

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

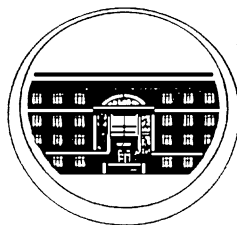
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 17

№ 1

2011



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 17, № 1. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. 302 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор чл.-корр. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора В. В. Кабанов

Редакционная коллегия

А. Г. Бабенко, Н. В. Величко,
М. И. Гусев, А. Р. Данилин,
А. Ф. Клейменов, А. С. Кондратьев, А. И. Короткий,
В. И. Максимов, О. Н. Ульянов (*отв. секретарь*)

Редакционный совет

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин,
акад. РАН А. М. Ильин, акад. РАН Н. Н. Красовский,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов

Отв. редакторы выпуска А. В. Кряжимский, В. И. Максимов

СОДЕРЖАНИЕ

В. А. Белоногов. О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. VII.....	3
М. С. Близорукова. О реконструкции траектории и управления в нелинейной системе второго порядка	17
Ф. П. Васильев, Е. В. Хорошилова, А. С. Антипин. Регуляризованный экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления	27
А. Л. Гаврилюк. Исследование параметров кодирования в точечном канале связи с локомотивом	38
Н. Л. Григоренко, Д. В. Камзолкин, Л. Н. Лукьянова. Численный алгоритм решения одной нестационарной задачи оптимального управления	53
М. И. Гусев. О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем.....	60
Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков. Некорректная задача восстановления численности популяции в математической модели Хатчинсона	70
А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами	85
М. Е. Елисеев. Об автотопиях квазигрупп	93
А. И. Короткий, Е. И. Грибанова. Восстановление управлений в гиперболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами	99
А. М. Липанов. О методе преодоления особых точек при решении трансцендентных уравнений.....	109
М. С. Никольский. Об управляемых вариантах модели Л. Ричардсона в политологии	121
Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, В. И. Максимов. Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов	129
Е. А. Панасенко, Л. И. Родина, Е. Л. Тонков. Пространство $\text{clscv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа — Бебутова и дифференциальные включения	162
В. Г. Пименов, А. Б. Ложников. Разностные схемы решения уравнения теплопроводности с последствием	178
Д. К. Потапов. Управление спектральными задачами для уравнений с разрывными операторами	190
А. В. Райгородская. Равновесные поведения игроков в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов размерности 2×2	201

В. Л. Розенберг. Алгоритм непрерывного оценивания возмущения в стохастическом дифференциальном уравнении	217
М. И. Сумин. Двойственная регуляризация и принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального граничного управления для параболического уравнения с недифференцируемыми функционалами	229
В. В. Таркаев. О кубической сложности трехмерных полиэдров	245
В. И. Ухоботов, Д. В. Гуцин. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой интегральной платой	251
В. Е. Федоров, М. В. Плеханова. Задача стартового управления для класса полулинейных распределенных систем соболевского типа	259
А. Г. Ченцов. Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости	268
Л. В. Шалагинов. О графах Деза с параметрами треугольных графов	294

УДК 512.54

О НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРАХ ГРУППЫ S_n , ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ НА A_n ИЛИ НА $S_n \setminus A_n$. VII¹

В. А. Белоногов

В статье завершается доказательство гипотезы А, выдвинутой в первой статье с таким заглавием, и продолжавшееся в предыдущих шести статьях этой серии. Следствием этой гипотезы является следующая теорема: знакопеременная группа A_n при любом натуральном n не имеет полупропорциональных неприводимых характеров. Предположение о справедливости этой теоремы впервые было высказано автором в статье 2004 года.

Ключевые слова: Симметрические группы, знакопеременные группы, неприводимые характеры, полупропорциональность.

V. A. Belonogov. On irreducible characters of the group S_n that are semiproportional on A_n or $S_n \setminus A_n$. VII.

The proof of Hypothesis A, which was introduced in the first paper with the same title, was carried out in the previous six papers of the series and is completed in the present paper. As a consequence of this hypothesis, the following theorem is obtained: the alternating group A_n for any natural n has no pairs of semiproportional irreducible characters. The suggestion about the validity of this theorem was first formulated in the author's paper in 2004.

Keywords: symmetric groups, alternating groups, irreducible characters, semiproportionality.

Введение

Настоящая статья является завершением серии статей [1–6], целью которых являлось получение доказательства следующих двух теорем: теоремы 1 и теоремы А, которые в предыдущих статьях этой серии фигурировали как “гипотеза 1” и “гипотеза А”. Как отмечено в [1], теорема 1 является следствием теоремы А (это следует из равносильности гипотезы 1 гипотезе 2 ниже) и существования гипотеза А “была придумана” как средство для доказательства первой теоремы. Теорема А7 настоящей статьи завершает доказательство гипотезы А.

Теорема 1. *Знакопеременная группа A_n при любом натуральном n не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.*

Напомним, что функции φ и ψ из некоторого множества G в поле \mathbb{C} называются *полупропорциональными*, если они непропорциональны и для некоторого подмножества M из G пропорциональны ограничения φ и ψ на M и их ограничения на $G \setminus M$; и эти функции называются *полупропорциональными на S* , где $S \subseteq G$, если полупропорциональны их ограничения на S .

Используемые здесь обозначения стандартны (см. [7–9]) или введены в [1]. В частности, $P(n)$ есть множество всех разбиений числа n ; χ^α — неприводимый характер группы S_n , соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$; α' есть разбиение, ассоциированное с α ; запись $\alpha = \beta'$ означает, что $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$. Определение участвующих в формулировке теоремы А разбиений $2^k \cdot ()$, $2^k \cdot (1)$, $3^k \cdot \Delta_l$, $3^k \cdot \Sigma_l$ и $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l$ и некоторые их свойства напоминаются в разд. 1. Для $\varepsilon \in \{1, -1\}$ полагаем $S_n^\varepsilon := \begin{cases} S_n^+ := A_n, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ S_n^- := S_n \setminus A_n, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН и программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Теорема А. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε . Тогда с точностью до перемены мест α и β верно одно из следующих утверждений:

(1) $\varepsilon = 1$ и выполнено одно из условий:

$$(1a) \alpha = 2^k \cdot () + (3) \text{ и } \beta = 2^k \cdot () + (0^k, 2, 1), \text{ где } k \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$(1b) \alpha = 2^k \cdot (1) + (3) \text{ и } \beta = 2^k \cdot (1) + (0^k, 1, 2), \text{ где } k \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

(2) $\varepsilon = -1$ и выполнено одно из условий (везде k, l целые):

$$(2a) \alpha = 3^k \cdot \Delta_l + (4) \text{ и } \beta = 3^k \cdot \Delta_l + (0^k, 2, 2), \text{ где } k \geq 0 \text{ и } l \geq 1;$$

$$(2b) \alpha = 3^k \cdot \Sigma_l + (4) \text{ и } \beta = 3^k \cdot \Sigma_l + (0^k, 3, 1), \text{ где } k \geq 0 \text{ и } l \geq 0;$$

$$(2в) \alpha = 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (4) \text{ и } \beta = 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (0^k, 1, 3), \text{ где } k \geq 0 \text{ и } l \geq 0.$$

Доказательство теоремы А (= гипотезы А) проводилось индукцией по числу n , а именно, в предположении, что выполнено следующее

Условие А. Пусть n — натуральное число такое, что при любом $\tilde{n} < n$ из того, что четвёрка $(\tilde{n}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ удовлетворяет условию гипотезы А на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$ следует, что она удовлетворяет и заключению этой гипотезы на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$.

Итоговым результатом статей [1–6] является следующая теорема из [6].

Теорема А6. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε и выполнено условие А. Тогда выполнено одно из условий:

(1) $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ удовлетворяет заключению гипотезы А,

(2) с точностью до перемены мест α и β $\alpha^{11} = (\alpha^{11})'$, $h_2^\alpha = h_{11}^\beta$ и тройка $(\alpha^2, \beta^{11}, \delta)$, где $\delta = (-1)^{h_{11}^\beta + 1} \varepsilon$, удовлетворяет условию (2) гипотезы А на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

Напомним, что число h_2^α и разбиение α^2 определены лишь в случае, когда $h_{12}^\alpha \neq h_{21}^\alpha$; в этом случае h_2^α есть наибольшее из чисел h_{12}^α или h_{21}^α , а α^2 есть α^{12} или α^{21} соответственно.

В настоящей статье доказана

Теорема А7. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε и выполнено условие А. Предположим, что справедливо условие (2) утверждения теоремы А6. Тогда $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ удовлетворяет заключению гипотезы А.

Тем самым завершено доказательство гипотезы А, т. е. доказательство теоремы А.

Упомянем некоторые работы за пределами серии [1–6], оказавшиеся существенными при доказательстве теоремы А. Гипотеза об отсутствии полупропорциональных неприводимых характеров у знакопеременных групп появилась в статье [10]. В ней получено описание всех пар полупропорциональных неприводимых характеров симметрических групп (теорема 1), и доказана теорема 2, позволяющая переформулировать гипотезу 1 в следующей эквивалентной форме.

Гипотеза 2. Если χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n ($\alpha, \beta \in P(n)$), полупропорциональные на A_n , то одно из разбиений α и β самоассоциировано.

Такая форма гипотезы обладает тем преимуществом, что она позволяет провести эксперимент и исходя из него догадаться, как выглядят диаграммы Юнга разбиений α и β при выполнении условия гипотезы 2. Эта работа проделана (на основании большого экспериментального материала) в [11], где была сформирована первая часть гипотезы А (см. гипотезу 3' в [1]) для случая $\varepsilon = 1$ и доказана её справедливость в случае, когда верно заключение гипотезы 2. Отсюда, в частности, следует справедливость гипотезы А в случае, когда хотя бы одно из разбиений α и β самоассоциировано. В [1] объяснено, почему для доказательства гипотезы 3'

индукцией по n потребовалось её расширение, включающее также и гипотезу о строении разбиений α и β таких, что неприводимые характеры χ^α и χ^β группы S_n полупропорциональны на разности $S_n \setminus A_n$. Такая гипотеза (вторая часть гипотезы А) была сформулирована в [12]. Отметим, что по [11; 12]:

– разбиения α и β из утверждения (1) гипотезы А имеют точно по одному крюку длины 3 и разбиения $2^k \cdot ()$ и $2^k \cdot (1)$ при всех $k \geq 0$ составляют множество всех самоассоциированных разбиений, не имеющих крюков длины 3;

– разбиения α и β из утверждения (2) гипотезы А имеют точно по одному крюку длины 4 и разбиения $3^k \cdot \Delta_m$, $3^k \cdot \Sigma_m$ и $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_m$ при всевозможных k, m составляют множество всех самоассоциированных разбиений, не имеющих крюков длины 4.

При доказательстве гипотезы А были использованы результаты статей [13; 14], из которых следует её справедливость всякий раз, когда длина главной диагонали хотя бы одного из разбиений α и β меньше трёх, а также статьи [15], согласно которой при условии гипотезы А должно быть $|d(\alpha) - d(\beta)| \leq 1$ ($d(\alpha)$ — длина главной диагонали диаграммы $[\alpha]$). В свою очередь этот результат получен на основании результатов статей [16; 17] о нулях в таблицах характеров групп S_n и A_n . Статья [18] позволила существенно расширить методы доказательства.

Как и раньше, запись $A := B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B . Если $\alpha = (a_1, \dots, a_k)$ и $\beta = (b_1, \dots, b_l)$ — конечные последовательности чисел, то $\alpha * \beta$ обозначает последовательность $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$; если $k \geq l$, то $\alpha + \beta := (a_1 + b_1, \dots, a_l + b_l, a_{l+1}, \dots, a_k)$. Обозначения, связанные с разбиениями и характерами групп S_n , приводятся в разд. 1.

1. Разбиения и характеры групп S_n и A_n

Разбиение натурального числа n есть последовательность $\alpha = (a_1, \dots, a_l)$ натуральных чисел такая, что $a_1 \geq \dots \geq a_l$ и $n = a_1 + \dots + a_l$. Разбиению $\alpha = (a_1, \dots, a_l) \in P(n)$ сопоставляется его *диаграмма Юнга* (или просто *диаграмма*) $[\alpha] := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq a_i\}$. Клетки (элементы) вида (i, i) диаграммы образуют её *главную диагональ*; её длина (мощность) обозначается через $d(\alpha)$. Говорят, что разбиения α и β *ассоциированы* (или *подобны*), если диаграмма одного из них получается из диаграммы другого отражением относительно главной диагонали. Множество всех клеток (i, j) диаграммы $[\alpha]$ таких, что $[\alpha]$ не содержит клетки $(i + 1, j + 1)$, называется её *границей*. *Крюк* диаграммы $[\alpha]$ (и разбиения α) с вершиной (i, j) есть множество $H_{ij}^\alpha := \{(i, j)\} \cup A \cup L$, где $A := \{(i, j + k) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ и $L := \{(i + k, j) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$. *Косой крюк* с вершиной (i, j) диаграммы $[\alpha]$ есть часть границы диаграммы $[\alpha]$, “вырезанная” крюком H_{ij}^α . Его обозначают через $R(H_{ij}^\alpha)$. Положим $h_{ij}^\alpha := |H_{ij}^\alpha|$ ($= |R(H_{ij}^\alpha)|$). *Разбиением числа 0* называют пустую (длины 0) последовательность $()$.

Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и H есть крюк разбиения α . Тогда:

$\alpha - H$ есть разбиение с диаграммой $[\alpha] \setminus R(H)$;

α^{ij} есть разбиение с диаграммой $[\alpha] \setminus R(H_{ij}^\alpha)$;

$H^\alpha(m)$ — множество всех крюков длины m в $[\alpha]$ и $H^{\alpha, \beta}(m) := H^\alpha(m) \cup H^\beta(m)$.

Предложение 1.1 [8, теоремы 2.1.7, 2.1.8, 2.1.12 и 2.3.21; 9, утверждения 2.3, 4.12, 6.7].

(1) *Неприводимые характеры группы S_n принимают лишь целые значения.*

(2) $\chi^{(n)} = 1_{S_n}$ (*главный характер группы S_n*), $\chi^{(1^n)} = \xi$ — *знакопеременный характер S_n (линейный характер с ядром A_n)*.

(3) $\chi^{\alpha'} = \chi^\alpha \xi$ для всех $\alpha \in P(n)$.

(4) χ^α *исчезает на $S_n \setminus A_n$ если и только если $\alpha = \alpha'$ ($\alpha \in P(n)$)*.

2. Свойства разбиений α и β из заключения гипотезы А

При $m \in \{2, 3\}$ m -накрытием разбиения Θ длины $s \geq 0$ называем разбиение

$$m.\Theta := (\Theta_1 + m + 1, \Theta_1 + 1, \Theta_2 + 1, \dots, \Theta_s + 1, 1^m) \quad (m.(\cdot) = (m + 1, 1^m))$$

и полагаем $m^0.\Theta := \Theta$ и $m^k.\Theta := m.(m^{k-1}.\Theta)$ для натуральных k .

Для разбиений γ вида $2^k.(\cdot)$ или $2^k.(1)$ определяем разбиения

$$\gamma + (\tilde{3}) := 2^k.(\cdot) + (0^k, 2, 1) \text{ при } \gamma = 2^k.(\cdot) \text{ и } \gamma + (\tilde{3}) := 2^k.(1) + (0^k, 1, 2) \text{ при } \gamma = 2^k.(1).$$

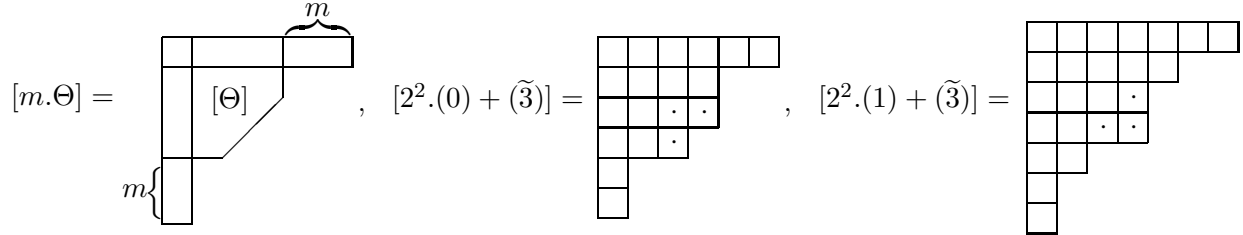


Рис. 2.1.

На рис. 2.1, кроме диаграммы $[m.\Theta]$, изображены две диаграммы вида $[\beta] = [\gamma + (\tilde{3})]$. Точками помечены их единственные косые крюки длины 3.

Далее, определяем разбиения

$$\Delta_l := (l, l - 1, \dots, 2, 1) \text{ при } l \in \mathbb{N}, \quad \Sigma_l := ((2l)^2, (2l - 2)^2, \dots, 2^2) \text{ при } l \in \mathbb{N} \text{ и } \Sigma_0 = ().$$

При γ , совпадающих с $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ или $3^k.2.\Sigma_l$, определяем разбиения $\gamma + (\tilde{4})$:

$$3^k.\Delta_l + (\tilde{4}) := 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2), \quad 3^k.\Sigma_l + (\tilde{4}) := 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1), \quad 3^k.2.\Sigma_l + (\tilde{4}) := 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3).$$

При $k = 0$ вид диаграмм разбиений $\beta = \gamma + (\tilde{4})$ из условий (2а)–(2в) гипотезы А показан на рис. 2.2 (см. также рис. 5.1). Их единственные косые крюки длины 4 помечены точками.

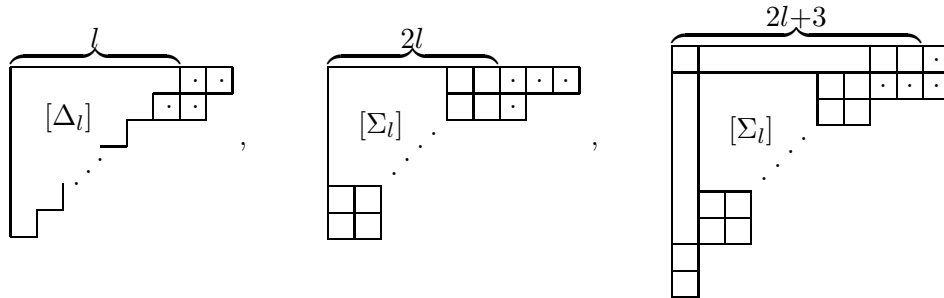


Рис. 2.2.

Нетрудно представить себе вид диаграмм разбиений $\beta = \gamma + (\tilde{4})$ и при $k > 0$ (см. рис. 6.2); их единственные косые крюки длины 4 находятся в $(k + 1)$ -й и $(k + 2)$ -й строках.

3. О диаграммах $[\alpha]$ и $[\beta]$ для характеров χ^α и χ^β , полупропорциональных на S_n^ε

Предложение 3.1 (следует из [1, предложение 3.7]). Пусть χ^α и χ^β полупропорциональны на S_n^ε ($\alpha, \beta \in P(n)$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$). Предположим, что $[\alpha]$ имеет хотя бы один крюк некоторой длины t , а $[\beta]$ не имеет крюков длины t . Тогда $\varepsilon = (-1)^m$, α имеет единственный крюк H длины t и $\alpha - H = (\alpha - H)'$.

Предложение 3.2 [3, предложение 3.7]. Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n , полупропорциональные на S_n^ε ($\alpha, \beta \in P(n), \varepsilon = \pm 1$), и выполнено условие А. Предположим, что α и β имеют точно по одному крюку H^α и H^β соответственно некоторой длины m . Положим $\tilde{\alpha} := \alpha - H^\alpha$ и $\tilde{\beta} := \beta - H^\beta$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (а) $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$;
- (б) $\varepsilon = (-1)^m$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}'$;
- (в) $\varepsilon = (-1)^{m+1}$ и с точностью до перемены мест $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ имеем $\tilde{\alpha} = \Gamma + (3)$ и $\tilde{\beta} = \Gamma + (\tilde{3})$, где Γ есть $2^k \cdot ()$ или $2^k \cdot (1)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- (г) $\varepsilon = (-1)^m$ и с точностью до перемены мест $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ имеем $\tilde{\alpha} = \Theta + (4)$ и $\tilde{\beta} = \Theta + (\tilde{4})$, где Θ есть $3^k \cdot \Delta_l$, $3^k \cdot \Sigma_l$ или $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l$ при некоторых k, l .

4. Начало доказательства теоремы А7

Пусть выполнено условие теоремы А7. Можно считать, что $\alpha^{11} = (\alpha^{11})'$, $h_2^\alpha = h_{11}^\beta$ и тройка $(\alpha^2, \beta^{11}, \delta)$ — как в условии (2) теоремы А6. Так как $\alpha^{11} = (\alpha^{11})'$, то диаграмма $[\alpha]$ в этом случае имеет вид, изображённый на рис. 4.1, где $\gamma = \alpha^{11} = \gamma'$, $t = \gamma_1 = \gamma'_1$ и a, b — произвольные целые неотрицательные числа (тот факт, что на этом рисунке $b = 3$, будет установлен позже, в (4.5)). Поскольку $\gamma = \gamma'$ и $\alpha \neq \alpha'$ (так как по условию h_2^α определено), то мы можем считать, что

$$a > b. \tag{4.1}$$

Тогда $h_2^\alpha = h_{12}^\alpha > h_{21}^\alpha$ и, как видно из рис. 4.1,

$$\alpha^2 = \alpha^{12} = \gamma * (1^{1+b}) = (\gamma + (1+b))'. \tag{4.2}$$

Кроме того, по условию теоремы А7

$$h_{12}^\alpha = h_{11}^\beta \tag{4.3}$$

и для $(\alpha^{12}, \beta^{11}, \delta)$, где $\delta = (-1)^{h_{11}^\beta + 1} \varepsilon$, выполнено одно из условий (2а), (2б) и (2в) гипотезы А на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$, т. е.

$$\delta = -1, \alpha^{12} = \gamma + (4) \text{ и } \beta^{11} = \tilde{\gamma} + (\tilde{4}) \text{ с } \gamma \in \{3^k \cdot \Delta_l, 3^k \cdot \Sigma_l, 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l\} \text{ при некоторых } k, l. \tag{4.4}$$

Таким образом, мы можем считать, что диаграммы разбиений α и β имеют вид, изображённый на рис. 4.1 (наклонные прямые или ломаные линии заменяют некоторые ступенчатые линии); здесь $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\tilde{\gamma} := \gamma + (\tilde{4})$, $t := \gamma_1 \leq s := \tilde{\gamma}_1$.

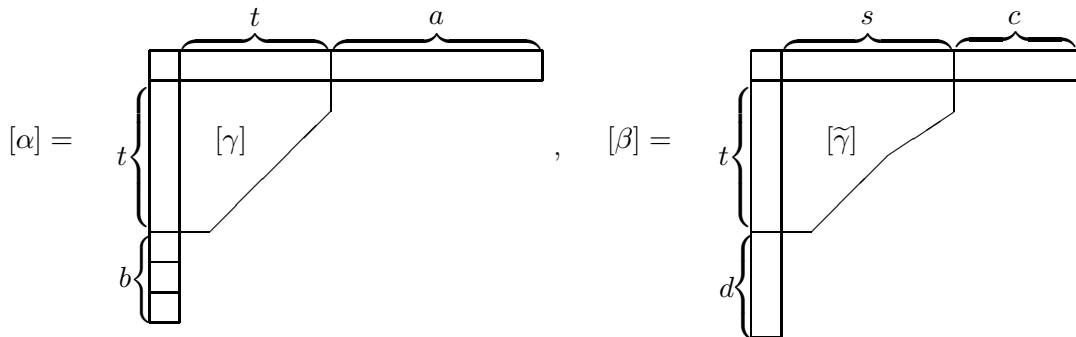


Рис. 4.1.

Из (4.2) и второго равенства в (4.4) следует, что

$$b = 3. \tag{4.5}$$

Далее, из (4.4) ($\delta = -1$) и (4.3) следует, что $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\beta} = (-1)^{h_{12}^\alpha}$, откуда (см. рис. 4.1)

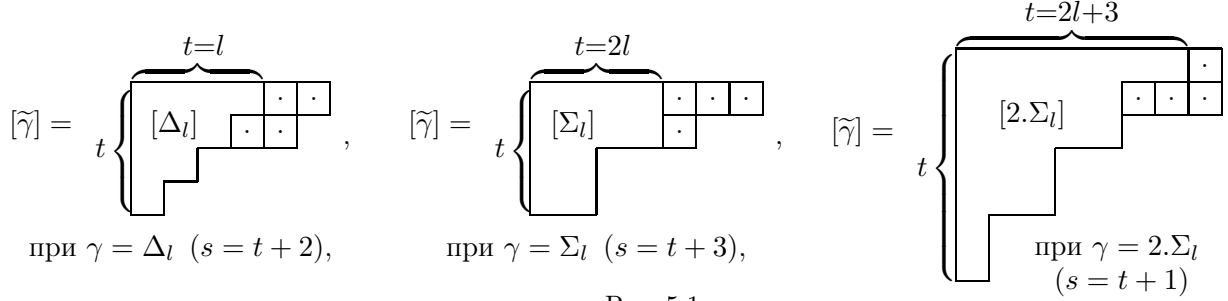
$$\varepsilon = (-1)^a. \tag{4.6}$$

5. Доказательство теоремы А7. Случай $k = 0$

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда $k = 0$, т. е.

γ есть одно из разбиений Δ_l , Σ_l или $2.\Sigma_l$ при некоторых l .

В этом случае $\tilde{\gamma} = \gamma + (\tilde{4})$ есть $\Delta_l + (2, 2)$, $\Sigma_l + (3, 1)$ или $2.\Sigma_l + (1, 3)$ соответственно; диаграммы $[\tilde{\gamma}]$ изображены на рис. 5.1, где взято $l = 4$, $l = 2$ и $l = 2$.



Поскольку согласно [13, теорема Б] при $d(\alpha) \leq 2$ гипотеза А справедлива, то должно быть $d(\gamma) \geq 2$, т. е.

$$\gamma \text{ есть } \Delta_l \text{ при } l \geq 3, \Sigma_l \text{ при } l \geq 1 \text{ или } 2.\Sigma_l \text{ при } l \geq 1. \quad (5.1)$$

Из рис. 4.1 и 5.1 видно, что

$$s = t + e, \text{ где } e := \begin{cases} 2, & \text{если } \gamma = \Delta_l, \\ 3, & \text{если } \gamma = \Sigma_l, \\ 1, & \text{если } \gamma = 2.\Sigma_l, \end{cases} \quad (5.2)$$

$h_{12}^\alpha = 2t + a$ и $h_{11}^\beta = 2t + c + d + e + 1$. Следовательно, по (4.3)

$$a = c + d + e + 1, \quad (5.3)$$

и тогда по (4.6)

$$\varepsilon = (-1)^a = (-1)^{c+d+e+1}. \quad (5.4)$$

Пусть $\{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ — множество всех длин крюков диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$, причём

$$m_1 > m_2 > m_3 > \dots$$

Тогда, очевидно,

$$m_1 = h_{11}^\alpha \text{ и } m_2 = h_{12}^\alpha = h_{11}^\beta.$$

Для определения m_3 подсчитаем длины крюков H_{13}^α и H_{21}^α (среди которых должен быть третий по длине крюк в $[\alpha]$) и крюков H_{12}^β и H_{21}^β (среди которых должен быть второй по длине крюк в $[\beta]$). Используя рис. 4.1, 5.1 и соотношения (5.2), (5.3) получаем равенство

$$h_{13}^\alpha = \begin{cases} 2t + c + d + e - 1, & \text{если } e = 2, \\ 2t + c + d + e, & \text{если } e = 3, \\ 2t + c + d + e - 2, & \text{если } e = 1 \end{cases} = 2t + c + d + 2e - 3$$

и следующую таблицу длин крюков:

$$\begin{array}{ll} h_{13}^\alpha = 2t + c + d + 2e - 3, & h_{12}^\beta = 2t + c + e, \\ h_{21}^\alpha = 2t + 3, & h_{21}^\beta = 2t + d + e. \end{array}$$

Очевидно (см. рис. 4.1),

$$m_3 \in \{h_{13}^\alpha, h_{21}^\alpha, h_{12}^\beta, h_{21}^\beta\} \text{ и поэтому } N^{\alpha, \beta}(m_3) \subseteq \{H_{13}^\alpha, H_{21}^\alpha, H_{12}^\beta, H_{21}^\beta\}. \quad (5.5)$$

Диаграммы разбиений α^{13} , α^{21} , β^{12} и β^{21} изобразим на рис. 5.2 и 5.3.

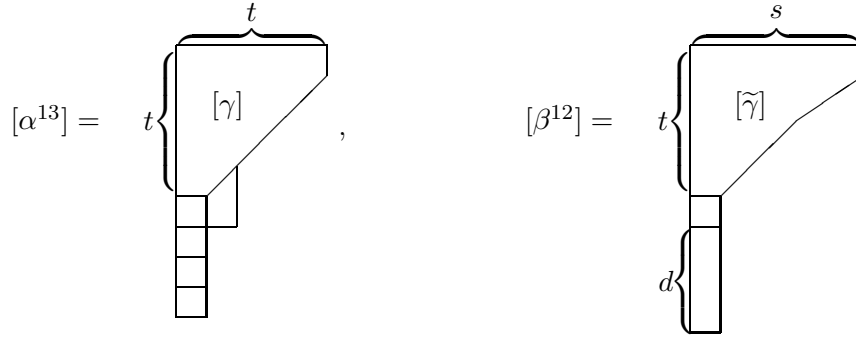


Рис. 5.2.

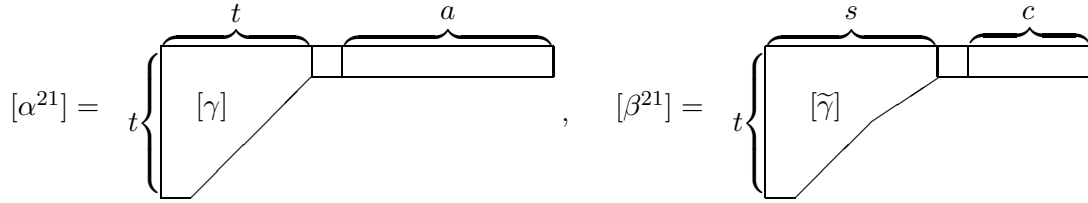


Рис. 5.3.

Так как ни одно из разбиений α^{13} , α^{21} , β^{12} и β^{21} не самоассоциировано, то из предложения 3.1 следует, что $|H^{\alpha, \beta}(m_3)| > 1$ и, более того,

$$H^{\alpha, \beta}(m_3) \text{ содержит как крюк из } [\alpha], \text{ так и крюк из } [\beta]. \quad (5.6)$$

Возможны лишь следующие два случая.

Случай 1. Предположим, что $|H^{\alpha, \beta}(m_3)| = 2$, т. е.

$$H^{\alpha, \beta}(m_3) = \{H_{ij}^\alpha, H_{uv}^\beta\} \in \{\{H_{13}^\alpha, H_{12}^\beta\}, \{H_{13}^\alpha, H_{21}^\beta\}, \{H_{21}^\alpha, H_{12}^\beta\}, \{H_{21}^\alpha, H_{21}^\beta\}\}.$$

Тогда по предложению 3.2 для $\tilde{\alpha} = \alpha^{ij}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{uv}$ должно быть справедливо одно из его утверждений (а)–(г).

Из рис. 5.2, 5.3 легко увидеть, что эти утверждения не могут быть выполнены при $(i, j) = (2, 1)$, так как тогда должно быть $a \in \{2, 3\}$ в противоречие с тем, что $a > b = 3$ по (4.1) и (4.5). Также противоречив и случай $H^{\alpha, \beta}(m_3) = \{H_{13}^\alpha, H_{12}^\beta\}$, поскольку $s > t$.

Следовательно,

$$H^{\alpha, \beta}(m_3) = \{H_{13}^\alpha, H_{21}^\beta\}. \quad (5.7)$$

Понятно, что упомянутые выше условия (б), (в), (г) здесь не могут быть выполнены для $\tilde{\alpha} = \alpha^{13}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{21}$. Следовательно, должно быть $(\alpha^{13})' = \beta^{21}$. Из равенств $m_3 = h_{13}^\alpha = h_{21}^\beta$ и таблицы длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ (перед (5.5)) следует, что

$$c + e = 3 \quad (c = 1 \text{ при } e = 2, c = 0 \text{ при } e = 3, \text{ и } c = 2 \text{ при } e = 1) \text{ и } d > c. \quad (5.8)$$

Таким образом, $(\alpha^{13})' = \beta^{21} \in \{\Delta_l + (4, 2), \Sigma_l + (4, 1), 2\Sigma_l + (4, 3)\}$. Очевидно (см. (5.7), (5.8) и рис. 4.1), что

$$m_4 \in \{h_{14}^\alpha, h_{21}^\alpha, h_{12}^\beta, h_{31}^\beta\}. \quad (5.9)$$

Это видно также из следующей таблицы длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$, расширяющей таблицу, данную ранее перед (5.5) (см. рис. 4.1, рис. 5.1, (5.2), (5.8)):

$$\begin{array}{ll} h_{13}^\alpha = 2t + d + e = m_3, & h_{12}^\beta = 2t + 3, \\ h_{14}^\alpha = 2t + d, & h_{13}^\beta = 2t + e - 1, \\ h_{21}^\alpha = 2t + 3, & h_{21}^\beta = 2t + d + e = m_3, \end{array}$$

$$\begin{aligned} h_{31}^\alpha &= 2t + e - 1, & h_{31}^\beta &= 2t + d, \\ h_{41}^\beta &= 2t + d - 4, \\ h_{22}^\alpha &= 2t - 1, & h_{22}^\beta &= 2t + e - 1. \end{aligned}$$

1.1. Предположим, что $d < 3$. Тогда $m_4 = 2l + 3$, $H^{\alpha, \beta}(m_4) = \{H_{21}^\alpha, H_{12}^\beta\}$, и по предложению 3.2 для $\tilde{\alpha} = \alpha^{21}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{12}$ должно быть справедливо одно из его утверждений (а)–(г). Однако противоречивость этих утверждений видна из рис. 5.2 и 5.3.

1.2. Предположим, что $d = 3$. Тогда $a = d + c + e + 1 = 7$ (по (5.3) и (5.8)), $\varepsilon = (-1)^7 = -1$ (по (4.6)) и, как легко увидеть из рис. 4.1 и 5.1, верно одно из следующих утверждений:

$$\begin{aligned} \alpha &= 3.\Delta_l + (4), \quad \beta = 3.\Delta + (0, 2, 2); \\ \alpha &= 3.\Sigma_l + (4), \quad \beta = 3.\Sigma_l + (0, 3, 1); \\ \alpha &= 3.2.\Sigma_l + (4), \quad \beta = 3.2.\Sigma_l + (0, 1, 3). \end{aligned}$$

Таким образом, тройка $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ удовлетворяет заключению гипотезы А, и в этом случае теорема А7 доказана.

1.3. Предположим, что $d > 3$. Тогда $m_4 = 2l + d$ и $H^{\alpha, \beta}(m_4) = \{H_{14}^\alpha, H_{31}^\beta\}$. Следовательно, по предложению 3.2 для $\tilde{\alpha} = \alpha^{14}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{31}$ должно быть справедливо одно из его утверждений (а)–(г). Однако для каждого из возможных типов γ противоречивость этих утверждений видна из рис. 5.4–5.6. (На этих рисунках взято $l = 2$, однако по ним легко себе представить вид диаграмм α^{14} и β^{31} при любых l , допустимых по (5.1)).

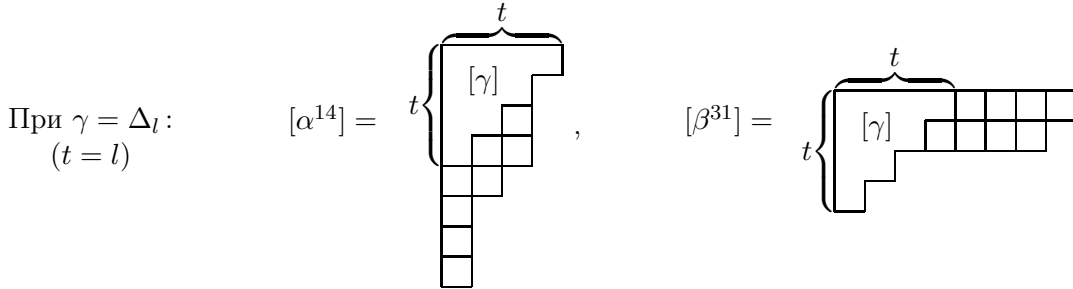


Рис. 5.4.

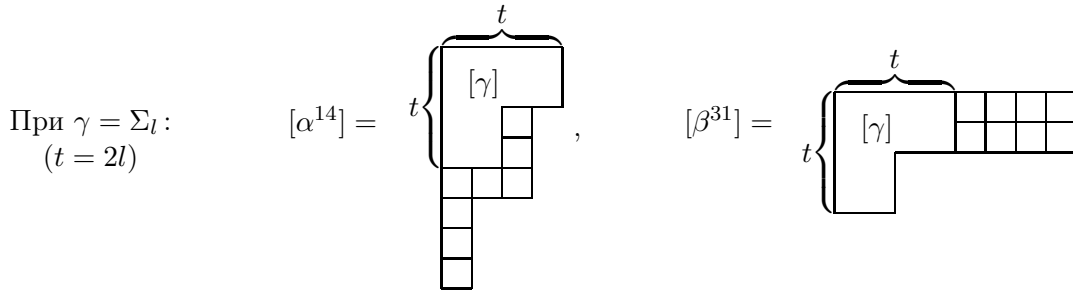


Рис. 5.5.

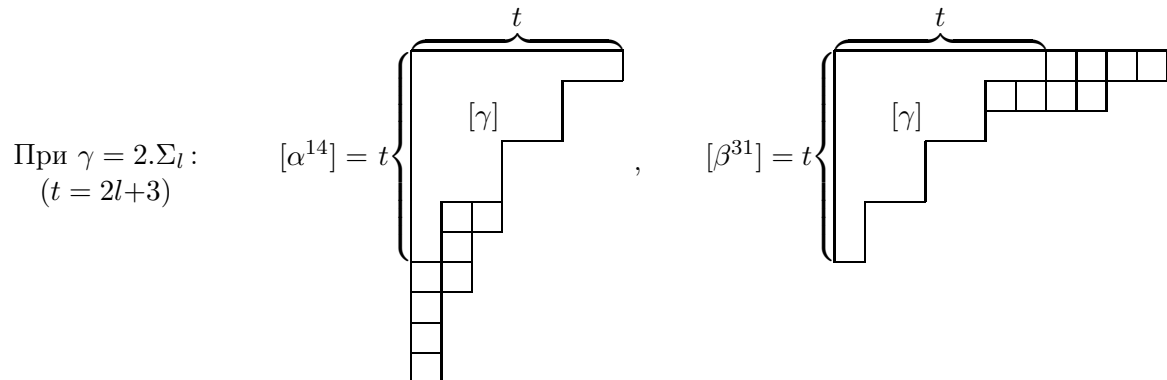


Рис. 5.6.

Таким образом, случай 1 противоречив.

Случай 2. Предположим, что $|H^{\alpha, \beta}(m_3)| \geq 3$.

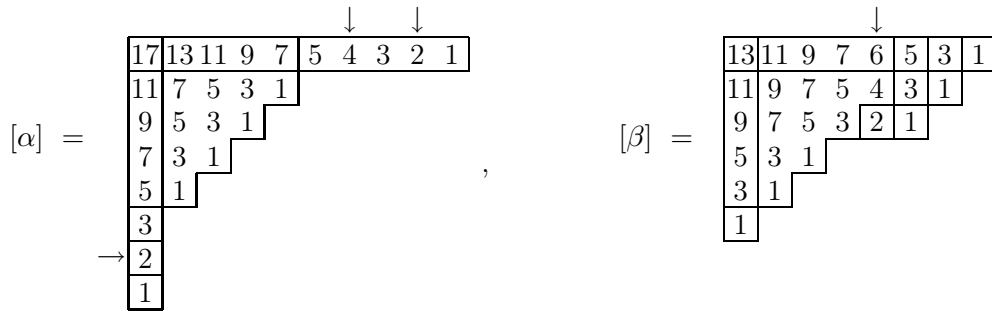
Тогда по (5.5) m_3 должно совпадать по крайней мере с тремя из чисел $h_{13}^\alpha, h_{21}^\alpha, h_{12}^\beta, h_{21}^\beta$. Легко заметить, однако, что равенство любых трёх из этих чисел (см. таблицу длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ перед (5.5)) влечёт равенства $c + e = d + e = 3$. Отсюда и из (5.3) и (5.4)

$$c = d = 3 - e, \quad a = 7 - e \quad \text{и} \quad \varepsilon = (-1)^a = (-1)^{e-1}. \quad (5.10)$$

Случай 2а. Предположим, что $\gamma = \Delta_l$. Тогда $e = 2$ и по (5.10)

$$c = d = 1, \quad a = 5 \quad \text{и} \quad \varepsilon = (-1)^5 = -1. \quad (5.11)$$

Учитывая, что длины всех крюков разбиений Δ_l , очевидно, нечётны, легко подсчитать длины крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ (см. для наглядности рис. 5.7 при $l = 4$).



Мы видим, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по три крюка чётной длины; их длины — 2, 2, 4 в $[\alpha]$ и 2, 4, 6 в $[\beta]$. Таким образом,

$$H^{\alpha, \beta}(6) = \{H_{1, l+1}^\beta\}.$$

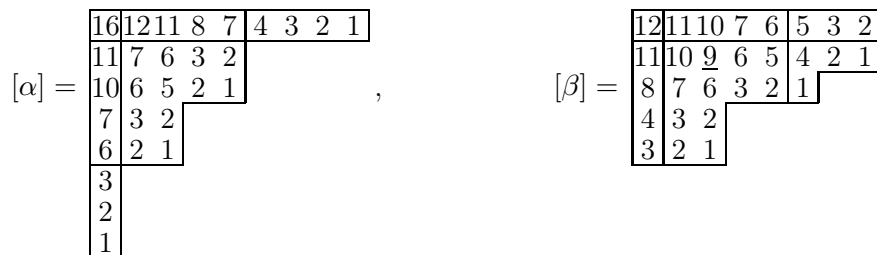
Отсюда по предложению 3.1 следует, что $\varepsilon = (-1)^6 = 1$. Но это противоречит (5.11).

Таким образом, случай 2а противоречив.

Случай 2б. Предположим, что $\gamma = \Sigma_l$. Тогда $e = 3$ и по (5.10)

$$c = d = 0, \quad a = 4 \quad \text{и} \quad \varepsilon = (-1)^4 = 1. \quad (5.12)$$

На рис. 5.8 изобразим диаграммы этих разбиений α и β при $l = 2$ с указанием длин соответствующих крюков.



Как видно из рис. 5.8, при $l = 2$, т. е. при $2t + 1 = 9$ справедливо равенство $H^{\alpha, \beta}(2t + 1) = \{H_{23}^\beta\}$. Это равенство подтверждается приведённой ниже таблицей длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ (уточняющей таблицу, приведённую в начале случая 1.1) при любом $l \geq 2$. Случай $l = 1$ представляет

исключение; здесь диаграмма $[\beta]$ получается из диаграммы $[\beta]$ рисунка 5.6 стиранием первых двух столбцов. Имеем

$$\begin{aligned} h_{13}^\alpha &= 2t + 3, & h_{12}^\beta &= 2t + 3, \\ h_{14}^\alpha &= 2t, & h_{13}^\beta &= 2t + 2, \\ h_{21}^\alpha &= 2t + 3, & h_{14}^\beta &= \begin{cases} 2t - 1 & \text{при } l > 1, \\ 2t + 1 & \text{при } l = 1, \end{cases} \\ h_{22}^\alpha &= 2t - 1, & h_{21}^\beta &= 2t + 3, \\ h_{31}^\alpha &= 2t, & h_{22}^\beta &= 2t + 2, \\ h_{41}^\alpha &= 2t - 1, & h_{23}^\beta &= 2t + 1, \\ & & h_{31}^\beta &= 2t. \end{aligned}$$

Из таблицы видно, что

$$H^{\alpha, \beta}(2t + 1) = \begin{cases} \{H_{23}^\beta\}, & \text{если } l \geq 2, \\ \{H_{23}^\beta, H_{14}^\beta\}, & \text{если } l = 1. \end{cases} \quad (5.13)$$

По предложению 3.1 из (5.13) следует, что $\varepsilon = (-1)^{2t+1} = -1$. Но это противоречит (5.12).

Таким образом, случай 2б противоречив.

Случай 2в. Предположим, что $\gamma = 2.\Sigma_l$. Тогда $e = 1$ и по (5.10)

$$c = d = 2, \quad a = 6 \quad \text{и} \quad \varepsilon = (-1)^6 = 1. \quad (5.14)$$

В этом случае мы покажем, что

$$H^{\alpha, \beta}(2t - 3) = \begin{cases} \{H_{23}^\beta\}, & \text{если } l \geq 2, \\ \{H_{23}^\beta, H_{15}^\beta\}, & \text{если } l = 1. \end{cases} \quad (5.15)$$

При $l \leq 2$ это непосредственно видно из следующих рис. 5.9 (где $2t - 3 = 7$) и рис. 5.10 (где $2t - 3 = 11$).

При $l = 1$:

$$[\alpha] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 20 & 16 & 13 & 12 & 9 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 12 & 9 & 6 & 5 & 2 & 1 & & & & & & \\ \hline 10 & 6 & 3 & 2 & & & & & & & & \\ \hline 9 & 5 & 2 & 1 & & & & & & & & \\ \hline 6 & 2 & & & & & & & & & & \\ \hline 5 & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline 3 & & & & & & & & & & & \\ \hline 2 & & & & & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}, \quad [\beta] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 16 & 13 & 10 & 9 & 7 & 6 & 5 & 2 & 1 & & & \\ \hline 13 & 10 & 7 & 6 & 4 & 3 & 2 & & & & & \\ \hline 12 & 9 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & & & & & \\ \hline 8 & 5 & 2 & 1 & & & & & & & & \\ \hline 5 & 2 & & & & & & & & & & \\ \hline 4 & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline 2 & & & & & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Рис. 5.9.

При $l = 2$:

$$[\alpha] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 24 & 20 & 17 & 16 & 13 & 12 & 9 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & \\ \hline 17 & 13 & 10 & 9 & 6 & 5 & 2 & 1 & & & & & & & & \\ \hline 14 & 10 & 7 & 6 & 3 & 2 & & & & & & & & & & \\ \hline 13 & 9 & 6 & 5 & 2 & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline 10 & 6 & 3 & 2 & & & & & & & & & & & & \\ \hline 9 & 5 & 2 & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline 6 & 2 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 5 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 3 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 2 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}, \quad [\beta] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 20 & 17 & 14 & 13 & 10 & 9 & 7 & 6 & 5 & 2 & 1 & & & & & \\ \hline 17 & 14 & 11 & 10 & 7 & 6 & 4 & 3 & 2 & & & & & & & \\ \hline 16 & 13 & 10 & 9 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & & & & & & & \\ \hline 12 & 9 & 6 & 5 & 2 & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline 9 & 6 & 3 & 2 & & & & & & & & & & & & \\ \hline 8 & 5 & 2 & 1 & & & & & & & & & & & & \\ \hline 5 & 2 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 4 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 2 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Рис. 5.10.

В общем случае равенство (5.15) подтверждается следующей таблицей длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ (см. рис. 4.1, 5.9, 5.10).

$$\begin{array}{ll} h_{16}^\alpha = 2t - 2, & h_{14}^\beta = 2t - 1, \\ h_{17}^\alpha = \begin{cases} 2t - 5 & \text{при } l \geq 2, \\ 2t - 4 & \text{при } l = 1, \end{cases} & h_{15}^\beta = \begin{cases} 2t - 4 & \text{при } l \geq 2, \\ \underline{2t - 3} & \text{при } l = 1, \end{cases} \\ h_{41}^\alpha = 2t - 1, & h_{41}^\beta = 2t - 2. \\ h_{51}^\alpha = 2t - 4, & h_{51}^\beta = 2t - 5. \\ h_{22}^\alpha = 2t - 1, & \underline{h_{23}^\beta = 2t - 3.} \\ h_{23}^\alpha = 2t - 4, & h_{32}^\beta = 2t - 1, \\ h_{32}^\alpha = 2t - 4, & h_{42}^\beta = 2t - 5. \end{array}$$

Из (5.15) по предложению 3.1 следует, что $\varepsilon = (-1)^{2t-3} = -1$. Но это противоречит (5.14). Случай 2в противоречив.

Следовательно, случай 2 невозможен.

Таким образом, при $k = 0$ заключение теоремы А7 справедливо.

6. Доказательство теоремы А7. Случай $k \geq 1$

Мы продолжаем доказательство теоремы А7. Поскольку в разд. 5 утверждение теоремы доказано при $k = 0$, то мы предполагаем, что $k > 0$. Здесь по прежнему верны утверждения (4.1)–(4.6) и общий вид рис. 4.1, так как предположение $k = 0$ было принято только в разд. 5. Итак, далее

$$\alpha^{12} = \gamma + (4) \text{ и } \beta^{11} = \gamma + (\tilde{4}), \text{ где } \gamma \in \{3^k.\Delta_l, 3^k.\Sigma_l, 3^k.2.\Sigma_l\} \text{ при } k \geq 1 \text{ и } l \geq 0. \quad (6.1)$$

Положим $\tilde{\gamma} := \gamma + (\tilde{4})$ (см. обозначения разд. 2), и диаграммы разбиений α и β изобразим схематично на рис. 6.1, где $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $t := \gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$.

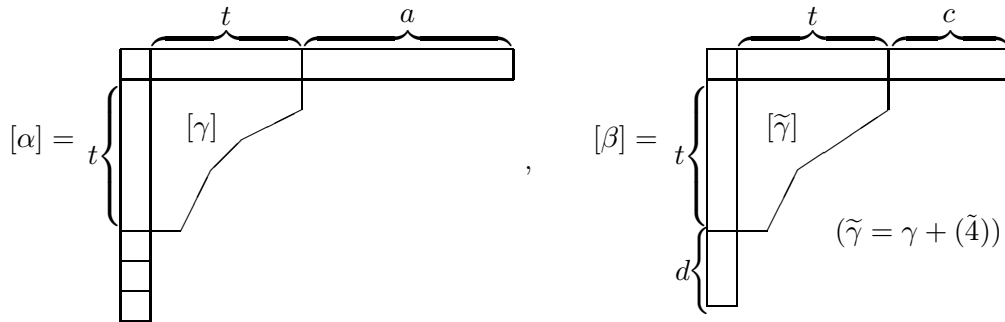


Рис. 6.1.

Вид диаграмм $[\tilde{\gamma}]$ для каждого типа γ из (6.1) покажем на рис. 6.2; при удалении из $[\tilde{\gamma}]$ четырёх клеток, помеченных точками, получается диаграмма $[\gamma]$ (на рисунке взято $k = 2, l = 4$ для $\gamma = 3^k.\Delta_l$, $k = 2, l = 2$ для $\gamma = 3^k.\Sigma_l$ и $k = 1, l = 2$ для $\gamma = 3^k.2.\Sigma_l$).

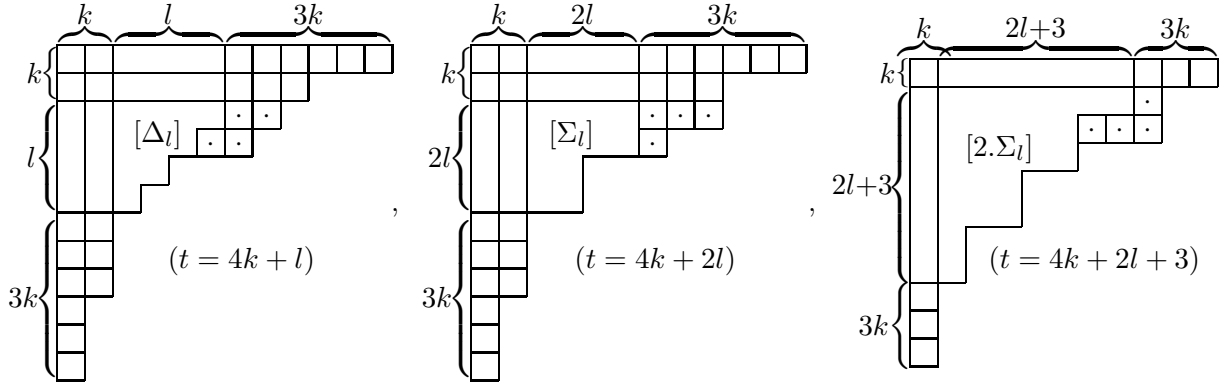


Рис. 6.2.

Поскольку $h_{12}^\alpha = 2t + a$ и $h_{11}^\beta = 2t + c + d + 1$, то по (4.3)

$$a = c + d + 1. \quad (6.2)$$

По (4.6) и (6.2)

$$\varepsilon = (-1)^a = (-1)^{1+c+d}. \quad (6.3)$$

Пусть $\{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ — множество всех длин крюков диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$, причём

$$m_1 > m_2 > m_3 > \dots$$

Тогда, очевидно, $m_1 = h_{11}^\alpha$, $m_2 = h_{12}^\alpha = h_{11}^\beta$,

$$m_3 \in \{h_{13}^\alpha, h_{21}^\alpha, h_{12}^\beta, h_{21}^\beta\} \text{ и } H^{\alpha, \beta}(m_3) \subseteq \{H_{13}^\alpha, H_{21}^\alpha, H_{12}^\beta, H_{21}^\beta\} \quad (6.4)$$

(среди крюков H_{13}^α и H_{21}^α находится третий по длине крюк в $[\alpha]$, а среди крюков H_{12}^β и H_{21}^β — второй по длине крюк в $[\beta]$).

Далее нам потребуются следующие диаграммы (см. рис. 6.3, 6.4).



Рис. 6.3.

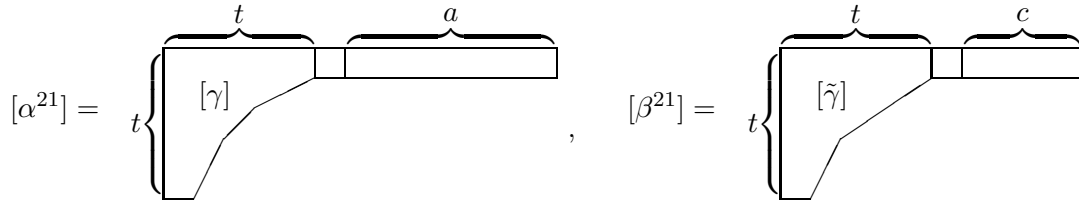


Рис. 6.4.

Как видно из рис. 6.3 и 6.4, разбиения α^{13} , α^{21} , β^{12} , β^{21} не самоассоциированы. Отсюда и из предложения 3.1 следует, что

$$H^{\alpha, \beta}(m_3) \text{ содержит как крюк из } [\alpha], \text{ так и крюк из } [\beta]. \quad (6.5)$$

В частности, $|H^{\alpha, \beta}(m_3)| \geq 2$. Возможны следующие два случая.

Случай 1. Предположим, что $|H^{\alpha, \beta}(m_3)| = 2$.

Тогда согласно (6.5)

$$H^{\alpha, \beta}(m_3) = \{H_{ij}^\alpha, H_{uv}^\beta\} \text{ при некоторых } (i, j) \in \{(1, 3), (2, 1)\} \text{ и } (u, v) \in \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

В любом случае по предложению 3.2 для $\tilde{\alpha} = \alpha^{ij}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{uv}$ должно быть справедливо одно из его утверждений (а)–(г). Однако, как легко увидеть из рис. 6.2–6.4 и условий (4.1) и (4.5), это противоречиво (утверждения (в) и (г) неверны, так как ни одно из разбиений α^{13} , α^{21} , β^{12} , β^{21} не представляется в виде $\Theta + (m)$, где $\Theta = \Theta'$ и $m \in \{3, 4\}$). Таким образом, случай 1 невозможен.

Случай 2. Предположим, что $|H^{\alpha, \beta}(m_3)| \geq 3$.

Тогда по (6.4) m_3 должно совпадать по крайней мере с тремя из чисел $h_{13}^\alpha, h_{21}^\alpha, h_{12}^\beta, h_{21}^\beta$. Согласно рис. 6.1 $h_{13}^\alpha = (\gamma')_2 + (t - 1) + a$. Однако, как видно из рис. 6.2, $(\gamma')_2 = t - 3$. Следовательно, с учётом (6.2) имеем $h_{13}^\alpha = 2t + a - 4 = 2t + c + d - 3$. Другие интересующие нас числа находятся непосредственно из рис. 6.1.

Используя рис. 6.1 и 6.4, находим

$$\begin{aligned} h_{13}^\alpha &= 2t + c + d - 3, & h_{12}^\beta &= 2t + c, \\ h_{21}^\alpha &= 2t + 3, & h_{21}^\beta &= 2t + d. \end{aligned}$$

Легко заметить, однако, что равенство любых трёх из этих чисел влечет равенства $c = 3$ и $d = 3$. Таким образом, в этом случае (используем также (6.2) и (6.3))

$$c = d = 3, \quad a = 7 \quad \text{и} \quad \varepsilon = (-1)^7 = -1.$$

Но тогда (см. рис. 6.1, 6.2) $\varepsilon = -1$, $\alpha = 3 \cdot \gamma + (4)$, $\beta = 3 \cdot \tilde{\gamma}$, т. е. выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha = 3^{k+1} \cdot \Delta_l + (4), \quad \beta = 3^{k+1} \cdot \Delta_l + (0^{k+1}, 2, 2);} \\ \underline{\alpha = 3^{k+1} \cdot \Sigma_l + (4), \quad \beta = 3^{k+1} \cdot \Sigma_l + (0^{k+1}, 3, 1);} \\ \underline{\alpha = 3^{k+1} \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (4), \quad \beta = 3^{k+1} \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (0^{k+1}, 1, 3).} \end{aligned}$$

Таким образом, при условии (6.1), т. е. при $k \geq 1$, тройка $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ удовлетворяет заключению теоремы А7. При $k = 0$ подобное заключение получено в разд. 5.

Теорема А7 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 143–163.
2. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 58–68.
3. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. III // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 12–30.
4. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. IV // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 12–33.
5. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. V // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 13–34.
6. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. VI // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 25–44.

7. **Белоногов В. А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 380 с.
8. **James G., Kerber A.** The representation theory of the symmetric group. London: Addison–Wesley, 1981. 510 с.
9. **Джеймс Г.** Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982. 260 с.
10. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.
11. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 135–156.
12. **Белоногов В. А.** Диаграммы Юнга без крюков длины четыре и характеры группы S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 30–40.
13. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n и A_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 11–43.
14. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характерах групп S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 13–32.
15. **Белоногов В. А.** О равнокорневых неприводимых характерах групп S_n и A_n // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 3–25.
16. **Белоногов В. А.** О нулях в таблицах характеров групп S_n и A_n // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 24–43.
17. **Белоногов В. А.** О нулях в таблицах характеров групп S_n и A_n . II // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 643–663.
18. **Белоногов В. А.** О диаграммах Юнга пары неприводимых характеров группы S_n , равнокорневых на A_n // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 992–1006.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 26.10.2010

УДК 517.977

О РЕКОНСТРУКЦИИ ТРАЕКТОРИИ И УПРАВЛЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

М. С. Близорукова

Рассматриваются задачи динамической реконструкции неизвестных характеристик в одной нелинейной системе второго порядка. Предлагается динамический вариант решения этих задач. Именно, предполагается, что вычислительный процесс решения зависит от переменной (и неполной) информации о параметрах системы. Разрешающие алгоритмы базируются на методе вспомогательных моделей. Они являются пошаговыми, работают на конечных временных сетках, осуществляя последовательное приближение к искомому решению с учетом текущей информации о параметрах системы.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, метод вспомогательных моделей.

M. S. Blizorukova. On the reconstruction of the trajectory and control in a nonlinear second-order system.

We consider problems of the dynamic reconstruction of unknown characteristics in a nonlinear second-order system. A dynamic variant of solving these problems is proposed. More exactly, it is assumed that the numerical solution process depends on variable (and incomplete) information on the parameters of the system. Resolving algorithms are based on the method of auxiliary models. The algorithms are stepwise; they work on finite time grids and find successive approximations to the required solution taking into account the current information on the parameters of the system.

Keywords: dynamic reconstruction, method of auxiliary models.

Введение

Задачи нахождения соответствующих характеристик по решениям уравнений часто называют задачами реконструкции. При этом предполагается, что входная информация (результаты измерения текущих фазовых положений динамической системы) поступает по ходу процесса и неизвестные параметры должны восстанавливаться также по ходу процесса. Один из методов решения подобного типа задач был предложен и развит в работе [1]. Этот метод, основанный на принципах позиционного управления [2] и методах решения некорректных задач [3], сводит задачу реконструкции к задаче управления вспомогательной динамической системой-моделью. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени подпадает под условия какого-либо принципа регуляризации; тем самым обеспечивается устойчивость алгоритма. При этом регуляризация рассматриваемой задачи осуществляется локально на этапе выбора позиционного управления в системе-модели. Сформулированный метод был реализован для ряда задач, описываемых некоторыми классами обыкновенных дифференциальных уравнений, а также уравнениями с распределенными параметрами [4; 5] (здесь мы указываем только монографии). В настоящей работе, используя разработанный ранее аппарат, мы укажем два устойчивых к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритма реконструкции негладких входных воздействий, действующих на нелинейную систему второго порядка. Предлагаемые ниже алгоритмы управления моделью основаны на модифицированном принципе сглаживающего функционала, трактуемом как подходящий функционал Ляпунова. Управление в модели строится таким образом, чтобы обеспечить малую скорость возрастания этого функционала.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00378 и 11-01-00042), программ Президента УрО РАН (09-П-1-1007 и 09-С-1-1010) и Программы поддержки ведущих научных школ России (НШ-65590.2010).

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= k(t)x_2(t) + x_1(t)(\lambda x_2(t) - \nu), \\ \dot{x}_2(t) &= -k(t)x_2(t) - (\lambda x_1(t) + \mu)x_2(t) + \gamma(t), \\ t \in T &= [t_0, \vartheta], \quad x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Эта система описывает процесс диффузии инноваций [6]. Предполагается, что константы λ , ν , μ известны, а функция $\gamma(t)$ и (или) функция $k(t)$ не определены. Предположим также, что входное воздействие $\gamma(t)$, действующее на систему, измеримо по Лебегу и удовлетворяет условию

$$\gamma(t) \in P = [-f, f], \quad t \in T, \quad f = \text{const} \in (0, +\infty).$$

Это воздействие, а также соответствующее ему решение системы (1.1), неизвестны, однако в дискретные, достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_m = \vartheta$$

замеряются (с ошибкой) значения некоторой величины $z(\tau_i)$, смысл которой поясним ниже. При этом результаты этих измерений ξ_i^h неточны.

Рассмотрим два случая. В первом будем предполагать, что в момент времени τ_i измеряется одна координата фазового вектора, а именно, $x_1(\tau_i)$. В этом случае $z(\tau_i)$ совпадает с этой координатой, т. е.

$$z(\tau_i) = x_1(\tau_i),$$

и выполняются неравенства

$$|z(\tau_i) - \xi_i^h| \leq h, \tag{1.2}$$

где h мало. Во втором случае измеряются все координаты фазового вектора, $x_1(\tau_i)$ и $x_2(\tau_i)$, и тогда $z(\tau_i)$ — это двухкомпонентный вектор, т. е.

$$z(\tau_i) = \{x_1(\tau_i), x_2(\tau_i)\}.$$

При этом результат неточного измерения $z(\tau_i)$ — тоже вектор, $\xi_i^h = \{\xi_{i1}^h, \xi_{i2}^h\}$, со свойством

$$|z(\tau_i) - \xi_i^h|_n \leq h. \tag{1.3}$$

Здесь и ниже символ $|x|$ означает модуль числа x , а символ $|y|_n$ — норму вектора $y \in \mathbb{R}^n$.

Сформулируем две задачи, отвечающие указанным случаям.

З а д а ч а 1. Требуется построить алгоритм, позволяющий по текущим измерениям ξ_i^h в реальном времени восстанавливать неизвестную координату $x_2(t)$ и неизвестный вход $\gamma(t)$.

З а д а ч а 2. Требуется указать алгоритм, позволяющий по текущим измерениям ξ_i^h в реальном времени восстанавливать функцию $k(t)$ и вход $\gamma(t)$.

Такова содержательная постановка задач, рассматриваемых в данной работе.

2. Метод решения

Схему алгоритма решения заимствуем из цитированных выше работ [1; 4; 5]. На отрезке времени T зафиксируем некоторое семейство разбиений

$$\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{h=0}^{m_h}, \quad \tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h), \quad \tau_{0,h} = t_0, \quad \tau_{m_h,h} = \vartheta.$$

Введем вспомогательную управляемую систему вида

$$\begin{aligned} w^{h(j)}(t) &= f_j(t, \xi_i^h, w^{h(j)}(\tau_i), u_i^{h(j)}), \\ t &\in \delta_{h,i} = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad \tau_i = \tau_{i,h}, \\ w^{h(j)}(t_0) &= w_0^{h(j)}, \quad w^{h(j)}(t) \in \mathbb{R}^2, \quad w^{h(j)} = \{w_1^{h(j)}, w_2^{h(j)}\}, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и будем называть ее моделью. Здесь $w^{h(j)}(t)$ — вектор состояния модели в момент t , отвечающий задаче с номером j , $w_0^{h(j)}$ — начальное состояние модели, $u^{h(j)}$ — управляющее воздействие, вырабатываемое в момент τ_i позиционно, по закону обратной связи. Модель функционирует в реальном времени синхронно с исходной системой (1.1). В ходе ее функционирования формируются функции $w^{h(j)}(t)$ и $u^{h(j)}(t)$, которые служат приближениями неизвестных величин $x_2(t)$ и $\gamma(t)$ в первом случае или $k(t)$ и $\gamma(t)$ — во втором.

Приведем строгую формулировку рассматриваемых задач.

З а д а ч а 1. Требуется указать дифференциальные уравнения модели вида (2.1) и правило выбора управления $u^{h(1)}(t)$

$$U_1 : \{\tau_i, \xi_i^h, w^{h(1)}(\tau_i)\} \rightarrow u_i^{h(1)} = \{u_{i1}^{h(1)}, u_{i2}^{h(1)}\} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.2)$$

такие, что при $h \rightarrow 0$ имеют место сходимости

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |u_1^{h(1)}(t) - x_2(t)|^2 dt \rightarrow 0, \quad \int_{t_0}^{\vartheta} |u_2^{h(1)}(t) - \gamma(t)|^2 dt \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Здесь $u^{h(1)}(t) = \{u_1^{h(1)}(t), u_2^{h(1)}(t)\}$, $u_1^{h(1)}(t) = u_{i1}^{h(1)}$, $u_2^{h(1)}(t) = u_{i2}^{h(1)}$ для $t \in \delta_{h,i}$.

З а д а ч а 2. Требуется указать дифференциальные уравнения модели вида (2.1) и правило выбора управления $u^{h(2)}(t)$

$$U_2 : \{\tau_i, \xi_i^h, w^{h(2)}(\tau_i)\} \rightarrow u_i^{h(2)} = \{u_{i1}^{h(2)}, u_{i2}^{h(2)}\} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.4)$$

такие, что при $h \rightarrow 0$ имеют место сходимости

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |u_1^{h(2)} - k(t)|^2 dt \rightarrow 0, \quad \int_{t_0}^{\vartheta} |u_2^{h(2)} - \gamma(t)|^2 dt \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Здесь $u^{h(2)}(t) = \{u_{i1}^{h(2)}, u_{i2}^{h(2)}\}$, $t \in \delta_{h,i}$.

Следуя терминологии [4], отображения U_1 и U_2 (правила выбора управлений в моделях) назовем *стратегиями*.

3. Алгоритм решения задачи 1

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи 1. Из отмеченного выше следует, что необходимо указать модель (2.1) и стратегию U_1 (2.2), обеспечивающие сходимости (2.3). Пусть

$$P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}) : u(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}.$$

В дальнейшем предполагаем известным число $K \in (0, +\infty)$ такое, что каждое решение $\{x_1(t, u), x_2(t, u)\}$ ($u \in P(\cdot)$) уравнения (1.1) удовлетворяет следующим условиям:

$$\max_{t_0 \leq t \leq \vartheta} |x_1(t, u)| \leq K, \quad \sup_{t_0 \leq t \leq \vartheta} |x_2(t, u)| \leq K. \quad (3.1)$$

Зафиксируем некоторую функцию $\alpha(h) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ со свойствами

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad \delta(h) \leq h, \quad h^{1/6}/\alpha(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Пусть в модели (2.1) правая часть имеет вид

$$f_1(\xi_i^h, w^{h(1)}(\tau_i), u_i^{h(1)}) = \{(k(\tau_i) + \lambda \xi_i^h)u_{i1}^{h(1)} - \nu \xi_i^h, -(k(\tau_i) + \lambda \xi_i^h + \mu)u_{i1}^{h(1)} + u_{i2}^{h(1)}\}, \quad (3.2)$$

$$w_0^{h(1)} = \{x_{10}, x_{20}\},$$

а правило выбора управления (2.2) в модели таково:

$$u_{i1}^{h(1)} = \begin{cases} -\beta_i h^{-2/3}, & \text{если } |\beta_i| \leq Kh^{2/3}, \\ -K \operatorname{sign} \beta_i & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$u_{i2}^{h(1)} = \begin{cases} -\beta_i^{(1)} \alpha^{-1}(h), & \text{если } |\beta_i^{(1)}| \leq \alpha(h)f, \\ -f \operatorname{sign} \beta_i^{(1)} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\tau_i = \tau_{i,h}, \quad \beta_i = (w_1^{h(1)}(\tau_i) - \xi_i^h)(k(\tau_i) + \lambda \xi_i^h), \quad \beta_i^{(1)} = w_2^{h(1)}(\tau_i) - u_{i1}^h, \quad \xi_i^h \in \mathbb{R}.$$

Введем следующее условие.

У с л о в и е 1. а) Реальный вход $\gamma = \gamma(t)$ порождает решение $x(t) = x(t, \gamma)$ уравнения (1.1) такое, что

$$\inf_{t \in T} |k(t) + \lambda x_1(t, \gamma)| \geq c > 0.$$

б) Функция $k(t)$ дифференцируема, и ее производная есть элемент пространства $L_\infty(T; \mathbb{R})$.

в) Функция $\gamma(t)/(k(t) + \lambda x_1(t, \gamma))$ имеет ограниченную вариацию на T .

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1. Тогда, если уравнения модели выбраны в виде (2.1), (3.2), а стратегия U_1 — в виде (2.2), (3.3), (3.4), то имеют место сходимости (2.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из результатов работы [1] и условий 1а) и 1б) следует неравенство

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |u_1^{h(1)}(t) - x_2(t)|^2 dt \leq Ch^{1/3}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим величину

$$\varepsilon(t) = |w_2^{h(1)}(t) - x_2(t)|^2 + \alpha(h) \int_{t_0}^t \{|u_2^{h(1)}(\tau)|^2 - |\gamma(\tau)|^2\} d\tau.$$

Легко видеть, что при $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ справедливо неравенство

$$\varepsilon(t) \leq \varepsilon(\tau_i) + \delta(h) \int_{\tau_i}^t |w_2^{h(1)}(\tau) - \dot{x}_2(\tau)|^2 d\tau + \int_{\tau_i}^t \mu_i(\tau) d\tau + \alpha(h) \int_{\tau_i}^t \{|u_{i2}^{h(1)}|^2 - |\gamma(\tau)|^2\} d\tau, \quad (3.6)$$

где

$$\mu_i(t) = 2(w_2^{h(1)}(\tau_i) - x_2(\tau_i)(\dot{w}_2^{h(1)}(t) - \dot{x}_2(t)), \quad t \in \delta_i.$$

Рассмотрим подробнее величину $\mu_i(t)$. Имеем при $t \in \delta_i$

$$\begin{aligned} \mu_i(t) &= 2(w_2^{h(1)}(\tau_i) - x_2(\tau_i))\{k(t)x_2(t) - k(\tau_i)u_{i1}^{h(1)} + \lambda(x_1(t)x_2(t) - \xi_i^h u_{i1}^{h(1)}) \\ &+ \mu\lambda(x_2(t) - u_{i1}^h) + u_{i2}^h - \gamma(t)\} \leq C_1|x_2(\tau_i) - u_{i1}^h| + \sum_{j=1}^5 \lambda_{ji}(t), \quad t \in \delta_i. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda_{1i}(t) &= 2\beta_i^{(1)}\left(k(t)x_2(t) - k(\tau_i)u_{i1}^{h(1)}\right), & \lambda_{2i}(t) &= 2\lambda\beta_i^{(1)}\left(x_1(t)x_2(t) - \xi_i^h u_{i1}^{h(1)}\right), \\ \lambda_{3i}(t) &= 2\mu\beta_i^{(1)}\left(x_2(t) - u_{i1}^{h(1)}\right), & \lambda_{4i}(t) &= 2\beta_i^{(1)}\left(u_{i2}^{h(1)} - \gamma(t)\right). \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (3.7). Из условия 1b) вытекает, что

$$\lambda_{1i}(t) \leq C_2\{|x_2(t) - u_{i1}^{h(1)}| + \delta(h)\}, \quad t \in \delta_i.$$

Следовательно, учитывая (3.5) и (3.1), будем иметь

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \lambda_{1i}(t) dt \leq C_2 \int_{t_0}^{\vartheta} \{|x_2(t) - u_{i1}^{h(1)}(t)| + \delta(h)\} dt \leq C_3(h^{1/6} + \delta(h)), \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} \delta|x_2(\tau_i) - u_{i1}^h| \leq \int_{t_0}^{\vartheta} |x_2(\tau) - u_{i1}^{h(1)}(\tau)| d\tau \leq C_5(h^{1/6} + \delta(h)). \quad (3.9)$$

Тогда из (1.2), (3.1) получим

$$|\xi_i^h - x_1(t)| \leq C_6(h + \delta(h)), \quad t \in \delta_i.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \lambda_{2i}(t) dt \leq C_7(h^{1/6} + \delta(h)). \quad (3.10)$$

По аналогии выводим

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \lambda_{3i}(t) dt \leq C_8(h^{1/6} + \delta(h)). \quad (3.11)$$

Заметим, что

$$\arg \min\{2\beta_i^{(1)}u + \alpha u^2 : u \in P\} = \begin{cases} -\beta_i^{(1)}\alpha^{-1}(h), & \text{если } |\beta_i^{(1)}| \leq \alpha(h)f, \\ -f\text{sign}\beta_i^{(1)} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, принимая во внимание (3.4), получим

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ \lambda_{4i}(\tau) + \alpha(h)\{|u_{i2}^{h(1)}|^2 - |\gamma(\tau)|^2\} \right\} d\tau \quad (3.12)$$

$$= \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ \left[2(\beta_i^{(1)}, u_{i2}^{h(1)}) + \alpha(h) |u_{i2}^{h(1)}|^2 \right] - \left[2(\beta_i^{(1)}, \gamma(\tau)) + \alpha(h) |\gamma(\tau)|^2 \right] \right\} d\tau \leq 0.$$

Объединив (3.6)–(3.12) и учитывая неравенство $\delta(h) \leq h$, при всех $i \in [1 : m_h]$ будем иметь оценку

$$\varepsilon(\tau_i) \leq Ch^{1/6}.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся по стандартной схеме (см., например, [1; 4]). Теорема доказана.

4. Алгоритм решения задачи 2

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи 2. Для решения этой задачи необходимо указать модель (2.1) и стратегию U_2 (2.4), обеспечивающую сходимость (2.5). Заметим, что в этом случае $\xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_{2i}^h\} \in \mathbb{R}^2$ и неравенство (1.3) принимает вид

$$\left(|\xi_{1i}^h - x_1(\tau_i)|^2 + |\xi_{2i}^h - x_2(\tau_i)|^2 \right)^{1/2} \leq h.$$

Так же, как и в задаче 1, зафиксируем некоторую функцию $\alpha_1(h) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ со свойствами

$$\alpha_1(h) \rightarrow 0, \quad \delta(h) \leq h, \quad h^{1/6}/\alpha_1(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Пусть в модели правая часть имеет вид

$$f_2(\xi_i^h, w^{h(2)}(\tau_i), u_i^{h(2)}) = \left\{ u_{i1}^{h(2)} \xi_{i2}^h + \lambda \xi_{i1}^h \xi_{i2}^h - \lambda \nu \xi_{i1}^h - u_{i1}^{h(2)} \xi_{i2}^h - \lambda \xi_{i1}^h \xi_{i2}^h - \lambda \mu \xi_{i2}^h + u_{i2}^{h(2)} \right\}, \quad (4.1)$$

начальное состояние

$$w_0^{h(2)} = \{x_{10}, x_{20}\},$$

а управление находится по формуле

$$u_{i1}^{h(2)} = \begin{cases} -\gamma_i^0 h^{-2/3}, & \text{если} \quad |\gamma_i^0| \leq h^{2/3} A, \\ -A \operatorname{sign} \gamma_i^0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$u_{i2}^{h(2)} = \begin{cases} -\gamma_i \alpha_1^{-1}(h), & \text{если} \quad |\gamma_i| \leq \alpha_1(h) f, \\ -f \operatorname{sign} \gamma_i & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Здесь

$$\tau_i = \tau_{i,h}, \quad \gamma_i^0 = \xi_{i2}^h(w_1^{h(2)}(\tau_i) - \xi_{i1}^h), \quad \gamma_i = w_2^{h(2)}(\tau_i) - \xi_{i2}^h.$$

У с л о в и е 2. а) Реальный вход $\gamma = \gamma(t)$ порождает решение $x(t) = x(t, \gamma)$ уравнения (1.1) такое, что

$$x_2(t) \geq c > 0, \quad t \in T.$$

б) Функция $k(t)$ удовлетворяет условию 1б) и неравенству

$$|k(t)| \leq A, \quad t \in T.$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие 2. Тогда, если уравнения модели выбраны в виде (2.1), (4.1), а стратегия U_2 — в виде (2.4), (4.2), (4.3), то имеют место сходимости (2.5).

Доказательство. Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1. Сначала оценим изменение величины

$$\varepsilon_1(t) = |w_1^{h(2)}(t) - x_1(t)|^2.$$

Справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\tau_{i+1}) &\leq \varepsilon_1(\tau_i) + \left| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\dot{w}_1^{h(2)}(\tau) - \dot{x}_1(\tau)) d\tau \right|^2 \\ &+ 2(w_1^{h(2)}(\tau_i) - x_1(\tau_i)) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{u_{i1}^{h(2)} \xi_{i2}^h + \lambda \xi_{i1}^h \xi_{i2}^h - \lambda \nu \xi_{i1}^h - k(\tau)x_2(\tau) - \lambda x_1(\tau)x_2(\tau) + \lambda \nu x_1(\tau)\} dt. \end{aligned}$$

В силу ограниченности функций $k(t)$ и $\gamma(t)$ будем иметь

$$\sup_{t \in T} |\dot{w}_1^{h(2)}(t)| \leq K_1, \quad \sup_{t \in T} |\dot{x}_1(t)| \leq K_2.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon_1(\tau_i) + d_0(\delta(h) + h)\delta(h) + \sum_{j=1}^3 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \lambda_i^{(j)}(\tau) d\tau,$$

где

$$\lambda_i^{(1)}(\tau) = 2\gamma_i^0(u_{i1}^{h(2)} - k(\tau)) + 2(w_1^{h(2)}(\tau_i) - \xi_{i1}^h)(\xi_{i2}^h - x_2(\tau)),$$

$$\lambda_i^{(2)}(\tau) = 2\lambda(w_1^{h(2)}(\tau_i) - \xi_{i1}^h)(\xi_{i1}^h \xi_{i2}^h - x_1(\tau)x_2(\tau)),$$

$$\lambda_i^{(3)}(\tau) = 2\lambda\nu(w_1^{h(2)}(\tau_i) - \xi_{i1}^h)(x_1(\tau) - \xi_{i1}^h).$$

Аналогично (3.12), принимая во внимание (4.2), получим

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ 2\gamma_i^0(u_{i1}^{h(2)} - k(\tau)) + h^{2/3}\{|u_{i1}^{h(2)}|^2 - |k(\tau)|^2\} \right\} d\tau \leq 0.$$

Таким образом,

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left\{ \lambda_i^{(1)}(\tau) + h^{2/3}\{|u_{i1}^{h(2)}|^2 - |k(\tau)|^2\} \right\} d\tau \leq d_1(h + \delta(h))\delta(h).$$

Легко видеть, что

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \lambda_i^{(2)}(\tau) d\tau \leq d_2(h + \delta(h))\delta(h),$$

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \lambda_i^{(3)}(\tau) d\tau \leq d_3(h + \delta(h))\delta(h).$$

Отсюда заключаем, что

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon_1(\tau_i) + d_3\delta(h)(h + \delta(h)).$$

Тогда

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) \leq C(h + \delta(h)), \quad i \in [0 : m_h - 1].$$

Из этого, следуя [4], получаем

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |u_1^{h(2)}(t) - k(t)|^2 dt \leq Ch^{1/3}. \quad (4.4)$$

Теперь введем функционал Ляпунова вида

$$\varepsilon_2(t) = |w_2^{h(2)}(t) - x_2(t)|^2 + \alpha_1(h) \int_{t_0}^t \{|u_2^{h(2)}(\tau)|^2 - |\gamma(\tau)|^2\} d\tau.$$

Легко видеть, что при $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ справедливо неравенство

$$\varepsilon_2(t) \leq \varepsilon_2(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \left\{ \delta(h) |\dot{w}_2^{h(2)}(\tau) - \dot{x}_2(\tau)|^2 + \nu_i(\tau) + \alpha_1(h) \left(|u_{i2}^{h(2)}|^2 - |\gamma(\tau)|^2 \right) \right\} d\tau,$$

где

$$\nu_i(t) = \varphi_i(\dot{w}_2^{h(2)}(t) - \dot{x}(t)), \quad t \in \delta_i,$$

$$\varphi_i = 2(w_2^{h(2)}(\tau_i) - \dot{x}(\tau_i)).$$

Рассмотрим величину $\nu_i(t)$. При $t \in \delta_i$ из (1.1), (3.2) следует

$$\nu_i(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_{ji}(t), \quad (4.5)$$

$$\gamma_{1i}(t) = \varphi_i(k(t)x_2(t) - u_{i1}^{h(2)}\xi_{i2}^h), \quad \gamma_{2i}(t) = \lambda\varphi_i(x_1(t)x_2(t) - \xi_{i1}^h\xi_{i2}^h),$$

$$\gamma_{3i}(t) = \lambda\mu\varphi_i(x_2(t) - \xi_{i2}^h), \quad \gamma_{4i}(t) = 2\varphi_i(u_{i2}^{h(2)} - \gamma(t)).$$

Учитывая (4.4), имеем

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} \gamma_{1i}(t) \leq C_1(h^{1/6} + \delta). \quad (4.6)$$

Далее,

$$\sum_{i=0}^{m_h-1} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (\gamma_{2i}(t) + \gamma_{3i}(t)) dt \leq C_2(h + \delta). \quad (4.7)$$

Заметим, что

$$\arg \min \{2\gamma_i u + \alpha_1 u^2 : |u| \leq f\} = \begin{cases} -\gamma_i \alpha_1^{-1}(h), & \text{если } |\gamma_i| \leq \alpha_1(h)f, \\ -f \operatorname{sign} \gamma_i & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Аналогично (3.12), принимая во внимание (4.8), выводим

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{\gamma_{4i}(t) + \alpha_1(t) \{|u_{i2}^{h(2)}|^2 - |\gamma(t)|^2\} dt \leq C_3(h + \delta)\delta. \quad (4.9)$$

Объединив (4.5)–(4.9), при всех $i \in [1 : m_h]$ будем иметь оценку

$$\varepsilon_2(\tau_i) \leq C(h^{1/6} + \delta).$$

Справедливость теоремы 2 следует из этого неравенства. Теорема доказана.

5. Пример

Алгоритм решения задачи 1 был протестирован на модельном примере. Рассматривалась система (1.1) на временном интервале $T = [0, 2]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Предполагалось, что начальное состояние системы имеет вид $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 2$. Вход системы моделировался по формуле

$$\gamma(t) = 1 + 3 \sin(t).$$

В моменты τ_i измерялась величина $\xi_{i1} = x_1(\tau_i) + h \cos(M\tau_i)$. Начальное состояние модели $w_1(0) = h$, $w_2(0) = 2 + h$ и управления выбирались согласно формулам (2.1), (3.2)–(3.4). На рис. 1–3 представлены результаты вычислений в случае, когда $k(t) = 1 + t$, $\lambda = 1$, $\nu = 3$, $\mu = 3$, $f = 3$, $M = 50$. Рис. 1 соответствует случаю, когда $h = 0.001$, рис. 2 — $h = 0.01$, рис. 3 — $h = 0.1$. На всех рисунках сплошная линия отвечает управлениям $u_{1,2}(t)$ модели, а прерывистая — второй координате системы (1.1) и реальному управлению.

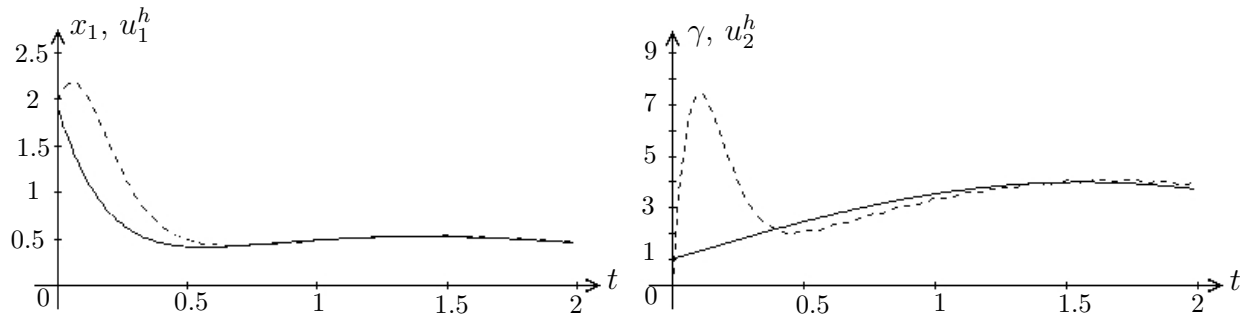


Рис. 1.

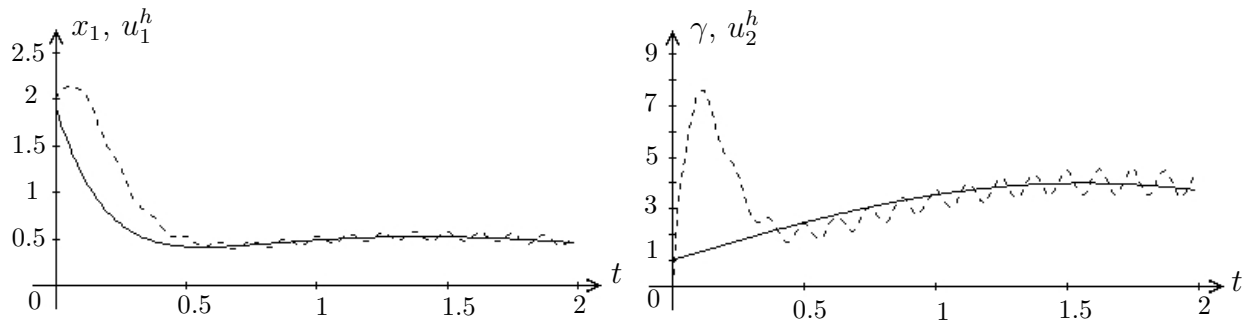


Рис. 2.

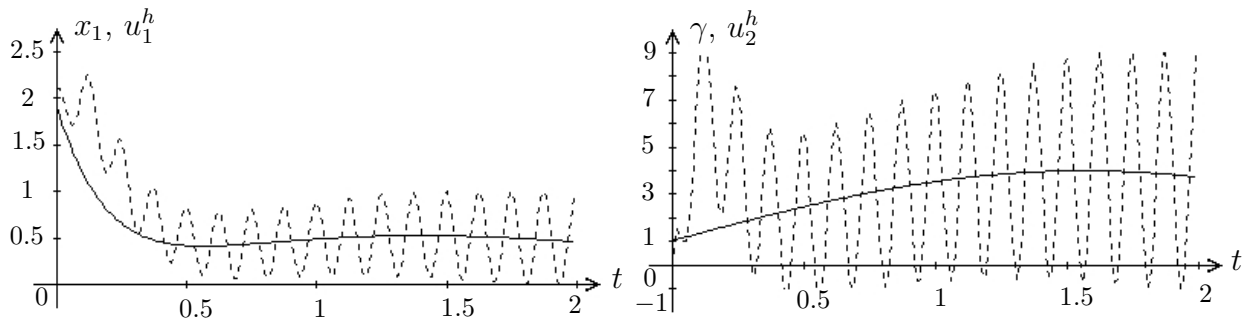


Рис. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984. 456 с.
3. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 286 с.
4. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
5. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. 305 с.
6. **Bertuglia C.S., Lombardo S., Nijkamp P.** Innovative behavior in space and time. Berlin: Springer, 1997. 431 p.

Близорукова Марина Сергеевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: msb@imm.uran.ru.

Поступила 9.11.2010

УДК 519.6:519.83

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ПОИСКА СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ¹**Ф. П. Васильев, Е. В. Хорошилова, А. С. Антипин**

В статье предлагается регуляризованный вариант экстраградиентного метода поиска седловой точки для выпукло-вогнутого функционала, определенного на решениях управляемых систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагается, что входные данные задачи известны приближенно. Поскольку рассматриваемая задача, вообще говоря, является неустойчивой к возмущениям входных данных, в статье для ее решения предлагается регуляризованный вариант экстраградиентного метода, исследуется его сходимость, строится регуляризирующий оператор. Параметры регуляризации метода асимптотически согласованы с уровнем возмущения входных данных. Ключевые слова: экстраградиентный метод, оптимальное управление, седловая точка, регуляризация.

F. P. Vasil'ev, E. V. Khoroshilova, A. S. Antipin. Regularized extragradient method for finding a saddle point in an optimal control problem.

We propose a regularized variant of the extragradient method of saddle point search for a convex-concave functional defined on solutions of control systems of linear ordinary differential equations. We assume that the input data of the problem are given inaccurately. Since the problem under consideration is, generally speaking, unstable under a disturbance in the input data, we propose a regularized variant of the extragradient method, investigate its convergence, and construct a regularizing operator. The regularization parameters of the method agree asymptotically with the disturbance level of the input data.

Keywords: extragradient method, optimal control, saddle point, regularization.

1. Постановка задачи

На множестве $U_1 \times U_2$ ищется седловая точка функционала

$$L(u, v) = \Phi(x(T, u), y(T, v)). \quad (1)$$

Здесь

$$x(t, u) = x(t) = (x^1(t), \dots, x^{n_1}(t)) \in L_{n_1}^2[0, T],$$

$$y(t, v) = y(t) = (y^1(t), \dots, y^{n_2}(t)) \in L_{n_2}^2[0, T]$$

являются решениями задач Коши

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + B_1(t)u(t) + f_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) = A_2(t)y(t) + B_2(t)v(t) + f_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad y(0) = y_0, \quad (3)$$

матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$, $f_i(t)$, $i = 1, 2$, заданы и имеют кусочно-непрерывные элементы;

$$u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^{r_1}(t)) \in U_1, \quad v = v(t) = (v^1(t), \dots, v^{r_2}(t)) \in U_2, \quad (4)$$

$U_1 \in L_{r_1}^2[0, T]$, $U_2 \in L_{r_2}^2[0, T]$ — выпуклые замкнутые ограниченные множества.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00388), научной программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1714) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4096.2010.1).

Седловой точкой функционала $L(u, v)$ называется точка $\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix} \in U_1 \times U_2$, удовлетворяющая системе неравенств

$$L(u_*, v) \leq L(u_*, v^*) \leq L(u, v^*) \quad \forall u \in U_1, \quad \forall v \in U_2. \quad (5)$$

Будем предполагать, что $\Phi(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая на $E^{n_1} \times E^{n_2}$ функция, выпуклая по x и вогнутая по y , с градиентами, удовлетворяющими условию Липшица. Тогда функция $L(u, v)$ слабо непрерывна в $L_{r_1}^2[0, T] \times L_{r_2}^2[0, T]$ и на слабо компактном множестве $U_1 \times U_2$ имеет хотя бы одну седловую точку [1].

Для решения задачи (1)–(5) в [2] был предложен экстраградиентный метод

$$\bar{z}_n = \pi_Z(z_n - \beta_n A z_n), \quad z_{n+1} = \pi_Z(z_n - \beta_n A \bar{z}_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

где $z_n, \bar{z}_n \in Z = U_1 \times U_2$,

$$z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \bar{z}_n = \begin{pmatrix} \bar{u}_n \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}, \quad A z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} L(u, v) \\ -\frac{\partial}{\partial v} L(u, v) \end{pmatrix}, \quad \pi_Z(z) = \begin{pmatrix} \pi_{U_1}(u) \\ \pi_{U_2}(v) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$\pi_{U_1}(\dots), \pi_{U_2}(\dots)$ — операторы проектирования на множества U_1 и U_2 соответственно, параметр $\beta_n > 0$ характеризует длину шага.

При сделанных выше предположениях оператор A действует из пространства $L^2 = L^2[0, T] = L_{r_1}^2[0, T] \times L_{r_2}^2[0, T]$ в это же пространство и удовлетворяет условию Липшица

$$\|A z_1 - A z_2\|_{L^2} \leq L \|z_1 - z_2\|_{L^2} \quad \forall z_1, z_2 \in L^2. \quad (8)$$

В [2] было доказано, что если $0 < \beta < (1/L)$, то последовательность $\{z_n\}$, определенная методом (6), слабо в L^2 сходится к некоторой седловой точке функции (1).

В [2] предполагалось, что оператор A известен точно. Однако на практике входные данные задачи (1)–(5) и, следовательно, оператор A известны с погрешностью. Поскольку задача поиска седла, вообще говоря, неустойчива, то для получения ее решения с нужной точностью приходится использовать методы регуляризации [3–6].

В настоящей статье предлагается регуляризованный вариант экстраградиентного метода, устанавливается сходимость в норме $L^2[0, T]$ к седловой точке $z_* = \begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix}$ с минимальной нормой (короче, к нормальной седловой точке) в предположении, что оператор A из (7) известен неточно.

2. Регуляризованный экстраградиентный метод

Введем функцию

$$T(u, v) = L(u, v) + \frac{1}{2} \alpha (\|u\|_{L_{r_1}^2}^2 - \|v\|_{L_{r_2}^2}^2), \quad u \in U_1, \quad v \in U_2, \quad \alpha > 0, \quad (9)$$

которую будем называть функцией Тихонова задачи (1)–(5). Пользуясь определением оператора A из (7), имеем

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} T(u, v) \\ -\frac{\partial}{\partial v} T(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} L(u, v) \\ -\frac{\partial}{\partial v} L(u, v) \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A z + \alpha z, \quad z \in Z = U_1 \times U_2. \quad (10)$$

Предположим, что вместо точного оператора A нам известны его приближения A_n , $n = 0, 1, \dots$, такие, что

$$\|A_n z - Az\|_{L^2} \leq \delta_n(1 + \|z\|_{L^2}), \quad z \in Z, \quad (11)$$

где $\delta_n > 0$ — параметр, характеризующий погрешности. Заменяем в (10) A на A_n , α на α_n , и получившееся выражение $A_n z + \alpha_n z$ подставим в (6) вместо A . Получим регуляризованный экстраградиентный метод

$$\bar{z}_n = \pi_Z(z_n - \beta_n(A_n z_n + \alpha_n z_n)), \quad z_{n+1} = \pi_Z(z_n - \beta_n(A_n \bar{z}_n + \alpha_n \bar{z}_n)), \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия на матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$, $f_i(t)$, $i = 1, 2$, на множества U_1 , U_2 и на функцию $\Phi(x, y)$, перечисленные в разд. 1. Пусть вместо точного оператора A из (7) известны его приближения A_n , $n = 0, 1, \dots$, удовлетворяющие (11), а параметры α_n , β_n , δ_n подчинены условиям $\alpha_n > 0$, $0 < \beta_n < 1/L$, $\delta_n > 0$, $\alpha_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, причем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n = +\infty, \quad \frac{|\alpha_n - \alpha_{n+1}|}{(\alpha_n)^2 \beta_n} \rightarrow 0, \quad \frac{\delta_n}{\alpha_n} \rightarrow 0. \quad (13)$$

Тогда при любом выборе начальной точки $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ последовательность $\{z_n\}$, порожденная методом (12), сходится сильно в L^2 к нормальной седловой точке z_* , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|z_n - z_*\|_{L^2} = 0, \quad (14)$$

причем в (14) сходимость равномерная относительно выбора A_n из (11).

При доказательстве теоремы 1 нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Нормальная седловая точка функции (1) существует и единственна.

Доказательство. Как известно [5, с. 227, теорема 5; с. 228, следствия 1, 2; замечание после следствия 2], множество седловых точек Z_* представимо в виде $Z_* = U_{1*} \times U_{2*}$, где U_{1*} и U_{2*} есть, соответственно, множества решений задач

$$\nu(u) = \sup_{v \in U_2} L(u, v) \rightarrow \inf, \quad u \in U_1, \quad \psi(v) = \inf_{u \in U_1} L(u, v) \rightarrow \sup, \quad v \in U_2.$$

Множество U_{1*} выпукло, так как функция $\nu(u)$ выпукла на U_1 [5, с. 165, теорема 7], множество U_{2*} выпукло, так как функция $\psi(v)$ вогнута ($-\psi(v)$ выпукла) на U_2 . Множества U_{1*} , U_{2*} замкнуты в силу слабой непрерывности $L(u, v)$, следовательно, прямое произведение $U_{1*} \times U_{2*}$ выпукло, замкнуто в $L_{r_1}^2 \times L_{r_2}^2$. Функция

$$\Omega(u, v) = \|u\|_{L_{r_1}^2}^2 + \|v\|_{L_{r_2}^2}^2$$

сильно выпукла на $U_{1*} \times U_{2*}$ и достигает своей нижней грани на этом множестве в единственной точке $\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix}$ [5, с. 176, теорема 1], это и есть нормальная седловая точка. Лемма 1 доказана.

При каждом фиксированном $\alpha > 0$ функция Тихонова (9) сильно выпукла по u на U_1 , сильно вогнута по v на U_2 и имеет [1] единственную седловую точку $z_\alpha = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} \in U_1 \times U_2$, т.е.

$$T(u_\alpha, v) \leq T(u_\alpha, v_\alpha) \leq T(u, v_\alpha) \quad \forall u \in U_1, \quad \forall v \in U_2. \quad (15)$$

Лемма 2. Точка $z_\alpha \in Z$ будет седловой точкой функции $T(u, v)$ тогда и только тогда, когда

$$\langle Az_\alpha + \alpha z_\alpha, z - z_\alpha \rangle \geq 0 \quad \forall z \in Z. \quad (16)$$

Доказательство. Пусть z_α — седловая точка функции $T(u, v)$. Так как $T(u, v)$ — выпукло-вогнутая функция, то условие (15) эквивалентно системе вариационных неравенств [5, с. 161, теорема 3: критерий оптимальности для выпуклых функций]

$$\left\langle \frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial u}, u - u_\alpha \right\rangle_{L_{r_1}^2} \geq 0, \quad \left\langle -\frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial v}, v - v_\alpha \right\rangle_{L_{r_2}^2} \geq 0,$$

выполненных для всех $\alpha > 0$ и всех $z \in Z$, т.е.

$$\left\langle \frac{\partial L(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial u} + \alpha u_\alpha, u - u_\alpha \right\rangle_{L_{r_1}^2} \geq 0, \quad \left\langle -\frac{\partial L(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial v} + \alpha v_\alpha, v - v_\alpha \right\rangle_{L_{r_2}^2} \geq 0.$$

Суммируя последние два неравенства, с учетом определения оператора A (7) приходим к (16). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Для любого $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\|z_\alpha\|_{L^2}^2 \leq \|z_*\|_{L^2}^2. \quad (17)$$

Доказательство. Пользуясь неравенствами (5), (15), имеем

$$\begin{aligned} L(u_*, v^*) + \frac{1}{2}\alpha(\|u_\alpha\|_{L_{r_1}^2}^2 - \|v^*\|_{L_{r_2}^2}^2) &\leq L(u_\alpha, v^*) + \frac{1}{2}\alpha(\|u_\alpha\|_{L_{r_1}^2}^2 - \|v^*\|_{L_{r_2}^2}^2) = T(u_\alpha, v^*) \\ &\leq T(u_\alpha, v_\alpha) \leq T(u_*, v_\alpha) = L(u_*, v_\alpha) + \frac{1}{2}\alpha(\|u_*\|_{L_{r_1}^2}^2 - \|v_\alpha\|_{L_{r_2}^2}^2) \\ &\leq L(u_*, v^*) + \frac{1}{2}\alpha(\|u_*\|_{L_{r_1}^2}^2 - \|v_\alpha\|_{L_{r_2}^2}^2). \end{aligned}$$

Из крайних звеньев этой цепочки следует

$$\frac{1}{2}\alpha(\|u_\alpha\|_{L_{r_1}^2}^2 - \|v^*\|_{L_{r_2}^2}^2) \leq \frac{1}{2}\alpha(\|u_*\|_{L_{r_1}^2}^2 - \|v_\alpha\|_{L_{r_2}^2}^2) \Leftrightarrow \|u_\alpha\|_{L_{r_1}^2}^2 + \|v_\alpha\|_{L_{r_2}^2}^2 \leq \|u_*\|_{L_{r_1}^2}^2 + \|v^*\|_{L_{r_2}^2}^2,$$

что равносильно (17). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Семейство $\{z_\alpha\}$ при $\alpha \rightarrow 0$ сходится по норме пространства L^2 к нормальному седлу z_* .

Доказательство. Установим сначала слабую сходимость $\{z_\alpha\}$ к z_* . Из неравенства (17) леммы 3 по слабому варианту теоремы Больцано — Вейерштрасса следует существование последовательности $\{\alpha_m\} \rightarrow 0$, для которой $z_{\alpha_m} = \begin{pmatrix} u_{\alpha_m} \\ v_{\alpha_m} \end{pmatrix} \rightarrow z' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ слабо в $L^2 = L_{r_1}^2[0, T] \times L_{r_2}^2[0, T]$.

Убедимся, что z' — седловая точка функции $L(u, v)$. Прежде всего, $z' \in Z$, так как $z_{\alpha_m} \in Z$, а Z — слабо замкнутое множество. Необходимым и достаточным условием седловой точки является выполнение неравенства (см. лемму 2)

$$\langle Az_\alpha + \alpha z_\alpha, z - z_\alpha \rangle = \left\langle \frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial u}, u - u_\alpha \right\rangle_{L_{r_1}^2} + \left\langle -\frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial v}, v - v_\alpha \right\rangle_{L_{r_2}^2} \geq 0 \quad (18)$$

для всех $\alpha > 0$ и любых $z \in Z$.

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $\alpha = \alpha_m \rightarrow 0$. Поскольку

$$|\langle z_\alpha, z - z_\alpha \rangle| \leq \|z_*\|_{L^2} \|z - z_*\|_{L^2}, \quad x(t, u_{\alpha_m}) \rightarrow x(t, u_*), \quad y(t, v_{\alpha_m}) \rightarrow y(t, v_*)$$

равномерно на $[0, T]$, то $Az_{\alpha_m} \rightarrow Az_*$ равномерно на $[0, T]$.

Тогда из (18) при $\alpha = \alpha_m \rightarrow 0$ в пределе получаем $\langle Az', z - z' \rangle_{L^2} \geq 0 \forall z \in Z$, следовательно, точка z' — седло $L(u, v)$ в силу леммы 2.

До перехода к пределу из (17) мы имели $\|z_\alpha\|_{L^2}^2 \leq \|z_*\|_{L^2}^2 \forall \alpha > 0$. Функция $\|z_\alpha\|_{L^2}^2$ слабо полунепрерывна снизу [5, с. 504, пример 5], поэтому

$$\|z_*\|_{L^2}^2 \geq \overline{\lim} \|z_{\alpha_m}\|_{L^2}^2 \geq \underline{\lim} \|z_{\alpha_m}\|_{L^2}^2 \geq \|z'\|_{L^2}^2,$$

но z' — седло, z_* — нормальное седло, следовательно, $\|z'\|_{L^2}^2 \geq \|z_*\|_{L^2}^2$. Совмещая эти неравенства, заключаем:

$$\|z_*\|_{L^2}^2 = \|z'\|_{L^2}^2 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|z_{\alpha_m}\|_{L^2}^2,$$

а значит, z' — также нормальное седло. Но нормальное седло единственно (лемма 1), следовательно, $z' = z_*$. Таким образом, семейство $\{z_\alpha\}$ имеет всего одну слабо предельную точку z_* , следовательно, $z_\alpha \rightarrow z_*$ слабо в $L^2 = L_{r_1}^2 \times L_{r_2}^2$ и $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|z_\alpha\|_{L^2}^2 = \|z_*\|_{L^2}^2$.

Тогда

$$\|z_\alpha - z_*\|_{L^2}^2 = \|z_\alpha\|_{L^2}^2 - 2\langle z_\alpha, z_* \rangle + \|z_*\|_{L^2}^2 \rightarrow 0$$

при $\alpha \rightarrow 0$ (так как $\|z_\alpha\|_{L^2}^2 \rightarrow \|z_*\|_{L^2}^2$, $2\langle z_\alpha, z_* \rangle \rightarrow 2\|z_*\|_{L^2}^2$). Получили сильную сходимость семейства траекторий $\{z_\alpha\}$ к нормальному седлу z_* . Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Оператор $\begin{pmatrix} \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} \\ -\frac{\partial T(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix}$ является сильно монотонным, т. е.

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial T(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial u}, u - \tilde{u} \right\rangle_{L_{r_1}^2} + \left\langle -\frac{\partial T(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial T(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial v}, v - \tilde{v} \right\rangle_{L_{r_2}^2} \\ & \geq \alpha (\|u - \tilde{u}\|_{L_{r_1}^2}^2 + \|v - \tilde{v}\|_{L_{r_2}^2}^2) \quad \forall z, \tilde{z} \in Z = U_1 \times U_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательство. В самом деле, пусть оператор A монотонный, т. е.

$$\langle Az_1 - Az_2, z_1 - z_2 \rangle \geq 0 \quad \forall z_1, z_2 \in Z. \quad (20)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} &= \frac{\partial L(u, v)}{\partial u} + \alpha u, & -\frac{\partial T(u, v)}{\partial v} &= -\frac{\partial L(u, v)}{\partial v} + \alpha v, \\ \frac{\partial T(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial u} &= \frac{\partial L(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial u} + \alpha \tilde{u}, & -\frac{\partial T(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial v} &= -\frac{\partial L(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial v} + \alpha \tilde{v}, \end{aligned}$$

но тогда

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial T(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial u}, u - \tilde{u} \right\rangle_{L_{r_1}^2} + \left\langle -\frac{\partial T(u, v)}{\partial v} - \left(-\frac{\partial T(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial v}\right), v - \tilde{v} \right\rangle_{L_{r_2}^2} \\ & = \langle Az - A\tilde{z}, z - \tilde{z} \rangle_{L^2} + \alpha (\|u - \tilde{u}\|_{L_{r_1}^2}^2 + \|v - \tilde{v}\|_{L_{r_2}^2}^2) \\ & \geq \alpha (\|u - \tilde{u}\|_{L_{r_1}^2}^2 + \|v - \tilde{v}\|_{L_{r_2}^2}^2) = \alpha \|z - \tilde{z}\|_{L^2}^2 \quad \forall z, \tilde{z} \in Z = U_1 \times U_2 \end{aligned}$$

(поскольку $\langle Az - A\tilde{z}, z - \tilde{z} \rangle_{L^2} \geq 0$ в силу монотонности оператора A). Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Седло $z_\alpha = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix}$ функции $T(u, v) = L(u, v) + (\alpha/2) (\|u\|_{L^2_{r_1}}^2 - \|v\|_{L^2_{r_2}}^2)$ удовлетворяет неравенству

$$\|z_\alpha - z_\gamma\|_{L^2} \leq \frac{|\alpha - \gamma|}{\alpha} \|z_*\|_{L^2}, \quad L^2 = L^2_{r_1} \times L^2_{r_2}. \quad (21)$$

Доказательство. В (19) возьмем $z = z_\alpha$, $\tilde{z} = z_\gamma$, тогда

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial u} - \frac{\partial T(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial u}, u_\alpha - u_\gamma \right\rangle_{L^2_{r_1}} + \left\langle -\frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial v} - \left(-\frac{\partial T(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial v}\right), v_\alpha - v_\gamma \right\rangle_{L^2_{r_2}} \\ & \geq \alpha \|z_\alpha - z_\gamma\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, так как $z_\alpha = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix}$ — седло $T(u, v)$, то согласно необходимому и достаточному условию седловой точки имеем

$$\left\langle \frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial u}, u_\gamma - u_\alpha \right\rangle_{L^2_{r_1}} + \left\langle -\frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial v}, v_\gamma - v_\alpha \right\rangle_{L^2_{r_2}} \geq 0; \quad (23)$$

аналогично, так как $z_\gamma = \begin{pmatrix} u_\gamma \\ v_\gamma \end{pmatrix}$ — седло $T(u, v)$, получим

$$\left\langle \frac{\partial T(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial u}, u_\alpha - u_\gamma \right\rangle_{L^2_{r_1}} + \left\langle -\frac{\partial T(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial v}, v_\alpha - v_\gamma \right\rangle_{L^2_{r_2}} \geq 0. \quad (24)$$

Сложим эти три неравенства (22)–(24):

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial T(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial u} - \frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial u}, u_\alpha - u_\gamma \right\rangle_{L^2_{r_1}} + \left\langle -\frac{\partial T(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial v} - \frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial v}, v_\alpha - v_\gamma \right\rangle_{L^2_{r_2}} \\ & \geq \alpha \|z_\alpha - z_\gamma\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку

$$\frac{\partial T(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial u} = \frac{\partial L(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial u} + \gamma u_\gamma, \quad \frac{\partial T(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial v} = \frac{\partial L(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial v} - \alpha v_\gamma,$$

то

$$\frac{\partial T(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial u} - \frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial u} = (\gamma - \alpha)u_\gamma, \quad -\frac{\partial T(u_\gamma, v_\gamma)}{\partial v} - \frac{\partial T(u_\alpha, v_\alpha)}{\partial v} = (\gamma - \alpha)v_\gamma,$$

и неравенство (25) примет вид

$$(\gamma - \alpha)\langle u_\gamma, u_\alpha - u_\gamma \rangle + (\gamma - \alpha)\langle v_\gamma, v_\alpha - v_\gamma \rangle \geq \alpha \|z_\alpha - z_\gamma\|_{L^2}^2,$$

или $(\gamma - \alpha)\langle z_\gamma, z_\alpha - z_\gamma \rangle \geq \alpha \|z_\alpha - z_\gamma\|_{L^2}^2$, откуда $\alpha \|z_\alpha - z_\gamma\|_{L^2}^2 \leq |\gamma - \alpha| \|z_\gamma\|_{L^2} \|z_\alpha - z_\gamma\|_{L^2}$, т. е. $\alpha \|z_\alpha - z_\gamma\|_{L^2} \leq |\gamma - \alpha| \|z_\gamma\|_{L^2} \leq |\gamma - \alpha| \|z_*\|_{L^2}$ (в силу (17)), откуда и получаем требуемый результат. Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 1. Докажем сходимость метода (12) к нормальному седлу z_* функции $L(u, v)$ в норме L^2 . Имеем

$$\|z_n - z_*\|_{L^2} \leq \|z_n - z_{\alpha_n}\|_{L^2} + \|z_{\alpha_n} - z_*\|_{L^2}, \quad (26)$$

где z_{α_n} — седло функции $T(u, v)$ при $\alpha = \alpha_n$, $n = 0, 1, \dots$. Мы уже знаем, что $z_{\alpha_n} \rightarrow z_*$ (лемма 3). Остается доказать, что первое слагаемое в (26) будет стремиться к нулю при соответствующем согласовании параметров $\alpha_n, \beta_n, \delta_n$. Обозначим для краткости $b_n = \|z_n - z_{\alpha_n}\|_{L^2}$, тогда

$$b_{n+1} = \|z_{n+1} - z_{\alpha_{n+1}}\|_{L^2} \leq \|z_{n+1} - z_{\alpha_n}\|_{L^2} + \|z_{\alpha_n} - z_{\alpha_{n+1}}\|_{L^2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (27)$$

Для второго слагаемого из (26) у нас есть оценка (21) из леммы 6. Займемся первым слагаемым. Пользуясь характеристическим свойством проекции π_Z , запишем метод (12) в виде вариационных неравенств

$$\langle \bar{z}_n - z_n + \beta_n(A_n z_n + \alpha_n z_n), z - \bar{z}_n \rangle_{L_2} \geq 0 \quad \forall z \in Z, \quad (28)$$

$$\langle z_{n+1} - z_n + \beta_n(A_n \bar{z}_n + \alpha_n \bar{z}_n), z - z_{n+1} \rangle_{L_2} \geq 0 \quad \forall z \in Z. \quad (29)$$

В (28) положим $z = z_{n+1}$, в (29) положим $z = z_{\alpha_n}$ и сложим то, что получилось

$$\begin{aligned} & \langle \bar{z}_n - z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_{n+1} - z_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle + \beta_n \langle A_n z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle \\ & + \beta_n \langle A_n \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n + \bar{z}_n - z_{n+1} \rangle + \alpha_n \beta_n \langle z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + \alpha_n \beta_n \langle \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Воспользуемся тождеством $\langle a - c, c - b \rangle = (1/2)|a - b|^2 - (1/2)|a - c|^2 - (1/2)|c - b|^2$, тогда²

$$\begin{aligned} \langle \bar{z}_n - z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle &= \frac{1}{2}|z_{n+1} - z_n|^2 - \frac{1}{2}|\bar{z}_n - z_n|^2 - \frac{1}{2}|z_{n+1} - \bar{z}_n|^2, \\ \langle z_{n+1} - z_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle &= \frac{1}{2}|z_{\alpha_n} - z_n|^2 - \frac{1}{2}|z_{n+1} - z_n|^2 - \frac{1}{2}|z_{\alpha_n} - z_{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Сложив эти два равенства, получим

$$\begin{aligned} & \langle \bar{z}_n - z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_{n+1} - z_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle \\ &= \frac{1}{2}|z_{\alpha_n} - z_n|^2 - \frac{1}{2}|\bar{z}_n - z_n|^2 - \frac{1}{2}|z_{n+1} - \bar{z}_n|^2 - \frac{1}{2}|z_{\alpha_n} - z_{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Подставим это в (30) и умножим все на 2:

$$\begin{aligned} & |z_{n+1} - z_{\alpha_n}|^2 \leq |z_n - z_{\alpha_n}|^2 - |\bar{z}_n - z_n|^2 - |z_{n+1} - \bar{z}_n|^2 + 2\beta_n \langle A_n z_n - A_n \bar{z}_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle \\ & + 2\beta_n \langle A_n \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + 2\alpha_n \beta_n \langle z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + 2\alpha_n \beta_n \langle \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle \\ & = |z_n - z_{\alpha_n}|^2 - |\bar{z}_n - z_n|^2 - |z_{n+1} - \bar{z}_n|^2 + 2\beta_n \langle A_n z_n - A_n \bar{z}_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle \\ & + 2\beta_n \langle A_n z_n - A_n \bar{z}_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + 2\beta_n \langle A_n \bar{z}_n - A_n \bar{z}_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + 2\beta_n \langle A_n \bar{z}_n - A_n \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle \\ & + 2\beta_n \langle A_n \bar{z}_n - A_n z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + 2\beta_n \langle A_n z_{\alpha_n} + \alpha_n z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle - 2\alpha_n \beta_n \langle z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle \\ & + 2\alpha_n \beta_n \langle z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + 2\alpha_n \beta_n \langle \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle \\ & \leq |z_n - z_{\alpha_n}|^2 - |\bar{z}_n - z_n|^2 - |z_{n+1} - \bar{z}_n|^2 + 2\beta_n \delta_n |z_n \mp z_{\alpha_n}| |z_{n+1} - \bar{z}_n| \\ & + 2\beta_n L |z_n - \bar{z}_n| |z_{n+1} - \bar{z}_n| + 2\beta_n \delta_n (1 + |\bar{z}_n \pm z_n \pm z_{\alpha_n}|) |z_{n+1} - \bar{z}_n| \\ & + 2\beta_n \delta_n (1 + |\bar{z}_n \pm z_n \pm z_{\alpha_n}|) |z_{\alpha_n} - \bar{z}_n| + 2\alpha_n \beta_n (-\langle z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + \langle \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle) \\ & \leq |z_n - z_{\alpha_n}|^2 - |\bar{z}_n - z_n|^2 - |z_{n+1} - \bar{z}_n|^2 + 2\beta_n \delta_n (1 + |z_n - z_{\alpha_n}| + |z_{\alpha_n}|) |z_{n+1} - \bar{z}_n| \\ & + 2\beta_n L \left(\frac{1}{2} |z_n - \bar{z}_n|^2 + \frac{1}{2} |z_{n+1} - \bar{z}_n|^2 + 2\beta_n \delta_n (1 + |\bar{z}_n - z_n| + |z_n - z_{\alpha_n}| + |z_{\alpha_n}|) |z_{n+1} - \bar{z}_n| \right. \\ & \quad \left. + 2\beta_n \delta_n (1 + |\bar{z}_n - z_n| + |z_n - z_{\alpha_n}| + |z_{\alpha_n}|) (|z_{\alpha_n} - z_n| + |z_n - \bar{z}_n|) \right. \\ & \quad \left. + 2\alpha_n \beta_n (-\langle z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + \langle \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle) \right) \\ & \leq |z_n - z_{\alpha_n}|^2 - |\bar{z}_n - z_n|^2 - |z_{n+1} - \bar{z}_n|^2 + 2\beta_n \delta_n (1 + |z_*|) |z_{n+1} - \bar{z}_n| \\ & + 2\beta_n \delta_n |z_n - z_{\alpha_n}| |z_{n+1} - \bar{z}_n| + \beta_n L |z_n - \bar{z}_n|^2 + \beta_n L |z_{n+1} - \bar{z}_n|^2 \\ & + 2\beta_n \delta_n (1 + |z_*|) |z_{n+1} - \bar{z}_n| + 2\beta_n \delta_n |\bar{z}_n - z_n| |z_{n+1} - \bar{z}_n| + 2\beta_n \delta_n |z_n - z_{\alpha_n}| |z_{n+1} - \bar{z}_n| \end{aligned}$$

²Чтобы не загромождать выкладки, до конца текущего раздела мы будем использовать запись $|z|$ вместо $\|z\|_{L^2}$.

$$\begin{aligned}
& + 2\beta_n\delta_n(1 + |z_*|)|z_{\alpha_n} - z_n| + 2\beta_n\delta_n(1 + |z_*|)|z_n - \bar{z}_n| + 2\beta_n\delta_n(|\bar{z}_n - z_n| + |z_n - z_{\alpha_n}|)^2 \\
& + 2\alpha_n\beta_n(-\langle z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + \langle \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle) \\
\leq & |z_n - z_{\alpha_n}|^2(1 + \beta_n\delta_n + \beta_n\delta_n + \beta_n\delta_n + 4\beta_n\delta_n) + |\bar{z}_n - z_n|^2(-1 + \beta_nL + \beta_n\delta_n + \beta_n\delta_n + 4\beta_n\delta_n) \\
& + |z_{n+1} - \bar{z}_n|^2(-1 + \beta_nL + \beta_n\delta_n + \beta_n\delta_n + \beta_n\delta_n + \beta_n\delta_n + \beta_n\delta_n) \\
& + 2\alpha_n\beta_n(-\langle z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + \langle \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle) \\
\leq & |z_n - z_{\alpha_n}|^2(1 + 7\beta_n\delta_n) + |\bar{z}_n - z_n|^2(-1 + \beta_nL + 6\beta_n\delta_n) + |z_{n+1} - \bar{z}_n|^2(-1 + \beta_nL + 5\beta_n\delta_n) \\
& + (1 + |z_*|^2)(4\beta_n\delta_n) + 2\alpha_n\beta_n(-\langle z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + \langle \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle). \quad (31)
\end{aligned}$$

Преобразуем выражение в последних скобках (31):

$$\begin{aligned}
& -\langle z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \pm z_{\alpha_n} \rangle + \langle \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle \\
& = -\langle z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_n, z_{n+1} - z_{\alpha_n} \rangle + \langle z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + \langle \bar{z}_n, z_{\alpha_n} - z_{n+1} \rangle \\
= & \langle z_n - z_{\alpha_n}, z_{\alpha_n} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_n - \bar{z}_n, z_{n+1} - z_{\alpha_n} \rangle = \langle z_{\alpha_n} - z_n, \bar{z}_n \pm z_n - z_{\alpha_n} \rangle + \langle z_n - \bar{z}_n, z_{n+1} - \bar{z}_n - z_{\alpha_n} \rangle \\
& = \langle z_{\alpha_n} - z_n, \bar{z}_n - z_n \rangle + \langle z_{\alpha_n} - z_n, z_n - z_{\alpha_n} \rangle + \langle z_n - \bar{z}_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_n - \bar{z}_n, \bar{z}_n \pm z_n - z_{\alpha_n} \rangle \\
= & \langle z_{\alpha_n} - z_n, \bar{z}_n - z_n \rangle - |z_{\alpha_n} - z_n|^2 + \langle z_n - \bar{z}_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle + \langle z_n - \bar{z}_n, \bar{z}_n - z_n \rangle + \langle z_n - \bar{z}_n, z_n - z_{\alpha_n} \rangle \\
& = 2\langle z_{\alpha_n} - z_n, \bar{z}_n - z_n \rangle - |z_{\alpha_n} - z_n|^2 - |z_n - \bar{z}_n|^2 + \langle z_n - \bar{z}_n, z_{n+1} - \bar{z}_n \rangle \\
\leq & \frac{1}{2}|z_{\alpha_n} - z_n|^2 + 2|\bar{z}_n - z_n|^2 - |z_{\alpha_n} - z_n|^2 - |z_n - \bar{z}_n|^2 + \frac{1}{2}|z_n - \bar{z}_n|^2 + \frac{1}{2}|z_{n+1} - \bar{z}_n|^2 \\
& = -\frac{1}{2}|z_{\alpha_n} - z_n|^2 + \frac{3}{2}|z_n - \bar{z}_n|^2 + \frac{1}{2}|z_{n+1} - \bar{z}_n|^2.
\end{aligned}$$

Умножим на $2\alpha_n\beta_n$ и подставим в (31):

$$\begin{aligned}
|z_{n+1} - z_{\alpha_n}|^2 \leq & |z_n - z_{\alpha_n}|^2(1 + 7\beta_n\delta_n - \alpha_n\beta_n) + |\bar{z}_n - z_n|^2(-1 + \beta_nL + 6\beta_n\delta_n + 3\alpha_n\beta_n) \\
& + |z_{n+1} - \bar{z}_n|^2(-1 + \beta_nL + 5\beta_n\delta_n + \alpha_n\beta_n) + 4\beta_n\delta_n(1 + |z_*|)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (32)
\end{aligned}$$

Так как $\alpha_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$, $0 < \beta_n < 1/L$, то

$$-1 + \beta_nL + 6\beta_n\delta_n + 3\alpha_n\beta_n \leq 0, \quad -1 + \beta_nL + 5\beta_n\delta_n + \alpha_n\beta_n \leq 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

Из (32) получаем

$$|z_{n+1} - z_{\alpha_n}|^2 \leq |z_n - z_{\alpha_n}|^2(1 - \alpha_n\beta_n + 7\beta_n\delta_n) + 4\beta_n\delta_n(1 + |z_*|)^2 \quad \forall n \geq n_0. \quad (33)$$

Вернемся к неравенству (27). С учетом оценок (33), (21) из (27) имеем

$$b_{n+1} \leq \sqrt{b_n(1 - \alpha_n\beta_n + 7\beta_n\delta_n) + 4\beta_n\delta_n(1 + |z_*|)^2} + \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_n}|z_*|. \quad (34)$$

Воспользуемся неравенством $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2(a\sqrt{\varepsilon})b/\sqrt{\varepsilon} \leq a^2 + b^2 + a^2\varepsilon + b^2/\varepsilon = (1+\varepsilon)(a^2 + b^2/\varepsilon)$, тогда из (34) при $\varepsilon = (1/2)\alpha_n\beta_n$ получаем

$$\begin{aligned}
b_{n+1}^2 & \leq \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n\right) \left(\beta_n^2(1 - \alpha_n\beta_n + 7\beta_n\delta_n) + 4\beta_n\delta_n(1 + |z_*|)^2 + \left(\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n}\right)^2 |z_*|^2 \frac{2}{\alpha_n\beta_n} \right) \\
& = b_n^2 \left[1 - \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n \left(1 + \alpha_n\beta_n - 7\beta_n\delta_n - 7\frac{\delta_n}{\alpha_n} \right) \right] + \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n\right) 4\beta_n\delta_n(1 + |z_*|)^2 \\
& \quad + \left(\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n}\right)^2 \alpha_n\beta_n(2 + \alpha_n\beta_n)|z_*|^2 = b_n^2(1 - S_n) + d_n, \quad n = 0, 1, \dots
\end{aligned}$$

где

$$S_n = \frac{1}{2}\alpha_n\beta_n\left(1 + \alpha_n\beta_n - 7\beta_n\delta_n - 7\frac{\delta_n}{\alpha_n}\right),$$

$$d_n = \alpha_n\beta_n\left(\left(4\frac{\delta_n}{\alpha_n} + 2\delta_n\beta_n\right)(1 + |z_*|)^2 + \left(\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{(\alpha_n)^2\beta_n}\right)^2(2 + \alpha_n\beta_n)|z_*|^2\right).$$

Ясно, что $0 < S_n \leq 1 \forall n \geq n_0$, $S_n \geq \alpha_n\beta_n C_0$ ($C_0 = \text{const}$), следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = +\infty, \quad \frac{d_n}{\delta_n} \leq \frac{d_n}{C_0\alpha_n\beta_n} \rightarrow 0.$$

Согласно лемме [5, с. 90, лемма 6] имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, таким образом,

$$|z_n - z_{\alpha_n}| \rightarrow 0, \quad |z_{\alpha_n} - z_*| \rightarrow 0,$$

а значит, из (26) получаем $\{z_n\} \rightarrow z_*$ в норме $L^2 = L_{r_1}^2 \times L_{r_2}^2$. Теорема 1 доказана.

3. Регуляризирующий оператор

В прикладных задачах исходные данные задаются, как правило, с какой-либо фиксированной погрешностью δ . Например, в рассматриваемой задаче вместо точного оператора A может оказаться известной не бесконечная последовательность приближений $\{A_n\}$ с параметрами δ_n , а лишь некоторое единственное его приближение A_δ . То есть вместо условия (11) с $\delta_n \rightarrow 0$ выполняется условие

$$\|A_\delta z - Az\|_{L^2} \leq \delta(1 + \|z\|_{L^2}) \quad \forall z \in Z = U_1 \times U_2, \quad (35)$$

где $\delta > 0$ — заданное число. Тогда в методе (12) приближения A_n естественно заменить на A_δ и искать приближения $z_n = z_n(\delta)$, $n = 0, 1, \dots$, итерационно следующим образом:

$$\bar{z}_n = \pi_Z(z_n - \beta_n(A_\delta z_n + \alpha_n z_n)), \quad z_{n+1} = \pi_Z(z_n - \beta_n(A_\delta \bar{z}_n + \alpha_n \bar{z}_n)), \quad n = 0, 1, \dots \quad (36)$$

В этом случае условия согласования параметров α_n , β_n , $\delta_n = \delta$ (см. теорему 1) нарушаются, и, следовательно, теорема 1 не может гарантировать сходимость процесса (12). Тем не менее в такой ситуации возможно использование результатов конечного числа начальных итераций регуляризованного экстраградиентного метода в качестве приближенного решения задачи. При этом возникает вопрос: до какого номера $n = n(\delta)$ имеет смысл продолжать итерационный процесс (36), чтобы получившаяся точка $z_{n(\delta)}$ при достаточно малом $\delta > 0$ была близка ко множеству Z_* . Оказывается, опираясь на теорему 1, можно получить ответ на этот вопрос [6].

Зафиксируем для этого какое-либо начальное приближение $z_0 \in Z$ и выберем любые последовательности $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}$, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Будем считать, что $\delta_0 \geq \delta$. Предложим следующее правило для определения момента останова итерационного процесса: при каждом δ , $0 < \delta \leq \delta_0$, итерации (36) следует продолжать до такого наибольшего номера $n = n(\delta)$, при котором выполняется система неравенств

$$\delta_n \geq \delta, \quad n = 0, 1, \dots, n(\delta). \quad (37)$$

Поскольку $\delta_n \rightarrow 0$, то при любом δ такой номер $n(\delta)$ существует (при $\delta \geq \delta_0$ будем считать $n(\delta) \equiv 0$). Обоснование сформулированного правила останова дает следующая

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, а приближения $\{A_\delta\}$ удовлетворяют условию (35). Пусть точки $z_0, \dots, z_{n(\delta)}$ получены методом (36), где номер $n(\delta)$ определен правилом (37). Тогда точка $z_\delta = z_{n(\delta)}$ такова, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|z_\delta - z_*\|_{L^2} = 0, \quad (38)$$

причем сходимость в (38) равномерна относительно выбора A_δ из (35).

