[H] \mid A \in \mathcal{U} \} \quad \forall A \in \mathcal{P}(H)$. Тогда семейство $\varphi[H]^1(\mathcal{P}(H))$ — база топологии непустого множества (2.1), обозначаемой через $\tau_{\text{fl}}[H]$, причем

$$(\mathfrak{F}_u[H], \tau_{\text{fl}}[H]) \quad (2.3)$$

есть нульмерный [10] компакт, в котором $\{(H\text{-ult})[x] : x \in H\}$ — всюду плотное множество, а база $\varphi[H]^1(\mathcal{P}(H))$ — семейство всех открыто-замкнутых в ТП (2.3) п/м $\mathfrak{F}_u[H]$. Если $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H))$, то

$$\mathfrak{F}_u^0[H \mid \mathcal{H}] \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u[H] \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{U} \} = \bigcap_{A \in \mathcal{H}} \varphi[H](A) \in (\tau_{\text{fl}}[H]\text{-comp})[\mathfrak{F}_u[H]].$$

Напомним свойство (см. [13, гл. I]): если $\mathcal{B} \in \beta_0[H]$, то

$$(H\text{-fl})[\mathcal{B}] \triangleq \{L \in \mathcal{P}(H) \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset L\} \in \mathfrak{F}[H]; \quad (2.4)$$

при этом $\mathfrak{F}[H] \subset \beta_0[H]$ и согласно (2.4) $(H\text{-fi})[\mathcal{F}] = \mathcal{F} \quad \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[H]$.

Образы фильтров и их баз. Если X и Y — множества, $f \in Y^X$ и $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$, то $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[Y]$ и при этом

$$((X\text{-fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_u[X]) \implies ((Y\text{-fi})[f^1[\mathcal{B}]] \in \mathfrak{F}_u[Y]). \quad (2.5)$$

В качестве \mathcal{B} может использоваться фильтр и, в частности, u/ϕ X . Если f — сюръекция X на Y , то

$$f^1[\mathcal{U}] \in \mathfrak{F}_u[Y] \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u[X]. \quad (2.6)$$

Направленности. Направленностью в множестве M называем всякий триплет (D, \preceq, f) , где (D, \preceq) — непустое НМ (см. [14, гл. 2]) и $f \in M^D$. Если (D, \preceq, f) — направленность в множестве M , то (подробнее см. [7, с. 222])

$$(M\text{-ass})[D; \preceq; f] \triangleq \left\{ A \in \mathcal{P}(M) \mid \exists d \in D \forall \delta \in D ((d \preceq \delta) \implies (f(\delta) \in A)) \right\} \in \mathfrak{F}[M]$$

есть фильтр, ассоциированный с (D, \preceq, f) . Каждый фильтр из $\mathfrak{F}[M]$ ассоциирован с некоторой направленностью в M .

Сходимость фильтров и направленностей. Если (X, τ) есть ТП, $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и $x \in X$, то сходимость $\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} x$ определяется как свойство $N_\tau(x) \subset (X\text{-fi})[\mathcal{B}]$. Ясно, что $\forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X] \forall x \in X$

$$(\mathcal{F} \xrightarrow{\tau} x) \iff (N_\tau(x) \subset \mathcal{F}).$$

Итак, в согласии с [13, гл. I] введена сходимость фильтров и их баз. Если (D, \preceq, f) есть направленность в X и $x \in X$, то

$$((D, \preceq, f) \xrightarrow{\tau} x) \stackrel{\text{def}}{\iff} ((X\text{-ass})[D; \preceq; f] \xrightarrow{\tau} x)$$

(сходимость по Морю — Смиту).

Множества притяжения. Если A — непустое множество, (X, τ) — ТП, $h \in X^A$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то через $(\text{as})[A; X; \tau; h; \mathcal{A}]$ обозначаем множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует такая направленность (D, \preceq, f) в множестве A , что

$$(\mathcal{A} \subset (A\text{-ass})[D; \preceq; f]) \ \& \ ((D, \preceq, h \circ f) \xrightarrow{\tau} x);$$

$(\text{as})[A; X; \tau; h; \mathcal{A}]$ называем МП в ТП (X, τ) (семейство \mathcal{A} играет роль ограничений асимптотического характера). Легко видеть, что

$$(\text{as})[A; X; \tau; h; \mathcal{A}] = \{x \in X \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u^0[A \mid \mathcal{A}] : h^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} x\}.$$

3. Конструкции, связанные с преобразованием ультрафильтров

Всюду в дальнейшем фиксируем непустые множества E и \mathbf{H} , а также отображение $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$. Как и в [7, разд. 4], полагаем, что

$$\mathbb{H} \triangleq \mathbf{h}^1(E) = \{\mathbf{h}(e) : e \in E\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}). \quad (3.1)$$

Ясно, что \mathbf{h} есть сюръекция E на \mathbb{H} (назовем это \mathbb{H} -сюръективностью) и согласно (2.4), (2.6)

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] = (\mathbb{H}\text{-fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]] \in \mathfrak{F}_u[\mathbb{H}] \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u[E]. \quad (3.2)$$

При этом $(\mathfrak{F}_u[E], \tau_{\mathbb{H}}[E])$ и $(\mathfrak{F}_u[\mathbb{H}], \tau_{\mathbb{H}}[\mathbb{H}])$ — непустые компакты. Следуя [7, разд. 4], полагаем, что оператор

$$\mathfrak{U} : \mathfrak{F}_u[E] \longrightarrow \mathfrak{F}_u[\mathbb{H}] \quad (3.3)$$

определяется правилом: $\mathfrak{U}(\mathcal{U}) \triangleq \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ (см. (3.2) и [7, (4.8)]). Называем \mathfrak{U} (3.3) оператором Чеха, имея в виду построения [9, с. 212, 213]. Сейчас напомним некоторые положения, анонсированные в [7, разд. 4], приводя соответствующие обоснования. Отметим прежде всего следующее

Свойство (S): оператор \mathfrak{U} — сюръекция $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ на $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$.

З а м е ч а н и е 3.1. Рассмотрим обоснование свойства (S) (см. также [9, с. 212, 213]). В силу \mathbb{H} -сюръективности \mathbf{h} и простейших свойств операции взятия прообраза имеем свойство: $\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{B}] \in \beta_0[E] \quad \forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbb{H}]$. Кроме того,

$$\mathbf{h}^1[\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{B}]] = \mathcal{B} \quad \forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbb{H}] \quad (3.4)$$

(учитываем, что для любых непустых множеств X и Y , отображения $f \in Y^X$ и множества $M \in \mathcal{P}(Y)$)

$$f^1(f^{-1}(M)) = M \cap f^1(X);$$

применяем данное свойство в случае $X = E$, $Y = \mathbb{H}$, $f = \mathbf{h}$ и учитываем (3.1)).

Выберем произвольно $\tilde{\mathcal{U}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$. Тогда, в частности, $\tilde{\mathcal{U}} \in \beta_0[\mathbb{H}]$, а потому (см. (3.4)) $\mathbf{h}^{-1}[\tilde{\mathcal{U}}] \in \beta_0[E]$ обладает свойством

$$\mathbf{h}^1[\mathbf{h}^{-1}[\tilde{\mathcal{U}}]] = \tilde{\mathcal{U}}. \quad (3.5)$$

Подберем $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ так, что $(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathbf{h}^{-1}[\tilde{\mathcal{U}}]] \subset \mathcal{U}$ (см. [13, гл. I]). Тогда с учетом (3.5) имеем, что

$$\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathbf{h}^1[(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathbf{h}^{-1}[\tilde{\mathcal{U}}]]] \subset \mathbf{h}^1[\mathcal{U}], \quad (3.6)$$

где $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ согласно (3.2). В силу максимальности $\tilde{\mathcal{U}}$ имеем из (3.6) равенство $\tilde{\mathcal{U}} = \mathbf{h}^1[\mathcal{U}]$, а тогда $\tilde{\mathcal{U}} = \mathfrak{U}(\mathcal{U}) \in \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E])$. Вложение $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] \subset \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E])$, а, следовательно, и равенство $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] = \mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E])$ установлены. Свойство (S) доказано.

Предложение 3.1. Оператор \mathfrak{U} (3.3) непрерывен: $\mathfrak{U} \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Покажем, что оператор \mathfrak{U} непрерывен в точке \mathcal{U} . При этом $\mathfrak{U}(\mathcal{U}) \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$. Пусть $\Gamma \in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]}(\mathfrak{U}(\mathcal{U}))$. Из определений легко следует, что семейства

$$\Omega \triangleq \{\varphi[E](A) : A \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}'(N_{\tau_{\mathbf{fi}}[E]}^0(\mathcal{U})),$$

$$\Sigma \triangleq \{\varphi[\mathbb{H}](B) : B \in \mathfrak{U}(\mathcal{U})\} \in \mathcal{P}'(N_{\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]}^0(\mathfrak{U}(\mathcal{U})))$$

являются локальными базами топологий $\tau_{\mathbf{fi}}[E]$, $\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]$ в точках \mathcal{U} и $\mathfrak{U}(\mathcal{U})$ соответственно. С учетом этого подбираем $\mathbf{M} \in \Sigma$ так, что $\mathbf{M} \subset \Gamma$. Пусть $M \in \mathfrak{U}(\mathcal{U})$ реализует представление

$$\mathbf{M} = \varphi[\mathbb{H}](M) = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}] \mid M \in \mathcal{F}\}. \quad (3.7)$$

Тогда $M = \mathbf{h}^1(N)$, где $N \in \mathcal{U}$ (мы учли здесь, что $\mathfrak{U}(\mathcal{U}) = \mathbf{h}^1[\mathcal{U}]$). Тогда $\mathbf{N} \triangleq \varphi[E](N) \in \Omega$ и, в частности, $\mathbf{N} \in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[E]}(\mathcal{U})$. Пусть $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}^1(\mathbf{N})$, а $\mathcal{V} \in \mathbf{N}$ реализует равенство $\mathcal{W} = \mathfrak{U}(\mathcal{V})$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и при этом $N \in \mathcal{V}$; $\mathcal{W} = \mathbf{h}^1[\mathcal{V}]$. Поскольку $\mathbf{h}^1(N) \in \mathbf{h}^1[\mathcal{V}]$, то $\mathbf{h}^1(N) \in \mathcal{W}$ и, как следствие, $M \in \mathcal{W}$. Коль скоро $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$, то согласно (3.7) $\mathcal{W} \in \mathbf{M}$. Итак,

$$\mathfrak{U}^1(\mathbf{N}) \subset \mathbf{M} \subset \Gamma.$$

Поскольку выбор Γ был произвольным, установлено, что

$$\forall A \in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[\mathbb{H}]}(\mathfrak{U}(\mathcal{U})) \exists B \in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[E]}(\mathcal{U}) : \mathfrak{U}^1(B) \subset A.$$

Следовательно, оператор \mathfrak{U} непрерывен в точке \mathcal{U} . Поскольку выбор \mathcal{U} был произвольным, предложение доказано (см. [14, с. 121, 122]). \square

Отдельно рассмотрим случай, когда \mathbf{h} является инъективным отображением из E в \mathbf{H} или, что то же самое, \mathbf{h} есть биекция E на \mathbb{H} . Справедливо следующее

Свойство (В): если \mathbf{h} — инъективное отображение E в \mathbf{H} , то \mathfrak{U} (3.3) есть биекция $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ на $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$.

З а м е ч а н и е 3.2. Проверим свойство (В), полагая, что \mathbf{h} есть инъективное отображение E в \mathbf{H} . Выберем произвольно $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Тогда

$$(\mathfrak{U}(\mathcal{U}) = \mathbf{h}^1[\mathcal{U}]) \ \& \ (\mathfrak{U}(\mathcal{V}) = \mathbf{h}^1[\mathcal{V}]). \quad (3.8)$$

Пусть $\mathfrak{U}(\mathcal{U}) = \mathfrak{U}(\mathcal{V})$. Покажем, что $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. В самом деле, допустим противное: $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$. Тогда с учетом максимальнойности \mathcal{U} и \mathcal{V} имеем, что $\mathcal{U} \setminus \mathcal{V} \neq \emptyset$ и $\mathcal{V} \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset$. Пусть $\Phi \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$. С учетом максимальнойности \mathcal{V} имеем, что $E \setminus \Phi \in \mathcal{V}$. При этом $\mathbf{h}^1(\Phi) \in \mathfrak{U}(\mathcal{V})$ (учитываем (3.8)) и вместе с тем $\mathbf{h}^1(E \setminus \Phi) \in \mathfrak{U}(\mathcal{V})$. Тогда, поскольку $\mathfrak{U}(\mathcal{V})$ — фильтр, имеем свойство

$$\mathbf{h}^1(\Phi) \cap \mathbf{h}^1(E \setminus \Phi) \neq \emptyset. \quad (3.9)$$

Пусть (см. (3.9)) $w \in \mathbf{h}^1(\Phi) \cap \mathbf{h}^1(E \setminus \Phi)$. Тогда $w = \mathbf{h}(x_*)$ для некоторого $x_* \in \Phi$ и вместе с тем $w = \mathbf{h}(x^*)$, где $x^* \in E \setminus \Phi$. Поэтому $\mathbf{h}(x_*) = \mathbf{h}(x^*)$, откуда в силу инъективности \mathbf{h} имеем равенство $x_* = x^*$, что невозможно. Полученное противоречие означает, что $\mathcal{U} = \mathcal{V}$. Итак,

$$(\mathfrak{U}(\mathcal{U}) = \mathfrak{U}(\mathcal{V})) \implies (\mathcal{U} = \mathcal{V}). \quad (3.10)$$

Поскольку выбор \mathcal{U} и \mathcal{V} был произвольным, утановлено, что \mathfrak{U} — инъективное отображение, откуда с учетом свойства (S) следует, что \mathfrak{U} (3.3) — биекция.

Полагаем до конца настоящего раздела, что \mathbf{h} — инъективное отображение из E в \mathbf{H} . Тогда \mathbf{h} — биекция E на \mathbb{H} , а потому определена биекция $\tilde{\mathbf{h}}$ множества \mathbb{H} на E , обратная к \mathbf{h} ; тогда $\tilde{\mathbf{h}} \in E^{\mathbb{H}}$ и при этом

$$(\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{h}(e)) = e \ \forall e \in E) \ \& \ (\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{h}}(z)) = z \ \forall z \in \mathbb{H}).$$

Далее по аналогии с оператором (3.3) конструируем оператор

$$\mathfrak{V} \triangleq (\tilde{\mathbf{h}}^1[\mathcal{V}])_{\mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]} \quad (3.11)$$

(учитываем (2.6), коль скоро $\tilde{\mathbf{h}}$ есть, в частности, сюръекция \mathbb{H} на E). По аналогии с предложением 3.1 проверяется, что

$$\mathfrak{V} \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\tilde{\mathbf{h}}}[\mathbb{H}], \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{h}}[E]). \quad (3.12)$$

Наконец, согласно замечанию 3.2 имеем свойство (В): \mathfrak{U} есть биекция $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ на $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ (\mathfrak{V} , в свою очередь, есть биекция $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ на $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$). Следовательно, определена биекция $\tilde{\mathfrak{U}}$ множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ на $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, обратная к \mathfrak{U} ; тогда $\tilde{\mathfrak{U}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]}$ и

$$(\tilde{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U}(\mathcal{U})) = \mathcal{U} \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \ \& \ (\mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{U}}(\mathcal{V})) = \mathcal{V} \ \forall \mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]). \quad (3.13)$$

Отметим некоторые простые свойства. Прежде всего заметим, что

$$\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{V}] = \tilde{\mathbf{h}}^1[\mathcal{V}] \ \forall \mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$$

(в самом деле, $\tilde{\mathbf{h}}^1(B) = \mathbf{h}^{-1}(B) \ \forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$). Следовательно, в силу (3.11)

$$\mathfrak{V}(\mathcal{V}) = \mathbf{h}^{-1}[\mathcal{V}] \ \forall \mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}].$$

Как следствие $\mathbf{h}^1[\mathfrak{V}(\mathcal{V})] = \mathcal{V} \ \forall \mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$. Из определения \mathfrak{U} следует (см. (3.11)), что при $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ справедливо равенство $\mathcal{V} = \mathfrak{U}(\mathfrak{V}(\mathcal{V}))$, а, стало быть, согласно (3.13) $\tilde{\mathfrak{U}}(\mathcal{V}) = \mathfrak{V}(\mathcal{V})$ (действительно, $\mathfrak{V}(\mathcal{V}) \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, а потому из первого положения в (3.13) следует равенство $\tilde{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{V}(\mathcal{V}))) = \mathfrak{V}(\mathcal{V})$). В итоге имеем следующее

Предложение 3.2. *Справедливо равенство $\tilde{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}$.*

С учетом (3.12) получаем из предложения 3.2, что

$$\tilde{\mathfrak{U}} \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}], \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{H}}[E]). \quad (3.14)$$

Из предложения 3.1, (3.14) имеем (с учетом биективности \mathfrak{U} и определения $\tilde{\mathfrak{U}}$) весьма важное

Предложение 3.3. *Оператор \mathfrak{U} является гомеоморфизмом ТП $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{H}}[E])$ на $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}], \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}])$.*

Напомним, что предложение 3.3 установлено в предположении инъективности \mathbf{h} как отображения из E в \mathbf{H} .

4. Ультрарешения в задачах с ограничениями асимптотического характера

Пусть, как и в предыдущем разделе, E и \mathbf{H} — непустые множества, $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$ (условие инъективности \mathbf{h} выполненным не предполагается). Рассматриваем E как пространство обычных решений, а \mathbf{H} — как пространство оценок (результатов). Обычный способ сопоставления решению $e \in E$ оценки $y \in \mathbf{H}$ состоит в обеспечении равенства $y = \mathbf{h}(e)$; здесь и ниже \mathbf{h} выступает в роли целевого оператора. В этой связи \mathbb{H} (3.1) можно рассматривать как пространство обычных оценок.

Можно, однако, рассматривать различные асимптотические версии решений, связанных первоначально с выбором точек из E , и оценок. В настоящем разделе эти версии реализуются в виде у/ф множеств E и \mathbf{H} . Возникают два компакта, рассматриваемых в предыдущем разделе. Разумеется, обычные решения и оценки могут быть погружены в эти компакты: следуя [7, разд. 4], вводим операторы

$$(\mathbf{m} \triangleq (E\text{-ult})[\cdot]) \ \& \ (\mathbf{n} \triangleq (\mathbb{H}\text{-ult})[\cdot]). \quad (4.1)$$

Тогда $\mathbf{m} : E \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и $\mathbf{n} : \mathbb{H} \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$. В новых условиях (работы с компактами) сопоставление “решению” соответствующей “оценки” осуществляется посредством оператора \mathfrak{U} (3.3). При этом $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ есть пространство (асимптотических) “решений”, а $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ — пространство отвечающих им (и также асимптотических) “оценок”; напомним свойство (S) предыдущего раздела и предложение 3.1. Действие обычных решений получает [7, с. 223] следующее естественное толкование в терминах операторов (4.1):

$$\mathfrak{U} \circ \mathbf{m} = \mathbf{n} \circ \mathbf{h}. \quad (4.2)$$

З а м е ч а н и е 4.1. Проверим (4.2), фиксируя $e \in E$. Тогда у/ф $(\mathfrak{U} \circ \mathbf{m})(e) = \mathbf{h}^1[\mathbf{m}(e)] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$ обладает согласно (2.2) свойством $\mathbf{h}(e) \in S \ \forall S \in (\mathfrak{U} \circ \mathbf{m})(e)$. Это означает, что $(\mathfrak{U} \circ \mathbf{m})(e) \subset (\mathbf{n} \circ \mathbf{h})(e) = \mathbf{n}(\mathbf{h}(e))$ (см. (2.2)), где $(\mathbf{n} \circ \mathbf{h})(e) \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]$. С учетом максимальности $(\mathfrak{U} \circ \mathbf{m})(e)$ получаем равенство $(\mathfrak{U} \circ \mathbf{m})(e) = (\mathbf{n} \circ \mathbf{h})(e)$. Коль скоро выбор e был произвольным, установлено (4.2).

Заметим, что, как легко видеть, оператор \mathbf{n} инъективен и может рассматриваться как несущественное преобразование пространства обычных оценок. Последнее можно отождествить теперь с множеством-образом $\mathbf{n}^1(\mathbb{H}) = (\mathbf{n} \circ \mathbf{h})^1(E)$, а представление (4.2) — связать (см. предложение 3.1) с компактификацией в духе [11, предложение 5.2.1]. Справедлива следующая

Теорема 4.1. *Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E \mid \mathcal{E}]) = (\mathbf{as})[E; \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbb{H}]; \tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}]; \mathbf{n} \circ \mathbf{h}; \mathcal{E}]$.*

Доказательство приведено в [7, с. 227, 228] (используется также предложение 4.5 работы [7]). В связи с теоремой заметим, что $\mathfrak{F}_u^0[E | \mathcal{E}]$ можно рассматривать [7, предложение 4.5] в виде множества всех \mathcal{E} -допустимых обобщенных решений или ультрарешений. Полезно учитывать и представление [7, (5.8)], используемое в конструкциях МП. С учетом непрерывности \mathfrak{U} (см. предложение 3.1) и отмечавшейся в разд. 2 компактности множества $\mathfrak{F}_u^0[E | \mathcal{E}]$ имеем также очевидное свойство компактности $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_u^0[E | \mathcal{E}])$:

$$\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}_u^0[E | \mathcal{E}]) \in (\tau_{\mathfrak{H}}[\mathbb{H}]\text{-comp})[\mathfrak{F}_u[\mathbb{H}]]. \quad (4.3)$$

В [7, разд. 4] свойство (4.3) дополняется целым рядом других положений, характеризующих МП в компакте у/ф \mathbb{H} . Теорема 4.1 характеризует результаты действия ультрарешений как ЭП в соответствующем компакте, который в случае инъективности \mathbf{h} оказывается гомеоморфным компакту самих ультрарешений; в этом последнем случае компакт (4.3) сводится фактически к $\mathfrak{F}_u^0[E | \mathcal{E}]$.

5. Пространство стоуновского представления и преобразование ультрафильтров

Теорема 4.1 определяет общее представление результатов действия ультрарешений, допустимых с точки зрения соблюдения ограничений асимптотического характера. Наиболее интересные варианты, связанные с действием свободных у/ф, не допускают, однако, конструктивного описания; грубо говоря, они “не визуализируются”. Поэтому, несмотря на исчерпывающий характер представления в классе ЭП, указанного в теореме 4.1, имеет смысл рассмотреть другие конструкции, уже не доставляющие, возможно, столь полного описания, но определяющие в каких-то случаях выход на конструктивные построения вариантов асимптотического поведения. Одну из моделей такого рода мы рассмотрим здесь после некоторых предваряющих построений.

Если S — непустое множество и \mathcal{L} — алгебра п/м S , то полагаем, что

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \left\{ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\emptyset \notin \mathcal{F}) \& (A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \right. \\ \left. \& (\forall F \in \mathcal{F} \ \forall L \in \mathcal{L} \ ((F \subset L) \implies (L \in \mathcal{F})) \right\},$$

получая множество всех фильтров алгебры \mathcal{L} , именуемых далее \mathcal{L} -фильтрами;

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq \left\{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ ((\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \implies (\mathcal{U} = \mathcal{F})) \right\} \\ = \left\{ \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \ (L \in \mathcal{F}) \vee (S \setminus L \in \mathcal{F}) \right\} \quad (5.1)$$

есть множество всех у/ф алгебры \mathcal{L} или \mathcal{L} -у/ф; см. [12, с. 26; 15, гл. 10]. Легко видеть, что

$$(S\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall x \in S. \quad (5.2)$$

Посредством (5.2) определяется вложение S в (непустое) множество $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Полагаем, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \left\{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U} \right\} \ \forall L \in \mathcal{L} \quad (5.3)$$

(заметим, что S , как объединение всех множеств из \mathcal{L} , определяется по \mathcal{L} однозначно). Легко видеть, что семейство

$$(\mathbb{UF})[\mathcal{L}] \triangleq \left\{ \Phi_{\mathcal{L}}(L) : L \in \mathcal{L} \right\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})))$$

является базой топологии; эту определяемую единственным образом топологию множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обозначаем в дальнейшем через $\mathbf{T}^*(\mathcal{L})$ (топология, порожденная базой $(\mathbb{UF})[\mathcal{L}]$). Известно [12, с. 26], что

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*(\mathcal{L})) \quad (5.4)$$

есть непустой компакт (реализуется пространство стоуновского представления [12, с. 26]). При этом, как легко видеть, справедливо свойство: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то семейство

$$(\mathcal{U}\text{-UF})[\mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(U) : U \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{T}^*(\mathcal{L}))$$

является локальной базой компакта (5.4) в точке \mathcal{U} или фундаментальной системой окрестностей этой точки. Отметим, наконец, что [15, (10.6.15)]

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{L} : \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[S]\}. \quad (5.5)$$

Фиксируем до конца настоящего раздела непустые множества X и Y , отображение $\mathbf{g} \in Y^X$ и алгебру \mathcal{A} [12, гл. I] п/м множества Y . С учетом (2.5) и (5.5) получаем, в частности, что при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$

$$(Y\text{-fi})[\mathbf{g}^1[\mathcal{U}]] \cap \mathcal{A} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}). \quad (5.6)$$

Свойство (5.6) позволяет ввести оператор, действующий из $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Итак, полагаем, что

$$\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}] : \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X] \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \quad (5.7)$$

определяется следующим правилом: если $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$, то

$$\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}](\mathcal{U}) \triangleq (Y\text{-fi})[\mathbf{g}^1[\mathcal{U}]] \cap \mathcal{A}. \quad (5.8)$$

Предложение 5.1. Оператор (5.7), (5.8) непрерывен.

$$\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X], \tau_{\mathbf{fi}}[X], \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*(\mathcal{A})).$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ и рассмотрим вопрос о непрерывности оператора (5.7) в точке \mathcal{V} , учитывая, что семейство

$$\mathfrak{V} \triangleq \{\varphi[X](S) : S \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{P}'(\tau_{\mathbf{fi}}[X])$$

есть локальная база (фундаментальная система окрестностей) компакта (2.3) при $H = X$ в точке \mathcal{V} . Выберем произвольно

$$\hat{\mathbb{H}} \in N_{\mathbf{T}^*(\mathcal{A})}(\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}](\mathcal{V})).$$

Тогда для некоторого множества $\tilde{\mathbb{H}} \in (\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}](\mathcal{V})\text{-UF})[\mathcal{A}]$ имеем вложение $\hat{\mathbb{H}} \subset \tilde{\mathbb{H}}$. При этом $\tilde{\mathbb{H}} = \Phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{F})$, где $\mathbf{F} \in \alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}](\mathcal{V})$. Итак,

$$\Phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{F}) \subset \hat{\mathbb{H}}. \quad (5.9)$$

С учетом (5.8) имеем, в частности, что $\mathbf{F} \in \mathcal{A}$ и, кроме того, $\mathbf{g}^1(\mathbb{A}) \subset \mathbf{F}$ для некоторого множества $\mathbb{A} \in \mathcal{V}$. При этом, конечно, $\varphi[X](\mathbb{A}) \in \mathfrak{V}$ и, в частности,

$$\varphi[X](\mathbb{A}) \in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[X]}(\mathcal{V}). \quad (5.10)$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{W} \triangleq \alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}]^1(\varphi[X](\mathbb{A}))$. Выберем произвольно $\tilde{\mathcal{W}} \in \mathfrak{W}$. Тогда, в частности, $\tilde{\mathcal{W}} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и, кроме того,

$$\tilde{\mathcal{W}} = \alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}](\mathcal{W}) \quad (5.11)$$

для некоторого $\mathcal{W} \in \varphi[X](\mathbb{A})$. При этом $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ и, кроме того, $\mathbb{A} \in \mathcal{W}$. Отметим, что (см. (5.8), (5.11))

$$\tilde{\mathcal{W}} = \{L \in \mathcal{A} \mid \exists W \in \mathcal{W} : \mathbf{g}^1(W) \subset L\},$$

а тогда $\mathbf{F} \in \tilde{\mathcal{W}}$. Это означает, что (см. (5.3)) $\tilde{\mathcal{W}} \in \Phi_{\mathcal{A}}(\mathbf{F})$ и, в частности (см. (5.9)), $\tilde{\mathcal{W}} \in \hat{\mathbb{H}}$. Поскольку выбор $\tilde{\mathcal{W}}$ был произвольным, установлено вложение $\mathfrak{W} \subset \hat{\mathbb{H}}$. С учетом (5.10) получаем, что

$$\exists T \in N_{\tau_{\mathbb{H}}[X]}(\mathcal{V}) : \alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}]^1(T) \subset \hat{\mathbb{H}}. \quad (5.12)$$

Поскольку выбор $\hat{\mathbb{H}}$ также был произвольным, из (5.12) вытекает непрерывность оператора (5.7) в точке \mathcal{V} . Коль скоро и выбор \mathcal{V} был произвольным, требуемое свойство “глобальной” непрерывности оператора (5.7) установлено. \square

Предложение 5.2. *Если $x \in X$, то $\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}]((X\text{-ult})[x]) = (Y\text{-ult})[\mathbf{g}(x)] \cap \mathcal{A}$.*

Доказательство подобно рассуждению в замечании 4.1, и мы воспроизводим его весьма схематично, полагая для краткости, что

$$\mathcal{F}_1 \triangleq \alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}]((X\text{-ult})[x]), \quad (5.13)$$

$$\mathcal{F}_2 \triangleq (Y\text{-ult})[\mathbf{g}(x)] \cap \mathcal{A}. \quad (5.14)$$

Тогда из (5.7) и (5.13) имеем, что $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Далее, из (5.2) и (5.14) вытекает, что $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Итак, мы имеем два у/ф алгебры \mathcal{A} . Для представления \mathcal{F}_1 можно использовать (5.8):

$$\mathcal{F}_1 = (Y\text{-fi})[\mathbf{g}^1[(X\text{-ult})[x]]] \cap \mathcal{A}.$$

Пусть $\Phi \in \mathcal{F}_1$. Тогда $\Phi \in \mathcal{A}$ и можно указать множество $\mathbb{A} \in (X\text{-ult})[x]$ такое, что $\mathbf{g}^1(\mathbb{A}) \subset \Phi$. Поскольку $\mathbf{g}(x) \in \mathbf{g}^1(\mathbb{A})$, имеем включение $\mathbf{g}^1(\mathbb{A}) \in (Y\text{-ult})[\mathbf{g}(x)]$, откуда следует, что $\Phi \in (Y\text{-ult})[\mathbf{g}(x)]$ и, как следствие, $\Phi \in \mathcal{F}_2$. Установлено вложение $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, откуда в силу максимальнойности \mathcal{F}_1 имеем равенство $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. \square

С учетом предложения 5.2 введем в рассмотрение оператор

$$\mathbf{t}_0[\mathcal{A}] \triangleq ((Y\text{-ult})[y] \cap \mathcal{A})_{y \in Y} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})^Y,$$

т. е. правило погружения Y в компакт (5.4), где $\mathcal{L} = \mathcal{A}$. Тогда из предложения 5.2 вытекает равенство

$$\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}] \circ (X\text{-ult})[\cdot] = \mathbf{t}_0[\mathcal{A}] \circ \mathbf{g}, \quad (5.15)$$

подобное в идейном отношении соотношению (4.2).

Предложение 5.3. *Если $\mathcal{X} \in \beta[X]$, то справедливо равенство*

$$\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}]^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[X | \mathcal{X}]) = \bigcap_{A \in \mathcal{X}} \text{cl}((\mathbf{t}_0[\mathcal{A}] \circ \mathbf{g})^1(A), \mathbf{T}^*(\mathcal{A})). \quad (5.16)$$

Данное утверждение является (в силу предложения 5.1 и (5.15)) частным случаем предложения 5.2.1 монографии [11] (следует, кроме того, учитывать представление множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[X | \mathcal{X}]$, отмеченное в [7; 8, с. 201]).

Теорема 5.1. *Если $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$, то справедливо равенство*

$$\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}]^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[X | \mathcal{X}]) = (\mathbf{as})[X; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}); \mathbf{T}^*(\mathcal{A}); \mathbf{t}_0[\mathcal{A}] \circ \mathbf{g}; \mathcal{X}].$$

Доказательство очевидным образом следует из предложения 5.3 с учетом [8, (3.3)] и аксиом фильтра (см. разд. 2).

Рассмотрим некоторые свойства оператора (5.7). Легко видеть, что в случае, когда \mathbf{g} является инъективным оператором и, кроме того,

$$\forall y_1 \in Y \forall y_2 \in Y \setminus \{y_1\} \exists L \in \mathcal{A} : (y_1 \in L) \& (y_2 \notin L)$$

(алгебра \mathcal{A} различает точки множества Y), оператор $\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}] \circ (X\text{-ult})[\cdot]$ также является инъективным.

