

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

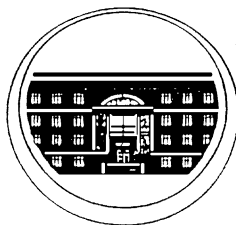
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 16

№ 2

2010



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 16, № 2. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. 300 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор чл.-корр. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора В. В. Кабанов

Редакционная коллегия

А. Г. Бабенко, Н. В. Величко,
Л. П. Власов, М. И. Гусев, А. Р. Данилин,
А. Ф. Клейменов, А. С. Кондратьев, А. И. Короткий,
В. И. Максимов, О. Н. Ульянов (*отв. секретарь*)

Редакционный совет

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин,
акад. РАН А. М. Ильин, акад. РАН Н. Н. Красовский,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов

Отв. редактор выпуска А. Р. Данилин

УДК 518.517

О НЕУЛУЧШАЕМЫХ ЛАМБЕРТ-ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ¹

А. С. Апарцин, В. А. Спиряев

В терминах W -функции Ламберта получены неулучшаемые оценки непрерывных решений некоторых нелинейных интегральных неравенств, играющих важную роль в теории математического моделирования нелинейных динамических систем типа черного ящика полиномами Вольтерра.

Ключевые слова: функция Ламберта, неулучшаемые оценки, мажорантная задача Коши.

A. S. Aparcyn, V. A. Spiryayev. On unimprovable Lambert estimates of solutions for one class of nonlinear integral inequalities.

Unimprovable estimates of continuous solutions for some nonlinear integral inequalities are obtained in terms of the Lambert W function. Such inequalities play an important role in the mathematical theory of modeling nonlinear dynamical systems of the black box type by Volterra polynomials.

Keywords: Lambert function, unimprovable estimates, majorant Cauchy problem.

Введение

Интегральные неравенства вида

$$\psi(t) \leq a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^i + \sum_{i=1}^{N-1} b_i \psi(t) \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^i, \quad t \in [0, T], \quad (0.1)$$

где $\psi(t) \geq 0$, $a_0 > 0$, $a_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, N}$, $b_i \geq 0 \quad \forall i = \overline{1, N-2}$, $b_{N-1} > 0$, $N \geq 1$, являются важным инструментом исследования вопросов существования, единственности и устойчивости решения интегральных уравнений, возникающих при моделировании нелинейных динамических систем типа черного ящика отрезками интегро-степенных рядов (полиномами) Вольтерра. В случае $N = 1$ оценка Гронуолла — Беллмана

$$\psi(t) \leq a_0 e^{a_1 t}, \quad t \in [0, T], \quad (0.2)$$

решений линейного интегрального неравенства

$$\psi(t) \leq a_0 + a_1 \int_0^t \psi(s) ds \quad (0.3)$$

неулучшаема в том смысле, что она выполняется как равенство, если в (0.3) знак \leq заменить на $=$, т. е. мажоранта в (0.2) является решением соответствующего уравнения.

При $N \geq 2$ замена $\zeta(t) = \int_0^t \psi(s) ds$ редуцирует (0.1) к дифференциальному неравенству

$$\dot{\zeta}(t) \leq \frac{a_0 + \sum_{i=1}^N a_i \zeta^i(t)}{1 - \sum_{i=1}^{N-1} b_i \zeta^i(t)} \equiv G(\zeta(t)), \quad t \in [0, T], \quad \zeta(0) = 0.$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00377).

Введем задачу Коши:

$$\dot{\theta}(t) = G(\theta(t)), \quad t \in [0, T], \quad \theta(0) = 0. \quad (0.4)$$

Локальная липшиц-непрерывность отображения $G(\theta(t)) : C_{[0, T]} \rightarrow C_{[0, T]}$, а также изотонность G относительно конуса $C_{+[0, T]}$ лежат в основе следующего утверждения.

Лемма 1 [1]. *При достаточно малом $T > 0$ справедливо неравенство*

$$\psi(t) \leq \dot{\theta}^*(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.5)$$

где $\theta^*(t)$ — единственное решение задачи Коши (0.4).

Будем называть (0.4) мажорантной задачей Коши, так как производная от ее решения мажорирует вещественные непрерывные решения интегрального неравенства (0.1). Если $[0, T]$ — максимальная область определения $\theta^*(t)$, т. е. $T = T^*$ таково, что $G(\theta^*(T^*)) = \infty$, то оценку (0.5) естественно считать неулучшаемой. Таким образом, получение неулучшаемой оценки вещественных непрерывных решений неравенства (0.1) сводится к нахождению функции $\theta^*(t)$, ее дифференцированию и определению T^* .

Для некоторых наборов постоянных a_i и b_i $\theta^*(t)$ может быть найдена в явной форме. Так, если $a_i = 0 \forall i \geq 1$ и $N = 2, 3, 4$, то, как показано в [1], решение задачи (0.4), эквивалентной поиску положительного решения полиномиального уравнения

$$\theta(t) - \sum_{i=1}^{N-1} b_i \theta^{i+1}(t) = a_0 t, \quad \theta(0) = 0, \quad (0.6)$$

определяется с помощью формул Виета, Кардано и Эйлера соответственно. В [1] приведены также формулы для T^* . Если $N = \infty$ и $b_i = c^{i+1}/(i+1)!$, $c > 0$, то (0.6) переходит в трансцендентное функциональное уравнение

$$e^{c\theta(t)} = (c+1)\theta(t) - a_0 t + 1, \quad t \in [0, T], \quad \theta(0) = 0, \quad (0.7)$$

решение которого выражается в терминах функции Ламберта. Напомним, что многозначная функция Ламберта $W(z)$ является обратной к функции $z = We^W$ и имеет две вещественные ветви — главную, которая определена для $z \in [-1/e, \infty)$ и аналитична в 0 (ее обозначают как $W(0, z)$ или просто $W(z)$), и вторую ветвь, определенную для $z \in [-1/e, 0]$ и обозначаемую как $W(-1, z)$. При $z = -1/e$ $W(-1/e) = W(-1, -1/e) = -1$ а при $z = 0$ $W(0) = 0$, $W(-1, 0) = -\infty$. Детальное описание W -функции Ламберта и ее применение в различных приложениях можно найти, например, в [2, 3]. Там же — дальнейшие ссылки. В случае (0.6) в [1] получено представление $\theta^*(t)$ через главную вещественную ветвь W -функции.

Ситуация значительно усложняется, если $a_i \neq 0$, $i \geq 1$. Для случая $N = 2$ в [4] показано, что при $a_1 > 0$, $a_2 = 0$ решение (0.4) также выражается через главную вещественную ветвь функции Ламберта, а при $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ оно представимо в терминах второй вещественной ветви W -функции.

В данной работе найдены такие наборы параметров $a_i > 0$, $b_i > 0$, для которых $\theta^*(t)$, а следовательно, и $\dot{\theta}^*(t)$ выражаются через вторую вещественную ветвь W -функции при любом $N > 2$.

1. Постановка задачи

Дальнейшие результаты базируются на том, что, во-первых, если $P_{N-1}(\theta)$ — произвольный полином $(N-1)$ -й степени и d — некоторая постоянная, то

$$\int \frac{P_{N-1}(\theta)d\theta}{(\theta-d)^N} = - \sum_{k=0}^{N-2} \frac{P_{N-1}^{(k)}(d)}{k!(N-1-k)(\theta-d)^{N-1-k}} + \frac{P_{N-1}^{(N-1)}(d)}{(N-1)!} \ln|\theta-d| + c; \quad (1.1)$$

во-вторых, для любого $n > 0$ решение функционального уравнения

$$\ln y(t) = \alpha y^n(t) + \beta(t), \quad t \in [0, T], \quad y(0) > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta(0) \leq -\frac{\ln(n\alpha e)}{n}, \quad (1.2)$$

представимо в явном виде через W -функцию:

$$y^*(t) = e^{-\frac{1}{n}W(-1, -n\alpha e^{n\beta(t)}) + \beta(t)}. \quad (1.3)$$

Следовательно, поскольку $\theta^*(t)$ является решением уравнения

$$\int \frac{1 - \sum_{i=1}^{N-1} b_i \theta^i}{\sum_{i=0}^N a_i \theta^i} d\theta = t + c \quad (1.4)$$

(c определяется из условия $\theta(0) = 0$), то, предполагая, что для некоторого $d < 0$

$$a_{N-i} = C_N^i (-d)^i a_N, \quad i = \overline{1, N} \quad (1.5)$$

(C_N^i — число сочетаний из N элементов по i), можно подбором коэффициентов b_i многочлена $P_{N-1}(\theta) \equiv 1 - \sum_{i=1}^{N-1} b_i \theta^i(t)$ добиться обращения в 0 любых $N - 2$ слагаемых суммы в (1.1). При этом (1.4) сводится к уравнению типа (1.2), где $y^*(t) = 1/(\theta^*(t) - d)$, откуда с учетом (1.3)

$$\theta^*(t) = e^{\frac{1}{n}W(-1, -n\alpha e^{n\beta(t)}) - \beta(t)} + d. \quad (1.6)$$

Таким образом, ставится следующая задача. Пусть коэффициенты a_i удовлетворяют условию (1.5). Требуется найти такие b_i , которые обращают в 0 все слагаемые суммы в (1.1), кроме одного.

2. Решение специальной СЛАУ

Пусть для некоторого натурального $n \in \overline{1, N-1}$ $P_{N-1}^{(N-n-1)}(d) \neq 0$ и

$$P_{N-1}^{(N-k)}(d) = 0, \quad k = 2, \dots, n, n+2, \dots, N. \quad (2.1)$$

Условие (2.1), в котором n — то же, что и в (1.2), порождает систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка $N - 2$ относительно $N - 1$ неизвестных коэффициентов полинома $P_{N-1}(\theta)$. Для замыкания системы считаем b_{N-1} свободным параметром.

Пусть $A_N - (N - 1) \times (N - 1)$ — матрица, ($k + 1$)-ю строку которой образуют множители при b_ℓ , $\ell = \overline{1, N-1}$, в выражении для $-\frac{P_{N-1}^{(k)}(d)}{k!}$, $k = \overline{0, N-2}$. Так как

$$-P_{N-1}^{(0)}(d) = \sum_{\ell=1}^{N-1} d^\ell b_\ell - 1, \quad (2.2)$$

$$-\frac{P_{N-1}^{(k)}(d)}{k!} = \sum_{\ell=1}^{N-k} C_{N-\ell}^{N-k-\ell} d^{N-k-\ell} b_{N-\ell}, \quad k = \overline{1, N-2},$$

то элементы матрицы таковы:

$$\begin{cases} a_{1,j} = d^j, & j = \overline{1, N-1}; \\ a_{i,j} = C_j^{i-1} d^{j-i+1}, & j = \overline{i-1, N-1}, \quad i = \overline{2, N-1}; \\ a_{i,j} = 0, & 1 \leq j \leq i-2, \quad i = \overline{3, N-1}. \end{cases}$$

Обозначим через $A_{n,N}$ подматрицу A_N размера $(N-2) \times (N-2)$, которая образуется вычеркиванием $(N-n)$ -ой строки и $(N-1)$ -го столбца матрицы A_N . Тогда СЛАУ, порождаемая условием (2.1), в матричной форме имеет вид

$$A_{n,N}x = f_{n,N}, \quad (2.3)$$

где $n \in \overline{1, N-1}$, $x = (b_1, \dots, b_{N-2})$, а

$$f_{n,N} = \left(1 - d^{N-1}b_{N-1}, -C_{N-1}^{N-2}d^{N-2}b_{N-1}, \dots, \right. \\ \left. -C_{N-1}^{n+1}d^{n+1}b_{N-1}, -C_{N-1}^{n-1}d^{n-1}b_{N-1}, \dots, -C_{N-1}^1db_{N-1} \right)^T.$$

Нетрудно видеть, что СЛАУ (2.3) невырождена (более того, $\det A_{n,N} = d^{N-n-1}$). Обозначая решение (2.3) как

$$x_n^* = (b_{n,1}^*, \dots, b_{n,N-2}^*), \quad n \in \overline{1, N-1},$$

и полагая, как обычно, $C_n^m = 0$, если $m > n$, покажем, что справедлива

Теорема 1.

$$b_{n,N-\ell}^* = -\frac{C_{N-\ell}^{N-(n+1)}}{(-d)^{N-\ell}} + \left(C_{N-1}^{N-\ell} - C_{N-(n+1)}^{N-\ell} \right) (-d)^{\ell-1} b_{N-1}, \quad \ell = \overline{2, N-1}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Убедимся, что из (2.4) следует (2.1). При любом $k \in \overline{2, N-1}$

$$-\frac{P_{N-1}^{(N-k)}(d)}{(N-k)!} = \sum_{\ell=1}^k C_{N-\ell}^{k-\ell} d^{k-\ell} b_{N-\ell}. \quad (2.5)$$

Обозначим полином $P_{N-1}(\theta)$ при замене $b_{N-\ell}$ на $b_{n,N-\ell}^*$ через $P_{n,N-1}(\theta)$.

Если $2 \leq k \leq n$, то, согласно (2.4),

$$-\frac{P_{n,N-1}^{(N-k)}(d)}{(N-k)!} = \sum_{\ell=1}^k C_{N-\ell}^{k-\ell} d^{k-\ell} (-1)^{\ell-1} C_{N-1}^{\ell-1} d^{\ell-1} b_{N-1} = d^{k-1} b_{N-1} \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} C_{N-\ell}^{k-\ell} C_{N-1}^{\ell-1} \\ = d^{k-1} b_{N-1} C_{N-1}^{k-1} \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} C_{k-1}^{\ell-1} = 0$$

(мы воспользовались известными тождествами $C_{p-q}^m C_p^q = C_m^q C_p^m$ и $\sum_{\ell=0}^p (-1)^\ell C_p^\ell = 0$, см., например, [5]).

Итак, (2.1) выполняется при $2 \leq k \leq n$. Пусть теперь $n+2 \leq k \leq N-1$. В силу (2.4) и указанных тождеств имеем

$$-\frac{P_{n,N-1}^{(N-k)}(d)}{(N-k)!} = \sum_{\ell=n+1}^k C_{N-\ell}^{k-\ell} d^{k-\ell} \left(\frac{(-1)^{N-\ell+1} C_{N-(n+1)}^{\ell-(n+1)}}{d^{N-\ell}} + (-1)^\ell C_{N-(n+1)}^{\ell-(n+1)} d^{\ell-1} b_{N-1} \right) \\ = \frac{1}{d^{N-k}} \sum_{\ell=n+1}^k (-1)^{N-\ell+1} C_{N-\ell}^{k-\ell} C_{N-(n+1)}^{\ell-(n+1)} + d^{k-1} b_{N-1} \sum_{\ell=n+1}^k (-1)^\ell C_{N-\ell}^{k-\ell} C_{N-(n+1)}^{\ell-(n+1)} \\ = \frac{C_{N-(n+1)}^{k-(n+1)}}{d^{N-k}} \sum_{\ell=n+1}^k (-1)^{N-\ell+1} C_{k-(n+1)}^{\ell-(n+1)} + d^{k-1} b_{N-1} C_{N-(n+1)}^{k-(n+1)} \sum_{\ell=n+1}^k (-1)^\ell C_{k-(n+1)}^{\ell-(n+1)} = 0,$$

так что (2.1) при $k \geq n+2$ также выполняется.

Осталось рассмотреть случай $k = N$, для которого при любом $n \leq N - 2$ должно выполняться, согласно (2.2), равенство

$$\sum_{\ell=1}^{N-1} d^{N-\ell} b_{N-\ell} = 1. \quad (2.6)$$

Действительно, используя (2.4), преобразуем левую часть (2.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=2}^{N-1} d^{N-\ell} b_{n, N-\ell}^* + d^{N-1} b_{N-1} = \sum_{\ell=n+1}^{N-1} (-1)^{N-\ell+1} C_{N-(n+1)}^{\ell-(n+1)} \\ & + \left(\sum_{\ell=2}^{N-1} (-1)^{\ell-1} C_{N-1}^{\ell-1} + \sum_{\ell=n+1}^{N-1} (-1)^\ell C_{N-(n+1)}^{\ell-(n+1)} \right) d^{N-1} b_{N-1} + d^{N-1} b_{N-1} \\ & = \sum_{\ell=n+1}^N (-1)^{N-\ell+1} C_{N-(n+1)}^{\ell-(n+1)} + 1 \\ & + \left(\sum_{\ell=1}^N (-1)^{\ell-1} C_{N-1}^{\ell-1} - 1 + (-1)^N + \sum_{\ell=n+1}^N (-1)^\ell C_{N-(n+1)}^{\ell-(n+1)} + (-1)^{N+1} \right) d^{N-1} b_{N-1} + d^{N-1} b_{N-1} = 1, \end{aligned}$$

так как все знакопеременные суммы сочетаний равны нулю. Этим доказательство теоремы завершено. \square

Итак, коэффициенты (2.4) обращают в ноль при $\theta = d$ производные полинома $P_{N-1}(\theta)$ всех порядков, кроме $(N - n - 1)$ -го, $n \in \overline{1, N-1}$. Ответ на вопрос, какова при этом величина $P_{N-1}^{(N-n-1)}(d)$, дает

Теорема 2.

$$\frac{P_{n, N-1}^{(N-(n+1))}(d)}{(N - (n + 1))!} = \frac{1}{(-d)^{N-(n+1)}} + (-d)^n b_{N-1}, \quad n \in \overline{1, N-1}. \quad (2.7)$$

Доказательство. Согласно (2.5),

$$-\frac{P_{N-1}^{(N-(n+1))}(d)}{(N - (n + 1))!} = b_{N-(n+1)} + \sum_{\ell=1}^n C_{N-\ell}^{n+1-\ell} d^{n+1-\ell} b_{N-\ell},$$

так что, учитывая (2.4), получаем

$$-\frac{P_{n, N-1}^{(N-(n+1))}(d)}{(N - (n + 1))!} = \frac{(-1)^{N-n}}{d^{N-(n+1)}} + (-1)^n (C_{N-1}^n - 1) d^n b_{N-1} + d^n b_{N-1} \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell-1} C_{N-\ell}^{n+1-\ell} C_{N-1}^{\ell-1}. \quad (2.8)$$

Но

$$\sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell-1} C_{N-\ell}^{n+1-\ell} C_{N-1}^{\ell-1} = C_{N-1}^n \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell-1} C_n^{\ell-1} = (-1)^{n-1} C_{N-1}^n, \quad (2.9)$$

а из (2.8) и (2.9) следует (2.7). \square

3. Решение мажорантной задачи Коши

Вернемся теперь к мажорантной задаче Коши (0.4), которая с учетом (1.5) имеет следующий вид:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{a_N(\theta(t) - d)^N}{1 - \sum_{i=1}^{N-1} b_i \theta^i(t)}, \quad t \in [0, T], \quad \theta(0) = 0. \quad (3.1)$$

Теорема 3. Если $b_i = b_{n,i}^*$, $i = \overline{1, N-2}$, $n \in \overline{1, N-1}$, то (3.1) эквивалентна задаче Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{a_N(-d)^{N-(n+1)}(\theta(t) - d)^{n+1}}{1 - (-d)^{N-(n+1)}b_{N-1}((\theta(t) - d)^n - (-d)^n)}, \quad t \in [0, T], \quad \theta(0) = 0. \quad (3.2)$$

Доказательство. Разложим знаменатель (3.1) в ряд Тейлора

$$P_{N-1}(\theta(t)) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{P_{N-1}^{(i)}(d)}{i!} (\theta(t) - d)^i.$$

Если $b_i = b_{n,i}^*$, $i = \overline{1, N-2}$, то

$$P_{n,N-1}(\theta(t)) = \frac{P_{n,N-1}^{(N-(n+1))}(d)}{(N-(n+1))!} (\theta(t) - d)^{N-(n+1)} - b_{N-1}(\theta(t) - d)^{N-1}, \quad (3.3)$$

а подстановка (3.3) в (3.1) с учетом (2.7) дает (3.2). \square

Отметим важное обстоятельство. Исходная постановка предполагает неотрицательность коэффициентов полинома $P_{N-1}(\theta)$. Анализ формулы (2.4) показывает, что при $\ell \leq n$ коэффициенты $b_{n,N-\ell}^*$ положительны для любого $b_{N-1} > 0$, однако при $\ell \geq n+1$ это, вообще говоря, неверно, поскольку первое слагаемое в (2.4) в силу отрицательности d заведомо отрицательно. Если b_{N-1} таково, что

$$b_{n,1}^* \geq 0, \quad (3.4)$$

то подалю и $b_{n,N-\ell}^* \geq 0 \quad \forall \ell \in \overline{n+1, N-2}$, поэтому остается выяснить, при каком ограничении на b_{N-1} справедливо (3.4).

Теорема 4. Условие

$$b_{N-1} \geq \frac{N-n-1}{n(-d)^{N-1}} \quad (3.5)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (3.4).

Доказательство. Полагая в (2.4) $\ell = N-1$, имеем

$$b_{n,1}^* = \frac{C_{N-(n+1)}^1}{d} + (-d)^{N-2} (C_{N-1}^1 - C_{N-(n+1)}^1) b_{N-1} = \frac{N-n-1 - (-d)^{N-1} n b_{N-1}}{d}. \quad (3.6)$$

Утверждение теоремы вытекает из (3.6), (3.5) и отрицательности d . \square

Следствие 1. Условие

$$b_{N-1} \geq \frac{N-2}{(-d)^{N-1}} \quad (3.7)$$

достаточно для неотрицательности $b_{n,N-\ell}^* \quad \forall n \in \overline{1, N-1}$, $\ell = \overline{2, N-1}$, $N \geq 3$.