Доказательство. Из (35) и (37) следует, что

$$\|A_\delta z - Az\|_{L^2} \leq \delta_n(1 + \|z\|_{L^2}) \quad \forall z \in Z = U_1 \times U_2, \quad n = 0, 1, \dots, n(\delta), \quad (39)$$

так что оператор $A_n = A_\delta$ удовлетворяет условию (11) при всех $n = 0, 1, \dots, n(\delta)$. Согласно правилу остановки номер $n(\delta)$ является наибольшим номером, для которого выполнено условие (37). Отсюда и из $\delta_n \rightarrow 0$ следует, что $n(\delta) \rightarrow +\infty$ при $\delta \rightarrow 0$. Это значит, что при всех малых $\delta > 0$ номер $n(\delta)$ в (39) можно сделать как угодно большим. Согласно теореме 1 при выполнении всех ее условий, а также условия (11), последовательность $\{z_n\}$, получаемая методом (12), сходится к нормальному седлу z_* функционала $L(u, v)$ в (1)–(5), т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$\|z_n - z_*\|_{L^2} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon), \quad (40)$$

причем номер $N = N(\varepsilon)$ не зависит от выбора реализаций A_n из (11). Поскольку $\lim_{\delta \rightarrow 0} n(\delta) = +\infty$, то существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $n(\delta) > N(\varepsilon)$ при всех δ , $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$. Это значит, что для всех таких δ метод (36), (37) порождает точки $z_0, \dots, z_{n(\delta)}$, которые могут быть получены также методом (12) с реализациями $A_n = A_\delta$, $n = 0, 1, \dots, n(\delta)$, удовлетворяющими в силу (39) условию (11). Поскольку $n(\delta) \geq N(\varepsilon)$, то можно воспользоваться неравенством (40) при $n = n(\delta)$ и утверждать, что

$$\|z_{n(\delta)} - z_*\|_{L^2} \leq \varepsilon$$

при всех δ таких, что $0 < \delta < \delta(\varepsilon)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|z_{n(\delta)} - z_*\|_{L^2} = 0.$$

Приняв $z(\delta) = z_{n(\delta)}$, приходим к равенству (38). Теорема 2 доказана.

Тем самым определен оператор R_δ , который каждому набору входных данных A_δ из (35) ставит в соответствие точку $z(\delta) = z_{n(\delta)}$, определяемую методом (36), (37). Равенство (38) означает, что такой оператор R_δ является регуляризирующим [3; 5; 6]. Подчеркнем, что в определении оператора R_δ параметры $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}$ из (13) и начальная точка z_0 предполагаются фиксированными и не меняются при изменении $\delta > 0$. В качестве последовательностей таких параметров из (13) можно, например, взять

$$\alpha_n = (n+1)^{-\alpha}, \quad \beta_n = \frac{1}{2L}, \quad \delta_n = (n+1)^{-\gamma}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где α, γ — постоянные: $0 < \alpha < 1$, $\alpha < \gamma$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Обен Ж.П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 510 с.
2. **Васильев Ф.П., Хорошилова Е.В., Антипин А.С.** Экстраградиентный метод поиска седловой точки в задаче оптимального управления // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2010. № 3. С. 18–22. (Вычисл. математика и кибернетика.)
3. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
4. **Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.

5. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 524 с.
6. **Антипин А.С., Васильев Ф.П., Шпирко С.В.** Регуляризованный экстраградиентный метод решения задач равновесного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 10. С. 1451–1458.

Васильев Федор Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: tev@srcc.msu.ru

Поступила 6.05.2010

Хорошилова Елена Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: khorelena@gmail.com

Антипин Анатолий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. науч. сотрудник
Вычислительный Центр РАН
e-mail: asantip@yandex.ru

УДК 519.724

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОДИРОВАНИЯ В ТОЧЕЧНОМ КАНАЛЕ СВЯЗИ С ЛОКОМОТИВОМ

А. Л. Гаврилюк

В работе проведен расчет вероятностей событий “опасный отказ” и “пропуск метки” в результате ошибок при передаче информации в точечном канале связи с локомотивом (ТКС-Л) системы автоматической локомотивной сигнализации с использованием радиоканала (АЛСР) (в предположении отсутствия аппаратных ошибок).

Ключевые слова: помехоустойчивое кодирование, обнаружение и исправление ошибок, код Боуза — Чоудхури — Хоквингхема (БЧХ), контрольная сумма CRC, железнодорожная автоматика.

A. L. Gavriluk. Investigation of parameters of coding in a point-locomotive communication channel.

The paper is devoted to calculating the probabilities of the events “dangerous failure” and “missing a marker (false negative)” resulting from data transmission errors in a point-locomotive communication channel of a radio-based automatic train signalling system (under the assumption of absence of hardware errors).

Keywords: error-correcting codes, error detection and correction, Bose-Chaudhuri-Hocquenghem (BCH) code, cyclic redundancy check (CRC), automatic train signalling (ALSN).

Введение

В статье отражены основные результаты одноименной научно-исследовательской работы, выполненной в 2008 г. по инициативе компании ЗАО “НПЦ Промэлектроника”.

Разрабатываемая в этой компании система автоматической локомотивной сигнализации с использованием радиоканала (АЛСР) предназначена для передачи на локомотивы информации о занятости ближайших участков пути (с учетом состояния стрелок и светофоров). Физическим каналом передачи данных в АЛСР является радиоканал.

Составной частью АЛСР является так называемый точечный канал связи с локомотивами (ТКС-Л), который включает в себя:

- напольное оборудование (путевые приемопередатчики или радиочастотные метки, передающие и/или хранящие информацию для проходящих над ними локомотивов);
- оборудование на борту локомотива (включающее в себя устройство считывания путевых приемопередатчиков, УСПП).

Напольное оборудование располагается в начале каждого участка пути и имеет уникальный номер (радиочастотной метки) в системе АЛСР, обеспечивая тем самым кодирование каждого участка пути. Номер метки передается на локомотив, а собственно информация о состоянии участков пути, следующих за данным, поступает на локомотив в соответствии с меткой из комбинированной системы позиционирования локомотивов на железнодорожных путях (КСПЛ) через непрерывный цифровой радиоканал. Этот радиоканал создается вдоль всей полосы отвода железной дороги и обеспечивает передачу кодированных данных КСПЛ.

При разработке системы передачи информации по открытым каналам связи (в частности, радиоканалу) необходимо учитывать влияние различного рода помех на приемное устройство. Для предотвращения искажения или потери информации в ТКС-Л обмен данными между локомотивом и напольным оборудованием ведется с применением кодов, обнаруживающих и исправляющих ошибки.

При этом разработчик сталкивается с проблемой обоснования выбора методов кодирования и их параметров. В рассматриваемой задаче требование обеспечения условий безопасности

движения является отправной точкой для ее решения. В части системы АЛСР, включающей ТКС-Л, нарушение условий безопасности движения (при отсутствии аппаратных ошибок) может происходить в результате реализации следующих событий:

(1) Событие “опасный отказ” — последовательность событий при обработке информации в декодере УСПП, в результате которой на выходе декодера возникает номер радиочастотной метки системы АЛСР, отличный от передаваемого номера, либо возникновение такого номера в результате “ложного приема”, т. е. на участке пути, вообще не содержащем радиочастотных меток.

(2) Событие “пропуск метки” — последовательность событий при обработке информации в декодере УСПП, в результате которой происходит потеря информации, передаваемой от радиочастотной метки (при прохождении локомотивом отрезка пути, содержащего метку).

Согласно принятым требованиям безопасности железнодорожного движения вероятность события “опасный отказ” должна составлять не более 10^{-14} (в каждый момент работы АЛСР).

Цель работы заключается в оценке вероятностей событий “опасный отказ” и “пропуск метки” в системе ТКС-Л (в предположении корректности работы оборудования) и в обосновании выбора параметров кодирования передаваемой информации для минимизации вероятности “пропуска метки” при вероятности “опасного отказа”, не превышающей 10^{-14} .

Статья организована следующим образом. В разд. 1 описаны методы кодирования информации (предварительно выбранные на этапе проектирования системы) и работа декодера ТКС-Л, приведены диаграммы событий, происходящих при работе декодера и приводящих к опасному отказу или пропуску метки. В разд. 2 исследуется обнаружитель кадра — блок логической обработки последовательности принимаемых бит для принятия решения о наличии в принимаемом радиосигнале кадра с данными от радиочастотной метки. В разд. 3 и 4 определена вероятность ошибки на выходе БЧХ-декодера (декодера кода, исправляющего ошибки) и CRC-декодера (декодера кода, обнаруживающего ошибки) соответственно. Наконец, в разд. 5 на основании полученных результатов определены вероятности событий “опасный отказ” и “пропуск метки”.

В выполненной научно-исследовательской работе результаты аналитических вычислений были подтверждены имитационным моделированием в среде MATLAB. В дополнительных материалах [1], размещенных на сайте журнала, приведены листинги некоторых сценариев моделирования и вспомогательных подпрограмм.

1. Модель декодера ТКС-Л

1.1. Кодирование в канале

Передаваемая на локомотив информация (номер метки и некоторая дополнительная информация) кодируется двоичными символами (битами 0 и 1) и представляет собой информационное слово длиной $k_{CRC} = 48$ бит. На основе этого слова формируется кадр, который с определенной периодичностью передается по физическому каналу связи. Проходя над радиочастотной меткой, локомотив может принять несколько кадров.

Кадр формируется следующим образом. К информационному слову добавляются $r = 16$ бит его контрольной суммы, вычисленной по методу CRC-16 СИТТ. Полученные $n_{CRC} = 48 + 16 = 64$ бита используются как информационные символы при вычислении кодового слова БЧХ-кода с параметрами $(n_{BCH}, k_{BCH}) = (127, 64)$. К полученному кодовому слову длиной 127 бит добавляются $N_M = 31$ бит маркера начала кадра (M-последовательность) и $N_S = 31$ бит преамбулы символьной синхронизации (меандр 1010...). Сформированная последовательность $L = 189$ бит называется коротким кадром (189 бит, см. рис. 2.1.). Рассматривается также вариант формирования длинных кадров (316 бит), в которых кодовое слово БЧХ передается два раза подряд.

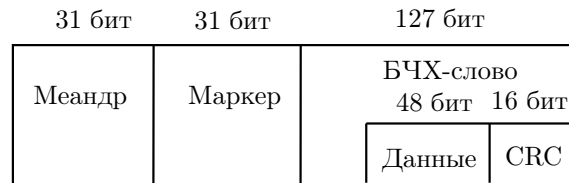
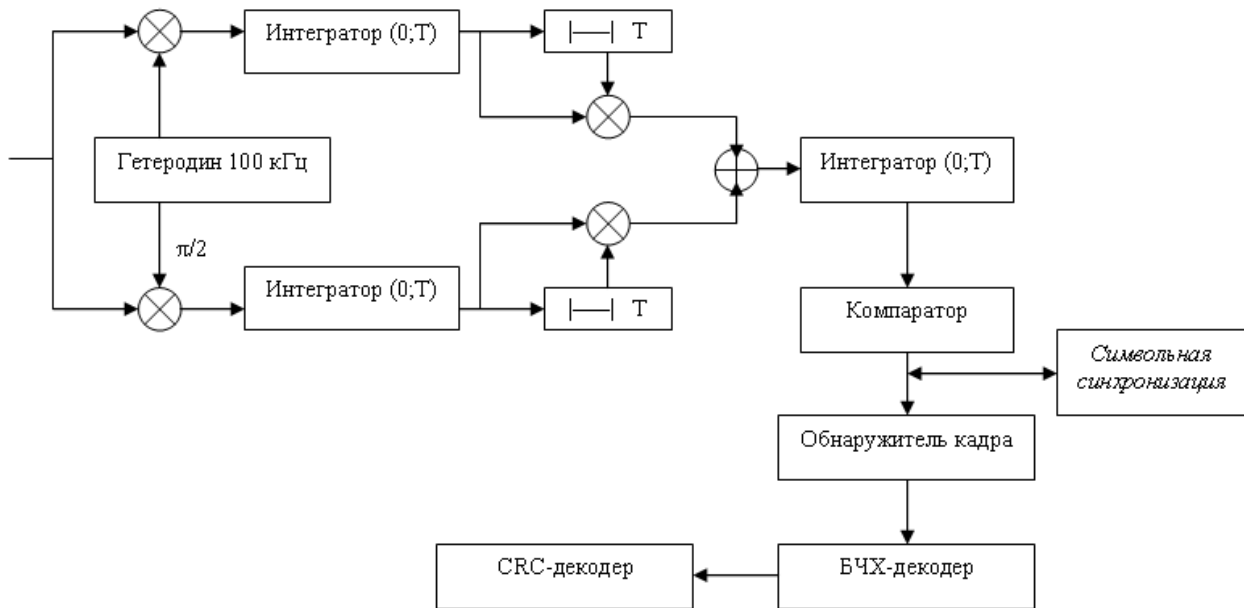


Рис 2.1. Структура короткого кадра.

Рис 2.2. Структура декодера УСПП (T — длительность символа). На входе: цифровой ОФМ-сигнал (100 кГц, кодирование символа — Манчестер II, частота дискретизации — 800 кГц, 12 бит).

Далее, последовательность бит кадра манипулирует фазой по методу ОФМ (DPSK) [4] гармонического сигнала частотой 100 кГц. Для манипуляция фазой биты кодируются кодом Манчестер II, скорость передачи — 100 кБит/с, длительность передачи одного бита информации — 10 мкс. Фазоманипулированный сигнал в свою очередь модулирует по амплитуде несущую с частотой 13.6 МГц, передаваемую по открытому радиоканалу между проходящим локомотивом и радиочастотной меткой.

Приемник в составе бортового оборудования локомотива (декодер УСПП) осуществляет обратные преобразования для извлечения информации из принимаемого радиосигнала. Принимаемый радиосигнал демодулируется по амплитуде с помощью синхронного детектора. Детектированное модулирующее колебание проходит через полосовой фильтр и аналогово-цифровой преобразователь с разрядностью 12 бит и частотой дискретизации 800 кГц. Таким образом, на один период фазоманипулированного гармонического сигнала с частотой 100 кГц (и на период передачи одного символа информации) приходится 8 отсчетов цифрового сигнала. На рис. 2.2 изображена структура части декодера УСПП, обрабатывающая цифровой сигнал. Программа обработки цифрового сигнала осуществляет:

- снятие ОФМ-манипуляции и преобразование снятого манипулирующего видеосигнала из кода Манчестер II в NRZ-код;
- символьную синхронизацию по преамбуле символьной синхронизации и разделение последовательности отсчетов цифрового видеосигнала на отдельные символы (биты) кадра;
- логическую обработку последовательности принимаемых бит информации: обнаружение

кадра (по маркеру начала кадра) и в случае обнаружения кадра обнаружение и исправление последующих бит, принятых с ошибками (декодирование кодового слова БЧХ и проверка контрольной суммы CRC-16).

Ошибки возникают из-за приема радиосигнала с шумами или помехами различной природы, в результате чего возможно ошибочное детектирование символов или сбой в работе системы символьной синхронизации (границы бит информации в видеосигнале разделяются неверно). Мы ограничимся рассмотрением только ошибок типа трансформации символов (вместо 1 принимается 0 и наоборот). Кроме того, все рассуждения ведутся в предположении отсутствия аппаратных ошибок ТКС-Л, т. е. ошибки при приеме бит информации обусловлены исключительно действием шумов и помех на входе приемника.

Таким образом, мы будем считать, что последовательность бит кадра передается по двохному симметричному каналу с некоторой переходной вероятностью (вероятность ошибки в одном символе) $p_{\text{ВЕР}}$ (bit error rate).

Результаты исследований помеховой обстановки в радиотракте ТКС-Л, проведенных специалистами ЗАО “НПЦ Промэлектроника” на участке Свердловской железной дороги (“ст. Свердловск-Пасс. — ст. Перегон — ст. Решеты”), позволяют принять допущение о том, что моделью помехи (шума) на входе декодера УСПП является белый гауссов шум. В действительности статистический анализ замеренного шумового сигнала показывает, что шум имеет узкую автокорреляционную функцию (т. е. достаточно равномерную в широком диапазоне частот спектральную плотность мощности) и гистограмму значений, близкую к нормальному закону распределения. Это позволяет считать ошибки в отдельных символах независимыми и возникающими с одинаковой вероятностью $p_{\text{ВЕР}}$. Далее для краткости данную вероятность будем обозначать через p , положим также $q = 1 - p$.

Заметим, что в такой модели шума не учтены возможные импульсные (мощные кратковременные) помехи, которые могут порождать пакеты ошибок. Рассмотрение задачи с такой моделью шума выходит за рамки настоящей работы.

1.2. Диаграмма событий

Рассмотрим подробнее работу декодера УСПП, начиная с обнаружителя кадра, и определим пути возникновения событий “опасный отказ” \mathcal{D} и “пропуск метки” \mathcal{L} .

Пусть t — произвольный момент времени (здесь и далее под моментами времени понимается время, дискретизированное с частотой аналого-цифрового преобразования сигнала, т. е. 800 кГц). В каждый момент времени декодер может находиться в одном из двух своих состояний: \mathcal{S} — состояние поиска (ожидания) кадра в эфире, \mathcal{R} — состояние чтения и обработки кадра. Обозначим через $\mathcal{S}(t)$ и $\mathcal{R}(t)$ события, состоящие в том, что в момент времени t декодер находится в соответствующем состоянии.

Предположим, что декодер находится в состоянии \mathcal{S} . В этом состоянии обнаружитель кадров, анализируя (подробнее см. разд. 2) последние N_M бит, принятые к моменту t , принимает решение о наличии или отсутствии кадра на входе приемника. В первом случае в следующий момент времени $t + 1$ декодер переводится в состояние \mathcal{R} и начинает прием и обработку бит информации кадра. Во втором случае декодер остается в состоянии \mathcal{S} .

Допустим, что в момент времени t был принят последний бит маркера начала кадра (обозначим это событие $\mathcal{M}(t)$). В случае правильного приема большей части бит маркера декодер должен перейти в состояние \mathcal{R} и начать чтение бит, соответствующих кодовому слову БЧХ. В противном случае из-за ошибок при приеме декодер остается в состоянии \mathcal{S} и не принимает передаваемую в кадре информацию. Обозначим это событие через \mathcal{L}_M — потеря кадра на этапе обнаружения. Очевидно, событие \mathcal{L}_M влечет событие \mathcal{L} .

Далее, принимаемые (в состоянии \mathcal{R}) $n_{\text{ВСН}}$ бит кодового слова БЧХ анализируются БЧХ-декодером:

▷ Если в процессе их приема были допущены ошибки и количество допущенных ошибок не превышает исправляющую способность кода (см. разд. 3), то после их исправления $k_{\text{ВСН}}$ информационных символов кодового слова анализируются CRC-декодером, и далее k_{CRC} бит информации от радиочастотной метки передаются бортовому оборудованию локомотива. Таким образом, эта последовательность событий отвечает успешному приему кадра; обозначим ее через \mathcal{C} .

▷ Если в процессе приема бит кодового слова БЧХ было *допущено* ошибок больше, чем исправляющая способность кода, то возможны следующие два случая:

- (1) В зависимости от конфигурации ошибок в кодовом слове, БЧХ-декодер может их обнаружить и отказаться от декодирования (если число *обнаруженных* ошибок превышает исправляющую способность). В этом случае декодер возвращается в состояние \mathcal{S} и не принимает передаваемую в кадре информацию. Обозначим это событие через $\mathcal{L}_{\text{ВСН}}$ — отказ от кадра на этапе исправления ошибок. Событие $\mathcal{L}_{\text{ВСН}}$ влечет событие \mathcal{L} .
- (2) В оставшемся случае декодер *обнаруживает* число ошибок, не превышающее исправляющую способность, и исправляет их. В результате на выходе БЧХ-декодера возникает другое кодовое слово БЧХ, т. е. происходит *трансформация*; кодового слова, обозначим это событие $\mathcal{E}_{\text{ВСН}}$. Далее, из трансформированного кодового слова извлекаются $k_{\text{ВСН}}$ информационных символов и анализируются CRC-декодером:
 - ◊ Если выделенные из них r проверочных бит не совпадают с контрольной суммой остальных k_{CRC} бит (подробнее см. разд. 4), то декодер возвращается в состояние \mathcal{S} и не передает информацию бортовому оборудованию. Обозначим это событие через \mathcal{L}_{CRC} — отказ от кадра на этапе обнаружения ошибок (проверки контрольной суммы). Очевидно, событие \mathcal{L}_{CRC} влечет событие \mathcal{L} .
 - ◊ В худшем случае при определенных искажениях кодового слова r проверочных бит совпадают с контрольной суммой k_{CRC} бит; обозначим это событие через \mathcal{E}_{CRC} . В этом случае декодер передает искаженную информацию бортовому оборудованию, и событие \mathcal{E}_{CRC} влечет событие \mathcal{D} .

Допустим теперь, что в момент времени t декодер находится в состоянии \mathcal{S} и $\neg\mathcal{M}(t)$. В большинстве случаев декодер в следующий момент времени должен оставаться в состоянии \mathcal{S} . Однако при определенных реализациях принимаемых случайных бит обнаружитель принимает решение о наличии кадра и переводит декодер в состояние \mathcal{R} . Обозначим это событие через $\mathcal{F}_{\text{М}}$ — ложное обнаружение кадра.

В этом случае следующие принимаемые (в состоянии \mathcal{R}) $n_{\text{ВСН}}$ бит воспринимаются и анализируются декодером как кодовое слово БЧХ:

▷ Если количество обнаруженных ошибок превышает исправляющую способность кода, происходит отказ от декодирования, и декодер возвращается в состояние \mathcal{S} .

▷ Некоторые реализации принимаемых случайных бит БЧХ-декодер принимает как кодовые слова, принятые с числом ошибок, не превышающим исправляющую способность кода. В этом случае БЧХ-декодер исправляет их, и на его выходе возникает некоторое ложное кодовое слово; обозначим это событие $\mathcal{F}_{\text{ВСН}}$. Далее, из этого кодового слова извлекаются $k_{\text{ВСН}}$ информационных символов и анализируются CRC-декодером:

- ◊ Если выделенные из них r проверочных бит не совпадают с контрольной суммой остальных k_{CRC} бит, то декодер возвращается в состояние \mathcal{S} .
- ◊ В худшем случае для некоторых ложных кодовых слов r проверочных бит совпадают с контрольной суммой k_{CRC} бит; обозначим это событие через \mathcal{F}_{CRC} . В этом случае декодер передает ложную информацию бортовому оборудованию, и событие \mathcal{F}_{CRC} влечет событие \mathcal{D} .

Описанный процесс работы декодера УСПП позволяет изобразить диаграмму событий (в зависимости от наличия или отсутствия кадра на входе приемника), реализация которых может приводить к событиям “опасный отказ” \mathcal{D} и “пропуск метки” \mathcal{L} , см. рис. 2.3 и 2.4. В следующих разделах проведен расчет вероятностей событий, указанных на диаграммах, как функций от p .

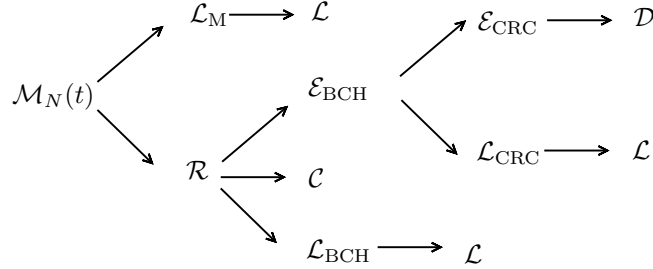


Рис 2.3. Диаграмма событий при наличии кадра на входе.

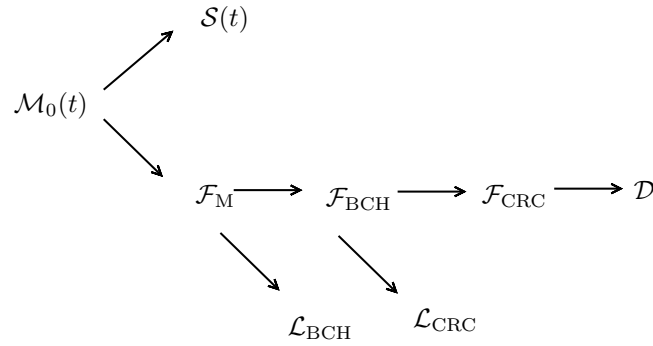


Рис 2.4. Диаграмма событий при отсутствии кадра на входе.

Анализ демодулятора ОФМ-сигнала и системы символьной синхронизации, направленный на обоснование выбора длины преамбулы символьной синхронизации и определение зависимости $p_{\text{век}}$ от отношения сигнал/шум на входе приемника, является отдельной задачей и не рассматривается в данной статье (см. [1, разд. 1]).

2. Обнаружение кадра

Маркером начала кадра является М-последовательность (линейная рекуррентная последовательность) [2, гл. 14] $\bar{m} = m_1, \dots, m_{N_M}$ длины $N_M = 31$ бит с начальным словом 11111:

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0,$$

где для определенности символы пронумерованы в порядке их передачи во времени.

Блок поиска маркера кадра состоит из коррелятора, который в каждый момент времени t вычисляет корреляцию М-последовательности и последних N_M бит (принятых к моменту t) $\bar{b} = b_{t-N_M+1}, \dots, b_{t-2}, b_{t-1}, b_t$ (в кодировке ± 1)

$$\text{corr}(t) = \sum_{i=1}^{N_M} (2b_{t-N_M+i} - 1)(2m_i - 1)$$

и решающего устройства, которое при выполнении неравенства $\text{corr}(t) \geq h$ (где h — порог обнаружения) принимает решение о наличии кадра на входе декодера УСПП и переводит

его в состояние приема/обработки кадра. Через $\mathcal{M}_i(t)$ обозначим событие, заключающееся в том, что в момент времени t обработан i -й бит маркера начала кадра. Напомним, через $\mathcal{M}(t)$ обозначено событие, состоящее в том, что в момент времени t принят последний бит маркера, т. е. $\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_{N_M}(t)$. Наконец, через $\mathcal{M}_0(t)$ обозначим событие $\neg\mathcal{M}_1(t) \wedge \dots \wedge \neg\mathcal{M}_{N_M}(t)$.

Порог обнаружения h является параметром, определяющим вероятности событий \mathcal{L}_M и \mathcal{F}_M , и к выбору его величины предъявляются противоречивые требования. Естественно, что после безошибочного приема последовательности бит, отвечающих маркеру, значение $\text{corr}(t)$ на выходе коррелятора принимает максимальное значение, равное N_M . Но в общем случае принимаемые данные могут содержать ошибки, и тогда максимальное значение $\text{corr}(t)$ не достигается, поэтому обычно порог h выбирают меньше N_M . С другой стороны, чем меньше значение h , тем больше вероятность того, что для случайной последовательности бит будет выполнено неравенство $\text{corr}(t) \geq h$ (т. е. произойдет событие \mathcal{F}_M).

События и состояния декодера после обработки очередного бита в момент t описаны в следующей таблице.

Состояние	$\text{corr}(t) \geq h$	$\mathcal{M}(t)$	Новое состояние, событие
$\mathcal{S}(t)$	FALSE	FALSE	$\mathcal{S}(t+1)$
$\mathcal{S}(t)$	FALSE	TRUE	$\mathcal{S}(t+1), \mathcal{L}_M$
$\mathcal{S}(t)$	TRUE	FALSE	$\mathcal{R}(t+1), \mathcal{F}_M$
$\mathcal{S}(t)$	TRUE	TRUE	$\mathcal{R}(t+1)$
$\mathcal{R}(t)$	—	TRUE	\mathcal{L}_M

Заметим, что последняя строчка таблицы отражает ситуацию, в которой событие \mathcal{F}_M произошло незадолго до события $\mathcal{M}(t)$, т. е. кадр для декодера “начался” раньше. В этом случае мы можем пренебречь рассмотрением возможности, что декодер может выйти из состояния \mathcal{R} до окончания передачи маркера (т. е. до события $\mathcal{M}(t)$), принять оставшуюся часть маркера и по ней обнаружить кадр, но обратить внимание на ситуацию, когда событие \mathcal{F}_M происходит при условии $\mathcal{M}_i(t)$, $1 \leq i < N_M$, т. е. декодер переходит в состояние \mathcal{R} после приема i -го бита маркера. В этом случае кадр для декодера состоит из оставшихся $N_M - i$ бит маркера и первых $L - N_M + i - N_S$ бит настоящего кадра. Важность этой ситуации объясняется в следующем разделе, посвященном БЧХ-декодеру, и связана с тем, что код БЧХ является циклическим. Здесь мы только обозначим это событие $\mathcal{F}_{M,i}$ и определим его вероятность.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

$$(1) \Pr(\mathcal{F}_M | \mathcal{M}_0(t)) = \sum_{i=0}^{(N_M-h)/2} \binom{N_M}{i} 2^{-N_M};$$

$$(2) \Pr(\text{corr}(t) < h | \mathcal{M}(t)) = 1 - \sum_{i=0}^{(N_M-h)/2} \binom{N_M}{i} p^i q^{N_M-i}.$$

Доказательство. Для произвольной последовательности бит \bar{b} и M -последовательности \bar{m} определим вектор ошибок $\bar{e} = \bar{b} - \bar{m} = e_1, \dots, e_{N_M}$, вычитая символы m_i из b_{t-N_M+i} как целые числа (а не двоичные). Положим $w(\bar{e}) = |\{e_i | e_i \neq 0\}|$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{corr}(t) &= \sum_{i=1}^{N_M} (2b_{t-N_M+i} - 1)(2m_i - 1) = \sum_{i=1}^{N_M} (2(m_i + e_i) - 1)(2m_i - 1) \\ &= N_M + \sum_{i=1}^{N_M} 2e_i(2m_i - 1) = N_M - 2w(\bar{e}). \end{aligned}$$

Докажем утверждение (1). Поскольку маркер состоит из равновероятных символов и является шумоподобным сигналом с узкой автокорреляционной функцией [2, гл. 14], то можно

считать, что случайная (в силу условия $\mathcal{M}_0(t)$) последовательность бит $\bar{b} = b_{t-N_M+1}, \dots, b_{t-2}, b_{t-1}, b_t$, вызвавшая событие \mathcal{F}_M , получена как реализация некоррелированного случайного двоичного процесса с равновероятными символами. Таким образом,

$$\Pr(\mathcal{F}_M | \mathcal{M}_0(t)) = \Pr\left(w(\bar{e}) \leq \frac{N_M - h}{2}\right) = \sum_{i=0}^{(N_M-h)/2} \binom{N_M}{i} 2^{-N_M}.$$

Аналогично определяется вероятность необнаружения кадра в результате искажения маркера независимыми ошибками, появляющимися с вероятностью p :

$$\Pr(\text{corr}(t) < h | \mathcal{M}(t)) = 1 - \Pr\left(w(\bar{e}) \leq \frac{N_M - h}{2}\right) = 1 - \sum_{i=0}^{(N_M-h)/2} \binom{N_M}{i} p^i q^{N_M-i}.$$

Лемма доказана. \square

Лемма 2. $\Pr(\mathcal{F}_{M,i}) \leq p^{(h-1)/2} q^{N_M-(h-1)/2}$.

Доказательство. Обозначим через $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_{N_S} = 1010\dots 1$ последовательность символов преамбулы символьной синхронизации, а через $s_{N_S+1}, \dots, s_{N_S+N_M}$ — последовательность символов следующей за ней M -последовательности. Событие $\mathcal{F}_{M,i}$ означает, что при приеме последовательности $\bar{s} = s_1, s_2, \dots, s_{N_S+N_M}$ в сумме с вектором ошибок $e_1, e_2, \dots, e_{N_S+N_M} \in \{0, \pm 1\}$ для некоторого индекса $1 \leq i < N_M$ имело место неравенство

$$\sum_{j=1}^{N_M} (2(s_{j+i} + e_{j+i}) - 1)(2m_j - 1) \geq h$$

Значение суммы в левой части последнего неравенства есть не что иное, как значение взаимокорреляционной функции последовательностей $\bar{s} + \bar{e}$ и \bar{m} при смещении i . Несложно подсчитать, что при $\bar{e} = \bar{0}$ эта сумма не превышает 11. Каждый ненулевой символ в векторе \bar{e} увеличивает модуль суммы не более чем на 2. Поэтому при независимых равновероятных ошибках вероятность выполнения последнего неравенства не больше, чем вероятность возникновения фиксированной комбинации из $(h-1)/2$ ошибок, увеличивающих максимально возможное значение суммы до величины порога обнаружения h , т. е.

$$\Pr(\mathcal{F}_{M,i}) \leq p^{(h-1)/2} q^{N_M-(h-1)/2}.$$

Лемма доказана. \square

Лемма 3.

$$\Pr(\mathcal{L}_M) \leq p_F + (1 - p_F) \left(\sum_{i=1}^{N_M-1} \Pr(\mathcal{F}_{M,i}) (1 - \Pr(\mathcal{F}_{M,i}))^{i-1} + \Pr(\text{corr}(t) < h | \mathcal{M}(t)) \right. \\ \left. \times (1 - \Pr(\mathcal{F}_{M,i}))^{N_M-1} \right).$$

Доказательство. Рассмотрим детально процесс приема кадра. К моменту начала передачи первого бита маркера декодер может с некоторой вероятностью p_F находиться в состоянии \mathcal{R} и соответственно с вероятностью $1 - p_F$ — в состоянии \mathcal{S} . Оценим вероятность p_F . Ранее мы рассчитали $\Pr(\mathcal{F}_M | \mathcal{M}_0(t))$ — вероятность события \mathcal{F}_M в момент времени t при условии $\mathcal{M}_0(t)$. К моменту начала передачи первого бита маркера декодер может находиться в состоянии \mathcal{R} , если \mathcal{F}_M произошло при приеме одного из предыдущих L случайных бит, где L — длина кадра. Поэтому можно считать, что $p_F = L \cdot \Pr(\mathcal{F}_M | \mathcal{M}_0(t))$.

По лемме 2 после приема очередного i -го бита маркера декодер может с вероятностью не более, чем $\Pr(\mathcal{F}_{M,i})$ перейти в режим \mathcal{R} и с вероятностью не менее, чем $1 - \Pr(\mathcal{F}_{M,i})$ продолжить прием бит маркера. Тогда к моменту приема последнего бита маркера декодер с вероятностью не меньше, чем $(1 - p_F)(1 - \Pr(\mathcal{F}_{M,i}))^{N_M-1}$ находится в состоянии \mathcal{S} , и в этом случае с вероятностью $(1 - \Pr(\text{corr}(t) < h \mid \mathcal{M}(t)))$ кадр будет обнаружен. Таким образом, вероятность правильного приема маркера

$$\Pr(\mathcal{R}(t+1) \mid \mathcal{S}(t) \wedge \mathcal{M}(t)) \geq (1 - p_F)(1 - \Pr(\mathcal{F}_{M,i}))^{N_M-1}(1 - \Pr(\text{corr}(t) < h \mid \mathcal{M}(t))).$$

Соответственно вероятность потери кадра на этапе обнаружения

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{L}_M) \leq p_F + (1 - p_F) & \left(\sum_{i=1}^{N_M-1} \Pr(\mathcal{F}_{M,i})(1 - \Pr(\mathcal{F}_{M,i}))^{i-1} + \Pr(\text{corr}(t) < h \mid \mathcal{M}(t)) \right) \\ & \times (1 - \Pr(\mathcal{F}_{M,i}))^{N_M-1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

3. Исправление ошибок

Для вектора $\bar{x} \in \mathbf{F}_2^n$ через $w(\bar{x})$ обозначим его вес, т. е. $w(\bar{x}) = |\{x_i \mid x_i \neq 0\}| = d(\bar{x}, \bar{0})$, где $d(\cdot, \cdot)$ — расстояние Хэмминга. Для линейного кода $C \subset \mathbf{F}_2^n$ положим $n_j = |\{\bar{x} \in C \mid w(\bar{x}) = j\}|$, $j = 0, \dots, n$. Множество $\{n_j\}_{j=0}^n$ называется весовым спектром кода C .

Напомним, что используемый БЧХ-код C имеет следующие параметры¹: длина кодового слова $n = 127$, количество информационных символов $k = 64$, минимальное кодовое расстояние $d = 21$, и, кроме этого, является циклическим [3]. Все кодовые слова считаются равновероятными.

При декодировании принятого слова \hat{x} решением БЧХ-декодера является кодовое слово $\bar{x} \in C$, в шар радиуса $\rho = (d-1)/2$ (исправляющая способность кода) от которого попадает принятое слово, т. е. $d(\hat{x}, \bar{x}) \leq \rho$. Декодер выносит решение о невозможности исправить слово, если число обнаруженных ошибок превышает величину ρ (алгоритм декодирования с ограниченным кодовым расстоянием). Если же при приеме произошло более ρ ошибок, то слово \hat{x} может попасть в шар радиуса ρ другого кодового слова $\bar{x}' \in C$, и в этом случае возможна трансформация кодового слова, т. е. событие $\mathcal{E}_{\text{ВСН}}$.

Лемма 4. *Верны следующие утверждения:*

$$(1) \quad \Pr(\mathcal{F}_{\text{ВСН}} \mid \mathcal{M}_0(t)) = 2^k \sum_{i=0}^{\rho} \binom{n}{i} / 2^n;$$

$$(2) \quad \Pr(\mathcal{F}_{\text{ВСН}} \mid \mathcal{F}_{M,i}) = \Pr(\mathcal{E}_{\text{ВСН}}) \left(\sum_{\sigma=\rho+1}^{N_M-i} \binom{N_M-i}{\sigma} 2^{-(N_M-i)} + \sum_{\sigma=0}^{\rho} \binom{N_M-i}{\sigma} 2^{-(N_M-i)} \right) \\ \times \sum_{j=\rho-\sigma+1}^{n-N_M+i} \binom{n-N_M+i}{j} p^j q^{n-N_M+i-j} + \sum_{\sigma=0}^{\rho} \binom{N_M-i}{\sigma} 2^{-(N_M-i)} \sum_{j=0}^{\rho-\sigma} \binom{n-N_M+i}{j} p^j q^{n-N_M+i-j}.$$

Доказательство. Пусть событие $\mathcal{F}_{\text{ВСН}}$ происходит при условии $\mathcal{M}_0(t)$. Так как символы маркера начала кадра распределены практически равновероятно (16 бит, равных 1,

¹Для краткости параметры указываются без индекса ВСН (ср. с разд. 1).

15 бит, равных 0), то можно допустить, что символы последовательности, вызвавшей событие \mathcal{F}_M , и все последующие за ней символы также распределены равномерно и не коррелированы.

Событие $\mathcal{F}_{\text{ВСН}}$ происходит, если принятая случайная последовательность символов \bar{y} попадает в шар радиуса ρ с центром в некотором кодовом слове. Всего имеется точно $|C| = 2^k$ различных кодовых слов. Для кодового слова $\bar{x} \in C$ шар $B_\rho(\bar{x})$ радиуса ρ с центром в \bar{x} содержит все слова, отличающиеся от \bar{x} в i , $i \leq \rho$, координатах, поэтому $|B_\rho(\bar{x})| = \sum_{i=0}^{\rho} \binom{n}{i}$, и вероятность события $\bar{y} \in B_\rho(\bar{x})$ равна отношению числа исправляемых слов длины n к общему числу двоичных слов длины n :

$$\Pr(\mathcal{F}_{\text{ВСН}} | \mathcal{M}_0(t)) = \sum_{\bar{x} \in C} |B_\rho(\bar{x})|/2^n = 2^k \sum_{i=0}^{\rho} \binom{n}{i} / 2^n.$$

Утверждение (1) доказано.

В утверждении (2) отдельно рассмотрена вероятность события $\mathcal{F}_{\text{ВСН}}$ при условии события $\mathcal{F}_{M,i}$. Необходимость отдельного рассмотрения этого случая вызвана тем, что БЧХ-код является циклическим, т. е. циклически сдвинутая последовательность символов кодового слова снова является кодовым словом, поэтому вероятность события $\mathcal{F}_{\text{ВСН}}$ нельзя рассчитывать в предположении случайности и независимости значений бит (как в доказательстве утверждения (1)).

Напомним, что в результате события $\mathcal{F}_{M,i}$, $1 \leq i < N_M$, декодер переходит в состояние \mathcal{R} чтения кадра после приема i -го бита маркера. В этом случае принятое слово \bar{y} для декодера состоит из оставшихся $N_M - i$ бит маркера $y_1, \dots, y_{N_M-i} = m_{i+1}, \dots, m_{N_M}$ и первых $n - N_M + i$ бит кодового слова из настоящего кадра $y_{N_M-i+1}, \dots, y_n = x_1, \dots, x_{n-N_M+i}$. Обозначим $\bar{x}' = x_{n-N_M+i+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{n-N_M+i}$ — циклически сдвинутое на $N_M - i$ позиций (по отношению к \bar{x}) кодовое слово БЧХ.

Слово \bar{y} можно рассматривать как слово \bar{x}' , принятое с ошибками. Естественно считать, что $\Pr(y_j = x'_j) = 1/2$ при $j \leq N_M - i$, т. е. вероятность совпадения любой пары из первых $N_M - i$ символов в этих словах равна $1/2$, и совпадение любой пары символов не влияет на вероятность совпадения любой другой пары символов. Пусть σ — число *несовпадающих* пар символов.

Если $\sigma > \rho$, то вероятность того, что декодер исправит слово \bar{y} (в слово \bar{x}' или какое-либо другое, отличное от \bar{x}) по определению есть вероятность события $\Pr(\mathcal{E}_{\text{ВСН}})$. Если $\sigma \leq \rho$ и подслово $y_{N_M-i+1}, \dots, y_n = x_1, \dots, x_{n-N_M+i}$ содержит $j \leq \rho - \sigma$ ошибок, то декодер исправит слово \bar{y} (и выдаст слово \bar{x}'), т. е. произойдет событие $\mathcal{F}_{\text{ВСН}}$. Если же $\sigma \leq \rho$ и подслово $y_{N_M-i+1}, \dots, y_n = x_1, \dots, x_{n-N_M+i}$ содержит $j > \rho - \sigma$ ошибок, то вероятность исправления слова \bar{y} снова есть вероятность события $\Pr(\mathcal{E}_{\text{ВСН}})$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{F}_{\text{ВСН}} | \mathcal{F}_{M,i}) &= \Pr(\mathcal{E}_{\text{ВСН}}) \left(\sum_{\sigma=\rho+1}^{N_M-i} \binom{N_M-i}{\sigma} 2^{-(N_M-i)} + \sum_{\sigma=0}^{\rho} \binom{N_M-i}{\sigma} 2^{-(N_M-i)} \right) \\ &\times \sum_{j=\rho-\sigma+1}^{n-N_M+i} \binom{n-N_M+i}{j} p^j q^{n-N_M+i-j} + \sum_{\sigma=0}^{\rho} \binom{N_M-i}{\sigma} 2^{-(N_M-i)} \sum_{j=0}^{\rho-\sigma} \binom{n-N_M+i}{j} p^j q^{n-N_M+i-j}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

$$\text{Лемма 5. } \Pr(\mathcal{E}_{\text{ВСН}}) = \sum_{j=1}^n n_j \sum_{\delta=0}^{\rho} \sum_{v=0}^{\delta} \binom{j}{v} \binom{n-j}{\delta-v} p^{j+\delta-2v} q^{n-j-\delta+2v}.$$

Доказательство. Событие $\mathcal{E}_{\text{ВСН}}$ происходит в том и только том случае, если принятая сумма (по модулю 2) переданного кодового слова \bar{x} и вектора ошибок \bar{e} попадает в шар радиуса ρ с центром в другом кодовом слове $\bar{x}' \neq \bar{x}$, т. е. $\bar{x} + \bar{e} \in B_\rho(\bar{x}')$ или, эквивалентно, $\bar{x} + \bar{e} = \bar{x}' + \bar{e}'$ для некоторого вектора \bar{e}' веса $w(\bar{e}') \leq \rho$. Так как БЧХ-код является линейным, то $\bar{x}' - \bar{x} \in C$, поэтому можно считать, что переданное кодовое слово является нулевым, т. е. $\bar{0}$, а принятое слово $\bar{0} + \bar{e} = \bar{e}$ — это вектор ошибок.

Зафиксируем кодовое слово \bar{x}' веса $w(\bar{x}') = j$ и допустим, что $d(\bar{x}', \bar{0} + \bar{e}) = \delta \leq \rho$, т. е. в результате ошибок получено слово на расстоянии δ от кодового слова \bar{x}' . Это означает, что существует такое число v , что $\bar{0} + \bar{e}$ отличается от \bar{x}' в $\delta - v$ позициях, содержащих 0 (в слове \bar{x}'), и в v позициях, содержащих 1 (в слове \bar{x}'). Существует точно $\binom{j}{j-v} = \binom{j}{v}$ таких размещений ошибок (ненулевых координат вектора \bar{e}), которые отвечают $j - v$ совпадающим координатам с 1, и точно $\binom{n-j}{\delta-v}$ размещений ошибок, которые отвечают $\delta - v$ не совпадающим координатам с 0. Поэтому

$$\Pr(d(\bar{x}', \bar{0} + \bar{e}) = \delta) = \sum_{v=0}^{\delta} \binom{j}{v} \binom{n-j}{\delta-v} p^{j-v} q^v p^{\delta-v} q^{n-j-(\delta-v)}.$$

Далее,

$$\Pr(\bar{0} + \bar{e} \in B_\rho(\bar{x}')) = \sum_{\delta=0}^{\rho} \Pr(d(\bar{x}', \bar{0} + \bar{e}) = \delta)$$

и

$$\Pr(\mathcal{E}_{\text{ВСН}}) = \sum_{j=1}^n \sum_{\bar{x}' \in C: w(\bar{x}')=j} \Pr(\bar{0} + \bar{e} \in B_\rho(\bar{x}')) = \sum_{j=1}^n n_j \sum_{\delta=0}^{\rho} \sum_{v=0}^{\delta} \binom{j}{v} \binom{n-j}{\delta-v} p^{j+\delta-2v} q^{n-j-\delta+2v}.$$

Лемма доказана. \square

З а м е ч а н и е 1. Весовой спектр БЧХ-кода с параметрами (127, 64) приведен в [5].

Лемма 6. $\Pr(\mathcal{L}_{\text{ВСН}}) = 1 - \sum_{i=0}^{\rho} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} - \Pr(\mathcal{E}_{\text{ВСН}}).$

Доказательство. Событие $\mathcal{L}_{\text{ВСН}}$, состоящее в обнаружении декодером более ρ ошибок, произойдет в том случае, если при приеме кадра будет допущено более ρ ошибок, но при этом не произойдет необнаруженной трансформации кодового слова $\mathcal{E}_{\text{ВСН}}$ (полученное с ошибками кодовое слово не попадет в шар радиуса ρ другого кода слова). События $\mathcal{E}_{\text{ВСН}}$, $w(\bar{e}) \leq \rho$ и $\mathcal{L}_{\text{ВСН}}$ образуют полную группу событий, и $\Pr(w(\bar{e}) \leq \rho) = \sum_{i=0}^{\rho} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$. Отсюда следует утверждение леммы. \square

4. Обнаружение ошибок

Добавление 16 проверочных бит, рассчитанных по методу CRC-16 (стандарт ССИТТ), к информационному слову длиной 48 бит используется как дополнительная мера обеспечения безопасности на случай, если декодер БЧХ совершит ошибку, т. е. произойдет событие $\mathcal{E}_{\text{ВСН}}$ или $\mathcal{F}_{\text{ВСН}}$. Используемый метод CRC-16 имеет следующие параметры²:

²Используемые в этом разделе величины n, k, d (соотв. $n_{\text{ВСН}}, k_{\text{ВСН}}, d_{\text{ВСН}}$) относятся к коду CRC-16 (соотв. БЧХ, см. предыдущий раздел).

- длина кодового слова $n = 64$,
- количество информационных символов $k = 48$,
- минимальное кодовое расстояние 4 (код гарантированно обнаруживает одну ошибку и большинство ошибок веса 2 и 3),
- порождающий полином $g(x) = x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$,
- начальное значение регистра 0xFFFF,
- “исключающее или” (XOR) с окончательным значением регистра не производится.

З а м е ч а н и е 2. Полный CRC-код получается из циклического кода Хэмминга с параметрами $(n, k, d) = (2^m - 1, 2^m - m - 1, 3)$ удалением одного информационного бита и последующим расширением путем добавления одного бита дополнительной проверки на четность. Полученный код остается циклическим и все его кодовые слова имеют четный вес, поэтому CRC-код обнаруживает все ошибки нечетного веса, кроме того, кодовое расстояние увеличивается на 1 (по сравнению с кодом Хемминга) и равно 4, поэтому также обнаруживаются все ошибки веса не более 3. В частности полный код CRC-16 имеет параметры (32767, 32751) ($m = 15$). Если бы вычисление кодового слова CRC производилось с нулевым начальным регистром, то используемый в системе ТКС-Л код (48 информационных символов, 16 проверочных) был бы линейным подкодом описанного полного циклического кода CRC (т. е. подпространством размерности 48). При ненулевом начальном значении регистра получить теоретическую границу для вероятности необнаруженной ошибки CRC не представляется возможным, т. к. код будет нелинейным. Тем не менее мы выведем эту оценку для случая вычисления CRC с нулевым начальным регистром.

Лемма 7. $\Pr(\mathcal{F}_{\text{CRC}}) = 2^k / 2^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Количество кодовых слов определяется количеством информационных символов и равно 2^k . Вероятность того, что случайная последовательность равновероятных символов совпадет с одним из кодовых слов, равна отношению числа кодовых слов к числу двоичных слов длины n , т. е. $\Pr(\mathcal{F}_{\text{CRC}}) = 2^k / 2^n$. \square

Пусть \bar{x} — кодовое слово кода CRC-16, \bar{e} — случайный двоичный вектор веса r с равновероятными и независимыми значениями координат. Обозначим через $\mathcal{E}_{\text{CRC}}(r)$ событие, состоящее в том, что вектор $\bar{x} + \bar{e}$ также является кодовым словом CRC-16.

Лемма 8. Верны следующие утверждения:

$$(1) \Pr(\mathcal{L}_{\text{CRC}}) = 1 - \Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}}),$$

$$(2) \Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}}) \leq \sum_{r=2}^n \binom{n}{r} p_1^r (1 - p_1)^{n-r} \Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}}(r)), \text{ где } p_1 = d_{\text{ВСН}} / n_{\text{ВСН}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) следует из логики работы декодера CRC-16. Докажем утверждение (2). Событие \mathcal{E}_{CRC} может произойти только при условии события $\mathcal{E}_{\text{ВСН}}$ (трансформации кодового слова БЧХ). Пусть \bar{x} — переданное кодовое слова БЧХ-кода, а $\bar{x}' \neq \bar{x}$ — кодовое слово по решению БЧХ-декодера. По определению минимального кодового расстояния это означает, что $d(\bar{x}, \bar{x}') \geq d_{\text{ВСН}}$. Следовательно, вероятность p_1 того, что i -й символ в кодовом слове \bar{x}' отличается от i -го символа в передаваемом кодовом слове \bar{x} , не меньше, чем $d_{\text{ВСН}} / n_{\text{ВСН}}$.

Теперь вероятность того, что расстояние Хемминга между извлеченным из кодового слова \bar{x}' информационным подсловом и информационным подсловом из кодового слова \bar{x} равно r , есть $\binom{n}{r} p_1^r (1 - p_1)^{n-r}$. Отсюда для вероятности события \mathcal{E}_{CRC} имеем следующую оценку:

$$\Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}}) \leq \sum_{r=2}^n \binom{n}{r} p_1^r (1 - p_1)^{n-r} \Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}}(r));$$

суммирование по r начинается с 2, так как CRC-16 обнаруживает все одиночные ошибки. \square

З а м е ч а н и е 3. Вероятность события $\mathcal{E}_{\text{CRC}}(r)$ была оценена с помощью моделирования [1, разд. 2]: при $r = 4$ она имеет порядок 10^{-4} , а при четных $r > 4 - 10^{-5}$.

З а м е ч а н и е 4. Рассмотрим способ вычисления проверочных символов CRC-16 с нулевым начальным регистром. Покажем, что такой код будет линейным подкодом циклического кода с параметрами $(2^m - 1, 2^m - m - 1) = (32767, 32751)$ ($m = 15$), порожденного полиномом $g(x) = x^{16} + x^{12} + x^5 + 1 = \sum_{i=0}^r g_i x^i$, где $r = m + 1 = 16$ — количество проверочных символов. Код с параметрами $(32767, 32751)$ называется полным циклическим кодом CRC-16.

Проверочный полином $h(x)$ определяется из соотношения

$$h(x) = (x^{2^m-1} - 1)/g(x) = \sum_{i=0}^{n-r} h_i x^i;$$

коэффициенты h_i не приводятся в статье ввиду их большого количества, программу для их вычисления см. в [1, разд. 2].

Проверочная $r \times n$ -матрица полного циклического кода CRC-16 имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & h_{n-r} & \dots & h_0 \\ 0 & \dots & h_{n-r} & \dots & h_0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n-r} & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

а порождающая $(n - r) \times n$ -матрица

$$G = \begin{pmatrix} g_0 & \dots & g_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_0 & \dots & g_r & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g_0 & \dots & g_r \end{pmatrix}$$

и $HG^T = O$.

Процесс кодирования вектор-строки информационных символов $\bar{v} \in \mathbf{F}_2^{2^m - m - 1}$ заключается в вычислении вектора $\bar{c} = \bar{v}G$, а вычисление синдрома ошибки сводится к вычислению $H\hat{c}^T = H(\bar{c} + \bar{e})^T = H(G^T \bar{v}^T + \bar{e}^T) = H\bar{e}^T$.

Укороченный циклический код CRC-16 является линейным подпространством (соответствующего полного циклического кода) размерности $k = 48$, порожденным первыми k векторами стандартного базиса. Порождающая матрица G_1 этого кода состоит из первых k строк и первых $k + r = 64$ столбцов матрицы G . Аналогично, его проверочная матрица H_1 состоит из всех $r = 16$ строк и первых $k + r$ столбцов H . Заметим, что такой код циклическим уже не является.

Так как укороченный код используется только для обнаружения ошибок, то вероятность необнаружения ошибки \mathcal{E}_{CRC} равна вероятности того, что вектор ошибок \bar{e} является некоторым ненулевым кодовым словом. Если вероятность ошибки в одном бите принятого слова равна p_1 , а $\{A_i\}_{i=0}^n$ — весовой спектр укороченного циклического кода CRC-16, то

$$\Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}}) = \sum_{i=1}^n A_i p_1^i (1 - p_1)^{n-i}.$$

Эффективные алгоритмы вычисления весового спектра произвольного линейного кода неизвестны (это NP-полная задача). В нашем случае количество информационных символов равно 48, и вычисление “грубой силой” весового спектра потребовало бы перебора 2^{48} всех информационных слов, что технически очень сложно. Но благодаря линейности кода (при

вычисления CRC с нулевым начальным регистром) мы можем перейти к ортогональному (дуральному) коду.

Пусть C — линейный код с параметрами (n, k) над полем \mathbf{F} и весовым спектром $\{A_i\}_{i=0}^n$, а C^\perp — ортогональный ему $(n, n - k)$ код (порожденный проверочной для C матрицей) с весовым спектром $\{B_i\}_{i=0}^n$. Положим $A(x) = \sum_{i=0}^n A_i x^i$, $B(x) = \sum_{i=0}^n B_i x^i$. Тогда выполняется тождество Мак-Вильямс [6, th. 9.15]

$$f^k B(x) = (1 + (f - 1)x)^n A\left(\frac{1 - x}{1 + (f - 1)x}\right),$$

где $f = \text{char } \mathbf{F}$ — характеристика поля, над которым определен код (в нашем случае характеристика поля равна 2).

В этих обозначениях, используя тождество Мак-Вильямс, $\Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}})$ можно переписать так:

$$\Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}}) = (1 - p_1)^n (A(p_1) - A_0) = \Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}}) = (1 - p_1)^n \left(2^{k-n} (1 + p_1)^n B\left(\frac{1 - p_1}{1 + p_1}\right) - 1\right).$$

Размерность пространства информационных символов ортогонального кода $r = 16$, поэтому его весовой спектр (и многочлены A и B) можно вычислить достаточно быстро перебором всех информационных сообщений длиной 16 бит и кодированием их при помощи матрицы H_1 . Вычисленный таким образом весовой спектр кода CRC-16 приведен в [1, разд. 2]. Здесь отметим лишь, что полученная теоретическая граница для $\Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}})$ имеет тот же порядок, что и оценка по утверждению (2) леммы 8.

5. Вероятности “опасного отказа” и “пропуска метки”

На основании диаграмм событий (рис. 2.3 и 2.4) и лемм 1–8 можно записать вероятности событий “опасный отказ” и “пропуск метки”:

(1) Вероятность “опасного отказа” при отсутствии кадра на входе приемника

$$\Pr(\mathcal{D} \mid \mathcal{M}_0(t)) = \Pr(\mathcal{F}_M \mid \mathcal{M}_0(t)) \times \Pr(\mathcal{F}_{\text{VCH}} \mid \mathcal{M}_0(t)) \times \Pr(\mathcal{F}_{\text{CRC}}).$$

(2) Вероятность “опасного отказа” после обработки кадра

$$\Pr(\mathcal{D} \mid \mathcal{M}(t)) = \Pr(\mathcal{R}(t + 1) \mid \mathcal{S}(t) \wedge \mathcal{M}(t)) \times \Pr(\mathcal{E}_{\text{VCH}}) \times \Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}}).$$

(3) Вероятность “опасного отказа” в результате преждевременного обнаружения кадра (на i -м символе маркера)

$$\Pr(\mathcal{D} \mid \mathcal{M}_i(t)) = \Pr(\mathcal{F}_{M,i}) \times \Pr(\mathcal{F}_{\text{VCH}} \mid \mathcal{F}_{M,i}) \times \Pr(\mathcal{E}_{\text{CRC}}).$$

(4) Вероятность “пропуска метки”

$$\Pr(\mathcal{L}) = \Pr(\mathcal{L}_M) + \Pr(\mathcal{R}(t + 1) \mid \mathcal{S}(t) \wedge \mathcal{M}(t)) \times (\Pr(\mathcal{L}_{\text{VCH}}) + \Pr(\mathcal{E}_{\text{VCH}})\Pr(\mathcal{L}_{\text{CRC}})).$$

Естественно полагать $\Pr(\mathcal{D}) = \max\{\Pr(\mathcal{D} \mid \mathcal{M}_0(t)), \Pr(\mathcal{D} \mid \mathcal{M}(t)), \Pr(\mathcal{D} \mid \mathcal{M}_i(t))\}$.

Как следует из лемм 1–8, при фиксированных параметрах помехоустойчивого кодирования (БЧХ-кода и CRC-16) вероятности “опасного отказа” и “пропуска метки” определяются порогом обнаружения кадров h и вероятностью ошибки в одном бите $p_{\text{вер}}$ (которая в свою очередь зависит от отношения сигнал/шум на входе приемника). Вычисления по указанным выше выражениям вероятностей событий “опасный отказ” и “пропуск метки” показывают, что при достаточно низком отношении сигнал/шум 0 дБ, вероятности “опасного отказа” не выше 10^{-14} и пороге $h = 25$ значение вероятности “пропуска метки” не превышает 0.08.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гаврилюк А.Л.** Исследование параметров кодирования в точечном канале связи с локомотивом: дополнительные материалы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН: [сайт]. URL: <http://www.rus/C0/AddM/Add/Gavrilyuk.pdf> (дата обращения 14.02.2011).
2. **Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. М.: Советское радио, 1966. 678 с.
3. **Кларк Дж., Кейн Дж.** Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. М.: Радио и связь, 1987. 391 с.
4. **Финк Л.М.** Теория передачи дискретных сообщений. М.: Советское радио, 1970. 728 с.
5. Primitive BCH codes weight distribution.
URL: <http://www.infsys.cne.okayama-u.ac.jp/kusaka/wd/index.html>.
6. **Cameron P.J., van Lint J.H.** Designs, graphs, codes and their links. Cambridge: Cambridge University Press, 1991. 240 p.

Гаврилюк Александр Львович
канд. физ.-мат. наук
научный сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: alexander.gavriliouk@gmail.com

Поступила 12.01.2011

УДК 517.977

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ¹

Н. Л. Григоренко, Д. В. Камзолкин, Л. Н. Лукьянова

В работе рассматривается задача оптимального управления нестационарной динамической системой с нефиксированным моментом окончания и терминальным функционалом. С использованием алгоритма, основанного на принципе максимума Понтрягина, построено оптимальное управление, доставляющее функционалу качества максимальное значение. Приведены результаты расчета управления и значений функционала для тестовых параметров модели.

Ключевые слова: управляемая система, оптимальное управление.

N. L. Grigorenko, D. V. Kamzolkin, L. N. Luk'yanova. Numerical algorithm for solving a nonstationary problem of optimal control.

The problem of optimal control is considered for a nonstationary dynamic system with unfixed termination time and terminal functional. An algorithm based on Pontryagin's maximum principle is used to construct an optimal control that maximizes the performance functional. The results of calculating the control and values of the functional for test parameters of the model are presented.

Keywords: control system, optimal control.

Введение

В работе рассматривается численный алгоритм решения одной нестационарной нелинейной задачи оптимального управления. Соответствующие экстремальные задачи возникают при оптимизации показателей эффективности производственного процесса добычи и переработки полезных ископаемых. Нестационарность задачи определяется функциями, характеризующими рассматриваемые ископаемые. Для оптимального управления, являющегося решением такой задачи оптимального управления, желательно иметь быстродействующий алгоритм вычисления, рассчитанный на широкий диапазон изменения параметров модели и характеризующих функций [1; 2]. В работе [6] приведено решение задачи оптимального управления для моделей, описывающих случай квадратичной зависимости концентрации чистого минерала от глубины залегания при постоянных характеристиках полезных ископаемых. В работе [7] приведено решение задачи оптимального управления для модели с линейной концентрацией в классе позиционных управлений и рассмотрена задача оптимального управления на бесконечном горизонте планирования. В настоящей работе рассмотрена нестационарная модель для случая линейной зависимости концентрации чистого минерала от глубины залегания с терминальным функционалом качества. Найден качественный вид оптимального управления, для расчета параметров которого предложен численный алгоритм. Приведены результаты расчета оптимального управления для тестовых параметров модели.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00378), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5443.2008.1) и программы Президиума РАН "Математическая теория управления".

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(T(u(\cdot))) = x_1, \quad t \in [0, T(u(\cdot))], \quad P \leq u(t) \leq Q, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= e^{-\nu t} \left(-mu(t) - p \cdot P + s(t)P \left(2 - \frac{P}{u(t)} \right) \right) - \nu_1 g_1 P^{\gamma_1} e^{\nu_1 t} - \nu_2 g_2 Q^{\gamma_2} e^{\nu_2 t}, \\ y(0) &= -g_1 P^{\gamma_1} - g_2 Q^{\gamma_2}, \quad y(T(u(\cdot))) \longrightarrow \max_{u(t) \in [P, Q], P > 0, Q \geq P}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь x, y — фазовые переменные, $u(t)$ — управление, T — нефиксированный момент окончания процесса, $x, y, u \in \mathbb{R}^1$; $g_1 \geq 0, g_2 \geq 0, \nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0, 0 \leq \gamma_1 \leq 1, 0 \leq \gamma_2 \leq 1, x_1, P, Q, 0 < P \leq Q; \nu, m, p, s(t)$ — положительные параметры, функция $s(t)$ — кусочно-непрерывна. В задаче (1.1), (1.2) существует оптимальное управление в классе измеримых по Лебегу функций [5]. Для исследования задачи оптимального управления (1.1), (1.2) мы применяем необходимые условия оптимальности процессов с параметрами в форме принципа максимума Понтрягина для задач с нефиксированным моментом времени [3; 4].

2. Краевая задача принципа максимума для системы (1.1), (1.2)

2.1. Принцип максимума для задачи (1.1), (1.2)

Согласно [3; 4] для задачи с нефиксированным временем имеет место следующее утверждение: если $(u^*(t), x^*(t), T)$ — решение задачи (1.1), (1.2), то существуют вектор $a = (a_0, a_1)$ и функция $\psi(t), t \in [0, T]$, удовлетворяющие условиям

$$H(t, u, \psi, a_0) = -a_0 e^{-\nu t} \left(-(2s(t) - p)P + mu + \frac{s(t)P^2}{u} \right) + \psi u,$$

$$l(\xi, z, t, T, a_1) = l(x_0, x(T), t_0, T, a) = -a_0 (Ae^{\nu_1 T} + Be^{\nu_2 T}) + a_1 (x(T) - x_1),$$

$$u^*(t, a_0) = \arg \max_{u \in [P, Q]} H(t, u, \psi, a_0),$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \psi(T) = -\frac{\partial l}{\partial z} = -a_1, \quad a = (a_0, a_1) \neq 0, \quad a_0 \geq 0,$$

$$H(T, u, \psi, a) = \frac{\partial l}{\partial T} = -a_0 (A\nu_1 e^{\nu_1 T} + B\nu_2 e^{\nu_2 T}), \quad A = g_1 P^{\gamma_1}, \quad B = g_2 Q^{\gamma_2}.$$

2.2. Максимизатор функции Понтрягина

Максимизатор функции Понтрягина $H(t, u, \psi, a_0)$ зависит от a_0, a_1, t . Пусть $a_0 = 0$ (анормальный случай). Тогда $H = -a_1 u$, и экстремальное управление имеет вид

$$u^*(t, a_1) = \begin{cases} P_1, & \text{если } a_1 > 0, \\ Q_1, & \text{если } a_1 < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Пусть $a_0 > 0$ (нормальный случай). Тогда $H(t, u, q) = a_0 e^{-\nu t} * K(t, u, q)$, где $K(t, u, q) = K(b(t), s(t), u) = (2s(t) - p)P - b(t)u - \frac{s(t)P^2}{u}$, $b(t) = b(q, t) = m + qe^{\nu t}$, $q = \frac{a_1}{a_0}$.

Лемма 1. *Максимизатор функции $K(b, s, u)$ имеет вид*

$$u^*\left(\frac{b}{s}\right) = \begin{cases} Q, & \text{если } \frac{b}{s} < \frac{P^2}{Q^2}, \\ P\sqrt{\frac{s}{b}}, & \text{если } \frac{P^2}{Q^2} \leq \frac{b}{s} \leq 1, \\ P, & \text{если } \frac{b}{s} > 1, \end{cases} \quad \text{при } b(t) > 0, \quad (2.2)$$

$$u^*\left(\frac{b}{s}\right) = Q \quad \text{при } b(t) \leq 0.$$

Доказательство. Исследуемая для $u \in [P, Q]$, $P > 0$, функция $K(b, s, u)$ обладает свойствами : $K'_u = -b + \frac{sP^2}{u^2} < 0$ при $\frac{b}{s} > 1$; $K'_u > 0$ при $\frac{b}{s} < \frac{P^2}{Q^2}$; $K'_u = 0$ при $u = \frac{P}{\sqrt{b/s}}$, $\frac{P^2}{Q^2} \leq \frac{b}{s} \leq 1$. Таким образом экстремальное управление имеет вид (2.2). Лемма 1 доказана.

2.3. Краевая задача принципа максимума и ее численное решение

Согласно подразд. 2.1 краевая задача принципа максимума имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = u^*\left(\frac{b(q, t)}{s(t)}\right), & x|_{t=0} = 0, & x|_{t=T} = x_1, \\ \dot{\psi} = 0, & \psi|_{t=0} = -a_1, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$a_0 e^{-\nu T} K\left(T, q, u^*\left(\frac{b(q, T)}{s(T)}\right)\right) = -a_0(A\nu_1 e^{\nu_1 T} + B\nu_2 e^{\nu_2 T}),$$

$$0 \leq t \leq T,$$

и заключается в нахождении параметров a_0, a_1, T , при котором она имеет решение. Управление $u^*\left(\frac{b(q, t)}{s(t)}\right)$, стоящее в правой части краевой задачи (2.3), согласно (2.2) зависит от расположения величины $b(q, t)/s(t)$ по отношению к интервалам $(-\infty, P^2/Q^2)$, $[P^2/Q^2, 1]$, $(1, +\infty)$, определяющим вид экстремального управления. В зависимости от параметра q при известном $s(t)$ из (2.2) имеем

$$u^*(q, t) = u^*\left(\frac{b(q, t)}{s(t)}\right) = \begin{cases} Q, & \text{если } q < \frac{P^2/Q^2 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}}, \\ P\sqrt{\frac{s}{b}}, & \text{если } \frac{P^2/Q^2 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}} \leq q \leq \frac{s(t) - m}{e^{\nu t}}, \\ P, & \text{если } q > \frac{s(t) - m}{e^{\nu t}}. \end{cases} \quad (2.4)$$

При управлении (2.4) краевая задача (2.3) сводится к решению системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} x(T, q) = x_1, \\ K\left(T, q, u^*\left(\frac{b(q, T)}{s(T)}\right)\right) = -(A\nu_1 e^{(\nu_1 + \nu)T} + B\nu_2 e^{(\nu_2 + \nu)T}) \end{cases} \quad (2.5)$$

относительно двух неизвестных параметров T и q . Второе уравнение системы (2.5) может быть одного из следующих трех видов:

$$(2s(T) - p)P - (m + qe^{\nu T})Q - \frac{s(T)P^2}{Q} = -A\nu_1 e^{(\nu_1 + \nu)T} - B\nu_2 e^{(\nu_2 + \nu)T} \quad (2.6)$$

при $u^*(T, q) = Q$;

$$\begin{aligned} (2s(T) - p)P - (m + qe^{\nu T})P \sqrt{\frac{s(T)}{m + qe^{\nu T}}} - \frac{s(T)P^2}{P \sqrt{\frac{s(T)}{m + qe^{\nu T}}}} \\ = -A\nu_1 e^{(\nu_1 + \nu)T} - B\nu_2 e^{(\nu_2 + \nu)T} \end{aligned} \quad (2.7)$$

при $u^*(T, q) = P \sqrt{\frac{s(T)}{m + qe^{\nu T}}}$;

$$(2s(T) - p)P - (m + qe^{\nu T})P - s(T)P = -A\nu_1 e^{(\nu_1 + \nu)T} - B\nu_2 e^{(\nu_2 + \nu)T} \quad (2.8)$$

при $u^*(T, q) = P$.

В уравнения (2.6), (2.8) параметр q входит линейно. Уравнение (2.7) линейное относительно выражения $\sqrt{m + qe^{\nu t}}$. Таким образом, из второго уравнения системы (2.5) можно получить соотношение вида $q = F_i(T)$, $i = 1, 2, 3$. Приведем их. Из (2.6) имеем

$$q = F_1(T) \text{ при } u^*(T, q) = Q,$$

$$F_1(T) = e^{-\nu T} \left[\frac{1}{Q} \left((2s(T) - p)P + A\nu_1 e^{(\nu_1 + \nu)T} + B\nu_2 e^{(\nu_2 + \nu)T} \right) - \frac{s(T)P^2}{Q^2} - m \right]. \quad (2.9)$$

Из (2.7) получаем

$$\begin{aligned} q = F_2(T) \text{ при } u^*(T, q) = P \sqrt{\frac{s(T)}{m + qe^{\nu T}}}, \\ F_2(t) = e^{-\nu T} \left[\frac{1}{4s(T)} \left(\frac{1}{P} \left((2s(T) - p)P + A\nu_1 e^{(\nu_1 + \nu)T} + B\nu_2 e^{(\nu_2 + \nu)T} \right) \right)^2 - m \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} q = F_3(T) \text{ при } u^*(T, q) = P, \\ F_3(T) = e^{-\nu T} \left[\frac{1}{P} \left((2s(T) - p)P + A\nu_1 e^{(\nu_1 + \nu)T} + B\nu_2 e^{(\nu_2 + \nu)T} \right) - s(T) - m \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Приведем общий вид первого уравнения системы (2.5). При произвольной непрерывной функции $s(t)$ это уравнение содержит сумму интегралов от одной из трех функций, значение которых при соответствующих параметрах модели (1.1) принимает управление (2.4). Соответствующие пределы интегрирования для этих функций зависят от $q, s(t)$. Определим множество

$$L = \left\{ (t, q) : \frac{P^2/Q^2 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}} \leq q \leq \frac{s(t) - m}{e^{\nu t}} \right\}.$$

Из (2.4) следует, что если в момент t параметр q лежит выше верхней границы множества L , то

$$u^* \left(\frac{b(q, t)}{s(t)} \right) = P;$$

если в момент t параметр q лежит между верхней и нижней границей множества L , то

$$u^* \left(\frac{b(q, t)}{s(t)} \right) = P \sqrt{\frac{s(t)}{b(q, t)}};$$

если в момент t параметр q лежит ниже нижней границы множества L , то $u^*\left(\frac{b(q,t)}{s(t)}\right) = Q$.

При фиксированном $q = q_0$ пределы интегрирования — моменты пересечения прямой $q = q_0$ и границ области L . Для верхней границы точки пересечения обозначим $\tau_i(q_0)$, для нижней границы — $\eta_i(q_0)$. Общий вид первого уравнения системы (2.5):

$$\int_{S_1} P dt + \int_{S_2} P \sqrt{\frac{s(t)}{b(t,q)}} dt + \int_{S_3} Q dt = x_1, \tag{2.12}$$

где

$$S_1 = \left\{ t : q_0 \geq \frac{s(t) - m}{e^{\nu t}} \right\}, \quad S_2 = \left\{ t : \frac{P^2/Q^2 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}} < q_0 \leq \frac{s(t) - m}{e^{\nu t}} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ t : q_0 \leq \frac{P^2/Q^2 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}} \right\}, \quad S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [0, T].$$

Вид первого уравнения системы (2.5) определяется свойствами функции $s(t)$, которые, в частности, влияют на количество переключений экстремальных режимов. Так, в случае монотонного убывания функции $\frac{s(t) - m}{e^{\nu t}}$ с ростом времени число переключений не более трех. Это свойство имеет место, в частности, при $s(t) = \text{const}$. В этом случае достаточно рассмотреть конечное число областей изменения q и сравнением по функционалу соответствующих управлений определить оптимальное [6; 7].

Обозначим $l_1(t) = \frac{s(t) - m}{e^{\nu t}}$, $l_2(t) = \frac{P^2/Q^2 \cdot s(t) - m}{e^{\nu t}}$. Фиксируем малое $\varepsilon > 0$. Предлагаемый алгоритм вычисления q, T , являющихся решением краевой задачи (2.5), состоит в следующем.

Шаг 1. Рассмотрим соотношение $q = F_3(T)$ для $T \in G_3 = \{T : F_3(T) \geq l_1(T)\}$. На множестве G_3 выбираем достаточно мелкую сетку. Для каждого T_i из этой сетки находим $q_i = F_3(T_i)$. По значению q_i находим $\tau_{ij}, j = 1, \dots : l_1(\tau_{ij}) = q_i, \eta_{ik}, k = 1, \dots : l_2(\tau_{ik}) = q_i$, которые определяют моменты переключения экстремальных управлений и множества $S_n, n = 1, 2, 3$, фигурирующие в (2.12). Далее вычисляем норму разности левой и правой части соотношения (2.12). Если норма меньше ε , то q_i, T_i причисляем к решениям краевой задачи.

Шаг 2. Рассмотрим соотношение $q = F_2(T)$ для $T \in G_2 = \{T : l_2(T) \leq F_2(T) \leq l_1(T)\}$. На множестве G_2 выбираем достаточно мелкую сетку. Для каждого T_i из этой сетки находим $q_i = F_2(T_i)$. По значению q_i находим $\tau_{ij}, j = 1, \dots : l_1(\tau_{ij}) = q_i, \eta_{ik}, k = 1, \dots : l_2(\tau_{ik}) = q_i$, которые определяют моменты переключения экстремальных управлений и множества $S_n, n = 1, 2, 3$, фигурирующие в (2.12). Далее вычисляем норму разности левой и правой части соотношения (2.12). Если норма меньше ε , то q_i, T_i причисляем к решениям краевой задачи.

Шаг 3. Рассмотрим соотношение $q = F_1(T)$ для $T \in G_1 = \{T : F_1(T) \leq l_2(T)\}$. На множестве G_1 выбираем достаточно мелкую сетку. Для каждого T_i из этой сетки находим $q_i = F_1(T_i)$. По значению q_i находим $\tau_{ij}, j = 1, \dots : l_1(\tau_{ij}) = q_i, \eta_{ik}, k = 1, \dots : l_2(\tau_{ik}) = q_i$, которые определяют моменты переключения экстремальных управлений и множества $S_n, n = 1, 2, 3$, фигурирующие в (2.12). Далее вычисляем норму разности левой и правой части соотношения (2.12). Если норма меньше ε , то q_i, T_i причисляем к решениям краевой задачи.

Шаг 4. Найденным при выполнении шагов 1–3 значениям q, T соответствуют управления $u^*(q, t)$, определяемые соотношением (2.4). Эти управления и управления (2.1) сравниваются по функционалу (1.2) и выбирается управление, его максимизирующее.

3. Вычисление оптимального управления для конкретных параметров

В этом разделе мы приведем результаты расчетов оптимального управления для следующих параметров: $x_1 = 2 \cdot 10^8$, $P = 2 \cdot 10^7$, $Q = 6 \cdot 10^7$, $m = 1$, $p = 5$, $\nu = 0.1$, $\nu_1 = 0.05$, $\nu_2 = 0.04$, $g_1 = 1$, $g_2 = 1$, $\gamma_1 = 0.8$, $\gamma_2 = 0.8$; функция $s_1(t)$ кусочно-линейная с вершинами в точках $\{[0, 1485], [2.83, 1485], [5.58, 3614], [6.16, 4982], [6.41, 8045], [7.16, 5676], [7.41, 7682], [7.91, 7682], [8.008, 6587], [8.33, 8684], [8.58, 8414], [9.16, 3749], [10.008, 7386]\}$, ее график приведен на рис. 1.

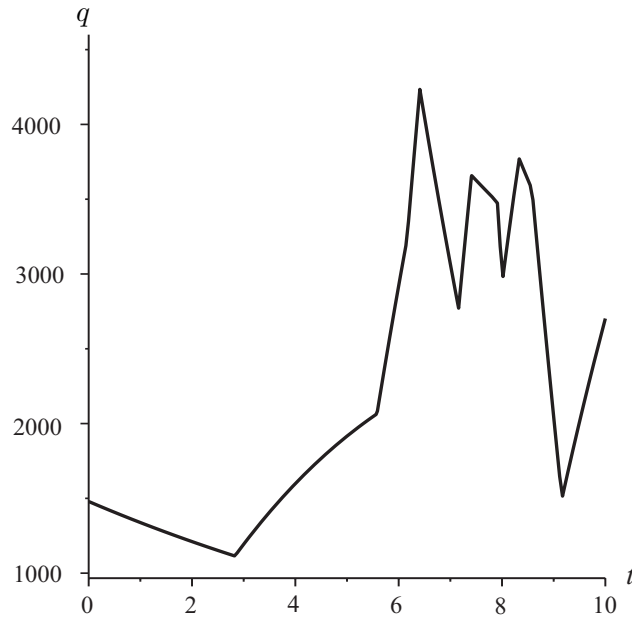


Рис. 1. График функции $q = s_1(t)$.

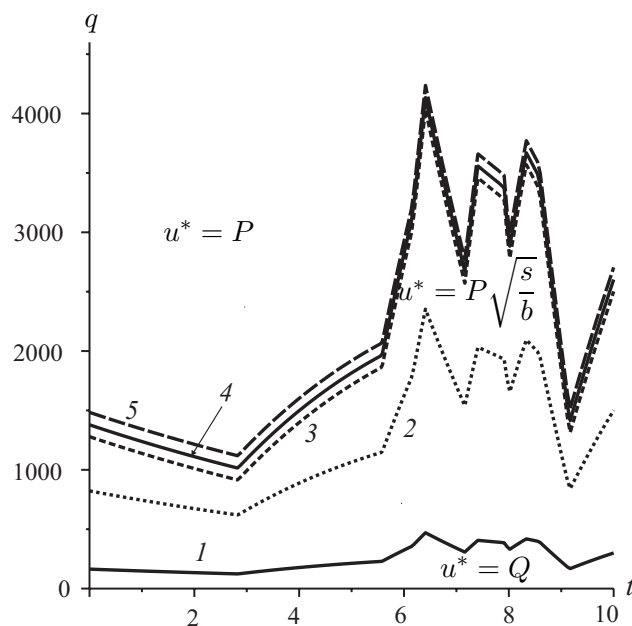


Рис. 2. Границы области L (кривые $q = l_1(t)$, $q = l_2(t)$) и графики функций $q = F_i(T)$: 1 — $l_2(t)$, 2 — $F_1(t)$; 3 — $F_2(t)$; 4 — $F_3(t)$; 5 — $l_1(t)$.

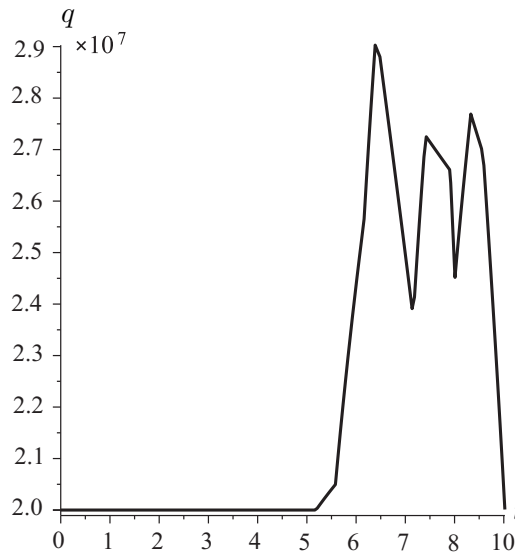


Рис. 3. График оптимального управления — функции $q = u^*(t)$.

На рис. 2 приведены границы области L (кривые $q = l_1(t)$, $q = l_2(t)$) и графики функций $q = F_i(t)$, $i = 1..3$, (2.9)–(2.11). Для рассматриваемых значений параметров процесса имеет место соотношение $l_2(t) < F_1(t) < F_2(t) < F_3(t) < l_1(t)$, и таким образом множество $G_3 = \emptyset$, $G_2 = \left[\frac{x_1}{Q}, \frac{x_1}{P} \right]$, $G_1 = \emptyset$. Численная реализация шага 2 приводит к единственному минимуму значения нормы разности левой и правой части соотношения (2.12), достигаемому при $T = 9.021919402$, $q = 1969.012448$. Соответствующий момент переключения управления $\tau_1 = 5.184483693$. Вычисление терминального показателя (1.2) на найденном управлении и управлениях (2.1) и сравнение полученных значений показывают, что максимальное значение функционала $0.4354038353 \cdot 10^{12}$. График оптимального управления приведен на рис. 3.

Авторы выражают благодарность М.С. Никольскому и А.И. Смирнову за полезное обсуждение работы и консультации при тестировании программного обеспечения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. **Осипов Ю.С.** Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009. 654 с.
3. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.] М.: Наука, 1961. 391 с.
4. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 820 с.
5. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.Наука, 1972. 574 с.
6. О задаче оптимального управления с интегральным функционалом от рациональной функции управления / Н.Л. Григоренко [и др.] // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 11. С. 1586–1600.
7. **Киселев Ю.Н., Аввакумов С.Н., Орлов М.В.** Закон гиперболического тангенса при синтезировании оптимального управления в одной нелинейной модели с дисконтированием // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 11. С. 1490–1506.

Поступила 01.09.2010

Григоренко Николай Леонтьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: grigor@cs.msu.su

Камзолкин Дмитрий Владимирович
канд. физ.-мат. наук, ассистент
фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: kamzolkin@cs.msu.su

Лукьянова Лиля Николаевна
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: lln@cs.msu.su

УДК 517.977.1

О ВНЕШНИХ ОЦЕНКАХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ¹

М. И. Гусев

В работе рассматривается задача построения внешних оценок множеств достижимости нелинейной управляемой системы. Оценки ищутся в виде множеств уровня гладких функций в пространстве состояний, удовлетворяющих дифференциальным неравенствам. В рассматриваемой системе выделяется линейная часть, для которой соответствующие функции считаются известными. Предлагаемый метод оценивания траекторий нелинейной системы основан на модификации оценок для линейной части на основе принципа сравнения.

Ключевые слова: управляемая система, множество достижимости, принцип сравнения.

M. I. Gusev. On external estimates for reachable sets of nonlinear control systems.

The paper is devoted to the problem of constructing external estimates for reachable sets of a nonlinear control system. The estimates are constructed in the form of level sets of smooth functions in the space of states satisfying differential inequalities. In the system under consideration, the linear part is found, for which the corresponding functions are assumed to be known. The method proposed for estimating trajectories of a nonlinear system is based on modifying estimates for the linear part and on applying the comparison principle.

Keywords: control system, reachable set, comparison principle.

1. Введение

В данной работе рассматривается задача построения внешних оценок множеств достижимости нелинейной управляемой системы. Множества достижимости и их аналоги играют важную роль при решении задач управления в условиях неопределенности и дифференциальных игр, в приложениях к задачам оценивания параметров и состояний управляемых систем и обратным задачам динамики [1–5]. Алгоритмы приближенного построения множеств достижимости, использующие дискретизацию пространства состояний и временного интервала, на котором рассматривается управляемая система (см., например, [6–8]), применимы для широкого класса нелинейных систем, но требуют больших вычислительных ресурсов. Эллипсоидальные и полиэдральные аппроксимации множеств достижимости [5; 9–12] используют операции интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и дают в общем случае оценки (внутренние и внешние) этих множеств. Применение дифференциальных неравенств Гамильтона — Якоби и принципа сравнения [13–16] позволяет получить внешние оценки множеств достижимости; для линейных систем с эллипсоидальными ограничениями использование теорем сравнения приводит к эллипсоидальным аппроксимациям множеств достижимости [16].

В данной работе рассматривается нелинейная управляемая система, правая часть которой представима в виде суммы линейной части (в которую входит управление) и нелинейного (не содержащего управления) слагаемого. Мы считаем, что для линейной части известны оценки в виде множеств уровня гладких функций в пространстве состояний. Эти функции удовлетворяют дифференциальным неравенствам Гамильтона — Якоби. Данные неравенства модифицируются таким образом, чтобы им удовлетворяли траектории нелинейной системы. В работе [15] описано применение подобной схемы оценивания множеств достижимости при

¹Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления” при поддержке проекта УрО РАН 09-П-1-1014 и гранта РФФИ (проект 09-01-00589).

помощи линейных функций при условии ограниченности нелинейной добавки. Для многомерной управляемой системы при нелинейных перекрестных связях между подсистемами схема получения внешних оценок областей достижимости, основанная на методе сравнения для аналогов векторных функций Ляпунова, рассмотрена в [17]. Здесь также существенным явилось условие ограниченности функций, описывающих перекрестные связи. В данной работе описана общая схема получения оценок, не требующая ограниченности нелинейных слагаемых, и, в частности, обобщены результаты работы [17].

2. Основные определения. Предварительные сведения

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t, x), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр. Считаем, что ограничение на управление и начальный вектор x^0 имеет вид

$$u(t) \in \mathbf{P}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x^0 \in X^0, \quad (2.2)$$

где \mathbf{P} — компакт в \mathbb{R}^r , X^0 — компакт в \mathbb{R}^n . Функция $f(t, x)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных и имеющей непрерывные частные производные по x , матрицы $A(t)$, $B(t)$ непрерывны. Также считаем выполненными условия, обеспечивающие продолжаемость решений системы (2.1) на промежутке $[t_0, t_1]$.

Множество (область) достижимости в момент времени $\theta \in [t_0, t_1]$ будем обозначать через $G(\theta)$. Таким образом, $G(\theta)$ — это множество всех точек в \mathbb{R}^n , в которые можно перевести систему (2.1) в момент времени θ при помощи измеримых управлений, удовлетворяющих ограничению (2.2), из начальных точек $x^0 \in X^0$.

Пусть $G^0(\theta)$ — множество достижимости линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (2.3)$$

при тех же самых ограничениях на управление и начальное множество. Пусть для $G^0(\theta)$ известна внешняя оценка вида $G^0(\theta) \subset \{x : V(\theta, x) \leq 0\}$, где $V(t, x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая дифференциальному неравенству

$$V_t(t, x) + \max_{u \in P} V_x^\top(t, x)(A(t)x + B(t)u) \leq m(t, V(t, x)) \quad (2.4)$$

для $t_0 \leq t \leq t_1$, $x \in \mathbb{R}^n$. Здесь $m(t, V)$ — заданная непрерывная функция двух переменных. В качестве $m(t, V)$ может фигурировать, например, линейная по V функция, в частности, $m(t, V) = 0$. В качестве функций $V(t, x)$ могут рассматриваться квадратичные или линейные по x функции.

Далее будем использовать обозначения $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)}$, $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2)}$ для производных V по t в силу систем (2.1), (2.3) соответственно

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)}(t, x) = V_t(t, x) + \max_{u \in P} V_x^\top(t, x)(A(t)x + B(t)u + f(t, x)),$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2)}(t, x) = V_t(t, x) + \max_{u \in P} V_x^\top(t, x)(A(t)x + B(t)u).$$

Здесь $V_x(t, x)$ — градиент по x функции V , символ “ \top ” означает транспонирование. Из неравенства (2.4) следует, что

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)}(t, x) = \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2)}(t, x) + V_x^\top(t, x)f(t, x) \leq m(t, V(t, x)) + V_x^\top(t, x)f(t, x).$$

В предположении ограниченности множеств уровня функции V определим функцию $g(t, \mu)$, $t \in [t_0, t_1]$, $\mu \in \mathbb{R}$, равенством

$$g(t, \mu) = \max\{V_x^\top(t, x)f(t, x) : x \in E(t, \mu)\} + m(t, \mu),$$

где $E(t, \mu)$ — множество уровня V ,

$$E(t, \mu) = \{x : V(t, x) = \mu\}.$$

Рассмотрим произвольную траекторию системы (2.1), стартующую из точки $x(t_0) = x^0 \in X^0$ и порождаемую некоторым управлением $u(t)$. Для производной dV/dt вдоль траектории имеем неравенство

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq m(t, V(t, x)) + V_x^\top(t, x(t))f(t, x(t)) \\ &\leq m(t, V(t, x)) + \max\{V_x^\top(t, x)f(t, x) : x \in E(t, V(t, x(t)))\} = g(t, V(t, x(t))). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Наряду с неравенством (2.5) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dU}{dt} = g(t, U), \quad U(t_0) = U^0, \quad (2.6)$$

которое назовем системой сравнения для (2.5). Предположим, что функция $g(t, \mu)$ непрерывна в области определения.

Теорема 1. Пусть функция $V(t, x)$ удовлетворяет неравенству (2.5), а $U(t)$ — максимальное решение уравнения (2.6), продолжимое до момента θ , и $\max_{x^0 \in X^0} V(t_0, x^0) \leq U^0$. Тогда справедливо включение

$$G(\theta) \subset \{x : V(\theta, x) \leq U(\theta)\}.$$

Доказательство следует из неравенства (2.5) и теорем сравнения для дифференциальных неравенств (см., например, [19, теорема 2.2.2]). Для системы сравнения справедлива локальная теорема существования максимального решения в предположении непрерывности $g(t, U)$. Если эта функция удовлетворяет условию Липшица по U , то максимальное решение, фигурирующее в формулировке теоремы, совпадает с единственным решением задачи Коши для уравнения (2.6). Покажем, например, что для случая эллипсоидальных оценок функция $g(t, \mu)$ является гладкой.

Пусть ограничения на $u(t)$ заданы при помощи невырожденного эллипсоида U , а начальный вектор принадлежит эллипсоиду X^0

$$u(t) \in U = \mathcal{E}(p, P), \quad x^0 \in X^0 = \mathcal{E}(x^*, Q_0),$$

где $P = P^\top$, $Q_0^\top = Q_0$ — положительно определенные матрицы. Эллипсоид $\mathcal{E}(r, R)$ определяется равенством

$$\mathcal{E}(r, R) = \{v : (v - r, R^{-1}(v - r)) \leq 1\}.$$

Определим квадратичную по x функцию $V(t, x)$ следующим образом:

$$V(t, x) = (x - x^*(t))^\top Q^{-1}(t)(x - x^*(t)) - 1,$$

где матричная функция $Q(t)$ и вектор-функция $x^*(t)$ — решения дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= AQ + QA^\top + \pi Q^\top + \pi^{-1}BPB^\top, \quad Q(t_0) = Q_0, \\ \dot{x}^* &= Ax^* + Bp, \quad x^*(t_0) = x^*, \end{aligned}$$

$\pi(t)$ — любая положительная непрерывная функция. Тогда (см. [9]) справедливо включение

$$G(t) \subset \{x : V(t, x) \leq 0\}$$

для всех $t \in [t_0, t_1]$. Кроме того, для производной вдоль траекторий системы (2.3) выполняется неравенство [17]

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2)} \leq -\pi(t)V(t, x(t)).$$

Таким образом, в данном примере можно положить $m(t, V) = -\pi(t)V$.

Рассмотрим множества уровня

$$N(t, \mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^\top Q^{-1}(t)x = 1 + \mu\}.$$

Множества $N(t, \mu)$ равномерно ограничены в области $\mu \geq -1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), $t \in [t_0, t_1]$. Покажем, что существует константа K такая, что

$$h(N(t, \mu), N(t', \mu')) \leq K(|t - t'| + |\mu - \mu'|) \quad (2.7)$$

для любых $t, t' \in [t_0, \vartheta]$, $\mu, \mu' \geq -1 + \varepsilon$, где ε — заданное положительное число. Здесь h — хаусдорфово расстояние между множествами.

Пусть $x \in N(t, \mu)$. Возьмем $x' = \alpha x$ и подберем $\alpha = \alpha(t, t', \mu, \mu', x)$ так, чтобы выполнялось включение $x' \in N(t', \mu')$. Матричная функция $Q^{-1}(t)$ непрерывно дифференцируема, поэтому

$$Q^{-1}(t') = Q^{-1}(t) + (t' - t)\hat{Q}(t, t'),$$

где $\hat{Q}(t, t')$ — симметричная матрица, равномерно ограниченная при $t, t' \in [t_0, \vartheta]$. Включение $x' \in N(t', \mu')$ выполняется, если

$$\frac{1}{\mu' + 1} \alpha^2 x^\top Q^{-1}(t)x + \frac{1}{\mu' + 1} \alpha^2 x^\top \hat{Q}(t, t')x(t' - t) = 1,$$

отсюда получаем следующую формулу для α :

$$\alpha = \left(\frac{\mu + 1}{\mu' + 1} + \frac{1}{\mu' + 1} x^\top \hat{Q}(t, t')x(t' - t) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, при фиксированном x функция $\alpha(t, t', \mu, \mu', x)$ непрерывно дифференцируема по (t, t', μ, μ') и $\alpha(t, t, \mu, \mu, x) = 1$. Из равенства $x' - x = (\alpha - 1)x$ и равномерной ограниченности множеств $N(t, \mu)$ следует, что существует константа K такая, что

$$\|x' - x\| \leq K(|t - t'| + |\mu - \mu'|).$$

Учитывая, что аналогичную оценку можно получить, выбирая вначале $x' \in N(t', \mu')$ и подбирая $x \in N(t, \mu)$, приходим к неравенству (2.7).

Так как

$$E(t, \mu) = \{x : V(t, x) \leq \mu\} = N(t, \mu) + x^*(t),$$

где $x^*(t)$ непрерывно дифференцируема, то многозначное отображение $E(t, \mu)$ удовлетворяет условию Липшица по t, μ .

Функция $g(t, \mu)$ определяется как

$$g(t, \mu) = \sup_{x \in E(t, \mu)} V_x^\top(t, x)f(t, x) - \pi(t)\mu.$$

В предположении, что $f(t, x)$ непрерывно дифференцируема, минимизируемая функция $V_x^\top(t, x)f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица. Отсюда с учетом липшицевости отображения $E(t, \mu)$ нетрудно получить, что $g(t, \mu)$ удовлетворяет условию Липшица при $\mu \geq 1 - \varepsilon$, $t \in [t_0, t_1]$.

Заметим, что если считать, что $f(t, x)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x , то $g(t, \mu)$ будет непрерывной по t и липшицевой по μ при $\mu > -1$. Если X^0 — невырожденный эллипсоид, то $G(t)$ имеет непустую внутренность при всех t из рассматриваемого интервала. Если $U(t) \rightarrow -1$ при $t \rightarrow \theta$, то множество достижимости стягивается в точку, что невозможно. Таким образом, решение системы сравнения остается в области, где правая часть уравнения липшицева.

При наличии нескольких оценочных функций $V^i(t, x)$, $i = 1, \dots, k$, можно для каждой из них построить свою систему сравнения и в качестве внешней оценки множества достижимости взять пересечение соответствующих множеств уровня. Подобная схема неприменима тогда, когда множества уровня функций V^i не ограничены (например, в случае линейных функций). В этом случае можно строить единую систему сравнения для вектор-функции $V = (V_1, \dots, V_k)$ по аналогии с системами сравнения для векторных функций Ляпунова [21]. Будем далее считать, что функции V^i удовлетворяют неравенствам

$$V_t^i(t, x) + \max_{u \in P} V_x^{i\top}(t, x)(A(t)x + B(t)u) \leq 0.$$

Пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$. Рассмотрим множество

$$E(t, \mu) = \{x : V^i(t, x) \leq \mu_i, i = 1, \dots, k\}.$$

Если $V(t_0, x^0) \leq 0$ для любого $x^0 \in X^0$, то $G^0(t) \subset \{x : V^i(t, x) \leq 0\}$, $i = 1, \dots, k$, $t \in [t_0, t_1]$, и множество $E(t, \mu)$ непусто при $\mu \in \mathbb{R}_+^n$ ($\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$). Пусть функции $V^i(t, x)$ таковы, что $E(t, \mu)$ ограничено. Положим

$$g_i(t, \mu) = \max\{V_x^{i\top}(t, x)f(t, x) : x \in E(t, \mu)\}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Из включения $E(t, \mu) \subset E(t, \tilde{\mu})$ при $\tilde{\mu} - \mu \in \mathbb{R}_+^n$ следует, что функции $g_i(t, \mu)$ монотонно не убывающие по всем переменным. Рассмотрим систему сравнения в \mathbb{R}^k вида

$$\frac{dU}{dt} = g(t, U), \quad U(t_0) = U^0, \quad (2.8)$$

где $g(t, U) = (g_1(t, U), \dots, g_k(t, U))$. Если система (2.8) имеет на $[t_0, \theta]$ единственное решение $U(t)$ с начальным состоянием U^0 , удовлетворяющим условию $V^i(t_0, x^0) \leq U_i^0$ для всех $x^0 \in X^0$, $i = 1, \dots, k$, то

$$G(\theta) \subset \bigcap_{i=1}^k \{x : V^i(\theta, x) \leq U_i(\theta)\}.$$

Доказательство включения вытекает из неравенства

$$\left. \frac{dV^i}{dt} \right|_{(1)}(t, x(t)) \leq V_x^{i\top}(t, x(t))f(t, x(t)) \leq g_i(t, V(t, x(t))),$$

которое выполняется вдоль любой траектории системы (2.1) и теоремы Важевского для дифференциальных неравенств [18; 19].

З а м е ч а н и е 1. Во избежание проблем, связанных с возможной пустотой множества $E(t, \mu)$ из-за вычислительной погрешности, можно при определении $E(t, \mu)$ к параметрам μ_i добавлять положительный параметр регуляризации ϵ . Этим будет обеспечиваться устойчивость вычислений за счет огрубления оценок. Если вместо $E(t, \mu)$ ввести систему из k множеств

$$E^i(t, \mu) = \{x : V^j(t, x) \leq \mu_j, j \neq i, V^i(t, x) \leq \mu_i\}$$

и в определении g^i брать более узкое множество $E^i(t, \mu)$ вместо $E(t, \mu)$, то функции g^i будут квазимонотонными. Это означает, что g^i монотонно не убывает по всем переменным, за исключением μ_i . Свойства квазимонотонности достаточно для применения теоремы сравнения, но при таком определении трудно добиться непрерывности функций g^i .

З а м е ч а н и е 2. Для квадратичных или линейных по x функций (в последнем случае при предположении об ограниченности пересечения их множеств уровня) можно доказать непрерывность и липшицевость по U функции $g(t, U)$, опираясь на теорему Робинсона [20] о системах выпуклых неравенств. Для этого надо предполагать непустоту внутренности $G^0(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

3. Оценки для многомерной управляемой системы с использованием векторных оценочных функций

В данном разделе рассматривается задача построения внешних оценок множества достижимости многомерной управляемой системы, допускающей разбиение на несколько независимых подсистем, связанных между собой нелинейными перекрестными связями. На основе оценок для подсистем строится оценка для области достижимости объединенной системы. Используется метод получения оценок [17], основанный на построении систем сравнения для аналогов векторных функций Ляпунова. В отличие от [17] здесь не требуется ограниченности функций, описывающих перекрестные связи.

Рассмотрим управляемую систему, динамика которой описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^{(i)} = f^i(t, x^{(i)}, u) + \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x) x^{(j)}, \quad i = 1, \dots, k, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (3.1)$$

где $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $u \in \mathbf{P}$, $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$, $x^{(i)}(t_0) = x^{i0} \in X^{i0}$, $i = 1, \dots, k$. Систему (3.1) будем считать состоящей из k подсистем соответствующей размерности. Уравнение i -й подсистемы имеет вид

$$\dot{x}^{(i)} = f^i(t, x^{(i)}, u),$$

где вектор f^i имеет соответствующую размерность. Подсистемы связаны друг с другом через управления u и через слагаемые $\sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x) x^{(j)}$, задающие влияние на i -ю подсистему остальных подсистем.

Здесь матричные функции $H_{ij}(t, x)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \theta]$.

Предположим, что для каждой системы

$$\dot{x}^{(i)} = f^i(t, x^{(i)}, u), \quad x^{(i)}(t_0) = x^{i0}, \quad u(t) \in \mathbf{P}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

можно построить функцию $V^i(t, x^{(i)})$, производная которой в силу данной системы удовлетворяет неравенству

$$\frac{dV^i}{dt} \leq V_t^i(t, x^{(i)}) + \max_{u \in \mathbf{P}} V_{x^{(i)}}^{i \top} f^i(t, x^{(i)}, u) \leq m^i(t).$$

Если перекрестные связи между подсистемами отсутствуют ($H_{ij}(t, x) = 0$, $i \neq j$), то справедлива следующая оценка для множества достижимости $G(\theta)$ системы (3.1)

$$G(\theta) \subset \left\{ x : V(\theta, x) \leq \int_{t_0}^{\theta} m(\tau) d\tau + \nu \right\},$$

где $V(t, x) = (V^1(t, x^{(1)}), \dots, V^k(t, x^{(k)}))$, $\nu_i = \max_{x^{i0} \in X^{i0}} V^i(t_0, x^{i0})$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$, $m(t) = (m^1(t), \dots, m^k(t))$. Здесь и далее для $a, b \in \mathbb{R}^k$ неравенство $a \leq b$ ($a < b$) означает, что $a_i \leq b_i$ ($a_i < b_i$) для $i = 1, \dots, k$.

Если $f^i(t, x^{(i)}, u) = A^i x^{(i)} + B^i u$, $i = 1, \dots, k$, и множество \mathbf{P} — эллипсоид (прямая сумма эллипсоидов), то в качестве V^i можно рассматривать квадратичные по $x^{(i)}$ функции; соответствующие включения превращаются в эллипсоидальные оценки (аппроксимации) множеств достижимости.

Нашей целью является получение оценок для множества достижимости системы (3.1) по имеющимся оценкам для подсистем. Далее будем считать, что выполняется следующее

Предположение 1. *Существуют непрерывные функции $\alpha_i(t) > 0$, $c_{1i}(t) > 0$, $c_{2i}(t) > 0$, $c_{3i}(t) > 0$, $m^i(t)$ на $[t_0, \theta]$ такие, что*

$$\frac{dV^i}{dt} \leq V_t^i(t, x^{(i)}) + \max_{u \in \mathbf{P}} V_{x^{(i)}}^{i \top} f^i(t, x^{(i)}, u) \leq -\alpha_i(t)V^i(t, x^{(i)}) + m^i(t),$$

и выполнены неравенства

$$c_{1i}(t)\|x^{(i)}\|^2 \leq V^i(t, x^{(i)}) \leq c_{2i}(t)\|x^{(i)}\|^2, \quad \|V_{x^{(i)}}^i(t, x^{(i)})\|^2 \leq c_{3i}(t)V^i(t, x^{(i)}). \quad (3.2)$$

Здесь dV^i/dt — производная в силу i -й системы, $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Последние неравенства выполняются, например, если функции $V^i(t, x^{(i)})$ по $x^{(i)}$ — положительно определенные квадратичные формы.

Положим

$$E(t, \mu) = \{x = (x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) : V^j(t, x) \leq \mu_j, j = 1, \dots, k\}.$$

Это множество непусто при $\mu \geq 0$. Пусть

$$h_{ij}(t, \mu) = \max \{\|H_{ij}(t, x)\| : x \in E(t, \mu)\}, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

где $\|\cdot\|$ — норма матрицы, подчиненная евклидовой норме векторов. Функции $h_{ij}(t, \mu)$ неотрицательные, монотонно не убывающие по μ . Для квадратичных по x функций $V^i(t, x)$ функции $h_{ij}(t, \mu)$ непрерывны и липшицевы по μ при $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, k$. Определим $k \times k$ матрицу $C(t, \mu)$ равенством

$$C(t, \mu) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1(t)}{2} & \beta_{12}(t, \mu) & \beta_{13}(t, \mu) & \cdots & \beta_{1k}(t, \mu) \\ \beta_{21}(t, \mu) & -\frac{\alpha_2(t)}{2} & \beta_{23}(t, \mu) & \cdots & \beta_{2k}(t, \mu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1}(t, \mu) & \beta_{k2}(t, \mu) & \beta_{k3}(t, \mu) & \cdots & -\frac{\alpha_k(t)}{2} \end{pmatrix},$$

где неотрицательные функции $\beta_{ij}(t, \mu)$ определены равенствами

$$\beta_{ij}(t, \mu) = \frac{c_{3i}(t) \sum_{j \neq i} h_{ij}^2(t, \mu)}{2\alpha_i(t)c_{1j}(t)}.$$

Функции $\beta_{ij}(t, \mu)$, очевидно, не убывают по μ .

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (систему сравнения)

$$\frac{dU}{dt} = C(t, U)U + m(t), \quad U(t_0) = U^0. \quad (3.3)$$

Правая часть системы непрерывна по t и липшицева по U в области $t \in [t_0, t_1]$, $U > 0$.

Теорема 2. *Пусть функции $V^i(t, x^{(i)})$ удовлетворяют предположению 1, $U(t)$ — решение уравнения (3.3), продолжимое на промежуток $[t_0, \theta]$, и $0 < \nu_i \leq U^i(t_0)$, $i = 1, \dots, k$. Тогда справедливо включение*

$$G(\theta) \subset \{x : V(\theta, x) \leq U(\theta)\}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Пусть $x \in G(\theta)$. Следовательно, существуют управление $u(t)$, удовлетворяющее ограничениям (2.2), и отвечающая этому управлению траектория $x(t)$ системы (3.1) такая, что $x(\theta) = x$. Найдем производную от V^i вдоль данной траектории

$$\frac{V^i(t, x(t))}{dt} = V_t^i(t, x^{(i)}(t)) + V_{x^{(i)}}^{i \top}(t, x^{(i)}(t)) \left(f^i(t, x^{(i)}(t), u(t)) + \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x(t))x^{(j)}(t) \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq -\alpha_i(t)V^i(t, x^{(i)}(t)) + m^i(t) + V_{x^{(i)}}^{i\top}(t, x^{(i)}(t)) \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x(t))x^{(j)}(t) \\ &\leq -\alpha_i(t)V^i(t, x^{(i)}(t)) + m^i(t) + \left(c_{3i}(t)V_{x^{(i)}}^{i\top}(t, x^{(i)}(t))\right)^{1/2} \left\| \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x(t))x^{(j)}(t) \right\|. \end{aligned}$$

Далее следуем стандартной схеме вывода дифференциальных неравенств для векторных функций Ляпунова (см., например, [21]). Используя неравенство

$$-az^2 + bz \leq -\frac{az^2}{2} + \frac{b^2}{2a}, \quad a, b > 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{V^i(t, x(t))}{dt} &\leq -\frac{\alpha_i(t)}{2}V^i(t, x^{(i)}(t)) + m^i(t) + \frac{c_{3i}(t)}{2\alpha_i(t)} \left\| \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x(t))x^{(j)}(t) \right\|^2 \\ &\leq -\frac{\alpha_i(t)}{2}V^i(t, x^{(i)}(t)) + m^i(t) + \frac{c_{3i}(t)}{2\alpha_i(t)} \sum_{j \neq i} h_{ij}^2(t, V(t, x(t))) \sum_{j \neq i} \|x^{(j)}(t)\|^2 \\ &\leq -\frac{\alpha_i(t)}{2}V^i(t, x^{(i)}(t)) + m^i(t) + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}(t, V(t, x(t)))V^j(t, x^{(i)}(t)), \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор-функция $V(t, x(t))$ удовлетворяет векторному дифференциальному неравенству

$$\frac{dV}{dt} \leq C(t, V)V + m(t). \quad (3.5)$$

Вектор-функция $F(t, V) = C(t, V)V + m(t)$ является квазимонотонной неубывающей по V в \mathbb{R}_+^n . Это означает, что для любого $i = 1, \dots, k$ при любых неотрицательных \hat{V}, \tilde{V} таких, что $\hat{V}_j \leq \tilde{V}_j, j \neq i, \hat{V}_i = \tilde{V}_i$, выполняется неравенство $F_i(\hat{V}) \leq F_i(\tilde{V})$. Действительно,

$$F_i(t, \hat{V}) - F_i(t, \tilde{V}) = \sum_{j \neq i} \left(\beta_{ij}(t, \hat{V})\hat{V}_j - \beta_{ij}(t, \tilde{V})\tilde{V}_j \right) \leq \sum_{j \neq i} \beta_{ij}(t, \tilde{V})(\hat{V}_j - \tilde{V}_j) \leq 0$$

в силу неотрицательности векторов \hat{V}, \tilde{V} и монотонного неубывания по V функций $\beta_{ij}(t, V)$. В этих условиях к уравнению (3.1) и неравенству (3.5) применима теорема Важевского, из которой следует, что $V(\theta, x) = V(\theta, x(\theta)) \leq U(\theta)$. Теорема доказана.

Если предполагать, что функции V^i удовлетворяют дифференциальным неравенствам

$$V_t^i(t, x) + V_x^{i\top} f(t, x, u) \leq m^i(t, V^i(t, x)),$$

то можно получить систему сравнения с правой частью, заданной вектор-функцией F , где

$$F_i(t, V) = m^i(t, V^i) + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}(t, V)\sqrt{V^i V^j}, \quad \beta_{ij}(t, V) = h_{ij}(t, V)\sqrt{\frac{c_{3i}(t)}{c_{1j}(t)}}, \quad i = 1, \dots, k.$$

4. Локальные вариации оценочных множеств

Оценки множества достижимости, рассмотренные в предыдущих разделах, сохраняют конфигурацию оценок линейной части системы. Так, эллипсоиды остаются эллипсоидами и для нелинейной системы, изменяются только их размеры. Здесь предлагается способ локального изменения оценивающих множеств в окрестности рассматриваемой точки. Данные оценки уже не сохраняют конфигурацию со временем, в принципе они более точны, однако требуют и существенно более трудоемких операций для своего построения.

Мы будем исходить из наличия оценки для линейной части, задаваемой функцией $V(t, x)$, которая удовлетворяет дифференциальному неравенству $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(2)} \leq m(t, V(t, x))$, где $m(t, V)$ — непрерывная функция.

Зададимся малым шагом по времени $\Delta t > 0$. Рассмотрим точку $y = x(t + \Delta t)$, в которую траектория системы (2.1) $x(\tau)$ приходит в момент времени $t + \Delta t$ из точки $x = x(t)$. Тогда

$$\|x - y\| \leq L(t, x)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t,$$

где

$$L(t, x) = \max_{u \in P} \|A(t)x + f(t, x) + B(t)u\|,$$

$\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора, $\alpha(\Delta t) \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Можно считать, не ограничивая общности, что α не зависит от момента t .

Если множество P выпукло, то для определения величины $L(t, x)$ надо решать задачу максимизации выпуклой функции на выпуклом множестве. Максимум в этом случае достигается в крайней точке множества P . Если, например, P — многогранник с вершинами p^1, \dots, p^m , то $L(t, x) = \max_{i=1, \dots, m} \|A(t)x + f(t, x) + B(t)p^i\|$.

Интегрируя неравенство

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} \leq m(t, V(t, x(t))) + V_x^\top(t, x(t))f(t, x(t))$$

на промежутке $[t, t + \Delta t]$, получим

$$\Delta t V_t(t, x) + V_x^\top(t, x)(y - x) \leq \Delta t(m(t, V(t, x)) + V_x^\top(t, x)f(t, x)) + \beta(\Delta t)\Delta t,$$

где $\beta(\Delta t) \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Обозначим $z = \Delta t^{-1}(y - x)$, тогда

$$\|z\| \leq L(t, x) + \alpha(\Delta t), \quad V_x^\top(t, x)z \leq p(t, x) + \beta(\Delta t),$$

где функция $p(t, x)$ определена равенством $p(t, x) = m(t, V(t, x)) + V_x^\top(t, x)f(t, x) - V_t(t, x)$.

Для $\varepsilon > 0$ определим множество

$$D_\varepsilon(x) = \{z \in \mathbb{R}^n: \|z\| \leq L(t, x) + \varepsilon, \quad V_x^\top(t, x)z \leq p(t, x) + \varepsilon\},$$

это множество непусто.

Определим моменты времени $t_k = t_0 + k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots$ и рассмотрим последовательность множеств

$$W^\varepsilon(t_{k+1}) = \bigcup_{x \in W^\varepsilon(t_k)} (x + \Delta t D_\varepsilon(x)), \quad k \geq 1, \quad W^\varepsilon(t_0) = \{x : V(t_0, x) \leq 0\}.$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $0 < \Delta t < \delta$ справедливо включение

$$G(t_k) \subset W^\varepsilon(t_k). \tag{4.6}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $\Delta t < \delta$ выполнялись неравенства $|\alpha(\Delta t)| < \varepsilon$, $|\beta(\Delta t)| < \varepsilon$. В момент t_0 $G(t_0) = X^0 \subset \{x : V(t_0, x) \leq 0\} = W^\varepsilon(t_0)$, т.е. включение (4.6) справедливо для $k = 0$. Пусть включение (4.6) выполнено в момент t_k ; покажем, что оно выполнено и в момент t_{k+1} .

Пусть $y \in G(t_{k+1})$, тогда существуют точка $x \in G(t_k)$ и траектория системы (2.1) $x(t)$, $i \in [t_0, t_1]$, такие, что $x(t_k) = x$, $x(t_{k+1}) = y$. Пусть $z = \Delta t^{-1}(y - x)$. Повторяя приведенные выше выкладки, получим $z \in D_\varepsilon(x)$, $y \in x + \Delta t D_\varepsilon(x)$ и, значит, $y \in W^\varepsilon(t_{k+1})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. **Krasovski N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
4. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problem of ordinary differential equations: dynamic solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
5. **Chernousko F.L.** State estimation for dynamic systems. Boca Raton: CRC Press, 1994. 304 p.
6. **Lempio F., Veliov V.M.** Discrete approximations to differential inclusions // GAMM Mitt. 1998. Vol. 21, no. 2. P. 101–135.
7. **Гусейнов Х.И., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.** Об аппроксимации областей достижимости систем управления // Прикл. математика и механика. 1998. № 2. С. 179–186.
8. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.
9. **Kurzanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Systems & Control: Foundations & Applications. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
10. **Kurzanski A.B., Varaiya P.** Reachability analysis for uncertain systems — the ellipsoidal technique // Dyn. Contin. Discrete Impulse Syst. Ser. B. 2002. No. 3. P. 347–367.
11. **Костроусова Е.К.** Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелограмов // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
12. **Filippova T.F.** Estimates of trajectory tubes of uncertain nonlinear control systems // Lecture Notes in Computer Sciences. Vol. 5910. Berlin: Springer-Verlag, 2010. P. 272–279.
13. **Sethian J.A.** Level set methods and fast marching methods. New York: Cambridge Univ. Press, 1999. 378 p.
14. **Kurzanski A.B., Varaiya P.** Dynamic optimization for reachability problems // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 108, no. 2. P. 227–251.
15. **Mitchell I.M., Tomlin C.J.** Overapproximating reachable sets by Hamilton–Jacobi projections // J. Sci. Comput. 2003. Vol. 19, no. 1–3. P. 323–346.
16. **Куржанский А.Б.** Принцип сравнения для уравнений Гамильтона — Якоби в теории управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.
17. **Гусев М.И.** Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 82–94.
18. **Walter W.** Differential and integral inequalities. Berlin: Springer, 1970. 352 p.
19. **Pachpatte B.G.** Inequalities for differential and integral equations // Mathematics in Science and Engineering. Vol. 197. London: Academic Press, 1986. 611 p.
20. **Robinson S.M.** An application of error bounds for convex programming in a linear space // SIAM J. Control Optim. 1975. No. 13. P. 271–273.
21. **Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.** Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 479 с.

Гусев Михаил Иванович

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: gmi@imm.uran.ru.

Поступила 24.12.2010

УДК 517.929

НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХАТЧИНСОНА¹**Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков**

Для уравнения Хатчинсона рассматривается некорректная задача восстановления численности популяции. Построены асимптотические регуляризованные решения на конечном отрезке отрицательной полуоси.

Ключевые слова: уравнение Хатчинсона, некорректная задача, асимптотические методы.

Yu. F. Dolgii, P. G. Surkov. Ill-posed problem of reconstructing the population magnitude in Hutchinson's mathematical model.

The ill-posed problem of reconstructing the population magnitude is considered for Hutchinson's equation. Asymptotic regularized solutions are constructed on a finite interval of the negative half-line.

Keywords: Hutchinson's equation, ill-posed problem, asymptotic methods.

1. Постановка задачи

Рассматривается популяционная модель Хатчинсона, описываемая дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{1}{k} N(t-h) \right) N(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где $N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ — численность популяции, r — мальтузианский коэффициент линейного роста, k — емкость среды обитания, h — возраст полового созревания.

Исследованию различных биологических факторов, влияющих на изменение численности популяции, посвящена работа [1]. При анализе закономерностей изменения численности популяции используются результаты наблюдений за изменением численности биологических популяций [2]. Натурные наблюдения за изменением численности популяции требуют существенных материальных и трудовых затрат. Математическое моделирование может облегчить решение проблемы изучения динамики количественного изменения численности популяции [3].

Уравнение Хатчинсона описывает математическую модель одновидового биоценоза, когда влияние хищников незначительно, среда обитания однородна, миграционные процессы не оказывают существенного влияния на изменение численности популяции и количество доступной пищи регулярно восстанавливается до некоторого уровня.

Исследованию различных качественных вопросов изменения численности популяции для математической модели Хатчинсона посвящены работы [3; 4]. Компьютерное моделирование изменения численности популяций проводилось в работах [5; 6]. Мотивация этих работ связана с прогнозом будущего изменения численности популяции. Успешному решению этой проблемы помогает корректность начальной задачи для уравнения Хатчинсона. Основной качественный результат состоит в том, что в математической модели Хатчинсона численность популяции

¹Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН “Математическая теория управления” (проект 09-П-1-1014), Урало-Сибирского интеграционного проекта 09-С-1-1010 и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-65590.2010.1).

при возрастании времени стремится к постоянной или в модели устанавливаются периодические колебания в зависимости от значения параметра h . Если популяция находится на стадии переходного процесса изменения численности, то представляет интерес обратная задача определения численности популяции в предыдущие промежутки времени. С математической точки зрения она более сложная, так как принадлежит классу некорректных задач [7].

В настоящей работе решается некорректная задача восстановления численности популяции в математической модели Хатчинсона.

Предполагается известной информация о численности популяции на промежутке времени $[t_0 - h, t_0]$. В дальнейшем без ограничения общности будем полагать, что $t_0 = 0$. Численность популяции на отрезке $[-h, 0]$ определяется положительной функцией φ , принадлежащей сепарабельному гильбертову пространству $H = L_2[-h, 0] \times \mathbb{R}$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \psi(0)\varphi(0) + \int_{-h}^0 \psi(s)\varphi(s)ds$. При восстановлении численности используем метод шагов в сторону убывания времени. Тогда для нахождения функций $x_m(\vartheta) = N(mh + \vartheta)$, $\vartheta \in [-h, 0]$, $m \leq -1$, имеем систему уравнений

$$U(x_m) = x_{m+1}, \quad m \leq -1, \quad x_0 = \varphi, \quad (1.2)$$

где оператор $U: H \rightarrow H$ определяется формулой

$$U(x)(\vartheta) = \exp\left(r(h + \vartheta) - \frac{r}{k} \int_{-h}^{\vartheta} x(s) ds\right)x(0), \quad \vartheta \in [-h, 0].$$

Таким образом, восстановление численности популяции связано с решением некорректной задачи

$$U(x) = \varphi.$$

2. Определяющая система уравнений для нахождения значений регуляризирующего оператора

При решении поставленной некорректной задачи используем метод регуляризации А.Н. Тихонова. Выбираем стабилизирующий функционал вида

$$\Omega[x] = Gx^2(0) + \int_{-h}^0 (Qx^2(s) + Px'^2(s))ds, \quad x \in W_2^1[-h, 0],$$

где G, P, Q — положительные числа, x' — производная функции x . Требуется найти для фиксированного положительного значения параметра регуляризации α элемент $x_\alpha \in W_2^1[-h, 0]$, минимизирующий сглаживающий функционал

$$M^\alpha[\varphi, x] = (U(x) - \varphi, U(x) - \varphi) + \alpha\Omega[x], \quad x \in W_2^1[-h, 0].$$

Находим необходимое условие минимума функционала [8, с. 113], дифференцируя сглаживающий функционал по Гато

$$\begin{aligned} M_x^\alpha[\varphi, y]' &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^{-1}((U(x) - \varphi + \mu U_x'(x)y, U(x) - \varphi + \mu U_x'(x)y) + \alpha\Omega[x + \mu y] \\ &\quad - (U(x) - \varphi, U(x) - \varphi) - \alpha\Omega[x] + O(\mu^2)) = (U(x) - \varphi, U_x'(x)y) \\ &\quad + \alpha\left(y(0)Gx(0) + \int_{-h}^0 (y(s)Qx(s) + y'(s)Px'(s)) ds\right). \end{aligned}$$

В результате имеем

$$(U_x^{l*}(x)U(x) - U_x^{l*}(x)\varphi, y) + \alpha \left(y(0)Gx(0) + \int_{-h}^0 (y(s)Qx(s) + y'(s)Px'(s)) ds \right) = 0.$$

Здесь производная Гато оператора U в точке x определяется формулой

$$(U_x^l(x)y)(\vartheta) = \exp \left(r(h + \vartheta) - \frac{r}{k} \int_{-h}^{\vartheta} x(s) ds \right) \left(y(0) - \frac{r}{k} x(0) \int_{-h}^{\vartheta} y(s) ds \right), \quad \vartheta \in [-h, 0].$$

Сопряженный оператор $U_x^{l*}(x)$ определяется формулами

$$(U_x^{l*}(x)y)(\vartheta) = \begin{cases} \exp \left(rh - \frac{r}{k} \int_{-h}^0 x(s) ds \right) \\ \times \left(y(0) + \int_{-h}^0 \exp \left(rs - \frac{r}{k} \int_0^s x(s_1) ds_1 \right) y(s) ds \right), & \vartheta = 0, \\ -\frac{r}{k} x(0) \exp \left(rh - \frac{r}{k} \int_{-h}^0 x(s) ds \right) \\ \times \left(y(0) + \int_{\vartheta}^0 \exp \left(rs - \frac{r}{k} \int_0^s x(s_1) ds_1 \right) y(s) ds \right), & \vartheta \in [-h, 0). \end{cases}$$

Пользуясь определением скалярного произведения в пространстве H , преобразуем необходимое условие минимума сглаживающего функционала

$$y(0)((U_x^{l*}(x)U(x))(0) - (U_x^{l*}(x)\varphi)(0)) + \int_{-h}^0 y(s)((U_x^{l*}(x)U(x))(s) - (U_x^{l*}(x)\varphi)(s)) ds \\ + \alpha y(0)Gx(0) + \alpha \int_{-h}^0 (y(s)Qx(s) + y'(s)Px'(s)) ds = 0, \quad x \in W_2^1[-h, 0], \quad (2.1)$$

которое должно быть выполнено при любых $y \in W_2^1[-h, 0]$. Для функций $x \in W_2^2[-h, 0]$, применяя формулу интегрирования по частям, преобразуем интеграл в последнем слагаемом. Тогда условие (2.1) принимает вид

$$y(0)((U_x^{l*}(x)U(x))(0) - (U_x^{l*}(x)\varphi)(0) + \alpha(Gx(0) + Px'(0))) - \alpha y(-h)Px'(-h) \\ + \int_{-h}^0 y(s)((U_x^{l*}(x)U(x))(s) - (U_x^{l*}(x)\varphi)(s) + \alpha(Qx(s) - Px''(s))) ds = 0$$

и должно быть выполнено для любых $y \in H$. Возможный минимизирующий элемент x_α удовлетворяет системе уравнений

$$(U_x^{l*}(x)U(x))(\vartheta) + \alpha(Qx(\vartheta) - Px''(\vartheta)) = (U_x^{l*}(x)\varphi)(\vartheta), \quad \vartheta \in [-h, 0), \\ (U_x^{l*}(x)U(x))(0) + \alpha(Gx(0) + Px'(0)) = (U_x^{l*}(x)\varphi)(0), \quad x'(-h) = 0. \quad (2.2)$$

Вводя вспомогательные функции ψ и χ с помощью формул

$$\begin{aligned}\psi(\vartheta) &= (U_x'^*(x)(\chi - \varphi))(\vartheta), \quad \vartheta \in [-h, 0], \quad \psi(0) = \psi(-0), \\ \chi(\vartheta) &= (Ux)(\vartheta), \quad \vartheta \in [-h, 0],\end{aligned}$$

и используя представления операторов U и $U_x'^*(x)$, систему уравнений для минимизирующего элемента можно заменить эквивалентной краевой задачей для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Утверждение. *Возможный минимизирующий элемент x_α является компонентой решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$x'' = P^{-1}Qx + \alpha^{-1}P^{-1}\psi, \quad \psi' = \frac{r}{k}\chi(\chi - \varphi(\vartheta)), \quad \chi' = r\left(1 - \frac{1}{k}x\right)\chi \quad (2.3)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}x'(-h) &= 0, \quad \psi(-h) - \alpha\frac{r}{k}x(0)(Gx(0) + Px'(0)) = 0, \\ \psi'(0) + \psi(0) &= 0, \quad x(0) = \chi(-h),\end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\varphi \in H$, компонента χ_α решения краевой задачи (2.3), (2.4) удовлетворяет условию $\chi_\alpha = Ux_\alpha$, α — малый положительный параметр.

Доказательство. Используя вспомогательную функцию ψ и продолжая первое уравнение системы (2.2) на $[-h, 0]$, получим

$$\psi(\vartheta) + \alpha(Qx(\vartheta) - Px''(\vartheta)) = 0, \quad \vartheta \in [-h, 0].$$

Из определения функции χ следует, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\chi'(\vartheta) = r\chi(\vartheta)\left(1 - \frac{1}{k}x(\vartheta)\right), \quad \vartheta \in [-h, 0],$$

с краевым условием $\chi(-h) = x(0)$.

Из определения функции ψ следует, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\psi'(\vartheta) = \frac{r}{k}\chi(\vartheta)(\chi(\vartheta) - \varphi(\vartheta)), \quad \vartheta \in [-h, 0],$$

с краевым условием

$$\psi(0) = \psi(-0) = -\frac{r}{k}\chi(0)(\chi(0) - \varphi(0)) = -\psi'(0).$$

Используя вспомогательные функции, перепишем второе уравнение системы (2.2),

$$\begin{aligned}\exp\left(rh - \frac{r}{k}\int_{-h}^0 x(s) ds\right)\left(\chi(0) - \varphi(0) + \int_{-h}^0 \exp\left(rs - \frac{r}{k}\int_0^s x(s_1) ds_1\right)(\chi(s) - \varphi(s)) ds\right) \\ + \alpha(Gx(0) + Px'(0)) = 0.\end{aligned}$$

Учитывая значение вспомогательной функции $\psi(-h)$, последнее уравнение преобразуем к следующему виду:

$$\psi(-h) - \alpha\frac{r}{k}x(0)(Gx(0) + Px'(0)) = 0.$$

□

Исключим из системы уравнений (2.3) и краевых условий (2.4) вспомогательные переменные ψ и χ . Для решения этой задачи наложим дополнительные условия на начальную

функцию $\varphi \in W_2^1[-h, 0]$ и решение краевой задачи: $\max_{\vartheta \in [-h, 0]} |\chi(\vartheta) - \varphi(\vartheta)|$ — малая величина. Последнее ограничение согласуется с постановкой задачи регуляризации и позволяет из второго уравнения системы (2.3) найти

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\varphi(\vartheta) + \sqrt{\varphi^2(\vartheta) + 4\frac{k}{r}\psi'} \right), \quad (2.5)$$

а также гарантировать выполнение условия $\min_{\vartheta \in [-h, 0]} (\varphi^2(\vartheta) + (4k/r)\psi'(\vartheta)) > 0$.