Предложение 5.4. Если \mathbf{g} — сюръекция X на Y , то $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[X | \mathbf{g}^{-1}[\mathcal{U}]] \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть \mathbf{g} — сюръекция X на Y . Фиксируем $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Тогда, в частности, $\mathcal{F} \in \beta_0[Y]$ и в силу сюръективности \mathbf{g} имеем свойство $\mathbf{g}^{-1}[\mathcal{F}] \in \beta_0[X]$. Тогда $\mathcal{V} \triangleq (X\text{-fi})[\mathbf{g}^{-1}[\mathcal{F}]] \in \mathfrak{F}[X]$ и (см. [13, гл. I]) для некоторого у/ф $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ справедливо вложение $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Тогда, как легко видеть, $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[X | \mathbf{g}^{-1}[\mathcal{F}]]$. Поскольку выбор \mathcal{F} был произвольным, предложение доказано. \square

Предложение 5.5. Если \mathbf{g} — сюръекция X на Y , то

$$\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}](\tilde{\mathcal{U}}) = \mathcal{U} \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \quad \forall \tilde{\mathcal{U}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[X | \mathbf{g}^{-1}[\mathcal{U}]].$$

Доказательство. Пусть \mathbf{g} — сюръекция X на Y , $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[X | \mathbf{g}^{-1}[\mathcal{V}]]$. Тогда $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ и при этом $\mathbf{g}^{-1}[\mathcal{V}] \subset \mathcal{W}$; кроме того, $\mathbf{g}^1[\mathcal{W}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[Y]$ и $\mathbf{g}^1[\mathcal{W}] \cap \mathcal{A} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ (см. (5.5)). Выберем произвольно множество $V \in \mathcal{V}$, получая при этом свойство $\mathbf{g}^{-1}(V) \in \mathbf{g}^{-1}[\mathcal{V}]$ и, в частности, $\mathbf{g}^{-1}(V) \in \mathcal{W}$. Тогда $\mathbf{g}^1(\mathbf{g}^{-1}(V)) \in \mathbf{g}^1[\mathcal{W}]$, причем $\mathbf{g}^1(\mathbf{g}^{-1}(V)) \subset V$, откуда по аксиомам фильтра следует, что $V \in \mathbf{g}^1[\mathcal{W}]$. Но $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$, а потому $V \in \mathcal{A}$ и, следовательно, $V \in \mathbf{g}^1[\mathcal{W}] \cap \mathcal{A}$. Вложение $\mathcal{V} \subset \mathbf{g}^1[\mathcal{W}] \cap \mathcal{A}$ установлено, откуда в силу максимальной \mathcal{V} имеем равенство $\mathcal{V} = \mathbf{g}^1[\mathcal{W}] \cap \mathcal{A}$, где согласно (5.8) $\mathbf{g}^1[\mathcal{W}] \cap \mathcal{A} = \alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}](\mathcal{W})$. Поэтому $\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}](\mathcal{W}) = \mathcal{V}$. \square

Предложение 5.6. Если \mathbf{g} — сюръекция X на Y , то $\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}]$ (5.7) есть сюръекция $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$.

Доказательство сводится к очевидной комбинации двух предыдущих положений.

Применение в абстрактной задаче о достижимости с ограничениями асимптотического характера. Вернемся к построениям разд. 3, 4. Относительно E , H и \mathbf{h} следуем соглашениям разд. 3; \mathbb{H} понимается в смысле (3.1). Рассматриваем далее оператор (5.7) при следующих условиях:

$$X = E, \quad Y = \mathbb{H}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{h}. \quad (5.17)$$

Разумеется, в рассматриваемом случае (см. (5.17)) \mathbf{g} является сюръекцией X на Y , а потому оператор

$$\alpha[X; \mathbf{g}; \mathcal{A}] = \alpha[E; \mathbf{h}; \mathcal{A}]$$

является непрерывной сюръекцией непустого компакта $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\text{fi}}[E])$ на непустой компакт $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*(\mathcal{A}))$ при всяком выборе алгебры \mathcal{A} п/м множества \mathbb{H} . Мы рассматриваем \mathcal{A} как некоторый инструмент наблюдения, стремясь к возможной в ряде случаев “визуализации” результатов действия допустимых асимптотических решений. Последние, при заданном непустом семействе \mathcal{X} п/м множества $X = E$, определяются в виде у/ф $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E | \mathcal{X}]$; само семейство \mathcal{X} играет при этом роль ограничений асимптотического характера, определяя множество $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E | \mathcal{X}]$, $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E | \mathcal{X}] \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Действие обычных решений — точек множества E — представляем сейчас в виде преобразования посредством оператора $\mathbf{t}_0[\mathcal{A}] \circ \mathbf{g} = \mathbf{t}_0[\mathcal{A}] \circ \mathbf{h}$, не исключая при этом, что какие-то два различных решения e_1 и e_2 могут приводить к одному и тому же результату. Мы “верим” этому оператору в той же степени, что и оператору \mathbf{h} . Тем самым создается некоторая модель, в которой \mathcal{A} выступает в виде параметра.

6. Некоторые добавления

В заключение работы отметим некоторые примеры ИП, для которых удастся дать конструктивное описание множества всех у/ф данного ИП; будем ориентироваться при этом на ИП с алгебрами множеств. Однако по ряду причин потребуются и более общие ИП, а именно ИП с полуалгебрами множеств (см. [12, гл. I]; используем также определение [16, с. 57]).

Нам потребуется также использовать конечно-аддитивные (к.-а.) меры. Фиксируем непустое множество E .

Если \mathcal{L} есть полуалгебра п/м E , то через $(\text{add})[\mathcal{L}]$ (через $(\text{add})_+[\mathcal{L}]$) обозначаем [11, § 3.4] множество всех (всех неотрицательных) вещественнозначных к.-а. мер на \mathcal{L} , $(\text{add})_+[\mathcal{L}] \subset (\text{add})[\mathcal{L}]$; пусть $\mathbb{P}(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in (\text{add})_+[\mathcal{L}] \mid \mu(E) = 1\}$ (множество всех к.-а. вероятностей на \mathcal{L}) и

$$\mathbb{T}(\mathcal{L}) \triangleq \{\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \quad (\mu(L) = 0) \vee (\mu(L) = 1)\}. \quad (6.1)$$

Элементы множества (6.1) суть к.-а. $(0, 1)$ -меры на полуалгебре \mathcal{L} . В частности, элементарными (6.1) являются сужения мер Дирака. В этой связи условимся относительно обозначений: если $x \in E$, то через δ_x обозначаем далее функцию из $\mathcal{P}(E)$ в $\{0; 1\} \triangleq \{0\} \cup \{1\}$, для которой при $H \in \mathcal{P}(E)$ $\delta_x(H) \triangleq 1$ при $x \in H$ и $\delta_x(H) \triangleq 0$ при $x \notin H$. Тогда для всякой полуалгебры \mathcal{L} п/м E непременно $(\delta_x \mid \mathcal{L}) \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ и, более того, $(\delta_x \mid \mathcal{L})$ есть счетно-аддитивная мера, являющаяся сужением меры Дирака; пусть

$$\mathbf{D}(\mathcal{L}) \triangleq \{(\delta_x \mid \mathcal{L}) : x \in E\}.$$

Ясно, что $\mathbf{D}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{T}(\mathcal{L})$. Разумеется, вышеупомянутые определения применимы в случае, когда \mathcal{L} есть алгебра п/м E . Напомним некоторые свойства ИП с полуалгеброй множеств, полагая, что $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$; кроме того, пусть

$$\overline{p, q} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid (p \leq i) \ \& \ (i \leq q)\} \quad \forall p \in \mathbb{N} \ \forall q \in \mathbb{N},$$

$$\overline{n, \infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Если $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, $A \in \mathcal{P}(E)$ и $n \in \mathbb{N}$, то через $\Delta_n(A, \mathcal{L})$ обозначаем множество всех кортежей $(L_i)_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \longrightarrow \mathcal{L}$, для каждого из которых

$$\left(A = \bigcup_{i=1}^n L_i \right) \ \& \ (L_{i_1} \cap L_{i_2} = \emptyset \ \forall i_1 \in \overline{1, n} \ \forall i_2 \in \overline{1, n} \setminus \{i_1\}).$$

Тем самым введено множество всех упорядоченных \mathcal{L} -разбиений A “длины” n . Если \mathcal{M} — полуалгебра п/м E , то алгебра $a_E^0(\mathcal{M})$ п/м E , порожденная [12, гл. I] полуалгеброй \mathcal{M} , имеет вид

$$a_E^0(\mathcal{M}) = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \Delta_n(A, \mathcal{M}) \neq \emptyset\}. \quad (6.2)$$

Если \mathcal{L} — полуалгебра п/м E и $\mu \in (\text{add})[\mathcal{L}]$, то определена единственная к.-а. мера $\mathbf{a}[\mu] \in (\text{add})[a_E^0(\mathcal{L})]$, для которой $(\mathbf{a}[\mu] \mid \mathcal{L}) = \mu$; при этом $\forall A \in a_E^0(\mathcal{L})$

$$\mathbf{a}[\mu](A) = \sum_{i=1}^n \mu(L_i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \forall (L_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \Delta_n(A, \mathcal{L}).$$

Тем самым введено стандартное аддитивное продолжение исходной к.-а. меры на алгебру, порожденную соответствующей полуалгеброй множеств. Если \mathcal{L} — полуалгебра п/м E , то $\mathbf{a}[\mu] \in \mathbb{P}(a_E^0(\mathcal{L})) \ \forall \mu \in \mathbb{P}(\mathcal{L})$; кроме того, как легко видеть,

$$\mathbf{a}[\nu] \in \mathbb{T}(a_E^0(\mathcal{L})) \quad \forall \nu \in \mathbb{T}(\mathcal{L}) \quad (6.3)$$

(см. [15, с. 321]). Отметим также, что в упомянутом случае, когда (E, \mathcal{L}) есть ИП с полуалгеброй множеств, $(\mu \mid \mathcal{L}) \in \mathbb{T}(\mathcal{L}) \quad \forall \mu \in \mathbb{T}(a_E^0(\mathcal{L}))$. Поэтому для всяких полуалгебры \mathcal{L} п/м E и к.-а. меры $\tilde{\mu} \in \mathbb{T}(a_E^0(\mathcal{L}))$ имеем, что к.-а. мера $\tilde{\nu} \triangleq (\tilde{\mu} \mid \mathcal{L}) \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ реализует $\tilde{\mu}$ в виде $\tilde{\mu} = \mathbf{a}[\tilde{\nu}]$. Комбинируя данное свойство с (6.3), получаем, что для всякой полуалгебры \mathcal{L} п/м E

$$\mathbb{T}(a_E^0(\mathcal{L})) = \{\mathbf{a}[\mu] : \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})\}; \quad (6.4)$$

полезно отметить, что $\mathbf{a}[(\delta_x | \mathcal{L})] = (\delta_x | a_E^0(\mathcal{L})) \forall x \in E$. Заметим, что к.-а. $(0, 1)$ -меры и у/ф соответствующего ИП связаны очевидными соотношениями, использующими конструкцию на основе индикатора [12, с. 56]. Условимся в этой связи о следующем обозначении, которое используется в дальнейшем: если A — множество и $B \in \mathcal{P}(A)$, то функцию $\chi_B[A] : A \longrightarrow \{0; 1\}$ определяем условиями:

$$\left(\chi_B[A](x) \stackrel{\Delta}{=} 1 \quad \forall x \in B \right) \& \left(\chi_B[A](\tilde{x}) \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad \forall \tilde{x} \in A \setminus B \right).$$

Разумеется, в качестве A и B здесь могут использоваться семейства, т. е. множества, все элементы которых сами являются множествами. Если \mathcal{L} есть полуалгебра п/м E , то [15, (10.5.57)]

$$\mathbb{T}(\mathcal{L}) = \{\chi_{\mathcal{U}}[\mathcal{L}] : \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\}; \quad (6.5)$$

более того, $\mathcal{U} \longmapsto \chi_{\mathcal{U}}[\mathcal{L}] : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{T}(\mathcal{L})$ есть биекция. Стало быть, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ отождествимы. Отметим здесь же, что (см. [15, (10.5.61)]) для каждой полуалгебры \mathcal{L} п/м E и семейства $\mathcal{M} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$

$$\chi_{\mathcal{M}}[\mathcal{L}]^{-1}(\{1\}) = \mathcal{M}; \quad (6.6)$$

как следствие получаем с учетом (6.5) и (6.6), что при $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})$ непременно $\mu^{-1}(\{1\}) \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Более того, для всякой полуалгебры \mathcal{L} п/м E справедливо равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mu^{-1}(\{1\}) : \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})\}; \quad (6.7)$$

при этом $(\delta_x | \mathcal{L})^{-1}(\{1\}) = (E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L} \quad \forall x \in E$. Наконец, с учетом (6.4) и (6.7) получаем следующее положение: если \mathcal{L} есть полуалгебра п/м E , то

$$\mathbb{F}_0^*(a_E^0(\mathcal{L})) = \{\mathbf{a}[\mu]^{-1}(\{1\}) : \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{L})\}; \quad (6.8)$$

если мы располагаем “хорошим” описанием множества $\mathbb{T}(\mathcal{L})$, то в виде (6.8) мы получаем конструктивное представление множества всех у/ф алгебры множеств, порожденной полуалгеброй \mathcal{L} . Сейчас рассмотрим два простейших варианта ИП, для которых упомянутый прием оказывается вполне применимым (используем конструкции [11, § 7.6]).

Натуральный ряд. Рассмотрим семейство \mathcal{Z}_1 всех множеств $\overline{p, q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, и семейство $\mathcal{Z}_2 \stackrel{\Delta}{=} \{\overline{n, \infty} : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $\mathcal{Z} \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ есть полуалгебра п/м \mathbb{N} , для которой [11, (7.6.22)]

$$\mathbb{T}(\mathcal{Z}) = \mathbf{D}(\mathcal{Z}) \cup \{\chi_{\mathcal{Z}_2}[\mathcal{Z}]\}. \quad (6.9)$$

Теперь для построения $\mathbb{F}_0^*(a_{\mathbb{N}}^0(\mathcal{Z}))$ можно использовать (6.8) при условии, что $E = \mathbb{N}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{Z}$. Полезно учесть следующее легкопроверяемое представление алгебры $a_{\mathbb{N}}^0(\mathcal{Z})$ в терминах семейства \mathbf{K} всех конечных п/м \mathbb{N} (включая \emptyset) и семейства $\mathbf{C} \stackrel{\Delta}{=} \{\mathbb{N} \setminus K : K \in \mathbf{K}\}$; именно,

$$a_{\mathbb{N}}^0(\mathcal{Z}) = \mathbf{K} \cup \mathbf{C}.$$

С учетом (6.8) и упомянутого представления $a_{\mathbb{N}}^0(\mathcal{Z})$ проверяется следующее равенство:

$$\mathbb{F}_0^*(a_{\mathbb{N}}^0(\mathcal{Z})) = \{(\mathbb{N}\text{-ult})[k] \cap a_{\mathbb{N}}^0(\mathcal{Z}) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{C}\};$$

при этом \mathbf{C} есть у/ф алгебры $a_{\mathbb{N}}^0(\mathcal{Z})$ с пустым пересечением всех своих множеств (аналог свободного у/ф; см. [10, с. 271]).

Пространство-стрелка. Пусть \mathbb{R} — вещественная прямая, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ и при этом $\alpha < \beta$. Полагаем далее, что $E = [\alpha, \beta[$. Итак, в качестве E используем непустой промежуток

$$[\alpha, \beta[= \{\xi \in \mathbb{R} \mid (\alpha \leq \xi) \& (\xi < \beta)\}.$$

Введем стандартную полуалгебру пространства-стрелки в виде семейства \mathfrak{P} всех полуинтервалов $[a, b[$, $a \in [\alpha, \beta]$, $b \in [\alpha, \beta]$. Тогда $(E, \mathfrak{P}) = ([\alpha, \beta[, \mathfrak{P})$ есть ИП с полуалгеброй множеств. Для множества $\mathbb{T}(\mathfrak{P})$ известно [11, (7.6.21)] конкретное представление, которое мы сейчас напомним, полагая $\mathfrak{P}_0 \triangleq \mathfrak{P} \setminus \{\emptyset\}$. Для всякой функции $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ определяем отображение $(\text{st})[g] : \mathfrak{P} \rightarrow \mathbb{R}$ по следующему правилу:

$$((\text{st})[g](\emptyset) \triangleq 0) \ \& \ ((\text{st})[g](L) \triangleq g(\sup(L)) - g(\inf(L)) \ \forall L \in \mathfrak{P}_0);$$

$(\text{st})[g] \in (\text{add})[\mathfrak{P}]$. В частности, к.-а. мера $(\text{st})[g]$ определена при $g = \chi_{[x, \beta]} [[\alpha, \beta]]$, где $x \in]\alpha, \beta]$. При этом (см. [11, (7.6.21)])

$$\mathbb{T}(\mathfrak{P}) = \mathbf{D}(\mathfrak{P}) \cup \{(\text{st}) [\chi_{[x, \beta]} [[\alpha, \beta]]] : x \in]\alpha, \beta]\}; \quad (6.10)$$

полученное представление (6.10) можно использовать в (6.8) при $E = [\alpha, \beta[$ и $\mathcal{L} = \mathfrak{P}$.

Если $x \in]\alpha, \beta]$, то через \mathfrak{U}_x^0 обозначаем семейство всех множеств $[c, d[$, $c \in [\alpha, x]$, $d \in [x, \beta]$; легко видеть, что $\mathfrak{U}_x^0 \in \mathbb{F}_0^*(\mathfrak{P})$, причем пересечение всех множеств из \mathfrak{U}_x^0 пусто. Кроме того,

$$(\text{st}) [\chi_{[x, \beta]} [[\alpha, \beta]]]^{-1} (\{1\}) = \mathfrak{U}_x^0 \ \forall x \in]\alpha, \beta].$$

С учетом (6.10) получаем также очевидное равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{P}) = \{([\alpha, \beta[-\text{ult}][x] \cap \mathfrak{P} : x \in [\alpha, \beta[\cup \{\mathfrak{U}_x^0 : x \in]\alpha, \beta]\}\}. \quad (6.11)$$

В связи с (6.11) напомним вариант весьма общей конструкции продолжения фильтров [15, § 10.5]: если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathfrak{P})$, то

$$\psi[\mathcal{F}] \triangleq \{A \in \mathbf{a}_{[\alpha, \beta[}^0(\mathfrak{P}) \mid \exists F \in \mathcal{F} : F \subset A\} \in \mathbb{F}^*(\mathbf{a}_{[\alpha, \beta[}^0(\mathfrak{P}));$$

если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathfrak{P})$, то $\psi[\mathcal{F}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathbf{a}_{[\alpha, \beta[}^0(\mathfrak{P}))$. Тогда (см. (6.11)) отображение

$$\mathcal{U} \mapsto \psi[\mathcal{U}] : \mathbb{F}_0^*(\mathfrak{P}) \rightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathbf{a}_{[\alpha, \beta[}^0(\mathfrak{P})),$$

как легко видеть, является биекцией $\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{P})$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathbf{a}_{[\alpha, \beta[}^0(\mathfrak{P}))$. С учетом (6.11) имеем после простых преобразований следующее равенство:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathbf{a}_{[\alpha, \beta[}^0(\mathfrak{P})) = \left\{([\alpha, \beta[-\text{ult}][x] \cap \mathbf{a}_{[\alpha, \beta[}^0(\mathfrak{P}) : x \in [\alpha, \beta[\cup \{\psi[\mathfrak{U}_x^0] : x \in]\alpha, \beta]\}\right\},$$

дополняющее (6.8) в случае $(E, \mathcal{L}) = ([\alpha, \beta[, \mathfrak{P})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Янг Л.** Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1970. 488 с.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. **Даффин Р.Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Иностран. лит., 1959. С. 263–267.
6. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
7. **Ченцов А.Г.** Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 1. С. 216–241.

8. **Ченцов А.Г.** Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2007. Т. 13, № 2. С. 184–217.
9. **Čech E.** Topological spaces. Prague: Academia, 1966. 893 p.
10. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
11. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1997. 322 p.
12. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
13. **Бурбаки Н.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
14. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
15. **Ченцов А.Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, II. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2010. 541 с.
16. **Chentsov A.G.** Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York; London; Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.

Ченцов Александр Георгиевич
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 22.11.2010

УДК 517.977, 531.391

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ МНОГОЗВЕННОЙ СИСТЕМЫ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ¹

Ф. Л. Черноушко

Рассматривается движение в сопротивляющейся среде механической системы, состоящей из основного тела и одного или двух звеньев, присоединенных к нему посредством цилиндрических шарниров. Управление движением осуществляется за счет высокочастотных периодических колебаний звеньев. При определенных предположениях, выведено уравнение движения системы и оценена средняя скорость перемещения. Эта скорость положительна, если угловая скорость отведения присоединенных звеньев меньше, чем угловая скорость их приведения в оси тела. Поставлена и решена задача оптимального управления о максимизации средней скорости движения. Приведен пример.

Ключевые слова: оптимальное управление, механическая система, многозвенная система, метод усреднения, мобильные роботы, биомеханика.

F. L. Chernous'ko. Optimal motion of a multilink system in a resistive medium.

We consider the motion in a resistive medium of a mechanical system consisting of a main body and one or two links attached to it by means of cylindrical joints. The motion is controlled through high-frequency periodic oscillations of the links. For this system, an equation of motion is deduced and the average velocity is estimated under certain assumptions. This velocity is positive if the angular velocity of diverting the attached links is less than the angular velocity of bringing them to the axis of the body. An optimal control problem of maximizing the average velocity is formulated and solved. An example is given.

We consider the motion in a resistive medium of a mechanical system consisting of a main body and one or two links attached to it by means of cylindrical joints. The motion is controlled through high-frequency periodic oscillations of the links. For this system, an equation of motion is deduced and the average velocity is estimated under certain assumptions. This velocity is positive if the angular velocity of diverting the attached links is less than the angular velocity of bringing them to the axis of the body. An optimal control problem of maximizing the average velocity is formulated and solved. An example is given.

Keywords: optimal control, mechanical system, multilink system, method of averaging, mobile robots, biomechanics.

Введение

Как известно, многозвенная механическая система, звенья которой совершают колебания друг относительно друга, может перемещаться поступательно в сопротивляющейся среде. Этот принцип перемещения широко используется в живой природе (рыбы, змеи, другие животные; см., например, [1–3]).

В робототехнике этот принцип применяется при создании змееподобных роботов [4], движущихся по поверхности, а также при разработке мобильных роботов, плавающих в жидкости [5–9].

Проблемы динамики и оптимизации движений двузвенных, трехзвенных и многозвенных механизмов, осуществляющих змееподобные движения по плоскости при наличии сил сухого трения, действующих между механизмом и плоскостью, исследовались в [10–13].

В данной работе рассматриваются простые механические системы, моделирующие перемещение тела в жидкой среде при помощи одного или двух подвижных звеньев: конечностей, плавников или хвоста [14].

Составлено и упрощено уравнение движения системы.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 11-01-00513) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-64817.2010.1).

Оценивается средняя скорость поступательного перемещения системы как целого при периодических колебаниях звеньев. Показано, что средняя скорость существенно зависит от угловых скоростей отведения ω_1 звеньев от оси тела и их приведения ω_2 к оси тела. Если ω_1 и ω_2 постоянны, то средняя скорость перемещения тела положительна, если $\omega_2 > \omega_1$, и растет с ростом ω_2 . Этот вывод согласуется с наблюдениями за процессом плавания животных и рыб.

Поставлена задача оптимального управления о достижении максимальной средней скорости перемещения системы за счет выбора закона колебаний присоединенных звеньев. При помощи принципа максимума построено явное аналитическое решение поставленной задачи.

Оказывается, что при оптимальном движении угловая скорость приведения подвижных звеньев к оси тела всегда равна максимально допустимой, а угловая скорость отведения изменяется более сложным образом.

Показано, что при учете подъемной силы, действующей на подвижные звенья, средняя скорость движения системы увеличивается. Приведены примеры.

1. Механическая модель

Рассматривается механическая система, состоящая из основного твердого тела массы m и двух одинаковых жестких звеньев OA и $O'A'$ длины a , присоединенных к телу посредством цилиндрических шарниров O и O' (рис. 1). Массу звеньев считаем пренебрежимо малой по сравнению с m . Система движется в горизонтальной плоскости в жидкой среде, действующей на все тела силами, квадратично зависящими от скорости этих тел.

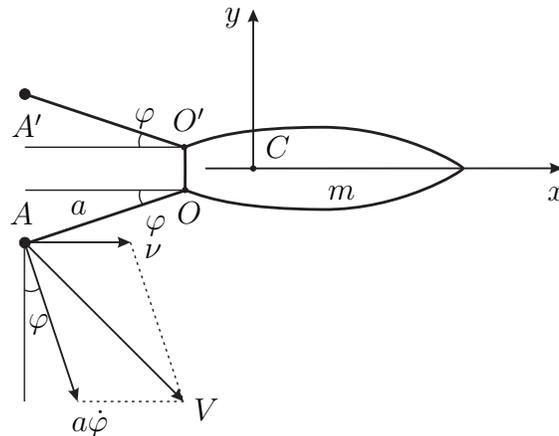


Рис. 1. Механическая модель.

Свяжем декартову систему координат Cxy с основным телом. Предполагаем, что ось Cx является осью симметрии тела, а звенья OA и $O'A'$ всегда занимают положения, симметричные друг другу относительно оси Cx .

Предполагаем также, что угол отклонения φ звеньев OA и $O'A'$ от оси Cx изменяется периодически по времени t с периодом T , так что

$$\varphi(t + T) = \varphi(t) \quad (1)$$

для любого t . При этом угол φ в течение периода сначала возрастает от 0 до φ_0 , а затем убывает от φ_0 до 0.

Если в начальный момент времени основное тело двигалось поступательно вдоль своей оси Cx , то в силу симметрии системы поступательное движение будет сохраняться и в дальнейшем.

Обозначим через v скорость поступательного движения основного тела вдоль оси Cx и будем предполагать всюду, что $v \geq 0$. Величину силы сопротивления, действующей на тело

со стороны жидкости, обозначим через $c_0 v^2$, где $c_0 > 0$ — постоянная. Уравнение движения основного тела вдоль оси Cx запишем в виде

$$(m + m_0)\dot{v} = -c_0 v^2 + F_x, \quad (2)$$

где m_0 — присоединенная масса основного тела; F_x — проекция сил сопротивления, действующих на звенья OA и $O'A'$; точкой обозначается производная по времени t .

Предположим для простоты, что силы, действующие на звенья OA и $O'A'$, сводятся к силам, приложенным к точкам A и A' соответственно. Вектор скорости точки A представим в виде (см. рис. 1)

$$\mathbf{V} = v\mathbf{i} + a\omega \sin \varphi \mathbf{i} - a\omega \cos \varphi \mathbf{j}, \quad \omega = \dot{\varphi}, \quad (3)$$

где \mathbf{i}, \mathbf{j} — орты осей Cx и Cy соответственно; ω — угловая скорость вращения звена OA . Сила сопротивления, приложенная к точке A , равна

$$\mathbf{F}_A = -k_0 V \mathbf{V}, \quad (4)$$

где $k_0 > 0$ — постоянная. На основании формул (3) и (4), учитывая симметрию звеньев OA и $O'A'$, получим величину проекции F_x на ось Cx сил, приложенных к обоим звеньям, в виде

$$F_x = -2k_0(v + a\omega \sin \varphi)(v^2 + a^2\omega^2 + 2va\omega \sin \varphi)^{1/2}. \quad (5)$$

Вводя постоянные

$$c = \frac{c_0}{m + m_0}, \quad k = \frac{2k_0}{m + m_0}, \quad (6)$$

перепишем уравнение (2) с учетом (5) в виде

$$\dot{v} = -cv^2 - k(v + a\omega \sin \varphi)(v^2 + a^2\omega^2 + 2va\omega \sin \varphi)^{1/2}. \quad (7)$$

Заметим, что коэффициенты c и k имеют размерность, обратную длине. Чтобы пояснить смысл этих коэффициентов, рассмотрим движение материальной точки по прямой под действием силы квадратичного сопротивления. Это движение описывается уравнениями

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -cv^2,$$

где x — координата точки, v — ее скорость, c — постоянная. Интегрируя эти уравнения при начальных условиях

$$x(0) = 0, \quad v(0) = v_0,$$

получим

$$v = v_0 \exp(-cx).$$

Таким образом, обратная к c величина c^{-1} есть длина пути, на котором скорость точки уменьшается в e раз при квадратичном сопротивлении.

Наряду с моделью с двумя подвижными звеньями, представленной на рис. 1, можно рассматривать также модель с одним подвижным звеном, изображенную на рис. 2. Если система, показанная на рис. 1, имитирует плавание животного при помощи двух конечностей, то система, представленная на рис. 2, моделирует плавание рыб. Здесь угол φ изменяется в пределах $[-\varphi_0, \varphi_0]$, причем помимо условия периодичности (1) имеет место условие симметрии колебаний звена:

$$\varphi\left(t + \frac{T}{2}\right) = -\varphi(t). \quad (8)$$

Другими словами, движение звена в течение полупериода колебаний является зеркальным отражением (относительно оси Cx) этого движения за предыдущий полупериод.

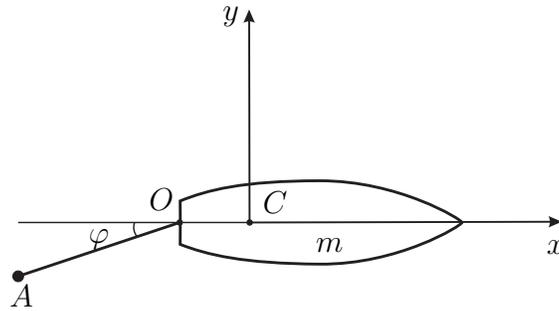


Рис. 2. Модель с одним подвижным звеном.

При определенных условиях движение тела для модели, представленной на рис. 2, будет близко к поступательному движению вдоль оси Cx . Перечислим эти условия.

1. Колебания звена OA периодичны и симметричны, т. е. выполнены условия (1) и (8).
2. Частота колебаний достаточно высока, так что $vT \ll a$.
3. Момент инерции основного тела достаточно велик, так что амплитуда его угловых колебаний пренебрежимо мала.
4. Основное тело симметрично относительно оси Cx .
5. Сила сопротивления основного тела в поперечном направлении (по оси Cy) значительно больше силы сопротивления в продольном направлении (по оси Cx).

При этих допущениях изменение ориентации основного тела, а также его движение в направлении оси Cy будут незначительными, и тело будет в основном перемещаться поступательно вдоль оси Cx . Колебания звена на рис. 2 в течение одного полупериода эквивалентны колебаниям звена OA на рис. 1, а в течение другого полупериода соответствуют колебаниям звена $O'A'$ на рис. 1. Уравнение движения модели рис. 2 снова приводится к виду (7), причем выражение (6) для k примет вид

$$k = \frac{k_0}{m + m_0},$$

где k_0 — коэффициент сопротивления для точки A . Поэтому в дальнейшем достаточно рассматривать уравнение (7), которое описывает динамику обеих моделей рис. 1 и рис. 2.

2. Анализ уравнения движения

Естественно предполагать, что сила сопротивления для основного тела много больше, чем сила сопротивления для подвижных звеньев: $c \gg k$. Введем малый параметр

$$\mu = \frac{k}{c} \ll 1 \quad (9)$$

и будем считать, что колебания звеньев имеют малую амплитуду и высокую частоту. Положим

$$\varphi = \mu\psi, \quad T = \mu T_0, \quad t = T\tau = \mu T_0\tau, \quad v = \frac{\mu a u}{T_0}. \quad (10)$$

Здесь новая переменная ψ и постоянная T_0 имеют порядок $O(1)$, τ — новое (быстрое) время, u — безразмерная скорость. Подставим формулы (10) в уравнение (7) и упростим его, опуская члены высших порядков по малому параметру μ . Получим после упрощений уравнение

$$\frac{du}{d\tau} = -\epsilon \left[u^2 + \left(u + \psi \frac{d\psi}{d\tau} \right) \left| \frac{d\psi}{d\tau} \right| \right], \quad \epsilon = c a \mu^2. \quad (11)$$

Правая часть уравнения (11) содержит малый параметр $\epsilon \ll 1$ и периодическую функцию $\psi(\tau)$, значения которой лежат в пределах $[0, \psi_0]$, где $\psi_0 = \varphi_0/\mu$. Согласно равенствам (1) и (10) период функции $\psi(\tau)$ равен 1, так что имеем

$$\psi(\tau + 1) = \psi(\tau) \quad (12)$$

для всех τ .

Уравнение (11) относится к системам в стандартной форме, и к нему можно применить асимптотический метод усреднения [15]. В соответствии с этим методом составим уравнение первого приближения, усредняя правые части уравнения (11) по τ . Получим

$$\frac{dw}{d\tau} = -\epsilon F(w), \quad F(w) = w^2 + I_1 w + I_0, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$I_1 = \int_0^1 \left| \frac{d\psi}{d\tau} \right| d\tau, \quad I_0 = \int_0^1 \psi \left| \frac{d\psi}{d\tau} \right| d\tau. \quad (14)$$

При одинаковых начальных условиях решение $w(\tau)$ усредненного уравнения (13) отличается от решения исходного уравнения (11) на величины порядка ϵ на интервале порядка ϵ^{-1} :

$$u(\tau) = w(\tau) + O(\epsilon). \quad (15)$$

В дальнейшем будем анализировать решение $w(\tau)$ усредненного уравнения (13).