Найдем теперь явный вид решения $\theta_{n,N}^*(t)$ задачи Коши (3.1). Для этого в соответствии с (1.6) нужно конкретизировать α и $\beta(t)$ в (1.2). Обозначим $\alpha = \alpha_n$, если выполнено (2.1).

Теорема 5. *Справедливо равенство*

$$\alpha_n = \frac{(-d)^n}{n} \left(1 + \frac{1}{(-d)^{N-1} b_{N-1}} \right), \quad n \in \overline{1, N-1}. \quad (3.8)$$

Доказательство. Согласно (1.1), (1.2) и (2.1),

$$\alpha_n = \frac{P_{n,N-1}^{(N-n-1)}(d)}{(N-n-1)! n b_{N-1}}, \quad n \in \overline{1, N-1},$$

поэтому в силу (2.7)

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{(-d)^{N-(n+1)} b_{N-1}} + (-d)^n \right), \quad n \in \overline{1, N-1}, \quad (3.9)$$

а из (3.9) следует (3.8). \square

Обозначим $\beta_n(t) \equiv \beta(t)$, если $\alpha = \alpha_n$.

Теорема 6. *Справедливо равенство*

$$\beta_n(t) = \frac{a_N}{b_{N-1}} t - \ln(-d) - \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{(-d)^{N-1} b_{N-1}} \right), \quad n \in \overline{1, N-1}. \quad (3.10)$$

Доказательство. В силу (1.1), (1.2), (1.4)

$$\beta_n(t) = \frac{a_N}{b_{N-1}} t + c, \quad (3.11)$$

где

$$c = \ln y(0) - \alpha_n y^n(0).$$

Но $y(t) = \frac{1}{\theta(t) - d}$ и $\theta(0) = 0$, поэтому

$$c = -\ln(-d) - \frac{\alpha_n}{(-d)^n}, \quad (3.12)$$

а подстановка (3.12) в (3.11) с учетом (3.8) дает (3.10). \square

Введем для сокращения записи

$$\gamma_N = 1 + \frac{1}{b_{N-1} (-d)^{N-1}}. \quad (3.13)$$

Теорема 7. *Пусть коэффициенты a_i , b_i , удовлетворяют условиям (1.5), (2.4) соответственно. Тогда для любого $n \in \overline{1, N-1}$, $N \geq 3$, решение задачи Коши (3.2), а следовательно, и (0.4) представимо в виде*

$$\theta_{n,N}^*(t) = e^{\frac{1}{n} W \left(-1, -\gamma_N e^{\frac{na_N t}{b_{N-1}} - \gamma_N} \right) - \frac{a_N t}{b_{N-1}} + \frac{\gamma_N}{n}}, \quad t \in [0, T_{n,N}^*], \quad (3.14)$$

где

$$T_{n,N}^* = \frac{1 - b_{N-1} (-d)^{N-1} \ln \gamma_N}{na_N (-d)^{N-1}}. \quad (3.15)$$

Доказательство. Формула (3.14) — следствие подстановки (3.8), (3.10) в (1.6). Остается доказать (3.15). Поскольку $W(-1, z)$ определена лишь для $z \geq -1/e$, достаточно приравнять аргумент функции Ламберта в (3.14) к $-1/e$

$$-\gamma_N e^{\frac{na_N t}{b_{N-1}} - \gamma_N} = -\frac{1}{e}. \quad (3.16)$$

Представление корня трансцендентного относительно t уравнения (3.16) с учетом (3.13) в виде (3.15) элементарно. \square

З а м е ч а н и е 1. В силу неравенства (3.7) числитель (3.15) строго положителен, причем $T_{n,N}^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{na_N(-d)^{N-1}b_{N-1}}\right)$.

Поскольку производная функции (3.14) вместе с (3.15) дают неупрощаемую оценку решений исходного интегрального неравенства (0.1), результаты теорем 1–7 суммирует центральная в данной работе

Теорема 8. Пусть коэффициенты a_i, b_i в (0.1) удовлетворяют условиям (1.5), (2.4) соответственно. Пусть также выполнено (3.5). Тогда неупрощаемая оценка непрерывных решений интегрального неравенства (0.1) такова:

$$\psi(t) \leq -\frac{a_N(-d)^n}{b_{N-1}} \frac{e^{\frac{1}{n}W\left(-1, -\gamma_N e^{\frac{na_N t}{b_{N-1}} - \gamma_N}\right) - \frac{a_N t}{b_{N-1}} + \frac{\gamma_N}{n}}}{1 + W\left(-1, -\gamma_N e^{\frac{na_N t}{b_{N-1}} - \gamma_N}\right)}, \quad t \in [0, T_{n,N}^*), \quad (3.17)$$

где γ_N и $T_{n,N}^*$ определены формулами (3.13), (3.15).

4. Примеры

Выведенные формулы содержат в качестве свободных параметров $N > 2, d < 0, a_N > 0, b_{N-1} > 0$. Пусть, например, $N = 4, d = -1, a_4 = 1, b_3 = 3$. Тогда по (1.5) $a_{N-i} = C_4^i, i = \overline{1, 4}$, а для каждого $n = 1, 2, 3$ из (2.4) найдем соответствующий набор коэффициентов $b_{n,4-\ell}^*, \ell = 2, 3$. Именно для $n = 1$

$$b_{1,2}^* = -C_2^0 + (C_3^1 - C_2^0)3 = 5,$$

$$b_{1,1}^* = -C_2^1 + (C_3^2 - C_2^1)3 = 1,$$

поэтому

$$P_{1,3}(\theta) = 1 - \theta(t) - 5\theta^2(t) - 3\theta^3(t)$$

и мажорантная задача Коши (0.4)

$$\dot{\theta}(t) = \frac{(\theta(t) + 1)^4}{1 - \theta(t) - 5\theta^2(t) - 3\theta^3(t)}, \quad \theta(0) = 0,$$

согласно (3.2), эквивалентна задаче Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{(\theta(t) + 1)^2}{1 - 3\theta(t)}, \quad \theta(0) = 0.$$

Следовательно, неупрощаемая оценка непрерывных решений интегрального неравенства

$$\psi(t) \leq \sum_{i=0}^4 C_4^i \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^i + \psi(t) \left(\int_0^t \psi(s) ds + 5 \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^2 + 3 \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^3 \right)$$

по (3.15), (3.17) такова:

$$\psi(t) \leq -\frac{1}{3} \frac{e^{W(-1, -\frac{4}{3}e^{\frac{t-4}{3}})} - \frac{t-4}{3}}{1 + W\left(-1, -\frac{4}{3}e^{\frac{t-4}{3}}\right)}, \quad t \in [0, T_{1,4}^*],$$

$$T_{1,4}^* = 1 - 3 \ln \frac{4}{3}.$$

Аналогично для $n = 2$

$$b_{2,2}^* = C_3^1 \cdot 3 = 9,$$

$$b_{2,1}^* = -C_1^0 + (C_3^2 - C_1^0)3 = 5,$$

$$P_{2,3}(\theta) = 1 - 5\theta(t) - 9\theta^2(t) - 3\theta^3(t)$$

и мажорантная задача Коши (0.4)

$$\dot{\theta}(t) = \frac{(\theta(t) + 1)^4}{1 - 5\theta(t) - 9\theta^2(t) - 3\theta^3(t)}, \quad \theta(0) = 0,$$

эквивалентна, согласно (3.2), задаче Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{(\theta(t) + 1)^3}{1 - 6\theta(t) - 3\theta^2(t)}, \quad \theta(0) = 0.$$

Следовательно, неуллучшаемая оценка непрерывных решений интегрального неравенства

$$\psi(t) \leq \sum_{i=0}^4 C_4^i \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^i + \psi(t) \left(5 \int_0^t \psi(s) ds + 9 \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^2 + 3 \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^3 \right),$$

в силу (3.15), (3.17) имеет вид

$$\psi(t) \leq -\frac{1}{3} \frac{e^{\frac{1}{2}W(-1, -\frac{4}{3}e^{\frac{2t-4}{3}})} - \frac{t-2}{3}}{1 + W\left(-1, -\frac{4}{3}e^{\frac{2t-4}{3}}\right)}, \quad t \in [0, T_{2,4}^*],$$

$$T_{2,4}^* = \frac{T_{1,4}^*}{2}.$$

Наконец, для $n = 3$

$$b_{3,2}^* = C_3^1 \cdot 3 = 9,$$

$$b_{3,1}^* = C_3^2 \cdot 3 = 9,$$

$$P_{3,3}(\theta) = 1 - 9\theta(t) - 9\theta^2(t) - 3\theta^3(t),$$

а задачи Коши (0.4) и (3.2) совпадают:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{(\theta(t) + 1)^4}{1 - 9\theta(t) - 9\theta^2(t) - 3\theta^3(t)}, \quad \theta(0) = 0.$$

Неуллучшаемая оценка непрерывных решений интегрального неравенства

$$\psi(t) \leq \sum_{i=0}^4 C_4^i \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^i + \psi(t) \left(9 \int_0^t \psi(s) ds + 9 \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^2 + 3 \left(\int_0^t \psi(s) ds \right)^3 \right),$$

такова:

$$\psi(t) \leq -\frac{1}{3} \frac{e^{\frac{1}{3}W(-1, -\frac{4}{3}e^{\frac{3t-4}{3}})} - \frac{3t-4}{9}}{1 + W(-1, -\frac{4}{3}e^{\frac{3t-4}{3}})}, \quad t \in [0, T_{3,4}^*),$$

$$T_{3,4}^* = \frac{T_{1,4}^*}{3}.$$

З а м е ч а н и е 2. В рассмотренных примерах параметры $d = -1$ и $b_3 = 3$ удовлетворяют условию (3.7), достаточному для неотрицательности коэффициентов полинома $P_{n,3}(\theta)$. Нетрудно проверить, что если положить, например, $b_3 = 1$, то нарушение необходимого условия (3.5) приводит к тому, что при $n = 1$ $b_{1,1}^* = -1$.

З а м е ч а н и е 3. Если хотя бы один коэффициент полинома $P_{n,N-1}(\theta)$ отрицателен, то задачи Коши (0.4) и (3.2) уже не являются мажорантными по отношению к исходному интегральному неравенству (0.1), хотя их аналитические решения по-прежнему выражаются в форме (3.14) и (3.15).

З а м е ч а н и е 4. Установленные классы задач Коши, имеющих аналитические решения в терминах W -функции Ламберта, расширяют перечень, приведенный в [3].

З а м е ч а н и е 5. Численные решения тестовых задач Коши, полученные при различных допустимых значениях N, n, d, a_N и b_{N-1} методом Рунге — Кутты — Фелдберга (rkf 45 23 библиотеки SE Tools системы MAPLE), а также правые границы их областей определения с точностью до погрешностей округления совпали со значениями $\theta_{n,N}^*(t)$ и $T_{n,N}^*$, найденными по формулам (3.14) и (3.15).

З а м е ч а н и е 6. Если коэффициенты a_i в (0.1) не удовлетворяют условию (1.5), то формулы (3.15) (3.17) при замене a_N на $\hat{a}_N = \max_{0 \leq i \leq N} a_i$ дают мажорантные оценки, не являющиеся неуплощаемыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Apartsyn A.S.** Unimprovable estimates of solutions for some classes integral inequalities // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2008. Vol. 16, no 7. P. 651–680.
2. On the Lambert W function / R.M. Corless [et al.] // Adv. Comput. Math. 1996. Vol. 5, no. 4. P. 329–359.
3. **Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.** W -функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики: учеб. пособие для вузов. Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2006. 160 с.
4. **Апарцин А.С.** Неуплощаемые оценки решений некоторых классов нелинейных интегральных неравенств // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: тр. IX Междунар. конф., посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2007. Т. 5. С. 60–77.
5. **Виленкин Н.Я.** Комбинаторика. М.: Наука, 1968. 328 с.

Апарцин Анатолий Соломонович

д-р физ.-мат. наук

главный науч. сотрудник

Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

e-mail: apartsyn@isem.sei.irk.ru

Спиряев Вадим Александрович

младший науч. сотрудник

Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

e-mail: eldin@mail.ru

Поступила 07.12.2009

УДК 512.54

**О НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРАХ ГРУППЫ S_n ,
ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ НА A_n ИЛИ НА $S_n \setminus A_n$. V^1**

В. А. Белоногов

Продолжаются исследования, связанные с гипотезой об отсутствии пар полупропорциональных неприводимых характеров у знакопеременных групп A_n . С целью доказательства этой гипотезы индукцией по n автором была ранее предложена новая гипотеза, которая формулируется в терминах пар χ^α и χ^β неприводимых характеров симметрической группы S_n , полупропорциональных на одном из множеств A_n и $S_n \setminus A_n$ (здесь α и β — разбиения числа n , соответствующие этим характерам). Доказанная в статье теорема исключает из рассмотрения один из пунктов этой гипотезы, в котором 4-ядра разбиений α и β имеют тип $3^k.2.\Sigma_l$.

Ключевые слова: симметрические группы, знакопеременные группы, неприводимые характеры, полупропорциональность.

V. A. Belonogov. On irreducible characters of the group S_n that are semiproportional on A_n or $S_n \setminus A_n$. V.

Investigations are continued concerning the conjecture that the alternating groups A_n have no pairs of semiproportional irreducible characters. In order to prove this conjecture by induction on n , the author earlier proposed a new conjecture, formulated in terms of pairs χ^α and χ^β of irreducible characters of the symmetric group S_n that are semiproportional on one of the sets A_n or $S_n \setminus A_n$ (α and β are partitions of the number n corresponding to these characters). The theorem proved in this paper allows one to exclude from consideration the item of this conjecture in which the 4-kernels of the partitions α and β have type $3^k.2.\Sigma_l$.

Keywords: symmetric groups, alternating groups, irreducible characters, semiproportionality.

Введение

Настоящая статья является продолжением статей [1–4], целью которых является получение доказательства следующей гипотезы, высказанной в [5].

Гипотеза 1. *Знакопеременная группа A_n при любом $n \in \mathbb{N}$ не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.*

Напомним, что функции φ и ψ из некоторого множества G в поле \mathbb{C} называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого подмножества M из G пропорциональны ограничения φ и ψ на M и их ограничения на $G \setminus M$; и они называются *полупропорциональными на S* , где $S \subseteq G$, если полупропорциональны их ограничения на S .

На основании работ [6, 7] в [1] выдвинута следующая более общая гипотеза А, которая формулируется в терминах неприводимых характеров группы S_n и после доказательства которой становится доказанной и гипотеза 1.

Используемые здесь обозначения стандартны (см. [8–10]) или введены в [1] (и напоминаются в разд. 1). В частности, $P(n)$ есть множество всех разбиений числа n ; χ^α — неприводимый характер группы S_n , соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$; α' есть разбиение, ассоциированное с α ; запись $\alpha = \varepsilon \beta$ означает, что $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$; для $\varepsilon \in \{1, -1\}$ положено

$$S_n^\varepsilon := \begin{cases} S_n^+ := A_n, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ S_n^- := S_n \setminus A_n, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006), программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Гипотеза А. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε . Тогда с точностью до перемены мест α и β верно одно из следующих утверждений:

(1) $\varepsilon = 1$ и выполнено одно из условий:

$$(1a) \alpha = 2^k \cdot () + (3) \text{ и } \beta = 2^k \cdot () + (0^k, 2, 1), \text{ где } k \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$(1b) \alpha = 2^k \cdot (1) + (3) \text{ и } \beta = 2^k \cdot (1) + (0^k, 1, 2), \text{ где } k \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

(2) $\varepsilon = -1$ и выполнено одно из условий (везде k, t целые):

$$(2a) \alpha = 3^k \cdot \Delta_l + (4) \text{ и } \beta = 3^k \cdot \Delta_l + (0^k, 2, 2), \text{ где } k \geq 0 \text{ и } l \geq 1;$$

$$(2b) \alpha = 3^k \cdot \Sigma_l + (4) \text{ и } \beta = 3^k \cdot \Sigma_l + (0^k, 3, 1), \text{ где } k \geq 0 \text{ и } l \geq 0;$$

$$(2в) \alpha = 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (4) \text{ и } \beta = 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (0^k, 1, 3), \text{ где } k \geq 0 \text{ и } l \geq 0.$$

Понятно, что доказательство гипотезы А индукцией по n достаточно провести в предположении, что выполнено следующее

Условие А. Пусть n — натуральное число такое, что при любом $\tilde{n} < n$ из того, что четвёрка $(\tilde{n}, \tilde{\varepsilon}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ удовлетворяет условию гипотезы А на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$ следует, что она удовлетворяет и заключению этой гипотезы на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$.

Согласно теореме А из [11] доказательство гипотезы А можно разделить на две части, в которых выполнены соответственно условия $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$ и $h_{12}^\alpha = h_{11}^\beta$. Итоговым результатом статей [1–4] является следующая теорема из [4].

Теорема А4. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε и выполнено условие А. Предположим, что $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. Тогда $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha}$ и пара $(\alpha^{11}, \beta^{11})$ удовлетворяет условию (2в) заключения гипотезы А на месте (α, β) .

В настоящей статье при условии теоремы А4 доказываемость условия (2в), а следовательно, и противоречивость предположения $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. Другими словами, здесь с опорой на теорему А4 доказываемость следующая

Теорема А5. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε и выполнено условие А. Тогда $h_{11}^\alpha \neq h_{11}^\beta$.

В разд. 2 исправляются некоторые неточности, встретившиеся в [1–4].

1. Вспомогательные результаты

Разбиение натурального числа n есть последовательность $\alpha = (a_1, \dots, a_l)$ натуральных чисел такая, что $a_1 \geq \dots \geq a_l$ и $n = a_1 + \dots + a_l$. i -й член a_i ($1 \leq i \leq l$) разбиения α обозначается через α_i . Разбиению $\alpha = (a_1, \dots, a_l) \in P(n)$ сопоставляется его диаграмма Юнга (или просто диаграмма) $[\alpha] := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq a_i\}$. Клетки (элементы) вида (i, i) диаграммы образуют её главную диагональ; её длина (мощность) обозначается через $d(\alpha)$. Говорят, что разбиения α и β ассоциированы или сопряжены, если диаграмма одного из них получается из диаграммы другого отражением относительно главной диагонали. Множество всех клеток (i, j) диаграммы $[\alpha]$ таких, что $[\alpha]$ не содержит клетки $(i + 1, j + 1)$, называется её границей.

Крюк диаграммы $[\alpha]$ (и разбиения α) с вершиной (i, j) есть множество $H_{ij}^\alpha := \{(i, j)\} \cup A \cup L$, где $A := \{(i, j + k) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (рука крюка) и $L := \{(i + k, j) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (нога крюка). Косой крюк с вершиной (i, j) диаграммы $[\alpha]$ есть часть границы диаграммы $[\alpha]$, "вырезанная" крюком H_{ij}^α . Его обозначают через $R(H_{ij}^\alpha)$. Положим $h_{ij}^\alpha := |H_{ij}^\alpha|$ ($= |R_{ij}^\alpha|$).

Разбиением числа 0 называют пустую (длины 0) последовательность $()$.

Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и H есть крюк разбиения α . Введём обозначения:

l_H — длина ноги крюка H ;

$\alpha - H$ есть разбиение с диаграммой $[\alpha] \setminus R(H)$; $\alpha^{ij} := \alpha - H_{ij}^\alpha$;

$H^\alpha(m)$ — множество всех крюков длины m в $[\alpha]$; $H^{\alpha,\beta}(m) := H^\alpha(m) \cup H^\beta(m)$; подобно обозначается объединение большего числа таких множеств.

Предложение 1.1 ([9, теоремы 2.1.7, 2.1.8, 2.1.12] или [10, утверждения 2.3, 4.12, 6.7]).

(1) Неприводимые характеры группы S_n принимают лишь целые значения.

(2) $\chi^{(n)} = 1_{S_n}$ (главный характер группы S_n), $\chi^{(1^n)} = \xi$ — знакопеременный характер S_n (линейный характер с ядром A_n).

(3) $\chi^{\alpha'} = \chi^\alpha \xi$ для всех $\alpha \in P(n)$.

(4) χ^α исчезает на $S_n \setminus A_n$ если и только если $\alpha = \alpha'$ ($\alpha \in P(n)$).

Напомним определения разбиений α и β из пунктов (1) и (2) гипотезы А. Пусть $m \in \{2, 3\}$ и Θ — разбиение длины $s \geq 0$. Согласно [1, определение 2.1] m -накрытием разбиения называется разбиение $m \cdot \Theta := (\Theta_1 + m + 1, \Theta_1 + 1, \Theta_2 + 1, \dots, \Theta_s + 1, 1^m)$ ($m \cdot () = (m + 1, 1^m)$). Положим $m^0 \cdot \Theta := \Theta$ и $m^k \cdot \Theta := m \cdot (m^{k-1} \cdot \Theta)$ для натуральных k . При $\gamma \in \{2^k \cdot (), 2^k \cdot (1)\}$ положим

$\gamma + (\tilde{3}) := 2^k \cdot () + (0^k, 2, 1)$, если $\gamma = 2^k \cdot ()$, и $\gamma + (\tilde{3}) := 2^k \cdot (1) + (0^k, 1, 2)$, если $\gamma = 2^k \cdot (1)$.