Вычисляя производную от последнего выражения и подставляя ее в третье уравнение системы (2.3), получаем

$$\varphi'(\vartheta) + \left(\varphi^2(\vartheta) + 4\frac{k}{r}\psi' \right)^{-1/2} \left(\varphi(\vartheta)\varphi'(\vartheta) + 2\frac{k}{r}\psi'' \right) = \left(\varphi(\vartheta) + \left(\varphi^2(\vartheta) + 4\frac{k}{r}\psi' \right)^{1/2} \right) \left(r - \frac{r}{k}x \right). \quad (2.6)$$

Дважды дифференцируя первое уравнение системы (2.3), находим

$$\psi' = \alpha P x''' - \alpha Q x', \quad \psi'' = \alpha P x^{IV} - \alpha Q x''.$$

Исключая ψ из уравнения (2.6) и вводя переменные с помощью формул $x_1 = x$, $x_2 = \alpha^{1/4}x'$, $x_3 = \alpha^{1/2}x''$, $x_4 = \alpha^{3/4}x'''$, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\alpha^{1/4}x'_1 = x_2, \quad \alpha^{1/4}x'_2 = x_3, \quad \alpha^{1/4}x'_3 = x_4,$$

$$\alpha^{1/4}x'_4 = \frac{r}{2kP} \left(\varphi^2(\vartheta) + 4\frac{k}{r}(\alpha^{1/4}Px_4 - \alpha^{3/4}Qx_2) \right)^{1/2} \left(\varphi(\vartheta) \left(r - \frac{r}{k}x_1 \right) - \varphi'(\vartheta) \right) \quad (2.7)$$

$$+ \alpha^{1/2} \frac{Q}{P} x_3 + \frac{r}{2kP} \left(\varphi^2(\vartheta) + 4\frac{k}{r}(\alpha^{1/4}Px_4 - \alpha^{3/4}Qx_2) \right) \left(r - \frac{r}{k}x_1 \right) - \frac{r}{2kP} \varphi(\vartheta) \varphi'(\vartheta).$$

Применяя введенные выше переменные в краевых условиях (2.4), имеем

$$x_2(-h) = 0, \quad Px_3(-h) - \alpha^{1/2}Qx_1(-h) - \alpha^{1/4} \frac{r}{k} Px_1(0)x_2(0) - \alpha^{1/2} \frac{r}{k} Gx_1^2(0) = 0,$$

$$Px_4(0) - \alpha^{1/2}Qx_2(0) + \alpha^{1/4}Px_3(0) - \alpha^{3/4}Qx_1(0) = 0, \quad (2.8)$$

$$2x_1(0) - \varphi(-h) - \left(\varphi^2(-h) + 4\frac{r}{k}(\alpha^{1/4}Px_4(-h) - \alpha^{3/4}Qx_2(-h)) \right)^{1/2} = 0.$$

Вводя вектор $X = \|x_j\|_1^4$, систему (2.7) запишем в векторной форме

$$\frac{dX}{d\vartheta} = \alpha^{-1/4} \mathcal{A}(\vartheta)X + \alpha^{-1/4} \tilde{\Phi}_1(\vartheta) + \tilde{\Phi}_2(\vartheta, \alpha, X), \quad (2.9)$$

где

$$\mathcal{A}(\vartheta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -r^2\varphi^2(\vartheta)/(k^2P) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_1^\top(\vartheta) = (0, 0, 0, r\varphi(\vartheta)(r\varphi(\vartheta) - \varphi'(\vartheta))/(kP)),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2^\top(\vartheta, \alpha, X) = & \left(0, 0, 0, \frac{2(r\varphi(\vartheta)(1 - (1/k)x_1) - \varphi'(\vartheta))(Px_4 - \alpha^{1/2}Qx_2)}{(\varphi^2(\vartheta) + (4k/r)(\alpha^{1/4}Px_4 - \alpha^{3/4}Qx_2))^{1/2} + \varphi(\vartheta)} + \alpha^{1/4}\frac{Q}{P}x_3 \right. \\ & \left. + \frac{2r}{P}(Px_4 - \alpha^{1/2}Qx_2)\left(1 - \frac{1}{k}x_1\right) \right). \end{aligned}$$

В системе (2.9) сделаем замену переменных

$$X = T(\vartheta)y, \quad (2.10)$$

где $T(\vartheta) = \|t_{ij}(\vartheta)\|_1^4 = \|e_j^{i-1}\lambda^{i-1}(\vartheta)\|_1^4$ — матрица, приводящая матрицу $\mathcal{A}(\vartheta)$ к жордановой форме, $\lambda(\vartheta) = (r\varphi(\vartheta)/(k\sqrt{P}))^{1/2}$, $\vartheta \in [-h, 0]$, $e_1 = \bar{e}$, $e_2 = e$, $e_3 = -\bar{e}$, $e_4 = -e$, $e = (1+i)/\sqrt{2}$.

Тогда получим систему

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \alpha^{-1/4}J(\vartheta)y + \alpha^{-1/4}\Phi_1(\vartheta) + \Phi_2(\vartheta, \alpha, y), \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} J(\vartheta) &= \text{diag}(e_1\lambda(\vartheta), e_2\lambda(\vartheta), e_3\lambda(\vartheta), e_4\lambda(\vartheta)), \\ \Phi_1(\vartheta) &= T^{-1}(\vartheta)\tilde{\Phi}_1(\vartheta) = r/(4kP)\lambda^{-3}(\vartheta)\varphi(\vartheta)(r\varphi(\vartheta) - \varphi'(\vartheta))\|e_j^{-3}\|_1^4, \\ \Phi_2(\vartheta, \alpha, y) &= T^{-1}(\vartheta)(\tilde{\Phi}_2(\vartheta, \alpha, T(\vartheta)y) - T'(\vartheta)y), \quad \vartheta \in [-h, 0]. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть $\varphi \in W_\infty^2[-h, 0]$. Тогда компоненты решения системы (2.11) определяются асимптотическими формулами

$$\begin{aligned} y_j(\vartheta, \alpha, D) &= \exp\left(\alpha^{-1/4}e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) D_j - e_j^{-1}\lambda^{-1}(\vartheta)\Phi_1^j(\vartheta) \\ &+ O(\alpha^{1/4}; \vartheta, D_1, \dots, D_4), \quad j = \overline{1, 4}, \quad \vartheta \in [-h, 0], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $D = \|D_s\|_1^4$, D_s , $s = \overline{1, 4}$ — произвольные постоянные векторы из \mathbb{C}^n .

Доказательство. Решения системы

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \alpha^{-1/4}J(\vartheta)y$$

определяются формулами

$$y_j(\vartheta, \alpha, \hat{D}_j) = \exp\left(\alpha^{-1/4}e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) \hat{D}_j, \quad j = \overline{1, 4}, \quad (2.13)$$

где \hat{D}_j , $j = \overline{1, 4}$ — произвольные постоянные из \mathbb{C}^n , $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$, $\vartheta_3 = \vartheta_4 = -h$.

Используя для нелинейной системы (2.11) метод вариации произвольных постоянных, имеем

$$\hat{D}_j'(\vartheta) = \exp\left(-\alpha^{-1/4}e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) \left(\alpha^{-1/4}\Phi_1^j(\vartheta) + \Phi_2^j(\vartheta, \alpha, y(\vartheta, \alpha, \hat{D}(\vartheta)))\right), \quad j = \overline{1, 4}.$$

Интегрируя последние равенства, получаем

$$\hat{D}_j(\vartheta) = \tilde{D}_j + \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \exp\left(-\alpha^{-1/4}e_j \int_{\vartheta_j}^s \lambda(\tau) d\tau\right) \left(\alpha^{-1/4}\Phi_1^j(s) + \Phi_2^j(s, \alpha, y(s, \alpha, \hat{D}(s)))\right) ds, \quad j = \overline{1, 4},$$

где \tilde{D}_j , $j = \overline{1,4}$ — новые постоянные.

Подставляя последнее выражение в (2.13), находим

$$y_j(\vartheta, \alpha, \hat{D}_j(\vartheta)) = \exp\left(\alpha^{-1/4} e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) \tilde{D}_j + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2, \quad j = \overline{1,4}, \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \alpha^{-1/4} \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \exp(\alpha^{-1/4} e_j \int_s^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau) \Phi_1^j(s) ds, \\ \mathcal{I}_2 &= \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \exp\left(\alpha^{-1/4} e_j \int_s^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) \times \Phi_2^j(s, \alpha, y(s, \alpha, \hat{D}(s))) ds. \end{aligned}$$

Применяя к \mathcal{I}_1 формулу интегрирования по частям, имеем

$$\mathcal{I}_1 = -(e_j \lambda(\vartheta))^{-1} \Phi_1^j(\vartheta) + \exp\left(\alpha^{-1/4} e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) (e_j \lambda(\vartheta_j))^{-1} \Phi_1^j(\vartheta_j) + O(\alpha^{1/4}; \vartheta).$$

Подставляя последние формулы в (2.14), получаем систему нелинейных интегральных уравнений

$$\hat{y}_j(\vartheta) = f_j(\vartheta, \alpha, D_j) + \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \exp\left(\alpha^{-1/4} e_j \int_s^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) \Phi_2^j(s, \alpha, \hat{y}(s)) ds = (A\hat{y})_j(\vartheta), \quad j = \overline{1,4}, \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{y}_j(\vartheta) &= y_j(\vartheta, \alpha, \hat{D}_j(\vartheta)), \\ f_j(\vartheta, \alpha, D_j) &= \exp(\alpha^{-1/4} e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau) D_j - (e_j \lambda(\vartheta))^{-1} \Phi_1^j(\vartheta) + O(\alpha^{1/4}; \vartheta), \quad \vartheta \in [-h, 0], \\ D_j &= \tilde{D}_j + (e_j \lambda(\vartheta_j))^{-1} \Phi_1^j(\vartheta_j), \quad j = \overline{1,4}, \end{aligned}$$

— новые произвольные постоянные.

Используя принцип сжатых отображений [9, с. 605], покажем, что система уравнений (2.15) имеет единственное решение в пространстве $L_\infty([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ при малых значениях α на множестве $\Omega = \{\hat{y}(\cdot): \|\hat{y}(\cdot) - f(\cdot, \alpha, D)\|_\infty \leq \varepsilon\}$. Здесь $f(\cdot, \alpha, D) = \|f_j(\cdot, \alpha, D_j)\|_1^4$, $D = \|D_j\|_1^4$, $\|\hat{y}(\cdot)\|_\infty = \text{vrai sup}_{\vartheta \in [-h, 0]} \max_{1 \leq j \leq 4} |\hat{y}_j(\vartheta)|$, ε — некоторое малое положительное число. Действительно, при малых значениях α выполняется условие $A\Omega \subseteq \Omega$, так как

$$\begin{aligned} |(A\hat{y})_j(\vartheta) - f_j(\vartheta, \alpha, D_j)| &\leq \text{vrai sup}_{\vartheta \in [-h, 0]} \max_{1 \leq j \leq 4} \left| \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda(s) \exp\left(\alpha^{-1/4} \text{Re } e_j \int_s^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) ds \right| \Psi \\ &\leq \Psi \sqrt{2} \alpha^{1/4} \text{vrai sup}_{\vartheta \in [-h, 0]} \max_{1 \leq j \leq 4} \left(1 - \exp\left(\alpha^{-1/4} \text{Re } e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right)\right) \leq \sqrt{2} \alpha^{1/4} \Psi, \end{aligned}$$

где $\Psi = \text{vrai sup}_{s \in [-h, 0]} \max_{1 \leq j \leq 4} |\Phi_2^j(s, \alpha, \hat{y}(s)) / \lambda(s)|$.

Используя условия Липшица $|\Phi_2^j(s, \alpha, \hat{y}_1(s)) - \Phi_2^j(s, \alpha, \hat{y}_2(s))| \leq L|\hat{y}_1(s) - \hat{y}_2(s)|$, $s \in [-h, 0]$, $1 \leq j \leq 4$, получаем

$$\begin{aligned} & |(A\hat{y}_1)_j(\vartheta) - (A\hat{y}_2)_j(\vartheta)| \\ & \leq \text{vrai} \sup_{\vartheta \in [-h, 0]} \max_{1 \leq j \leq 4} \left| \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \exp \left(\alpha^{-1/4} \text{Re} e_j \int_s^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau \right) (\Phi_2^j(s, \alpha, \hat{y}_1(s)) - \Phi_2^j(s, \alpha, \hat{y}_2(s))) ds \right| \\ & \leq L \text{vrai} \sup_{\vartheta \in [-h, 0]} \max_{1 \leq j \leq 4} |\hat{y}_1(s) - \hat{y}_2(s)| \text{vrai} \sup_{\vartheta \in [-h, 0]} \max_{1 \leq j \leq 4} \left| \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \exp \left(\alpha^{-1/4} \text{Re} e_j \int_s^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau \right) ds \right| \\ & \leq \frac{\sqrt{2}L\alpha^{1/4}}{\min_{\vartheta \in [-h, 0]} \lambda(\vartheta)} \text{vrai} \sup_{\vartheta \in [-h, 0]} \max_{1 \leq j \leq 4} \left(1 - \exp \left(\alpha^{-1/4} \text{Re} e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau \right) \right) \|\hat{y}_1 - \hat{y}_2\|_{\infty} \\ & \leq \frac{L\sqrt{2}\alpha^{1/4}}{\min_{\vartheta \in [-h, 0]} \lambda(\vartheta)} \|\hat{y}_1(\cdot) - \hat{y}_2(\cdot)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор A является сжимающим на Ω . Далее, используя метод последовательных приближений [9, с. 610] и равенство $\|Af - f\|_{\infty} = O(\alpha^{1/4})$, находим

$$\|y(\cdot, \alpha, D) - f(\cdot, \alpha, D)\|_{\infty} = O(\alpha^{1/4}). \quad \square$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда компоненты решения краевой задачи (2.7), (2.8) определяются асимптотическими формулами

$$x_s(\vartheta, \varphi, \alpha) = \mathbb{S}_s(\vartheta, \alpha, \varphi) \Delta(\varphi) + \delta_{s1} \frac{k}{r} \left(r - \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} \right) + O(\alpha^{1/4}; \vartheta, \varphi), \quad s = \overline{1, 4}, \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_s(\vartheta, \alpha, \varphi) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^2 e_j^{s-2} \exp(\alpha^{-1/4} e_j \int_0^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau) \lambda^{s-1}(\vartheta), \quad \vartheta \in [-h, 0], \\ \Delta(\varphi) &= \varphi(-h) - (k/r) (r - \varphi'(0)/\varphi(0)). \end{aligned}$$

Доказательство. Используя асимптотические представления компонент решения (2.12) системы (2.11) и замену (2.10), находим компоненты решения системы (2.7)

$$\begin{aligned} x_s(\vartheta, \alpha) &= \sum_{j=1}^4 e_j^{s-1} \lambda^{s-1}(\vartheta) \exp \left(\alpha^{-1/4} e_j \int_{\vartheta_j}^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau \right) D_j + \delta_{s1} \frac{k}{r} \left(r - \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} \right) \\ &+ O(\alpha^{1/4}; \vartheta, D_1, \dots, D_4), \quad s = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Подставляя найденные асимптотические представления в краевые условия (2.8), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} e_3 D_3 + e_4 D_4 + O(\alpha^{1/4}; D_1, \dots, D_4) &= 0, \\ e_3^2 D_3 + e_4^2 D_4 + O(\alpha^{1/4}; D_1, \dots, D_4) &= 0, \\ e_1^3 D_1 + e_2^3 D_2 + O(\alpha^{1/4}; D_1, \dots, D_4) &= 0, \\ D_1 + D_2 + O(\alpha^{1/4}; D_1, \dots, D_4) &= \Delta(\varphi). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Последняя система при $\alpha = 0$ имеет единственное решение, тогда, учитывая асимптотику уравнений системы (2.18), находим

$$D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e_2\Delta(\varphi) + O(\alpha^{1/4}), \quad D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e_1\Delta(\varphi) + O(\alpha^{1/4}),$$

$$D_3 = O(\alpha^{1/4}), \quad D_4 = O(\alpha^{1/4}).$$

Подставляя найденные значения постоянных в (2.17), получаем (2.16). \square

3. Зависимость параметра регуляризации от допустимой погрешности

Поскольку $Ux_\alpha = \chi_\alpha$, то уравнение невязки $(Ux - \varphi, Ux - \varphi) = \delta^2$ имеет вид

$$\delta^2 = (\chi_\alpha(0, \varphi) - \varphi(0))^2 + \int_{-h}^0 (\chi_\alpha(s, \varphi) - \varphi(s))^2 ds.$$

Используя в (2.5) переменные x_2, x_4 , получаем

$$(\chi_\alpha(\vartheta, \varphi) - \varphi(\vartheta))^2 = \frac{4k^2 P^2 x_4^2(\vartheta, \alpha, \varphi)}{r^2 \varphi^2(\vartheta)} \alpha^{1/2} - \frac{4k^3 P^3 x_4^3(\vartheta, \alpha, \varphi)}{r^3 \varphi^4(\vartheta)} \alpha^{3/4} + O(\alpha; \vartheta, \varphi). \quad (3.1)$$

Учитывая формулы (2.16), находим

$$x_4(\vartheta, \alpha, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda^3(\vartheta) \Delta(\varphi) \sum_{j=1}^2 e_j^2 \exp\left(\alpha^{-1/4} e_j \int_0^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) + O(\alpha^{1/4}; \vartheta, \varphi),$$

$$x_4^2(\vartheta, \alpha, \varphi) = \frac{\lambda^6(\vartheta) \Delta^2(\varphi)}{2} \sum_{k,j=1}^2 e_k^2 e_j^2 \exp\left(\alpha^{-1/4} (e_k + e_j) \int_0^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right)$$

$$+ \sqrt{2} \lambda^3(\vartheta) \Delta(\varphi) \sum_{j=1}^2 e_j^2 \exp\left(\alpha^{-1/4} e_j \int_0^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) O(\alpha^{1/4}; \vartheta, \varphi) + O(\alpha^{1/2}; \vartheta, \varphi),$$

$$x_4^3(\vartheta, \alpha, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{4} \lambda^9(\vartheta) \Delta^3(\varphi) \sum_{k,j,m=1}^2 e_k^2 e_j^2 e_m^2 \exp\left(\alpha^{-1/4} (e_k + e_j + e_m) \int_0^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau\right) + O(\alpha^{1/4}; \vartheta, \varphi).$$

Тогда имеем $x_4(0) = O(\alpha^{1/4}; \varphi)$, $(\chi_\alpha(0, \varphi) - \varphi(0))^2 = O(\alpha; \varphi)$. Учитывая в (3.1) выписанные выше асимптотические формулы, получаем

$$\int_{-h}^0 (\chi_\alpha(s, \varphi) - \varphi(s))^2 ds = \alpha^{3/4} \frac{2k^2 P^2}{r^2} \Delta^2(\varphi) \sum_{k,j=1}^2 \frac{e_j^2 e_k^2}{e_j + e_k} \frac{\lambda^5(0)}{\varphi^2(0)} + O(\alpha; \varphi).$$

В результате имеем формулу

$$\delta^2 = \alpha^{3/4} \gamma(\varphi) + O(\alpha; \varphi),$$

где $\gamma(\varphi) = \sqrt{2} \Delta^2(\varphi) \sqrt{r P^{3/2} \varphi(0) / k}$.

При $\Delta(\varphi) \neq 0$ полученное уравнение имеет единственное непрерывное решение при малых положительных δ , определяемое формулой

$$\alpha(\delta, \varphi) = \gamma^{-4/3}(\varphi) \delta^{8/3} + O(\delta^{10/3}, \varphi). \quad (3.2)$$

Теорема 3. Значение регуляризирующего оператора для уравнения $Ux = \varphi$ на множестве $D = \{\varphi : \Delta(\varphi) \neq 0, \varphi \in W_\infty^2[-h, 0]\}$ определяется асимптотической формулой

$$R(\varphi, \delta)(\vartheta) = \mathbb{S}(\vartheta, \delta, \varphi)\Delta(\varphi) + \frac{k}{r} \left(r - \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} \right) + O(\delta^{2/3}; \vartheta, \varphi), \quad \vartheta \in [-h, 0], \quad (3.3)$$

где

$$\mathbb{S}(\vartheta, \delta, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^2 e_j^{-1} \exp(\delta^{-2/3} \gamma^{1/3}(\varphi)(1 + O(\delta^{2/3}, \varphi)) e_j \int_0^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau), \quad \vartheta \in [-h, 0].$$

Доказательство. Возможный минимизирующий элемент для $\varphi \in W_\infty^2[-h, 0]$ определяется асимптотической формулой

$$x_\alpha(\vartheta, \varphi) = \mathbb{S}_1(\vartheta, \alpha, \varphi)\Delta(\varphi) + \frac{k}{r} \left(r - \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} \right) + O(\alpha^{1/4}; \vartheta, \varphi), \quad \vartheta \in [-h, 0]. \quad (3.4)$$

Можно показать, что для него выполняется достаточное условие [9, с. 125] минимума функционала $M^\alpha[\varphi, \cdot]$. Подставляя (3.2) в (3.4), находим асимптотические формулы для значений регуляризирующего оператора на множестве D . \square

Введем оператор $R_1 : W_\infty^2 \rightarrow H$, определяемый формулами

$$R_1(\varphi)(\vartheta) = \frac{k}{r} \left(r - \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} \right), \quad \vartheta \in [-h, 0), \quad R_1(\varphi)(0) = \varphi(-h),$$

и оператор $R_2 : W_\infty^2 \rightarrow H$, определяемый формулами

$$R_2(\varphi, \delta)(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^2 e_j^{-1} \exp \left(\gamma^{1/3}(\varphi) \delta^{-2/3} e_j \int_0^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau \right) \Delta(\varphi) + R_1(\varphi)(\vartheta), \quad \vartheta \in [-h, 0),$$

$$R_2(\varphi, \delta)(0) = R_2(\varphi, \delta)(-0).$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для уравнения $Ux = \varphi$ операторы $R_1 : D \rightarrow H$ и $R_2 : D \rightarrow H$ являются регуляризирующими.

Доказательство. Множество φ_p , для которых существуют точные решения x_p уравнения $Ux = \varphi_p$, всюду плотно в H [10]. Пусть φ_δ — приближение для φ_p и $\varphi_\delta, \varphi_p$ принадлежат множеству $\{\varphi : \Delta(\varphi) \neq 0, \varphi \in W_\infty^2[-h, 0]\}$.

Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|R_1(\varphi_\delta) - x_p\| &\leq \|R_1(\varphi_\delta) - R(\varphi_\delta, \delta)\| + \|R(\varphi_\delta, \delta) - x_p\|, \\ \|R_2(\varphi_\delta, \delta) - x_p\| &\leq \|R_2(\varphi_\delta, \delta) - R(\varphi_\delta, \delta)\| + \|R(\varphi_\delta, \delta) - x_p\|. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Используя формулу (3.3), находим

$$R(\varphi_\delta, \delta)(0) - R_1(\varphi_\delta)(0) = O(\delta^{2/3}; \varphi_\delta).$$

При $\vartheta \in [-h, 0)$ имеем

$$\begin{aligned} &R(\varphi_\delta, \delta)(\vartheta) - R_1(\varphi_\delta)(\vartheta) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^2 e_j^{-1} \exp \left(\delta^{-2/3} (\gamma^{1/3}(\varphi_\delta) + O(\delta^{2/3})) e_j \int_0^{\vartheta} \lambda(\tau) d\tau \right) \Delta(\varphi_\delta) + O(\delta^{2/3}; \vartheta, \varphi_\delta). \end{aligned}$$

Оценим интеграл

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^0 (R_1(\varphi_\delta)(s) - R(\varphi_\delta, \delta)(s))^2 ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^2 e_p^{-1} e_q^{-1} \Delta^2(\varphi_\delta) \int_{-h}^0 \exp\left(\delta^{-2/3}(\gamma^{1/3}(\varphi_\delta) + O(\delta^{2/3}))e_j \int_0^s \lambda(\tau) d\tau\right) ds. \end{aligned}$$

Так как $(e_p + e_q) \int_0^s \lambda(\tau) d\tau \neq 0$ при $p, q = 1, 2$, $s \in [-h, 0]$, то справедливо равенство

$$\int_{-h}^0 (R_1(\varphi_\delta)(s) - R(\varphi_\delta, \delta)(s))^2 ds = O(\delta^{2/3}; \varphi_\delta).$$

В результате находим асимптотическую оценку

$$\|R_1(\varphi_\delta) - R(\varphi_\delta, \delta)\| = O(\delta^{2/3}, \varphi_\delta).$$

Используя аналогичные рассуждения, находим асимптотическую оценку

$$\|R_2(\varphi_\delta, \delta) - R(\varphi_\delta, \delta)\| = O(\delta^{2/3}, \varphi_\delta).$$

Учитывая полученные оценки, свойство регуляризирующего оператора R и неравенства (3.5), завершаем доказательство теоремы. \square

4. Асимптотика регуляризованных решений

Пусть H_{loc} — пространство функций, определенных на полуоси $(-\infty, -h]$, сужение которого на любой конечный отрезок $[t^-, -h]$, $t^- < -h$, является гильбертовым пространством H_{t^-} со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle_{t^-} = \int_{t^-}^{-h} y(s)x(s)\mu(ds),$$

где $\mu(s) = s/h + m$, $s \in [(m-1)h, mh]$, $m \leq -1$, $\mu(-h) = -1$. Для произвольного решения $x_m(\vartheta, \varphi, \delta)$, $\vartheta \in [-h, 0]$, $m \leq -1$, системы (1.2) рассмотрим функцию $x(\cdot, \varphi, \delta) \in H_{\text{loc}}$, определяемую с помощью формул $x(mh + \vartheta, \varphi, \delta) = x_m(\vartheta, \varphi, \delta)$, $\vartheta \in (-h, 0]$, $m \leq -1$. Пусть $x_p(\cdot)$ — точное решение системы (1.1) на отрезке $[t^-, -h]$, отвечающее начальной функции $\varphi_p \in D$, а $\varphi_\delta \in D$ — возмущение последней начальной функции. Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \|x(\cdot, \varphi_\delta, \delta) - x_p(\cdot)\|_{t^-} = \langle x(\cdot, \varphi_\delta, \delta) - x_p(\cdot), x(\cdot, \varphi_\delta, \delta) - x_p(\cdot) \rangle_{t^-}^{1/2} \\ &= \left(\int_{t^-}^{-h} (x(s, \varphi_\delta, \delta) - x_p(s))^2 \mu(ds) \right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^N \left(\int_{-r}^0 (x_{-j}(\vartheta, \varphi_\delta, \delta) - x_p(-jh + \vartheta))^2 \mu(d(-jh + \vartheta)) \right)^{1/2} \\ &= \sum_{j=1}^N \|x_{-j}(\cdot, \varphi_\delta, \delta) - x_p(-jh + \cdot)\| = \sum_{j=1}^N \|R(x_{-j+1}(\cdot, \varphi_\delta, \delta), \delta)(\cdot) - x_p(-jh + \cdot)\|. \end{aligned}$$

Здесь N совпадает с целой частью числа $|t^-|/h$, $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2}$. Для регуляризирующего оператора R последняя сумма может быть сделана как угодно малой. Следовательно, в задаче

нахождения решений системы (1.1) для любого $t^- < -h$ отображение $D \rightarrow H_{t^-}$, определяемое формулой $\varphi \rightarrow x(\cdot, \varphi, \delta)$, является регуляризирующим. Функции $x(\cdot, \varphi, \delta) \in H_{\text{loc}}$ будем называть регуляризованными решениями системы (1.1) на отрицательной полуоси.

Для начальной функции $\varphi \in W_\infty^{N+1}[-h, 0]$, $N \geq 2$, рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_m(\vartheta) = \frac{k}{r} \left(r - \frac{\varphi'_{m+1}(\vartheta)}{\varphi_{m+1}(\vartheta)} \right), \quad m = \overline{-N, -1}, \quad \varphi_0(\vartheta) = \varphi(\vartheta), \quad \vartheta \in [-h, 0].$$

Используя эту последовательность, определим новые последовательности

$$\begin{aligned} x_m^1(\vartheta, \varphi) &= R_1(\varphi_{m+1})(\vartheta), \quad m = \overline{-N, -1}, \quad \vartheta \in [-h, 0], \\ x_m^2(\vartheta, \varphi, \delta) &= R_2(\varphi_{m+1}, \delta)(\vartheta), \quad m = \overline{-N, -1}, \quad \vartheta \in [-h, 0]. \end{aligned}$$

Введем функции $x^1(\cdot, \varphi)$, $x^2(\cdot, \varphi, \delta) \in H_{t^-}$, с помощью формул

$$\begin{aligned} x^1(t, \varphi) &= x_m^1(t - mh, \varphi), \quad x^2(t, \varphi, \delta) = x_m^2(t - mh, \varphi, \delta), \\ t \in ((m-1)h, mh], \quad m &= \overline{-N+1, -1}, \quad x^1(t, \varphi) = x_m^1(t - mh, \varphi), \\ x^2(t, \varphi, \delta) &= x_m^2(t - mh, \varphi, \delta), \quad t \in [t^-, -Nh]. \end{aligned}$$

Здесь N равняется целой части числа $|t^-|/h$.

Теорема 5. В задаче построения решений системы (1.1) на отрезке $[t^-, -h]$ для начальных функций из множества $\{\varphi: \Delta(\varphi_m) \neq 0, m = \overline{-N+1, -1}, \varphi \in W_\infty^{N+1}[-h, 0]\}$ отображения $W_\infty^{N+1}[-h, 0] \rightarrow H_{t^-}$, определяемые формулами $\varphi \rightarrow x^1(\cdot, \varphi)$ и $\varphi \rightarrow x^2(\cdot, \varphi, \delta)$ являются регуляризирующими. Здесь целая часть числа $|t^-|/h$ равняется N .

Доказательство. Пусть $x_p(\cdot)$ — точное решение системы (1.1) на отрезке $[t^-, -h]$, отвечающее начальной функции φ_p , φ_δ — возмущение последней начальной функции и $\varphi_\delta, \varphi_p$ принадлежат множеству $\{\varphi: \Delta(\varphi_m) \neq 0, m = \overline{-N+1, -1}, \varphi \in W_\infty^{N+1}[-h, 0]\}$. Имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|x^1(\cdot, \varphi_\delta) - x_p(\cdot)\|_{t^-} &= \left(\int_{t^-}^{-h} (x^1(s, \varphi_\delta) - x_p(s))^2 \mu(ds) \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{j=1}^N \left(\int_{-h}^0 (x_{-j}^1(\vartheta, \varphi_\delta) - x_p(-jh + \vartheta))^2 \mu(ds) \right)^{1/2} \\ &= \sum_{j=1}^N \|x_{-j}^1(\cdot, \varphi_\delta) - x_p(-jh + \cdot)\| = \sum_{j=1}^N \|R_1(\varphi_{-j+1})(\cdot) - x_p(-jh + \cdot)\|, \\ \|x^2(\cdot, \varphi_\delta, \delta) - x_p(\cdot)\|_{t^-} &= \left(\int_{t^-}^{-h} (x^2(s, \varphi_\delta, \delta) - x_p(s))^2 \mu(ds) \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{j=1}^N \left(\int_{-h}^0 (x_{-j}^2(\vartheta, \varphi_\delta, \delta) - x_p(-jh + \vartheta))^2 \mu(d(-jh + \vartheta)) \right)^{1/2} \\ &= \sum_{j=1}^N \|x_{-j}^2(\cdot, \varphi_\delta, \delta) - x_p(-jh + \cdot)\| = \sum_{j=1}^N \|R_2(\varphi_{-j+1}, \delta)(\cdot) - x_p(-jh + \cdot)\|. \end{aligned}$$

Операторы R_1 и R_2 являются регуляризирующими. В результате справедливость утверждения доказана. \square

Функции $x^1(\cdot, \varphi) \in H_{t^-}$ и $x^2(\cdot, \varphi, \delta) \in H_{t^-}$ будем называть асимптотическими регуляризованными решениями системы (1.1) на отрезке $[t^-, -h]$.

5. Пример

В работе [2] приведены следующие статистические данные изменения численности лосей в Вологодской области:

год	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
численность	22050	22320	23130	20000	20530	22850	26200	28750	32150

Для анализа этих данных воспользуемся полученными в работе результатами, предварительно идентифицируя математическую модель, описываемую уравнением Хатчинсона. Возраст половой зрелости для популяции лосей $h = 2.5$ [11, с. 231]. Для нахождения мальтузианского коэффициента r и емкости среды k воспользуемся формулой

$$N(t) = N(t_0) \exp \left(r \int_{t_0}^t \left(1 - \frac{\varphi(s-h)}{k} \right) ds \right), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + h.$$

Выбираем начальный момент $t_0 = 2004$ и начальную функцию φ на отрезке $[2001.5, 2004]$ моделируем кубическими сплайнами, используя приведенные выше статистические данные. Тогда получаем

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{10}{39}(135690 + 76739t + 30789t^2 + 3421t^3), & t \in [2001.5, 2002], \\ -\frac{10}{39}(-85674 - 1715t + 6723t^2 + 2831t^3), & t \in [2002, 2003], \\ \frac{10}{39}(89115 + 12038t + 3600t^2 + 610t^3), & t \in [2003, 2004]. \end{cases}$$

Коэффициенты r и k находим из уравнений

$$N(2005) = N(2004) \exp \left(r \int_{2004}^{2005} \left(1 - \frac{\varphi(s-2.5)}{k} \right) ds \right),$$

$$N(2006) = N(2004) \exp \left(r \int_{2004}^{2006} \left(1 - \frac{\varphi(s-2.5)}{k} \right) ds \right).$$

В результате численного решения системы этих нелинейных алгебраических уравнений получим $r = 2.427$, $k = 21400$.

Покажем, как для идентифицированной модели

$$\dot{N}(t) = 2.427 \left(1 - \frac{1}{21400} N(t-2.5) \right) N(t)$$

решается задача восстановления предыстории численности популяции на отрезке $[1999, 2004]$ для нового начального момента времени $t_0 = 2006.5$ и новой начальной функции φ на отрезке $[2004, 2006.5]$, моделируемой кубическими сплайнами. Начальная функция определяется формулами

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\frac{10}{39}(-89115 - 12038t - 3600t^2 + 2573t^3), & t \in [2004, 2005], \\ \frac{10}{39}(83997 + 27392t - 11754t^2 + 2545t^3), & t \in [2005, 2006], \\ -\frac{10}{39}(-113733 + 17212t - 10548t^2 + 1172t^3), & t \in [2006, 2006.5]. \end{cases}$$

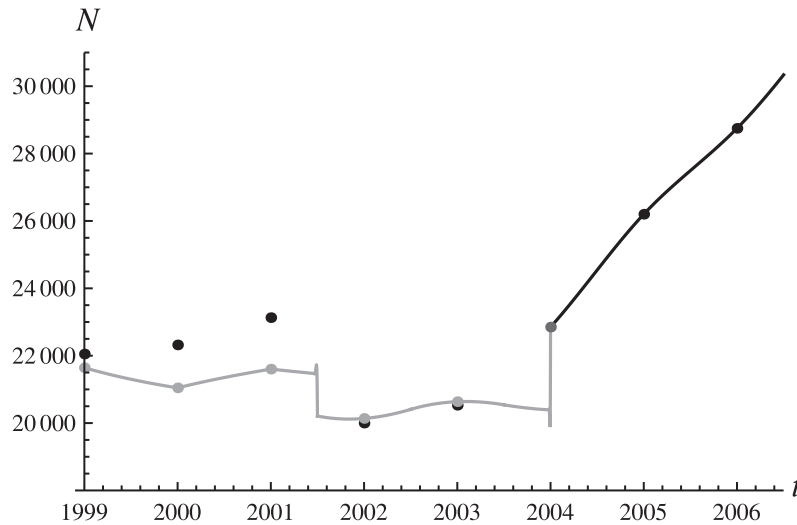
Следуя описанному в работе подходу, находим на первом шаге применения метода восстановления предыстории $\gamma(\varphi) = 970.173$, $\Delta(\varphi) = 2459.48$. Тогда значение первого регуляризующего оператора определяется формулами

$$R_1(\varphi)(t) = \begin{cases} \frac{21400.6(-2.29388 + t)(18.4693 + 7.15864t + t^2)}{(-1.82855 + t)(21.575 + 7.9294t + t^2)}, & t \in [2004, 2005), \\ \frac{21400.6(3.72797 + t)(11.8098 - 2.08253t + t^2)}{(4.09592 + t)(11.3947 - 1.21439t + t^2)}, & t \in [2005, 2006), \\ \frac{21400.6(-6.55253 + t)(14.6794 + 3.81644t + t^2)}{(-6.10399 + t)(16.5387 + 4.60399t + t^2)}, & t \in [2006, 2006.5). \end{cases}$$

На втором шаге $\gamma(\varphi) = 252.37$, $\Delta(\varphi) = -1254.41$,

$$R_1(\varphi)(t) = \begin{cases} 21400.6(-2.55816 + t)(-1.56402 + t)(16.7092 + 6.65895t + t^2)(23.651 + 8.42885t + t^2)/((-2.29388 + t)(-1.82855 + t)(18.4693 + 7.15864t + t^2) \times (21.575 + 7.9294t + t^2)), & t \in [2004, 2005), \\ 21400.6(3.48096 + t)(4.34313 + t)(12.3607 - 2.59903t + t^2)(11.2027 - 0.698089t + t^2)/((3.72797 + t)(4.09592 + t)(11.8098 - 2.08253t + t^2) \times (11.3947 - 1.21439t + t^2)), & t \in [2005, 2006), \\ 21400.6(-6.81369 + t)(-5.84275 + t)(13.7488 + 3.31375t + t^2)(17.793 + 5.10659t + t^2)/((-6.55253 + t)(-6.10399 + t)(14.6794 + 3.81644t + t^2) \times (16.5387 + 4.60399t + t^2)), & t \in [2006, 2006.5). \end{cases}$$

На приведенном ниже рисунке график смоделированной начальной функции приведен черным цветом, график асимптотического регуляризованного решения $x^2(\cdot, \delta, \varphi)$ — серым, статистические данные указаны точками черного цвета. Вычисления проводились при значении допустимой погрешности $\delta = 10^{-2}$.



Погрешность восстановления предыстории определяем по формуле

$$\delta_N = \frac{1}{k} \sqrt{\sum_{j=1999}^{2003} (x^2(j, \delta, \varphi) - N(j))^2} = 0.11.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лэк Д.** Численность животных и ее регуляция в природе. М.: ИЛ., 1957. 346 с.
2. Доклад о состоянии и охране окружающей среды Вологодской области в 2006 году / Правительство Вологодской области, департамент природных ресурсов и охраны окружающей среды Вологодской области. Вологда, 2007. 222 с.
3. **Колесов А.Ю., Колесов Ю.С.** Релаксационные колебания в математических моделях экологии // Тр. Математического ин-та РАН им. В.А. Стеклова. 1993. Т. 199. 123 с.
4. **Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.** Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
5. **Шампайн Л. Ф., Гладвел И., Томпсон С.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием MATLAB. СПб.: Лань, 2009. 304 с.
6. **Захаров А.А., Рысина Н.В.** Динамика численности вида, обитающего в неоднородной среде и имеющего неоднородный коэффициент линейного роста // Исследования по устойчивости и теории колебаний: межвуз. темат. сб. Ярославль: ЯГУ, 1982. С. 55–65.
7. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
8. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972. 416 с.
9. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
10. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.
11. **Данилкин А.А.** Оленьи (Cervidae). М.: ГЕОС, 1999. 552 с.

Долгий Юрий Филиппович
 д-р физ.-мат. наук, профессор
 вед. науч. сотрудник
 Институт математики и механики УрО РАН
 e-mail: Yurii.Dolgii@usu.ru

Поступила 13.09.2010

Сурков Платон Геннадьевич
 вед. математик
 Институт математики и механики УрО РАН
 e-mail: platon.surkov@gmail.com

УДК 517.997

**ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО СОЕДИНЕННЫХ ОБЪЕКТОВ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹**

А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская

Решается задача гашения колебаний m струн, соединенных последовательно. В одной из точек соединения к системе присоединен объект с сосредоточенными параметрами, с помощью которого и осуществляется гашение колебаний системы.

Ключевые слова: волновое уравнение, краевая задача, упругие колебания, управляемость.

A. I. Egorov, L. N. Znamenskaya. On the controllability of elastic oscillations of serially connected objects with distributed parameters.

The problem of damping oscillations of m serially connected strings is solved. An object with lumped parameters is attached to the system at one of the connection points; this object is used to damp the oscillations of the system is carried.

Keywords: wave equation, boundary value problem, elastic oscillations, controllability.

1. Постановки задач

Настоящая работа является продолжением работ [1–4], посвященных управлению колебаниями систем, содержащих объекты с распределенными и сосредоточенными параметрами. Рассматриваемая здесь система состоит из последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами; в одной из точек их соединения подсоединен управляющий объект с сосредоточенными параметрами. Состояние этого объекта зависит также от объектов с распределенными параметрами. Такого рода системы называются системами с ограниченным возбуждением, см. [5; 6]. Колебания сети описываются следующей краевой задачей:

$$u_{tt}^i(x, t) = a_i^2 u_{xx}^i(x, t), \quad (x, t) \in Q^i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (1.1)$$

$$u^i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad u_t^i(x, 0) = \psi_i(x), \quad (i-1)\ell \leq x \leq i\ell, \quad i = 1, \dots, m; \quad (1.2)$$

$$u^1(0, t) = u^m(m\ell, t) = 0, \quad t \geq 0; \quad (1.3)$$

$$u^i(i\ell, t) = u^{i+1}(i\ell, t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, \dots, m-1; \quad (1.4)$$

$$\alpha_i u_x^i(i\ell, t) + \beta_{i+1} u_x^{i+1}(i\ell, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad i = 2, \dots, m-1; \quad (1.5)$$

$$c_1 u_x^1(\ell, t) + c_2 u_x^2(\ell, t) = y(t), \quad t \geq 0; \quad (1.6)$$

$$\ddot{y}(t) + b^2 y(t) = ku^1(\ell, t) + \mu(t), \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^1. \quad (1.7)$$

Здесь $Q^i = \{(x, t) : (i-1)\ell < x < i\ell, t > 0\}$. При этом будем считать, что

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m. \quad (1.8)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00228) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/500).

Найдем решение $y(t)$ задачи Коши (1.7)

$$y(t) = y^0 \cos bt + \frac{y^1}{b} \sin bt + \frac{1}{b} \int_0^t [\mu(\tau) + ku^1(\ell, \tau)] \sin b(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

Согласование начальных (1.2) и граничных условий (1.3)–(1.6) дает следующие равенства для функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$:

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_m(m\ell) = 0, & \psi_1(0) = \psi_m(m\ell) = 0, \\ \varphi_i(i\ell) = \varphi_{i+1}(i\ell), & \psi_i(i\ell) = \psi_{i+1}(i\ell), \quad i = 1, \dots, m-1, \\ \alpha_i \varphi'_i(i\ell) + \beta_{i+1} \varphi'_{i+1}(i\ell) = 0, & \alpha_i \psi'_i(i\ell) + \beta_{i+1} \psi'_{i+1}(i\ell) = 0, \quad i = 2, \dots, m-1, \\ c_1 \varphi'_1(\ell) + c_2 \varphi'_2(\ell) = y^0, & c_1 \psi'_1(\ell) + c_2 \psi'_2(\ell) = y^1. \end{cases} \quad (1.10)$$

Если потребовать, чтобы функции $u^i(x, t)$, $i = 1, \dots, m$, были дважды непрерывно дифференцируемы в замыкании Q^i , то появляются дополнительные условия на функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m$:

$$\begin{cases} a_i^2 \varphi''_i(i\ell) = a_{i+1}^2 \varphi''_{i+1}(i\ell), & i = 1, \dots, m-1, \\ \varphi''_1(0) = \varphi''_m(m\ell) = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Задача управления. Найти момент времени T и функцию $\mu(t)$ такие, что решения $u^i(x, t)$ задачи (1.1)–(1.7) с начальными значениями (1.2) в момент времени T принимают нулевые значения

$$u^i(x, T) = 0, \quad u^i_t(x, T) = 0, \quad (i-1)\ell \leq x \leq i\ell, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.12)$$

Для решения поставленной задачи нам потребуется получить условия существования решения краевой задачи (1.1)–(1.7).

2. Решение краевой задачи

Функции $u^i(x, t)$ будем искать в виде

$$u^i(x, t) = E_i(x + a_it) + G_i(x - a_it), \quad (x, t) \in \overline{Q^i}. \quad (2.1)$$

Для функций (2.1) начальные условия (1.2) представляются равенствами

$$E_i(x) + G_i(x) = \varphi_i(x), \quad a_i[E'_i(x) - G'_i(x)] = \psi_i(x), \quad (i-1)\ell \leq x \leq i\ell,$$

из которых получаем

$$E_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{2} + \frac{\widehat{\psi}_i(x)}{2a_i}, \quad G_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{2} - \frac{\widehat{\psi}_i(x)}{2a_i}, \quad (2.2)$$

при $(i-1)\ell \leq x \leq i\ell$. Здесь введено обозначение $\widehat{\psi}_i(x) = \int_{(i-1)\ell}^x \psi_i(s) ds$, $i = 1, \dots, m$.

Пусть функции $\varphi_i(x)$ принадлежат $C^2[(i-1)\ell, i\ell]$, а функции $\psi_i(x)$ принадлежат пространству $C^1[(i-1)\ell, i\ell]$, тогда функции (2.1) удовлетворяют при $(i-1)\ell < x + a_it < i\ell$ и $(i-1)\ell < x - a_it < i\ell$ уравнениям (1.1). Дополнительные ограничения на функции φ_i и ψ_i будем вводить по мере продолжения решений за границы указанных областей.

Краевые условия (1.3) принимают при $0 \leq z \leq \ell$ для функций (2.1) вид

$$G_1(-z) = -E_1(z), \quad (2.3)$$

$$E_m(m\ell + z) = -G_m(m\ell - z). \quad (2.4)$$

Значения функций $E_i(il + z)$ и $G_{i+1}(il - z)$ для $i = 2, \dots, m - 1$ определим из краевых условий (1.4) и (1.5), а также из найденного выражения (2.4). Уравнение (1.5), используя выражение (2.1), перепишем в следующем виде:

$$a_{i+1}\alpha_i [E_i(il + a_it) - G_i(il - a_it)] = -a_i\beta_{i+1} [E_{i+1}(il + a_{i+1}t) - G_{i+1}(il - a_{i+1}t)] + A_i^0, \quad (2.5)$$

здесь A_i^0 — некоторая константа. Выражения (2.1) позволяют переписать условие (1.4) для $i = 2, \dots, m - 1$:

$$E_i(il + a_it) + G_i(il - a_it) = E_{i+1}(il + a_{i+1}t) + G_{i+1}(il - a_{i+1}t). \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.5) и (2.6) получаем выражения для соответствующих функций:

$$\begin{aligned} E_i(il + a_it) &= \gamma_i G_i(il - a_it) - \varkappa_i^1 E_{i+1}(il + a_{i+1}t) + A_i, \\ G_{i+1}(il - a_{i+1}t) &= \varkappa_i^2 G_i(il - a_it) - \gamma_i E_{i+1}(il + a_{i+1}t) + B_i. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $\varkappa_i^1 = \frac{2a_i\beta_{i+1}}{a_{i+1}\alpha_i - a_i\beta_{i+1}}$, $\varkappa_i^2 = \frac{2a_{i+1}\alpha_i}{a_{i+1}\alpha_i - a_i\beta_{i+1}}$, $\gamma_i = 1 + \varkappa_i^1$, а A_i и B_i — некоторые константы, $i = 2, \dots, m - 1$. Очевидно, что константы краевой задачи (1.1)–(1.7) должны удовлетворять дополнительному условию

$$a_{i+1}\alpha_i \neq a_i\beta_{i+1}, \quad i = 2, \dots, m - 1. \quad (2.7)$$

Перепишем полученные выражения для $0 \leq z \leq \ell$ в следующем виде:

$$E_i(il + z) = \gamma_i G_i(il - z) - \varkappa_i^1 E_{i+1}\left(il + \frac{a_{i+1}}{a_i} z\right) + A_i, \quad (2.8)$$

$$G_{i+1}(il - z) = \varkappa_i^2 G_i\left(il - \frac{a_i}{a_{i+1}} z\right) - \gamma_i E_{i+1}(il + z) + B_i, \quad (2.9)$$

где $A_i = E_i(il) - \gamma_i G_i(il) + \varkappa_i^1 E_{i+1}(il)$, $B_i = G_{i+1}(il) + \gamma_i E_{i+1}(il) - \varkappa_i^2 G_i(il)$.

Выражение (2.8) представляет собой рекуррентное соотношение, ибо если $a_{i+1} > a_i$, то при соответствующих значениях $z > (a_i\ell)/a_{i+1}$ функция $E_i(il + z)$ выражается с помощью функции $E_{i+1}((i+1)\ell + (a_{i+1}\zeta)/a_i)$, где $\zeta > 0$. Выражение для функции $E_m(m\ell + z)$ уже найдено в (2.4). Причем если в выражении (2.4) $z > \ell$, то по формуле (2.9) при $i = m - 1$ находим требуемую функцию. В формулах (2.8) и (2.9) также используются найденные значения (2.2) функций $E_i(x)$ и $G_i(x)$.

Осталось определить выражения для функций $E_1(\ell + z)$ и $G_2(\ell - z)$. Воспользуемся равенством (1.4) при $i = 1$, равенством (1.6), найденным выражением (1.9) функции $y(t)$ и выражением (2.1). Получаем следующую систему уравнений:

$$a_1 [E_1'(\ell + a_1t) - G_1'(\ell - a_1t)] - a_2 [E_2'(\ell + a_2t) - G_2'(\ell - a_2t)] = 0, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} c_1 [E_1'(\ell + a_1t) + G_1'(\ell - a_1t)] + c_2 [E_2'(\ell + a_2t) + G_2'(\ell - a_2t)] \\ = f(t) + \frac{k}{b} \int_0^t E_1(\ell + a_1\tau) \sin b(t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где обозначено $f(t) = y^0 \cos bt + \frac{y^1}{b} \sin bt + \frac{1}{b} \int_0^t [\mu(\tau) + k G_1(\ell - a_1\tau)] \sin b(t - \tau) d\tau$.

Из уравнений (2.10) и (2.11) исключим функцию $G_2'(\ell - a_2t)$, приходим к интегро-дифференциальному уравнению для функции $E_1(\ell + a_1t)$

$$a_1 E_1'(\ell + a_1t) + \frac{a_2 k}{b\varkappa} \int_0^t E_1(\ell + a_1\tau) \sin b(t - \tau) d\tau = F(t), \quad (2.12)$$

где $\varkappa = [a_1c_2 - a_2c_1]/a_1$ и

$$F(t) = -\frac{a_2}{\varkappa} \left[y^0 \cos bt + \frac{y^1}{b} \sin bt + \frac{1}{b} \int_0^t [\mu(\tau) + kG_1(\ell - a_1\tau)] \sin b(t - \tau) d\tau \right] + \frac{1}{\varkappa} [(a_1c_2 + a_2c_1)G_1'(\ell - a_1t) + 2a_2c_2E_2'(\ell + a_2t)]. \quad (2.13)$$

Очевидно, что коэффициенты a_i и c_i , $i = 1, 2$, должны удовлетворять условию

$$a_1c_2 \neq a_2c_1. \quad (2.14)$$

Воспользуемся операционным исчислением для нахождения функции $E_1(\ell + a_1t) = \mathcal{E}(t)$, при этом будем обозначать преобразование Лапласа функции $g(t)$ через $\widehat{g}(p)$. Итак, от уравнения (2.12) приходим к уравнению

$$-\mathcal{E}(0) + p\widehat{\mathcal{E}}(p) + \frac{a_2k}{b\varkappa}\widehat{\mathcal{E}}(p)\frac{b}{p^2 + b^2} = \widehat{F}(p).$$

Откуда находим

$$\widehat{\mathcal{E}}(p) = \frac{p^2 + b^2}{p^3 + b^2p + a_2k/\varkappa} [\widehat{F}(p) + \mathcal{E}(0)].$$

Следовательно, функция $E_1(\ell + a_1t)$ имеет вид

$$E_1(\ell + a_1t) = E_1(\ell)K(t) + \int_0^t K(t - \tau)F(\tau) d\tau,$$

или

$$E_1(\ell + z) = E_1(\ell)K(z/a_1) + \int_0^{z/a_1} K(z/a_1 - \tau)F(\tau) d\tau. \quad (2.15)$$

Здесь $K(t)$ — функция, для которой преобразование Лапласа равно $\frac{p^2 + b^2}{p^3 + b^2p + a_2k/\varkappa}$. Явный вид функции $K(t)$ зависит от нулей многочлена $p^3 + b^2p + a_2k/\varkappa$. Возможны два случая.

1. *Многочлен имеет три различных действительных нуля.* Пусть для нашего многочлена выполняется равенство $p^3 + b^2p + a_2k/\varkappa = (p - r_1)(p - r_2)(p - r_3)$, тогда

$$\frac{p^2 + b^2}{p^3 + b^2p + a_2k/\varkappa} = \frac{C_1}{p - r_1} + \frac{C_2}{p - r_2} + \frac{C_3}{p - r_3}, \quad K(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} + C_3e^{r_3t}.$$

Постоянные C_i , $i = 1, 2, 3$, однозначно определяются. При этом найденная функция $K(t)$ обладает следующими свойствами:

$$K(0) = 1, \quad K'(0) = 0, \quad K''(0) = 0. \quad (2.16)$$

Эти свойства проверяются непосредственно, если использовать связь коэффициентов нашего многочлена с постоянными C_i и нулями многочлена r_i , $i = 1, 2, 3$.

2. *Многочлен имеет один действительный нуль и два комплексно сопряженных нуля.* В этом случае выполняется $p^3 + b^2p + a_2k/\varkappa = (p - s_1)((p - s_2)^2 + s_3^2)$. Тогда

$$\frac{p^2 + b^2}{p^3 + b^2p + a_2k/\varkappa} = \frac{D_1}{p - s_1} + \frac{D_2(p - s_2) + D_3s_3}{(p - s_2)^2 + s_3^2}, \quad K(t) = D_1e^{s_1t} + D_2e^{s_2t} \cos s_3t + D_3e^{s_2t} \sin s_3t.$$

Полученная функция $K(t)$ также обладает свойствами (2.16).

Найденная функция (2.15), равенство (1.4) при $i = 1$ и выражение (2.2) при $i = 2$ позволяют определить функцию $G_2(\ell - z)$ при $z \geq 0$:

$$G_2(\ell - z) = E_1\left(\ell + \frac{a_1}{a_2} z\right) + G_1\left(\ell - \frac{a_1}{a_2} z\right) - E_2(\ell + z). \quad (2.17)$$

Приведенные рассуждения доказывают следующую теорему

Теорема 1. Пусть для функций $\varphi_i(x) \in C^2[(i-1)\ell, i\ell]$ и $\psi_i(x) \in C^1[(i-1)\ell, i\ell]$ выполнены условия (1.10) и (1.11) при $i = 1, \dots, m$, причем коэффициенты краевой задачи (1.1)–(1.7) удовлетворяют условиям (2.7) и (2.14). Тогда каждая непрерывная функция $\mu(t)$ однозначно определяет единственные решения $u^i(t, x)$ из $C^2(\overline{Q^i})$ задачи (1.1)–(1.7), которые представимы в виде (2.1). Здесь $E_i(x)$ и $G_i(x)$ заданы при $(i-1)\ell \leq x \leq i\ell$ формулами (2.2) для $i = 1, \dots, m$; при $z \geq 0$ функции $E_i(i\ell + z)$ имеют вид (2.8), а функции $G_{i+1}(i\ell - z)$ определяются формулами (2.9) для $i = 2, \dots, m-1$. Наконец, функции $E_m(m\ell + z)$ и $E_1(\ell + z)$ определяются выражениями (2.4) и (2.15) соответственно, а функции $G_1(-z)$ и $G_2(\ell - z)$ определены соответственно в (2.3) и (2.17).

3. Решение задачи управления

Введем обозначения $t_i = \ell/a_i$, $i = 1, \dots, m$, тогда в силу условия (1.8) получаем неравенства $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_m$. Гашение колебаний рассматриваемой сети возможно лишь при условии соизмеримости моментов времени t_i , $i = 1, \dots, m$, т. е. при условии существования таких чисел $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m$, что $a_1/n_1 = \dots = a_m/n_m$.

Условия (1.12) приводят к следующей системе уравнений:

$$E_i(x + a_i T) = H_i, \quad G_i(x - a_i T) = -H_i, \quad (i-1)\ell \leq x \leq i\ell, \quad (3.1)$$

где H_i , $i = 1, \dots, m$ — некоторые постоянные.

Гасить колебания рассматриваемой системы будем за время $T = 2t_1$. Для того чтобы найти управляющую функцию $\mu(t)$, воспользуемся уравнениями при $i = 1$. С помощью формул (2.15) и (2.3) от уравнений (3.1) при $i = 1$ переходим к интегральному уравнению

$$H_1 = E_1(\ell)K(t) + \int_0^t K(t-\tau)F(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 2t_1. \quad (3.2)$$

С учетом свойств (2.16) функции $K(t)$ определим постоянную $H_1 = E_1(\ell)$. Поскольку $\mu(t)$ содержит выражение для функции $F(t)$ (см. (2.13)), то, применяя операционное исчисление, найдем $F(t)$ из интегрального уравнения (3.2).

Учитывая вид преобразования Лапласа функции $K(t)$, получаем образ функции $F(t)$:

$$\widehat{F}(p) = \frac{a_2 k}{b^2 \varkappa} E_1(\ell) \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + b^2} \right].$$

Следовательно, функция $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \frac{a_2 k}{b^2 \varkappa} E_1(\ell) [1 - \cos bt]. \quad (3.3)$$

Если потребовать более высокую гладкость функций φ_i и ψ_i , то из выражения (3.3) вытекает, что

$$F(0) = F'(0) = 0, \quad F''(0) = \frac{a_2 k}{\varkappa} E_1(\ell). \quad (3.4)$$

Тогда равенства (2.12) и (3.4) дают дополнительные условия на функции φ_1 и ψ_1 :

$$E_1'(\ell) = E_1''(\ell) = E_1'''(\ell) = 0. \quad (3.5)$$

Из (2.13) и (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{a_2 k}{b^2 \varkappa} E_1(\ell) [1 - \cos bt] &= \frac{1}{\varkappa} [(a_1 c_2 + a_2 c_1) G_1'(\ell - a_1 t) + 2a_2 c_2 E_2'(\ell + a_2 t)] \\ &- \frac{a_2}{\varkappa} \left[y^0 \cos bt + \frac{y^1}{b} \sin bt + \frac{1}{b} \int_0^t [\mu(\tau) + k G_1(\ell - a_1 \tau)] \sin b(t - \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Равенство (3.6) продифференцируем дважды и полученный результат сложим с равенством (3.6), умноженным на b^2 , получаем выражение для управляющей функции $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \mathcal{M}[E(t)] - k G_1(\ell - a_1 t) - k E_1(\ell), \quad 0 \leq t \leq 2t_1. \quad (3.7)$$

Здесь $E(t) = 2c_2 E_2(\ell + a_2 t) - \left(\frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2}\right) G_1(\ell - a_1 t)$ и \mathcal{M} — дифференциальный оператор $\mathcal{M}[y(t)] = \ddot{y}(t) + b^2 \dot{y}(t)$.

Таким образом, уравнения системы (3.1) при $i = 1$ позволяют определить управляющую функцию $\mu(t)$, остальные уравнения системы дают дополнительные условия на функции $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$, $(j-1)\ell \leq x \leq j\ell$, $j = 2, \dots, m$. Для того чтобы получить эти условия, необходимо учитывать соотношение коэффициентов a_j , $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим ряд частных случаев.

3.1. Случай $m = 3$ и $a_1 = a_2 = a_3/2$

Перепишем уравнения системы (3.1) при $i = 2, 3$ в следующем виде для $0 \leq x \leq \ell$:

$$E_2(3\ell + x) = H_2, \quad G_2(x - \ell) = -H_2, \quad E_3(6\ell + x) = H_3, \quad G_3(x - 2\ell) = -H_3. \quad (3.8)$$

Используя равенства (2.3), (2.4), (2.8), (2.9), (2.17) и (3.2), уравнения (3.8) перепишем в следующем виде для $0 \leq x \leq \ell/2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_2 = \gamma_2 H_1 + \gamma_2 G_1(\ell - x) - \gamma_2 E_2(\ell + x) + [(\gamma_2)^2 - 1] G_2(2\ell - x) \\ \quad - \gamma_2(\gamma_2 - 1) E_3(2\ell + 2x) + (\gamma_2 - 1) B_2 + A_2; \\ -H_2 = H_1 - E_1(\ell - x) - \gamma_2 G_2(\ell + x) - (\gamma_2 - 1) G_3(2\ell + 2x) - A_2; \\ H_3 = -(\gamma_2 - 1) H_1 - (\gamma_2 - 1) G_1(\ell - x) + (\gamma_2 - 1) E_2(\ell + x) \\ \quad - \gamma_2(\gamma_2 + 1) G_2(2\ell - x) + (\gamma_2)^2 E_3(2\ell + 2x) - \gamma_2 B_2 - B_2; \\ -H_3 = (\gamma_2 + 1) H_1 + (\gamma_2 + 1) G_1(x) - (\gamma_2 + 1) E_2(2\ell - x) \\ \quad + \gamma_2(\gamma_2 + 1) G_2(\ell + x) (\gamma_2)^2 G_3(2\ell + 2x) + \gamma_2 B_2 + B_2. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Здесь учли, что $\varkappa_2^1 = \gamma_2 - 1$ и $\varkappa_2^2 = \gamma_2 + 1$.

Используя выражения (2.2), из равенств (3.9) получаем для $0 \leq x \leq \ell/2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma_2)^2 \varphi_3(2\ell + 2x) = -2H_1 - (\gamma_2 + 1) G_1(x) + (\gamma_2 - 1) G_1(\ell - x) \\ \quad + (\gamma_2 + 1) E_2(2\ell - x) - (\gamma_2 - 1) E_2(\ell + x) - \gamma_2(\gamma_2 + 1) [G_2(\ell + x) - G_2(2\ell - x)]; \\ 2(\gamma_2)^2 \frac{\psi_3(2\ell + 2x)}{a_3} = (\gamma_2 + 1) G_1'(x) - (\gamma_2 - 1) G_1'(\ell - x) + (\gamma_2 + 1) E_2'(2\ell - x) \\ \quad - (\gamma_2 - 1) E_2'(\ell + x) + \gamma_2(\gamma_2 + 1) [G_2'(\ell + x) - G_2'(2\ell - x)]; \\ (\gamma_2^2 - 1) G_1'(x) + (\gamma_2)^2 E_1'(\ell - x) + (\gamma_2^2 - 1) E_2'(2\ell - x) - \gamma_2 G_2'(\ell + x) = 0; \\ G_1'(\ell - x) + E_2'(\ell + x) = 0. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

При $\ell/2 \leq x \leq \ell$ система (3.8) имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_2 = \gamma_2 H_1 + \gamma_2 G_1(\ell - x) - \gamma_2 E_2(\ell + x) + [(\gamma_2)^2 - 1]G_2(2\ell - x) \\ \quad + \gamma_2(\gamma_2 - 1)G_3(4\ell - 2x) + (\gamma_2 - 1)B_2 + A_2; \\ -H_2 = H_1 - E_1(\ell - x) - \gamma_2 G_2(\ell + x) + (\gamma_2 - 1)E_3(4\ell - 2x) - A_2; \\ H_3 = -(\gamma_2 - 1)H_1 - (\gamma_2 - 1)G_1(x) + (\gamma_2 - 1)E_2(2\ell - x) \\ \quad - \gamma_2(\gamma_2 + 1)G_2(\ell + x) + (\gamma_2)^2 E_3(4\ell - 2x) - \gamma_2 B_2 - B_2; \\ -H_3 = (\gamma_2 + 1)H_1 + (\gamma_2 + 1)G_1(\ell - x) - (\gamma_2 + 1)E_2(\ell + x) \\ \quad + \gamma_2(\gamma_2 + 1)G_2(2\ell - x) + (\gamma_2)^2 G_3(4\ell - 2x) + \gamma_2 B_2 + B_2. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Из равенств (3.11) получаем условия на функции φ_j , ψ_j , $j = 1, 2, 3$, для $\ell/2 \leq x \leq \ell$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma_2)^2 \varphi_3(4\ell - 2x) = -2H_1 + (\gamma_2 - 1)G_1(x) - (\gamma_2 + 1)G_1(\ell - x) \\ \quad - (\gamma_2 - 1)E_2(2\ell - x) + (\gamma_2 + 1)E_2(\ell + x) + \gamma_2(\gamma_2 + 1)[G_2(\ell + x) - G_2(2\ell - x)]; \\ 2(\gamma_2)^2 \frac{\psi_3(2\ell + 2x)}{a_3} = -(\gamma_2 - 1)G_1'(x) + (\gamma_2 + 1)G_1'(\ell - x) - (\gamma_2 - 1)E_2'(2\ell - x) \\ \quad + (\gamma_2 + 1)E_2'(\ell + x) + \gamma_2(\gamma_2 + 1)[G_2'(2\ell - x) - G_2'(\ell + x)]; \\ G_1'(\ell - x) + E_1'(\ell - x) + \gamma_2 G_2'(\ell + x) = 0; \\ (\gamma_2 - 1)^2 G_1'(x) + (\gamma_2)^2 E_1'(\ell - x) + (\gamma_2 - 1)^2 E_2'(2\ell - x) = 0. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Сформулируем результат.

Предложение 1. Пусть $m = 3$ и $a_1 = a_2 = a_3/2$; для функций $\varphi_j(x) \in C^3[(j-1)\ell, j\ell]$ и $\psi_j(x) \in C^2[(j-1)\ell, j\ell]$, $j = 1, 2, 3$, выполнены условия теоремы 1, равенства (3.5), при $0 \leq x \leq \ell/2$ условия (3.10), а при $\ell/2 \leq x \leq \ell$ — (3.12). Тогда непрерывная на отрезке $[0, T]$ при $T = 2t_1$ управляющая функция $\mu(t)$, определяющая решения $u^i(x, t)$ краевой задачи (1.1)–(1.7), $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющие условиям (1.12), имеет вид (3.7).

3.2. Случай $m = 3$ и $a_1 = a_2/2 = a_3/2$

Условия успокоения колебаний при $i = 2, 3$ приобретают следующий вид:

$$E_2(5\ell + x) = H_2, \quad G_2(x - 3\ell) = -H_2, \quad E_3(6\ell + x) = H_3, \quad G_3(x - 2\ell) = -H_3 \quad (3.13)$$

для $0 \leq x \leq \ell$. Из равенств (2.3), (2.4), (2.8), (2.9), (2.17) и (3.2) следует, что систему (3.13) можно представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} H_2 = (\gamma_2 - 1)H_1 - \gamma_2 E_1\left(\frac{x}{2}\right) - G_1\left(\ell - \frac{x}{2}\right) + E_2(\ell + x) - \gamma_2 A_2 + \varkappa_2^1 B_2 + A_2; \\ -H_2 = -(\gamma_2 - 1)H_1 - \gamma_2 G_1\left(\frac{x}{2}\right) - E_1\left(\ell - \frac{x}{2}\right) + G_2(\ell + x) + \gamma_2 A_2 - \varkappa_2^1 B_2 - A_2; \\ H_3 = -\varkappa_2^2 H_1 - \varkappa_2^2 G_1\left(\frac{\ell - x}{2}\right) + E_3(2\ell + x) + \varkappa_2^2 A_2 - \gamma_2 B_2 - B_2; \\ -H_3 = \varkappa_2^2 H_1 - \varkappa_2^2 E_1\left(\frac{\ell - x}{2}\right) + G_3(2\ell + x) - \varkappa_2^2 A_2 + \gamma_2 B_2 + B_2. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Используя выражения (2.2), из уравнений (3.14) получаем условия на функции φ_j и ψ_j , $j = 2, 3$, для $0 \leq x \leq \ell$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_2(\ell + x) = \varphi_1\left(\ell - \frac{x}{2}\right) - \gamma_2 \varphi_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad \psi_2(\ell + x) = \psi_1\left(\ell - \frac{x}{2}\right) + \gamma_2 \psi_1\left(\frac{x}{2}\right); \\ \varphi_3(2\ell + x) = \varkappa_2^2 \varphi_1\left(\frac{\ell - x}{2}\right), \quad \psi_3(2\ell + x) = \varkappa_2^2 \psi_1\left(\frac{\ell - x}{2}\right). \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть $a_1 = a_2/2 = a_3/2$, для функций $\varphi_j(x) \in C^3[(j-1)\ell, j\ell]$ и $\psi_j(x) \in C^2[(j-1)\ell, j\ell]$, $j = 1, 2, 3$, выполнены условия теоремы 1, равенства (3.5) и (3.15). Тогда непрерывная на отрезке $[0, T]$ при $T = 2t_1$ управляющая функция $\mu(t)$, определяющая решения $u^i(x, t)$ краевой задачи (1.1)–(1.7), $i = 1, 2, 3$, удовлетворяющие условиям (1.12), имеет вид (3.7).

З а м е ч а н и е 1. Изложенная методика решения задачи гашения колебаний может быть использована в более сложных ситуациях: 1) когда число последовательно соединенных элементов с распределенными параметрами больше трех; 2) когда управление выполняется более чем одним объектом с сосредоточенными параметрами, присоединенными в различных точках системы. Однако анализ таких систем связан с более громоздкими вычислениями, хотя общая методика остается такой же, как в рассмотренных здесь случаях.

З а м е ч а н и е 2. В статье рассмотрен случай, когда управляющий объект с сосредоточенными параметрами описывается уравнением второго порядка (см. (1.7)), тем же методом будет решаться аналогичная задача, если такой объект будет описываться уравнением более высокого порядка с постоянными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Егоров А.И., Знаменская Л.Н.** Управления колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 10. С. 1766–1784.
2. **Егоров А.И., Знаменская Л.Н.** Об управляемости колебаний системы связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 6. С. 1002–1018.
3. **Егоров А.И., Знаменская Л.Н.** Управляемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 11. С. 2032–2044.
4. **Егоров А.И., Знаменская Л.Н.** Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 5. С. 815–825.
5. **Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.** Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 280 с.
6. **Кононенко В.О.** Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 254 с.

Егоров Александр Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский физико-технический институт (гос. ун-т)
e-mail: egorov@4unet.ru

Поступила 03.08.2010

Знаменская Людмила Николаевна
д-р физ.-мат. наук, доцент
Московский физико-технический институт (гос. ун-т)
e-mail: lznam@lznam.pereslavl.ru

УДК 512.54

ОБ АВТОТОПИЯХ КВАЗИГРУПП

М. Е. Елисеев

В статье рассматривается инвариант класса изотопии квазигруппы — схема квазигруппы, что доказывается в теореме 1. Схема квазигруппы позволяет в ряде случаев легко отличать неизотопные квазигруппы. Вводятся понятия автотопии 1-го рода и действия автотопии на элементах квазигруппы. Доказывается (теорема 3) несуществование квазигруппы порядка $(4m + 2)$ с транзитивно действующей группой автотопий 1-го рода.

Ключевые слова: квазигруппа, латинский квадрат, автоморфизм, автотопия.

M. E. Eliseev. On autotopies of quasigroups.

We consider the scheme of a quasigroup and prove in Theorem 1 that it is an invariant of the isotopy class of the quasigroup. The scheme of a quasigroup makes it possible in some cases to easily differentiate between nonisotopic quasigroups. We introduce the notions of autotopy of the first kind and of action of an autotopy on elements of a quasigroup. The nonexistence of a quasigroup of order $(4m + 2)$ with a transitively acting group of autotopies of the first kind is proved (Theorem 3).

Keywords: quasigroup, Latin square, automorphism, autotopy.

1. Схема квазигруппы

Теория, о которой пойдет речь в статье, находится на стыке комбинаторики, теории групп и квазигрупп.

Известно [1], что таблица Кэли квазигруппы является латинским квадратом (ЛК) в силу того, что уравнения $a \circ x = b$ и $x \circ a = b$ решаются однозначно. Латинские квадраты называются изотопными, если $a * b = \gamma(\alpha(a) \circ \beta(b))$, где преобразование α — перестановка строк, β — перестановка столбцов, γ — переобозначение элементов, $*$ и \circ — операции в квазигруппах, соответствующих ЛК.

Каждому ЛК порядка n можно взаимно однозначно сопоставить упорядоченный набор из n подстановок по следующему правилу:

1. Находим все решения уравнений $x_i \circ y_i = a_k$.

2. Элементу a_k сопоставляем подстановку $S_k = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix}$, далее для краткости будет использоваться запись $y_i = S_k(x_i)$.

Понятно, что по набору подстановок S_1, S_2, \dots, S_n можно восстановить ЛК: если $y_i = S_k(x_i)$, то на месте (x_i, y_i) записывается a_k (в терминах квазигрупп это следующее соответствие: $x_i \circ y_i = a_k$). Далее будем говорить, что упорядоченный набор S_1, S_2, \dots, S_n порождает ЛК и будет называться диаграммой ЛК. Понятно, что разному порядку S_i отвечают ЛК, отличающиеся переобозначением элементов — γ .

Пример 1. Латинскому квадрату

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	2	3	4	5
x_2	4	1	2	5	3
x_3	5	3	1	2	4
x_4	3	5	4	1	2
x_5	2	4	5	3	1

соответствует набор подстановок: $S_1 = (1)(2)(3)(4)(5)$, $S_2 = (12345)$, $S_3 = (13254)$, $S_4 = (14352)$, $S_5 = (153)(24)$.

Приведем несколько простых, но важных для дальнейшего изложения утверждений.

Лемма 1. *Умножению подстановок S_i , порождающих ЛК A , на подстановку α^{-1} слева соответствует перестановка α строк ЛК, на подстановку β справа — перестановка β столбцов ЛК.*

Доказательство. Пусть подстановка β представлена в цикловом виде $\beta = (y_1 y_2 \dots y_k) (y_{k+1} \dots y_m) \dots$. Тогда $x_1 \circ y_1 = a_i \mapsto x_1 \cdot y_2 = a_i$, $x_2 \circ y_2 = a_i \mapsto x_2 \cdot y_3 = a_i$, \dots , $x_k \circ y_k = a_i \mapsto x_k \cdot y_1 = a_i$, т. е. столбцы ЛК переставляются в порядке β . Для строк доказательство аналогично. \square

Цикловым видом подстановки далее будем называть набор длин циклов, ей соответствующих.

Лемма 2. *Пусть подстановка S_i представлена в виде произведения циклов, тогда $\alpha S_i \alpha^{-1}$ имеет тот же цикловый вид, причем элементы в S_i переставляются в порядке α .*

Доказательство этого простого утверждения можно найти, например, в [3].

Лемма 3. *Произведение подстановок ab^{-1} сохраняет цикловый вид при преобразовании $(\alpha, \beta) : a \mapsto \alpha a \beta, b \mapsto \alpha b \beta$.*

Доказательство. Ясно, что $\alpha a \beta \cdot (\alpha a \beta)^{-1} = \alpha a \beta \beta^{-1} a^{-1} \alpha^{-1} = \alpha (a b^{-1}) \alpha^{-1}$. Следовательно, по лемме 2 ab^{-1} сохраняет цикловый вид. \square

Множество цикловых видов произведений $S_i S_j^{-1}$ (j фиксировано) будем называть диагональной диаграммой (Д-диаграммой) Γ_j . ЛК, порожденный $S_i S_j^{-1}$, будем называть диагональным видом исходного ЛК. Множество из n диагональных диаграмм будем называть схемой ЛК (квазигруппы) и обозначать $\Gamma = \langle q_{ij} \rangle$, где q_{ij} — цикловые виды произведений $S_i S_j^{-1}$.

Теорема 1. *Схема квазигруппы не меняется при преобразовании изотопии.*

Доказательство. Доказательство вытекает из лемм 1 и 3. Действительно, в схеме Γ входят цикловые виды всевозможных комбинаций $S_i S_j^{-1}$, а цикловый вид не меняется при преобразовании (α, β) , которое по лемме 1 является преобразованием изотопии. \square

Отметим также интересное свойство квазигруппы четного порядка, которое является ее важной характеристикой.

Теорема 2. *Число циклов в диаграмме ЛК четного порядка сохраняет четность при любой изотопии.*

Доказательство. Пусть диаграмма квазигруппы (ЛК) имеет k четных подстановок и $(n - k)$ нечетных, оба этих числа одновременно четные или нечетные. Умножение каждой подстановки (слева или справа) на четную подстановку не поменяет ее четности, на нечетную — меняет четность каждой подстановки. Так как k и $(n - k)$ одинаковой четности, то четность суммы циклов не изменится. (Понятно, что при четном n подстановка четна при четной сумме циклов и нечетна в противном случае). \square

Следовательно, классы изотопии квазигрупп (т. е. квазигруппа с точностью до изотопии) четного порядка делятся на четные и нечетные.

2. Группа автотопий квазигруппы. Симметричные квазигруппы

Аналогично понятиям изоморфизма и автоморфизма можно определить понятия изотопии и автотопии. Как уже упоминалось выше, изотопию можно описать так: $a * b = \gamma(\alpha(a) \circ \beta(b))$, где $*$ и \circ — операции в квазигруппах. Если эти операции совпадают, то преобразование называется автотопией. Группу автотопий будем обозначать AtG . Автотопия является автоморфизмом при $\alpha = \beta = \gamma^{-1}$, т.е. автоморфизм — частный случай автотопии. Если $\alpha = \beta$, то автотопию будем называть автотопией 1-го рода, остальные автотопии — автотопиями 2-го рода. Несложно заметить, что автотопии 1-го рода образуют группу, которую будем обозначать $At_I G$.

Строение группы автотопий прямо связано со схемой квазигруппы. Понятно, что индекс $|AtG : At_I G| \leq n$, т.е. имеется не более n автотопий 2-го рода, не сводящихся друг к другу с помощью автотопий 1-го рода. В самом деле, приведем ЛК к диагональному виду преобразованием $S_i S_j^{-1}$ (j фиксировано), тогда изотопия-сопряжение ($\alpha = \beta$) сохраняет по лемме 2 диагональную диаграмму Γ_j , а автотопия 2-го рода переводит ЛК в другой диагональный вид, которых всего n .

Определим действие автотопии (α, β, γ) на элементах квазигруппы следующим образом: $a \xrightarrow{(\alpha, \beta, \gamma)} \gamma a$. На подстановках, соответствующих ЛК, это действие описывается в соответствии с леммой 1 так: $S_a \mapsto \alpha^{-1} S_a \beta$. Если автотопия является автоморфизмом, то определенное таким образом действие автотопии совпадает с обычным определением действия автоморфизма.

Пример 2. Действие автотопий 1-го рода на элементах группы Z_6 :

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$S_0 = (0)(15)(24)(3)$, $S_1 = (01)(25)(34)$, $S_2 = (02)(1)(35)(4)$, $S_3 = (03)(12)(45)$, $S_4 = (04)(13)(2)(6)$, $S_5 = (05)(14)(23)$.

Автотопиями 1-го рода являются, например, отображения $x \mapsto x + a$. Действие их на элементах группы представлено в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

	$x \mapsto x + 1$	$x \mapsto x + 2$	$x \mapsto x + 3$	$x \mapsto x + 4$	$x \mapsto x + 5$
S_0	S_2	S_4	S_0	S_2	S_4
S_1	S_3	S_5	S_1	S_3	S_5
S_2	S_4	S_0	S_2	S_4	S_0
S_3	S_5	S_1	S_3	S_5	S_1
S_4	S_0	S_2	S_4	S_0	S_2
S_5	S_1	S_3	S_5	S_1	S_3

Если любую подстановку можно перевести в любую посредством автотопии, то будем говорить, что группа автотопий транзитивна. Когда это можно сделать при помощи автотопий 1-го рода, то будем говорить, что группа $At_I G$ транзитивна. Квазигруппы, для которых группа автотопий транзитивна, будем называть симметричными. Для них $|AtG : At_I G| = n$ и все диагональные диаграммы совпадают.

Квазигруппы с транзитивной группой автотопий 1-го рода будем называть идеально симметричными. Так как по лемме 2 автотопия 1-го рода не меняет цикловых видов подстановок, то все S_i имеют одинаковые цикловые виды. Примерами идеально симметричных квазигрупп являются, например, леводистрибутивные (и праводистрибутивные) квазигруппы, так как они обладают транзитивной группой автоморфизмов, или абелевы группы простого порядка. В последних автотопиями 1-го рода, действующими транзитивно, являются сопряжения S_i .

Пример 3. Леводистрибутивная квазигруппа порядка 7 — идеально симметричная квазигруппа:

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	2	5	4	7	6
2	4	2	6	1	7	3	5
3	5	7	3	6	1	4	2
4	7	6	5	4	3	2	1
5	6	4	7	2	5	1	3
6	3	5	1	7	2	6	4
7	2	1	4	3	6	5	7

$S_1 = (1)(247)(356)$, $S_2 = (2)(137)(465)$, $S_3 = (3)(126)(457)$, $S_4 = (4)(152)(367)$, $S_5 = (5)(143)(276)$, $S_6 = (6)(175)(234)$, $S_7 = (7)(164)(253)$.

Симметричными квазигруппами являются, например, группы. Действительно, пусть $x \cdot y = \gamma^{-1}(\alpha(x) \cdot \beta(y))$, $x, y \in G$, G — группа. При $x = 1 : y = \gamma^{-1}(\alpha(1) \cdot \beta(y))$ (обозначим $\alpha(1) = a$), если $y = 1 : x = \gamma^{-1}(\alpha(x) \cdot \beta(1))$ (обозначим $\beta(1) = b$). Тогда $\gamma(x) = \alpha(x) \cdot b$, $\gamma(y) = a \cdot \beta(y)$, $\gamma(xy) = \gamma(x)(ab)^{-1}\gamma(y)$ или $\gamma(xy)t = \gamma(x)t\gamma(y)t$, $t = (ab)^{-1}$. Следовательно, $|AtG : AutG| = n^2$, $|AtG : At_tG| = n$.

Если подстановка S_i переводится автотопией в S_j , то подстановки (и элементы, им соответствующие) будем называть автотопными. Несложно заметить, что отношение автотопии является отношением эквивалентности, и все элементы квазигруппы разбиваются на классы попарно автотопных. Понятно, что автотопные элементы имеют одинаковые диагональные диаграммы. Действительно, если $S_i = \alpha^{-1}S_j\beta$, $S_m = \alpha^{-1}S_l\beta$, то $S_mS_i^{-1} = \alpha^{-1}S_l\beta(\alpha^{-1}S_j\beta)^{-1} = \alpha^{-1}S_lS_j^{-1}\alpha$.

Пример 4. ЛК порядка 5:

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	2	0	1	4	3
2	4	3	0	1	2
3	3	2	4	0	1
4	1	4	3	2	0

Диаграмма: $S_0 = (0)(1)(2)(3)(4)$, $S_1 = (01234)$, $S_2 = (02431)$, $S_3 = (03)(142)$, $S_4 = (04132)$.

Схема ЛК имеет вид, показанный в табл. 2.

Д-диаграммы элементов a_0, a_1, a_2, a_4 одинаковы и не совпадают с Д-диаграммой элемента a_3 . Непосредственно проверяется, что существуют автотопии, переводящие ЛК, соответствующие диагональным видам элементов a_0, a_1, a_2, a_4 , один в другой. Следовательно, элементы делятся на два класса: первый класс $\{a_0, a_1, a_2, a_4\}$, второй класс $\{a_3\}$.

Т а б л и ц а 2

$\Gamma_0 :$	$\Gamma_1 :$	$\Gamma_2 :$	$\Gamma_3 :$	$\Gamma_4 :$
$(0)(1)(2)(3)(4),$ $q_{00} = (\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$	$(04132),$ $q_{10} = (\cdot\cdot\cdot\cdot)$	$(01234),$ (далее q_{ij} определяются аналогично)	$(03)(142)$	(02431)
$(01234),$ $q_{01} = (\cdot\cdot\cdot\cdot)$	$(0)(1)(2)(3)(4),$ $q_{11} = (\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)(\cdot)$	(02431)	(04132)	$(03)(142)$
$(02431),$ $q_{02} = (\cdot\cdot\cdot\cdot)$	$(03)(142),$ $q_{12} = (\cdot\cdot\cdot\cdot)$	$(0)(1)(2)(3)(4)$	(01234)	(04132)
$(03)(142),$ $q_{03} = (\cdot)(\cdot\cdot)$	$(02431),$ $q_{13} = (\cdot)(\cdot\cdot)$	(04132)	$(0)(1)(2)(3)(4)$	(01234)
$(04132),$ $q_{04} = (\cdot\cdot\cdot\cdot)$	$(01234),$ $q_{14} = (\cdot\cdot\cdot\cdot)$	$(03)(142)$	(02431)	$(0)(1)(2)(3)(4)$

3. Несуществование идеально симметричных квазигрупп порядка $(4m + 2)$

Каждому ЛК (квазигруппе) можно сопоставить компактное ориентируемое многообразие следующим образом:

1. Сопоставляем ЛК набор подстановок S_i (диаграмму ЛК) так, как описано выше.
2. Представляем подстановки в цикловых видах.
3. Каждому циклу длины k (>2) сопоставляем ориентированный k -угольник, вершины которого обозначены элементами цикла, ребра имеют направленность, соответствующую циклу (коммутативной квазигруппе соответствует пустое множество).
4. Многоугольники склеиваются по противоположно ориентированным ребрам, связывающим пару одинаково обозначенных вершин.
5. Получаем компактное ориентированное многообразие (необязательно связное).

Такие многообразия подробно разобраны в [2].

Нетрудно убедиться, что все многоугольники ориентированы одинаково. Действительно, рассмотрим некоторый многоугольник. Если у него есть ребро ab (соответствующее, например, обходу против часовой стрелки), то он склеивается с другим, имеющим ребро ba , и обход нового многоугольника также против часовой стрелки. Далее продолжаем рассуждения для остальных ребер.

Основные характеристики многообразия: число ребер — $n(n - 1)/2 - m_2$, где m_2 — число 2-циклов. Число граней — общее число циклов в диаграмме ЛК (исключая единичные циклы и 2-циклы).

Следующее утверждение является обобщением теоремы Стейна и Нортонна [4] о несуществовании идемпотентных квазигрупп порядка $(4m + 2)$ с транзитивной группой автоморфизмов.

Теорема 3. *Квазигруппа порядка $(4m + 2)$ не является идеально симметричной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При транзитивной группе автотопий 1-го рода число вершин $V \equiv 0 \pmod{n}$, так как множество вершин, помеченных a_i , можно перевести в множество вершин, помеченных a_j .

Число ребер $R = n(n - 1)/2 - m_2$, число граней G делится на n (так как все подстановки имеют одинаковые цикловые виды).

Эйлерова характеристика компактного ориентированного многообразия $V - R + G$, как известно, четна [2]. Для $n = 4m + 2$: V и G — делится на n (при данном четном n), а R нечетно, так как $m_2 \cdot n$, следовательно, этот вариант невозможен.

Отдельного рассмотрения требуют коммутативные квазигруппы, поскольку им соответствуют пустые многообразия. Несложно заметить, что коммутативных квазигрупп четного порядка с транзитивной группой $At_I G$ нет, так как цикловые виды элементов различны: половина подстановок имеет по два единичных цикла, половина их не имеет. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоусов В.Д., Бежавская Г.Б.** Латинские квадраты, квазигруппы и их приложения. Кишинев: Штиинца, 1989. 75 с.
2. **Зейферт Г., Трэфльфалль В.** Топология. Ленинград: ГОНТИ, 1938. 400 с.
3. **Супруненко Д.А.** Группы подстановок. Минск: Наука и техника, 1996. 366 с.
4. **Norton D.A., Stein S.K.** An integer associated with latin squares // Proc. Amer. Math. Soc. 1956. Vol. 7. P. 331–334.

Елисеев Михаил Евгеньевич
канд. физ.-мат. наук

Нижегородский государственный технический университет
e-mail: EliseevMic@mail.ru

Поступила 15.10.2010

УДК 517.9

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
МЕТОДОМ ТИХОНОВА С НЕГЛАДКИМИ СТАБИЛИЗАТОРАМИ¹****А. И. Короткий, Е. И. Грибанова**

Рассматривается задача о восстановлении неизвестных управлений в гиперболических системах по результатам приближенных наблюдений за движениями этих систем. Для решения задачи предлагается воспользоваться методом Тихонова со стабилизатором, содержащим полную вариацию по времени варьируемого управления. Использование такого недифференцируемого стабилизатора позволяет получить в ряде случаев более тонкие результаты, чем аппроксимация искомого управления в пространствах Лебега. В частности, на этом пути удается обосновать кусочно-равномерную сходимость регуляризованных аппроксимаций, что открывает возможность для численного восстановления тонкой структуры искомого управления.

Ключевые слова: управляемая гиперболическая система, обратная задача динамики, метод регуляризации Тихонова, классическая вариация, кусочно-равномерная сходимость.

A. I. Korotkii, E. I. Gribanova. Reconstruction of controls in hyperbolic systems by Tikhonov's method with nonsmooth stabilizers.

The problem of reconstructing unknown controls in hyperbolic systems by the results of approximate observations of the motions of these systems is considered. To solve the problem, Tikhonov's method with a stabilizer containing the total time variation of the control is used. The use of such nondifferentiable stabilizer allows us to obtain more precise results in some cases than the approximation of the desired control in Lebesgue spaces. In particular, this method provides the piecewise uniform convergence of regularized approximations and makes possible the numerical reconstruction of the subtle structure of the desired control.

Keywords: controlled hyperbolic system, inverse problems of dynamics, Tikhonov's regularization method, classical variation, piecewise uniform convergence.

Введение

В статье рассматривается задача о восстановлении неизвестных управлений, функционирующих в управляемых динамических системах, описываемых краевыми задачами для уравнений с частными производными гиперболического типа. Управляющие воздействия в динамической системе могут быть заранее не известны и должны быть определены по результатам наблюдений за объектом, в частности, по результатам приближенных измерений текущих фазовых положений системы. Хорошо известно, что рассматриваемая задача некорректна, и ее решение требует привлечения методов регуляризации [1–3]. Подобного рода задачи восстановления для динамических систем изучались в разных постановках в теории управления, теории дифференциальных игр, теории оценивания и идентификации [4–12].

Для решения задачи предлагается использовать вариационный метод Тихонова, состоящий в минимизации некоторого подходящего функционала невязки на множестве допустимых управлений. С точки зрения теории управления этот метод можно классифицировать как статический метод восстановления. При решении задачи восстановления статическим методом исходной информацией для ее решения служат результаты приближенных измерений текущих фазовых положений системы, полученные при наблюдении за движением динамической системы в течение какого-либо заданного промежутка времени. Восстановление осуществляется

¹Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” при поддержке УРО РАН (проект 09-П-1-1006) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

по прошествии этого заданного промежутка времени по всей совокупности поступившей информации. Таким образом, данные для расчета управляющих воздействий известны заранее, до начала расчетов. Для решения задачи привлекаются понятия и методы теории управления и теории некорректных задач [1–12].

Известно, что для линейных некорректных задач классическая тихоновская регуляризация, использующая в качестве стабилизаторов нормы пространств Соболева, дает высокое качество восстановления для гладких искомым функций, однако не позволяет качественно восстанавливать недифференцируемые функции, которые могут содержать изломы, близкие пики, разрывы и другие особенности. Особенности такого рода могут иметь управляющие воздействия, функционирующие в динамических системах. Стабилизирующие функционалы, содержащие норму пространств Соболева, обладают сильным регуляризирующим эффектом, что неизбежно приводит к заглаживанию искомой функции и потере ее тонкой структуры. Стабилизирующие функционалы, содержащие нормы пространств Лебега, довольно часто используются при регуляризации задач, но они также приводят к довольно грубой аппроксимации. Поэтому возникает необходимость конструирования стабилизаторов, специально приспособленных к восстановлению негладких функций и функций с особенностями. К настоящему времени в вариационных методах регуляризации предложено несколько классов стабилизирующих функционалов, которые неплохо зарекомендовали себя как для гладких, так и для негладких восстанавливаемых функций. В случае функций одной переменной часто используются стабилизаторы, содержащие классическую или обобщенную вариацию в совокупности с какой-нибудь строго выпуклой нормой, например, нормой пространства L_p , $1 < p < \infty$ [13–20]. На этом пути удается получить сходимость в L_p , поточечную сходимость, сходимость вариаций, а также равномерную сходимость на участках непрерывности искомым функций. В случае функций нескольких переменных часто используются стабилизаторы, содержащие обобщенную вариацию [21] и норму пространства L_p , $1 \leq p < \infty$ [16–24]. Здесь удается получить сходимость в L_p , поточечную сходимость и сходимость обобщенных вариаций регуляризованных приближений к искомой функции. Для получения равномерной аппроксимации непрерывного, но в общем случае недифференцируемого решения привлекаются стабилизаторы в виде нормы пространства Липшица [16]. Использование в качестве стабилизатора нормы пространства Соболева W_p^γ с дробными производными порядка $\gamma \in (0, 1)$ может оказаться полезным для восстановления как непрерывных, так и разрывных искомым функций [13; 16]. Заметим, что упомянутые выше результаты получены для линейных и нелинейных операторных уравнений первого рода.

В данной работе показано, что при использовании стабилизаторов в виде суммы классической вариации и нормы пространства L_2 в задаче восстановления управления также можно получить поточечную сходимость, сходимость в L_2 , сходимость классических вариаций и кусочно-равномерную сходимость. Работа продолжает исследования [25–29].

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая динамическая система, состояние которой в момент времени t из заданного ограниченного отрезка времени $T = [t_0, \vartheta]$ ($-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty$) характеризуется парой функций $z[t] = (y[t], y_t[t]) = (y(t, \cdot), y_t(t, \cdot))$, определенных в некоторой области Ω евклидова пространства \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Эволюция состояний во времени описывается гиперболической краевой задачей [30]:

$$y_{tt} = Ly + fu, \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega, \quad (1.1)$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \quad y_t(t_0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$y(t, x) = 0, \quad t \in T, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (1.3)$$

где $y_0 = y_0(x)$, $x \in \Omega$, — начальное состояние системы; $y_1 = y_1(x)$, $x \in \Omega$, — начальная скорость системы; $f = f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $x \in \Omega$, — заданная векторная функция; $u = u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ — вектор управляющего воздействия на систему в момент времени $t \in T$; L — заданный эллиптический дифференциальный оператор;

$$Ly = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) \frac{\partial y}{\partial x_i} + a(t, x) y.$$

Допустимые текущие значения управляющего воздействия подчинены заданным геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T.$$

Пусть за управляемой динамической системой и ее движением $z = z[t]$, $t \in T$, осуществляется наблюдение в течение промежутка времени T и в соответствующие текущие моменты времени $t \in T$ приближенно измеряются состояния системы $z[t] = (y[t], y_t[t])$, причем результаты этих измерений $z_\delta[t] = (y^{(\delta)}[t], y_t^{(\delta)}[t])$ удовлетворяют следующим условиям:

$$H(z_\delta, z) = \int_T \|y^{(\delta)}[t] - y[t]\|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt + \int_T \|y_t^{(\delta)}[t] - y_t[t]\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq \delta^2, \quad (1.4)$$

где δ — числовой параметр, характеризующий точность измерений, $0 \leq \delta \leq \delta_0$.

Задача восстановления состоит в том, чтобы по результатам $z_\delta = z_\delta[t]$, $t \in T$, приближенных измерений наблюдаемого движения системы $z = z[t]$, $t \in T$, приближенно определить (восстановить) ту реализацию $u = u(t)$, $t \in T$, управляющего воздействия на динамическую систему, которая соответствует результатам наблюдений. При этом результат $u_\delta = u_\delta(t)$, $t \in T$, восстановления искомого управляющего воздействия $u = u(t)$, $t \in T$, должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений

$$\int_T \|u_\delta(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Далее будет предполагаться, что наблюдателю, стремящемуся к решению задачи восстановления, известны априорное геометрическое ограничение P на множество допустимых управлений и уравнения динамики процесса вместе с начальным состоянием $z[t_0] = (y[t_0], y_t[t_0])$.

Рассматриваемой задаче можно дать следующую содержательную интерпретацию. В некоторой области Ω с границей Γ осуществляется движение среды под действием массовых сил $F = fu$ с управляющей составляющей по времени u . Эта управляющая составляющая априори неизвестна. Движение среды в области Ω наблюдается в течение некоторого конечного отрезка времени $T = [t_0, \vartheta]$. По ходу процесса в текущие моменты времени $t \in T$ измеряются с некоторой ошибкой относительные смещения среды $y[t] = y(t, x)$, $x \in \Omega$, и скорости этих смещений $y_t[t] = y_t(t, x)$, $x \in \Omega$. Результатом этих измерений являются функции $y^{(\delta)}[t] = y^{(\delta)}(t, x)$, $y_t^{(\delta)}[t] = y_t^{(\delta)}(t, x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющие оценке (1.4). Требуется по поступившей информации $z_\delta[t] = (y^{(\delta)}[t], y_t^{(\delta)}[t])$, $t \in T$, о приближенной динамике среды на промежутке времени T приближенно восстановить реализацию того управления u , которое порождает наблюдаемую динамику среды $z[t] = (y[t], y_t[t])$, $t \in T$. При этом восстановление должно быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений.

Уточним постановку задачи. Пусть множество P геометрических ограничений на допустимые управления есть выпуклое компактное множество из \mathbb{R}^m ; множество всех допустимых управлений U есть множество всех измеримых вектор-функций $T \rightarrow \mathbb{R}^m$, которые при почти всех $t \in T$ принадлежат компакту P . Заметим, что множество U выпукло, ограничено, замкнуто и слабо компактно в пространстве $E = L_2(T; \mathbb{R}^m)$.

Будем считать, что Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с кусочно-гладкой границей Γ (для дальнейшего достаточно, чтобы область Ω обладала, например, свойствами [31, с. 212, 222]).

Пусть $f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $y_0 \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $y_1 \in L_2(\Omega)$ и коэффициенты оператора L удовлетворяют следующим условиям [30, гл. 4, § 4]:

$$\sum_{i,j=1}^n \left[\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial t^2} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right)^2 \right] \leq C, \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq C, \quad a^2 \leq C, \quad C = \text{const} > 0,$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad \mu = \text{const} \geq \nu.$$

Известно [30, гл. 4, § 4], что при указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1)–(1.3) для каждого управления $u \in E$ существует единственное обобщенное решение $y = y(t, x) = y(t, x; u)$, $(t, x) \in Q$, этой краевой задачи из энергетического класса $W_2^1(Q)$, причем $y \in C(T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, $y_t \in C(T; L_2(\Omega))$. Пару функций $z = (y, y_t) = (y(\cdot; u), y_t(\cdot; u))$ иногда будем называть движением динамической системы (1.1)–(1.3), порожденным управлением $u \in U$, и обозначать его символом $z = z[\cdot; u] = z[t; u]$, $t \in T$.

Пусть $Z = \{z[\cdot; u] : u \in U\}$ обозначает множество всех возможных движений системы (1.1)–(1.3), отвечающих всем возможным управлениям $u \in U$. Для каждого движения $z \in Z$ введем множество $U(z) = \{u \in U : z[\cdot; u] = z\}$ всех допустимых управлений, порождающих данное движение, и множество $Z_\delta(z) = \{z_\delta \in Y : H(z_\delta, z) \leq \delta^2\}$ всех возможных измерений этого движения, $Y = L_2(T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)) \times L_2(T; L_2(\Omega))$.

Искомый алгоритм отождествим с семейством отображений (методов):

$$D = \{D_\delta : 0 \leq \delta \leq \delta_0\}, \quad D_\delta : Y \rightarrow E.$$

Исходную задачу теперь можно сформулировать так: требуется построить алгоритм D , который на любом наблюдаемом движении системы $z \in Z$ обладает регуляризующим свойством

$$r_\delta(z) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

где

$$r_\delta(z) = \sup \{ \rho[D_\delta(z_\delta), U(z)] : z_\delta \in Z_\delta(z) \},$$

$$\rho[D_\delta(z_\delta), U(z)] = \min \{ \|D_\delta(z_\delta) - v\|_E : v \in U(z) \}.$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются, например, в [30–34].

2. Свойства управляемой системы и обратной задачи

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, отметим некоторые свойства движений динамической системы и введенных в рассмотрение множеств. Эти свойства будут использоваться при обосновании выбранного способа решения задачи восстановления.

Лемма 1. *Если последовательность управлений $\{u_k\} \subset E$ слабо в E сходится к элементу $u_* \in E$, то соответствующая последовательности управлений последовательность движений $\{z[\cdot; u_k]\}$ сходится в Y к движению $z[\cdot; u_*]$.*

Доказательство леммы фактически содержится в доказательстве теоремы существования и единственности решения из энергетического класса [30, гл. 4, §§ 3, 4].

Лемма 2. *Отображение $A : E \ni u \rightarrow z[\cdot; u] \in Y$ линейно и компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линейность оператора A следует из линейности краевой задачи (1.1)–(1.3) и линейности правой части в (1.1) по u , так что для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in E$ справедливо равенство $z[\cdot; \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2] = \lambda_1 z[\cdot; u_1] + \lambda_2 z[\cdot; u_2]$.

Докажем компактность оператора A как отображения $A : E \ni u \rightarrow z[\cdot; u] \in Y$. Рассмотрим произвольное ограниченное множество $M \subset E$, его образ AM при отображении A и произвольную последовательность $\{z_k\} \subset AM$. Для z_k существует элемент $u_k \in M$ такой, что $z_k = z[\cdot; u_k]$. Последовательность $\{u_k\} \subset M$ ограничена в гильбертовом пространстве E , поэтому из нее можно выделить слабо сходящуюся в E подпоследовательность $\{u_{k_p}\} \subseteq \{u_k\}$ [32, с. 191, 230], $u_{k_p} \rightharpoonup u_* \in E$ слабо в E . По лемме 1 имеем $z_{k_p} \rightarrow z_* = z[\cdot; u_*]$ в Y . Отсюда следует предкомпактность множества AM в Y , что доказывает компактность оператора A [32, с. 222]. Лемма доказана.

Лемма 3. *Множество Z выпукло и компактно в пространстве Y .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпуклость множества Z следует из того, что оно является образом выпуклого множества U при линейном отображении A . Компактность множества Z следует из слабой компактности множества U и леммы 1. Соответствующие рассуждения фактически проведены при доказательстве леммы 2. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для каждого $z \in Z$ множество $U(z)$ непусто, выпукло, ограничено, замкнуто и слабо компактно в E , оно содержит в себе единственный элемент минимальной E -нормы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $z \in Z$, то z является движением системы, порожденным некоторым управлением $u \in U$, $z = z[\cdot; u]$, поэтому $U(z) \neq \emptyset$ и $u \in U(z)$.

Докажем выпуклость множества $U(z)$. Рассмотрим произвольные элементы $u_1, u_2 \in U(z)$ и произвольную выпуклую линейную комбинацию $u_\lambda = \lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Поскольку $z = z[\cdot; u_1] = z[\cdot; u_2]$, то в силу линейности системы (1.1)–(1.3) по управлению имеем $z = \lambda z + (1 - \lambda) z = \lambda z[\cdot; u_1] + (1 - \lambda) z[\cdot; u_2] = z[\cdot; u_\lambda]$. Это означает, что $u_\lambda \in U(z)$ и множество $U(z)$ выпукло.

Ограниченность $U(z)$ следует из ограниченности U и включения $U(z) \subset U$.

Докажем замкнутость $U(z)$ в E . Рассмотрим произвольную последовательность $\{u_k\} \subset U(z)$ такую, что $u_k \rightarrow u_0$ в E . В силу замкнутости множества U в E имеем $u_0 \in U$. С одной стороны, по лемме 1 имеем $z[\cdot, u_k] \rightarrow z[\cdot, u_0]$ в Y . С другой стороны, для стационарной последовательности $z[\cdot, u_k] = z \rightarrow z$ в Y . В силу единственности предела $z[\cdot, u_0] = z$. Значит, $u_0 \in U(z)$. Замкнутость $U(z)$ в E доказана. Из доказанных свойств $U(z)$ следует [32, с. 186; 35, с. 506], что множество $U(z)$ слабо компактно в E .

Норма в гильбертовом пространстве E является сильно выпуклым [35, с. 510] и слабо полунепрерывным снизу функционалом [35, с. 508]. Поэтому она достигает своего минимума на выпуклом слабо компактном множестве $U(z)$ в единственной точке [35, с. 504, 160]. Существование и единственность элемента минимальной E -нормы в $U(z)$ доказана. Лемма доказана.

Лемма 5. *Задача восстановления управления некорректна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача восстановления управления фактически представляет собой задачу нахождения непрерывного оператора $Y \ni z[\cdot; u] \rightarrow u \in E$, обратного к оператору A . Из леммы 2 следует, что отображение A не может иметь непрерывного обратного отображения [32, с. 228], поэтому рассматриваемая задача восстановления некорректна и для ее решения необходимо привлекать методы регуляризации. Лемма доказана.

3. Решение задачи восстановления

Пусть $V[u]$ — полная вариация функции $u : T \ni t \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}^m$ [32–35]

$$V[u] = \sup \left\{ \sum_{i=1}^l \|u(t_i) - u(t_{i-1})\|_{\mathbb{R}^m} : \sigma \in \Sigma \right\},$$

супремум берется по множеству Σ всех конечных разбиений σ отрезка T

$$\sigma : t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} < t_l = \vartheta.$$

Пусть W — банахово пространство [13; 19]

$$W = \{ u \in E : V[u] < +\infty \}, \quad \|u\|_W = \|u\|_E + V[u].$$

Лемма 6. *Пространство W компактно вкладывается в E , т. е. оператор вложения W в E непрерывен и каждое ограниченное множество из W он переводит в предкомпактное множество из E . Всякое замкнутое множество из W замкнуто и в E .*

Лемма доказана в [13; 35].

Лемма 7. *Поточечный предел ограниченной в W последовательности функций является функцией из W .*

Лемма 8. *Функционал $V[\cdot]$ полунепрерывен снизу относительно поточечной сходимости, т. е. если последовательность функций ограниченной полной вариации $\{v_k\}$ сходится поточечно к некоторой функции ограниченной полной вариации v_0 , то $V[v_0] \leq \liminf V[v_k]$.*

Лемма 9. *Норма $\|\cdot\|_W$ полунепрерывна снизу относительно поточечной сходимости, т. е. если последовательность функций $\{v_k\} \subset W$ сходится поточечно к некоторой функции $v_0 \in W$, то $\|v_0\|_W \leq \liminf \|v_k\|_W$.*

Лемма 10. *Функционал $V[\cdot]$ и норма $\|\cdot\|_W$ полунепрерывны снизу относительно сходимости в E ограниченных последовательностей из W , т. е. если $\{v_k\}$ есть ограниченная последовательность из W , которая в E сходится к некоторой функции $v_0 \in E$, то $v_0 \in W$ и $V[v_0] \leq \liminf V[v_k]$, $\|v_0\|_W \leq \liminf \|v_k\|_W$.*

Леммы 7–10 доказаны в [27].

Введем следующие обозначения: $\alpha = \text{const} > 0$,

$$F_\alpha = F_\alpha(g, v) = H(z[\cdot; v], g) + \alpha \Lambda(v), \quad \Lambda(v) = \|v\|_E^2 + V[v], \quad (3.1)$$

$$F_\alpha^*(g) = \min \{ F_\alpha(g, v) : v \in U_W \}, \quad U_W = U \cap W, \quad (3.2)$$

$$U_\alpha^*(g) = \{ v \in U_W : F_\alpha(g, v) = F_\alpha^*(g) \}. \quad (3.3)$$

Укажем некоторые свойства функционала (3.1), задачи (3.2) и множества ее решений (3.3).

Лемма 11. *При любых $\alpha > 0$, $g \in Y$ функционал (3.1) полунепрерывен снизу по v относительно сходимости в E ограниченных последовательностей из W .*

Лемма следует из лемм 1, 10.

Лемма 12. *При любых $\alpha > 0$, $g \in Y$ экстремальная задача (3.2) однозначно разрешима, множество ее решений $U_\alpha^*(g)$ состоит из одного элемента $u_\alpha^* \in U_W$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непустота и компактность множества $U_\alpha^*(g)$ в E , а также его замкнутость в W отмечены выше. Из линейности движения $z = z[\cdot; u]$ по управлению $u \in E$ следует выпуклость в E и W первого слагаемого в функционале (3.1). Квадрат нормы в E является строго выпуклым функционалом на E и W . Вариация $V[\cdot]$ есть выпуклый функционал на W . Поэтому функционал $F_\alpha(g, \cdot)$ будет строго выпуклым на W . Из строгой выпуклости функционала $F_\alpha(g, \cdot)$ следует одноэлементность множества $U_\alpha^*(g)$. Лемма доказана.

Лемма 13. При любых $\alpha > 0$, $g \in Y$ всякая минимизирующая последовательность в задаче (3.2) сходится сильно (слабо) в E к элементу $u_\alpha^* \in U_\alpha^*(g)$.

Лемма следует из лемм 1, 6, 7, 11.

Пусть на множестве U задан некоторый функционал G . Элемент \hat{u} множества $S \subseteq U$, удовлетворяющий условию $G(\hat{u}) = \inf \{ G(u) : u \in S \}$, назовем (G, S) -нормальным элементом множества S и будем обозначать его символом $\hat{u}(G, S)$.

Лемма 14. Пусть для $z \in Z$ множество $S = U(z) \cap W \neq \emptyset$, тогда во множестве S существует единственный (Λ, S) -нормальный элемент $\hat{u} = \hat{u}(\Lambda, S)$.

Доказательство. Пусть для $z \in Z$ множество $S = U(z) \cap W \neq \emptyset$. Покажем непустоту множества (Λ, S) -нормальных элементов множества S . Поскольку $S \neq \emptyset$, то существует хотя бы один элемент $u_* \in S$, для которого $\Lambda(u_*) \leq C < \infty$. Тогда все (Λ, S) -нормальные элементы, если они существуют, обязаны содержаться во множестве $S_c = U(z) \cap W_c$, где $W_c = \{u \in W : \Lambda(u) \leq C\}$. Ясно, что

$$\Lambda_* = \inf \{ \Lambda(u) : u \in S \} = \inf \{ \Lambda(u) : u \in S_c \}.$$

Пусть $\{u_k\} \subset S_c$ есть произвольная минимизирующая функционал Λ на множестве S_c последовательность. Не нарушая общности рассуждений и выделяя, если потребуется, подпоследовательности, можем считать, что существует элемент $u^* \in S_c$ такой, что $u_k \rightarrow u^*$ в E и $u_k \rightarrow u^*$ поточечно на T . Учитывая полунепрерывность снизу функционала Λ относительно поточечной сходимости на T (согласно лемме 10) и минимизируемость последовательности $\{u_k\}$, получаем

$$\Lambda_* \leq \Lambda(u^*) \leq \liminf \Lambda(u_k) = \lim \Lambda(u_k) = \Lambda_*.$$

Таким образом, $\Lambda(u^*) = \Lambda_*$ и непустота множества (Λ, S) -нормальных элементов доказана. Единственность (Λ, S) -нормального элемента следует из выпуклости множества S и строгой выпуклости функционала Λ , которая вытекает из строгой выпуклости функционала $\| \cdot \|_E^2$ и выпуклости функционала $V[\cdot]$ [35, с. 160]. Лемма доказана.

Построим искомый алгоритм, решающий задачу восстановления. Для любых $\delta \in [0, \delta_0]$, $g \in Y$ определим реализацию (значение) метода $D_\delta(g)$ по правилу

$$D_\delta(g) = v \in U_W : F_\alpha^*(g) \leq F_\alpha(g, v) \leq F_\alpha^*(g) + \varepsilon, \quad (3.4)$$

где ε — неотрицательный параметр, характеризующий точность решения экстремальной задачи (3.2). Величины α и ε будут являться параметрами метода (параметрами регуляризации), они будут выбираться в зависимости от величины δ погрешности измерений.

Теорема 1. Пусть для $z \in Z$ множество $S = U(z) \cap W \neq \emptyset$ и параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2) \alpha(\delta)^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\delta) \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Тогда алгоритм D , состоящий из методов (3.4), решает задачу восстановления на наблюдаемом движении z , т. е. $r_\delta(z) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, если \hat{u} есть (Λ, S) -нормальный элемент множества S , то какие бы ни случились при этом реализации измерений $z_\delta \in Z_\delta(z)$, для реализаций $v_\delta = D_\delta(z_\delta)$ методов (3.4) при $\delta \rightarrow 0$ имеют место следующие сходимости:

- 1) $V[v_\delta] \rightarrow V[\hat{u}]$;
- 2) $v_\delta \rightarrow \hat{u}$ сильно в E ;
- 3) $v_\delta(t) \rightarrow \hat{u}(t)$ в \mathbb{R}^m поточечно на T ;
- 4) $v_\delta(t) \rightarrow \hat{u}(t)$ в \mathbb{R}^m равномерно по t из любого отрезка, не содержащего точек разрыва функции \hat{u} .

Доказательство. Пусть для $z \in Z$ множество $S = U(z) \cap W \neq \emptyset$. Согласно лемме 14 во множестве S существует единственный (Λ, S) -нормальный элемент $\hat{u} = \hat{u}(\Lambda, S)$. Зафиксируем какие-нибудь произвольные зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, удовлетворяющие условию (3.5). Выберем и зафиксируем какую-нибудь числовую последовательность $\{\delta_k\} \subset [0, \delta_0]$, $\delta_k \rightarrow 0$, и последовательность элементов $\{z_k\}$, $z_k \in Z_{\delta_k}(z)$, $k \in \mathbb{N}$. Учитывая определение элементов $v_k = D_{\delta_k}(z_k) \in U_W$, можем записать цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \alpha(\delta_k)\Lambda(v_k) &\leq \alpha(\delta_k)\Lambda(v_k) + H(z[\cdot; v_k], z_k) = F_{\alpha(\delta_k)}(z_k, v_k) \leq F_{\alpha(\delta_k)}^*(z_k) + \varepsilon(\delta_k) \\ &\leq F_{\alpha(\delta_k)}(z_k, \hat{u}) + \varepsilon(\delta_k) = H(z[\cdot; \hat{u}], z_k) + \alpha(\delta_k)\Lambda(\hat{u}) + \varepsilon(\delta_k) \leq \delta_k^2 + \alpha(\delta_k)\Lambda(\hat{u}) + \varepsilon(\delta_k). \end{aligned}$$

Из полученной цепочки неравенств следует оценка

$$\Lambda(v_k) \leq \Lambda(\hat{u}) + (\delta_k^2 + \varepsilon(\delta_k))\alpha(\delta_k)^{-1}. \quad (3.6)$$

Из этой оценки и условия (3.5) вытекает ограниченность последовательности $\{v_k\}$ в E и W . Поэтому из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, которая сильно в E и поточечно на T сходится к некоторому элементу $\tilde{u} \in U_W$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что сама последовательность $\{v_k\}$ сильно в E и поточечно на T сходится к элементу $\tilde{u} \in U_W$, причем

$$\Lambda(\tilde{u}) \leq \liminf \Lambda(v_k). \quad (3.7)$$

Проверим, что \tilde{u} есть элемент множества $U(z) \cap W$:

$$\begin{aligned} H(z[\cdot; \tilde{u}], z) &= \lim H(z[\cdot; v_k], z) = \lim H(z[\cdot; v_k], z_k) \leq \limsup \left[H(z[\cdot; v_k], z_k) + \alpha(\delta_k)\Lambda(v_k) \right] \\ &= \limsup F_{\alpha(\delta_k)}(z_k, v_k) \leq \limsup \left[\alpha(\delta_k)\Lambda(\hat{u}) + \delta_k^2 + \varepsilon(\delta_k) \right] = 0, \end{aligned}$$

значит, $\tilde{u} \in U(z) \cap W$.

Далее, из (3.5)–(3.7) получаем

$$\Lambda(\hat{u}) \leq \Lambda(\tilde{u}) \leq \liminf \Lambda(v_k) \leq \limsup \Lambda(v_k) \leq \Lambda(\hat{u}).$$

Из полученных неравенств имеем

$$\lim \Lambda(v_k) = \Lambda(\tilde{u}) = \Lambda(\hat{u}).$$

Тогда в силу единственности (Λ, S) -нормального элемента во множестве S получаем, что $\tilde{u} = \hat{u}$ в W и имеют место сходимости $v_k \rightarrow \hat{u}$ в E и $V[v_k] \rightarrow V[\hat{u}]$.

Таким образом, установлено

$$\begin{aligned} v_k &= D_{\delta_k}(z_k) \rightarrow \hat{u} \text{ в } E, \\ v_k(t) &\rightarrow \hat{u}(t) \text{ в } \mathbb{R}^m \quad \forall t \in T, \\ V[v_k] &\rightarrow V[\hat{u}]. \end{aligned}$$

Поскольку последовательности $\{\delta_k\} \subset [0, \delta_0]$, $\delta_k \rightarrow 0$, $\{z_k\}$, $z_k \in Y_{\delta_k}(z)$, $k \in \mathbb{N}$, были произвольными и для них имеет место сходимость $v_k = D_{\delta_k}(z_k) \rightarrow \hat{u}$ в E , то, рассуждая от противного, получаем

$$r_\delta(z) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

т. е. построенный алгоритм решения задачи является регуляризирующим.

Из сходимостей $V[v_k] \rightarrow V[\hat{u}]$, $v_k(t) \rightarrow \hat{u}(t)$ в \mathbb{R}^m при $t \in T$ и результатов работ [18–20] следует, что $v_k \rightarrow \hat{u}$ равномерно на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции \hat{u} . В силу единственности (Λ, S) -нормального элемента во множестве S с помощью рассуждений

от противного можно показать, что при $\delta \rightarrow 0$ имеют место сходимости $D_\delta(z_\delta) = v_\delta \rightarrow \hat{u}$ в E , $v_\delta(t) \rightarrow \hat{u}(t)$ в \mathbb{R}^m при $t \in T$, $V[v_\delta] \rightarrow V[\hat{u}]$, $v_\delta(t) \rightarrow \hat{u}(t)$ равномерно по t на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции \hat{u} , какие бы ни случились при этом реализации измерений $z_\delta \in Y_\delta(z)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть $n = 1$, $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $B = T \times [a, b]$, $E = L_2(B)$,

$$U = \{u \in E : u(t, x) \in P \text{ при п.в. } (t, x) \in B\}.$$

В качестве стабилизатора рассмотрим функционал $\Lambda(v) = \|v\|_E^2 + \|v\|_W$, где $\|\cdot\|_W$ — норма в банаховом пространстве W функций двух переменных $v = v(t, x)$, $(t, x) \in B$, с конечной полной вариацией $VH(v, B)$ [19, с. 89]. Повторяя приведенную выше схему решения задачи восстановления и опираясь на результаты [19, с. 89–91], получим следующее утверждение, аналогичное доказанной теореме.

Теорема 2. Пусть для $z \in Z$ множество $S = U(z) \cap W$ непусто, тогда во множестве $U(z)$ существует единственный $(\Lambda, U(z))$ -нормальный элемент $\hat{u} = \hat{u}(\Lambda, U(z))$. Пусть управление \hat{u} является единственным в существенном [19, с. 90], и пусть оно непрерывно в области $G \subset B$ вместе с функцией $\pi(t, x) = VH(\hat{u}, B_{t_0 a}^{tx})$ [19, с. 89]. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования (3.5). Тогда алгоритм D , состоящий из методов (3.4), решает задачу восстановления на наблюдаемом движении z , т. е. $r_\delta(z) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, какие бы ни случились при этом реализации измерений $z_\delta \in Z_\delta(z)$, для реализаций $v_\delta = D_\delta(z_\delta)$ методов (3.4) при $\delta \rightarrow 0$ имеют место следующие сходимости:

- 1) $VH[v_\delta, B] \rightarrow V[\hat{u}, B]$;
- 2) $v_\delta \rightarrow \hat{u}$ сильно в E ;
- 3) $v_\delta(t, x) \rightarrow \hat{u}(t, x)$ в \mathbb{R}^m поточечно на B ;
- 4) $v_\delta(t, x) \rightarrow \hat{u}(t, x)$ в \mathbb{R}^m равномерно по (t, x) из любой замкнутой подобласти $\hat{G} \subset G$.

Аналогичное утверждение справедливо при замене полной вариации $VH(v, B)$ на вариацию Арцела $VA(v, B)$ [19, с. 89–91]. При этом часть утверждения, касающаяся поточечной сходимости $v_\delta \rightarrow \hat{u}$ на B , следует заменить на утверждение: $v_\delta \rightarrow \hat{u}$ в точках непрерывности функции \hat{u} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
6. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V. Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
8. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
9. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
10. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
11. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.

12. **Крутько П.Д.** Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 332 с.
13. **Агеев А.Л.** Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 4. С. 819–836.
14. **Васин В.В.** Регуляризация и дискретная аппроксимация некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Докл. РАН. 2001. Т. 376, № 1. С. 11–14.
15. **Васин В.В.** Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.
16. **Васин В.В.** Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 64–77.
17. **Vasin V.V., Korotkii M.A.** Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2007. Vol. 15, № 8. P. 853–865.
18. **Леонов А.С.** Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22, № 3. С. 516–531.
19. **Леонов А.С.** Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 326 с.
20. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 212 с.
21. **Giusti E.** Minimal surfaces and functions of bounded variations. Basel: Birkhauser, 1984. 239 p.
22. **Acar R., Vogel C.R.** Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems // Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 1217–1229.
23. **Chavent G., Kunish K.** Regularization of linear least squares problems by total bounded variation control // Optimization and Calculus of variation. 1997. Vol. 2. P. 359–376.
24. **Vogel C.R.** Computation methods for inverse problems. Philadelphia: SIAM, 2002. 183 p.
25. **Короткий М.А.** Восстановление управлений и параметров методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 2. С. 76–82.
26. **Короткий М.А.** Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 39–53.
27. **Короткий М.А.** Метод регуляризации Тихонова с негладкими стабилизаторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 132 с.
28. **Соболева Д.О.** Реконструкция управлений в параболических системах // Вестн. Бурятского гос. ун-та. Математика и информатика. 2010. Вып. 9. С. 59–67.
29. **Михайлова Д.О.** Восстановление управлений в параболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 211–227.
30. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
31. **Ладыженская О.А.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
32. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
33. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
34. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
35. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 824 с.

Короткий Александр Илларионович

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Грибанова Екатерина Ивановна

студент

Уральский государственный университет им. А.М. Горького

e-mail: katuufka@mail.ru

Поступила 20.11.2010

УДК 519.63

О МЕТОДЕ ПРЕОДОЛЕНИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК ПРИ РЕШЕНИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. М. Липанов

Излагается суть метода обхода решения трансцендентных уравнений. Приводятся примеры преодоления особых точек, уравнения с известными корнями решаются как трансцендентные. Описывается метод реализации таких преодолений.

Ключевые слова: трансцендентные уравнения, особые точки.

A. M. Lipanov. On the method of overcoming singular points in the solution of transcendental equations.

The essence of the bypass method for solving transcendental equations is presented. Examples of overcoming singular points are given, and equations with known roots are solved as transcendental ones. The method of implementing such overcomings is described.

Keywords: transcendental equations, singular points.

Введение

Эффективным методом численного решения трансцендентных уравнений (Т-уравнений) является метод продолжения по параметру М.К. Гавурина [1]. С помощью этого метода можно преодолевать немонотонности в характере изменения функций, находящихся в левых частях Т-уравнений, и находить корни Т-уравнений.

В работе [2] автором предложен другой метод решения Т-уравнений, где используются более одного параметра продолжения. Последние все могут находиться вне выражения Т-уравнения или, наоборот, быть включенными в состав выражения этого уравнения.

Возможен, конечно, и промежуточный случай, когда одна часть параметров используется вне левой части уравнения, а другая часть — внутри его выражения.

В работе [2] показано, что при использовании нескольких параметров продолжения можно обходить особые точки, однако не были приведены ни примеры, ни методы реализации таких обходов.

В данной работе излагается метод обхода, приводятся два примера преодоления особых точек и показывается, как можно в этих случаях решать Т-уравнения.

1. Метод решения Т-уравнений и преодоления особых точек

Будем использовать два параметра — продолжения ξ и η .

Пусть рассматривается одно Т-уравнение

$$\Phi(x) = 0. \quad (1)$$

Считаем функцию $\Phi(x)$ непрерывной, ограниченной и дифференцируемой по крайней мере один раз.

Составим для этого уравнения сначала следующее соотношение:

$$\Phi[x(\xi, \eta), \xi] + (\eta + 1)\Phi_0 = 0. \quad (2)$$

Здесь $\Phi[x, \xi]$ — однопараметрическое семейство, $\xi \in [0, 1]$, и $\Phi[x, 1] = \Phi(x)$, а Φ_0 — некоторая константа; параметр η тоже из $[0, 1]$.

В уравнении (2) параметр η используется вне выражения левой части уравнения (1), а параметр ξ — внутри его выражения.

Величину постоянной Φ_0 определим из условия, что при $\xi = \eta = 0$ $x = x_0$.

Поэтому имеем

$$\Phi_0 = \Phi[x(0, 0), 0],$$

где $x(0, 0) = x_0$ — решение уравнения (1).

Видим, что при $\xi = \eta = 0$ уравнение (2) удовлетворяется, а при $\xi = \eta = 1$ уравнение (2) превращается в уравнение (1) и, таким образом, позволяет решить его.

Продифференцируем уравнение (2) сначала по ξ , а потом по η . Получим два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \Phi_0 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

позволяющих определять частные производные $\partial x/\partial \xi$ и $\partial x/\partial \eta$. Последние вслед за функцией $\Phi(x)$ будут кусочно-непрерывными и ограниченными.

Далее запишем выражение для полного дифференциала переменной x в области (ξ, η) изменения параметров ξ и η .

Получим

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi.$$

Разделим это равенство слева и справа на $d\eta$. Будем иметь

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{d\eta}. \quad (4)$$

В результате из всех возможных направлений перемещения в области изменения переменных ξ и η получаем возможность выбрать только одно из них — $d\xi/d\eta$.

Подставим в уравнение (4) вместо частных производных $\partial x/\partial \eta$ и $\partial x/\partial \xi$ их выражения, определяемые с помощью уравнений (3). Получим

$$\frac{dx}{d\eta} = -\frac{\Phi_0 + \partial \Phi/\partial \xi \cdot d\xi/d\eta}{\partial \Phi/\partial x}. \quad (5)$$

Рассмотрим конкретный пример:

$$\Phi(x) = (x - 1)(x - 4) = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение будем решать как трансцендентное. Оно имеет два корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$ и знание их величин заранее удобно при анализе решаемого уравнения как трансцендентного.

Составим на основе уравнения (6) следующее уравнение:

$$\Phi_1(x, \xi, \eta) = (x - 1)(\xi x - 4) + (\eta - 1)\Phi_0 = 0. \quad (7)$$

При $\xi = \eta = 0$ имеем

$$\Phi_0 = -4(x_0 - 1).$$

Если принять $x_0 = 0$, то получим $\Phi_0 = 4$.

Для производных $\partial \Phi_1/\partial x$ и $\partial \Phi_1/\partial \xi$ находим выражения:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \xi(2x - 1) - 4, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = x(x - 1).$$

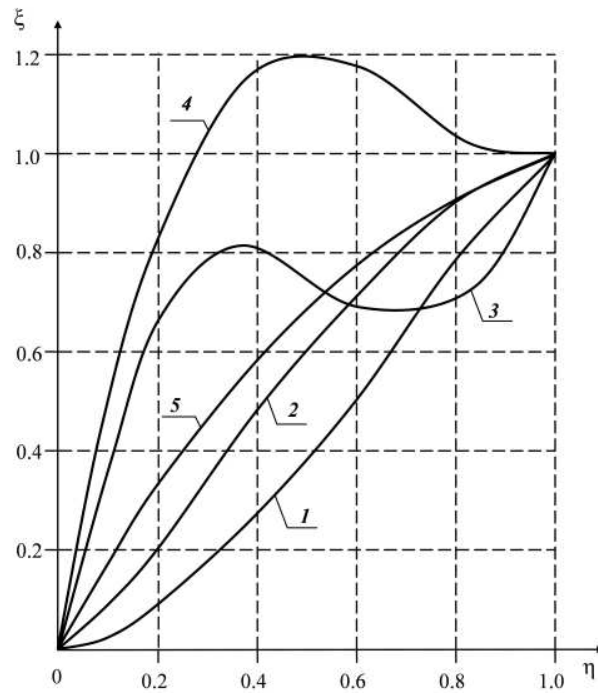


Рис. 1. Кривые зависимостей параметра ξ от параметра η при использовании формулы (10). (Номера кривых соответствуют номерам вариантов в таблице).