Предположим для определенности, что функция $\psi(\tau)$ на периоде $[0, 1]$ унимодальна: на интервале $(0, \theta)$, где $0 < \theta < 1$, она является неубывающей, а на интервале $(\theta, 1)$ — невозрастающей, причем

$$\psi(0) = \psi(1) = 0, \quad \psi(\theta) = \psi_0 > 0. \quad (16)$$

Тогда для интеграла I_1 из (14) имеем

$$I_1 = 2\psi_0 > 0. \quad (17)$$

Если $I_0 > 0$, то квадратный трехчлен $F(w)$ из (13) положителен при всех $w > 0$. Следовательно, в силу уравнения (13) имеем

$$\frac{dw}{d\tau} < -\epsilon I_0 < 0.$$

Функция $w(\tau)$ при этом обращается в нуль за конечное время, а безразмерная скорость $u(\tau)$, согласно (15), становится малой порядка ϵ .

Таким образом, при $I_0 > 0$ поступательное движение системы с конечной положительной скоростью невозможно.

Рассмотрим более интересный случай $I_0 < 0$. Здесь квадратный трехчлен $F(w)$ из (13) имеет единственный положительный корень w^* , равный

$$w^* = \left(-I_0 + \frac{I_1^2}{4} \right)^{1/2} - \frac{I_1}{2} > 0. \quad (18)$$

При этом $F(w) > 0$ при $w < w^*$ и $F(w) < 0$ при $w > w^*$. Следовательно, уравнение (13) имеет единственное положительное стационарное решение $w(\tau) = w^*$, которое глобально асимптотически устойчиво. При любом начальном условии $w(\tau_0) = w_0 \geq 0$ имеем $w(\tau) \rightarrow w^*$ при $\tau \rightarrow \infty$. Безразмерная скорость $u(\tau)$ будет согласно (15) близка к w^* .

Наибольший интерес представляет вычисление усредненной скорости w^* поступательного движения и ее максимизация. Как видно из формул (18) и (14), величина w^* зависит от выбора периодической функции $\psi(\tau)$, удовлетворяющей наложенным условиям периодичности (12), краевым условиям (16) и требованию унимодальности, сформулированному выше. Подставляя выражение (17) для I_1 в формулу (18), получим

$$w^* = (\psi_0^2 - I_0)^{1/2} - \psi_0. \quad (19)$$

Сначала рассмотрим простой кусочно-линейный закон изменения $\psi(\tau)$, а затем поставим задачу об оптимальном выборе $\psi(\tau)$.

3. Кусочно-линейная функция $\psi(\tau)$

Пусть угол $\psi(\tau)$ изменяется по кусочно-линейному закону, удовлетворяющему наложенным выше условиям:

$$\begin{aligned}\psi(\tau) &= b_1\tau \quad \text{при } \tau \in (0, \theta), \quad 0 < \theta < 1, \\ \psi(\tau) &= b_2(1 - \tau) \quad \text{при } \tau \in (\theta, 1).\end{aligned}\tag{20}$$

Здесь b_1 и b_2 — положительные постоянные, имеющие смысл величин безразмерной угловой скорости. Так как при $\tau = \theta$ угол ψ принимает значение ψ_0 , имеем

$$b_1\theta = b_2(1 - \theta) = \psi_0.$$

Отсюда получим

$$\theta = \frac{b_2}{b_1 + b_2}, \quad \psi_0 = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}.\tag{21}$$

Подставим функцию $\psi(\tau)$ из (20) в формулу (14) для I_0 . Используя также соотношения (21), найдем

$$I_0 = \frac{b_1^2 b_2^2 (b_1 - b_2)}{2(b_1 + b_2)^2}.\tag{22}$$

Подставляя ψ_0 из (21) и I_0 из (22) в выражение (19), получим

$$w^* = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} \left[\left(1 + \frac{b_2 - b_1}{2} \right)^{1/2} - 1 \right].\tag{23}$$

Перепишем полученную формулу (23) в размерных переменных, вводя размерные угловые скорости отведения ω_1 и приведения ω_2 звеньев к оси тела и пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned}\omega_i &= \frac{\mu b_i}{T} = \frac{b_i}{T_0}, \quad i = 1, 2, \\ v^* &= \frac{\mu a w^*}{T_0},\end{aligned}$$

вытекающими из (10). Получим размерную среднюю скорость движения системы в виде

$$v^* = \frac{\mu a \omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \left\{ \left[1 + \frac{(\omega_2 - \omega_1) T_0}{2} \right]^{1/2} - 1 \right\},\tag{24}$$

где параметр μ определен формулой (9).

Отсюда видно, что средняя скорость движения рассматриваемой системы положительна ($v^* > 0$) в том и только в том случае, если угловая скорость отведения звеньев от оси тела меньше, чем угловая скорость их приведения к оси: $\omega_2 > \omega_1$. Этот вывод качественно согласуется с данными наблюдений за плаванием животных.

4. Постановка задач оптимального управления

Рассмотрим задачу о максимизации средней скорости движения w^* за счет выбора унимодальной функции $\psi(\tau)$, удовлетворяющей условию периодичности (12) и условиям (16). Величину ψ_0 максимального значения функции $\psi(\tau)$ считаем фиксированной, а аргумент $\tau = \theta$, при котором она достигается, будет выбран из интервала $\theta \in (0, 1)$ так, чтобы достигался максимум w^* . Из формулы (19) следует, что максимизация w^* эквивалентна минимизации интеграла I_0 . Из выражения (14) для I_0 и свойства унимодальности функции $\psi(\tau)$ имеем

$$I_0 = \int_0^\theta \psi \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 d\tau - \int_\theta^1 \psi \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 d\tau.\tag{25}$$

Введем переменные $\Omega(\tau)$ и $z(\tau)$ при помощи уравнений

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \Omega, \quad \frac{dz}{d\tau} = \psi\omega^2. \quad (26)$$

Переменные ψ и z играют роль фазовых координат, а безразмерная угловая скорость Ω является управлением. Наложим ограничения

$$-\Omega_- \leq \Omega(\tau) \leq \Omega_+, \quad (27)$$

где Ω_- и Ω_+ — заданные положительные постоянные.

Из приведенных соотношений (16), (19), (25), (26) следует, что задача максимизации w^* или, что то же, минимизации функционала (25) при фиксированных ψ_0 и θ сводится к решению двух задач оптимального управления для системы (26) при ограничениях (27).

Задача 1. Найти функции $\Omega(\tau), \psi(\tau), z(\tau)$, удовлетворяющие уравнениям (26), ограничениям и условиям:

$$\begin{aligned} 0 \leq \Omega \leq \Omega_+, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(\theta) = \psi_0, \\ z(0) = 0, \quad z(\theta) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (28)$$

Задача 2. Найти функции $\Omega(\tau), \psi(\tau), z(\tau)$, удовлетворяющие уравнениям (26), ограничениям и условиям:

$$\begin{aligned} -\Omega_- \leq \Omega \leq 0, \quad \psi(\theta) = \psi_0, \quad \psi(1) = 0, \\ z(\theta) = 0, \quad z(1) \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (29)$$

Решив эти задачи, определим минимальное значение функционала I_0 в виде

$$I_0 = z(\theta) - z(1). \quad (30)$$

Величину θ следует выбрать из условия минимума функционала I_0 по $\theta \in (0, 1)$. После этого максимальное значение скорости w^* будет определено по формуле (19).

Отметим, что указанные выше условия накладывают определенные ограничения на введенные параметры. Из первого уравнения (26) и условий (28) следует неравенство

$$\psi_0 \leq \Omega_+ \theta. \quad (31)$$

Аналогично из первого уравнения (26) и условий (29) имеем

$$\psi_0 \leq \Omega_-(1 - \theta). \quad (32)$$

Из неравенств (31) и (32) получим двусторонние ограничения для θ :

$$\frac{\psi_0}{\Omega_+} \leq \theta \leq 1 - \frac{\psi_0}{\Omega_-}. \quad (33)$$

Из (33) вытекает ограничение на ψ_0, Ω_+ и Ω_- :

$$\psi_0 \leq \frac{\Omega_+ \Omega_-}{\Omega_+ + \Omega_-}. \quad (34)$$

5. Решение задачи 1

Применим принцип максимума для решения задачи 1. Составим гамильтониан

$$H = p\Omega - \psi\Omega^2, \quad (35)$$

где p — сопряженная переменная, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dp}{d\tau} = \Omega^2. \quad (36)$$

Так как система (26) автономна, гамильтониан (35) является первым интегралом:

$$H = p\Omega - \psi\Omega^2 = H_0, \quad (37)$$

где H_0 — постоянная. Найдем максимум гамильтониана (35) по управлению $\Omega \in [0, \Omega_+]$. Так как $\psi \geq 0$, имеем

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{при } p < 0, \\ \frac{p}{2\psi} & \text{при } \frac{p}{2\psi} \in [0, \Omega_+], \\ \Omega_+ & \text{при } \frac{p}{2\psi} > \Omega_+. \end{cases} \quad (38)$$

Рассмотрим последовательно три случая: $p(0) < 0$, $p(0) = 0$ и $p(0) > 0$.

1. Пусть $p(0) < 0$. Так как в силу уравнения (36) и неравенства $\Omega \leq \Omega_+$ имеем $dp/d\tau \leq \Omega_+^2$, то $p(\tau) < 0$ на некотором интервале $[0, \Delta]$, где $\Delta = -p(0)\Omega_+^{-2} > 0$. Следовательно, согласно условиям (38) получим $\Omega = 0$ на интервале $[0, \Delta]$. Тогда в силу уравнения (36) имеем $p(\Delta) = p(0) < 0$. Продолжая этот процесс для интервалов $[\Delta, 2\Delta]$, $[2\Delta, 3\Delta]$, ..., приходим к заключению, что $p(\tau) \equiv p(0) < 0$ на всем интервале $\tau \in [0, \theta]$. Поэтому согласно (38) получим $\Omega(\tau) \equiv 0$ на всем интервале $\tau \in [0, \theta]$. Из первого уравнения (26) и начального условия $\psi(0) = 0$ из (28) тогда следует, что $\psi(\tau) \equiv 0$ и краевое условие $\psi(\theta) = \psi_0 > 0$ не удовлетворяется. Следовательно, неравенство $p(0) < 0$ противоречит наложенным условиям и не отвечает искомому решению.

2. Пусть теперь $p(0) = 0$. Подставляя начальные значения $\psi(0) = p(0) = 0$ в (37), получим $H_0 = 0$, т. е.

$$(p - \Omega\psi)\Omega = 0$$

для всех $\tau \in [0, \theta]$. Таким образом, интервал $[0, \theta]$ состоит из чередующихся подынтервалов двух типов: на подынтервалах первого типа имеем $\Omega = 0$, и, вследствие уравнений (26) и (36), $\psi = \text{const}$ и $p = \text{const}$, а на подынтервалах второго типа $p = \Omega\psi$. Дифференцируя равенство $p = \Omega\psi$ и используя уравнения (26) и (36), получим

$$\frac{d(p - \Omega\psi)}{d\tau} = -\psi \frac{d\Omega}{d\tau} = 0,$$

т. е. $\Omega = \text{const}$ на подынтервалах второго типа. Значение Ω для всех подынтервалов второго типа должно быть одним и тем же, так как на каждом подынтервале первого типа, расположенном между двумя соседними подынтервалами второго типа, ψ и p сохраняются постоянными и поэтому отношение $\Omega = p/\psi$ будет одинаковым для всех подынтервалов второго типа. Типичное поведение функции $\psi(\tau)$ для случая $p(0) = 0$ показано на рис. 3. Имеем $\Omega = d\psi/d\tau = \Omega_1 = 0$ для подынтервалов первого типа и $\Omega = \Omega_2 > 0$ для подынтервалов второго типа. Обозначим через θ_1 и θ_2 суммарную длительность подынтервалов первого и второго типов соответственно. Имеем $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Из граничных условий (28) следует

$$\Omega_2 = \frac{\psi_0}{\theta_2}. \quad (39)$$

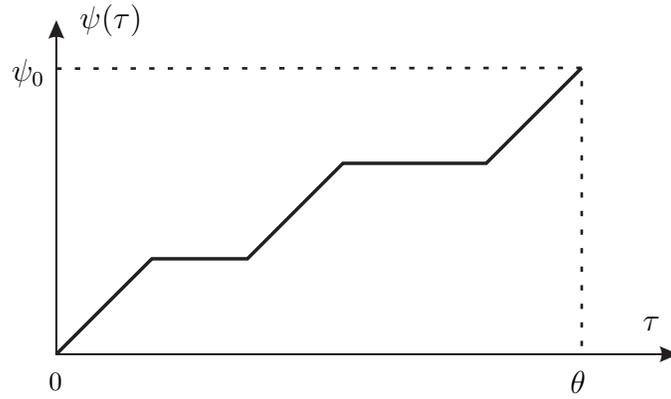


Рис. 3. Функция $\psi(\tau)$ для задачи 1 в случае $p(0) = 0$.

Оценим величину $z(\theta)$ или, что то же, первый из интегралов (25). Очевидно, что только подынтервалы второго типа вносят вклад в этот интеграл, и для его вычисления можно просто отбросить подынтервалы первого типа, заменив функцию $\psi(\tau)$ на рис. 3 линейной функцией $\psi = \Omega_2\tau$. Получим

$$z(\theta) = \Omega_2^2 \int_0^{\theta_2} \Omega_2\tau \, d\tau = \frac{\Omega_2^3\theta_2^2}{2}.$$

Подставим в это выражение Ω_2 из (39):

$$z(\theta) = \frac{\psi_0^3}{2\theta_2}. \quad (40)$$

Параметр θ_2 следует выбрать так, чтобы $z(\theta)$ было минимально. Так как $\theta_1 + \theta_2 = \theta$, то минимум в (40) достигается при максимально возможном $\theta_2 = \theta$, при этом $\theta_1 = 0$ и подынтервалы первого типа отсутствуют. В результате получим из (40)

$$z(\theta) = \frac{\psi_0^3}{2\theta}. \quad (41)$$

Соответствующее значение Ω_2 согласно (39) равно

$$\Omega_2 = \frac{\psi_0}{\theta}.$$

Заметим, что в силу условия (31) имеем $\Omega_2 \leq \Omega_+$, т. е. данное значение Ω_2 допустимо.

3. Осталось рассмотреть случай $p(0) = p_0 > 0$. В начале интервала $[0, \theta]$, ввиду начального условия $\psi(0) = 0$ из (28), выполняется неравенство $p/(2\psi) > \Omega_+$ и имеет место третья возможность, предусмотренная равенствами (38). В силу соотношений (38), (26), (28) и (36) получим

$$\Omega = \Omega_+, \quad \psi = \Omega_+\tau, \quad p = p_0 + \Omega_+^2\tau \quad \text{при} \quad \tau \in (0, \tau_*). \quad (42)$$

Эти равенства справедливы, если $p/(2\psi) > \Omega_+$, и момент τ_* определяется условием $p/(2\psi) = \Omega_+$. Подставляя в это условие формулы (42), получим значение τ_* в виде

$$\tau_* = p_0\Omega_+^{-2}. \quad (43)$$

В момент $\tau = \tau_*$ имеем согласно (42) и (43):

$$\Omega = \Omega_+, \quad \psi = p_0\Omega_+^{-1}, \quad p = 2p_0 \quad \text{при} \quad \tau = \tau_*.$$

В полученных формулах выразим p_0 через τ_* при помощи равенства (43):

$$\Omega = \Omega_+, \quad \psi = \Omega_+ \tau_*, \quad p = 2\Omega_+^2 \tau_* \quad \text{при} \quad \tau = \tau_*. \quad (44)$$

При $\tau > \tau_*$ имеет место вторая возможность в (38), так что здесь

$$p = 2\Omega\psi. \quad (45)$$

Подставляя p из (45) в соотношение (37), получим

$$\psi\Omega^2 = H_0. \quad (46)$$

Подставим в это равенство значения Ω и ψ в момент $\tau = \tau_*$ из (44) и найдем величину постоянной H_0 :

$$H_0 = \Omega_+^3 \tau_*.$$

Найденное значение H_0 и равенство $\Omega = d\psi/dt$ из (26) подставим в соотношение (46). Получим дифференциальное уравнение для функции $\psi(\tau)$:

$$\psi \left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 = \Omega_+^3 \tau_*.$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии (44) для ψ в момент $\tau = \tau_*$, найдем функцию $\psi(\tau)$ и ее производную $\Omega(\tau)$ в виде

$$\psi(\tau) = \Omega_+ \tau_* \left[1 + \frac{3(\tau - \tau_*)}{2\tau_*} \right]^{2/3}, \quad \Omega(\tau) = \Omega_+ \left[1 + \frac{3(\tau - \tau_*)}{2\tau_*} \right]^{-1/3}, \quad \tau \geq \tau_*. \quad (47)$$

Из равенств (45) и (47) следует, что отношение $p/(2\psi) = \Omega$ убывает от Ω_+ до 0 при изменении τ от τ_* до ∞ . Поэтому неравенства

$$0 < \frac{p}{2\psi} < \Omega_+$$

справедливы при всех $\tau > \tau_*$ и, следовательно, вторая возможность (38) реализуется на всем интервале $[\tau_*, \theta]$.

Чтобы определить величину τ_* , воспользуемся граничным условием $\psi(\theta) = \psi_0$ из (28). Подставляя в это условие равенство (47) для $\psi(\tau)$, получим уравнение для определения τ_* :

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\tau_*}{\theta} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_*}{\theta} \right)^{3/2} = \left(\frac{\psi_0}{\Omega_+ \theta} \right)^{3/2}.$$

Возведем в квадрат обе части полученного уравнения и обозначим $\tau_*/\theta = s$. Получим следующее кубическое уравнение для s :

$$s(3-s)^2 = 4q, \quad s = \frac{\tau_*}{\theta}, \quad q = \left(\frac{\psi_0}{\Omega_+ \theta} \right)^3. \quad (48)$$

Когда s изменяется от 0 до 1, левая часть уравнения (48) для s монотонно возрастает от 0 до 4. Так как в силу неравенства (31) $q \leq 1$, то уравнение (48) для s имеет единственное решение, лежащее в интервале $(0, 1)$. Таким образом, определяется единственное решение для s и параметра $\tau_* = \theta s$.

Тем самым полностью определено решение задачи 1 в случае $p(0) > 0$. Оно задано соотношениями (42) и (47) на соответствующих интервалах $(0, \tau_*)$ и (τ_*, θ) , а параметр τ_* определен равенствами (48).

Оценим значение минимизируемого функционала $z(\theta)$ для данного случая. Для этого подставим решения (42) и (47) в первый из интегралов (25). Имеем

$$z(\theta) = \int_0^{\tau_*} \Omega_+^3 \tau d\tau + \int_{\tau_*}^{\theta} \Omega^2(\tau) \psi(\tau) d\tau = \frac{\Omega_+^3 \tau_*^2}{2} + \Omega_+^3 \tau_* (\theta - \tau_*) = \Omega_+^3 \left(\theta \tau_* - \frac{\tau_*^2}{2} \right).$$

Преобразуем полученное выражение при помощи соотношений (48). Получим

$$z(\theta) = \frac{\Omega_+^3 \theta^2 s(2-s)}{2} = 2\Omega_+^3 \theta^2 q(3-s)^{-2}(2-s) = \frac{2\psi_0^3 (2-s)(3-s)^{-2}}{\theta}. \quad (49)$$

Чтобы найти оптимальное решение задачи 1, достаточно сравнить два значения функционала $z(\theta)$: значение (41) для случая $p(0) = 0$ и значение (49) для случая $p(0) > 0$. Второе из этих значений меньше, если выполнено неравенство

$$4(2-s)(3-s)^{-2} < 1. \quad (50)$$

В справедливости неравенства (50) при всех $s \in (0, 1)$ нетрудно убедиться.

Итак, единственное решение задачи 1 определено соотношениями (42) и (47) на интервалах $(0, \tau_*)$ и (τ_*, θ) соответственно. Момент $\tau_* = \theta s$ определен посредством кубического уравнения (48) для s , которое имеет единственное решение в интервале $s \in (0, 1)$ для любых допустимых значений ψ_0, θ и Ω_+ . Минимальное значение функционала $z(\theta)$ задано равенством (49).

6. Оптимальное решение

Обратимся к решению задачи 2, определенной соотношениями (26) и (29). Гамильтониан для этой задачи равен

$$H = p\Omega + \psi\Omega^2,$$

где p — сопряженная переменная. Так как $\psi \geq 0$, то этот гамильтониан является выпуклой функцией Ω и его максимум по Ω при ограничениях (29) достигается на одной из границ интервала $[-\Omega_-, 0]$.

Рассмотрим наиболее общую ситуацию: интервал $\tau \in [\theta, 1]$, на котором ищется решение задачи 2, состоит из чередующихся подынтервалов двух типов, причем $\Omega = 0$ и $\Omega = -\Omega_-$ на подынтервалах первого и второго типов соответственно. В силу первого уравнения (26) функция $\psi(\tau)$ постоянна на подынтервалах первого типа и $d\psi/d\tau = -\Omega_-$ на каждом подынтервале второго типа. Типичное поведение функции $\psi(\tau)$ на интервале $[\theta, 1]$ изображено на рис. 4; оно подобно графику рис. 3.

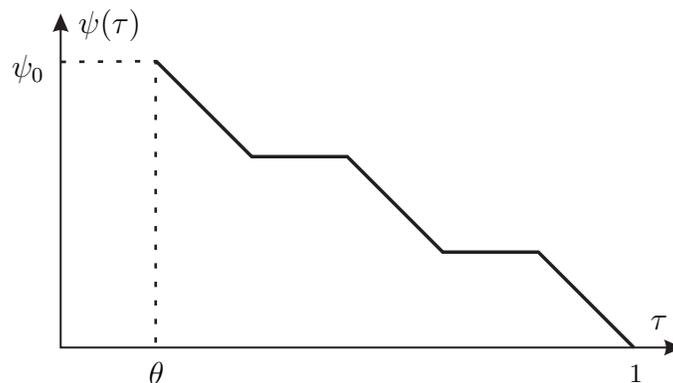


Рис. 4. Функция $\psi(\tau)$ для задачи 2.

Обозначим через θ'_1 и θ'_2 суммарные длительности подынтервалов первого и второго типов соответственно. Имеем

$$\theta'_1 + \theta'_2 = 1 - \theta. \quad (51)$$

На основании краевых условий (29) получим

$$\theta'_2 = \frac{\psi_0}{\Omega_-}. \quad (52)$$

Подсчитаем значение функционала $z(1)$ задачи 2, равное второму из интегралов (25). Вклад подынтервалов первого типа в этот интеграл равен нулю, а вклад подынтервалов второго типа будет таким же, как у линейной функции $\psi = \psi_0 - \Omega_- \tau$. Поэтому имеем

$$z(1) = \Omega_-^2 \int_0^{\theta'_2} (\psi_0 - \Omega_- \tau) d\tau = \Omega_-^2 \theta'_2 \left(\psi_0 - \frac{\Omega_- \theta'_2}{2} \right).$$

В полученную формулу подставим значение θ'_2 из (52):

$$z(1) = \frac{\psi_0^2 \Omega_-}{2}. \quad (53)$$

Таким образом, решение задачи 2 неединственно. Оптимальное управление $\Omega(\tau)$ на интервале $[\theta, 1]$ принимает в каждой точке одно из двух значений: 0 или $-\Omega_-$, причем суммарная длительность подынтервалов второго типа, на которых $\Omega = -\Omega_-$, равна θ'_2 и определена формулой (52). Соответствующее максимальное значение функционала $z(1)$ задачи 2 определено равенством (53).

Теперь, когда решения задач 1 и 2 получены, определим параметр θ из условия минимума по $\theta \in [0, 1]$ функционала (30).

На основании равенств (30), (49) и (53) имеем

$$-I_0 = z(1) - z(\theta) = \frac{\psi_0^2 \Omega_-}{2} - \frac{2\psi_0^3 (2-s)(3-s)^{-2}}{\theta}. \quad (54)$$

Сначала докажем, что это выражение положительно при условии $\Omega_- \geq \Omega_+$. Принимая во внимание неравенства (50) и (31), получим из (54) при $\Omega_- \geq \Omega_+$:

$$-I_0 > \frac{\psi_0^2 \Omega_-}{2} - \frac{\psi_0^3}{2\theta} \geq \frac{\psi_0^2 \Omega_-}{2} - \frac{\psi_0^2 \Omega_+}{2} \geq 0.$$

Следовательно, $I_0 < 0$ при всех допустимых θ и s , если $\Omega_- \geq \Omega_+$.

Выразим θ как функцию s при помощи равенств (48). Имеем

$$\theta = 2^{2/3} \left(\frac{\psi_0}{\Omega_+} \right) s^{-1/3} (3-s)^{-2/3}. \quad (55)$$

Подставляя выражение (55) для θ в формулу (54), получим после преобразований

$$-I_0 = a_1 - a_2 [f(s)]^{1/3}, \quad f(s) = s(2-s)^3 (3-s)^{-4}, \quad (56)$$

где a_1 и a_2 — положительные постоянные, не зависящие от θ и s .

Требуется найти максимум по s выражения $-I_0$ из (56), что эквивалентно отысканию минимума по s функции $f(s)$. Пользуясь равенствами (55) и (56), нетрудно проверить, что

$$\frac{d\theta}{ds} < 0, \quad \frac{df}{ds} = 6(1-s)(2-s)^2(3-s)^{-5} > 0$$

при $s < 1$. Следовательно, максимум $-I_0$ достигается при наименьшем допустимом s , что соответствует наибольшему допустимому значению параметра θ . Согласно условиям (33), наибольшее допустимое значение θ равно

$$\theta = 1 - \frac{\psi_0}{\Omega_-}. \quad (57)$$

Из соотношений (51), (52) и (57) следует, что $\theta'_1 = 0$, $\theta'_2 = \theta$. Таким образом, подынтервалы первого типа на интервале $(\theta, 1)$ отсутствуют и имеем

$$\Omega = -\Omega_-, \quad \psi = \Omega_-(1 - \tau) \quad (58)$$

на всем интервале $\tau \in (\theta, 1)$.

Суммируем полученные результаты. Максимальная безразмерная средняя скорость w^* определяется соотношениями (19) и (54) в виде

$$w^* = \left[\psi_0^2 + \frac{\psi_0^2 \Omega_-}{2} - \frac{2\psi_0^3(2-s)(3-s)^{-2}}{\theta} \right]^{1/2} - \psi_0, \quad (59)$$

где θ задается формулой (57), а параметр s есть единственный корень кубического уравнения, вытекающего из (48) и (57)

$$s(3-s)^2 = 4 \left(\frac{\psi_0}{\Omega_+} \right)^3 \left(1 - \frac{\psi_0}{\Omega_-} \right)^{-3}, \quad s \in (0, 1). \quad (60)$$

Оптимальное управление $\Omega(\tau)$ и соответствующая фазовая переменная $\psi(\tau)$ определяются соотношениями (42), (47) и (58) в виде

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_+, \quad \psi = \Omega_+ \tau \quad \text{при } \tau \in (0, \tau_*), \\ \Omega &= \Omega_+ \left[1 + \frac{3(\tau - \tau_*)}{2\tau_*} \right]^{-1/3}, \quad \psi = \Omega_+ \tau_* \left[1 + \frac{3(\tau - \tau_*)}{2\tau_*} \right]^{2/3} \quad \text{при } \tau \in (\tau_*, \theta), \\ \Omega &= -\Omega_-, \quad \psi = \Omega_-(1 - \tau) \quad \text{при } \tau \in (\theta, 1), \quad \tau_* = s\theta, \quad \theta = 1 - \frac{\psi_0}{\Omega_-}. \end{aligned} \quad (61)$$

Рассмотрим предельные случаи, в которых отсутствует одно из ограничений в неравенствах (27).

Если отсутствует верхнее ограничение ($\Omega_+ \rightarrow \infty$), получим из (60) и (61): $s = 0$, $\tau_* = 0$. В этом случае первый участок в (61) отсутствует, и оптимальное решение (61) принимает вид

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{2}{3} \psi_0 \theta^{-2/3} \tau^{-1/3}, \quad \psi = \psi_0 \left(\frac{\tau}{\theta} \right)^{2/3} \quad \text{при } \tau \in (0, \theta), \\ \Omega &= -\Omega_-, \quad \psi = \Omega_-(1 - \tau) \quad \text{при } \tau \in (\theta, 1), \quad \theta = 1 - \frac{\psi_0}{\Omega_-}, \end{aligned}$$

$$w^* = \left(\psi_0^2 + \frac{\psi_0^2 \Omega_-}{2} - \frac{4}{9} \frac{\psi_0^3}{\theta} \right)^{1/2} - \psi_0.$$

Если же в (27) отсутствует нижнее ограничение ($\Omega_- \rightarrow \infty$), то из (57) и (59) получим $\theta = 1$, $w^* \rightarrow \infty$. В этом случае интервал $(\theta, 1)$ стягивается в точку, фаза приведения звеньев к оси происходит мгновенно, а скорость перемещения стремится к бесконечности.

Оптимальное решение в безразмерных переменных полностью построено. Для перехода к исходным размерным переменным следует воспользоваться соотношениями (10), причем максимальная размерная средняя скорость перемещения равна $v^* = \mu a w^* / T_0$.

Выше подробно рассмотрен случай двух симметричных звеньев OA и $O'A'$, присоединенных к телу. В случае одного звена (хвоста), совершающего колебания, симметричные относительно оси Cx , решение в силу замечаний в конце разд. 1 получается из представленного решения простым пересчетом.

7. Пример

Рассмотрим числовой пример. Положим

$$\psi_0 = 1, \quad \Omega_+ = 2, \quad \Omega_- = 8.$$

Условие (34) при этом соблюдается. Из формул (57), (59), (60) имеем для данного примера

$$\theta = 0.875, \quad s = 0.088, \quad \tau_* = 0.077, \quad w^* = 1.118. \quad (62)$$

Графики функций $\Omega(\tau)$ и $\psi(\tau)$, полученные для этого примера при помощи равенств (61), изображены на рис. 5 и 6.

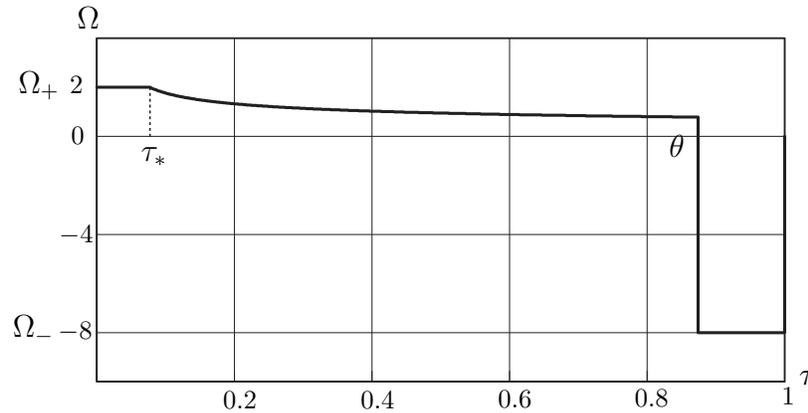


Рис. 5. Оптимальное управление $\Omega(\tau)$.

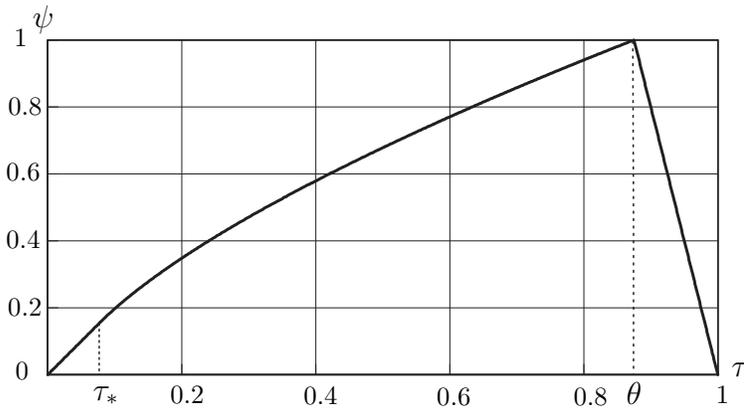


Рис. 6. Оптимальная траектория $\psi(\tau)$.

Сравним это оптимальное решение со случаем кусочно-линейной функции $\psi(\tau)$, рассмотренным в разд. 3. Выберем в соотношениях (20) параметры b_1 , b_2 и θ так, чтобы кусочно-линейная функция $\psi(\tau)$ совпадала с оптимальной из рис. 6 в трех точках: $\tau = 0$, $\tau = \theta$ и $\tau = 1$. Получим $b_1 = 8/7$, $b_2 = 8$, $\theta = 0.875$.

Соответствующая безразмерная средняя скорость, вычисленная по формуле (23), равна

$$w^* = 1.104.$$

Отличие ее от максимального значения (62) для оптимального решения не превышает 1.5%.