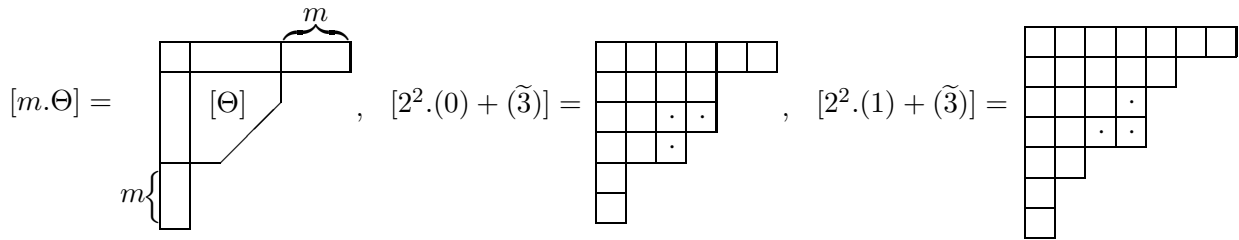


Рис. 1.1.

На рис. 1.1 изображены две диаграммы вида $[\beta] = [\gamma + (\tilde{3})]$. Точками помечены их единственные косые крюки длины 3. Далее, согласно [1, определение 2.2] положим

$\Delta_l := (l, l - 1, \dots, 2, 1)$ при $l \in \mathbb{N}$, и $\Sigma_l := ((2l)^2, (2l - 2)^2, \dots, 2^2)$ при $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($\Sigma_0 = ()$).

При γ , совпадающих с $3^k \cdot \Delta_l$, $3^k \cdot \Sigma_l$ или $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l$, определим разбиения $\gamma + (\tilde{4})$:

$3^k \cdot \Delta_l + (\tilde{4}) := 3^k \cdot \Delta_l + (0^k, 2, 2)$, $3^k \cdot \Sigma_l + (\tilde{4}) := 3^k \cdot \Sigma_l + (0^k, 3, 1)$, $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (\tilde{4}) := 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (0^k, 1, 3)$.

При $k = 0$ вид диаграмм разбиений $\beta = \gamma + (\tilde{4})$ из условий (2а)–(2в) гипотезы А показан на рис. 1.2. Их единственные косые крюки длины 4 помечены точками.

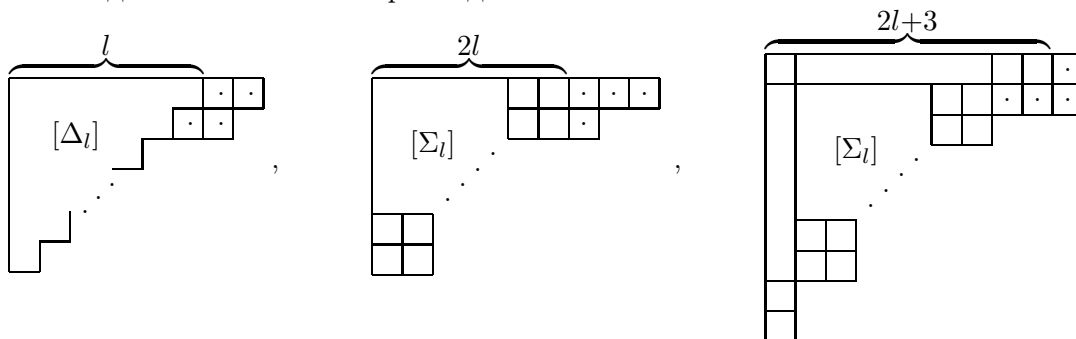


Рис. 1.2.

Предложение 1.2 [4, предложение 2.2]. *Равносильны условия:*

(1) разбиения α и β удовлетворяют одному из условий (1а) и (1б) гипотезы А;

(2) диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины 3 и после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма без крюков длины 3.

Предложение 1.3 [4, предложение 2.4]. *Равносильны условия:*

(1) разбиения α и β удовлетворяют одному из условий (2а)–(2в) гипотезы А;

(2) диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины 4 и после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма без крюков длины 4.

2. Поправки к частям I–IV

1. В условии теоремы 3.1 из [1] пропущено условие:

$$\alpha \text{ и } \beta \text{ не самоассоциированы.} \quad (3.1)$$

(Правильная формулировка приведена в теореме 3.1 настоящей статьи. Заметим, что при $\varepsilon = -1$ условие (3.1) автоматически выполнено.) Это не повлекло ошибок в доказательствах теорем. Однако необходимо несколько изменить формулировки двух вспомогательных утверждений:

- (i) п. (2) предложения 3.4 из [1] = п. (2) предложения 3.2 из [3] = предложение 3.2 из [4],
- (ii) предложение 3.6 из [1] = предложение 3.4 из [3].

В условия предложений из (i) нужно добавить условие (3.1), а предложениям из (ii) придать формулировку леммы 3.6 из [6] (а именно, после “Предложение 3.6” вставить “[6, лемма 3.6]”, убрать в конце выражение в скобках и вместо “модульно равны” написать “пропорциональны или полупропорциональны”, а также убрать доказательство (две строчки)).

Ссылки на теорему 3.1 имеются лишь в [1] в доказательстве предложения 3.4 и в [4] на с. 31 перед (5.30) (где $\hat{\alpha}^{11}$ и $\hat{\beta}^{11}$, очевидно, не самоассоциированы). Все ссылки на (i): в [1] на с. 160з; в [3] на с. 22⁵, 27 перед (5.15), 28 перед (5.16); в [4] на с. 20³, 26 перед (5.17), 30 перед (5.24). Все ссылки на (ii): в [1] на с. 155 после (5.2), 156¹⁶, 159¹⁴, 160¹³, 162₁₈; в [3] на с. 23⁵, 32². Мы видим, что с учётом сделанных выше поправок, все ссылки остаются корректными.

2. Замеченные опечатки:

в [1]: на с. 148² вместо “ $m \in 2, 3$ ” должно быть “ $m \in \{2, 3\}$ ”, на с. 152³ вместо “на S ” должно быть “на S и $\beta \neq \beta'$ ”, на с. 159¹⁴ вместо “3.5” должно быть “3.6”, на с. 160₂ вместо “3.3” должно быть “3.4(2) и (5.2)”, на с. 163₂ вместо “№ 4” должно быть “№ 5. С. 922–1006”;

в [2]: на с. 62₁₆ вместо “[3, предложение 3.6]” должно быть “[6, лемма 3.6]”;

в [3]: на с. 22₁₇ вместо “предложений 3.1 и 3.4” должно быть “предложения 3.1 и предположения А”, на с. 28₉ вместо “3.2” должно быть “3.2 и (5.2)”;

в [4]: на с. 20³ вместо “3.2” должно быть “3.2 и рис. 4.1”, на с. 26₁₅ вместо “3.2” должно быть “3.2 и рис. 5.1”, на с. 31₁₇ вместо “[2, теорема 1]” должно быть “[2, теорема 3.1] и рис. 5.9, 5.11”.

3. Рабочие результаты

Теорема 3.1. Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n , полупропорциональные на S_n^ε ($\alpha, \beta \in P(n), \varepsilon = \pm 1$), причём при $\varepsilon = 1$ α и β не самоассоциированы. Тогда

$$\chi^\alpha(g) = \pm \chi^\beta(g) \text{ для любого } g \in S_n^\varepsilon,$$

т. е. χ^α и χ^β модульно равны на S_n^ε . (См. разд. 2.)

Предложение 3.1 [1, предложение 3.3]. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Характеры χ^α и χ^β пропорциональны на S_n^ε если и только если либо $\alpha = \beta$, либо $\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$.

Пусть φ и ψ — обобщённые характеры группы G и $S \subseteq G$. Мы скажем, что φ и ψ модульно равны на S , если $|\varphi(s)| = |\psi(s)|$ для всех $s \in S$, т. е. функции $|\varphi|$ и $|\psi|$ равны на S . (Как обычно, $|\varphi|$ — функция с $|\varphi|(x) = |\varphi(x)|$ для всех $x \in G$.)

Из [1, предложение 3.4] и п. 2 разд. 2 следует

Предложение 3.2. Пусть характеры χ^α и χ^β полупропорциональны на S_n^ε ($\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$) и m — длина некоторого крюка из $[\alpha]$ или $[\beta]$. Тогда

(1) $\sum_{H \in \mathcal{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha-H}$ и $\sum_{K \in \mathcal{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta-K}$ пропорциональны или полупропорциональны на S_{n-m}^δ , где $\delta = (-1)^{m+1}\varepsilon$;

(2) если α и β не самоассоциированы, то $\sum_{H \in \mathcal{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha-H}$ и $\sum_{K \in \mathcal{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta-K}$ модульно равны на S_{n-m}^δ , где $\delta = (-1)^{m+1}\varepsilon$.

Предложение 3.3 (следует из [1, предложение 3.7]). Пусть χ^α и χ^β полупропорциональны на S_n^ε ($\alpha, \beta \in P(n)$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$). Предположим, что $[\alpha]$ имеет хотя бы один крюк некоторой длины m , а $[\beta]$ не имеет крюков длины m . Тогда $\varepsilon = (-1)^m$, α имеет единственный крюк H длины m и $\alpha - H = (\alpha - H)'$.

Предложение 3.4 [1, предложение 3.8]. Пусть A и B — подмножества из $P(n)$, m — длина крюка некоторого разбиения из $A \cup B$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Тогда если функции $\sum_{\alpha \in A} n_\alpha \chi^\alpha$ и $\sum_{\beta \in B} n_\beta \chi^\beta$, где $n_\alpha, n_\beta \in \mathbb{Z}$, модульно равны на S_n^ε , то при $\delta = (-1)^{m+1} \varepsilon$

$$\sum_{\alpha \in A} n_\alpha \sum_{H \in \mathcal{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha-H} \text{ и } \sum_{\beta \in B} n_\beta \sum_{K \in \mathcal{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta-K} \text{ модульно равны на } S_{n-m}^\delta.$$

Предложение 3.5 [3, предложение 3.7]. Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n , полупропорциональные на S_n^ε ($\alpha, \beta \in P(n), \varepsilon = \pm 1$), и выполнено условие А. Предположим, что α и β имеют точно по одному крюку H^α и H^β соответственно некоторой длины m . Положим $\tilde{\alpha} := \alpha - H^\alpha$ и $\tilde{\beta} := \beta - H^\beta$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (а) $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$;
- (б) $\varepsilon = (-1)^m$, $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}'$ и $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}'$;
- (в) $\varepsilon = (-1)^{m+1}$ и с точностью до перемены мест $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ имеем $\tilde{\alpha} = \Gamma + (3)$ и $\tilde{\beta} = \Gamma + (\tilde{3})$, где Γ есть $2^k \cdot ()$ или $2^k \cdot (1)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- (г) $\varepsilon = (-1)^m$ и с точностью до перемены мест $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ имеем $\tilde{\alpha} = \Theta + (4)$ и $\tilde{\beta} = \Theta + (\tilde{4})$, где Θ есть $3^k \cdot \Delta_l$, $3^k \cdot \Sigma_l$ или $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l$ при некоторых k, l .

4. Доказательство теоремы А5. Случай $k = 0$

По условию теоремы А5 χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε , где $\varepsilon = \pm 1$, и выполнено условие А. В противоречие с утверждением теоремы А5 предположим, что

$$h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta. \quad (4.1)$$

Согласно теореме А4

$$\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha} \quad (4.2)$$

и пара $(\alpha^{11}, \beta^{11})$ удовлетворяет условию (2в) заключения гипотезы А на месте (α, β) . Поэтому мы считаем, что (с точностью до перемены мест разбиений α и β и замены какого-либо из них ассоциированным ему разбиением)

$$\alpha^{11} = \gamma + (4) \text{ и } \beta^{11} = \gamma + (\tilde{4}), \text{ где } \gamma = 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l \text{ при некоторых } k, l.$$

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда

$$k = 0, \text{ т. е. } \gamma = 2 \cdot \Sigma_l, \text{ где } l \geq 0. \quad (4.3)$$

Диаграммы α и β имеют в этом случае вид, изображённый на рис. 4.1, где $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ (на рис. $l = 2$). В частности, α и β не самоассоциированы.

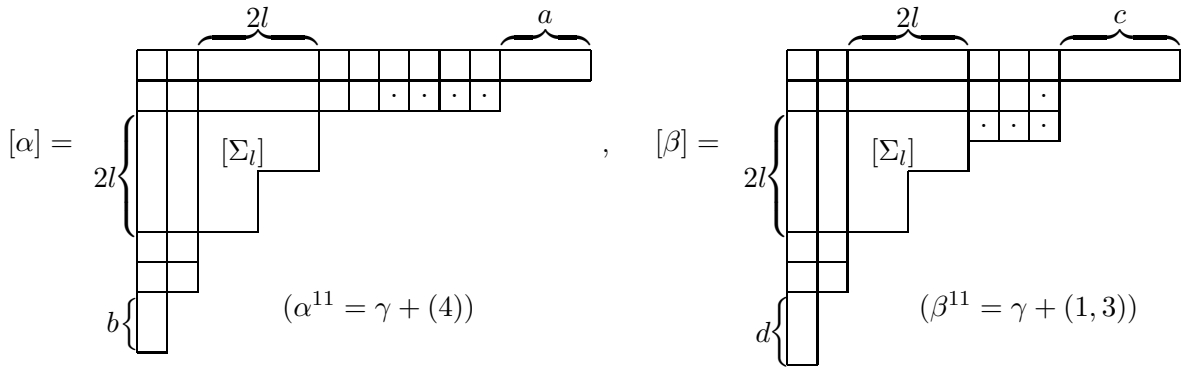


Рис. 4.1.

По (4.1) и (4.2) имеем

$$3 + a + b = c + d, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{c+d}. \quad (4.5)$$

Согласно [1, предложения 4.2, 4.3] гипотеза А верна в случае, когда $d(\alpha) \leq 2$. Поэтому $d(\alpha) \geq 3$ и, следовательно,

$$l \geq 1. \quad (4.6)$$

В следующих рассуждениях будут часто устанавливаться некоторые соотношения между длинами крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$. Для их проверки следует иметь в виду следующую таблицу таких длин, непосредственно вытекающую из рис. 4.1:

$h_{12}^\alpha = 4l + a + 10,$	$h_{12}^\beta = 4l + c + 7,$
$h_{13}^\alpha = 4l + a + 7,$	$h_{13}^\beta = 4l + c + 4,$
$h_{14}^\alpha = 4l + a + 6,$	$h_{14}^\beta = 4l + c + 3,$
$h_{15}^\alpha = 4l + a + 3,$	$h_{15}^\beta = \begin{cases} 4l + c & \text{при } l \geq 2, \\ 4l + c + 1 & \text{при } l = 1, \end{cases}$
$h_{21}^\alpha = 4l + b + 10,$	$h_{21}^\beta = 4l + d + 7,$
$h_{31}^\alpha = 4l + b + 3,$	$h_{31}^\beta = 4l + d + 6,$
$h_{41}^\alpha = 4l + b + 2,$	$h_{41}^\beta = 4l + d + 2,$
$h_{22}^\alpha = 4l + 9, \quad h_{23}^\alpha = 4l + 6,$	$h_{22}^\beta = 4l + 6, \quad h_{23}^\beta = 4l + 3,$
$h_{32}^\alpha = 4l + 2,$	$h_{32}^\beta = 4l + 5.$

Далее существенно используются свойства диаграмм, изображённых на рис. 4.2—4.4.

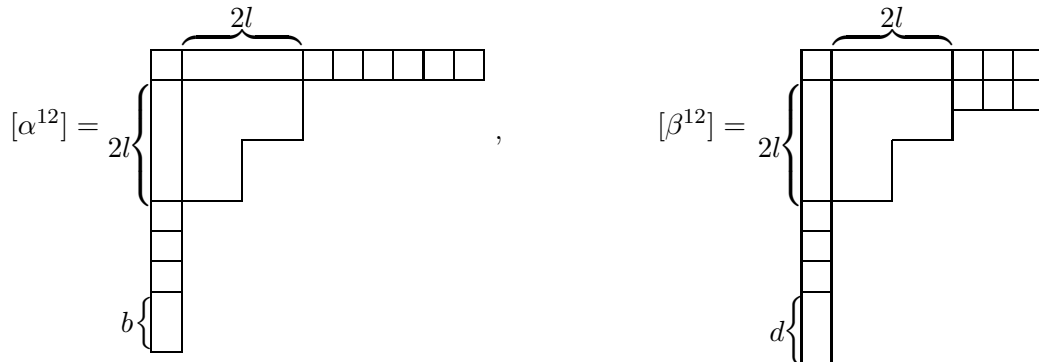


Рис. 4.2.

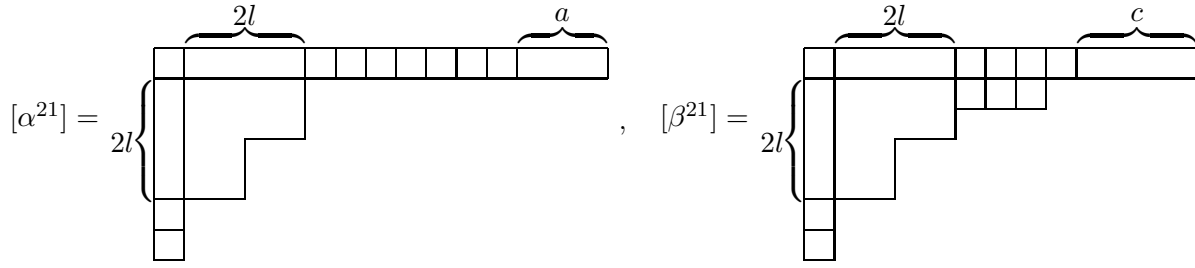


Рис. 4.3.

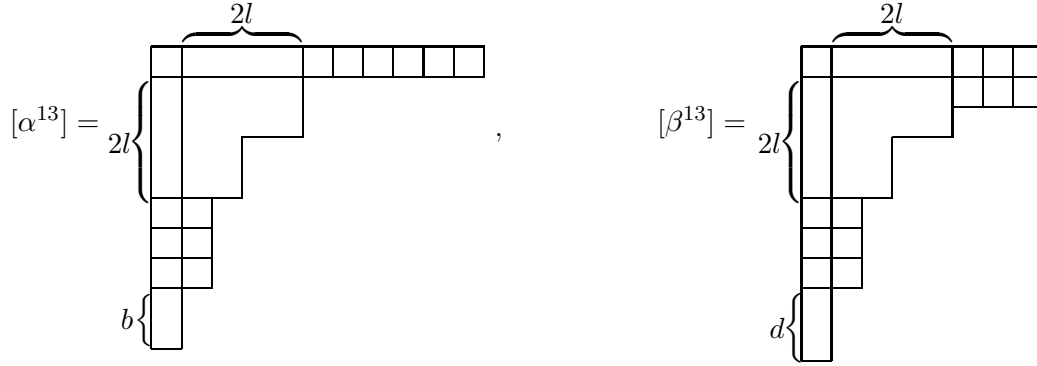


Рис. 4.4.

Поскольку разбиения α^{21} , α^{13} , β^{12} , β^{21} не самоассоциированы, то согласно предложению 3.3

$$[\alpha] \text{ имеет крюки длины } 4l + c + 7 (= h_{12}^\beta) \text{ и } 4l + d + 7 (= h_{21}^\beta), \quad (4.7)$$

$$[\beta] \text{ имеет крюки длины } 4l + b + 10 (= h_{21}^\alpha) \text{ и } 2l + a + 7 (= h_{13}^\alpha). \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (4.8) непосредственно следует, что

$$\max\{a, b + 3\} \leq \max\{c, d\} \leq \max\{a + 3, b + 3\}. \quad (4.9)$$

Предположим, что $b > a$. Тогда по (4.9) мы имеем $b + 3 = \max\{c, d\}$ и, рассуждая далее также, как в доказательстве теоремы А4 (см. в [4, конец с. 18]), получаем противоречие с помощью предложения 3.5. Следовательно,

$$a \geq b.$$

Пусть m — вторая по величине (после h_{11}^α) из длин крюков диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$. Тогда, очевидно, $m \in \{4l + a + 10, 4l + b + 10, 4l + c + 7, 4l + d + 7\}$ и $H^{\alpha, \beta}(m) \subseteq \{H_{12}^\alpha, H_{21}^\alpha, H_{12}^\beta, H_{21}^\beta\}$. Рассмотрим возможные варианты для $H^{\alpha, \beta}(m)$.

Обозначим через \mathcal{M} подпоследовательность максимальных по величине элементов последовательности $(a + 3, b + 3, c, d)$. Ввиду (4.4) $\mathcal{M} \neq (a + 3, b + 3, c, d)$. Так как $a \geq b$, то \mathcal{M} не может начинаться с $b + 3$ и ввиду (4.4) $\mathcal{M} \neq (a + 3, c, d)$. Кроме того, ввиду предложения 3.3 \mathcal{M} отлична от $(a + 3, b + 3)$, (c) , (d) и (c, d) . Поэтому

$$\mathcal{M} \in \{(a + 3), (a + 3, c), (a + 3, d), (a + 3, b + 3, c), (a + 3, b + 3, d)\}. \quad (4.10)$$

Эти возможности для \mathcal{M} рассматриваются в следующих пяти случаях.