Тогда для производной $dx/d\eta$ с помощью уравнения (7) сможем записать следующее равенство:

$$\frac{dx}{d\eta} = -\frac{4 + x(x - 1) \cdot d\xi/d\eta}{\xi(2x - 1) - 4}. \tag{8}$$

Для расчета переменной ξ как функции η воспользуемся полиномом

$$\xi = \xi_{\text{init}} + (\eta - \eta_{\text{init}})[a + b(\eta - \eta_{\text{init}}) + c(\eta - \eta_{\text{init}})^2], \tag{9}$$

где ξ_{init} и η_{init} — начальные значения параметров ξ и η на различных этапах решения уравнения (6).

Если $\xi_{\text{init}} = \eta_{\text{init}} = 0$, то уравнение (9) превращается в следующее:

$$\xi = \eta(a + b\eta + c\eta^2). \tag{10}$$

Коэффициенты a, b, c выбираем так, чтобы при $\eta = 1$ параметр ξ тоже равнялся единице. Величины коэффициентов a, b, c приведены в таблице.

Величины коэффициентов в выражениях (9) или (10)

Коэффициент	Номер варианта				
	1	2	3	4	5
a	0.1	0.9	5.26	5.8	2
b	1.9	1.1	-10.52143	-8.8	-1.5
c	-1	-1	6.26143	4	0.5

Кривые зависимостей ξ от η показаны на рис. 1. Видим, что три из них монотонные, а две — немонотонные. Одна из немонотонных кривых внутри интеграла $[0, 1]$ оказывается больше единицы. В то же время все кривые начинаются с нуля и заканчиваются при $\xi = \eta = 1$.

Будем решать уравнение (8) начиная с $x_0 = 0$ и $\eta = 0$. Для расчета ξ как функции η будем использовать равенство (10).

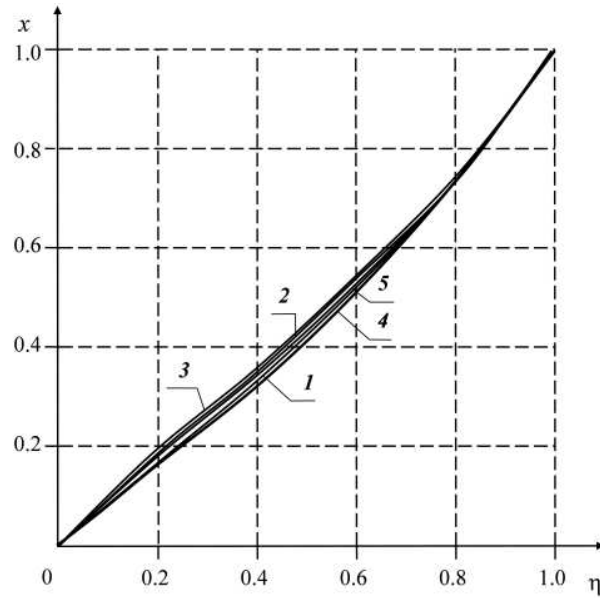


Рис. 2. Кривые $x = x(\eta)$ при решении уравнения (8).

При $\eta = 1$ получим первый корень уравнения (6), равный $x_1 = 1$. Кривые траекторий в области (x, η) приведены на рис. 2. Все они при $\eta = 1$ имеют величину $x = 1$ и располагаются вблизи некоторой средней линии.

Однако ниже всех находится кривая, соответствующая немонотонной зависимости ξ от η , когда $\xi_{\max} = 1.2$ (4-й вариант в таблице).

Нетрудно показать, что если параметру ξ в интервале изменения η , равном $[0, 1]$, придавать значения существенно больше единицы, то знаменатель уравнения (8) может сменить знак. Поэтому в интервале $[0, 1]$ изменения параметра η параметр ξ как функция η может изменяться монотонно или немонотонно, но должен оставаться в пределах интервала $[0, 1]$. Кроме того, при $\eta = 1$ параметр ξ тоже должен равняться единице.

Близкие результаты получаем и в том случае, когда вместо уравнения (7) используем следующее:

$$\Phi_2(x, \xi, \eta) = (x - 1)(x - 4) + \Phi_0(\xi - 1) + \Phi_0(\eta - 1) = 0. \quad (11)$$

Здесь параметры ξ и η находятся вне выражения левой части уравнения (6). Определив частные производные $\partial\Phi_2/\partial x$, $\partial\Phi_2/\partial\xi$ и $\partial\Phi_2/\partial\eta$ и подставив их в уравнение (5), найдем

$$\frac{dx}{d\eta} = -\Phi_0 \frac{1 + d\xi/d\eta}{2x - 5}. \quad (12)$$

При $\xi = \eta = 0$ и $x = x_{\text{init}}$ из уравнения (11) получим

$$\Phi_0 = (x_{\text{init}} - 1)(x_{\text{init}} - 4)/2. \quad (13)$$

Уравнение (12) интегрируется аналитически. Поэтому находим

$$x^2 - 5x = -C, \quad (14)$$

где $C = -x_{\text{init}}^2 + 5x_{\text{init}} + \Phi_0(\eta + \xi)$. Здесь первый корень уравнения (6) соответствует равенству

$$x = 5/2 - \sqrt{25/4 - C}.$$

Если $x_{\text{init}} = 0$, то $\Phi_0 = 2$ и при $\xi = \eta = 1$ находим $x_1 = 1$.

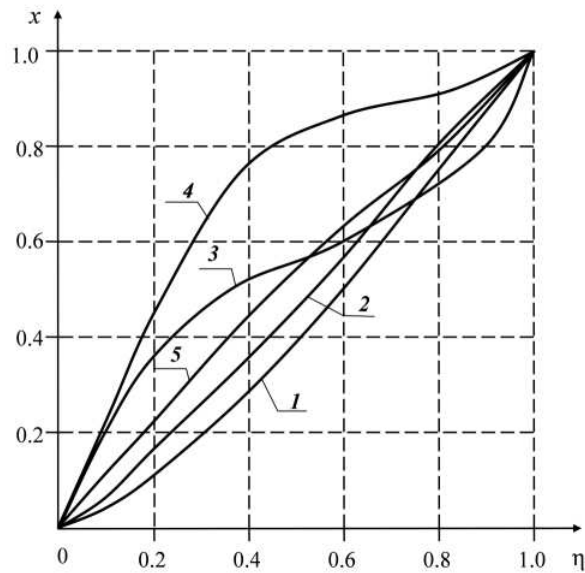


Рис. 3. Кривые зависимости x от η для различных вариантов a, b, c .

Кривые зависимости x от η для различных вариантов коэффициентов a, b, c в таблице показаны на рис. 3. Все они монотонные, при $\eta = 1$ имеют $x = 1$, но кривые, соответствующие немонотонным зависимостям ξ от η , имеют точки перегиба.

Чтобы найти второй корень, надо продолжить решать уравнение (8) при $x > x_1 = 1$. Здесь важно иметь в виду, что при переходе от одного корня Т-уравнения к другому функция $\Phi(x)$ в уравнении (6) должна пройти через минимум. Это значит, что в этой точке производная $\partial\Phi/\partial x$ будет равна нулю. Поэтому при переходе от одного корня к другому процесс вычислений будем делить на два этапа. Первый из них будем связывать с преодолением особенности в знаменателе уравнения (8), а второй — с нахождением второго корня. Конечно, в окрестности особой точки уравнение (8) можно записать в виде

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{\xi(2x - 1) - 4}{4 + x(x - 1) \cdot d\xi/d\eta},$$

взяв в качестве независимой переменной x . Но это один из вариантов решения уравнения (8), требующий своего анализа.

В данном же случае будем рассматривать возможность преодоления особенности

$$\xi(2x - 1) - 4 = 0, \tag{15}$$

оставляя независимой переменную η .

Кривая зависимости ξ от x для уравнения (15) показана на рис. 4.

При $x = 1$ и $\xi = 0$ знаменатель уравнения (8) равен -4 . С ростом x и ξ он будет уменьшаться и при $x = 3$ и $\xi = 1$ будет равен плюс единице, т. е. перейдет через ноль.

Если знаменателю уравнения (8) не придать другой формы, то смены знака знаменателя не избежать. То же самое можно сказать и об уравнении (12), если его решать численно.

Поэтому вместо уравнений (7) и (11) запишем равенство

$$\Phi_3(x, \xi, \eta) = (x - 1)(\xi x - 4) + \varphi(x)(\xi - 1) + (\eta - 1)\Phi_0 = 0. \tag{16}$$

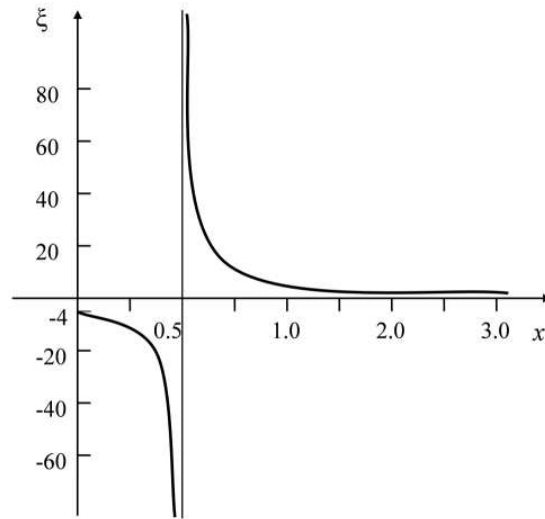


Рис. 4. Изменение ξ как функции x для уравнения (15).

Здесь $\varphi(x)$ — пока неопределенная функция. Считаем, что это непрерывная, дифференцируемая хотя бы один раз и ограниченная по величине функция при конечных значениях ее аргумента x . Постоянную Φ_0 будем определять при некоторых величинах параметров ξ_{init} и η_{init} . Величина $x = x_{\text{init}}$ будет равна $x_{\text{init}} = x_1 = 1$.

Тогда для расчета величины постоянной Φ_0 получим равенство

$$-(\eta_{\text{init}} - 1) \Phi_0 = (x_{\text{init}} - 1)(\xi_{\text{init}} x_{\text{init}} - 4) + \varphi(x_{\text{init}}) (\xi_{\text{init}} - 1). \quad (17)$$

Или, учитывая, что $x_{\text{init}} = 1$, можем записать

$$\Phi_0 = -\frac{(\xi_{\text{init}} - 1) \varphi(x_{\text{init}})}{(\eta_{\text{init}} - 1)}. \quad (18)$$

Поскольку на данном этапе не отыскивается очередной корень уравнения (6), то требования о получении ξ и η равными единице не накладываются. Тем не менее при $\xi = \eta = 1$ уравнение (16) переходит в уравнение (6) и, таким образом, дает решение этому уравнению.

Для производных $\partial\Phi_3/\partial\xi$ и $\partial\Phi_3/\partial x$ в данном случае имеем выражения

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial\xi} = x(x - 1) + \varphi(x);$$

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial x} = \xi(2x - 1) - 4 + (\xi - 1) \xi \varphi'_x,$$

а вместо уравнений (8) и (12) получим следующее:

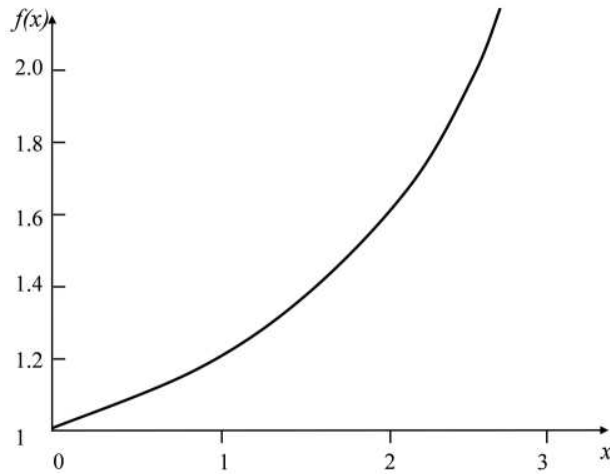
$$\frac{dx}{d\eta} = -\frac{\Phi_0 + (x(x - 1) + \varphi(x)) \cdot d\xi/d\eta}{\xi(2x - 1) - 4 + (\xi - 1) \varphi'(x)}. \quad (19)$$

Производную φ'_x от $\varphi(x)$ зададим такой, чтобы сократить слагаемое $\xi(2x - 1)$ в знаменателе уравнения (19). Поэтому φ'_x запишем в виде

$$\varphi'_x = -2x + 1 - f(x). \quad (20)$$

Функцию $f(x)$ определим позднее. Подставим выражение (20) в знаменатель уравнения (19). Будем иметь

$$\xi(2x - 1) - 4 + (\xi - 1)(-2x + 1) - (\xi - 1)f(x) = (2x - 5) - (\xi - 1)f(x).$$


 Рис. 5. Изменение отношения $f(x)/f(0)$.

Вынесем в этом выражении двойку как общий множитель. Тогда уравнение (19) будет иметь вид

$$\frac{dx}{d\eta} = -\frac{1}{2} \frac{\Phi_0 + (x(x-1) + \varphi(x)) \cdot d\xi/d\eta}{x - 5/2 + (\xi - 1)/2 \cdot f(x)}. \quad (21)$$

Разность $(x - 5/2)$ в знаменателе уравнения (21) при $x < 5/2$ отрицательная, при $x = 5/2$ равна нулю, а при $x > 5/2$ будет положительной. Однако она по величине будет небольшой, если этап обхода особой точки заканчивать при $x > 5/2$, но в окрестности этой точки.

На этапе обхода особой точки начальное значение параметра ξ будем брать отрицательным. В частности, возьмем $\xi_{\text{init}} = -2$. Для начального значения параметра η будем использовать числа, большие или равные нулю.

Сначала примем $\eta_{\text{init}} = 2$. В этом случае в соответствии с равенством (18) Φ_0 получим положительной, а знаменатель уравнения (21) — отрицательным, если функция $f(x)$ будет положительной. Запишем выражение для функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = \tilde{a}(1 + \tilde{b}e^{\tilde{c}(x-x_*)}). \quad (22)$$

Будем считать коэффициенты \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} положительными.

Функция $f(x)$ монотонно возрастает и при $x \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности. График ее изменения при $\tilde{a} = 7$, $\tilde{b} = 0.2$, $\tilde{c} = 0.76753(3)$ представлен на рис. 5.

Имея выражение для функции $f(x)$, можно найти функцию $\varphi(x)$. Интегрируя уравнение (20) по x и учитывая выражение (22), найдем

$$\varphi(x) = -x^2 + x + \tilde{a}x + \frac{\tilde{a}\tilde{b}}{\tilde{c}} e^{\tilde{c}(x-x_*)}. \quad (23)$$

Здесь удобно использовать неопределенный интеграл. Функция $\varphi(x)$ входит в числитель уравнения (21).

Подставив в уравнение (21) вместо $\varphi(x)$ ее выражение (23) для расчета переменной x , получим уравнение:

$$\frac{dx}{d\eta} = -\frac{1}{2} \frac{\Phi_0 + \tilde{a}(x + \tilde{b}/\tilde{c} \cdot e^{\tilde{c}(x-x_*)}) d\xi/d\eta}{x - 5/2 + (\xi - 1)/2 \cdot \tilde{a}(1 + \tilde{b}e^{\tilde{c}(x-x_*)})}. \quad (24)$$

Воспользуемся этим уравнением для повторного нахождения первого корня уравнения (6). Для этого примем $x_{\text{init}} = x_* = 0$, $\xi_{\text{init}} = \eta_{\text{init}} = 0$, $\tilde{a} = 7$, $\tilde{b} = 0.2$, $\tilde{c} = 0.76753(3)$. Постоянная Φ_0

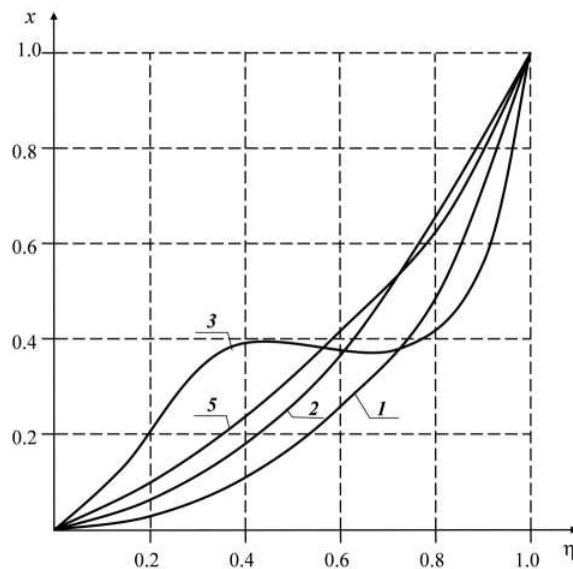


Рис. 6. Кривые зависимостей переменной x от η для различных вариантов связей между параметрами ξ и η в результате решения уравнения (24).

в соответствии с равенством (16) будет определяться по формуле

$$\Phi_0 = 4 - \frac{\tilde{a}\tilde{b}}{\tilde{c}} = 2.176.$$

Решая уравнение (24), для всех вариантов зависимости ξ от η кроме четвертого (см. таблицу), вновь получим первый корень уравнения (6), равный единице. Кривые изменения x как функции η , соответствующие уравнению (24), показаны на рис. 6.

Здесь монотонным зависимостям ξ от η соответствуют монотонные кривые для переменной x как функции η и немонотонной кривой $\xi(\eta)$ соответствует немонотонная кривая $x(\eta)$. Видим, что знак производной $d\xi/d\eta$ отразился на характере изменения зависимостей $\xi(\eta)$ и $x(\eta)$.

При использовании четвертого варианта зависимости ξ от η (см. таблицу), где ξ_{\max} больше единицы, реализовался расчетный случай, когда знаменатель уравнения (24) сменил знак. Полученный результат согласуется с выводом, сделанным выше: зависимость ξ от η должна быть такой, чтобы параметр ξ в интервале $[0, 1]$ изменения η не оказывался больше единицы.

Конечно, варьированием величинами параметров \tilde{a} , \tilde{b} и \tilde{c} задачу можно решить и в этом случае. В частности, приняв $\tilde{a} = 0.7$, $\tilde{b} = 0.1$, а $\tilde{c} = 0.7$ для всех пяти расчетных случаев (см. таблицу), мы получили первый корень уравнения (6), равный единице. На рис. 7 показаны кривые изменения x как функции η для данного расчетного случая. Все они изменяются в зависимости от η достаточно близко одна от другой и монотонны, только третья кривая по отношению к остальным испытывает влияние производной $d\xi/d\eta$. Это не сказывается на монотонности данной кривой как функции η .

Немонотонность изменения для четвертого варианта зависимости ξ от η не сказывается на характере изменения переменной x как функции η . Здесь немонотонность кривой ξ от η имеет место начиная с η , больших 0.6, а величины производной $d\xi/d\eta$ значительно меньше, чем у третьего варианта зависимости ξ от η . Их максимумы у четвертой и третьей кривых ξ от η , соответственно, равны -0.64 и -4.56 .

Воспользуемся далее уравнением (24) для обхода особой точки уравнения (6) при $x = 5/2$ между его первым и вторым корнями. Для этого после нахождения первого корня следует принять $\xi = \xi_{\text{init}}$, $\eta = \eta_{\text{init}}$, найти новое значение Φ_0 , воспользовавшись равенством (17), и решать уравнение (24), пока не достигнем точки, имеющей координату $x = x'$, большую координаты особой точки уравнения (6) при $x = 5/2$.

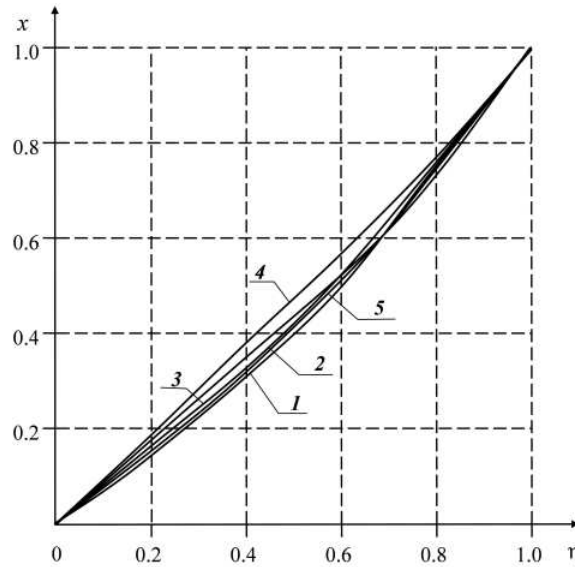


Рис. 7. Кривые зависимостей переменной x как функции η по результатам решения уравнения (24) с коэффициентами $\tilde{a} = 0.7, \tilde{b} = 0.1, \tilde{c} = 0.7$.

Примем $x' = 2.6, \xi_{rminit} = -2, \eta_{init} = 2$. Параметр ξ рассчитываем, используя зависимость (9). Кривые зависимостей x от η приведены на рис. 8. Все они монотонно растут и только кривая 3 под воздействием производной $d\xi/d\eta$ имеет точку перегиба, пересекая кривые, соответствующие кривым ξ как функциям η с монотонными зависимостями.

Координаты $x = 2.6$ все кривые $x = x(\eta)$ достигают при разностях $(\eta - \eta_{init})$, близких к единице. Это хорошо видно на рис. 8. В этих условиях переменная ξ от величины -2 успевает уменьшиться почти до -1 .

После завершения этапа преодоления особой точки уравнения (6) приступаем к этапу нахождения второго корня данного уравнения. Для этого можно численно решать уравнение (24), начиная с $x_{init} = 2.6$ и $\xi_{init} = \eta = 0$, или воспользоваться вторым решением

$$x = 5/2 - \sqrt{25/4 - C}$$

уравнения (14).

Здесь постоянная Φ_0 удовлетворяет равенству (13) и при $x_{init} = 2.6$ равна $\Phi_0 = -1.12$. Тогда $C = 6.24 - 1.12(\xi + \eta)$. При $\xi = \eta = 1$ $C = 4$ и из последнего уравнения получаем $x_2 = 4$. Такой же ответ следует и из результатов численного решения уравнения (24).

В итоге при решении уравнения (6) как трансцендентного вместо него были использованы три уравнения (7), (11) и (24). Во всех этих уравнениях параметр η находится вне выражения левой части уравнения (6).

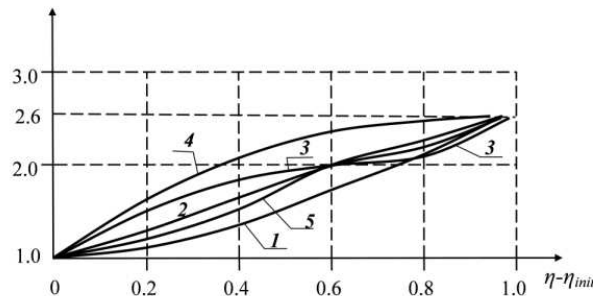


Рис. 8. Кривые зависимостей переменной x от параметра η при обходе особой точки $x = 5/2$.

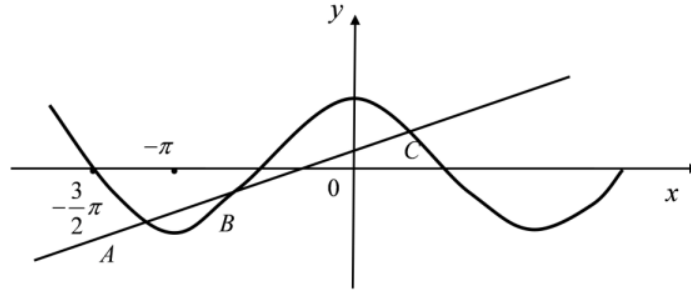


Рис. 9. Функция $\cos x$ и прямая $\alpha + \beta x$ с точками пересечения A , B и C .

Что касается параметра ξ , то в уравнении (7) он входит в выражение левой части уравнения (6), в уравнении (11) — находится и вне, и внутри левой части уравнения (6), а в уравнении (16) оба параметра ξ и η находятся вне левой части уравнения (6).

Все три дифференциальных уравнения (8), (12), (24) могут использоваться на этапах нахождения корня Т-уравнения, но только уравнение (24) годится как на этапе обхода особой точки, так и при нахождении корня решаемого Т-уравнения. Уравнение (12) целесообразно использовать в тех случаях, когда в результате его интегрирования полученное выражение можно решить относительно неизвестной.

Итак, преобразованием уравнения (6) к виду (16) и выбором соответствующих величин начальных значений параметров ξ и η нам удалось преодолеть (обойти) особую точку, решая уравнение (24), а затем найти и второй корень уравнения (6). В общем случае особых точек может быть несколько и тогда после нахождения очередного корня следует всякий раз решать уравнение (24), выбирая требуемые величины начальных значений параметров ξ_{init} и η_{init} . Это позволит преодолевать особые точки между корнями решаемого Т-уравнения.

Рассмотрим еще один пример решения Т-уравнения. По сравнению с уравнением (6) данное уравнение имеет три корня и две особые точки. Речь идет об уравнении

$$\cos x = \alpha + \beta x,$$

если коэффициенты α и β имеют следующие значения: $\alpha = 0.468$, $\beta = 0.30445$ (рис. 9).

Найдем корни этого уравнения. Обозначим

$$\Phi(x) = \cos x - \alpha - \beta x = 0 \quad (25)$$

и запишем уравнение

$$\Phi_1(\xi, \eta, x) = \xi \cos x - \alpha - \beta x + (\eta - 1)\Phi_0 = 0. \quad (26)$$

При $\xi = \eta = 0$ получим

$$\Phi_0 = -(\alpha + \beta x_0).$$

Частные производные $\partial\Phi_1/\partial\xi$ и $\partial\Phi_1/\partial x$ определяются следующим образом:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\xi} = \cos x, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} = -\beta - \xi \sin x.$$

Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{\Phi_0 + \cos x \cdot d\xi/d\eta}{\beta + \xi \sin x}. \quad (27)$$

Здесь $0 < \beta < 1$ и $\xi \leq 1$, поэтому, как только синус от x будет приближаться к минус единице, возможен переход знаменателя уравнения (27) через ноль.

Запишем вместо уравнения (26) другое равенство:

$$\Phi_2(\xi, \eta, x) = \xi \cos x - \alpha - \beta x + (\xi - 1)\varphi(x) + (\eta - 1)\Phi_0 = 0.$$

Здесь при $\xi = \eta = 0$ имеем

$$\Phi_0 = -(\alpha - \beta x_{\text{init}} + \varphi(x_{\text{init}})), \quad (28)$$

а производные $\partial\Phi_2/\partial\xi$ и $\partial\Phi_2/\partial x$ вычисляем как

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi} = \cos x + \varphi(x), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial x} = -\xi \sin x - \beta + (\xi - 1)\varphi'_x.$$

Поэтому вместо уравнения (27) получим

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{\Phi_0 + (\cos x + \varphi(x)) \cdot d\xi/d\eta}{\beta + \xi \sin x - (\xi - 1)\varphi'_x}. \quad (29)$$

Пусть $\varphi'_x = \sin x + f(x)$. Знаменатель уравнения (29) преобразуется к виду

$$\beta + \sin x - (\xi - 1)f(x).$$

Здесь $\beta > 0$, а $\sin x$ может равняться минус единице. Функцию $f(x)$ вновь запишем в виде (22).

Постоянные \tilde{b} и \tilde{c} можно оставить теми же, что и выше, а постоянную \tilde{a} возьмем такой, чтобы функция $f(x)$ была не меньше единицы. Поэтому величину постоянной \tilde{a} примем равной 2.2 ($\tilde{a} = 2.2$). Для функции $\varphi(x)$ получим выражение

$$\varphi(x) = -\cos x + \tilde{a}x + \frac{\tilde{a}\tilde{b}}{\tilde{c}}e^{\tilde{c}(x-x_*)}.$$

Здесь x_* — или величина найденного корня, или начальное значение x при поиске первого корня.

Тогда уравнение (29) запишется в виде

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{\Phi_0 + \tilde{a}(x + \tilde{b}/\tilde{c} \cdot e^{\tilde{c}(x-x_*)}) \cdot d\xi/d\eta}{\beta + \sin x - (\xi - 1)\tilde{a}(1 + \tilde{b}e^{\tilde{c}(x-x_*)})}. \quad (30)$$

Для решения уравнения (30) в качестве начальной возьмем точку $x_0 = -3\pi/2$. Здесь $\sin x_0 = 1$, $\cos x_0 = 0$, $x_* = x_0$. Поэтому в соответствии с формулой (28)

$$\Phi_0 = -\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\beta - \frac{3\pi}{2}\tilde{a} - \frac{\tilde{a}\tilde{b}}{\tilde{c}}\right) = 32.1295.$$

Для зависимости ξ от η берем пять вариантов коэффициентов из таблицы. Поскольку знаменатель уравнения (30) гарантированно положительный, то при $\xi = \eta = 1$ получим первый корень $x = x_1 = -3.9066$ уравнения (25). В этой точке при $x_* = x_1 = x_{\text{init}}$ $\xi = \xi_{\text{init}} = -2.0$ $\eta = \eta_{\text{init}} = -2.0$ в соответствии с формулой

$$\Phi_0 = -\tilde{a}\frac{\xi_{\text{init}} - 1}{\eta_{\text{init}} - 1}\left(x_{\text{init}} + \frac{\tilde{b}}{\tilde{c}}\right)$$

находим новое значение $\Phi_0 = 25.522$ и продолжаем решение уравнения (30). В точке $x' = \arcsin(\beta)$ сумма $(\beta + \sin x)$ в знаменателе уравнения (30) превратится в ноль. Однако решение уравнения (30) останавливаем при $\tilde{x} > x'$, но находящимся в окрестности $x = x' = -2.8327$.

Пусть $\tilde{x} = -2.7$. Здесь принимаем $\xi = \eta = 0$, $x_* = \tilde{x}$, оставляем теми же величины коэффициентов \tilde{a} , \tilde{b} и \tilde{c} и в соответствии с формулой (28) находим новое значение $\Phi_0 = 16.526$.

После этого с помощью того же уравнения (30) находим второй корень уравнения (25) $x_2 = -1.5855$. После нахождения второго корня уравнения (25) цикл вычислений повторяем.

Сначала при $\xi_{\text{init}} = -10$, $\eta_{\text{init}} = 0$ и $x_{\text{init}} = -1.5855$ в соответствии с формулой (29) находим новое значение $\Phi_0 = 32.0626$ и решаем уравнение (30), пока не достигнем $x = \tilde{x}$. Здесь $x = \tilde{x} > x''$, удовлетворяющего равенству

$$\tilde{x} = \arcsin(-\beta) = -0.3089.$$

При $x = \tilde{x}$ решение уравнения (28) прекращаем.

Пусть $\tilde{x} = -0.2$. В этой точке вновь принимаем $\xi = \eta = 0$, находим новое значение $\Phi_0 = 0.1522$ и, решая уравнение (30), при $\eta = 1$ определяем третий корень уравнения (25). Он равен $x = x_3 = 0.7854$.

Вместо уравнения (30) на этапах нахождения корня можно было использовать уравнение

$$\frac{dx}{d\eta} = \Phi_0 \frac{1 + d\xi/d\eta}{\beta + \sin x},$$

являющееся следствием дифференцирования по x , η и ξ уравнения

$$\Phi_3(\xi, \eta, x) = \cos x - \alpha - \beta x + (\xi - 1)\Phi_0 + (\eta - 1)\Phi_0 = 0,$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\cos x_{\text{init}} - \alpha - \beta x_{\text{init}}}{2}.$$

В последнем выражении Φ_0 не равна нулю, поскольку величина $x = x_{\text{init}}$ задавалась, а не получалась из решения уравнения (25). Поэтому имеем при $x_{\text{init}} = -2.7$ $\Phi_0 = -0.0367$; при $x_{\text{init}} = -0.2$ $\Phi_0 = 0.2882$.

На этапах нахождения корней можно было использовать и уравнение (27).

Заключение

Предложен метод преобразования знаменателя дифференциального уравнения для аргумента x Т-уравнения, позволяющий преодолевать (обходить) особые точки.

Для нахождения очередного корня Т-уравнения задача делится на две части: сначала осуществляется обход особой точки, а затем отыскивается корень Т-уравнения.

Предложенный метод проверен при рассмотрении двух примеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988. 231 с.
2. Липанов А.М. Многопараметрический метод решения систем функциональных уравнений // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 153–155/

Липанов Алексей Матвеевич

академик РАН

директор

Институт прикладной механики УрО РАН

e-mail: lipanov@udman.ru

Поступила 28.06.2010

УДК 517.977

**ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ ВАРИАНТАХ МОДЕЛИ Л. РИЧАРДСОНА
В ПОЛИТОЛОГИИ¹****М. С. Никольский**

Статья посвящена изучению свойств оптимальных управлений для двух управляемых вариантов известной в политологии модели вооружения двух государств, принадлежащей Л. Ричардсону. Основной аппарат исследования — принцип максимума Л. С. Понтрягина.

Ключевые слова: линейные системы, оптимальное управление.

M. S. Nikol'skii. On controllable variants of the Richardson model in political science.

The paper is devoted to studying the properties of optimal controls for two variants of the Richardson arms race model known in political science. The main investigation technique is Pontryagin's maximum principle.

Keywords: linear systems, optimal control.

1. Линейная нестационарная управляемая модель

В теории моделирования конфликтных ситуаций (см., например, [1–5]) большой популярностью пользуется математическая модель вооружений двух государств Л. Ричардсона (см. [6]). Об истории изучения и применении этой модели см., например, в [3].

В [7] были изучены два варианта управляемой модели Л. Ричардсона. В настоящей работе мы продолжаем это исследование, считая соответствующие управляемые системы нестационарными.

При постановке и анализе оптимизационных задач мы будем использовать стандартные понятия, термины и обозначения математической теории оптимального управления (см., например, [8–10]).

Рассматривается двумерная линейная управляемая модель вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(t)x_2 - b(t)x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= c(t)x_1 - d(t)x_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ определены, положительны и непрерывны при $t \geq 0$, на скалярное управление u наложено ограничение

$$u \in U = [0, p],\tag{2}$$

где число $p > 0$. Величина $x_1(t)$ отражает оборонные расходы 1-го государства, произведенные им к текущему моменту $t \geq 0$ и выраженные в деньгах. Величина $x_2(t)$ отражает оборонные расходы 2-го государства, произведенные им к текущему моменту $t \geq 0$ и выраженные в деньгах. Коэффициент $a(t) > 0$ трактуется как выбираемый и фиксируемый 1-м государством коэффициент пропорциональности относительно расходов $x_2(t)$. Соответственно коэффициент $c(t) > 0$ трактуется как выбираемый и фиксируемый 2-м государством коэффициент пропорциональности относительно расходов на оборону 1-го государства. Функции $b(t) > 0$, $d(t) > 0$ можно интерпретировать как коэффициенты амортизации, связанные со старением и износом

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00633, 09-01-00378).

вооружений. Измеримое по Лебегу управление $u = u(t) \in [0, p]$, $t \geq 0$, моделирует дополнительные инвестиции первого государства в свою оборону. Начальные состояния $x_1(0) = x_{10} \geq 0$, $x_2(0) = x_{20} \geq 0$ для обоих государств считаются фиксированными. Также фиксированы желаемые конечные (терминальные) состояния $x_1(t_1) = m_1 \geq 0$, $x_2(t_1) = m_2 \geq 0$.

Двумерные векторы вида $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, где z_i — действительные числа, можно рассматривать как элементы арифметического евклидова пространства \mathbb{R}^2 со стандартным скалярным произведением и длиной вектора $|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Символом \mathbb{R}^1 будем обозначать множество действительных чисел.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что рассматриваемая управляемая модель (1) необязательно связана с прямым противодействием обоих государств в оборонной политике. Она может отражать и такую ситуацию, когда первое государство стремится обезопасить себя в будущем.

В дальнейшем предполагается, что $x_0 \neq m$, где

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Ставится задача о вычислении оптимального по быстродействию управления $\tilde{u}(t) \in [0, p]$, $t \in [0, \tau]$, которое за минимальное время $\tau > 0$ в классе измеримых управлений переводит управляемую систему (1) из начального состояния x_0 в терминальную точку m (см. (3)).

При изучении управляемой системы (1) оказывается полезной формула Коши

$$x(t, u(\cdot)) = \Phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \Phi(t, s)gu(s) ds, \quad (4)$$

где $\Phi(t, s)$ обозначает матрицу Коши (см. [11]) для матричной функции

$$A(t) = \begin{pmatrix} -b(t) & a(t) \\ c(t) & -d(t) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что матричная функция $\Phi(t, s)$ при $t \geq 0$ и $s \geq 0$ удовлетворяет по t матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{X} = A(t)X$$

и начальному условию $\Phi(s, s) = E$ — единичной матрице порядка 2.

Формула (4) описывает решение системы уравнений (1) $x(t, u(\cdot))$ с начальным условием $x(0) = x_0$ при произвольном измеримом управлении $u = u(t) \in [0, p]$, $t \geq 0$. Интеграл в формуле (4) понимается в смысле Лебега.

Для приложений важной является следующая

Лемма 1. *При $a(t) > 0$, $b(t) > 0$, $c(t) > 0$, $d(t) > 0$, где $t \geq 0$, элементы матричной функции $\Phi(t, s)$ при $0 \leq s \leq t$ неотрицательны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений (см. (5)) при $t \geq 0$

$$\dot{y} = A(t)y$$

с начальным условием $y(s) = y_0$, где $s \geq 0$ и компоненты вектора y_0 неотрицательны. Хорошо известно, что решение такой задачи Коши записывается в виде

$$y(t) = \Phi(t, s)y_0. \quad (6)$$

Используя известную формулу Коши для решения одномерного линейного неоднородного дифференциального уравнения, с помощью (5) получаем следующие интегральные уравнения для компонент $y_1(t)$, $y_2(t)$ векторной функции $y(t)$:

$$y_1(t) = \alpha(t, s)y_{01} + \int_s^t \alpha(t, r)a(r)y_2(r) dr, \quad (7)$$

$$y_2(t) = \beta(t, s)y_{02} + \int_s^t \beta(t, r)c(r)y_1(r) dr, \quad (8)$$

где

$$\alpha(t, s) = \exp\left(-\int_s^t b(r) dr\right), \quad \beta(t, s) = \exp\left(-\int_s^t d(r) dr\right). \quad (9)$$

Здесь полагается $\exp(\theta) = e^\theta$ при $\theta \in \mathbb{R}^1$. Далее, используя неотрицательность чисел y_{0i} и положительность функций $a(t)$, $c(t)$ при $t \geq 0$, методом последовательных приближений для системы интегральных уравнений (7), (8) на произвольном фиксированном отрезке $[0, T]$, $T > 0$, можно обосновать, что

$$y_1(t) \geq 0, \quad y_2(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \geq s. \quad (10)$$

Учитывая формулы (6), (10) и произвольность чисел $y_{01} \geq 0$, $y_{02} \geq 0$, получаем утверждение леммы 1.

Из леммы 1 и формул (2), (4) вытекают важные для нас неравенства

$$x_1(t, u(\cdot)) \geq 0, \quad x_2(t, u(\cdot)) \geq 0, \quad t \geq 0 \quad (11)$$

при произвольном допустимом управлении $u(t)$, $t \geq 0$. Таким образом, требуемые по экономическому смыслу неравенства (11) выполняются при наших исходных предположениях автоматически при произвольном допустимом управлении $u(t)$, $t \geq 0$.

Прежде чем изучать искомое оптимальное управление, отметим, что для фиксированных векторов x_0 , m , вообще говоря, может не существовать допустимого управления, определенного на некотором отрезке $[0, t_1]$, которое по соответствующей траектории $x(t)$, $t \in [0, t_1]$ системы (1) “соединяет” начальное состояние x_0 с терминальной точкой m , т. е.

$$x(0) = x_0, \quad x(t_1) = m. \quad (12)$$

С помощью выпуклого анализа аналогично лекции 8 из [10] можно выписать эффективные условия для возможности такого “соединения” на произвольном отрезке $[0, t_1]$, где $t_1 > 0$.

Допустим, что с помощью тех или иных средств установлено существование допустимого управления $\hat{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, “соединяющего” начальную точку x_0 управляемой системы (1) с терминальной точкой m , тогда для соответствующего решения $\hat{x}(t) = x(t, \hat{u}(\cdot))$ выполнены равенства (12). Согласно результатам главы 3 [9] при сделанных предположениях можно утверждать, что существует измеримое оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, с временем быстродействия $\tau > 0$. Теперь мы постараемся охарактеризовать оптимальное управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина (см. [8–10]). Мы будем ссылаться на теорему 18 [9, с. 140].

Рассмотрим сопряженную систему вида (ср. с (1))

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= b(t)\psi_1 - c(t)\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -a(t)\psi_1 + d(t)\psi_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Согласно принципу максимума для оптимального управления $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, существует такое нетривиальное решение $\tilde{\psi}(t)$, $t \in [0, \tau]$, сопряженной системы (13), что почти всюду на $[0, \tau]$ выполняется следующее условие максимума:

$$\tilde{u}(t)\tilde{\psi}_1(t) = \max_{u \in U}(u\tilde{\psi}_1(t)), \quad (14)$$

где $\tilde{\psi}_1(t)$ — первая компонента вектора $\tilde{\psi}(t) \in \mathbb{R}^2$. Из соотношения (14) вытекает важность изучения множества нулей непрерывно дифференцируемой функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$. Этим вопросом мы и займемся. Отметим, что в общем случае функция $\tilde{\psi}(t)$ неизвестна. Поэтому желательно иметь описание множества нулей функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$, не зависящее от конкретной нетривиальной функции $\tilde{\psi}(t)$.

Обозначим через Γ множество нулей непрерывной функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$. Нетрудно видеть, что, если $\Gamma \neq \emptyset$, то в Γ существует наименьший элемент $\gamma \in [0, T]$. Допустим, что $\Gamma \neq \emptyset$ и что в Γ помимо элемента γ есть элемент $\gamma_1 \neq \gamma$. Из (13) получаем, что

$$\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) = -c(\gamma)\tilde{\psi}_2(\gamma) \quad (15)$$

(если $\gamma = 0$, то в (15) в качестве $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma)$ берется правая производная от $\tilde{\psi}_1(t)$ в точке 0). Так как $|\dot{\tilde{\psi}}(t)| \neq 0$ при $t \in [0, \tau]$, то из равенства $\tilde{\psi}_1(\gamma) = 0$ вытекает, что $\tilde{\psi}_2(\gamma) \neq 0$, т.е. (см. (15)) $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) \neq 0$. Отсюда следует, что при достаточно малых $t - \gamma$, где $t > \gamma$, $\tilde{\psi}_1(t) \neq 0$. Обозначим через γ_2 ближайший к γ и отличный от γ элемент Γ (его существование легко обосновывается).

Рассмотрим два возможных случая.

С л у ч а й 1: $\tilde{\psi}_2(\gamma) < 0$. Здесь (см. (15)) $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) > 0$ и

$$\tilde{\psi}_1(t) > 0 \quad (16)$$

при $t \in (\gamma, \gamma_2)$. Применим известную формулу Коши для решения второго уравнения (13) относительно функции $\tilde{\psi}_2(t)$. С помощью неравенства (16) получаем при $t \in [\gamma, \gamma_2]$, что

$$\tilde{\psi}_2(t) = e^{\mu(t,\gamma)}\tilde{\psi}_2(\gamma) - \int_{\gamma}^t e^{\mu(t,r)}a(r)\tilde{\psi}_1(r)dr < 0, \quad (17)$$

где $\mu(t, s) = \int_s^t d(r)dr$. Далее, применяя известную формулу Коши для решения первого дифференциального уравнения системы (13) относительно неизвестной функции $\tilde{\psi}_1(t)$, получаем при $t \in (\gamma, \gamma_2]$ с помощью соотношения (17), что

$$\tilde{\psi}_1(t) = - \int_{\gamma}^t e^{\nu(t,r)}c(r)\tilde{\psi}_2(r)dr > 0,$$

где $\nu(t, s) = \int_s^t b(r)dr$. Из сказанного получаем, что $\tilde{\psi}_1(\gamma_2) > 0$, и мы пришли к противоречию с определением величины γ_2 .

С л у ч а й 2: $\tilde{\psi}_2(\gamma) > 0$.

Здесь, рассуждая по аналогии со случаем 1, получаем, что $\tilde{\psi}_2(t) > 0$ при $t \in [\gamma, \gamma_2]$ и $\tilde{\psi}_1(\gamma_2) < 0$. Т.е. и здесь мы приходим к противоречию с определением величины γ_2 .

Таким образом, от противного доказано, что множество Γ нулей функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$ либо пусто, либо одноточечно. Отсюда вытекает (см. (14)), что оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ на $[0, \tau]$ эквивалентно (в смысле Лебега) либо функции, принимающей постоянное значение из

двухточечного множества $\{0, p\}$, либо кусочно-постоянному управлению с одной точкой разрыва, принимающему одно из значений $\{0, p\}$. Так как изменение $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, на множестве меры нуль не влияет на оптимальную траекторию $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, \tau]$, то можно считать, что оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ на $[0, \tau]$ либо постоянно и принимает одно из значений $\{0, p\}$, либо является кусочно-постоянным управлением с одной точкой разрыва и принимает соответственно одно из значений $\{0, p\}$. Полученные факты сильно упрощают практическое нахождение оптимального управления $\tilde{u}(t)$.

2. Билинейная нестационарная управляемая модель

Рассматривается двумерная управляемая система вида (ср. с (1))

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ux_2 - b(t)x_1, \\ \dot{x}_2 &= c(t)x_1 - d(t)x_2, \end{aligned} \tag{18}$$

где $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ — положительные и непрерывные функции при $t \geq 0$, на скалярное управление u наложено ограничение

$$u \in U = [q, p], \tag{19}$$

где $0 \leq q < p$. Смысл величин $x_1(t)$, $x_2(t)$ и функций $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ тот же, что и в линейной модели (1). В билинейной модели (18) управление $u = u(t) \in U$, $t \geq 0$, играет роль коэффициента $a(t)$, который теперь становится управлением с ограничением вида (19). Управления $u(t) \in [q, p]$, $t \geq 0$, будем рассматривать в классе измеримых по Лебегу функций. Как и в линейной модели, фиксированы начальное и конечные состояния x_0 , m с неотрицательными компонентами x_{01} , x_{02} , m_1 , m_2 , причем считается, что $x_{02} > 0$, $x_0 \neq m$. Ставится задача о вычислении оптимального по быстродействию управления $\tilde{u}(t) \in [q, p]$, $t \in [0, \tau]$, которое за минимальное время $\tau > 0$ в классе допустимых управлений переводит управляемую систему (18) из начальной точки x_0 в терминальную точку m .

Сначала займемся вопросом о выполнении неравенств

$$x_1(t, u(\cdot)) \geq 0, \quad x_2(t, u(\cdot)) > 0, \tag{20}$$

где $x(t, u(\cdot))$ — решение системы дифференциальных уравнений (18) при произвольном измеримом управлении (см. (19)) $u = u(t) \in U$, $t \geq 0$, и начальном условии $x(0) = x_0$, причем $x_{10} \geq 0$, $x_{20} > 0$. Из (18) получаем следующие соотношения (ср. с (7), (9)):

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \alpha(t, 0)x_{01} + \int_0^t \alpha(t, r)u(s)x_2(s) ds, \\ x_2(t) &= \beta(t, 0)x_{02} + \int_0^t \beta(t, r)c(s)x_1(s) ds, \end{aligned} \tag{21}$$

где $x_1(t) = x_1(t, u(\cdot))$, $x_2(t) = x_2(t, u(\cdot))$. Далее используем метод последовательных приближений для нахождения решения $x(t) = x(t, u(\cdot))$ системы интегральных уравнений (21) на произвольном отрезке $[0, T]$, $T > 0$. Так как $x_{01} \geq 0$, $x_{02} > 0$ и $u(s) \in [q, p]$, где $q \geq 0$, то теперь нетрудно получить справедливость неравенств (20).

Отметим, что если из начальной точки x_0 терминальная точка m достижима за конечное время, то существует и оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, где $\tau > 0$ — время оптимального быстродействия (см. теоремы существования оптимального управления в [9]). Будем исследовать оптимальное управление $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, с помощью принципа максимума. Отметим, что тут приходится ссылаться на более продвинутые формулировки принципа

максимума (см., например, [12; 13]), так как от коэффициентов $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ в (18) мы требуем только непрерывности по t при $t \geq 0$. Отметим, что сопряженная система (ср. с (13)) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\psi}}_1 &= b(t)\tilde{\psi}_1 - c(t)\tilde{\psi}_2, \\ \dot{\tilde{\psi}}_2 &= -\tilde{u}(t)\tilde{\psi}_1 + d(t)\tilde{\psi}_2.\end{aligned}\tag{22}$$

Из принципа максимума вытекает: для оптимального управления $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, существует такое нетривиальное решение $\tilde{\psi}(t)$ сопряженной системы (22), что $|\tilde{\psi}(t)| \neq 0$ на $[0, \tau]$ и почти всюду на этом отрезке

$$\tilde{u}(t)\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t) = \max_{u \in U}(u\tilde{x}_2(t)\tilde{\psi}_1(t)).\tag{23}$$

Так как $\tilde{x}_2(t) > 0$ при $t \in [0, \tau]$, то из (23) следует, что почти всюду на $[0, \tau]$

$$\tilde{u}(t)\tilde{\psi}_1(t) = \max_{u \in U}(u\tilde{\psi}_1(t)).\tag{24}$$

В связи с формулой (24) полезно изучить распределение нулей непрерывно дифференцируемой функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$. Множество нулей функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$ обозначим через Γ . Нетрудно видеть, что, если $\Gamma \neq \emptyset$, то в Γ существует наименьший элемент $\gamma \in [0, T]$. Допустим, что $\Gamma \neq \emptyset$ и что в Γ помимо элемента γ есть элемент $\gamma_1 \neq \gamma$. Из (22) имеем, что

$$\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) = -c(\gamma)\tilde{\psi}_2(\gamma)\tag{25}$$

(если $\gamma = 0$, то в (25) в качестве $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma)$ берется правая производная от $\tilde{\psi}_1(t)$ в точке 0). Так как $|\tilde{\psi}(t)| \neq 0$ при $t \in [0, \tau]$, то из условия $\tilde{\psi}_1(\gamma) = 0$ вытекает, что $\tilde{\psi}_2(\gamma) \neq 0$, т.е. (см. (25)) $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) \neq 0$. Отсюда следует, что при достаточно малых $t - \gamma$, где $t > \gamma$, $\tilde{\psi}_1(t) \neq 0$. Обозначим через γ_2 ближайший к γ и отличный от γ нуль функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$ (он существует, так как по предположению $\tilde{\psi}_1(\gamma_1) = 0$, где $\gamma_1 \in (\gamma, \tau]$, и $\tilde{\psi}_1(t)$ непрерывная на $[0, \tau]$ функция).

Рассмотрим два возможных случая.

С л у ч а й 1: $\tilde{\psi}_2(\gamma) < 0$.

Здесь (см. (25)) $\dot{\tilde{\psi}}_1(\gamma) > 0$ и

$$\tilde{\psi}_1(t) > 0\tag{26}$$

при $t \in (\gamma, \gamma_2)$. Применим известную формулу Коши для решения второго уравнения (22) относительно неизвестной функции $\tilde{\psi}_2(t)$. С помощью неравенства (26) и неравенства $q \geq 0$ получаем при $t \in [\gamma, \gamma_2]$, что (ср. с (17))

$$\tilde{\psi}_2(t) = e^{\mu(t, \gamma)}\tilde{\psi}_2(\gamma) - \int_{\gamma}^t e^{\mu(t, s)}\tilde{u}(s)\tilde{\psi}_1(s) ds < 0,\tag{27}$$

где $\mu(t, s) = \int_s^t d(r) dr$. Далее, применяя формулу Коши к первому уравнению системы (22) относительно неизвестной функции $\tilde{\psi}_1(t)$, получаем при $t \in (\gamma, \gamma_2]$ с помощью соотношения (27), что

$$\tilde{\psi}_1(t) = - \int_{\gamma}^t e^{\nu(t, s)}c(s)\tilde{\psi}_2(s) ds > 0,$$

где $\nu(t, s) = \int_s^t b(r) dr$, т.е. $\tilde{\psi}_1(\gamma_2) > 0$, и мы пришли к противоречию с определением величины γ_2 .

С л у ч а й 2: $\tilde{\psi}_2(\gamma) > 0$.

Здесь, рассуждая по аналогии со случаем 1, получаем, что $\tilde{\psi}_2(t) > 0$ при $t \in [\gamma, \gamma_2]$ и $\tilde{\psi}_1(\gamma_2) < 0$. Здесь мы также приходим к противоречию с определением величины γ_2 .

Таким образом, от противного было доказано, что множество нулей Γ функции $\tilde{\psi}_1(t)$ на $[0, \tau]$ либо пусто, либо одноточечно. Отсюда вытекает (см. (24)), что оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ на $[0, \tau]$ эквивалентно (в смысле Лебега) либо функции, принимающей постоянное значение из двухточечного множества $\{q, p\}$, либо кусочно-постоянному управлению с одной точкой разрыва, принимающему соответственно одно из значений $\{q, p\}$. Так как изменение $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, на множестве меры нуль не влияет на оптимальную траекторию $\tilde{x}(t)$, $t \in [0, \tau]$, то можно считать, что оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ на $[0, \tau]$ либо постоянно и принимает одно из значений $\{q, p\}$, либо является кусочно-постоянным управлением с одной точкой разрыва и принимает соответственно одно из значений $\{q, p\}$. Полученные факты существенно упрощают практическое нахождение оптимального управления.

В настоящей статье мы рассмотрели случай, когда терминальное множество M состоит из единственной точки m . Если рассмотреть случай, когда терминальное множество состоит более чем из одной точки, то тут появляется возможность использовать условия трансверсальности на концевой вектор $\tilde{\psi}(T)$ (см., например, [12–14]). Эти условия иногда позволяют, например, в линейной модели существенно уменьшить множество “подозрительных” на оптимальность функций $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, \tau]$, удовлетворяющих соответственно соотношениям максимума (14), (24). Отметим некоторые возможные в приложениях типы терминального множества M :

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \alpha x_2\},$$

где $\alpha > 0$ — заданное число;

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - x_2| \leq \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ — заданное число;

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq x_2 + \delta\},$$

где δ — некоторое заданное число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саати Т. Л. Математические модели конфликтных ситуаций. М.: Сов. радио, 1977. 304 с.
2. Плотинский Ю. М. Модели социальных процессов. М.: Логос, 2001. 296 с.
3. Мангейм Дж., Рич Р. К. Политология: методы исследования. М.: Мир, 1997. 544 с.
4. Прасолов А. В. Математические модели динамики в экономике. СПб.: изд-во С.-Петерб. гос. ун-та экономики и финансов, 2000. 247 с.
5. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. М.: Физматлит, 2005. 320 с.
6. Richardson L. F. Arms and insecurity. Pittsburg: Voxwood, 1960. 249 p.
7. Никольский М. С. Некоторые задачи оптимального управления, связанные с моделью Л. Ричардсона гонки вооружений государств // Проблемы динамического управления: сб. тр. Вып. 4. М.: Макс-Пресс, 2009. С.113–123.
8. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. М.: Наука, 1969. 393 с.
9. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
10. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 121 с.
11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
12. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.

13. **Арутюнов А. В.** Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. 256 с.
14. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Математический институт РАН им. В.А. Стеклова
e-mail: mni@mi.ras.ru

Поступила 04.03.2010

УДК 517.917

**НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ
ВХОДОВ¹****Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, В. И. Максимов**

Для некоторых классов систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дается обзор алгоритмов динамического восстановления входов. Предлагаемые алгоритмы, устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений, основаны на методах теории некорректных задач, а также подходящих модификациях известного в теории гарантированного управления метода экстремального прицеливания Н.Н. Красовского.

Ключевые слова: восстановление, управляемые модели.

Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhinskiy, V. I. Maksimov. Some algorithms for the dynamic reconstruction of inputs.

For some classes of systems described by ordinary differential equations, a survey of algorithms for the dynamic reconstruction of inputs is presented. The algorithms described in the paper are stable with respect to information noises and computation errors; they are based on methods from the theory of ill-posed problems as well as on appropriate modifications of N.N. Krasovskii's principle of extremal aiming, which is known in the theory of guaranteed control.

Keywords: reconstruction, controlled models.

1. Введение

В работе рассматривается задача устойчивого восстановления неизвестного входа динамической системы по результатам неточных наблюдений за ее траекторией. Содержание рассматриваемой задачи таково. Имеется динамическая система, описываемая векторным нелинейным дифференциальным уравнением. Траектория системы зависит от меняющегося во времени входного воздействия (входа), трактуемого в дальнейшем как управление. Заранее как вход, так и траектория не заданы. Однако известно множество, ограничивающее допустимую реализацию входа. В процессе функционирования системы измеряются все ее фазовые состояния или их "часть". Эти измерения, вообще говоря, неточны. Требуется сконструировать алгоритм приближенного восстановления ненаблюдаемой "части" координат (если таковая имеется), а также входа, обладающий свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближения соответствующих координат и входа вырабатываются в реальном времени, свойство устойчивости — что приближения сколь угодно точны при достаточной точности наблюдения.

В работе приняты следующие обозначения:

\mathbb{R}^n — n -мерное пространство с евклидовой нормой $|\cdot|_n$ и скалярным произведением (\cdot, \cdot) ;

\mathbb{R}_+ — множество положительных чисел;

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00378), программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математическая теория управления" (проект 09-П-1-1014), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-65590.2010.1) и Уралосибирского интеграционного проекта 09-С-1-1010.

$L_2(T; \mathbb{R}^n)$	— гильбертово пространство всех суммируемых с квадратом нормы функций, отображающих множество T в пространство \mathbb{R}^n (с нормой $ \cdot _{L_2(T; \mathbb{R}^n)}$);
$C(T; \mathbb{R}^n)$	— банахово пространство всех непрерывных функций, отображающих множество T в пространство \mathbb{R}^n , которое снабжено \sup -нормой $ \cdot _{C(T; \mathbb{R}^n)}$;
C'	— транспонированная матрица;
C^{-1}	— обратная матрица;
I_n	— единичная матрица размерности $n \times n$.

2. Постановка задач. Метод решения

Обсуждаемая в данной работе задача может быть сформулирована следующим образом. Имеется динамическая система Σ , функционирующая на промежутке времени $T = [t_0, \vartheta]$, $\vartheta < +\infty$. Будем полагать, что Σ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t) + F(t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^N$, $F(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$ — заданная функция. Ее траектория $x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, зависит от начального состояния x_0 и изменяющегося во времени неизвестного входного воздействия

$$u(\cdot) \in P(\cdot) \subset L_2(T; \mathbb{R}^N).$$

Здесь $P(\cdot)$ — некоторое заданное множество, называемое в дальнейшем множеством “допустимых управлений”. На промежутке T взято равномерное разбиение $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ с шагом δ , $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_m = \vartheta$. В моменты τ_i замеряется выход системы

$$y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^r$$

(C — $r \times n$ -мерная матрица). Выход замеряется с ошибкой. Результаты неточных измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^r$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - y(\tau_i)|_r \leq h, \quad i \in [0 : m - 1], \quad (2.2)$$

где $h \in (0, 1)$ — величина информационной погрешности. Требуется построить алгоритм, позволяющий синхронно с развитием процесса по результатам неточных измерений $y(\cdot)$ восстанавливать как весь фазовый вектор $x(\cdot)$, так и управление $u(\cdot)$, порождающее выход $y(\cdot)$. Именно, требуется сформировать некоторую пару (“траектория–управление”) $\{w_*^h(\cdot), u_*^h(\cdot)\}$, “близкую” (в смысле, уточняемом в дальнейшем) к паре $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$. Такова содержательная постановка задачи.

В том случае, когда

$$C = I_n,$$

т. е. измеряются все компоненты фазового вектора, описанная выше задача трансформируется в задачу построения алгоритма приближенного вычисления только управления $u^h(\cdot)$ — “приближения” некоторого управления из множества допустимых управлений, порождающих выход $x(\cdot)$. При этом неравенства (2.2) принимают вид

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_n \leq h, \quad i \in [0 : m - 1]. \quad (2.3)$$

Прежде чем дать строгую математическую постановку рассматриваемой задачи, опишем метод ее решения. Этот метод базируется на одном из известных принципов позиционного управления — принципе вспомогательных моделей, восходящем к работам Н.Н. Красовского [1; 2]. Сформулируем его в удобной для нас форме. Пусть Σ описывается системой (2.1), где

вектор-функция $f: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и матричная функция $B: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ измеримы (по Лебегу) по первому аргументу, удовлетворяют условию Липшица по второму, а также соответствующим условиям роста. Решение системы (2.1), отвечающее начальному состоянию x_0 и управлению $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$, а также решения каждой из встречающихся ниже систем дифференциальных уравнений понимаются в смысле Каратеодори. Будем обозначать решения системы (2.1) символом $x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$.

Для решения задачи прежде всего фиксируется семейство $\{\Delta_h\}$ разбиений отрезка T на полуинтервалы $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta, \quad \delta = \delta(h), \quad \tau_{h,0} = \tau_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta. \quad (2.4)$$

Затем выбирается система M (называемая моделью), движение которой $w^h(t)$, $t \in T$, является решением подходящим образом выбранного дифференциального уравнения

$$\dot{w}^h(t) = \Phi(t, w^h(t), \xi_i^h, u^h(t), v^h(t)), \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}), \quad i \in [0 : m_h - 1] \quad (2.5)$$

с начальным условием

$$w^h(t_0) = w_0^h.$$

Здесь u^h и v^h — два управления (роль их, как будет видно ниже, в каждом случае своя и, вообще говоря, принципиально различная), $w^h(t)$ — вектор, размерность которого априори не оговаривается; в каждом конкретном случае она своя. Обозначение $w^h(t) = w^h(t; w_0^h, u^h(\cdot), v^h(\cdot))$ используется для решения системы (2.5) (с начальным условием w_0^h).

После того как модель определена (т. е. задано уравнение (2.5)), алгоритм решения задачи отождествляется с законом формирования управлений в модели по принципу обратной связи. При этом процедуре управления моделью предшествует выбор ее начального состояния w_0^h . Законы формирования управлений $\{u^h(\cdot), v^h(\cdot)\}$ в модели, называемые по терминологии, принятой в теории гарантированного управления [1; 2], стратегиями, отождествляются с парами

$$S_h = (\Delta_h, \mathcal{U}_h),$$

где

Δ_h определяется согласно (2.4),

\mathcal{U}_h — функция, ставящая в соответствие (пользуясь терминологией теории позиционных дифференциальных игр) позиции $q^{(i)}(\cdot)$ вектор

$$\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot)) = \{u_i^h, v_i^h\}. \quad (2.6)$$

Понятие позиции в каждом случае будет уточняться. Например, позицией может являться тройка

$$q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i, \xi_i^h, w^h(\tau_i)\}, \quad i \in [0 : m - 1] \quad (2.7)$$

($\tau_i = \tau_{h,i} \in \Delta_h$, $m = m_h$). Позиция может включать также некую “предысторию”. В частности, позицией может быть вектор

$$q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i, \xi_i^h, \xi_{i-1}^h, w^h(\tau_i)\}, \quad i \in [1 : m - 1]. \quad (2.7')$$

В дальнейшем для простоты все разбиения Δ_h будем считать равномерными. Таким образом, тройка $(\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$ при каждом $h \in (0, 1)$ определяет некоторый алгоритм D_h на множестве измерений $\xi(\cdot) \in \Xi(y(\cdot), h)$, формирующий по принципу обратной связи (2.5)–(2.7), ((2.5), (2.6), (2.7')) выход

$$D_h \xi^h(\cdot) = \{w^h(\cdot), u^h(\cdot), v^h(\cdot)\}, \quad h \in (0, 1). \quad (2.8)$$

Здесь символ $\Xi(y(\cdot), h)$ означает множество всех кусочно-постоянных функций $\xi^h(\cdot)$,

$$\xi^h(t) = \xi_i^h, \quad t \in \delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}),$$

удовлетворяющих неравенствам (2.2) при $\tau_i = \tau_{h,i} \in \Delta_h$. Управления $u^h(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$, как правило, также являются кусочно-постоянными

$$u^h(t) = u_i^h, \quad v^h(t) = v_i^h, \quad t \in \delta_{h,i}. \quad (2.9)$$

Заметим, что в некоторых случаях управление $u^h(\cdot)$ может отсутствовать. Тогда система (2.5) принимает вид

$$\dot{w}^h(t) = \Phi(t, w^h(t), \xi_i^h, v^h(t)), \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}). \quad (2.5')$$

Отображение $\mathcal{U}_h(q^{(\cdot)}(\cdot))$ и управление $v^h(\cdot)$ при этом задаются следующим образом:

$$\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot)) = v_i^h, \quad (2.6')$$

$$v^h(t) = v_i^h, \quad t \in \delta_{h,i}. \quad (2.9')$$

В этом случае выход алгоритма D_h есть пара $\{w^h(\cdot), v^h(\cdot)\}$, т. е.

$$D_h \xi^h(\cdot) = \{w^h(\cdot), v^h(\cdot)\}, \quad h \in (0, 1). \quad (2.8')$$

Работа алгоритма D_h (при фиксированном h) протекает по следующей схеме. До начального момента времени t_0 выбирается и фиксируется разбиение $\Delta = \Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, ($\tau_i = \tau_{h,i}$, $m = m_h$) отрезка T , а также вспомогательная система — модель M . Алгоритм D_h разбиается на $m - 1$ однотипных шагов. Очередной, i -й, шаг выполняется на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \geq 0$. В течение этого шага осуществляются следующие операции. В момент τ_i замеряется (с ошибкой) выход $y(\tau_i)$, т. е. находится вектор ξ_i^h со свойством (2.2). После этого по правилу (2.6), (2.9) ((2.6'), (2.9')) определяется управление в модели (2.5) ((2.5')). Затем осуществляется корректировка памяти — формирование отрезка траектории модели $w^h(t) = w^h(t; \tau_i, w^h(\tau_i), u_i^h, v_i^h)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, вместо $w^h(\tau_i)$. Вся процедура заканчивается в момент ϑ .

Рассмотрим случай, когда измеряются все координаты, т. е.

$$C = I_n.$$

Как уже отмечалось выше, при фиксированных h и $\xi^h(\cdot)$ каждый алгоритм D_h порождает выход $D_h \xi^h(\cdot)$ (см. (2.8) ((2.8'))). В случае, когда измеряются все координаты, нам понадобится не весь этот выход алгоритма D_h , а лишь его часть $v^h(\cdot)$. Чтобы не было путаницы, в последнем случае мы будем говорить о выходе $v^h(\cdot) = D_h \xi^h(\cdot)$.

Рассматриваемая задача динамической реконструкции (задача 1) состоит в построении семейства алгоритмов $D_h = (\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$ (2.4)–(2.6), (2.9) ((2.4), (2.5'), (2.6'), (2.9')), $h \in (0, 1)$, такого, что

$$v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot; x(\cdot)) \text{ в } L_2(T; \mathbb{R}^N) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Здесь $u_*(\cdot; x(\cdot)) \in P(\cdot)$ — некоторое управление, порождающее выход $x(\cdot)$. Таким образом, задача 1 относится к случаю, когда $C = I_n$.

Обратимся к случаю измерения части координат. Будем считать, что выход $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

— $(n \times (r + g))$ -мерная матрица, $g = n - r$.

Тогда можно считать, что $x(\cdot) = (y(\cdot), x^*(\cdot))$, где x^* — неизмеряемые компоненты вектора x . Выход алгоритма D_h (при каждом h) определяется согласно (2.8), где

$$w^h(\cdot) = \{w_*^h(\cdot), w_1^h(\cdot)\}, \quad (2.11)$$

причем $w_*^h(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ — часть координат модели, аппроксимирующая неизмеряемую координату x^* фазового вектора системы x , $w_1^h(\cdot): T \rightarrow \mathbb{R}^l$ — некоторая вспомогательная часть модельной траектории.

Задача 2 (задача динамической реконструкции при измерении части координат) состоит в построении семейства алгоритмов $D_h = (\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$ (2.4)–(2.6), (2.9) ((2.4), (2.5'), (2.6'), (2.9')), $h \in (0, 1)$, такого, что

- а) $v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot; y(\cdot))$ в $L_2(T; \mathbb{R}^N)$,
- б) $w_*^h(\cdot) \rightarrow x^*(\cdot; t_0, x_0, u_*(\cdot))$ в $C(T; \mathbb{R}^{n-r})$ при $h \rightarrow 0$.

Здесь $v^h(\cdot) = D_h \xi^h(\cdot)$ — выход алгоритма D_h .

В общем случае выход системы имеет вид $y(t) = Cx(t)$, где C — $r \times n$ -мерная матрица. Результаты измерения этого выхода $\xi_i^h \in \mathbb{R}^r$ удовлетворяют неравенствам (2.2). Выход алгоритма D_h определяется согласно (2.8), (2.11), где $w_*^h(\cdot)$ — часть координат модели, аппроксимирующая либо фазовую траекторию $x(\cdot)$ системы, либо некоторую функцию $\tilde{x}(\cdot)$ вида $\tilde{x}(t) = x(t) + f_*(t)$, $t \in T$ ($f_*(t)$ — известная функция), $w_1^h(\cdot)$ — некоторая вспомогательная часть модельной траектории.

В этом случае задача 3 (задача динамической реконструкции при измерении выхода $y(t) = Cx(t)$) состоит в построении семейства алгоритмов $D_h = (\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$ (2.4)–(2.6), (2.9) ((2.4), (2.5'), (2.6'), (2.9')), $h \in (0, 1)$, таких, что

- а) $v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot; y(\cdot))$ в $L_2(T; \mathbb{R}^N)$ при $h \rightarrow 0$,
- б)

$$w_*^h(\cdot) \rightarrow \tilde{x}(\cdot) \text{ в } C(T; \mathbb{R}^n) \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

3. Восстановление управлений при измерении всех координат

Сначала в настоящем разделе мы укажем один из методов решения задачи 1, который был предложен в работе [3]. При этом мы не будем пользоваться формализмами разд. 1, а опишем довольно подробно метод решения, поясняя все встречающиеся конструкции. Рассмотрим управляемую систему, динамика которой описывается векторным уравнением (2.1), т. е. уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))u(t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.1)$$

где t — время, $x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — фазовая траектория процесса, $u = u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$ — управление, $B(t, x) = \{B_{ij}(t, x)\}$, $i \in [1 : n]$, $j \in [1 : N]$ — матрица размерности $n \times N$, моменты t_0 , ϑ и начальное состояние x_0 заданы.

Управление $u = u(t) = (u_1(t), \dots, u_N(t))$ будем называть допустимым, если его компоненты $u_i(t)$, $i \in [1 : N]$, являются измеримыми (по Лебегу) на отрезке T функциями, а значения $u(t)$ для почти всех $t \in T$ принадлежат заданному ограниченному множеству P из евклидова пространства \mathbb{R}^N . Множество всех допустимых управлений будем обозначать символом $P(\cdot)$.

Итак,

$$P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N) : u(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}. \quad (3.2)$$

Траекторией (или решением) задачи Коши (3.1), соответствующей (соответствующим) допустимому управлению $u(\cdot) \in P(\cdot)$, будем называть функцию $x = x(t) = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$, которая абсолютно непрерывна на T , в начальный момент времени $t = t_0$ принимает значение

$x(t_0) = x_0$, для почти всех $t \in T$ имеет производную $\dot{x}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.1) для почти всех $t \in T$.

Под прямой задачей обычно понимают задачу определения траектории $x = x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ системы (3.1) по известному допустимому управлению $u = u(\cdot) \in P(\cdot)$. Задачу же определения допустимого управления по известной (полученной в результате наблюдений) траектории $x(t; t_0, x_0, u(\cdot))$ системы (3.1) естественно назвать обратной задачей. Именно эта задача будет главным объектом нашего исследования. Уточним постановку обсуждаемой задачи. Введем множество

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in P(\cdot) : x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = x(t), \quad t \in T\} \quad (3.3)$$

всех допустимых управлений, порождающих одну и ту же траекторию $x(t)$, $t \in T$, системы (3.1). Из постановки задачи следует непустота множества $U(x(\cdot))$, так как мы полагаем, что наблюдаемая функция $x(\cdot)$ действительно является траекторией системы (3.1), порожденной каким-либо допустимым управлением $u = u(\cdot) \in P(\cdot)$, т. е. $x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = x(t)$, $t \in T$, и, следовательно, $u(\cdot) \in U(x(\cdot))$. Однако множество $U(x(\cdot))$ может состоять более, чем из одного элемента. Это имеет место, например, в случае, когда $B(t, x) = B$ — постоянная матрица и $N > n$. Последнее легко видеть, если переписать уравнение (3.1) в виде

$$Bu(t) = \dot{x}(t) - f(t, x(t)), \quad t \in T.$$

Учитывая возможность такой неединственности, мы будем придерживаться концепции так называемых нормальных решений обратных задач. Именно, управление $u = u_*(\cdot)$, следуя [4; 5], назовем нормальным решением, если

$$u_*(\cdot) \in U(x(\cdot)), \quad |u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} = \inf_{u \in U(x(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}. \quad (3.4)$$

Заметим, что из-за погрешностей наблюдения (вызванных помехами, несовершенством измерительной аппаратуры или другими причинами) вместо точной траектории $x(t)$, $t \in T$, системы (3.1) нам будет известно лишь ее приближение $\xi^h(t)$, $t \in T$, удовлетворяющее условию

$$|\xi^h(t) - x(t)|_n \leq h, \quad t \in T, \quad (3.5)$$

где h — погрешность, $h \in (0, 1)$. Теперь мы можем сформулировать обсуждаемую задачу в удобной форме.

Требуется, зная $\xi^h(\cdot)$, указать допустимое управление $v^h(\cdot)$ такое, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} |v^h(\cdot) - u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} = 0. \quad (3.6)$$

При этом подразумевается, что динамика системы, т. е. $f(t, x)$, $B(t, x)$, T , x_0 , множество P и число h также известны.

Введем

Условие 3.1. *Функции f и B удовлетворяют условию Липшица по совокупности переменных $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:*

$$\max \{|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)|_n; \|B(t_1, x_1) - B(t_2, x_2)\|\} \leq L(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|_n). \quad (3.7)$$

Здесь и ниже символ $\|B\|$ означает евклидову норму матрицы B .

Уточним постановку обсуждаемой задачи. Итак, мы полагаем, что наблюдается траектория $x = x(t)$, $t \in T$, системы (3.1), соответствующая некоторому неизвестному управлению $u = u(\cdot) \in P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N) : u(t) \in P \text{ для п.в. } t \in T\}$. Измерения значений траектории $x(t)$ проводятся в заданные дискретные моменты времени τ_i , $i \in [0 : m - 1]$: $t_0 < \tau_0 < \dots < \tau_{m-1} < \tau_m = \vartheta$, причем вместо точных состояний $x(\tau_i)$ известны их приближения ξ_i^h , удовлетворяющие условиям

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_n \leq h, \quad i \in [0 : m - 1], \quad h \in (0, 1). \quad (3.8)$$

Здесь подразумевается, что

$$m = m_h = (\vartheta - t_0)\delta^{-1}(h), \quad \delta(h) = \tau_{i+1} - \tau_i = \text{const} > 0, \quad \tau_i = \tau_{h,i}.$$

Требуется, зная $B(t, x)$, $f(t, x)$, T , P , h , $\xi_0^h, \dots, \xi_{m-1}^h$, построить управление $v = v^h(\cdot) \in P(\cdot)$ такое, что имеет место сходимость (3.6), где $u_*(\cdot)$ — нормальное решение задачи, определяемое условиями

$$u_*(\cdot) \in U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in P(\cdot) : x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) = x(t) \quad \forall t \in T\},$$

$$|u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} = \inf_{u \in U(x(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}.$$

Остается уточнить, в каком режиме поступает информация об измерениях $\xi_0^h, \dots, \xi_{m-1}^h$ и как она используется при построении искомого управления $v^h(\cdot)$. Мы будем предполагать, что величины ξ_i^h определяются и становятся известными нам последовательно во времени, и управление $v^h(\cdot)$ мы вычисляем также последовательно на каждом отрезке $[t_0, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2]$, \dots , причем для построения $v^h(\cdot)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ используем лишь значения ξ_0^h, \dots, ξ_i^h , не предполагая знания остальных значений $\xi_{i+1}^h, \dots, \xi_{m-1}^h$, которые, возможно, пока еще не измерены.

Сформулированная выше задача неустойчива к возмущениям входных данных и для ее решения нужно применять специальные устойчивые методы. Один из таких методов мы и опишем ниже. В этом методе наряду с кусочно-постоянным управлением $v^h(\cdot)$, представляющим собой приближение к нормальному решению $u_*(\cdot)$, строится вспомогательная кусочно-линейная функция $w^h(\cdot)$, которая помогает отслеживать наблюдаемую траекторию $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u_*(\cdot))$ по ее приближенным значениям ξ_i^h , удовлетворяющим (3.8).

Приведем индуктивное описание процесса построения $v^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ последовательно для $i = 0, 1, \dots, m-1$. Пусть $i = 0$ и известно наблюдаемое значение ξ_0^h начальной точки $x(t_0) = x_0$ точной траектории $x(t)$. Положим

$$w^h(t_0) = \xi_0^h.$$

Решая вспомогательную задачу минимизации квадратичного функционала

$$l_0(u) = 2(w^h(t_0) - \tilde{x}_0, f(t_0, \xi_0^h)v) + \alpha|v|_N^2 \rightarrow \inf, \quad v \in P,$$

где $\alpha > 0$, $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, находим точку $v_0 \in P$ такую, что $l_0(v_0) = \inf_{v \in P} l_0(v)$.

Затем полагаем

$$v^h(t) = v_0^h, \quad w^h(t) = w^h(t_0) + [B(t_0, \xi_0^h)v_0^h + f(t_0, \xi_0^h)]t, \quad t \in [t_0, \tau_1].$$

Пусть для некоторого i , $0 < i < m-1$, уже определены $v^h(t)$, $w^h(t)$, $0 \leq t < \tau_i$, и пусть нам стало известно измерение ξ_i^h наблюдаемой траектории $x(t)$ в момент $t = \tau_i$. Тогда решаем вспомогательную задачу минимизации квадратичной функции

$$l_i(v) = 2(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B(\tau_i, \xi_i^h)v) + \alpha|v|_N^2 \rightarrow \inf, \quad v \in P, \quad (3.9)$$

и определяем вектор $v_i^h \in P$, $l_i(v_i^h) = \inf_{v \in P} l_i(v)$. После этого считаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$v^h(t) = v_i^h, \quad w^h(t) = w^h(\tau_i) + [B(\tau_i, \xi_i^h)v_i^h + f(\tau_i, \xi_i^h)](t - \tau_i). \quad (3.10)$$

Далее, по мере поступления информации $\xi_{i+1}^h, \dots, \xi_{m-1}^h$ последовательно определяются $v^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$ на промежутках $[\tau_{i+1}, \tau_{i+2})$, \dots , $[\tau_{m-1}, \tau_m)$, $\tau_m = \vartheta$.

Описанный метод представляет собой сочетание принципа экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [1] и метода регуляризации А.Н. Тихонова [4]. Вспомогательную траекторию $w^h(\cdot)$ из (3.10) будем называть моделью, а правило (3.9) выбора v_i^h — правилом экстремального сдвига. Для построения модели использован аналог разностного метода Эйлера для решения задачи Коши (3.1), отличающийся от классического метода Эйлера тем, что в (3.10) функции $B(\tau_i, x)$, $f(\tau_i, x)$ вычислены в точке $x = \xi_i^h$, а не в точке $x = w^h(\tau_i)$.

Роль модели заключается в том, чтобы отслеживать реальную траекторию по наблюдаемым значениям ξ_i^h , $i \in [0, m-1]$, путем наилучшего в смысле (3.9), (3.10) выбора кусочно-постоянных управлений $v^h(t) = v_i^h$, $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in [0 : m-1]$. Идею отслеживания траектории можно было бы реализовать и несколько иначе, выбирая u_i из условия минимума уклонения значения $w^h(\tau_{i+1}) = w^h(\tau_{i+1}; \tau_i, w^h(\tau_i), v_i^h)$ от ξ_i^h :

$$|w^h(\tau_{i+1}) - \xi_i^h|_n^2 \rightarrow \inf, \quad v \in P. \quad (3.11)$$

Тогда с учетом формулы (3.10) имеем

$$\begin{aligned} |w^h(\tau_{i+1}) - \xi_i^h|_n^2 &= |w^h(\tau_i) + (B(\tau_i, \xi_i^h)v_i^h + f(\tau_i, \xi_i^h))(\tau_{i+1} - \tau_i) - \xi_i^h|_n^2 \\ &= |w^h(\tau_i) - \xi_i^h|_n^2 + 2(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B(\tau_i, \xi_i^h)v_i^h \\ &\quad + f(\tau_i, \xi_i^h))(\tau_{i+1} - \tau_i) + |B(\tau_i, \xi_i^h)v_i^h + f(\tau_i, \xi_i^h)|_n^2(\tau_{i+1} - \tau_i)^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Как видим, первое слагаемое в правой части равенства (3.12) от v не зависит и потому может быть опущено без ущерба для задачи (3.11). Если теперь пренебречь третьим слагаемым из правой части (3.12), имеющим порядок $O(\delta^2)$, $\delta = \tau_{i+1} - \tau_i$, можем перейти от задачи (3.11) к близкой задаче для определения v_i^h

$$2(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B(\tau_i, \xi_i^h)v + f(\tau_i, \xi_i^h)) \rightarrow \inf, \quad v \in P.$$

Замечая, что здесь слагаемое $2(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, f(\tau_i, \xi_i^h))$ от v не зависит и может быть опущено, приходим к задаче

$$2(w^h(\tau_i) - \xi_i^h, B(\tau_i, \xi_i^h)v) \rightarrow \inf, \quad v \in P.$$

Добавляя к целевой функции последней задачи минимизации регуляризующее слагаемое $\alpha|v|_N^2$, получаем задачу (3.9).

Приведенные соображения поясняют происхождение задачи (3.9). Отметим, что эта задача является стандартной конечномерной задачей математического программирования и для ее решения могут быть использованы различные методы (см., например, [5]). Функция $l_i(v)$ в (3.9) сильно выпукла, квадратична и на выпуклом замкнутом множестве P достигает своей нижней грани в единственной точке $v = v_i^h$.

Важно также заметить, что в точном определении точки минимума v_i^h в задаче (3.9) нет необходимости. Достаточно найти v_i^h из условий

$$v_i^h \in P, \quad l_i(v_i^h) \leq \inf_{v \in P} l_i(v) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.13)$$

В дальнейшем предполагается, что точки v_i^h из (3.13) уже определены при $i = 0, 1, \dots, m-1$ и функции $v^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$, построены по формулам (3.10) с использованием v_i^h , полученных из (3.13). Оказывается, если параметры α , ε , h описанного метода (3.9), (3.10), (3.13) подходящим образом согласованы с погрешностью h , то построенное управление $v^h(\cdot)$ может быть взято в качестве приближения для нормального решения рассматриваемой обратной задачи. Имеет место

Теорема 3.1 [3]. Пусть функции $B(t, x)$, $f(t, x)$ удовлетворяют условию Липшица по совокупности аргументов $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, P — выпуклое, замкнутое, ограниченное множество \mathbb{R}^N , приближенные значения ξ_i^h наблюдаемой траектории $x(\cdot)$ в моменты $t = \tau_i$,

$i \in [0 : m - 1]$, удовлетворяют неравенствам (3.8), параметры $\alpha = \alpha(h)$, $\varepsilon = \varepsilon(h)$, $\delta = \delta(h)$ положительны и стремятся к нулю при $h \rightarrow 0$, причем

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h + \delta(h) + \varepsilon(h))\alpha^{-1}(h) = 0.$$

Тогда функции $v^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$, определенные согласно (3.9), (3.10), (3.13), таковы, что

$$|v^h(\cdot) - u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

$$|w^h(\cdot) - x(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0+, \quad (3.15)$$

где $u_* = u_*(\cdot) \in U(x(\cdot))$ — нормальное решение рассматриваемой задачи, $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u_*(\cdot))$.

Укажем еще один метод решения задачи 1, который основан на динамическом варианте метода невязки. При этом рассмотрим случай отсутствия ограничений на управление, т.е. считаем выполненным условие

$$P(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^N).$$

Предполагаем, что система описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(x(t))u(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.16)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u(t) \in \mathbb{R}^N$ — управление, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторная функция, $x \rightarrow B(x) \in \mathbb{R}^{n \times N}$ — матричная функция. Векторная функция f удовлетворяет условию Липшица по аргументам t, x , липшицевой считается и матричная функция $B(x)$ (см. (3.7)).

Пусть символ Δ_h означает разбиение отрезка T на $m_h - 1$ полуинтервалов $\delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ узлами $\tau_{h,i} = t_0 + i\delta_h$, $i \in [0 : m_h]$, с шагом $\delta_h = (\vartheta - t_0)(m_h)^{-1}$ (см. (2.4)), а символы ξ_i^h — результаты измерений состояний $x(\tau_i)$, т.е. векторы, удовлетворяющие неравенствам

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_n \leq h, \quad \tau_i = \tau_{h,i}.$$

Пусть модель M описывается системой уравнений вида

$$\dot{w}^h(t) = \Phi(t, \xi_{i-1}^h, v^h(t)), \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

$$i \in [0 : m - 1], \quad m = m_h,$$

$$\Phi(t, \xi_{i-1}^h, v^h(t)) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_0 + \delta), \quad \delta = \delta_h \\ f(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) + B(\xi_{i-1}^h)v, & t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}). \end{cases}$$

Ее решение — абсолютно непрерывная функция $w^h(\cdot) = w^h(\cdot; t_0, w_0^h, \xi^h(\cdot), v^h(\cdot))$. Начальное состояние модели $w^h(t_0) = w_0^h = \xi_0^h$.

Заметим, что модель является линейной системой, в то время как реальная система нелинейна по фазовым переменным.

Позиция $q^{(i)}(\cdot)$ в данном случае есть тройка (2.7'). Пусть символ $U(x(\cdot))$ означает совокупность всех управлений $u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$, порождающих движение $x(\cdot)$, т.е.

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N) : x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$$

удовлетворяет при п.в. $t \in T$ равенству (3.16)\}.

Символом $u_*(\cdot) = u_*(\cdot, x(\cdot))$ обозначим минимальное (в смысле $L_2(T; \mathbb{R}^N)$ -нормы) управление из множества $U(x(\cdot))$ (см. (3.3), (3.4))

$$u_*(\cdot) = \arg \min \{|u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)} : u(\cdot) \in U(x(\cdot))\}.$$

Рассмотрим два случая.

Случай I. $B(x) = B$, $u_*(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N)$.

Случай II. $u_*(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^N)$.

Закон выбора управления в модели $\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot))$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_h &= \mathcal{U}_h(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h, w^h(\tau_i)) = v_{\tau_i, \tau_{i+1}}^h(\cdot), \quad i \in [1 : m-1], \\ v_{t_0, \tau_1}^h(\cdot) &= 0, \quad (\tau_i = \tau_{h,i}, \quad m = m_h), \end{aligned}$$

где функции $v_{\tau_i, \tau_{i+1}}^h(\cdot)$ вычисляются в моменты τ_i по правилу

$$v^h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho_i^h \leq 0 \text{ или } |F_{i,\xi}|_N \leq \varepsilon, \\ \rho_i^h (a_i^h)^{-2} F_{i,\xi} & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \rho_i^h &= (\pi_i^h, \delta f(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) - \chi_i^h), \quad \pi_i^h = w^h(\tau_i) - \xi_{i-1}^h, \\ \chi_i^h &= \xi_i^h - \xi_{i-1}^h, \quad a_i^h = |F_{i,\xi}|_N \delta^{1/2}, \quad \delta = \delta_h, \quad \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — вспомогательный параметр, $F_{i,\xi} = -B'(\xi_{i-1}^h) \pi_i^h$, штрих означает транспонирование, символ $v_{a,b}(\cdot)$ означает функцию $v(t)$, $a \leq t \leq b$. Введем следующее

Условие 3.2. Пусть взяты функция $\varepsilon(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ и семейство разбиений $\{\Delta_h\}$, $h \in (0, 1)$, (2.4) отрезка T со свойствами

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad \varepsilon(h) \rightarrow 0 \quad \delta(h)/\varepsilon^{3/2}(h) \leq 1$$

$$\text{при } h \rightarrow 0, \quad h/\delta(h) \leq \varepsilon(h).$$

Имеет место

Теорема 3.2 [6]. При выполнении условия (3.2) имеют место сходимости (3.14), (3.15). Если $n = N$, $B = I$ (единичная матрица), $\delta = h^{2/3}$, $\varepsilon = h^{1/3}$ и управление $u_*(\cdot)$ является функцией с ограниченной вариацией, тогда справедлива следующая оценка скорости сходимости алгоритма:

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |u_*(t) - v^h(t)|_N^2 dt \leq ch^{1/8}.$$

Мы назвали описанный выше метод динамическим методом невязки, имея в виду следующее. Решение стандартной экстремальной задачи ($J(u) \rightarrow \inf$, $u \in U$, U — заданное множество, функционал $J(u)$ определен на U) методом невязки, как известно [5, с. 202], сводится к минимизации подходящего стабилизатора на множестве точек, в которых функционал $J(u)$ принимает значения, близкие к своей нижней грани $J_* = \inf\{J(u) : u \in U\}$. В основе доказательства теоремы 3.2 лежит оценка величины $\varepsilon_{i+1} = |w^h(\tau_{i+1}) - x(\tau_{i+1})|_n^2$ через величину ε_i . Ключевым звеном при обосновании такой оценки является неравенство

$$J_{1,i} \leq 4h|\pi_i^h|_n, \quad (3.18)$$

где

$$J_{1,i} = 2 \left(\pi_i^h; \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{f(\tau_{i-1}, \xi_{i-1}^h) - f(\tau, x(\tau)) + B(\xi_{i-1}^h)v^h(\tau + \delta) - B(x(\tau))u_*(\tau)\} d\tau \right).$$

Остановимся более детально на последнем. Обратимся к случаю I. Введем семейство функций

$$U_{i,h} = \{u(\cdot) \in L_2(\delta_i; \mathbb{R}^N) : J_i(u(\cdot)) \leq 4h|\pi_i^h|_n\},$$

где

$$J_i(u(\cdot)) = 2 \left(r_i, \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} B(u(\tau + \delta) - u_*(\tau)) d\tau \right).$$

В таком случае, управление $v_{\tau_i, \tau_{i+1}}^h(\cdot)$ вида (3.17) обеспечивает выполнение неравенства (3.18) и является решением задачи минимизации “стабилизатора”

$$\Omega_i(v(\cdot)) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |v(\tau)|_N^2 d\tau$$

на множестве $U_{i,h}$. Заметим также, что верно включение $u_{*\tau_i, \tau_{i+1}}(\cdot) \in U_{i,h}$.

4. Восстановление входов при измерении части координат

В настоящем разделе полагаем, что система Σ описывается нелинейным уравнением вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)) + f_2(t, x_1(t), x_2(t))u(t), \quad t \in T, \\ \dot{x}_2(t) &= f_3(t, x_1(t), x_2(t)) + f_4(t, x_1(t), x_2(t))u(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20},$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $n_1 + n_2 = n$, $u \in \mathbb{R}^N$. Функции $f_j(\cdot)$, $j \in [1 : 4]$, отображают произведение $T \times \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ соответственно в \mathbb{R}^{n_1} , \mathbb{R}^{n_2} и в пространства всех $N \times n_1$ - и $N \times n_2$ -мерных матриц, а также удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам. В дальнейшем символом $c[f_j]$ обозначим постоянную Липшица функции f_j .

Рассмотрим случай, когда множество допустимых управлений $P(\cdot)$ имеет вид

$$P(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^N).$$

Пусть матрица C имеет структуру

$$C = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы рассматриваем случай измерения в моменты τ_i координаты x_1 . Следовательно (см. разд. 1),

$$r = n_1, \quad y(t) = x_1(t), \quad x^*(t) = x_2(t),$$

и неравенства (2.2) принимают вид

$$|\xi_i^h - x_1(\tau_i)|_{n_1} \leq h, \quad i \in [0 : m - 1].$$

Как и выше, для решения задачи 2 следует задать семейство алгоритмов D_h , $h \in (0, 1)$, состоящее из

- а) семейства разбиений Δ_h промежутка времени T вида (2.4);
- б) некоторой вспомогательной системы (модели) M вида (2.5);
- в) закона формирования управления в модели по принципу обратной связи \mathcal{U}_h (2.6), (2.9).

Пусть E_1 и E_2 — ограниченные подмножества пространств \mathbb{R}^{n_1} и \mathbb{R}^{n_2} соответственно такие, что реализация траектории системы (4.1) $\{x_1(t), x_2(t)\}$ лежит в $E_1 \times E_2$ при всех t из T , т. е.

$$\{x_1(t), x_2(t)\} \in E_1 \times E_2 \quad \forall t \in T.$$

Пусть также выполнено

Условие 4.1. *Размерность управления и не превосходит размерности координаты x_1 ($N \leq n_1$) и при всех $t \in T$, $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ матрица $f_2(t, x_1, x_2)$ имеет ранг, равный N .*

Заметим, что при этом условии первое уравнение системы (4.1) может быть формально разрешено относительно $u(t)$:

$$u(t) = f_2^+(t, x_1(t), x_2(t))(\dot{x}_1(t) - f_1(t, x_1(t), x_2(t))), \quad t \in T,$$

где $f_2^+(t, x_1, x_2)$ — матрица, псевдообратная к $f_2(t, x_1, x_2)$.

При выполнении условия 4.1 множество входов, совместимых с выходом $x_1(\cdot)$, — $U(x_1(\cdot))$, одноэлементно, т. е.

$$U(x_1(\cdot)) = \{u_*(\cdot)\},$$

здесь $u(\cdot) = u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x_1(\cdot))$ — истинное управление, действующее на систему (4.1).

В соответствии с подходом, описанным в разд. 1, каждый алгоритм D_h решения задачи 2 отождествляется с тройкой $(\Delta_h, M, \mathcal{U}_h)$, где Δ_h — разбиение (2.4) отрезка T с равномерным шагом $\delta = \delta(h)$, M — модель (2.5), \mathcal{U}_h — закон формирования управления в модели (2.6).

Выберем функцию $\alpha = \alpha(h) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и семейство разбиений Δ_h (2.4) таким образом, чтобы при $h \rightarrow 0$ выполнялись условия

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad \alpha(h) \rightarrow 0, \quad \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \rightarrow 0, \quad \frac{h}{\delta(h)} \leq \lambda, \quad \frac{\alpha^2(h)}{\delta(h)} \leq \sigma^*, \quad (4.2)$$

где $\lambda > 0$, $\sigma^* > 0$ — константы. Модель M зададим дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{w}_0^h(t) &= \bar{u}_i^h, \\ \dot{w}_*^h(t) &= f_3(\tau_i, \eta_i^h) + f_4(\tau_i, \eta_i^h) f_2^+(\tau_i, \eta_i^h) [\bar{u}_i^h - f_1(\tau_i, \eta_i^h)], \\ \dot{w}_2^h(t) &= f_1(\tau_i, \eta_i^h) + f_2(\tau_i, \eta_i^h) v_i^h + \tilde{u}_i^h, \\ t \in \delta_i &= [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m - 1], \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad m = m_h \end{aligned} \quad (4.3)$$

с начальным условием

$$w_0^h(t_0) = x_{10}, \quad w_*^h(t_0) = x_{20}, \quad w_2^h(t_0) = x_{10}.$$

Здесь для краткости обозначено $\eta_i^h = \{\xi_i^h, w_{*,i}^h\}$, $w_{*,i}^h = w_*^h(\tau_i)$. Тройка $w_0^h(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $w_*^h(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $w_2^h(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$ составляет фазовый вектор модели $w^h(t) = \{w_0^h(t), w_*^h(t), w_2^h(t)\}$.

Закон формирования управления в модели \mathcal{U}_h (2.6) отождествляется с правилом, ставящим в соответствие каждой пятерке

$$q^{(i)}(\cdot) = \{\tau_i, \xi_i^h, \xi_{i-1}^h, w_*^h(\tau_i), w_2^h(\tau_i)\}, \quad i \in [1 : m - 1],$$

вектор

$$\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot)) = \{u_i^h, v_i^h\}, \quad u_i^h = \{\bar{u}_i^h, \tilde{u}_i^h\},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^h &= 0, \quad \bar{u}_i^h = (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) \delta^{-1} = \xi^*(\tau_i, \tau_{i-1}), \quad i \geq 1, \\ v_i^h &= \alpha^{-1} f_2'(\tau_i, \xi_i^h, w_{*,i}^h) (\xi_i^h - w_2^h(\tau_i)), \\ \tilde{u}_i^h &= c_* \delta \alpha^{-2} (\xi_i^h - w_2^h(\tau_i)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$|f_2(t, x_1, x_2)| \leq b[f_2] \quad \forall \{t, x_1, x_2\} \in T \times E_1 \times E_2.$$

$$c_* = \text{const} > (1 + 2(b[f_2])^2 + 4(b[f_2])^4 + \sigma^*) / 2.$$

Работа алгоритма D_h (при фиксированном h) разбивается на конечное число однотипных шагов. Очередной, i -й, шаг выполняется на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$. В течение этого шага осуществляются следующие операции. Сначала согласно (4.4) вычисляется тройка векторов $\{\bar{u}_i^h, \tilde{u}_i^h, v_i^h\}$, составляющая вектор управления, затем на вход модели (4.3) подаются постоянные управления

$$\bar{u}^h(t) = \bar{u}_i^h, \quad \tilde{u}^h(t) = \tilde{u}_i^h, \quad v^h(t) = v_i^h \quad \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

После этого пересчитывается фазовое состояние модели, вместо $\{w_0^h(\tau_i), w_*^h(\tau_i), w_2^h(\tau_i)\}$ находятся $\{w_0^h(\tau_{i+1}), w_*^h(\tau_{i+1}), w_2^h(\tau_{i+1})\}$. Вся процедура заканчивается в момент ϑ .

Справедлива следующая теорема

Теорема 4.1 [7]. *Пусть выполнено условие 4.1, а также условия согласования параметров (4.2). Тогда имеют место сходимости*

$$v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \text{ в } L_2(T; \mathbb{R}^N), \quad w_*^h(\cdot) \rightarrow x_2(\cdot) \text{ в } C(T; \mathbb{R}^{n_2}) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

В основе доказательства теоремы 4.1 лежит процедура стабилизации функционала типа Ляпунова вида

$$\Lambda(t) = |w_2^h(t) - x_1(t)|_{n_1}^2 + \alpha \int_{t_0}^t \{|v^h(s)|_N^2 - |u_*(s)|_N^2\} ds,$$

где $w_2^h(t)$ — фазовая траектория модели. При этом устанавливаются оценки

$$|w_0^h(\cdot) - x_1(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^{n_1})} \leq 3h + 2k_0\delta^{1/2},$$

$$|w_*^h(\cdot) - x_2(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^{n_2})} \leq k_*(h + \delta^{1/2}), \quad k_0, k_* = \text{const} > 0,$$

$$|w_2^h(\tau_i) - x_1(\tau_i)|_{n_1}^2 \leq d_0(h + \delta + \alpha), \quad i \in [0 : m],$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(t)|_N^2 dt \leq \int_{t_0}^{\vartheta} |u_*(t)|_N^2 dt + d_1\alpha^{-1}(h + \delta) + d_2\alpha, \quad d_0, d_1, d_2 = \text{const} > 0.$$

Имеет место также

Лемма 4.1 [7]. *Пусть $\alpha = h^{1/2}$, $\delta = h$ и $u_*(\cdot)$ является функцией ограниченной вариации на T . Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма:*

$$d_2 h^{1/2} \leq \int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(t) - u_*(t)|_N^2 dt \leq d_3 h^{1/2}.$$

Приведем еще один алгоритм решения задачи 2, считая, что множество $P(\cdot)$ имеет вид (3.2), где P — выпуклый компакт. Символами E_1^γ , E_2^γ обозначим γ -окрестности множеств E_1 и E_2 соответственно, где γ — некоторое (достаточно большое) фиксированное положительное число такое, что все ξ_i^h заведомо принадлежат E_1^γ при всех $h \in (0, 1)$ и всех i .

Пусть

$$\sup \{|f_1(t, x_1, x_2) + f_2(t, x_1, x_2)u|_{n_1} : t \in T, x_1 \in E_1^\gamma, x_2 \in E_2^\gamma, u \in P\} \leq K_1,$$

$$\sup \{|f_3(t, x_1, x_2) + f_4(t, x_1, x_2)u|_{n_2} : t \in T, x_1 \in E_1^\gamma, x_2 \in E_2^\gamma, u \in P\} \leq K_2.$$

Пусть выполняется условие 4.1. Модель M зададим управляемой системой вида

$$\dot{w}_0^h(t) = u_i^h,$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_*^h(t) &= f_3(\tau_i, \eta_i^h) + f_4(\tau_i, \eta_i^h) f_2^+(\tau_i, \eta_i^h) [u_i^h - f_1(\tau_i, \eta_i^h)], \\ t \in \delta_i &= [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m - 1], \quad m = m_h, \quad \tau_i = \tau_{h,i} \end{aligned} \quad (4.5)$$

с начальным условием

$$w_0^h(t_0) = x_{10}, \quad w_*^h(t_0) = x_{20},$$

где $u^h(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_1}$ — управление, пара $\{w_0^h(\cdot), w_*^h(\cdot)\} \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ составляет фазовую траекторию модели $w^h(\cdot)$. Для краткости записи обозначено

$$\eta_i^h = \{\xi_i^h, w_{*,i}^h\}, \quad w_{*,i}^h = w_*^h(\tau_i).$$

Семейство отображений $\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot))$ зададим формулой (2.6), полагая

$$\begin{aligned} u_i^h &= \{u_i^{h(1)}, \dots, u_i^{h(n_1)}\} \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ u_i^{h(k)} &= -K_1 \operatorname{sign} [w_0^{h(k)}(\tau_i) - \xi_i^{h(k)}] \in R, \quad k \in [1 : n_1], \\ v_0^h &= 0, \quad v_i^h = \begin{cases} \arg \min\{|u|_N : u \in \Omega_i^h\}, & \text{если } \Omega_i^h \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_i^h &= \left\{ u \in P : |f_2(\tau_i, \xi_i^h, w_{*,i}^h)u - F_i^h|_{n_2} \leq \nu(h, \delta(h)) \right\}, \\ \nu(h, \delta) &= 2h\delta^{-1} + K(c[f_1] + c[f_2]d(P))(h + \delta), \\ d(P) &= \sup\{|u|_N : u \in P\}, \quad \tilde{K} = 1 + c[x_1] + c[w] + K_0, \\ F_i^h &= (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h)\delta^{-1}(h) - f_1(\tau_i, \xi_i^h, w_{*,i}^h), \quad K_0 = \max\{k_1, k_2\}, \\ |x_1(t_1) - x_2(t_2)|_{n_1} &\leq c[x_1]|t_1 - t_2|, \\ |w_*^h(t_1) - w_*^h(t_2)|_{n_2} &\leq c[w]|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in T, \\ k_1 = c_7 = c_1 c_3(\vartheta - t_0) + c_5, \quad k_2 &= c_2 c_3(\vartheta - t_0) + c_6, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= c[f_3] + c[g_1] + c[g_2]n_1K_1, \quad c_2 = c_1K_1, \quad c_3 = \exp(c_1(\vartheta - t_0)), \\ c_5 &= c[g_2](1 + n_1K_1 + n_2K_2)(\vartheta - t_0) + c^*[g_2], \quad c_6 = 2c_5K_1, \end{aligned}$$

$c[f_j]$ — постоянные Липшица функций f_j , $j \in [1 : 4]$, $c[g_j]$ — постоянные Липшица функций g_j , $j \in [1 : 2]$,

$$\begin{aligned} g_1(t, x_1, x_2) &= -f_4(t, x_1, x_2) f_2^+(t, x_1, x_2) f_1(t, x_1, x_2), \\ g_2(t, x_1, x_2) &= f_4(t, x_1, x_2) f_2^+(t, x_1, x_2), \quad t \in \delta_i, \end{aligned}$$

символ $c^*[g]$ обозначает константу, ограничивающую сверху евклидову норму $|g(t, x_1, x_2)|$ при всех (t, x_1, x_2) из множества $T \times E_1^\gamma \times E_2^\gamma$.

Пусть функции $\delta(h)$ таковы, что при $h \rightarrow 0$:

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad h\delta^{-1}(h) \rightarrow 0.$$

Имеет место

Теорема 4.2 [8]. Пусть выполнено условие 4.1. Модель M описывается уравнениями (4.5), а семейство \mathcal{U}_h — соотношениями (4.6). Тогда справедливо утверждение теоремы 4.1.

Укажем еще один алгоритм решения задачи 2 в предположении, что множество допустимых управлений $P(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^N)$, причем известно, что истинное управление $u(\cdot) = u_*(\cdot, x_1(\cdot))$, действующее на систему (4.1), является элементом пространства $L_\infty(T; \mathbb{R}^N)$. Пусть выполняется условие 4.1. В качестве модели M возьмем управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{w}_0^h(t) &= u_i^h, \\ \dot{w}_*^h(t) &= f_3(\tau_i, \eta_i^h) + f_4(\tau_i, \eta_i^h) f_2^+(\tau_i, \eta_i^h) [u_i^h - f_1(\tau_i, \eta_i^h)], \\ t \in \delta_i &= [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m - 1], \quad m = m_h, \quad \tau_i = \tau_{h,i} \end{aligned} \quad (4.7)$$

с начальным условием

$$w_0^h(t_0) = x_{10}, \quad w_*^h(t_0) = x_{20},$$

где $u^h(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_1}$ — управление, пара $\{w_0^h(\cdot), w_*^h(\cdot)\} \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ составляет фазовую траекторию модели $w^h(\cdot)$,

$$\eta_i^h = \{\xi_i^h, w_{*,i}^h\}, \quad w_{*,i}^h = w_*^h(\tau_i).$$

Семейство отображений $\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot))$ зададим формулой (2.6),

$$\begin{aligned} u_0^h &= 0, \quad u_i^h = (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) \delta^{-1}, \quad i \geq 1, \\ v_0^h &= 0, \quad v_i^h = \begin{cases} \arg \min\{|u|_N : u \in \Omega_i^h\}, & \text{если } \Omega_i^h \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь

$$\Omega_i^h = \left\{ u \in S(d(h)) : |f_2(\tau_i, \xi_i^h, w_{*,i}^h)u - F_i^h|_{n_2} \leq \nu(h, \delta(h), d(h)) \right\},$$

$$S(d(h)) = \{u \in \mathbb{R}^N : |u|_N \leq d(h)\} \text{ — шар радиуса } d(h),$$

$$d(h) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ — скалярная функция,}$$

$$F_i^h = (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) \delta^{-1}(h) - f_1(\tau_i, \xi_i^h, w_{*,i}^h),$$

$$\nu(h, \delta, d) = 2h\delta^{-1} + K(c[f_1] + c[f_2]d)(h + \delta^{1/2}), \quad K = 1 + c[x_1] + c[w] + K_*,$$

$$K_* = 3 \exp(k_0^2(\vartheta - t_0))(k_0(1 + c[x_1] + c[w])(\vartheta - t_0)^{1/2} + 3(c[x_1] + 1)S[r]),$$

$$k_0 = (c[f_3] + c[g_1])(\vartheta - t_0)^{1/2} + c[g_2](2S[x])^{1/2}, \quad S[x] = |\dot{x}_1(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^{n_1})}^2,$$

$$c[g_2] = c[f_4]b[f_2^+] + c[f_2^+]b[f_4], \quad c[g_1] = c[f_1]b[f_4]b[f_2^+] + c[g_2]b[f_1],$$

$$|x_1(t_1) - x_2(t_2)|_{n_1} \leq c[x_1]|t_1 - t_2|,$$

$$|w_*^h(t_1) - w_*^h(t_2)|_{n_2} \leq c[w]|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in T.$$

Пусть функции $\delta(h)$, $d(h)$ таковы, что при $h \rightarrow 0$

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad h\delta^{-1}(h) \rightarrow 0, \quad d(h) \rightarrow +\infty, \quad d(h)\delta^{1/2}(h) \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

Алгоритм работает по стандартной схеме. До момента t_0 фиксируется погрешность h , а также разбиение $\Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^{m_h}$ отрезка T . На очередном, i -м, шаге, выполняемом на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m_h - 1]$, осуществляются следующие операции. Сначала вычисляются векторы $\{u_i^h, v_i^h\}$ согласно правилу (4.8). Затем на вход модели подается постоянное управление

$$u^h(t) = u_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

После этого пересчитывается фазовое состояние модели: вместо $w^h(\tau_i) = \{w_0^h(\tau_i), w_*^h(\tau_i)\}$ находится $w^h(\tau_{i+1}) = \{w_0^h(\tau_{i+1}), w_*^h(\tau_{i+1})\}$. Вся процедура заканчивается в момент ϑ .

Имеет место

Теорема 4.3 [7]. Пусть выполнено условие 4.1, а также условие согласования параметров (4.9), модель M описывается уравнениями (4.7), а семейство \mathcal{U}_h — соотношениями (4.8). Тогда справедливо утверждение теоремы 4.1.

Доказательство теорем 4.2 и 4.3 основано на идеологии динамического варианта метода невязки. При этом устанавливаются неравенства

$$|v^h(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}^2 \leq |u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^N)}^2,$$

$$|w_*^h(\cdot) - x_2(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^{n_2})} \leq k\varphi(h, \delta),$$

где $\varphi(h, \delta) = h + \delta$ (при доказательстве теоремы 4.2), $\varphi(h, \delta) = h + \delta^{1/2}$ (при доказательстве теоремы 4.3).

При некоторых дополнительных условиях можно установить верхнюю оценку скорости сходимости алгоритма. Имеет место

Теорема 4.4 [7]. Пусть выполнены условия (4.9) и $u_*(\cdot)$ является функцией ограниченной вариации, тогда справедлива следующая оценка скорости сходимости алгоритма

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(t) - u_*(t)|_N^2 dt \leq C(h\delta^{-1}(h) + d(h)(h + \delta^{1/2}(h))). \quad (4.10)$$

Здесь постоянная $C > 0$ может быть выписана явно.

Следствие 4.1. Если положить $\delta(h) = h^{3/4}$, а $d(h) = h^{-1/8}$, то как верхняя, так и нижняя оценки скорости сходимости алгоритма будут иметь порядок $h^{1/8}$.

5. Восстановление входов по измерениям выхода $y = Cx$

В этом разделе всюду полагаем

$$P(\cdot) = L_2(T; \mathbb{R}^N).$$

Таким образом, ограничения на управление отсутствуют. Рассмотрим линейный стационарный случай. Именно, положим в (2.1) $f(t, x) = Ax$, где A — $n \times n$ -мерная матрица, $B(t, x) = B$ — $n \times N$ -мерная матрица. Таким образом, система (2.1) имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F(t), \quad t \in T, \quad (5.1)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Предполагаем, что выход системы $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^r$ (C — $r \times n$ -мерная матрица). Результаты измерения $y(t)$ удовлетворяют неравенствам (2.2).

Модель зададим векторным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{w}^h(t) &= \Phi(w^h(t), v^h(t)), \quad t \in [\tau_1, \vartheta], \quad \tau_1 = \tau_{h,1}, \\ \dot{w}^h(t) &= 0, \quad t \in [t_0, \tau_1], \quad w^h(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $w^h = \{w_0^h, w_*^h, w_2^h\}$ — фазовый вектор размерности $r + 2n$, $w_1^h = \{w_0^h, w_2^h\}$,

$$\Phi(w^h, v^h) = \{CBv^h, Aw_*^h + Bv^h, w_*^h\}. \quad (5.3)$$

Таким образом, модель описывается системой

$$\begin{aligned}\dot{w}_0^h(t) &= CBv^h(t), \quad t \in [\tau_1, \vartheta], \\ \dot{w}_*^h(t) &= Aw_*^h(t) + Bv^h(t), \\ \dot{w}_2^h(t) &= w_*^h(t),\end{aligned}$$

причем $w^h(t) = 0$ при $t \in [t_0, \tau_1]$.

Пусть выполнено

Условие 5.1. а) *Размерность выхода равна размерности входа, т. е. $r = N$; $\text{rank } CB = r$. Функция $F(\cdot)$ непрерывна.*

б) *Входное воздействие $u(\cdot)$, действующее на систему (2.1), является элементом пространства $L_2(T; \mathbb{R}^N)$.*

Выполнение этого условия гарантирует одноэлементность множества $U(y(\cdot))$:

$$U(y(\cdot)) = \{u_*(\cdot)\} \subset L_2(T; \mathbb{R}^N), \quad u_*(\cdot) = u_*(\cdot; y(\cdot)).$$

Семейство \mathcal{U}_h определим формулами

$$\mathcal{U}_h(q^{(i)}(\cdot)) = \begin{cases} v_0^h & \text{при } i = 0, \\ v_i^h & \text{при } i \in [1 : m - 1], \quad m = m_h, \end{cases} \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned}q^{(i)}(\cdot) &= \{t_i, \xi_i^h, \xi_{i-1}^h, w^h(\tau_i)\}, \quad i \in [0 : m - 1], \\ v_i^h &= \begin{cases} (CB)^{-1} \left| \delta^{-1}(h) (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h) - CAx_1(\tau_i) - CF(\tau_i) - \right. \\ \left. CAw_*^h(\tau_i) \right|_r s_i / |s_i|_r, & \text{если } |s_i|_r \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$x_1(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, 0)$ — решение системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F(t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0,$$

вектор s_i определяется соотношением

$$s_i = \xi_{i-1}^h - \xi_0^h - \int_{t_0}^{\tau_i} C\{F(\tau) + Ax_1(\tau)\} d\tau - w_0^h(\tau_i) - CAw_2^h(\tau_i).$$

Имеет место

Теорема 5.1 [9]. *Пусть $v^h(t) = 0$ при $t \in [t_0, t_{h,1}]$,*

$$\delta(h) \rightarrow 0, \quad h/\delta(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Тогда семейство алгоритмов D_h , $h \in (0, 1)$, (2.4), (5.2)–(5.5) решает задачу 3. При этом имеет место сходимость (2.12), где

$$\tilde{x}(t) = x(t) + f_*(t), \quad f_*(t) = x_1(t). \quad (5.6)$$

Кроме того, равномерно по всем разбиениям $\{\Delta_h\}$, $h \in (0, 1)$, с диаметрами $\delta = \delta(h)$ и всем результатам измерений ξ_i^h , $|\xi_i^h - y(\tau_i)|_r \leq h$, справедливо неравенство

$$\sup_{t \in T} \left| \int_{t_0}^t \{v^h(\tau) - u_*(\tau)\} d\tau \right|_r \leq c\{\delta^{1/2}(h) + \omega_F(\delta) + h/\delta(h)\}.$$

Здесь постоянная c не зависит от h , δ и $\xi^h(\cdot)$; $\omega_F(\delta)$ — модуль непрерывности функции F , т. е.

$$\omega_F(\delta) = \sup \{|F(\tau_1) - F(\tau_2)|_N : |\tau_1 - \tau_2| \leq \delta, \tau_1, \tau_2 \in T\}.$$

Рассмотрим случай, когда множество $P(\cdot)$ задается формулой (3.2). Так же, как и выше, мы рассмотрим систему (5.1) в предположении, что выполнено условие 5.1. Модель зададим соотношениями (5.2), (5.3). Семейство \mathcal{U}_h определим формулами (5.4), где положим

$$v_i^h = \arg \min \{2(l^h(\tau_i), u) + \alpha|u|_N^2 : u \in P\}, \quad (5.7)$$

$$l^h(t) = (CB)^{-1}\{w_0^h(t) - CAw_2^h(t) - f^h(t)\},$$

$$f^h(t) = \tilde{\xi}^h(t) - \int_{t_0}^t \{CAx_1(\tau) + CF(\tau)\} d\tau,$$

$\tilde{\xi}^h(t)$ — линейный интерполянт, построенный по узлам ξ_i^h , т. е. $\tilde{\xi}^h(\tau_i) = \xi_i^h$, $i \in [0 : m - 1]$, $m = m_h$.

Теорема 5.2. Пусть выполнено условие согласования параметров

$$h \leq \delta(h), \quad \delta(h) \rightarrow 0, \quad \alpha(h) \rightarrow 0,$$

$$(\delta(h) + h)/\alpha(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0.$$

Тогда семейство алгоритмов D_h , $h \in (0, 1)$, (2.4), (5.2)–(5.4), (5.7) решает задачу 3. При этом имеет место сходимость (2.12), где $\tilde{x}(t)$ определяется по формуле (5.6). Если функция $u_*(\cdot)$ имеет на промежутке T ограниченную вариацию, то справедливы следующие оценки скорости сходимости алгоритма:

$$\int_0^\vartheta (\vartheta - s)^2 |v^h(s) - u_*(s)|_N^2 ds \leq C_1 h^{1/3},$$

$$|v^h(\cdot) - u_*(\cdot)|_{L^2(T; \mathbb{R}^N)} \leq C_2 (\delta(h)/\alpha(h) + (\alpha(h))^{1/2})^{1/6},$$

где константы C_1 и C_2 выписываются явно.

Поясним соображения, которые лежат в основе доказательства теорем 5.1 и 5.2. Как известно, решение системы (5.1) представимо в виде

$$x(t) = x_1(t) + \int_{t_0}^t X(t, \tau) Bu(\tau) d\tau, \quad (5.8)$$

где $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x}(t) = Ax(t)$. Продифференцируем правую и левую части равенства (5.8) и умножим полученное равенство на C . В результате будем иметь

$$C\dot{x}(t) = CAx_1(t) + CF(t) + CBu(t) + C \int_{t_0}^t AX(t, \tau) Bu(\tau) d\tau.$$

Заметим, что левая часть этого равенства есть $y(t)$, а матрица CB имеет размерность $r \times r$ и является невырожденной (см. условие 5.1 а)). Следовательно, неизвестное управление

$u(\cdot) = u_*(\cdot)$, действующее на систему (5.1), является единственным решением интегрального уравнения

$$\Psi_1(t) - Mu(t) - \int_{t_0}^t K(t, \tau)u(\tau) d\tau = 0, \quad t \in T,$$

здесь

$$M = CB, \quad K(t, \tau) = CAX(t, \tau)B, \quad (5.9)$$

$$\Psi_1(t) = \dot{y}(t) - CAx_1(t) - CF(t).$$

В таком случае, естественно пытаться построить семейство алгоритмов D_h , выход которых $v^h(\cdot) = D_h \xi^h(\cdot)$ будет обладать свойством

$$\sup_{t \in [\tau_1, \vartheta]} \left| \int_{\tau_1}^t \{\Psi_1(\tau - \delta(h)) - Mv^h(\tau) - \int_{t_0}^{\tau} K(\tau, \eta)v^h(\eta) d\eta\} d\tau \right| \leq \nu(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0+.$$

Описанные выше алгоритмы как раз и обладают таким свойством.

6. Уравнения непрерывного оценивания возмущений динамических систем

В настоящем разделе обсуждается задача построения дифференциальных уравнений оценивания (реконструкции) возмущений по данным измерений. В отличие от предыдущих разделов, в которых анализируются случаи дискретных моментов наблюдений, обсуждается непрерывный случай, для него выводятся дифференциальные уравнения вспомогательной системы, управления в которой являются приближениями неизвестного входа. Общие конструкции иллюстрируются на примере.

Итак, задана динамическая система, описываемая нелинейным дифференциальным уравнением (2.1), в котором $B(t, x) = B$, $F(t) \equiv 0$, т. е. уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + Bu(t), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

где t — время, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u(t) \in \mathbb{R}^N$ — возмущение, B — $n \times N$ -мерная матрица, f — $n \times n$ -мерная матричная функция, непрерывная по t и липшицева по x . Траектория системы $x(\cdot)$ зависит от меняющегося во времени входного воздействия (возмущения) $u(\cdot)$. Это воздействие, как и траектория, заранее не заданы. Предполагается, что непрерывно производятся наблюдения (измерения) фазового состояния системы (6.1), в результате чего определяются векторы $\xi^h(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $n_1 \leq n$ со свойствами

$$|\xi^h(t) - \{x(t)\}_{n_1}|_{n_1} \leq h, \quad t \in T. \quad (6.2)$$

Величина $h \in (0, 1)$, как и всюду ранее, характеризует точность измерения, $\{x\}_{n_1}$ — вектор, составленный из первых n_1 координат вектора x , а $|\cdot|_n$ — евклидова норма в пространстве \mathbb{R}^n .

Задача непрерывного оценивания заключается в построении алгоритма приближенного восстановления неизвестного возмущения $u(\cdot)$.

Сначала обратимся к случаю измерения всех фазовых координат системы (6.1). Именно, будем считать $n_1 = n$. Следовательно, результаты наблюдений — n -мерные векторы $\xi^h(t)$ со свойствами

$$|\xi^h(t) - x(t)|_n \leq h, \quad t \in T.$$

Пусть $c[f]$ — постоянная Липшица функции f , т. е.

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)|_n \leq c[f]|x_1 - x_2|_n \quad \forall t \in T, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Введем вспомогательную функцию $\alpha(h) \in (0, 1)$, обладающую следующим свойством:

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad h^{2/3}\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (6.3)$$

В качестве уравнения непрерывного оценивания, как видно из приведенной ниже теоремы 6.2, можно взять управляемую систему вида

$$\dot{w}^h(t) = f(t, w^h(t)) + Bv^h(t) + u^h(t), \quad t \in T \quad (6.4)$$

с начальным состоянием $w^h(t_0) = \xi^h(t_0)$. Введем обозначения $\Phi_h(t) = \xi^h(t) - w^h(t)$, $\chi_h(t) = u_*(t) - v^h(t)$.

Управления $v^h(t)$ и $u^h(t)$ в системе (6.4) зададим следующим образом:

$$v^h(t) = \alpha^{-1}B'\Phi_h(t), \quad u^h(t) = c[f]\Phi_h(t).$$

Пусть, как и всюду выше, $u_*(\cdot) = u_*(\cdot; x(\cdot))$ — элемент множества $U(x(\cdot))$ минимальной $L_2(T; \mathbb{R}^N)$ -нормы, $U(x(\cdot))$ — множество всех управлений $u(\cdot)$, совместимых с выходом $x(\cdot)$, т. е.

$$U(x(\cdot)) = \left\{ u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^N): x(t) = x_0 + \int_0^t \{f(\tau, x(\tau)) + Bu(\tau)\} d\tau \quad \forall t \in T \right\}.$$

Заметим, что множество $U(x(\cdot))$ выпукло и замкнуто в $L_2(T; \mathbb{R}^N)$. Поэтому элемент $u_*(\cdot)$ определен и единственен.

Теорема 6.1 [10]. *Пусть выполнены условия (6.3). Тогда имеет место сходимость*

$$v^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \quad \text{в } L_2(T; \mathbb{R}^N) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Рассмотрим случай измерения части координат фазового вектора ($n_1 < n$). Пусть y — вектор, составленный из n_1 первых координат вектора x , а z — вектор, составленный из оставшихся $n - n_1$ координат вектора x . Таким образом, $x = (y, z)$. Пусть

$$f(t, x) = f(t, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(t, y) + Cz \\ f_2(t, y, z) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix},$$

причем $n_1 > 0.5n$ и ранг $n_1 \times (n - n_1)$ -мерной матрицы C равен $n - n_1$, а матрица D имеет размерность $(n - n_1) \times N$. В этом случае систему (6.1) можно переписать в виде

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t)) + Cz(t), \quad \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t)) + Du(t).$$

При этом неравенства (6.2) примут вид

$$|\xi^h(t) - x_1(t)|_{n_1} \leq h, \quad t \in T, \quad \xi^h(t) \in \mathbb{R}^{n_1}.$$

Будем считать также, что в начальный момент времени измеряется все начальное состояние системы, т. е. определяется вектор $\xi_0^h = (\xi_{10}^h, \xi_{20}^h) \in \mathbb{R}^n$ такой, что $|\xi_0^h - x(t_0)|_n \leq h$. В качестве уравнения непрерывного оценивания возьмем систему

$$\begin{aligned} \dot{w}_1^h(t) &= f_1(t, w_1^h(t)) + Cv_1^h(t) + u_1^h(t), \\ \dot{w}_2^h(t) &= f_2(t, w_1^h(t), w_2^h(t)) + Dv_2^h(t) + u_2^h(t) \end{aligned} \quad (6.5)$$

с управлениями вида

$$\begin{aligned} v_1^h(t) &= h^{-4/9}C'\chi_1^h(t), \quad u_1^h(t) = c[f]\chi_1^h(t), \\ v_2^h(t) &= \alpha^{-1}D'\chi_2^h(t), \quad u_2^h(t) = 2c[f]\chi_2^h(t), \end{aligned}$$

где

$$\chi_1^h(t) = \xi^h(t) - w_1^h(t), \quad \chi_2^h(t) = v_1^h(t) - w_2^h(t),$$

$\alpha = \alpha(h)$ — вспомогательный параметр. За начальное состояние системы (6.5) примем ξ_0^h , т. е.

$$w_1^h(t_0) = \xi_{10}^h, \quad w_2^h(t_0) = \xi_{20}^h.$$

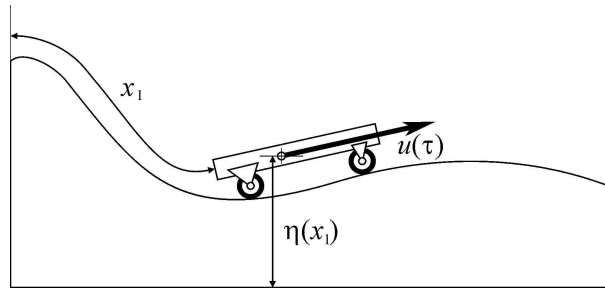


Рис. 6.1. Схема движения тела по рельефной местности.

Теорема 6.2 [10]. Пусть $\alpha = \alpha(h) = h^{1/18}$. Тогда имеют место сходимости

$$v_1^h(\cdot) \rightarrow x_2(\cdot) \quad \text{в } L_2(T; \mathbb{R}^{n_1}), \quad (6.6)$$

$$v_2^h(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot) \quad \text{в } L_2(T; \mathbb{R}^{n-n_1}) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (6.7)$$

Для доказательства теоремы сначала устанавливаются оценки

$$\sup_{t \in T} |x_1(t) - w_1^h(t)|_{n_1} \leq \nu^2(h),$$

$$|v_1^h(\cdot) - x_2(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^{n_1})} \leq \nu(h) = Kh^{1/9}, \quad k = \text{const} > 0,$$

из которых следует соотношение (6.6). Для доказательства (6.7) в свою очередь устанавливаются неравенства

$$\sup_{t \in T} |x_2(t) - w_2^h(t)|_{n-n_1}^2 \leq d_0 h^{1/18}, \quad \int_{t_0}^{\vartheta} |v_2^h(\tau)|_N^2 d\tau \leq \int_{t_0}^{\vartheta} |u_*(\tau)|_N d\tau + d_1 h^{1/36},$$

$$d_0, d_1 = \text{const} > 0.$$

Рассмотрим пример. Пусть тело движется по местности, рельеф которой известен, под действием силы тяги $u = u(t)$, $t \in T$ (см. рис. 6.1). Сила тяжести не учитывается. По ходу движения поступают приближенные данные о фазовом положении тела. Требуется синхронно с движением тела вычислять силу тяги u .

Обратимся к простейшей модели этой ситуации, когда материальная точка движется по гладкой кривой под действием силы, направленной по касательной к этой кривой. Уравнения движения имеют вид [11]

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\beta \eta'(x_1(t)) + u(t). \quad (6.8)$$

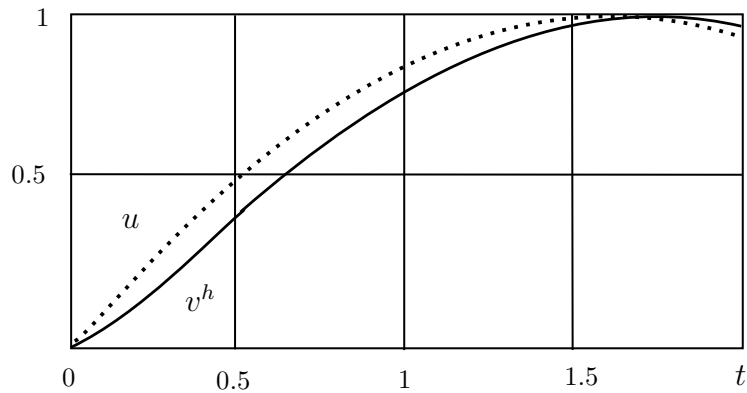
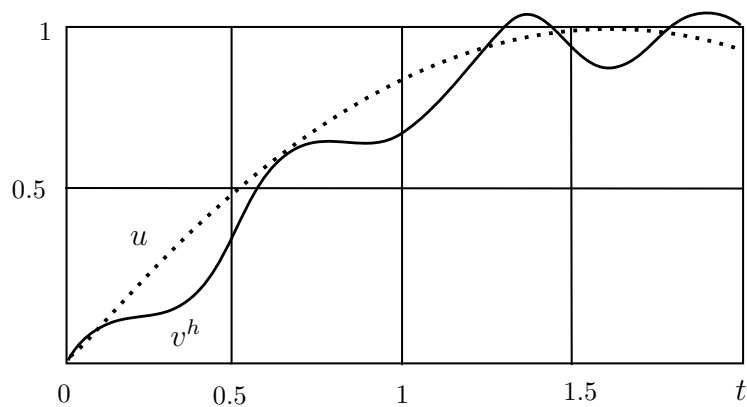
Здесь x_1 — криволинейная координата, определяющая положение точки, x_2 — скорость изменения координаты, $\eta = \eta(x_1)$ — гладкая функция (полагаем ее липшицевой функцией с постоянной Липшица $c[f]$), $\eta'(x_1)$ — производная функции $\eta(x_1)$ по x_1 , β — постоянный коэффициент. Примем, что время движения T задано. В моменты времени $t \in T$ измеряется (с ошибкой) состояние $x_2(t)$. Результаты измерения $\xi^h(t)$ имеют погрешность h :

$$|x_2(t) - \xi^h(t)| \leq h,$$

($|a|$ — модуль числа a). Требуется выписать уравнение непрерывного оценивания силы $u(t)$.