8. Учет подъемной силы

Выше рассматривался случай, в котором действие гидродинамических сил на каждое из подвижных звеньев OA и $O'A'$ сводится к силе сопротивления, приложенной к концу звена A (или A') и направленной против скорости конца этого звена. Предположим, что на конце каждого звена имеется плоская прямоугольная пластина, длинная сторона которой направлена перпендикулярно плоскости Sxy , а короткая сторона направлена вдоль звена OA ($O'A'$). В этом случае помимо сил сопротивления следует учесть влияние подъемных сил, действующих на пластины и направленных перпендикулярно скорости центра этих пластин. Оценки и результаты компьютерного моделирования, выполненные студентами Московского физико-технического института С.А. Гаврилиным и А.С. Олейником, показывают, что учет подъемных сил всегда приводит к увеличению средней скорости движения системы. Некоторые результаты численного моделирования представлены на рис. 7, 8, где изображены зависимости средней скорости перемещения системы v^* от длины звеньев a (см. рис. 7) и от угловой скорости вращения звеньев ω_1 (см. рис. 8). Нижние кривые 1 на этих рисунках отвечают отсутствию подъемной силы, а верхние 2 построены с учетом подъемной силы.

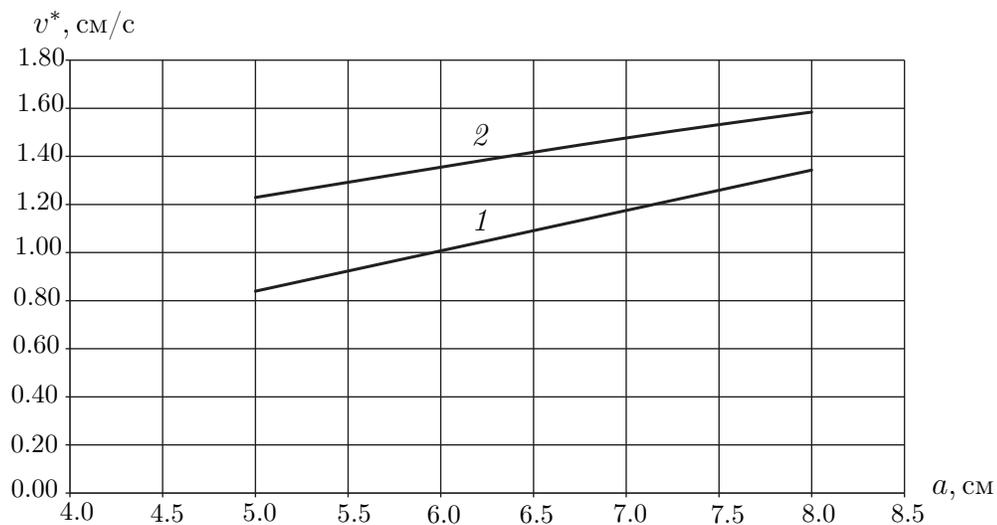


Рис. 7. Зависимость скорости от длины звеньев.

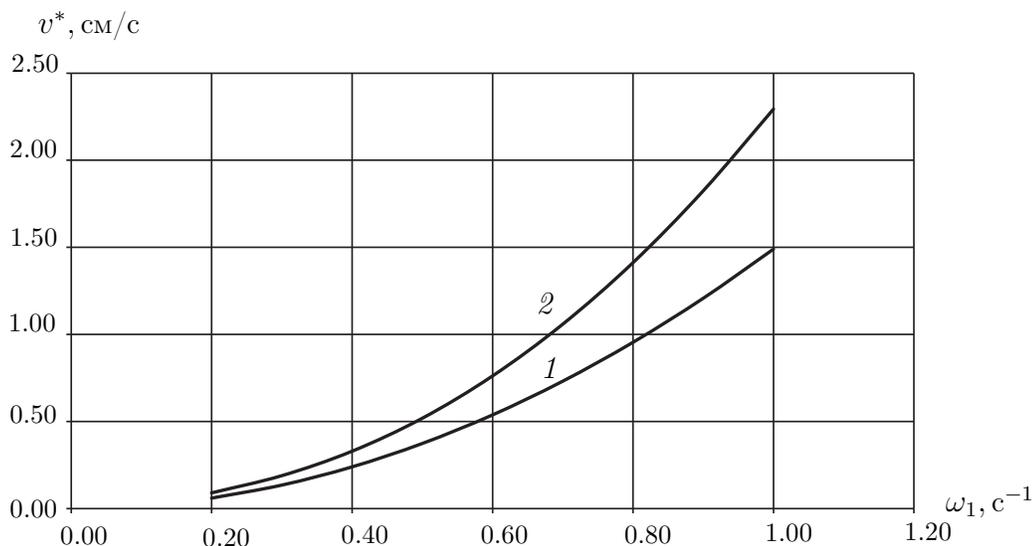


Рис. 8. Зависимость скорости от угловой скорости звеньев.

Заключение

Исследовано движение в сопротивляющейся среде механической системы, состоящей из основного тела и одного или двух звеньев, совершающих периодические колебания относительно тела. При помощи асимптотического метода усреднения получена формула для средней скорости перемещения системы. Показано, что, в случае кусочно-постоянной угловой скорости звеньев, система может перемещаться поступательно, если угловая скорость приведения звеньев к оси тела больше, чем угловая скорость их отведения от оси. Этот вывод согласуется с данными наблюдений за плаванием животных.

Поставлена и решена в явном виде задача оптимального управления колебаниями звеньев, при которых достигается максимальная средняя скорость перемещения системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gray J.** Animal locomotion. New York: Norton, 1968. 479 p.
2. **Lighthill J.** Mathematical biofluidynamics. Philadelphia: SIAM, 1975. 281 p.
3. **Blake R.W.** Fish locomotion. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. 208 p.
4. **Hirose S.** Biologically inspired robots: snake-like locomotors and manipulators. Oxford: Oxford University Press, 1993. 220 p.
5. **Terada Y., Yamamoto I.** Development of oscillating fin propulsion system and its application to ships and artificial fish // Mitsubishi Heavy Industries Tech. Review. 1999. Vol. 36. P. 84–88.
6. **Mason R., Burdick J.** Construction and modelling of a carangiform robotic fish // Experimental Robotics VI. Lecture Notes in Control and Information Sciences. 2000. Vol. 250. P.235–242.
7. **Morgansen K.A., Duijndam V., Mason R.J., Burdick J.W., Murray R.M.** Nonlinear control methods for planar carangiform robot fish locomotion // Proc. 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2001. P. 427–434.
8. **Colgate J.E., Lynch K.M.** Mechanics and control of swimming: a review // IEEE J. of Oceanic Engineering. 2004. Vol. 29. P. 660–673.
9. RoboTuna. From Wikipedia, the free encyclopedia.
URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/RoboTuna#References>.
10. **Черноуцько Ф.Л.** Движение многозвенника по горизонтальной плоскости // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 1. С. 8–18.
11. **Черноуцько Ф.Л.** Волнообразные движения многозвенника по горизонтальной плоскости // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, вып. 4. С. 518–531.
12. **Chernousko F.L.** Snake-like locomotion of multilink mechanisms // J. Vibration and Control. 2003. Vol. 9, no. 1–2. P. 235–256.
13. **Черноуцько Ф.Л.** Движение многозвенников по плоскости // Проблемы механики: сб. ст. к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. Москва: Физматлит, 2003. С. 783–802.
14. **Черноуцько Ф.Л.** О перемещении тела в жидкости за счет колебаний присоединенного звена // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 1. С. 46–49.
15. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
16. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. М.: Наука, 1983. 393 с.

Черноуцько Феликс Леонидович
академик РАН
д-р физ.-мат. наук
директор

Поступила 15.11.2010

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН
e-mail: chern@ipmnet.ru

УДК 517.977

О ЛИНЕЙНЫХ КОНФЛИКТНО УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОЦЕССАХ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

А. А. Чикрий, И. И. Матичин

Рассматривается задача управления квазилинейными процессами с дробными производными в условиях противодействия. Изучаются дробные производные Хильфера, включающие в себя, в частности, классические производные Римана — Лиувилля и регуляризованные производные Капуто. Получено представление решений таких систем, позволяющее на основе метода разрешающих функций получить гарантированный результат при сближении траектории с заданным целевым множеством. Качественные результаты иллюстрируются на примере с уравнением Багли — Торвика, описывающим затухающие колебания с дробным демпфированием, и на игровой задаче с уравнением дробной релаксации.

Ключевые слова: игровая задача, дробная производная, многозначное отображение, колебательный процесс, дробная релаксация.

A. A. Chikrii, I. I. Matichin. On linear conflict-controlled processes with fractional derivatives.

A control problem is considered for quasilinear processes with fractional derivatives under counteraction. Hilfer fractional derivatives are studied, which, in particular, include the classical Riemann–Liouville fractional derivatives and Caputo regularized derivatives. A representation for solutions of such systems is presented, which allows to obtain, using the method of resolving functions, a guaranteed result for the approach of a trajectory to a given target set. Qualitative results are illustrated by an example with the Bagley–Torvik equation, which describes damped oscillations with fractional damping, and by a game problem with the equation of fractional relaxation.

Keywords: game problem, fractional derivative, set-valued mapping, oscillatory process, fractional relaxation.

Введение

Большинство исходных идей теории дифференциальных игр сосредоточено в работах [1–4]. Их развивают и дополняют исследования [5–14]. Однако наступает момент, когда кроме углубленного изучения методов, ставших классическими, возникает необходимость рассмотрения вопроса о широте тех классов задач, к которым применимы уже разработанные и хорошо зарекомендовавшие себя методы. По этой причине для описания динамики объектов наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями используются процессы более сложной природы.

Так, в работах [15–19] исследованы конфликтно управляемые процессы с последствием (дифференциально-разностные игры) на основе правила экстремального прицеливания Н.Н. Красовского, прямые методы Л.С. Понтрягина применены к упомянутым задачам в работе [20], а в статье [21] продемонстрированы возможности метода разрешающих функций для решения дифференциально-разностных игр сближения.

Системы с распределенными параметрами в игровой ситуации изучены в работах Ю.С. Осипова [22, 23] с использованием правила экстремального прицеливания, игровые задачи в банаховом пространстве исследованы в работе М.С. Никольского [24] на основе первого прямого метода.

Управляемые процессы для интегральных уравнений Вольтерра и интегро-дифференциальных уравнений в условиях конфликтного взаимодействия рассмотрены в работе [25]. При этом использован метод разрешающих функций, базирующийся на использовании обратных функционалов Минковского и дающий полное обоснование правила параллельного сближения для сравнительно простых систем [7].

Попытка исследовать конфликтно управляемые процессы на основе лишь достаточно общего представления решения, предпринятая в [26], привела естественным образом к процессам, описываемым системами с дробными производными. В работах [26–29] рассмотрены игровые задачи сближения для линейных процессов произвольного дробного порядка с классическими производными Римана — Лиувилля, регуляризованными производными Капуто и секвенциальными производными Миллера — Росса [30–33].

В данной работе изучаются игровые задачи для систем с дробными производными Хильфера [34] произвольного порядка α , $\alpha > 0$, типа μ , $0 \leq \mu \leq 1$. Заметим, что при $\mu = 0$ эти производные совпадают с производными Римана — Лиувилля, а при $\mu = 1$ — с производными Капуто. Получены достаточные условия приведения траектории конфликтно-управляемого процесса с дробными производными Хильфера на заданное цилиндрическое множество за некоторое гарантированное время с использованием контруправлений. Результаты иллюстрируются на примере игровой задачи для колебательного процесса второго порядка с дробным демпфированием, описываемого уравнением Багли — Торвика [35], а также на динамической игре для системы первого порядка (с дробной составляющей), описывающей процесс релаксации при стеклообразовании переохлажденных жидкостей. Работа продолжает исследования [26–29].

1. Дробное интегро-дифференцирование

Обозначим $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Пусть $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция.

Правосторонний интеграл Римана — Лиувилля порядка α , $0 < \alpha \leq 1$, от функции f определяется как

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau,$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du$ — гамма-функция. Здесь и далее будем полагать, что J^0 представляет собой оператор тождественного преобразования: $J^0 f(t) \equiv f(t)$.

Для существования интеграла Римана — Лиувилля достаточно предположить, что $f(t)$, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ — локально интегрируемая на \mathbb{R}_+ функция.

Пусть теперь $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \mu \leq 1$. Согласно Хильферу [34] введем производную дробного порядка α типа μ следующим образом:

$$D^{\alpha, \mu} f(t) = J^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} J^{(1-\mu)(1-\alpha)} f(t). \quad (1.1)$$

При $\mu = 0$ это определение дает классическую производную Римана — Лиувилля:

$$D^{\alpha, 0} f(t) = D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (1.2)$$

а при $\mu = 1$ мы получаем регуляризованную производную Капуто:

$$D^{\alpha, 1} f(t) = D^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau.$$

Применяя преобразование Лапласа к производной Хильфера порядка $0 < \alpha < 1$ типа μ , получим

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha, \mu} f(t); s\} = s^\alpha F(s) - s^{\mu(\alpha-1)} J^{(1-\mu)(1-\alpha)} f(t)|_{t=0+},$$

где $F(s)$ — образ функции $f(t)$.

Очевидно, что при $\mu = 0$ мы получим преобразование Лапласа для производной Римана — Лиувилля:

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - J^{1-\alpha} f(t)|_{t=0+},$$

а при $\mu = 1$ — преобразование Лапласа для производной Капуто:

$$\mathcal{L}\{D^{(\alpha)} f(t); s\} = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} f(0+).$$

Отметим, что определение производной Хильфера можно распространить и на случай порядка больше единицы. Пусть теперь $m - 1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$, а функция f имеет абсолютно непрерывные производные до порядка m . Положим производную порядка α типа $0 \leq \mu \leq 1$ равной

$$D^{\alpha, \mu} f(t) = J^{\mu(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} J^{(1-\mu)(m-\alpha)} f(t). \quad (1.3)$$

В таком случае при $\mu = 0$ мы также получим производную Римана — Лиувилля порядка α :

$$D^{\alpha, 0} f(t) = D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\alpha} f(t), \quad (1.4)$$

а типу $\mu = 1$ соответствует производная Капуто:

$$D^{\alpha, 1} f(t) = D^{(\alpha)} f(t) = J^{m-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} f(t). \quad (1.5)$$

Производные Римана — Лиувилля и Капуто высших порядков связаны соотношением

$$D^{(\alpha)} f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{t^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} f^{(i)}(0) = D^\alpha \left[f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{t^i}{i!} f^{(i)}(0) \right]. \quad (1.6)$$

Чтобы получить преобразование Лапласа производной вида (1.3), необходимо воспользоваться следующими формулами:

$$\mathcal{L}\{J^\alpha f(t); s\} = s^{-\alpha} F(s), \quad (1.7)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^k}{dt^k} f(t); s\right\} = s^k F(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^{k-i-1} f^{(i)}(0) = s^k F(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(k-i-1)}(0). \quad (1.8)$$

Тогда, учитывая (1.7), (1.8), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^{\alpha, \mu} f(t); s\} &= \mathcal{L}\left\{J^{\mu(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} J^{(1-\mu)(m-\alpha)} f(t); s\right\} = s^{\mu(\alpha-m)} \mathcal{L}\left\{\frac{d^m}{dt^m} J^{(1-\mu)(m-\alpha)} f(t); s\right\} \\ &= s^{\mu(\alpha-m)} \left[s^m \mathcal{L}\{J^{(1-\mu)(m-\alpha)} f(t); s\} - \sum_{i=0}^{m-1} s^i \frac{d^{m-i-1}}{dt^{m-i-1}} J^{(1-\mu)(m-\alpha)} f(t) \Big|_{t=0} \right]. \end{aligned}$$

Окончательно будем иметь

$$\mathcal{L}\{D^{\alpha, \mu} f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^{\mu(\alpha-m)+i} \frac{d^{m-i-1}}{dt^{m-i-1}} J^{(1-\mu)(m-\alpha)} f(t) \Big|_{t=0}. \quad (1.9)$$

В силу (1.4) при $\mu = 0$ формула (1.9) дает преобразование Лапласа для производной Римана — Лиувилля:

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^i D^{\alpha-i-1} f(t) \Big|_{t=0}.$$

При $\mu = 1$ из формулы (1.9) мы получаем преобразование Лапласа для производной Капуто произвольного порядка α , $m - 1 < \alpha < m$:

$$\mathcal{L}\{D^{(\alpha)} f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^{\alpha-m+i} \frac{d^{m-i-1}}{dt^{m-i-1}} f(t) \Big|_{t=0} = s^\alpha F(s) - \sum_{i=0}^{m-1} s^{\alpha-i-1} \frac{d^i}{dt^i} f(t) \Big|_{t=0}.$$

2. Представление решений уравнений дробного порядка

Рассмотрим обобщенную матричную функцию Миттаг-Леффлера:

$$E_\rho(B; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)},$$

где $\rho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ (\mathbb{C} — множество комплексных чисел), а B — произвольная квадратная матрица порядка n .

Обобщенная матричная функция Миттаг-Леффлера играет важную роль при изучении линейных систем дробного порядка. Будем обозначать I единичную матрицу порядка n . Справедлива следующая лемма, которая позволяет находить преобразование Лапласа выражений, содержащих обобщенную матричную функцию Миттаг-Леффлера.

Лемма 1. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, A — произвольная квадратная матрица порядка n . Тогда справедлива формула

$$\mathcal{L} \left\{ t^{\beta-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; \beta); s \right\} = s^{\alpha-\beta} (s^\alpha I - A)^{-1}.$$

Доказательство. Учитывая определения обобщенной матричной функции Миттаг-Леффлера, гамма-функции и используя замену $\tau = st$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ t^{\beta-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; \beta); s \right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; \beta) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) s^{\alpha k + \beta}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\alpha k + \beta - 1} d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(\alpha k + \beta)}. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что $\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(\alpha k + \beta)} = s^{\alpha-\beta} (s^\alpha I - A)^{-1}$. Последнее равносильно равенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} = (s^\alpha I - A)^{-1}. \quad (2.1)$$

Домножим левую часть равенства (2.1) на $(s^\alpha I - A)$ (безразлично слева или справа, поскольку матрицы коммутируют). Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} (s^\alpha I - A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-k\alpha} - \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k+1)} s^{-(k+1)\alpha} = I.$$

Поскольку обратная матрица единственна, это завершает доказательство. \square

Пусть $z = z(t)$, $z \in \mathbb{R}^n$, — фазовый вектор, задающий состояние динамической системы в момент t , а эволюция системы описывается уравнением

$$D^{\alpha, \mu} z = Az + f, \quad m-1 < \alpha < m, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (2.2)$$

с начальными условиями

$$\frac{d^i}{dt^i} J^{(1-\mu)(m-\alpha)} z(t) \Big|_{t=0+} = z_i^0, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (2.3)$$

Применяя к левой и правой части уравнения (2.2) преобразование Лапласа, получим

$$s^\alpha Z - \sum_{i=0}^{m-1} s^{\mu(\alpha-m)+i} z_{m-i-1}^0 = AZ + F,$$

откуда

$$Z(s) = \sum_{i=0}^{m-1} s^{\mu(\alpha-m)+i} (s^\alpha I - A)^{-1} z_{m-i-1}^0 + (s^\alpha I - A)^{-1} F(s).$$

Применяя обратное преобразование Лапласа и учитывая лемму 1, а также очевидное равенство $\sum_{i=0}^{m-1} a_i = \sum_{i=0}^{m-1} a_{m-1-i}$, имеем

$$z(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^{i-(1-\mu)(m-\alpha)} E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; i - (1-\mu)(m-\alpha) + 1) z_i^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-\tau)^\alpha; \alpha) f(\tau) d\tau.$$

В частности, для производной Римана — Лиувилля при $\mu = 0$ получаем систему

$$D^\alpha \hat{z} = A\hat{z} + f, \quad m-1 < \alpha < m,$$

с начальными условиями

$$D^{\alpha-i} \hat{z}(t)|_{t=0} = \hat{z}_i^0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

Формула Коши для решения данной системы такова:

$$\hat{z}(t) = \sum_{i=1}^m t^{\alpha-i} E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; \alpha - i + 1) \hat{z}_i^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-\tau)^\alpha; \alpha) f(\tau) d\tau.$$

Положив $\mu = 1$, мы получаем регуляризованную производную Капуто, и система принимает вид

$$D^{(\alpha)} \check{z} = A\check{z} + f$$

с начальными условиями

$$\frac{d^i}{dt^i} \check{z}(t)|_{t=0+} = \check{z}_i^0, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (2.5)$$

Решение данной задачи Коши запишется в виде

$$\check{z}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; i+1) \check{z}_i^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-\tau)^\alpha; \alpha) f(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

3. Постановка задачи, схема метода

Рассмотрим квазилинейную конфликтно управляемую систему с дробной производной Хильфера произвольного порядка α , $\alpha > 0$, типа μ , $0 \leq \mu \leq 1$:

$$D^{\alpha,\mu} z = Az + \varphi(u, v), \quad m-1 < \alpha < m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Здесь фазовый вектор z принадлежит n -мерному вещественному евклидовому пространству \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, A — квадратная матрица порядка n , блок управления — непрерывная по совокупности переменных функция $\varphi(u, v)$, $\varphi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$, где u и v — управляющие параметры игроков, которые выбираются из множеств U и V , являющихся компактами пространства \mathbb{R}^n , $U, V \in K(\mathbb{R}^n)$.

Начальные условия для процесса (3.1) заданы в виде (2.3). В частности, при $\mu = 0$ эти условия принимают вид (2.4), а при $\mu = 1$ начальные условия задаются формулой (2.5). Обозначим $z^0 = (z_0^0, \dots, z_{m-1}^0)$.

Кроме динамического процесса (3.1) задано терминальное множество M^* , имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{3.2}$$

где M_0 — линейное подпространство в \mathbb{R}^n , а $M \in K(L)$, где $L = M_0^\perp$ — ортогональное дополнение к M_0 в \mathbb{R}^n .

Первый игрок (u) пытается вывести траекторию процесса (3.1) на множество (3.2), а второй (v) — максимально оттянуть момент попадания траектории на терминальное множество.

Приняв сторону первого игрока, будем считать, что он формирует свое управление на основании информации о z^0 и $v(t)$, т. е. $u(t) = u(z^0, v(t))$ и является контруправлением [1].

Изложим схему метода разрешающих функций [7] применительно к задаче (3.1), (3.2).

Обозначим через π ортопроектор, действующий из \mathbb{R}^n на L . Положив $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\}$, введем многозначные отображения

$$W(t, v) = \pi t^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; \alpha) \varphi(U, v), \quad W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v),$$

У с л о в и е П о н т р я г и н а. $\text{dom } W = [0, +\infty)$.

С учетом предположений о параметрах процесса (3.1) отображение $W(t)$ является замкнутозначным и измеримым по t . Поэтому в силу условия Понтрягина и теоремы измеримого выбора [36] в нем существует измеримый селектор $\gamma(\cdot)$, $t \geq 0$. Зафиксируем его и введем функцию

$$\xi(t, z^0, \gamma(\cdot)) = \pi \sum_{i=0}^{m-1} t^{i-(1-\mu)(m-\alpha)} E_{\frac{1}{\alpha}}(At^\alpha; i - (1-\mu)(m-\alpha) + 1) z_i^0 + \int_0^t \gamma(t-\tau) d\tau.$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{R}(t, \tau, v) = \left\{ \rho \geq 0 : [W(t-\tau, v) - \gamma(t-\tau)] \cap \rho[M(t) - \xi(t, z^0, \gamma(\cdot))] \neq \emptyset \right\}$$

и его опорную функцию в направлении $+1$

$$\rho(t, \tau, v) = \sup\{\rho : \rho \in \mathfrak{R}(t, \tau, v)\}.$$

Легко видеть, что функция $\rho(t, \tau, v)$ может быть выражена следующим образом:

$$\rho(t, \tau, v) = \sup_{m \in M} \rho_{W(t-\tau, v) - \gamma(t-\tau)}(m - \xi(t, z^0, \gamma(\cdot))),$$

где

$$\rho_X(x) = \sup\{\rho \geq 0 : \rho x \in X\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad X \in K(\mathbb{R}^n), \quad 0 \in X,$$

— обратный функционал Минковского [7]. Функцию $\rho(t, \tau, v)$ называют разрешающей [7].

Из теорем о характеристизации и обратном образе [36] следует, что многозначное отображение $\mathfrak{R}(t, \tau, v)$ является $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ -измеримым по совокупности τ, v . Следовательно, по теореме об опорной функции [36] функция $\rho(t, \tau, v)$ является $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ -измеримой, а значит и суперпозиционно измеримой. Она к тому же полунепрерывна сверху по v [7].

Рассмотрим множество

$$\mathfrak{T}(z^0, \gamma(\cdot)) = \left\{ t \in \mathbb{R}_+ : \inf_{v(\cdot) \in \Omega_V} \int_0^t \rho(t, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1 \right\},$$

где Ω_V — совокупность измеримых функций, принимающих значения из области V . Полагая $\mathfrak{T}(z^0, \gamma(\cdot)) \neq \emptyset$, зафиксируем в нем элемент T и сформулируем два условия.

У с л о в и е 1. $\mathfrak{R}(T, \tau, v) = [0, \rho(T, \tau, v)] \quad \forall \tau \in [0, T], \quad v \in V$.

У с л о в и е 2. $\inf_{v(\cdot) \in \Omega_V} \int_0^T \rho(T, \tau, v(\tau)) d\tau = \int_0^T \inf_{v \in V} \rho(T, \tau, v) d\tau$.

Теорема. Пусть для игровой задачи (3.1), (3.2), где конфликтно управляемый процесс содержит производные Хильфера, выполнено условие Понтрягина, $M = \text{co } M$, причем для начального состояния z^0 и селектора $\gamma(\cdot)$, $\gamma(t) \in W(t)$, $t \geq 0$, множество $\mathfrak{T}(z^0, \gamma(\cdot)) \neq \emptyset$ и $T \in \mathfrak{T}(z^0, \gamma(\cdot))$. Тогда, если для T выполнены условия 1 и 2, то траектория процесса (3.1) может быть приведена на множество (3.2) в момент T с помощью некоторого контруправления.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\tau)$, $\tau \in [0, T]$, — произвольное допустимое управление второго игрока. Пусть $\xi(T, z^0, \gamma(\cdot)) \notin M$. Учитывая условие 2, обозначим

$$\rho(T) = \int_0^T \inf_{v \in V} \rho(T, \tau, v) d\tau$$

и положим

$$\rho(T, \tau) = \frac{1}{\rho(T)} \inf_{v \in V} \rho(T, \tau, v).$$

Поскольку $\rho(T) \geq 1$, в силу определения момента T и условия 1 функция $\rho(T, \tau)$, $\rho(T, \tau) \leq \rho(T, \tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, является измеримым селектором для каждого из многозначных отображений $\mathfrak{R}(T, \tau, v)$, $v \in V$, т. е. $\rho(T, \tau) \in \mathfrak{R}(T, \tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$. Рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau, v) = \left\{ u \in U : \pi(T - \tau)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(T - \tau)^{\alpha}; \alpha) \varphi(u, v) - \gamma(T - \tau) \in \rho(T, \tau)[M(T) - \xi(T, z^0, \gamma(\cdot))] \right\}. \quad (3.3)$$

Из выражения (3.3) вытекает, что отображение $U(\tau, v)$ является компактнозначным и $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ -измеримым по совокупности τ, v , поэтому согласно теореме об измеримом выборе [36] в нем существует $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ -измеримый селектор $u(\tau, v)$, который, в свою очередь, является суперпозиционно измеримой функцией. Положим управление первого игрока равным $u(\tau) = u(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, T]$.

В случае $\xi(T, z^0, \gamma(\cdot)) \in M$ положим в выражении (3.3) $\rho(T, \tau) \equiv 0$ и выберем управление первого игрока аналогичным образом.

Покажем, что в момент T $\pi z(T) \in M$ в любом случае. Если $\xi(T, z^0, \gamma(\cdot)) \notin M$, то из представления решения системы (3.1) с учетом включения из выражения (3.3) получим

$$\pi z(T) \in \xi(T, z^0, \gamma(\cdot)) \left[1 - \int_0^T \rho(T, \tau) d\tau \right] + \int_0^T \rho(T, \tau) M d\tau. \quad (3.4)$$

Поскольку M — выпуклый компакт, а $\rho(T, \tau) \geq 0$, причем $\int_0^T \rho(T, \tau) d\tau = 1$, то $\int_0^T \rho(T, \tau) M d\tau = M$. Учитывая это обстоятельство, из включения (3.4) получим $\pi z(T) \in M$. В случае $\xi(T, z^0, \gamma(\cdot)) \in M$ с учетом правила выбора управления первым игроком и представления решений системы (3.1) непосредственно получим $\pi z(T) \in M$. \square

4. Колебательные процессы с дробным демпфированием

Большой интерес с практической точки зрения представляют собой уравнения вида

$$az'' + bD^{(\alpha)}z + cz = f, \quad 1 < \alpha < 2,$$

описывающие затухающие колебания с дробным (порядка α) демпфированием. Уравнениями такого вида, в частности, описываются колебания крыла самолета в сверхзвуковом потоке газа [37], приводящие к явлениям типа флаттера, колебаний наноразмерных сенсоров [38] и др. При $\alpha = 3/2$ данное уравнение называется уравнением Багли — Торвика и описывает колебания твердой пластины, погруженной в ньютоновскую жидкость.

При описании физических явлений и процессов, как правило используется производная Капуто, соответствующая типу $\mu = 1$, поскольку в таком случае начальные условия имеют ясную физическую интерпретацию. Рассмотрим уравнение Багли — Торвика с производной в смысле Капуто

$$ay''(t) + bD^{(3/2)}y(t) + cy(t) = f(t) \quad (4.1)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \quad (4.2)$$

Покажем, что данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} D^{(1/2)}z_1 = z_2 \\ D^{(1/2)}z_2 = z_3 \\ D^{(1/2)}z_3 = z_4 \\ D^{(1/2)}z_4 = \frac{1}{a}(-cz_1 - bz_4 + f) \end{cases}$$

или в матричной форме

$$D^{(1/2)}z = Az + Bf, \quad (4.3)$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c/a & 0 & 0 & -b/a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/a \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$ с начальными условиями

$$z(0) = z^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \\ y'_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Лемма 2. Пусть $y \in C^k[0, d]$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $d > 0$. Положим $\alpha \notin \mathbb{N}$, $0 < \alpha < k$, тогда

$$D^{\alpha,1}y(t)|_{t=0} = D^{(\alpha)}y(t)|_{t=0} = 0.$$

Доказательство. По определению $D^{\alpha,1}y(t) = J^{m-\alpha}y^{(m)}(t)$. В силу предположения леммы $m \leq k$, следовательно, $y^{(m)}$ — непрерывная функция и $\lim_{t \rightarrow 0} J^{m-\alpha}y^{(m)}(t) = 0$. \square

Лемма 3. Пусть $y \in C^2[0, d]$ для некоторого $d > 0$. Тогда

$$D^{(1/2)}D^{(1/2)}y = y', \quad D^{(1/2)}y' = D^{(3/2)}y, \quad D^{(1/2)}D^{(3/2)}y = y''.$$

Доказательство. В силу (1.6) при $f(0) = 0$ справедливо равенство $D^{(\alpha)}f(t) = D^\alpha f(t)$. Согласно лемме 2 $D^{(1/2)}y(0) = 0$, поэтому, учитывая (1.5), получим

$$D^{(1/2)}D^{(1/2)}y = D^{1/2}D^{(1/2)}y = D^{1/2}J^{1/2}y'.$$

А поскольку операторы $D^{1/2}$ и $J^{1/2}$ являются взаимно обратными в силу определения (1.4), то

$$D^{(1/2)}D^{(1/2)}y = y'.$$

Далее, опять-таки исходя из (1.5), имеем

$$D^{(3/2)}y = J^{1/2}y'' = J^{1/2}(y')' = D^{(1/2)}y'.$$

Наконец, поскольку согласно лемме 2 $D^{(3/2)}y(0) = 0$, то

$$D^{(1/2)}D^{(3/2)}y = D^{1/2}D^{(3/2)}y = D^{1/2}J^{1/2}y'' = y''. \quad \square$$

Обозначим $z_1(t) = y(t)$, $z_2(t) = D^{(1/2)}y(t)$, $z_3(t) = y'(t)$, $z_4(t) = D^{(3/2)}y(t)$. Тогда, в силу лемм 2, 3 $D^{(1/2)}z_1 = z_2$, $D^{(1/2)}z_2 = z_3$, $D^{(1/2)}z_3 = z_4$, $D^{(1/2)}z_4 = y''$. Таким образом, уравнение (4.1) с начальными условиями (4.2) эквивалентно системе (4.3) с начальными условиями (4.4). С учетом (2.6) решение данной системы задается формулой

$$z(t) = E_2(A\sqrt{t}; 1)z^0 + \int_0^t E_2\left(A\sqrt{t-\tau}; \frac{1}{2}\right)B \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Предположим теперь, что в уравнении (4.1) $f(t) = u(t) - v(t)$, где u, v — управления первого и второго игроков, соответственно, такие, что $|u| \leq r$, $r > 1$, $|v| \leq 1$. Будем полагать, что первый игрок стремится привести систему в состояние $z_1 = 0$, а второй игрок препятствует этому. В таком случае система (4.3) принимает вид

$$D^{(1/2)}z = Az + \bar{u} - \bar{v},$$

где $\bar{u} = Bu$, $\bar{v} = Bv$, $\bar{u} \in rBS$, $\bar{v} \in BS$, $S = [-1, 1]$.