Случай 4.1. Пусть $\mathcal{M} = (a + 3)$. Тогда $m = 2l + a + 10$, $a > b$, $a + 3 > \max\{c, d\}$ и $H^{\alpha, \beta}(2l + a + 4) = \{H_{12}^\alpha\}$, откуда по предложению 3.3 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$, т. е.

$$b = 3 \quad (\text{и } a \geq 4) \quad (4.11)$$

и по (4.9)

$$a \leq \max\{c, d\} \leq a + 2. \quad (4.12)$$

Предположим, что $c = d$. Тогда по (4.4), (4.11) и (4.12) $6 + a = 2c$, $a \leq c = a/2 + 3$, откуда следует, что

$$a = 4, c = d = 5 \quad \text{или} \quad a = c = d = 6.$$

В первом случае (см. список длин крюков) $H^{\alpha, \beta}(4l + 12) = \{H_{12}^{\beta}, H_{21}^{\beta}\}$ в противоречие с (4.7). Во втором случае $H^{\alpha, \beta}(4l + 10) = \{H_{13}^{\beta}\}$ и по предложению 3.3 разбиение β^{13} должно быть самоассоциированным, что противоречиво, так как $d \neq 0$ (см. рис. 4.4). Следовательно,

$$c \neq d.$$

Случай 4.1а. Пусть $c > d$. По (4.12) $c = a + i$, где $i \in \{0, 1, 2\}$ и по (4.4) $6 + a = a + i + d$, т. е. $d = 6 - i \leq 6$.

Если $c = a$, то $d = 6 < c = a$ и $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 7) = \{H_{13}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$. Следовательно, по предложению 3.5 для $\{\alpha^{13}, \beta^{12}\}$ должно выполняться одно из его утверждений (а)–(г) на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Но, как легко увидеть из рис. 4.2, 4.4 и предложений 1.2 и 1.3, каждое из них противоречиво.

Если $c = a + 1$, то $d = 5$ (следовательно, $a = c - 1 \geq 5$) и либо $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 8) = \{H_{12}^{\beta}\}$ (при $a > 5$), либо $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 8) = \{H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$ (при $a = 5$). Первая возможность противоречит (4.7). Во втором случае по предложению 3.5 для $\{\alpha^{21}, \beta^{12}\}$ должно выполняться одно из его утверждений (а)–(г) на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Но, как легко увидеть из рис. 4.2, 4.3 и предложений 1.2 и 1.3, каждое из них противоречиво.

Следовательно, $c = a + 2$ и $d = 4$. Тогда либо $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 9) = \{H_{12}^{\beta}\}$ (при $a > 4$), либо $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 9) = \{H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$ (при $a = 4$). Противоречивость обоих равенств доказывается так же, как и в предыдущих случаях.

Случай 4.1б. Пусть $d > c$. По (4.12) $d = a + i$, где $i \in \{0, 1, 2\}$ и по (4.4) $c = 6 - i \leq 6$.

Если $d = a$, то $c = 6 < d = a$ и $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 7) = \{H_{13}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}$. Следовательно, по предложению 3.5 для $\{\alpha^{13}, \beta^{21}\}$ должно выполняться одно из его утверждений (а)–(г) на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Но, как легко увидеть из рис. 4.2, 4.4 и предложений 1.2 и 1.3, каждое из них противоречиво.

Если $d = a + 1$, то $c = 5$ (следовательно, $a = d - 1 \geq 5$) и либо $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 8) = \{H_{21}^{\beta}\}$ (при $a > 5$), либо $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 8) = \{H_{21}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}$ (при $a = 5$). Первая возможность противоречит утверждению (4.7). Во втором случае по предложению 3.5 для $\{\alpha^{21}, \beta^{12}\}$ должно выполняться одно из его утверждений (а)–(г) на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Но, как легко увидеть из рис. 1.2, 1.3 и предложений 1.2 и 1.3, каждое из них противоречиво.

Следовательно, $d = a + 2$ и $c = 4$. Тогда либо $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 9) = \{H_{21}^{\beta}\}$ (при $a > 4$), либо $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 9) = \{H_{21}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}$ (при $a = 4$). Противоречивость обоих равенств доказывается так же, как и в предыдущих случаях.

Случай 4.1 противоречив.

Случай 4.2. Пусть $\mathcal{M} = (a + 3, c)$. Тогда по (4.4) $d = b$ и, следовательно, $c - 3 = a > b = d$. Из списка длин крюков видно, что $H^{\alpha, \beta}(2l + a + 10) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$, и, следовательно, для $\tilde{\alpha} = \alpha^{12}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{12}$ выполнено одно из условий (а)–(г) предложения 3.5. Но, как видно из рис. 4.2, 4.4 и предложений 1.2 и 1.3, каждое из них противоречиво.

Случай 4.2 противоречив.

Случай 4.3. Пусть $\mathcal{M} = (a + 3, d)$. Тогда по (4.4) $c = b$ и, следовательно, $d - 3 = a > b = c$. Из списка длин крюков видно, что $H^{\alpha, \beta}(4l + a + 10) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}$ и, следовательно, для $\tilde{\alpha} = \alpha^{12}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{12}$ выполнено одно из условий (а)–(г) предложения 3.5. Но противоречивость этих условий доказывается так же, как и в предыдущем случае.

Случай 4.3 противоречив.

Случай 4.4. Пусть $\mathcal{M} = (a + 3, b + 3, c)$. Тогда

$$H^{\alpha, \beta}(2l + a + 10) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}, \quad (4.13)$$

причём $a = b = c - 3$ и по (4.4) $d = a$. Таким образом, с учётом (4.5) имеем

$$a = b = d = c - 3 \quad \text{и} \quad \varepsilon = -1. \quad (4.14)$$

Из списка длин крюков в α и β (приведённого после (4.6)) видно, что при $a = b = d = c - 3 = 0$ $\mathbb{H}^{\alpha, \beta}(2l+9) = \{H_{22}^\alpha\}$, и тогда по предложению 3.3 должно быть $\alpha^{22} = (\alpha^{22})'$, что противоречиво. Следовательно,

$$a > 0. \quad (4.15)$$

Согласно рис. 4.1 длины ног крюков H_{12}^α и H_{21}^α равны $2l+3$ и $2l+a+2$ соответственно. Отсюда и из (4.13) согласно предложению 3.2(2) следует (так как α и β не самоассоциированы), что

$$|\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^{a+1}\chi^{\alpha^{21}}| \quad \text{и} \quad |\chi^{\beta^{12}}| \quad \text{равны на } S_q^\delta, \quad \text{где } \delta = (-1)^{a+1}\varepsilon = (-1)^a \quad (4.16)$$

и $q = n - (2l + a + 10)$.

Если $a = 3$, то $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ и по предложению 1.1(4) $\chi^{\alpha^{12}}$ исчезает на S_q^- . Но тогда по (4.16) $|\chi^{\alpha^{21}}|$ и $|\chi^{\beta^{12}}|$ равны на S_q^- и, в частности, $\chi^{\alpha^{21}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ пропорциональны или полупропорциональны на S_q^- . Теперь применение предложения 3.1 и условия А приводит к противоречию (см. рис. 4.2, 4.3).

Итак,

$$a \neq 3. \quad (4.17)$$

Мы хотим применить к (4.16) предложение 3.4. Для этого выпишем некоторые длины крюков в диаграммах $[\alpha^{12}]$, $[\alpha^{21}]$ и $[\beta^{12}]$, расположив их в трёх столбцах, соответствующих этим диаграммам (опуская в обозначениях верхний индекс).

в $[\alpha^{12}]$:	в $[\alpha^{21}]$:	в $[\beta^{12}]$:
$h_{11} = 4l + a + 10,$	$h_{11} = 4l + a + 10,$	$h_{11} = 4l + a + 7,$
$h_{12} = 4l + 6,$	$h_{12} = 4l + a + 7,$	$h_{12} = 4l + 3,$
$h_{13} = 4l + 5,$	$h_{13} = 4l + a + 6,$	$h_{13} = 4l + 2,$
$h_{14} = 4l + 2,$	<u>$h_{14} = 4l + a + 3,$</u>	
$h_{15} = 4l + 1,$	$h_{15} = 4l + a + 2,$	
<u>$h_{21} = 4l + a + 3,$</u>	$h_{21} = 4l + 2,$	$h_{21} = 4l + a + 6,$
$h_{31} = 4l + a + 2,$	$h_{31} = 4l + 1,$	$h_{31} = 4l + a + 2,$
$h_{41} = 4l + a - 1,$		$h_{41} = 4l + a - 1,$
		$h_{51} = 4l + a - 2,$
$h_{22} = 4l - 1,$	$h_{22} = 4l - 1,$	$h_{22} = 4l + 2.$

Предположим, что $a \neq 2$ и положим $s := 4l + a + 3$. Так как $a \notin \{0, 3\}$ по (4.15) и (4.17), то, как видно из приведённого выше списка длин крюков, $\mathbb{H}^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{12}}(s) = \{H_{21}^{\alpha^{12}}, H_{14}^{\alpha^{21}}\}$. Отсюда и из (4.16) (где $\delta = (-1)^a$) согласно предложению 3.4 получаем

$$\chi^{(\alpha^{12})^{21}} + (-1)^{a+1}\chi^{(\alpha^{21})^{14}} \quad \text{равно } 0 \quad \text{на } S_{q-s}^\sigma, \quad \text{где } \sigma = (-1)^{s+1}\delta = 1,$$

т. е. $\chi^{(\alpha^{12})^{21}}$ равно $\chi^{(\alpha^{21})^{14}}$ на A_{q-s} . Поэтому согласно предложению 1.4 должно быть либо $(\alpha^{12})^{21} = (\alpha^{21})^{14}$, либо разбиения $(\alpha^{12})^{21}$ и $(\alpha^{21})^{14}$ оба самоассоциированы. Но это противоречиво, что видно из рис. 4.2 и 4.3: $(\alpha^{12})^{21} = \Sigma_l + (7)$, $(\alpha^{21})^{14} = (\Sigma_l + (3, 1, 3))'$.

Следовательно, $a = 2$. Если $l > 1$, то из списка длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ и рис. 4.1 видно, что $\mathbb{H}^{\alpha, \beta}(4l+3) = \{H_{23}^\beta\}$. (При $l = 1$ в $\mathbb{H}^{\alpha, \beta}(4l+3)$ войдут ещё h_{17}^α и h_{18}^β .) Поэтому согласно предложению 3.3 должно быть $\beta^{23} = (\beta^{23})'$, что противоречиво.

Пусть, наконец, $a = 2$ и $l = 1$. Тогда $n = 36$ и утверждение (4.16) имеет вид:

$$|\chi^{\alpha^{12}} - \chi^{\alpha^{21}}| \quad \text{и} \quad |\chi^{\beta^{12}}| \quad \text{равны на } A_{20}. \quad (4.18)$$

Из списка длин крюков в $[\alpha^{12}]$, $[\alpha^{21}]$ и $[\beta^{12}]$ видно, что $H^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{12}}(4l+3 (= 7)) = \{H_{16}^{\alpha^{21}}, H_{12}^{\beta^{12}}\}$. Отсюда и из (4.18) согласно предложению 3.4 получаем

$$|\chi^{(\alpha^{21})^{16}}| \text{ и } |\chi^{(\beta^{12})^{12}}| \text{ равны на } A_{13},$$

что противоречиво, так как при $g = (9, 1^3) \in A_{13}$ по теореме Мурнагана — Накаямы (см. [9, теорема 2.4.7] или [1, предложение 1.2]) имеем $\chi^{(\alpha^{21})^{16}}(g) = \chi^{(5, 3^2, 1^2)}(g) = 2$, в то время как $\chi^{(\beta^{12})^{12}}(g) = \chi^{(5, 2, 1^6)}(g) = 0$.

Таким образом, случай 4.4 противоречив.

Случай 4.5. Пусть $\mathcal{M} = (a + 3, b + 3, d)$. Тогда выполняется равенство

$$H^{\alpha, \beta}(4l + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}.$$

Отсюда и из (4.4), (4.5) следует, что

$$a = b = c = d - 3 \quad (d \geq 3) \quad \text{и} \quad \varepsilon = -1.$$

Если $a \neq 2$, то, как видно из списка длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ (приведённого после (4.6))

$$H^{\alpha, \beta}(4l + a + 7) = \{H_{13}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\},$$

и по предложению 3.5 для $\{\alpha^{13}, \beta^{12}\}$ должно выполняться одно из его утверждений (а)–(г) на месте $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\}$. Однако противоречивость этих утверждений видна на рис. 4.3 и 4.4.

Следовательно, $a = b = c = 2$ и $d = 5$. Тогда

$$H^{\alpha, \beta}(4l + a + 6) = \{H_{14}^{\alpha}\},$$

и согласно предложению 3.3 должно быть $\alpha_{14} = (\alpha_{14})'$, что противоречиво (диаграмма $[\alpha^{14}]$ получается из $[\alpha^{13}]$ добавлением одной клетки к третьему столбцу).

Случай 4.5 невозможен.

Таким образом (см. (4.10)), предположение $k = 0$ противоречиво.

5. Доказательство теоремы А5. Случай $k \geq 1$

Мы снова считаем, что выполнено условие теоремы А5, но не выполнено её заключение. В частности,

$$h_{11}^{\alpha} = h_{11}^{\beta}$$

и ввиду теоремы А4 выполнено утверждение (2в) гипотезы А. Поскольку в разд. 4 доказана противоречивость случая $k = 0$, то здесь предполагается, что $k > 0$. Итак, мы считаем, что

$$\alpha^{11} = \gamma + (4) \quad \text{и} \quad \beta^{11} = \gamma + (\tilde{4}), \quad \text{где} \quad \gamma = 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_l \quad \text{при} \quad k \geq 1 \quad \text{и} \quad l \geq 0.$$

Мы докажем, что этот случай также противоречив.

Диаграммы разбиений α и β изображены на рис. 5.1 ($\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t = \gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$); вид разбиений γ и $\tilde{\gamma}$ показан на рис. 5.2 (где взято $k = 2$ и $l = 2$ или $l = 0$).

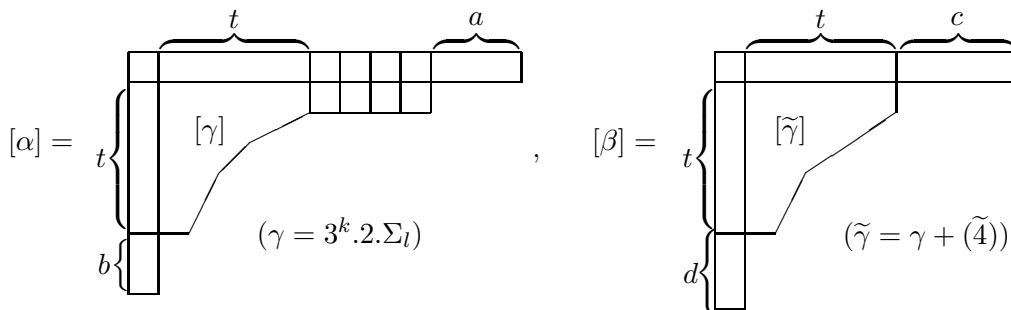


Рис. 5.1.

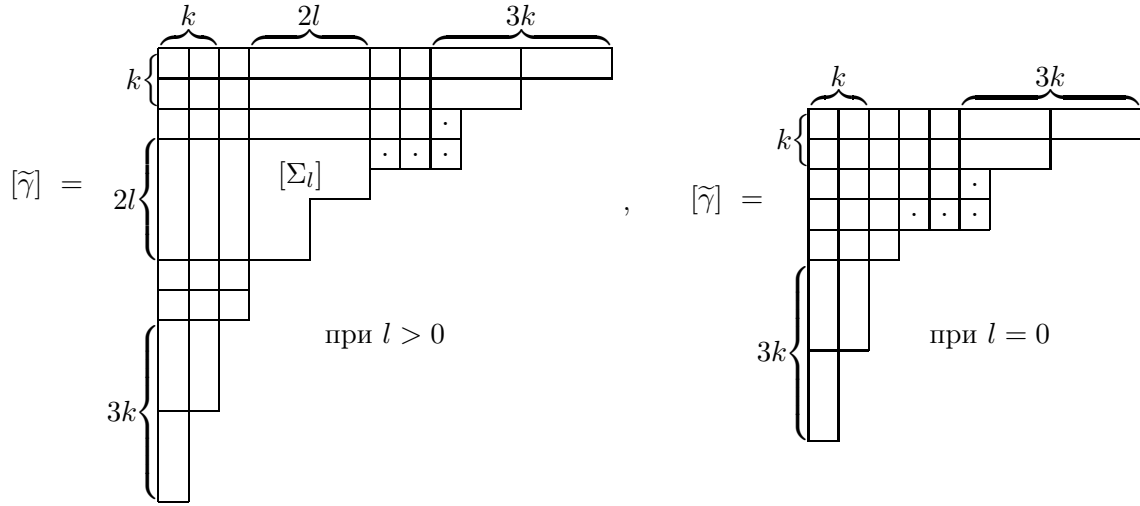


Рис. 5.2.

Диаграмма $[\gamma]$ получается из $[\tilde{\gamma}]$ (см. рис. 5.2) удалением клеток, помеченных точками. Как видно из рисунков,

$$t = 4k + 2l + 3. \quad (5.1)$$

Здесь $h_{11}^\alpha = 2t + a + b + 5$, $h_{11}^\beta = 2t + c + d + 1$ и, поскольку $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$,

$$4 + a + b = c + d. \quad (5.2)$$

Так как по теореме A4 $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha}$, то

$$\varepsilon = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{1+c+d}. \quad (5.3)$$

Используя рис. 5.1 и 5.2 и очевидные равенства $h_{11}^\gamma = 2t - 1$ и $h_{12}^\gamma = h_{21}^\gamma = 2t - 5$, подсчитаем длины некоторых крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$:

$$h_{12}^\alpha = 2t + a + 4,$$

$$h_{12}^\beta = 2t + c,$$

$$h_{13}^\alpha = 2t + a,$$

$$h_{13}^\beta = 2t + c - 4,$$

$$h_{14}^\alpha = \begin{cases} 2t + a - 4 & \text{при } k \geq 2, \\ 2t + a - 3 & \text{при } k = 1, \end{cases}$$

$$h_{14}^\beta = \begin{cases} 2t + c - 8 & \text{при } k \geq 2, \\ 2t + c - 7 & \text{при } k = 1, l > 0, \\ 2t + c - 6 & \text{при } k = 1, l = 0, \end{cases}$$

$$h_{21}^\alpha = 2t + b + 4,$$

$$h_{21}^\beta = 2t + d,$$

$$h_{31}^\alpha = 2t + b - 4,$$

$$h_{31}^\beta = \begin{cases} 2t + d - 4 & \text{при } k \geq 2, \\ 2t + d - 3 & \text{при } k = 1, \end{cases}$$

$$h_{41}^\alpha = \begin{cases} 2t + b - 8 & \text{при } k \geq 2, \\ 2t + b - 7 & \text{при } k = 1, \end{cases}$$

$$h_{41}^\beta = \begin{cases} 2t + d - 8 & \text{при } k \geq 3, \\ 2t + d - 7 & \text{при } k = 2, \\ 2t + d - 4 & \text{при } k = 1, \end{cases}$$

$$h_{22}^\alpha = 2t + 3,$$

$$h_{22}^\beta = 2t - 1.$$

Далее нам потребуются диаграммы, изображённые на рис. 5.3, 5.4.

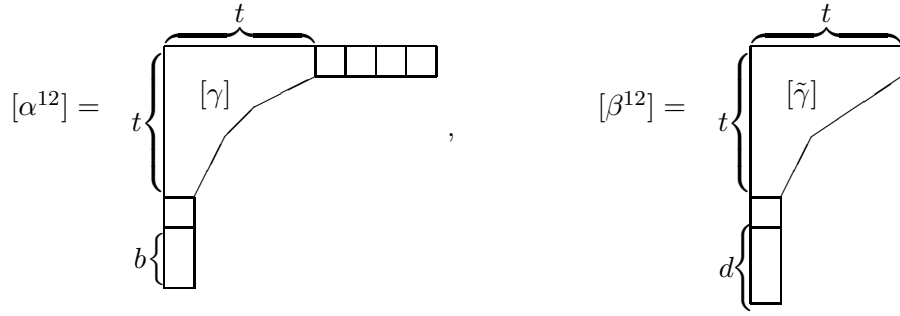


Рис. 5.3.

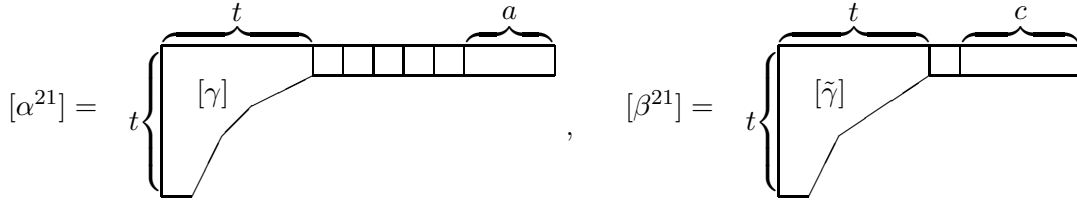


Рис. 5.4.