Согласно описанному выше правилу это уравнение имеет вид

$$\dot{w}_1^h(t) = w_2^h(t), \quad \dot{w}_2^h(t) = -\beta \eta'(w_1^h(t)) + v^h(t) + u^h(t), \quad (6.9)$$

Рис. 6.2. Результаты вычислений для $h = 10^{-3}$.Рис. 6.3. Результаты вычислений для $h = 10^{-2}$.

где

$$v^h(t) = \alpha^{-1}(\xi^h(t) - w_2^h(t)), \quad u^h(t) = c[f](\xi^h(t) - w_2^h(t)).$$

Для случая

$$\alpha = 0.1, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad T = 2, \quad \eta(x_2) = 0$$

системы (6.8) и (6.9) решались методом Эйлера с шагом 10^{-4} . Результаты показаны на рис. 6.2, 6.3 при $h = 10^{-3}$ и $h = 10^{-2}$ соответственно. Пунктирная линия отвечает возмущению $u(t)$, а сплошная — управлению $v^h(t)$.

7. О реконструкции входа на бесконечном промежутке времени

В настоящем разделе мы рассмотрим динамическую систему, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0. \quad (7.1)$$

Здесь $t \in T = [0, +\infty)$ — переменная времени, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^N$ — соответственно состояние системы и значение динамического возмущения в момент t ; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние системы; B — $n \times N$ -мерная матрица. Значения $u(t)$ возмущения заранее не заданы и подчинены априорному ограничению $u(t) \in P$ ($t \geq 0$), где P — заданное выпуклое, ограниченное и

замкнутое множество в \mathbb{R}^N . Всякую измеримую по Лебегу функцию $u(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto P$ будем называть *допустимым возмущением*.

Предположим, что в каждый момент времени t измеряется текущее состояние $x(t)$ системы (7.1). Результат $\xi(t)$ измерения, вообще говоря, неточен и удовлетворяет оценке

$$\int_0^{+\infty} |\xi(t) - x(t)|_n dt \leq d_* h, \quad (7.2)$$

где $h \in (0, 1)$ — малый параметр измерительной погрешности, $d_* = \text{const} > 0$. Наряду с условием (7.2) будем также считать выполненным условие

$$|\xi(0) - x_0|_n \leq h. \quad (7.3)$$

Обратим внимание на тот факт, что все описанные выше алгоритмы устойчивого динамического обращения рассчитаны на приближение возмущения на ограниченном отрезке времени $[0, \vartheta]$. С возрастанием длины ϑ этого отрезка происходит накопление вычислительных и измерительных ошибок, и при стремлении ϑ к бесконечности качество приближения бесконечно ухудшается. Качество приближения, о котором идет речь, оценивается двумя критериями — во-первых, величиной равномерного (на $[0, \vartheta]$) отклонения траекторий системы (7.1), отвечающих истинному возмущению $u(\cdot)$ и построенному приближению $v^h(\cdot)$ этого возмущения; во-вторых, разностью среднеквадратичных норм функций $v^h(\cdot)$ и $u(\cdot)$ (на $[0, \vartheta]$). Выбор этих двух критериев обусловлен тем, что малость их значений (для второго критерия — лишь в случае его положительности) влечет за собой близость приближения $v^h(\cdot)$ к возмущению $u(\cdot)$ в среднеквадратичной норме на отрезке $[0, \vartheta]$, если матрица B имеет ранг N . Бесконечное ухудшение качества приближения понимается как тот факт, что при $\vartheta \rightarrow +\infty$ значения обоих критериев могут стремиться к бесконечности.

Ниже мы опишем алгоритм устойчивого динамического обращения системы (7.1), свободный от этого недостатка; данное свойство алгоритма назовем *грубостью*.

Далее предполагаем выполненным следующее

Условие 7.1. Матрица A устойчива.

Как известно, при выполнении условия 7.1 существует симметричная положительно определенная $n \times n$ -матрица Q такая, что функция Ляпунова $V : x \mapsto V(x) = x'Dx$ (D — положительно определенная матрица) обладает свойством

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)' Ax + x'Qx = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Зафиксируем число $k > 0$ такое, что

$$x'Qx \geq k|x|_n^2 \quad (x \in \mathbb{R}^n). \quad (7.4)$$

Введем также систему

$$\dot{w}^h(t) = Aw^h(t) + Bv^h(t), \quad t \in T, \quad (7.5)$$

с начальным условием $w^h(0) = \xi(0)$ и управлением $v^h(\cdot) \in P(\cdot)$. Здесь символ $P(\cdot)$ означает множество измеримых (по Лебегу) функций $v(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow P$. Назовем систему (7.5) моделью.

Всякую суммируемую функцию $\xi(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ будем называть *допустимым измерением, имеющим точность h* ($h > 0$), если для $\xi(\cdot)$ справедливы оценки (7.2), (7.3), где $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$.

Будем считать, что фазовые состояния $w^h(t)$, $t \geq 0$, модели (7.5) наблюдаются точно и изменяются под воздействием значений целенаправленно формируемой обратной связи

$\mathcal{U}(w^h(t), \xi(t)) \in P$, “имитирующей” значения $u(t)$ ненаблюдаемого возмущения в системе (7.1). Движение модели (7.5) таким образом зависит от результатов $\xi(t)$ измерения траектории системы (7.1) и подчиняется следующим дифференциальному уравнению и начальному условию:

$$\dot{w}^h(t) = Aw^h(t) + B\mathcal{U}(w^h(t), \xi(t)), \quad w^h(0) = \xi(0). \quad (7.6)$$

Всякую непрерывную функцию $\mathcal{U}(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto P$ будем называть *допустимой обратной связью* (для модели (7.6)). Для любой допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$ и любого допустимого измерения $\xi(\cdot)$, очевидно, существует определенное на $[0, +\infty)$ решение $w^h(\cdot)$ задачи Коши (7.6), которое будем называть *траекторией модели*, соответствующей допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$ и допустимому измерению $\xi(\cdot)$.

Для любых допустимых возмущений $u(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$ ($v^h(\cdot)$ мыслится как построенное приближение ненаблюдаемого возмущения $u(\cdot)$) введем следующие два критерия отклонения $v^h(\cdot)$ от $u(\cdot)$ на каком-либо ограниченном отрезке времени $[0, \vartheta]$:

$$\omega_1(v^h(\cdot), u(\cdot)|\vartheta) = \max_{t \in [0, \vartheta]} \left| w^h(t; t_0, x_0, v^h(\cdot)) - x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) \right|_n, \quad (7.7)$$

$$\omega_2(v^h(\cdot), u(\cdot)|\vartheta) = \int_0^{\vartheta} |v^h(t)|_N^2 dt - \int_0^{\vartheta} |u(t)|_N^2 dt. \quad (7.8)$$

Здесь символы $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ и $w^h(\cdot; t_0, x_0, v^h(\cdot))$ означают решения системы (7.1) и модели (7.6), порождаемые входами $u(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$ соответственно.

Управляемым процессом, соответствующим допустимой обратной связи $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$, допустимому возмущению $u(\cdot)$ и измерительной точности h ($h > 0$) будем называть всякую четверку $(x(\cdot), \xi(\cdot), w^h(\cdot), v^h(\cdot))$, где $x(\cdot) = x^*(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение (траектория) системы (7.1), $\xi(\cdot)$ — допустимое измерение точности h , соответствующее $u(\cdot)$, $w^h(\cdot)$ — траектория модели (7.6), соответствующая $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$ и $\xi(\cdot)$, а функция $v^h(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow P$ имеет вид $v^h(t) = \mathcal{U}(w^h(t), \xi(t))$ ($t \geq 0$). Функцию $u(\cdot)$ (которая, очевидно, лежит в классе всех допустимых возмущений) будем при этом называть *реализацией* допустимой стратегии $\mathcal{U}(\cdot, \cdot)$, соответствующей допустимому возмущению $u(\cdot)$ и измерительной точности h . Последняя функция играет роль приближения возмущения $u(\cdot)$.

Инструментом решения рассматриваемой задачи является семейство $(\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot))_{h>0}$ допустимых обратных связей. Это семейство будем называть *грубо обращающим*, если найдутся такие функции $\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot) : (0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$, что а) $\gamma_1(h), \gamma_2(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и б) для всякого допустимого возмущения $u(\cdot)$, всякого $h > 0$ и всякой реализации $v^h(\cdot)$ допустимой обратной связи $\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot)$

$$v^h(t) = \mathcal{U}_h(w^h(t), \xi(t)) \quad (7.9)$$

($w^h(t) = w^h(t; t_0, x_0, v^h(\cdot))$ — траектория модели (7.6)), соответствующей возмущению $v^h(\cdot)$ вида (7.9), выполняются неравенства (см. (7.7), (7.8))

$$\sup_{\vartheta \geq 0} \omega_1(v^h(\cdot), u(\cdot)|\vartheta) \leq \gamma_1(h), \quad \sup_{\vartheta \geq 0} \omega_2(v^h(\cdot), u(\cdot)|\vartheta) \leq \gamma_2(h).$$

Пару $(\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot))$ будем при этом называть *векторной оценкой точности* семейства $(\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot))_{h>0}$. Рассматриваемая основная задача о грубом обращении системы (7.1) состоит в построении грубо обращающего семейства допустимых обратных связей.

Коротко остановимся на причинах, побудивших нас взять в качестве критериев отклонения $\bar{v}(\cdot)$ от $u(\cdot)$ на отрезке $[0, \vartheta]$ функции $\omega_1(\cdot)$ и $\omega_2(\cdot)$ видов (7.7) и (7.8) соответственно. Пусть $\Omega_{\vartheta}(x(\cdot))$ означает множество всех возмущений

$$v(\cdot) \in P_{\vartheta}(\cdot) = \left\{ v(\cdot) \in L_2([0, \vartheta]; \mathbb{R}^N) : v(t) \in P \text{ при п.в. } t \in [0, \vartheta] \right\},$$

порождающих траекторию $x(t)$, $t \in [0, \vartheta]$, системы (7.1), т. е.

$$\Omega_{\vartheta}(x(\cdot)) = \left\{ v(\cdot) \in P_{\vartheta}(\cdot) : x(t; t_0, x_0, v(\cdot)) = x(t), t \in [0, \vartheta] \right\}.$$

Обозначим символом $v_{\vartheta}(\cdot)$ минимальное (в смысле нормы пространства $L_2([0, \vartheta]; \mathbb{R}^N)$) возмущение из множества $\Omega_{\vartheta}(x(\cdot))$. В силу выпуклости и компактности множества P такое возмущение единственно. Пусть взяты последовательности чисел $\{h_j\}$, $h_j \rightarrow +0$ при $j \rightarrow +\infty$, $\{\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot)\} \in P_{\vartheta}(\cdot)$, $\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot)$ сходится слабо в $L_2([0, \vartheta]; \mathbb{R}^N)$ при $j \rightarrow +\infty$ к некоторому возмущению. Тогда, как следует из результатов [3], соотношения

$$\omega_1(\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot), v_{\vartheta}(\cdot)|\vartheta) \leq \gamma_1(h_j), \quad \omega_2(\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot), v_{\vartheta}(\cdot)|\vartheta) \leq \gamma_2(h_j)$$

влекут сильную сходимость $\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot)$ к $v_{\vartheta}(\cdot)$ в $L_2([0, \vartheta]; \mathbb{R}^N)$ при $j \rightarrow +\infty$. Если же матрица B имеет ранг N и $v(t) = B^{-1}(\dot{x}(t) - Ax(t)) \in P$, $t \in [0, \vartheta]$, то $\bar{v}_{\vartheta}^{h_j}(\cdot)$ сходится к истинному управлению $v_{\vartheta}(\cdot)$, действующему на систему (7.1).

Укажем алгоритм решения задачи. Зафиксируем положительную функцию $\alpha(\cdot)$ положительного аргумента. Для каждого $h > 0$, используя ранее введенную матрицу D , положим

$$\mathcal{U}_h(y, \xi) = \arg \min \left\{ 2(D(y - \xi))' B v + \alpha(h) |v|_N^2 : v \in P \right\} \quad (y, \xi \in \mathbb{R}^n). \quad (7.10)$$

Легко видеть, что $\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot)$ есть допустимая обратная связь. Имеет место

Лемма 7.1 [12]. Пусть выполнено условие 7.1, $h > 0$ и $(x(\cdot), \xi(\cdot), w^h(\cdot), v^h(\cdot))$ — управляемый процесс, соответствующий допустимой обратной связи $\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot)$, допустимому возмущению $u(\cdot)$ и измерительной точности h . Тогда при всех $t \geq 0$

$$\int_0^t |v^h(\tau)|_N^2 d\tau - \int_0^t |u(\tau)|_N^2 d\tau \leq \frac{|(\xi(0) - x_0)' D (\xi(0) - x_0)|_n + 2c_1 h}{\alpha(h)}, \quad (7.11)$$

$$|w^h(t) - x(t)|_n \leq \chi_2 \left[|(\xi(0) - x_0)' D (\xi(0) - x_0)|_n e^{-\chi_1 t} + 2c_1 \left(\frac{\alpha(h)}{\chi_1} + 2h \right) \right]^{1/2}, \quad (7.12)$$

где

$$c_1 = 2\|D\| \max\{|Bv|_n : v \in P\}, \quad \chi_1 = k\chi_2, \quad \chi_2 = \min_{|w|_n=1} |D^{-1}w|_n,$$

число k определено в (7.4).

З а м е ч а н и е 7.1. В случае, когда $h/\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и указанное выше измерение $\xi(\cdot)$ (соответствующее допустимому возмущению $v(\cdot)$) имеет точность h , т. е. выполняется неравенство $|\xi(0) - x_0|_n \leq h$, при малом h правые части неравенств (7.11) и (7.12) малы равномерно относительно $t \geq 0$. Следовательно, допустимая обратная связь $\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot)$ решает задачу о приближенном отслеживании управляемой моделью (7.6) неточно измеряемого движения системы (7.1) на полуинтервале времени $[0, +\infty)$ при том дополнительном условии, что на любом конечном отрезке времени $[0, t]$ среднеквадратичная норма управления $v^h(\cdot)$ модели (приближенно) не превосходит среднеквадратичной нормы действующего на систему не наблюдаемого возмущения $u(\cdot)$. Для ряда механических систем данная задача может иметь смысл задачи о приближенном устойчивом моделировании в темпе реального времени возмущенного движения системы с одновременной (приближенной) минимизацией энергетического расхода.

Из леммы 7.1 следует основное утверждение, доставляющее решение поставленной выше задачи о грубом обращении системы (7.1).

Теорема 7.1 [12]. Пусть $h/\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда семейство $(\mathcal{U}_h(\cdot, \cdot))_{h>0}$ допустимых обратных связей вида (7.10) является грубо обращающим, и пара $(\gamma_1(\cdot), \gamma_2(\cdot))$, где

$$\gamma_1(h) = \chi_2 \|D\|h + \chi_2 \left[\|D\|h^2 + 2c_1 \left(\frac{\alpha(h)}{\chi_1} + 2h \right) \right]^{1/2},$$

$$\gamma_2(h) = \frac{\|D\|^2 h^2 + 2c_1 h}{\alpha(h)} \quad (h > 0),$$

есть векторная оценка точности этого семейства.

В качестве модельного примера, иллюстрирующего описанный алгоритм, рассмотрим колебательное звено

$$\ddot{w}(t) + 2l\dot{w}(t) + \omega_0^2 w(t) = u(t), \quad t \in [0, +\infty); \quad (7.13)$$

$$l = \text{const} > 0, \quad \omega_0 \neq 0, \quad w(0) = w_0, \quad \dot{w}(0) = w_1.$$

Пусть $P = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq K\}$, где $K = \text{const}$. Полагая $x_1 = w$, $x_2 = \dot{w}$, мы приходим к системе вида (7.1)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\omega_0^2 x_1(t) - 2lx_2(t) + u(t).$$

Пусть матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 2l^2 + \omega_0^2 & l \\ l & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве модели (7.6) возьмем систему

$$\dot{w}_1^h(t) = w_2^h(t), \quad \dot{w}_2^h(t) = -\omega_0^2 w_1^h(t) - 2lw_2^h(t) + \mathcal{U}_h(t) \quad (7.14)$$

с начальным условием

$$w_1^h(0) = w_0, \quad w_2^h(0) = w_1.$$

При моделировании обе системы, (7.13) и (7.14), решались методом Эйлера с шагом δ . Векторы $\xi^h(\tau_i) = \{\xi_{1i}^h, \xi_{2i}^h\} \in \mathbb{R}^2$ вычислялись в моменты $\tau_i = \delta_i$ по формулам

$$\xi_{1i}^h = x_1(\tau_i) + h \sin(1 + C\tau_i), \quad \xi_{2i}^h = x_2(\tau_i) + h \sin(1 + C\tau_i).$$

Управление \mathcal{U}_h в системе (7.14) вычислялось по формуле (7.10), т. е. в моменты τ_i вычислялись величины

$$\mathcal{U}_h(w^h(\tau_i), \xi(\tau_i)) = \begin{cases} -K, & s_i \geq \alpha K, \\ s_i \alpha^{-1}, & -\alpha K \leq s_i \leq \alpha K, \\ K, & s_i \leq -\alpha K; \end{cases}$$

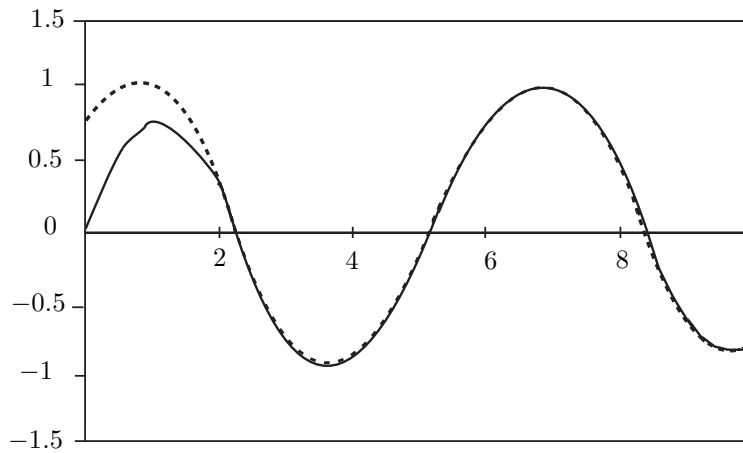
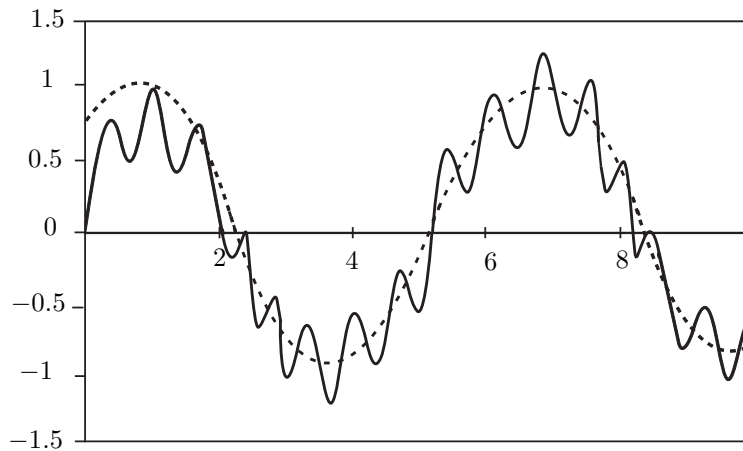
$$s_i = l(w_1^h(\tau_i) - \xi_{1i}) + (w_2^h(\tau_i) - \xi_{2i}).$$

Предполагалось

$$l = 0.2, \quad \omega_0 = 1, \quad K = 2, \quad C = 10, \quad \delta = 0.01, \quad \alpha = 0.5.$$

На рис. 7.1 и 7.2 представлена эволюция управлений $u(t) = \sin(1 + t)$ и $\mathcal{U}_h(w^h(t), \xi(t))$ при двух значениях параметра h .

Рис. 7.1 и 7.2 отвечают $h = 0.01$ и $h = 0.1$, соответственно. Сплошной линией изображено управление $u(t)$, пунктирной — управление $\mathcal{U}_h(w^h(t), \xi(t))$.

Рис. 7.1. Эволюция управлений при $h = 0.01$.Рис. 7.2. Эволюция управлений при $h = 0.1$.

8. Восстановление неизвестных характеристик биореактора с подпиткой

Содержательный пример, обсуждаемый в данном разделе, связан с работами [13; 14], в которых рассматривается задача оптимального планирования эксперимента при моделировании биореактора.

Пусть концентрация растворенного кислорода в подпитке соответствует уровню насыщения, т. е. она не подвергается воздействию бактерий, которые, по предположению, отсутствуют в подпитке. Потребление субстрата бактериями в реакторе является аэробным и непосредственно влияет на концентрацию растворенного кислорода в реакторе. Тогда следующая нелинейная динамическая модель описывает биохимические процессы в реакторе [13; 14]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_{DO}(t)}{dt} &= k_{La}(C_{sat}^{en} - C_{DO}(t)) - OUR(t) + \frac{F_{in}(t)}{V(t)}(C_{sat} - C_{DO}(t)), \\
 \frac{dC_X(t)}{dt} &= \mu(C_S(t))C_X(t) - \frac{F_{in}(t)}{V(t)}C_X(t), \\
 \frac{dC_S(t)}{dt} &= -\frac{\mu(C_S(t))}{Y}C_X(t) + \frac{F_{in}(t)}{V(t)}(C_{S,in}(t) - C_S(t)),
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

где

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^t F_{\text{in}}(\tau) d\tau + V(t_0), \\ \text{OUR}(t) &= \frac{(1-Y)}{Y} \mu(C_S(t)) C_X(t), \\ \mu(C_S(t)) &= \mu_{\text{max}}(t) \frac{C_S(t)}{K_S + C_S(t)}, \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \end{aligned}$$

Здесь и ниже k_{La} — коэффициент аэрирования, $V(t)$ — объем реактора, $C_{\text{sat}}^{\text{en}}$ — концентрация растворенного кислорода на уровне насыщения, включая малую (постоянную) коррекцию для эндогенного дыхания биомассы, C_{sat} — (нормальная) концентрация растворенного кислорода на уровне насыщения в подпитке, $\mu_{\text{max}}(t)$ — коэффициент максимальной скорости роста, K_S — постоянная полунасыщения, Y — коэффициент текучести биомассы на субстрате, $\text{OUR}(t)$ — скорость поглощения кислорода биомассой в реакторе, $C_{\text{DO}}(t)$ — концентрация растворенного кислорода в реакторе, $C_X(t)$ — концентрация биомассы, $C_S(t)$ — скорость роста биомассы. Заметим, что в (8.1) величина $\mu_{\text{max}}(t)$ является меняющимся во времени параметром. Чаще всего этот параметр меняется вследствие адаптации организмов, дополнительных ограничений на субстрат или в общем вследствие погрешностей кинетического моделирования.

Заметим, что первое уравнение в (8.1) описывает концентрацию растворенного кислорода в реакторе, причем первое слагаемое в правой части представляет естественное аэрирование, второе — поглощение кислорода аэробной биомассой и последнее — подпитку и разбавление растворенного кислорода. Второе уравнение в (8.1) описывает динамику биомассы; здесь первое слагаемое в правой части описывает рост биомассы, а последнее — разбавление. Это первое слагаемое, отвечающее за рост, с некоторым коэффициентом текучести (Y) также присутствует в третьем уравнении в (8.1), но в качестве слагаемого, характеризующего элемент поглощения в балансе субстрата.

Далее полагаем, что имеются *данные только по растворенному кислороду* и нет никакой информации ни по биомассе, ни по субстрату. Эти ограниченные информативные возможности являются причиной некорректности задачи восстановления коэффициента $\mu_{\text{max}}(\cdot)$ и состояний $C_X(\cdot)$, $C_S(\cdot)$. В дальнейшем основное внимание уделим одновременному оцениванию $\mu_{\text{max}}(\cdot)$, концентрации биомассы $C_X(\cdot)$ и скорости роста биомассы $C_S(\cdot)$ на основе неточных измерений концентрации растворенного кислорода $C_{\text{DO}}(t)$. Поэтому будем считать, что параметры $V(t_0)$, Y , K_S , $C_X(t_0)$, $C_S(t_0)$, $C_{\text{sat}}^{\text{en}}$, C_{sat} , k_{La} и функции $F_{\text{in}}(\cdot)$, $C_{S,\text{in}}(\cdot)$ либо уже оценены априори, либо взяты из литературы, имеющейся в достаточном количестве.

Рассматриваемая задача состоит в следующем. Известная функция (коэффициент) $\mu_{\text{max}}(\cdot)$ действует на систему (8.1), порождая некоторое (неизвестное) решение

$$C(t) = C(t; C_0, \mu_{\text{max}}) = (C_{\text{DO}}(t), C_X(t), C_S(t)),$$

где $C_0 = (C_{\text{DO}}(t_0), C_X(t_0), C_S(t_0))$ — начальное состояние системы, которое мы считаем известным. Промежуток времени T разбит на подинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\delta > 0$, $i \in [0 : m]$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$. В дискретные моменты времени τ_i координата $C_{\text{DO}}(\tau_i)$ измеряется с ошибкой, т. е. находятся числа ξ_i^h такие, что справедливы неравенства

$$|C_{\text{DO}}(\tau_i) - \xi_i^h| \leq h$$

для всех $i \in [1 : m]$. Здесь и всюду ниже символ $|x|$ означает абсолютную величину числа x . Требуется сконструировать алгоритм вычисления функций $v(\cdot) = v^h(\cdot)$ и $w^h(\cdot) = \{w_1^h(\cdot), w_2^h(\cdot)\}$, аппроксимирующих $\mu_{\text{max}}(\cdot)$ и $C_X(\cdot), C_S(\cdot)$ соответственно.

В дальнейшем полагаем известным число $K \in (0, +\infty)$ такое, что неизвестные функции $\mu_{\text{max}}(\cdot)$ и $\text{OUR}(\cdot)$ стеснены следующими ограничениями:

$$\text{OUR}(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}), \quad \mu_{\text{max}}(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}),$$

$$|\text{OUR}(t)| \leq K \quad \text{при п.в. } t \in T.$$

Будем считать выполненным

Условие 8.1. $b_0 \leq F_{\text{in}}(t) \leq b_1$ при почти всех $t \in T$, $0 \leq b_0 \leq b_1$,

$$Y \in (0, 1), \quad V(t) \geq V_0 > 0, \quad C_{\text{S,in}}(t) \in C^1(T; \mathbb{R}), \quad F_{\text{in}}(t) \in L_\infty(T; \mathbb{R}),$$

$$C_X(t) \geq C_X > 0, \quad C_S(t) \geq C_S > 0.$$

В дальнейшем полагаем функцию $V(t)$ известной.

Для решения задачи применим метод, развитый выше. Следуя этому методу, сначала выберем и зафиксируем семейство

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = t_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad (8.2)$$

$$\tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad m_h = (\vartheta - t_0)\delta^{-1}(h)$$

разбиений промежутка времени T с диаметрами

$$\delta(h) = \delta(\Delta_h), \quad \delta(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0.$$

Здесь h означает величину погрешности измерения. Затем введем вспомогательную систему M , функционирующую синхронно с реальной системой (8.1). В качестве M возьмем дискретную *линейную* систему вида

$$\begin{aligned} w_0^h(\tau_{i+1}) &= w_0^h(\tau_i) + \delta\{k_{\text{La}}(C_{\text{sat}}^{\text{en}} - \xi_i^h) - \varphi_i^h\} + \ln(V(\tau_{i+1})V^{-1}(\tau_i))(C_{\text{sat}} - \xi_i^h), \\ w_1^h(\tau_{i+1}) &= W(\tau_{i+1})C_X(t_0) + V^{-1}(\tau_{i+1})\delta \sum_{j=0}^i V(\tau_j)\psi_j^h, \\ w_2^h(\tau_{i+1}) &= W(\tau_{i+1})C_S(t_0) + C_{\text{S,in}}(\tau_{i+1}) - W(\tau_{i+1})C_{\text{S,in}}(t_0) \\ &\quad - V^{-1}(\tau_{i+1})\left[\sum_{j=0}^i (C_{\text{S,in}}(\tau_{j+1}) - C_{\text{S,in}}(\tau_j))V(\tau_j) + \delta Y^{-1} \sum_{j=0}^i V(\tau_j)\psi_j^h\right] \end{aligned} \quad (8.3)$$

с начальным условием

$$w_0^h(t_0) = \xi_0^h, \quad w_1^h(t_0) = C_X(t_0), \quad w_2^h(t_0) = C_S(t_0).$$

Здесь

$$\psi_i^h = Y\varphi_i^h(1 - Y)^{-1}, \quad \varphi_i^h = \varphi^h(\tau_i), \quad W(\tau_j) = V^{-1}(\tau_j)V(t_0).$$

Таким образом, модель M имеет в качестве входа управление $\varphi^h(\cdot)$, а в качестве выхода — траекторию $w^h(\cdot)$:

$$\varphi^h(t) = \varphi_i^h, \quad w^h(t) = \{w_0^h(t), w_1^h(t), w_2^h(t)\} = w^h(\tau_i), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где векторы $w^h(\tau_i)$ находятся по формулам (8.3), а закон определения чисел φ_i^h указан ниже.

Перейдем к описанию алгоритма. До момента t_0 фиксируются величина $h \in (0, 1)$, функция $\alpha = \alpha(h): (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R}: r > 0\}$, разбиение $\Delta = \Delta_h$ (8.2) с диаметром $\delta = \delta(\Delta_h)$ и модель (8.3). Затем организуется процесс управления по принципу обратной связи моделью M синхронно с развитием процесса функционирования системы (8.1). Работа алгоритма начинается в момент t_0 и разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. Во время i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются следующие операции. Сначала находится управление в модели

$$\varphi^h(t) = \varphi_i^h, \quad t \in \delta_i,$$

согласно принципу обратной связи

$$\varphi_i^h = \varphi_i^h(\xi_i^h, w_0^h(\tau_i)) = \begin{cases} -s_i \alpha^{-1}(h), & \text{если } |s_i| \leq \alpha(h)K, \\ -K \operatorname{sign} s_i & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$s_i = \xi_i^h - w_0^h(\tau_i).$$

Затем вычисляется фазовое состояние $w^h(\tau_{i+1})$ модели в момент τ_{i+1} согласно (8.3). После этого функция $v^h(\cdot)$ — приближение функции $\mu_{\max}(\cdot)$ — находится по правилу

$$v^h(t) = v_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где

$$v_i^h = v_i^h(\xi_i^h, \varphi_i^h, w^h(\tau_i)) = \frac{Y(K_S + w_2^h(\tau_i))\varphi_i^h}{(1 - Y)w_1^h(\tau_i)w_2^h(\tau_i)}.$$

Алгоритм заканчивает работу в момент ϑ .

Сходимость алгоритма устанавливается в теореме 8.1 (см. ниже). Введем

Условие 8.2. *Найдутся числа $w_1 > 0$ и $w_2 > 0$ такие, что для всех $h \in (0, 1)$ и $t \in T$ выполнены неравенства*

$$w_1^h(t) \geq w_1, \quad w_2^h(t) \geq w_2.$$

Итак, имеет место

Теорема 8.1 [15]. *Пусть выполнены условия 8.1, 8.2, а также условия согласования параметров алгоритма*

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad (h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Тогда имеют место сходимости

$$\sup_{t \in T} |w_1^h(t) - C_X(t)| \rightarrow 0, \quad \sup_{t \in T} |w_2^h(t) - C_S(t)| \rightarrow 0,$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(\tau) - \mu_{\max}(\tau)|^2 d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Описанный выше алгоритм был протестирован. Система (8.1) рассматривалась на промежутке времени $T = [0, 3]$. Коэффициент $\mu_{\max}(t)$ равнялся $\sin(t)$. Предполагалось, что мы не знаем $\mu_{\max}(t)$ и хотим его восстановить. Мы также рассчитываем восстановить состояния $C_X(t)$ и $C_S(t)$ по конечному числу измерений эволюции концентрации растворенного кислорода в реакторе $C_{DO}(t)$.

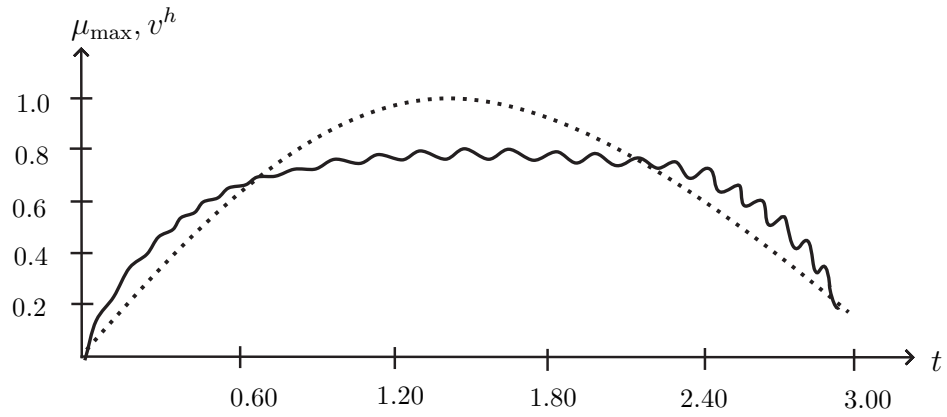
На рис. 8.1, 8.2 приведены результаты вычислительного эксперимента. Предполагалось (см. (8.1)), что

$$\begin{aligned} K_S &= 0.1, & Y &= 0.5, \\ C_{S,\text{in}} &= 0.2, & V(t_0) &= 1.5, \\ F_{\text{in}}(t) &= \sin(t), & C_{\text{sat}}^{\text{en}} &= C_{\text{sat}} = 0.5. \end{aligned}$$

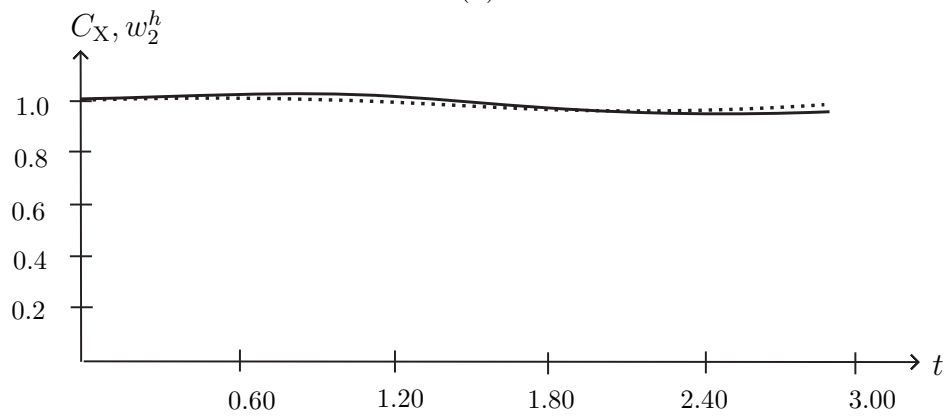
Были взяты следующие параметры алгоритма: $\alpha = 0.001$, $K = 2$. Начальное состояние системы полагалось равным единице, т. е. $C_{DO}(t_0) = C_X(t_0) = C_S(t_0) = 1$.

Система (8.1) решалась методом Эйлера с шагом δ . Результаты вычислительного эксперимента показывают сходимость в среднем квадратичном $v^h(\cdot)$ к $\mu_{\max}(\cdot)$ и равномерную сходимость $w_1^h(\cdot)$ к $C_X(\cdot)$ и $w_2^h(\cdot)$ к $C_S(\cdot)$ при соответствующих значениях параметров α , h и δ .

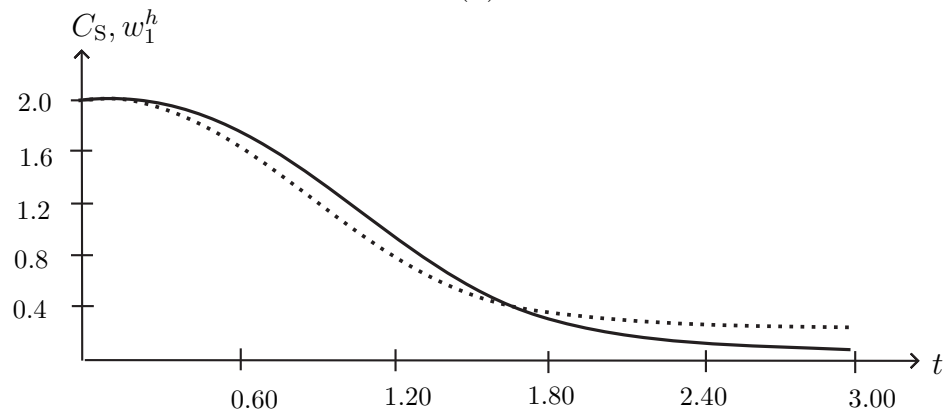
Рис. 8.1 отвечает случаю, когда $h = 10^{-4} \cos(50t)$, $\delta = 10^{-3}$, рис. 8.2 — случаю, когда $h = 0$, $\delta = 10^{-4}$. На рис. 8.1, 8.2 сплошная линия изображает коэффициент $\mu_{\max}(\cdot)$ и состояния $C_X(\cdot)$, $C_S(\cdot)$, пунктирная линия соответствует управлению в модели $v^h(\cdot)$ и координатам вспомогательной системы $w_1^h(\cdot)$ и $w_2^h(\cdot)$.



(a)

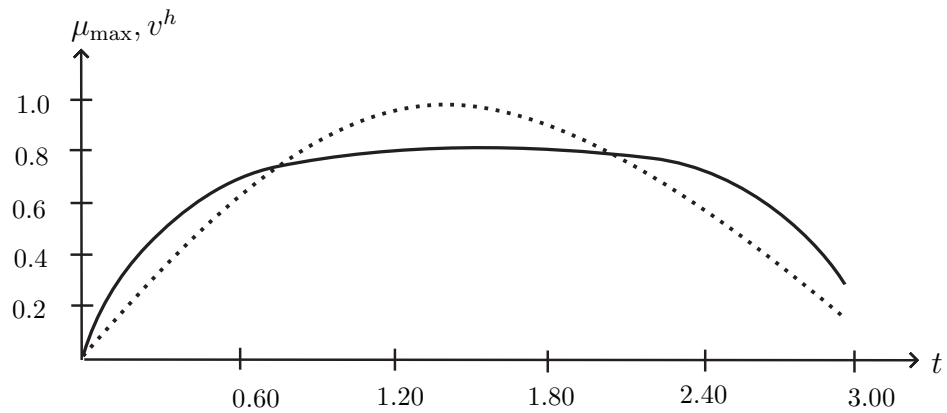


(b)

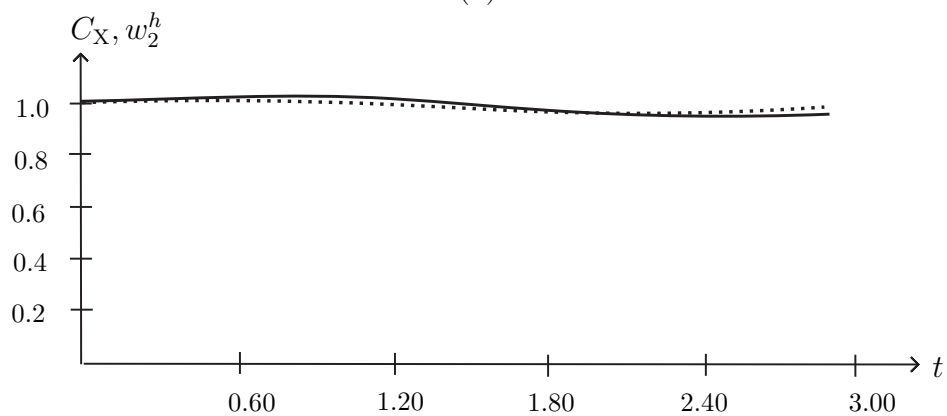


(c)

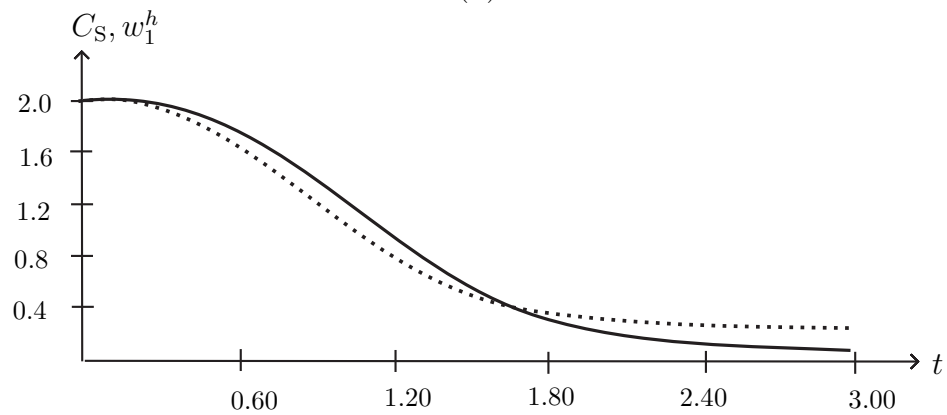
Рис. 8.1. Результаты вычислительного эксперимента, случай $h = 10^{-3} \cos(50t)$, $\delta = 10^{-3}$. Графики: (a) — коэффициент $\mu_{\max}(\cdot)$ и управление в модели $v^h(\cdot)$; (b) — состояние $C_X(\cdot)$ и координата вспомогательной системы $w_2^h(\cdot)$; (c) — состояние $C_S(\cdot)$ и координата вспомогательной системы $w_1^h(\cdot)$.



(a)



(b)



(c)

Рис. 8.2. Результаты вычислительного эксперимента, случай $h = 0$, $\delta = 10^{-4}$. Графики: (a) — коэффициент $\mu_{\max}(\cdot)$ и управление в модели $v^h(\cdot)$; (b) — состояние $C_X(\cdot)$ и координата вспомогательной системы $w_2^h(\cdot)$; (c) — состояние $C_S(\cdot)$ и координата вспомогательной системы $w_1^h(\cdot)$.

9. Заключение

Основная цель статьи — подведение некоторых итогов исследований, выполненных за последние десять лет и связанных с задачами динамического обращения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом мы не касались исследований предыдущих лет, которые отражены в обзорных работах [16; 17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–68.
4. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
5. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
6. **Максимов В.И.** Динамический метод невязки в задаче реконструкции входа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 297–307.
7. **Мартьянов А.С.** О реконструкции управлений по измерению части координат нелинейной динамической системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 4. С. 52–60.
8. **Близорукова М.С., Кодесс А.М.** К проблеме динамического восстановления управления при измерении части координат // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1450–1455.
9. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме реконструкции входных воздействий в линейных системах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 5. С. 11–20.
10. **Максимов В.И.** Уравнения непрерывного оценивания возмущений динамических систем // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 771–780.
11. **Осипов Ю.С.** Задачи динамического восстановления // Число и мысль. Вып. 10. М.: Знание, 1987. С. 7–27.
12. **Kryazimskii A.V., Maksimov V.I.** On rough inversion of a dynamical system with a disturbance // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2008. Vol. 16, no. 6. P. 287–600.
13. **Vanrolleghem P.A., Daele M. van.** Optimal experimental design for structure characterization of biodegradation models: On-line implementation in a respirographic biosensor // Water Science and Technology. 1994. Vol. 30, iss. 4. P. 243–253.
14. **Stigter J.D., Vries D., Keesman K.J.** On adaptive optimal input design // Proc. of the European Control Conference. Cambridge, U.K., 2003. Paper 066 (on CD-ROM).
15. **Keesman K.J., Maksimov V.I.** On feedback identification of unknown characteristics: a bioreactor case study // Int. J. Control. 2008. Vol. 81, no. 1. P. 134–145.
16. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
17. **Максимов В.И.** Реконструкция входов по измерению части координат // Современная математика и ее приложения. Оптимальное управление. Т. 97. М.: ВИНТИ, 2001. С. 91–110.

Поступила 1.06.2010

Осипов Юрий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, академик РАН
Президент РАН
Президиум РАН

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Кряжимский Аркадий Викторович
д-р физ.-мат. наук, академик РАН
главный науч. сотрудник
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA),
г. Лаксенбург, Австрия
e-mail: kryazhim@mi.ras.ru

УДК 517.977

ПРОСТРАНСТВО $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ С МЕТРИКОЙ ХАУСДОРФА — БЕБУТОВА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ¹

Е. А. Панасенко, Л. И. Родина, Е. Л. Тонков

Статья посвящена изучению пространства непустых замкнутых выпуклых (но не обязательно компактных) множеств в \mathbb{R}^n , динамической системы сдвигов и теорем существования решений дифференциальных включений. Такое пространство мы снабжаем метрикой Хаусдорфа — Бебутова, и тогда оно становится полным. Необходимость такого рассмотрения связана с рядом задач оптимального управления асимптотическими характеристиками управляемой системы. Например, задача $\dot{x} = A(t, u)x$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$, $\lambda_n(u(\cdot)) \rightarrow \min$, где $\lambda_n(u(\cdot))$ — старший показатель А.М. Ляпунова системы $\dot{x} = A(t, u)x$, приводит к дифференциальному включению с некомпактной правой частью.

Ключевые слова: метрика Хаусдорфа — Бебутова, управляемые системы, дифференциальные включения, динамическая система сдвигов.

E. A. Panasenکو, L. I. Rodina, E. L. Tonkov. The space $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ with the Hausdorff–Bebutov metric and differential inclusions.

The paper is devoted to studying the space of nonempty closed convex (but not necessarily compact) sets in \mathbb{R}^n , a dynamical system of translations, and existence theorems for differential inclusions. This space is made complete by equipping it with the Hausdorff–Bebutov metric. The investigation of these issues is important for certain problems of optimal control of asymptotic characteristics of the controlled system. For example, the problem $\dot{x} = A(t, u)x$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$, $\lambda_n(u(\cdot)) \rightarrow \min$, where $\lambda_n(u(\cdot))$ is the maximal Lyapunov exponent of the system $\dot{x} = A(t, u)x$, leads to a differential inclusion with a noncompact right-hand side.

Keywords: Hausdorff–Bebutov metric, control systems, differential inclusions, dynamical system of translations.

Введение

В этой статье рассматривается дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad (0.1)$$

правая часть которого имеет выпуклые замкнутые (но не обязательно компактные) образы при фиксированных (t, x) . В случае, когда правая часть включения (0.1) имеет компактные образы, обычно применяется пространство $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой dist или полуотклонениями (т.е. полуметриками) Хаусдорфа (см., например, [1]), что позволяет ввести в рассмотрение содержательные определения полунепрерывности сверху и снизу функции $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ со значениями в $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Для дифференциальных включений вида (0.1), ориентированных на применение к управляемым системам, требование компактности образов F может оказаться обременительным.

Конечно, поступая формально, мы можем сохранить метрику Хаусдорфа dist и в пространстве $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ непустых замкнутых (но не обязательно ограниченных) множеств. Но в этом случае мы вынуждены оперировать с множествами, которые могут находиться на бесконечном расстоянии друг от друга. Например, если $F(t, x)$ — полуось с началом в точке O , то расстояние dist между множествами $F(t, x)$ и $F(t_0, x_0)$ будет равно либо нулю, либо бесконечности,

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-97503), программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/9359), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2009–2013), госконтракт № П688 и программы исследований Президиума РАН “Математическая теория управления”.

и поэтому такие фундаментальные понятия, как непрерывность или полунепрерывность сверху или снизу в точке (t_0, x_0) в метрике Хаусдорфа теряют содержательный смысл. Поэтому приходится в пространстве $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ либо отказываться от метрики и вводить “правильную” топологию, либо строить “правильную” метрику. Здесь, продолжая исследования статьи [2], мы подробно изучаем пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа — Бебутова, состоящее из непустых выпуклых замкнутых множеств в \mathbb{R}^n . Отметим также, что в этой статье пространства $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ мы рассматриваем как отдельные объекты: пространство $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ снабжается метрикой Хаусдорфа dist , а пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ — метрикой Хаусдорфа — Бебутова Dist (и тогда метрика Хаусдорфа dist должна рассматриваться как *внутренняя* метрика по отношению к метрике Хаусдорфа — Бебутова Dist , а пространство $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ не рассматривается как подпространство в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$).

Отметим еще, что мы рассматриваем дифференциальное включение $\dot{x} \in F(h^t\sigma, x)$, правая часть которого принимает значения в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и параметризована с помощью топологической динамической системы (Σ, h^t) . Такая параметризация удобна в различных задачах, связанных с асимптотическим поведением решений управляемых систем, если рассматриваемое свойство предполагается выполненным равномерно относительно начального момента времени t_0 . Например, если $D_{t_0}(\vartheta)$ — множество управляемости системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U(t), \quad (0.2)$$

на отрезке времени $[t_0, t_0 + \vartheta]$, то локальная управляемость системы (0.2), равномерная относительно момента времени t_0 , означает существование независящих от t_0 констант $\vartheta > 0$, $\varepsilon > 0$ таких, что включение $O_\varepsilon \subseteq D_{t_0}(\vartheta)$ имеет место для всех t_0 , а это приводит к динамической системе сдвигов (Σ, h^t) и семейству дифференциальных включений $\dot{x} \in F(h^t\sigma, x)$, построенному с помощью системы (0.2).

1. Пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$

Пусть \mathbb{R}^n — стандартное евклидово пространство² размерности n со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$; $O_r(x_0) \doteq \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x_0| \leq r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$; расстояние между замкнутыми множествами A и B в \mathbb{R}^n обозначим $\varrho(A, B) \doteq \inf_{a \in A, b \in B} |a - b|$, если $A = \{a\}$, то $\varrho(a, B) \doteq \min_{b \in B} |a - b|$. Далее, если $A \subset \mathbb{R}^n$, то замыкание множества A относительно пространства \mathbb{R}^n будем обозначать $\text{cl } A$ или \bar{A} , а границу множества A — $\text{fr } A$.

Пространство непустых *выпуклых компактных* подмножеств в \mathbb{R}^n обозначим $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Определим в $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ метрику Хаусдорфа

$$\text{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}, \quad (1.1)$$

где $d(A, B) \doteq \max_{a \in A} \varrho(a, B)$ и $d(B, A) \doteq \max_{b \in B} \varrho(b, A)$ — *полуклонения* множества A от множества B и множества B от множества A соответственно. Пространство, состоящее из *выпуклых замкнутых* (необязательно ограниченных) подмножеств, будем обозначать $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Отметим теперь, что если множества A и B являются элементами пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, то расстояние (1.1) между ними может быть бесконечным. В таком случае метрика (1.1) допускает расширенное толкование и называется *бесконечной* метрикой.

Имеется простая связь между бесконечными и конечными метриками, а именно, метрическое пространство, в котором возможны бесконечные расстояния, канонически разбивается на подпространства с конечными расстояниями, которые отстоят друг от друга на бесконечное расстояние [1]. Для наших целей, заключающихся в исследовании управляемых процессов,

²Т. е. евклидово пространство с фиксированным ортонормированным базисом [3].

метрика в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с бесконечными значениями неудобна (и мало содержательна), и поэтому мы введем конечную метрику, которую называем [2] метрикой Хаусдорфа — Бебутова.

1.1. Полуотклонения и метрика Хаусдорфа. Пусть $F \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и f_0 — точка множества F , ближайшая к нулю пространства \mathbb{R}^n , тогда $|f_0| = \min_{f \in F} |f|$. Если, кроме того, задано множество $G \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $g_0 \in G$, где $|g_0| = \min_{g \in G} |g|$, то введем в рассмотрение компактные при каждом $r \in [0, \infty)$ множества

$$F_r = F \cap O_r(f_0), \quad G_r = G \cap O_r(g_0),$$

полуотклонения $d(F_r, G_r)$, $d(G_r, F_r)$, где

$$d(F_r, G_r) = \max_{f \in F_r} \varrho(f, G_r), \quad d(G_r, F_r) = \max_{g \in G_r} \varrho(g, F_r),$$

и метрику Хаусдорфа

$$\text{dist}(F_r, G_r) \doteq \max \left\{ d(F_r, G_r), d(G_r, F_r) \right\}. \quad (1.2)$$

Имеют место неравенства

$$d(F_r, G_r) \leq d(F_r, Q_r) + d(Q_r, G_r), \quad d(G_r, F_r) \leq d(G_r, Q_r) + d(Q_r, F_r),$$

легко доказываемые с помощью неравенства треугольника

$$|f - g| \leq |f - q| + |q - g|, \quad f \in F_r, \quad g \in G_r, \quad q \in Q_r.$$

Напомним также, что неравенство $d(F_r, G_r) \leq \varepsilon$ равносильно включению $F_r \subseteq G_r + O_\varepsilon(0)$.

1.2. Полуотклонения и метрика Хаусдорфа — Бебутова. Пусть $F, G \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, введем в рассмотрение два полуотклонения (две полуметрики)

$$D(F, G) = \sup_{r>0} \min \left\{ d(F_r, G_r), 1/r \right\}, \quad D(G, F) = \sup_{r>0} \min \left\{ d(G_r, F_r), 1/r \right\} \quad (1.3)$$

и расстояние

$$\text{Dist}(F, G) = \max \left\{ D(F, G), D(G, F) \right\}, \quad (1.4)$$

которое мы назовем метрикой Хаусдорфа — Бебутова. Из равенства (1.4) следует, что $\text{Dist}(F, G)$ задается равенством

$$\text{Dist}(F, G) = \sup_{r>0} \min \left\{ \text{dist}(F_r, G_r), 1/r \right\},$$

где $\text{dist}(F_r, G_r)$ — метрика Хаусдорфа (1.2). Следовательно, неравенство $\text{Dist}(F, G) \leq \varepsilon$ эквивалентно неравенству $\text{dist}(F_r, G_r) \leq \varepsilon$, выполненному при всех положительных r , удовлетворяющих неравенству $r \leq 1/\varepsilon$. Аналогично, неравенство $D(F, G) \leq \varepsilon$ эквивалентно неравенству $d(F_r, G_r) \leq \varepsilon$, выполненному при всех $r \leq 1/\varepsilon$.

Лемма 1. Для любых $F, G, Q \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ имеют место следующие свойства:

(1) $0 \leq D(F, G) < \infty$, и равенство $D(F, G) = 0$ выполнено в том и только в том случае, если $F \subseteq G$ и $f_0 = g_0$, где $|f_0| = \min_{f \in F} |f|$, $|g_0| = \min_{g \in G} |g|$.

(2) Имеют место неравенства треугольника

$$D(F, G) \leq D(F, Q) + D(Q, G), \quad D(G, F) \leq D(G, Q) + D(Q, F). \quad (1.5)$$

(3) $0 \leq \text{Dist}(F, G) = \text{Dist}(G, F) < \infty$, и равенство нулю $\text{Dist}(F, G) = 0$ выполнено в том и только в том случае, если $F = G$.

(4) *Имеет место неравенство треугольника*

$$\text{Dist}(F, G) \leq \text{Dist}(F, Q) + \text{Dist}(Q, G). \quad (1.6)$$

Доказательство. Из определения $D(F, G)$ непосредственно следует (см. (1.3)), что равенство $D(F, G) = 0$ выполнено в том и только том случае, если $d(F_r, G_r) = 0$ при всех $r \geq 0$. Следовательно, при всех $r \geq 0$ выполнено включение

$$F_r \doteq F \cap O_r(f_0) \subseteq G_r \doteq G \cap O_r(g_0).$$

Поэтому выполнены равенство $f_0 = g_0$ и включение $F \subseteq G$.

Докажем первое неравенство в (1.5). Обозначим $f = r^{-1}$, $a = d(F_r, G_r)$, $b = d(F_r, Q_r)$, $c = d(Q_r, G_r)$, зафиксируем $r > 0$ и покажем, что из неравенства треугольника $a \leq b + c$ следует неравенство

$$\min\{a, f\} \leq \min\{b, f\} + \min\{c, f\}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим возможные случаи. Предположим сначала, что $a \leq f$. Тогда, если $b \leq f$ и $c \leq f$, то несложно видеть, что неравенство (1.7) выполнено. Далее, если $f \leq b$ и $c \leq f$, то из неравенства $a \leq f$ следует неравенство $a < f + c$, и тем самым выполнено соотношение (1.7). Аналогично, если выполнены неравенства $b \leq f$ и $f \leq c$, то имеет место $a < b + f$ и, следовательно, (1.7). Несложно проверяется также, что из неравенств $f \leq b$ и $f \leq c$ следует неравенство (1.7).

Пусть далее выполнено неравенство $f \leq a$. Тогда, если $b \leq f$ и $c \leq f$, то из неравенства треугольника $a \leq b + c$ получаем оценки $f \leq a \leq b + c$ и, следовательно, неравенство (1.7). Если $f \leq b$ и $c \leq f$ или $b \leq f$ и $f \leq c$, то имеет место соотношение $f \leq f + c$ или $f \leq b + f$ соответственно, и, значит, неравенство (1.7) выполнено. При $f \leq b$, $f \leq c$ очевидно, что неравенство (1.7) также имеет место.

Таким образом, неравенство (1.7) выполнено при всех $r > 0$. Следовательно, имеет место соотношение $\sup_{r>0} \min\{a, f\} \leq \sup_{r>0} [\min\{b, f\} + \min\{c, f\}]$, которое в силу очевидного неравенства $\sup_{r>0} [\alpha(r) + \beta(r)] \leq \sup_{r>0} \alpha(r) + \sup_{r>0} \beta(r)$ эквивалентно соотношению

$$\sup_{r>0} \min\{a, f\} \leq \sup_{r>0} \min\{b, f\} + \sup_{r>0} \min\{c, f\}.$$

Доказательство неравенства (1.6) практически не отличается от доказательства неравенств (1.5). Другие утверждения леммы в доказательствах не нуждаются. \square

2. Основные свойства пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$

Покажем, что пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, снабженное метрикой Хаусдорфа — Бебутова, является полным пространством с топологией сходимости, равномерной на компактах.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$, где $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, сходится к множеству $F \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ в метрике Хаусдорфа — Бебутова, если для любого $\varepsilon > 0$, всех положительных r , не превосходящих $1/\varepsilon$, и всех достаточно больших индексов i имеют место неравенства $\text{dist}(F_r^i, F_r) \leq \varepsilon$. Такую сходимость будем называть также сходимостью, равномерной на компактах в \mathbb{R}^n .

Теорема 1. Пусть последовательность $\{F^i\}_{i=0}^\infty$ такова, что $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F) = 0$ обеспечивает равномерную на компактах в \mathbb{R}^n сходимость последовательности $\{F^i\}_{i=0}^\infty$ к множеству $F \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F) = 0$ эквивалентно совокупности неравенств $\text{Dist}(F^i, F) \leq \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Далее, мы уже отмечали, что неравенство $\text{Dist}(F^i, F) \leq \varepsilon_i$ эквивалентно двум неравенствам $D(F^i, F) \leq \varepsilon_i$, $D(F, F^i) \leq \varepsilon_i$, которые эквивалентны двум неравенствам $d(F_r^i, F_r) \leq \varepsilon_i$, $d(F_r, F_r^i) \leq \varepsilon_i$, выполненным при всех $r \leq 1/\varepsilon_i$ (здесь d — полуотклонения Хаусдорфа). В свою очередь неравенства $d(F_r^i, F_r) \leq \varepsilon_i$, $d(F_r, F_r^i) \leq \varepsilon_i$ эквивалентны двум включениям $F_r^i \subseteq F_r + O_{\varepsilon_i}(0)$, $F_r \subseteq F_r^i + O_{\varepsilon_i}(0)$, выполненным при всех $r \leq 1/\varepsilon_i$ и означающим в силу определения 1 сходимость, равномерную на компактах в \mathbb{R}^n . \square

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$, где $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, имеет *равномерный на компактах предел сверху* $F^* \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $r \in (0, 1/\varepsilon]$ и каждого достаточно большого индекса i имеют место два включения

$$f_0^i \in f_0^* + O_{\varepsilon}(0) \quad \text{и} \quad F_r^i \subseteq F_r^* + O_{\varepsilon}(0).$$

В свою очередь мы говорим, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$, где $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, имеет *равномерный на компактах предел снизу* $F_* \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, если для любых $\varepsilon > 0$, $r \in (0, 1/\varepsilon]$ и каждого достаточно большого i имеют место два включения

$$f_{*0} \in f_0^i + O_{\varepsilon}(0) \quad \text{и} \quad F_{*r} \subseteq F_r^i + O_{\varepsilon}(0).$$

Лемма 2. Пусть последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Тогда равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D(F^i, F^*) = 0,$$

где $F^* \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, обеспечивает равномерный на компактах предел сверху, а равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D(F_*, F^i) = 0,$$

где $F_* \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, обеспечивает равномерный на компактах предел снизу последовательности $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о практически не отличается от доказательства теоремы 1. Действительно, равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} D(F^i, F^*) = 0$ эквивалентно семейству неравенств $D(F^i, F^*) \leq \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$. В силу определения полуотклонения D (см. (1.3)) это неравенство эквивалентно при каждом i неравенству $d(F_r^i, F_r^*) \leq \varepsilon_i$, выполненному при $r \leq 1/\varepsilon_i$ (здесь d — полуотклонение Хаусдорфа). Следовательно,

$$F_r^i \subseteq F_r^* + O_{\varepsilon_i}(0), \quad f_0 \in f_0^* + O_{\varepsilon_i}(0),$$

что означает сходимость, равномерную на компактах в \mathbb{R}^n . Второе утверждение доказывается аналогично. \square

З а м е ч а н и е 1. Наряду с пространством $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, снабженным метрикой Хаусдорфа — Бебутова Dist , рассмотрим подпространство в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из непустых *выпуклых компактных* подмножеств в \mathbb{R}^n . Это подпространство мы снабдим метрикой Хаусдорфа dist и будем его обозначать $\text{convc}(\mathbb{R}^n)$. В таком случае метрика dist называется *внутренней* (см. [1]) по отношению к метрике Хаусдорфа — Бебутова Dist в пространстве $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Как хорошо известно [4, с. 148], подпространство $\text{convc}(\mathbb{R}^n)$ является *полным* метрическим пространством. Отметим еще, что в силу теоремы 1, спускаясь в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ к подпространству $\text{convc}(\mathbb{R}^n)$, мы можем, не оговаривая это особо, поменять метрику Хаусдорфа — Бебутова на метрику Хаусдорфа. Строгая формулировка этих рассуждений содержится в следующей лемме.

Лемма 3. Пусть последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ такова, что $F^i \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, множество F^i компактно при каждом i и для некоторого $r > 0$ множества F^i содержатся в шаре O_r при всех индексах i . Тогда, если для любого целого положительного m имеет место равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F^{i+m}) = 0, \quad (2.1)$$

то выполнено равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{dist}(F^i, F^{i+m}) = 0. \quad (2.2)$$

Справедливо и такое утверждение: если имеет место равенство (2.2) и для каждого индекса i множество F^i выпукло и компактно в \mathbb{R}^n , то имеет место равенство (2.1).

Доказательство. Из равенства (2.1) следуют неравенства $\text{Dist}(F^i, F^{i+m}) \leq \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, из которых в силу определения

$$\text{Dist}(F^i, F^{i+m}) \doteq \sup_{r>0} \min\{\text{dist}(F_r^i, F_r^{i+m}), 1/r\}$$

следуют соотношения $\min\{\text{dist}(F_r^i, F_r^{i+m}), 1/r\} \leq \varepsilon_i$, выполненные для всех $r > 0$. Отметим теперь, что в силу компактности множеств F^i и равномерной ограниченности последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ найдется такое число $r_0 \geq 0$, что для всех $r \geq r_0$ будут выполнены равенства $F_r^{i+m} = F^{i+m}$ и $F_r^i = F^i$. Следовательно, для всех $r \geq r_0$ и любых достаточно больших индексах i выполнены и неравенства $\min\{\text{dist}(F^i, F^{i+m}), 1/r\} \leq \varepsilon_i$.

Выберем теперь числовую последовательность $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ такую, что при всех достаточно больших индексах i выполнены неравенства $r_i \leq 1/\varepsilon_i$. Тогда из предыдущих рассуждений получаем неравенства $\text{dist}(F^i, F^{i+m}) \leq \varepsilon_i$. Мы показали, что имеет место равенство (2.2).

Пусть теперь выполнено (2.2). Тогда в силу полноты пространства $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ из равенства (2.2) следует, что существует компактное выпуклое множество F , являющееся пределом (в смысле метрики dist) последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$. Следовательно, равенство (2.2) эквивалентно равенству $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{dist}(F^i, F) = 0$. Обозначим через f_0 ближайшую к нулю пространства \mathbb{R}^n точку множества F . В силу выпуклости множества F имеем

$$|f_0^i - f_0| \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad |f_0^i - f_0^{i+m}| \leq |f_0^i - f_0| + |f_0 - f_0^{i+m}| \rightarrow 0.$$

Поэтому шары $O_r(f_0^i)$ и $O_r(f_0^{i+m})$ при больших индексах i мало отличаются друг от друга, а это означает, что выполнено неравенство

$$\text{dist}(O_r(f_0^i), O_r(f_0^{i+m})) \leq \varepsilon_i. \quad (2.3)$$

Покажем, что при больших i и всех $r > 0$ множества F_r^i и F_r^{i+m} тоже мало отличаются друг от друга, точнее, если выполнено неравенство (2.3) и неравенство $\text{dist}(F^i, F^{i+m}) \leq \varepsilon_i$, то для множеств F_r^i и F_r^{i+m} при больших i и всех $r > 0$ справедливо неравенство

$$\text{dist}(F_r^i, F_r^{i+m}) < \sqrt{2} \varepsilon_i. \quad (2.4)$$

Отметим, что при $r \geq r_0$ выполнены равенства $F_r^{i+m} = F^{i+m}$ и $F_r^i = F^i$, поэтому неравенство (2.4) следует из неравенства $\text{dist}(F^i, F^{i+m}) \leq \varepsilon_i$. Пусть множества F_r^i и F^i не совпадают (случай, когда F_r^{i+m} и F^{i+m} не совпадают, рассматривается аналогично). Тогда граница множества F^i пересекается со сферой $S_r(f_0^i)$ радиуса r с центром в точке f_0^i ; следовательно, граница $\text{fr}(F^i + O_{\varepsilon_i}(0))$ множества $F^i + O_{\varepsilon_i}(0)$ пересекается со сферой $S_{r+\varepsilon_i}(f_0^i)$. Обозначим буквой a одну из точек, получившихся в пересечении множеств $\text{fr}(F^i + O_{\varepsilon_i}(0))$ и $S_{r+\varepsilon_i}(f_0^i)$. Поскольку множества F^i и $O_r(f_0^i)$ выпуклые, то существуют единственная точка $b \in F^i$, ближайшая к точке a , и единственная точка $d \in O_r(f_0^i)$, ближайшая к точке a , причем $|a - b| = |a - d| = \varepsilon_i$. Построим плоскость (размерности 2), проходящую через точки a, b, d , и обозначим буквой c

точку пересечения данной плоскости с множеством $\text{fr } F^i \cap S_r(f_0^i)$, ближайшую к точке a . Таким образом, мы построили плоский четырехугольник с вершинами в точках a, b, c, d .

Поскольку множество $O_r(f_0^i)$ строго выпукло, то $\angle adc$ тупой. Из выпуклости множества F^i следует, что $\angle abc$ может быть либо прямым, либо тупым, а также то, что $\angle bcd$ тупой. Следовательно, оставшийся угол $\angle bad$ данного четырехугольника острый. Поскольку $\angle bcd$ тупой, то точка c находится внутри полукруга, построенного на диаметре bd ; поскольку $\angle bad$ острый, то расстояние $|b - d| < \sqrt{2}\varepsilon_i$, и несложно посчитать, что $|a - c| < \sqrt{2}\varepsilon_i$. Из последнего неравенства, неравенств (2.3) и $\text{dist}(F^i, F^{i+m}) \leq \varepsilon_i$ следует включение $F_r^{i+m} \subset F_r^i + O_{\sqrt{2}\varepsilon_i}(0)$. Аналогично можно показать, что имеет место включение $F_r^i \subset F_r^{i+m} + O_{\sqrt{2}\varepsilon_i}(0)$, тогда два последних включения равносильны неравенству (2.4).

Таким образом, мы показали, что при всех $r > 0$ и всех достаточно больших индексах i выполнено неравенство (2.4), из которого следуют неравенство $\text{Dist}(F^i, F^{i+m}) < \sqrt{2}\varepsilon_i$ и равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F^{i+m}) = 0$. \square

В нижеследующей теореме доказывается, что пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, как и пространства $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ и $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, тоже полное.

Теорема 2. *Пространство $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ является полным в метрике Хаусдорфа — Бебутова, определенной равенствами (1.3), (1.4).*

Доказательство. Прежде всего отметим, что полнота пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ означает, что каждая последовательность Коши сходится в этом пространстве. Напомним, что последовательность $\{F^i\}_{i=0}^{\infty}$ элементов F^i пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, снабженного метрикой Хаусдорфа — Бебутова Dist , называется последовательностью Коши, если имеет место равенство

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F^j) = 0. \quad (2.5)$$

Пусть $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность элементов F^i пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая равенству (2.5). Покажем тогда, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ имеет предел $F \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Действительно, это равенство означает в силу определения метрики Dist , что для любого $\varepsilon > 0$ и любых достаточно больших индексов i, j выполнены неравенства

$$\text{Dist}(F^i, F^j) = \sup_{r > 0} \min\{\text{dist}(F_r^i, F_r^j), 1/r\} \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $\min\{\text{dist}(F_r^i, F_r^j), 1/r\} = \text{dist}(F_r^i, F_r^j) \leq \varepsilon$ для всех $r \in [0, 1/\varepsilon]$. Это означает, что для всякого целого положительного k , любых достаточно больших индексов i, j и всех положительных $r \leq k$ выполнены неравенства

$$\text{dist}(F_r^i, F_r^j) \leq 1/k. \quad (2.6)$$

Вспомним теперь, что неравенства (2.6) при любых фиксированных i, j в свою очередь эквивалентны двум неравенствам

$$d(F_r^i, F_r^j) \leq 1/k, \quad d(F_r^j, F_r^i) \leq 1/k,$$

которые равносильны вложениям

$$F_r^i \subseteq F_r^j + O_\varepsilon(0), \quad F_r^j \subseteq F_r^i + O_\varepsilon(0), \quad r \leq k, \quad \varepsilon = 1/k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Положим $r = m \leq k$, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 1/k$, где $k = 1, 2, \dots$. Тогда при каждом целом положительном m множество F_m^i компактно и выпукло, и из двух неравенств $d(F_m^i, F_m^j) \leq \varepsilon$, $d(F_m^j, F_m^i) \leq \varepsilon$ следует, что последовательность $\{F_m^i\}_{i=0}^{\infty}$ является последовательностью Коши относительно метрики Хаусдорфа dist .

В силу [4, с. 148] при каждом целом $m \leq k$ существует компактное выпуклое множество F_m такое, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{dist}(F_m^i, F_m) = 0$. Кроме того, при всех целых $m \geq 1$ имеет место вложение $F_m \subseteq F_{m+1}$, причем либо найдется такое число m_0 , что равенство $F_m = F_{m+1}$ выполнено для всех $m \geq m_0$ (тогда определим множество $F \doteq \bigcup_{m=0}^{m_0} F_m$), либо такого m_0 не существует (тогда положим $F \doteq \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m$). Во втором случае в силу специфики F_m равенство $\text{dist}(F_m, F_{m+1}) = 1$ выполнено при всех целых m . Отметим также, что множество F_m имеет вид $F_m = F \cap O_m(f_0)$, где f_0 — точка множества F , ближайшая к нулю пространства \mathbb{R}^n .

Множество $F \doteq \bigcup_{m=0}^{m_0} F_m$ замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств.

Покажем, что множество $F = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m$ также замкнуто как множество, состоящее из объединения замкнутых вложенных множеств F_m , отстоящих друг от друга на расстоянии, не меньшем единицы. Предположим, что это неверно, тогда существует сходящаяся последовательность точек $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, $p_i \in F$, такая, что $p_i \rightarrow p$ и $p \notin F$. Обозначим через m_1 наименьшее целое число, ограничивающее последовательность $\{|p_i|\}_{i=1}^{\infty}$, тогда все точки последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержатся в множестве $F_{m_1} = F \cap O_{m_1}(f_0)$, а точка p этому множеству не принадлежит. Получили противоречие с тем, что множество F_{m_1} замкнуто. Множество F также является выпуклым как объединение расширяющегося семейства выпуклых множеств, см. [4, с. 8].

Множество F состоит из таких и только таких точек f , что для любого $\varepsilon > 0$ замкнутый шар $O_\varepsilon(f)$ имеет непустое пересечение с множеством F^i при всех достаточно больших индексах i и, следовательно, в силу построения множества F для последовательности $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ предел $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^i, F)$ равен нулю. Таким образом, полнота пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ доказана. \square

3. Топологические динамические системы

3.1. Общие понятия. В этом разделе мы напоминаем некоторые сведения из теории топологических динамических систем, необходимые для дальнейшего.

Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t) . В нашем случае это означает, что Σ — полное метрическое (с метрикой ρ_Σ) пространство и при каждом t задана однопараметрическая группа h^t преобразований пространства Σ в себя (т. е. при всех $t, s \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $h^{t+s} = h^t \circ h^s$), удовлетворяющая начальному условию $h^t \sigma|_{t=0} = \sigma$ и непрерывная по совокупности переменных (t, σ) на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$, см., например, [5, гл. 5; 6, с. 204–227; 7].

Напомним, что пространство Σ называется *фазовым пространством* динамической системы (Σ, h^t) , функция $t \rightarrow h^t \sigma$ — *движением* точки σ , функция $h^t: \Sigma \rightarrow \Sigma$ — *потоком* на фазовом пространстве Σ , а

$$\text{orb}(\sigma) \doteq \{h^t \sigma: t \in \mathbb{R}\} \quad \text{и} \quad \text{orb}_+(\sigma) \doteq \{h^t \sigma: t \geq 0\}$$

— *траекторией* и *положительной полутраекторией* точки σ . Напомним еще, что пространство Σ называется *локально компактным*, если для любой точки $\sigma_0 \in \Sigma$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что замкнутое множество $O_\varepsilon(\sigma_0) \doteq \{\sigma \in \Sigma: \rho_\Sigma(\sigma, \sigma_0) \leq \varepsilon\}$ компактно в Σ .

3.2. Динамическая система сдвигов. Заслуживающими особого внимания объектами в нашей статье являются управляемая система, дифференциальное включение и так называемая *динамическая система сдвигов* [5, гл. 6]. Динамическая система сдвигов возникает естественным образом в тех случаях, когда мы изучаем асимптотические свойства решений нестационарного дифференциального включения, равномерные относительно начального момента времени [2; 8; 9]. Обсудим процесс построения динамической системы сдвигов по заданному дифференциальному включению по возможности подробно.

Пусть заданы две функции $G: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $N: \mathbb{R} \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и задача

$$\dot{x} \in G(t, x), \quad x \in N(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

о существовании решений дифференциального включения, не выходящих при всех t из заданного множества $N(t)$. Введем в рассмотрение функцию

$$(t, x) \rightarrow \mathcal{S}(t, x) \doteq (G(t, x), N(t)) \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n) \times \text{clcv}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда $\text{Dist}(\mathcal{S}^1(t, x), \mathcal{S}^2(t, x)) \doteq \sup_{r>0} \min \{ \text{dist}(G_r^1(t, x), G_r^2(t, x)) + \text{dist}(N_r^1(t), N_r^2(t)), 1/r \}$ и

$$|\mathcal{S}(t, x)| \doteq \text{Dist}(\mathcal{S}(t, x), \{0\}) \leq \frac{\sqrt{|f_0(t, x)|^2 + 4} + |f_0(t, x)|}{2},$$

где $f_0(t, x)$ — точка множества $\mathcal{S}(t, x)$, ближайшая к нулю пространства \mathbb{R}^{2n} . Построим теперь множество функций $\Sigma \doteq \text{cl} \{ (t, x) \rightarrow \mathcal{S}_\tau(t, x) : \tau \in \mathbb{R} \}$, где $\mathcal{S}_\tau(t, x) = \mathcal{S}(t + \tau, x)$, а замыкание cl берется по метрике, которую мы будем называть метрикой Бебутова [10]:

$$\rho_\Sigma(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2) = \sup_{a>0} \min \left\{ \max_{|t|+|x| \leq a} \text{Dist}(\mathcal{S}^1(t, x), \mathcal{S}^2(t, x)), \frac{1}{a} \right\}, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{S}^i = (G^i, N^i) \in \Sigma$. Наша задача состоит в том, чтобы доказать, что при определенных условиях пространство Σ компактно и на пространстве Σ действует однопараметрическая группа преобразований h^τ пространства Σ в себя, удовлетворяющая всем аксиомам динамической системы. Введем в рассмотрение следующее условие.

У с л о в и е 1. Функция $t \rightarrow f_0(t, x)$, где $f_0(t, x) \doteq \left\{ f_0 \in \mathcal{S}(t, x) : |f_0| = \min_{f \in \mathcal{S}(t, x)} |f| \right\}$, ограничена на \mathbb{R} при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ и равномерно непрерывна на \mathbb{R} равномерно относительно x на компактах в \mathbb{R}^n , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и каждого компакта K найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что неравенство $|f_0(t + \tau, x) - f_0(t, x)| \leq \varepsilon$ выполнено при $\tau \in [-\delta, \delta]$, $t \in \mathbb{R}$ и $x \in K$.

Лемма 4. *Предположим, что выполнено условие 1. Тогда пространство Σ компактно. Сходимость последовательности $\{\mathcal{S}^i\}_{i=1}^\infty$, $\mathcal{S}^i \in \Sigma$, к точке $\widehat{\mathcal{S}} \in \Sigma$ эквивалентна сходимости, равномерной на компактах в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Это означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ и всех точек $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $|t| + |x| \leq a$, где $a \leq 1/\varepsilon$, найдется такой индекс $i_0 = i_0(\varepsilon)$, что для каждого $i \geq i_0$ выполнено неравенство*

$$\text{Dist}(\mathcal{S}^i(t, x), \widehat{\mathcal{S}}(t, x)) \leq \varepsilon. \quad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что сходимость последовательности $\{\mathcal{S}^i\}_{i=1}^\infty$ к точке $\widehat{\mathcal{S}} \in \Sigma$ в метрике Бебутова ρ_Σ эквивалентна сходимости, равномерной на компактах. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $i_0 = i_0(\varepsilon)$, что $\rho_\Sigma(\mathcal{S}^i, \widehat{\mathcal{S}}) \leq \varepsilon$ при всех $i \geq i_0$. Тогда для всех $a > 0$ и всех $i \geq i_0$ выполнено неравенство

$$\min \left\{ \max_{|t|+|x| \leq a} \text{Dist}(\mathcal{S}^i(t, x), \widehat{\mathcal{S}}(t, x)), \frac{1}{a} \right\} \leq \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $|t| + |x| \leq a$ таких, что $a \leq 1/\varepsilon$, неравенство (3.2) выполнено для каждого $i \geq i_0$. Верно и обратное: если для всех $|t| + |x| \leq a$, $a \leq 1/\varepsilon$, неравенство (3.2) выполнено для каждого $i \geq i_0$, то $\rho_\Sigma(\mathcal{S}^i, \widehat{\mathcal{S}}) \leq \varepsilon$ при всех $i \geq i_0$.

Докажем, что пространство Σ компактно. Пусть последовательность $\{\mathcal{S}^i\}_{i=1}^\infty$ такова, что $\mathcal{S}^i \in \Sigma$. Тогда для каждого $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$, найдется момент времени $\tau_i \in \mathbb{R}$ такой, что $\rho_\Sigma(\mathcal{S}^i, \mathcal{S}_{\tau_i}) \leq \varepsilon_i$. Равномерная непрерывность функции $t \rightarrow f_0(t, x)$ (на числовой прямой равномерно относительно x на компактах в \mathbb{R}^n) означает равномерную непрерывность функции

$t \rightarrow \mathcal{S}(t, x)$ (на числовой прямой равномерно относительно x на компактах в \mathbb{R}^n), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и каждого компакта K в \mathbb{R}^n найдется такая константа $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что неравенство

$$\text{Dist}(\mathcal{S}_{\tau_i}(t, x), \mathcal{S}_{\tau_i+s}(t, x)) \leq \varepsilon$$

выполнено при каждом $s \in [-\delta, \delta]$, всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in K$. Отметим, что последнее неравенство равносильно неравенству $\text{Dist}(\mathcal{S}_{\tau_i}(t, x), \mathcal{S}_{\tau_i}(t+s, x)) \leq \varepsilon$, из которого следует равностепенная непрерывность последовательности $\{\mathcal{S}_{\tau_i}(t, x)\}_{i=1}^{\infty}$ по t (также равномерно относительно x на компактах в \mathbb{R}^n). Далее, так как функция $t \rightarrow |\mathcal{S}(t, x)|$ ограничена на \mathbb{R} при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ (в силу условия 1), то последовательность $\{\mathcal{S}_{\tau_i}\}$ также равномерно ограничена. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность $\{\widehat{\mathcal{S}}_{\tau_i}\}$, сходящуюся равномерно на компактах к некоторой функции $\widehat{\mathcal{S}} \in \Sigma$. Обозначим через $\{\widehat{\mathcal{S}}^i\}$ подпоследовательность $\{\mathcal{S}^i\}$ такую, что $\rho_{\Sigma}(\widehat{\mathcal{S}}^i, \widehat{\mathcal{S}}_{\tau_i}) \leq \varepsilon_i$. Тогда $\rho_{\Sigma}(\widehat{\mathcal{S}}^i, \widehat{\mathcal{S}}) \rightarrow 0$, т. е. из любой последовательности $\{\mathcal{S}^i\}$, $\mathcal{S}^i \in \Sigma$, можно выделить подпоследовательность $\{\widehat{\mathcal{S}}^i\}$, сходящуюся к функции $\widehat{\mathcal{S}} \in \Sigma$. \square

Переобозначим элементы пространства Σ буквами $\sigma \in \Sigma$ (таким образом, $\sigma \in \Sigma$ в том и только в том случае, если $\sigma = \widehat{\mathcal{S}}$, где $\widehat{\mathcal{S}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{\tau_i}$) и введем в рассмотрение однопараметрическую группу $h^{\tau}: \Sigma \rightarrow \Sigma$, определенную равенством $h^{\tau}\sigma = \sigma_{\tau}$.

Лемма 5. *Функция $(\tau, \sigma) \rightarrow h^{\tau}\sigma$ непрерывна по совокупности переменных (τ, σ) на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$ равномерно относительно τ на любом отрезке времени. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $T > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$, что для всех $\sigma, \widehat{\sigma} \in \Sigma$ таких, что $\rho_{\Sigma}(\sigma, \widehat{\sigma}) \leq \delta$, и всех $\tau \in [-T, T]$ имеет место неравенство $\max_{|\tau| \leq T} \rho_{\Sigma}(h^{\tau}\sigma, h^{\tau}\widehat{\sigma}) \leq \varepsilon$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы последовательности $\{t_i\}$ и $\{\sigma^i\}$, $\sigma^i \in \Sigma$, такие, что $t_i \rightarrow t_0$ и $\rho_{\Sigma}(\sigma^i, \widehat{\sigma}) \rightarrow 0$. Надо доказать, что $\rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma^i, h^{t_0}\widehat{\sigma}) \rightarrow 0$. В силу леммы 4 из равенства $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{\Sigma}(\sigma^i, \widehat{\sigma}) = 0$ следует, что последовательность $\{\sigma^i\}$, где $\sigma^i = \mathcal{S}^i(t, x)$, сходится к $\widehat{\sigma} = \widehat{\mathcal{S}}(t, x)$ равномерно на каждом компакте в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Следовательно, для $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется такой номер i_1 , что для любых $i \geq i_1$, для всех $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ таких, что $|s| + |x| \leq a$ и $a \leq 2/\varepsilon$, выполнено неравенство $\text{Dist}(\mathcal{S}^i(s+t_0, x), \widehat{\mathcal{S}}(s+t_0, x)) \leq \varepsilon/2$. В силу равномерной непрерывности функции $t \rightarrow \mathcal{S}(t, x)$ на прямой \mathbb{R} равномерно относительно x на компактах в \mathbb{R}^n для любого $\varepsilon > 0$ и компакта $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq a\}$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что неравенство

$$\text{Dist}(\mathcal{S}_t(s, x), \mathcal{S}_{t_0}(s, x)) \leq \varepsilon/2$$

выполнено при всех $|t - t_0| \leq \delta$, всех $s \in \mathbb{R}$, $|x| \leq a$. Выберем такое i_2 , что $|t_i - t_0| \leq \delta$ при $i \geq i_2$. Пусть $i_0 = \max\{i_1, i_2\}$, тогда для всех $i \geq i_0$ и всех $(s, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ таких, что $|s| + |x| \leq a$, $a \leq 1/\varepsilon$, справедливы неравенства

$$\text{Dist}(\mathcal{S}_{t_i}^i(s, x), \widehat{\mathcal{S}}_{t_0}(s, x)) \leq \text{Dist}(\mathcal{S}_{t_i}^i(s, x), \mathcal{S}_{t_0}^i(s, x)) + \text{Dist}(\mathcal{S}_{t_0}^i(s, x), \widehat{\mathcal{S}}_{t_0}(s, x)) \leq \varepsilon,$$

следовательно, если $t^i \rightarrow t_0$ и $\rho_{\Sigma}(\sigma^i, \widehat{\sigma}) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma^i, h^{t_0}\widehat{\sigma}) = 0$.

Покажем, что движение $\tau \rightarrow h^{\tau}\sigma$ непрерывно зависит от начальной точки. Предположим, что это неверно, тогда найдутся число $\alpha > 0$, последовательность $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов пространства Σ , $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i = \sigma$, и соответствующая числовая последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, $|t_i| \leq T$, такая, что $\rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma, h^{t_i}\sigma_i) > \alpha > 0$. По теореме Вейерштрасса из последовательности $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (которую снова обозначим $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$), $\lim_{n \rightarrow \infty} t_i = t_0$, $|t_0| \leq T$. По свойствам метрического пространства имеем

$$\rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma, h^{t_i}\sigma_i) \leq \rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma, h^{t_0}\sigma) + \rho_{\Sigma}(h^{t_0}\sigma, h^{t_i}\sigma_i).$$

Из непрерывности функции $(t, \sigma) \rightarrow h^t \sigma$ следует, что расстояния в правой части последнего неравенства при достаточно больших индексах i можно сделать меньше константы $\alpha/2$, и мы приходим к противоречию: $\alpha < \alpha$. \square

В силу лемм 4 и 5 пара (Σ, h^t) образует топологическую динамическую систему, которая называется динамической системой сдвигов. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнено условие 1. Тогда пара (Σ, h^t) , образованная семейством дифференциальных включений

$$\dot{x} \in \widehat{G}(t, x), \quad x(t) \in \widehat{N}(t), \quad (3.3)$$

и группой $h^t \widehat{S} \doteq \widehat{S}_t$, где $\widehat{S}(t, x) \doteq (\widehat{G}(t, x), \widehat{N}(t))$, образует динамическую систему сдвигов. \square

3.3. Полезная параметризация семейства дифференциальных включений. Рассмотренная в теореме 3 динамическая система сдвигов может быть параметризована следующим образом. Пусть задана удовлетворяющая условию 1 функция

$$(\tau, x) \rightarrow \mathcal{S}(\tau, x) \doteq (G(\tau, x), N(\tau)) \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n) \times \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$$

переменных $(\tau, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, по которой, как и раньше, строится множество функций

$$\Sigma \doteq \text{cl}\{(\tau, x) \rightarrow \mathcal{S}_t(\tau, x) : t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{где} \quad \mathcal{S}_t(\tau, x) = \mathcal{S}(\tau + t, x),$$

а замыкание cl берется по метрике (3.1). Пусть $\sigma = \widehat{S} \doteq (\widehat{G}, \widehat{N})$, где $\widehat{S}(\tau, x) \doteq (\widehat{G}(\tau, x), \widehat{N}(\tau))$, $h^t: \Sigma \rightarrow \Sigma$, $h^t \sigma \doteq h^t \widehat{S} = \widehat{S}_t$. Введем в рассмотрение две функции

$$F: \Sigma \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad M: \Sigma \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n),$$

определенные равенствами $F(\sigma, x) \doteq \widehat{G}(0, x)$, $M(\sigma) \doteq \widehat{N}(0)$. Тогда

$$F(h^t \sigma, x) = \widehat{G}(t, x), \quad M(h^t \sigma) = \widehat{N}(t),$$

и поэтому семейство включений (3.3) можно записать в виде

$$\dot{x} \in F(h^t \sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t \sigma), \quad \sigma \in \Sigma. \quad (3.4)$$

Записав семейство включений в виде (3.4), мы можем теперь забыть, что динамическая система (Σ, h^t) предполагалась динамической системой сдвигов, и, не меняя записи (3.4), можем рассматривать семейство включений (3.4), параметризованных с помощью произвольной топологической динамической системы.

4. Управляемые системы и дифференциальные включения

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий применение пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа — Бебутова при исследовании одной задачи оптимизации, приводящей к дифференциальным включениям с некомпактными образами.

Пример 1. Рассмотрим билинейную управляемую систему

$$\dot{x} = (A_0(t) + u_1 A_1(t) + \dots + u_m A_m(t))x, \quad (4.1)$$

где $A_k(t)$ — липшицевы, ограниченные на \mathbb{R} функции $t \rightarrow A_k(t)$ со значениями в пространстве $\mathbb{M}(n)$ квадратных матриц порядка n с нормой, согласованной с евклидовой нормой пространства \mathbb{R}^n , $u \in \mathbb{R}_+^m \doteq \{u = (u_1 \dots u_m) \in \mathbb{R}^m : u_i \geq 0\}$ — управляющий вектор. По определению управление $t \rightarrow u(t)$ допустимо, если функция $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ непрерывна и ограничена на \mathbb{R}_+ .

Наряду с системой (4.1) будем рассматривать дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x)$$

с правой частью

$$F(t, x) \doteq \{(A_0(t) + u_1 A_1(t) + \dots + u_m A_m(t))x : u \in \mathbb{R}_+^m\}.$$

Ясно, что F как функция переменной x линейна, и при любых (t, x) множество $F(t, x)$ образует *выпуклый замкнутый конус* с центром в точке $A_0(t)x$. Будем предполагать далее, что выполнено следующее *неравенство*: $\max_{\ell_1, \ell_2 \in F(t, x)} \angle(\ell_1, \ell_2) \leq \pi$, где $\ell_i(t, x)$ — лучи конуса $F(t, x)$.

Покажем, что функция $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ *равномерно непрерывна на множествах* $\mathbb{R} \times K$, где K — произвольный компакт в \mathbb{R}^n . Надо показать, что если заданы $\varepsilon > 0$ и компакт $K \subset \mathbb{R}^n$, то найдется такое $\delta \doteq \delta(\varepsilon, K) > 0$, что из неравенства $|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| \leq \delta$, где $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in \mathbb{R} \times K$, следует неравенство $\text{Dist}(F(t_1, x_1), F(t_2, x_2)) \leq \varepsilon$.

Рассмотрим сначала луч $\ell(t, x) \doteq \{\lambda A_1(t)x : \lambda \geq 0\}$. В силу предположения найдется (при заданном компакте $K \subset \mathbb{R}^n$) такая константа $b_1 = b_1(K)$, что для точек $x_i \in K$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |A_1(t_1)x_1 - A_1(t_2)x_2| &\leq |x_1||A_1(t_1) - A_1(t_2)| + |A_1(t_2)||x_1 - x_2| \leq c_1|A_1(t_1) - A_1(t_2)| \\ &+ a_1|x_1 - x_2| \leq c_1 l_1 |t_1 - t_2| + a_1|x_1 - x_2| \leq b_1(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $c_1 = \max_{x \in K} |x|$, l_1 — константа Липшица функции $A_1(t)$, $a_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} |A_1(t)|$, $b_1 = \max\{c_1 l_1, a_1\}$.

Поэтому найдется такая константа $\varkappa = \varkappa(K) \geq b_1$, что $\angle(\ell^1, \ell^2) \leq \varkappa \sqrt{|t_1 - t_2|^2 + |x_1 - x_2|^2}$, где $\ell^i = \ell(t_i, x_i)$. Далее, с учетом примера 1 работы [2, с. 187] имеем: $\text{Dist}(\ell^1, \ell^2) = \sqrt{\sin \angle(\ell^1, \ell^2)}$. Таким образом, для заданных $\varepsilon > 0$ и $K \subset \mathbb{R}^n$ можно построить такое $\delta > 0$, что из неравенства $|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| \leq \delta$ будет следовать неравенство $\text{Dist}(\ell(t_1, x_1), \ell(t_2, x_2)) \leq \varepsilon$.

Если $\ell(t, x) \doteq \{A_0(t)x + \lambda A_1(t)x : \lambda \geq 0\}$, то несложно понять, что для каждого $r > 0$ и любой пары точек (t_i, x_i) выполнено неравенство

$$\text{dist}(\ell_r^1, \ell_r^2) \leq |A_0(t_1)x_1 - A_0(t_2)x_2| + r|A_1(t_1)x_1 - A_1(t_2)x_2|,$$

где $\ell_r^i = \ell(t_i, x_i) \cap O(f_0(t_i, x_i))$. Поэтому, рассуждая как и при доказательстве (4.2), получим неравенство $\text{dist}(\ell_r^1, \ell_r^2) \leq (b_0 + b_1 r)(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|)$, где константы b_i зависят от компакта K . Из сказанного следует, что $\text{Dist}(\ell(t_1, x_1), \ell(t_2, x_2)) \leq c(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|)$, где $c = c(K) < \infty$.

Если $\ell(t, x) \doteq \{A_0(t)x + \lambda_1 A_1(t)x + \dots + \lambda_m A_m(t)x : \lambda_i \geq 0, i = 0 \dots m\}$, то из приведенных рассуждений по-прежнему следует неравенство

$$\text{Dist}(\ell(t_1, x_1), \ell(t_2, x_2)) \leq c(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|).$$

Пусть теперь заданы последовательность систем

$$\dot{x} = (A_0^k(t) + u_1 A_1^k(t) + \dots + u_m A_m^k(t))x,$$

$k = 1 \dots \infty$, и соответствующая ей последовательность $F^k(t, x)$ дифференциальных включений

$$\dot{x} \in F^k(t, x),$$

где $F^k(t, x) \doteq \{(A_0^k(t) + u_1 A_1^k(t) + \dots + u_m A_m^k(t))x : u \in \mathbb{R}_+^m\}$. Выясним условия, при которых для любого $\varepsilon > 0$ и всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется такой номер $k_0 = k_0(\varepsilon, K)$, что для каждого $k \geq k_0$ и всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times K$ выполнено неравенство $\text{Dist}(F^k(t, x), F(t, x)) \leq \varepsilon$.

Пусть последовательности матриц $\{A_i^k(t)\}_{k=1}^\infty$ состоят из равномерно непрерывных и ограниченных на \mathbb{R} функций $t \rightarrow A_i^k(t)$ и $\sup_{t \in \mathbb{R}} |A_i^k(t) - A_i(t)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $i = 0 \dots m$.

Тогда для заданных $\varepsilon > 0$, $r > 0$, компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и каждого множества

$$\ell_{ir}^k(t, x) \doteq \{(A_0^k(t) + \lambda A_i^k(t))x : 0 \leq \lambda \leq r\}$$

найдется такой индекс $k_0 = k_0(\varepsilon, r, K)$, что неравенство $\text{dist}(\ell_{ir}^k(t, x), \ell_{ir}(t, x)) \leq \varepsilon$ выполнено при всех $i = 1 \dots m$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times K$, $k \geq k_0$. Здесь $\ell_{ir}(t, x) \doteq \{(A_0(t) + \lambda A_i(t))x : 0 \leq \lambda \leq r\}$. Из этих неравенств при всех $r > 0$ в силу определения метрики Хаусдорфа следует неравенство $\text{dist}(F_r^k(t, x), F_r(t, x)) \leq \varepsilon$. Следовательно, $\text{Dist}(F^k(t, x), F(t, x)) \leq \varepsilon$.

Введем в рассмотрение показатель Боля

$$A_0(A, u(\cdot)) \doteq \overline{\lim}_{t-s \rightarrow \infty} \frac{\ln |X(t, s; u(\cdot))|}{t-s}$$

системы (4.1), где $X(t, s; u(\cdot))$ — матрица Коши при допустимом управлении

$$t \rightarrow u(t) = (u_1(t) \dots u_m(t)).$$

Рассмотрим функционал

$$J(A, u(\cdot)) \doteq A_0(A, u(\cdot)) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |u^2(t)| dt$$

и задачу минимизации функционала $J(A, u(\cdot))$ по всем допустимым $u(\cdot)$. Предположим, что $J(A) \doteq \min_{u(\cdot)} J(A, u(\cdot)) > -\infty$.

Интересно выяснить условия, при которых $\lim_{k \rightarrow \infty} J(A^k) \leq J(A)$. Здесь $J(A^k)$ — нижняя грань функционала $J(A^k, u(\cdot))$ k -й системы (см. (4)). Оказывается (это требует дополнительного доказательства), что из равенства $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Dist}(F^k(t, x), F(t, x)) = 0$ следует требуемое неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} J(A^k) \leq J(A)$.

4.1. Подготовительные сведения. Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t) , относительно фазового пространства которой мы будем предполагать, что фазовое пространство Σ локально компактно (т.е. для любой точки σ_0 пространства Σ пересечение шара $O_a(\sigma_0) \doteq \{\sigma \in \Sigma : \rho_\Sigma(\sigma, \sigma_0) \leq a\}$ с пространством Σ компактно). Будем рассматривать задачу

$$\dot{x} \in F(h^t \sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t \sigma), \quad (4.3)$$

относительно которой предполагается, что функция $(\sigma, x) \rightarrow F(\sigma, x)$, задающая дифференциальное включение $\dot{x} \in F(h^t \sigma, x)$, определена при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и принимает значения в пространстве $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, а функция $\sigma \rightarrow M(\sigma)$, задающая фазовые ограничения задачи (4.3), принимает значения в пространстве $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ непустых замкнутых подмножеств в \mathbb{R}^n и для каждого шара $O_r(0)$ достаточно большого радиуса r непрерывна в каждой точке $\sigma \in \Sigma$.

При исследовании вопросов существования решений задачи (4.3) будем пользоваться определениями полунепрерывности сверху и снизу в терминах полуотклонений D и непрерывности в терминах метрики Dist Хаусдорфа — Бебутова.

О п р е д е л е н и е 3. Функцию $F(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *полунепрерывной сверху в точке (σ_0, x_0)* в том и только в том случае, если для всякого положительного r выполнено следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек (σ, x) , удовлетворяющих неравенству

$$\rho_\Sigma(\sigma, \sigma_0) + |x - x_0| \leq \delta, \quad (4.4)$$

полуотклонение Хаусдорфа $d(F_r(\sigma, x), F_r(\sigma_0, x_0))$ не превосходит ε , где (см. разд. 1)

$$F_r(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \cap O_r(f_0(\sigma, x)), \quad f_0(\sigma, x) \doteq \left\{ f_0 \in F(\sigma, x) : |f_0| = \min_{f \in F(\sigma, x)} |f| \right\},$$

а полуотклонение $d(F, G)$ определяется равенством $d(F, G) = \max_{f \in F} \varrho(f, G)$. Далее, функцию $F: \Sigma \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *полунепрерывной снизу в точке* (σ_0, x_0) в том и только в том случае, если для всякого $r > 0$ выполнено следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек (σ, x) , удовлетворяющих неравенству (4.4), полуотклонение $d(F_r(\sigma_0, x_0), F_r(\sigma, x))$ не превосходит ε . Далее, если функция $F(\sigma, x)$ одновременно полунепрерывна сверху и снизу в точке (σ_0, x_0) , то она называется *непрерывной* в точке (σ_0, x_0) . Обычным образом понимается полунепрерывность сверху, снизу и непрерывность на произвольном множестве $G \subset \Sigma \times \mathbb{R}^n$.

З а м е ч а н и е 2. Отметим еще раз, что в пространстве $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ мы сохраняем метрику $\text{dist}(F, G)$ и полуотклонения $d(F, G)$, $d(G, F)$ Хаусдорфа. Такая метрика является *внутренней* (см. [1]) относительно метрики $\text{Dist}(F, G)$ пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому пространство $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ не может рассматриваться как подпространство в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Далее, следует заметить, что в силу определения 3 из непрерывности, полунепрерывности снизу или полунепрерывности сверху в смысле метрики Хаусдорфа — Бебутова произвольной функции $(\sigma, x) \rightarrow F(\sigma, x)$ с компактными значениями в \mathbb{R}^n следуют непрерывность, полунепрерывность снизу или полунепрерывность сверху в смысле метрики и полуотклонений Хаусдорфа в $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t) . Напомним, что функция $\sigma \rightarrow M(\sigma)$ со значениями в $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ называется *слабо инвариантной* относительно решений включения $\dot{x} \in F(h^t \sigma, x)$, если для любой точки $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times M(\sigma)$ существуют интервал $[0, \varepsilon)$ и по крайней мере одно решение $x(t) = x(t, \sigma, x_0)$ задачи Коши

$$\dot{x} \in F(h^t \sigma, x), \quad x(0) = x_0, \quad (4.5)$$

такие, что для всех $t \in [0, \varepsilon)$ выполнено включение $x(t) \in M(h^t \sigma)$.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть множество M содержится в пространстве $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ и $x \in M$. Тогда *опорным конусом* (конусом Bouligand, см., например, [11, с. 25]) к множеству M в точке x называется выпуклый конус $T_x M$, определенный равенством

$$T_x M = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varrho(x + \varepsilon p, M)}{\varepsilon} = 0 \right\}.$$

Отметим, что вектор p принадлежит конусу $T_x M$ в том и только в том случае, если существуют две последовательности $\{\varepsilon_i\}$, $\{p_i\}$ такие, что $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $p_i \rightarrow p$ и $x + \varepsilon_i p_i \in M$.

О п р е д е л е н и е 6. Напомним (см. [12, с. 20]), что векторное поле, порожденное задачей (4.3), обладает свойством *слабой полноты*, если для любой начальной точки (σ, x_0) множества $\Sigma \times M(\sigma)$ существует по крайней мере одно решение $x(t)$ задачи Коши (4.5), определенное при всех $t \in \mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$ и удовлетворяющее при всех $t \in \mathbb{R}_+$ включению $x(t) \in M(h^t \sigma)$.

4.2. Теоремы существования решений задачи (4.3). Приведем для примера два аналога известных теорем существования [11, гл. 3; 13, гл. 2, § 1; 14, гл. 2, § 6, 7] решения задачи Коши для дифференциального включения $\dot{x} \in F(t, x)$ с фазовыми ограничениями M .

У с л о в и е 2. Функции

$$(\sigma, x) \rightarrow F(\sigma, x) \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n), \quad \sigma \rightarrow M(\sigma) \in \text{clos}(\mathbb{R}^n),$$

задающие краевую задачу (4.3), являются *согласованными*, т.е. функция $\sigma \rightarrow M(\sigma)$ непрерывна и выполнено условие

$$Q(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \cap T_x M(\sigma) \neq \emptyset \quad \text{для всех } (\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma). \quad (4.6)$$

Теорема 4. Пусть выполнено условие 2 и функция $(\sigma, x) \rightarrow F(\sigma, x) \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху. Тогда для каждой точки (σ, x_0) , $x_0 \in M(\sigma)$, найдется такой интервал (t_*, t^*) числовой прямой, что решение задачи Коши (4.5) существует при всех $t \in (t_*, t^*)$ и при всех $t \in [0, t^*)$ удовлетворяет включению $x(t) \in M(h^t \sigma)$.

Доказательство. Из условия 2, как можно заметить, следует, что найдется константа $r > 0$, обеспечивающая условие

$$Q_r(\sigma, x) \doteq F_r(\sigma, x) \cap T_x M(\sigma) \neq \emptyset \quad \text{для всех} \quad (\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma),$$

где $F_r(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \cap O_r(f_0(\sigma, x))$, $f_0(\sigma, x)$ — ближайшая к нулю точка множества $F(\sigma, x)$. В остальном доказательство теоремы следует рассуждениям монографии [11, с. 93]. \square

Теорема 5. Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times M(\sigma)$ найдется по крайней мере одно решение $x(t)$ задачи Коши (4.5), определенное при всех $t \in [0, \varepsilon]$ и удовлетворяющее включению $x(t) \in M(h^t \sigma)$, $0 \leq t \leq \varepsilon$. Тогда векторное поле, порожденное задачей (4.3), обладает свойством слабой полноты.

Доказательство. Пусть $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times M(\sigma)$, $\varepsilon > 0$ и $x(t) = x(t, \sigma, x_0)$ — решение задачи (4.5), удовлетворяющее при всех $t \in I_0 \doteq [0, \varepsilon]$ включению $x(t) \in M(h^t \sigma)$. Положим $\sigma_1 = h^\varepsilon \sigma$, $x_1 = x(\varepsilon, \sigma, x_0)$ и для точки $(\sigma_1, x_1) \in \Sigma \times M(\sigma)$ рассмотрим решение $\hat{x}(t) = \hat{x}(t, \sigma_1, x_1)$ задачи (4.5), удовлетворяющее при всех $t \in I_0 \doteq [0, \varepsilon]$ включению $\hat{x}(t) \in M(h^t \sigma_1)$. В силу условий теоремы такое решение существует. Непосредственно проверяется, что функция $t \rightarrow x_1(t)$, определенная на отрезке $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ равенством $x_1(t) = \hat{x}(t - \varepsilon, \sigma_1, x_1)$, продолжает решение $x(t)$ задачи (4.5) на отрезок $[0, 2\varepsilon]$. Такое построение можно продолжить. \square

Теорема 6. Предположим, что выполнено условие 2, функция $(\sigma, x) \rightarrow Q(\sigma, x) \in \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$, определенная равенством (4.6), полунепрерывна сверху и найдутся непрерывные функции $a: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такие, что неравенство $|Q(\sigma, x)| \leq a(\sigma)g(|x|)$ выполнено для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma)$. Если $\int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{g(z)} = \infty$ для любого $z_0 \geq 0$, то векторное поле, порожденное задачей (4.3), обладает свойством слабой полноты.

Доказательство этой теоремы во многом повторяет рассуждения [14, с. 101].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурого Д.Ю., Бурого Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 511 с.
2. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 185–201.
3. Аносов Д.В. Лекции по линейной алгебре. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999. 105 с.
4. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
5. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
6. Динамические системы–1 / Аносов Д.В [и др.] // Итоги науки и техники. Сер. “Современные проблемы математики. Фундаментальные направления”. Т. 1. М.: Изд-во ВИНТИ АН СССР, 1985. 244 с.
7. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: “Факториал”, 1999. 767 с.
8. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.

9. **Родина Л.И., Тонков Е.Л.** Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5, № 2. С. 265–288.
10. **Бебутов М.В.** О динамических системах в пространстве непрерывных функций // *Бюллетень мех.-мат. фак. МГУ*. 1941. № 5. С. 1–52.
11. **Aubin J.-P.** *Viability theory*. Boston: Birkhäuser, 1991. 543 p.
12. **Аграчев А.Ф., Сачков А.Л.** *Геометрическая теория управления*. М.: Физматлит, 2005. 391 с.
13. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // *Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР*. 1985. Т. 169. С. 194–252.
14. **Филиппов А.Ф.** *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*. М.: Наука, 1985. 223 с.

Панасенко Елена Александровна

канд. физ.-мат. наук, доцент

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

e-mail: panlena_t@mail.ru

Поступила 31.07.2010

Родина Людмила Ивановна

канд. физ.-мат. наук

доцент

Удмуртский государственный университет

e-mail: box0589@udmnet.ru

Тонков Евгений Леонидович

д-р физ.-мат. наук

зав. каф.

Удмуртский государственный университет

e-mail: eltonkov@udm.ru

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ¹**В. Г. Пименов, А. Б. Ложников**

Сконструировано семейство сеточных методов для численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием общего вида на основе идеи разделения текущего состояния и функции-предыстории. Получена теорема о порядке сходимости методов с использованием методики доказательств аналогичных утверждений для функционально-дифференциальных уравнений и методики общей теории разностных схем. Приводятся результаты расчетов тестовых примеров с постоянным и переменным запаздыванием.

Ключевые слова: численные методы, уравнение теплопроводности, запаздывание, разностные схемы, интерполяция, экстраполяция, порядок сходимости.

V. G. Pimenov, A. B. Lozhnikov. Difference schemes for the numerical solution of the heat conduction equation with aftereffect.

A family of grid methods is constructed for the numerical solution of the heat conduction equation of a general form with time delay; the methods are based on the idea of separating the current state and the prehistory function. A theorem is obtained on the order of convergence of the methods, which uses the technique of proving similar statements for functional differential equations and methods from the general theory of difference schemes. Results of calculating test examples with constant and variable time delay are presented.

Keywords: numerical methods, heat conduction equation, time delay, difference schemes, interpolation, extrapolation, order of convergence.

Введение

В работе для уравнения параболического типа с эффектами запаздываний по временной составляющей конструируются сеточные методы и изучается порядок их сходимости. Математические аспекты таких объектов изучались, в частности, в монографии [1], где объектом исследований выступает уравнение вида

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(u_t),$$

где u — элемент банахова пространства, $u_t = \{u(t + \xi), -\tau \leq \xi \leq 0\}$ — предыстория состояния, τ — положительная величина запаздывания, f — нелинейное отображение, A — инфинитезимально порождающий оператор полугруппы.

Такие уравнения содержат, в частности, и уравнения параболического типа с запаздыванием, которые возникают при моделировании многих процессов [1]. Гораздо меньше разработаны численные алгоритмы решения для подобных задач, можно отметить лишь работу [2], где с позиции присущего автору подхода к численному решению задач с запаздыванием как к непрерывному методу строится и исследуется аналог неявного метода трапеций.

Для численного решения уравнения теплопроводности можно использовать метод прямых, сводящий рассматриваемую задачу к системе ФДУ (функционально-дифференциальных уравнений) [3;4]. Однако при дискретизации по двум переменным (временной и пространственной) возникают жесткие задачи [5], которые при использовании явных методов дают ограничение на временной шаг; частично проблема преодолевается применением специальных методов. Для

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проекты 08-01-00141 и 10-01-00377) и программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

систем обыкновенных дифференциальных уравнений с эффектами запаздываний (ФДУ) численные методы хорошо разработаны [6], в частности, с позиции подхода [7], основанного на идее разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих и идее применения интерполяции с заданными свойствами дискретной предыстории модели, составлены эффективные пакеты прикладных программ. В данной работе с позиции сеточных методов конструируются схемы с весами с использованием интерполяции (с заданными свойствами [7]) дискретной предыстории модели. Исследуются порядки погрешности аппроксимации схем с весами, устойчивость и порядки их сходимости. При этом используется техника как общего подхода к исследованию линейных разностных схем [8], так и исследования разностных схем решения ФДУ [7;9]. Отметим, что ранее в работах [3;4] для этой задачи были изучены частные случаи исследуемых алгоритмов.

1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим уравнение теплопроводности с эффектом запаздывания вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (1.1)$$

здесь $x \in [0, X]$ — пространственная и $t \in [t_0, \theta]$ — временная независимые переменные; $u(x, t)$ — искомая функция; $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t+\xi), -\tau \leq \xi < 0\}$ — функция-предыстория искомой функции к моменту t ; $\tau > 0$ — величина запаздывания.

Пусть заданы начальные условия

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad x \in [0, X], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0] \quad (1.2)$$

и граничные условия

$$u(0, t) = g_0(t), \quad u(X, t) = g_1(t), \quad t \in [t_0, \theta], \quad (1.3)$$

причем выполнены условия согласования

$$g_0(t_0) = \varphi(0, t_0), \quad g_1(t_0) = \varphi(X, t_0). \quad (1.4)$$

Задача (1.1)–(1.4) представляет собой простейшую краевую задачу для уравнения теплопроводности с эффектом запаздывания общего вида. Будем предполагать, что функции φ , g_0 , g_1 и функционал f таковы, что эта задача имеет единственное решение $u(x, t)$, понимаемое в классическом смысле. Отметим, что вопросы существования и единственности подобных задач рассматривались в [1].

Обозначим через $Q = Q[-\tau, 0)$ множество функций $u(\xi)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа. Определим норму функций на Q соотношением $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{\xi \in [-\tau, 0)} |u(\xi)|$. Дополнительно будем предполагать, что функционал $f(x, t, u, v(\cdot))$ определен на $[0, X] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R} \times Q$ и липшицев по двум последним аргументам, т.е. найдется такая константа L_f , что для всех $x \in [0, X]$, $t \in [t_0, \theta]$, $u^1 \in \mathbb{R}$, $u^2 \in \mathbb{R}$, $v^1(\cdot) \in Q$, $v^2(\cdot) \in Q$ выполняется

$$|f(x, t, u^1, v^1(\cdot)) - f(x, t, u^2, v^2(\cdot))| \leq L_f(|u^1 - u^2| + \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q).$$

2. Сеточные схемы с весом

Разобьем отрезок изменения пространственной переменной $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, введя точки $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, и разобьем отрезок изменения временной переменной $[t_0, \theta]$ на части с шагом $\Delta > 0$, введя точки $t_j = t_0 + j\Delta$, $j = 0, \dots, M$. Будем считать, что величина $\tau/\Delta = m$ — натуральное число.

Приближения функций $u(x_i, t_j)$ в узлах будем обозначать через u_j^i . При всяком фиксированном $i = 0, \dots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j , $j = 0, \dots, M$: $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$. Оператором интерполяции-экстраполяции назовем оператор, определенный на множестве всех допустимых предысторий и действующий по правилу $I : \{u_k^i\}_j \rightarrow v^{i,j}(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$. Здесь $Q[-\tau, \Delta]$ — множество функций, кусочно-непрерывных на $[-\tau, \Delta]$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа.

Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности p на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 , такие, что для всех $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$ и $t \in [t_j - \tau, t_{j+1}]$ выполняется неравенство

$$|v^{i,j}(t) - u(x_i, t)| \leq C_1 \max_{j-m \leq k \leq j} |u_k^i - u(x_i, t_k)| + C_2 \Delta^p.$$

Например, кусочно-постоянная интерполяция имеет первый порядок, а кусочно-линейная интерполяция

$$v^{i,j}(t_j + \xi) = \frac{1}{\Delta} ((t_k - t_j - \xi)u_{k-1}^i + (t_j + \xi - t_{k-1})u_k^i), \quad t_{k-1} \leq t_j + \xi \leq t_k, \quad -\tau \leq \xi \leq 0$$

с экстраполяцией продолжением

$$v^{i,j}(t_j + \xi) = \frac{1}{\Delta} ((-\xi)u_{j-1}^i + (\Delta + \xi)u_j^i), \quad t_j \leq t_j + \xi \leq t_{j+1}, \quad \xi > 0$$

имеет второй порядок [7].

Для $0 \leq s \leq 1$ рассмотрим семейство методов

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} &= sa^2 \frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + (1-s)a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} \\ &+ F_j^i(v^{i,j}(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} u_0^i &= \varphi(x_i, t_0), \quad i = 0, \dots, N, \\ v^{i,0}(t) &= \varphi(x_i, t), \quad t < t_0, \quad i = 0, \dots, N \end{aligned}$$

и граничными условиями

$$u_j^0 = g_0(t_j), \quad u_j^N = g_1(t_j), \quad j = 0, \dots, M.$$

Здесь $F_j^i(v(\cdot))$ — некоторый функционал, определенный на $Q[-\tau, \Delta]$ и связанный с функционалом $f(x_i, t_j, u, v(\cdot))$, липшицевый по переменной $v(\cdot)$ с константой L_F . Функционалы $F_j^i(v(\cdot))$ определены на функциях $v(\cdot) = v^{i,j}(\cdot) = I(\{u_k^i\}_j)$, являющихся результатом действия оператора интерполяции-экстраполяции. В этом и состоит принцип разделения конечномерной и бесконечномерной фазовой переменной: по конечномерной переменной строятся полные аналоги известных методов, в данном случае семейство схем с весами, а по бесконечномерной проводится интерполяция с заданными свойствами, например, кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением. Неизвестные u_{j+1}^i на временном слое $j+1$ не содержатся в аргументах функционалов $F_j^i(v(\cdot))$, поэтому неясность возникает только по конечномерной

переменной, и поэтому возможно применение прогонки относительно u_{j+1}^i . В этом коренное отличие изложенного метода от методов, где такое разделение не проводится [2].

При $s = 0$ получается явная схема, при других s , $0 < s \leq 1$, при каждом фиксированном j система (2.1) представляет собой линейную трехдиагональную систему относительно u_{j+1}^i с диагональным преобладанием, которая может быть эффективно решена методом прогонки. Например, можно рассмотреть метод при

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{12\sigma}, \quad F_j^i = \frac{5}{6}f_{j+1/2}^i + \frac{1}{12}(f_{j+1/2}^{i-1} + f_{j+1/2}^{i+1}). \quad (2.2)$$

Здесь $\sigma = \frac{a^2\Delta}{h^2}$, $f_j^i = f(x_i, t_j, u_j^i, v_{t_j}^{i,j}(\cdot))$, $v_{t_j}^{i,j}(\cdot)$ — результат кусочно-линейной интерполяции и экстраполяции продолжением, определяемый формулой (при $-\tau \leq \xi \leq \Delta$)

$$v^{i,j}(t_j + \xi) = \begin{cases} \varphi(x_i, t_j + \xi), & t_j - \tau \leq t_j + \xi \leq t_0, \\ \frac{1}{\Delta} ((t_k - t_j - \xi) u_{k-1}^i + (t_j + \xi - t_{k-1}) u_k^i), & t_{k-1} \leq t_j + \xi \leq t_k, \quad 0 \leq k \leq j, \\ \frac{1}{\Delta} ((-\xi) u_{j-1}^i + (\Delta + \xi) u_j^i), & t_j \leq t_j + \xi \leq t_{j+1}. \end{cases}$$

Отметим, что для вычисления величины $f_{j+1/2}^i = f(x_i, t_j + \Delta/2, u_{j+1/2}^i, v_{t_{j+1/2}}^{i,j}(\cdot))$ в предыстории $v_{t_{j+1/2}}^{i,j}(\cdot)$ к моменту $t_{j+1/2} = t_j + \Delta/2$ кроме кусочно-линейной интерполяции к моменту t_j используется еще и экстраполяция продолжением, в частности

$$u_{j+1/2}^i = v_{t_{j+1/2}}^{i,j} = \frac{1}{\Delta} \left(\left(-\frac{\Delta}{2} \right) u_{j-1}^i + \frac{3\Delta}{2} u_j^i \right) = \frac{3u_j^i}{2} - \frac{u_{j-1}^i}{2}.$$

Невязкой (без интерполяции) метода вида (2.1) назовем сеточную функцию

$$\begin{aligned} \Psi_j^i &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1})}{h^2} \\ &\quad - (1-s)a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} - F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)), \quad (2.3) \\ &\quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1. \end{aligned}$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок $h^{p_1} + \Delta^{p_2}$, если существует константа C , не зависящая от Ψ_j^i, h, Δ , такая, что $|\Psi_j^i| \leq C(h^{p_1} + \Delta^{p_2})$ для всех $i = 1, \dots, N-1, j = 0, \dots, M-1$.

Определение порядка невязки метода при конкретном выборе s и F проводится с помощью тейлоровского разложения функции $u(x, t)$ и функционала F (при условиях соответствующей гладкости). Так, например, справедливо следующее утверждение, полностью соответствующее аналогичному утверждению без запаздывания для схемы повышенного порядка точности [8].

Теорема 1. Пусть точное решение $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.4) четырежды непрерывно дифференцируемо по t , шесть раз непрерывно дифференцируемо по x , причем вторая и четвертая производные решения по x дважды непрерывно дифференцируемы по t , производная решения по t дважды непрерывно дифференцируема по x , при подстановке точного решения в функционал f функция $f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot))$ четырежды непрерывно дифференцируема по x . Тогда невязка метода (2.2) имеет порядок $h^4 + \Delta^2$.

Обозначим величину погрешности метода в узлах через $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$. Будем говорить, что метод сходится, если $\varepsilon_j^i \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и $\Delta \rightarrow 0$ для всех $i = 0, \dots, N$ и $j = 0, \dots, M$. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если найдется такая константа C , не зависящая от $\varepsilon_j^i, h, \Delta$, что выполняется $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \dots, N$ и $j = 0, \dots, M$.

В силу нелинейного характера зависимости функционала f (а следовательно, и F) от состояния и его предыстории, обычные методы исследования устойчивости [8] неприменимы. Однако к данной задаче, как и к другим эволюционным задачам с эффектом запаздывания, для исследования сходимости схем применим аппарат абстрактных схем с последствием, ранее разработанный в [9] для случая функционально-дифференциальных уравнений. Изложим основные моменты этого аппарата применительно к нашему случаю.

3. Общая разностная схема с последствием и ее порядок сходимости

Некоторые вводимые в этом разделе обозначения, например, τ , Δ и другие дублируют уже введенные. Это сделано намеренно, чтобы облегчить вложение схем предыдущего раздела.

Пусть задан отрезок $[t_0, \theta]$ и число $\tau > 0$ — величина запаздывания.

Шагом сетки назовем число $\Delta > 0$ такое, что $\tau/\Delta = m$ — натуральное число, $\{\Delta\}$ — множество шагов.

Сеткой (равномерной) назовем конечный набор чисел

$$\Sigma_\Delta = \{t_i = t_0 + i\Delta \in [t_0 - \tau, \theta], \quad i = -m, \dots, M\}.$$

Обозначим $\Sigma_\Delta^- = \{t_i \in \Sigma_\Delta, i \leq 0\}$, $\Sigma_\Delta^+ = \{t_i \in \Sigma_\Delta, i \geq 0\}$.

Дискретной моделью назовем всякую сеточную функцию $t_i \in \Sigma_\Delta \rightarrow y(t_i) = y_i \in Y$, $i = -m, \dots, M$, где Y — q -мерное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$. Будем предполагать, что размерность q пространства Y зависит от числа $h > 0$.

Предысторией дискретной модели к моменту t_n ($0 \leq n \leq M$) назовем множество $\{y_i\}_n = \{y_i \in Y, \quad i = n - m, \dots, n\}$.

Пусть V — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_V$ (интерполяционное пространство).

Оператором интерполяции назовем оператор, определенный на множестве всех допустимых предысторий и действующий по правилу $I: I(\{y_i\}_n) = v \in V$ ($v = v_n$).

Будем говорить, что оператор интерполяции удовлетворяет условию липшицевости, если найдется такая константа L_I , что для всех предысторий дискретной модели $\{y_i^1\}_n$ и $\{y_i^2\}_n$ выполняется

$$\|v^1 - v^2\|_V \leq L_I \max_{-m \leq i \leq n} \|y_i^1 - y_i^2\|_Y, \quad (3.1)$$

где $v^1 = I(\{y_i^1\}_n)$, $v^2 = I(\{y_i^2\}_n)$.

Стартовыми значениями модели назовем функцию $\Sigma_\Delta^- \rightarrow Y$

$$y(t_i) = y_i, \quad i = -m, \dots, 0. \quad (3.2)$$

Формулой продвижения модели на шаг назовем соотношение

$$y_{n+1} = S y_n + \Delta \Phi(t_n, I(\{y_i\}_n)), \quad n = 0, \dots, M - 1, \quad (3.3)$$

где функция продвижения на шаг $\Phi: \Sigma_\Delta^+ \times V \rightarrow Y$, оператор перехода $S: Y \rightarrow Y$ — линейный оператор.

Таким образом, дискретная модель (численный метод, в дальнейшем просто метод) определяется стартовыми значениями (3.2), формулой продвижения на шаг (3.3) и оператором интерполяции.

Будем предполагать, что функция $\Phi(t_n, v)$ в (3.3) липшицева по второму аргументу, т.е. найдется такая константа L_Φ , что для всех $t_n \in \Sigma_\Delta^+$, $v^1, v^2 \in V_n$ выполняется

$$\|\Phi(t_n, v^1) - \Phi(t_n, v^2)\|_Y \leq L_\Phi \|v^1 - v^2\|_V. \quad (3.4)$$

Функцией точных значений назовем отображение

$$Z(t_i) = z_i \in Y, \quad i = -m, \dots, M. \quad (3.5)$$

Будем говорить, что стартовые значения модели имеют порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, если найдется константа C , не зависящая от z_i, y_i, Δ, h , такая, что

$$\|z_i - y_i\|_Y \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2}), \quad i = -m, \dots, 0.$$

Назовем метод сходящимся с порядком $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, если существует константа C , не зависящая от z_n, y_n, Δ, h , такая, что

$$\|z_n - y_n\|_Y \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2})$$

для всех $n = -m, \dots, M$.

Индексы у норм в дальнейшем будем опускать.

Назовем метод (3.3) устойчивым, если

$$\|S\| \leq 1.$$

Погрешностью аппроксимации (невязкой) с интерполяцией назовем сеточную функцию

$$d_n = (z_{n+1} - Sz_n)/\Delta - \Phi(t_n, I(\{z_i\}_{-m}^n)), \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (3.6)$$

Будем говорить, что метод (3.3) имеет порядок погрешности аппроксимации с интерполяцией $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, если существует константа C , не зависящая от d_n, Δ, h , такая, что

$$\|d_n\| \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2})$$

для всех $n = 1, \dots, M$.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 2. Пусть метод (3.3) устойчив, функция Φ удовлетворяет условию липшицевости по второму аргументу, оператор интерполирования I удовлетворяет условию липшицевости, стартовые значения имеют порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, погрешность аппроксимации с интерполяцией имеет порядок $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$, где $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0$, тогда метод сходится с порядком сходимости $\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}$.

Доказательство. Обозначим $\delta_n = z_n - y_n$, $n = -m, \dots, M$, тогда для $n = 0, \dots, M-1$ имеем

$$\delta_{n+1} = S\delta_n + \Delta\hat{\delta}_n + \Delta d_n, \quad (3.7)$$

где

$$\hat{\delta}_n = \Phi(t_n, I(\{z_i\}_n)) - \Phi(t_n, I(\{y_i\}_n)).$$

Из предположений о липшицевости отображений Φ и I следует

$$\|\hat{\delta}_n\| \leq K \max_{n-m \leq i \leq n} \{\|\delta_i\|\}, \quad (3.8)$$

где $K = L_\Phi L_I$. Из (3.7) вытекает

$$\delta_{n+1} = S^{n+1}\delta_0 + \Delta \sum_{j=0}^n S^{n-j}\hat{\delta}_j + \Delta \sum_{j=0}^n S^{n-j}d_j. \quad (3.9)$$

Из (3.9), (3.8) и определения устойчивости оператора S следует

$$\|\delta_{n+1}\| \leq K\Delta \sum_{j=0}^n \max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} + \|\delta_0\| + (\theta - t_0) \max_{0 \leq i \leq N-1} \{\|d_i\|\}. \quad (3.10)$$

Обозначим

$$R_0 = \max_{-m \leq i \leq 0} \{\|\delta_i\|\}, \quad R = \max_{0 \leq i \leq N-1} \{\|d_i\|\}, \quad D = R_0 + (\theta - t_0)R, \quad (3.11)$$

тогда оценку (3.10) можно переписать как

$$\|\delta_{n+1}\| \leq K\Delta \sum_{j=0}^n \max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} + D. \quad (3.12)$$

Индукцией по $n = 1, \dots, M$ докажем оценку

$$\|\delta_n\| \leq D(1 + K\Delta)^n. \quad (3.13)$$

База индукции. Если в (3.12) положить $n = 0$, то

$$\|\delta_1\| \leq K\|\delta_0\| + D \leq (1 + K\Delta)D.$$

Шаг индукции. Пусть оценка (3.13) верна для всех индексов от 1 до n . Покажем, что оценка справедлива и для $n + 1$. Зафиксируем $j \leq n$. Пусть $i_0 = i_0(j)$ — тот индекс, на котором достигается

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\}.$$

Возможны две ситуации:

а) $i_0 \leq 0$, тогда

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} = \|\delta_{i_0}\| \leq R_0 \leq D(1 + K\Delta)^j.$$

б) $1 \leq i_0 \leq j$, тогда по индуктивному предположению

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} = \|\delta_{i_0}\| \leq D(1 + K\Delta)^{i_0} \leq D(1 + K\Delta)^j.$$

Таким образом, в любом случае выполняется оценка

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} \leq D(1 + K\Delta)^j.$$

Из полученной оценки и (3.12) вытекает

$$\|\delta_{n+1}\| \leq K\Delta \sum_{j=0}^n D(1 + K\Delta)^j + D = D(1 + K\Delta)^{n+1}.$$

Таким образом, оценка (3.13) доказана и из нее получаем оценку

$$\|\delta_n\| \leq D \exp(K(\theta - t_0)). \quad (3.14)$$

Так как по определению (3.11) величины D выполняется

$$D \leq C(\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}),$$

то из (3.14) вытекает заключение теоремы. \square

4. Вложение схемы с весом в общую разностную схему с последствием

Проведем вложение схем семейства (2.1) в общую разностную схему с последствием. В этом разделе будем рассматривать задачи с однородными краевыми условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(X, t) = 0, \quad t \in [t_0, \theta].$$

К такой задаче можно свести исходную задачу (1.1)–(1.3) с помощью замены

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t) - g_0(t) \frac{X - x}{X} - g_1(t) \frac{x}{X}.$$

При каждом $t_j \in \Sigma_\Delta$ определим значения дискретной модели вектором $y_j = (u_j^0, u_j^1, \dots, u_j^N)' \in Y$, здесь Y — векторное пространство размерности $q = N + 1$, ' — знак транспонирования.