Терминальное множество $M^* = \{z \in \mathbb{R}^4 : z_1 = 0\}$, при этом

$$M_0 = \{z \in \mathbb{R}^4 : z_1 = 0\}, \quad L = \{z \in \mathbb{R}^4 : z_2 = z_3 = z_4 = 0\}, \quad M = \{0\}, \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$W(t, v) = \frac{1}{\sqrt{t}}\pi E_2\left(A\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right)B(rS - v),$$

$$W(t) = \frac{r}{\sqrt{t}}\pi E_2\left(A\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right)BS^* - \frac{1}{\sqrt{t}}\pi E_2\left(A\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right)BS = \frac{r-1}{\sqrt{t}}\pi E_2\left(A\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right)BS \neq \emptyset$$

и условие Понтрягина выполнено автоматически. Положим $\gamma(t) \equiv 0$, тогда

$$\xi(t) = \pi E_2(A\sqrt{t}; 1)z^0.$$

Разрешающая функция определяется как

$$\rho(t, \tau, v) = \max \left\{ \rho \geq 0 : -\rho \pi E_2(A\sqrt{t}; 1)z^0 \in \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\pi E_2\left(A\sqrt{t-\tau}; \frac{1}{2}\right)B(rS - v) \right\}.$$

Исследование разрешающей функции для определения гарантированного времени окончания игры в общем случае является трудной задачей, т.к. зависит от конкретного вида обобщенных матричных функций Миттаг-Леффлера $E_2(A\sqrt{t}; 1)$ и $E_2(A\sqrt{t}; 1/2)$. Однако в некоторых частных случаях задача упрощается.

Например, положим в уравнении (4.1) $c = 0$. В таком случае, матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad \text{где } p = -\frac{b}{a}.$$

Тогда будем иметь

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & p^2 \end{pmatrix}, \quad A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & p^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & p^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & p^k \end{pmatrix}, \quad k = 3, 4, \dots$$

В результате получим

$$\begin{aligned} E_2(A\sqrt{t}; 1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \sqrt{t^k}}{\Gamma(k/2 + 1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(3/2)} & t & p^{-3} E_2(p\sqrt{t}; 1) - p^{-3} - \frac{\sqrt{t}}{p^2 \Gamma(3/2)} - \frac{t}{p} \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(3/2)} & p^{-2} E_2(p\sqrt{t}; 1) - p^{-2} - \frac{\sqrt{t}}{p \Gamma(3/2)} \\ 0 & 0 & 1 & p^{-1} E_2(p\sqrt{t}; 1) - p^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & E_2(p\sqrt{t}; 1) \end{pmatrix}, \\ E_2\left(A\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \sqrt{t^k}}{\Gamma((k+1)/2)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(1/2)} & \sqrt{t} & \frac{t}{\Gamma(3/2)} & p^{-3} E_2\left(p\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{p^3 \Gamma(1/2)} - \frac{\sqrt{t}}{p^2} - \frac{t}{p \Gamma(3/2)} \\ 0 & \frac{1}{\Gamma(1/2)} & \sqrt{t} & p^{-2} E_2\left(p\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{p^2 \Gamma(1/2)} - \frac{\sqrt{t}}{p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma(1/2)} & p^{-1} E_2\left(p\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{p \Gamma(1/2)} \\ 0 & 0 & 0 & E_2\left(p\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее, учитывая равенства

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad E_2(z; 1) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z), \quad (4.5)$$

$$E_2\left(z; \frac{1}{2}\right) = z E_2(z; 1) + \frac{1}{\Gamma(1/2)} = z e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.6)$$

где $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt$ — дополнительная функция ошибок [39], будем иметь

$$E_2(A\sqrt{t}; 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} & t & \frac{e^{p^2 t}}{p^3} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{1}{p^3} - \frac{2}{p^2} \sqrt{\frac{t}{\pi}} - \frac{t}{p} \\ 0 & 1 & 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} & \frac{e^{p^2 t}}{p^2} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^{p^2 t}}{p} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{1}{p} \\ 0 & 0 & 0 & e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) \end{pmatrix},$$

$$E_2\left(A\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \sqrt{t} & \frac{2t}{\sqrt{\pi}} & \frac{\sqrt{t}e^{p^2 t}}{p^2} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{\sqrt{t}}{p^2} - \frac{2t}{p\sqrt{\pi}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \sqrt{t} & \frac{\sqrt{t}e^{p^2 t}}{p} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{\sqrt{t}}{p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \sqrt{t}e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) \\ 0 & 0 & 0 & p\sqrt{t}e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\xi_1(t) = \left\{ \pi E_2(A\sqrt{t}; 1) z^0 \right\}_1 = y_0 + ty'_0,$$

$$\omega(t) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \pi E_2\left(A\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) B \right\}_1 = \frac{1}{a\sqrt{t}} \left[\frac{\sqrt{t}e^{p^2 t}}{p^2} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{\sqrt{t}}{p^2} - \frac{2t}{p\sqrt{\pi}} \right]$$

$$= \frac{1}{a} \left[\frac{e^{p^2 t}}{p^2} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{1}{p^2} - \frac{2\sqrt{t}}{p\sqrt{\pi}} \right].$$

Здесь $\{x\}_1$ — первая компонента вектора x . В таком случае разрешающая функция определяется как больший положительный корень следующего уравнения относительно ρ :

$$|\omega(t - \tau)v - \rho\xi_1(t)| = |\omega(t - \tau)|r.$$

Решая данное уравнение, находим

$$\rho(t, \tau, v) = \frac{\omega(t - \tau)}{\xi_1(t)}(v \pm r). \quad (4.7)$$

Плюс или минус в скобках берется в зависимости от того, какой знак имеет выражение $\omega(t - \tau)/\xi_1(t)$. Учитывая физический смысл коэффициентов уравнения Багли — Торвика, имеем $a > 0$, $b > 0$, в таком случае $p < 0$. Отметим также, что поскольку $\omega(0) = 0$ и $\omega'(t) = 1/a(2 - \operatorname{erfc}(p\sqrt{t}))e^{p^2 t} > 0$, то $\omega(t) > 0$ при всех $t > 0$. Таким образом,

$$\inf_v \rho(t, \tau, v) = \frac{(r - 1)\omega(t - \tau)}{|\xi_1(t)|}.$$

Гарантированное время окончания игры найдем из соотношения

$$\int_0^t \inf_{v \in V} \rho(t, \tau, v) d\tau = \int_0^t \frac{(r - 1)\omega(t - \tau)}{|\xi_1(t)|} d\tau = 1.$$

Для этого рассмотрим интеграл

$$\int_0^t \frac{(r - 1)\omega(t - \tau)}{|\xi_1(t)|} d\tau = \frac{r - 1}{|\xi_1(t)|} \int_0^t \omega(\tau) d\tau = \frac{r - 1}{a|\xi_1(t)|} \int_0^t \left[\frac{e^{p^2 \tau}}{p^2} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{\tau}) - \frac{1}{p^2} - \frac{2\sqrt{\tau}}{p\sqrt{\pi}} \right] d\tau$$

$$= \frac{r-1}{a|\xi_1(t)|} \left[\frac{1}{p^2} \int_0^t e^{p^2\tau} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{\tau}) d\tau - \frac{t}{p^2} - \frac{4\sqrt{t^3}}{3p\sqrt{\pi}} \right].$$

Интеграл в квадратных скобках проинтегрируем по частям. Для этого положим $u = \operatorname{erfc}(-p\sqrt{\tau})$, $dv = e^{p^2\tau}$. Тогда

$$du = \frac{pe^{-p^2\tau} d\tau}{\sqrt{\pi\tau}}, \quad v = \frac{e^{p^2\tau}}{p^2}$$

и

$$\int_0^t e^{p^2\tau} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{\tau}) d\tau = \frac{e^{p^2t}}{p^2} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \frac{e^{p^2t}}{p^2} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{1}{p^2} - \frac{2\sqrt{t}}{p\sqrt{\pi}}. \quad (4.8)$$

Окончательно находим, что время окончания игры может быть определено из уравнения

$$\frac{e^{p^2t}}{p^4} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{1}{p^4} - \frac{2\sqrt{t}}{p^3\sqrt{\pi}} - \frac{t}{p^2} - \frac{4\sqrt{t^3}}{3p\sqrt{\pi}} = \frac{a|\xi_1(t)|}{r-1}.$$

Данное уравнение всегда имеет решение, поскольку при $t = 0$ его левая часть равна нулю и имеет скорость роста $O(t^{3/2})$, в то время как правая часть в начальный момент времени положительна и растет линейно по t .

5. Процессы релаксации с дробными производными

Уравнение дробной релаксации имеет вид

$$ay'(t) + bD^{(\alpha)}y(t) + cy(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Данное уравнение может быть использовано для описания многих физических и физико-химических процессов, в частности движения сферы, погруженной в вязкую жидкость [40], а также процессов релаксации при стеклообразовании переохлажденных жидкостей [41].

Для частного случая $\alpha = 1/2$ рассмотрим конфликтно управляемый процесс

$$ay'(t) + bD^{(1/2)}y(t) + cy(t) = u(t) - v(t), \quad y(0) = y_0 \neq 0, \quad |u| \leq r > 1, \quad |v| \leq 1, \quad (5.1)$$

с терминальным множеством $M = \{0\}$.

В силу лемм 2, 3 данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} D^{(1/2)}z_1 = z_2 \\ D^{(1/2)}z_2 = \frac{1}{a}(-cz_1 - bz_2 + u - v) \end{cases}$$

или в матричной форме

$$D^{(1/2)}z = Hz + \bar{u} - \bar{v}, \quad (5.2)$$

где

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = Gu, \quad \bar{v} = Gv, \quad \bar{u} \in rGS, \quad \bar{v} \in GS, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/a \end{pmatrix}, \quad S = [-1, 1],$$

с начальными условиями

$$z(0) = z^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В силу (2.6) решение системы (5.2) задается формулой

$$z(t) = E_2(H\sqrt{t}; 1)z^0 + \int_0^t E_2(H\sqrt{t-\tau}; \frac{1}{2}) \frac{\bar{u}(\tau) - \bar{v}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Положим в уравнении (5.1) $c = 0$. В таком случае матрица H принимает вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

где, как и ранее, $p = -b/a$. Тогда будем иметь

$$H^k = \begin{pmatrix} 0 & p^{k-1} \\ 0 & p^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

В результате получим

$$E_2(H\sqrt{t}; 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k \sqrt{t^k}}{\Gamma(k/2 + 1)} = \begin{pmatrix} 1 & p^{-1} E_2(p\sqrt{t}; 1) - p^{-1} \\ 0 & E_2(p\sqrt{t}; 1) \end{pmatrix},$$

$$E_2\left(H\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k \sqrt{t^k}}{\Gamma((k+1)/2)} = \begin{pmatrix} 1 & p^{-1} E_2\left(p\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{p\Gamma(1/2)} \\ 0 & E_2\left(p\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Далее в силу равенств (4.5), (4.6) будем иметь

$$E_2(H\sqrt{t}; 1) = \begin{pmatrix} 1 & p^{-1} e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - p^{-1} \\ 0 & e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) \end{pmatrix},$$

$$E_2\left(H\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{t} e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) \\ 0 & p\sqrt{t} e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) + 1/\sqrt{\pi} \end{pmatrix}.$$

Поскольку в данном примере $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, задача является, по существу, скалярной и мы ограничимся рассмотрением только первых компонент векторов.

Применим схему метода разрешающих функций:

$$\{W(t, v)\}_1 = \left\{ \pi \frac{1}{\sqrt{t}} E_2\left(H\sqrt{t}; \frac{1}{2}\right) G(rS - v) \right\}_1 = e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t})(rS - v),$$

$$\{W(t)\}_1 = e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t})(r - 1)S \neq \emptyset,$$

$$\{\xi(t)\}_1 = \{\pi E_2(H\sqrt{t}; 1)z_0\}_1 = y_0.$$

Обозначим $\omega_1(t, v) = e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t})$. Разрешающая функция может быть определена как больший положительный корень следующего уравнения относительно ρ :

$$|\omega_1(t - \tau)v - \rho y_0| = |\omega_1(t - \tau)|r.$$

Решая данное уравнение, находим

$$\rho(t, \tau, v) = \frac{\omega_1(t - \tau)}{y_0} (v \pm r),$$

Плюс или минус в скобках берется в зависимости от того, какой знак имеет выражение $\omega_1(t - \tau)/y_0$. Поскольку $\omega_1(t, v) = e^{p^2 t} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) > 0$ для всех t , то

$$\inf_v \rho(t, \tau, v) = \frac{(r - 1)\omega_1(t - \tau)}{|y_0|}.$$

Гарантированное время окончания игры найдем из соотношения

$$\int_0^t \inf_{v \in V} \rho(t, \tau, v) d\tau = \frac{r - 1}{|y_0|} \int_0^t \omega_1(t - \tau) d\tau = 1.$$

Учитывая формулу (4.8), будем иметь следующее уравнение для определения времени поимки:

$$\frac{e^{p^2 t}}{p^2} \operatorname{erfc}(-p\sqrt{t}) - \frac{1}{p^2} - \frac{2\sqrt{t}}{p\sqrt{\pi}} = \frac{|y_0|}{r - 1}.$$

Данное уравнение также всегда имеет решение, поскольку при $t = 0$ его левая часть равна нулю и неограниченно возрастает, в то время как правая часть является положительной константой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды: в 3 т. М.: Наука, 1988. Т. 2: Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры. 576 с.
4. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
5. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
6. **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
7. **Chikrii A.A.** Conflict-controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 424 p.
8. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
9. **Никольский М.С.** Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. М.: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
10. **Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.** Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 264 с.
11. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 198 с.
12. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во “Удмурт. ун-та”, 2009. 266 с.
13. **Петросян Л.А.** Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 224 с.
14. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations. Basel: Gordon & Breach, 1994. 625 p.
15. **Осипов Ю.С.** Минимаксное поглощение в дифференциально-разностных играх // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 1. С. 32–35.
16. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** Линейные дифференциально-разностные игры // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 4. С. 777–780.
17. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, № 1. С. 3–13.
18. **Максимов В.И.** О существовании седловой точки в дифференциально-разностной игре преследования-убегания // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, № 1. С. 15–22.
19. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Приближение в линейных дифференциально-разностных играх // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, № 2. С. 202–209.
20. **Никольский М.С.** Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздывания // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 5. С. 1018–1021.

21. **Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц.** Групповое преследование в дифференциально-разностных играх // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 5. С. 802–810.
22. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 6. С. 1314–1317.
23. **Осипов Ю.С.** Позиционное управление в параболических системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 195–201.
24. **Никольский М.С.** Об управлении при наличии противодействия // Вестн. МГУ. 1972. № 1. С. 67–72. (Сер. 1: Математика и механика.)
25. **Эйдельман С.Д., Чикрий А.А., Руренко А.Г.** Линейные интегро-дифференциальные игры // Проблемы управления и информатики. 1998. № 2. С. 5–18.
26. **Chikrii A.A.** Game dynamic problems for systems with fractional derivatives // Pareto optimality, game theory and equilibria. New York: Springer, 2008. P. 349–387. (Springer Optimization and Its Applications. Vol. 17.)
27. **Chikrii A.A.** Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems // Optim. Methods Softw. 2008. Vol. 23, iss. 1. P. 39–72.
28. **Chikrii A.A., Matychyn I.I.** Game problems for fractional-order systems // New trends in nanotechnology and fractional calculus applications. New York: Springer, 2010. P. 233–241.
29. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 262–278.
30. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
31. **Caputo M.** Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent — II // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967. No. 13. P. 529–539.
32. **Podlubny I.** Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. 368 p.
33. **Miller K.S., Ross B.** An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: Wiley & Sons, 1993. 384 p.
34. **Hilfer R.** Fractional time evolution // Applications of fractional calculus in physics. Singapore: World Sci. Publ., 2000. P. 87–130.
35. **Bagley R., Torvik P.** On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials // J. Appl. Mech. 1984. No. 51. P. 294–298.
36. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
37. **Kobelev V.V.** Linear non-conservative systems with fractional damping and the derivatives of critical load parameter // GAMM-Mitt. 2007. Vol. 30, no. 2. P. 287–299.
38. **Drăgănescu Gh.E., Cofan N., Rujan D.L.** Nonlinear vibrations of a nano-sized sensor with fractional damping // J. Optoelectron. Adv. Mater. 2005. Vol. 7, no. 2. P. 877–884.
39. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
40. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.
41. **Hilfer R.** Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials // Chem. Phys. 2002. Vol. 284. P. 399–408.

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ
e-mail: chikrii@gmail.com

Матичин Иван Иванович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ
e-mail: matychyn@gmail.com

Поступила 10.10.2010

УДК 517.977

**OPTIMAL GROWTH IN A TWO-SECTOR ECONOMY
FACING AN EXPECTED RANDOM SHOCK¹****Sergey Aseev, Konstantin Besov, Simon-Erik Ollus, Tapio Palokangas**

We develop an optimal growth model of an open economy that uses both an old (“dirty” or “polluting”) technology and a new (“clean”) technology simultaneously. A planner of the economy expects the occurrence of a random shock that increases sharply abatement costs in the dirty sector. Assuming that the probability of an exogenous environmental shock is distributed according to the exponential law, we use Pontryagin’s maximum principle to find the optimal investment and consumption policies for the economy.

Keywords: Dynamic optimization; Optimal control; Pontryagin’s maximum principle; Endogenous growth; Climate change; Random shock; Government policy; Technological development

1. Introduction

Facing the possibility of climate change and global sanctions, a fictitious social planner (government) in an idealized open economy attempts to reduce pollution and develop new cleaner production technologies. In many circumstances, the old “polluting” technology is not immediately replaced by a modern efficient “environment-saving” technology, instead they coexist. Why is not the former one abandoned immediately, or why not try to benefit from both technologies? The answer is that “clean” technologies are expensive to develop, less productive (at least in the initial stage) and often more expensive in use.

The government knows that it is only a matter of time when old polluting technologies will be internationally penalized (through, e.g., quotas, carbon trade, taxes or trade restrictions), but there is a lot of uncertainty when these sanctions will actually take place. This is supported by the fact that even today there are no global binding agreements on reducing greenhouse gas emissions. The Kyoto process is a first step towards such sanctions, but it is applied only to a part of the world countries. More binding emission targets and stricter sanctions are, however, being negotiated. Given the ongoing international negotiation process and climate change, a rational government takes into account that at some stage in the future it will be penalized for an old “polluting” technology. Under these circumstances, it is instructive to study how a rational government should adjust the economy to an expected exogenous environmental change that will increase the abatement costs of emissions some time in future.

Traditional growth models (e.g., [1, 5, 10, 11]) with random technological change are built on a Schumpeterian process of creative destruction. The old technology and the capital bound into it cannot be recycled and the new technology takes immediately over. Thus a technology jump occurs and the old technology is destroyed. However, in contrast to this, it is empirically evident that both technologies are bound to coexist for a while, and a rational government does not abandon the old technology at once.

In this paper, we consider two alternative technologies that produce the same composite good (or perfect substitutes) which can be consumed or invested in capital. The first technology is “clean,”

¹The first two authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grants Nos. 09-01-00624-a, 11-01-00348-a and 10-01-91004-ASF-a); the work of second author was supported also by a grant of the President of the Russian Federation for the Leading Scientific Schools.

or “non-polluting,” while the second one is “dirty,” or “polluting.” Both technologies are used simultaneously and are characterized by AK production functions. At some stage of development, the sanctions for the polluting technology will become stricter due to environment problems (cf. climate crisis), increased international awareness and the need to develop new technologies. We model this as an “exogenous environmental shock”. The government knows that this shock is coming, but does not know exactly when, and the probability of its occurrence is proportional to the length of time. The shock increases the consumer cost for the second technology through higher abatement costs.

In this paper, we show how a rational government could adjust its technology development policy to an expected environmental change. We treated this problem earlier in [3] under the additional assumption that the ratio of consumption to the total income is fixed. Here we characterize all optimal regimes in the general case without this assumption.

Note that the developed methodology can also be applied to other economic growth problems, with random exogenous shocks not necessarily of “environmental” character.

2. The model

Let us consider an economy with two economic sectors, one based on “clean” technology and the other, on “dirty” technology. The productivity of the dirty technology is assumed to be higher in the initial stage, and the externality of pollution in the initial stage is taken into account as abatement costs by the social planner (government). Let a state variable $K_1(t) > 0$ ($K_2(t) > 0$) represent capital stock in the clean (dirty) sector at time $t \geq 0$. At each moment $t \geq 0$, the output of the clean (dirty) sector, $Q_1(t)$ ($Q_2(t)$), is a linear function of its capital:

$$Q_1(t) = A_1 K_1(t) \quad (Q_2(t) = A_2 K_2(t)),$$

where the parameter $A_1 > 0$ ($A_2 > 0$) is the level of technology in that sector. The outputs $Q_1(t)$ and $Q_2(t)$ are perfect substitutes as a private consumption good, but the dirty sector produces more emissions as a by-product in proportion to its output $Q_2(t)$. Let T be the time of the expected environmental shock that changes the abatement costs for these emissions from $(1 - q)Q_2(t)$ to $(1 - p)Q_2(t)$ units of the final good, where $1 > q > p > 0$.^{2 3}

National income in terms of “money” is equal to the total output $Q_1(t) + Q_2(t)$ minus the abatement costs $(1 - q)Q_2(t)$, that is,

$$Y_q(t) = Q_1(t) + Q_2(t) - (1 - q)Q_2(t) = A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t) \quad (2.1)$$

for $t \in [0, T)$ and

$$Y_p(t) = Q_1(t) + Q_2(t) - (1 - p)Q_2(t) = A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t) \quad (2.2)$$

for $t \in [T, \infty)$. At the moment T , we have

$$Y_p(T) = \lim_{t \rightarrow T-0} Y_q(t) + (p - q)A_2 K_2(T). \quad (2.3)$$

Note that the change in abatement costs decreases the monetary value of the national income in the economy, as $q > p$. We also assume that abatement costs are some exogenous costs that are

²The mathematical solution of the optimal control problem described below is valid for all $p, q \in (0, \infty)$; that is, the assumption $p, q < 1$ is never used in what follows. However, if $p, q \geq 1$, the abatement costs turn around and become a support for the dirty technology. Thus, we excluded this case from the final results. In the mathematical part of this paper we also included the opposite case where $q < p$, due to the mathematical interest of the model, but this case is not interesting for this particular problem with an exogenous environmental shock.

³In this setup of the problem, $q < p$ would imply that the abatement costs fall at the shock at time T , i.e., the dirty technology is awarded in the future.

paid to the world economy as a penalty fee for pollution and are not returned to the economy as any subvention.

The social planner (government) of the economy distributes all income $Y_q(t)$ (or $Y_p(t)$) between consumption $C(t)$, investment in the first sector $I_1(t)$, and investment in the second sector $I_2(t)$ at each moment $t \geq 0$. This implies

$$\begin{aligned} Y_q(t) &= C(t) + I_1(t) + I_2(t), \\ C(t) &= u(t)Y_q(t), \quad I_1(t) = i_1(t)Y_q(t), \quad I_2(t) = i_2(t)Y_q(t), \\ u(t) + i_1(t) + i_2(t) &= 1, \quad u(t) > 0, \quad i_1(t) \geq 0 \quad \text{and} \quad i_2(t) \geq 0, \end{aligned}$$

for $t \in [0, T)$, and

$$\begin{aligned} Y_p(t) &= C(t) + I_1(t) + I_2(t), \\ C(t) &= u(t)Y_p(t), \quad I_1(t) = i_1(t)Y_p(t), \quad I_2(t) = i_2(t)Y_p(t), \\ u(t) + i_1(t) + i_2(t) &= 1, \quad u(t) > 0, \quad i_1(t) \geq 0 \quad \text{and} \quad i_2(t) \geq 0, \end{aligned}$$

for $t \in [T, \infty)$.

By introducing a new control parameter $0 \leq v(t) \leq 1$, $t \geq 0$, we can decrease the number of control parameters as follows:

$$i_1(t) = v(t)(1 - u(t)), \quad i_2(t) = (1 - v(t))(1 - u(t)), \quad t \geq 0.$$

The quantities $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ are treated as control parameters (or, simply, controls); $u(\cdot)$ symbolizes the control for consumption, and $v(\cdot)$, for the ratio of investment in the first sector to the total investments. As usual, we assume that these control parameters are (Lebesgue) measurable functions defined on $[0, \infty)$ and satisfying the indicated constraints.

Now, the capital stocks $K_1(t)$ and $K_2(t)$, $t \geq 0$, accumulate according to

$$\begin{aligned} \dot{K}_1(t) &= b_1 I_1(t) - \delta K_1(t), \\ \dot{K}_2(t) &= b_2 I_2(t) - \delta K_2(t). \end{aligned}$$

This is equivalent to (see (2.1))

$$\dot{K}_1(t) = v(t)(1 - u(t))b_1 [A_1 K_1(t) + qA_2 K_2(t)] - \delta K_1(t), \quad (2.4)$$

$$\dot{K}_2(t) = (1 - v(t))(1 - u(t))b_2 [A_1 K_1(t) + qA_2 K_2(t)] - \delta K_2(t) \quad (2.5)$$

on the time interval $[0, T)$, and (see (2.2))

$$\dot{K}_1(t) = v(t)(1 - u(t))b_1 [A_1 K_1(t) + pA_2 K_2(t)] - \delta K_1(t), \quad (2.6)$$

$$\dot{K}_2(t) = (1 - v(t))(1 - u(t))b_2 [A_1 K_1(t) + pA_2 K_2(t)] - \delta K_2(t) \quad (2.7)$$

on the rest infinite time interval $[T, \infty)$.

Here $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ and $1/b_1$, $1/b_2$ are constant costs of units of capital in the first and second economic sectors, respectively; $\delta \geq 0$ is the depreciation rate of capital, which is assumed to be the same for both economic sectors.

Due to (2.1), (2.4) and (2.5), the instantaneous income $Y_q(\cdot)$ satisfies on $[0, T]$ (in the sense of Carathéodory) the differential equation

$$\dot{Y}_q(t) = (v(t)(1 - u(t))b_1 A_1 + q(1 - v(t))(1 - u(t))b_2 A_2)Y_q(t) - \delta Y_q(t) \quad (2.8)$$

with the initial condition $Y_q(0) = A_1 K_1(0) + qA_2 K_2(0)$.

Similarly, due to (2.2), (2.6) and (2.7), the instantaneous income $Y_p(\cdot)$ satisfies on $[T, \infty)$ the differential equation

$$\dot{Y}_p(t) = (v(t)(1 - u(t))b_1A_1 + p(1 - v(t))(1 - u(t))b_2A_2)Y_p(t) - \delta Y_p(t) \quad (2.9)$$

with the initial condition (2.3).

The social planner evaluates the quality of the control pair $(u(\cdot), v(\cdot))$ on the time interval $[0, T]$, $T > 0$, with the following utility index:

$$J_T(u(\cdot), v(\cdot), Y_q(\cdot), K_1(T), K_2(T)) = \int_0^T e^{-\rho t} \ln(u(t)Y_q(t)) dt + e^{-\rho T} V(T, K_1(T), K_2(T)), \quad (2.10)$$

where $\rho > 0$ is a subjective discount rate (time preference in the utility function) and

$$V(T, K_1(T), K_2(T)) = \max_{u(\cdot), v(\cdot)} \int_T^\infty e^{-\rho(t-T)} \ln(u(t)Y_p(t)) dt \quad (2.11)$$

is the current value of the capital stocks $K_1(T)$ and $K_2(T)$ at instant T .

Due to (2.9) we have (see (2.11))

$$\begin{aligned} \int_T^\infty e^{-\rho(t-T)} \ln(u(t)Y_p(t)) dt &= \frac{1}{\rho} \ln Y_p(T) - \frac{\delta}{\rho^2} \\ &+ e^{\rho T} \int_T^\infty e^{-\rho t} \left[\ln u(t) + \frac{1}{\rho} (v(t)b_1A_1 + p(1 - v(t))b_2A_2)(1 - u(t)) \right] dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

The integral on the right-hand side of (2.12) does not depend on the state variables $K_1(\cdot)$ and $K_2(\cdot)$, while the first two terms are constants. Hence, the integral on the right-hand side of (2.12) can be maximized in the control parameters $v(\cdot)$ and $u(\cdot)$ independently.

Thus, two cases are possible: (i) $b_1A_1 - pb_2A_2 > 0$ and (ii) $b_1A_1 - pb_2A_2 \leq 0$.

Consider case (i). Maximizing the integral on the right-hand side of (2.12) in $v(\cdot)$ and $u(\cdot)$ gives the following optimal controls on $[T, \infty)$: $\hat{v}_*(t) \equiv 1$ for all $t \geq T$, while $\hat{u}_*(t) \equiv \rho/(b_1A_1)$ if $\rho \leq b_1A_1$ or $\hat{u}_*(t) \equiv 1$ if $\rho > b_1A_1$ for all $t \geq T$. Thus, the size of the time preference ρ matters for consumption in the second period.

Substituting these optimal controls in (2.12), we get

$$V(T, K_1(T), K_2(T)) = \frac{1}{\rho} \ln Y_p(T) + M_1, \quad (2.13)$$

where either

$$M_1 = \frac{\ln \rho - \ln(b_1A_1) - 1}{\rho} + \frac{b_1A_1 - \delta}{\rho^2} \quad \text{if } \rho \leq b_1A_1 \quad (2.14)$$

or

$$M_1 = -\frac{\delta}{\rho^2} \quad \text{if } \rho > b_1A_1. \quad (2.15)$$

Consider case (ii). In this case, the maximization of the integral on the right-hand side of (2.12) gives $\hat{v}_*(t) \equiv 0$ for all $t \in [0, T]$, while $\hat{u}_*(t) \equiv \rho/(pb_2A_2)$ if $\rho \leq pb_2A_2$ or $\hat{u}_* \equiv 1$ if $\rho > pb_2A_2$ for all $t \in [0, T]$. Hence, substituting these optimal controls in (2.12), we get

$$V(T, K_1(T), K_2(T)) = \frac{1}{\rho} \ln Y_p(T) + M_2, \quad (2.16)$$

where

$$M_2 = \frac{\ln \rho - \ln(pb_2A_2) - 1}{\rho} + \frac{pb_2A_2 - \delta}{\rho^2} \quad \text{if } \rho \leq pb_2A_2 \quad (2.17)$$

or

$$M_2 = -\frac{\delta}{\rho^2} \quad \text{if } \rho > pb_2A_2. \quad (2.18)$$

Thus, due to (2.1) and (2.3), in both cases (i) and (ii) (see (2.13), (2.16) and (2.3)) we have

$$V(T, K_1(T), K_2(T)) = \frac{1}{\rho} \ln(A_1K_1(T) + pA_2K_2(T)) + M, \quad (2.19)$$

where the constant M is either M_1 (see (2.14), (2.15)) or M_2 (see (2.17), (2.18)) depending on the relations between the values of the parameters. Recall that here the state variables $K_1(\cdot)$ and $K_2(\cdot)$ satisfy (2.4) and (2.5), respectively, on the time interval $[0, T]$.

All previous constructions have been performed under the assumption that the instant of time $T > 0$ is fixed.

Assume now that the instant of time T at which the environmental shock happens is a random variable with an exponential distribution (see, for example, [7]). This means that on each small time interval $[t, t + \Delta t]$, $t \geq 0$, $\Delta t > 0$, the relative probability of the event that the abatement cost of the unit of production in the second sector jumps to a value of $1 - p$ under the condition that before t it equals $1 - q$ is proportional to the length Δt of this time interval. Analytically this property of the random variable T can be expressed as follows:

$$P(T < t + \Delta t \mid T \geq t) = \nu \Delta t + o(\Delta t).$$

Here $\nu > 0$ is a proportionality coefficient of the distribution and $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ as $\Delta t \rightarrow 0$.

In this case the distribution $\Phi(t) = P(T < t)$ and the density $\varphi(t) = \dot{\Phi}(t)$, $t > 0$, of the random variable T are

$$\Phi(t) = 1 - e^{-\nu t} \quad \text{and} \quad \varphi(t) = \nu e^{-\nu t}, \quad t \geq 0. \quad (2.20)$$

In this situation the social planner faces the problem of maximizing the expected value of the random variable $J_T(u(\cdot), v(\cdot), Y_q(\cdot), K_1(T), K_2(T))$ (see (2.10)) at a random instant T .