Отметим, что рис. 5.3 и 5.4 совпадают по форме с рис. 5.3 и 5.4 из [4]. Хотя это совпадение формальное, так как диаграммы $[\gamma]$ и $[\tilde{\gamma}]$ имеют в настоящей статье другой вид чем в [4] (сравните рис. 5.2 с рис. 5.2 из [4]), однако схема дальнейшего доказательства во многом совпадает со схемой доказательства в [4, разд. 5]. Похожие рассуждения проводятся здесь кратко, но тем не менее требуют от читателя тщательной проверки.

Так как разбиения α^{21} , α^{13} , β^{12} , β^{21} не самоассоциированы (что видно из рис. 5.3, 5.4 и того факта, что диаграмма $[\alpha^{13}]$, получающаяся из диаграммы $[\alpha^{12}]$ удлинением второго столбца до величины $t + 1$), то согласно предложению 3.3

$$[\alpha] \text{ имеет крюки длины } 2t + c (= h_{12}^\beta) \text{ и } 2t + d (= h_{21}^\beta), \quad (5.5)$$

$$[\beta] \text{ имеет крюки длины } 2t + a (= h_{13}^\alpha) \text{ и } 2t + b + 4 (= h_{21}^\alpha). \quad (5.6)$$

Из (5.5) и (5.6) непосредственно следует, что

$$\max\{a, b + 4\} \leq \max\{c, d\} \leq \max\{a + 4, b + 4\}. \quad (5.7)$$

Предположим, что $b > a$. Тогда по (5.7) мы имеем $b + 4 = \max\{c, d\}$ и, рассуждая далее также, как в доказательстве теоремы А4 (см. [4, абзац после (5.7)]), получаем противоречие с помощью предложения 3.5. Следовательно,

$$a \geq b. \quad (5.8)$$

Пусть \mathcal{M} — подпоследовательность максимальных по величине элементов последовательности $(a + 4, b + 4, c, d)$. По (5.2) $\mathcal{M} \neq (a + 4, b + 4, c, d)$. По (5.8) \mathcal{M} не может начинаться с $b + 4$. Ввиду (5.2) и (5.8) $\mathcal{M} \neq (a + 4, c, d)$. Кроме того, ввиду предложения 3.3 \mathcal{M} отлична от $(a + 4, b + 4)$, (c) , (d) и (c, d) . Поэтому

$$\mathcal{M} \in \{(a + 4), (a + 4, c), (a + 4, d), (a + 4, b + 4, c), (a + 4, b + 4, d)\}. \quad (5.9)$$

Случай 5.1. Пусть $\mathcal{M} = (a + 4)$. Тогда $a > b$ и $H^{\alpha, \beta}(2t + a + 4) = \{H_{12}^\alpha\}$, откуда по предложению 3.3 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ и поэтому

$$b = 3. \quad (5.10)$$

Далее, по (5.7) $a \leq \max\{c, d\} \leq a + 3$. Предположим, что $\max\{c, d\} = a + i$, где $1 \leq i \leq 3$, и, следовательно, $\max\{h_{12}^\beta, h_{21}^\beta\} = 2t + a + i$. Тогда существующий по (5.5) крюк длины $2t + a + i$

в $[\alpha]$ должен совпадать с H_{21}^α (см. список длин крюков). Поэтому $2t + a + i = 2t + b + 4 = 2t + 7$, $a = 7 - i \in \{4, 5, 6\}$. Если $i \neq 2$, то a чётно и ввиду (5.2) $c \neq d$. Но тогда $H^{\alpha, \beta}(2t + a + i) = \{H_{21}^\alpha, H^\beta\}$, где $H^\beta \in \{H_{12}^\beta, H_{21}^\beta\}$, и применение предложения 3.5 приводит к противоречию. Поэтому

$$\max\{c, d\} \in \{a, a + 2\}. \quad (5.11)$$

Предположим, что $c \neq d$. Пусть $\tilde{c} := \max\{c, d\}$, $\tilde{d} := \min\{c, d\}$ и H^β — крюк длины $2t + \tilde{c}$ в $[\beta]$ ($H^\beta \in \{H_{12}^\beta, H_{21}^\beta\}$). По (5.5) $[\alpha]$ имеет крюк длины $2t + \tilde{c}$. Из (5.11), (5.2) и из списка длин крюков видно, что либо $\tilde{c} = a > \tilde{d} = b + 4$ и $H^{\alpha, \beta}(2t + \tilde{c}) = \{H_{13}^\alpha, H^\beta\}$, либо $\tilde{c} = a + 2 > \tilde{d} = b + 2$ и $H^{\alpha, \beta}(2t + \tilde{c}) = \{H_{21}^\alpha, H^\beta\}$. Но в каждом из этих случаев получается противоречие с предложением 3.5.

Следовательно, $c = d$. Но тогда по (5.2) и (5.10) $7 + a = 2c$, откуда $c \neq a + 2$ (иначе $a = 3 = b$) и ввиду (5.11) и (5.2)

$$a = c = d = 7.$$

Из строения диаграмм $[\alpha]$, $[\beta]$ (см. рис. 5.1, 5.2, а также рис. 5.5 и 5.5а) усматриваются следующие соотношения в случае, когда $l > 0$:

$$h_{ij}^\alpha \text{ нечётно при } i \leq k + 2 \text{ и } j \leq k + 2, \quad h_{1, k+3}^\alpha = 4k + 4l + 14, \quad h_{k+3, 1}^\alpha = 4k + 4l + 6, \quad (5.12)$$

$$h_{ij}^\beta \text{ нечётно при } i \leq k + 1 \text{ и } j \leq k + 2, \quad h_{1, k+3}^\beta = 4k + 4l + 10, \quad h_{k+2, 1}^\beta = 4k + 4l + 14. \quad (5.13)$$

В случае, когда $l = 0$, как легко увидеть, соотношения (5.12) остаются в силе, а соотношения (5.13) заменяются следующими:

$$h_{ij}^\beta \text{ нечётно при } i \leq k + 1 \text{ и } j \leq k + 3, \quad h_{1, k+4}^\beta = 4k + 4l + 10, \quad h_{k+2, 1}^\beta = 4k + 4l + 14. \quad (5.14)$$

Из (5.12)–(5.14) следует, что $H_{1, k+3}^\alpha$ и $H_{k+2, 1}^\beta$ — единственные крюки максимальной чётной длины (равной $s := 4k + 4l + 14$) в $[\alpha]$ и $[\beta]$ соответственно. (На рис. 5.5 и 5.5а s равно 26 и 18 соответственно.)

Длины крюков в $[\alpha]$:

41	37	33	29	26	25	22	21	19	18	17	15	14	13	12	11	10	9	7	...
33	29	25	21	18	17	14	13	11	10	9	7	6	5	4	3	2	1		
25	21	17	13	10	9	6	5	3	2	1									
21	17	13	9	6	5	2	1												
18	14	10	6	4	2														
17	13	9	5	3	1														
14	10	6	2																
13	9	5	1																
11	7	3																	
10	6	2																	
9	5	1																	
7	3																		
6	2																		
5	1																		
3																			
⋮																			

$(k = 2, l = 1),$

29	25	21	18	17	15	14	13	12	11	10	9	7	...
21	17	13	10	9	7	6	5	4	3	2	1		
13	9	5	2	1									
10	6	2											
9	5	1											
7	3												
6	2												
5	1												
3													
⋮													

$(k = 1, l = 0)$

Рис. 5.5.

Длины крюков в $[\beta]$:

41	33	29	25	22	21	19	18	17	14	13	11	10	9	7	...
33	25	21	17	14	13	11	10	9	6	5	3	2	1		
29	21	17	13	10	9	7	6	5	2	1					
→26	18	14	10	7	6	4	3	2							
25	17	13	9	6	5	3	2	1							
21	13	9	5	2	1										
18	10	6	2												
17	9	5	1												
15	7	3													
14	6	2													
13	5	1													
11	3														
10	2														
9	1														
7															
⋮															

$(k = 2, l = 1),$

29	21	17	15	14	13	10	9	7	...
21	13	9	7	6	5	2	1		
→18	10	6	4	3	2				
17	9	5	3	2	1				
13	5	1							
11	3								
10	2								
9	1								
7									
⋮									

$(k = 1, l = 0)$

Рис. 5.5а.

Поэтому при любом $l \geq 0$ $H^{\alpha, \beta}(4k+4l+14) = \{H_{1, k+3}^{\alpha}, H_{k+2, 1}^{\beta}\}$ и согласно предложению 3.5 для $(\alpha^{1, k+3}, \beta^{k+2, 1})$ должно выполняться одно из его утверждений (а)–(г) на месте $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Однако их противоречивость следует из рис. 5.1 (достаточно заметить, что длины первой строки и первого столбца в $\alpha^{1, k+3}$ равны $t+4$ и $t+4$, а в $\beta^{k+2, 1}$ — $t+8$ и t) и предложений 1.2 и 1.3.

Случай 5.1 противоречив.

Случай 5.2. Пусть $M = (a+4, c)$. Тогда по (5.2) $d = b$ и, как видно из списка длин крюков, $H^{\alpha, \beta}(2t+a+4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$. Следовательно, при $\tilde{\alpha} = \alpha^{12}$ и $\tilde{\beta} = \beta^{12}$ выполнено одно из условий (а)–(г) предложения 3.5. Противоречивость этих условий видна из рис. 5.3.

Случай 5.2 противоречив.

Случай 5.3. Пусть $M = (a+4, d)$. Тогда по (5.2) $c = b$ и верно равенство $H^{\alpha, \beta}(2t+a+4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}$, противоречивость которого доказывается так же, как и в предыдущем случае.

Случай 5.3 противоречив.

Случай 5.4. Пусть $M = (a+4, b+4, c)$. Тогда

$$H^{\alpha, \beta}(2t+a+4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\} \quad (5.15)$$

и ввиду (5.2) и (5.3)

$$a = b = d = c - 4 \quad \text{и} \quad \varepsilon = -1. \quad (5.16)$$

Согласно предложению 3.2(2) из (5.15) следует (так как α и β не самоассоциированы), что

$$|\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^{a+1}\chi^{\alpha^{21}}| \quad \text{и} \quad |\chi^{\beta^{12}}| \quad \text{равны на} \quad S_q^{\delta}, \quad \text{где} \quad \delta = (-1)^{a+1}\varepsilon = (-1)^a \quad (5.17)$$

и $q = n - (2t+a+4)$.

Если $a = 3$, то $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ и по предложению 1.1(5) $\chi^{\alpha^{12}}$ исчезает на $S_q^- = S_q^{\delta}$, а тогда утверждение (5.17) имеет вид: $\chi^{\alpha^{21}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ модульно равны (и, следовательно, пропорциональны или полупропорциональны) на S_q^- . Но противоречивость этого условия легко вытекает из предложения 3.1 и условия А (см. рис. 5.3, 5.4). Следовательно,

$$a \neq 3. \quad (5.18)$$

Наша дальнейшая цель — упростить соотношение (5.17) (уменьшить число характеров или избавиться от параметра a) с помощью предложения 3.4.

Случай 5.4а. Предположим сначала, что $k \geq 2$.

Вычислим некоторые длины крюков диаграмм α^{12} , α^{21} , β^{12} , используя рис. 5.2–5.4 и (для наглядности) рис. 5.6, 5.7, где эти диаграммы с указанием длин их крюков изображены при $k = 2$ и $l = 1$ и положено $x' := x + a$.

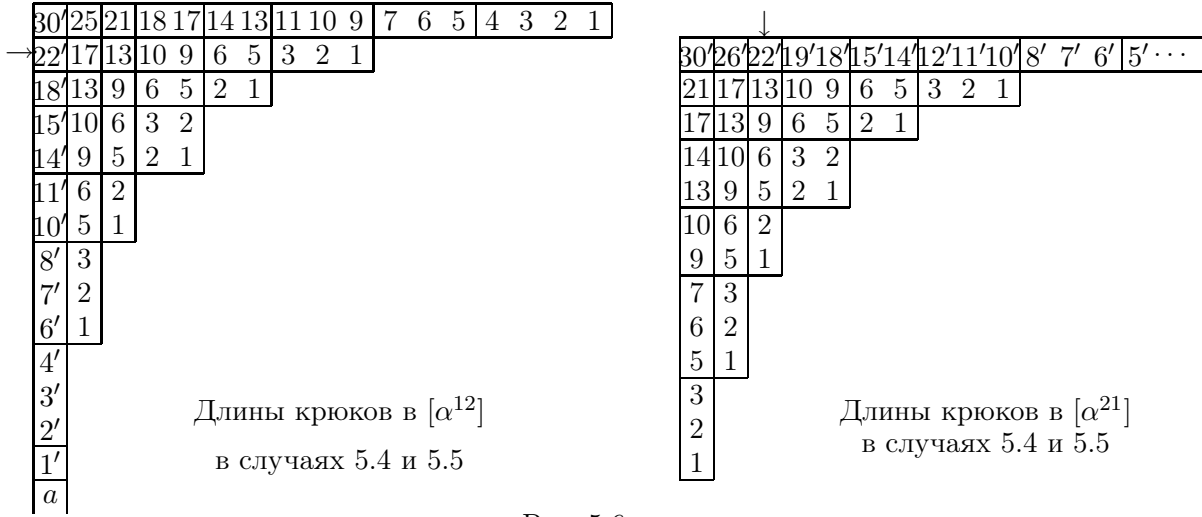


Рис. 5.6.

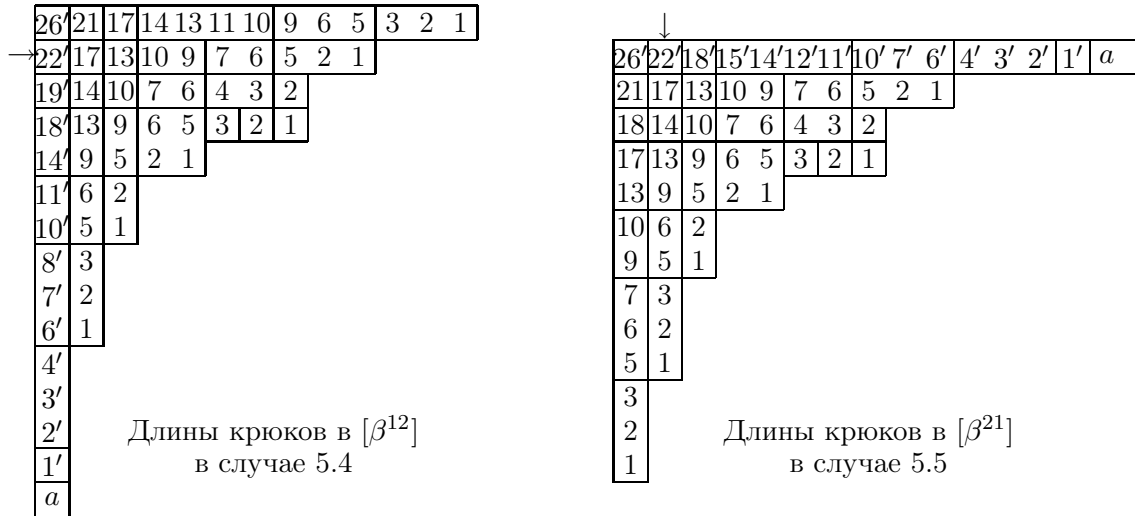


Рис. 5.7.

При любом $k \geq 2$ находим:

$$\begin{aligned}
 h_{11}^{\alpha^{12}} &= 2t + a + 4, & h_{12}^{\alpha^{12}} &= 2t - 1, & h_{13}^{\alpha^{12}} &= 2t - 5, & h_{21}^{\alpha^{12}} &= \underline{2t + a - 4}; \\
 h_{11}^{\alpha^{21}} &= 2t + a + 4, & h_{12}^{\alpha^{21}} &= 2t + a, & h_{13}^{\alpha^{21}} &= \underline{2t + a - 4}, & h_{21}^{\alpha^{21}} &= 2t - 5; \\
 h_{11}^{\beta^{12}} &= 2t + a, & h_{12}^{\beta^{12}} &= 2t - 5, & h_{13}^{\beta^{12}} &= 4t - 2, & h_{21}^{\beta^{12}} &= \underline{2t + a - 4}.
 \end{aligned}$$

Так как $a \neq 3$ по (5.18), то из приведённых выше равенств видно, что

$$H^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{12}}(2t + a - 4) = \{H_{21}^{\alpha^{12}}, H_{13}^{\alpha^{21}}, H_{21}^{\beta^{12}}\}. \quad (5.19)$$

Положим

$$\bar{\alpha} := (\alpha^{12})^{21}, \quad \hat{\alpha} := (\alpha^{21})^{13} \text{ и } \bar{\beta} := (\beta^{12})^{21}.$$

Из (5.17) и (5.19) согласно предложению 3.4 получаем (так как длины ног крюков $H_{21}^{\alpha^{12}}$ и $H_{13}^{\alpha^{21}}$ равны соответственно $t + a - 1$ и $t - 7$):

$$|\chi^{\bar{\alpha}} - \chi^{\hat{\alpha}}| \text{ и } |\chi^{\bar{\beta}}| \text{ равны на } S_r^\sigma, \text{ где } \sigma = (-1)^{a+1}\delta = -1 \text{ и } r = q - (2t + a - 4). \quad (5.20)$$

К этому соотношению мы опять применим предложение 3.4. Для этого нам нужно знать вид диаграмм $[\bar{\alpha}]$, $[\hat{\alpha}]$ и $[\bar{\beta}]$ и длины некоторых их крюков. Из рис. 5.3 и 5.4 получаем

$$\bar{\alpha} = 3^{k-1} \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (8), \quad \hat{\alpha} = (3^{k-1} \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (4, 4))', \quad \bar{\beta} = (3^{k-1} \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (\tilde{4})) + (4)$$

($3^{k-1} \cdot 2 \cdot \Sigma_l = \gamma^{11}$, $3^{k-1} \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (\tilde{4}) = \tilde{\gamma}^{11}$). На рис. 5.8 изобразим диаграммы этих разбиений при $k = 2$ и $l = 1$ с указанием длин соответствующих крюков.

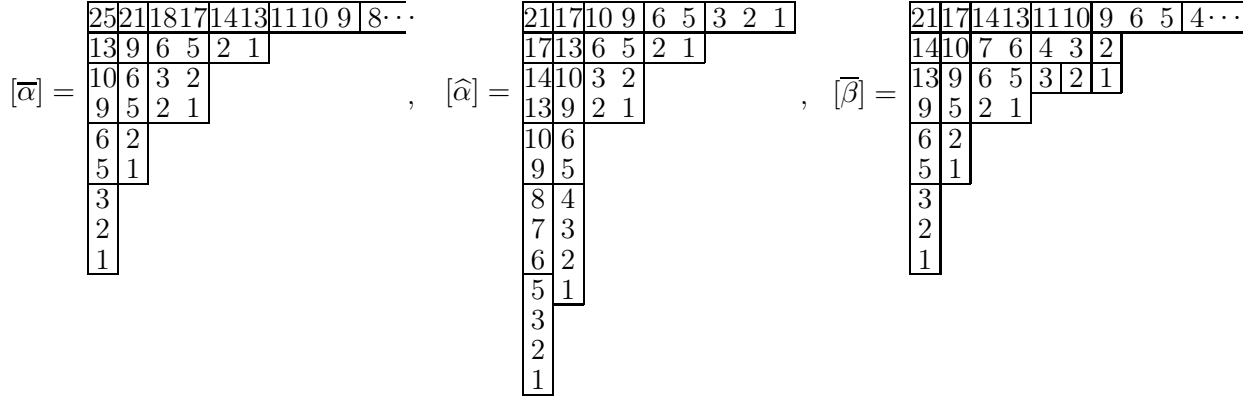


Рис. 5.8.

Легко проверить, что

$$h_{ij}^{\bar{\alpha}} \text{ и } h_{ij}^{\hat{\alpha}} \text{ нечётны при } 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k; \quad h_{ij}^{\bar{\beta}} \text{ нечётно при } 1 \leq i \leq k-1, 1 \leq j \leq k.$$

Следовательно, максимальная из чётных длин крюков этих разбиений находится среди чисел

$$\begin{aligned} h_{1,k+1}^{\bar{\alpha}} &= 4k + 4l + 6, & h_{k+1,1}^{\bar{\alpha}} &= 4k + 4l - 2, \\ h_{1,k+1}^{\hat{\alpha}} &= 4k + 4l - 2, & h_{k+1,1}^{\hat{\alpha}} &= 4k + 4l + 2, \\ h_{1,k+1}^{\bar{\beta}} &= 4k + 4l + 2, & h_{k,1}^{\bar{\beta}} &= 4k + 4l + 2 \end{aligned}$$

и эта длина равна $4k + 4l + 6$. Поэтому $H^{\bar{\alpha}, \hat{\alpha}, \bar{\beta}}(4k + 4l + 6) = \{H_{1,k+1}^{\bar{\alpha}}\}$, а из этого равенства и (5.20) по предложению 3.4 следует, что $\chi^{\bar{\alpha}^{1,k+1}}$ равно 0 на S_s^τ , где $\tau = -\sigma = 1$ и $s = r - (4k + 4l + 6)$. Но это противоречиво, так как $\chi^{\bar{\alpha}^{1,k+1}}(1) \neq 0$.