В пространстве Y введем оператор A :

$$Au_j^i = -a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad Au_j^0 = 0, \quad Au_j^N = 0,$$

тогда систему (2.1) можно переписать в виде уравнения

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + sAy_{j+1} + (1 - s)Ay_j = F_j(v(\cdot)), \quad (4.1)$$

где $F_j(v(\cdot)) = (F_j^0(v^0(\cdot)), F_j^1(v^1(\cdot)), \dots, F_j^N(v^N(\cdot)))'$, $v(\cdot) = I(\{y_k\}_j) \in Q^q[-\tau, \Delta]$. Здесь $V = Q^q[-\tau, \Delta]$ — интерполяционное пространство, пространство q -мерных вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит пространству $Q[-\tau, \Delta]$.

Воспользовавшись тождеством

$$y_{j+1} = y_j + \Delta \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta}$$

и вводя оператор

$$B = E + \Delta sA,$$

(E — тождественный оператор), приведем уравнение (4.1) к каноническому виду [8]:

$$B \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + Ay_j = F_j(v(\cdot)). \quad (4.2)$$

Так как при любом допустимом весе s уравнение (4.2) разрешимо относительно y_{j+1} (существует B^{-1}), то можно привести уравнение (4.2) к явной форме

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta \Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)), \quad (4.3)$$

где оператор перехода определяется формулой

$$S = E - \Delta B^{-1}A,$$

функция продвижения на шаг формулой

$$\Phi(t_j, v) = B^{-1}F_j(v(\cdot)).$$

Исследуем устойчивость полученной схемы. Для этого наряду с уравнениями (4.2), (4.3) рассмотрим однородную разностную схему в канонической и явной формах

$$B \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta} + Ay_j = 0, \quad (4.4)$$

$$y_{j+1} = Sy_j. \quad (4.5)$$

Оператор A самосопряженный и положительный [8] в смысле скалярного произведения векторов $y = (y^0, y^1, \dots, y^N)' \in Y$, $u = (u^0, u^1, \dots, u^N)' \in Y$:

$$(y, u) = \sum_{i=0}^N y^i u^i h.$$

Введем в пространстве Y энергетическую норму

$$\|y\|_Y = \sqrt{(Ay, y)}.$$

Как показано в [8], если выполняется соотношение

$$s \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sigma}, \quad (4.6)$$

для решения уравнения (4.4) выполняется оценка

$$\|y_{j+1}\|_Y \leq \|y_j\|_Y,$$

т. е. для эквивалентного уравнения (4.5) выполняется

$$\|S\| \leq 1,$$

таким образом, при условии (4.6) схема устойчива. Этот результат усиливает ранее полученное в [4] прямой оценкой решения системы с трехдиагональной матрицей для погрешности метода достаточное условие устойчивости

$$s \geq 1 - \frac{1}{2\sigma}. \quad (4.7)$$

Определим функцию точных значений соотношениями

$$z_j = (u(x_0, t_j), u(x_1, t_j), \dots, u(x_N, t_j))' \in Y.$$

Стартовые значения модели можно взять равными функции точных значений:

$$y_j = z_j = (\varphi(x_0, t_j), \varphi(x_1, t_j), \dots, \varphi(x_N, t_j))', \quad j = -m, \dots, 0.$$

Определения невязки без интерполяции (2.3) в схеме с весами для уравнения теплопроводности и невязки с интерполяцией (3.6) в общей схеме существенно отличаются. Однако справедливо утверждение, которое проверяется непосредственно по определениям.

Теорема 3. Пусть невязка метода в смысле (2.3) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_j^i липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I липшицев и имеет порядок погрешности p_0 на точном решении, тогда невязка с интерполяцией в смысле (3.6) имеет порядок $\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h^{p_2}$.

Вложение схемы с весами для уравнения теплопроводности в общую схему проведено, и из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполняется условие устойчивости (4.6), невязка (2.3) имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_j^i липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции I липшицев и имеет порядок погрешности p_0 на точном решении, тогда метод сходится с порядком $\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h^{p_2}$.

В частности, метод (2.2) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок сходимости $h^4 + \Delta^2$.

5. Пример численных расчетов

Рассмотрим следующее уравнение с переменным запаздыванием по переменной t :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{t^2/4 + x^2} (2a^2 t - t^2 - x^2)}{(t^2 + x^2)^2} \sin(u(x, t - t/2)) \quad (5.1)$$

при $a = 0.2$ с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, r) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}, \quad 0.5 \leq r \leq 1, \quad 0.5 \leq x \leq 4,$$

$$u(0.5, t) = \arcsin \frac{0.5}{\sqrt{t^2 + 0.25}}, \quad u(4, t) = \arcsin \frac{4}{\sqrt{t^2 + 16}}, \quad 1 \leq t \leq 5.$$

Это уравнение имеет точное решение $u(x, t) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{t^2 + x^2}}$. На рис. 1 приводится приближенное решение этого уравнения методом сеток (2.1) с весом (2.2), а в таблице — сравнение норм разности матриц точного и приближенного решений этого метода с явной схемой при разных шагах h и Δ . Явная схема является частным случаем метода (2.1) при

$$s = 0, \quad F_j^i(v^{i,j}(\cdot)) = f(x_i, t_j, u_j^i, v_{t_j}^{i,j}(\cdot)). \quad (5.2)$$

Т а б л и ц а

Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (5.1), полученные разными вариантами метода сеток (2.1) при разных шагах

Метод сеток	$N = 35$ $M = 20$	$N = 20$ $M = 20$	$N = 8$ $M = 20$	$N = 8$ $M = 40$	$N = 8$ $M = 100$	$N = 8$ $M = 200$
(2.1), (2.2) (с весом)	0.0044	0.0043	0.0040	0.0017	0.0002	0.0012
(2.1), (5.2) (явный)	24.0566	0.1254	0.1192	0.1178	0.1136	0.1069

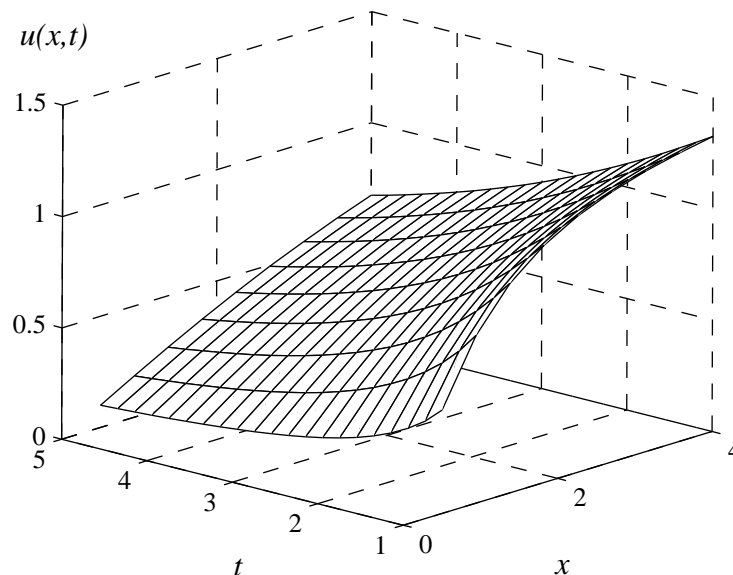


Рис. 1. Приближенное решение уравнения (5.1), полученное методом сеток (2.1) с весом (2.2), с числом точек разбиения по x равным 8 и по t равным 20.

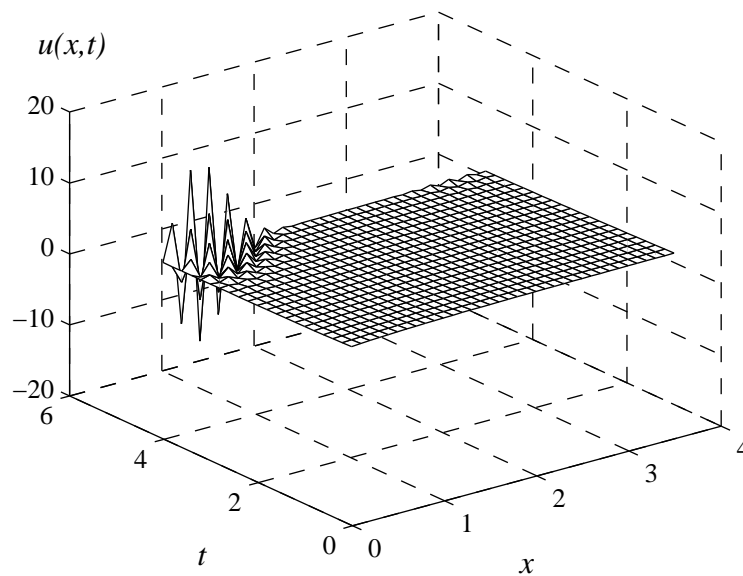


Рис. 2. Приближенное решение уравнения (5.1), полученное с помощью явной схемы метода сеток (2.1), (5.2), с числом точек разбиения по x равным 35 и по t равным 20.

Отметим, что эту схему можно также рассматривать как простейший вариант метода прямых [4]. Метод прямых состоит в том, что с помощью отношения конечных разностей аппроксимируется только $\partial^2 u / \partial x^2$, а производная $\partial u / \partial t$ сохраняется в дифференциальной форме. Таким образом, решение отыскивается вдоль прямых $x = \text{const}$ из системы функционально-дифференциальных уравнений с независимой переменной t . Если систему функционально-дифференциальных уравнений решать методом Эйлера, получим явную схему метода (2.1) с параметрами (5.2).

Нормы разности вычислялись по формуле

$$\|U\| = \max_{0 \leq j \leq M} \sum_{i=0}^N |u(x_i, t_j) - u_j^i|.$$

При реализации метода сеток для вычисления величин F_j^i в разностной схеме использовались кусочно-линейная интерполяция между узлами сетки и экстраполяция продолжением.

Рассмотренный пример показывает, что метод (2.1) с весом (2.2) для данного примера дает лучшую точность результатов, а также то, что он является более устойчивым в сравнении с явной схемой, которая демонстрирует расходимость при определенных соотношениях количества разбиений по x и по t (см. рис. 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wu J.** Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996. 428 с.
2. **Tavernini L.** Finite difference approximations for a class of Semilinear Volterra evolution problems // SIAM J. Numer. Anal. 1977. Vol. 14, no. 5. P. 931–949.
3. **Пименов В.Г.** Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вестн. Удмурт. ун-та. 2008. Вып. 2. С. 113–116. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
4. **Пименов В.Г., Ложников А.Б.** Алгоритмы численного решения уравнения теплопроводности с последствием // Проблемы динамического управления: сб. тр. фак-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / Изд. отдел фак-та ВМиК МГУ. Вып. 3. М.: МАКС Пресс, 2007. С. 161–169.

5. **Хайрер Э., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
6. **Bellen A., Zennaro M.** Numerical methods for delay differential equations, numerical mathematics and scientific computation. New York: Clarendon Press; Oxford University Press, 2003. 395 p.
7. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i -гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004. 256 с.
8. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 656 с.
9. **Пименов В.Г.** Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 105–114.

Пименов Владимир Германович

Поступила 28.06.2010

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. кафедрой

Уральский государственный университет им. А.М. Горького

e-mail: Vladimir.Pimenov@usu.ru

Ложников Андрей Борисович

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: ABLozhnikov@yandex.ru

УДК 517.98

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫМИ ЗАДАЧАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Д. К. Потапов

Рассматриваются задачи оптимального управления системами со спектральным параметром и разрывным оператором в банаховых пространствах. Вариационным методом получены достаточные условия непустоты множества допустимых пар “управление — состояние” в таких задачах, изучаются топологические свойства этого множества; получена теорема о существовании решения рассматриваемой задачи оптимизации. Общие результаты применяются к задачам оптимального управления распределенными системами эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. Устанавливаются предложения о непустоте и слабой замкнутости множества допустимых пар “управление — состояние”, приводятся достаточные условия существования оптимальной пары “управление — состояние”, исследуются свойства решения как функции управления. В качестве приложения рассмотрен также вопрос управления задачей Гольдштика.

Ключевые слова: оптимальное управление, спектральные задачи, разрывный оператор, вариационный метод, пара “управление — состояние”.

D. K. Potapov. Control of spectral problems for equations with discontinuous operators.

Optimal control problems for systems with a spectral parameter and a discontinuous operator in Banach spaces are considered. Sufficient conditions for the nonemptiness of the set of the acceptable “control–state” pairs in such problems are obtained by the variational method. Topological properties of this set are studied. Theorem on the existence of a solution in the considered optimization problem is established. The general results are applied to the optimal control problems for elliptic type distributed systems with a spectral parameter and a discontinuous nonlinearity. Propositions on the nonemptiness and the weak closedness of the set of the acceptable “control–state” pairs are proved, sufficient conditions for the existence of an optimal “control–state” pair are presented, and properties of the solution as a function of control are investigated. The issue of control in the Gol’dshik problem is considered as an application.

Keywords: optimal control, spectral problems, discontinuous operator, variational method, “control–state” pair.

Введение

Постановки задач оптимального управления системами с разрывными операторами обобщают известные постановки А.В. Фурсикова для систем с достаточно гладкими нелинейностями (см. работы [1; 2]), на которые в дальнейшем ссылался Ж.Л. Лионс в работе [3] и другие авторы, изучающие проблемы управления. Общие результаты об управляемых системах с разрывными операторами в банаховых пространствах получены В.Н. Павленко в работе [4] методом монотонных операторов и в работе [5] вариационным методом. В.Н. Павленко установлены предложения о непустоте и слабой замкнутости множества допустимых пар “управление — состояние”, приведены достаточные условия существования оптимальной пары “управление — состояние” для изучаемого класса задач управления. В работах [4–7] рассматривались задачи управления распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями, обобщающие соответствующие постановки задач с непрерывными нелинейностями. Данная работа является продолжением этих исследований и посвящена существованию решения для некоторого класса экстремальных задач, включающих разрывный оператор и некоторый скалярный параметр, называемый спектральным. Рассматриваемый класс задач возник из ряда содержательных ситуаций, к которым неприменимы традиционные подходы.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления нелинейной системой со спектральным параметром и разрывным оператором в банаховом пространстве. Найдены

достаточные условия непустоты множества допустимых пар “управление — состояние” для таких задач, исследуются топологические свойства этого множества. Получена теорема о существовании решения рассматриваемой задачи оптимизации. Сформулированные теоремы доказываются вариационным методом [5–14] и развивают результаты работ [4; 5]. Полученные общие теоремы могут быть применены к исследованию управляемых распределенных систем со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью. Такие системы вызывают интерес как в теоретических исследованиях, так и при решении многих прикладных задач. Математические модели большого числа задач гидродинамики, теплофизики, электрофизики, теории управления, связанные с анализом процессов, меняющихся скачкообразно при некоторых значениях фазовых переменных, приводят к уравнениям с разрывными нелинейностями (например, системы с релейными нелинейностями, системы переменной структуры автоматического управления, задачи об отрывных течениях, процессы в многослойных средах, задача Джоуля о нагреве неоднородного проводника, помещенного в постоянное электрическое поле, в частности, явление сверхпроводимости, задачи с препятствием и о протекании воды через земляную плотину и др.). Класс нелинейных эллиптических краевых задач, содержащих спектральный параметр и разрывную нелинейность, включает известную модель М.А. Гольдштика об отрывных течениях несжимаемой жидкости [15], математическую модель вихревых колец в идеальной жидкости Л.Э. Френкеля, М.С. Бергера [16], а также рассмотренную Х.Дж. Купером [17] задачу о нагреве проводника при постоянном напряжении и постоянной температуре на поверхности проводника в случае, когда электропроводность материала при переходе через определенные температуры меняется скачком. Поэтому в данной работе рассматриваются также задачи оптимального управления распределенными системами эллиптического типа второго порядка со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью. Устанавливаются предложения о непустоте и слабой замкнутости множества допустимых пар “управление — состояние”, приводятся достаточные условия существования оптимальной пары “управление — состояние” для таких систем, изучаются свойства решения уравнения состояния как функции управления. Сформулированные теоремы также доказываются вариационным методом и развивают результаты, полученные в работах [4–7].

В отличие от работ [4; 5] в данной статье рассматриваемые уравнения состояния управляемой системы содержат спектральный параметр, коэрцитивность оператора в уравнении состояния не предполагается. Ранее спектральные задачи для уравнений с разрывными операторами в банаховых пространствах рассматривались в работах [8; 9; 12; 14]. В данной работе рассмотрим вопрос управления такими системами. В отличие от работ [4–6] в данной статье допускается, что уравнение состояния управляемой распределенной системы может определять и резонансную краевую задачу, рассматриваются уравнения второго порядка, а в отличие от работы [7] помимо резонансного рассматривается также и коэрцитивный случай. Кроме того, в отличие от работ [4–7] рассматриваемые уравнения состояния управляемой системы содержат спектральный параметр, рассмотрены все краевые условия, а не только условие Дирихле. Ранее уравнения эллиптического типа второго порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью изучались в работах [8–11; 13; 14; 18; 19]. В данной работе рассмотрим также вопрос управления такими системами.

1. Общие результаты

Пусть E — вещественное рефлексивное банахово пространство, E^* — сопряженное с E пространство. Управляемая система в пространстве E описывается уравнением состояния

$$Au - \lambda Tu = Bv, \quad (1.1)$$

где A — линейный самосопряженный оператор из E в E^* , λ — положительный параметр, $T : E \rightarrow E^*$ — разрывное, компактное или антимонотонное отображение, ограниченное на E (см. определения ниже), оператор $B : U \rightarrow E^*$ линейный и ограниченный (U — рефлексивное

банахово пространство управлений), управление $v \in U_{\text{ad}} \subset U$ (U_{ad} — множество всех допустимых управлений для системы (1.1)). Через (z, x) будем обозначать значение функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $T : E \rightarrow E^*$ называется *ограниченным* на E , если существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\|Tx\| \leq M \quad \forall x \in E.$$

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $T : E \rightarrow E^*$ называется *компактным* на E , если оно переводит ограниченные множества из E в предкомпактные в E^* , т. е. множество TG предкомпактно в E^* для любого ограниченного подмножества G множества E .

О п р е д е л е н и е 3. Отображение $T : E \rightarrow E^*$ называется *монотонным* на E , если

$$(Tx - Ty, x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in E.$$

Отображение $T : E \rightarrow E^*$ называют *антимонотонным*, если отображение $-T$ монотонно.

О п р е д е л е н и е 4. Отображение $T : E \rightarrow E^*$ называется *квазипотенциальным*, если существует функционал $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, для которого верно равенство

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (T(x+th), h) dt \quad \forall x, h \in E$$

(интеграл понимается в смысле Лебега). При этом f называют *квазипотенциалом* оператора T .

О п р е д е л е н и е 5. Оператор $T : E \rightarrow E^*$ называется *коэрцитивным*, если

$$(Tu, u) \geq c(\|u\|) \cdot \|u\| \quad \forall u \in E,$$

где $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная на \mathbb{R}_+ функция и $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = +\infty$, и *некоэрцитивным* в противном случае.

О п р е д е л е н и е 6. Элемент $x \in E$ называется *точкой разрыва* оператора $T : E \rightarrow E^*$, если найдется $h \in E$, для которого либо $\lim_{t \rightarrow 0} (T(x+th), h)$ не существует, либо

$$\lim_{t \rightarrow 0} (T(x+th), h) \neq (Tx, h).$$

О п р е д е л е н и е 7. Элемент $x \in E$ называется *регулярной точкой* для оператора $T : E \rightarrow E^*$, если для некоторого $h \in E$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +0} (T(h+t(x-h)), x-h) < 0.$$

О п р е д е л е н и е 8. Отображение $T : E \rightarrow E^*$ называется *радиально непрерывным* в точке $x \in E$, если для любого $h \in E$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (T(x+th), h) = (Tx, h).$$

О п р е д е л е н и е 9. *Секвенциальным замыканием* локально ограниченного отображения $T : E_1 \rightarrow E_2$ (E_1, E_2 — банаховы пространства) называется отображение ST из E_1 в E_2 (вообще говоря, многозначное), значение STx ($x \in E_1$) которого совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества всех слабо предельных точек в E_2 последовательностей вида $\{Tx_n\}$, где $x_n \rightarrow x$ в E_1 .

О п р е д е л е н и е 10. *Обобщенным решением* уравнения (1.1) при фиксированном управлении v называется элемент $u \in E$, удовлетворяющий включению

$$Au - Bv \in \lambda STu,$$

где ST — секвенциальное замыкание оператора T .

Для $v \in U_{\text{ad}}$ обозначим через Vv множество обобщенных решений уравнения (1.1). Допускается, что для некоторых $v \in U_{\text{ad}}$ система (1.1) либо не имеет решений, либо имеет более одного решения, т. е. возможен сингулярный случай [3].

О п р е д е л е н и е 11. Упорядоченная пара (\hat{v}, \hat{u}) называется *допустимой парой* “управление — состояние” для системы (1.1), если $\hat{v} \in U_{\text{ad}}$, а \hat{u} — обобщенное решение уравнения (1.1) при $v = \hat{v}$.

На множестве D всех допустимых пар “управление — состояние” для системы (1.1) рассматривается целевая функция стоимости

$$J(v, u) = \|u - u_0\|_Z^l + \beta \|v\|_U^\mu, \quad (1.2)$$

где Z — банахово пространство, содержащее E , $u_0 \in Z$, l, β, μ — положительные константы, $\|\cdot\|_Y$ — норма в пространстве Y .

Ставится задача об отыскании такой пары $(w, z) \in D$, что

$$J(w, z) = \inf_D J(v, u). \quad (1.3)$$

О п р е д е л е н и е 12. Пара $(w, z) \in D$, удовлетворяющая (1.3), называется *оптимальной*.

Основными результатами данного раздела являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) A — линейный самосопряженный оператор, действующий из вещественного рефлексивного банахова пространства E в сопряженное пространство E^* ; пространство E представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств $E_1 = \ker A$ и E_2 , причем существует положительная постоянная α такая, что $(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2$ для каждого $u \in E_2$;

2) отображение T компактное или антимонотонное, квазипотенциальное (с квазипотенциалом f) и ограниченное на E ; $f(0) = 0$ и для некоторого $u_0 \in E$ значение $f(u_0) > 0$; если $E_1 \neq \{0\}$, то дополнительно предполагается, что $\lim_{u \in E_1, \|u\| \rightarrow +\infty} f(u) = -\infty$;

3) пространство управлений U рефлексивное, множество допустимых управлений $U_{\text{ad}} \subset U$ непусто и слабо замкнуто, оператор $B : U \rightarrow E^*$ линейный и ограниченный, пространство E непрерывно вкладывается в пространство Z из (1.2).

Тогда для любого $v \in U_{\text{ad}}$ существует обобщенное решение уравнения (1.1), множество D всех допустимых пар “управление — состояние” для системы (1.1) непусто и слабо замкнуто, задача оптимального управления (1.3) имеет решение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно известно, что последовательность $\{v_n\} \subset U_{\text{ad}}$ слабо сходится к v в U . Тогда, если $u_n \in Vv_n$, то из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, которая сильно сходится к $u \in Vv$ в E_3 , где E_3 — некоторое вещественное банахово пространство, в которое пространство E компактно вложено. Если Vv состоит из единственной функции u , то $u_n \rightarrow u$ в E_3 .*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Как и в работе [14], при сделанных предположениях и любом фиксированном управлении v устанавливается, что

$$0 \in S(Au - \lambda Tu - Bv) = Au - Bv - \lambda STu,$$

что равносильно $Au - Bv \in \lambda STu$. Данное включение означает, что найдется $u \in E$, которое является обобщенным решением уравнения (1.1). Таким образом, для любого $v \in U_{\text{ad}}$ существует обобщенное решение уравнения (1.1). Непустота множества D установлена.

Пусть $\{(v_n, u_n)\} \subset D$, v_n слабо сходится к v в U и u_n слабо сходится к u в E . Так как U_{ad} слабо замкнуто, то $v \in U_{\text{ad}}$. Как и в работах [5; 14], показывается, что $Au - Bv \in \lambda STu$, (v, u) — допустимая пара “управление — состояние” для системы (1.1) и, значит, $(v, u) \in D$, что означает слабую замкнутость D .

Пусть $d = \inf_D J(v, u)$ и $\{(v_n, u_n)\} \subset D$ — минимизирующая последовательность для функционала качества $J(v, u)$ на D . Функционал $J(v, u)$ слабо полунепрерывен снизу на D [20]. Как и в работах [4; 5], устанавливается, что $d = \lim_{k \rightarrow \infty} J(v_{n_k}, u_{n_k}) \geq J(w, z)$ (v_{n_k} слабо сходится к w в U , u_{n_k} слабо сходится к z в E , возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ существует в силу рефлексивности пространств U и E и ограниченности последовательностей $\{v_n\}$ и $\{u_n\}$ в U и E соответственно, $(w, z) \in D$ в силу слабой замкнутости D). Так как $d = \inf_D J(v, u)$, то из последнего неравенства следует, что $J(w, z) = d$, т. е. задача (1.3) имеет решение. Теорема 1 доказана. \square

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. В работе [14] показано, что если условие

$$(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2$$

верно на всем E , то оператор $A - \lambda T$ коэрцитивный при любом $\lambda \in \mathbb{R}$, а если $E_1 \neq \{0\}$, то оператор $A - \lambda T$ некоэрцитивный.

Пусть $\{v_n\} \subset U_{\text{ad}}$ и v_n слабо сходится к v в U , $u_n \in Vv_n$. Последовательность $\{v_n\}$ ограничена в U . Как и в работах [4; 5], для коэрцитивного отображения $A - \lambda T$ показывается, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена в E . Если отображение $A - \lambda T$ некоэрцитивно, то ограниченность последовательности $\{u_n\}$ в E доказывается по схеме, предложенной в работе [11] для резонансного случая, что соответствует в операторной постановке некоэрцитивности оператора $A - \lambda T$. Из рефлексивности пространства E получаем существование подпоследовательности $\{u_{n_k}\}$ такой, что u_{n_k} слабо сходится к u . Отсюда следует слабая сходимости u_n к u в E . Если рассмотреть V как оператор из $U_{\text{ad}} \subset U$ в E_3 , то V усиленно непрерывный [20]. Получаем, что $\{Vv_n\}$ сильно сходится к Vv в E_3 . Таким образом, из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, которая сильно сходится к $u \in Vv$ в E_3 .

Как и при доказательстве теоремы 1, устанавливается, что u — обобщенное решение уравнения (1.1). Поэтому, если множество обобщенных решений уравнения (1.1) состоит из единственной функции u , то $u_n \rightarrow u$ в E_3 , поскольку в этом случае из любой подпоследовательности последовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сильно сходится к u в E_3 . Теорема 2 доказана. \square

З а м е ч а н и е 1. Согласно результатам работ [8; 9; 12; 14], если в теореме 1 для компактного отображения T дополнительно предположить, что $\lim_{t \rightarrow +0} (T(u + th) - Tu, h) \geq 0$ для всех $u, h \in E$, а для антимонотонного отображения T дополнительно предположить, что любая точка разрыва оператора T при $\lambda > \lambda_0 > 0$ (λ_0 — величина, начиная с которой уравнение $Au = \lambda Tu$ разрешимо) регулярная для $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$, то для любого $v \in U_{\text{ad}}$ существует классическое решение уравнения (1.1), являющееся точкой радиальной непрерывности оператора T . Отметим, что в работах [4; 5] рассматривались только обобщенные решения.

З а м е ч а н и е 2. Усиленную непрерывность оператора $V : U_{\text{ad}} \subset U \rightarrow E_3$ в теореме 2 можно рассматривать как аналог свойства S , предложенного А.В. Кряжимским и К.Э. Ловцким в работе [21] для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

2. Приложения

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$) рассматривается управляемая распределенная система вида

$$Lu(x) \equiv - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x) = \lambda g(x, u(x)) + Bv(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$Gu|_{\Gamma} = 0, \quad (2.2)$$

где L — равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $c \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\bar{\Omega})$; λ — положительный параметр; функция $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ суперпозиционно измеримая и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на \mathbb{R} разрывы только первого рода, $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)] \forall u \in \mathbb{R}$, $g_-(x, u) = \underline{\lim}_{\eta \rightarrow u} g(x, \eta)$, $g_+(x, u) = \overline{\lim}_{\eta \rightarrow u} g(x, \eta)$, $|g(x, u)| \leq a(x) \forall u \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q \geq 2n/(n+2)$; оператор $B : U \rightarrow \mathbf{L}_q(\Omega)$ линейный и ограниченный (U — банахово пространство управлений); функция $v(x)$ в уравнении (2.1) играет роль управления, управление $v \in U_{\text{ad}} \subset U$ (U_{ad} — множество всех допустимых управлений для системы (2.1), (2.2)); граничное условие (2.2) является либо условием Дирихле $u(x)|_{\Gamma} = 0$, либо условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x)|_{\Gamma} = 0$$

с кономальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, x_j),$$

\mathbf{n} — внешняя нормаль к границе Γ , $\cos(\mathbf{n}, x_j)$ — направляющие косинусы нормали \mathbf{n} , либо третьим краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) + \sigma(x)u(x)|_{\Gamma} = 0,$$

в котором функция $\sigma \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательна и не равна тождественно нулю на Γ .

О п р е д е л е н и е 13. *Обобщенным решением* задачи (2.1), (2.2) при фиксированном управлении v называется функция $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}_q^1(\Omega)$, удовлетворяющая для почти всех $x \in \Omega$ включению

$$Lu(x) - Bv(x) \in \lambda[g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))].$$

Отметим, что определение обобщенного решения для уравнений с разрывными нелинейностями оказывается адекватным в ряде важных конкретных прикладных задач (см., например, работу [22]). Кроме того, К.Ч. Чанг в работе [22] выделил класс разрывных нелинейностей, названных оптимальными, для которых обобщенные решения являются сильными решениями (см. определение ниже).

Как и ранее, допускается, что для некоторых $v \in U_{\text{ad}}$ задача (2.1), (2.2) либо не имеет решений, либо имеет более одного решения, т. е. также возможен сингулярный случай. Для $v \in U_{\text{ad}}$ обозначим через Vv множество обобщенных решений задачи (2.1), (2.2).

О п р е д е л е н и е 14. Упорядоченная пара (\hat{v}, \hat{u}) называется *допустимой парой* “управление — состояние” для системы (2.1), (2.2), если $\hat{v} \in U_{\text{ad}}$, а \hat{u} — обобщенное решение задачи (2.1), (2.2) при $v = \hat{v}$.

Пусть $X = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, если (2.2) — граничное условие Дирихле, и $X = \mathbf{H}^1(\Omega)$, если (2.2) — граничное условие Неймана или третье краевое условие. На множестве D всех допустимых пар “управление — состояние” для системы (2.1), (2.2) определена функция стоимости

$$J(v, u) = \|u - u_0\|_Z^l + \beta \|v\|_U^\mu, \quad (2.3)$$

где Z — функциональное банахово пространство на Ω , в которое пространство X непрерывно вложено, $u_0 \in Z$, l, β, μ — положительные постоянные, $\|\cdot\|_Y$ — норма в пространстве Y . Ставится задача о нахождении пары $(w, z) \in D$ такой, что

$$J(w, z) = \inf_D J(v, u). \quad (2.4)$$

О п р е д е л е н и е 15. Пара $(w, z) \in D$, удовлетворяющая (2.4), называется *оптимальной*.

Таким образом, в данной работе рассматривается вопрос о существовании решения задачи оптимального управления (2.4).

Положим

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x) u^2(x) dx$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана;

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x) u^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \sigma(s) u^2(s) ds$$

в случае третьего краевого условия.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия:

- 1) $J_1(u) \geq 0 \quad \forall u \in X$;
- 2) для почти всех $x \in \Omega$ выполнены соотношения $g(x, 0) = 0$ и $|g(x, u)| \leq a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R}$, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$, фиксирована;
- 3) найдется $u_0 \in X$, для которого имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} dx \int_0^{u_0(x)} g(x, s) ds > 0;$$

- 4) если пространство $N(L)$ решений задачи

$$\begin{cases} Lu = 0, & x \in \Omega, \\ Gu|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предполагается, что

$$\lim_{u \in N(L), \|u\| \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds = -\infty;$$

- 5) пространство управлений U рефлексивное, множество допустимых управлений $U_{\text{ад}} \subset U$ непусто и слабо замкнуто, оператор $B : U \rightarrow \mathbf{L}_q(\Omega)$ линейный и ограниченный, пространство X непрерывно вкладывается в пространство Z из (2.3).

Тогда для любого $v \in U_{\text{ад}}$ существует обобщенное решение задачи (2.1), (2.2), множество D всех допустимых пар “управление – состояние” для системы (2.1), (2.2) непусто и слабо замкнуто, задача оптимального управления (2.4) имеет решение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1), 3)–5) теоремы 3 и дополнительно условия

- 1') для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ невозрастающая на \mathbb{R} и для некоторой $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q = 2n/(n+2)$, справедливо неравенство $|g(x, u)| \leq a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R}$;

- 2') для почти всех $x \in \Omega$ точки разрыва функции $g(x, \cdot)$ лежат на плоскостях $u = u_i$, $i \in I$ (I не более чем счетно), и если $g(x, u_i-) > g(x, u_i+)$, то $g(x, u_i-)g(x, u_i+) > 0$ для любого $i \in I$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 3.

З а м е ч а н и е 3. Неравенство $q > 2n/(n + 2)$ (см. условие 2) теоремы 3) обеспечивает компактность вложения соболевского пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ [23]. В данной работе рассмотрен также критический случай $q = 2n/(n + 2)$ (см. условие 1') теоремы 4) при дополнительном ограничении на нелинейность: $g(x, u)$ — невозрастающая по u . Отметим, что в этой ситуации оператор, порождаемый нелинейностью, не компактен (нет компактности вложения $\mathbf{H}^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$). В работе [7] предполагалось, что $q > n$.

Теоремы 3, 4 также доказываются вариационным методом. Их доказательство сводится к проверке выполнения условий теоремы 1 данной работы. Отметим, что факт выполнения условий 1), 2) данной теоремы для соответствующих эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями установлен в работах [8; 9; 14]. Условие 3) теоремы 1 идентично условию 5) теоремы 3. Тем самым все условия теоремы 1 выполнены, поэтому справедливо утверждение теоремы 1, а значит, и теорем 3, 4. Теоремы 3, 4 доказаны. \square

Понятие обобщенного решения является центральным в данной работе. Укажем на его взаимосвязь с понятиями сильного и полуправильного решений (см. определения ниже). Полуправильные решения были введены М.А. Красносельским и А.В. Покровским [24] для интегральных уравнений и уравнений эллиптического типа второго порядка с разрывными нелинейностями.

О п р е д е л е н и е 16. *Сильным решением* задачи (2.1), (2.2) при фиксированном управлении v называется функция $u \in \mathbf{W}_r^2(\Omega)$, $r > 1$, которая удовлетворяет для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (2.1) и для которой след $G_u(x)$ на Γ равен нулю.

О п р е д е л е н и е 17. *Полуправильным решением* задачи (2.1), (2.2) при фиксированном управлении v называется такое сильное ее решение u , значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

О п р е д е л е н и е 18. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Назовем $u \in \mathbb{R}$ *прыгающим разрывом* функции f , если $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim_{s \rightarrow u\pm} f(s)$.

З а м е ч а н и е 4. Согласно результатам работ [8; 14], если в теореме 3 дополнительно для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы, то для любого $v \in U_{\text{ад}}$ существует полуправильное решение задачи (2.1), (2.2). При выполнении условий теоремы 4 согласно работам [9; 14] для любого $v \in U_{\text{ад}}$ существует полуправильное решение задачи (2.1), (2.2). Отметим, что в работах [4–7] рассматривались только обобщенные решения.

В работе [25] К.Ч. Чангом были найдены условия, при выполнении которых обобщенные решения задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа с разрывной нелинейностью вида (2.1), (2.2) $\left(L \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, v \equiv 0 \right)$ являются сильными решениями, а именно, для почти всех $x \in \Omega$ значение $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$ и для любого $u \in \mathbb{R}$ функция $g(x, u)$ удовлетворяет (C') -условию, т. е. множество $S = \{(x, u) \in \Omega \times \mathbb{R} : g(x, u-) \neq g(x, u+)\}$ является объединением не более чем счетного семейства поверхностей класса $\mathbf{W}_{1,loc}^2$ за исключением, быть может, множества, проекция которого на Ω имеет меру нуль; причем, если какие-либо две из этих поверхностей совпадают в некоторой точке, то они совпадают и в некоторой окрестности этой точки, и для почти всех $x \in \Omega$ из неравенства $g(x, u-) \neq g(x, u+)$ следует, что (x, u) лежит на одной из поверхностей S , и если $\varphi(x)$ — локальное представление этой поверхности вблизи точки (x, u) , то либо $L(\varphi(x)) \in \lambda[g_-(x, \varphi(x)), g_+(x, \varphi(x))]$, либо $L(\varphi(x)) = \lambda g(x, \varphi(x))$. Кроме того, в работе [22] К.Ч. Чанг для дифференциальных уравнений второго порядка с фиксированной линейной частью L выделил класс разрывных нелинейностей $g(x, u)$, названных (L, g) -оптимальными, для которых любое обобщенное решение $u(x)$ является сильным решением уравнения $Lu(x) = \lambda g(x, u(x))$, $x \in \Omega$. Однако результаты К.Ч. Чанга о существовании сильных решений задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа с разрывными по фазовой переменной нелинейностями не включают теоремы существования, установленные М.А. Красносельским и А.В. Покровским, поскольку в них отсутствуют ограничения на структуру множества точек разрыва нелинейностей типа (C') -условия.

З а м е ч а н и е 5. По сравнению с работами других авторов по проблеме существования сильных решений нелинейных задач на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями автором данной работы ослаблены ограничения на множество точек разрыва нелинейности $g(x, u)$ по u ; допускается, что исследуемые краевые задачи могут быть резонансными, а оператор, порождаемый нелинейностью, не компактен; в большинстве работ других авторов полуправильные решения не рассматривались.

Справедлива также следующая теорема.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теорем 3, 4 и дополнительно известно, что последовательность $\{v_n\} \subset U_{\text{ад}}$ слабо сходится к v в U . Тогда, если $u_n \in Vv_n$, то из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, которая сильно сходится к $u \in Vv$ в X_1 , где X_1 — некоторое вещественное банахово пространство, в которое пространство X компактно вложено. Если Vv состоит из единственной функции u , то $u_n \rightarrow u$ в X_1 .

Ввиду идентичности условий теорем 2, 5 имеет место утверждение теоремы 2, а следовательно, и справедливо утверждение теоремы 5.

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим также конкретную прикладную задачу с разрывами — задачу об отрывных течениях несжимаемой жидкости М.А. Гольдштика [15]. Как показано в работах [14; 18; 19], математическая модель задачи Гольдштика сводится к распределенной системе эллиптического типа второго порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью следующего вида:

$$-\Delta u = \omega g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (2.5)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2.6)$$

где

$$g(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x). \end{cases}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, ω — завихренность, Γ — кусочно-гладкий контур плоской ограниченной области Ω , функция ψ_0 удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta \psi_0 = 0, \\ \psi_0|_{\Gamma} = \varphi(s), \end{cases}$$

φ — непрерывная неотрицательная и отличная от нуля лишь на части контура функция.

Рассмотрим вопрос управления такой системой. А именно, рассматривается управляемая распределенная система

$$-\Delta u = \omega g(x, u(x)) + Bv(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.7)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2.8)$$

где спектральный параметр — завихренность $\omega > 0$; оператор $B : U \rightarrow \mathbf{L}_q(\Omega)$ линейный и ограниченный, U — рефлексивное банахово пространство управлений, $q > 1$; управление $v \in U_{\text{ад}} \subset U$, $U_{\text{ад}}$ — множество всех допустимых управлений для системы (2.7), (2.8) — непусто и слабо замкнуто; пространство $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство Z из (2.3).

Проверим, что для системы (2.7), (2.8) выполнены все условия теоремы 3 данной работы. Имеем

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_{x_i}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx = \frac{1}{2} \|u\|^2 \geq 0 \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Выполнено условие 1) теоремы 3.

В работах [14; 18; 19] проверено выполнение условий 2), 3) теоремы 3 для задачи Гольдшти-ка (2.5), (2.6). Тем самым условия 2), 3) теоремы 3 выполняются и для задачи (2.7), (2.8).

Поскольку пространство $N(-\Delta)$ решений задачи

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

нулевое (коэрцитивный случай), то дополнительное предположение в условии 4) теоремы 3 не требует выполнения.

Условие 5) теоремы 3 выполнено согласно сделанным выше предположениям в постановке задачи (2.7), (2.8) относительно пространства управлений U , множества допустимых управлений U_{ad} , оператора B , непрерывности вложения пространства $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в пространство Z из (2.3).

Итак, все условия теоремы 3 для задачи (2.7), (2.8) выполнены. Поэтому для любого $v \in U_{\text{ad}}$ существует обобщенное решение задачи (2.7), (2.8), множество D всех допустимых пар “управление — состояние” для системы (2.7), (2.8) непусто и слабо замкнуто, задача оптимального управления (2.4) имеет решение.

Как и в работах [14; 18], устанавливается, что функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы для почти всех $x \in \Omega$. Поэтому согласно замечанию 4 для любого $v \in U_{\text{ad}}$ существует полуправильное решение задачи (2.7), (2.8).

Если в задаче (2.7), (2.8) дополнительно потребовать, чтобы последовательность $\{v_n\} \subset U_{\text{ad}}$ слабо сходилась к v в U , то согласно теореме 5 данной работы справедливо утверждение: если $u_n \in Vv_n$, то из последовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, которая сильно сходится к $u \in Vv$ в X_1 , где X_1 — некоторое вещественное банахово пространство, в которое пространство $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ компактно вложено; если Vv состоит из единственной функции u , то $u_n \rightarrow u$ в X_1 (Vv — множество обобщенных решений задачи (2.7), (2.8)).

Так как $q > 1$, то в качестве соответствующего функционального пространства в данной задаче можно взять пространство $\mathbf{C}(\bar{\Omega})$, поскольку в силу теоремы вложения Соболева [23] пространство $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $\mathbf{C}(\bar{\Omega})$. Потребовав, в частности, $q > 2$, будем иметь сильную сходимость в равномерной метрике $\mathbf{C}_1(\bar{\Omega})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фурсиков А.В.** О некоторых задачах управления и о результатах, касающихся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных систем Навье — Стокса и Эйлера // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252, № 5. С. 1066–1070.
2. **Фурсиков А.В.** Задачи управления и теоремы, касающиеся однозначной разрешимости смешанной краевой задачи для трехмерных уравнений Навье — Стокса и Эйлера // Мат. сб. 1981. Т. 115(157), № 2(6). С. 281–306.
3. **Лионс Ж.Л.** Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.
4. **Павленко В.Н.** Метод монотонных операторов в задачах управления распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 8. С. 49–54.
5. **Павленко В.Н.** Управление распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Вестн. ЧелГУ. Сер. 3. 1999. № 2(5). С. 56–67. (Математика. Механика.)
6. **Павленко В.Н.** Управление распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 9. С. 1586–1587.
7. **Павленко В.Н., Кожяева Л.Б.** Управление эллиптическими резонансными системами с разрывными нелинейностями // Вестн. ЧелГУ. Сер. 3. 2002. № 1(6). С. 147–154. (Математика. Механика. Информатика.)
8. **Павленко В.Н., Потапов Д.К.** О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 911–919.
9. **Потапов Д.К.** О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. 2004. Вып. 4. С. 125–132. (Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.)

10. **Потапов Д.К.** Устойчивость основных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью в коэрцитивном случае // Изв. РАН. 2005. Т. 9, № 1–2. С. 159–165. (Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление.)
11. **Павленко В.Н., Потапов Д.К.** Аппроксимация краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. 2005. № 4. С. 49–55.
12. **Potapov D.K.** Spectral problems for equations with discontinuous monotone operators // J. Math. Sci. 2007. Vol. 144, no. 4. P. 4232–4233.
13. **Потапов Д.К.** Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. С. 715–716.
14. **Потапов Д.К.** Задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. СПб.: ИБП, 2008. 99 с.
15. **Гольдштик М.А.** Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 6. С. 1310–1313.
16. **Fraenkel L.E., Berger M.S.** A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid // Acta Math. 1974. Vol. 132, no. 1. P. 13–51.
17. **Kuiper H.J.** On positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. 1971. Vol. 20, no. 2–3. P. 113–138.
18. **Потапов Д.К.** Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Изв. РАН. 2004. Т. 8, № 3–4. С. 163–170. (Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление.)
19. **Потапов Д.К.** Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика // Мат. заметки. 2010. Т. 87, вып. 2. С. 262–266.
20. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
21. **Кряжимский А.В., Ловцкий К.Э.** О слабой непрерывности движений по управлению для управляемых дифференциальных включений и систем с разрывной правой частью // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1895–1905.
22. **Chang K.C.** Free boundary problems and the set-valued mappings // J. Different. Eq. 1983. Vol. 49, no. 1. P. 1–28.
23. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1982. 336 с.
24. **Красносельский М.А., Покровский А.В.** Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 3. С. 506–509.
25. **Chang K.C.** Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations // J. Math. Anal. and Appl. 1981. Vol. 80, no. 1. P. 102–129.

Потапов Дмитрий Константинович

Поступила 22.06.2010

канд. физ.-мат. наук

доцент

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: potapov@apmath.spbu.ru

УДК 517.83

**РАВНОВЕСНЫЕ ПОВЕДЕНИЯ ИГРОКОВ
В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОВТОРЯЮЩЕЙСЯ ИГРЕ
 ε -НАИЛУЧШИХ ОТВЕТОВ РАЗМЕРНОСТИ 2×2**

А. В. Райгородская

Исследуется стохастическая бесконечная повторяющаяся игра ε -наилучших ответов, в которой биматричная 2×2 игра последовательно разыгрывается в бесконечном числе раундов. Вычисляются пределы ожидаемых средних выигрышей игроков, получаемых в n первых раундах игры, при $n \rightarrow \infty$. Данные пределы принимаются за ожидаемые средние выигрыши игроков бесконечной повторяющейся игры ε -наилучших ответов. Описываются равновесные по Нэшу поведения игроков. Показывается, что равновесные выигрыши игроков превосходят их выигрыши в детерминированной игре наилучших ответов.

Ключевые слова: повторяющиеся игры, биматричные игры, наилучший ответ.

A. V. Raigorodskaya. Equilibrium behaviors of the players in an infinitely repeated 2×2 ε -best response game.

A stochastic infinitely repeated ε -best response game is analyzed, in which a 2×2 bimatrix game is played sequentially in an infinite number of rounds. The limits of the players' expected average gains in the first n rounds of the game as $n \rightarrow \infty$ are calculated. These limits are taken as the players' expected average gains in the infinitely repeated ε -best response game. The players' Nash-equilibrium behaviors are described. It is shown that the players' equilibrium gains exceed their gains in the deterministic best-response game.

Keywords: repeated games, bimatrix games, best response.

1. Введение

В теории повторяющихся (эволюционных) игр, изучающей модели принятия рациональных решений в процессах многократного взаимодействия игроков (см., например, [1–7]), сравнение различных режимов взаимодействия производится, как правило, с позиции динамических систем: оценивается, каким образом столкновение различных поведенческих стратегий влияет на последовательность принимаемых решений. Основы теоретико-игрового подхода к анализу альтернативных способов принятия решений были заложены в [8], где введены в рассмотрение игры на классах ограниченно рациональных поведенческих стратегий игроков и определено понятие равновесных наборов поведенческих стратегий. Подход к оптимизации траекторий повторяющихся игр на классах поведенческих стратегий игроков, основанный на методах математической теории управления, был предложен в [9].

Данная работа следует в русле подхода [8]. Рассматривается повторяющаяся биматричная игра размерности 2×2 , в которой выбор стратегии каждым игроком в каждом последующем раунде диктуется желанием данного игрока наилучшим для себя образом ответить на последнее действие партнера. Отправной моделью служит таким образом повторяющаяся игра наилучших ответов, в которой данное правило принятия решений применяется без каких-либо отклонений. Затем классы поведенческих стратегий игроков расширяются: каждому игроку разрешается принимать решение о выборе своей чистой стратегии на следующем раунде, основываясь на результате случайного эксперимента. Последний генерируется произвольной смешанной стратегией игрока, которая предписывает большую, но, вообще говоря, отличную от 1, вероятность наилучшему ответу на чистую стратегию партнера, реализованную в предшествующем раунде; при этом в каждом последующем раунде допускается ненулевая вероятность выбора игроком своего наихудшего ответа на последнюю из реализованных чистых стратегий

партнера. Такие поведенческие стратегии игроков названы в работе функциями ε -наилучшего ответа.

В разд. 2 вводится в рассмотрение детерминированная бесконечная повторяющаяся игра наилучших ответов и связанные с ней средние выигрыши игроков.

В разд. 3 определяется стохастическая бесконечная повторяющаяся игра ε -наилучших ответов, в которой поведения игроков моделируются условными смешанными стратегиями, называемыми в работе функциями ε -наилучшего ответа.

Разд. 4 посвящен доказательству существования и вычислению предела ожидаемых средних выигрышей игроков, получаемых в n первых раундах бесконечной повторяющейся игры ε -наилучших ответов с фиксированными функциями ε -наилучшего ответа игроков, при $n \rightarrow \infty$. Данные пределы принимаются за ожидаемые средние выигрыши игроков в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов при данных функциях ε -наилучшего ответа.

В разд. 5 рассматривается игра, в которой стратегиями игроков выступают их функции ε -наилучшего ответа, а выигрышами — соответствующие им ожидаемые средние выигрыши в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов. Описываются равновесные по Нэшу пары функций ε -наилучшего ответа. Показывается, что равновесные выигрыши игроков в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов превосходят их выигрыши в детерминированной игре наилучших ответов.

2. Бесконечная повторяющаяся игра наилучших ответов

Рассмотрим биматричную игру размерности 2×2 с матрицами выигрышей $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1,2}$ соответственно первого и второго игроков. Как обычно, строки матриц выигрыша соответствуют номерам чистых стратегий первого игрока, столбцы — номерам стратегий второго игрока. Под смешанной стратегией первого игрока понимаем, как обычно, произвольное вероятностное распределение $(\alpha, 1 - \alpha)$ на множестве стратегий этого игрока; здесь α — вероятность выбора игроком своей чистой стратегии 1, а $1 - \alpha$ — вероятность выбора игроком своей чистой стратегии 2. В соответствии с принятым стандартом смешанную стратегию $(\alpha, 1 - \alpha)$ первого игрока отождествляем с ее первой компонентой $\alpha \in [0, 1]$. Аналогично, смешанную стратегию второго игрока отождествляем с числом $\beta \in [0, 1]$, имеющим смысл вероятности выбора вторым игроком своей чистой стратегии 1; при этом $1 - \beta$ есть вероятность выбора им своей чистой стратегии 2. Всякая пара (α, β) , где α и β — смешанные стратегии первого и второго игроков соответственно, естественным образом превращает множество всех пар чистых стратегий игроков в вероятностное пространство, а выигрыши первого и второго игроков — в случайные величины на этом вероятностном пространстве; математические ожидания данных случайных величин трактуются как выигрыши игроков, отвечающие паре (α, β) .

Будем предполагать, что в рассматриваемой биматричной игре не существует точек равновесия по Нэшу с компонентами в чистых стратегиях. Тогда в соответствии с известной классификацией 2×2 -игр (см. [10]) в данной биматричной игре существует единственная точка равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях; при этом согласно [10], не нарушая общности (при необходимости изменяя нумерацию игроков), можно считать, что

$$b_{12} > b_{11}, \quad b_{21} > b_{22}, \quad a_{11} > a_{21}, \quad a_{22} > a_{12}. \quad (2.1)$$

Далее предполагаем, что неравенства (2.1) имеют место. Тогда, обозначая через i_j^+ наилучший ответ первого игрока в классе чистых стратегий этого игрока на чистую стратегию j второго игрока и через j_i^+ наилучший ответ второго игрока в классе чистых стратегий этого игрока на чистую стратегию i первого игрока, имеем

$$i_1^+ = 1, \quad i_2^+ = 2, \quad j_1^+ = 2, \quad j_2^+ = 1. \quad (2.2)$$

Зафиксируем какую-либо пару (i_0, j_0) чистых стратегий игроков.

Под *бесконечной повторяющейся игрой наилучших ответов* будем понимать процесс повторения биматричной игры в бесконечной последовательности раундов $0, 1, 2, \dots$. В каждом последующем раунде $k+1$ каждый игрок применяет свою чистую стратегию наилучшего ответа на чистую стратегию партнера, реализованную в раунде k ; априорно заданная пара (i_0, j_0) чистых стратегий реализуется в раунде 0. По окончании каждого раунда игроки получают очки согласно своим матрицам выигрышей. Данный процесс представляет собой модель “ближорукого” поведения неоднократно взаимодействующих игроков, в котором каждый из них стремится максимизировать свой выигрыш в каждом последующем взаимодействии, исходя из гипотезы о том, что в этом взаимодействии партнер повторит свой предшествующий выбор. Повторяющаяся игра наилучших ответов описывается дискретной динамической системой вида

$$(i_{k+1}, j_{k+1}) = (i_{j_k}^+, j_{i_k}^+) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (2.3)$$

в произведении

$$X = \{1, 2\} \times \{1, 2\} \quad (2.4)$$

множеств чистых стратегий первого и второго игроков.

Средние выигрыши соответственно первого и второго игроков в бесконечной повторяющейся игре наилучших ответов определим как

$$\bar{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{i_k, j_k}, \quad \bar{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_{i_k, j_k}. \quad (2.5)$$

Заметим, что траектория динамической системы (2.3) периодична с периодом 4, откуда следует, что значения (2.5) определены корректно; легко подсчитать, что

$$\bar{a} = \frac{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}{4}, \quad \bar{b} = \frac{b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22}}{4}. \quad (2.6)$$

3. Бесконечная повторяющаяся игра ε -наилучших ответов

Введем в рассмотрение процесс, аналогичный бесконечной повторяющейся игре наилучших ответов, в котором, однако, игроки в каждом последующем раунде отдают лишь вероятностные предпочтения своим текущим чистым стратегиям наилучшего ответа. В этом процессе для каждого игрока в качестве поведенческой стратегии или инструмента генерирования решений выступает та или иная функция ε -наилучшего ответа. Приведем соответствующее определение.

Фиксируем $\varepsilon \in [0, 1/2)$. *Функцией ε -наилучшего ответа первого игрока* назовем любую пару (α_1, α_2) смешанных стратегий первого игрока такую, что

$$1 \geq \alpha_1 \geq 1 - \varepsilon, \quad 0 \leq \alpha_2 \leq \varepsilon. \quad (3.1)$$

Ввиду (2.2) данное определение подразумевает, что первый игрок, выбирая смешанную стратегию α_j в ответ на реализацию вторым игроком его чистой стратегии $(j = 1, 2)$, задает большую вероятность своей чистой стратегии наилучшего ответа на эту чистую стратегию второго игрока. Аналогично, *функцией ε -наилучшего ответа второго игрока* назовем любую пару (β_1, β_2) смешанных стратегий второго игрока такую, что

$$0 \leq \beta_1 \leq \varepsilon, \quad 1 \geq \beta_2 \geq 1 - \varepsilon. \quad (3.2)$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ для указанных выше смешанных стратегий игроков имеем $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1$; таким образом, функции 0-наилучшего ответа первого и второго игроков предписывают каждому из них при реализации той или иной чистой стратегии партнера с вероятностью 1 применять соответствующую чистую стратегию наилучшего ответа.

Каждую пару

$$S = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)), \quad (3.3)$$

где (α_1, α_2) — функция ε -наилучшего ответа первого игрока и (β_1, β_2) — функция ε -наилучшего ответа второго игрока, будем называть *парой функций ε -наилучших ответов* игроков.

Для произвольной пары S (3.3) функций ε -наилучших ответов игроков рассмотрим случайный процесс, который назовем *бесконечной повторяющейся игрой ε -наилучших ответов*, соответствующей S . Процесс состоит из раундов $0, 1, 2, \dots$, в каждом из которых игроки разыгрывают описанную в разд. 1 биматричную игру. Процесс развивается по следующей схеме. В раунде 0 реализуется начальная пара (i_0, j_0) чистых стратегий игроков. Если в раунде k реализуется пара (i_k, j_k) чистых стратегий игроков, то первый игрок для выбора своей чистой стратегии i_{k+1} в раунде $k+1$ производит статистический эксперимент на множестве своих чистых стратегий, применяя смешанную стратегию α_{j_k} ; аналогично, второй игрок для выбора своей чистой стратегии j_{k+1} в раунде $k+1$ производит статистический эксперимент на множестве своих чистых стратегий, применяя смешанную стратегию β_{i_k} . По окончании каждого раунда игроки получают очки согласно своим матрицам выигрышей. Данный процесс представляет собой модель “близорукого” поведения взаимодействующих игроков, которая, однако, в случае $\varepsilon > 0$ допускает большую гибкость в выборе действий по сравнению с повторяющейся игрой наилучших ответов: в каждом последующем раунде каждый игрок выбирает свою будущую чистую стратегию из условия вероятностного предпочтения своей чистой стратегии наилучшего ответа на реализующуюся чистую стратегию противника. При $\varepsilon = 0$ повторяющаяся игра ε -наилучших ответов, очевидно, переходит в (детерминированную) повторяющуюся игру наилучших ответов.

Далее считаем $\varepsilon > 0$. Уточним определение обозначенного выше случайного процесса. Пространством его состояний служит произведение X (2.4) множеств чистых стратегий первого и второго игроков, его временной шкалой — индексы $0, 1, 2, \dots$ раундов повторяющейся игры. Пространство X понимаем как измеримое пространство, снабженное алгеброй всех его подмножеств. Для каждого $k = 0, 1, \dots$ функция на X вида

$$p_S(\cdot | (i_k, j_k)) = \alpha_{j_k} \times \beta_{i_k} = (\alpha_{j_k}, 1 - \alpha_{j_k}) \times (\beta_{i_k}, 1 - \beta_{i_k})$$

(см. (3.3)) задает переходную вероятность между двумя экземплярами измеримого пространства X , отвечающими моментам времени k и $k+1$. Очевидно,

$$p_S((i_k, j_k) | (i_{k-1}, j_{k-1})) = \begin{cases} \alpha_{j_{k-1}} \beta_{i_{k-1}}, & \text{если } (i_k, j_k) = (1, 1); \\ (1 - \alpha_{j_{k-1}}) \beta_{i_{k-1}}, & \text{если } (i_k, j_k) = (2, 1); \\ \alpha_{j_{k-1}} (1 - \beta_{i_{k-1}}), & \text{если } (i_k, j_k) = (1, 2); \\ (1 - \alpha_{j_{k-1}}) (1 - \beta_{i_{k-1}}), & \text{если } (i_k, j_k) = (2, 2). \end{cases} \quad (3.4)$$

В соответствии со стандартным определением случайного процесса (см., например, теорему Ионеску — Тулча [11]) указанные переходные вероятности и начальное состояние (i_0, j_0) определяют случайный процесс, траекториями которого выступают последовательности

$$t = ((i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots) \in X^\infty. \quad (3.5)$$

Множество X^∞ всех траекторий данного случайного процесса имеет при этом структуру вероятностного пространства с вероятностью p_S , определенной на σ -алгебре подмножеств X^∞ , порожденной всеми множествами вида $\{t_k\} \times X \times X \times \dots$, где

$$t_k = ((i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)) \in X^k \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (3.6)$$

при этом

$$\begin{aligned} p_S(\{t_k\} \times X \times X \times \dots) &= p_S((i_k, j_k) | (i_{k-1}, j_{k-1})) p_S((i_{k-1}, j_{k-1}) | (i_{k-2}, j_{k-2})) \dots \\ &\times p_S((i_1, j_1) | (i_0, j_0)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Данное вероятностное пространство будем обозначать через (X^∞, p_S) . Определенный выше случайный процесс будем рассматривать как формальную модель бесконечной повторяющейся игры ε -наилучших ответов, соответствующей паре S (3.3) функций ε -наилучшего ответа игроков.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что указанная выше σ -алгебра подмножеств X^∞ содержит все одноэлементные подмножества. Отсюда и из того, что X^∞ с очевидностью счетно, вытекает, что данная σ -алгебра есть совокупность всех подмножеств X^∞ . Из вида вероятностной меры p_S (3.7) следует, что для каждого одноэлементного подмножества $\{t\} \subset X^\infty$, где t — траектория вида (3.5), имеем $p_S(\{t\}) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_S(\{t_k\} \times X^\infty)$, где t_k определены по (3.6). Как показывает (3.4), в том случае, когда все компоненты пары S (3.3) отличны от чистых стратегий, т. е., $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 1$, при всех $m = 1, 2, \dots$ выполняется $p_S((i_m, j_m) | (i_{m-1}, j_{m-1})) < 1$ и, следовательно, $p_S(\{t\}) = 0$ для любого $t \in X^\infty$.

Для каждой траектории t (3.5) и каждого $n = 1, 2, \dots$ введем значения средних выигрышей соответственно первого и второго игроков, реализуемых на первых n раундах повторяющейся игры вдоль данной траектории:

$$a_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{i_k, j_k}, \quad b_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_{i_k, j_k}. \quad (3.8)$$

Для каждой пары S функций ε -наилучших ответов игроков функции $a_n(\cdot)$ и $b_n(\cdot)$ ($n = 1, 2, \dots$) представляют собой случайные величины на вероятностном пространстве (X^∞, p_S) . Математические ожидания случайных величин (3.8), задаваемые выражениями

$$a_n[S] = \int_{X^n} a_n(t) p_S(dt), \quad b_n[S] = \int_{X^n} b_n(t) p_S(dt), \quad (3.9)$$

назовем *ожидаемыми средними выигрышами* соответственно первого и второго игроков в n раундах повторяющейся игры ε -наилучшего ответа, соответствующей паре S функций ε -наилучших ответов игроков.

Для произвольной траектории t (3.5) средние значения выигрышей игроков вдоль этой траектории в бесконечном числе раундов, т. е. пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(t)$, вообще говоря, не существуют. Иначе говоря, для пары S (3.3) на вероятностном пространстве (X^∞, p_S) случайные величины со значениями $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(t)$ ($t \in X^\infty$) не определены. Следовательно, не определены и их математические ожидания — аналоги математических ожиданий (3.9). Мы, однако, покажем, что существуют пределы

$$a_\infty[S] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n[S], \quad b_\infty[S] = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n[S]. \quad (3.10)$$

Обоснованию этого факта и вычислению значений (3.10) посвящен следующий раздел.

4. Выигрыши игроков в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов

Зафиксируем произвольную пару S функций ε -наилучших ответов игроков вида (3.3). Получим выражение для ожидаемого среднего выигрыша $a_n[S]$ первого игрока в n раундах повторяющейся игры ε -наилучших ответов, соответствующей паре S .

Для каждой траектории $t \in X^\infty$ вида (3.5) и каждого натурального k обозначим

$$\hat{a}_k(t) = a_{i_k, j_k},$$

$$\hat{a}_k[S] = \int_{X^\infty} \hat{a}_k(t) p_S(dt). \quad (4.1)$$

Последнее значение есть ожидаемый выигрыш первого игрока на раунде k в рассматриваемой повторяющейся игре. Для ожидаемого среднего выигрыша первого игрока в n раундах повторяющейся игры в соответствии с (3.8) и (3.9), очевидно, имеем

$$a_n[S] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{a}_k[S]. \quad (4.2)$$

Возьмем какое-либо натуральное k и подсчитаем $\hat{a}_k[S]$ (4.1). В силу (3.7), (3.6)

$$\begin{aligned} \hat{a}_k[S] &= \sum_{(i_1, j_1) \in X} p_S((i_1, j_1)|(i_0, j_0)) \sum_{(i_2, j_2) \in X} p_S((i_2, j_2)|(i_1, j_1)) \dots \\ &\times \sum_{(i_{k-1}, j_{k-1}) \in X} p_S((i_{k-1}, j_{k-1})|(i_{k-2}, j_{k-2})) \sum_{(i_k, j_k) \in X} a_{i_k, j_k} p_S((i_k, j_k)|(i_{k-1}, j_{k-1})). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для произвольных $m \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ и $(i_m, j_m) \in X$ (при $m=0$ (i_0, j_0) — начальная пара чистых стратегий игроков, которую для удобства считаем здесь переменной) положим

$$\begin{aligned} \hat{a}_{m,k}(i_m, j_m) &= \hat{a}_{m,k}(i_m, j_m)[S] \\ &= \sum_{(i_{m+1}, j_{m+1}) \in X} p_S((i_{m+1}, j_{m+1})|(i_m, j_m)) \dots \\ &\times \sum_{(i_k, j_k) \in X} a_{i_k, j_k} p_S((i_k, j_k)|(i_{k-1}, j_{k-1})). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Очевидно, (4.4) есть ожидаемый выигрыш первого игрока в рассматриваемой бесконечной повторяющейся игре (соответствующей паре S) на раунде k при условии, что на раунде m реализована пара (i_m^*, j_m^*) чистых стратегий игроков. Ясно, что при $m=0$

$$\hat{a}_k[S] = \hat{a}_{0,k}(i_0, j_0). \quad (4.5)$$

В силу (4.3) при $m > 0$

$$\begin{aligned} \hat{a}_k[S] &= \sum_{(i_1, j_1) \in X} p_S((i_1, j_1)|(i_0, j_0)) \dots \\ &\times \sum_{(i_m, j_m) \in X} p_S((i_m, j_m)|(i_{m-1}, j_{m-1})) \hat{a}_{m,k}(i_m, j_m). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Введем матрицу

$$\hat{a}_{m,k} = \hat{a}_{m,k}[S] = \begin{pmatrix} \hat{a}_{m,k}(1,1) & \hat{a}_{m,k}(1,2) \\ \hat{a}_{m,k}(2,1) & \hat{a}_{m,k}(2,2) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

а также матрицы

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}[S] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 - \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta} = \bar{\beta}[S] = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 - \beta_1 & 1 - \beta_2 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Ниже $^\top$ — знак транспонирования.

Лемма 1. *Справедливо представление*

$$\hat{a}_{m,k} = \begin{cases} (\bar{\beta}^\top \bar{\alpha})^{\frac{k-m}{2}} A (\bar{\beta} \bar{\alpha}^\top)^{\frac{k-m}{2}}, & \text{если } k-m \text{ четно} \\ (\bar{\beta}^\top \bar{\alpha})^{\frac{k-m-1}{2}} \bar{\beta}^\top A^\top \bar{\alpha}^\top (\bar{\beta} \bar{\alpha}^\top)^{\frac{k-m-1}{2}}, & \text{если } k-m \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Доказательство. Применим индукцию по m , начиная с $m = k - 1$ и $m = k - 2$. Из (4.4) и (3.4) имеем

$$\begin{aligned}\hat{a}_{k-1,k}(1,1) &= \alpha_1\beta_1a_{11} + \alpha_1(1-\beta_1)a_{12} + (1-\alpha_1)\beta_1a_{21} + (1-\alpha_1)(1-\beta_1)a_{22}, \\ \hat{a}_{k-1,k}(1,2) &= \alpha_2\beta_1a_{11} + \alpha_2(1-\beta_1)a_{12} + (1-\alpha_2)\beta_1a_{21} + (1-\alpha_2)(1-\beta_1)a_{22}, \\ \hat{a}_{k-1,k}(2,1) &= \alpha_1\beta_2a_{11} + \alpha_1(1-\beta_2)a_{12} + (1-\alpha_1)\beta_2a_{21} + (1-\alpha_1)(1-\beta_2)a_{22}, \\ \hat{a}_{k-1,k}(2,2) &= \alpha_2\beta_2a_{11} + \alpha_2(1-\beta_2)a_{12} + (1-\alpha_2)\beta_2a_{21} + (1-\alpha_2)(1-\beta_2)a_{22},\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}\hat{a}_{k-2,k}(1,1) &= \alpha_1\beta_1\hat{a}_{k-1,k}(1,1) + \alpha_1(1-\beta_1)\hat{a}_{k-1,k}(1,2) \\ &\quad + (1-\alpha_1)\beta_1\hat{a}_{k-1,k}(2,1) + (1-\alpha_1)(1-\beta_1)\hat{a}_{k-1,k}(2,2), \\ \hat{a}_{k-2,k}(1,2) &= \alpha_2\beta_1\hat{a}_{k-1,k}(1,1) + \alpha_2(1-\beta_1)\hat{a}_{k-1,k}(1,2) \\ &\quad + (1-\alpha_2)\beta_1\hat{a}_{k-1,k}(2,1) + (1-\alpha_2)(1-\beta_1)\hat{a}_{k-1,k}(2,2), \\ \hat{a}_{k-2,k}(2,1) &= \alpha_1\beta_2\hat{a}_{k-1,k}(1,1) + \alpha_1(1-\beta_2)\hat{a}_{k-1,k}(1,2) \\ &\quad + (1-\alpha_1)\beta_2\hat{a}_{k-1,k}(2,1) + (1-\alpha_1)(1-\beta_2)\hat{a}_{k-1,k}(2,2), \\ \hat{a}_{k-2,k}(2,2) &= \alpha_2\beta_2\hat{a}_{k-1,k}(1,1) + \alpha_2(1-\beta_2)\hat{a}_{k-1,k}(1,2) \\ &\quad + (1-\alpha_2)\beta_2\hat{a}_{k-1,k}(2,1) + (1-\alpha_2)(1-\beta_2)\hat{a}_{k-1,k}(2,2).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\hat{a}_{k-1,k} &= \begin{pmatrix} \hat{a}_{k-1,k}(1,1) & \hat{a}_{k-1,k}(1,2) \\ \hat{a}_{k-1,k}(2,1) & \hat{a}_{k-1,k}(2,2) \end{pmatrix} = (\bar{\alpha}A\bar{\beta})^\top = \bar{\beta}^\top A^\top \bar{\alpha}^\top, \\ \hat{a}_{k-2,k} &= \bar{\beta}^\top \hat{a}_{k-1,k}^\top \bar{\alpha}^\top = \bar{\beta}^\top (\bar{\beta}^\top A^\top \bar{\alpha}^\top)^\top \bar{\alpha}^\top = \bar{\beta}^\top \bar{\alpha}A\bar{\beta}\bar{\alpha}^\top,\end{aligned}$$

т. е. при $m = k - 1$ и $m = k - 2$ представление (4.9) справедливо. База индукции завершена. Шаг индукции осуществляется аналогично.

Введем в рассмотрение матрицы

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}^{(k)} = \bar{\gamma}^{(k)}[S] &= \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(k)} & \gamma_{12}^{(k)} \\ \gamma_{21}^{(k)} & \gamma_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{cases} (\bar{\beta}^\top \bar{\alpha})^{k/2}, & \text{если } k \text{ четно} \\ (\bar{\beta}^\top \bar{\alpha})^{\frac{k-1}{2}} \bar{\beta}^\top, & \text{если } k \text{ нечетно,} \end{cases} \quad (4.10) \\ \bar{\delta}^{(k)} = \bar{\delta}^{(k)}[S] &= \begin{pmatrix} \delta_{11}^{(k)} & \delta_{12}^{(k)} \\ \delta_{21}^{(k)} & \delta_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{cases} (\bar{\beta} \bar{\alpha}^\top)^{k/2}, & \text{если } k \text{ четно} \\ \bar{\alpha}^\top (\bar{\beta} \bar{\alpha}^\top)^{\frac{k-1}{2}}, & \text{если } k \text{ нечетно;} \end{cases}\end{aligned}$$

при этом, стандартным образом принимая, что нулевая степень 2×2 -матрицы есть единичная матрица, имеем

$$\bar{\gamma}^{(1)} = \bar{\beta}^\top, \quad \bar{\delta}^{(1)} = \bar{\alpha}^\top. \quad (4.11)$$

Из леммы 1 сразу получаем следствие.

Следствие 1. *Справедливо представление*

$$\hat{a}_{0,k} = \begin{cases} \bar{\gamma}^{(k)} A \bar{\delta}^{(k)}, & \text{если } k \text{ четно} \\ \bar{\gamma}^{(k)} A^\top \bar{\delta}^{(k)}, & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (4.12)$$

З а м е ч а н и е 2. Напомним, что согласно (4.5) и (4.7) элемент $\hat{a}_{0,k}(i_0, j_0)$ матрицы $\hat{a}_{0,k}$ (4.12), где (i_0, j_0) — заданная начальная пара чистых стратегий игроков, доставляет искомое значение $\hat{a}_k[S]$ (4.1).

Рассмотрим матрицы $\bar{\gamma}^{(k)}$ и $\bar{\delta}^{(k)}$.

Лемма 2. Справедливы соотношения $\gamma_{ij}^{(k)} \geq 0$, $\delta_{ij}^{(k)} \geq 0$ ($i, j = 1, 2$),

$$\gamma_{12}^{(k)} = 1 - \gamma_{11}^{(k)}, \quad \gamma_{22}^{(k)} = 1 - \gamma_{21}^{(k)}, \quad (4.13)$$

$$\delta_{21}^{(k)} = 1 - \delta_{11}^{(k)}, \quad \delta_{22}^{(k)} = 1 - \delta_{12}^{(k)}. \quad (4.14)$$

Кроме того, при $k = 2$

$$\bar{\gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \alpha_1 + \alpha_2(1 - \beta_1) & \beta_1(1 - \alpha_1) + (1 - \alpha_2)(1 - \beta_1) \\ \beta_2 \alpha_1 + \alpha_2(1 - \beta_2) & (1 - \alpha_1)\beta_2 + (1 - \alpha_2)(1 - \beta_2) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\bar{\delta}^{(2)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \alpha_1 + (1 - \alpha_1)\beta_2 & \alpha_2 \beta_1 + (1 - \alpha_2)\beta_2 \\ \alpha_1(1 - \beta_1 + (1 - \alpha_1)(1 - \beta_2)) & \alpha_2(1 - \beta_1) + (1 - \alpha_2)(1 - \beta_2) \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Доказательство. Неравенства $\gamma_{ij}^{(n)} \geq 0$ и $\delta_{ij}^{(n)} \geq 0$ ($i, j = 1, 2$) следуют из определения матриц $\bar{\gamma}_{ij}^{(n)}$ и $\bar{\delta}_{ij}^{(n)}$ и неотрицательности элементов матриц $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ (4.8). При $k = 2$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{(2)} &= \bar{\beta}^\top \bar{\alpha} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 - \beta_1 \\ \beta_2 & 1 - \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 \alpha_1 + \alpha_2(1 - \beta_1) & \beta_1(1 - \alpha_1) + (1 - \alpha_2)(1 - \beta_1) \\ \beta_2 \alpha_1 + \alpha_2(1 - \beta_2) & (1 - \alpha_1)\beta_2 + (1 - \alpha_2)(1 - \beta_2) \end{pmatrix}, \\ \bar{\delta}^{(2)} &= \bar{\beta} \bar{\alpha}^\top \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 - \beta_1 & 1 - \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 - \alpha_1 & 1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 \alpha_1 + (1 - \alpha_1)\beta_2 & \alpha_2 \beta_1 + (1 - \alpha_2)\beta_2 \\ \alpha_1(1 - \beta_1 + (1 - \alpha_1)(1 - \beta_2)) & \alpha_2(1 - \beta_1) + (1 - \alpha_2)(1 - \beta_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. верны формулы (4.15) и (4.16).

Докажем равенства (4.13) по индукции. При $k = 1$ эти равенства справедливы, как показывают (4.11) и (4.8). При $k = 2$ равенства (4.13) следуют из (4.15) и (4.16). Предположим, что равенства (4.13) верны для всех четных $k \leq l$, где l четное. Докажем выполнение равенства при $k = l + 2$. Согласно (4.10)

$$\bar{\gamma}^{(l+2)} = (\bar{\beta}^\top \bar{\alpha})^{l/2+1} = (\bar{\beta}^\top \bar{\alpha})^{l/2} \bar{\beta}^\top \bar{\alpha} = \bar{\gamma}^{(l)} \bar{\gamma}^{(2)}.$$

По предположению индукции и по (4.15)

$$\gamma_{12}^{(l)} = 1 - \gamma_{11}^{(l)}, \quad \gamma_{22}^{(l)} = 1 - \gamma_{21}^{(l)}, \quad \gamma_{12}^{(2)} = 1 - \gamma_{11}^{(2)}, \quad \gamma_{22}^{(2)} = 1 - \gamma_{21}^{(2)},$$

откуда

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^{(l)} &= \bar{\gamma}^{(l)} \bar{\gamma}^{(2)} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(l+2)} & \gamma_{12}^{(l+2)} \\ \gamma_{21}^{(l+2)} & \gamma_{22}^{(l+2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(l)} & 1 - \gamma_{11}^{(l)} \\ \gamma_{21}^{(l)} & 1 - \gamma_{21}^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(2)} & 1 - \gamma_{11}^{(2)} \\ \gamma_{21}^{(2)} & 1 - \gamma_{21}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(l)} \gamma_{11}^{(2)} + (1 - \gamma_{11}^{(l)}) \gamma_{21}^{(2)} & (1 - \gamma_{11}^{(2)}) \gamma_{11}^{(l)} + (1 - \gamma_{11}^{(l)}) (1 - \gamma_{21}^{(2)}) \\ \gamma_{11}^{(2)} \gamma_{21}^{(l)} + (1 - \gamma_{21}^{(l)}) \gamma_{21}^{(2)} & (1 - \gamma_{11}^{(2)}) \gamma_{21}^{(l)} + (1 - \gamma_{21}^{(2)}) (1 - \gamma_{21}^{(l)}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\gamma_{12}^{(l+2)} = 1 - \gamma_{11}^{(l+2)}, \quad \gamma_{22}^{(l+2)} = 1 - \gamma_{21}^{(l+2)}.$$

Таким образом, равенства (4.13) доказаны для четных k . Доказательство равенств (4.13) для нечетных k аналогично. Подобным же образом устанавливаем равенства (4.14).

Введем упрощенные обозначения

$$\gamma_1^{(k)} = \gamma_{11}^{(k)}, \quad \gamma_2^{(k)} = \gamma_{21}^{(k)}, \quad \delta_1^{(k)} = \delta_{11}^{(k)}, \quad \delta_2^{(k)} = \delta_{12}^{(k)}.$$

Принимая во внимание (4.13) и (4.14), имеем

$$\gamma_{12}^{(k)} = 1 - \gamma_1^{(k)}, \quad \gamma_{22}^{(k)} = 1 - \gamma_2^{(k)}, \quad \delta_{21}^{(k)} = 1 - \delta_1^{(k)}, \quad \delta_{22}^{(k)} = 1 - \delta_2^{(k)}.$$

Таким образом,

$$\bar{\gamma}^{(k)} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(k)} & 1 - \gamma_1^{(k)} \\ \gamma_2^{(k)} & 1 - \gamma_2^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \bar{\delta}^{(k)} = \begin{pmatrix} \delta_1^{(k)} & \delta_2^{(k)} \\ 1 - \delta_1^{(k)} & 1 - \delta_2^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Следующая лемма позволяет вычислить матрицу $\hat{a}_{0,k}$ (4.12) и, следовательно (ввиду замечания 2), значение $\hat{a}_k[S]$ (4.1).

Лемма 3. *При k четном*

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(k)} &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{k}{2}} (\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) - \alpha_2 - \beta_2\alpha_1 + \alpha_2\beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1}, \\ \gamma_2^{(k)} &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{k}{2}} (\beta_2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_2) - \beta_2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2\beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1}, \\ \delta_1^{(k)} &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{k}{2}} (\alpha_1\beta_2 - \beta_2 - \alpha_1\beta_1 + 1) + \beta_2 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1) + 1}, \\ \delta_2^{(k)} &= \frac{([(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{k}{2}} - 1)((\beta_2 - \beta_1)\alpha_2 - \beta_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1) + 1}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

при k нечетном

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(k)} &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{k-1}{2}} ((\alpha_1 - \alpha_2)\beta_1 - 1 + \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1) + \alpha_2\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \beta_2}{(\beta_2 - \beta_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + 1}, \\ \gamma_2^{(k)} &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{k-1}{2}} ((\alpha_1 - \alpha_2)\beta_2 + \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1) + \alpha_2\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \beta_2}{(\beta_2 - \beta_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + 1}, \\ \delta_1^{(k)} &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{k-1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2)((\beta_1 - \beta_2)\alpha_1 - 1 + \beta_2) - \beta_2\alpha_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_2}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1}, \\ \delta_2^{(k)} &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{k-1}{2}} (\alpha_1 - \alpha_2)((\beta_1 - \beta_2)\alpha_2 + \beta_2) - \beta_2\alpha_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_2}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Докажем выполнение равенства (4.18) при нечетном k . Доказательства остальных равенств аналогичны.

Применим индукцию. При $k = 2$ (4.18) принимает вид

$$\gamma_1^{(2)} = \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)](\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) - \alpha_2 - \beta_2\alpha_1 + \alpha_2\beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1}.$$

С другой стороны, в соответствии с (4.15)

$$\gamma_1^{(2)} = \beta_1\alpha_1 + \alpha_2(1 - \beta_1).$$

Покажем, что правые части двух последних равенств совпадают, т. е.

$$\begin{aligned} (\beta_1\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1)[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1] &= [(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)](\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) \\ &\quad - \alpha_2 - \beta_2\alpha_1 + \alpha_2\beta_2. \end{aligned}$$

Проведем серию эквивалентных преобразований последнего равенства:

$$\begin{aligned} (\beta_1\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1)[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)] &= [(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)](\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) \\ &\quad - \alpha_2 - \beta_2\alpha_1 + \alpha_2\beta_2 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1, \\ (\beta_1\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1)[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)] &= [(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)](\alpha_1\beta_1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) \\ &\quad - \beta_2\alpha_1 + \alpha_2\beta_2 + \beta_1\alpha_1 - \alpha_2\beta_1 - (\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2), \\ (\beta_1\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1)[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)] &= [(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)](\alpha_1\beta_1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1). \end{aligned}$$

Получили тождество. Таким образом, при $k = 2$ равенство (4.18) справедливо.

Предположим, что (4.18) выполнено для всех четных $k \leq l$, где l четно. Докажем, что (4.18) выполняется для $k = l + 2$. С учетом (4.10) и (4.17) имеем

$$\gamma^{(l+2)} = (\bar{\beta}^\top \bar{\alpha})^{l/2+1} = (\bar{\beta}^\top \bar{\alpha})^{l/2} \bar{\beta}^\top \bar{\alpha} = \bar{\gamma}^{(l)} \bar{\gamma}^{(2)} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(l)} & 1 - \gamma_1^{(l)} \\ \gamma_2^{(l)} & 1 - \gamma_2^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1^{(2)} & 1 - \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(2)} & 1 - \gamma_2^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\bar{\gamma}_1^{(l+2)} = \gamma_1^{(l)} \gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)} (1 - \gamma_1^{(l)}) = \gamma_1^{(l)} (\gamma_1^{(2)} - \gamma_2^{(2)}) + \gamma_2^{(2)}.$$

По (4.15)

$$\gamma_2^{(2)} = \beta_2\alpha_1 + \alpha_2(1 - \beta_2),$$

а по предположению индукции

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(l)} &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{l}{2}} (\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) - \alpha_2 - \beta_2\alpha_1 + \alpha_2\beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1} \\ &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{l}{2}} (\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) - \gamma_2^{(2)}}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(l+2)} &= \gamma_1^{(l)} (\gamma_1^{(2)} - \gamma_2^{(2)}) + \gamma_2^{(2)} \\ &= \frac{\left([(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{l}{2}} (\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) - \gamma_2^{(2)} \right) (\gamma_1^{(2)} - \gamma_2^{(2)})}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1} + \gamma_2^{(2)} \\ &= \frac{\left([(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{l}{2}} (\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) - \gamma_2^{(2)} \right) (\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1} + \gamma_2^{(2)} \\ &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{l+2}{2}} (\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) - \gamma_2^{(2)} (\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1} \\ &\quad + \frac{\gamma_2^{(2)} ((\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1)}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1} \\ &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{n+2}{2}} (\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) - \gamma_2^{(2)}}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1} \\ &= \frac{[(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)]^{\frac{l+2}{2}} (\alpha_1\beta_1 - 1 + \alpha_2 - \alpha_2\beta_1) - \alpha_2 - \beta_2\alpha_1 + \alpha_2\beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1}. \end{aligned}$$

Равенство (4.18) доказано.

Рассмотрим предельные значения для элементов матриц $\bar{\gamma}^{(k)}$ и $\bar{\delta}^{(k)}$ при четных и нечетных $k \rightarrow \infty$.

Лемма 4. Если хотя бы одна из смешанных стратегий $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ не является чистой, т. е. выполнено хотя бы одно из неравенств $\alpha_1 < 1, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 < 1$, то

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \gamma_1^{(2l)} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \gamma_2^{(2l)} = \omega_*, & \lim_{l \rightarrow \infty} \delta_1^{(2l)} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \delta_2^{(2l)} = \omega_{**}, \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \gamma_1^{(2l+1)} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \gamma_2^{(2l+1)} = \omega_{**}, & \lim_{l \rightarrow \infty} \delta_1^{(2l+1)} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \delta_2^{(2l+1)} = \omega_*, \end{aligned}$$

где

$$\omega_* = \omega_*[S] = \frac{\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2}{1 - (\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad \omega_{**} = \omega_{**}[S] = \frac{\alpha_2(\beta_1 - \beta_2) + \beta_2}{1 + (\beta_2 - \beta_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (4.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Указанные выражения получаем переходом к пределу в формулах, приведенных в лемме 3, замечая, что в этих формулах выражения, возведенные в степень $k/2$ в случае четного k и в степень $(k-1)/2$ в случае нечетного k , меньше 1.

Следствие 2. В условиях леммы 4

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{\gamma}^{(2l+1)} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{\delta}^{(2l)} = \bar{\omega}_{**} = \begin{pmatrix} \omega_{**} & 1 - \omega_{**} \\ \omega_{**} & 1 - \omega_{**} \end{pmatrix}, \\ \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{\gamma}^{(2l)} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{\delta}^{(2l+1)} = \bar{\omega}_* = \begin{pmatrix} \omega_* & 1 - \omega_* \\ \omega_* & 1 - \omega_* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следствие 2 с учетом замечания 2 позволяет найти предел для ожидаемого среднего выигрыша $a_n[S]$ (4.2) первого игрока в n раундах повторяющейся игры при $n \rightarrow \infty$. Введем матрицу

$$\bar{A}^\infty = \begin{pmatrix} a_{11}^{(\infty)} & a_{12}^{(\infty)} \\ a_{21}^{(\infty)} & a_{22}^{(\infty)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(\infty)}[S] & a_{12}^{(\infty)}[S] \\ a_{21}^{(\infty)}[S] & a_{22}^{(\infty)}[S] \end{pmatrix} = \frac{\bar{\omega}_* A \bar{\omega}_{**}^\top + \bar{\omega}_{**} A^\top \bar{\omega}_*}{2} = \bar{\omega}_* A \bar{\omega}_{**}^\top.$$

Нетрудно проверить, что

$$a_{ij}^{(\infty)} = a^{(\infty)} \quad (i, j = 1, 2), \quad (4.20)$$

где

$$a^{(\infty)} = a^{(\infty)}[S] = \omega_* a_{11} \omega_{**} + (1 - \omega_*) a_{21} \omega_{**} + \omega_* a_{12} (1 - \omega_{**}) + (1 - \omega_*) a_{22} (1 - \omega_{**}). \quad (4.21)$$

Таким образом, элементы матрицы \bar{A}^∞ одинаковы.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Предел ожидаемого среднего выигрыша $a_n[S]$ (см. (3.9)) второго игрока в n раундах бесконечной повторяющейся игры ε -наилучших ответов, соответствующей паре S (3.3), при $n \rightarrow \infty$ существует и равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n[S] = a^{(\infty)}[S]. \quad (4.22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено хотя бы одно из неравенств $\alpha_1 < 1, \alpha_2 > 0, \beta_1 > 0, \beta_2 < 1$. Тогда справедливо следствие 2. Согласно замечанию 2 $\hat{a}_k[S]$ есть элемент $\hat{a}_{0,k}(i_0, j_0)$ матрицы $\hat{a}_{0,k}$, где (i_0, j_0) — заданная начальная пара чистых стратегий игроков. Из вида (4.12) матрицы $\hat{a}_{0,k}$ и из следствия 2 получаем, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \hat{a}_{0,2l} = \bar{\omega}_* A \bar{\omega}_{**}^\top, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \hat{a}_{0,2l+1} = \bar{\omega}_{**} A^\top \bar{\omega}_*^\top.$$

Поэтому в связи с (4.20)

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \hat{a}_{2l}[S] + \lim_{l \rightarrow \infty} \hat{a}_{2l+1}[S] = 2a^{(\infty)}.$$

Отсюда с учетом (4.2) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n[S] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{a}_k[S] = a^{(\infty)} = a^{(\infty)}[S].$$

Пусть теперь $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, т.е. выбранные функции ε -наилучшего ответа игроков являются функциями 0-наилучшего ответа, и рассматриваемая бесконечная игра ε -наилучших ответов является игрой наилучших ответов. Для этой игры среднее значение выигрыша первого игрока, как установлено ранее, равно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n[S] = \bar{a} = \frac{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}{4}$$

(см. (2.5), (2.6)). С другой стороны, из (4.19) $\omega_* = \omega_{**} = 1/2$, и в силу (4.21)

$$a^{(\infty)} = a^{(\infty)}[S] = \frac{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}{4}.$$

Следовательно, (4.22) справедливо.

В отношении второго игрока справедлив аналогичный результат:

$$b^{(\infty)} = b^{(\infty)}[S] = \omega_* b_{11} \omega_{**} + (1 - \omega_*) b_{21} \omega_{**} + \omega_* b_{12} (1 - \omega_{**}) + (1 - \omega_*) b_{22} (1 - \omega_{**}).$$

Теорема 2. *Предел ожидаемого среднего выигрыша $b_n[S]$ (см. (3.9)) второго игрока в n раундах бесконечной повторяющейся игры ε -наилучших ответов, соответствующей паре S (3.3), при $n \rightarrow \infty$ существует и равен*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n[S] = b^{(\infty)}[S].$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Обратим внимание, что в силу теорем 1 и 2 пределы $a^{(\infty)}[S]$ и $b^{(\infty)}[S]$ ожидаемых средних выигрышей первого и соответственно второго игрока в n раундах рассматриваемой бесконечной повторяющейся игры при $n \rightarrow \infty$ не зависят от начальной пары (i_0, j_0) чистых стратегий.

5. Равновесные пары функций ε -наилучших ответов

Пару $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$ функций ε -наилучших ответов игроков назовем *равновесной* (по Нэшу) в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов, если для любого ε -наилучшего ответа (α_1, α_2) первого игрока верно $a^{(\infty)}[S_1^*] \leq a^{(\infty)}[S^*]$, где $S_1^* = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1^*, \beta_2^*))$, и для любого ε -наилучшего ответа (β_1, β_2) второго игрока верно $b^{(\infty)}[S_2^*] \leq b^{(\infty)}[S^*]$, где $S_2^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1, \beta_2))$. Пару $(a^{(\infty)}[S^*], b^{(\infty)}[S^*])$ ожидаемых выигрышей первого и второго игроков, соответствующую паре S^* функций ε -наилучших ответов игроков в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов, будем называть *равновесной* в данной повторяющейся игре. Обратим внимание, что, поскольку ожидаемые выигрыши игроков в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов, соответствующей произвольной паре S функций ε -наилучших ответов игроков, не зависят от начальной пары (i_0, j_0) чистых стратегий, существование равновесной пары S^* и ее вид также не зависят от (i_0, j_0) .

Установим существование равновесной пары функций ε -наилучших ответов игроков и укажем ее структуру при достаточно малом ε . Мы ограничимся рассмотрением случая, когда $a_{12} \neq a_{21}$, $b_{11} \neq b_{22}$ (изучение случаев равенств требует дополнительного, достаточного объемного анализа).

Основу исследования составляют две приводимые ниже леммы. Их содержательный смысл состоит в следующем. В бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов при достаточно малом ε каждый игрок имеет оптимальную функцию ε -наилучшего ответа, которая максимизирует его ожидаемый выигрыш вне зависимости от выбора партнером своей функции

ε -наилучшего ответа. Структура оптимальной функции ε -наилучшего ответа игрока зависит от некоторых соотношений между элементами матрицы выигрышей этого игрока и не зависит от матрицы выигрышей его партнера. Оптимальная функция (α_1^*, α_2^*) ε -наилучшего ответа первого игрока имеет вид $(1 - \varepsilon, 0)$ либо $(1, \varepsilon)$, т.е. одна из ее компонент остается чистой стратегией наилучшего ответа, другая же максимально рандомизируется. Таким образом, для первого игрока малая рандомизация ответного выбора является целесообразной. Аналогичные наблюдения справедливы в отношении оптимальной функции (β_1^*, β_2^*) ε -наилучшего ответа второго игрока.

Лемма 5. Пусть $a_{12} \neq a_{21}$. Существует $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$ такое, что для любой начальной пары (i_0, j_0) чистых стратегий при $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ справедливы следующие утверждения.

1) Существует единственная функция (α_1^*, α_2^*) ε -наилучшего ответа первого игрока такая, что для любой функции (α_1, α_2) ε -наилучшего ответа первого игрока, отличной от (α_1^*, α_2^*) , и любой функции (β_1, β_2) ε -наилучшего ответа второго игрока выполняется неравенство

$$a^{(\infty)}[(\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1, \beta_2)] > a^{(\infty)}[(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)].$$

2) Значения α_1^* и α_2^* не зависят от (i_0, j_0) и задаются табл. 1.

Т а б л и ц а 1

случай	условие	(α_1^*, α_2^*)
1.1	$a_{12} > a_{21}$	$(1, \varepsilon)$
1.2	$a_{12} < a_{21}$	$(1 - \varepsilon, 0)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проанализируем поведение ожидаемого выигрыша $a^{(\infty)} = a^{(\infty)}[S]$ (4.21) первого игрока как функции от пары $S = ((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))$ в окрестности пары $((1, 0), (0, 1))$ функций 0-наилучшего ответа.

Представим ожидаемый выигрыш (4.21) первого игрока в следующем виде:

$$a^{(\infty)} = (a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22})\omega_{**}\omega_* + (a_{12} - a_{22})\omega_* + (a_{21} - a_{22})\omega_{**} + a_{22}.$$

Расфиксируем пару S (3.3) и рассмотрим указанное выше значение как функцию от переменных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, меняющихся в пределах ограничений (3.1), (3.2); для краткости обозначения аргументов будем опускать. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a^{(\infty)} = (a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}) \left(\frac{\partial \omega_{**}}{\partial \alpha_1} \omega_* + \omega_{**} \frac{\partial \omega_*}{\partial \alpha_1} \right) + (a_{12} - a_{22}) \frac{\partial \omega_*}{\partial \alpha_1} + (a_{21} - a_{22}) \frac{\partial \omega_{**}}{\partial \alpha_1}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} a^{(\infty)} = (a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}) \left(\frac{\partial \omega_{**}}{\partial \alpha_2} \omega_* + \omega_{**} \frac{\partial \omega_*}{\partial \alpha_2} \right) + (a_{12} - a_{22}) \frac{\partial \omega_*}{\partial \alpha_2} + (a_{21} - a_{22}) \frac{\partial \omega_{**}}{\partial \alpha_2}, \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_*}{\partial \alpha_1} &= \frac{\beta_2 - (\beta_1 - \beta_2)\alpha_2}{((\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2) - 1)^2}, \\ \frac{\partial \omega_*}{\partial \alpha_2} &= \frac{\alpha_1(\beta_2 - \beta_1) + 1 - \beta_2}{((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) - 1)^2}, \\ \frac{\partial \omega_{**}}{\partial \alpha_1} &= -\frac{(\alpha_2\beta_1 + \beta_2 - \alpha_2\beta_2)(\beta_2 - \beta_1)}{((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1) + 1)^2}, \\ \frac{\partial \omega_{**}}{\partial \alpha_2} &= \frac{(\beta_2 - \beta_1)[(\beta_1 - \beta_2)\alpha_1 - 1 + \beta_2]}{((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_2 - \beta_1) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Для значений

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad (5.3)$$

т. е. для функций 0-наилучшего ответа получаем

$$\frac{\partial \omega_*}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial \omega_*}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\partial \omega_{**}}{\partial \alpha_1} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial \omega_{**}}{\partial \alpha_2} = -\frac{1}{4}.$$

В свою очередь из (4.21) следует, что при (5.3) $\omega_* = \omega_{**} = 1/2$. Подстановкой полученных значений в (5.1), (5.2) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} a^{(\infty)} = \frac{\partial}{\partial \alpha_2} a^{(\infty)} = \frac{a_{12} - a_{21}}{4}. \quad (5.4)$$

Поскольку в точке (5.3) имеет место (5.4), то в окрестности точки (5.3) для любой начальной пары чистых стратегий (i_0, j_0) ожидаемый выигрыш $a^{(\infty)}[S]$ (а) возрастает по α_1 и по α_2 при $a_{12} > a_{21}$, (б) убывает по α_1 и по α_2 при $a_{12} < a_{21}$. Поэтому при достаточно малом ε ожидаемый выигрыш $a^{(\infty)}[S]$ как функция от (α_1, α_2) независимо от выбора пары (β_1, β_2) , удовлетворяющей (3.2), достигает в пределах ограничений (3.1) максимума в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1, \varepsilon)$ при $a_{12} > a_{21}$ и в единственной точке $(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = (1 - \varepsilon, 0)$ при $a_{12} < a_{21}$.

Лемма 6. Пусть $b_{11} \neq b_{22}$. Существует $\varepsilon_2 \in (0, 1/2)$ такое, что для любой начальной пары (i_0, j_0) чистых стратегий при $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ справедливы следующие утверждения.

1) Существует единственная функция (β_1^*, β_2^*) ε -наилучшего ответа второго игрока такая, что для любой функции (α_1, α_2) ε -наилучшего ответа первого игрока и любой функции (β_1, β_2) ε -наилучшего ответа второго игрока, отличной от (β_1^*, β_2^*) , выполняется неравенство

$$b^{(\infty)}[(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1^*, \beta_2^*)] > b^{(\infty)}[(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)].$$

2) Значения β_1^* и β_2^* не зависят от (i_0, j_0) и задаются табл. 2.

Т а б л и ц а 2

случай	условие	(β_1^*, β_2^*)
2.1	$b_{11} > b_{22}$	$(\varepsilon, 1)$
2.2	$b_{11} < b_{22}$	$(0, 1 - \varepsilon)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем преобразование исходной биматричной игры. Отправляясь от исходных матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

выигрышей, введем новые матрицы \bar{A} и \bar{B} выигрышей соответственно первого и второго игроков, поменяв исходных игроков местами и перенумеровав элементы исходных матриц следующим образом:

$$(i, j) \rightarrow (\bar{i}, \bar{j}) : \quad \begin{aligned} (2, 1) &\rightarrow (1, 1), & (1, 1) &\rightarrow (1, 2), \\ (2, 2) &\rightarrow (2, 1), & (1, 2) &\rightarrow (2, 2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Получаем

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{11} \\ b_{22} & b_{12} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} \\ \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Используя соотношения (2.1) между элементами матриц A и B , приходим к следующим соотношениям между элементами матриц \bar{A} и \bar{B} :

$$\bar{b}_{12} > \bar{b}_{11}, \quad \bar{b}_{21} > \bar{b}_{22}, \quad \bar{a}_{11} > \bar{a}_{21}, \quad \bar{a}_{22} > \bar{a}_{12}.$$

Эти соотношения аналогичны (2.1). Рассмотрим бесконечную повторяющуюся игру ε -наилучших ответов с заменой матриц A и B на \bar{A} и \bar{B} соответственно, назовем ее преобразованной бесконечной повторяющейся игрой ε -наилучших ответов. Ясно, что если (α_2, α_1) и (β_2, β_1) пробегают множества всех функций ε -наилучшего ответа соответственно первого и второго игроков в исходной бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов, то $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = (\beta_2, \beta_1)$ и $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2) = (\alpha_2, \alpha_1)$ пробегают множества всех функций ε -наилучшего ответа соответственно первого и второго игроков в преобразованной бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов. Ожидаемый средний выигрыш первого игрока в преобразованной бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов, соответствующей паре $\bar{S} = ((\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2))$ функций ε -наилучшего ответа игроков, обозначим через $\bar{a}^{(\infty)}[\bar{S}]$.

Применяя лемму 5 к преобразованной бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов, заключаем, что существует $\bar{\varepsilon}_1 \in (0, 1/2)$ такое, что при $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}_1$ справедливы следующие утверждения.

1) Существует единственная функция $(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*)$ ε -наилучшего ответа первого игрока такая, что для любой функции $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ ε -наилучшего ответа первого игрока, отличной от $(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*)$, и любой функции $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ ε -наилучшего ответа второго игрока выполняется $\bar{a}^{(\infty)}[(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)] > \bar{a}^{(\infty)}[(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2), (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)]$.

2) Значения $\bar{\alpha}_1^*$ и $\bar{\alpha}_2^*$ задаются табл. 3.

Т а б л и ц а 3

случай	условие	$(\bar{\alpha}_1^*, \bar{\alpha}_2^*)$
1.1	$\bar{a}_{12} > \bar{a}_{21}$	$(1, \varepsilon)$
1.2	$\bar{a}_{12} < \bar{a}_{21}$	$(1 - \varepsilon, 0)$

В исходных обозначениях с использованием (5.5) и (5.6) табл. 3 записывается, как табл. 2.

Из лемм 5 и 6 с очевидностью вытекает утверждение о существовании и структуре равновесной пары функций ε -наилучшего ответа.

Теорема 3. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ определены согласно леммам 5 и 6, $\varepsilon \leq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, функции (α_1^*, α_2^*) и (β_1^*, β_2^*) ε -наилучшего ответа соответственно первого и второго игроков заданы табл. 1 и 2 и $S^* = ((\alpha_1^*, \alpha_2^*), (\beta_1^*, \beta_2^*))$. Тогда при любой начальной паре (i_0, j_0) чистых стратегий S^* есть единственная равновесная пара функций ε -наилучшего ответа в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов.

Следующая теорема утверждает, что в условиях теоремы 3 ожидаемый равновесный выигрыш игрока в предельной бесконечной игре ε -наилучших ответов строго больше его выигрыша в (детерминированной) предельной бесконечной игре наилучших ответов. Таким образом, для каждого игрока выгодно допущение малой рандомизации при выборе стратегии на каждом шаге повторяющейся игры.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Справедливы следующие утверждения.

1) Ожидаемый равновесный выигрыш первого игрока в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов строго больше его среднего выигрыша в (детерминированной) бесконечной повторяющейся игре наилучших ответов: $a^{(\infty)}[S^*] > \bar{a}$.

2) Ожидаемый равновесный выигрыш второго игрока в бесконечной повторяющейся игре ε -наилучших ответов строго больше его среднего выигрыша в (детерминированной) бесконечной повторяющейся игре наилучших ответов: $b^{(\infty)}[S^*] > \bar{b}$.

Теорема 4 с очевидностью следует из лемм 5 и 6 и теоремы 3.

Благодарность

Автор выражает признательность своему научному руководителю акад. А.В. Кряжимскому за постановку задачи и руководство в процессе ее решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Axelrod R.** The evolution of cooperation. New York: Basic Books, 1984. 241 p.
2. **Hofbauer J., Sigmund K.** The theory of evolution and dynamical systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. 341 p.
3. **Weibull J.** Evolutionary game theory. Cambridge: The M.I.T. Press, 1995. 287 p.
4. **Fudenberg D., Kreps D.M.** Learning mixed equilibria // Games and Economic Behavior. 1993. Vol. 5. P. 320–367.
5. **Nowan M., Sigmund K.** The alternating Prisoner's dilemma // J. Theor. Biol. 1994. Vol. 168. P. 219–226.
6. **Van der Laan G., Tieman X.** Evolutionary game theory and the modeling of economic behavior // De Economist. 1998. Vol. 146, no. 1. P. 59–89.
7. **Kaniovski Yu.M., Kryazhimskiy A.V., Young H.P.** Learning equilibria in games played by heterogeneous populations // Games and Economic Behavior. 2000. Vol. 31. P. 50–96.
8. **Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S.** On evolutionary-differential games // Proc. Steklov Math. Inst. 1995. Vol. 211. P. 257–287.
9. **Kleimenov A.F., Kryazhimskiy A.V.** Minimum-noncooperative trajectories in repeated games // Complex Dynamical Systems with Incomplete Information / Eds. E. Reithmeier and G. Leitmann. Vol. 1. Aachen: Shaker Verlag, 1999. P. 94–107.
10. **Воробьев Н.Н.** Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985. 272 с.
11. **Невё Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.

Райгородская Анастасия Викторовна
аспирант
фак. ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова
e-mail: asik.vmk@gmail.com

Поступила 1.12.2010

УДК 517.977

**АЛГОРИТМ НЕПРЕРЫВНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ
В СТОХАСТИЧЕСКОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ¹****В. Л. Розенберг**

С позиций подхода теории динамического обращения исследуется задача непрерывного оценивания неизвестного детерминированного возмущения в стохастическом дифференциальном уравнении Ито на основе неточных измерений текущего фазового состояния. Выводится уравнение вспомогательной модели, управление в которой аппроксимирует неизвестный вход. Предлагаемый разрешающий алгоритм является конструктивным, оценка скорости его сходимости выписывается явно.

Ключевые слова: непрерывное оценивание возмущения, стохастическое дифференциальное уравнение, метод вспомогательных моделей.

V. L. Rozenberg. On the problem of continuous estimation of a disturbance in a stochastic differential equation.

Basing on the approach of the theory of dynamic inversion, the problem of continuous estimation of an unknown deterministic disturbance in an Ito stochastic differential equation is investigated with the use of inaccurate measurements of the current phase state. An auxiliary model equation with a control approximating the unknown input is derived. A suggested solving algorithm is constructive; its convergence rate estimate is explicitly written.

Keywords: continuous estimation of disturbance, stochastic differential equation, method of auxiliary models.

Введение

Задачи реконструкции неизвестных характеристик динамических систем синхронно с развитием изучаемого процесса возникают во многих научных и прикладных разработках (в механике управляемого полета, при создании технологических и производственных процессов, при исследовании финансовых рынков, в экологии, медицине и т.д.). Такие задачи, вкладывающиеся в проблематику обратных задач динамики управляемых систем, как правило, являются некорректными и требуют применения регуляризирующих процедур. Один из подходов к их решению был предложен в работах Ю.С. Осипова и его учеников (см. [1–4] и библиографию в них). Данный подход, получивший название метода динамического обращения, основан на сочетании принципов теории позиционного управления [5] и идей теории некорректных задач [6]. Фактически задача реконструкции сводится к задаче управления по принципу обратной связи вспомогательной динамической системой, часто называемой моделью. Регуляризация рассматриваемой задачи осуществляется локально на этапе выбора в каждый момент времени позиционного управления в модели. Метод динамического обращения был реализован для ряда задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциально-функциональными уравнениями, а также уравнениями и вариационными неравенствами с распределенными параметрами. При этом восстанавливались различные переменные характеристики систем, именно, неизвестные точечные и распределенные возмущения, начальные и граничные данные, коэффициенты эллиптического оператора и т.д. Были созданы устойчивые алгоритмы, работающие для некоторых классов частично наблюдаемых систем.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00042), программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” (проект 09-П-1-1014), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-65590.2010.1) и Урало-Сибирского интеграционного проекта 09-С-1-1010.

В настоящей работе с позиций упомянутого выше подхода исследуется задача непрерывного оценивания неизвестного детерминированного возмущения в стохастическом дифференциальном уравнении Ито на основе неточных измерений текущего фазового состояния. Аналогичная обратная задача для динамической системы, описываемой нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением, была сформулирована и решена в [7]. Ее спецификой является отсутствие априори заданных мгновенных ограничений на допустимое управление и непрерывность измерения фазовой траектории. Что касается приложения теории динамического обращения к стохастическим объектам, то впервые задача позиционного моделирования стохастического управления в системе, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, была рассмотрена в [8].

1. Постановка задачи

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида:

$$dX(t, \omega) = (F_1(t, X(t, \omega)) + F_2(t, X(t, \omega))u(t))dt + G(t, X(t, \omega))dB(t, \omega), \quad (1.1)$$

$$t \in T = [0, \theta], \quad X(0, \omega) = X_0, \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad B \in \mathbb{R}^s.$$

Здесь X_0 — детерминированный или случайный вектор начальных условий; $\omega \in \Omega$, (Ω, \mathcal{F}, P) — стандартное вероятностное пространство [9]; $B(t, \omega)$ — стандартный винеровский процесс [10] (т. е. процесс с нулевым математическим ожиданием, матрицей ковариации, равной It (I — единичная матрица), и $B(0) = 0$); $u(\cdot)$ — детерминированное возмущение, принадлежащее функциональному пространству $L_2(T; \mathbb{R}^m)$; $F_1(\cdot, \cdot) : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F_2(\cdot, \cdot) : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $G(\cdot, \cdot) : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ — функции, удовлетворяющие условию роста

$$\begin{aligned} \|F_1(t, x)\|_n &\leq D_1^F(1 + \|x\|_n), \quad \|F_2(t, x)\|_{n,m} \leq D_1^F(1 + \|x\|_n), \\ \|G(t, x)\|_{n,s} &\leq D_1^G(1 + \|x\|_n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

и условию Липшица

$$\begin{aligned} \|F_1(t_1, x_1) - F_1(t_2, x_2)\|_n &\leq D_2^F(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|_n), \\ \|F_2(t_1, x_1) - F_2(t_2, x_2)\|_{n,m} &\leq D_2^F(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|_n), \\ \|G(t_1, x_1) - G(t_2, x_2)\|_{n,s} &\leq D_2^G(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|_n), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, t, t_1, t_2 \in T$, а $D_1^F, D_1^G, D_2^F, D_2^G$ — некоторые константы. Символами $\|\cdot\|_i$ и $\|\cdot\|_{i,j}$ обозначаются евклидовы нормы вектора и матрицы в соответствующих пространствах. Кроме того, ниже в случаях неоднозначной трактовки записи скалярного произведения векторов в \mathbb{R}^i используется символ $(\cdot, \cdot)_i$.

Уравнение (1.1) является символической записью следующего интегрального тождества:

$$X(t, \omega) = X_0 + \int_0^t (F_1(s, X(s, \omega)) + F_2(s, X(s, \omega))u(s))ds + \int_0^t G(s, X(s, \omega))dB(s, \omega). \quad (1.4)$$

Последний интеграл в правой части равенства (1.4) является стохастическим и понимается в смысле Ито. Отметим, что для любого $\omega \in \Omega$ сформулированная задача Коши имеет единственное решение и определяет соответствующую реализацию случайного процесса $X(t, \omega)$, $t \in T$. Решение уравнения (1.1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий интегральному тождеству (1.4) при любом t с вероятностью 1. При предположениях, сделанных выше, существует единственное решение (см. [10; 11]), которое является марковским процессом с непрерывными реализациями.

Обсуждаемая задача состоит в следующем. Предполагается, что непрерывно производится измерения фазового вектора уравнения (1.1), (1.4), в результате чего поступает информация $\xi^h(t)$ о случайном процессе $X(t)$, обеспечивающая выполнение соотношения

$$\|X(t) - \xi^h(t)\|_{L_2(P)} = (E(X(t) - \xi^h(t))^2)^{1/2} \leq h, \quad t \in T. \quad (1.5)$$

Здесь и ниже величина $h \in (0, 1)$ характеризует точность измерения, через $E(\cdot)$ обозначается математическое ожидание соответствующей случайной величины. В случаях, когда речь идет о процессе, а не о конкретной его реализации, символ ω будем опускать.

Задача непрерывного оценивания заключается в построении алгоритма приближенного восстановления неизвестного возмущения $u(\cdot)$, обладающего свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближения неизвестного возмущения вырабатываются в реальном времени, свойство устойчивости — что приближение сколь угодно точно (в метрике соответствующего функционального пространства) при достаточной малости ошибки измерения. Отметим, что задача является некорректной ввиду неточности информации (1.5) и возможной неединственности искомой функции.

Уравнения типа (1.1), (1.4) используются, в частности, для описания механического движения при воздействии случайных внешних факторов, для моделирования роста популяции в стохастической среде, для описания временной динамики цен активов при рискованном инвестировании в задаче оптимального выбора портфеля [10]. В практических ситуациях в моменты времени t поступает информация о некотором (достаточно большом) количестве реализаций искомого случайного процесса (например, результаты измерений характеристик движущихся частиц в серии одновременно проводящихся экспериментов), на основе которой при дополнительных предположениях с помощью статистических оценок возможно построение величин $\xi(t)$, удовлетворяющих неравенствам (1.5).

В настоящей работе показано, что конструктивная процедура построения разрешающего алгоритма, предложенная в [7] для обыкновенного дифференциального уравнения, может быть модифицирована с учетом специфики стохастического объекта. Доказана сходимость алгоритма, выписаны условия согласования его параметров.

Случай, когда неизвестное возмущение входит в стохастический член правой части уравнения (1.1), (1.4), исследован в [12] для линейного уравнения, при этом рассматриваемая задача сведена к обратной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет ковариационная матрица исходного случайного процесса.

2. Вспомогательные утверждения

Сформулируем несколько вспомогательных лемм, соответствующих утверждениям из [1].

Лемма 1. Пусть $U = \left\{ u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^m), \|u\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)} \leq M \right\}$. Тогда, если последовательность $u_k(\cdot) \in U$ сходится к $u(\cdot) \in U$ слабо в $L_2(T; \mathbb{R}^m)$, то $X_k(\cdot)$ сходится к $X(\cdot)$ сильно в $C(T; L_2(P))$ ($X_k(\cdot)$ и $X(\cdot)$ — соответствующие решения уравнения (1.4)).

Доказательство. Сильная сходимость $X_k(\cdot) \rightarrow X(\cdot)$ в $C(T; L_2(P))$ означает выполнение соотношения $\max_{t \in T} E(X_k(t) - X(t))^2 \rightarrow 0$. Рассмотрим для любого $t \in T$

$$\begin{aligned} E(X_k(t) - X(t))^2 &= E \left(\int_0^t (F_1(s, X_k(s)) - F_1(s, X(s))) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (F_2(s, X_k(s))u_k(s) - F_2(s, X(s))u(s)) ds + \int_0^t (G(s, X_k(s)) - G(s, X(s))) dB(s) \right)^2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство $(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ и формулу изометрии Ито [10], получим

$$E(X_k(t) - X(t))^2 \leq 3E\left(\int_0^t (F_1(s, X_k(s)) - F_1(s, X(s)))ds\right)^2 \\ + 3E\left(\int_0^t (F_2(s, X_k(s))u_k(s) - F_2(s, X(s))u(s))ds\right)^2 + 3E\int_0^t \|G(s, X_k(s)) - G(s, X(s))\|_{n,s}^2 ds.$$

Обозначим слагаемые, входящие в правую часть последнего неравенства, соответственно через I_1 , I_2 и I_3 . Величины I_1 и I_3 можно оценить, пользуясь липшицевостью функций F_1 и G :

$$I_1 \leq 3tE\int_0^t (F_1(s, X_k(s)) - F_1(s, X(s)))^2 ds \leq K_1\int_0^t E(X_k(s) - X(s))^2 ds, \\ I_3 \leq K_3\int_0^t E(X_k(s) - X(s))^2 ds,$$

где константы K_1 и K_3 могут быть выписаны явно. Здесь и ниже все константы, играющие вспомогательную роль в доказательствах, обозначаются через K_i и нумеруются заново в каждом утверждении. Оценим величину I_2 . Имеем

$$I_2 = 3E\left(\int_0^t (F_2(s, X_k(s))u_k(s) - F_2(s, X(s))u_k(s))ds - \int_0^t (F_2(s, X(s))u(s) - F_2(s, X(s))u_k(s))ds\right)^2.$$

Используя неравенство $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, выводим

$$I_2 \leq 6E\left(\int_0^t (F_2(s, X_k(s)) - F_2(s, X(s)))u_k(s)ds\right)^2 + 6E\left(\int_0^t F_2(s, X(s))(u(s) - u_k(s))ds\right)^2 \\ \leq 6E\int_0^t (F_2(s, X_k(s)) - F_2(s, X(s)))^2 ds \int_0^t (u_k(s))^2 ds \\ + 6E\left(\int_0^t F_2(s, X(s))(u(s) - u_k(s))ds\right)^2 \leq K_2\int_0^t E(X_k(s) - X(s))^2 ds + \kappa(t),$$

где $\kappa(t) = 6E\left(\int_0^t (F_2(s, X(s))(u(s) - u_k(s))ds\right)^2$, а константа K_2 может быть выписана явно.

Таким образом, имеем

$$E(X_k(t) - X(t))^2 \leq K_0\int_0^t E(X_k(s) - X(s))^2 ds + \kappa(t),$$

где $K_0 = K_1 + K_2 + K_3$. По лемме Гронуолла для любого $t \in T$ получаем

$$E(X_k(t) - X(t))^2 \leq e^{K_0 t} \kappa(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

поскольку $\kappa(t) \rightarrow 0$ ввиду слабой сходимости $u_k(\cdot)$ к $u(\cdot)$. Итак, слабая сходимость управлений в $L_2(T; \mathbb{R}^m)$ влечет сильную сходимость решений уравнения (1.4) в метрике пространства $C(T; L_2(P))$. \square

Лемма 2. Пусть U_* — множество возмущений $u \in L_2(T; \mathbb{R}^m)$, порождающих решение $X(t)$, $t \in T$, уравнения (1.4); $U_{**} = \left\{ u_* \in U_* : \|u_*\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)} = \inf_{u \in U_*} \|u\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)} \right\}$. Тогда U_* выпукло и замкнуто в $L_2(T; \mathbb{R}^m)$, а U_{**} одноэлементно: $U_{**} = \{u_0\}$.

Доказательство. Выпуклость U_* обусловлена линейностью по управлению правой части уравнения (1.4), замкнутость непосредственно следует из леммы 1. Указанные свойства обеспечивают существование в U_* единственного элемента минимальной $L_2(T; \mathbb{R}^m)$ -нормы. \square

Введем множество M_ξ всех измеримых и ограниченных (в соответствующей метрике) функций $\xi : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для любых $\xi \in M_\xi$ и $u \in L_2(T; \mathbb{R}^m)$ определим функцию $z(t, \omega, \xi, u) : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, полагая

$$z(t, \omega, \xi, u) = X_0 + \int_0^t (F_1(s, \xi(s, \omega)) + F_2(s, \xi(s, \omega))u(s))ds + \int_0^t G(s, \xi(s, \omega))dB(s, \omega). \quad (2.1)$$

Символ ω будем, как правило, опускать.

Лемма 3. Рассмотрим введенный выше элемент u_0 и последовательность (u_k) из $L_2(T; \mathbb{R}^m)$. Пусть

(1) последовательность (ξ_k) из M_ξ такова, что

$$\sup_{t \in T} \|X(t) - \xi_k(t)\|_{L_2(P)} \rightarrow 0; \quad (2.2)$$

(2) $\mu_k \rightarrow +0$, $\alpha_k \rightarrow +0$, $\epsilon_k \rightarrow +0$, $\epsilon_k \alpha_k^{-1} \rightarrow 0$;

(3) при всех $t \in T$ и k , больших некоторого k_0 , выполняется

$$\|X(t) - z(t, \xi_k, u_k)\|_{L_2(P)}^2 \leq \mu_k; \quad (2.3)$$

(4) при всех $t \in T$ и k , больших некоторого k_0 , выполняется

$$\int_0^t \|u_k(s)\|_m^2 ds - \int_0^t \|u_0(s)\|_m^2 ds \leq \epsilon_k \alpha_k^{-1}. \quad (2.4)$$

Тогда $u_k \rightarrow u_0$ в $L_2(T; \mathbb{R}^m)$.

Доказательство. Воспользуемся схемой доказательства аналогичного утверждения из [1]. Отметим, что предположение (2.4) обеспечивает ограниченность последовательности (u_k) в $L_2(T; \mathbb{R}^m)$ и, стало быть, возможность применения леммы 1. Выберем из последовательности (u_k) подпоследовательность, реализующую верхний предел $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_0\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)}$, и обозначим ее кратко (u_j) ; соответствующие подпоследовательности прочих последовательностей также обозначаются заменой k на j . Не нарушая общности, считаем, что

$$u_j \rightarrow \bar{u} \quad \text{слабо в } L_2(T; \mathbb{R}^m). \quad (2.5)$$

Тогда по лемме 1 $X_j(\cdot)$ сходится к $\bar{X}(\cdot)$ сильно в $C(T; L_2(P))$; здесь $X_j(\cdot)$ и $\bar{X}(\cdot)$ — соответствующие решения уравнения (1.4). В силу условия (2.3) при всех $t \in T$ и достаточно больших j имеем

$$\|X(t) - z(t, \xi_j, u_j)\|_{L_2(P)}^2 \leq \mu_j \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Используя схему, применявшуюся при доказательстве леммы 1, оценим величину

$$\begin{aligned} \|z(t, \xi_j, u_j) - z(t, X, \bar{u})\|_{L_2(P)}^2 &\leq K_1 \int_0^t E(\xi_j(s) - X(s))^2 ds \\ &+ K_2 E\left(\int_0^t (F_2(s, X(s))(u_j(s) - \bar{u}(s)) ds)\right)^2, \end{aligned}$$

где K_1 и K_2 — константы. В силу (2.2) и (2.5) получаем

$$\|z(t, \xi_j, u_j) - z(t, X, \bar{u})\|_{L_2(P)}^2 \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) в силу единственности предела следует $z(t, X, \bar{u}) = X(t)$, что ввиду (2.1) означает, что $\bar{u} \in U_*$. Так как $u_0 \in U_{**}$, то $\|\bar{u}\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)} \geq \|u_0\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)}$. С другой стороны, из неравенства (2.4) для $t = \theta$ при всех j имеем $\|u_j\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)}^2 \leq \|u_0\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)}^2 + \epsilon_j \alpha_j^{-1}$, откуда в силу (2.5) $\|\bar{u}\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)} \leq \|u_0\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)}$. Таким образом, $\|u_j\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)} \rightarrow \|u_0\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)} = \|\bar{u}\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)}$. Полученная сходимость норм и слабая сходимость (2.5) влекут сильную сходимость $u_j \rightarrow \bar{u}$ в $L_2(T; \mathbb{R}^m)$. Кроме того, $\bar{u} \in U_{**}$ и, стало быть, $\bar{u} = u_0$. Следовательно, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j - u_0\|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)} \rightarrow 0$, откуда $u_k \rightarrow u_0$ в $L_2(T; \mathbb{R}^m)$. \square

Из леммы 3 следует, что поставленную задачу решает алгоритм динамической реконструкции неизвестного возмущения $u(\cdot)$, обеспечивающий выполнение неравенств (2.3), (2.4) для своего выхода $u_k(\cdot)$, построенного по измерениям вида (1.5) точности h_k .

3. Алгоритм реконструкции возмущения

В настоящей статье предлагается алгоритм, работающий для случая $F_2(t, X(t)) \equiv B$, $t \in T$, где B — $(n \times m)$ -мерная матрица. В его основу положены идеи работ [1–4; 7; 13].

Уравнение (1.1), (1.4) принимает следующий вид:

$$X(t, \omega) = X_0 + \int_0^t (F_1(s, X(s, \omega)) + Bu(s)) ds + \int_0^t G(s, X(s, \omega)) dB(s, \omega). \quad (3.1)$$

Вводим функцию $\alpha(h) : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, играющую роль регуляризатора. В начальный момент $t = 0$ фиксируем значение h и величину $\alpha(h)$. В качестве уравнения непрерывного оценивания (уравнения модели) выбираем управляемую систему вида

$$z^h(t, \omega) = X_0 + \int_0^t (F_1(s, \xi^h(s, \omega)) + Bu^h(s)) ds + \int_0^t G(s, \xi^h(s, \omega)) dB(s, \omega). \quad (3.2)$$

Ниже символ ω будем опускать. Модельное управление $u^h(t)$, которое будем называть выходом алгоритма реконструкции возмущения, задаем таким образом:

$$u^h(t) = \alpha^{-1}(h) B' E(\xi^h(t) - z^h(t)), \quad (3.3)$$

где штрих означает транспонирование.

Теорема 1. Пусть функция $\alpha(h)$ такова, что

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad h^{2/3} \alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0. \quad (3.4)$$

Пусть выбрана последовательность $h_k \rightarrow +0$, ξ_k — последовательность измерений вида (1.5) точности h_k , u_k — последовательность соответствующих выходов алгоритма (3.2), (3.3). Тогда $u_k \rightarrow u_0$ в $L_2(T; \mathbb{R}^m)$.

Доказательство. Положим $\alpha_k = \alpha(h_k)$, $z_k(t) = z^{h_k}(t)$. Поскольку сходимость (2.2) имеет место, то для доказательства теоремы в силу леммы 3 достаточно проверить выполнение ее условий 2)–4). Для этого, учитывая сходимости (3.4), достаточно показать, что при всех $t \in T$ выполняются оценки

$$\|X(t) - z_k(t)\|_{L_2(P)}^2 \leq d_0(h_k^{2/3} + \alpha_k); \quad (3.5)$$

$$\int_0^t \|u_k(s)\|_m^2 ds - \int_0^t \|u_0(s)\|_m^2 ds \leq d_1 h_k^{2/3} \alpha_k^{-1}, \quad (3.6)$$

где d_0 и d_1 — константы, которые могут быть выписаны в явном виде.