For an arbitrary admissible control pair $(u(\cdot), v(\cdot))$ on $[0, \infty)$, due to (2.10), (2.19) and (2.20), we have

$$\begin{aligned} E(J_T(u(\cdot), v(\cdot), Y_q(\cdot), K_1(T), K_2(T))) &= \int_0^{\infty} \nu e^{-\nu t} J_t(u(\cdot), v(\cdot), Y_q(\cdot), K_1(t), K_2(t)) dt \\ &= \frac{\nu M}{\nu + \rho} + \int_0^{\infty} e^{-(\nu+\rho)t} \ln u(t) dt + \frac{\nu + \rho}{\rho} \int_0^{\infty} e^{-(\nu+\rho)t} \ln Y_q(t) dt \\ &\quad + \frac{\nu}{\rho} \int_0^{\infty} e^{-(\nu+\rho)t} \ln \frac{A_1K_1(t) + pA_2K_2(t)}{Y_q(t)} dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Consider the second integral on the right-hand side of (2.21). Due to (2.8) we have

$$\begin{aligned} &\frac{\nu + \rho}{\rho} \int_0^{\infty} e^{-(\nu+\rho)t} \ln Y_q(t) dt \\ &= \frac{1}{\rho} \ln Y_q(0) - \frac{\delta}{\rho(\nu + \rho)} + \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} e^{-(\nu+\rho)t} (v(t)b_1A_1 + q(1 - v(t))b_2A_2)(1 - u(t)) dt. \end{aligned}$$

So, formula (2.21) for the expected value of the random variable $J_T(u(\cdot), v(\cdot), Y_q(\cdot), K_1(T), K_2(T))$ can be rewritten as follows:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(J_T(u(\cdot), v(\cdot), Y_q(\cdot), K_1(T), K_2(T))) &= \frac{\nu M}{\nu + \rho} + \frac{1}{\rho} \ln Y_q(0) - \frac{\delta}{\rho(\nu + \rho)} \\ &+ \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \left[\ln u(t) + \frac{1}{\rho} (1 - u(t))(v(t)b_1A_1 + q(1 - v(t))b_2A_2) \right] dt \\ &+ \frac{\nu}{\rho} \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \ln \frac{A_1K_1(t) + pA_2K_2(t)}{A_1K_1(t) + qA_2K_2(t)} dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Since the first three terms on the right-hand side of (2.22) are constants, they can be neglected when optimizing the expected value of $J_T(u(\cdot), v(\cdot), Y_q(\cdot), K_1(T), K_2(T))$. So we can formulate the social planner's optimal control problem as the following *optimal control problem* (P):

$$\begin{aligned} \dot{K}_1(t) &= v(t)(1 - u(t))b_1[A_1K_1(t) + qA_2K_2(t)] - \delta K_1(t), \\ \dot{K}_2(t) &= (1 - v(t))(1 - u(t))b_2[A_1K_1(t) + qA_2K_2(t)] - \delta K_2(t), \\ K_1(0) &= K_{10}, \quad K_2(0) = K_{20}, \quad u(t) \in (0, 1], \quad v(t) \in [0, 1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(K_1(\cdot), K_2(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) &= \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \left[\ln u(t) + \frac{(1 - u(t))(v(t)b_1A_1 + q(1 - v(t))b_2A_2)}{\rho} \right. \\ &\left. + \frac{\nu}{\rho} \ln \frac{A_1K_1(t) + pA_2K_2(t)}{A_1K_1(t) + qA_2K_2(t)} \right] dt \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Note that for $p = q$ problem (P) is trivial. The utility functional $J(K_1(\cdot), K_2(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ in this case does not depend on the state variables $K_1(\cdot)$ and $K_2(\cdot)$, and the solution is obtained by maximizing the integrand $\ln u(t) + \rho^{-1}(1 - u(t))(v(t)b_1A_1 + q(1 - v(t))b_2A_2)$ in the variables $u(t) \in (0, 1]$ and $v(t) \in [0, 1]$ at each instant t independently. It is natural that this expression coincides with that in (2.12), and we obtain similar optimal controls in this case: $v_*(t) \equiv 1$ for all $t \geq 0$ if $b_1A_1 > qb_2A_2$ and $v_*(t) \equiv 0$ for all $t \geq 0$ if $b_1A_1 \leq qb_2A_2$, while $u_*(t) \equiv \rho / \max\{b_1A_1, qb_2A_2\}$ if $\rho \leq \max\{b_1A_1, qb_2A_2\}$ and $u_*(t) \equiv 1$ if $\rho > \max\{b_1A_1, qb_2A_2\}$.

So, in what follows, we consider only the most interesting case $p \neq q$.

Under this condition we can simplify the problem by reducing the dimension of the state variable. Namely, we introduce a new state variable $x(\cdot)$ as follows:

$$x(t) = \frac{A_1K_1(t) + pA_2K_2(t)}{A_1K_1(t) + qA_2K_2(t)}, \quad t \geq 0. \quad (2.23)$$

Note that $x(t)$ is equal to $Y_p(t)/Y_q(t)$ if we formally define $Y_p(t)$ for $t \in [0, T]$ by the same formula (2.2). This can be interpreted as the ratio of the "fictitious" instantaneous income $Y_p(t)$ to the real instantaneous income $Y_q(t)$ at time t , where the term "fictitious" means that $Y_p(t)$ would be the instantaneous income if the shock happened at this current point t .

Below we study both the case $p > q$ and the case $p < q$, although only the latter (where sanctions increase) is meaningful in our particular economic problem.

Differentiating (2.23), we obtain (see [3] for details)

$$\dot{x}(t) = (1 - u(t)) \left[b_1A_1v(t) + pb_2A_2(1 - v(t)) - (b_1A_1v(t) + qb_2A_2(1 - v(t)))x(t) \right].$$

Since for any admissible trajectory $(K_1(\cdot), K_2(\cdot))$ of problem (P) we have $K_1(t) > 0$ and $K_2(t) > 0$ for all $t \geq 0$, it follows from (2.23) that

$$x(t) \in I \quad \text{for all } t \geq 0, \quad \text{where } I = \left(\min \left\{ 1, \frac{p}{q} \right\}, \max \left\{ 1, \frac{p}{q} \right\} \right). \quad (2.24)$$

Thus, we have reduced problem (P) to the following *equivalent optimal control problem* (P1):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (1 - u(t)) \left[b_1 A_1 v(t) + p b_2 A_2 (1 - v(t)) - (b_1 A_1 v(t) + q b_2 A_2 (1 - v(t))) x(t) \right], \\ x(0) &= x_0, \quad u(t) \in (0, 1], \quad v(t) \in [0, 1], \\ J_1(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) &= \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \left[\ln u(t) + \frac{(1 - u(t))(v(t)b_1 A_1 + q(1 - v(t))b_2 A_2)}{\rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{\rho} \ln x(t) \right] dt \rightarrow \max, \end{aligned}$$

where

$$x_0 = \frac{A_1 K_1(0) + p A_2 K_2(0)}{A_1 K_1(0) + q A_2 K_2(0)}.$$

The equivalence of problems means, in particular, that a control pair $(u(\cdot), v(\cdot))$ is optimal in problem (P) if and only if it is optimal in problem (P1).

In [3] we analyzed this problem in the case when the consumption is fixed at a certain share of the total income, i.e., $u(t) \equiv u_0 = \text{const}$, $t \in [0, \infty)$. In the present paper we solve the problem in the general case.

To simplify the notations, we multiply the utility functional $J_1(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ by the positive constant ρ (the time preference of the utility function) and set $a = b_1 A_1$, $b = q b_2 A_2$ and $c = p b_2 A_2$. Then problem (P1) takes the form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (1 - u(t)) \left[a v(t) + c(1 - v(t)) - (a v(t) + b(1 - v(t))) x(t) \right], \\ x(0) &= x_0, \quad u(t) \in (0, 1], \quad v(t) \in [0, 1], \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) &= \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \left[\rho \ln u(t) + (1 - u(t))(a v(t) + b(1 - v(t))) \right. \\ &\quad \left. + \nu \ln x(t) \right] dt \rightarrow \max, \end{aligned}$$

where $x_0 \in I$ is a given number (see (2.24)).

To apply the technique of optimal control theory, we need to compactify the range of values of $u(\cdot)$. To this end, we touch up the utility functional $\tilde{J}_1(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$. Namely, let us introduce a function $\mathcal{L}_\varepsilon(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ as follows:

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u) = \begin{cases} \ln \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(u - \varepsilon) - \frac{(u - \varepsilon)^2}{2} & \text{for } 0 \leq u \leq \varepsilon, \\ \ln u & \text{for } u > \varepsilon, \end{cases} \quad (2.26)$$

where $\varepsilon < 1$ is a small positive constant that will be specified later. Obviously, $\mathcal{L}_\varepsilon(\cdot)$ is a continuously differentiable strictly concave function on $[0, \infty)$ and $\mathcal{L}_\varepsilon(u) \geq \ln u$ for any $u \in (0, 1]$. The term $-(u - \varepsilon)^2/2$ is added for convenience; we could easily dispense with it, but in this case the function $\mathcal{L}_\varepsilon(\cdot)$ would not be strictly concave.

Now consider an *auxiliary problem* (P_ε)

$$\dot{x}(t) = (1 - u(t))[av(t) + c(1 - v(t)) - (av(t) + b(1 - v(t)))x(t)], \quad (2.27)$$

$$x(0) = x_0, \quad u(t) \in [0, 1], \quad v(t) \in [0, 1],$$

$$J_\varepsilon(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} \left[\rho \mathcal{L}_\varepsilon(u(t)) + (1 - u(t))(av(t) + b(1 - v(t))) \right. \\ \left. + \nu \ln x(t) \right] dt \rightarrow \max, \quad (2.28)$$

where x_0 is the same as in (2.25). It is clear that any admissible process $(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ in problem (P1) is also an admissible process in problem (P_ε) .

Proposition 1. *If there exists an optimal process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ in problem (P_ε) such that $u_*(t) \geq \varepsilon$ for a.e. $t \in (0, \infty)$, then*

- (i) *this process is also optimal in problem (P1);*
- (ii) *any other optimal process $(\tilde{x}_*(\cdot), \tilde{u}_*(\cdot), \tilde{v}_*(\cdot))$ (if it exists) in problem (P1) is such that $\tilde{u}_*(t) \geq \varepsilon$ for a.e. $t \in [0, \infty)$ and so is also optimal in problem (P_ε) .*

P r o o f. Indeed, assertion (i) is valid because $J_\varepsilon(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) \geq \tilde{J}_1(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ for any admissible process $(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$ in problem (P1) and $J_\varepsilon(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot)) = \tilde{J}_1(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$. If $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot))$ is an admissible process in problem (P1) such that $\tilde{u}(t) < \varepsilon$ on a positive measure set of values of t , then

$$\tilde{J}_1(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot)) < J_\varepsilon(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), \tilde{v}(\cdot)) \leq J_\varepsilon(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot)) = \tilde{J}_1(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$$

and hence this process cannot be optimal in problem (P1). This implies (ii). \square

Denote

$$f(x, u, v) = (1 - u)[av + c(1 - v) - (av + b(1 - v))x], \quad x > 0, \quad u, v \in [0, 1], \quad (2.29)$$

and

$$g_\varepsilon(x, u, v) = \rho \mathcal{L}_\varepsilon(u) + (1 - u)(av + b(1 - v)) + \nu \ln x, \quad x > 0, \quad u, v \in [0, 1], \quad (2.30)$$

so that (2.27) and (2.28) become

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)) \quad \text{and} \quad J_\varepsilon(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-(\nu+\rho)t} g_\varepsilon(x(t), u(t), v(t)) dt.$$

Formally, problem (P_ε) is not affine in control. However, if we return to the initial control variables $i_1 = v(1 - u)$ and $i_2 = (1 - v)(1 - u)$ defined on a convex compact set

$$\{i_1, i_2 \in \mathbb{R}^2: i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, i_1 + i_2 \leq 1\},$$

then we obtain an equivalent optimal control problem that is affine in control. Moreover, under this change of the control variables, the utility function remains concave in control. Hence, due to the standard existence theorem (see, for example, [4]), there is an optimal admissible process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ in (P_ε) . This problem (P_ε) is in the focus of our analysis below. In the next section we characterize all optimal regimes in problem (P_ε) (and hence in problem (P1), due to Proposition 1) with the use of optimal control theory. In concluding Section 4 we offer an economic interpretation of the solution.

3. Solution of the problem

In the standard way, we define the current value Hamilton–Pontryagin function $\mathcal{M}(x, u, v, \phi)$ and the current value Hamiltonian $M(x, \phi)$ for problem (P_ε) in the normal form⁴ (see (2.29) and (2.30)):

$$\mathcal{M}(x, u, v, \phi) = f(x, u, v)\phi + g_\varepsilon(x, u, v), \quad (3.1)$$

$$M(x, \phi) = \sup_{u, v \in [0, 1]} \mathcal{M}(x, u, v, \phi). \quad (3.2)$$

Here $x > 0$, $u, v \in [0, 1]$ and $\phi \in \mathbb{R}^1$.

It is easy to see that problem (P_ε) satisfies the conditions of Theorem 12.1 from [4]. Hence due to Theorem 12.1 from [4], we obtain the following version of the Pontryagin maximum principle for problem (P_ε) :

Theorem 1. *Let $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ be an optimal process in problem (P_ε) . Then there exists a current value adjoint variable $\phi(\cdot)$ (corresponding to the triple $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$) such that the following conditions hold:*

(i) *The admissible triple $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$, together with the current value adjoint variable $\phi(\cdot)$, satisfies the core relations of the Pontryagin maximum principle in the normal form on the infinite time interval $[0, \infty)$:*

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &\stackrel{\text{a.e.}}{=} (\nu + \rho)\phi(t) - \frac{\partial \mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), v_*(t), \phi(t))}{\partial x}, \\ \mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), v_*(t), \phi(t)) &\stackrel{\text{a.e.}}{=} M(x_*(t), \phi(t)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

(ii) *The admissible triple $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$, together with the current value adjoint variable $\phi(\cdot)$, satisfies the normal-form stationarity condition*

$$M(x_*(t), \phi(t)) = (\nu + \rho)e^{(\nu+\rho)t} \int_t^\infty e^{-(\nu+\rho)s} g_\varepsilon(x_*(s), u_*(s), v_*(s)) ds \quad \text{for all } t \geq 0.$$

(iii) *For any $t \geq 0$*

$$\phi(t) = e^{(\nu+\rho)t} e^{z(t)} \int_t^\infty e^{-(\nu+\rho)s} e^{-z(s)} \frac{\partial g_\varepsilon(x_*(s), u_*(s), v_*(s))}{\partial x} ds, \quad (3.4)$$

where $z(t) = - \int_0^t \frac{\partial f(x_*(s), u_*(s), v_*(s))}{\partial x} ds \geq 0$.

Theorem 1 serves as a main tool in our construction of optimal regimes in this section. As we will see below, there is a unique admissible triple $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ satisfying the conditions of Theorem 1. Due to Theorem 1 and the standard existence theorem (see [4]), this triple $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ is a unique optimal admissible triple in problem (P_ε) . Moreover, $u_*(t) \geq \varepsilon > 0$ for a.e. $t \in (0, \infty)$ if ε is sufficiently small. Hence, by Proposition 1, this triple $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ is a unique optimal admissible triple in problem (P1).

⁴Here and below for the sake of simplicity of notations we omit index ε and write \mathcal{M} and M instead of \mathcal{M}_ε and M_ε .

Corollary 1. *The current value adjoint variable $\phi(\cdot)$ corresponding to an optimal process in problem (P_ε) is positive and bounded:*

$$0 < \phi(t) \leq \frac{\nu}{\nu + \rho} \max \left\{ 1, \frac{q}{p} \right\} \quad \text{for all } t \geq 0. \quad (3.5)$$

P r o o f. Since $\frac{\partial g_\varepsilon(x, u, v)}{\partial x} = \frac{\nu}{x} > 0$ for $x > 0$, it follows from (3.4) that $\phi(t) > 0$ for all $t \geq 0$. On the other hand, $\nu/x < \nu \max\{1, q/p\}$ for any x satisfying (2.24). Note that

$$z(t) = \int_0^t (1 - u_*(s))(av_*(s) + b(1 - v_*(s))) ds \quad \text{for } t \geq 0;$$

thus, $z(\cdot)$ is a nonnegative monotonically increasing function of t . Therefore, we can estimate $\phi(\cdot)$ using (3.4) as follows:

$$\phi(t) \leq e^{(\nu+\rho)t} e^{z(t)} \int_t^\infty e^{-(\nu+\rho)s} e^{-z(s)} \nu \max \left\{ 1, \frac{q}{p} \right\} ds = \frac{\nu}{\nu + \rho} \max \left\{ 1, \frac{q}{p} \right\}. \quad \square$$

Note that since $x(t) > 0$, $\phi(t) > 0$ for all $t \geq 0$ and any admissible trajectory $x(\cdot)$ is bounded (see (2.24)), inequality (3.5) implies the validity of the standard transversality condition at infinity (see, for example, [1, 4, 5])

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\rho+\nu)t} x(t) \phi(t) = 0.$$

Now we analyze the maximum condition (3.3). Since the current value Hamilton–Pontryagin function $\mathcal{M}(x, u, \cdot, \phi)$ (see (3.1)) is affine in the control v , the maximum value of $\mathcal{M}(x, u, \cdot, \phi)$ over $v \in [0, 1]$ for arbitrary fixed $x > 0$, $u \in [0, 1]$ and $\phi > 0$ is reached either at $v = 0$, at $v = 1$, or at all points $v \in [0, 1]$ simultaneously.

Denote

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0(x, u, \phi) &= \mathcal{M}(x, u, 0, \phi) = (1 - u)[c - bx]\phi + \rho \mathcal{L}_\varepsilon(u) + (1 - u)b + \nu \ln x, \\ &x > 0, \quad u \in [0, 1], \quad \phi > 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(x, u, \phi) &= \mathcal{M}(x, u, 1, \phi) = (1 - u)[a - ax]\phi + \rho \mathcal{L}_\varepsilon(u) + (1 - u)a + \nu \ln x, \\ &x > 0, \quad u \in [0, 1], \quad \phi > 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Thus, $\mathcal{M}_0(x, u, \phi) > \mathcal{M}_1(x, u, \phi)$ if and only if

$$(bx - c + a - ax)\phi < b - a \quad \text{and} \quad u < 1,$$

$\mathcal{M}_0(x, u, \phi) < \mathcal{M}_1(x, u, \phi)$ if and only if

$$(bx - c + a - ax)\phi > b - a \quad \text{and} \quad u < 1,$$

and $\mathcal{M}_0(x, 1, \phi) \equiv \mathcal{M}_1(x, 1, \phi)$.

Define a function $\phi_0: I \rightarrow \mathbb{R}^1$ as follows:

$$\phi_0(x) = \frac{b - a}{bx - c + a - ax}, \quad x \in I. \quad (3.8)$$

Note that if $p < q$, then the denominator in (3.8) is positive, while if $p > q$, this denominator is negative.

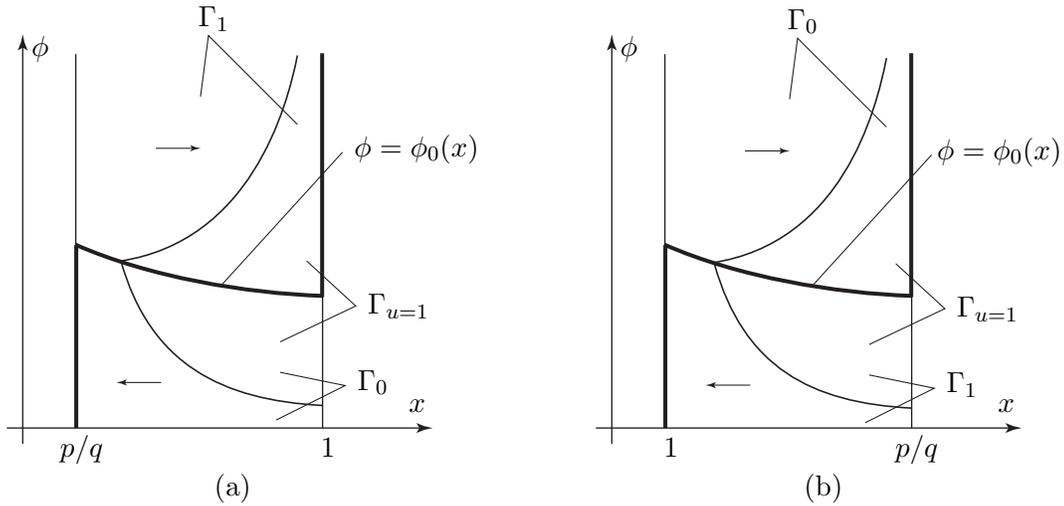


Fig. 1. The sets Γ_0 and Γ_1 (a) in the case $p < q$ and (b) in the case $p > q$, and one of the possible forms of the set $\Gamma_{u=1}$. The arrows indicate the direction of the change of the x -coordinate for trajectories of the Hamiltonian system.

Introduce the set

$$\Gamma = \{(x, \phi) \in \mathbb{R}^2: x \in I, \phi > 0\}$$

of admissible values of x and ϕ . The graph of $\phi_0(\cdot)$

$$\text{gr } \phi_0 = \{(x, \phi) \in \Gamma: \phi = \phi_0(x)\}$$

(if it intersects Γ) divides Γ into two parts

$$\Gamma_0 = \{(x, \phi) \in \Gamma: \mathcal{M}_0(x, u, \phi) > \mathcal{M}_1(x, u, \phi) \text{ for } u < 1\}$$

and

$$\Gamma_1 = \{(x, \phi) \in \Gamma: \mathcal{M}_0(x, u, \phi) < \mathcal{M}_1(x, u, \phi) \text{ for } u < 1\}$$

(see Fig. 1). If $p < q$, then Γ_0 lies below the graph of $\phi_0(\cdot)$ (or is empty if $\text{gr } \phi_0 = \emptyset$) and Γ_1 lies above the graph of $\phi_0(\cdot)$ (or coincides with Γ if $\text{gr } \phi_0 = \emptyset$), while if $p > q$, Γ_0 lies above the graph of $\phi_0(\cdot)$ (or coincides with Γ if $\text{gr } \phi_0 = \emptyset$) and Γ_1 lies below this graph (or is empty if $\text{gr } \phi_0 = \emptyset$).

Set

$$u_0(x, \phi) = \arg \max_{u \in [0, 1]} \mathcal{M}_0(x, u, \phi), \quad (x, \phi) \in \Gamma_0 \cup \text{gr } \phi_0,$$

and

$$u_1(x, \phi) = \arg \max_{u \in [0, 1]} \mathcal{M}_1(x, u, \phi), \quad (x, \phi) \in \Gamma_1 \cup \text{gr } \phi_0.$$

Then

$$u_0(x, \phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \rho \geq b + (c - bx)\phi, \\ \frac{\rho}{b + (c - bx)\phi} & \text{if } \varepsilon(b + (c - bx)\phi) \leq \rho < b + (c - bx)\phi, \\ u_0^*(x, \phi) & \text{if } \rho < \varepsilon(b + (c - bx)\phi) \end{cases}$$

for $(x, \phi) \in \Gamma_0 \cup \text{gr } \phi_0$, and

$$u_1(x, \phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \rho \geq a + a(1 - x)\phi, \\ \frac{\rho}{a + a(1 - x)\phi} & \text{if } \varepsilon(a + a(1 - x)\phi) \leq \rho < a + a(1 - x)\phi, \\ u_1^*(x, \phi) & \text{if } \rho < \varepsilon(a + a(1 - x)\phi) \end{cases}$$

for $(x, \phi) \in \Gamma_1 \cup \text{gr } \phi_0$, where $0 \leq u_0^* < \varepsilon$ and $0 \leq u_1^* < \varepsilon$ are some functions whose explicit expressions are not important for what follows.

In the open set Γ_0 , due to condition (3.3), the Hamiltonian system of the maximum principle for problem (P_ε) has the form

$$\dot{x}(t) = (1 - u_0(x(t), \phi(t)))(c - bx(t)), \quad (3.9)$$

$$\dot{\phi}(t) = (\nu + \rho)\phi(t) + b(1 - u_0(x(t), \phi(t)))\phi(t) - \frac{\nu}{x(t)}. \quad (3.10)$$

In the open set Γ_1 , the Hamiltonian system of the maximum principle for problem (P_ε) has the form

$$\dot{x}(t) = (1 - u_1(x(t), \phi(t)))a(1 - x(t)), \quad (3.11)$$

$$\dot{\phi}(t) = (\nu + \rho)\phi(t) + a(1 - u_1(x(t), \phi(t)))\phi(t) - \frac{\nu}{x(t)}. \quad (3.12)$$

Let us separately consider the set of those (x, ϕ) at which either $u_0(x, \phi) = 1$ or $u_1(x, \phi) = 1$. Denote this set by $\Gamma_{u=1}$:

$$\Gamma_{u=1} = \{(x, \phi) \in \Gamma_0 \cup \text{gr } \phi_0: \rho \geq b + (c - bx)\phi\} \cup \{(x, \phi) \in \Gamma_1: \rho \geq a + a(1 - x)\phi\} \quad (3.13)$$

(see Fig. 1). In $\Gamma_{u=1}$ the Hamiltonian system of the maximum principle for problem (P_ε) has the form

$$\dot{x}(t) = 0, \quad (3.14)$$

$$\dot{\phi}(t) = (\nu + \rho)\phi(t) - \frac{\nu}{x(t)}. \quad (3.15)$$

Now note that if $\phi(\cdot)$ is the current value adjoint variable corresponding to an optimal process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ in problem (P_ε) by virtue of Theorem 1, then by Corollary 1

$$b + (c - bx_*(t))\phi(t) < b \quad \text{and} \quad a + a(1 - x_*(t))\phi(t) < a + a(q - p)\frac{\nu}{\nu + \rho}$$

if $p < q$, and

$$b + (c - bx_*(t))\phi(t) < b + (c - b)\frac{\nu}{\nu + \rho} \quad \text{and} \quad a + a(1 - x_*(t))\phi(t) < a$$

if $p > q$, for all $t > 0$. Assume that ε is chosen from the very beginning (see (2.26)) in such a way that

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{\rho}{b}, \frac{\rho}{a + a(q - p)\nu/(\nu + \rho)} \right\}$$

if $p < q$ and

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{\rho}{b + (c - b)\nu/(\nu + \rho)}, \frac{\rho}{a} \right\}$$

if $p > q$. Then

$$u_*(t) = \frac{\rho}{b + (c - bx_*(t))\phi(t)} \quad \text{if} \quad (x_*(t), \phi(t)) \in (\Gamma_0 \cup \text{gr } \phi_0) \setminus \Gamma_{u=1} \quad (3.16)$$

and

$$u_*(t) = \frac{\rho}{a + a(1 - x_*(t))\phi(t)} \quad \text{if} \quad (x_*(t), \phi(t)) \in (\Gamma_1 \cup \text{gr } \phi_0) \setminus \Gamma_{u=1} \quad (3.17)$$

for all $t > 0$. Therefore, instead of systems (3.9), (3.10) and (3.11), (3.12), we may consider the system

$$\dot{x}(t) = \left(1 - \frac{\rho}{b + (c - bx(t))\phi(t)}\right)(c - bx(t)), \quad (3.18)$$

$$\dot{\phi}(t) = (\nu + \rho)\phi(t) + b\left(1 - \frac{\rho}{b + (c - bx(t))\phi(t)}\right)\phi(t) - \frac{\nu}{x(t)} \quad (3.19)$$

in $\Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ and the system

$$\dot{x}(t) = \left(1 - \frac{\rho}{a + a(1 - x(t))\phi(t)}\right)a(1 - x(t)), \quad (3.20)$$

$$\dot{\phi}(t) = (\nu + \rho)\phi(t) + a\left(1 - \frac{\rho}{a + a(1 - x(t))\phi(t)}\right)\phi(t) - \frac{\nu}{x(t)} \quad (3.21)$$

in $\Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$. In $\Gamma_{u=1}$ the Hamiltonian system is defined by (3.14) and (3.15). Note that

$$\Gamma = \Gamma_{u=1} \sqcup (\Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}) \sqcup (\Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}) \sqcup (\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}).$$

On $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ we have in fact a vector differential inclusion whose right-hand side is the set of all convex linear combinations of the limit values of the vector fields in Γ_0 and Γ_1 determined by the right-hand sides of (3.18), (3.19) and (3.20), (3.21), respectively. (The corresponding control $v(\cdot)$ will be a singular control at such points, see [6]).

System (3.14), (3.15), (3.18)–(3.21) will be referred to as *system* (S) in what follows. It differs from system (3.9)–(3.12), (3.14), (3.15) only for large values of $\phi(t)$, and, as explained above, if $\phi(\cdot)$ is the current value adjoint variable corresponding to an optimal process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ in problem (P_ε) by virtue of Theorem 1, then $(x_*(\cdot), \phi(\cdot))$ is a bounded solution of system (S) (under our assumptions on ε). Below we will show that for any admissible initial condition x_0 system (S) has only one bounded trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ such that $x(0) = x_0$. Therefore, this trajectory gives a unique optimal process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ in problem (P_ε) with $x_*(0) = x_0$, and hence by Proposition 1 this will also be a unique optimal process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ with $x_*(0) = x_0$ in problem (P1).

Note that system (S) can be formally viewed as the Hamiltonian system of the maximum principle for problem (P1), and the auxiliary problem (P_ε) was involved just to avoid the noncompact restriction on u in (2.25).

So, now we focus on finding bounded trajectories of system (S) that lie in Γ for all $t > 0$.

R e m a r k 1. If $p < q$, then for any trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ of the Hamiltonian system (S) we have $\dot{x}(t) > 0$ if $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$ and $\dot{x}(t) < 0$ if $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$. If $p > q$, then for any trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ of the Hamiltonian system (S) we have $\dot{x}(t) < 0$ if $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$ and $\dot{x}(t) > 0$ if $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$. If $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_{u=1}$, then $\dot{x}(t) = 0$.

It follows from Remark 1 that fixed points of system (S) may only be on the graph of the function $\phi_0(\cdot)$ or in $\Gamma_{u=1}$. Let us find them.

In $\Gamma_{u=1}$ the fixed points fill a whole segment of the graph of the function

$$\phi_1(x) = \frac{\nu}{(\nu + \rho)x} \quad (3.22)$$

if this graph intersects $\Gamma_{u=1}$; i.e., the set of fixed points in $\Gamma_{u=1}$ is $\Gamma_{u=1} \cap \text{gr } \phi_1$.

Let $\vec{V}_0(x, \phi) = (V_{01}(x, \phi), V_{02}(x, \phi))$ be the vector field generated by the right-hand side of system (3.18), (3.19) in $\Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$, and let $\vec{V}_1(x, \phi) = (V_{11}(x, \phi), V_{12}(x, \phi))$ be the vector field generated by the right-hand side of system (3.20), (3.21) in $\Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$. We can extend these fields

by continuity to assume that they are also defined on $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$. Then at any point of $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ we have a family of admissible vectors (velocities)

$$\vec{V}(x, \phi) = \lambda \vec{V}_1(x, \phi) + (1 - \lambda) \vec{V}_2(x, \phi), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.23)$$

This family contains a zero vector if and only if the vectors $\vec{V}_1(x, \phi)$ and $\vec{V}_2(x, \phi)$ have opposite directions (or one of them vanishes). Since the first coordinates of $\vec{V}_1(x, \phi)$ and $\vec{V}_2(x, \phi)$ are nonzero and have different signs (see Remark 1), this condition is equivalent to

$$V_{01}(x, \phi)V_{12}(x, \phi) = V_{11}(x, \phi)V_{02}(x, \phi), \quad (3.24)$$

or

$$\begin{aligned} & (1 - u_0(\phi, x))(c - bx) \left[(\nu + \rho + a(1 - u_1(\phi, x)))\phi - \frac{\nu}{x} \right] \\ &= (1 - u_1(\phi, x))a(1 - x) \left[(\nu + \rho + b(1 - u_0(\phi, x)))\phi - \frac{\nu}{x} \right]. \end{aligned}$$

Recall that $\phi = \phi_0(x)$ and

$$u_0(\phi, x) = u_1(\phi, x) = \frac{\rho}{b + (c - bx)\phi} = \frac{\rho}{a + a(1 - x)\phi} < 1$$

(because we are on the graph of $\phi_0(\cdot)$ and outside $\Gamma_{u=1}$). Then we can rewrite this equation as

$$\phi_0(x) \left[(\nu + \rho)(c - bx - a(1 - x)) + a(c - b)(1 - u_0(x, \phi_0(x))) \right] - \frac{\nu}{x}(c - bx - a(1 - x)) = 0. \quad (3.25)$$

Note that this automatically implies $\phi_0(x) > 0$ if $x \in I$ is a solution of (3.25). Indeed, if $p < q$, then $bx > c$ and $x < 1$, while if $p > q$, then $bx < c$ and $x > 1$.

Substituting (3.8) into (3.25), we obtain

$$-(b - a)(\nu + \rho) + \frac{a(c - b)(b - a)}{bx - c + a - ax} - \frac{a(c - b)\rho(b - a)}{a(b - c)} + \frac{\nu(a - c)}{x} + \nu(b - a) = 0,$$

or

$$\frac{a(c - b)(b - a)}{bx - c + a - ax} + \frac{\nu(a - c)}{x} = 0,$$

or

$$P(x) := (b - a)[a(b - c) - \nu(a - c)]x - \nu(a - c)^2 = 0. \quad (3.26)$$

Note that $P(x) \neq 0$ for $p \neq q$. A solution of this equation (if it exists) is given by

$$\bar{x} = \frac{\nu(a - c)^2}{(b - a)[a(b - c) - \nu(a - c)]}. \quad (3.27)$$

Since $P(0) \leq 0$, the point $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ belongs to Γ if and only if

$$P\left(\min\left\{1, \frac{p}{q}\right\}\right) < 0 \quad \text{and} \quad P\left(\max\left\{1, \frac{p}{q}\right\}\right) > 0. \quad (3.28)$$

Thus, in $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$ system (S) either has no fixed points or has one fixed point $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$.

Remark 2. It is interesting to note that \bar{x} does not depend on ρ and is the limit, as $\rho \rightarrow 0$, of the steady state in a similar optimal control problem but with consumption fixed at a certain share of the total income (i.e., with $u \equiv \text{const} > 0$) (see [3, (51)]).