Случай 5.4а невозможен.

Случай 5.4б. Пусть $k = 1$ и $l \geq 2$.

Используя рис. 5.3, 5.4, находим следующие длины крюков:

в $[\alpha^{12}]$:	в $[\alpha^{21}]$:	в $[\beta^{12}]$:
$h_{11} = 4l + a + 18,$	$h_{11} = 4l + a + 18,$	$h_{11} = 4l + a + 14,$
$h_{12} = 4l + 13,$	$h_{12} = 4l + a + 14,$	$h_{12} = 4l + 9,$
$h_{13} = 4l + 10,$	$h_{13} = 4l + a + 11,$	$h_{13} = 4l + 6,$
$h_{14} = 4l + 9,$	$h_{14} = 4l + a + 10,$	$h_{14} = 4l + 5,$
$h_{15} = 4l + 6,$	$h_{15} = 4l + a + 7,$	
$h_{21} = 4l + a + 10,$	$h_{21} = 4l + 9,$	$h_{21} = 4l + a + 11,$
$h_{31} = 4l + a + 7,$	$h_{31} = 4l + 6,$	$h_{31} = 4l + a + 10,$
$h_{41} = 4l + a + 6,$		$h_{41} = 4l + a + 6,$
$h_{22} = 4l + 5,$	$h_{22} = 4l + 5,$	$h_{22} = 4l + 6.$

Из этих равенств видно, что при $a \notin \{2, 3, 6\}$

$$H^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{12}}(4l + a + 7) = \{H_{31}^{\alpha^{12}}, H_{15}^{\alpha^{21}}\}. \quad (5.21)$$

Теперь согласно предложению 3.4 из (5.17) и (5.21) следует, что для $\tilde{\alpha} := (\alpha^{12})^{31}$ и $\pi := (\alpha^{21})^{15}$ выполнено условие: $\chi^{\tilde{\alpha}} - \chi^{\pi}$ равно 0 на S_r^{σ} , где $\sigma = (-1)^a \delta = 1$ и $r = q - (4l + a + 7)$ (учитываем, что длины ног крюков $H_{31}^{\alpha^{12}}$ и $H_{15}^{\alpha^{21}}$ равны соответственно $2l + a + 5$ и $2l - 1$), т. е. $\chi^{\tilde{\alpha}}$ и χ^{π} пропорциональны на A_r . Но это противоречит предложению 3.1, так как $\tilde{\alpha} \notin \{\pi, \pi'\}$ ($\tilde{\alpha} = 2.\Sigma_l + (8, 3)$, $\pi = (2.\Sigma_l + (4, 3, 1, 3))'$).

Следовательно $a \in \{2, 3, 6\}$, и так как $a \neq 3$ по (5.18), то

$$a \in \{2, 6\}.$$

Тогда, как видно из приведённого выше списка длин крюков,

$$H^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{12}}(4l + a + 10) = \{H_{21}^{\alpha^{12}}, H_{14}^{\alpha^{21}}, H_{31}^{\beta^{12}}\}. \quad (5.22)$$

Легко увидеть, что длины ног крюков $H_{21}^{\alpha^{12}}$ и $H_{14}^{\alpha^{21}}$ равны соответственно $2l + a + 6$ и $2l + 1$. Отсюда, из (5.17) и (5.22), положив

$$\bar{\alpha} := (\alpha^{12})^{21}, \quad \tilde{\alpha} := (\alpha^{21})^{14}, \quad \text{и} \quad \tilde{\beta} := (\beta^{12})^{31},$$

согласно предложению 3.4 получаем

$$|\chi^{\bar{\alpha}} + \chi^{\tilde{\alpha}}| \text{ и } |\chi^{\tilde{\beta}}| \text{ равны на } S_r^{\sigma}, \text{ где } \sigma = -\delta = -1 \text{ и } r = q - (4l + a + 10). \quad (5.23)$$

Используя рис. 5.3, 5.4, нетрудно представить себе вид диаграмм $[\bar{\alpha}]$, $[\tilde{\alpha}]$ и $[\tilde{\beta}]$ и получить некоторую информацию о длинах их крюков; для наглядности обратимся к рис. 5.9, где взято $l = 2$ (как и раньше, числа — длины соответствующих крюков).

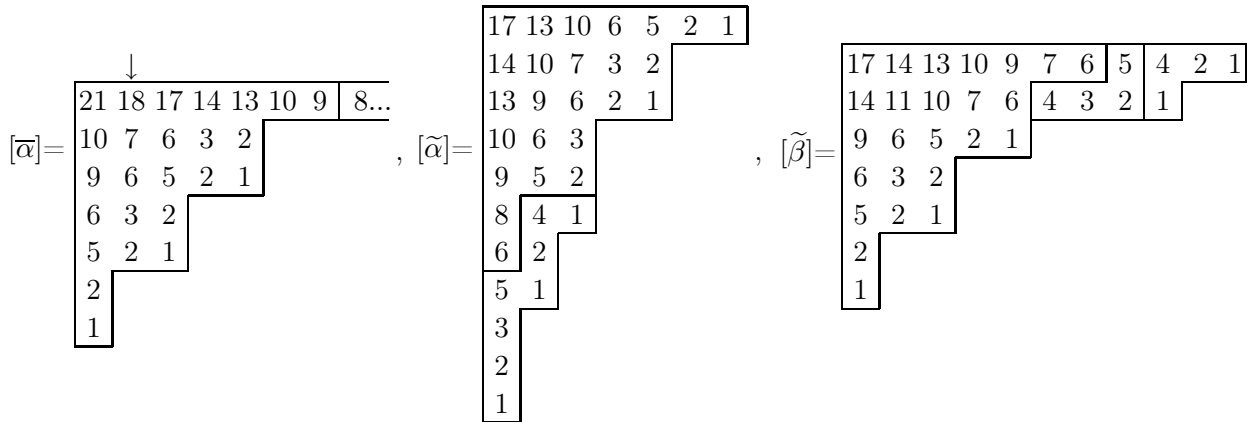


Рис. 5.9.

Легко проверить, что число $h_{12}^{\bar{\alpha}} = 4l + 10$ больше каждого из чисел $h_{21}^{\tilde{\alpha}} = 4l + 5$ и $h_{11}^{\tilde{\beta}} = 4l + 9$. Поэтому $H^{\bar{\alpha}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(4l + 10) = \{H_{12}^{\bar{\alpha}}\}$ и согласно предложению 3.4 из (5.23) следует, что $\chi^{\bar{\alpha}^{12}}$ равно 0 на S_s^{τ} , где $\tau = (-1)^{4l+10+1} \sigma = 1$ и $s = r - (4l + 10)$. Это условие противоречиво, так как $\chi^{\bar{\alpha}^{12}}(1) \neq 0$.

Случай 5.4б противоречив.

Случай 5.4в. Пусть $k = 1$ и $l = 1$. На рис. 5.10 изобразим разбиения $[\alpha]$ и $[\beta]$ и впишем в их клетки длины соответствующих крюков, положив $x' := x + a$.

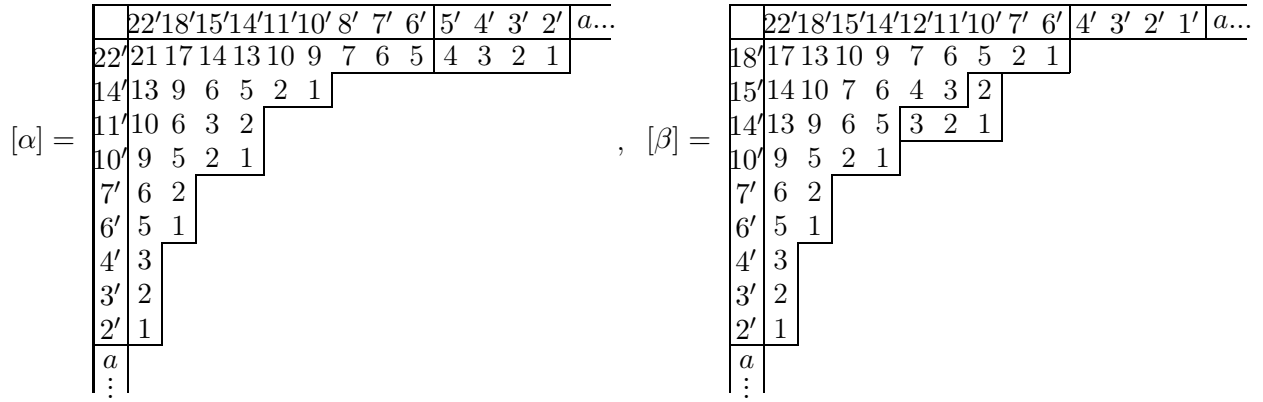


Рис. 5.10.

Если $a \notin \{1, 2, 5, 9\}$, то, как видно из рис. 5.10, $H^{\alpha, \beta}(a + 12) = \{H_{16}^{\beta}\}$. Но тогда по предложению 3.3 должно быть $\beta^{16} = (\beta^{16})'$, что противоречиво.

Если $a \in \{1, 2, 5\}$, то $H^{\alpha, \beta}(21) = \{H_{22}^{\alpha}\}$, откуда по предложению 3.3 должно быть $\alpha^{22} = (\alpha^{22})'$, что снова противоречиво.

Если, наконец, $a = 9$, то $H^{\alpha, \beta}(21) = \{H_{22}^{\alpha}, H_{16}^{\beta}\}$ и по предложению 3.5 разбиения $\tilde{\alpha} := \alpha^{22}$ и $\tilde{\beta} := \beta^{16}$ должны удовлетворять заключению этого предложения. Но, как легко увидеть, это не так. Случай 5.4в противоречив.

Случай 5.4г. Пусть $k = 1$ и $l = 0$. Разбиения $[\alpha]$ и $[\beta]$ и длины соответствующих крюков изобразим на рис. 5.11 ($x' := x + a$).

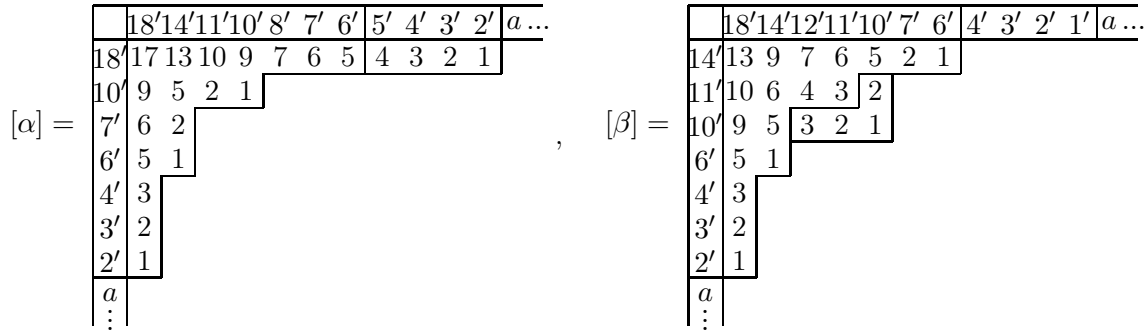


Рис. 5.11.

Если $a \notin \{1, 5\}$, то, как видно из рис. 5.11, $H^{\alpha, \beta}(a + 12) = \{H_{14}^{\beta}\}$. Но тогда по предложению 3.3 должно быть $\beta^{14} = (\beta^{14})'$, что противоречиво.

Если же a равно 1 или 5, то $H^{\alpha, \beta}(17)$ равно $\{H_{22}^{\alpha}\}$ или $\{H_{22}^{\alpha}, H_{15}^{\beta}\}$ соответственно. Но оба случая невозможны, что доказывается так же, как и в случае 5.4в. Случай 5.4г противоречив. Следовательно, противоречив и случай 5.4.

Случай 5.5. Пусть $\mathcal{M} = (a + 4, b + 4, d)$.

Тогда $H^{\alpha, \beta}(2t + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}$, откуда при помощи (5.2) и (5.3) получаем

$$a = b = c = d - 4 \text{ и } \varepsilon = -1, \quad (5.24)$$

и согласно предложению 3.2(2) (так как длины ног крюков H_{12}^{α} и H_{21}^{α} равны t и $t + a - 1$)

$$|\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^{a-1} \chi^{\alpha^{21}}| \text{ и } |\chi^{\beta^{21}}| \text{ равны на } S_q^{\delta}, \text{ где } \delta = (-1)^{a+1} \varepsilon = (-1)^a \quad (5.25)$$

и $q = n - (2t + a + 4)$.

Следующие рассуждения подобны проведённым в случае 5.4. При $a = 3$ $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ и силу предложения 1.1(4) мы можем опустить слагаемое $\chi^{\alpha^{12}}$ в (5.25), а тогда применение к

полученному соотношению предложения 1.4 и предположения А приводит к противоречию (см. рис. 5.3, 5.4). Следовательно,

$$a \neq 3. \quad (5.26)$$

Случай 5.5а. Предположим сначала, что $k \geq 2$.

Используя рис. 5.1–5.4, а также рис. 5.6 и правую часть рис. 5.7 находим

$$\begin{aligned} h_{11}^{\alpha^{12}} &= 2t + a + 4, & h_{12}^{\alpha^{12}} &= 2t - 1, & h_{13}^{\alpha^{12}} &= 2t - 5, & h_{21}^{\alpha^{12}} &= \underline{2t + a - 4}; \\ h_{11}^{\alpha^{21}} &= 2t + a + 4, & h_{12}^{\alpha^{21}} &= 2t + a, & h_{13}^{\alpha^{21}} &= \underline{2t + a - 4}, & h_{21}^{\alpha^{21}} &= 2t - 5; \\ h_{11}^{\beta^{21}} &= 2t + a, & h_{12}^{\beta^{21}} &= \underline{2t + a - 4}, & & & h_{21}^{\beta^{21}} &= 2t - 5. \end{aligned}$$

Из этих равенств и (5.26) следует, что

$$H^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{12}}(2t + a - 4) = \{H_{21}^{\alpha^{12}}, H_{13}^{\alpha^{21}}, H_{12}^{\beta^{21}}\}. \quad (5.27)$$

Положим

$$\bar{\alpha} := (\alpha^{12})^{21}, \quad \hat{\alpha} := (\alpha^{21})^{13}, \quad \hat{\beta} := (\beta^{21})^{12}.$$

Так как длины ног крюков $H_{21}^{\alpha^{12}}$ и $H_{13}^{\alpha^{21}}$ равны соответственно $t + a - 1$ и $t - 7$, то согласно предложению 3.4 из (5.25) и (5.27) следует, что

$$|\chi^{\bar{\alpha}} - \chi^{\hat{\alpha}}| \text{ и } |\chi^{\hat{\beta}}| \text{ равны на } S_r^\sigma, \text{ где } \sigma = (-1)^{a+1}\delta = -1 \text{ и } r = q - (2t + a - 4). \quad (5.28)$$

К этому соотношению мы опять применим предложение 3.4. Диаграммы $[\bar{\alpha}]$, $[\hat{\alpha}]$ изображены на рис. 5.8 при $k = 2$ и $l = 1$ (тогда $t = 13$ по (5.1)). Диаграмму $[\hat{\beta}]$ при этих же k, l изобразим на рис. 5.12 слева.

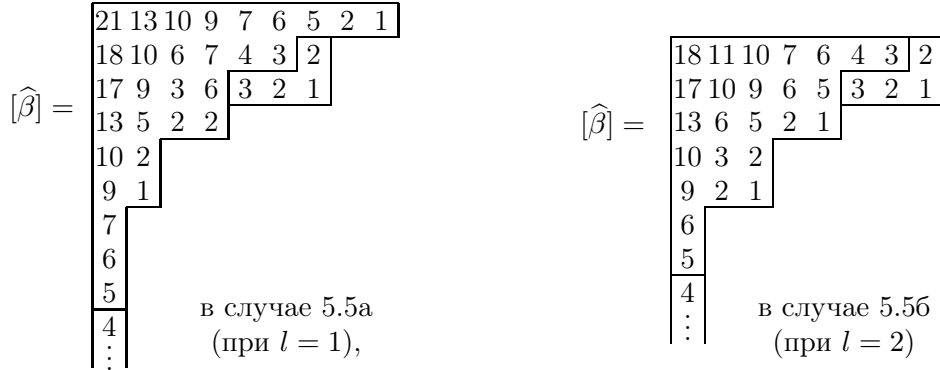


Рис. 5.12.

Легко проверяется, что

$$H^{\bar{\alpha}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}}(2t - 5) = \{H_{12}^{\bar{\alpha}}, H_{11}^{\hat{\alpha}}, H_{11}^{\hat{\beta}}\},$$

причём длины ног крюков $H_{12}^{\bar{\alpha}}$ и $H_{11}^{\hat{\alpha}}$ равны $t - 8$ и $t - 1$ (см. рис. 5.8). Отсюда и из (5.27) по предложению 3.4 следует, что

$$|\chi^{\bar{\alpha}^{12}} + \chi^{\hat{\alpha}^{11}}| \text{ и } |\chi^{\hat{\beta}^{11}}| \text{ равны на } S_r^-, \text{ где } r = q - (4k + a + 3). \quad (5.29)$$

Легко заметить, что $\bar{\alpha}^{12} = \hat{\alpha}^{11} = (3^{k-2} \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (4))'$ и $\hat{\beta}^{11} = 3^{k-2} \cdot 2 \cdot \Sigma_l + (\tilde{4})$ (напомним, что мы рассматриваем случай, когда $k \geq 2$). Поэтому (5.29) можно переписать в виде

$$|2\chi^{\hat{\alpha}^{11}}| \text{ и } |\chi^{\hat{\beta}^{11}}| \text{ равны на } S_r^-. \quad (5.30)$$

Отсюда следует, что характеры $\chi^{\hat{\alpha}^{11}}$ и $\chi^{\hat{\beta}^{11}}$ пропорциональны или полупропорциональны на S_r^- . Ввиду предложения 3.1 они не могут быть пропорциональными на S_r^- . Следовательно, $\chi^{\hat{\alpha}^{11}}$ и $\chi^{\hat{\beta}^{11}}$ полупропорциональны на S_r^- . Но отсюда по теореме 3.1 следует, что

$$|\chi^{\hat{\alpha}^{11}}| \text{ и } |\chi^{\hat{\beta}^{11}}| \text{ равны на } S_r^-.$$

Отсюда и из (5.30) следует, что $|\chi^{\hat{\alpha}^{11}}|$ и $|2\chi^{\hat{\alpha}^{11}}|$ равны на S_r^- , а значит, $\chi^{\hat{\alpha}^{11}}$ исчезает на S_r^- . Тогда по предложению 1.1(4) разбиение $\hat{\alpha}^{11}$ самоассоциировано. Но это, очевидно (см. рис. 5.8), не так.

Случай 5.5а невозможен.

Случай 5.5б. Пусть $k = 1$ и $l \geq 2$.

Выпишем некоторые длины крюков диаграмм $[\alpha^{12}]$, $[\alpha^{21}]$ и $[\beta^{21}]$ (первые два столбца взяты из списка, приведённого в начале случая 5.4б, а третий следует из рис. 5.4):

в $[\alpha^{12}]$:	в $[\alpha^{21}]$:	в $[\beta^{21}]$:
$h_{11} = 4l + a + 18,$	$h_{11} = 4l + a + 18,$	$h_{11} = 4l + a + 14,$
$h_{12} = 4l + 13,$	$h_{12} = 4l + a + 14,$	$h_{12} = 4l + a + 10,$
$h_{13} = 4l + 10,$	$h_{14} = 4l + a + 10,$	
$h_{21} = 4l + a + 10,$	$h_{21} = 4l + 9,$	$h_{21} = 4l + 10.$

Предположим, что $a \neq 0$. Тогда ввиду (5.25) $a \notin \{0, 3\}$ и из приведённого выше списка длин крюков видно, что

$$H^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{21}}(4l + a + 10) = \{H_{21}^{\alpha^{12}}, H_{14}^{\alpha^{21}}, H_{12}^{\beta^{21}}\}.$$

Отсюда и из (5.25), положив

$$\bar{\alpha} := (\alpha^{12})^{21}, \quad \tilde{\alpha} := (\alpha^{21})^{14}, \quad \hat{\beta} := (\beta^{21})^{12},$$

получаем (как и в случае 5.4б, длины ног крюков $H_{21}^{\alpha^{12}}$ и $H_{14}^{\alpha^{21}}$ равны $2l + a + 6$ и $2l + 1$),

$$|\chi^{\bar{\alpha}} + \chi^{\tilde{\alpha}}| \text{ и } |\chi^{\hat{\beta}}| \text{ равны на } S_r^-, \text{ где } r = q - (4l + a + 4). \quad (5.31)$$

При $l = 2$ диаграммы $[\bar{\alpha}]$ и $[\tilde{\alpha}]$ изображены на рис. 5.9, а $[\hat{\beta}]$ — в правой части рис. 5.12 (как и раньше, числа в клетках диаграммы — длины соответствующих крюков). Легко проверить, что $H^{\bar{\alpha}, \tilde{\alpha}, \hat{\beta}}(4l + 1) = \{H_{12}^{\hat{\beta}}\}$. Поэтому согласно предложению 3.4 из (5.31) следует, что $\chi^{\hat{\beta}^{12}}$ равно 0 на S_r^- , где $r = q - (4l + 6)$. По предложению 1.1(4) отсюда следует, что $\hat{\beta}^{12} = (\hat{\beta}^{12})'$, но это противоречиво.