Из (1.5) и (3.3) для любого $t \in T$ выводим

$$\begin{aligned} \|u_k(t)\|_m^2 &\leq \bar{b}^2 \alpha_k^{-2} (E(\xi_k(t) - z_k(t)))^2 \leq \bar{b}^2 \alpha_k^{-2} E(\xi_k(t) - z_k(t))^2 \\ &\leq \bar{b}^2 \alpha_k^{-2} E(2(\xi_k(t) - X(t))^2 + 2(X(t) - z_k(t))^2) \leq 2\bar{b}^2 \alpha_k^{-2} (h_k^2 + \|X(t) - z_k(t)\|_{L_2(P)}^2), \end{aligned}$$

где $\bar{b} = \|B'\|$ — евклидова норма матрицы B' . В этом случае

$$\int_0^t \|u_k(s)\|_m^2 ds \leq 2\bar{b}^2 \alpha_k^{-2} \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)}^2 ds + K_0 h_k^2 \alpha_k^{-2}. \quad (3.7)$$

Применяя многомерную формулу Ито, запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d(X(t) - z_k(t))^2 &= (X(t) - z_k(t))' d(X(t) - z_k(t)) + \frac{1}{2} (d(X(t) - z_k(t)))^2 \\ &= (X(t) - z_k(t))' (F_1(t, X(t)) - F_1(t, \xi_k(t))) dt + (X(t) - z_k(t))' (Bu_0(t) - Bu_k(t)) dt \\ &\quad + (X(t) - z_k(t))' (G(t, X(t)) - G(t, \xi_k(t))) dB(t) + \frac{1}{2} \|G(t, X(t)) - G(t, \xi_k(t))\|_{n,s}^2 dt. \end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} (X(t) - z_k(t))^2 &= 2 \int_0^t (X(s) - z_k(s))' (F_1(s, X(s)) - F_1(s, \xi_k(s))) ds \\ &\quad + 2 \int_0^t (X(s) - z_k(s))' (Bu_0(s) - Bu_k(s)) ds + 2 \int_0^t (X(s) - z_k(s))' (G(s, X(s)) - G(s, \xi_k(s))) dB(s) \\ &\quad + \int_0^t \|G(s, X(s)) - G(s, \xi_k(s))\|_{n,s}^2 ds. \end{aligned}$$

Далее, учитывая равенство нулю математического ожидания интеграла Ито, имеем

$$\begin{aligned} \|X(t) - z_k(t)\|_{L_2(P)}^2 &= E(X(t) - z_k(t))^2 = 2E \int_0^t (X(s) - z_k(s))' (F_1(s, X(s)) - F_1(s, \xi_k(s))) ds \\ &\quad + 2E \int_0^t (X(s) - z_k(s))' (Bu_0(s) - Bu_k(s)) ds + E \int_0^t \|G(s, X(s)) - G(s, \xi_k(s))\|_{n,s}^2 ds. \end{aligned}$$

Обозначим слагаемые, входящие в правую часть последнего равенства, соответственно через I_1 , I_2 и I_3 . Величины I_1 и I_3 можно оценить, пользуясь липшицевостью функций F_1 и G :

$$I_1 = 2E \int_0^t (X(s) - z_k(s))' (F_1(s, X(s)) - F_1(s, \xi_k(s))) ds \leq 2K_1 h_k \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)} ds,$$

$$I_3 = E \int_0^t \|G(s, X(s)) - G(s, \xi_k(s))\|_{n,s}^2 ds \leq K_3 h_k^2.$$

Переходя к сопряженному оператору, оценим

$$\begin{aligned} I_2 &= 2E \int_0^t (X(s) - z_k(s))' (Bu_0(s) - Bu_k(s)) ds = 2E \int_0^t (X(s) - \xi_k(s))' (Bu_0(s) - Bu_k(s)) ds \\ &\quad + 2E \int_0^t (B'\xi_k(s) - B'z_k(s))' (u_0(s) - u_k(s)) ds \\ &\leq 2\bar{b}h_k \int_0^t (\|u_0(s)\|_m + \|u_k(s)\|_m) ds + 2E \int_0^t (B'\xi_k(s) - B'z_k(s))' (u_0(s) - u_k(s)) ds \\ &\leq K_2 h_k + 2\bar{b}h_k \int_0^t \|u_k(s)\|_m ds + 2E \int_0^t (B'\xi_k(s) - B'z_k(s))' (u_0(s) - u_k(s)) ds. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве учтено включение $u_0 \in L_2(T; \mathbb{R}^m)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|X(t) - z_k(t)\|_{L_2(P)}^2 &\leq 2K_1 h_k \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)} ds + K_3 h_k^2 + K_2 h_k \\ &\quad + 2\bar{b}h_k \int_0^t \|u_k(s)\|_m ds + 2E \int_0^t (B'\xi_k(s) - B'z_k(s))' (u_0(s) - u_k(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Отметим, что в силу правила выбора управления (3.3) для всех $t \in T$ справедливо соотношение

$$u_k(t) = \arg \min \{ \alpha_k \|u\|_m^2 - 2(B'E(\xi_k(t) - z_k(t)), u)_m : u \in \mathbb{R}^m \}. \quad (3.9)$$

Применяя (3.8) и (3.9), оценим величину

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(t) &= \|X(t) - z_k(t)\|_{L_2(P)}^2 + \alpha_k \int_0^t \|u_k(s)\|_m^2 ds - \alpha_k \int_0^t \|u_0(s)\|_m^2 ds \\ &\leq 2K_1 h_k \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)} ds + K_3 h_k^2 + K_2 h_k + 2\bar{b}h_k \int_0^t \|u_k(s)\|_m ds \\ &\quad + \int_0^t (\alpha_k \|u_k(s)\|_m^2 - 2(B'E(\xi_k(s) - z_k(s)), u_k(s))_m - \alpha_k \|u_0(s)\|_m^2 + 2(B'E(\xi_k(s) - z_k(s)), u_0(s))_m) ds \end{aligned}$$

$$\leq 2K_1 h_k \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)} ds + K_3 h_k^2 + K_2 h_k + 2\bar{b} h_k \int_0^t \|u_k(s)\|_m ds. \quad (3.10)$$

Рассмотрим отдельно два слагаемых в правой части неравенства (3.10). Используя неравенство $2ab \leq a^2 c + b^2 c^{-1} \forall c > 0$, выводим

$$\begin{aligned} 2K_1 h_k \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)} ds &\leq K_1^2 h_k^{2-\gamma} + h_k^\gamma \left(\int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)} ds \right)^2 \\ &\leq K_1^2 h_k^{2-\gamma} + h_k^\gamma t \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)}^2 ds, \quad \forall \gamma \in (0, 1); \\ 2\bar{b} h_k \int_0^t \|u_k(s)\|_m ds &\leq \bar{b}^2 h_k^\beta + h_k^{2-\beta} \left(\int_0^t \|u_k(s)\|_m ds \right)^2 \leq \bar{b}^2 h_k^\beta + h_k^{2-\beta} t \int_0^t \|u_k(s)\|_m^2 ds, \quad \forall \beta \in (0, 1). \end{aligned}$$

Учитывая (3.7), перепишем (3.10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k(t) &\leq K_3 h_k^2 + K_2 h_k + K_1^2 h_k^{2-\gamma} + h_k^\gamma t \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)}^2 ds + \bar{b}^2 h_k^\beta \\ &\quad + h_k^{2-\beta} t (2\bar{b}^2 \alpha_k^{-2} \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)}^2 ds + K_0 h_k^2 \alpha_k^{-2}). \end{aligned}$$

Вводя дополнительные константы K_4 и K_5 естественным образом, в силу очевидных для малых h_k неравенств $h_k^{2-\gamma} \leq h_k^\beta$, $h_k \leq h_k^\beta$, $h_k^2 \leq h_k^\beta$, получаем

$$\varepsilon_k(t) \leq K_4 f_1(h_k, \alpha_k) + K_5 f_2(h_k, \alpha_k) \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)}^2 ds, \quad (3.11)$$

где $f_1(h_k, \alpha_k) = h_k^\beta + h_k^{4-\beta} \alpha_k^{-2}$, $f_2(h_k, \alpha_k) = h_k^\gamma + h_k^{2-\beta} \alpha_k^{-2}$. Из (3.11), применяя лемму Гронуолла, выводим

$$\begin{aligned} \|X(t) - z_k(t)\|_{L_2(P)}^2 &\leq \alpha_k \int_0^t \|u_0(s)\|_m^2 ds + \alpha_k \int_0^t \|u_k(s)\|_m^2 ds \\ &\quad + K_4 f_1(h_k, \alpha_k) + K_5 f_2(h_k, \alpha_k) \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)}^2 ds \leq K_6 (\alpha_k + f_1(h_k, \alpha_k)) \\ &\quad + K_5 f_2(h_k, \alpha_k) \int_0^t \|X(s) - z_k(s)\|_{L_2(P)}^2 ds \leq K_6 e^{K_5 f_2(h_k, \alpha_k) t} (\alpha_k + f_1(h_k, \alpha_k)). \end{aligned}$$

Пусть величина $\beta \in (0, 1)$ обеспечивает выполнение неравенства $h_k^{2-\beta} \alpha_k^{-2} \leq K_7$, $h_k \in (0, 1)$; это возможно в силу условия (3.4). Тогда

$$\|X(t) - z_k(t)\|_{L_2(P)}^2 \leq K_8 (\alpha_k + h_k^\beta). \quad (3.12)$$

Перепишем оценку (3.11) с учетом (3.12):

$$\varepsilon_k(t) \leq K_4 f_1(h_k, \alpha_k) + K_9 f_2(h_k, \alpha_k) (\alpha_k + h_k^\beta) \leq K_{10} (h_k^\beta + h_k^{4-\beta} \alpha_k^{-2} + (h_k^\gamma + h_k^{2-\beta} \alpha_k^{-2}) (\alpha_k + h_k^\beta)).$$

Полагая $\gamma = \beta$ и принимая во внимание порядок малости слагаемых, получаем

$$\varepsilon_k(t) \leq K_{11}(h_k^\beta + h_k^{2-\beta}\alpha_k^{-1} + h_k^2\alpha_k^{-2}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha_k \int_0^t \|u_k(s)\|_m^2 ds &\leq \alpha_k \int_0^t \|u_0(s)\|_m^2 ds + K_{11}(h_k^\beta + h_k^{2-\beta}\alpha_k^{-1} + h_k^2\alpha_k^{-2}) - \|X(t) - z_k(t)\|_{L_2(P)}^2 \\ &\leq \alpha_k \int_0^t \|u_0(s)\|_m^2 ds + K_{11}(h_k^\beta + h_k^{2-\beta}\alpha_k^{-1} + h_k^2\alpha_k^{-2}). \end{aligned}$$

Имеем

$$\int_0^t \|u_k(s)\|_m^2 ds \leq \int_0^t \|u_0(s)\|_m^2 ds + K_{11}(h_k^\beta\alpha_k^{-1} + h_k^{2-\beta}\alpha_k^{-2} + h_k^2\alpha_k^{-3}).$$

Выбирая оптимальное значение $\beta = 2/3$, выводим оценку

$$\int_0^t \|u_k(s)\|_m^2 ds \leq \int_0^t \|u_0(s)\|_m^2 ds + K_{12}h_k^{2/3}\alpha_k^{-1}. \quad (3.13)$$

Из неравенств (3.12), (3.13) непосредственно следует утверждение теоремы (см. (3.5), (3.6)). \square

4. Оценка скорости сходимости алгоритма

При некоторых дополнительных условиях может быть выписана оценка скорости сходимости алгоритма, предложенного в предыдущем разделе. Для обоснования этой оценки требуется следующее утверждение из [3].

Лемма 4. Пусть $u(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^n)$, $v(\cdot)$ — функция ограниченной вариации со значениями в \mathbb{R}^n и

$$\left\| \int_0^t u(\tau) d\tau \right\|_n \leq \varepsilon, \quad \|v(t)\|_n \leq K, \quad \forall t \in T.$$

Тогда

$$\left| \int_0^t (u(\tau), v(\tau))_n d\tau \right| \leq \varepsilon(K + \text{var}(T; v(\cdot))) \quad \forall t \in T,$$

где $\text{var}(T; v(\cdot))$ — вариация функции $v(\cdot)$ на отрезке T .

Теорема 2. Пусть $m = n$, B — обратимая $(n \times n)$ -матрица и $u_0(\cdot)$ — функция ограниченной вариации. Тогда справедлива оценка скорости сходимости алгоритма

$$\|u_0(\cdot) - u_k(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)}^2 \leq K(h_k^{1/3} + h_k^{2/3}\alpha_k^{-1} + \alpha_k^{1/2}). \quad (4.1)$$

Доказательство. Из (3.5) имеем при всех $t \in T$

$$\|X(t) - z_k(t)\|_{L_2(P)} \leq K_1(h_k^{2/3} + \alpha_k)^{1/2}.$$

Для любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 < t_2$ оценим выражение

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_1}^{t_2} B(u_0(s) - u_k(s)) ds \right\|_n = \left\| \int_{t_1}^{t_2} B(u_0(s) - u_k(s)) ds \right\|_{L_2(P)} \\ & \leq \|X(t_2) - z_k(t_2)\|_{L_2(P)} + \|X(t_1) - z_k(t_1)\|_{L_2(P)} + \left\| \int_{t_1}^{t_2} (F_1(s, X(s)) - F_1(s, \xi_k(s))) ds \right\|_{L_2(P)} \\ & \quad + \left\| \int_{t_1}^{t_2} (G(s, X(s)) - G(s, \xi_k(s))) dB(s) \right\|_{L_2(P)} \leq 2K_1(h_k^{2/3} + \alpha_k)^{1/2} \\ & \quad + \left(E \left(\int_{t_1}^{t_2} (F_1(s, X(s)) - F_1(s, \xi_k(s))) ds \right)^2 \right)^{1/2} + \left(E \int_{t_1}^{t_2} \|G(s, X(s)) - G(s, \xi_k(s))\|_{n,s}^2 ds \right)^{1/2} \\ & \leq 2K_1(h_k^{2/3} + \alpha_k)^{1/2} + K_2 h_k. \end{aligned}$$

Используя лемму 4 и оценку (3.6), выводим (4.1):

$$\begin{aligned} \|u_0(\cdot) - u_k(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)}^2 &= \int_0^\theta (\|u_0(s)\|_n^2 - 2(u_0(s), u_k(s))_n + \|u_k(s)\|_n^2) ds \\ &\leq 2 \int_0^\theta \|u_0(s)\|_n^2 ds + d_1 h_k^{2/3} \alpha_k^{-1} - 2 \int_0^\theta (u_0(s), u_k(s))_n ds = 2 \int_0^\theta (u_0(s), u_0(s) - u_k(s))_n ds \\ & \quad + d_1 h_k^{2/3} \alpha_k^{-1} = 2 \int_0^\theta ((B')^{-1} u_0(s), B(u_0(s) - u_k(s)))_n ds + d_1 h_k^{2/3} \alpha_k^{-1} \\ &\leq K_3((h_k^{2/3} + \alpha_k)^{1/2} + h_k) + d_1 h_k^{2/3} \alpha_k^{-1} \leq K(h_k^{1/3} + h_k^{2/3} \alpha_k^{-1} + \alpha_k^{1/2}). \end{aligned}$$

□

Заметим, что если положить $\alpha_k = h_k^{4/9}$, то при выполнении условий теоремы 2 имеем

$$\sup_{t \in T} \|X(t) - z_k(t)\|_{L_2(P)} \leq c_0 h_k^{2/9}, \quad \|u_0(\cdot) - u_k(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)} \leq c_1 h_k^{1/9},$$

при этом оптимальность по порядку указанной оценки не утверждается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
2. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Наука, 1999. 238 с.
3. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
4. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984. 456 с.

6. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978. 142 с.
7. **Максимов В.И.** Уравнения непрерывного оценивания возмущений динамических систем // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 771–780.
8. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.** Позиционное моделирование стохастического управления в динамических системах // Докл. междунар. конф. по стохастической оптимизации. Киев, 1984. С. 43–45.
9. **Ширяев А.Н.** Вероятность, статистика, случайные процессы. М.: Изд-во МГУ, 1974. 427 с.
10. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003. 408 с.
11. **Пугачев В.С., Сяицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 642 с.
12. **Розенберг В.Л.** Задача динамического восстановления неизвестной функции в линейном стохастическом дифференциальном уравнении // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 76–87.
13. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** Одна задача об устойчивом отслеживании движения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 142–156.

Розенберг Валерий Львович
канд. физ.-мат. наук
ст. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: rozen@imm.uran.ru

Поступила 02.08.2010

УДК 517.977

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ¹

М. И. Сумин

Рассматривается задача оптимального граничного управления дивергентным линейным параболическим уравнением. Ограничения-равенства задачи задаются недифференцируемыми функционалами. Для ее решения конструируется устойчивый к ошибкам исходных данных алгоритм двойственной регуляризации. Центральную роль в этом алгоритме играет принцип максимума Понтрягина.

Ключевые слова: двойственность, регуляризация, оптимальное граничное управление, недифференцируемый функционал, принцип максимума.

M. I. Sumin. Dual regularization and Pontryagin's maximum principle in a problem of optimal boundary control for a parabolic equation with nondifferentiable functionals.

A problem of optimal boundary control is considered for a divergent linear parabolic equation. Equality constraints of the problem are given by nondifferentiable functionals. A dual regularization algorithm stable to errors in initial data is constructed for solving the problem. Pontryagin's maximum principle plays the key role in this algorithm.

Keywords: duality, regularization, optimal boundary control, nondifferentiable functional, maximum principle.

Введение

Настоящая статья посвящена конструированию устойчивого к ошибкам исходных данных алгоритма двойственной регуляризации (см., например, [1–6]) для решения задачи оптимального управления линейным параболическим уравнением в дивергентной форме с сильно выпуклым целевым функционалом и с конечномерным ограничением типа равенства, которое задается значениями решений в фиксированных точках цилиндрической области изменения независимых переменных. Алгоритм предназначен для приближенного нахождения распределенной правой части уравнения и граничной функции на боковой границе цилиндрической области задания третьей краевой задачи.

Характерные особенности метода двойственной регуляризации состоят в том, что в нем: 1) самым существенным и непосредственным образом используется классическая идея “снятия” ограничений, заложенная в принципе Лагранжа; 2) параллельно с построением приближений к решению задачи, которыми являются точки минимума ее функционала Лагранжа, конструируются и необходимые условия оптимальности [4–6]. Как и в ряде предшествующих работ, посвященных этому методу (см., в частности, [2; 3; 5; 6]), здесь формально рассматривается не отдельная задача оптимального управления, а параметрическая задача, т.е., другими словами, семейство задач, зависящих от параметра, входящего аддитивным образом в ограничение типа равенства. Как известно, наличие такого параметра позволяет “связать” свойства регулярности, нормальности оптимизационной задачи с дифференциальными свойствами ее

¹Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 07-01-00495 и 09-01-97019-р_поволжье), аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 гг.)” Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/3927) и федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (проект НК-13П-13).

функции значений (S -функции). Однако упор в данной работе делается не на наличие параметра в задаче.

Главное отличие рассматриваемой здесь задачи оптимального управления от задач, рассмотренных ранее на основе идеологии двойственной регуляризации (см., например, [2–6]), заключается в том, что функционалы, задающие ограничение-равенство (в данном случае конечномерное), не определены на всем гильбертовом пространстве, которому принадлежит множество допустимых элементов. Точнее говоря, в любой окрестности каждого допустимого элемента существуют элементы из несущего гильбертова пространства, на которых эти функционалы, вообще говоря, не определены. В этой ситуации оказывается невозможным вычисление градиента функционала Лагранжа по управлению, и как следствие решение проблемы минимизации функционала Лагранжа на пути применения традиционных градиентных процедур сталкивается с принципиальными трудностями. Ниже мы показываем, что в этом случае эффективное решение проблемы минимизации функционала Лагранжа оказывается возможным благодаря принципу максимума Понтрягина. Важной особенностью при этом является то, что при обосновании и записи принципа максимума в качестве его сопряженных уравнений естественным образом возникают линейные параболические уравнения, содержащие меры Радона в своих исходных данных.

Задачи оптимального управления с недифференцируемыми в указанном выше смысле функционалами являются естественными для самых различных приложений, связанных, прежде всего, с распределенными системами. К рассматриваемой здесь задаче сводится, например, обратная задача дискретного граничного наблюдения, т.е. обратная задача, в которой решение уравнения наблюдается (измеряется) в конечном наборе фиксированных точек цилиндрической области изменения независимых переменных параболического уравнения. Эти точки, в которых производится наблюдение, в частности, могут принадлежать и границе цилиндрической области. По этой причине предлагаемый в работе двойственный алгоритм может быть полезен и при решении сложных обратных задач наблюдения указанного вида.

1. Постановка задачи

Пусть $U \subset \mathbb{R}^1$, $W \subset \mathbb{R}^1$ — выпуклые компакты, $Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x, t) : x \in S, t \in (0, T)\}$, Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_2(Q_T) : u(x, t) \in U \text{ п.в. на } Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{w \in L_2(S_T) : w(x, t) \in W \text{ п.в. на } S_T\}$, $\mathcal{D} \subset L_2(Q_T) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$. Норму в гильбертовом пространстве \mathcal{H} с элементами $\pi \equiv (u, w)$ обозначим через $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

Рассмотрим семейство зависящих от конечномерного параметра $q \in \mathbb{R}^l$ задач условной минимизации сильно выпуклого функционала

$$(P_q) \quad f(\pi) \rightarrow \min, \quad g(\pi) = q, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}, \quad q \in \mathbb{R}^l \text{ — параметр.}$$

Обозначим решение задачи (P_q) , если оно существует, через π_q^0 .

Сильно выпуклый функционал $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ и векторный функционал $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$ задаются равенствами²

$$\begin{aligned} f(\pi) &\equiv \langle A_{0,1}(\cdot, \cdot)z[\pi](\cdot, \cdot), z[\pi](\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} \\ &+ \langle A_{0,2}(\cdot)z[\pi](\cdot, T), z[\pi](\cdot, T) \rangle_{L_2(\Omega)} \langle A_{0,3}(\cdot, \cdot)z[\pi](\cdot, \cdot), z[\pi](\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} \\ &+ \langle B_1(\cdot, \cdot)u(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} + \langle B_2(\cdot, \cdot)w(\cdot, \cdot), w(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)}, \quad g(\pi) \equiv A_1 z_m[\pi], \\ z_m[\pi] &\equiv (z[\pi](x_1, t_1), \dots, z[\pi](x_m, t_m))^*, \quad (x_i, t_i) \in \overline{Q}_{\iota, T}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \iota \in (0, T), \end{aligned}$$

²Здесь и ниже мы используем обозначения функциональных пространств и норм их элементов, принятые в монографии [7], $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве.

где $z[\pi]$ — решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения дивергентного вида

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z + u(x,t) = 0, \quad (1.1)$$

$$z(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)z = w(x,t), \quad (x,t) \in S_T.$$

В (1.1), как и в [7], $\frac{\partial z(x,t)}{\partial \mathcal{N}} \equiv a_{i,j}(x,t)z_{x_j}(x,t) \cos \alpha_i(x,t)$, $\alpha_i(x,t)$ — угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i .

Ниже будет использована также и другая форма записи задачи (1.1):

$$\frac{\partial z}{\partial t} + Az + az + u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1.2)$$

$$z(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma z = w(x,t), \quad (x,t) \in S_T,$$

где

$$Az(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}).$$

Далее будут нужны следующие условия на исходные данные оптимизационной задачи (P_q):

а) функции $A_{0,1} : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $A_{0,3} : S_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $B_1 : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^1$, $B_2 : S_T \rightarrow \mathbb{R}^1$ являются измеримыми по Лебегу, $A_{0,2} \in C(\bar{\Omega})$;

б) выполняются оценки

$$0 \leq A_{0,1}(x,t) \leq L \text{ при п.в. } (x,t) \in Q_T, \quad 0 \leq A_{0,2}(x) \leq L \text{ при п.в. } x \in \Omega,$$

$$0 \leq A_{0,3}(x,t) \leq L \text{ при п.в. } (x,t) \in S_T, \quad \kappa < B_1(x,t) \leq L \text{ при п.в. } (x,t) \in Q_T,$$

$$\kappa < B_2(x,t) \leq L \text{ при п.в. } (x,t) \in S_T,$$

где κ, L — некоторые положительные постоянные;

в) функции $a_{i,j}$, $a : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i, j = 1, \dots, n$, измеримы в смысле Лебега, $v_0 \in C(\bar{\Omega})$, A_1 — заданная $(l \times m)$ -матрица;

г) справедливы соотношения

$$\nu|\xi|^2 \leq a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2 \quad \forall (x,t) \in Q_T, \quad \nu, \mu > 0, \quad a_{i,j}(x,t) = a_{j,i}(x,t),$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная;

д) справедливы оценки

$$\|a\|_{p,Q_T} \leq K_1, \quad \|\sigma\|_{r,S_T} \leq K_1, \quad a(x,t) \geq C_0 \text{ п.в. на } Q_T, \quad \sigma(x,t) \geq C_0 \text{ п.в. на } S_T,$$

где $K_1 > 0$ — некоторая постоянная, $p > n/2 + 1$, $r > n + 1$.

е) граница S является границей класса $C^{2,\gamma}$, $\gamma \in (0, 1]$, т.е. S — $(n-1)$ -мерная поверхность класса $C^{2,\gamma}$ такая, что область Ω лежит локально по одну сторону от S . При этом функция принадлежит классу $C^{2,\gamma}$, если она дважды гладкая и ее вторые производные принадлежат гельдеровскому классу H^γ .

Пусть F — множество всевозможных наборов исходных данных $f \equiv \{A_{0,i}, i = 1, 2, 3, A_1, B_i, i = 1, 2, a, v_0, \sigma\}$, для каждого из которых выполняются условия а)–е) с не зависящими от набора постоянными L, K, K_1, κ . Определим наборы невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных соответственно: $f^0 \equiv \{A_{0,i}^0, i = 1, 2, 3, A_1^0, B_i^0, i = 1, 2, a^0, v_0^0, \sigma^0\}$ и $f^\delta \equiv$

$\{A_{0,i}^\delta, i = 1, 2, 3, A_1^\delta, B_i^\delta, i = 1, 2, a^\delta, v_0^\delta, \sigma^\delta\}$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$\|A_{0,1}^\delta - A_{0,1}^0\|_{\infty, Q_T}, \|A_{0,2}^\delta - A_{0,2}^0\|_{\frac{(0)}{\Omega}}, \|A_{0,3}^\delta - A_{0,3}^0\|_{\infty, S_T} \leq \delta, |A_1^\delta - A_1^0| \leq \delta, \quad i = 0, 1, \quad (1.3)$$

$$\|B_1^\delta - B_1^0\|_{\infty, Q_T}, \|B_2^\delta - B_2^0\|_{\infty, S_T} \leq \delta, \|a^\delta - a^0\|_{p, Q_T}, |v_0^\delta - v_0^0|_{\frac{(0)}{\Omega}}, \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{r, S_T} \leq \delta.$$

Из условий а)–е) и теорем существования слабого (обобщенного) решения третьей краевой задачи для линейного параболического уравнения дивергентного вида, которые могут быть найдены в [7, гл. III, § 5], а также в [8; 9], следует разрешимость краевых задач (прямой и сопряженной) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$. Соответствующее утверждение сформулируем в виде следующего предложения.

Предложение 1. Для любой пары $(u, w) \in L_2(Q_T) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$ при любом $T > 0$ и любом наборе исходных данных $f \in \mathbf{F}$ исходная (прямая) задача (1.1) однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)$, и справедлива априорная оценка

$$|z[\pi]|_{Q_T} + \|z[\pi]\|_{2, S_T} \leq C_T(\|u\|_{2, Q_T} + \|v_0\|_{2, \Omega} + \|w\|_{2, S_T}), \quad (1.4)$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и пары управляющих параметров $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{H}$.

Кроме того, однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любых функций $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$ при любом $T > 0$ и сопряженная задача

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x, t) \eta_{x_i} + a(x, t) \eta = \chi(x, t), \quad (1.5)$$

$$\eta(x, T) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \eta}{\partial N} + \sigma(x, t) \eta = \omega(x, t), \quad (x, t) \in S_T.$$

Ее решение будем обозначать через $\eta[\chi, \psi, \omega]$. Для него так же, как в случае прямой задачи, справедлива априорная оценка

$$|\eta[\chi, \psi, \omega]|_{Q_T} + \|\eta[\chi, \psi, \omega]\|_{2, S_T} \leq C_T^1(\|\chi\|_{2, Q_T} + \|\psi\|_{2, \Omega} + \|\omega\|_{2, S_T}),$$

в которой постоянная C_T^1 не зависит от набора исходных данных f и тройки $(\chi, \psi, \omega) \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$.

Одновременно из условий а)–е) и теорем существования слабого решения третьей краевой задачи для линейного параболического уравнения дивергентного вида [10; 11] следует разрешимость краевых задач (прямой и сопряженной) в классе $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$. Можно утверждать, что справедливо следующее аналогичное предложению 1

Предложение 2. Для любой пары $(u, w) \in \mathcal{D}$ при любом $T > 0$ и любом наборе исходных данных $f \in \mathbf{F}$ однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ прямая задача (1.1), и справедлива при $p > n/2 + 1$, $r > n + 1$ априорная оценка

$$|z[\pi]|_{\frac{(0)}{Q_T}} \leq C_T(\|u\|_{p, Q_T} + |v_0|_{\frac{(0)}{\Omega}} + \|w\|_{r, S_T}), \quad (1.6)$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и пары управляющих параметров $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{D}$. Более того, для решения $z[\pi]$, $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{D}$, справедлива оценка

$$|z[\pi]|_{\frac{(\alpha, \frac{\alpha}{2})}{\Omega \times [t, T]}} \leq C_T^1,$$

в которой постоянная C_T^1 зависит лишь от $T, \Omega, n, p, r, C_0, \iota$, но не зависит от набора исходных данных f и пары управляющих параметров $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{D}$.

Помимо того, одновременно однозначно разрешима в $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ для любой тройки (χ, ψ, ω) , $\chi \in L_p(Q_T)$, $\psi \in C(\overline{\Omega})$, $\omega \in L_r(S_T)$, и сопряженная задача (1.5). Для ее решения также справедлива априорная оценка

$$|\eta[\chi, \psi, \omega]|_{\overline{Q_T}}^{(0)} \leq C_T(\|\chi\|_{p, Q_T} + |\psi|_{\overline{\Omega}}^{(0)} + \|\omega\|_{r, S_T}), \quad (1.7)$$

в которой постоянная C_T также не зависит от набора исходных данных f и тройки (χ, ψ, ω) .

Определим функцию значений $\beta : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ задачи (P_q)

$$\beta(q) \equiv \beta_{+0}(q) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon(q), \quad \beta_\epsilon(q) \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}_q^\epsilon} f(\pi), \quad \beta_\epsilon(q) \equiv +\infty, \text{ если } \mathcal{D}_q^\epsilon = \emptyset,$$

где $\mathcal{D}_q^\epsilon \equiv \{\pi \in \mathcal{D} : |g(\pi) - q| \leq \epsilon\}$, $\epsilon \geq 0$. Очевидно, в общей ситуации $\beta(q) \leq \beta_0(q) \quad \forall q \in \mathbb{R}^l$, где $\beta_0 : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — классическая функция значений.

Центральным в данной работе будет понятие минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [12] в задаче (P_q) , т. е. последовательности элементов $\pi^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \dots$, такой, что $f(\pi^i) \leq \beta(q) + \delta^i$, $\pi^i \in \mathcal{D}_q^{\epsilon^i}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i , ϵ^i , $i = 1, 2, \dots$.

Обозначим решения $z[\pi]$, $\eta[\chi, \psi, \omega]$, функционал f , векторный функционал g , функцию значений β и т. п., соответствующие набору исходных данных f^δ , $\delta \in [0, \delta_0]$, через $z^\delta[\pi]$, $\eta^\delta[\chi, \psi, \omega]$, f^δ , g^δ , β^δ соответственно.

2. Вспомогательные результаты

В силу линейности начально-краевой задачи (1.1) и априорных оценок предложений 1, 2 при любом наборе исходных данных f значения непрерывного функционала $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ и непрерывного векторного функционала $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$ определены на каждом элементе $\pi \in \mathcal{D}$ (функционал $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ определен на самом деле на всем пространстве \mathcal{H}). Одновременно функционал $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ является сильно выпуклым, и его постоянная сильной выпуклости благодаря условиям на исходные данные не зависит от набора f .

С формальной точки зрения мы имеем параметрическую невозмущенную задачу математического программирования с векторным ограничением типа равенства

$$(P_q^0) \quad f^0(\pi) \rightarrow \min, \quad g^0(\pi) = q, \quad \pi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{H}, \quad q \in \mathbb{R}^l \text{ — параметр.}$$

В ней непрерывный векторный функционал $g^0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$, вообще говоря, не является линейным непрерывным векторным функционалом на всем гильбертовом пространстве \mathcal{H} , так как он не определен, строго говоря, для элементов $\pi \in \mathcal{H} \setminus (L_p(Q_T) \times L_r(S_T))$. Это обстоятельство заметно отличает данную задачу от аналогичных задач, рассмотренных в работах [2–6]. При этом векторный функционал g^0 таков, что

$$g^0(\alpha\pi_1 + (1 - \alpha)\pi_2) = \alpha g^0(\pi_1) + (1 - \alpha)g^0(\pi_2) \quad \forall \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{D}, \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

В силу непрерывности сильно выпуклого функционала $f^0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$ и векторного функционала $g^0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^l$ со свойством (2.1) и классических свойств слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве можно утверждать, что справедлива

Лемма 1. Если $\beta^0(q) < +\infty$, то для любого минимизирующего приближенного решения π^i , $i = 1, 2, \dots$, в задаче (P_q^0) справедливы предельные соотношения

$$f^0(\pi^i) \rightarrow \beta^0(q) = \beta_0^0(q) = f^0(\pi_q^0), \quad \|\pi^i - \pi_q^0\|_{\mathcal{H}}, \quad i \rightarrow \infty.$$

С учетом приближенного задания исходных данных мы имеем формально вместо задачи (P_q^0) семейство задач, зависящих от характеризующей ошибку их задания величины δ

$$(P_q^\delta) \quad f^\delta(\pi) \rightarrow \inf, \quad g^\delta(\pi) = q, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad q \in \mathbb{R}^l.$$

Получим в силу оценок (1.3) оценки отклонения возмущенных исходных данных $\{f^\delta, g^\delta\}$ от невозмущенных $\{f^0, g^0\}$ в задаче математического программирования (P_q^0) .

С этой целью нам потребуются прежде всего оценки отклонения решений начально-краевой задачи (1.1) при возмущении управлений и исходных данных. Следствием априорных оценок предложений 1, 2 является

Лемма 2. Пусть $f, f^1 \in F$ — два произвольных набора исходных данных. Справедлива оценка

$$|z[\pi]|_{Q_T} + |z[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \leq C_T,$$

в которой постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и пары управляющих параметров $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{D}$. Для любых двух пар $\pi^1, \pi \in \mathcal{D}$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & |z^1[\pi^1] - z[\pi]|_{Q_T} + |z^1[\pi^1] - z[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \\ & \leq C_T \left(|z[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \|a^1 - a\|_{p, Q_T} + \|u^1 - u\|_{p, Q_T} + |v_0^1 - v_0|_{\Omega}^{(0)} + \|w^1 - w\|_{r, S_T} + |z[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \|\sigma^1 - \sigma\|_{r, S_T} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

в которой, как и выше, постоянная C_T не зависит от наборов исходных данных f, f^1 и пар управляющих параметров $\pi, \pi^1 \in \mathcal{D}$.

В силу ограниченности множеств U, W , оценок (1.3), (1.4) и оценки (2.2) можем записать

$$|z^\delta[\pi] - z^0[\pi]|_{Q_T}^{(0)} \leq C\delta, \quad (2.3)$$

где, как и выше, постоянная C_T не зависит от набора исходных данных f и тройки управляющих параметров $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{D}$. Из оценок (1.3), (2.3) в свою очередь следуют оценки для отклонения целевого функционала

$$|f^\delta(\pi) - f^0(\pi)| \leq C_1\delta, \quad (2.4)$$

а также векторного функционала, задающего ограничение-равенство

$$|g^\delta(\pi) - g^0(\pi)| \leq C_2\delta, \quad (2.5)$$

в которых постоянные $C, C_1, C_2 > 0$ следует считать не зависящими от δ и пары управляющих параметров $\pi \equiv (u, w) \in \mathcal{D}$. Таким образом, оценки отклонения возмущенных исходных данных $\{f^\delta, A^\delta\}$ от невозмущенных $\{f^0, A^0\}$ в задаче (P_q^0) получены.

Определим далее функционал Лагранжа задачи (P_q^δ)

$$L_q^\delta(\pi, \lambda) \equiv f^\delta(\pi) + \langle \lambda, g^\delta(\pi) - q \rangle, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l,$$

и двойственную задачу

$$V_q^\delta(\lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in \mathbb{R}^l, \quad V_q^\delta(\lambda) \equiv \min_{\pi \in \mathcal{D}} L_q^\delta(\pi, \lambda).$$

Напомним при этом, что операция \min в определении целевой функции двойственной задачи законна, так как функционал $L_q^\delta(\cdot, \lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathbb{R}^l$ благодаря условиям на исходные данные задачи (P_q) , в силу которых выполняется равенство (2.1), можно без ограничения общности считать при $\delta \in [0, \delta_0]$ сильно выпуклым на выпуклом замкнутом множестве \mathcal{D} гильбертова пространства \mathcal{H} . При этом минимум достигается для каждых $q \in \mathbb{R}^l, \delta \in [0, \delta_0], \lambda \in \mathbb{R}^l$ в единственной точке $\pi^\delta[\lambda] \in \mathcal{D}$. Функция V_q^δ является определенной для любой точки $\lambda \in \mathbb{R}^l$ и вогнутой на \mathbb{R}^l . Более того, справедлива следующая важная лемма, являющаяся частным случаем утверждения леммы 3 в [4].

Лемма 3. *Градиент функции V_q^δ в точке $\lambda \in \mathbb{R}^l$ равен*

$$\partial V_q^\delta(\lambda) = A_1^\delta z_m^\delta[\pi^\delta[\lambda]] - q \equiv g^\delta(\pi^\delta[\lambda]) - q. \quad (2.6)$$

Этот градиент непрерывно зависит от $\lambda \in \mathbb{R}^l$.

3. Регуляризирующий двойственный алгоритм

Лемма 3 дает возможность организовать процесс максимизации на \mathbb{R}^l сильно вогнутой функции $\mathbb{R}_q^{\delta,\alpha}(\cdot) \equiv V_q^\delta(\cdot) - \alpha|\cdot|^2$. Обозначим через $\lambda_q^{\delta,\alpha}$ единственную в \mathbb{R}^l точку, дающую безусловный максимум функции $\mathbb{R}_q^{\delta,\alpha}$. Покажем, что при условии согласования ошибки задания исходных данных δ с параметром регуляризации α регуляризованные элементы $\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha}]$ для любого $q \in \text{dom } \beta^0$ сильно сходятся при $\delta, \alpha \rightarrow 0$ к решению исходной задачи π_q^0 .

Предположим, что выполняется условие согласования

$$\delta/\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Так как функция $\mathbb{R}_q^{\delta,\alpha}$ в силу леммы 3 непрерывно дифференцируема и выполняется равенство (2.6), то можем записать равенство

$$g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha}]) - q = 2\alpha\lambda_q^{\delta,\alpha}, \quad \delta \in [0, \delta_0]. \quad (3.2)$$

Умножив это равенство скалярно на $\lambda_q^{\delta,\alpha}$, получаем

$$\langle g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha}]) - q, \lambda_q^{\delta,\alpha} \rangle = 2\alpha|\lambda_q^{\delta,\alpha}|^2, \quad (3.3)$$

откуда следует неравенство

$$\langle g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha}]) - q, \lambda_q^{\delta,\alpha} \rangle \geq 0. \quad (3.4)$$

Далее, так как

$$\begin{aligned} L_q^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}], \lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}) &\equiv f^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \langle \lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) - q \rangle \\ &\leq L_q^\delta(\pi_q^0, \lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}) \equiv f^\delta(\pi_q^0) + \langle \lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(\pi_q^0) - q \rangle \leq f^0(\pi_q^0) + [f^\delta(\pi_q^0) - f^0(\pi_q^0)] + |\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}| |g^\delta(\pi_q^0) - q|, \end{aligned}$$

то в силу оценок (2.4), (2.5) получаем

$$f^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \langle \lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) - q \rangle \leq f^0(\pi_q^0) + C_1\delta + C_2\delta|\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}|$$

или

$$\langle \lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) - q \rangle \leq C_2\delta|\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}| + f^0(\pi_q^0) + C_1\delta - f^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]).$$

Отсюда в свою очередь в силу (3.3) получаем

$$2\alpha(\delta)|\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}|^2 - C_2\delta|\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}| - f^0(\pi_q^0) - C_1\delta + f^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) \leq 0.$$

Из последней оценки вытекает оценка

$$|\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}| \leq \frac{C_2\delta + \sqrt{(C_2\delta)^2 - 8\alpha(\delta)C(\delta)}}{4\alpha(\delta)}, \quad C(\delta) \equiv f^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) - f^0(\pi_q^0) - C_1\delta.$$

Так как величина $f^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}])$ равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ ($\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число) ограничена (см. оценки (1.6) и (2.4)), получаем предельное соотношение

$$\alpha(\delta)|\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

В силу (3.2) и предельного соотношения (3.5) получаем в свою очередь предельное соотношение

$$g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) - q \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Покажем, что из предельных соотношений (3.5) и (3.6) следует, что

$$\|\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}] - \pi_q^0\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Так как элемент $\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]$ минимизирует функционал Лагранжа $L_q^\delta(\pi, \lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)})$, $\pi \in \mathcal{D}$, то

$$f^\delta(\pi) - f^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \langle \lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(\pi) - g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) \rangle \geq 0 \quad \forall \pi \in \mathcal{D},$$

откуда в силу неравенства (3.4) выводим неравенство

$$f^\delta(\pi) - f^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \langle \lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(\pi) - q \rangle \geq 0 \quad \forall \pi \in \mathcal{D}$$

и как следствие

$$f^\delta(\pi_q^0) - f^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) + \langle \lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}, g^\delta(\pi_q^0) - q \rangle \geq 0.$$

Из последнего неравенства в силу оценок (2.4), (2.5), условия согласования (3.1) и предельного соотношения (3.5) получаем

$$f^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) \leq f^0(\pi_q^0) + \psi(\delta), \quad (3.8)$$

где $\psi(\delta) \geq 0$, $\psi(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. В силу ограниченности семейства элементов $\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]$ и оценки (2.4) из оценки (3.8) выводим

$$f^0(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) \leq f^0(\pi_q^0) + \psi_1(\delta), \quad (3.9)$$

где $\psi_1(\delta) \geq 0$, $\psi_1(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$.

Далее, учитывая оценки (2.4), (2.5) и ограниченность элементов $\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]$, в силу (3.6) можем записать

$$\begin{aligned} |g^0(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) - q| &\leq |g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) - q| + |g^0(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) - g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}])| \\ &\leq |g^\delta(\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]) - q| + C\delta\|\pi^\delta[\lambda_q^{\delta,\alpha(\delta)}]\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В силу оценки (3.9) и этих соотношений для любой последовательности δ_s , $s = 1, 2, \dots$, $\delta_s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, получаем соотношения

$$f^0(\pi^{\delta_s}[\lambda_q^{\delta_s,\alpha(\delta_s)}]) \leq f^0(\pi_q^0) + \psi_1(\delta_s), \quad |g^0(\pi^{\delta_s}[\lambda_q^{\delta_s,\alpha(\delta_s)}]) - q| \rightarrow 0, \quad \delta_s \rightarrow 0.$$

Из этих соотношений следует, что любая такая последовательность $\pi^{\delta_s}[\lambda_q^{\delta_s,\alpha(\delta_s)}]$, $s = 1, 2, \dots$, является минимизирующим приближенным решением в задаче (P_q^0) , и, значит, с учетом леммы 1 мы имеем предельное соотношение (3.7).

4. Нахождение точки минимума функционала Лагранжа с помощью принципа максимума Понтрягина

Как следует из результатов предыдущего раздела, центральную роль при аппроксимации точного решения оптимизационной задачи (P_q^0) играют точки, минимизирующие ее функционал Лагранжа. Эти точки непосредственно участвуют в организации процесса максимизации двойственного функционала на основе того или иного стандартного численного алгоритма (например, градиентного типа). По этой причине надо иметь устойчивый алгоритм нахождения таких точек минимума. К сожалению, в условиях данной работы мы не можем для нахождения

указанных точек минимума применять методы, использующие при своей организации знание градиента функции Лагранжа, так как в условиях задачи (P_q^0) этот функционал не является, вообще говоря, дифференцируемым по Фреше в точках \mathcal{D} . Последнее обстоятельство вызвано тем, что в окрестности любой точки из \mathcal{D} , как уже было отмечено выше, имеются точки из \mathcal{H} , относительно которых мы не знаем, определен ли вообще в них функционал Лагранжа. Мы покажем ниже, что в этом случае эффективным инструментом для нахождения указанных точек минимума может служить принцип максимума Понтрягина.

Итак, рассмотрим задачу оптимального управления

$$L_q(\pi, \lambda) \equiv f(\pi) + \langle \lambda, g(\pi) - q \rangle \rightarrow \min, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad (4.1)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^l$ — фиксированный вектор.

Единственным решением этой задачи является пара $\pi[\lambda]$. Однако мы не можем напрямую записать необходимые условия оптимальности в виде поточечного принципа максимума Понтрягина в задаче (4.1) из-за “плохих” свойств функционала $L_q(\cdot, \lambda)$, приводящих к принципиальным затруднениям при непосредственном вычислении его первой вариации. Поэтому для получения необходимых условий оптимальности в задаче (4.1) мы предварительно “сгладим” ее, а затем получим условия оптимальности во вспомогательной “сглаженной” задаче, зависящей от “параметра сглаживания”. Предельный переход в полученных условиях оптимальности при стремлении к нулю этого параметра приведет нас к принципу максимума Понтрягина в задаче (4.1).

С целью реализации этой схемы введем “сглаженный” с помощью усреднения по Стеклову функционал

$$I_i^h(\pi) \equiv \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \int_{S_h(x_i, t_i) \cap Q_T} z[\pi](x, t) dx dt,$$

где $S_h(x_i, t_i)$ — шар достаточно малого радиуса h с центром в $(x_i, t_i) \in \overline{Q}_{i,T}$, $i = 1, \dots, m$. Определим соответственно и сглаженную задачу (4.1)

$$L_q^h(\pi, \lambda) \equiv f(\pi) + \langle \lambda, A_1 z_m^h[\pi] - q \rangle \rightarrow \min, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad (4.2)$$

где $z_m^h[\pi] \equiv (I_1^h(\pi), \dots, I_m^h(\pi))^*$.

Так как в силу второй оценки предложения 2 нормы решений $z[\pi]$ в пространстве $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{i,T})$ для некоторого $\alpha > 0$ равномерно по $\pi \in \mathcal{D}$ ограничены, то множество $\{z[\pi] : \pi \in \mathcal{D}\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. По этой причине можно утверждать, что разность $L_q^h(\pi, \lambda) - L_q(\pi, \lambda)$ при $h \rightarrow 0$ равномерно по $\pi \in \mathcal{D}$ стремится к нулю. В силу этой равномерной сходимости и известной оценки для сильно выпуклых функционалов (см., например, теорему 10 в [13, гл. 8, § 2]) можно утверждать, что имеет место предельное соотношение в пространстве \mathcal{H}

$$\pi^h[\lambda] \rightarrow \pi[\lambda], \quad h \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

где $\pi^h[\lambda]$ — пара управлений, минимизирующая сильно выпуклый функционал $L_q^h(\cdot, \lambda)$. Заметим сразу, что из предельного соотношения (4.3) с учетом компактности U, W вытекает и предельное соотношение

$$\|u^h[\lambda] - u[\lambda]\|_{p, Q_T} + \|w^h[\lambda] - w[\lambda]\|_{r, S_T} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

из которого в силу оценок (1.6), (2.2) мы в свою очередь получаем предельное соотношение

$$|z[\pi^h[\lambda]] - z[\pi[\lambda]]|_{\overline{Q}_T}^{(0)} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

Получим условия оптимальности пары $\pi^h[\lambda] \equiv (u^h[\lambda](x, t), w^h[\lambda](x, t))$ в задаче (4.2). Для этого нам понадобится прежде всего следующая лемма, доказательство которой можно найти, например, в [2].

Лемма 4. Пусть задана третья краевая задача

$$\begin{aligned} z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z &= f(x,t), \\ z(0,x) &= \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)z = \chi(x,t), \quad (x,t) \in S_T, \end{aligned} \quad (4.5)$$

с коэффициентами $a_{i,j}$, b_i , a , f , ψ , σ , χ , удовлетворяющими условиям

$$\nu|\xi|^2 \leq a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2 \quad \forall (x,t) \in Q_T, \quad \nu, \mu > 0,$$

$$a \in L_p(Q_T), \quad f \in L_2(Q_T), \quad \psi \in L_2(\Omega), \quad \sigma \in L_\infty(S_T), \quad \chi \in L_2(S_T).$$

Тогда, если функция $z \in V_2^{1,0}(Q_T)$ есть решение задачи (4.5), то для любых $d \in L_2(\Omega)$, $c \in L_2(Q_T)$, $g \in L_2(S_T)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} c(x,t)z(x,t) dx dt + \int_{\Omega} d(x)z(x,T) dx + \int_{S_T} g(s,t)z(s,t) ds dt \\ &= \int_{Q_T} f(x,t)\eta(x,t) dx dt + \int_{\Omega} \psi(x)\eta(x,0) dx + \int_{S_T} \chi(s,t)\eta(s,t) ds dt, \end{aligned}$$

где функция $\eta \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — единственное обобщенное решение сопряженной задачи

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i}) + a(x,t)\eta = c(x,t),$$

$$\eta(x,T) = d(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)\eta = g(x,t), \quad (x,t) \in S_T.$$

Как можно заметить, для приращения функционала L_q^h справедливо равенство

$$\begin{aligned} & L_q(\pi^1, \lambda) - L_q(\pi, \lambda) \\ &= \left(\langle A_{0,1}(\cdot, \cdot)(z[\pi^1](\cdot, \cdot) + z[\pi](\cdot, \cdot)), z[\pi^1](\cdot, \cdot) - z[\pi](\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} \right) \\ &+ \left(\langle A_{0,2}(\cdot)(z[\pi^1](\cdot, T) + z[\pi](\cdot, T)), z[\pi^1](\cdot, T) - z[\pi](\cdot, T) \rangle_{L_2(\Omega)} \right) \\ &+ \left(\langle A_{0,3}(\cdot, \cdot)(z[\pi^1](\cdot, \cdot) + z[\pi](\cdot, \cdot)), z[\pi^1](\cdot, \cdot) - z[\pi](\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} \right) \\ &+ \left(\langle B_1(\cdot, \cdot)u^1(\cdot, \cdot), u^1(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} - \langle B_1(\cdot, \cdot)u(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} \right) \\ &+ \left(\langle B_2(\cdot, \cdot)w^1(\cdot, \cdot), w^1(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} - \langle B_2(\cdot, \cdot)w(\cdot, \cdot), w(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^m (A_1^*\lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \int_{Q_T} \chi_i^h(x,t)(z[\pi^1](x,t) - z[\pi](x,t)) dx dt, \end{aligned}$$

где через $(A_1^*\lambda)_i$ обозначена i -я компонента вектора $A_1^*\lambda$, $\chi_i^h(x,t) \equiv \{1, (x,t) \in S_h(x_i, t_i) \cap Q_T; 0, (x,t) \in Q_T \setminus S_h(x_i, t_i) \cap Q_T\}$ — характеристическая функция для множества $S_h(x_i, t_i) \cap Q_T$.

Можем записать также начально-краевую задачу для приращения $\Delta z \equiv z[\pi^1] - z[\pi]$:

$$\Delta z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)\Delta z_{x_j}) + a(x,t)\Delta z + (u^1(x,t) - u(x,t)) = 0,$$

$$\Delta z(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \Delta z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)\Delta z = (w^1(x,t) - w(x,t)), \quad (x,t) \in S_T.$$

Преобразуя выражение для приращения функционала L_q^h , с учетом этой начально-краевой задачи, в силу леммы 4 получаем

$$\begin{aligned} & L_q(\pi^1, \lambda) - L_q(\pi, \lambda) \\ &= \int_{Q_T} (u^1(x, t) - u(x, t)) \eta^h[\pi^1, \pi](x, t) dx dt + \int_{S_T} (w^1(s, t) - w(s, t)) \eta^h[\pi^1, \pi](s, t) ds dt \\ & \quad + \left(\langle B_1(\cdot, \cdot) u^1(\cdot, \cdot), u^1(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} - \langle B_1(\cdot, \cdot) u(\cdot, \cdot), u(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(Q_T)} \right) \\ & \quad + \langle B_2(\cdot, \cdot) w^1(\cdot, \cdot), w^1(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)} - \langle B_2(\cdot, \cdot) w(\cdot, \cdot), w(\cdot, \cdot) \rangle_{L_2(S_T)}, \end{aligned}$$

где $\eta^h[\pi^1, \pi] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} & -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{i,j}(x, t) \eta_{x_i}) + a(x, t) \eta \\ &= A_{0,1}(x, t) (z[\pi^1](x, t) + z[\pi](x, t)) + \sum_{i=1}^l (A_1^* \lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \chi_i^h(x, t), \\ & \eta(x, T) = A_{0,2}(x) (z[\pi^1](x, T) + z[\pi](x, T)), \quad x \in \Omega, \\ & \frac{\partial \eta}{\partial N} + \sigma(x, t) \eta = A_{0,3}(s, t) (z[\pi^1](s, t) + z[\pi](s, t)), \quad (x, t) \in S_T, \end{aligned} \tag{4.6}$$

для которого введем также обозначение $\eta^h[\pi, \pi] \equiv \eta^h[\pi]$.

Формальная запись сопряженной задачи (4.6) приводит к интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \eta(x, t) z_t(x, t) dx dt + \int_{Q_T} [(a_{i,j}(x, t) \eta_{x_i}(x, t)) z_{x_i} + a(x, t) \eta(x, t) z] dx dt + \int_{S_T} \sigma(s, t) \eta(s, t) z ds dt \\ &= \int_{Q_T} A_{0,1}(x, t) (z[\pi^1](x, t) + z[\pi](x, t)) + \sum_{i=1}^l (A_1^* \lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \chi_i^h(x, t) z(x, t) dx dt \\ &+ \int_{S_T} A_{0,3}(s, t) (z[\pi^1](s, t) + z[\pi](s, t)) z(s, t) ds dt + \int_{\Omega} A_{0,2}(x) (z[\pi^1](x, T) + z[\pi](x, T)) z(x, T) dx \end{aligned} \tag{4.7}$$

для любой функции $z \in W_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю при $t = 0$.

Пусть далее (\bar{x}, \bar{t}) — точка Лебега функций

$$u^h[\lambda](x, t) \eta^h[\pi^h[\lambda]](x, t), \quad \eta^h[\pi^h[\lambda]](x, t), \quad B_1(x, t), \quad B_1(x, t) (u^h[\lambda](x, t))^2, \quad (x, t) \in Q_T,$$

а (\bar{s}, \bar{t}) — точка Лебега функций

$$w^h[\lambda](s, t) \eta^h[\pi^h[\lambda]](s, t), \quad \eta^h[\pi^h[\lambda]](s, t), \quad B_2(s, t), \quad B_2(s, t) (w^h[\lambda](s, t))^2, \quad (s, t) \in S_T.$$

Напомним здесь, что мы понимаем под точкой Лебега функции, заданной на поверхности S_T . Так как в соответствии с условием е) граница S области Ω является границей класса $C^{2,\gamma}$, $\gamma \in (0, 1]$, а значит, и липшицевой границей, то можно утверждать, что существует конечный набор измеримых в смысле $(n-1)$ -мерной меры, индуцированной на S , множеств S_r , $r = 1, 2, \dots, e$, и функций ω_r , $r = 1, 2, \dots, e$, таких, что

$$(i) \quad \bigcup_{r=1}^e S_r = S, \quad \text{int } S_k \cap \text{int } S_l = \emptyset, \quad \text{если } k \neq l,$$

(ii) функции $\omega_r : \overbrace{(-P, P) \times \cdots \times (-P, P)}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^1$ являются липшицевыми, и для некоторой координатной системы $(x'_r, x_{r,n}) \equiv (x_{r,1}, \dots, x_{r,n-1}, x_{r,n})$ имеет место равенство

$$\text{int } S_r = \left\{ (x'_r, \omega(x'_r)) : x'_r \in \overbrace{(-P, P) \times \cdots \times (-P, P)}^{n-1} \right\}.$$

Зафиксируем точку $x_0 \in \text{int } S_r$ для некоторого $1 \leq r \leq e$ и организуем для данного достаточно малого $\epsilon > 0$ множество

$$S_\epsilon(x_0) \equiv \left\{ x = (x'_r, \omega(x'_r)) : x'_r \in B_\epsilon(x'_{0r}) \subset \overbrace{(0, 1) \times \cdots \times (0, 1)}^{n-1} \right\},$$

где $B_\epsilon(x'_{0r})$ — шар радиуса ϵ с центром в точке x'_{0r} пространства \mathbb{R}^{n-1} . Определим также множество $S_T^\epsilon(x_0, t_0) \equiv \{S_\epsilon(x_0) \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)\}$. Справедлива следующая лемма, доказательство которой можно найти, например, в [14].

Лемма 5. Пусть задана функция $f \in L_1(S_T)$. Тогда существует измеримое в смысле индуцированной на S_T n -мерной меры μ_T множество L , $\mu_T(L) = \mu_T(S_T)$, такое, что для каждой точки $(x_0, t_0) \in L$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_T(S_T^\epsilon(x_0, t_0))} \int_{S_T^\epsilon(x_0, t_0)} |f(x, t) - f(x_0, t_0)| \mu_T(ds dt) = 0.$$

Указанные в сформулированной лемме точки (x_0, t_0) из множества L мы и называем точками Лебега функций из $L_1(S_T)$.

Определим вариацию $\pi_\epsilon^h[\lambda] \equiv (u_\epsilon^h[\lambda], w_\epsilon^h[\lambda])$ пары $\pi^h[\lambda]$, $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, ϵ_0 — достаточно малое число, по формуле

$$u_\epsilon^h[\lambda](x, t) \equiv \begin{cases} u \in U, & \text{если } (x, t) \in P_\epsilon \equiv \{\bar{x}_i - \epsilon \leq x_i \leq \bar{x}_i, i = 1, \dots, n, \bar{t} - \epsilon \leq t \leq \bar{t}\}; \\ u^h[\lambda](x, t), & \text{если } (x, t) \in Q_T \setminus P_\epsilon, \end{cases}$$

$$w_\epsilon^h[\lambda](s, t) \equiv \begin{cases} w \in W, & \text{если } (s, t) \in S_T^\epsilon(\bar{s}, \bar{t}); \\ w^h[\lambda](s, t), & \text{если } (s, t) \in S_T \setminus S_T^\epsilon(\bar{s}, \bar{t}). \end{cases}$$

Так как в силу оценки (1.6)

$$|z[\pi_\epsilon^h[\lambda]] - z[\pi^h[\lambda]]|_{\overline{Q}_T}^{(0)} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

то, учитывая оценку (1.7), можем утверждать, что справедливо предельное соотношение

$$|\eta^h[\pi_\epsilon^h[\lambda], \pi^h[\lambda]] - \eta^h[\pi^h[\lambda]]|_{\overline{Q}_T}^{(0)} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

Последнее предельное соотношение с учетом классических свойств точек Лебега (см., в частности, лемму 5) приводит к следующему выражению для первой вариации функционала Лагранжа

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (L_q(\pi_\epsilon^h[\lambda], \lambda) - L_q(\pi^h[\lambda], \lambda)) \\ &= (u - u^h[\lambda](\bar{x}, \bar{t})) \eta^h[\pi^h[\lambda]](\bar{x}, \bar{t}) + (w - w^h[\lambda](\bar{s}, \bar{\tau})) \eta^h[\pi^h[\lambda]](\bar{s}, \bar{\tau}) \\ &+ (B_1(\bar{x}, \bar{t}) u^2 - B_1(\bar{x}, \bar{t}) (u^h[\lambda](\bar{x}, \bar{t}))^2) + (B_2(\bar{s}, \bar{\tau}) w^2 - B_2(\bar{s}, \bar{\tau}) (w^h[\lambda](\bar{s}, \bar{\tau}))^2). \end{aligned}$$

Таким образом мы можем сформулировать следующий поточечный принцип максимума Понтрягина в задаче (4.2).

Лемма 6. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} H_u(x, t, u^h[\lambda](x, t), \eta^h[\pi^h[\lambda]](x, t)) &= \max_{u \in U} H_u(x, t, u, \eta^h[\pi^h[\lambda]](x, t)) \text{ н.в. на } Q_T, \\ H_w(s, t, w^h[\lambda](s, t), \eta^h[\pi^h[\lambda]](s, t)) &= \max_{w \in W} H_w(s, t, w, \eta^h[\pi^h[\lambda]](s, t)) \text{ н.в. на } S_T, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где приняты обозначения

$$H_u(x, t, u, \eta) \equiv -(u\eta + B_1(x, t)u^2), \quad H_w(x, t, w, \eta) \equiv -(w\eta + B_2(x, t)w^2),$$

а $\eta^h[\pi^h[\lambda]]$ — решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x, t)\eta_{x_i} + b_j(x, t)\eta) + a(x, t)\eta \\ = 2A_{0,1}(x, t)z[\pi^h[\lambda]](x, t) + \sum_{i=1}^l (A_1^*\lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \chi_i^h(x, t), \\ \eta(x, T) = 2A_{0,2}(x)z[\pi^h[\lambda]](x, T), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \eta}{\partial N} + \sigma(x, t)\eta = 2A_{0,3}(s, t)z[\pi^h[\lambda]](s, t), \quad (x, t) \in S_T, \end{aligned} \quad (4.9)$$

формальная запись которой представляет собой тождество (4.7) при $\pi = \pi^1 = \pi^h[\lambda]$.

Перейдем к пределу в соотношениях леммы 6 и получим принцип максимума Понтрягина для пары $\pi[\lambda]$ в задаче (4.1). Для этого нам потребуется теория третьей краевой задачи для параболического уравнения, содержащей меры Радона в своих исходных данных. Теория таких уравнений с мерами в исходных данных рассматривалась во многих работах. В частности, в работах [10; 11; 14] теоремы существования решений линейных параболических уравнений с мерами в исходных данных и априорные оценки для них использовались для получения необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления параболическими уравнениями с поточечными фазовыми ограничениями. Ниже при описании в краткой форме предельного перехода в соотношениях леммы 6 мы воспользуемся некоторыми результатами этих работ, приняв одновременно и их некоторые обозначения.

Обозначим через μ ограниченную меру Радона, сосредоточенную во множестве $\overline{Q_T} \setminus (\overline{\Omega} \times \{0\}) \equiv Q_T \setminus \overline{\Omega}_0 = \overline{\Omega} \times (0, T]$, т. е. $\mu \in M_b(Q_T \setminus \overline{\Omega}_0)$, $\mu = \mu_{Q_T} + \mu_{\overline{\Omega}_T} + \mu_{S_T}$, где μ_{Q_T} — сужение меры μ на Q_T , $\mu_{\overline{\Omega}_T}$ — сужение меры μ на $\overline{\Omega}_T \equiv \overline{\Omega} \times \{T\}$, μ_{S_T} — сужение меры μ на S_T . Введем также стандартное обозначение $W(0, T)$ для гильбертова пространства $W(0, T; H^1(\Omega), (H^1(\Omega))') = \{y \in L_2(0, T; H^1(\Omega)) : dy/dt \in L_2(0, T; (H^1(\Omega))')\}$, снабженного обычной нормой.

Рассмотрим третью краевую задачу

$$\begin{aligned} -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x, t)\eta_{x_i}) + a(x, t)\eta &= \mu_{Q_T}, \quad (x, t) \in Q_T, \\ \eta(x, T) = \mu_T, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \frac{\partial z(x, t)}{\partial N} + \sigma\eta &= \mu_{S_T}, \quad (x, t) \in S_T. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Решение этой задачи будем понимать в следующем обобщенном смысле (см., например, [10; 11]).

О п р е д е л е н и е. Пусть $a\eta \in L_1(Q_T)$, $\sigma\eta \in L_1(S_T)$, $i = 1, \dots, n$. Назовем функцию $\eta \in L_1(0, T; W_1^1(\Omega))$ слабым решением краевой задачи (4.10), если для каждой функции $z \in C^1(\overline{Q_T})$ такой, что $z(x, 0) = 0$ на $\overline{\Omega}$, имеет место интегральное равенство

$$\int_{Q_T} \{z_t\eta + a_{i,j}z_{x_j}\eta_{x_i} + a\eta z\} dx dt + \int_{S_T} \sigma\eta z ds dt$$

$$= \int_{\overline{Q}_T \setminus \overline{\Omega}_0} z \mu(dx dt) = \int_{Q_T} z \mu_{Q_T}(dx dt) + \int_{S_T} z \mu_{S_T}(ds dt) + \int_{\overline{\Omega}_T} z \mu_T(dx).$$

Справедлива следующая лемма, доказательство которой можно найти в [10; 11].

Лемма 7. Для любой меры Радона $\mu \in M_b(\overline{Q}_T \setminus \overline{\Omega}_0)$ существует единственное решение $\eta[\mu] \in L_1(0, T; W_1^1(\Omega))$ задачи (4.10), удовлетворяющее тождеству (см. (1.2))

$$\int_{Q_T} \eta[\mu] \left(\frac{\partial z}{\partial t} + Az + az \right) dx dt + \int_{S_T} \eta[\mu] \left(\frac{\partial z}{\partial N} + \sigma z \right) ds dt = \int_{\overline{Q}_T \setminus (\overline{\Omega} \times (0, T])} z \mu(dx dt)$$

для любого

$$z \in \left\{ z \in W(0, T) \cap C(\overline{Q}_T) : \frac{\partial z}{\partial t} + Az \in L_p(Q_T), \frac{\partial z}{\partial N} \in L_r(S_T), z(x, 0) = 0 \text{ на } \overline{\Omega} \right\}.$$

Одновременно для любой пары чисел s, d таких, что $s > 2, d > 2, n/2d + 1/s \leq 1/2$, справедлива оценка

$$\|\eta[\mu]\|_{L_{s'}(0, T; W_{d'}^1(\Omega))} \leq C|\mu|_{M_b(\overline{Q}_T \setminus \overline{\Omega}_0)}, \quad (4.11)$$

где постоянная $C > 0$ зависит лишь от $s, d, T, \Omega, n, K, C_0$ и не зависит от $\mu \in M_b(\overline{Q}_T \setminus \overline{\Omega}_0)$. Здесь $M_b(\overline{Q}_T \setminus \overline{\Omega}_0)$ означает пространство ограниченных мер Радона на $\overline{Q}_T \setminus \overline{\Omega}_0$, двойственное пространству $C_b(\overline{Q}_T \setminus \overline{\Omega}_0)$ ограниченных непрерывных функций на $\overline{Q}_T \setminus \overline{\Omega}_0$, $|\mu|$ — полная вариация меры μ .

З а м е ч а н и е. Так как $p > n/2 + 1, r > n + 1$, то существуют пары индексов (s_i, d_i) , $n/2d_i + 1/s_i \leq 1/2, i = 1, 2$, такие, что $p' \leq s'_1, p' \leq nd'_1/(n - d'_1), r' \leq s'_2, r' \leq (n - 1)d_2d'_2/((n - 1)d_2 - d'_2), p' = p/(p - 1), r' = r/(r - 1)$. Для указанных пар индексов пространство $L_{s'_1}(0, T; W_{d'_1}^1(\Omega))$ непрерывно вложено в $L_{p'}(Q_T)$, а пространство $L_{s'_2}(0, T; W_{d'_2}^1(\Omega))$ непрерывно вложено в $L_{r'}(S_T)$ (см., например, [10; 11]). Поэтому из оценки (4.11) следуют оценки

$$\|\eta[\mu]\|_{p', Q_T} \leq C_1 \|\eta[\mu]\|_{L_{s'_1}(0, T; W_{d'_1}^1(\Omega))} \leq CC_1 |\mu|_{M_b(\overline{Q}_T \setminus \overline{\Omega}_0)},$$

$$\|\eta[\mu]\|_{r', S_T} \leq C_2 \|\eta[\mu]\|_{L_{s'_2}(0, T; W_{d'_2}^1(\Omega))} \leq CC_2 |\mu|_{M_b(\overline{Q}_T \setminus \overline{\Omega}_0)}.$$

Определим далее на $\overline{Q}_{l, T}$ положительные меры Радона $\mu_i^h, i = 1, \dots, l$, сосредоточенные на множествах $S_h(x_i, t_i) \cap \overline{Q}_{l, T}, i = 1, \dots, l$, посредством равенств

$$\mu_i^h(E) \equiv 1/\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap \overline{Q}_{l, T}) \int_E \chi_i^h(x, t) dx dt,$$

где $E \subset \overline{Q}_{l, T}$ — борелевское множество. Очевидно, что $|\mu_i^h| = 1, |\mu_i^h - \delta_{x_i, t_i}| \rightarrow 0, h \rightarrow 0, i = 1, \dots, l$, где δ_{x_i, t_i} — мера Дирака, сосредоточенная в точке (x_i, t_i) .

С учетом введенных обозначений и тождества (4.6) формальное тождество для сопряженной краевой задачи (4.9) можно записать в виде равенства

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \eta[\mu^h](x, t) z_t(x, t) dx dt + \int_{Q_T} [(a_{i, j}(x, t) \eta[\mu^h]_{x_i}(x, t) + a(x, t) \eta[\mu^h](x, t) z] dx dt \\ + \int_{S_T} \sigma(s, t) \eta[\mu^h](s, t) z ds dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{Q_T} \left(2A_{0,1}(x, t)z[\pi^h[\lambda]](x, t) + \sum_{i=1}^l (A_1^* \lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \chi_i^h(x, t)z(x, t) \right) dx dt \\
 &+ \int_{S_T} 2A_{0,3}(s, t)z[\pi^h[\lambda]](s, t)z(s, t) ds dt + \int_{\Omega} 2A_{0,2}(x)z[\pi^h[\lambda]](x, T)z(x, T) dx = \int_{\bar{Q}_T} z(x, t)\mu^h(dx dt)
 \end{aligned}$$

для любой функции $z \in W_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю при $t = 0$, где мера $\mu^h \in M_b(\bar{Q}_T \setminus \bar{\Omega}_0)$ определена равенствами

$$\begin{aligned}
 \mu^h &= \mu_{Q_{\iota, T}}^h + \mu_{S_T}^h + \mu_{\bar{\Omega}_T}^h, \\
 \mu_{Q_{\iota, T}}^h &\equiv 2A_{0,1}z[\pi^h[\lambda]] + \sum_{i=1}^l (A_1^* \lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \chi_i^h \\
 &= 2A_{0,1}z[\pi^h[\lambda]] + \sum_{i: (x_i, t_i) \in Q_{\iota, T}} (A_1^* \lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \chi_i^h \\
 &+ \sum_{i: (x_i, t_i) \in S_{\iota, T}} (A_1^* \lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \chi_i^h + \sum_{i: (x_i, t_i) \in \bar{\Omega}_T} (A_1^* \lambda)_i \frac{1}{\text{meas}(S_h(x_i, t_i) \cap Q_T)} \chi_i^h, \\
 \mu_{S_T}^h &\equiv 2A_{0,3}z[\pi^h[\lambda]], \quad \mu_{\bar{\Omega}_T}^h \equiv 2A_{0,2}(x)z[\pi^h[\lambda]](\cdot, T).
 \end{aligned}$$

На основании равномерной оценки (4.4), оценки (4.11) и оценок замечания можно утверждать, что для некоторой последовательности сходящихся к нулю положительных чисел h_k , $k = 1, 2, \dots$, имеют место слабые предельные соотношения

$$\mu^{h_k} \rightarrow \mu[\lambda] \quad * \text{-слабо в } M_b(\bar{Q}_T \setminus \bar{\Omega}_0),$$

$$\eta[\mu^{h_k}] \rightarrow \eta[\mu[\lambda]] \quad \text{слабо в } L_{p'}(Q_T), \quad \eta[\mu^{h_k}] \rightarrow \eta[\mu] \quad \text{слабо в } L_{r'}(S_T),$$

где предельная мера $\mu[\lambda] \in M_b(\bar{Q}_T \setminus \bar{\Omega}_0)$ определена равенствами

$$\begin{aligned}
 \mu[\lambda] &= \mu_{Q_{\iota, T}}[\lambda] + \mu_{S_T}[\lambda] + \mu_{\bar{\Omega}_T}[\lambda], \quad \mu_{Q_{\iota, T}}[\lambda] = 2A_{0,1}z[\pi[\lambda]] + \sum_{i: (x_i, t_i) \in Q_{\iota, T}} (A_1^* \lambda)_i \delta_{x_i, t_i}, \\
 \mu_{S_T}[\lambda] &= 2A_{0,3}z[\pi[\lambda]] + \sum_{i: (x_i, t_i) \in S_{\iota, T}} (A_1^* \lambda)_i \delta_{x_i, t_i}, \\
 \mu_{\bar{\Omega}_T}[\lambda] &= 2A_{0,2}(x)z[\pi[\lambda]](\cdot, T) + \sum_{i: (x_i, t_i) \in \bar{\Omega}_T} (A_1^* \lambda)_i \delta_{x_i, t_i},
 \end{aligned}$$

а предельная сопряженная функция $\eta[\mu[\lambda]]$ удовлетворяет краевой задаче

$$\begin{aligned}
 -\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{i,j}(x, t)\eta_{x_i}) + a(x, t)\eta &= \mu_{Q_{\iota, T}}[\lambda], \quad (x, t) \in Q_T, \\
 \eta(x, T) = \mu_{\bar{\Omega}_T}[\lambda], \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial z(x, t)}{\partial \mathcal{N}} + \sigma\eta &= \mu_{S_T}[\lambda], \quad (x, t) \in S_T.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Естественно, одновременный предельный переход и в соотношениях максимума (4.8) приводит, наконец, к принципу максимума Понтрягина для пары $\pi[\lambda]$ в задаче (4.1).

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$H_u(x, t, u[\lambda](x, t), \eta[\mu[\lambda]](x, t)) = \max_{u \in U} H_u(x, t, u, \eta[\mu[\lambda]](x, t)) \quad \text{п.в. на } Q_T,$$

$$H_w(s, t, w[\lambda](s, t), \eta[\mu[\lambda]](s, t)) = \max_{w \in W} H_w(s, t, w, \eta[\mu[\lambda]](s, t)) \quad \text{п.в. на } S_T,$$

в которых $\eta[\mu[\lambda]]$ — решение сопряженной задачи (4.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сумин М.И.** Оптимальное управление параболическими уравнениями: двойственные численные методы, регуляризация // “Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде”: сб. докл. к Междунар. конф. / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000. С. 66–69.
2. **Сумин М.И.** Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 11. С. 2001–2019.
3. **Сумин М.И.** Регуляризованный двойственный алгоритм в задачах оптимального управления для распределенных систем // Вест. Нижегородского ун-та. 2006. Вып. 2(31). С. 82–101. (Математическое моделирование и оптимальное управление.)
4. **Сумин М.И.** Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 602–625.
5. **Сумин М.И.** Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49. № 12. С. 2083–2102.
6. **Сумин М.И.** Параметрическая двойственная регуляризация в оптимизации, оптимальном управлении и обратных задачах // Вест. Тамбовского ун-та. 2010. Т. 15, вып. 1. С. 467–492. (Естественные и технические науки.)
7. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
8. **Плотников В.И.** Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165, № 1. С. 33–35.
9. **Кузенков О.А., Плотников В.И.** Существование и единственность обобщенного решения линейного векторного уравнения параболического типа в третьей краевой задаче // Математическое моделирование и методы оптимизации: межвуз. тематич. сб. науч. тр. Горький: Изд-во ГГУ, 1989. С. 132–144.
10. **Casas E., Raymond J.-P., Zidani H.** Pontryagin’s principle for local solutions of control problems with mixed control-state constraints // SIAM J. Control Optim. 2000. Vol. 39, no. 4. P. 1182–1203.
11. **Raymond J.-P., Zidani H.** Pontryagin’s principle for state-constrained control problems governed by parabolic equations with unbounded controls // SIAM J. Control Optim. 1998. Vol. 36, no. 6. P. 1853–1879.
12. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
13. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
14. **Casas E.** Pontryagin’s principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35, no. 4. P. 1297–1327.

Сумин Михаил Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского
e-mail: m.sumin@mm.unn.ru; msumin@sinn.ru

Поступила 28.07.2010

УДК 515.162

О КУБИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ ПОЛИЭДРОВ¹**В. В. Таркаев**

Под кубилиацией трехмерного полиэдра P будем понимать такой конечный набор экземпляров стандартного ориентированного куба в \mathbb{R}^3 и обращающих ориентацию изометрий их граней, что результат склейки кубов по указанным изометриям гомеоморфен P . В работе доказывается, что любой трехмерный полиэдр, представимый кубилиацией, состоящей из n кубов, обладает сингулярной триангуляцией, состоящей из $6n$ тетраэдров.

Ключевые слова: полиэдр, 3-многообразие, триангуляция, кубилиация, сложность Матвеева, кубическая сложность.

V. V. Tarkaeu. On the cubic complexity of three-dimensional polyhedra.

A cubulation of a three-dimensional polyhedron P is understood as a finite family of copies of the standard oriented cube in \mathbb{R}^3 and of orientation-changing isometries of its faces such that the result of gluing together these isometries of the cubes is homeomorphic to P . We prove that any three-dimensional polyhedron represented by a cubulation consisting of n cubes possesses a standard triangulation consisting of $6n$ tetrahedra.

Keywords: polyhedron, 3-manifold, triangulation, cubulation, Matveev complexity, cubic complexity.

Введение

Одним из распространенных подходов к описанию и конструированию трехмерных многообразий является их представление в виде склеек граней многогранников, чаще всего тетраэдров или кубов. Число участвующих в склейке многогранников можно использовать в качестве меры сложности многообразия. Впервые строгое понятие сложности трехмерного многообразия было введено С.В. Матвеевым как число истинных вершин в его минимальном почти специальном спайне [2; 3]. Во многих случаях так определенная сложность совпадает с числом тетраэдров в минимальной сингулярной триангуляции многообразия. По аналогии можно определить *кубическую сложность* многообразия как число кубов в минимальной кубилиации многообразия, см. работу [1], где это было сделано в другой (двойственной) трактовке. Поскольку любое 3-многообразие может быть как триангулировано, так и кубилировано, естественным представляется вопрос о взаимосвязи триангуляционной и кубической сложностей одного и того же многообразия. Г. Амендолой [1] для замкнутых 3-многообразий было доказано неравенство, которое в используемых нами обозначениях примет вид $c_t(M) \leq 8c_{cube}(M)$, где $c_t(M)$ и $c_{cube}(M)$ — соответственно триангуляционная и кубическая сложности замкнутого многообразия M . В настоящей работе доказывается, что константа 8 в этом неравенстве может быть заменена на 6 для произвольных кубилируемых трехмерных полиэдров.

1. Постановка задачи

По аналогии с триангуляцией полиэдра можно определить и его кубилиацию. Рассмотрим конечный набор экземпляров стандартного ориентированного куба в \mathbb{R}^3 . В множестве их граней выделим непересекающиеся пары и склеим грани, составляющие каждую пару, при помощи обращающей ориентацию изометрии. Построенный таким образом полиэдр будем называть *кубилированным*.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00162) и программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УРО РАН и Институтом математики СО РАН.

Под *кубиляцией* полиэдра P будем понимать набор кубов и склеек их граней, использованных при построении кубилированного полиэдра, кусочно-линейно гомеоморфного P .

Приведенное определение кубилиции аналогично определению сингулярной триангуляции с заменой тетраэдров на кубы. В отличие от обычных триангуляций в сингулярных триангуляциях допускаются склейки различных граней одного тетраэдра и склейки двух различных тетраэдров по нескольким граням. Кроме того, и триангуляции, и кубилиции, рассматриваемые в этой работе, могут содержать свободные, т. е. ни с чем не склеиваемые грани.

Ясно, что не любой полиэдр обладает кубилицией в рассматриваемом смысле (например, куб в \mathbb{R}^3 с исходящим из него отрезком). Но так же, как и для триангуляций полиэдров, если полиэдр имеет хотя бы одну кубилицию, то он имеет их бесконечно много.

О п р е д е л е н и е 1. *Триангуляционной сложностью* трехмерного полиэдра называется минимально возможное число тетраэдров в его сингулярной триангуляции.

О п р е д е л е н и е 2. *Кубической сложностью* кубилируемого трехмерного полиэдра называется минимально возможное число кубов в его кубилиции.

Для 3-многообразий сложность как число истинных вершин в минимальном почти специальном спайне многообразия была введена С.В. Матвеевым (см. [2; 3]). Определенная выше триангуляционная сложность для многообразий очень близка к сложности в смысле Матвеева и во многих случаях с ней совпадает. Изучение взаимосвязи триангуляционной и кубической сложностей одного и того же замкнутого 3-многообразия без использования самих этих терминов начал Г. Амендола. В [1] он ввел понятие *поверхностной сложности* замкнутого 3-многообразия и доказал ряд ее свойств, из которых отметим два:

1. Для всех, кроме трех, замкнутых 3-многообразий поверхностная сложность совпадает с числом кубов в их минимальной кубилиции.

2. Для любого замкнутого 3-многообразия M имеет место неравенство $c(M) \leq 8SC(M)$, где $c(M)$ — сложность в смысле Матвеева многообразия M , а $SC(M)$ — его поверхностная сложность.

Отсюда с использованием свойств сложности 3-многообразий, изложенных в [3], можно получить, что для любого замкнутого 3-многообразия M , кроме конечного числа известных исключений, выполняется неравенство $c_t(M) \leq 8c_{cube}(M)$, где $c_t(M)$ и $c_{cube}(M)$ — соответственно триангуляционная и кубическая сложности многообразия M . Отметим, что тетраэдр можно разбить на четыре куба (звезды вершин в его барицентрическом подразделении). Поэтому $c_{cube}(M) \leq 4c_t(M)$ для любых полиэдров, полученных склеиванием граней тетраэдров.

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

Теорема. *Пусть P — произвольный кубилируемый трехмерный полиэдр. Тогда*

$$c_t(P) \leq 6c_{cube}(P),$$

где $c_t(P)$ и $c_{cube}(P)$ — соответственно триангуляционная и кубическая сложности полиэдра P . Причем существуют полиэдры, для которых это неравенство обращается в равенство.

2. Вспомогательные леммы

О п р е д е л е н и е 3. *Диагональным узором* на поверхности куба будем называть граф, состоящий из диагоналей его граней, по одной на каждой грани.

Каждый диагональный узор задает триангуляцию поверхности куба, вершины которой совпадают с вершинами куба.

О п р е д е л е н и е 4. *Диагональный узор G на поверхности куба будем называть допустимым*, если порожденная им триангуляция поверхности куба продолжается до триангуляции куба, состоящей из 6 тетраэдров.

Лемма 1. *Если диагональный узор на поверхности куба содержит замкнутую трехзвенную ломаную или вершину валентности 3, то он является допустимым.*

Доказательство. Если данный диагональный узор G содержит вершину v валентности 3, то искомую триангуляцию можно построить, используя стандартную коническую конструкцию. Рассмотрим три грани куба, не содержащие вершины v . Входящие в узор g диагонали разбивают их на 6 треугольников. Тогда искомую триангуляцию куба можно получить, взяв конус с вершиной v над этими треугольниками.

Среди всех диагональных узоров, содержащих замкнутые трехзвенные ломаные, есть только один узор, в котором нет вершин валентности 3. Он состоит из двух замкнутых трехзвенных ломаных без общих точек. Для такого узора требуемая триангуляция строится следующим образом. Плоские треугольники, сторонами которых являются входящие в G диагонали, отсекают от куба два тетраэдра. Оставшийся многогранник комбинаторно эквивалентен октаэдру. Его можно разбить на 4 тетраэдра с помощью стандартной конической конструкции. \square

О п р е д е л е н и е 5. Будем говорить, что триангуляция T полиэдра P согласована с кубилиацией C того же полиэдра, если

1. Каждый куб кубилиации C получается склеиванием шести тетраэдров триангуляции T .
2. Каждая грань каждого куба кубилиации C является объединением двух треугольников триангуляции T .

Лемма 2. *Любая кубилиация полиэдра из одного куба допускает согласованную с ней триангуляцию.*

Доказательство. Сначала убедимся в том, что при любом разбиении граней куба на непересекающиеся пары можно найти три грани, которые имеют общую вершину и такие, что никакие две из них не составляют одну пару. Действительно, пусть v_1 — любая из вершин куба. Если среди трех инцидентных ей граней никакие две не составляют одну пару, то эта тройка граней является искомой. В противном случае какие-то две из них составляют одну пару. Обозначим их общее ребро e_1 . Пусть e_2 и e_3 — другие инцидентные v_1 ребра. Рассмотрим вершину v_2 , соединенную с v_1 ребром e_2 . Про одну из трех инцидентных ей граней мы уже знаем, что она не входит в одну пару ни с одной из двух оставшихся граней. Если эти две оставшиеся грани не составляют одну пару, то вершина v_2 — искомая, а если составляют, то искомой является вершина v_3 .

Пусть теперь полиэдр P обладает кубилиацией, состоящей из одного куба z . Разобьем грани куба z на пары так: если какие-то две грани склеиваются между собой, то отнесем их к одной паре; грани, которые ни с чем не склеиваются (если таковые имеются), разделим на пары произвольным образом. Пусть v — такая вершина куба, что никакие две из инцидентных ей граней не входят в одну пару. Построим на поверхности куба z диагональный узор g следующим образом. На гранях, инцидентных вершине v , возьмем диагонали, имеющие v своим концом. На вторых гранях в отождествляемых парах возьмем те диагонали, в которые склеивающие отображения переводят уже выбранные. На свободных гранях берем любые диагонали. Узор g содержит вершину валентности 3, поэтому по лемме 1 он является допустимым и тогда продолжается до триангуляции куба из 6 тетраэдров. Треугольники, на которые входящие в g диагонали делят взаимно отождествляемые грани, переводятся склеивающими отображениями друг в друга (по построению узора g). Это и дает требуемую триангуляцию полиэдра P . \square

Лемма 3. *Для любой кубилиации трехмерного полиэдра P существует согласованная с ней триангуляция полиэдра P .*

Доказательство. Будем рассуждать по индукции по числу k кубов в кубилиации полиэдра P . База индукции (случай $k = 1$) дается леммой 2.

Индуктивный шаг. Пусть для любого полиэдра с кубилиацией из $\leq k$ кубов существует согласованная с ней триангуляция. Рассмотрим полиэдр P , обладающий кубилиацией C из $k + 1$ куба. Докажем, что существует согласованная с ней триангуляция полиэдра P .

Удалим из C любой куб и обозначим через P' полиэдр, являющийся результатом склейки оставшихся k кубов. Удаленный из кубилиации куб обозначим z . Какие-то его грани, возможно, склеиваются между собой. Получающийся в результате полиэдр обозначим P'' . Если никакие грани куба z между собой не склеивались, то P'' — это стандартный куб.

Так как число кубов в кубилиации полиэдра P' не превосходит k , то по предположению индукции он имеет согласованную триангуляцию. Полиэдр P'' имеет согласованную триангуляцию по лемме 2. Однако эти триангуляции могут и не составлять триангуляцию полиэдра P , так как отождествление граничного квадрата одной кубилиации с граничным квадратом другой кубилиации может не переводить выбранную диагональ в выбранную диагональ. Приводимые ниже построения направлены на то, чтобы исключить эту ситуацию.

С л у ч а й 1. Край полиэдра P' состоит из не менее чем 6 квадратов, и 6 из них склеиваются с гранями куба z . Разобьем грани куба z на пары так, чтобы в каждой паре оказались грани, имеющие общее ребро. Для граней каждой пары выберем изометрию одной грани на другую так, чтобы их общее ребро оставалось неподвижным. Эти изометрии индуцируют склеивания тех граней полиэдра P' , которые отождествляются с гранями куба z . Выполнив их, получим новый полиэдр Q с кубилиацией C_Q из k кубов. Пусть T — согласованная с этой кубилиацией триангуляция полиэдра Q , которая существует по индукционному предположению. Она определяет выбор диагоналей на всех квадратах кубилиации C_Q , в частности, на тех, которые отождествляются с гранями куба z . Важно отметить, что соответствующие диагонали каждой пары граней куба z всегда имеют общий конец, поскольку выбранная изометрия между гранями оставляет неподвижным их общее ребро. Отсюда следует, что получающийся диагональный узор g на крае куба z является объединением трех двузвенных ломаных. Так как любой такой узор обязательно содержит замкнутую трехзвенную ломаную, то по лемме 1 он является допустимым. Следовательно, существует триангуляция куба z , порождающая узор g и состоящая из 6 тетраэдров. Тогда искомая триангуляция исходного полиэдра P может быть составлена из этой триангуляции куба z и построенной ранее триангуляции полиэдра P' . Таким образом доказательство леммы 3 в этом случае завершено.

С л у ч а й 2. Край полиэдра P' склеивается менее чем с 6 гранями куба z , и никакие две грани куба z не склеиваются между собой.

Доказательство в этом случае отличается от доказательства в предыдущем лишь тем, что построенная триангуляция полиэдра Q определяет выбор диагоналей лишь на тех гранях куба z , которые склеиваются с граничными квадратами полиэдра P' . На оставшихся гранях куба z можно проводить любые диагонали, что позволяет построить диагональный узор с нужными свойствами.

С л у ч а й 3. Пусть какие-то грани куба z склеиваются между собой, но среди оставшихся (склеиваемых с полиэдром P' или вообще ни с чем не склеиваемых) найдутся две, имеющие общее ребро.

При этих условиях среди граней куба обязательно найдутся три такие, что

1. Они имеют общую вершину, обозначим ее v .
2. Только одна из этих граней склеивается с какой-то другой гранью куба z , две оставшиеся либо склеиваются с полиэдром P' , либо ни с чем не склеиваются.

Действительно, если между собой склеиваются только две грани куба z , то в качестве вершины v можно взять любую вершину, которая принадлежит только одной из них. Если между собой склеиваются две пары граней, то по условию оставшиеся две грани имеют общее ребро, и в качестве вершины v можно взять любой из его концов.

Обозначим грани куба z , содержащие вершину v , через f_1, f_2, f_3 , причем пусть с какой-то другой гранью куба z склеивается грань f_3 . Разобьем грани куба z на пары так: взаимно

отождествляемые грани отнесем к одной паре (таких пар будет одна или две). Еще одну пару составим из граней f_1 и f_2 . Возможно, после этого осталось еще две грани, составим из них третью пару.

Предположим, что грани f_1 и f_2 обе склеиваются с гранями полиэдра P' . Выберем на поверхности куба z диагональный узор g следующим образом. Изометрия грани F_1 на F_2 , оставляющая на месте их общее ребро, порождает склейку граней полиэдра P' , выполнив которую, мы получим полиэдр Q . Рассуждения, аналогичные приведенным, при рассмотрении случая 1 позволяют выбрать на гранях F_1 и F_2 диагонали, имеющие общий конец. На грани F_3 диагональ выберем так: если общим концом диагоналей, выбранных на гранях F_1 и F_2 , является вершина v , то на грани F_3 тоже возьмем диагональ, содержащую вершину v , в противном случае возьмем другую диагональ. В первом случае в узоре g возникнет вершина валентности 3, во втором — замкнутая трехзвенная ломаная. На оставшихся гранях куба z диагонали выберем так: если грань ни с чем не склеивается, то возьмем любую диагональ, в противном случае возьмем те диагонали, которые совмещаются при склеивании (друг с другом или с выбранными ранее на гранях полиэдра P'). Согласно лемме 1 узор g является допустимым, что позволяет завершить доказательство так же, как и в предыдущих случаях.

Если хотя бы одна из граней f_1 или f_2 не склеивается с полиэдром P' , то строить полиэдр Q необязательно. Предположение индукции можно применить к полиэдру P' и далее действовать почти так же. Единственное отличие состоит в том, что требуемые свойства диагонального узора можно обеспечить за счет того, что на ни с чем не склеиваемой грани можно выбрать любую из диагоналей.

С л у ч а й 4. Пусть среди граней куба z , которые либо склеиваются с полиэдром P' , либо ни с чем не склеиваются, не найдется двух, имеющих общее ребро. Это возможно только тогда, когда две пары граней куба z склеиваются между собой, а третья пара состоит из двух противоположных граней.

Диагональный узор на поверхности куба z построим следующим образом. Применив предположение индукции к полиэдру P' , получим диагонали на гранях куба z , склеиваемых с полиэдром P' . Среди четырех попарно склеиваемых граней куба z выберем такие две, что они имеют общее ребро и друг с другом не склеиваются. Выберем на них диагонали так, чтобы они вместе с какой-то из уже выбранных образовывали замкнутую трехзвенную ломаную, либо, если это невозможно, так, чтобы в узоре возникла вершина валентности 3. Завершается доказательство в этом случае так же, как и в предыдущих. \square

3. Доказательство теоремы

Если кубическая сложность полиэдра равна n , то по определению 2 существует его кубическая триангуляция, состоящая из n кубов. Но тогда по лемме 3 существует его триангуляция, состоящая из $6n$ тетраэдров. Следовательно, его триангуляционная сложность не превосходит $6n$, т. е. $c_t(P) \leq 6c_{cube}(P)$, и для завершения доказательства теоремы осталось привести пример полиэдра, для которого это неравенство обращается в равенство.

Отождествим по параллельному переносу противоположные грани стандартного куба. Получим полиэдр P без края, обладающий кубической триангуляцией, в которой участвует единственный куб. Значит, его кубическая сложность равна 1.

Так построенный полиэдр P — это трехмерный тор. Из приведенной в [3] таблицы многообразий малой сложности следует, что минимальная сингулярная триангуляция этого многообразия состоит из 6 тетраэдров. Таким образом $c_t(P) = 6 = 6c_{cube}(P)$.

Доказательство теоремы завершено. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **G. Amendola** A 3-manifold complexity via immersed surfaces. 2008.
URL: <http://arxiv.org/abs/0804.0695v1> (arXiv: 0804.0695v1 [math.GT]: preprint). 20 p.
2. **Матвеев С.В.** Теория сложности трехмерных многообразий: препринт. Киев: Изд-во Ин-та математики АН УССР, 1988. 32 с.
3. **Matveev S.** Algorithmic topology and classification of 3-manifolds (Algorithms and Computation in Mathematics). Berlin; Heidelberg: Springer, 2007. 492 p.

Таркаев Владимир Викторович
канд. физ.-мат. наук
главный программист
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: trk@csu.ru

Поступила 12.04.2010

УДК 519.857

ОДНОТИПНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ВЫПУКЛОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

В. И. Ухоботов, Д. В. Гушчин

Рассматриваются однотипные дифференциальные игры. Изучается задача о выводе в заданный момент времени фазовой точки на круг заданного радиуса. Платой является интеграл от выпуклой функции, зависящей от нормы управления первого игрока.

Ключевые слова: дифференциальная игра, стратегия, плата.

V. I. Ukhobotov, D. V. Gushchin. Single-type differential games with convex integral payoff.

We consider single-type differential games. We study the problem of taking the phase point to a disk of a fixed radius at a given time. The payoff is the integral of a convex function depending on the norm of the first player's control.

Keywords: differential game, strategy, payoff.

Введение

В дифференциальной игре “изотропные ракеты” [1], в ее варианте при отсутствии трения “мальчик и крокодил” [7] и в контрольном примере Л. С. Понтрягина [7] уравнения движения с помощью линейной замены переменных [2, с. 160] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоит сумма управлений первого и второго игроков. Вектограммы этих управлений являются шарами, радиусы которых зависят от времени.

В работе [7] найдены необходимые и достаточные условия, с помощью которых вычисляется множество тех начальных состояний, откуда первый игрок сможет в заданный момент времени вывести фазовую точку на круг заданного радиуса.

В настоящей статье первый игрок, выводя фазовую точку на круг заданного радиуса, минимизирует интегральную плату [1], которая задается выпуклой функцией от нормы его управления.

1. Пример

Первый игрок управляет точкой переменного состава, движение которой описывается уравнением Мещерского [1, с. 25]

$$\ddot{x} = -C + w \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь постоянный вектор $C \in \mathbb{R}^n$ определяется постоянной внешней силой; w — относительная скорость отделяющихся частиц, величина $\|w\|$ которой считается постоянной, $\|w\|$ — некоторая норма в пространстве \mathbb{R}^n ; $m(t) = m_0 + m_1(t)$ — масса точки, причем m_0 — неизменяемая часть массы, $m_1(t)$ — реактивная масса.

Второй игрок управляет точкой, которая движется с ограниченной по величине скоростью $\|\dot{y}\| \leq b$.

Цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени p сделать расстояние $\|y(p) - x(p)\| \leq \varepsilon$ и израсходовать как можно меньше реактивной массы. Здесь

$\varepsilon > 0$ — заданное число. Считаем, что тяга ограничена числом $\gamma > 0$, т. е.

$$-\|w\| \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \leq \gamma.$$

Обозначим

$$z = y - x - (p - t)\dot{x} - C \frac{(p - t)^2}{2}, \quad u = \frac{w \dot{m}(t)}{\gamma m(t)}, \quad v = \frac{1}{b} \dot{y}.$$

Тогда расстояние между игроками в момент времени p и уравнения движения примут вид

$$\|y(p) - x(p)\| = \|z(p)\|, \quad \dot{z} = -(p - t)\gamma u + bv. \quad (1.1)$$

Ограничения на выбор управления принимают вид

$$\|u\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1.$$

Из формулы (1.1) следует, что задача о минимизации расхода реактивной массы при выборе управления на отрезке $[t_0, p]$ сводится к задаче о минимизации интеграла $\int_{t_0}^p \|u(t)\| dt$. Здесь t_0 — начальный момент времени.

2. Общая постановка задачи

Рассмотрим игру в пространстве \mathbb{R}^n

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v, \quad \|u\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1, \quad t \leq p. \quad (2.1)$$

Здесь $a(t)$ и $b(t)$ — неотрицательные непрерывные при $t \leq p$ скалярные функции, p — момент окончания игры. Первый игрок выбирает управление u , второй — управление v . Расходы ресурсов, потраченные на формирование управления первого игрока задаются интегралом

$$\int_{t_0}^p g(r, \|u(r)\|) dr. \quad (2.2)$$

Предположение 1. Функция $g(t, \varphi) \geq 0$ определена при всех $t \leq p$, $0 \leq \varphi \leq 1$, выпукла по φ , является непрерывной и $g(t, 0) = 0$ при всех $t \leq p$.

Задано число $\varepsilon \geq 0$. Первый игрок стремится осуществить неравенство $\|z(p)\| \leq \varepsilon$, минимизируя интеграл (2.2). Цель второго игрока заключается в том, чтобы не допустить выполнения предыдущего неравенства. Если он не имеет возможности сделать это, то он максимизирует значение интеграла (2.2).

Стратегией первого игрока является функция вида

$$u(t, z) = \varphi(t)w(t, z). \quad (2.3)$$

Здесь $w: (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольная функция, удовлетворяющая равенству

$$\|w(t, z)\| = 1, \quad (2.4)$$

а измеримая функция $\varphi: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$ строится в зависимости от начального состояния.

Стратегия второго игрока задается функцией $v: (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет ограничению

$$\|v(t, z)\| \leq 1. \quad (2.5)$$

З а м е ч а н и е. Такое определение стратегии первого игрока продиктовано следующими соображениями. Пусть в рассмотренном в предыдущем разделе примере закон изменения массы нужно задать программным образом, а управлять можно только направлением относительной скорости отделяющихся частиц. В этом случае приходим к понятию стратегии (2.3).

Дадим определение движения, порожденного заданными стратегиями. Зафиксируем начальное состояние $t_0 < p$, $z(t_0) = z_0$. Возьмем разбиение

$$\omega: t_0 < t_1 < \dots < t_{k+1} = p \tag{2.6}$$

с диаметром $d(\omega) = \max_{0 \leq i \leq k} (t_{i+1} - t_i)$. Построим ломаную

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \left(\int_{t_i}^t a(r)\varphi(r) dr \right) w(t_i, z_\omega(t_i)) + \left(\int_{t_i}^t b(r) dr \right) v(t_i, z_\omega(t_i)). \tag{2.7}$$

Здесь $z_\omega(t_0) = z_0$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i = \overline{0, k}$.

Потраченное количество ресурсов задается интегралом (2.2) с заменой в нем $\|u(r)\| = \varphi(r)$. Обозначим

$$L = \max_{t_0 \leq r \leq p} (a(r) + b(r)). \tag{2.8}$$

Тогда из ограничений (2.4) и (2.5) следует, что $\|z_\omega(\tau) - z_\omega(t)\| \leq L|\tau - t|$ для всех $\tau, t \in [t_0, p]$. Из этого неравенства следует, что семейство ломаных (2.7) является равномерно ограниченным и равномерно непрерывным на отрезке $[t_0, p]$. По теореме Арцела [4, с. 236] из любой последовательности ломаных (2.7) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$. Под движением $z(t)$ будем понимать равномерный предел последовательности ломаных (2.7), у которых диаметр разбиения (2.6) стремится к нулю.

3. Построение оптимального управления первого игрока

Зафиксируем измеримую функцию $\varphi: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$. Подставим управление (2.3) в уравнение (2.1) и рассмотрим игру с геометрическими ограничениями

$$\dot{z} = -a(t)\varphi(t)w + b(t)v, \quad \|w\| = 1, \quad \|v\| \leq 1. \tag{3.1}$$

Первый игрок, выбирая управление w , минимизирует величину $\|z(p)\|$, а второй игрок, выбирая управление v , ее максимизирует. Обозначим

$$G(t_0, z_0, \varphi(\cdot)) = \max\{F(t_0, \varphi(\cdot)); \|z_0\| + f(t_0, \varphi(\cdot))\}, \tag{3.2}$$

$$f(t, \varphi(\cdot)) = \int_t^p (-a(r)\varphi(r) + b(r)) dr, \quad F(t_0, \varphi(\cdot)) = \max_{t_0 \leq \tau \leq p} f(\tau, \varphi(\cdot)).$$

Теорема 1 [8]. *Для начального состояния $t_0 < p$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ в игре (3.1) управление $w = w_0(z)$, где*

$$w_0(z) = \frac{z}{\|z\|} \text{ при } \|z\| > 0; \quad w_0(z) - \text{любое с ограничением } \|w_0(z)\| = 1, \text{ если } \|z\| = 0,$$

обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| \leq G(t_0, z_0, \varphi(\cdot))$.

Управление $v = v_0(z)$ обеспечивает выполнение противоположного неравенства $\|z(p)\| \geq G(t_0, z_0, \varphi(\cdot))$.

Из этой теоремы следует, что первый игрок сможет осуществить неравенство $\|z(p)\| \leq \varepsilon$ в игре (2.1) с помощью некоторого управления (2.3) тогда и только тогда, когда $G(t_0, z_0, \varphi(\cdot)) \leq \varepsilon$. Рассмотрим следующую оптимизационную задачу:

$$\int_{t_0}^p g(r, \varphi(r)) dr \rightarrow \min, \quad \varphi: [t_0, p] \rightarrow [0, 1], \quad (3.3)$$

$$\int_t^p (b(r) - a(r)\varphi(r)) dr \leq \varepsilon, \quad t_0 \leq t \leq p, \quad (3.4)$$

$$\int_{t_0}^p (b(r) - a(r)\varphi(r)) dr \leq \varepsilon - \|z_0\|. \quad (3.5)$$

Если для любой измеримой функции $\varphi: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$ не выполнено одно из условий (3.4) или (3.5), то, используя формулу (3.2), получим, что $G(t_0, z_0, \varphi(\cdot)) > \varepsilon$. Отсюда и из теоремы 1 следует, что управление $v = w_0(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $\|z(p)\| > \varepsilon$.

Отметим, что из условия $a(r) \geq 0$ следует, что неравенства (3.4) и (3.5) выполнены для некоторой измеримой функции $\varphi: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$ тогда и только тогда, когда они выполнены для функции $\varphi(r) = 1$. Таким образом, условия совместности связей (3.4) и (3.5) принимают вид

$$\max_{t_0 \leq t \leq p} \int_t^p (b(r) - a(r)) dr \leq \varepsilon, \quad \int_{t_0}^p (b(r) - a(r)) dr \leq \varepsilon - \|z_0\|. \quad (3.6)$$

Теорема 2. Пусть выполнены неравенства (3.6), а функция $g(t, \varphi)$ удовлетворяет условиям предположения 1. Тогда решение $\varphi_0: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$ в задаче (3.3)–(3.5) существует.

Доказательство. Из условия $g(t, \varphi) \geq 0$ при всех $t \leq p$ и $0 \leq \varphi \leq 1$ следует, что нижняя грань g_0 функционала (3.3) на измеримых функциях $\varphi: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющих ограничениям (3.4) и (3.5), существует. Это значит, что существует последовательность измеримых функций $\varphi_m: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющих ограничениям (3.4) и (3.5), такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{t_0}^p g(r, \varphi_m(r)) dr = g_0. \quad (3.7)$$

Каждая функция

$$f_m(t) = \int_t^p (b(r) - a(r)\varphi_m(r)) dr \quad (3.8)$$

удовлетворяет на отрезке $[t_0, p]$ условию Липшица с константой L (2.8). По теореме Арцела из нее можно выделить подпоследовательность, которая на отрезке $[t_0, p]$ равномерно сходится к некоторой функции $f(t)$. Предельная функция $f(t)$ также удовлетворяет на отрезке $[t_0, p]$ условию Липшица с той же константой L . Не вводя новых обозначений, считаем, что сама последовательность функций $f_m(t)$ сходится к $f(t)$ равномерно на $[t_0, p]$. Если покажем, что существует измеримая функция $\varphi_0: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$ такая, что

$$g_0 \geq \int_{t_0}^p g(r, \varphi_0(r)) dr, \quad f(t) = \int_t^p (b(r) - a(r)\varphi_0(r)) dr, \quad t_0 \leq t \leq p, \quad (3.9)$$

то эта функция $\varphi_0(r)$ будет являться решением задачи (3.3)–(3.5).

В самом деле, функции $\varphi_m(r)$ удовлетворяют неравенствам (3.4), (3.5). Поэтому функции (3.8) удовлетворяют неравенствам $f_m(t) \leq \varepsilon$ при $t_0 \leq t \leq p$ и $f_m(t_0) \leq \varepsilon - \|z_0\|$. Из равномерной сходимости $f_m \rightarrow f$ следует, что этим неравенствам удовлетворяет функция f . Стало быть, функция $\varphi_0(r)$ удовлетворяет ограничениям (3.4) и (3.5).

Рассмотрим последовательность функций

$$l_m(t) = \int_t^p g(r, \varphi_m(r)) dr, \quad t_0 \leq t \leq p. \tag{3.10}$$

Из непрерывности функции $g(t, \varphi)$ следует, что она ограничена на множестве $t_0 \leq t \leq p$, $0 \leq \varphi \leq 1$ некоторым числом $L_1 > 0$. Следовательно, каждая из функций (3.10) удовлетворяет на отрезке $[t_0, p]$ условию Липшица с этой константой L_1 . Поэтому, рассуждая так же, как и для последовательности функций $f_m(t)$ (3.8), можем считать, что последовательность функций $l_m(t)$ сходится равномерно на отрезке $[t_0, p]$ к некоторой функции $l(t)$. Эта предельная функция удовлетворяет условию Липшица с той же константой L_1 .

Таким образом, построенные предельные функции $f(t)$ и $l(t)$ являются абсолютно непрерывными на отрезке $[t_0, p]$ и, следовательно, у них почти всюду существуют производные. Допустим, что существует измеримая функция $\varphi_0: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$ такая, что

$$\dot{f}(t) = a(t)\varphi_0(t) - b(t), \quad \dot{l}(t) \leq -g(t, \varphi_0(t)) \tag{3.11}$$

для почти всех $t \in [t_0, p]$. Из формулы (3.8) следует, что $f_m(p) = 0$. Поэтому $f(p) = 0$. Интегрируя равенство (3.11), получим вторую формулу (3.9). Согласно формулам (3.7) и (3.10), $l(t_0) = g_0$ и $l(p) = 0$. Интегрируя неравенство (3.11), получим, что функция $\varphi_0(t)$ удовлетворяет первому неравенству (3.9).

Введем в рассмотрение многозначную функцию

$$Q(t) = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_1 = a(t)\varphi - b(t), q_2 = -g(t, \varphi), \forall \varphi \in [0, 1]\}. \tag{3.12}$$

Из непрерывности функций $a(t)$ и $b(t)$ следует, что многозначная функция (3.12) полунепрерывно сверху зависит от $t \in [t_0, p]$. Это значит, что для каждой точки $t \in [t_0, p]$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех $|t - \tau| < \delta, \tau \leq p$

$$Q(\tau) \subset Q(t) + \varepsilon S. \tag{3.13}$$

Здесь обозначено $S = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_1^2 + q_2^2 \leq 1\}$.

Обозначим $y(t) = (f(t), l(t))$ и $y_m(t) = (f_m(t), l_m(t))$, $m \geq 1$. Тогда почти всюду на отрезке $[t_0, p]$ существуют производные $\dot{y}(t)$ и $\dot{y}_m(t)$, $m \geq 1$. Возьмем точку $t \in [t_0, p]$, в которой существуют эти производные. Зафиксируем число $h > 0$ и $t + h \leq p$. Тогда

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_m(t+h) - y_m(t)}{h} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \dot{y}_m(t+rh) dr. \tag{3.14}$$

Из формул (3.8) и (3.10) следует, что $\dot{y}_m(t+rh) \in Q(t+rh)$ для почти всех $r \in [0, 1]$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Тогда из включения (3.13) получим, что существует число $\delta > 0$ такое, что $\dot{y}_m(t+rh) \in Q(t) + \varepsilon S$ для всех $m \geq 1$, $0 < h < \delta$ и почти всех $r \in [0, 1]$. Применяя понятие интеграла от многозначной функции [9], получим, что

$$\frac{y_m(t+h) - y_m(t)}{h} \in \int_0^1 (Q(t) + \varepsilon S) dr = \text{co } Q(t) + \varepsilon S. \tag{3.15}$$

Здесь со Q — выпуклая оболочка множества Q . Поскольку множество, стоящее в правой части (3.15), является компактом, то, используя формулу (3.14), получим, что

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \in \text{co } Q(t) + \varepsilon S.$$

Устремим $h \rightarrow 0+$ и, учитывая, что ε — произвольное положительное число, получим, что $\dot{y}(t) \in \text{co } Q(t)$. Отсюда, используя теорему Каратеодори [5, с. 9], получим, что существуют числа $\lambda_i \geq 0$, $\varphi_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, 3$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ такие, что

$$\dot{f}(t) = a(t) \sum_{i=1}^3 \lambda_i \varphi_i - b(t), \quad \dot{i}(t) = - \sum_{i=1}^3 \lambda_i g(t, \varphi_i). \quad (3.16)$$

Из этих формул, применяя лемму о выборе А.Ф. Филиппова [10], получим, что существуют измеримые на отрезке $[t_0, p]$ функции $\lambda_i(t) \geq 0$, $\varphi_i(t) \in [0, 1]$, $\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t) = 1$ такие, что они удовлетворяют равенствам (3.16) для почти всех $t \in [t_0, p]$. Следовательно, функция $\varphi_0(t) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \varphi_i(t) \in [0, 1]$ удовлетворяет первому равенству в (3.11). Из выпуклости по φ функций $g(t, \varphi)$ следует, что

$$\dot{i}(t) = - \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) g(t, \varphi_i(t)) \leq -g\left(t, \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \varphi_i(t)\right) = -g(t, \varphi_0(t)).$$

Таким образом, построенная функция $\varphi_0(t)$ удовлетворяет неравенству в (3.11).

Приведем достаточные условия, при выполнении которых функция $\varphi_0: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$ является решением задачи (3.3)–(3.5).

Теорема 3. Пусть измеримая функция $\varphi_0: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$ удовлетворяет связям (3.4) и (3.5). Пусть существуют число $\lambda \geq 0$ и неубывающая на отрезке $[t_0, p]$ функция $\psi(t) \geq 0$ такие, что $\psi(t_0) = 0$ и

$$\int_{t_0}^p \psi(r)(b(r) - a(r)\varphi_0(r)) dr = \psi(p)\varepsilon, \quad (3.17)$$

$$\lambda \left(\int_{t_0}^p (b(r) - a(r)\varphi_0(r)) dr + \|z_0\| - \varepsilon \right) = 0, \quad (3.18)$$

$$g(r, \varphi_0(r)) - (\psi(r) + \lambda)a(r)\varphi_0(r) = \min_{0 \leq \varphi \leq 1} (g(r, \varphi) - (\psi(r) + \lambda)a(r)\varphi), \quad r \in [t_0, p]. \quad (3.19)$$

Тогда функция $\varphi_0(r)$ является решением задачи (3.3)–(3.5).

Доказательство. Возьмем произвольную измеримую функцию $\varphi: [t_0, p] \rightarrow [0, 1]$ и запишем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(\varphi(\cdot)) &= \int_{t_0}^p g(r, \varphi(r)) dr + \int_{t_0}^p \psi(r)(b(r) - a(r)\varphi(r)) dr - \psi(p)\varepsilon \\ &+ \lambda \left(\int_{t_0}^p (b(r) - a(r)\varphi(r)) dr + \|z_0\| - \varepsilon \right) = \int_{t_0}^p (g(r, \varphi(r)) - (\psi(r) + \lambda)a(r)\varphi(r) + \psi(r)b(r)) dr \\ &- \psi(p)\varepsilon + \lambda(\|z_0\| - \varepsilon). \end{aligned}$$

Используя формулу интегрирования по частям в интеграле Римана — Стильтьеса [6, с. 134], получим

$$\int_{t_0}^p \psi(r)(b(r) - a(r)\varphi(r)) dr - \psi(p)\varepsilon = \int_{t_0}^p \left(\int_t^p (b(r) - a(r)\varphi(r)) dr - \varepsilon \right) d\psi(r) \leq 0.$$

Поэтому из равенств (3.17)–(3.19) следует, что

$$\int_{t_0}^p g(r, \varphi_0(r)) dr = L(\varphi_0(\cdot)) \leq L(\varphi(\cdot)) \leq \int_{t_0}^p g(r, \varphi(r)) dr.$$

Это неравенство доказывает оптимальность функции $\varphi_0(r)$.

4. Решение примера

В качестве примера построения функции $\varphi_0(t)$ рассмотрим случай, когда параметры в игре (1.1) и начальные условия удовлетворяют неравенствам

$$\frac{b^2}{\gamma} \leq \varepsilon; \quad t_0 < p - \frac{\varepsilon}{b}; \quad \|z_0\| < \gamma \frac{(p - t_0)^2}{2} - b(p - t_0) - \frac{\gamma \varepsilon^2}{2b^2} + \varepsilon. \quad (4.1)$$

Из третьего неравенства (4.1) следует, что уравнение

$$\gamma \frac{(p - t_0)^2 - (p - \tau)^2}{2} - b(\tau - t_0) = \|z_0\| \quad (4.2)$$

имеет корень $\tau \in [t_0, p - \varepsilon/b]$.

Возьмем $\lambda = 1/(\gamma(p - \tau)) > 0$ и

$$\psi = \begin{cases} 0, & \text{при } t_0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{1}{\gamma(p - t)} - \lambda, & \text{при } \tau \leq t \leq p - \frac{\varepsilon}{b}, \\ \psi(p - \frac{\varepsilon}{b}), & \text{при } p - \frac{\varepsilon}{b} < t \leq p. \end{cases} \quad (4.3)$$

В рассматриваемом примере при $0 \leq \varphi \leq 1$ функция $g(r, \varphi) = \varphi$. Подставим функцию (4.3) в формулу (3.19). Получим, что равенству (3.19) удовлетворяет функция

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t_0 \leq t \leq \tau, \\ \frac{b}{\gamma(p - t)}, & \text{при } \tau \leq t \leq p - \frac{\varepsilon}{b}, \\ 0, & \text{при } p - \frac{\varepsilon}{b} < t \leq p. \end{cases} \quad (4.4)$$

Из первого неравенства (4.1) следует, что $0 \leq \varphi_0(t) \leq 1$ при $\tau \leq t \leq p - \varepsilon/b$.

Подставим функцию (4.4) в левую часть формулы (3.5) при $b(r) = b$ и $a(r) = \gamma(p - r)$. Используя формулу (4.2), получим, что неравенство (3.5) превращается в равенство. Отсюда следует и справедливость формулы (3.18).

Проверим неравенство (3.4), левую часть которого обозначим $f(t)$. Тогда производная $\dot{f}(t) = -b + \gamma(p - t)\varphi_0(t) \geq 0$ при $t_0 \leq t < p - \varepsilon/b$ и $\dot{f}(t) = -b < 0$ при $p - \varepsilon/b < t \leq p$. Значит, максимальное значение функции $f(t)$ на отрезке $[t_0, p]$ достигается в точке $t = p - \varepsilon/b$, и оно равно ε .

Подставляя функции (4.3) и (4.4) в формулу (3.17), убеждаемся, что требуемое равенство выполнено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
4. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 519 с.
5. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
6. **Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
7. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая сер. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
8. **Ухоботов В.И.** Синтез управления в однотипных дифференциальных играх с фиксированным временем // Вест. Челяб. ун-та. 1996. Вып. 1. С. 178–184. (Математика, механика.)
9. **Hermes H.** The generalized differential equation $\dot{x} \in \mathbb{R}(t, x)$ // Advances in Math. 1970. Vol. 4, no. 29. P. 149–169.
10. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вест. МГУ. 1959. Вып. 2. С. 25–32. (Математика, механика.)

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет
e-mail: ukh@csu.ru

Поступила 01.08.2010

Гуцин Денис Васильевич
аспирант
Челябинский государственный университет
e-mail: off_side@mail.ru

УДК 517.977

ЗАДАЧА СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА¹

В. Е. Федоров, М. В. Плеханова

В работе с применением теории вырожденных полугрупп операторов получен результат о разрешимости задачи Коши для полулинейного уравнения соболевского типа в банаховом пространстве. Он использован при исследовании задачи стартового управления для соответствующей системы. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примере полулинейного уравнения Дзекцера.

Ключевые слова: оптимальное управление, распределенная система, уравнение соболевского типа, полулинейное уравнение.

V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova. The problem of start control for a class of semilinear distributed systems of Sobolev type.

A result on the solvability of the Cauchy problem for a semilinear equation of Sobolev type in a Banach space is obtained with the help of the theory of degenerate operator semigroups. The result is used for investigating the problem of start control in the corresponding system. Abstract results are illustrated by the example of the semilinear Dzektser equation.

Keywords: optimal control, distributed system, Sobolev type equation, semilinear equation.

Введение

Абстрактной формой многих начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, встречающихся при математическом моделировании реальных процессов, является задача Коши

$$x(0) = u \tag{0.1}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + N(t, x(t)), \tag{0.2}$$

где $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линейный непрерывный оператор), $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линеен, замкнут и плотно определен в \mathcal{X}), оператор $N : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ нелинейный, \mathcal{X}, \mathcal{Y} — гильбертовы пространства. Например, к такой задаче сводятся начально-краевые задачи для системы Навье — Стокса, системы уравнений Буссинеска, уравнения Дзекцера и др. [1; 2].

В последние десятилетия получила существенное развитие теория оптимального управления для распределенных систем (см. [3; 4] и библиографию там же). Однако не так много работ, где рассматриваются распределенные системы соболевского типа, т. е. системы, описываемые уравнениями с вырожденным оператором при старшей производной по выделенной переменной, например, уравнением (0.2). Отметим в этом смысле работы [5–7], касающиеся задач с распределенным управлением для линейных уравнений соболевского типа.

Одной из интересных задач управления является задача стартового управления, когда управление осуществляется посредством выбора начальных данных задачи Коши (0.1) (см.,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-96007-р_урал_a).

например, [4]). Данная работа посвящена исследованию задачи стартового управления

$$u \in \mathfrak{U}_\partial,$$

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|_{H^1(0, T; \mathcal{X})}^2 + \frac{C}{2} \|u - \tilde{u}\|_{\mathfrak{U}}^2 \rightarrow \inf$$

для класса полулинейных распределенных систем соболевского типа (0.1), (0.2). Здесь \mathfrak{U}_∂ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства управлений $\mathfrak{U} = \mathcal{X}$, $\tilde{x} \in H^1(0, T; \mathcal{X})$ — заданная вектор-функция, $\tilde{u} \in \mathcal{X}$ — заданный вектор, константа $C > 0$. Кроме того, предполагается выполнение условия сильной (L, p) -радиальности оператора M , гарантирующего существование сильно непрерывной разрешающей полугруппы уравнения $L\dot{x}(t) = Mx(t)$, и выполнение ограничений на оператор N , достаточных для существования решения задачи (0.1), (0.2).

В качестве иллюстрации абстрактных результатов в последнем разделе статьи приводится задача стартового управления для системы, описываемой полулинейным уравнением Дзекцера [8].

1. Абстрактная задача управления

Коротко сформулируем некоторые общие результаты теории управления (см. [4]), которые в дальнейшем будем использовать.

Пусть \mathfrak{Y} , \mathfrak{W} — линейные нормированные пространства, \mathfrak{Y}_1 , \mathfrak{U} — рефлексивные банаховы пространства, причем \mathfrak{Y}_1 непрерывно вложено в \mathfrak{Y} . Рассмотрим следующую абстрактную задачу управления:

$$\mathfrak{L}(y, u) + \mathfrak{F}(y) = 0, \quad (1.1)$$

$$u \in \mathfrak{U}_\partial, \quad (1.2)$$

$$J(y, u) \rightarrow \inf. \quad (1.3)$$

Здесь \mathfrak{U}_∂ — замкнутое выпуклое подмножество пространства управлений \mathfrak{U} , функционал стоимости $J(y, u)$ выпуклый, полунепрерывный снизу и ограниченный снизу на $\mathfrak{Y} \times \mathfrak{U}_\partial$, линейный оператор $\mathfrak{L} : \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{W}$ и нелинейный оператор $\mathfrak{F} : \mathfrak{Y}_1 \rightarrow \mathfrak{W}$ непрерывны.

Множеством \mathfrak{W} допустимых пар (y, u) задачи (1.1)–(1.3) называется множество пар $(y, u) \in \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U}$, удовлетворяющих соотношениям (1.1), (1.2), для которых $J(y, u) < \infty$.

Предполагаются выполнение условия нетривиальности (т. е. $\mathfrak{W} \neq \emptyset$) и коэрцитивность функционала J , означающая, что для любого $R > 0$ множество $\{(y, u) \in \mathfrak{W} : J(y, u) \leq R\}$ ограничено в $\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U}$.

Решением задачи (1.1)–(1.3) называется пара $(\hat{y}, \hat{u}) \in \mathfrak{W}$, для которой

$$J(\hat{y}, \hat{u}) = \inf_{(y, u) \in \mathfrak{W}} J(y, u).$$

Пусть \mathfrak{Y}_{-1} — такое линейное нормированное пространство, что вложение $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{Y}_{-1}$ непрерывно, и выполнено условие компактности:

- (1) вложение $\mathfrak{Y}_1 \subset \mathfrak{Y}_{-1}$ компактно;
- (2) существует такое всюду плотное подмножество S пространства \mathfrak{W}^* , что для любого $v \in S$ функционал $y \rightarrow \langle F(y), v \rangle_{\mathfrak{W}}$ продолжается по непрерывности с \mathfrak{Y}_1 на \mathfrak{Y}_{-1} .

Теорема 1. Пусть выполнены все условия, сформулированные в данном разделе. Тогда задача (1.1)–(1.3) имеет решение $(\hat{y}, \hat{u}) \in \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U}_\partial$.

2. Сильно (L, p) -радиальные операторы

Сначала коротко приведем используемые в дальнейших рассматриваниях результаты теории вырожденных групп операторов, доказательство которых можно найти, например, в [1; 9].

Пусть \mathcal{X}, \mathcal{Y} — банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из \mathcal{X} в \mathcal{Y} . Если $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, то обозначение сократится до $\mathcal{L}(\mathcal{X})$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве \mathcal{X} , действующих в \mathcal{Y} , будем обозначать $Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Множество операторов $Cl(\mathcal{X}; \mathcal{X})$ обозначим через $Cl(\mathcal{X})$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M \in Cl(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$. Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})\}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется сильно (L, p) -радиальным, если

- (i) $\exists a \in \mathbb{R} (a, +\infty) \subset \rho^L(M)$;
- (ii) $\exists K > 0 \forall \mu \in (a, +\infty) \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max \left\{ \|(R_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|(L_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})} \right\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

- (iii) существует плотный в \mathcal{Y} линеал $\overset{\circ}{\mathcal{Y}}$ такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^{p+1}f\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{\text{const}(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{Y}}$$

при любом $\mu \in (a, +\infty)$;

- (iv) для любого $\mu \in (a, +\infty)$

$$\|(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}.$$

З а м е ч а н и е 1. Эквивалентность этого более простого определения сильной (L, p) -радиальности и того, которое было использовано в [1; 9], доказана в [10].

Обозначим через \mathcal{X}^0 (\mathcal{Y}^0) ядро $\ker R_{(\mu, p)}^L(M)$ ($\ker L_{(\mu, p)}^L(M)$), а через \mathcal{X}^1 (\mathcal{Y}^1) — замыкание линеала $\text{im } R_{(\mu, p)}^L(M)$ ($\text{im } L_{(\mu, p)}^L(M)$) в норме пространства \mathcal{X} (\mathcal{Y}). Через M_k (L_k) будем обозначать сужение оператора M (L) на $\text{dom } M_k = \mathcal{X}^k \cap \text{dom } M$ (\mathcal{X}^k), $k = 0, 1$.

Теорема 2 [9]. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален. Тогда

- (i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;
- (ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $M_k \in Cl(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
- (iii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$;
- (iv) оператор $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$ нильпотентен степени не больше p ;
- (v) существует сильно непрерывная полугруппа $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ уравнения $L\dot{x} = Mx$;
- (vi) инфинитезимальным генератором C_0 -непрерывной полугруппы $\left\{ X_1^t = X^t \Big|_{\mathcal{X}^1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \right\}$ является оператор $L_1^{-1}M_1 \in Cl(\mathcal{X}^1)$.

З а м е ч а н и е 2. Проектор вдоль \mathcal{X}^0 на \mathcal{X}^1 (вдоль \mathcal{Y}^0 на \mathcal{Y}^1) имеет вид

$$P = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1}, \quad \left(Q = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_\mu^L(M))^{p+1} \right).$$

При доказательстве утверждения (ii) используется тот факт, что в условиях теоремы 2 выполняются равенства $QL = LP$, $QMx = MPx$ для $x \in \text{dom } M$.

3. Существование и единственность решения задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + N(t, x(t)), \quad (3.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (3.2)$$

где $N : [0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — нелинейный оператор.

О п р е д е л е н и е 2. Решением задачи (3.1), (3.2) на отрезке $[0, T]$ назовем функцию $x \in C^1([0, T]; \mathcal{X})$, удовлетворяющую условию (3.2), для которой при всех $t \in [0, T]$ выполняется $x(t) \in \text{dom } M$ и справедливо равенство (3.1).

Теорема 3. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, оператор $N : [0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывно дифференцируем, $\text{im } N \subset \mathcal{Y}^1$. Тогда для любого $x_0 \in \text{dom } M \cap \mathcal{X}^1$ задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение на $[0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходная задача может быть сведена к двум задачам на взаимно дополнительных пространствах — \mathcal{X}^0 и \mathcal{X}^1 . Для этого поочередно домножим уравнение (3.1) слева на $L_1^{-1}Q$ и $M_0^{-1}(I - Q)$ и получим задачу Коши

$$\dot{v} = Sv + L_1^{-1}QN(t, v + w), \quad (3.3)$$

$$H\dot{w} = w + M_0^{-1}(I - Q)N(t, v + w), \quad (3.4)$$

$$v(0) = Px_0, \quad (3.5)$$

$$w(0) = (I - P)x_0 \quad (3.6)$$

для пары функций $v(t) = Px(t)$, $w(t) = (I - P)x(t)$. Здесь использовано обозначение $S = L_1^{-1}M_1$, а также обозначения предыдущего раздела.

Если $\text{im } N \subset \mathcal{X}^1$, то $(I - Q)N \equiv 0$, $QN \equiv N$. В этом случае уравнение (3.4) принимает вид $H\dot{w} = w$. В силу нильпотентности оператора H это уравнение имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$ (см., например, [1]). Отсюда и из (3.6) следует необходимость условия $(I - P)x_0 = 0$.

Уравнение (3.3) в таком случае принимает вид

$$\dot{v} = Sv + L_1^{-1}N(t, v). \quad (3.7)$$

Задача (3.5) для уравнения (3.7) однозначно разрешима в силу теоремы 6.1.5 [11], поскольку по теореме 2 оператор S порождает C_0 -непрерывную полугруппу, а $\text{dom } S = \text{dom } M_1$. \square

4. Задача стартового управления с компромиссным функционалом

Пусть теперь \mathcal{X}, \mathcal{Y} — гильбертовы пространства. Как и в предыдущих разделах, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $N : [0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Кроме того, потребуем, чтобы далее всюду выполнялось условие

$$\|N(t, x)\|_{\mathcal{Y}} \leq K(1 + \|x\|_{\mathcal{X}}) \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (4.1)$$

где константа $K > 0$ не зависит от t .

Рассмотрим задачу оптимального управления посредством выбора начальных данных — так называемую *задачу стартового управления*

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + N(t, x(t)), \quad x(0) = u, \quad (4.2)$$

$$u \in \mathfrak{U}_\partial, \quad (4.3)$$

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|_{H^1(\mathcal{X})}^2 + \frac{C}{2} \|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{X}}^2 \rightarrow \inf, \quad (4.4)$$

где $\tilde{x} \in H^1(\mathcal{X})$ — заданная функция, $\tilde{u} \in \mathcal{X}$, константа $C > 0$, множество допустимых управлений \mathfrak{U}_∂ является непустым замкнутым выпуклым подмножеством пространства \mathcal{X} . Здесь и далее примем обозначения $L_2(0, T; \mathcal{Y}) = L_2(\mathcal{Y})$, $H^1(0, T; \mathcal{X}) = H^1(\mathcal{X})$.

Для удобства при исследовании задачи оптимального управления (4.2)–(4.4) будем использовать понятие сильного решения задачи Коши (4.2). Функцию $x \in H^1(\mathcal{X})$ назовем сильным решением задачи (4.2), если она удовлетворяет условию $x(0) = u$ и почти всюду на $[0, T]$ уравнению $L\dot{x}(t) = Mx(t) + N(t, x(t))$.

Заметим, что при выполнении условий теоремы 3 существует классическое, а значит, и сильное решение. Кроме того, тогда, поскольку $N \in C([0, T] \times \mathcal{X}; \mathcal{Y}^1)$, для функции $x \in H^1(\mathcal{X}^1)$ выполняется $N(t, x(t)) \in C([0, T]; \mathcal{Y}) \subset L_2(\mathcal{Y})$. Поэтому, учитывая вид уравнения (4.2), его решения будем искать в гильбертовом пространстве $\mathcal{Z} = \{z \in H^1(\mathcal{X}) : L\dot{z} - Mz \in L_2(\mathcal{Y})\}$ с нормой $\|z\|_{\mathcal{Z}} = \|z\|_{H^1(\mathcal{X})} + \|L\dot{z} - Mz\|_{L_2(\mathcal{Y})}$. Его полнота доказана, например, в [12].

Введем в рассмотрение оператор $\gamma_0 : H^1(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$, $\gamma_0 x = x(0)$. Очевидно, что он непрерывен.

Множеством \mathfrak{W} допустимых пар задачи (4.2)–(4.4) называется множество пар (x, u) таких, что $u \in \mathfrak{U}_\partial$, $x \in H^1(\mathcal{X})$ — сильное решение задачи (4.2).

Решение задачи (4.2)–(4.4) состоит в нахождении пар $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал стоимости $J(x, u)$:

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf_{(x, u) \in \mathfrak{W}} J(x, u).$$

Сначала докажем лемму.