Now, we show that no part of any trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ can go along the curve $\text{gr } \phi_0$, except for staying at the fixed point.

Proposition 2. *If $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ is a trajectory of system (S) such that $(x(t), \phi(t)) \in \text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ for any t from some time interval $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$, then $(x(t), \phi(t)) \equiv (\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ for any $t \in [t_0, t_1]$.*

P r o o f. The curve $\text{gr } \phi_0$ is defined by the equation $\mathcal{M}_0(x, u, \phi) - \mathcal{M}_1(x, u, \phi) = 0$ for an arbitrary fixed $u < 1$ (see (3.6), (3.7)). Therefore, a normal to this curve is given by

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \phi} \right).$$

Note that for $b \neq a$ both coordinates of \vec{n} are always nonzero, while for $b = a$ we have $\text{gr } \phi_0 = \emptyset$. The vector fields $\vec{V}_0(x, \phi)$ and $\vec{V}_1(x, \phi)$ in $\Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ and $\Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$, respectively, are given by

$$\vec{V}_0 = (V_{01}, V_{02}) = \left(\frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial \phi}, (\nu + \rho)\phi - \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial x} \right) \quad \text{for } u = u_0(x, \phi) < 1$$

and

$$\vec{V}_1 = (V_{11}, V_{12}) = \left(\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \phi}, (\nu + \rho)\phi - \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial x} \right) \quad \text{for } u = u_1(x, \phi) < 1.$$

On $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ we have $u_0(x, \phi) = u_1(x, \phi)$. Hence, assuming that \vec{n} is calculated for the same value of u , we obtain the equality of scalar products

$$\langle \vec{n}, \vec{V}_0 \rangle = -\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial \phi} + \left(\frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial \phi} - \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \phi} \right) (\nu + \rho)\phi + \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \phi} = \langle \vec{n}, \vec{V}_1 \rangle. \quad (3.29)$$

But then for any vector \vec{V} from the family (3.23) we obtain the same value of the scalar product with \vec{n} :

$$\langle \vec{n}, \vec{V} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{V}_0 \rangle = \langle \vec{n}, \vec{V}_1 \rangle.$$

If a trajectory goes along $\text{gr } \phi_0$, then we must have $\langle \vec{n}, \vec{V} \rangle = 0$ at any point of this trajectory, i.e.,

$$\langle \vec{n}, \vec{V}_0 \rangle = \langle \vec{n}, \vec{V}_1 \rangle = 0.$$

This implies that the vector fields \vec{V}_0 and \vec{V}_1 have either the same direction or opposite directions, i.e., $V_{01}V_{12} - V_{02}V_{11} = 0$, which is nothing else but equation (3.24) of the fixed point. \square

R e m a r k 3. If a trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ of the Hamiltonian system of the maximum principle reaches the curve $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ at a point other than $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$, then it must necessarily cross the curve $\text{gr } \phi_0$ (due to the equality of scalar products (3.29)). Let us determine the direction of this crossing (upward or downward).

To this end, we assume first that $\Gamma_{u=1} = \emptyset$ and calculate the limit values of the vector field \vec{V}_0 at the point $\left(\frac{p}{q}, \phi_0\left(\frac{p}{q}\right)\right)$ and of the vector field \vec{V}_1 at the point $(1, \phi_0(1))$:

$$\begin{aligned} V_{01}\left(\frac{p}{q}, \phi_0\left(\frac{p}{q}\right)\right) &= 0, \\ V_{02}\left(\frac{p}{q}, \phi_0\left(\frac{p}{q}\right)\right) &= (\nu + \rho)\phi_0\left(\frac{p}{q}\right) + (b - \rho)\phi_0\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{\nu b}{c} = \frac{b^2[c(b - a) - \nu(a - c)]}{ac(b - c)} \\ &= \frac{b^3 P\left(\frac{p}{q}\right)}{a^2 c (b - c)^2}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$V_{11}(1, \phi_0(1)) = 0,$$

$$V_{12}(1, \phi_0(1)) = (\nu + \rho)\phi_0(1) + (a - \rho)\phi_0(1) - \nu = \frac{a(b - a) - \nu(a - c)}{b - c} = \frac{P(1)}{(b - c)^2} \quad (3.31)$$

(see (3.18)–(3.21), (3.8) and (3.26)).

Since $P(\cdot)$ is a linear function and \vec{V}_0 and \vec{V}_1 are continuous nonvanishing vector fields on $\text{gr } \phi_0$ that are tangent to $\text{gr } \phi_0$ only at the point $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$, we conclude that a trajectory of system (3.18)–(3.21) crosses the curve $\text{gr } \phi_0$ downwards at a point $(x, \phi_0(x))$ if $P(x) < 0$ and upwards if $P(x) > 0$.

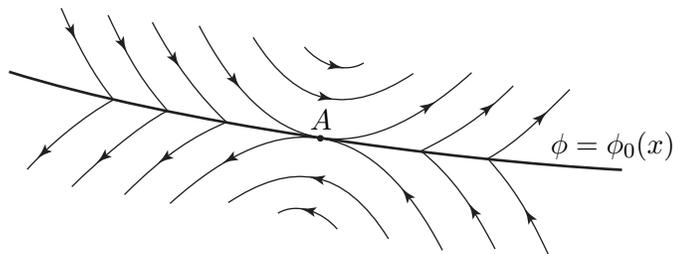


Fig. 2. The structure of the trajectories of system (3.18)–(3.21) in a neighborhood of the point $A = (\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$. Two trajectories reach the point A in finite time, and two trajectories emanate from it. The point A itself is also a trajectory of the system. This is the only point at which the uniqueness of solution to system (3.18)–(3.21) is violated.

Now note that the presence of the set $\Gamma_{u=1}$ does not affect this conclusion, but in the general case it applies only to the points of $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$. In particular, if the point $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ belongs to $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$, then in its neighborhood the vector field looks as shown in Fig. 2.

Now we are ready to describe the global structure of trajectories of system (S). Of course, this structure is different for different values of the parameters of the problem, so we distinguish three principally different cases:

- I. $\Gamma_{u=1} = \emptyset$.
- II. $\text{gr } \phi_0 \subset \Gamma_{u=1} \neq \emptyset$ (the possibility $\text{gr } \phi_0 = \emptyset$ is not excluded).
- III. $\Gamma_{u=1} \neq \emptyset$ and $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1} \neq \emptyset$.

The analysis in case I is similar to that performed in [3] for the fixed share u of consumption. Case II is the simplest one (because of the simple structure of the vector field in $\Gamma_{u=1}$), and case III is the most difficult one. Below we study each of the cases separately.

I. First, suppose that $p < q$, i.e., $c < b$. Then the condition $\Gamma_{u=1} = \emptyset$ is equivalent to the inequality $\rho \leq a$. Indeed, if $a < b$, then

$$b + (c - bx)\phi > b + (c - bx)\frac{b - a}{bx - c + a - ax} > a \quad \text{for } \phi < \phi_0(x),$$

while if $a \geq b$, then $\text{gr } \phi_0 = \Gamma_0 = \emptyset$. Hence, in any case the first term in the definition (3.13) of $\Gamma_{u=1}$ is empty. The second term is empty because the inequality $\rho \geq a + a(1 - x)\phi$ is impossible for $\rho \leq a$, $x < 1$ and $\phi > 0$.

Similar arguments show that for $p > q$ the condition $\Gamma_{u=1} = \emptyset$ is equivalent to the inequality $\rho \leq b$. Thus, case I is described by the conditions

$$(c < b, \rho \leq a) \quad \text{or} \quad (c > b, \rho \leq b). \quad (3.32)$$

It is clear from Fig. 2 that no trajectory may intersect the curve $\text{gr } \phi_0$ twice (at two different points). Hence any bounded trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$

- (i) either tends to the fixed point $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x})) \in \text{gr } \phi_0$,
- (ii) or lies in Γ_0 for all t starting from a certain $t_0 \geq 0$,
- (iii) or lies in Γ_1 for all t starting from a certain $t_0 \geq 0$.

In case (i) the trajectory goes to the fixed point either from Γ_0 or from Γ_1 (but not along $\text{gr } \phi_0$ by Proposition 2) and hence reaches the fixed point in some finite time $\tau > 0$ and then stays at this point for all $t \geq \tau$. The optimal control $u_*(\cdot)$ after reaching the fixed point is equal to

$$u_*(t) \equiv u_* = \frac{\rho}{a + a(1 - \bar{x})\phi_0(\bar{x})} = \frac{\rho}{a} \frac{(b - a)\bar{x} + a - c}{b - c} = \frac{\rho(a - c)}{a(b - c) - \nu(a - c)}, \quad t \geq \tau$$

(see (3.17), (3.8), (3.27)). The optimal control $v_*(\cdot)$ after reaching the fixed point can be obtained by equating the right-hand side of (2.27) to zero at $x(\tau) = \bar{x}$:

$$v_*(t) \equiv v_* = \frac{b\bar{x} - c}{b\bar{x} - c + a - a\bar{x}} = \frac{\nu(a - c) - c(b - a)}{(a - c)(b - a)}, \quad t \geq \tau. \quad (3.33)$$

We always have $0 < v_* < 1$ if $\bar{x} \in I$. Note that in this case $v_*(\cdot)$ is an optimal singular control on $[\tau, \infty)$ (see, for example, [6]).

In case (ii) $x(t) \rightarrow p/q$ and in case (iii) $x(t) \rightarrow 1$ as $t \rightarrow \infty$ due to (3.18) and (3.20), respectively. Since the vector fields generated by (3.18), (3.19) in Γ_0 and (3.20), (3.21) in Γ_1 have continuous extensions to the boundaries $x = p/q$ and $x = 1$ of Γ_0 and Γ_1 , respectively, a bounded trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ must tend to an “infinite” fixed point $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) \in \partial\Gamma_0$ or $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1) \in \partial\Gamma_1$, where $\bar{x}_0 = p/q$ and $\bar{x}_1 = 1$. For $\bar{\phi}_0$ from (3.19) we obtain the equation

$$(\nu + b)\bar{\phi}_0 - \frac{\nu q}{p} = 0.$$

For $\bar{\phi}_1$ from (3.21) we obtain the equation

$$(\nu + a)\bar{\phi}_1 - \nu = 0.$$

Thus,

$$\bar{\phi}_0 = \frac{\nu q}{p(\nu + b)} \quad \text{and} \quad \bar{\phi}_1 = \frac{\nu}{\nu + a}.$$

Suppose that $p < q$. Then the condition $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) \in \partial\Gamma_0$ is equivalent to $\bar{\phi}_0 \leq \phi_0(p/q)$, or $\nu q/(p(\nu + b)) \leq \phi_0(p/q)$. Note that this inequality is equivalent to $P(p/q) \geq 0$ (see (3.30)), or

$$\nu(a - c) \leq c(b - a). \quad (3.34)$$

Similarly, the condition $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1) \in \partial\Gamma_1$ for $p < q$ is equivalent to $\bar{\phi}_1 \geq \phi_0(1)$, or $\nu/(\nu + a) \geq \phi_0(1)$. This inequality is equivalent to $P(1) \leq 0$ (see (3.31)), or

$$\nu(a - c) \geq a(b - a). \quad (3.35)$$

The conditions $P(p/q) \geq 0$, $P(1) \leq 0$, and the condition (3.28) of the existence of a fixed point in $\text{gr } \phi_0$ are pairwise incompatible for $p < q$ and describe all possible situations (i.e., one and only one condition from these three holds for any relation between the parameters of the problem). Thus, one and only one fixed point $((\bar{x}, \phi_0(\bar{x})), (\bar{x}_0, \bar{\phi}_0), \text{ or } (\bar{x}_1, \bar{\phi}_1))$ exists in the closure of Γ (this fixed point lies on the thick curve in Fig. 1a).

Suppose now that $p > q$. Then the condition $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) \in \partial\Gamma_0$ is equivalent to $\bar{\phi}_0 \geq \phi_0(p/q)$, or $\nu q/(p(\nu + b)) \geq \phi_0(p/q)$. This inequality is equivalent to $P(p/q) \leq 0$ (see (3.30)); i.e., we obtain the same condition (3.34) as above.

Similarly, the condition $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1) \in \partial\Gamma_1$ for $p > q$ is equivalent to $\bar{\phi}_1 \leq \phi_0(1)$, or $\nu/(\nu + a) \leq \phi_0(1)$. This inequality is equivalent to $P(1) \geq 0$ (see (3.31)); i.e., we obtain the same condition (3.35) as above.

The conditions $P(p/q) \leq 0$, $P(1) \geq 0$, and the condition (3.28) of the existence of a fixed point in $\text{gr } \phi_0$ are pairwise incompatible for $p > q$ and describe all possible situations. Thus, one and only

one fixed point $((\bar{x}, \phi_0(\bar{x})), (\bar{x}_0, \bar{\phi}_0), \text{ or } (\bar{x}_1, \bar{\phi}_1))$ exists in the closure of Γ (this fixed point lies on the thick curve in Fig. 1b).

Note that if the system has an “infinite” fixed point $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$ or $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1)$, then in both cases ($p < q$ and $p > q$) the trajectories intersecting the curve $\text{gr } \phi_0$ (if $\text{gr } \phi \neq \emptyset$) cross this curve from the domain whose closure contains the “infinite” fixed point to the domain whose closure does not contain this point. (Indeed, the direction of this crossing is determined by the sign of $P(\cdot)$ (see Remark 3). This sign is constant for $x \in I$ and can be determined by the sign of $P(1)$ or $P(p/q)$.) Therefore, such trajectories either are unbounded or leave Γ in finite time, and any trajectory that tends to $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$ lies completely in Γ_0 , while any trajectory that tends to $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1)$ lies completely in Γ_1 .

If $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x})) \in \text{gr } \phi_0$, then there is only one trajectory of the vector field \vec{V}_0 in Γ_0 and only one trajectory of the vector field \vec{V}_1 in Γ_1 that pass through this point, because $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ is a regular point for both fields.

Now let us show that there may be only one trajectory that tends to an “infinite” fixed point.

Proposition 3. *If system (3.18)–(3.21) has an “infinite” fixed point $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) \in \partial\Gamma_0 \setminus \partial\Gamma_{u=1}$ or $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1) \in \partial\Gamma_1 \setminus \partial\Gamma_{u=1}$, then there is only one trajectory that tends to this point.*

P r o o f. Assume the contrary. Let $(x_1(\cdot), \phi_1(\cdot))$ and $(x_2(\cdot), \phi_2(\cdot))$ be two trajectories with $x_1(0) = x_2(0)$ and $\phi_1(0) < \phi_2(0)$ that tend to the same “infinite” fixed point. Then any trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ with $x(0) = x_1(0) = x_2(0)$ and $\phi_1(0) < \phi(0) < \phi_2(0)$ must also tend to this point (all these trajectories lie in the same domain, Γ_0 or Γ_1 , and so either $\dot{x}_1(t) > 0, \dot{x}_2(t) > 0, \dot{x}(t) > 0$ or $\dot{x}_1(t) < 0, \dot{x}_2(t) < 0, \dot{x}(t) < 0$ for all $t > 0$).

Thus, we obtain a continuum of trajectories that tend to a fixed point. Let us extend the system to a neighborhood of the fixed point by formulas (3.18), (3.19) in the case of $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$ or by formulas (3.20), (3.21) in the case of $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1)$ and consider the linearization of this system at this point. In the case of $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$ the linearized system is

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (\rho - b)(x(t) - \bar{x}_0), \\ \dot{\phi}(t) &= \left(-\rho\bar{\phi}_0^2 + \frac{\nu}{\bar{x}_0^2}\right)(x(t) - \bar{x}_0) + (\nu + b)(\phi(t) - \bar{\phi}_0).\end{aligned}$$

The determinant of the matrix of this system is equal to $(\rho - b)(\nu + b)$. If $c < b$, then $\rho < b$ (otherwise it is seen from (3.13) that $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) \in \partial\Gamma_{u=1}$). Therefore, the determinant is negative and, by the Grobman–Hartman theorem (see [8]), the trajectories of system (3.18), (3.19) in a neighborhood of $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$ behave qualitatively in the same way as the trajectories of the linearized system. Therefore, the presence of a continuum of trajectories tending to the fixed point is impossible, and we arrive at a contradiction.

If $c > b$, then we only know that $\rho \leq b$ (otherwise again $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) \in \partial\Gamma_{u=1}$). So for $\rho = b$ we have to conduct a more delicate analysis. Consider again two trajectories $(x_1(\cdot), \phi_1(\cdot))$ and $(x_2(\cdot), \phi_2(\cdot))$ with $x_1(0) = x_2(0)$ and $\phi_1(0) < \phi_2(0)$ that tend to $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$. By virtue of (3.18) we have $\dot{x}_1(t) < \dot{x}_2(t)$ for $t = 0$ and hence for all sufficiently small t . Thus, $x_1(t) < x_2(t)$ for all sufficiently small $t > 0$. Suppose that $x_1(\tau) = x_2(\tau)$ for some $\tau > 0$, and let τ be the first such moment. Then $\phi_1(\tau) < \phi_2(\tau)$ and so $\dot{x}_1(\tau) < \dot{x}_2(\tau)$. But in this case $x_1(\tau - \vartheta) > x_2(\tau - \vartheta)$ for small $\vartheta > 0$, which contradicts the assumption that $\tau > 0$ is the first moment such that $x_1(\tau) = x_2(\tau)$. Thus, $x_1(t) < x_2(t)$ for all $t > 0$.

Set $\xi_1(t) = \phi_1(t)(c - bx_1(t))$ and $\xi_2(t) = \phi_2(t)(c - bx_2(t))$. Then $\xi_1(0) < \xi_2(0)$ and

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_2(t) - \dot{\xi}_1(t) &= (\nu + \rho)\xi_2(t) - \frac{c\nu}{x_2(t)} + b\nu - (\nu + \rho)\xi_1(t) + \frac{c\nu}{x_1(t)} - b\nu \\ &\geq (\nu + \rho)(\xi_2(t) - \xi_1(t)) \quad \text{for all } t > 0.\end{aligned}$$

Consequently, $\xi_2(t) - \xi_1(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$, which contradicts our assumption.

Similarly, in the case of $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1)$ the linearized system is

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\rho - a)(x(t) - \bar{x}_1), \\ \dot{\phi}(t) &= \left(-\rho\bar{\phi}_1^2 + \frac{\nu}{\bar{x}_1^2}\right)(x(t) - \bar{x}_1) + (\nu + a)(\phi(t) - \bar{\phi}_1). \end{aligned}$$

The determinant of the matrix of this system is equal to $(\rho - a)(\nu + a)$. If $c > b$, then $\rho < a$ (otherwise it is seen from (3.13) that $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1) \in \partial\Gamma_{u=1}$). Therefore, the determinant is negative and, by the Grobman—Hartman theorem, the trajectories of system (3.20), (3.21) in a neighborhood of $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1)$ behave qualitatively in the same way as the trajectories of the linearized system. Therefore, the presence of a continuum of trajectories tending to the fixed point is impossible, and we arrive at a contradiction.

If $c < b$, then we only know that $\rho \leq a$ (otherwise again $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1) \in \partial\Gamma_{u=1}$). So for $\rho = a$ we consider two trajectories $(x_1(\cdot), \phi_1(\cdot))$ and $(x_2(\cdot), \phi_2(\cdot))$ with $x_1(0) = x_2(0)$ and $\phi_1(0) < \phi_2(0)$ that tend to $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1)$. By virtue of (3.20) we have $\dot{x}_1(t) < \dot{x}_2(t)$ for all sufficiently small t . Thus, reasoning as above, we see that $x_1(t) < x_2(t)$ for all $t > 0$.

Set $\xi_1(t) = \phi_1(t)(1 - x_1(t))$ and $\xi_2(t) = \phi_2(t)(1 - x_2(t))$. Then $\xi_1(0) < \xi_2(0)$ and

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2(t) - \dot{\xi}_1(t) &= (\nu + \rho)\xi_2(t) - \frac{\nu}{x_2(t)} + \nu - (\nu + \rho)\xi_1(t) + \frac{\nu}{x_1(t)} - \nu \\ &\geq (\nu + \rho)(\xi_2(t) - \xi_1(t)) \quad \text{for all } t > 0. \end{aligned}$$

Consequently, $\xi_2(t) - \xi_1(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$, which contradicts our assumption. □

Thus, we see that in case I system (3.18)–(3.21) has only one fixed point in the closure of Γ and only one trajectory that tends to this fixed point. All other trajectories either are unbounded or leave Γ in finite time. So this trajectory gives the optimal process in problem (P_ϵ) (and hence in problem $(P1)$).

Under condition (3.34) this trajectory lies in Γ_0 and tends to $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) \in \partial\Gamma_0$.

Under condition (3.35) this trajectory lies in Γ_1 and tends to $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1) \in \partial\Gamma_1$.

If both conditions (3.34) and (3.35) are violated, then for $x_0 < \bar{x}$ the trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ with $x(0) = x_0$ lies above $\text{gr } \phi_0$, reaches $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ in finite time and then stays in $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$; for $x_0 > \bar{x}$ the trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ with $x(0) = x_0$ lies below $\text{gr } \phi_0$, reaches $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ in finite time and then stays in $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$. If $x_0 = \bar{x}$, then the only bounded trajectory with $x(0) = x_0$ is $x(t) \equiv \bar{x}$, $\phi(t) \equiv \phi_0(\bar{x})$.

This picture is illustrated in Fig. 3 for $p < q$.

II. As in case I, one can check that the condition $\text{gr } \phi_0 \subset \Gamma_{u=1} \neq \emptyset$ is described by the inequalities

$$(c < b, \rho > a, \rho \geq b) \quad \text{or} \quad (c > b, \rho > b, \rho \geq a). \tag{3.36}$$

If $c < b$, then

$$\Gamma_{u=1} = \{(x, \phi) \in \Gamma : a + a(1 - x)\phi \leq \rho\}.$$

If $c > b$, then

$$\Gamma_{u=1} = \{(x, \phi) \in \Gamma : b + (c - bx)\phi \leq \rho\}.$$

As in case I, we conclude that any bounded trajectory must tend to a fixed point. However, in case II the whole thick curve shown in Fig. 1 lies in the closure of $\Gamma_{u=1}$. Hence all fixed points lie in $\Gamma_{u=1}$ and, as mentioned above, are described by the equation

$$x\phi = \frac{\nu}{\nu + \rho} \tag{3.37}$$

(see (3.14), (3.15)). Let us find the intersection of the curve defined by this equation with the “upper” boundary of $\Gamma_{u=1}$.

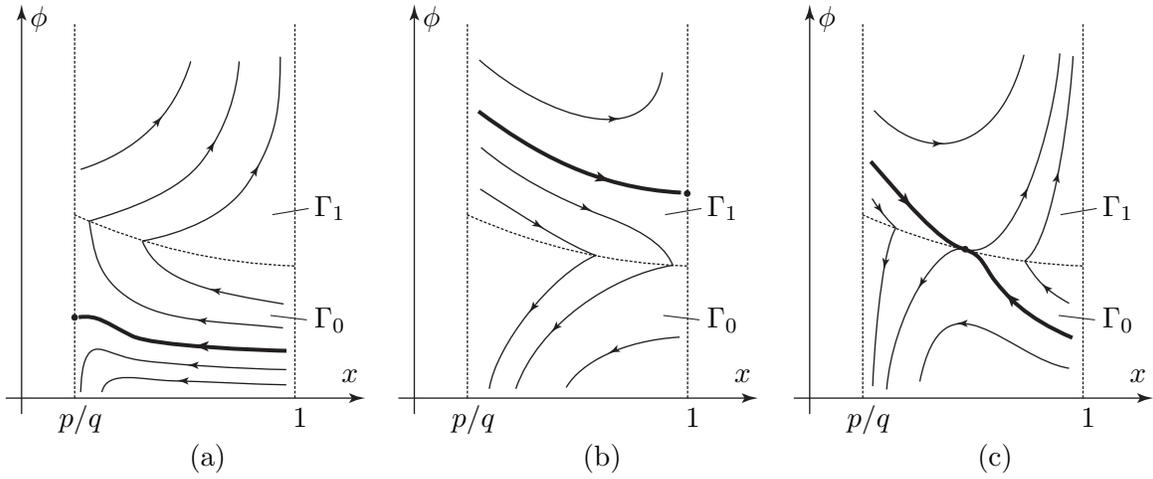


Fig. 3. Trajectories of system (3.18)–(3.21) in case I for $p < q$. All bounded trajectories are shown by thick lines.

If $c < b$, then the upper boundary is described by the equation

$$\rho = a + a(1 - x)\phi. \tag{3.38}$$

Solving system (3.37), (3.38), we find

$$x = \hat{x} := \frac{\nu a}{\rho(\nu + \rho - a)}, \quad \phi = \hat{\phi} := \frac{\rho}{a} - \frac{\rho}{\nu + \rho}.$$

This point lies in Γ if $\hat{x} > p/q = c/b$ (because $\hat{x} < 1$ due to (3.36)), i.e., if $a(\nu b + \rho c) > c\rho(\nu + \rho)$.

If $c > b$, then the upper boundary is described by the equation

$$\rho = b + (c - bx)\phi. \tag{3.39}$$

Solving system (3.37), (3.39), we find

$$x = \hat{x} := \frac{\nu c}{\rho(\nu + \rho - b)}, \quad \phi = \hat{\phi} := \frac{\rho}{c} - \frac{b\rho}{c(\nu + \rho)}.$$

This point lies in Γ if $\hat{x} > 1$ (because $\hat{x} < p/q$ due to (3.36)), i.e., if $\nu c + \rho b > \rho(\nu + \rho)$.

In $\Gamma_{u=1}$ the trajectories are straight lines, with the upward motion above the curve (3.37) and downward motion below this curve.

Thus, if

$$c < b, \quad \rho > a, \quad \rho \geq b, \quad a(\nu b + \rho c) \leq c\rho(\nu + \rho)$$

or

$$c > b, \quad \rho > b, \quad \rho \geq a, \quad \nu c + \rho b \leq \rho(\nu + \rho),$$

then the trajectories of system (S) look as shown in Fig. 4a, and for any $x_0 \in I$ the only bounded trajectory with $x(0) = x_0$ is the fixed point $x(t) \equiv x_0, \phi(t) \equiv \nu/((\nu + \rho)x_0)$.

Similarly, if

$$c < b, \quad \rho > a, \quad \rho \geq b, \quad a(\nu b + \rho c) > c\rho(\nu + \rho) \tag{3.40}$$

or

$$c > b, \quad \rho > b, \quad \rho \geq a, \quad \nu c + \rho b > \rho(\nu + \rho), \tag{3.41}$$

then the trajectories of system (S) look as shown in Fig. 4b. For any $x_0, \hat{x} < x_0 < \max\{1, p/q\}$, the only bounded trajectory with $x(0) = x_0$ is the fixed point $x(t) \equiv x_0, \phi(t) \equiv \nu/((\nu + \rho)x_0)$. There

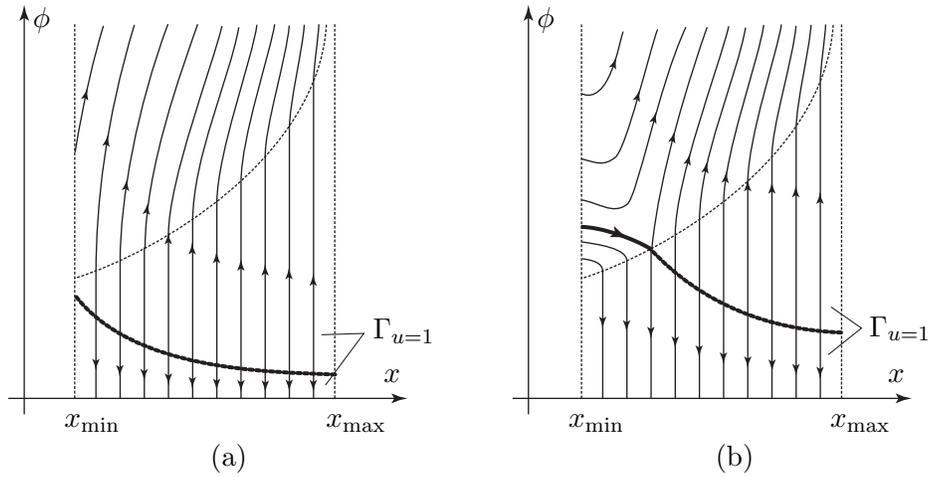


Fig. 4. Trajectories of system (S) in case II ($x_{\min} = \min\{1, p/q\}$, $x_{\max} = \max\{1, p/q\}$). All bounded trajectories are fixed points filling the curve $\phi = \nu/((\nu + \rho)x)$ in $\Gamma_{u=1}$ and a trajectory in $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$ shown by a thick line in case (b).

is also a trajectory $(x(\cdot), \phi(\cdot))$ with $\dot{x}(t) > 0$ for all t that lies in $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$ and tends to the fixed point $(\hat{x}, \hat{\phi})$. The only fact that remains to be checked is the uniqueness of such a trajectory. This can be done as in the proof of Proposition 3. Indeed, the reasoning with estimating the difference between $\xi_1(t)$ and $\xi_2(t)$ applies in this case without any changes. However, here we also calculate the matrix of the linearized system at the point $(\hat{x}, \hat{\phi})$ because we will need it in the analysis of case III.

Under conditions (3.40), $(\hat{x}, \hat{\phi}) \in \Gamma_1$ and the matrix of the linearized system (for system (3.20), (3.21) extended to a neighborhood of the point $(\hat{x}, \hat{\phi})$ by the same formulas) at this point is

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a^2 \hat{\phi}(1 - \hat{x})}{\rho} & \frac{a^2(1 - \hat{x})^2}{\rho} \\ -\frac{a^2 \hat{\phi}^2}{\rho} + \frac{\nu}{\hat{x}^2} & \nu + \rho + \frac{a^2 \hat{\phi}(1 - \hat{x})}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

where we took into account that $a + a(1 - \hat{x})\hat{\phi} = \rho$ (see (3.38)). Since \hat{x} and $\hat{\phi}$ also satisfy (3.37), we obtain

$$\det A = -(\nu + \rho) \frac{a^2 \hat{\phi}(1 - \hat{x})}{\rho} - \nu \frac{a^2(1 - \hat{x})^2}{\rho \hat{x}^2} = -\frac{\nu a^2(1 - \hat{x})}{\rho \hat{x}^2}, \quad \text{tr } A = \nu + \rho. \quad (3.43)$$

As $\hat{x} < 1$ for $c < b$, we have $\det A < 0$. Hence by the Grobman–Hartman theorem, there may be only one trajectory that tends to $(\hat{x}, \hat{\phi})$ from Γ_1 (see the proof of Proposition 3 for details).

Similarly, under conditions (3.41), $(\hat{x}, \hat{\phi}) \in \Gamma_0$ and the matrix of the linearized system (for system (3.18), (3.19) extended to a neighborhood of the point $(\hat{x}, \hat{\phi})$ by the same formulas) at this point is

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{b\hat{\phi}(c - b\hat{x})}{\rho} & \frac{(c - b\hat{x})^2}{\rho} \\ -\frac{b^2 \hat{\phi}^2}{\rho} + \frac{\nu}{\hat{x}^2} & \nu + \rho + \frac{b\hat{\phi}(c - b\hat{x})}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

where we took into account that $b + (c - b\hat{x})\hat{\phi} = \rho$ (see (3.39)). Since \hat{x} and $\hat{\phi}$ also satisfy (3.37), we obtain

$$\det A = -(\nu + \rho) \frac{b\hat{\phi}(c - b\hat{x})}{\rho} - \nu \frac{(c - b\hat{x})^2}{\rho \hat{x}^2} = -\frac{\nu c(c - b\hat{x})}{\rho \hat{x}^2}, \quad \text{tr } A = \nu + \rho. \quad (3.45)$$

As $c - b\hat{x} > 0$ for $c > b$, we again get the desired result.

III. As in case I, one can check that the conditions $\Gamma_{u=1} \neq \emptyset$ and $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1} \neq \emptyset$ are described by the inequalities

$$(c < b, a < \rho < b) \quad \text{or} \quad (c > b, b < \rho < a). \quad (3.46)$$

If $c < b$, then

$$\Gamma_{u=1} = \left\{ (x, \phi) \in \Gamma : \frac{b - \rho}{bx - c} \leq \phi \leq \frac{\rho - a}{a(1 - x)} \right\}.$$

If $c > b$, then

$$\Gamma_{u=1} = \left\{ (x, \phi) \in \Gamma : \frac{a - \rho}{a(x - 1)} \leq \phi \leq \frac{\rho - b}{c - bx} \right\}.$$

In fact, it is this case that was exemplified in Fig. 1.

Let us find the point of intersection of $\partial\Gamma_{u=1}$ with $\text{gr } \phi_0$ (this is also the intersection point of the two curvilinear parts of the boundary of $\Gamma_{u=1}$):

$$\hat{x} := \frac{a(b - \rho) + c(\rho - a)}{\rho(b - a)} = \frac{a(b - c) - \rho(a - c)}{\rho(b - a)}, \quad \hat{\phi} := \frac{\rho(b - a)}{a(b - c)}.$$

As in case I, we conclude that any bounded trajectory must tend to a fixed point.