Следовательно, $a = 0$. Тогда из приведённого выше списка длин крюков в $[\alpha^{12}]$, $[\alpha^{21}]$ и $[\beta^{21}]$ (см. также рис. 5.9 и 5.12) следует, что

$$H^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{21}}(4l + 13) = \{H_{12}^{\alpha^{12}}\}.$$

По предложению 3.4 из (5.25) следует, что $\chi^{(\alpha^{12})^{12}}$ равно 0 на S_r^σ , где $\sigma = (-1)^{4l+8}\delta = 1$ и $r = q - (4l + 7)$. Но это, очевидно, противоречиво.

Таким образом, случай 5.5б невозможен.

Случай 5.5в. Пусть $k = 1$ и $l = 1$. Используя рис. 5.3, 5.4, изобразим на рис. 5.13 диаграммы $[\alpha^{12}]$, $[\alpha^{21}]$ и $[\beta^{21}]$ вместе с информацией о длинах их крюков ($x' := x + a$).

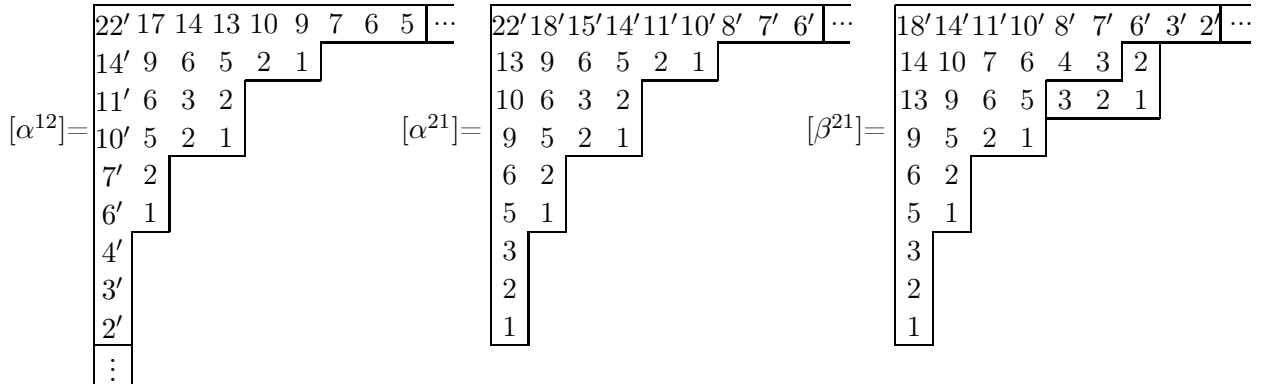


Рис. 5.13.

Из этого рисунка видно, что при $a \neq 2$

$$H^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{21}}(a + 15) = \{H_{13}^{\alpha^{21}}\}. \quad (5.32)$$

Согласно предложению 3.4 из (5.25) и (5.32) следует, что $\chi^{(\alpha^{21})^{13}}$ равно 0 на S_r^σ , где $\sigma = (-1)^{a+16}\delta = 1$ и $r = q - (a + 15)$. Значит, $\chi^{(\alpha^{21})^{13}}$ равно 0 на A_r , но это противоречиво, так как $\chi^{(\alpha^{21})^{13}}(1) \neq 0$.

Если же $a = 2$, то $H^{\alpha^{12}, \alpha^{21}, \beta^{21}}(17) = \{H_{12}^{\alpha^{12}}, H_{13}^{\alpha^{21}}\}$ и по предложению 3.4 из (5.25) следует (так как длины ног крюков $H_{12}^{\alpha^{12}}$ и $H_{13}^{\alpha^{21}}$ равны 5 и 3), что

$$\chi^{(\alpha^{12})^{12}} - \chi^{(\alpha^{21})^{13}} \text{ равно } 0 \text{ на } S_r^\sigma, \text{ где } \sigma = -\delta = -1 \text{ и } r = q - 17.$$

Но тогда по предложению 3.1 разбиения $(\alpha^{12})^{12} (= (2.\Sigma_1 + 7)')$ и $(\alpha^{21})^{13} (= (2.\Sigma_1 + (4, 3))')$ должны удовлетворять его заключению на месте α и β , что, очевидно, неверно. Случай 5.5в противоречив.

Случай 5.5г. Пусть $k = 1$ и $l = 0$. Разбиения $[\alpha]$ и $[\beta]$ и длины соответствующих крюков покажем на рис. 5.14 ($x' := x + a$).

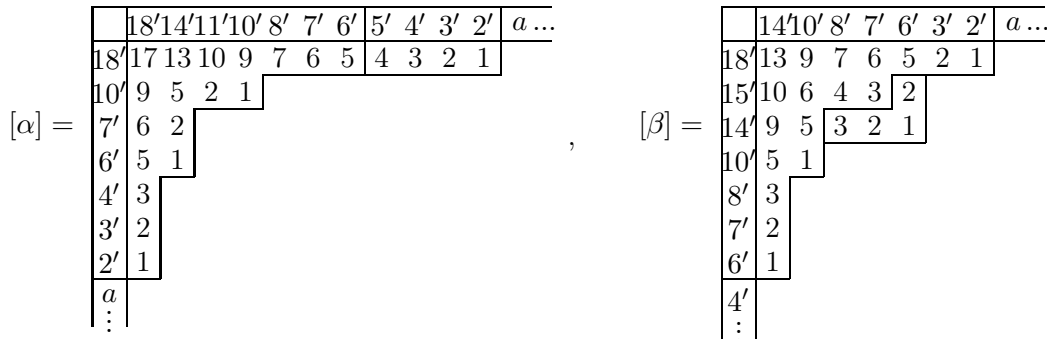


Рис. 5.14.

Если $a \neq 2$, то, как видно из рис. 5.14, $H^{\alpha, \beta}(a + 15) = \{H_{31}^\beta\}$. Но тогда по предложению 3.3 должно быть $\beta^{31} = (\beta^{31})'$, что противоречиво.

Если же a равно 2, то $H^{\alpha, \beta}(17) = \{H_{22}^\alpha, H_{31}^\beta\}$. Но тогда по предложению 3.5 для $\tilde{\alpha} := \alpha^{22}$ и $\tilde{\beta} := \beta^{31}$ должно быть выполнено одно из её утверждений (а)–(г), что, как легко увидеть, невозможно.

Случай 5.5 противоречив.

Таким образом, во всех возможных случаях (см. (5.9)) мы получили противоречие. Этим завершено доказательство теоремы А5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 143–163.
2. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 58–68.
3. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. III // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 12–30.
4. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. IV // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 12–33.
5. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. 2004. Vol. 45. № 5. С. 977–994.
6. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, №2. С. 135–156.
7. **Белоногов В. А.** Диаграммы Юнга без крюков длины 4 и характеры группы S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 30–40.
8. **Белоногов В. А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 380 с.
9. **James G., Kerber A.** The representation theory of the symmetric group. London: Addison–Wesley, 1981. 510 с.
10. **Джеймс Г.** Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982. 260 с.
11. **Белоногов В. А.** О равнокорневых неприводимых характерах групп S_n и A_n // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 3–25.
12. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n и A_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 11–43.
13. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характерах групп S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Vol. 13, № 2. С. 13–32.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 12.11.2009

УДК 519.17

ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ, В КОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН ИЗОМОРФНЫ ГРАФУ ГЕВИРТЦА¹

А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев, Д. В. Падучих

В работе классифицированы дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца (т. е. сильно регулярному графу с параметрами $(56, 10, 0, 2)$).

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, сильно регулярный граф, граф Гевиртца.

A. L. Gavrilyuk, A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Gewirtz graph.

Distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Gewirtz graph (i.e., a strongly regular graph with parameters $(56, 10, 0, 2)$) are classified.

Keywords: distance-regular graph, strongly regular graph, Gewirtz graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. В дальнейшем под “подграфом” будем подразумевать индуцированный подграф, если не оговорено противное.

Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , т. е. длина кратчайшего пути от a до b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством всех вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Диаметром $d = d(\Gamma)$ графа Γ называется $\max_{a, b \in \Gamma} d(a, b)$.

Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается через $[a]$. Если R — множество вершин графа Γ , то через $\Gamma(R)$ обозначим подграф на множестве вершин из Γ , смежных по крайней мере с одной вершиной из R . Если R является одноэлементным множеством $\{r\}$, то вместо $\Gamma(R)$ также пишем $\Gamma(r)$. Пусть \mathcal{F} — семейство графов. Граф Γ называется *локально \mathcal{F} -графом*, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом* степени k , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом* с параметрами (v, k, λ) , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом* с параметрами (v, k, λ, μ) , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем *λ -подграфом* (*μ -подграфом*).

Для $I \subseteq \{1, \dots, d\}$ через Γ_I обозначается граф на множестве вершин графа Γ , в котором отношение смежности есть объединение отношений — находиться на расстоянии $i \in I$. Граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если отношение — совпадать или находиться на расстоянии d — является отношением эквивалентности. *Антиподальным частным* Γ' называется граф, вершинами которого являются антиподальные классы графа Γ и два антиподальных класса смежны, если один из них содержит вершину, смежную с вершиной другого

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00009), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 10-01-91151), программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

класса. Антиподальный граф Γ называется r -накрытием (своего антиподального частного), если каждый его антиподальный класс содержит точно r вершин.

Через K_{m_1, \dots, m_n} обозначим полный n -дольный граф с долями порядков m_1, \dots, m_n . Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$.

Графом Шрикханде называется локально шестиугольный сильно регулярный граф с параметрами $(16, 6, 2, 2)$. *Три графа Чанга* — это сильно регулярные графы с параметрами $(28, 12, 6, 4)$, не изоморфные $T(8)$. *Графы Петерсена, Клебша, Шлефли и Гевиртца* — это единственные сильно регулярные графы с параметрами $(10, 3, 0, 1)$, $(16, 10, 6, 6)$, $(27, 16, 10, 8)$ и $(56, 10, 0, 2)$ соответственно. Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем [1, теорема 3.12.4]. Любой Зейделев граф — это либо полный многодольный граф $K_{r \times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли. *Граф Хигмена — Симса* — это единственный сильно регулярный граф с параметрами $(100, 22, 0, 6)$.

Графом Смита назовем граф, в котором максимальное собственное значение не больше 2. По [1, теорема 3.2.5] граф Смита является объединением изолированных подграфов из графов \tilde{X} , где \tilde{X} — граф расширенной схемы Дынкина одного из типов A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 .

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если $b_i(u, w) = b_i$ и $c_i(u, w) = c_i$ для любой пары вершин u, w на расстоянии i для любого $i \in \{0, \dots, d\}$. По [1, лемма 4.1.6] последовательность $b_i, i \in \{0, \dots, d-1\}$ является невозрастающей, а последовательность $c_i, i \in \{1, \dots, d\}$ является неубывающей, и если $i + j \leq d$, то $c_i \leq b_j$.

В дистанционно регулярном графе Γ положим $a_i = k_1 - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Параметры k_i ($i = 1, \dots, d$) можно вычислить при помощи *прямоугольного соотношения* $k_i = b_{i-1}k_{i-1}/c_i$ и равенства $k_0 = 1$. Поэтому значения k_i не зависят от выбора вершины u .

Если Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d и u, w — две вершины из Γ на расстоянии l , то число вершин, находящихся одновременно на расстоянии i от u и на расстоянии j от w ($i, j = 0, \dots, d$), не зависит от выбора вершин u, w на расстоянии l друг от друга и обозначается через p_{ij}^l . Параметры p_{ij}^l называются *числами пересечений* графа Γ . Согласно [1, лемма 4.1.7] значения p_{ij}^l можно вычислить по формулам:

$$p_{ij}^l = p_{ji}^l, \quad p_{i0}^l = \delta_{il}, \quad p_{i,d+1}^l = 0,$$

$$p_{1,l-1}^l = c_l, \quad p_{1,l}^l = a_l, \quad p_{1,l+1}^l = b_l,$$

$$p_{j+1,i}^l = \frac{1}{c_{j+1}} \left(p_{j,i-1}^l b_{i-1} + p_{j,i}^l (a_i - a_j) + p_{j,i+1}^l c_{i+1} - p_{j-1,i}^l b_{j-1} \right).$$

Эти соотношения дают дополнительные необходимые условия существования дистанционно регулярного графа с заданным массивом пересечений. Например, переписав последнее соотношение для $i = 1, j = 2, l = 1$, получим равенство $p_{22}^1 = b_1 a_2 / c_2$. Подставляя сюда $a_2 = k_1 - b_2 - c_2$ и пользуясь прямоугольным соотношением, получим, что $b_1 b_2$ делится на c_2 и $k_2 b_2$ делится на k_1 .

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$. В [1, разд. 4.1] показано, что собственные значения графа Γ , отличные от $k = b_0$,

являются собственными значениями матрицы

$$\begin{bmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & k - b_1 - c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & k - b_2 - c_3 & b_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & k - b_3 - c_4 & b_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & b_{d-1} & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c_{d-1} & k - b_{d-1} - c_d & \end{bmatrix}.$$

Кратность $f(\theta)$ собственного значения θ вычисляется как

$$f(\theta) = v / \sum_{i=0}^d k_i u_i(\theta)^2,$$

где $u_i(\theta) = w_i(\theta)/(b_0 \dots b_{i-1})$ и $u_0(\theta) = 1$, а многочлены $w_i(x)$ определяются рекуррентным образом:

$$w_0(x) = 1, \quad w_1(x) = x, \quad w_{i+1}(x) = (x - a_i)w_i(x) - c_i b_{i-1} w_{i-1}(x).$$

За более подробными сведениями из теории дистанционно регулярных графов мы отсылаем читателя к [1].

В [1] изучены различные классы дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин изоморфны данному сильно регулярному графу. Особый интерес вызывают локально Δ -графы, где Δ — сильно регулярный граф без треугольников. Известный сильно регулярный граф без треугольников является полным двудольным или изоморфен графу Мура (графу с параметрами $(k^2 + 1, k, 0, 1)$ для $k = 2, 3, 7$), дополнительному графу к графу Клебша, графу Гевиртца, графу Хигмена — Симса или второй окрестности вершины в графе Хигмена — Симса. Любой известный сильно регулярный граф Мура является пятиугольником, графом Петерсена или графом Хофмана — Синглтона.

Связный локально $K_{2 \times n}$ -граф изоморфен $K_{3 \times n}$. Связный локально пятиугольный граф изоморфен графу икосаэдра. Связный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Петерсена, является либо дополнительным графом к треугольному графу $T(7)$, либо дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{10, 6, 4, 1; 1, 2, 6, 10\}$ (граф Конвея — Смита) или $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$ (граф Доро). В [2] доказано, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона, имеет массив пересечений $\{50, 42, 1; 1, 2, 50\}$ или $\{50, 42, 9; 1, 2, 42\}$. В [3] доказано, что связный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(16, 5, 0, 2)$, является единственным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{16, 10, 1; 1, 5, 16\}$.

В данной работе классифицированы дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца.

Теорема. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца Δ . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(162, 56, 10, 24)$ или $(372, 56, 10, 8)$;
- (2) диаметр Γ равен 3 и Γ — граф с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ и спектром $\{56^1, 8^{133}, -1^{56}, -7^{152}\}$;
- (3) диаметр Γ равен 4 и Γ — антиподальное r -накрытие сильно регулярного графа с параметрами $(162, 56, 10, 24)$, имеющее массив пересечений $\{56, 45, 24(r - 1)/r, 1; 1, 24/r, 45, 56\}$ и спектр $\{56^1, 14^{36(r-1)}, 2^{140}, -4^{126(r-1)}, -16^{21}\}$, $r \in \{2, 3\}$.

З а м е ч а н и я. Существует единственный сильно регулярный граф с параметрами $(162, 56, 10, 24)$, в котором окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца. Это вторая окрестность вершины в графе Маклафлина. Известно существование дистанционно регулярного графа,

являющегося 3-накрытием второй окрестности вершины в графе Маклафлина (это граф Сойчера). Существование сильно регулярного графа с параметрами $(372, 56, 10, 8)$ неизвестно.

Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{56, 45, 24(r-1)/r, 1; 1, 24/r, 45, 56\}$ не существует в случае $r = 2$. В этом случае граф $\Gamma_{3,4}$ является сильно регулярным с параметрами $(324, 57, 0, 12)$ и по [4, теорема] не существует.

Дистанционно регулярный граф $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, в котором окрестность Δ некоторой вершины a изоморфна графу Гевиртца, не существует, так как μ -подграф $[a] \cap [b]$ является регулярным графом степени 2 на 9 вершинах, противоречие с леммой 1.3.

Следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца Δ . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(162, 56, 10, 24)$ или $(372, 56, 10, 8)$;

(2) диаметр Γ равен 4 и Γ — антиподальное 3-накрытие сильно регулярного графа с параметрами $(162, 56, 10, 24)$, имеющее массив пересечений $\{56, 45, 16, 1; 1, 8, 45, 56\}$ и спектр $\{56^1, 14^{72}, 2^{140}, -4^{252}, -16^{21}\}$.

Кроме того, получена оценка для диаметра связного графа, в котором окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца.

Предложение. Пусть Γ — связный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца Δ . Тогда диаметр Γ не больше 5.

1. Вспомогательные результаты

Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) . Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n - t$, $-t$ графа Γ — целые числа, где $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2t$ и кратность $n - t$ равна $\frac{k(t-1)(k+t)}{\mu n}$. Далее, если t — целое число, большее 1, то $t-1$ делит $k - \lambda - 1$ и

$$\mu = \lambda + 2 + (t-1) - \frac{k - \lambda - 1}{t-1}, \quad n = t-1 + \frac{k - \lambda - 1}{t-1}.$$

Доказательство. Это [5, лемма 3.1].

Лемма 1.2. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) , Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин d_1, \dots, d_N . Тогда

$$(v - N) - (kN - 2M) + \left(\lambda M + \mu \left(\binom{N}{2} - M \right) - \sum_{i=1}^N \binom{d_i}{2} \right) = x_0 + \sum_{i=3}^N \binom{i-1}{2} x_i,$$

где x_i — число вершин в $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ .

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число троек вида $(a, \{b, c\})$, где $a \in \Gamma - \Delta$, $b, c \in \Delta \cap [a]$, получим равенства

$$\begin{cases} v - N = \sum x_i, \\ kN - 2M = \sum i x_i, \\ \lambda M + \mu \left(\binom{N}{2} - M \right) - \sum_{i=1}^N \binom{d_i}{2} = \sum \binom{i}{2} x_i. \end{cases}$$

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое. Лемма доказана.

Пусть Γ — граф, все вершины которого имеют окрестность, изоморфную графу Гевиртца. Рассмотрим произвольный 2-путь $x, y, z \in \Gamma$. Очевидно, что окрестность вершины y в μ -подграфе $[x] \cap [z]$ совпадает с μ -подграфом вершин x, z внутри $[x]$ и является 2-кокликой. Таким образом, μ -подграфы графа Γ являются регулярными графами степени 2. В следующей лемме классифицированы регулярные подграфы степени 2 из графа Гевиртца.