Лемма. Пусть \mathcal{X} — банахово пространство, $x, y_n \in C([0, T]; \mathcal{X})$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\|_{C([0, T]; \mathcal{X})} = 0$. Тогда множество $\{y_n(t) : t \in [0, T], n \in \mathbb{N}\}$ предкомпактно в \mathcal{X} .

Доказательство. По $\varepsilon > 0$ выберем такое $N \in \mathbb{N}$, что $\|y_n - x\|_{C([0, T]; \mathcal{X})} < \varepsilon/2$ при $n > N$. Поскольку функции x, y_1, \dots, y_N равномерно непрерывны на отрезке $[0, T]$, то их конечный набор $\{x, y_1, \dots, y_N\}$ равномерно непрерывен: по $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta > 0$, что из неравенства $|t - s| < \delta$ следуют неравенства $\|x(t) - x(s)\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon/2$, $\|y_1(t) - y_1(s)\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon/2, \dots, \|y_N(t) - y_N(s)\|_{\mathcal{X}} < \varepsilon/2$. В качестве конечной ε -сети множества $\{y_n(t) : t \in [0, T], n \in \mathbb{N}\}$ выберем множество

$$\Upsilon = \{x(0), x(\delta), x(2\delta), \dots, x(m\delta), x(T), y_1(0), y_1(\delta), \dots, \\ y_1(m\delta), y_1(T), y_N(0), y_N(\delta), \dots, y_N(m\delta), y_N(T)\},$$

где число $m \in \mathbb{N}$ выбрано таким, что $m\delta \leq T$, $(m+1)\delta > T$. При любых $t \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$ выберем точку $y_n(s) \in \Upsilon$ при $n \leq N$ и $x(s) \in \Upsilon$ при $n > N$, где s — ближайшая из точек $\{0, \delta, \dots, m\delta, T\}$ к точке t . Тогда при $n \leq N$ будет выполняться $\|y_n(t) - y_n(s)\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon$, а при $n > N$ — $\|y_n(t) - x(s)\| \leq \|y_n(t) - x(t)\| + \|x(t) - x(s)\| \leq \varepsilon$. Таким образом, множество $\{y_n(t) : t \in [0, T], n \in \mathbb{N}\}$ вполне ограничено, а потому в силу полноты \mathcal{X} предкомпактно. \square

Теорема 4. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, оператор $N : [0, T] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ непрерывно дифференцируем, $\text{im } N \subset \mathcal{Y}^1$, выполняется условие (4.1) и $\mathfrak{U}_\partial \cap \text{dom } M \cap \mathcal{X}^1 \neq \emptyset$. Тогда существует решение $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}_\partial$ задачи (4.2)–(4.4).

Доказательство. Из условий теоремы 3 следует существование решения задачи Коши (4.2), в том числе и сильного решения, при любом начальном значении $u \in \mathfrak{U}_\partial \cap \text{dom } M \cap \mathcal{X}^1$. Из непустоты последнего множества следует, что множество допустимых пар \mathfrak{W} также непусто.

Далее воспользуемся теоремой 1. Для этого положим $\mathfrak{Y} = H^1(\mathcal{X})$, $\mathfrak{Y}_1 = \mathcal{Z}$, $\mathfrak{U} = \mathcal{X}$, $\mathfrak{V} = L_2(\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}$, $\mathfrak{F}(x(\cdot)) = (-N(\cdot, x(\cdot)), 0)$, $\mathfrak{L}(x, u) = (L\dot{x} - Mx, \gamma_0 x - u)$. Непрерывность линейного оператора $\mathfrak{L} : \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ следует из неравенств

$$\begin{aligned} \|(L\dot{x} - Mx, \gamma_0 x - u)\|_{L_2(\mathcal{Y}) \times \mathcal{X}}^2 &= \|L\dot{x} - Mx\|_{L_2(\mathcal{Y})}^2 + \|\gamma_0 x - u\|_{\mathcal{X}}^2 \\ &\leq C_1(\|L\dot{x} - Mx\|_{L_2(\mathcal{Y})}^2 + \|x\|_{H^1(\mathcal{X})}^2 + \|u\|_{\mathcal{X}}^2) = C_1\|(x, u)\|_{\mathcal{Z} \times \mathcal{X}}^2. \end{aligned}$$

Здесь использована непрерывность оператора γ_0 .

Убедимся в коэрцитивности функционала J . Имеем в силу условия (4.1) неравенства

$$\begin{aligned} \|x\|_{\mathcal{Z}}^2 + \|u\|_{\mathcal{X}}^2 &= \|x\|_{H^1(\mathcal{X})}^2 + \|L\dot{x} - Mx\|_{L_2(\mathcal{Y})}^2 + \|u\|_{\mathcal{X}}^2 = \|x\|_{H^1(\mathcal{X})}^2 + \|N(\cdot, x(\cdot))\|_{L_2(\mathcal{Y})}^2 + \|u\|_{\mathcal{X}}^2 \\ &\leq \|x\|_{H^1(\mathcal{X})}^2 + 2KT + 2K\|x\|_{H^1(\mathcal{Y})}^2 + \|u\|_{\mathcal{X}}^2 \leq C_1 J(x, u) + C_2. \end{aligned}$$

Из $\|x_n - x_0\|_{\mathcal{Z}} \rightarrow 0$ следует, что $\|x_n - x_0\|_{C([0, T]; \mathcal{X})}$, поэтому

$$\|N(\cdot, x_n(\cdot)) - N(\cdot, x_0(\cdot))\|_{L_2(\mathcal{Y})}^2 = \int_0^T \|N(t, x_n(t)) - N(t, x_0(t))\|_{\mathcal{Y}}^2 dt \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ по теореме Лебега, поскольку максимум нормы $\max_{(t, y) \in \mathcal{K}} \|N(t, y)\|_{\mathcal{Y}}^2$ существует в силу предкомпактности множества $\mathcal{K} = [0, T] \times \{x_n(t) : t \in [0, T], n \in \mathbb{N}_0\}$ (см. лемму) и непрерывности оператора N . Таким образом, показана непрерывность оператора \mathfrak{F} .

Выбрав $\mathfrak{Y}_{-1} = L_2(\mathcal{X})$, проверим условия компактности для этой задачи. Условие (1) компактности следует из компактности вложения пространства $H^1(\mathcal{X})$, а значит, и \mathcal{Z} , в пространство $L_2(\mathcal{X})$.

Для проверки условия (2) в качестве $S \subset L_2(\mathcal{Y})$ возьмем плотный линейал $C([0, T]; \mathcal{Y})$. Тогда для $v \in C([0, T]; \mathcal{Y})$ в силу непрерывной дифференцируемости оператора N имеем

$$\begin{aligned} \langle N(t, x_n(t)) - N(t, x(t)), v(t) \rangle_{L_2(\mathcal{Y})} &= \int_0^T \langle N'_x(t, \theta(t))(x_n(t) - x(t)), v(t) \rangle_{\mathcal{Y}} dt \\ &\leq \max_{(t, y) \in \mathcal{K}} \|N'_x(t, y)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})}^2 \|v\|_{L_2(\mathcal{Y})} \|x_n - x\|_{L_2(\mathcal{X})}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{K} = [0, T] \times \{\theta(t) : t \in [0, T]\}$ — компакт в силу непрерывности функции $\theta \in C([0, T]; \mathcal{X})$. Отсюда следует непрерывная продолжимость функционала $\langle \mathfrak{F}(\cdot), v \rangle$ с \mathcal{Z} на $L_2(\mathcal{X})$. \square

5. Пример

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $n < 4$, $g : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Будем искать функцию $z = z(x, t)$, в цилиндре $\Omega \times [0, T]$ удовлетворяющую равенствам

$$(\lambda - \Delta)z_t(x, t) = \Delta z(x, t) - \beta \Delta^2 z(x, t) + (\lambda - \Delta)g(t, x, z(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (5.1)$$

$$z(x, t) = \Delta z(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (5.2)$$

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (5.3)$$

Это начально-краевая задача для модифицированного уравнения Дзекера, моделирующего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости [8]. Здесь $\lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$ — параметры, характеризующие среду. Слагаемое $(\lambda - \Delta)g(t, x, z)$ играет роль внешней нагрузки,

зависящей в том числе от скорости потока жидкости. Далее будем обозначать третий аргумент функции g через v .

Редуцируем задачу (5.1)–(5.3) к задаче (3.1), (3.2). Положим $\mathcal{X} = H^2(\Omega)$, $\mathcal{Y} = L_2(\Omega)$, $\text{dom } M = \{z \in H^4(\Omega) : z(x) = \Delta z(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$, $L = \lambda - \Delta$, $M = \Delta - \beta\Delta^2$.

Пусть $A : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, $Au = \Delta u$, $\text{dom } A = \{u \in H^2(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ множество собственных функций оператора A , соответствующих его собственным значениям $\{\lambda_k\}$, занумерованным по невозрастанию с учетом их кратности.

Теорема 5. Пусть $n < 4$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, $g \in C^3([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, $z_0 \in H^4(\Omega)$, $z_0(x) = \Delta z_0(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$, $\int_{\Omega} z_0(x)\varphi_k(x)dx = 0$ при $\lambda_k = \lambda$. Тогда задача (5.1)–(5.3) имеет единственное решение $z \in C^1([0, T]; H^2(\Omega))$.

Доказательство. Известно, что в данном случае при $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$ оператор M является сильно $(L, 0)$ -секториальным, а значит, и сильно $(L, 0)$ -радиальным (см. [1]). При этом $\mathcal{X}^0 = \mathcal{Y}^0 = \text{span}\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\}$, \mathcal{X}^1 и \mathcal{Y}^1 есть замыкания линейного пространства $\text{span}\{\varphi_k : \lambda_k \neq \lambda\}$ в норме пространства $H^2(\Omega)$ или $L_2(\Omega)$ соответственно. Следовательно, условия на функцию z_0 в формулировке теоремы означают, что в абстрактной постановке начальное значение задачи принадлежит множеству $\text{dom } M \cap \mathcal{X}^1$.

В случае $n < 4$ имеют место непрерывные вложения $H^2(\Omega)$ в $C(\bar{\Omega})$ и $H^2(\Omega)$ в $W_4^1(\Omega)$, поэтому для $t \in [0, T]$, $v \in H^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \|(\lambda - \Delta)g(t, \cdot, v(\cdot))\|_{L_2(\Omega)} \leq |\lambda| \|g(t, \cdot, v(\cdot))\|_{L_2(\Omega)} \\ & + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g(t, \cdot, v(\cdot)) \right\|_{L_2(\Omega)} + 2 \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial v} g(t, \cdot, v(\cdot)) v'_{x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \\ & + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2}{\partial v^2} g(t, \cdot, v(\cdot)) (v'_{x_i})^2 \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial v} g(t, \cdot, v(\cdot)) v''_{x_i x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq |\lambda| \max_{x \in \bar{\Omega}} |g(t, x, v(x))| \text{mes}^{1/2}(\Omega) + \sum_{i=1}^n \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g(t, x, v(x)) \right| \text{mes}^{1/2}(\Omega) \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial v} g(t, x, v(x)) \right| \|v'_{x_i}\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^2}{\partial v^2} g(t, x, v(x)) \right| \|(v'_{x_i})^2\|_{L_2(\Omega)} \\ & + \sum_{i=1}^n \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial}{\partial v} g(t, x, v(x)) \right| \|v''_{x_i x_i}\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 + c_2 \|v\|_{H^2(\Omega)} + c_3 \|v\|_{W_4^1(\Omega)}^2 \\ & \leq c_1 + c_2 \|v\|_{H^2(\Omega)} + c_4 \|v\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем нелинейное отображение $N : [0, T] \times H^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, действующее по правилу $N(t, v)(x) = (\lambda - \Delta)g(t, x, v(x))$. Очевидно, что $\text{im } N \subset \text{im } L = \mathcal{Y}^1$.

Возьмем $(t_0, v_0), (t_1, v_1) \in [0, T] \times H^2(\Omega)$ и получим при некоторых $\xi, \eta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & \|N(t_1, v_1) - N(t_0, v_0) - N'_t(t_0, v_0)(t_1 - t_0) - N'_v(t_0, v_0)(v_1 - v_0)\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ & = \left\| [N'_t(\xi t_0 + (1 - \xi)t_1, \xi v_0 + (1 - \xi)v_1) - N'_t(t_0, v_0)] (t_1 - t_0) \right. \\ & \quad \left. + [N'_v(\xi t_0 + (1 - \xi)t_1, \xi v_0 + (1 - \xi)v_1) - N'_v(t_0, v_0)] (v_1 - v_0) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ & \leq 2 \left(\int_{\Omega} \left| (\lambda - \Delta) \left(g_t(\xi t_0 + (1 - \xi)t_1, x, \xi v_0(x) + (1 - \xi)v_1(x)) - g_t(t_0, x, v_0(x)) \right) \right|^2 dx \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_{\Omega} \left| (\lambda - \Delta) \left(g_v(\xi t_0 + (1 - \xi)t_1, x, \xi v_0(x) + (1 - \xi)v_1(x)) - g_v(t_0, x, v_0(x)) \right) \right|^2 dx \\
& \times \left(|t_1 - t_0|^2 + \|v_1 - v_0\|_{C(\bar{\Omega})}^2 \right) = o(1) \left(|t_1 - t_0|^2 + \|v_1 - v_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \right)
\end{aligned} \quad (5.4)$$

при $|t_1 - t_0|^2 + \|v_1 - v_0\|_{H^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$.

Действительно, непрерывные функции $(\lambda - \Delta)g_t$, $(\lambda - \Delta)g_v$ ограничены на компакте $[0, T] \times \bar{\Omega} \times [-\hat{v} - 1, \hat{v} + 1]$, где $\hat{v} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |v_0(x)|$. Такой компакт рассматривать достаточно, поскольку берутся лишь функции v_1 , стремящиеся к v_0 по норме в $H^2(\Omega)$, а значит, и по норме в $C(\bar{\Omega})$. Из ограниченности выражений под интегралами в четвертой и пятой строках в формуле (5.4) по теореме Лебега получаем сходимость к нулю этих интегралов в силу непрерывности функций $(\lambda - \Delta)g_t$, $(\lambda - \Delta)g_v$. Тем самым дифференцируемость оператора N доказана. Непрерывность его производной легко проверяется непосредственно.

Таким образом, к задаче (5.1)–(5.3) можно применить теорему 3. \square

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$(\lambda - \Delta)z_t(x, t) = \Delta z(x, t) - \beta \Delta^2 z(x, t) + (\lambda - \Delta)g(t, x, z(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (5.5)$$

$$z(x, t) = \Delta z(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (5.6)$$

$$z(x, 0) = u(x), \quad x \in \Omega. \quad (5.7)$$

$$u \in \mathfrak{U}_{\partial}, \quad (5.8)$$

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \|z - \tilde{z}\|_{H^1(0, T; H^2(\Omega))}^2 + \frac{C}{2} \|u - \tilde{u}\|_{H^2(\Omega)}^2 \rightarrow \inf, \quad (5.9)$$

где $\tilde{z} \in H^1(0, T; H^2(\Omega))$, $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$ — заданные функции, константа $C > 0$, \mathfrak{U}_{∂} — выпуклое замкнутое множество пространства управлений $\mathfrak{U} = H^2(\Omega)$.

Принимая во внимание все вышесказанное, задача (5.5)–(5.9) сводится к абстрактной задаче (4.2)–(4.4) с использованием пространства

$$\mathcal{Z} = \{z \in H^1(0, T; H^2(\Omega)) : (\lambda - \Delta)z_t(x, t) - \Delta z(x, t) + \beta \Delta^2 z(x, t) \in L_2(0, T; L_2(\Omega))\}.$$

Используя теорему 4, сразу получим следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть $n < 4$, $\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, $g \in C^3([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, существует такое $K > 0$, что для всех $t \in [0, T]$, $x \in \Omega$, $v \in H^2(\Omega)$ выполнено условие

$$\|(\lambda - \Delta)g(t, x, v)\|_{L_2(\Omega)} \leq K(1 + \|v\|_{H^2(\Omega)})$$

и найдется $u \in \mathfrak{U}_{\partial} \cap H^4(\Omega)$, для которого $u(x) = \Delta u(x) = 0$ для $x \in \partial\Omega$ и $\int_{\Omega} u(x)\varphi_k(x)dx = 0$ при $\lambda_k = \lambda$. Тогда существует решение $(\hat{z}, \hat{u}) \in \mathcal{Z} \times \mathfrak{U}_{\partial}$ задачи (5.5)–(5.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Boston etc.: VSP, 2003. 216 p.
2. **Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.** Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007. 734 с.
3. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
4. **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 350 с.

5. **Свиридюк Г.А., Ефремов А.А.** Оптимальное управление линейными уравнениями типа Соболева с относительно p -секториальными операторами // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1912–1919.
6. **Плеханова М.В., Федоров В.Е.** Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 40–44.
7. **Федоров В.Е., Плеханова М.В.** Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1548–1556.
8. **Дзекцер Е.С.** Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 5. С. 1031–1033.
9. **Федоров В.Е.** Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173–200.
10. **Федоров В.Е.** Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов // Вест. Челяб. гос. ун-та. 2009. № 20. С. 12–19. (Математика. Механика. Информатика. Вып. 11.)
11. **Pazy A.** Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983. 446 p.
12. **Плеханова М.В., Федоров В.Е.** Критерий оптимальности в задаче управления для линейного уравнения соболевского типа // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 37–44.

Федоров Владимир Евгеньевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
декан
Челябинский государственный университет
e-mail: kar@csu.ru

Поступила 2.08.2010

Плеханова Марина Васильевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: mariner79@mail.ru

УДК 517.972.8

УЛЬТРАФИЛЬТРЫ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ КАК ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В АБСТРАКТНЫХ ЗАДАЧАХ О ДОСТИЖИМОСТИ¹**А. Г. Ченцов**

Рассматриваются задачи асимптотического анализа, возникающие, в частности, при формализации эффектов, связанных с приближенным соблюдением ограничений. Исследуются несеквенциальные (вообще говоря) варианты асимптотического поведения, формализуемые в классе ультрафильтров (у/ф) подходящего измеримого пространства (ИП). Конструируются множества притяжения (МП) в топологическом пространстве (ТП), реализуемые в классе у/ф соответствующего ИП, и указываются условия, при которых у/ф ИП достаточны для построения “полного” МП, соответствующего применению у/ф семейства всех подмножеств (п/м) пространства обычных решений. Исследуется компактификация этого пространства, которая конструируется в классе стоуновских у/ф (у/ф ИП с алгеброй множеств) и при которой МП реализуется в виде непрерывного образа компакта обобщенных решений; исследуется структура данного компакта в терминах свободных у/ф и обычных решений, точно соблюдающих ограничения задачи. Показано, что в случае отсутствия точных обычных решений вышеупомянутый компакт состоит только из свободных у/ф, т. е. содержится в наросте компактификатора (приведен пример, показывающий возможность отсутствия аналогичного свойства для других вариантов расширения исходной задачи).

Ключевые слова: множество притяжения, расширение, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems.

We consider problems of asymptotic analysis that arise, in particular, in the formalization of effects related to an approximate observation of constraints. We study nonsequential (generally speaking) variants of asymptotic behavior that can be formalized in the class of ultrafilters of an appropriate measurable space. We construct attraction sets in a topological space that are realized in the class of ultrafilters of the corresponding measurable space and specify conditions under which ultrafilters of a measurable space are sufficient for constructing the “complete” attraction set corresponding to applying ultrafilters of the family of all subsets of the space of ordinary solutions. We study a compactification of this space that is constructed in the class of Stone ultrafilters (ultrafilters of a measurable space with an algebra of sets) such that the attraction set is realized as a continuous image of the compact set of generalized solutions; we also study the structure of this compact set in terms of free ultrafilters and ordinary solutions that observe the constraints of the problem exactly. We show that, in the case when exact ordinary solutions are absent, this compact set consists of free ultrafilters only; i.e., it is contained in the remainder of the compactificator (an example is given that shows the possibility of the absence of the similar property for other variants of extending the original problem).

Keywords: attraction set, extension, ultrafilter.

Содержательное обсуждение задачи

Рассматривается абстрактная задача о достижимости в условиях ограничений асимптотического характера; в связи с постановкой см., в частности, [1–4]. Используются асимптотические версии решений, являющиеся несеквенциальными аналогами приближенных решений (ПР) [5, гл. III], а именно: направленности, фильтры и, в частности, у/ф пространства обычных решений. Напомним замечания об использовании решений-направленностей в [6; 7]. Такие постановки возникают, в частности, в теории управления при исследовании эффектов, связанных с ослаблением ограничений; примеры такого рода см. в [3, § 1; 4, § 2; 8, гл. 1; 9, гл. 1,2] и во многих других работах. Существо этих эффектов состоит в скачкообразном изменении основных показателей соответствующего процесса, причем изменении в благоприятную сторону, что делает целесообразным использование упомянутых эффектов для достижения

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00436, 10-01-96020, 10-01-00356) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” (проекты 09-П-1-1007, 09-П-1-1014).

лучшего качества. Для этого, однако, требуется иной взгляд на природу решения (см., например, [5, гл. III]). Последнее определяют, как правило, в виде асимптотики обычных решений — точек исходного пространства. Возможна ситуация (см., [3, § 6]), когда эту асимптотику нельзя без потери качества отождествлять с последовательностью обычных решений, т. е. с (секвенциальным) ПР в духе конструкций Дж. Варги. В этом случае представляется весьма рациональным определить асимптотические версии решений в виде у/ф основного пространства, соблюдающих в естественном смысле [1–4] возникающие (при должной редукции постановки) ограничения асимптотического характера. Наиболее интересны в этом качестве так называемые свободные у/ф (см. [10; 11]), поскольку именно эти у/ф характеризуют наиболее важные асимптотические эффекты, связанные с приближенным соблюдением традиционных ограничений в задачах прикладной математики; см. [3; 4].

Однако если рассматривать у/ф основного пространства как у/ф семейства всех п/м данного пространства, то как раз воспроизведение свободных у/ф (как актуальных ПР) по сути дела невозможно; их использование сопряжено с активным применением аксиомы выбора. Можно сказать, что такие у/ф невоспроизводимы конструктивно, что дает основание рассматривать в общем случае упомянутые в связи с [1; 3; 4] построения из области асимптотического анализа лишь с точки зрения потенциальных возможностей в реализации весьма изощренной асимптотики, хотя в целом ряде конкретных примеров нужные варианты асимптотического поведения и оказываются воспроизводимыми без каких-либо затруднений.

Отметим один из таких примеров. Пусть рассматривается процесс формирования вещественнозначных (в/з) функций на отрезке $\mathbf{I} \triangleq [0, 1]$ в виде поточечно определяемой суммы $u + v$, где u — функция-константа, а v — ограниченная по модулю единицей в/з функция, отличная от нуля всего лишь на конечном подмножестве (п/м) отрезка \mathbf{I} . Пара (u, v) определяет действие управляющей стороны (используем аналогию с [5, гл. III]). Функция u определяется константой $\xi \in]-\infty, 0[$ в виде $u(t) \equiv \xi$; используем в этом случае обозначение $\mathbf{u}_\xi : u = \mathbf{u}_\xi$;

$$(|v(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbf{I}) \ \& \ (\{t \in \mathbf{I} \mid v(t) \neq 0\} \in (\text{FIN})(\mathbf{I})), \quad (0.1)$$

где $(\text{FIN})(\mathbf{I})$ — семейство всех конечных п/м отрезка \mathbf{I} . Пара (ξ, v) , где $\xi \in]-\infty, 0[$, а v — какая-то в/з функция вида (0.1), является объектом нашего выбора. В этой связи условимся через V обозначать множество всех в/з функций на \mathbf{I} , обладающих свойством (0.1). Множество $\mathbb{R}^{\mathbf{I}} = \{\mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}\}$ всех в/з функций на \mathbf{I} (здесь и ниже \mathbb{R} — вещественная прямая) оснащаем топологией поточечной сходимости, т. е. топологией тихоновской степени \mathbb{R} в обычной $|\cdot|$ -топологии $\tau_{\mathbb{R}}$ (имеется в виду тихоновское произведение [11] экземпляров $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ с индексным множеством \mathbf{I}). Полагаем, что ограничение асимптотического характера на выбор ξ задано в виде семейства \mathcal{C} всех интервалов $]c, 0[$, $c \in]-\infty, 0[$ (речь идет о том, что асимптотические варианты решения должны “укладываться” по первой компоненте в каждый из вышеупомянутых интервалов с некоторого момента; точный смысл последнего высказывания проясняется в [1–4]). В этих условиях рассмотрим вопрос о реализации функции $w \in \mathbb{R}^{\mathbf{I}}$, для которой $w(t) \equiv 1$. Легко видеть, что w асимптотически достижимо в классе направленностей; укажем соответствующую процедуру, интерпретируя направленности в согласии с [1; 3; 4].

Введем семейство $\text{Fin}(\mathbf{I}) \triangleq (\text{FIN})(\mathbf{I}) \setminus \{\emptyset\}$ (здесь и ниже \triangleq — равенство по определению). Оснащаем $\text{Fin}(\mathbf{I})$ упорядоченностью по вложению, а полупрямую $] -\infty, 0[$ — порядком, индуцированным обычной упорядоченностью \leq вещественной прямой. В обоих случаях получаем направленные множества (см. [11; 12]). Нас, однако, интересует оснащение множества $D \triangleq] -\infty, 0[\times \text{Fin}(\mathbf{I})$ (здесь и ниже \triangleq — равенство по определению) тем или иным направлением. Наиболее естественным представляется в этом качестве произведение \leq вышеупомянутых направлений; см. [12, гл. 2]. Именно, для любых двух пар $(\xi_1, K_1) \in D$ и $(\xi_2, K_2) \in D$ полагаем, что

$$(\xi_1, K_1) \leq (\xi_2, K_2),$$

если $\xi_1 \leq \xi_2$ и $K_1 \subset K_2$. Тогда (D, \leq) — непустое направленное множество. Введем оператор из D в $\mathbb{R}^{\mathbf{I}}$, определяя предварительно при $K \in \text{Fin}(\mathbf{I})$ функцию $\mathbf{v}_K \in V$ правилом

$$(\mathbf{v}_K(t) \triangleq 1 \quad \forall t \in K) \ \& \ (\mathbf{v}_K(t) \triangleq 0 \quad \forall t \in \mathbf{I} \setminus K).$$

Теперь уже нужный оператор $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{I}}$ определяем условием: $\varphi(\xi, K) \triangleq \mathbf{u}_\xi + \mathbf{v}_K$. Тогда получающаяся направленность (D, \leq, φ) в $\mathbb{R}^{\mathbf{I}}$ сходится к w в топологии поточечной сходимости множества $\mathbb{R}^{\mathbf{I}}$. Кроме того, при всяком $c \in]-\infty, 0[$ реализуется очевидное свойство: для некоторого индекса $(\xi_c, K_c) \in D$ имеем при $(\xi, K) \in D$ импликацию

$$((\xi_c, K_c) \leq (\xi, K)) \implies (\xi \in]c, 0]); \quad (0.2)$$

эту пару (ξ_c, K_c) можно, например, определить следующим образом:

$$\left(\xi_c = \frac{c}{2} \right) \ \& \ (K_c = \{0\}).$$

Впрочем осуществление (0.2) реализуется по мере приближения к w “автоматически”. Тем не менее w может рассматриваться как элемент притяжения (ЭП) в задаче с ограничениями асимптотического характера.

В самом деле, полагаем в данном примере, что $E \triangleq]-\infty, 0[\times V$, $\mathbf{H} \triangleq \mathbb{R}^{\mathbf{I}}$, и определяем \mathcal{E} в виде семейства всех множеств $]c, 0[\times V$, $c \in]-\infty, 0[$. Определяем отображение \mathbf{h} из E в \mathbf{H} посредством правила $\mathbf{h}(e) \triangleq \mathbf{u}_\xi + v$, где $\xi \in]-\infty, 0[$, $v \in V$ и $e \in E$ имеет следующий вид: $e = (\xi, v)$. Как уже отмечалось, \mathbf{H} оснащено стандартной топологией поточечной сходимости. Тогда $w \in \mathbf{H}$ обладает тем свойством, что существует направленность (e_α) в множестве E , для которой 1) при $S \in \mathcal{E}$ включение $e_\alpha \in S$ выполняется с некоторого момента; 2) направленность $(\mathbf{h}(e_\alpha))$ сходится к w в \mathbf{H} с вышеупомянутым топологическим оснащением. Конкретный вариант (e_α) был построен ранее (в виде триплета (D, \leq, φ)). Возникает, однако, вопрос: нельзя ли направленность со свойствами 1) и 2) выбрать в классе последовательностей. Оказывается, ответ отрицательный.

В самом деле, допустим противное: пусть существует последовательность $(e_i)_{i=1}^\infty$ в множестве E , удовлетворяющая условиям 1), 2). В частности, из 2) следует поточечная сходимость $(\mathbf{h}(e_i))_{i=1}^\infty$ к w . Всюду в дальнейшем $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$. Пусть $(\xi[i]_{i=1}^\infty)$ и $(v[i]_{i=1}^\infty)$ — последовательности в $] -\infty, 0[$ и в V соответственно, для которых

$$e_j = (\xi[j], v[j]) \quad \forall j \in \mathcal{N}.$$

Тогда $\mathbf{h}(e_k) = \mathbf{u}_{\xi[k]} + v[k]$ (равенство понимается поточечно) при $k \in \mathcal{N}$; при этом $\mathbf{u}_{\xi[k]}(t) = \xi[k] < 0 \quad \forall t \in \mathbf{I}$. Пусть $(K_j)_{j=1}^\infty$ — последовательность в $(\text{FIN})[\mathbf{I}]$, для которой $K_s \triangleq \{t \in \mathbf{I} \mid v[s](t) \neq 0\} \quad \forall s \in \mathcal{N}$. Через \mathbb{K} обозначаем объединение всех множеств K_i , $i \in \mathcal{N}$; разумеется, \mathbb{K} — не более, чем счетное п/м континуума \mathbf{I} , а тогда $\mathbf{I} \setminus \mathbb{K} \neq \emptyset$. Выберем произвольно $t_* \in \mathbf{I} \setminus \mathbb{K}$. Тогда $\mathbf{h}(e_k)(t_*) = \xi[k] < 0 \quad \forall k \in \mathcal{N}$. Множество

$$G_* \triangleq \{f \in \mathbf{H} \mid |f(t_*) - w(t_*)| < 1\} = \{f \in \mathbf{H} \mid f(t_*) \in]0, 2[\}$$

является окрестностью w в топологии поточечной сходимости, причем $\mathbf{h}(e_j) \notin G_* \quad \forall j \in \mathcal{N}$. Получили противоречие со свойством 2). Итак, w — несеквенциальный ЭП, т. е. ЭП, не реализуемый в классе последовательностей в E . Появление такого ЭП связано в данном случае с выбором в качестве топологии \mathbf{H} оснащения в виде тихоновской степени \mathbb{R} ; грубо говоря, здесь в появлении несеквенциального ЭП “виновата” топология. Существуют примеры, в которых такие ЭП возникают “по вине” семейства п/м E (здесь — семейства \mathcal{E}), определяющего ограничения асимптотического характера.

Напомним также, что известны весьма общие условия, достаточные для секвенциальной реализации всех ЭП; см. [1, § 4; 9, с. 38]. Однако и в целом ряде таких случаев имеет смысл рассматривать несеквенциальные варианты реализации ЭП, привлекая, в частности, направленности (см., например, [9, с. 253]) в рамках весьма конструктивных построений; применение секвенциальных вариантов асимптотического поведения может потребовать (в этих случаях) использования счетной аксиомы выбора.

Наконец, применяя общий подход к построению ЭП и не ограничиваясь при этом секвенциальными конструкциями, мы получаем в результате множество притяжения (МП), совпадающее в практически интересных случаях с весьма традиционным в общей топологии объектом — множеством точек прикосновения базы фильтра; см. [13, гл. I].

В дальнейшем фиксируем произвольные непустые множества E (пространство решений) и \mathbf{H} (пространство оценок), а также оператор

$$\mathbf{h} : E \longrightarrow \mathbf{H}, \quad (0.3)$$

именуемый целевым. Если E_0 — п/м множества E , формирующее ограничение $e \in E_0$ на выбор решения e , то множество-образ $\mathbf{h}^1(E_0) \triangleq \{\mathbf{h}(x) : x \in E_0\}$ играет роль абстрактного аналога области достижимости (ОД) в теории управления; см. [5; 14]. Сама задача о построении ОД может рассматриваться в виде конкретной версии вышеупомянутой весьма общей постановки. Ослабление ограничений — замена E_0 каким-либо множеством \tilde{E}_0 , $E_0 \subset \tilde{E}_0 \subset E$, — используется для изучения особенностей данной задачи как в ее конкретной (связанной с исследованием “обычной” ОД), так и в абстрактной версии. Правда, конкретный выбор \tilde{E}_0 нередко осуществить затруднительно, зато понятен бывает тип таких множеств; по этой причине зачастую удается указать непустое семейство \mathcal{E} п/м E , составленное из множеств \tilde{E}_0 упомянутого типа. Обычно предполагается, что пересечение всех множеств из \mathcal{E} совпадает с E_0 .

Семейство \mathcal{E} также можно использовать в виде своеобразного ограничения (см. пример). При этом, правда, решение — точка E — заменяется тем или иным вариантом асимптотического поведения. Простейшим и в основном согласующимся с [5, гл. III, IV] таким вариантом можно считать секвенциальное ПР в виде последовательности $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ в множестве E со следующим свойством: при всяком выборе $U \in \mathcal{E}$ $e_j \in U$ для почти всех $j \in \mathcal{N}$, где (здесь и ниже) $\mathcal{N} = \{1; 2; \dots\}$. Это свойство будем рассматривать как соблюдение \mathcal{E} -ограничения. При этом реализуется своеобразный “результат” в виде последовательности $(\mathbf{h}(e_i))_{i=1}^{\infty}$ обычных оценок. При оснащении \mathbf{H} топологией можно ожидать (или добиваться подбором топологии) сходимости этой последовательности, а возникающий при этом предел рассматривать как ЭП. С учетом соотношений между E_0 и \mathcal{E} имеем свойство: все точки $\mathbf{h}^1(E_0)$ суть ЭП. Последних, однако, может оказаться намного больше. Так, в уже рассмотренном примере при условии, что E_0 является пересечением всех множеств из \mathcal{E} , множество $\mathbf{h}^1(E_0)$ пусто, в то время как конкретный ЭП был указан в виде функции w . Правда, этот ЭП оказался нереализуемым в классе последовательностей. Однако многочисленные примеры секвенциально реализуемых ЭП, не являющихся точками $\mathbf{h}^1(E_0)$, приведены в [3–5; 8; 9]; см., в частности, [4, с. 217–219].

Возвращаясь к обсуждению несеквенциальных ЭП и их реализации в классе у/ф, отметим одну интересную возможность. Речь идет об использовании фильтров и у/ф ИП. Имеются в виду не только стандартные ИП с σ -алгебрами множеств, но и “нестандартные” ИП с алгебрами и полуалгебрами множеств. В последнем случае известны классы ИП, для которых удастся получить исчерпывающее описание всех у/ф (данного ИП); см. [9, с. 304, 305]. Здесь, конечно, следует иметь в виду возможность исполнения несущественных конструктивных преобразований: переход от рассмотрения у/ф к использованию конечно-аддитивных (к.-а.) $(0, 1)$ -мер, продолжение последних с полуалгебры на алгебру, порожденную полуалгеброй, и т.п.

Элементы теории расширений широко использовались в работах Н.Н. Красовского и его школы как при построении решений задач теории программного управления, так и в работах по теории дифференциальных игр; см., в частности, [14–16]. В определении фундаментального свойства стабильности множеств Н.Н. Красовского предусматривалось использова-

ние обобщенной реакции на обычное и, более того, постоянное управление игрока-противника. Наряду с правилом экстремального сдвига это сыграло важную роль в установлении основополагающей теоремы об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина, которая определила существование и структуру решения нелинейной дифференциальной игры общего вида. Эта теорема послужила основой многочисленных исследований в области решения игровых задач динамики.

1. Общие сведения

В дальнейшем используется стандартная теоретико-множественная символика, включая кванторы и пропозициональные связки, применяемые, впрочем, только для сокращения словесных высказываний; $\exists!$ заменяет фразу “существует и единственно”. Если x — объект, то через $\{x\}$ обозначаем одноточечное множество, содержащее x . Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Используемая ниже символика соответствует [1–4; 17; 18]. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X , а через $\text{Fin}(X)$ — семейство всех непустых конечных п/м X . Тогда для каждого множества A имеем в виде $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$ (в виде $\mathcal{P}'(\mathcal{P}'(A))$) множество всех непустых подсемейств семейства $\mathcal{P}(A)$ (семейства $\mathcal{P}'(A)$).

Через B^A обозначаем множество всех отображений из множества A в множество B ; см. [20, с. 77]. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то через $f^1(C)$ обозначаем образ множества C при действии f , а через $(f|C)$ — сужение f на множество C : $(f|C) \in B^C$, и при этом $(f|C)(x) \triangleq f(x) \quad \forall x \in C$.

Для всяких множеств X и Y , а также отображения $f \in Y^X$ имеем

$$\begin{aligned} & \left(f^1[\mathcal{X}] \triangleq \{f^1(A) : A \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y)) \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \right) \\ & \& \left(f^{-1}[\mathcal{Y}] \triangleq \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{Y}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \quad \forall \mathcal{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y)) \right). \end{aligned}$$

Если A и B — множества, то $B_{(*)}^A \triangleq \{f \in B^A \mid f^1(A) = B\}$ есть множество всех сюръекций A на B . Для каждого семейства \mathcal{X} и множества Y

$$\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y : X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y));$$

при $\mathcal{X} \neq \emptyset$ имеем $\mathcal{X}|_Y \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y))$. Если $n \in \mathcal{N}$, то $\overline{1, n} \triangleq \{i \in \mathcal{N} \mid i \leq n\}$. В целях исключения двусмысленности в традиционных обозначениях постулируем, что натуральные числа — элементы \mathcal{N} — не являются множествами; если S — множество, то полагаем, как обычно, что $S^n \triangleq S^{\overline{1, n}}$, получая множество всех кортежей

$$(s_i)_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \longrightarrow S.$$

Базы фильтров, фильтры, ультрафильтры. Если S — множество, то через $\beta[S]$ (через $\beta_0[S]$) обозначаем множество всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$ (всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(S))$) таких, что

$$\forall B_1 \in \mathcal{B} \forall B_2 \in \mathcal{B} \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Ясно, что $\beta_0[S] \subset \beta[S]$; семейства из множества $\beta_0[S]$ называют базами фильтров в S . Через $\mathfrak{F}[S]$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(S))$ таких, что

$$(A \cap B \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{F} \forall B \in \mathcal{F}) \& (\{H \in \mathcal{P}(S) \mid F \subset H\} \subset \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F}); \quad (1.1)$$

$\mathfrak{F}[S]$ — множество всех фильтров в S , а

$$\mathfrak{F}_u[S] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[S] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[S] ((\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \implies (\mathcal{U} = \mathcal{F}))\} \quad (1.2)$$

есть множество всех $у/ф$ в S . Среди $у/ф$ в S выделяем тривиальные, соответствующие точкам S : если $x \in S$, то через $(S - \text{ult})[x]$ обозначаем семейство всех множеств $F \in \mathcal{P}(S)$ таких, что $x \in F$; $(S - \text{ult})[x] \in \mathfrak{F}_u[S]$. Если $S -$ непустое множество, то $(S - \text{ult})[\cdot] \in \mathfrak{F}_u[S]^S$ определяем как правило

$$x \longmapsto (S - \text{ult})[x] : S \longrightarrow \mathfrak{F}_u[S] \quad (1.3)$$

(погружения S в пространство $у/ф$ множества S). Образ S при действии оператора (1.3) составляет “понятную” часть множества (1.2); тривиальные $у/ф$ суть $у/ф$, доступные для реализации. Определяющую роль в конструкциях расширений играют, однако, так называемые свободные $у/ф$ (см. [8]), т. е. $у/ф$ с пустым пересечением всех своих множеств. Если $X -$ множество, то

$$\mathfrak{F}_u^{00}[X] \triangleq \left\{ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[X] \mid \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset \right\}$$

есть множество всех свободных $у/ф$ в X (каждый $у/ф$ в X является либо свободным, либо тривиальным).

Если $X -$ множество и $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, то через $\mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}]$ (через $\mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{X}]$) обозначаем множество всех $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$ (всех $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_u[X]$) таких, что $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}$;

$$(\mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{X}] \subset \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}]) \ \& \ (\forall \mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}_0[X|\mathcal{X}] \exists \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{X}] : \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2). \quad (1.4)$$

В (1.4) имеем следствие известного положения: если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$, то $\mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{F}] \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_u[X])$, что позволяет, кроме того, определить пересечение всех $у/ф$ из $\mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{F}]$; при этом

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u^0[X|\mathcal{F}]} \mathcal{U}. \quad (1.5)$$

Если $S -$ множество и $\mathcal{B} \in \beta_0[S]$, то

$$(S - \mathbf{f})[\mathcal{B}] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(S) \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset H\} \in \mathfrak{F}_0[S|\mathcal{B}] \quad (1.6)$$

есть фильтр в S , порожденный базой \mathcal{B} . Ясно, что $\mathfrak{F}[S] \subset \beta_0[S]$, и в качестве \mathcal{B} можно использовать в (1.6) любой фильтр $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[S]$, получая при этом равенство $(S - \mathbf{f})[\mathcal{F}] = \mathcal{F}$.

В связи с (1.6) отметим также следующий известный [13, гл. I] факт: если X и $Y -$ множества, $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и $f \in Y^X$, то $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[Y]$, причем

$$((X - \mathbf{f})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_u[X]) \implies ((Y - \mathbf{f})[f^1[\mathcal{B}]] \in \mathfrak{F}_u[Y]).$$

В качестве \mathcal{B} можно использовать фильтры и $у/ф$ (в X). Если X и $Y -$ множества, а $f \in Y_{(*)}^X$, то

$$(f^1[\mathcal{F}] \in \mathfrak{F}[Y] \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]) \ \& \ (f^1[\mathcal{U}] \in \mathfrak{F}_u[Y] \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u[X]).$$

Элементы топологии; сходимостъ баз фильтров. Если $(X, \tau) -$ топологическое пространство (ТП), то:

1) для каждого множества $A \in \mathcal{P}(X)$ через $\text{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание A в (X, τ) и в виде $(A, \tau|_A)$ получаем ТП, являющееся подпространством (X, τ) ;

2) при $x \in X$ получаем $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \beta_0[X]$ (семейство всех открытых окрестностей x), а тогда

$$N_\tau(x) \triangleq (X - \mathbf{f})[N_\tau^0(x)] \in \mathfrak{F}[X]$$

есть фильтр окрестностей x , понимаемых в смысле [13, гл. I];

3) через $(\tau - \text{comp})[X]$ обозначаем семейство всех компактных [11, с. 196] в ТП (X, τ) п/м множества X .

Если (X, τ) и $(Y, \theta) -$ два ТП, то $C(X, \tau, Y, \theta) \triangleq \{f \in Y^X \mid f^{-1}[\theta] \subset \tau\}$ есть множество всех непрерывных операторов из множества Y^X . Для всяких ТП (X, τ) и точки $x \in X$ через

$(x - \text{bas})[\tau]$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(N_\tau(x))$ таких, что $\forall A \in N_\tau(x) \exists B \in \mathcal{G} : B \subset A$. Введено множество всех локальных баз (фундаментальных систем окрестностей) ТП (X, τ) в точке x . Компактное [11, гл. 3] хаусдорфово ТП именуется компактом.

Если (X, τ) — ТП, $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ и $x \in X$, то, как обычно [13, гл. I], полагаем по определению, что

$$(\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} x) \iff (N_\tau(x) \subset (X - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]). \quad (1.7)$$

Разумеется, посредством (1.7) определена, в частности, сходимость фильтров. Полезно иметь в виду, что для всяких множества X , ТП (Y, τ) , $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$, $f \in Y^X$ и $y \in Y$

$$(f^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} y) \iff (f^{-1}[N_\tau(y)] \subset \mathcal{F}). \quad (1.8)$$

Сходимость по Морю — Смитту сводится к сходимости (1.7), (1.8) при введении так называемого ассоциированного (с направленностью) фильтра; см. также [11, § 1.6]. По соображениям объема ограничиваемся далее (как правило) построениями с использованием сходимости (1.7), (1.8); нужные в дальнейшем аналоги конструкций ЭП на основе (1.7), (1.8), использующие сходимость по Морю — Смитту, см. в [1–4; 17; 18].

2. Элементы притяжения и множества притяжения

Фиксируем непустые множества E и \mathbf{H} , а также оператор $\mathbf{h} \in \mathbf{H}^E$; пусть $\mathbb{H} \triangleq \mathbf{h}^1(E)$. Всюду в дальнейшем через τ обозначаем фиксированную топологию множества \mathbf{H} ; итак, (\mathbf{H}, τ) — ТП. Если $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, то

$$(\mathbf{h} - \text{LIM})[\mathcal{F}|\tau] \triangleq \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} z\}. \quad (2.1)$$

В (2.1) используем (1.7) и (1.8). На этой основе конструируем МП: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] \triangleq \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}] : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} z\} = \{z \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_\mathbf{u}^0[E|\mathcal{E}] : \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} z\}; \quad (2.2)$$

в (2.2) учитываем (1.4), получая свойство достаточности у/ф в вопросах построения МП. Относительно семейства \mathcal{E} , используемого в (2.2), отметим, что с практической точки зрения здесь можно было бы ограничиться фильтрами в E [4, с. 231], но мы сейчас не будем этого делать. Итак, (2.2) рассматриваем как МП в задаче об асимптотической достижимости на значениях \mathbf{h} , а точки множества (2.2) — как ЭП. Разумеется, (2.2) может не быть п/м \mathbb{H} . Отметим очевидное свойство: если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\mathcal{E}_\mathbf{f} \triangleq \left\{ \bigcap_{U \in \mathcal{K}} U : \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{E}) \right\} \in \beta[E]. \quad (2.3)$$

В связи с применением (2.3) еще раз отметим построения в [4, с. 231]; см. также [9].

3. Пространство стоуновского представления

Всюду в дальнейшем фиксируем алгебру \mathcal{L} п/м E ; см. [19, гл. I]. Тогда (E, \mathcal{L}) — ИП с алгеброй множеств (в обозначениях [20, § 2.2] $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$).

Рассматриваем фильтры и у/ф (максимальные фильтры) алгебры \mathcal{L} , следуя [19, с. 26]. Обозначения соответствуют [20]. Так через $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ таких, что

$$(\emptyset \notin \mathcal{F}) \ \& \ (A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \ \& \ (\{L \in \mathcal{L} \mid F \subset L\} \subset \mathcal{F} \ \forall F \in \mathcal{F}) \quad (3.1)$$

(элементы $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ — суть фильтры \mathcal{L} и только они); кроме того,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ ((\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \implies (\mathcal{F} = \mathcal{U}))\}. \quad (3.2)$$

По аналогии с определениями разд. 2 полагаем $\forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

$$\left(\mathbb{F}^*(\mathcal{L}|\mathcal{X}) \triangleq \{ \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{X} \subset \mathcal{F} \} \right) \& \left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{X}) \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{X} \subset \mathcal{U} \} \right); \quad (3.3)$$

разумеется, определения в (3.3) содержательны в случае $\mathcal{X} \subset \mathcal{L}$. По аналогии с (1.4) имеем при $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$, что

$$\left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{X}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|\mathcal{X}) \right) \& \left(\forall \mathcal{F}_1 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|\mathcal{X}) \exists \mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{X}) : \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \right). \quad (3.4)$$

Свойство (3.4) вытекает из следующего (аналогичного (1.5)) положения: если $\mathcal{G} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{G}) \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$ и, более того,

$$\mathcal{G} = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{G})} \mathcal{F}. \quad (3.5)$$

Заметим, что $\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и (см. (3.5)) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Отметим также тот известный [19, с.26] факт, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{ \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid (L \in \mathcal{F}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{F}) \ \forall L \in \mathcal{L} \}. \quad (3.6)$$

Представление (3.6) играет важную роль в конструкциях стоуновского представления, рассматриваемых далее; см. также [20, гл. 1]. Введем в рассмотрение оператор

$$\Phi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \quad (3.7)$$

посредством следующего условия: если $L \in \mathcal{L}$, то

$$\Phi(L) \triangleq \{ \mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{F} \}. \quad (3.8)$$

При этом $\mathbf{L} \triangleq \Phi^1(\mathcal{L}) = \{ \Phi(L) : L \in \mathcal{L} \}$ есть алгебра п/м $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, а Φ (как отображение \mathcal{L} на \mathbf{L}) является биекцией \mathcal{L} на \mathbf{L} , для которой $\forall A \in \mathcal{L} \ \forall B \in \mathcal{L}$

$$(\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)) \& (\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)).$$

Кроме того, имеем $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, $\Phi(E) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и, наконец,

$$\Phi(E \setminus L) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi(L) \ \forall L \in \mathcal{L}.$$

С учетом вышеупомянутой биективности Φ введем биекцию $\Psi \in \mathcal{L}^{\mathbf{L}}$, обратную по отношению к Φ :

$$((\Psi \circ \Phi)(L) = L \ \forall L \in \mathcal{L}) \& ((\Phi \circ \Psi)(S) = S \ \forall S \in \mathbf{L}). \quad (3.9)$$

Ясно, что Ψ обладает (см. (3.9)) свойствами, подобными вышеупомянутым свойствам Φ :

- 1) $\Psi(\emptyset) = \Psi(\Phi(\emptyset)) = \emptyset$,
- 2) $\Psi(B_1 \cap B_2) = \Psi(\Phi(\Psi(B_1)) \cap \Phi(\Psi(B_2))) = \Psi(\Phi(\Psi(B_1) \cap \Psi(B_2))) = \Psi(B_1) \cap \Psi(B_2)$
 $\forall B_1 \in \mathbf{L} \ \forall B_2 \in \mathbf{L}$;
- 3) $\Psi(C_1 \cup C_2) = \Psi(\Phi(\Psi(C_1)) \cup \Phi(\Psi(C_2))) = \Psi(\Phi(\Psi(C_1) \cup \Psi(C_2))) = \Psi(C_1) \cup \Psi(C_2)$
 $\forall C_1 \in \mathbf{L} \ \forall C_2 \in \mathbf{L}$,
- 4) $\Psi(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus S) = \Psi(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi(\Psi(S))) = \Psi(\Phi(E \setminus \Psi(S))) = E \setminus \Psi(S) \ \forall S \in \mathbf{L}$.

В связи с этими свойствами полезно напомнить весьма общие конструкции на основе расщепляющих гомоморфизмов [22].

Отметим, что \mathbf{L} — база топологии множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$; данную топологию, порожденную базой \mathbf{L} , условимся обозначать через τ_Φ :

$$\tau_\Phi \triangleq \{ G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{G} \in G \exists S \in \mathbf{L} : (\mathcal{G} \in S) \& (S \subset G) \};$$

разумеется, $\mathbf{L} \subset \tau_\Phi$. Рассмотрим некоторые свойства ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \tau_\Phi). \quad (3.10)$$

Эти свойства извлекаются из построений [19, с. 26] (можно также отметить аналогии с гельфандовской компактификацией), но в целях более систематизированного изложения мы приведем соответствующие построения и (прямые) доказательства, оформляя их, однако, в виде замечаний.

З а м е ч а н и е 3.1. Покажем, что (3.10) — хаусдорфово ТП. Пусть $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $\mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$. Выберем произвольно $A \in \mathcal{U}_1 \setminus \mathcal{U}_2$. Тогда $A \in \mathcal{L}$ и согласно (3.6) $E \setminus A \in \mathcal{U}_2$. В силу (3.8) получаем, что

$$(\mathcal{U}_1 \in \Phi(A)) \& (\mathcal{U}_2 \in \Phi(E \setminus A)); \quad (3.11)$$

из аксиом фильтра следует, однако, что $\Phi(A) \cap \Phi(E \setminus A) = \emptyset$ (действительно, если $\mathcal{H} \in \Phi(A) \cap \Phi(E \setminus A)$, то $\mathcal{H} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $A \in \mathcal{H}$ и $E \setminus A \in \mathcal{H}$, а тогда $\emptyset = A \cap (E \setminus A) \in \mathcal{H}$, что невозможно). Из (3.11) следует, что

$$(\Phi(A) \in N_{\tau_\Phi}^0(\mathcal{U}_1)) \& (\Phi(E \setminus A) \in N_{\tau_\Phi}^0(\mathcal{U}_2)). \quad (3.12)$$

Поскольку выбор \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 был произвольным, установлено, что $\forall \mathcal{H}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \forall \mathcal{H}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{H}_1 \setminus \mathcal{H}_2 \neq \emptyset) \implies (\exists \mathbf{H}_1 \in N_{\tau_\Phi}(\mathcal{H}_1) \exists \mathbf{H}_2 \in N_{\tau_\Phi}(\mathcal{H}_2) : \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2 = \emptyset). \quad (3.13)$$

Если же $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \{\mathcal{F}_1\}$, то либо $\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$, либо $\mathcal{F}_2 \setminus \mathcal{F}_1 \neq \emptyset$, а тогда (см. (3.13)) для некоторых $S_1 \in N_{\tau_\Phi}(\mathcal{F}_1)$ и $S_2 \in N_{\tau_\Phi}(\mathcal{F}_2)$ имеет место равенство $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. \square

З а м е ч а н и е 3.2. Покажем, что ТП (3.10) компактно, используя то, что семейство \mathbf{L} есть база ТП (3.10). Пусть $\kappa \in \mathcal{P}'(\mathbf{L})$ — покрытие пространства (3.10), т. е.

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcup_{G \in \kappa} G. \quad (3.14)$$

Покажем, что при условии (3.14) непременно

$$\exists m \in \mathcal{N} \exists (L_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \kappa^m : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcup_{i=1}^m L_i. \quad (3.15)$$

В самом деле, допустим противное (т. е. полагаем, что (3.15) нарушено):

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \bigcup_{i=1}^m L_i \quad \forall m \in \mathcal{N} \forall (L_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \kappa^m. \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует, что при $m \in \mathcal{N}$ и $(L_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \kappa^m$

$$\bigcap_{i=1}^m (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus L_i) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m L_i \right) \neq \emptyset. \quad (3.17)$$

Напомним, что \mathbf{L} — алгебра п/м $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$; в частности,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus L \in \mathbf{L} \quad \forall L \in \kappa.$$

Как следствие при $\tilde{L} \in \kappa$ имеем $\Psi(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \tilde{L}) \in \mathcal{L}$ и, с другой стороны,

$$\Psi(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \tilde{L}) = E \setminus \Psi(\tilde{L}),$$

так как $\kappa \subset \mathbf{L}$; см. свойство 4). Коль скоро $\kappa \neq \emptyset$, то

$$\mathcal{Y} \triangleq \{\Psi(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus S) : S \in \kappa\} = \{E \setminus \Psi(S) : S \in \kappa\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \quad (3.18)$$

Введем в рассмотрение следующее семейство:

$$\mathcal{X} \triangleq \Psi^1(\kappa) = \{\Psi(S) : S \in \kappa\}. \quad (3.19)$$

В силу (3.10) $\Phi(\Psi(S)) = (\Phi \circ \Psi)(S) = S$ при $S \in \kappa$. Тогда, в частности (см. (3.19)), $\Phi(X) \in \kappa \forall X \in \mathcal{X}$. Стало быть,

$$\bigcup_{X \in \mathcal{X}} \Phi(X) \subset \bigcup_{G \in \kappa} G. \quad (3.20)$$

С другой стороны, при $S \in \kappa$ имеем равенство $S = \Phi(\Psi(S))$, где $\Psi(S) \in \mathcal{X}$, и как следствие S содержится в объединении всех множеств $\Phi(X)$, $X \in \mathcal{X}$. Поскольку выбор S был произвольным, имеем следующее вложение:

$$\bigcup_{G \in \kappa} G \subset \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \Phi(X).$$

С учетом (3.20) получаем равенство

$$\bigcup_{G \in \kappa} G = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \Phi(X). \quad (3.21)$$

Из (3.14), (3.21) вытекает следующее очевидное теперь равенство:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \Phi(X). \quad (3.22)$$

Возвращаясь к (3.17), отметим с учетом (3.18) и свойств Ψ , что

$$\bigcap_{i=1}^n Y_i \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad \forall (Y_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathcal{Y}^n. \quad (3.23)$$

В самом деле, зафиксируем $n \in \mathcal{N}$ и кортеж $(Y_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathcal{Y}^n$. С учетом (3.18) подберем кортеж $(L_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \kappa^n$, для которого

$$Y_j = \Psi(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus L_j) \quad \forall j \in \overline{1, n}.$$

Тогда в силу свойства 2) оператора Ψ имеем, что

$$\bigcap_{i=1}^n Y_i = \Psi\left(\bigcap_{i=1}^n (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus L_i)\right) = \Psi\left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n L_i\right)\right). \quad (3.24)$$

В силу (3.9) и (3.24) получаем равенство

$$\Phi\left(\bigcap_{i=1}^n Y_i\right) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n L_i\right) \quad (3.25)$$

(учитываем, что $Y_1 \in \mathcal{L}, \dots, Y_n \in \mathcal{L}$ и как следствие пересечение всех множеств Y_i , $i \in \overline{1, n}$, есть множество из \mathcal{L}). Из (3.17) и (3.25) вытекает положение

$$\Phi\left(\bigcap_{i=1}^n Y_i\right) \neq \emptyset.$$

Но тогда по свойствам Φ имеем очевидное свойство

$$\bigcap_{i=1}^n Y_i \neq \emptyset$$

(в самом деле, $\Phi(\emptyset) = \emptyset$). Итак, (3.23) установлено. Как следствие, имеем (см. (3.23)), что

$$\bigcap_{Y \in \mathcal{K}} Y \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{Y}). \quad (3.26)$$

Поскольку $\mathcal{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то в силу (2.3) и (3.26)

$$\mathcal{Y}_f = \left\{ \bigcap_{U \in \mathcal{K}} U : \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{Y}) \right\} \in \beta_0[E]. \quad (3.27)$$

Кроме того, $\mathcal{Y}_f \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. Разумеется, из (3.27) вытекает, что (см. (1.6))

$$\mathfrak{Y} \triangleq (E - \mathbf{fi})[\mathcal{Y}_f] \in \mathfrak{F}[E]. \quad (3.28)$$

Но в этом случае $\mathcal{Z} \triangleq \mathfrak{Y} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. В самом деле,

$$\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_f \subset \mathcal{Z} \quad (3.29)$$

в силу (1.6) и вышеупомянутого свойства $\mathcal{Y}_f \subset \mathcal{L}$. Поэтому (см. (3.18)) $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. В силу (3.28) и аксиом фильтра имеем, что $\emptyset \notin \mathcal{Z}$. Из (1.1) и (3.28) имеем по аксиомам алгебры множеств, что

$$A \cap B \in \mathcal{Z} \quad \forall A \in \mathcal{Z} \quad \forall B \in \mathcal{Z}.$$

Если же $F \in \mathcal{Z}$, а $L \in \mathcal{L}$ обладает свойством $F \subset L$, то в силу (3.28) $L \in \mathfrak{Y}$ (см. (1.1)) и как следствие $L \in \mathcal{Z}$. Итак (см. (3.1)), $\mathcal{Z} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, что и требовалось доказать. Выберем произвольно $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{Z})$ (см. (3.5)). Тогда (см. (3.29))

$$\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}_f \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{W}. \quad (3.30)$$

Поскольку $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (см. (3.3)), то в силу (3.22) можно указать $\Lambda \in \mathcal{X}$ такое, что $\mathcal{W} \in \Phi(\Lambda)$. Это означает (см. (3.8)), что $\Lambda \in \mathcal{W}$. Но в силу (3.19) $\Lambda = \Psi(P)$ для некоторого множества $P \in \kappa$, а тогда согласно (3.18)

$$E \setminus \Lambda = E \setminus \Psi(P) \in \mathcal{Y}$$

и (см. (3.30)) $E \setminus \Lambda \in \mathcal{W}$; это означает (см. (3.1)), что

$$\emptyset = \Lambda \cap (E \setminus \Lambda) \in \mathcal{W},$$

хотя $\emptyset \notin \mathcal{W}$. Получено противоречие, показывающее, что (3.16) невозможно и, следовательно, справедливо (3.15). Поскольку выбор κ был произвольным, установлено (см. (3.14)), что $\forall \xi \in \mathcal{P}'(\mathbf{L})$

$$\left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcup_{G \in \xi} G \right) \implies \left(\exists m \in \mathcal{N} \exists (G_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \xi^m : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcup_{i=1}^m G_i \right). \quad (3.31)$$

Из (3.31) легко следует свойство компактности ТП (3.10). Для полноты изложения приведем все же соответствующее доказательство. Пусть $\mathbf{G} \in \mathcal{P}'(\tau_\Phi)$ — покрытие $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcup_{G \in \mathbf{G}} G. \quad (3.32)$$

Поскольку \mathbf{L} — база ТП (3.10), то

$$\forall G \in \mathbf{G} \forall \mathcal{G} \in G \exists \mathbb{S} \in \mathbf{L} : (\mathcal{G} \in \mathbb{S}) \ \& \ (\mathbb{S} \subset G).$$

В силу (3.32) и непустоты множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ имеем, что $\mathbf{G} \setminus \{\emptyset\} \neq \emptyset$. Тогда

$$\eta \triangleq \{\mathbb{L} \in \mathbf{L} \mid \exists G \in \mathbf{G} : \mathbb{L} \subset G\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{L}). \quad (3.33)$$

Объединение всех множеств из η содержится в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Выберем произвольно $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Используя (3.32), подберем $\mathbb{G} \in \mathbf{G}$ так, что $\mathcal{U} \in \mathbb{G}$, после чего подберем множество $M \in \mathbf{L}$, для которого

$$(\mathcal{U} \in M) \ \& \ (M \subset \mathbb{G}).$$

Из (3.33) вытекает, что $M \in \eta$. Как следствие $\mathcal{U} \in \bigcup_{\mathbb{L} \in \eta} \mathbb{L}$. Итак,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \bigcup_{\mathbb{L} \in \eta} \mathbb{L}. \quad (3.34)$$

Стало быть, $\eta \in \mathcal{P}'(\mathbf{L})$ есть покрытие $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ (в (3.34) имеет место равенство), а тогда согласно (3.31) имеем при некотором выборе $r \in \mathcal{N}$ и $(T_i)_{i \in \overline{1, r}} \in \eta^r$ равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcup_{i=1}^r T_i. \quad (3.35)$$

Используя (3.33), подберем кортеж $(G_i^{\natural})_{i \in \overline{1, r}} \in \mathbf{G}^r$ такой, что $T_j \subset G_j^{\natural} \ \forall j \in \overline{1, r}$. С учетом (3.35) имеем равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcup_{i=1}^r G_i^{\natural}.$$

Поскольку выбор семейства \mathbf{G} со свойством (3.32) был произвольным, установлено, что $\forall \alpha \in \mathcal{P}'(\tau_{\Phi})$

$$\left(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcup_{G \in \alpha} G \right) \implies \left(\exists m \in \mathcal{N} \exists (G_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \alpha^m : \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcup_{i=1}^m G_i \right).$$

Требуемое свойство компактности установлено. С учетом замечания 3.1 получаем, что ТП (3.10) — компакт.

З а м е ч а н и е 3.3. Покажем, что \mathbf{L} — семейство всех п/м $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, открыто-замкнутых в ТП (3.10).

Пусть $\mathbb{S} \in \mathbf{L}$; подберем $S \in \mathcal{L}$ так, что при этом $\mathbb{S} = \Phi(S)$. Ясно, что $\mathbb{S} \in \tau_{\Phi}$. Кроме того, для $E \setminus S \in \mathcal{L}$ имеем

$$\Phi(E \setminus S) \in \mathbf{L}. \quad (3.36)$$

Более того, имеем цепочку равенств

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{S} = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi(S) = \Phi(E \setminus S),$$

из которой в силу (3.36) вытекает, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{S} \in \mathbf{L}$ и, в частности,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{S} \in \tau_{\Phi}.$$

Последнее означает, что \mathbb{S} — замкнутое в ТП (3.10) множество:

$$\mathbb{S} = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{S}).$$

Мы установили, что \mathbb{S} — открыто-замкнутое в ТП (3.10) множество. Поскольку \mathbb{S} было выбрано произвольно, установлено, что семейство \mathbf{L} — база ТП (3.10) — состоит только из множеств, открыто-замкнутых в ТП (3.10).

Пусть $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$ есть множество, открыто-замкнутое в ТП (3.10):

$$(\Omega \in \tau_\Phi) \ \& \ (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Omega \in \tau_\Phi). \quad (3.37)$$

Из первого (в (3.37)) включения имеем по свойствам базы ТП, что

$$\Omega = \bigcup_{W \in \mathfrak{W}} W \quad (3.38)$$

для некоторого семейства $\mathfrak{W} \in \mathcal{P}(\mathbf{L})$. Если $\mathfrak{W} = \emptyset$, то (см. (3.38)) $\Omega = \emptyset = \Phi(\emptyset) \in \mathbf{L}$.

Пусть $\mathfrak{W} \neq \emptyset$, т. е. $\mathfrak{W} \in \mathcal{P}'(\mathbf{L})$. Поскольку (см. (3.37)) множество Ω замкнуто в ТП (3.10), то (см. замечание 3.2)

$$\Omega \in (\tau_\Phi - \text{comp})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \quad (3.39)$$

По свойствам ТП (3.10) имеем $\mathfrak{W} \in \mathcal{P}'(\tau_\Phi)$. Но в этом случае из (3.38), (3.39) имеем для некоторого семейства $\mathfrak{K} \in \text{Fin}(\mathfrak{W})$ следующую цепочку вложений:

$$\Omega \subset \bigcup_{W \in \mathfrak{K}} W \subset \bigcup_{W \in \mathfrak{W}} W,$$

означающую справедливость равенства

$$\Omega = \bigcup_{W \in \mathfrak{K}} W. \quad (3.40)$$

При этом $\mathfrak{K} \in \text{Fin}(\mathbf{L})$ и, поскольку \mathbf{L} есть алгебра п/м множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, из (3.40) вытекает, что $\Omega \in \mathbf{L}$. Итак, последнее включение имеет место во всех возможных случаях. Коль скоро выбор Ω был произвольным, установлено, что каждое п/м $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, открыто-замкнутое в ТП (3.10), непременно содержится в \mathbf{L} . Итак, мы установили, что \mathbf{L} есть семейство всех открыто-замкнутых (в ТП (3.10)) п/м $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$:

$$\mathbf{L} = \{\mathbb{U} \in \tau_\Phi \mid \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{U} \in \tau_\Phi\}. \quad (3.41)$$

Свойство (3.41) дополняет замечание 3.2. Следовательно (см. [11, с. 529]), (3.10) — нульмерный компакт (здесь мы снова учитываем, что \mathbf{L} — база ТП (3.10)).

Сейчас коснемся вопроса о структуре тривиальных у/ф ИП (E, \mathcal{L}) . Легко видеть, что

$$((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x] \stackrel{\Delta}{=} (E - \text{ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \quad (3.42)$$

Учитывая (3.42), условимся о следующем естественном обозначении: $((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]$ есть по определению оператор

$$x \longmapsto ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x] : E \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \quad (3.43)$$

в (3.43) имеем аналог оператора (1.3). При этом

$$((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A) = \{((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x] : x \in A\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \ \forall A \in \mathcal{P}(E); \quad (3.44)$$

в (3.44) имеем обычную операцию взятия образа п/м E .

З а м е ч а н и е 3.4. С учетом (3.42) легко проверяется свойство: если \mathcal{L} различает точки множества E , т. е.

$$\forall x \in E \ \forall y \in E \setminus \{x\} \ \exists L \in \mathcal{L} : (x \in L) \ \& \ (y \notin L), \quad (3.45)$$

то оператор (3.43) — биекция E на $((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(E)$.

Предложение 1. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то справедливо равенство

$$((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^{-1}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})) = \bigcap_{L \in \mathcal{E}} L. \quad (3.46)$$

Доказательство легко следует из определений. Если \mathcal{E} в (3.46) интерпретировать как ограничения асимптотического характера, то (3.46) подобно приводимому в [4, с. 224] свойству и характеризует соответствующее множество точных решений, т. е. решений из множества E_0 разд. 1. Разумеется (см. (3.46)),

$$((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1 \left(\bigcap_{L \in \mathcal{E}} L \right) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}).$$

Легко видеть, что $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \beta_0[E]$, а тогда для \mathbf{h} (0.3) имеем

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \in \beta_0[\mathbf{H}] \quad \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \quad (3.47)$$

Следуя соглашениям разд. 3 в части сходимости баз фильтров, отметим, что (см. (3.4)) $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$(\tau - \text{AS})[\mathcal{E}] \triangleq \{y \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} y\} = \{y \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) : \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} y\}. \quad (3.48)$$

В связи с (3.48) отметим аналогию с (2.2) ((3.48) также можно рассматривать как некоторое МП): речь идет о достаточности y/Φ в вопросах реализации ЭП.

Возвращаясь к тривиальным y/Φ , отметим следующее свойство плотности, вытекающее фактически из определения ТП (3.10):

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(E), \tau_\Phi); \quad (3.49)$$

см. также [19, с. 26]. Грубо говоря, само множество E всюду плотно в ТП (3.10). Далее, в силу (3.3) и (3.8)

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \bigcap_{L \in \mathcal{E}} \Phi(L) \in (\tau_\Phi - \text{comp})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}); \quad (3.50)$$

в (3.50) учтены замечания 3.2 и 3.3.

4. Свойства ультрафильтров измеримого пространства

Рассмотрим некоторые свойства множеств (3.50) для случая, когда семейство \mathcal{E} (в (3.50)) является фильтром ИП (E, \mathcal{L}) . Данный случай представляет самостоятельный интерес и вместе с тем достаточен по существу в конструкциях асимптотического анализа; отметим аналогию с построениями [4, с. 231].

Отметим прежде всего простое свойство: если $n \in \mathcal{N}$ и

$$(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \longrightarrow \mathbb{F}^*(\mathcal{L}), \quad (4.1)$$

то справедливо утверждение

$$\bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i = \left\{ \bigcup_{i=1}^n F_i : (F_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i \right\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}). \quad (4.2)$$

Данное и последующие положения, связанные с (4.1) и (4.2), легко устанавливаются рассуждениями, подобными [4, с. 232]; по этой причине опускаем, как правило, соответствующие обоснования.

Возвращаясь к (3.50), (4.1) и (4.2), отметим, что для всяких $n \in \mathcal{N}$ и кортежа $(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1, n}}$ (4.1)

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i) = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \mathcal{F}_i). \quad (4.3)$$

З а м е ч а н и е 4.1. Если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, то $\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и $(\tau - \mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{F}]$ определяется посредством (3.48). В частности, если $n \in \mathcal{N}$ и $(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1, n}}$ — кортеж (4.1), то в силу (4.2) определено множество $(\tau - \mathbb{A}\mathbb{S})[\bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i] \in \mathcal{P}(\mathbf{H})$. \square

Предложение 2. Если $n \in \mathcal{N}$ и $(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1, n}}$ — кортеж (4.1), то

$$(\tau - \mathbb{A}\mathbb{S})\left[\bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i\right] = \bigcup_{i=1}^n (\tau - \mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{F}_i].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (4.3)

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \mathcal{F}_j) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i) \quad \forall j \in \overline{1, n}.$$

Поэтому имеем в силу (3.48) следующее очевидное вложение:

$$\bigcup_{i=1}^n (\tau - \mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{F}_i] \subset (\tau - \mathbb{A}\mathbb{S})\left[\bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i\right]. \quad (4.4)$$

Пусть $z \in (\tau - \mathbb{A}\mathbb{S})[\bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i]$. Тогда $z \in \mathbf{H}$ и для некоторого $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i)$

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} z. \quad (4.5)$$

В силу (4.3) $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} | \mathcal{F}_k)$ при некотором $k \in \overline{1, n}$, а тогда (см. (3.48), (4.5)) $z \in (\tau - \mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{F}_k]$. Тем более

$$z \in \bigcup_{i=1}^n (\tau - \mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{F}_i].$$

Вложение, противоположное (4.4), установлено. \square

Предложение 3. Если $n \in \mathcal{N}$, $(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1, n}}$ — кортеж (4.1) и $\mathcal{F} \triangleq \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i$, то

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcup_{i=1}^n \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_i} F \right). \quad (4.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно установить (4.6) для $n = 2$ (общий случай равенства (4.6) проверяется по индукции). С учетом (4.2) имеем, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ есть семейство всех множеств $F_1 \cup F_2$, $F_1 \in \mathcal{F}_1$, $F_2 \in \mathcal{F}_2$. Как следствие

$$\left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_1} F \right) \cup \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_2} F \right) \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F. \quad (4.7)$$

Пусть $\mathbb{F} \in \mathcal{F}_2$. Тогда при всяком выборе $L \in \mathcal{F}_1$ множество в правой части (4.7) есть п/м $L \cup \mathbb{F}$. В итоге

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subset \bigcap_{L \in \mathcal{F}_1} (L \cup \mathbb{F}) = \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_1} L \right) \cup \mathbb{F}.$$

Коль скоро \mathbb{F} выбиралось произвольно, имеем вложение

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}_2} \left(\left(\bigcap_{L \in \mathcal{F}_1} L \right) \cup F \right) = \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_1} L \right) \cup \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_2} F \right).$$

С учетом (4.7) получаем требуемое равенство

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_1} F \right) \cup \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_2} F \right).$$

□

Отметим очевидное свойство: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то (см. (3.2), (3.3))

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}|\mathcal{U}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{U}) = \{\mathcal{U}\}. \quad (4.8)$$

С учетом (3.48) и (4.8) получаем очевидные равенства

$$(\tau - \mathbb{A}\mathbb{S})[\mathcal{U}] = \{y \in \mathbf{H} \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} y\} \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

В связи с соотношениями, связывающими МП (2.2) и (3.48), нам потребуется специальное рассмотрение вопросов, касающихся продолжения и сужения у/ф. В свою очередь это рассмотрение имеет смысл связать с вопросами продолжения и сужения конечно-аддитивных (к.-а.) $(0, 1)$ -мер. Последние являются индикаторами у/ф соответствующего ИП; данная конструкция подробно рассматривалась в [9, § 7.6]. Сейчас ограничимся краткими пояснениями.

Если \mathcal{S} — полуалгебра (п/а) п/м E , то через $\mathbb{T}(\mathcal{S})$ обозначаем множество всех в/з неотрицательных нормированных к.-а. $(0, 1)$ -мер на \mathcal{S} . Тогда при всяком выборе двух п/а \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 п/м E со свойством $\mathcal{S}_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$, а также к.-а. меры $\mu \in \mathbb{T}(\mathcal{S}_1)$

$$(\mu|\mathcal{S}_2) = (\mu(S))_{S \in \mathcal{S}_2} \in \mathbb{T}(\mathcal{S}_2). \quad (4.9)$$

Мы используем для каждой п/а \mathcal{S} п/м E обозначения $\mathbb{F}^*(\mathcal{S})$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{S})$ соответственно для множества всех фильтров и множества всех у/ф упомянутой п/а \mathcal{S} ; см. в этой связи (3.1) и (3.2) при условии замены \mathcal{L} на \mathcal{S} .

Если дана п/а \mathcal{S} п/м E и $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{S})$, то $\chi_{\mathcal{U}}[\mathcal{S}] \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ определяется условиями $\chi_{\mathcal{U}}[\mathcal{S}](U) \stackrel{\Delta}{=} 1$ при $U \in \mathcal{U}$, $\chi_{\mathcal{U}}[\mathcal{S}](S) \stackrel{\Delta}{=} 0$ при $S \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{U}$. Тогда [9, с. 303]

$$\mathbb{T}(\mathcal{S}) = \{\chi_{\mathcal{U}}[\mathcal{S}] : \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{S})\}. \quad (4.10)$$

Итак, к.-а. $(0, 1)$ -меры исчерпываются индикаторами у/ф ИП. При этом для любых двух п/а \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 п/м E , для которых $\mathcal{S}_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$, при всяком выборе у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{S}_1)$

$$(\chi_{\mathcal{U}}[\mathcal{S}_1] | \mathcal{S}_2) = \chi_{\mathcal{U} \cap \mathcal{S}_2}[\mathcal{S}_2];$$

с учетом (4.9) и (4.10) получаем теперь, что

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{S}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{S}_2). \quad (4.11)$$

В качестве \mathcal{S}_1 можно, в частности, использовать σ -алгебру всех п/м E , т. е. семейство $\mathcal{P}(E)$, а в качестве \mathcal{S}_2 — алгебру \mathcal{L} . В самом деле, для п/а $\mathcal{P}(E)$ п/м E имеем из определений равенство $\mathfrak{F}[E] = \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(E))$, из которого в свою очередь вытекает, что $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{P}(E))$. Итак,

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \quad (4.12)$$

В этой связи см. (1.2), (3.3). Отметим также следующее свойство: если даны две п/а \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 п/м E и при этом $\mathcal{S}_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$, то

$$\forall \mu \in \mathbb{T}(\mathcal{S}_2) \exists \nu \in \mathbb{T}(\mathcal{S}_1) : \mu = (\nu|\mathcal{S}_2).$$

Данное свойство следует из одного результата Тарского (см. [23, с. 292]). С учетом (4.10), (4.11) получаем для упомянутых п/а $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$, что $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{S}_2) \exists \mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{S}_1) : \mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \mathcal{S}_2$; см. также [20, с. 43]. С учетом (4.12) получаем, в частности, равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{L} : \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\}. \quad (4.13)$$

Предложение 4. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] \subset (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]$.

Доказательство. Пусть $z \in (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]$. С учетом (3.48) подберем для точки $z \in \mathbf{H}$ такой у/ф $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$, что

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{V}] \xrightarrow{\tau} z. \quad (4.14)$$

Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$. С учетом (4.13) подберем у/ф $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ так, что $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap \mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{E} \subset \mathcal{W}$. Поэтому $\mathcal{W} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$, причем $\mathbf{h}^1[\mathcal{V}] \subset \mathbf{h}^1[\mathcal{W}]$. С учетом (4.14) получаем, что $\mathbf{h}^1[\mathcal{W}] \xrightarrow{\tau} z$. С учетом (2.2) получаем включение $z \in (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]$. \square

Укажем несколько вспомогательных конструкций. Прежде всего, отметим совсем простое, но полезное свойство: если $\mathcal{B} \in \beta_0[\mathbf{H}]$ и $z \in \mathbf{H}$, то $(\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} z) \iff (N_{\tau}^0(z) \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}])$. В качестве \mathcal{B} можно, конечно, использовать образ базы фильтра. Для этого случая уместно сделать следующее очевидное замечание (см. также (1.8)): если $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$ и $z \in \mathbf{H}$, то

$$(\mathbf{h}^1[\mathcal{B}] \xrightarrow{\tau} z) \iff (\mathbf{h}^{-1}[N_{\tau}^0(z)] \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]). \quad (4.15)$$

В (4.15) можно, конечно, в качестве \mathcal{B} использовать фильтр и, в частности, у/ф ИП (E, \mathcal{L}) . В этой связи отметим, что $\mathcal{F} = (E - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] \cap \mathcal{L} \quad \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Кроме того, получаем (см. (4.15)), что $\forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbf{H}] \quad \forall z \in \mathbf{H} \quad \forall \mathcal{S} \in (z - \text{bas})[\tau]$

$$(\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} z) \iff (\mathcal{S} \subset (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]).$$

С учетом этого имеем следующее свойство: если $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$ и $z \in \mathbf{H}$, то

$$(\mathbf{h}^1[\mathcal{B}] \xrightarrow{\tau} z) \iff (\exists \mathcal{S} \in (z - \text{bas})[\tau] : \mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]).$$

В качестве \mathcal{B} можно использовать фильтр и, в частности, у/ф ИП (E, \mathcal{L}) . Используя (4.12), (4.13), получаем, что $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \quad \forall z \in \mathbf{H}$

$$(\mathbf{h}^1[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}] \xrightarrow{\tau} z) \iff (\exists \mathcal{S} \in (z - \text{bas})[\tau] : \mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}]). \quad (4.16)$$

С учетом (4.16) и предложения 4 устанавливается следующее

Предложение 5. Если семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ таково, что $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}] \quad \forall z \in \mathbf{H}$

$$(\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} z) \implies (\exists \mathcal{S} \in (z - \text{bas})[\tau] : \mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}]),$$

то справедливо равенство $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]$.

Доказательство сводится фактически к непосредственной комбинации (2.2), (4.13) и (4.16).

Следствие 1. Истинна импликация

$$(\forall z \in \mathbf{H} \exists \mathcal{S} \in (z - \text{bas})[\tau] : \mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{L}) \implies ((\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})).$$

Доказательство. Пусть истинна посылка доказываемой импликации, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и $z \in (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}]$. Тогда в силу (2.2) имеем, что $z \in \mathbf{H}$ и при этом для некоторого $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} z. \quad (4.17)$$

С учетом (1.8) и (4.17) получаем, что справедливо вложение

$$\mathbf{h}^{-1}[N_\tau(z)] \subset \mathcal{U}.$$

Подберем локальную базу $\mathcal{S} \in (z - \text{bas})[\tau]$, для которой $\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{L}$. При этом $\mathcal{S} \subset N_\tau(z)$, а тогда $\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset \mathbf{h}^{-1}[N_\tau(z)] \subset \mathcal{U}$. Мы получили вложение $\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{L}$, где (в силу (4.12)) $\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тем более $\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}]$. Итак,

$$\mathcal{S} \in (z - \text{bas})[\tau] : \mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset (E - \mathbf{fi})[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}].$$

С учетом (4.16) получаем сходимость $\mathbf{h}^1[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}] \xrightarrow{\tau} z$. Напомним, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$. Кроме того, $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$. В итоге $\mathcal{E} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{L}$. Это означает, что $\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$. Итак,

$$\exists \mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) : \mathbf{h}^1[\mathcal{V}] \xrightarrow{\tau} z.$$

С учетом (3.48) имеем включение $z \in (\tau - \mathbb{AS})[\mathcal{E}]$. Поскольку выбор z был произвольным, установлено вложение

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] \subset (\tau - \mathbb{AS})[\mathcal{E}].$$

С учетом предложения 5.3 получаем равенство $(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau - \mathbb{AS})[\mathcal{E}]$. Поскольку и выбор семейства \mathcal{E} был произвольным, установлена требуемая импликация. \square

5. Стоуновское пространство, согласованное с топологией пространства оценок

Всюду в дальнейшем полагаем выполненными следующие два условия:

Условие 5.1. $\forall z \in \mathbf{H} \exists \mathcal{S} \in (z - \text{bas})[\tau] : \mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{L}$.

Условие 5.2. Пространство (\mathbf{H}, τ) — компакт, т. е. компактное хаусдорфово ТП, и, кроме того, $\text{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau) = \mathbf{H}$.

Тогда в смысле [4, § 7] имеем компактифицируемый случай основной задачи. Условие 5.1 представляется естественным для ИП с алгеброй множеств ослаблением требования измеримости \mathbf{h} . Использование таких ИП целесообразно в связи с возможностью более полного описания $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ вплоть до исчерпывающего представления в некоторых случаях [9, с. 304, 305]. С учетом следствия 1

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\tau - \mathbb{AS})[\mathcal{E}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}).$$

С другой стороны, согласно [4, § 7] корректно определяется оператор

$$\mathfrak{H}[\tau] : \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \longrightarrow \mathbf{H}, \tag{5.1}$$

для которого

$$\{\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})\} = \{z \in \mathbf{H} \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} z\} \quad \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{5.2}$$

З а м е ч а н и е 5.1. В [1; 3; 4] не предполагалось, что пространство оценок (\mathbf{H}, τ) является компактом, но рассматривались (при исследовании компактифицируемого случая задачи об асимптотической достижимости; см., например, [4, § 7]) хаусдорфовы топологии \mathbf{H} , в каждой из которых $\mathbf{h}^1(E)$ всюду плотно в компактном подпространстве (\mathbf{H}, τ) ; см., в частности, [4, с. 220, 236]). По этой причине (\mathbf{H}, τ) в [1; 3; 4] можно просто заменить упомянутым подпространством, для которого условие 5.2 уже будет выполнено.

Возвращаясь к рассматриваемому случаю (см. условия 5.1, 5.2), отметим, что [4, с. 237]

$$\mathfrak{H}[\tau] \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], \mathbf{H}, \tau) \cap \mathbf{H}_{(*)}^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}, \tag{5.3}$$

где $\tau_{\mathfrak{h}}[E]$ — топология, определяемая в [4, с. 221] и превращающая $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ в нульмерный компакт. В целях полноты изложения напомним определение (подобное в логическом отношении определению $\tau_{\mathfrak{F}}$), полагая, что отображение

$$\varphi: \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E])$$

определяется правилом $\varphi(A) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid A \in \mathcal{F}\} \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$. Тогда $\varphi^1(\mathcal{P}(E))$ есть база топологии $\tau_{\mathfrak{h}}[E]$ работы [4], причем $(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathfrak{h}}[E])$ есть непустой нульмерный компакт, в котором $\varphi^1(\mathcal{P}(E))$ является семейством всех открыто-замкнутых п/м $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$; подробнее о свойствах данного компакта см. в [1; 3; 4].

Отметим здесь же, что в силу отделимости ТП (\mathbf{H}, τ) имеем $\forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbf{H}] \quad \forall z_1 \in \mathbf{H} \quad \forall z_2 \in \mathbf{H}$

$$((\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} z_1) \& (\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} z_2)) \implies (z_1 = z_2). \quad (5.4)$$

Предложение 6. Если $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то $\mathbf{h}^1[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}] \xrightarrow{\tau} \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})$.

Доказательство. Пусть $z_* \triangleq \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})$. Тогда $z_* \in \mathbf{H}$ и в силу условия 5.1 для некоторой локальной базы $\mathcal{S} \in (z_* - \text{bas})[\tau]$ имеет место вложение

$$\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{L}. \quad (5.5)$$

С другой стороны, из (5.2) имеем сходимость $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} z_*$, откуда с учетом (1.8) следует

$$\mathbf{h}^{-1}[N_{\tau}(z_*)] \subset \mathcal{U}. \quad (5.6)$$

Вместе с тем $\mathcal{S} \subset N_{\tau}(z_*)$, а потому из (5.6) имеем, в частности, вложение $\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{U}$, что в сочетании с (5.5) доставляет цепочку вложений

$$\mathbf{h}^{-1}[\mathcal{S}] \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{L} \subset (E - \mathfrak{h})[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}]. \quad (5.7)$$

Из (4.16) и (5.7) имеем свойство сходимости $\mathbf{h}^1[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}] \xrightarrow{\tau} z_*$. \square

Следствие 2. $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \exists ! z \in \mathbf{H} : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} z$.

Доказательство. Фиксируем у/ф $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тогда (см. § 5) для некоторого $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ имеем, что $\mathcal{F} = \mathcal{U} \cap \mathcal{L}$. Из предложения 6 вытекает свойство сходимости

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U}), \quad (5.8)$$

где $\mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U}) \in \mathbf{H}$. При этом $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ в силу (3.47), а тогда (см. (5.4), (5.8)) $\forall z \in \mathbf{H}$

$$(\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} z) \implies (z = \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})).$$

Установлено, что $\exists ! z \in \mathbf{H} : \mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} z$. Поскольку выбор \mathcal{F} был произвольным, предложение доказано. \square

С учетом следствия 2 введем в рассмотрение оператор

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]: \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbf{H} \quad (5.9)$$

посредством следующего правила: если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{F}) \in \mathbf{H}$ таково, что

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{F}). \quad (5.10)$$

Отметим, в частности, что (см. (4.12)) при всяком выборе $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ определено значение $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{U} \cap \mathcal{L}) \in \mathbf{H}$.

Предложение 7. Если $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{U} \cap \mathcal{L}) = \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})$.

Доказательство. Из (4.12), (5.9) и (5.10) вытекает, что

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}] \xrightarrow{\tau} \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{U} \cap \mathcal{L}). \quad (5.11)$$

Далее, из предложения 6 вытекает следующее свойство сходимости:

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U} \cap \mathcal{L}] \xrightarrow{\tau} \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U}).$$

Из (5.4) и (5.11) имеем равенство $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{U} \cap \mathcal{L}) = \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})$. \square

Следствие 3. Оператор (5.9) является сюръекцией $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ на \mathbf{H} : $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau] \in \mathbf{H}_{(*)}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$.

Доказательство. Из (5.9) следует вложение $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \subset \mathbf{H}$. Выберем произвольно $z \in \mathbf{H}$, после чего с учетом (5.3) подбираем $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ так, что $z = \mathfrak{H}[\tau](\mathcal{U})$. С учетом предложения 7 получаем равенство

$$z = \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{U} \cap \mathcal{L}), \quad (5.12)$$

где $\mathcal{U} \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в силу (4.12). Из (5.12) имеем, следовательно, включение $z \in \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$, чем и завершается обоснование вложения $\mathbf{H} \subset \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$; последнее означает (см. (5.9)), что справедливо равенство

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) = \mathbf{H}. \quad (5.13)$$

В силу (5.9) и (5.13) $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau] \in \mathbf{H}_{(*)}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$. \square

Отметим, что посредством (4.12), (4.13) определяется бинарное отношение на $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$: если $\mathcal{U}_1 \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и $\mathcal{U}_2 \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, то полагаем по определению, что

$$(\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2) \iff (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{L} = \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{L}). \quad (5.14)$$

Более точно: в (5.14) определено отношение эквивалентности на $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. В этой связи напомним важные понятия фактор-пространств и фактор-отображений; см. [11]. Действие оператора (5.3) также “факторизуется” в силу предложения 7.

Предложение 8. Если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $F \in \mathcal{F}$, то $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{F}) \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(F), \tau)$.

Доказательство. Имеем включение $\mathbf{h}^1(F) \in \mathbf{h}^1[\mathcal{F}]$, где $\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ в силу (3.47). При $z_* \triangleq \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{F}) \in \mathbf{H}$ имеем в силу (5.10) свойство сходимости

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{F}] \xrightarrow{\tau} z_*.$$

Это означает, что для фильтра $\mathcal{F}_* \triangleq (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{F}]] \in \mathfrak{F}[\mathbf{H}]$ имеет место вложение $N_{\tau}(z_*) \subset \mathcal{F}_*$. При этом $\mathbf{h}^1(F) \in \mathcal{F}_*$, а потому по аксиомам фильтра (см. (1.2)) $\mathbf{h}^1(F) \cap S \neq \emptyset \quad \forall S \in N_{\tau}(z_*)$. Последнее, однако, означает, что $z_* \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(F), \tau)$. \square

Предложение 9. $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \tau_{\Phi}, \mathbf{H}, \tau)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тогда в силу (5.10) имеем сходимость

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{U}), \quad (5.15)$$

где $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau](\mathcal{U}) \in \mathbf{H}$. Это означает, что база фильтра (см. (3.47)) $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}]$ порождает фильтр

$$\mathcal{H} \triangleq (\mathbf{H} - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]] \in \mathfrak{F}[\mathbf{H}],$$

обладающий свойством $N_\tau(\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{U})) \subset \mathcal{H}$. Как следствие (см. (1.7))

$$\forall S \in N_\tau(\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{U})) \exists U \in \mathcal{U} : \mathbf{h}^1(U) \subset S. \quad (5.16)$$

С учетом условия 5.2 имеем, в частности, что (\mathbf{H}, τ) — регулярное ТП (см. [13, § 9]), а тогда точка $\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{U})$ обладает базой (фундаментальной системой) окрестностей, замкнутых в (\mathbf{H}, τ) .

Выберем произвольную окрестность $\mathbf{N} \in N_\tau(\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{U}))$ и подберем замкнутую в (\mathbf{H}, τ) окрестность $\mathbf{F} \in N_\tau(\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{U}))$, для которой $\mathbf{F} \subset \mathbf{N}$. С учетом (5.16) подберем множество $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$, для которого

$$\mathbf{h}^1(\mathcal{U}) \subset \mathbf{F}. \quad (5.17)$$

При этом $\Phi(\mathcal{U}) \in \mathbf{L}$; см. § 4. В частности, $\Phi(\mathcal{U})$ есть окрестность \mathcal{U} в компакте (3.10), т. е.

$$\Phi(\mathcal{U}) \in N_{\tau_\Phi}(\mathcal{U}). \quad (5.18)$$

Пусть теперь $\mathcal{V} \in \Phi(\mathcal{U})$, т. е. $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$. Разумеется, $\mathbf{h}^1(\mathcal{U}) \in \mathbf{h}^1[\mathcal{V}]$. В силу предложения 8 имеем свойство

$$\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{V}) \in \text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathcal{U}), \tau). \quad (5.19)$$

Из (5.17) имеем в силу замкнутости \mathbf{F} в ТП (\mathbf{H}, τ) очевидное вложение $\text{cl}(\mathbf{h}^1(\mathcal{U}), \tau) \subset \mathbf{F}$. С учетом (5.19) имеем по выбору \mathbf{F} включение $\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{V}) \in \mathbf{N}$. Коль скоро выбор \mathcal{V} был произвольным, установлено, что $\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{F}) \in \mathbf{N} \forall \mathcal{F} \in \Phi(\mathcal{U})$. С учетом (5.18) получаем, что

$$\exists G \in N_{\tau_\Phi}(\mathcal{U}) : \mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{F}) \in \mathbf{N} \forall \mathcal{F} \in G.$$

Поскольку выбор \mathbf{N} также был произвольным, установлено, что

$$\forall S_1 \in N_\tau(\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{U})) \exists S_2 \in N_{\tau_\Phi}(\mathcal{U}) : \mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau](\mathcal{F}) \in S_1 \forall \mathcal{F} \in S_2.$$

Это означает, что $\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau]$ — оператор, непрерывный в точке \mathcal{U} . Поскольку выбор \mathcal{U} был произвольным, установлено требуемое свойство “глобальной” непрерывности оператора $\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau]$. \square

Предложение 10. *Справедливо равенство $\mathbf{h} = \mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau] \circ ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]$.*

Доказательство. Фиксируем $x \in E$. Тогда (см. (3.42)) имеем очевидное равенство

$$z \stackrel{\Delta}{=} (\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau] \circ ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot])(x) = \mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau]((E - \text{ult})[x] \cap \mathcal{L}), \quad (5.20)$$

где $(E - \text{ult})[x] \in \mathfrak{F}_\mathbf{u}[E]$. С учетом предложения 7 и (5.20) получаем, что

$$z = \mathfrak{H}[\tau]((E - \text{ult})[x]) = (\mathfrak{H}[\tau] \circ (E - \text{ult})[\cdot])(x) = \mathbf{h}(x);$$

см. [4, с. 223, 237]. Поскольку выбор x был произвольным, установлено (см. (5.20)) требуемое совпадение $\mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau] \circ ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]$ и \mathbf{h} . \square

В согласии с [2–4] используем понятие компактификатора для нашего конкретного случая: компактификатором называем далее всякий кортеж (K, t, p, q) , где (K, t) — компактное ТП, $p \in K^E$, $q \in C(K, t, \mathbf{H}, \tau)$ и при этом $\mathbf{h} = q \circ p$.

Теорема 1. *Кортеж $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \tau_\Phi, ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot], \mathfrak{H}_\mathcal{L}[\tau])$ является компактификатором.*

Доказательство следует из предложений 9, 10 (см. также (3.43)). Используем далее теорему 1 в соответствии с замечанием 3.1 работы [3]. В этой связи нам потребуются некоторые новые обозначения. Прежде всего условимся следовать в обозначениях для направленностей и сходимости по Мору-Смиту символикке, принятой в [1–4]: направленность в множестве X отождествляется с триплетом (D, \preceq, f) , где (D, \preceq) — непустое направленное [11] множество,

$f \in X^D$; если при этом X оснащается топологией \mathbf{t} и задана точка $x \in X$, то сходимость направленности (D, \preceq, f) к x в ТП (X, \mathbf{t}) обозначаем через

$$(D, \preceq, f) \xrightarrow{\mathbf{t}} x.$$

Далее, полагаем, что для всяких ТП (X, \mathbf{t}) , $r \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ множество $(\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; r; \mathcal{E}]$ определяется в согласии с [3, с. 53] (МП в классе ПР-направленностей; см. пример § 1). Отметим, что (см. [3, с. 56, 57]) с учетом (2.2)

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[\mathbf{H}; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (5.21)$$

Предложение 11. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то справедливо равенство

$$(\mathbf{as})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \tau_{\Phi}; ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8 работы [1].

Теорема 2. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то МП допускает следующее обобщенное представление:

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})).$$

Доказательство. Поскольку, в частности, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то в согласии с замечанием 3.1 работы [3] имеем из теоремы 1 и из (5.21) равенство

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1((\mathbf{as})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \tau_{\Phi}; ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]; \mathcal{E})).$$

Из предложения 11 извлекаем теперь требуемое равенство. □

Теорема 2 показывает, что множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, играют важную роль в вопросах, связанных с представлением МП в пространстве оценок. Элементы этих множеств могут рассматриваться как обобщенные элементы (ОЭ) в задачах с ограничениями асимптотического характера, определяемыми в классе измеримых п/м E .

6. Некоторые свойства обобщенных решений

В связи с теоремой 2 уместно коснуться свойств ОЭ, формализуемых в виде у/ф ИП (E, \mathcal{L}) и соблюдающих ограничения асимптотического характера. В этой связи отметим прежде всего предложение 1. Кроме того, из определения у/ф легко следует свойство: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то

$$\left(\bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \emptyset \right) \vee (\exists x \in E : \mathcal{U} = ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x]). \quad (6.1)$$

В связи с (6.1) введем естественный аналог свободного у/ф множества E (см. § 2). Именно, полагаем

$$\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}) \triangleq \left\{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \emptyset \right\}. \quad (6.2)$$

Элементы множества (6.2) именуем свободными у/ф ИП (E, \mathcal{L}) . Тогда (см. (6.1), (6.2))

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}) \cup ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(E)) \& (\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}) \cap ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(E) = \emptyset). \quad (6.3)$$

Мы учли в (6.3) тот факт, что при всяком выборе $x \in E$ точка x содержится в пересечении всех множеств из $((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x]$. Пусть, кроме того,

$$\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \triangleq \{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U} \} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \quad (6.4)$$

Предложение 12. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то справедливо равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \cup ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right). \quad (6.5)$$

Доказательство. В силу (6.2), (6.4), предложения 1 и следствия этого предложения (см. § 4) множество в правой части (6.5) содержится в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$. Пусть $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$. Тогда $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L})$ и при этом $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$. В силу (6.3), (6.4) имеем две возможности: либо $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$, либо $\mathcal{U} = ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x]$, где $x \in E$. В последнем случае $((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$ и, следовательно, $x \in ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^{-1}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}))$, а потому (см. предложение 1) имеем включение

$$x \in \bigcap_{U \in \mathcal{E}} U$$

и, стало быть, $\mathcal{U} \in ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right)$. Итак, \mathcal{U} есть элемент множества в правой части (6.5). Следовательно, $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$ — п/м множества в правой части (6.5), чем и завершается доказательство. \square

Предложение 13. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то справедливо равенство

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})) \cup \mathbf{h}^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right).$$

Доказательство. В силу теоремы 2 и предложения 12 получаем, что

$$\begin{aligned} (\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] &= \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1 \left(\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \cup ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right) \right) \\ &= \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})) \cup \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1 \left(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right) \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

С учетом предложения 10 имеем, однако, следующее равенство:

$$\mathbf{h}^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right) = \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1 \left(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1 \left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U \right) \right).$$

С учетом (6.6) получаем требуемое утверждение. \square

Полагаем далее, что $(\text{Star})[A; \mathcal{L}] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid A \cap L \neq \emptyset\} \forall A \in \mathcal{P}(E)$. В терминах данного семейства может быть введена звезда произвольного п/м E относительно алгебры \mathcal{L} ; см. в этой связи [11, с. 449]. Из определения τ_{Φ} легко следует, что

$$\text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A), \tau_{\Phi}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{U} \subset (\text{Star})[A; \mathcal{L}]\} \forall A \in \mathcal{P}(E). \quad (6.7)$$

В качестве A можно использовать пересечение всех множеств $U \in \mathcal{E}$, где $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. Отметим, что $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]$ можно рассматривать как непрерывный (см. предложение 9) оператор из компактного ТП в хаусдорфово, а тогда $\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]$ — замкнутый [11] оператор и как следствие

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\text{cl}(\mathbf{F}, \tau_{\Phi})) = \text{cl}(\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\mathbf{F}), \tau) \forall \mathbf{F} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \quad (6.8)$$

Свойство (6.8) хорошо известно в общей топологии; см., например, [11]. Отметим здесь же [9, с. 36]. Из (6.8) и предложения 10 следует свойство: если $A \in \mathcal{P}(E)$, то

$$\text{cl}(\mathbf{h}^1(A), \tau) = \text{cl}(\mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1 \left(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A) \right), \tau) = \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A), \tau_{\Phi})). \quad (6.9)$$

В (6.9) можно использовать (6.7). Отметим, что в случае, когда $A \in \mathcal{L}$, (6.7) допускает более простое представление: справедливо следующее

Предложение 14. Если $A \in \mathcal{L}$, то $\text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A), \tau_\Phi) = \Phi(A)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{W} \in ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A)$, а $q \in A$ таково, что $\mathcal{W} = ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[q]$. Тогда $\mathcal{W} = (E - \text{ult})[q] \cap \mathcal{L}$. При этом, конечно, $A \in \mathcal{W}$ (см. (3.42)) и как следствие $\mathcal{W} \in \Phi(A)$; см. в этой связи (3.8). Коль скоро выбор \mathcal{W} был произвольным, то

$$((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A) \subset \Phi(A)$$

и как следствие (см. замечание 3.3) имеем вложение

$$\text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A), \tau_\Phi) \subset \Phi(A). \quad (6.10)$$

Выберем произвольно $\mathcal{U} \in \Phi(A)$. Тогда $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и при этом $A \in \mathcal{U}$. Ясно, что $A \cap L \neq \emptyset \forall L \in \mathcal{U}$. Теперь в принципе можно использовать (6.7); однако приведем все же прямое доказательство, фиксируя $\mathbb{U} \in \mathcal{U}$ и выбирая (для этого множества \mathbb{U}) точку $x^* \in \mathbb{U} \cap A$. Тогда

$$((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x^*] \in ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A)$$

и $\mathbb{U} \in ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x^*]$, что означает

$$((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x^*] \in \Phi(\mathbb{U}).$$

Получили свойство $\Phi(\mathbb{U}) \cap ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A) \neq \emptyset$. Стало быть,

$$((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A) \cap \Phi(L) \neq \emptyset \forall L \in \mathcal{U}. \quad (6.11)$$

Но по свойствам \mathbf{L} семейство $\{\Phi(L) : L \in \mathcal{U}\}$ есть локальная база τ_Φ в точке \mathcal{U} , т. е. фундаментальная система окрестностей \mathcal{U} . Поэтому из (6.11) следует, что

$$\mathcal{U} \in \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A), \tau_\Phi).$$

Вложение $\Phi(A) \subset \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A), \tau_\Phi)$ установлено, чем (см. (6.10)) завершается доказательство предложения в целом. \square

Следствие 4. Если $A_1 \in \mathcal{L}$ и $A_2 \in \mathcal{L}$, то истинна импликация

$$(A_1 \cap A_2 = \emptyset) \implies (\text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A_1), \tau_\Phi) \cap \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A_2), \tau_\Phi) = \emptyset).$$

Доказательство следует из аксиом фильтра с учетом предложения 14; см. § 4.

З а м е ч а н и е 6.1. Предложение 14 и следствие 4 не требуют для своей справедливости условий 5.1, 5.2.

Напомним, что согласно (6.7) имеет место, в частности, при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \setminus \text{cl}\left(\left((E, \mathcal{L}) - \text{Ult}\right)[\cdot]^1\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U\right), \tau_\Phi\right) = \left\{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \mid \mathcal{U} \setminus (\text{Star})\left[\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U; \mathcal{L}\right] \neq \emptyset \right\}. \quad (6.12)$$

Предложение 15. Если $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, то множество (6.12) содержится в $\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})$.

Доказательство легко следует из предложения 12, поскольку всякое множество в ТП есть п/м своего замыкания (отметим, что в случае $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$ множество (6.12) допускает [4, с. 240] более простое описание; в настоящем же случае мы сталкиваемся с тем затруднением, что пересечение всех множеств из \mathcal{E} не является, вообще говоря, элементом \mathcal{L}). По смыслу (6.12) есть множество всех \mathcal{E} -допустимых ПР, не являющихся обобщенными пределами точных \mathcal{E} -решений. С учетом (6.9) имеем свойство: за асимптотические “по существу” эффекты

(т. е. эффекты, не сводящиеся к реализации точек из замыкания множества $\mathbf{h}^1(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U)$) отвечают свободные у/ф из множества (6.12).

Отметим одно простое, но полезное свойство: если семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ таково, что пересечение всех множеств из \mathcal{E} пусто (отсутствуют точные \mathcal{E} -решения), то в силу предложения 13

$$(\tau - \mathbf{AS})[\mathcal{E}] = \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})) = \mathfrak{H}_{\mathcal{L}}[\tau]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})); \quad (6.13)$$

грубо говоря, это означает, что все ЭП в (\mathbf{H}, τ) формируются (в классе ПП) за счет действия \mathcal{E} -допустимых свободных у/ф (т. е. за счет действия элементов, обобщенных по существу и не сводящихся к действию обычных решений — точек множества E). Свойство (6.13) можно рассматривать (см. в этой связи (6.3) и предложение 12) как важное свойство компактификатора теоремы 1. В этой связи напомним пример [24, с. 472, 473], который показывает, что не всякий компактификатор обладает подобным свойством; следует учитывать также предложение 11. С учетом последнего имеем $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\left(\bigcap_{U \in \mathcal{E}} U = \emptyset \right) \implies ((\mathbf{as})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \tau; ((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]; \mathcal{E}] \subset \mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L})). \quad (6.14)$$

Свойство (6.14) как раз и показывает, что для компактификатора теоремы 1 эффект, отмеченный в примере [24, с. 472, 473], невозможен. Сейчас рассмотрим несколько иной

Пример. Пусть E — множество всех рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$, $\mathbf{H} = [0, 1]$, τ — обычная топология $[0, 1]$, индуцированная из вещественной прямой \mathbb{R} $|\cdot|$ -топологией \mathbb{R} , а \mathbf{h} действует (из E в \mathbf{H}) по правилу $\mathbf{h}(x) = x \ \forall x \in E$. Рассмотрим кортеж (K, t, p, q) , для которого $K = \mathbf{H} = [0, 1]$, $p = \mathbf{h}$, а q отображает K в \mathbf{H} по правилу $q(\xi) = \xi \ \forall \xi \in K$. В согласии с определением разд. 5 имеем: (K, t, p, q) — компактификатор. Пусть \mathcal{E} — семейство всех множеств $E \cap]0, \varepsilon[$, $\varepsilon \in]0, 1[$ (в данном случае \mathcal{E} есть база фильтра множества E). Тогда пересечение всех множеств из \mathcal{E} пусто, т. е. точные \mathcal{E} -решения отсутствуют. Множество $p^1(E) = E$ всюду плотно в компакте (K, τ) . Элементы множества $K \setminus E$ можно рассматривать как ОЭ, не сводящиеся к точным решениям; в виде этого множества имеем аналог $\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L})$ (см. (6.3)). Множество $\mathbf{A} \triangleq (\mathbf{as})[K; t; p; \mathcal{E}]$ совпадает в рассматриваемом случае с пересечением всех множеств $\text{cl}(U, \tau)$, $U \in \mathcal{E}$ (см. [3, с. 53]). В итоге $\mathbf{A} = \{0\} \subset E$, в то время как аналогом утверждения следствия импликации (6.14) было бы утверждение: $\mathbf{A} \subset K \setminus E$ (см. (6.3)). Следовательно, используемый в настоящем примере компактификатор не обладает свойством, отмеченным в (6.14). Напомним, что в [24, с. 473, 474] указан другой конкретный класс задач асимптотического анализа (уже необязательно компактифицируемых), для которых свойство, подобное (6.14), имеет место. \square

В заключении раздела отметим еще одно полезное свойство рассматриваемой конструкции расширения, полагая в дальнейшем выполненным следующее

Условие 6.1. $\{x\} \in \mathcal{L} \ \forall x \in E$.

Итак, в последующих рассуждениях постулируется, что алгебра \mathcal{L} п/м E содержит всевозможные синглтоны, отвечающие точкам множества E . Подчеркнем, что в рассматриваемом случае определены множества $\Phi(\{x\}) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$, $x \in E$. Легко видеть, что справедливо следующее

Предложение 16. $\Phi(\{x\}) = \{((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[x]\} \ \forall x \in E$.

Доказательство следует из определений. Из предложения 16 вытекает, что

$$((E, \mathcal{L}) - \text{Ult})[\cdot]^1(A) \in \tau_{\Phi} \ \forall A \in \mathcal{P}(E). \quad (6.15)$$

В свою очередь из (6.3) и (6.15) имеем, что $\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}) \in (\tau_{\Phi} - \text{comp})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. Аналогичным образом из (3.50), (6.3), (6.15) и предложения 12 вытекает, что

$$\mathbb{F}_{00}^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) \in (\tau_{\Phi} - \text{comp})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \quad (6.16)$$

В (6.16) имеем следующее свойство: ОЭ, ответственные за реализацию нетривиальных вариантов асимптотического поведения (при соблюдении ограничений) в своей совокупности составляют компакт.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна — Чеха // Современная математика и ее приложения. Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005. Т. 26. С.119–150.
2. **Ченцов А.Г.** Обобщенные множества притяжения и приближенные решения, их формирующие // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, № 2. С.178–196.
3. **Ченцов А.Г.** Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах управления // Тр. Междунар. семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2006. Т. 1. С. 48–60.
4. **Ченцов А.Г.** Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 216–241.
5. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
6. **Даффин Р. Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 263–267.
7. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 35 с.
8. **Chentsov A.G.** Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York; London; Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.
9. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1997. 322 p.
10. **Čech E.** Topological spaces. Prague: Academia, 1966. 893 p.
11. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
12. **Келли Дж. Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
13. **Бурбаки Н.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
14. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
15. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
16. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
17. **Chentsov A.G.** Some questions of asymptotic analysis: approximate solutions and extension constructions // Func. Diff. Equations. 2005. Vol. 12. P. 119–148.
18. **Chentsov A.G.** Some properties of generalized attraction sets // Func. Diff. Equations. 2006. Vol. 13. P. 381–415.
19. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
20. **Chentsov A.G., Morina S.I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 408 с.
21. **Chentsov A.G.** Two-valued measures and zero-dimensional topologies // Funct. Diff. Equations. 2002. Vol. 9. P. 71–89.
22. **Ченцов А.Г.** Некоторые свойства конечно-аддитивных мер и их преобразование на основе гомоморфизмов измеримых структур // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 4. С. 449–452.
23. **Semadeni Z.** Banach spaces of continuous functions. Warszawa: PWN, 1971. 411 p.
24. **Chentsov A.G.** The nonsequential approximate solutions in problems of asymptotic analysis // Soochow J. Math. 2006. Vol. 32, no. 3. P. 441–475.

Ченцов Александр Георгиевич

Поступила 24.02.2010

чл.-корр. РАН

зав. отделом

Институт математики и механики УрО РАН

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

УДК 519.174

О ГРАФАХ ДЕЗА С ПАРАМЕТРАМИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ГРАФОВ¹

Л. В. Шалагинов

Графом Деца с параметрами (v, k, b, a) , где $b \geq a$, называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k и любые две вершины имеют a или b общих смежных. Сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k , любые две смежные вершины имеют точно λ общих соседей и две несмежные вершины имеют точно μ общих соседей. Точным графом Деца называется граф Деца диаметра 2, не являющийся сильно регулярным. Известно, что если сильно регулярный граф имеет инволютивный автоморфизм, который переставляет только несмежные вершины, то с его помощью можно получить граф Деца с параметрами исходного сильно регулярного графа. В работе найдены все автоморфизмы треугольных графов, удовлетворяющие вышеупомянутому условию. Оказалось, что с точностью до нумерации вершин существует ровно один такой автоморфизм. Найдены окрестности точного графа Деца, полученного с помощью этого автоморфизма. И получена характеристика этого точного графа Деца по параметрам и строению окрестностей.

Ключевые слова: реберный граф, сильно регулярный граф, треугольный граф, граф Деца, точный граф Деца, инволютивный автоморфизм.

L. V. Shalaginov. On Deza graphs with parameters of triangular graphs.

A Deza graph with parameters (v, k, b, a) , where $b \geq a$, is a k -regular graph on v vertices in which any two vertices have either a or b common neighbors. A strongly regular graph with parameters (v, k, λ, μ) is a k -regular graph on v vertices in which any two adjacent vertices have exactly λ common neighbors and any two nonadjacent vertices have exactly μ common neighbors. A strictly Deza graph is a Deza graph of diameter 2 that is not strongly regular. If a strongly regular graph has an involutive automorphism that transposes nonadjacent vertices only, then it is known that this automorphism can be used to obtain a Deza graph with the parameters of the initial strongly regular graph. We find all automorphisms of triangular graphs that satisfy the above condition. It turns out that there is exactly one such automorphism up to the numbering of vertices. Neighborhoods of a strictly Deza graph obtained by means of this automorphism are found and a characterization of such strictly Deza graph with respect to its parameters and the structure of neighborhoods is obtained.

Keywords: line graph, strongly regular graph, triangular graph, Deza graph, exact Deza graph, involutive automorphism.

1. Введение

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Окрестностью вершины называется подграф, индуцированный на множестве ее соседей. Будем обозначать окрестность вершины x — $[x]$, если из контекста ясно, какому графу она принадлежит.

Графом Деца с параметрами (v, k, b, a) , где $b \geq a$, называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k и любые две вершины имеют a или b общих смежных. Сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k , любые две смежные вершины имеют точно λ общих соседей и две несмежные вершины имеют точно μ общих соседей. Все графы Деца можно разбить на три класса: сильно регулярные графы, графы диаметра больше 2 (с параметром $a = 0$), точные графы Деца. Точным графом Деца называется граф Деца диаметра 2, не являющийся сильно регулярным.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-938.2011.1) и программы УРО РАН для молодых ученых.

Реберным графом графа G называется граф $L(G)$, множество вершин которого является множеством ребер исходного графа и две вершины смежны, если и только если соответствующие ребра в исходном графе имеют общую вершину.

Полным графом называется граф, вершины которого попарно смежны.

Треугольным графом называется реберный граф полного графа. Треугольный граф является сильно регулярным с параметрами $(n(n-1)/2, 2(n-2), n-2, 4)$ и обозначается $T(n)$, где n — число вершин в исходном полном графе. Введем нумерацию вершин: обозначим вершины полного графа числами от 1 до n , тогда вершинам треугольного графа будут соответствовать упорядоченные пары различных чисел (i, j) , где i, j от 1 до n , $i < j$, и две вершины смежны, если и только если пары (i, j) и (l, m) имеют один общий символ. В статье будем считать вершины треугольного графа занумерованными таким образом.

Теорию сильно регулярных графов начал развивать Боуз в 1963 г. [1]. Важными вопросами теории являются нахождение необходимых условий существования и построение сильно регулярных графов с заданным набором параметров (см. [2]). Например, в работе [3] было доказано, что треугольные графы определяются набором своих параметров при $n \neq 8$. Естественно решать аналогичные задачи и для точных графов Деца.

В статье [4] Эриксона, Фернандо, Хэмерса, Харди и Хеммитера было предложено несколько способов построения точных графов Деца и были описаны все точные графы Деца с числом вершин не более 13. Среди них есть способ построения точного графа Деца из сильно регулярного графа с помощью инволютивного автоморфизма, переставляющего только несмежные вершины (автоморфизм называется инволютивным, если он обратен самому себе).

Утверждение. Пусть G — сильно регулярный граф с параметрами (n, k, λ, μ) , с $k \neq \mu$, $\lambda \neq \mu$ и с матрицей смежности M . Пусть P — перестановочная матрица, тогда PM — матрица смежности графа Деца, если и только если P задает инволютивный автоморфизм графа G , переставляющий только несмежные вершины.

2. Инволютивные автоморфизмы $T(n)$

Теорема 1. Для треугольного графа на n вершинах при четном n существует ровно один автоморфизм, удовлетворяющий условию утверждения. Он оставляет на месте $n/2$ несмежных вершин и переставляет местами каждые два полных подграфа, имеющих общую неподвижную вершину. При нечетном n подходящих автоморфизмов не существует.

Доказательство. Так как автоморфизм инволютивный, то он переставляет местами пары вершин, и по условию утверждения эти вершины несмежны. Так как смежные вершины переходят в смежные, то полный подграф, максимальный по включению, переходит в полный подграф, максимальный по включению; далее по тексту, если не оговаривается иное, под полным подграфом понимается полный подграф, максимальный по включению. Полные подграфы в $T(n)$ образуются вершинами, содержащими в своем номере общее число, например, $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)$. Заметим, что любые два полных подграфа имеют одну общую вершину, для любых k и l подграф $(k, i) \mid i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ и подграф $(j, l) \mid j = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, n$ имеют общую вершину (k, l) . И если два полных подграфа переходят друг в друга, то их общая вершина остается неподвижной.

Пусть вершина (k, l) остается неподвижной, тогда подграф $(k, i) \mid i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ переходит в подграф $(j, l) \mid j = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, n$. Так как каждая вершина из одного полного подграфа смежна точно с одной вершиной из другого полного подграфа $((k, i)$ смежна с (i, l) для всех $1 \leq i \leq n, i \neq k, l$, то если (k, x) переходит в (y, l) , смежная с ней вершина (x, l) переходит в (k, y) . Таким образом, вершины в полных подграфах разбиваются на пары, кроме неподвижной вершины, а значит, n четно.

Пусть вершина (k, x) переходит в вершину (y, l) . Эта пара вершин имеет 4 общих смежных вершины: $(x, l), (k, y), (k, l), (x, y)$. Первые две переходят друг в друга, а третья остается непо-

движной, следовательно, и вершина (x, y) остается неподвижной. Аналогично, для каждой пары x и y найдется такая неподвижная вершина, т. е. всего их $n/2$. Каждая из этих вершин лежит ровно в двух полных подграфах, которые при автоморфизме переходят друг в друга. Таким образом, с точностью до нумерации вершин существует ровно один автоморфизм треугольного графа, удовлетворяющий условиям утверждения 1.

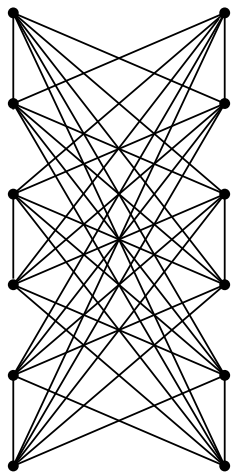
Теорема 1 доказана.

3. Графы Деца

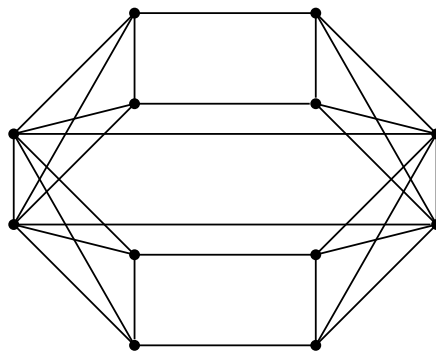
В данной статье будем называть граф Деца, полученный из треугольного графа с помощью конструкции из рассмотренного выше утверждения, треугольным графом Деца.

О п р е д е л е н и е. Пусть F — некоторое множество графов, тогда граф G называется локально F -графом, если окрестность каждой его вершины изоморфна некоторому графу из множества F , причем для каждого графа H из F существует вершина графа G , окрестность которой изоморфна H .

Лемма. Пусть $F = \{F_1, F_2\}$ (см. рис.), тогда треугольный граф Деца является локально F -графом, причем первому графу изоморфны окрестности неподвижных вершин относительно автоморфизма, с помощью которого был получен данный треугольный граф Деца, а второму — сдвигаемых.



F_1 при $n = 8$.



F_2 при $n = 8$.

З а м е ч а н и е. Граф первого изоморфного типа состоит из двух множеств ребер, каждая вершина первого множества смежна со всеми вершинами второго, кроме одной (противоположной ей на рис.). Граф второго изоморфного типа имеет четыре особые вершины степени $n - 2$ (два ребра) и также два множества ребер, каждая вершина первого множества смежна с одной вершиной второго (противоположной ей на рисунке) и с двумя особыми вершинами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем введенную нумерацию вершин и рассмотрим неподвижную вершину $(1, n)$. Вершина $(1, 2)$ переходит в вершину $(n - 1, n)$, т. е. смежна со всеми вершинами (j, n) , где $j = 1, \dots, n - 1$, кроме вершины $(n - 1, n)$ и смежна с вершиной $(1, n - 1)$. Аналогичные рассуждения справедливы для всех остальных вершин окрестности $(1, n)$. Таким образом, окрестность $(1, n)$ изоморфна графу F_1 , как и окрестности всех других неподвижных вершин.

Теперь рассмотрим сдвигаемую вершину $(n - 1, n)$, она переходит в вершину $(1, 2)$ и ее окрестность состоит из вершин $(1, i), (2, i) \mid i = 3, \dots, n$. Среди них 4 вершины имеют в окрестности степень $n - 2$: $(1, n - 1), (1, n), (2, n - 1), (2, n)$, эти вершины образуют цикл. Все остальные

вершины распадаются на две группы: $(1, i) \mid i = 3, \dots, n-2$ и $(2, i) \mid i = 3, \dots, n-2$, где каждая вершина $(1, i)$ переходит в $(n-i+1, n)$ и смежна с $(1, n-i+1), (2, n-i+1), (1, n-1), (1, n)$. Аналогично для вершин $(2, i)$. Таким образом, окрестность $(n-1, n)$ изоморфна графу F_2 , как и окрестности всех остальных сдвигаемых вершин. Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть G — локально F -граф Деза с параметрами $(C_n^2, 2(n-2), n-2, 4)$, где F из предыдущей леммы, тогда G изоморфен треугольному графу Деза.

Доказательство. Предположим, в графе G найдется ребро $\{x, y\}$ такое, что окрестности x и y изоморфны F_1 , тогда $|[x] \setminus [y]| = |[y] \setminus [x]| = n-3$, а $|[x] \cap [y]| = n-2$. Тогда исходя из строения окрестности F_1 любые две вершины из $([x] \cap [y]) \setminus \{z\}$, где z — вершина степени $n-4$ из $[x] \cap [y]$, имеют $n-6$ общих смежных вершин в $[x] \setminus [y]$ и столько же в $[y] \setminus [x]$ а также вершины x, y и z , а значит, всего $2(n-6) + 3$, но они не могут иметь более чем $n-2$ общих смежных вершин, если $n-2 \geq 2n-9$, то $n \leq 7$. При $n=6$ параметры a и b совпадают, следовательно, граф с такими параметрами может быть только сильно регулярным. При $n=4$ это регулярный граф степени 4 на 6 вершинах. Существует только один такой граф — это полный граф с удаленным паросочетанием, и он сильно регулярный.

Рассмотрим произвольную вершину с окрестностью типа F_1 и обозначим ее $(1, n)$, разобьем $[(1, n)]$ на две компоненты. Вершины первой компоненты обозначим $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n-1)$, а вершины второй компоненты $(2, n), (3, n), \dots, (n-1, n)$, где $(1, n-i+1)$ не смежна (i, n) для всех i , и $(1, i)$ образует ребро с $(1, n-i+1)$.

Рассмотрим окрестность вершины $(1, 2)$. Вершины $(1, n)$ и $(1, n-1)$ образуют в $[(1, 2)]$ особое ребро, так как имеют с $(1, 2)$ $n-4$ общих смежных вершины $(3, n), \dots, (n-2, n)$. Вершина $(2, n)$ тоже является особой, так как она не смежна ни с одной из вершин $(3, n), \dots, (n-2, n)$; оставшуюся вершину степени $n-2$ обозначим b , тогда вершины $(1, n), (1, n-1), b, (2, n)$ образуют цикл из вершин степени $n-2$ в $[(1, 2)]$. Вершина b в окрестности $(1, n-1)$ тоже будет иметь степень $n-2$ и второй вершиной, составляющей с ней особое ребро, будет вершина $(n-1, n)$, так как обе эти вершины не смежны с вершинами $(1, 2), (1, n)$ и $(3, n), (4, n), \dots, (n-2, n)$.

Таким образом, вершина b смежна в окрестности $(1, n)$ с вершинами $(1, 2), (1, n-1), (2, n), (n-1, n)$. Аналогичные рассуждения справедливы для каждой четырех вершин $(1, i), (1, n-i+1), (i, n), (n-i+1, n)$, где $i = 2, 3, \dots, n/2$. Будем называть такие вершины вершинами первого типа. Заметим, что все пары вершин $(1, i), (1, n-i+1)$ и $(i, n), (n-i+1, n)$ имеют уже по $n-2$ общих смежных вершины: $n-4$ вершины в $[(1, n)]$, саму вершину $(1, n)$ и найденную общую вершину первого типа.

Рассмотрим вершину x — общую смежную для вершин $(1, 2)$ и $(1, i)$, где $i \neq n-1$; в окрестности $(1, 2)$ вершина x не смежна ни с $(1, n)$, ни с $(1, n-1)$, а значит, она смежна с вершинами $(2, n), b$ и с некоторой вершиной (j, n) . Следовательно, вершина x смежна с четырьмя вершинами из $[(1, n)]$: $(1, 2), (1, i)$ и $(2, n), (j, n)$. Таким образом, для каждой пары вершин $(1, i)$ и $(1, j)$, где $i \neq n-j+1$, найдется общая смежная вершина вне $[(1, n)]$, все эти вершины различны и каждая смежна еще с двумя вершинами из $[(1, n)]$; будем называть такие вершины вершинами второго типа.

Посчитаем количество вершин второго типа, их столько же, сколько пар $(1, i)$ и $(1, j)$, где $i \neq n-j+1$; получим $(n-2)(n-4)/2$ вершин. Посчитаем общее количество найденных вершин: $(n-2)(n-4)/2$ вершин второго типа, $(n-2)/2$ вершин первого типа, $2(n-2)$ вершин в $[(1, n)]$ и сама вершина $(1, n)$, итого $(n-2)(n-4)/2 + (n-2)/2 + 2(n-2) + 1 = n(n-1)/2$. Итак, каждая вершина графа принадлежит одному из этих классов вершин.

Рассмотрим окрестность вершины b и предположим, что она изоморфна F_2 . Обозначим $b_{1,1}, \dots, b_{1,n-4}$ вершины окрестности смежные с $(1, 2)$ и с $(2, n)$, а вершины, смежные с $(1, n-1)$ и с $(n-1, n)$, — $b_{2,1}, \dots, b_{2,n-4}$. Найдем для вершины $(1, 2)$ все вершины, с которыми она имеет $n-2$ общих смежных: это вершина $(1, n)$, вершины $(1, 3), (1, 4), \dots, (1, n-2)$, вершина b и вершина $(2, n)$. Так как всего таких вершин $2(n-2)$ [5], то осталось найти еще $n-4$ таких вершины. Каждая такая вершина имеет с $(1, 2)$ 2 общих смежных в окрестности $(1, n)$ и, следовательно,

еще $n - 4$ общих смежных в окрестности b , т. е. каждая из этих вершин смежна с $b_{1,1}, \dots, b_{1,n-4}$ и каждая смежна еще с двумя вершинами из $b_{2,1}, \dots, b_{2,n-4}$. Рассматривая аналогичным образом вершину $(1, n - 1)$, находим, что найдутся $n - 4$ вершины, которые смежны со всеми вершинами $b_{2,1}, \dots, b_{2,n-4}$, но тогда вершины $b_{2,1}, \dots, b_{2,n-4}$ попарно имеют более чем $n - 2$ общих смежных, что противоречит параметрам графа. Следовательно, наше предположение неверно и окрестность вершины b изоморфна F_1 . Аналогичные рассуждения справедливы для каждой вершины первого типа.

Итого в графе $n/2$ вершин, окрестности которых изоморфны F_1 , все они попарно не смежны, все остальные вершины имеют окрестности, изоморфные F_2 , и каждая смежна с двумя вершинами первого типа. Итак все смежности в графе восстановлены, и полученный граф изоморфен треугольному графу Деза.

Теорема 2 доказана.

Таким образом, из леммы и теоремы 2 вытекает необходимое и достаточное условие того, что граф Деза является треугольным графом Деза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bose R.C.** Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs // Pacific J. Math. 1963. Vol. 13. P. 389–419.
2. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance regular graphs. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1989. P. 495.
3. **Chang L.C.** The uniqueness and nonuniqueness of the triangular association scheme // Sci. Record. 1959. Vol. 3. P. 604–613.
4. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs / M. Erickson [et al.]. // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7. P. 359–405.
5. **Шалагинов Л.В.** Исследование графов Деза с параметрами решетчатых графов // Проблемы теоретической и практической математики: тр. 40-й молодеж. шк.-конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. С. 70–72.

Шалагинов Леонид Викторович
аспирант

Челябинский государственный университет
e-mail: leonidshalaginov@rambler.ru

Поступила 7.09.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 17

№ 1

2011

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TeX-редактор Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск Б. В. Дигас

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 10.02.11. Формат $60 \times 84^{1/8}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 39,5. Уч.-изд. л. 34,0. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226