We divide the further analysis into several cases:

- (i) all fixed points (finite or “infinite,” see case I) of system (S) lie to the right of $(\hat{x}, \hat{\phi})$ (hence they lie in $\Gamma_{u=1}$);
- (ii) $(\hat{x}, \hat{\phi}) = (\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$;
- (iii) $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x})) \in \text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ and $\text{gr } \phi_1 \cap \Gamma_{u=1} = \emptyset$;
- (iv) $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x})) \in \text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ and $\text{gr } \phi_1 \cap \Gamma_{u=1} \neq \emptyset$;
- (v) either $c < b$ and $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) \in \partial\Gamma_0$ or $c > b$ and $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1) \in \partial\Gamma_1$, and $\text{gr } \phi_1 \cap \Gamma_{u=1} = \emptyset$;
- (vi) either $c < b$ and $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) \in \partial\Gamma_0$ or $c > b$ and $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1) \in \partial\Gamma_1$, and $\text{gr } \phi_1 \cap \Gamma_{u=1} \neq \emptyset$,

where $\phi_1(\cdot)$ is defined by (3.22).

Case (i) is described by the inequality $P(\hat{x}) < 0$ (see Remark 3), i.e.,

$$[a(b - c) - \rho(a - c)][a(b - c) - \nu(a - c)] - \nu\rho(a - c)^2 < 0,$$

or

$$(b - c)[a(b - c) - (\nu + \rho)(a - c)] < 0. \quad (3.47)$$

In this case we also have $P(x) < 0$ for $\min\{1, p/q\} < x < \hat{x}$ because P is a linear function with $P(0) \leq 0$. Therefore, the trajectories intersecting the curve $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ cross this curve downwards.

Let us find the disposition of the curve $\text{gr } \phi_1$ in $\Gamma_{u=1}$. Due to (3.47) we have

$$\hat{x}\hat{\phi} = \frac{a(b - c) - \rho(a - c)}{a(b - c)} = 1 - \rho \frac{(a - c)(b - c)}{a(b - c)^2} < 1 - \frac{\rho}{\nu + \rho} = \frac{\nu}{\nu + \rho}. \quad (3.48)$$

This means that $\text{gr } \phi_1$ intersects the “upper” boundary of $\Gamma_{u=1}$ (above $\text{gr } \phi_0$; denote this intersection point again by $(\hat{x}, \hat{\phi})$) and does not intersect the “lower” boundary of $\Gamma_{u=1}$. Indeed, $\text{gr } \phi_1$ may have only one point of intersection (in Γ) with the hyperbola (containing the “lower” boundary of $\Gamma_{u=1}$) defined by the equation $\rho = b + (c - bx)\phi$ for $c < b$ or $\rho = a + a(1 - x)\phi$ for $c > b$ and lies above this hyperbola to the right of the intersection point.

There is a (unique) trajectory that lies in $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$ (above $\text{gr } \phi_0$) and tends to $(\hat{x}, \hat{\phi})$ (this is proved in the same way as above).

So, the qualitative picture of trajectories of system (S) in case (i) resembles Fig. 4b and is as shown in Fig. 5a.

Case (ii) is the limit case of (i): $P(\hat{x}) = 0$, i.e.,

$$a(b - c) = (\nu + \rho)(a - c).$$

Inequality (3.48) also turns into an equality: $\hat{x}\hat{\phi} = \nu/(\nu + \rho)$, i.e., $(\hat{x}, \hat{\phi}) = (\bar{x}, \phi_0(\bar{x})) = (\hat{x}, \hat{\phi})$. The trajectories intersecting the curve $\text{gr } \phi_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ still cross this curve downwards, and $(x, \phi_1(x)) \in \Gamma_{u=1}$ for $\hat{x} < x < \max\{1, p/q\}$. There is a unique trajectory that lies in $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$ above $\text{gr } \phi_0$ and tends to $(\hat{x}, \hat{\phi})$ (this is proved in the same way as above).

Let us show that no trajectory lying in $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$ below $\text{gr } \phi_0$ may tend to $(\hat{x}, \hat{\phi})$. Indeed, the matrix A of the linearized system (3.18), (3.19) if $c < b$ or (3.20), (3.21) if $c > b$ (extended to a neighborhood of $(\hat{x}, \hat{\phi})$) has positive determinant and trace (see (3.42)–(3.45)).⁵ Therefore, $(\hat{x}, \hat{\phi})$ is a repelling fixed point for (any C^1 -extension to a neighborhood of this point of) our system in $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$ below $\text{gr } \phi_0$.

So, the qualitative picture of trajectories of system (S) in case (ii) also resembles Fig. 4b and is as shown in Fig. 5b.

Case (iii). Suppose first that $c < b$. Then the first condition in (iii) is equivalent to $P(p/q) < 0 < P(\hat{x})$, or

$$\nu(a - c) > c(b - a), \quad a(b - c) > (\nu + \rho)(a - c). \quad (3.49)$$

The “lower” boundary of $\Gamma_{u=1}$ is given by $\rho = b + (c - bx)\phi$. The second condition in (iii) is equivalent to the fact that the rightmost point of this part of the boundary lies above or on (the continuation of) $\text{gr } \phi_1$ (to the right), i.e.,

$$\frac{b - \rho}{b - c} \geq \frac{\nu}{\nu + \rho}, \quad \text{or} \quad b\rho + c\nu \geq \rho(\nu + \rho). \quad (3.50)$$

If $c > b$, then the first condition in (iii) is equivalent to $P(1) < 0 < P(\hat{x})$, or

$$\nu(c - a) > a(a - b), \quad a(c - b) > (\nu + \rho)(c - a). \quad (3.51)$$

The second condition in (iii) is equivalent to

$$\frac{a - \rho}{a\left(\frac{c}{b} - 1\right)} \geq \frac{\nu}{\frac{c}{b}(\nu + \rho)}, \quad \text{or} \quad a(b\nu + c\rho) \geq c\rho(\nu + \rho). \quad (3.52)$$

Due to the second condition in (iii), $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ is the only fixed point of our system. Hence, the qualitative picture of trajectories of system (S) in case (iii) resembles Fig. 3c and is as shown in Fig. 5c.

Case (iv). As in case (iii), the first condition is equivalent to (3.49) if $c < b$ and to (3.51) if $c > b$. The second condition is equivalent to

$$b\rho + c\nu < \rho(\nu + \rho) \quad (3.53)$$

if $c < b$ and to

$$a(b\nu + c\rho) < c\rho(\nu + \rho) \quad (3.54)$$

if $c > b$.

In case (iv) we have a point $(\hat{x}, \hat{\phi})$ of intersection of $\text{gr } \phi_1$ with the lower boundary of $\Gamma_{u=1}$. As in case (ii), it is proved that $(\hat{x}, \hat{\phi})$ is a repelling fixed point for (any C^1 -extension to a neighborhood of this point of) our system in $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$. Hence, no trajectory may tend to $(\hat{x}, \hat{\phi})$ from $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$.

⁵Moreover, it can be shown that A has two positive different eigenvalues.

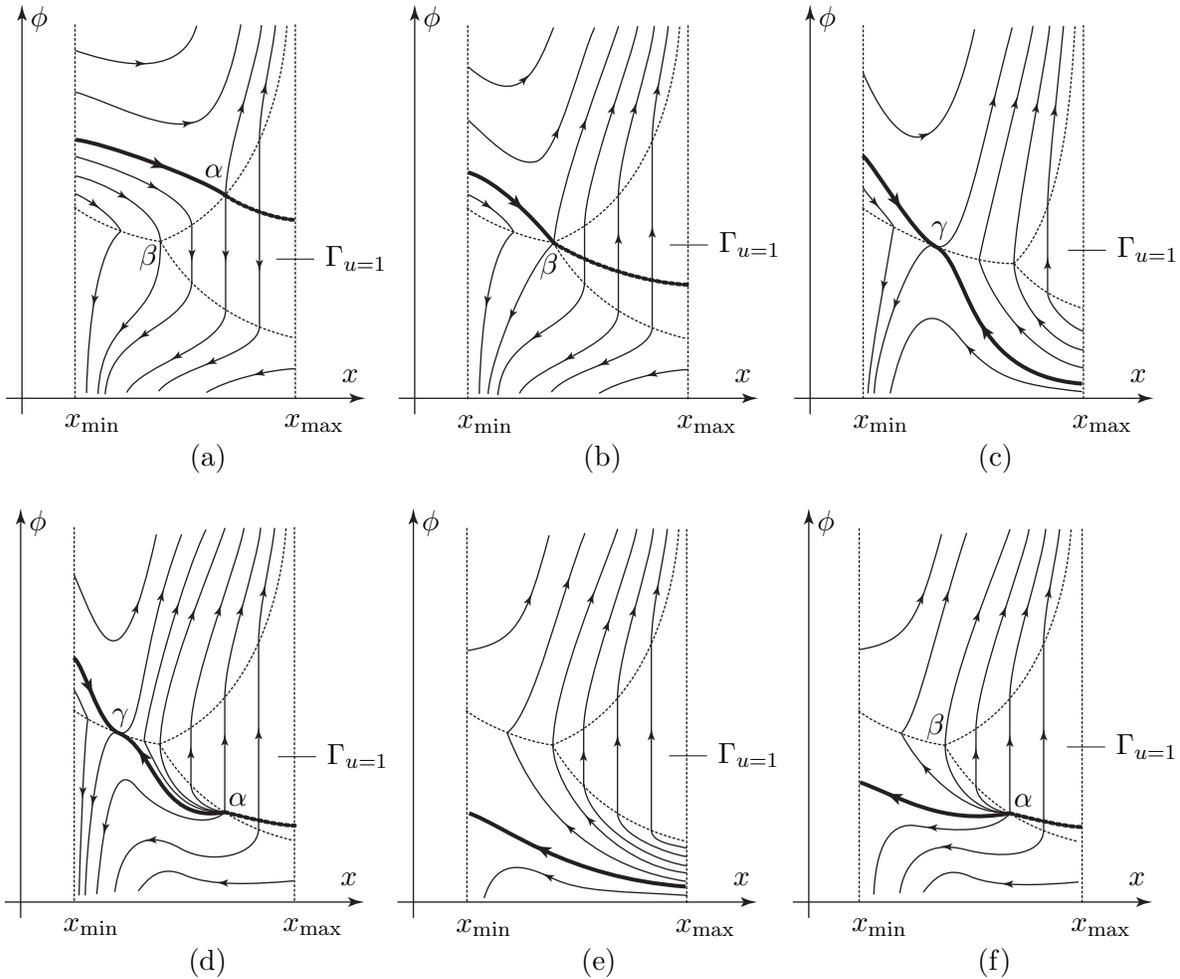


Fig. 5. Trajectories of system (S) in case III ($x_{\min} = \min\{1, p/q\}$, $x_{\max} = \max\{1, p/q\}$, $\alpha = (\hat{x}, \hat{\phi})$, $\beta = (\hat{x}, \hat{\phi})$, $\gamma = (\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$). All bounded trajectories are fixed points filling the curve $\phi = \nu/((\nu + \rho)x)$ in $\Gamma_{u=1}$ and trajectories in $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$ shown by thick lines.

The trajectory reaching $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ from the right (and lying below $\text{gr } \phi_0$) cannot intersect the lower boundary of $\Gamma_{u=1}$ to the left of and above $(\hat{x}, \hat{\phi})$ because at such points the vector field determined by our system is directed inside $\Gamma_{u=1}$. Therefore, this trajectory either emanates from $(\hat{x}, \hat{\phi})$, i.e., tends to $(\hat{x}, \hat{\phi})$ in the reverse time (as $t \rightarrow -\infty$), or passes below this point. Let us show that the latter situation is impossible.

Proposition 4. *Under the conditions of case III(iv), the trajectory reaching $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ from the right (and lying below $\text{gr } \phi_0$) emanates from $(\hat{x}, \hat{\phi})$.*

P r o o f. Suppose first that $p < q$, i.e., $c < b$. We are interested in the behavior of trajectories of system (3.18), (3.19) in $\Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$. Let us introduce new variables

$$\xi = (bx - c)\phi, \quad \zeta = (b - \xi)x$$

and rewrite system (3.18), (3.19) in these variables. Note that this change of variables is one-to-one because $bx > c$ and $\xi < b - \rho$ in $\Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$. We have

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (bx(t) - c)\dot{\phi}(t) + b\phi(t)\dot{x}(t) = (\nu + \rho)\phi(t)(bx(t) - c) - \nu b + \frac{\nu c}{x(t)} \\ &= (\nu + \rho)\xi(t) - \nu b + \frac{\nu c(b - \xi(t))}{\zeta(t)}, \end{aligned}$$

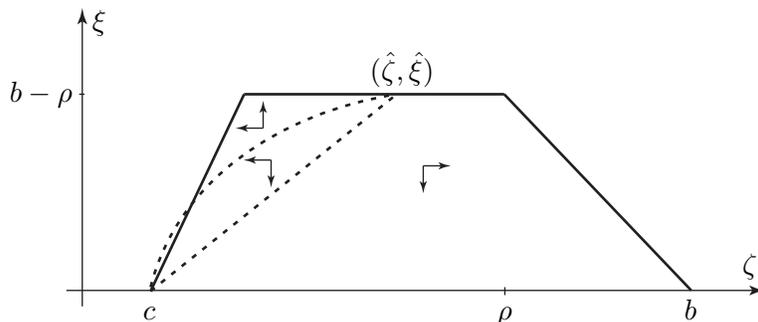


Fig. 6. The set $\Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ in the variables (ζ, ξ) for $c < b$. The arrows indicate the direction of the change of the coordinates for the trajectories of the system.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= (b - \xi(t))\dot{x}(t) - x(t)\dot{\xi}(t) = (b - \rho - \xi(t))(c - bx(t)) - (\nu + \rho)\xi(t)x(t) + \nu bx(t) - \nu c \\ &= (\nu + \rho - b)(\zeta(t) - c) - c\xi(t). \end{aligned}$$

In the variables (ζ, ξ) the equation of the line $x = 1$ is $\zeta = b - \xi$, the equation of the lower boundary of $\Gamma_{u=1}$ is $\xi = b - \rho$, the equation of the line $\phi = 0$ is $\xi = 0$, the line $x = p/q = c/b$ collapses to the point $\zeta = c, \xi = 0$, and the equation of $\text{gr } \phi_0$ is $(b - a)(\zeta - c) = (a - c)\xi$ (the latter requires some calculations, which are omitted here). That is, the set $\Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$ in the new variables is a trapezoid (see Fig. 6).

Note that $c < a < \rho < b < \nu + \rho$ due to (3.49), (3.46), (3.53). The line of vanishing of the ζ -coordinate has the equation $c\xi = (\nu + \rho - b)(\zeta - c)$ and connects the lower left corner of the trapezoid with a point $(\hat{\zeta}, \hat{\xi})$ on the upper boundary that corresponds to the fixed point $(\hat{x}, \hat{\phi})$ in the coordinates (x, ϕ) . To the right of this line the ζ -coordinate of the vector field determined by our system is positive, and to the left of this line it is negative.

The line of vanishing of the ξ -coordinate has the equation

$$\xi = \frac{\nu b(\zeta - c)}{(\nu + \rho)(\zeta - c) + \rho c}.$$

This is a hyperbola passing through the same two points $(c, 0)$ and $(\hat{\zeta}, \hat{\xi})$. Since it is concave, it lies above (or, which is the same, to the left of) the line of vanishing of the ζ -coordinate in the trapezoid. To the right of this hyperbola the ξ -coordinate of the vector field determined by our system is negative, and to the left of the hyperbola it is positive. The hyperbola may or may not intersect the left side of the trapezoid at an internal point of the left side, but this is not important for our analysis. In any case we see that a trajectory reaching the left side of the trapezoid at an internal point must originate from $(\hat{\zeta}, \hat{\xi})$.

If $p > q$, then the reasoning is similar. The trajectory in question lies in $\Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$ and satisfies system (3.20), (3.21). We introduce new variables $\xi = a(x - 1)\phi, \zeta = (a - \xi)x$ and rewrite system (3.20), (3.21) in these variables:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (\nu + \rho)\xi(t) - a\nu + \frac{a\nu(a - \xi(t))}{\zeta(t)}, \\ \dot{\zeta}(t) &= (\nu + \rho - a)(\zeta(t) - a) - a\xi(t). \end{aligned}$$

In the variables (ζ, ξ) the equation of the line $x = p/q$ is $\zeta = c(a - \xi)/b$, the equation of the lower boundary of $\Gamma_{u=1}$ is $\xi = a - \rho$, the equation of the line $\phi = 0$ is $\xi = 0$, the line $x = 1$ collapses to the point $\zeta = a, \xi = 0$, and the equation of $\text{gr } \phi_0$ is $(a - b)(\zeta - a) = (c - a)\xi$. Note that $b < \rho < a < \nu + \rho$ and $a < c$ in this case. Hence, the set $\Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$ in the new variables is a trapezoid. Then we proceed in the same way as above. \square

The qualitative picture of trajectories of system (S) in case (iv) is shown in Fig. 5d. A unique bounded trajectory with $x(0) = x_0$ reaches $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ in finite time and then stays there if $x_0 < \hat{x}$ and is a fixed point $(x_0, \phi_1(x_0))$ if $x_0 \geq \hat{x}$.

Case (v). If $c < b$, then the first condition in (v) is equivalent to $P(p/q) \geq 0$, i.e., (3.34). As shown in case (iii), the second condition is equivalent to (3.50).

If $c > b$, then the first condition in (v) is equivalent to $P(1) \geq 0$, i.e., (3.35). As shown in case (iii), the second condition is equivalent to (3.52).

Due to the second condition in (v), any bounded trajectory must tend to $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0) \in \partial\Gamma_0$ if $c < b$ or to $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1) \in \partial\Gamma_1$ if $c > b$. The qualitative picture of trajectories of system (S) in case (v) resembles Fig. 3a and is as shown in Fig. 5e.

Case (vi). If $c < b$, then the first condition in (vi) is equivalent to $P(p/q) \geq 0$, i.e., (3.34). As in case (iv), the second condition is equivalent to (3.53).

If $c > b$, then the first condition in (vi) is equivalent to $P(1) \geq 0$, i.e., (3.35). As in case (iv), the second condition is equivalent to (3.54).

In case (vi) we have a point $(\hat{x}, \hat{\phi})$ of intersection of $\text{gr } \phi_1$ with the lower boundary of $\Gamma_{u=1}$. As in case (ii), it is proved that $(\hat{x}, \hat{\phi})$ is a repelling fixed point for (any C^1 -extension to a neighborhood of this point of) our system in $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$. Hence, no trajectory may tend to $(\hat{x}, \hat{\phi})$ from $\Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$.

The trajectory that tends to $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$ if $c < b$ or to $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1)$ if $c > b$ cannot intersect the lower boundary of $\Gamma_{u=1}$ to the left of and above $(\hat{x}, \hat{\phi})$ because at such points the vector field determined by our system is directed inside $\Gamma_{u=1}$. Therefore, this trajectory either emanates from $(\hat{x}, \hat{\phi})$, i.e., tends to $(\hat{x}, \hat{\phi})$ in the reverse time (as $t \rightarrow -\infty$), or passes below this point. As in case (iv), the latter situation is impossible.

Proposition 5. *Under the conditions of case III(vi), the trajectory that tends to $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$ if $c < b$ or to $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1)$ if $c > b$ emanates from $(\hat{x}, \hat{\phi})$.*

Proposition 5 is proved in exactly the same way as Proposition 4. The only difference is that in the coordinates (ζ, ξ) the trajectory in question does not reach the left side of the trapezoid at an internal point but tends to the lower left corner. However, this affects nothing in the proof. Note that the change of variables from (x, ϕ) to (ζ, ξ) is in a sense an inverse of the process of resolution of singularity (see [2]).

The qualitative picture of trajectories of system (S) in case (vi) is shown in Fig. 5f. A unique bounded trajectory with $x(0) = x_0$ tends to $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$ for $c < b$ or to $(\bar{x}_1, \bar{\phi}_1)$ for $c > b$ if $x_0 < \hat{x}$ and is a fixed point $(x_0, \phi_1(x_0))$ if $x_0 \geq \hat{x}$.

So, for any relation between the parameters of the problem, there is only one bounded trajectory of system (S) with $x(0) = x_0$. Denote it by $(x_*(\cdot), \phi_*(\cdot))$. By Theorem 1 this trajectory gives a unique optimal process $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ in problem (P_ε) . Hence, by Proposition 1, $(x_*(\cdot), u_*(\cdot), v_*(\cdot))$ is a unique optimal process in problem (P1).

Note that the trajectory $(x_*(\cdot), \phi_*(\cdot))$ lies completely in one of the sets $\Gamma_{u=1}$, $(\Gamma_0 \cup \{(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))\}) \setminus \Gamma_{u=1}$, or $(\Gamma_1 \cup \{(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))\}) \setminus \Gamma_{u=1}$. In any case $x_*(\cdot)$ is a monotone (nonincreasing or nondecreasing) function. Thus, $\phi_*(\cdot)$, $u_*(\cdot)$, and $v_*(\cdot)$ can be considered as functions of x . The control $v_*(t)$ is 1 if $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_{u=1}$, is 0 if $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_0 \setminus \Gamma_{u=1}$, and is given by (3.33) if $(x(t), \phi(t)) = (\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$. If $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_{u=1}$, then $v_*(t)$ does not really participate in the control process (and may be assigned any value). The control $u_*(t)$ is 1 if $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma_{u=1}$ and is given by (3.16), (3.17) if $(x(t), \phi(t)) \in \Gamma \setminus \Gamma_{u=1}$. Unfortunately, an explicit formula for the optimal synthesis $u_*(x)$ can hardly be written, and we can only describe some features of this function. In particular, some estimates for $u_*(x)$ in the case when $\bar{x} < x < \hat{x}$ and $\bar{x}, \hat{x} \in I$ can be derived from the proof of Proposition 4. The following is probably one of the most important properties of this function:

Proposition 6. *$u_*(\cdot)$ is a nondecreasing function of x for all x and is an increasing function for all x such that $u_*(x) < 1$.*

P r o o f. If the optimal trajectory lies in $\Gamma_{u=1}$, then $u_* \equiv 1$ and the assertion is obvious.

Suppose that $p < q$ and the optimal trajectory lies in Γ_0 and tends to $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$ (see Fig. 3a or Figs. 5e, 5f). Set $\xi(t) = (bx_*(t) - c)\phi_*(t)$. Then

$$\dot{\xi}(t) = (\nu + \rho)\xi(t) - \nu b + \frac{\nu c}{x_*(t)}.$$

If $\dot{\xi}(\tau) \geq 0$ for some $\tau \geq 0$, then $\dot{\xi}(t) > 0$ for all $t > \tau$ (because $x_*(\cdot)$ decreases) and $\xi(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$, which is impossible. Therefore, $\dot{\xi}(t) < 0$ for all $t \geq 0$, $\dot{x}_*(t) < 0$ for all $t \geq 0$ due to (3.18), and $\dot{u}_*(t)$ has the same sign as $\dot{\xi}(t)$ because of (3.16). This implies the required assertion.

If $p > q$ and the optimal trajectory lies in Γ_0 and tends to $(\bar{x}_0, \bar{\phi}_0)$ (see Fig. 3b) or to $(\hat{x}, \hat{\phi})$ (see Figs. 4b, 5a, 5b), then we similarly find that $\dot{\xi}(t) > 0$ for all $t \geq 0$, $\dot{x}_*(t) > 0$ for all $t \geq 0$, and $\dot{u}_*(t) > 0$ for all $t \geq 0$.

If the optimal trajectory reaches $(\bar{x}, \phi_0(\bar{x}))$ from Γ_0 (see Fig. 3c or Figs. 5c, 5d), then the same conclusion can be drawn by considering the extension of the optimal trajectory in Γ_0 if $p < q$ or just by noting that $d\xi/dx > 0$ at $x = \bar{x}$ if $p > q$.

For the optimal trajectory lying in Γ_1 , the proof is analogous (set $\xi(t) = a(x_*(t) - 1)\phi_*(t)$). \square

Let us summarize the results of our analysis in the form of optimal synthesis.

Theorem 2. *Set $\sigma = 0$ if $p < q$ and $\sigma = 1$ if $p > q$. The optimal controls $u_*(\cdot)$ and $v_*(\cdot)$ in problem (P1) as functions of $x \in I$ are given by*

$$u_*(x) = \begin{cases} u_{1-\sigma}(x) & \text{if } x < \min\{\bar{x}, \hat{x}\}, \\ u_* & \text{if } x = \bar{x} < \hat{x}, \\ u_\sigma(x) & \text{if } \bar{x} < x < \hat{x}, \\ 1 & \text{if } x \geq \hat{x}, \end{cases} \quad v_*(x) = \begin{cases} 1 - \sigma & \text{if } x < \min\{\bar{x}, \hat{x}\}, \\ v_* & \text{if } x = \bar{x} < \hat{x}, \\ \sigma & \text{if } \bar{x} < x < \hat{x} \end{cases}$$

($v_*(x)$ does not actually participate in the control process for $x \geq \hat{x}$ and may be assigned any value), where

$$\bar{x} = \begin{cases} \frac{\nu(a-c)^2}{(b-a)[a(b-c) - \nu(a-c)]} & \text{if } (b-a)[a(b-c) - \nu(a-c)] > 0, \\ +\infty & \text{if } (b-a)[a(b-c) - \nu(a-c)] \leq 0. \end{cases}$$

$$\hat{x} = \begin{cases} \max\left\{\frac{\nu a}{\rho(\nu + \rho - a)}, \frac{\nu c}{\rho(\nu + \rho - b)}\right\} & \text{if } \nu + \rho > \max\{a, b\}, \\ +\infty & \text{if } \nu + \rho \leq \max\{a, b\}, \end{cases}$$

$$u_* = \frac{\rho(a-c)}{a(b-c) - \nu(a-c)}, \quad v_* = \frac{\nu(a-c) - c(b-a)}{(a-c)(b-a)} \quad \text{if } \bar{x} \in I,$$

$$u_0(x) = \frac{\rho}{b + (c - bx)\phi}, \quad u_1(x) = \frac{\rho}{a + a(1-x)\phi} \quad \text{for } x \in I, \quad x < \hat{x},$$

where ϕ is the ordinate of the point (x, ϕ) lying on the unique bounded trajectory (qualitatively described above) of system (S) that passes ‘‘over’’ the point $x \in I$.

If $\bar{x} \in I$ and $x, \bar{x} < \hat{x}$, then $u_0(x)$ and $u_1(x)$ can be found as solutions of the Cauchy problems

$$\frac{du_0(x)}{dx} = \frac{u_0(x)(\nu + \rho)(bu_0(x) - \rho) - \nu b(u_0(x))^2 + \nu c(u_0(x))^2 x^{-1}}{\rho(1 - u_0(x))(c - bx)}, \quad u_0(\bar{x}) = u_*,$$

$$\frac{du_1(x)}{dx} = \frac{u_1(x)(\nu + \rho)(au_1(x) - \rho) - \nu a(u_1(x))^2 + \nu a(u_1(x))^2 x^{-1}}{\rho(1 - u_1(x))a(1 - x)}, \quad u_1(\bar{x}) = u_*.$$

For an arbitrary initial state $x_0 \in I$, the optimal synthesis $u_*(x), v_*(x)$, $x \in I$, uniquely defines the optimal trajectory $x_*(\cdot)$ in problem (P1) as the solution of the Cauchy problem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (1 - u_*(x(t))) \left[av_*(x(t)) + c(1 - v_*(x(t))) - (av_*(x(t)) + b(1 - v_*(x(t))))x(t) \right], \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

and the corresponding optimal controls $u_*(\cdot)$ and $v_*(\cdot)$ as the functions

$$u_*(t) = u_*(x_*(t)), \quad v_*(t) = v_*(x_*(t)), \quad t \in [0, \infty).$$

4. Economic interpretation

Let us now pass on to the economic interpretation of the results obtained. As we mentioned earlier, in our model the planner expects an exogenous environmental shock to occur at time $T > 0$ after which the abatement costs increase, i.e., $p < q$. In other words, the productivity of the unit of capital (including the abatement costs) of the old technology sector after the shock, p , is lower than its productivity before the shock, q . So, we will assume throughout this section that $p < q$.

In our model any admissible state trajectory $x(\cdot)$ takes values

$$x(t) = \frac{A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)}{A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)}, \quad t \geq 0,$$

i.e., is the ratio of $Y_p(t) = A_1 K_1(t) + p A_2 K_2(t)$ to $Y_q(t) = A_1 K_1(t) + q A_2 K_2(t)$, where $Y_q(t)$ is the real instantaneous income at instant $t \geq 0$ (before the shock) and $Y_p(t)$ is the corresponding ‘‘fictitious’’ instantaneous income at the same instant t , which shows what the income would be if the shock happened right now.

Consider the variable

$$x = \frac{A_1 K_1 + p A_2 K_2}{A_1 K_1 + q A_2 K_2} = \frac{A_1 \frac{K_1}{K_2} + p A_2}{A_1 \frac{K_1}{K_2} + q A_2}$$

as a function of the ratio $y = K_1/K_2$ of the capital stocks of the modern and old technology sectors, i.e., put

$$x = \frac{A_1 y + p A_2}{A_1 y + q A_2}, \quad y \in (0, \infty).$$

It is easy to note that $x(\cdot)$ is a monotonically increasing function of the variable $y \in (0, \infty)$. Hence there is the inverse

$$y = \frac{A_2}{A_1} \frac{qx - p}{1 - x}, \quad x \in \left(\frac{p}{q}, 1 \right),$$

which is a monotonically increasing function of the variable $x \in (p/q, 1)$ as well. This fact allows one to reformulate Theorem 2 in terms of the ratio of the volumes of the modern and old technology sectors.

Note that in the case $\nu + \rho > \max\{b_1 A_1, q b_2 A_2\}$ [cf. the definitions for a and b and the expression for \hat{x} in Theorem 2] it can happen that for some values of the variable x (i.e. for some ratios $y = K_1/K_2$ of capital stocks) the optimal regime consists in zero investment in both old and new technological sectors (see Fig. 4 and Fig. 5). If so then in this case for some ratios $y = K_1/K_2$ of capital stocks the situation is possible when all national product must be consumed and both old and new technological sectors degenerate in optimal regimes.

However, in the opposite case $\nu + \rho \leq \max\{b_1 A_1, q b_2 A_2\}$, the optimal investment strategy is always positive in one or in both technological sectors (cf. Theorem 2). Qualitatively the optimal investment strategies in both sectors are similar to ones described in [3] (see Fig. 3).

REFERENCES

1. **Aghion P., Howitt P.** Endogenous growth theory. Cambridge, MA: MIT Press, 1998. 694 p.
2. **Arnold V.I.** Supplementary chapters to the theory of ordinary differential equations. Moscow: Nauka, 1978. 304 p (in Russian).
3. **Aseev S., Besov K., Ollus S.-E., and Palokangas T.** Optimal economic growth with a random environmental shock // Dynamic Systems, Economic Growth, and the Environment / eds. J.C. Cuaresma, T. Palokangas and A. Tarasyev. Berlin: Springer, 2010. P. 109–137. (Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance; vol. 12.)
4. **Aseev S.M., Kryazhinskii A.V.** The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2007. Vol. 257, no. 1. P. 1–255.
5. **Barro R.J., Sala-i-Martin X.** Economic growth. New York: McGraw Hill, 1995. 539 p.
6. **Gabasov R., Kirillova F.M.** Singular optimal control. New York: Plenum, 1982. 323 p.
7. **Gnedenko B.V.** Theory of probability. Newark, New York: Gordon and Breach, 1997. 497 p.
8. **Hartman P.** Ordinary differential equations. New York: J. Wiley & Sons, 1964. 612 p.
9. **Pontryagin L.S., Boltyanski V.G, Gamkrelidze R.V., and Mishchenko E.F.** The mathematical theory of optimal processes. Oxford: Pergamon Press, 1964. 340 p.
10. **Wälde K.** The economic determinants of technology shocks in real business cycle model // J. Economic Dynamics and Control. 2002. Vol. 27. P. 1–28.
11. **Wälde K.** Capital accumulation in a growth model with creative destruction // Stochastic Economic Dynamics / eds. B.S. Jensen, T. Palokangas. Frederiksberg: Cph. Bus. Sch. Press, 2007. P. 393–422.

Received August 4, 2010

Sergey Aseev

Steklov Mathematical Institute, Gubkina str. 8, Moscow, 119991, Russia

International Institute for Applied Systems Analysis, Schlossplatz 1, Laxenburg, A-2361, Austria

E-mail: aseev@mi.ras.ru

Konstantin Besov

Steklov Mathematical Institute, Gubkina str. 8, Moscow, 119991, Russia

E-mail: kbesov@mi.ras.ru

Simon-Erik Ollus

Fortum Corporation, Keilaniementie 1, Espoo, P.O. Box 1, FI-00048 Fortum, Finland

E-mail: Simon-Erik.Ollus@fortum.com

Tapio Palokangas

University of Helsinki and HECER, Arkadiankatu 7, 00014

University of Helsinki, Helsinki, Finland

E-mail: tapio.palokangas@helsinki.fi

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17

№ 2

2011

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TeX-редактор Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск Б. В. Дигас

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 12.05.11. Формат $60 \times 84^{1/8}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 37,75. Уч.-изд. л. 32,2. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226