Лемма 1.3. Пусть Δ — граф Гевиртца, Ω является регулярным подграфом из Δ степени 2 на n вершинах, X_i — множество вершин из $\Delta - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω , $x_i = |X_i|$. Тогда $n \leq 24$ и выполняются следующие утверждения:

$$(1) \sum x_i = 56 - n, \sum ix_i = 8n, \sum \binom{i}{2} x_i = n^2 - 4n \text{ и } x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = n^2 - 13n + 56;$$

(2) если $n = 4$, то $x_0 = 20, x_1 = 32$ и X_0 — объединение пяти изолированных четырехугольников;

(3) если $n = 5$, то $x_0 = 16, x_1 = 30, x_2 = 5$ и X_0 — объединение трех изолированных пятиугольников и вершины; для четырех попарно изолированных пятиугольников и для $i = 1, 2$ множество $X_i(\Omega)$ не зависит от выбора пятиугольника Ω ;

(4) если $n = 6$, то либо $x_0 = 14, x_1 = 24, x_2 = 12, x_3 = 0$ и X_0 — объединение вершины, ребра, 4-лапы и 6-цикла или ребра и двух 6-циклов, либо $x_0 = 13, x_1 = 27, x_2 = 9, x_3 = 1$ и X_0 — объединение вершины и двух 6-циклов;

(5) если $n = 7$, то либо $x_0 = 12, x_1 = 20, x_2 = 15, x_3 = 2$ и X_0 — объединение ребра, 2-пути и 7-цикла, либо $x_0 = 14, x_1 = 14, x_2 = 21, x_3 = 0$ и X_0 — объединение двух 7-циклов;

(6) если Ω — восьмиугольник, то либо $x_0 = 11, x_1 = 15, x_2 = 17, x_3 = 5$ и X_0 — объединение двух изолированных вершин, 2-пути, и двух 2-путей со смежными центрами, либо $x_0 = 10, x_1 = 18, x_2 = 14, x_3 = 6$ и X_0 — объединение 3-пути и двух 2-путей со смежными центрами или двух вершин и 8-цикла, либо $x_0 = 8, x_1 = 24, x_2 = 8, x_3 = 8$ и X_0 — 8-цикл, либо $x_0 = 12, x_1 = 12, x_2 = 20, x_3 = 4$ и X_0 — объединение двух вершин, 3-пути и двух 2-путей со смежными центрами, или двух 2-путей со смежными центрами (два раза), или четырех вершин и 8-цикла, либо $x_0 = 9, x_1 = 20, x_2 = 14, x_3 = 4, x_4 = 1$ и X_0 — объединение 2-пути и двух 2-путей со смежными центрами, либо $x_0 = 10, x_1 = 16, x_2 = 20, x_3 = 0, x_4 = 2$ и X_0 — объединение двух вершин и 8-цикла;

(7) $n \neq 9$ и если Ω — двенадцатиугольник, Φ — связный граф на 7 вершинах, в котором вершина степени 3 смежна с 3 вершинами степени 2 и каждая вершина степени 2 смежна с вершиной степени 1, то либо $\{x_0 = 7, x_1 = 6, x_2 = 11, x_3 = 13, x_4 = 6, x_5 = 1\}$ и X_0 — объединение 2-пути и двух ребер, либо $\{x_0 = 6, x_1 = 6, x_2 = 16, x_3 = 8, x_4 = 6, x_5 = 2\}$ и X_0 — объединение 3-лапы и двух вершин, либо $\{x_0 = 5, x_1 = 9, x_2 = 13, x_3 = 9, x_4 = 6, x_5 = 2\}$ и X_0 — объединение 3-лапы и вершины или 2-пути и двух вершин, либо $\{x_0 = 5, x_1 = 12, x_2 = 6, x_3 = 12, x_4 = 9\}$ и X_0 является 5-кокликой, либо $\{x_0 = 6, x_1 = 8, x_2 = 10, x_3 = 14, x_4 = 4, x_5 = 2\}$ и X_0 — объединение двух ребер и двух вершин, либо $\{x_0 = 7, x_1 = 6, x_2 = 12, x_3 = 10, x_4 = 9\}$ и X_0 — граф Φ , либо $\{x_0 = 4, x_1 = 12, x_2 = 10, x_3 = 10, x_4 = 6, x_5 = 2\}$ и X_0 является 4-кокликой, $\{x_0 = 7, x_1 = 3, x_2 = 18, x_3 = 10, x_4 = 3, x_5 = 3\}$ и X_0 — граф Φ , либо $\{x_0 = 8, x_1 = 4, x_2 = 12, x_3 = 12, x_4 = 8\}$ и X_0 — объединение 3-лапы и двух ребер, либо $\{x_0 = 7, x_1 = 6, x_2 = 9, x_3 = 18, x_4 = 3, x_6 = 1\}$ и X_0 — граф Φ , либо $\{x_0 = 4, x_1 = 12, x_2 = 10, x_3 = 10, x_4 = 6, x_5 = 2\}$ и X_0 — объединение 2-пути и вершины, либо $\{x_0 = 5, x_1 = 8, x_2 = 15, x_3 = 8, x_4 = 7, x_6 = 1\}$ и X_0 — объединение 2-пути и двух вершин, либо $\{x_0 = 6, x_1 = 8, x_2 = 12, x_3 = 8, x_4 = 10\}$ и X_0 является 6-кокликой.

Доказательство. По лемме 1.2 имеем $\sum x_i = 56 - n, \sum ix_i = 8n, \sum \binom{i}{2} x_i = n^2 - 4n$, поэтому $x_0 + \sum \binom{i-1}{2} x_i = n^2 - 13n + 56$. Утверждение (1) доказано.

Если $n = 4$, то $x_i = 0$ для $i \geq 2$, поэтому $x_0 = 20, x_1 = 32$. С помощью компьютерной системы GAP [6] установлено, что X_0 — объединение пяти изолированных четырехугольников. Утверждение (2) доказано.

Если $n = 5$, то $x_0 + x_1 + x_2 = 51, x_1 + 2x_2 = 40, x_2 = 5$, поэтому $x_0 = 16, x_1 = 30, x_2 = 5$. С помощью компьютерной системы GAP установлено, что X_0 — объединение трех изолированных пятиугольников и вершины.

Пусть Σ — объединение двух изолированных пятиугольников Ω и Ω' из Δ , Y_i — множество вершин из $\Delta - \Sigma$, смежных точно с i вершинами из Σ , $y_i = |Y_i|$. По утверждению (1) получим $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 46, y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 = 80, y_2 + 3y_3 + 6y_4 = 60$. Так как $x_2 = 5$, то $y_3 + 2y_4 \leq 10$. Далее, $y_0 = 26 - y_3 - 3y_4, y_1 = 3y_3 + 8y_4 - 40, y_2 = 60 - 3y_3 - 6y_4$. Отсюда

$$0 \leq y_1 = 3(y_3 + 2y_4) + 2y_4 - 40 \leq 30 + 2y_4 - 40,$$

т. е. $y_4 \geq 5$. Поэтому $y_4 = 5, y_3 = 0, y_0 = 11, y_1 = 0, y_2 = 30$. Утверждение (3) доказано.

Утверждения (4–7) получены с помощью компьютерной системы GAP. Лемма доказана.

Пусть граф Γ на v вершинах имеет матрицу смежности A (при некоторой нумерации вершин) и D — диагональная матрица порядка v , такая что элемент $(D)_{ii}$ равен степени вершины с номером i . Матрицей Лапласа графа Γ называется матрица $L = D - A$. Набор собственных значений $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_v$ матрицы L называется спектром Лапласа графа Γ . Для регулярного графа собственное значение μ_1 равно 0.

Лемма 1.4. Пусть Γ — граф на v вершинах со спектром Лапласа $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_v$ и X, Y — изолированные подграфы в Γ . Тогда выполняется неравенство

$$|X| \cdot |Y| / ((v - |X|)(v - |Y|)) \leq ((\mu_v - \mu_2) / (\mu_v + \mu_2))^2.$$

Доказательство. Это [7, предложение 4.6.1].

Пусть Γ — граф на v вершинах со спектром $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_v$ и Σ — индуцированный подграф графа Γ на t вершинах со спектром $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_t$. Тогда для любого i от 1 до t выполняются неравенства $\theta_i \geq \eta_i \geq \theta_{v-m+i}$. Мы будем называть это свойство графов переплетением спектров (interlacing, см. [7]).

Лемма 1.5. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$, в котором окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца, $\theta_0 = k > \theta_1 > \dots > \theta_d$ — собственные значения графа Γ и θ — максимальное из чисел $|\theta_i|$, где $i \in \{1, \dots, d\}$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$(1) \quad 10 \leq \theta \leq 16;$$

$$(2) \quad \text{если } \theta^2(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1}) < 56^2 \text{ для некоторого } i \in \{2, \dots, d-1\}, \text{ то } v \leq v_i(\theta), \text{ где}$$

$$v_i(\theta) = k_i(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})(1 - (\theta/56)^2) / (1 - \theta^2(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})/56^2),$$

в частности, если $4(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1}) < 49$, то

$$v \leq k_i(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})(1 - (5/28)^2) / (1 - 4(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})/49);$$

$$(3) \quad d \leq \ln(2(v-1)) / 2.010367 + 1.$$

Доказательство. По теореме Тервиллигера [8] выполняются неравенства $-4 \geq b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1), 2 \leq b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$, т. е. $\theta_1 \leq 14, \theta_d \geq -16$. Поэтому $\theta \leq 16$.

Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$. Заметим, что подграф $[w] - \Gamma_i(u)$ для вершины $w \in \Gamma_i(u)$ является несвязным. По теореме из [10] число связности сильно регулярного графа равно степени графа. Следовательно, $a_i \geq 10$ для всех $i < d$.

По предположению Γ имеет диаметр больше 3. Рассмотрим подграф $[a] \cup \Gamma_j(a)$, $3 \leq j < d$ с собственными значениями $\epsilon_0 \geq \epsilon_1 \geq \dots \geq \epsilon_{k_j+k-1}$. Тогда его собственные значения переплетаются с собственными значениями Γ , в частности, $\theta_0 \geq \epsilon_0$, $\theta_1 \geq \epsilon_1$. Но спектр $[a] \cup \Gamma_j(a)$ является объединением спектров подграфов $[a]$ и $\Gamma_j(a)$, поэтому $\theta_1 \geq \epsilon_1 \geq \min\{a_1, a_j\} = 10$. Отсюда $\theta \geq 10$. Утверждение (1) доказано.

Выберем $i \in \{1, \dots, d\}$ и положим $R = \Gamma_i(a)$. Тогда $\gamma = |\Gamma(R)| \leq k_{i-1} + k_i + k_{i+1} = k_i(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})$.

Далее, если $\theta^2(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1}) < 56^2$, то $k_i - \gamma(\theta/k)^2 > 0$ и по [2, предложение 1] $v \leq v_i(\theta)$, где функция

$$v_i(\theta) = k_i(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})(1 - (\theta/56)^2)/(1 - \theta^2(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})/56^2).$$

Если $4(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1}) < 49$, то $k_i - \gamma(\theta/k)^2 \geq k_i - 4\gamma/49 \geq k_i(1 - 4(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})/49) > 0$. Поэтому

$$v \leq k_i(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})(1 - (\theta/56)^2)/(1 - 4(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})/49).$$

Наконец, максимум выражения $k_i \gamma (1 - (\theta/k)^2)$ при фиксированных k_i, γ, k достигается при минимальном значении $\theta = 10$, поэтому

$$v \leq k_i(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})(1 - (5/28)^2)/(1 - 4(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1})/49).$$

Утверждение (2) доказано.

Так как минимальное собственное значение графа Гевиртца равно -4 , то $-16 \leq \theta_d \leq -4$ и $10 \leq \theta_1 \leq 14$. Легко проверить, что минимум функции

$$f(\theta_1, \theta_d) = \ln \left((\sqrt{56 - \theta_d} + \sqrt{56 - \theta_1}) / (\sqrt{56 - \theta_d} - \sqrt{56 - \theta_1}) \right)$$

достигается в точке $(\theta_1, \theta_d) = (14, -16)$ и равен приблизительно 2.0103675. Отсюда, ввиду границы Ван Дама – Хемерса (см. [9]) имеем $d \leq \ln(2(v-1))/2.010367 + 1$. Лемма доказана.

Лемма 1.6. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 4$, в котором окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца. Если Γ — не антиподальный граф, то $k_2 \leq k_d(k_d - a_d - 1)$.

Доказательство. По [1, предложение 5.6.1] либо выполняется заключение леммы, либо $\lambda + 1$ делит k , либо $k \leq a_d \min\{k_d, \lambda + 2 - a_d\}$. Заметим, что $\lambda + 1 = 11$ не делит $k = 56$. Так как максимум $a_d(12 - a_d)$ достигается при $a_d = 6$ и равен 36, то указанное неравенство не выполняется. Лемма доказана.

Лемма 1.7. Пусть Γ — связный граф диаметра $d \geq 3$, в котором окрестность каждой вершины изоморфна графу Гевиртца, u, w — вершины из Γ , такие что $d(u, w) = 3$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) степень каждой вершины в графе $C = [w] \cap \Gamma_2(u)$ не меньше 5, $s_3(u, w) \geq 17$;
- (2) если $d \geq 4$, то граф $B = [w] \cap \Gamma_4(u)$ является графом Смита;
- (3) $d \leq 5$.

Доказательство. Пусть $d(u, w) = 3$. Положим $C = [w] \cap \Gamma_2(u)$. Далее, для $y \in C$ подграф $[u] \cap [y]$ содержит 2-путь x_1, x_2, x_3 . Теперь граф Гевиртца $\Delta := [y]$ содержит 2-путь x_1, x_2, x_3 из $\Delta_2(w)$, причем в Δ подграфы $[x_1] \cap [w]$, $[x_3] \cap [w]$ не пересекают $[x_2] \cap [w]$ и имеют не более одной общей вершины. Поэтому степень y в графе C не меньше 5. Так как в графе C нет треугольников и для любых двух несмежных вершин $a, b \in C$ подграф $C(a) \cap C(b)$ содержит не больше двух вершин, то $|C| \geq 1 + 5 + 5 \cdot 4/2$. Если $|C| = 16$, то C — сильно регулярный

граф с параметрами $(16, 5, 0, 2)$. Подсчитав двумя способами число ребер x между C и $[w] - C$, получим, что $80 = x \leq 40$, противоречие. Значит, $c_3(u, w) \geq 17$. Утверждение (1) доказано.

Пусть теперь $d \geq 4$. Положим $C = [w] \cap \Gamma_2(u)$ и $B = [w] \cap \Gamma_4(u)$. Подграфы B и C изолированы друг от друга, поэтому спектр $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_m$ графа $B \cup C$ является объединением спектров графов B и C . Спектр подграфа $B \cup C \subset [w]$ переплетает спектр графа Гевиртца $\{10^1, 2^{35}, -4^{20}\}$, поэтому $\theta_2 \leq 2$. Поскольку степени вершин в графе C не меньше 5, то максимальное собственное значение C также не меньше 5 и совпадает с θ_1 . Поэтому каждое собственное значение подграфа B не больше 2 и B является графом Смита. Утверждение (2) доказано.

Допустим, что $d \geq 6$. Пусть $z \in \Gamma_6(u) \cap \Gamma_3(w)$ и $B' = [w] \cap \Gamma_2(z)$. Ввиду утверждения (1) степень каждой вершины в B' не меньше 5, причем $B' \subseteq B$. Противоречие со строением графов Смита. Лемма и предложение доказаны.

Приведем еще один вариант доказательства утверждения (3) леммы 1.7 для случая, когда Γ является дистанционно регулярным графом. Заметим, что по лемме 1.3 имеем $4 \leq c_2 \leq 24$, $c_3 \geq 4$, $b_1 = 45$ и $b_2 \leq 20$. Отсюда следует, что при $i = 2$ выполняется неравенство из утверждения (2) леммы 1.5:

$$4(c_i/b_{i-1} + 1 + b_i/c_{i+1}) \leq 4(24/45 + 1 + 20/4) < 49.$$

Значит, мы можем применить оценку из утверждения (2) леммы 1.5:

$$v \leq v_2(\theta) \leq 630(24/45 + 1 + 20/4)(1 - (5/28)^2)/(1 - 4(24/45 + 1 + 20/4)/49) = 8534.$$

Подставляя значение 8534 в неравенство из утверждения (3) леммы 1.5, получим, что диаметр графа d не больше 5.8473.

2. Редукция к графам диаметра, большего 3

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, в котором окрестность каждой вершины изоморфна графу Гевиртца. Зафиксируем вершину u в Γ .

Лемма 2.1. *Верно неравенство $b_i + c_i + 2b_i c_i / 9 \leq 56$, где $2 \leq i \leq d - 1$.*

Доказательство. Пусть Δ — граф Гевиртца. Тогда Δ имеет спектр $\{10^1, 2^{35}, -4^{20}\}$ и спектр Лапласа $\{0^1, 8^{35}, 14^{20}\}$. То есть $\mu_2 = 8$, $\mu_v = 14$. Пусть X, Y — такие подмножества вершин из Δ , что между X и Y нет ребер. Тогда по лемме 1.4 имеем $|X||Y| \leq 9(56 - |X|)(56 - |Y|)/121$.

Пусть граф Γ удовлетворяет условию леммы. И пусть u, w — две вершины из Γ , такие что $d(u, w) = i$, $2 \leq i \leq d - 1$. Положим $X = [w] \cap \Gamma_{i-1}(u)$, $Y = [w] \cap \Gamma_{i+1}(u)$. Тогда $|X| = c_i$, $|Y| = b_i$ и утверждение леммы следует из неравенства, полученного в предыдущем абзаце. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *если диаметр Γ равен 2, то Γ имеет параметры $(162, 56, 10, 24)$ или $(372, 56, 10, 8)$;*
- (2) *если диаметр Γ больше 2, то $c_3 \geq \max(17, \mu + 6, 13\mu/10)$, μ делит $56 \cdot 45$ и $\mu < 45$;*
- (3) *если диаметр Γ больше 3, то $\mu \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$.*

Доказательство. По условию $k = 56$, $\lambda = 10$. Если диаметр Γ равен 2, то по лемме 1.1 число $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$ является квадратом некоторого $n \in \mathbb{N}$. Подставляя значения k и λ , получим $(\mu - 12)^2 + 180 = n^2$, откуда $(\mu, n) \in \{(56, 46), (24, 18), (8, 14)\}$. В случае $\mu = 56$

граф Γ является полным многодольным, противоречие. В случае $\mu = 24$ граф Γ имеет параметры $(162, 56, 10, 24)$. В случае $\mu = 8$ граф Γ имеет параметры $(372, 56, 10, 8)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть диаметр Γ больше 2. По лемме 1.7 имеем $c_3 \geq 17$. Выберем произвольную вершину $w \in \Gamma_3(u)$ и рассмотрим подграф $C = [w] \cap \Gamma_2(u)$. Граф C содержит μ -подграф $\Omega = [w] \cap [x]$ для некоторой вершины $x \in [u]$, причем Ω — регулярный граф степени 2 на μ вершинах. По лемме 1.7 степень каждой вершины в C не меньше 5, поэтому каждая вершина из Ω смежна по крайней мере с тремя вершинами из $C - \Omega$. Значит, число ребер между Ω и $C - \Omega$ не меньше 3μ . С другой стороны, поскольку C — граф без треугольников, каждая вершина которого имеет степень не больше 10, то любая вершина из $C - \Omega$ смежна не более чем с $\min(10, \mu/2)$ вершинами из Ω . Отсюда

$$3\mu \leq \sum_{x \in C - \Omega} |\Omega \cap [x]| \leq |C - \Omega| \cdot \min(10, \mu/2).$$

Значит, $|C| \geq \mu + 3\mu / \min(10, \mu/2)$.

Ввиду прямоугольного соотношения μ делит $56 \cdot 45$. По теореме Ноймайера [1, теорема 1.5.5] имеем $\mu \leq 45$, причем в случае равенства Γ является графом Тэйлора. Противоречие с тем, что в графе Тэйлора либо $\lambda' = 0$, либо окрестность любой вершины — сильно регулярный граф с $k' = 2\mu'$. Утверждение (2) доказано.

Пусть диаметр Γ больше 3. По лемме 2.1 имеем $b_2 + c_2 + 2b_2c_2/9 \leq 56$. Так как $b_2 \geq c_2 = \mu$, то, подставляя μ вместо b_2 и c_2 в неравенство, получим $\mu^2 + 9\mu - 252 \leq 0$, поэтому $\mu \leq 12$. Отсюда $\mu \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Пусть Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(162, 56, 10, 24)$ или $(372, 56, 10, 8)$, Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d , являющийся r -накрытием Δ . Если $d = 5$, то Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, t(r-1), 24, 1; 1, 24, t, 45, 56\}$ или $\{56, 45, t(r-1), 8, 1; 1, 8, t, 45, 56\}$, причем $t(r-1) \leq 32$ для первого массива. В этом случае допустимых массивов нет.

Если $d = 4$, то Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, 24(r-1)/r, 1; 1, 24/r, 45, 56\}$ или $\{56, 45, 8(r-1)/r, 1; 1, 8/r, 45, 56\}$. В любом случае новые собственные значения θ_1 и θ_3 графа Γ являются корнями квадратного уравнения $x^2 - \lambda x - k = 0$ и кратность θ_1 равна $m_1 = (r-1)v/(2 + \lambda\theta_1/k)$. Поэтому $\theta_1 = 14$, $\theta_3 = -4$. Так как $\theta_3^2 = -\theta_4$ и $\theta_2 = -(\theta_3 + 2)$, то параметры Крейна q_{11}^4 и q_{44}^4 (определение параметров Крейна см. [1, гл. 2]) равны 0.

Для графа с массивом пересечений $\{56, 45, 8(r-1)/r, 1; 1, 8/r, 45, 56\}$ имеем $r = 2$ и число m_1 не целое.

Пусть Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, 24(r-1)/r, 1; 1, 24/r, 45, 56\}$. Тогда Γ имеет спектр $\{56^1, 14^{36(r-1)}, 2^{140}, -4^{126(r-1)}, -16^{21}\}$. В случае $r = 4$ получим $\mu = 6$ и $b_2 = 18$, противоречие с леммой 1.3. В случае $r = 6$ по [11] граф не существует. Итак, $r \in \{2, 3\}$. В случае $r = 2$ имеем $b_2 = c_2 = 12$, ввиду леммы 1.3 каждый μ -подграф является объединением трех четырехугольников и граф является 2-однородным (определение i -однородного графа см. в [11]). В случае $r = 3$ имеем $b_2 = 16$, $c_2 = 8$ и ввиду леммы 1.3 каждый μ -подграф является объединением двух четырехугольников.

З а м е ч а н и е 2. Любой граф Γ с массивом пересечений $\{56, 45, 24(r-1)/r, 1; 1, 24/r, 45, 56\}$ имеет спектр $\{56^1, 14^{36(r-1)}, 2^{140}, -4^{126(r-1)}, -16^{21}\}$. Поэтому $-4 = b^- = -1 - b_1/(\theta_1 + 1)$, $2 = b^+ = -1 - b_1/(\theta_d + 1)$, граф Γ является плотным (tight) и окрестности вершин в Γ сильно регулярны с параметрами $(56, 10, 0, 2)$ (см. [11]). Таким образом, $r \in \{2, 3\}$ и массивы пересечений, отвечающие $r = 4, 6, 8$ (отмеченные в [1] как допустимые), удаляются.

Далее, так как $q_{44}^4 = 0$, то $\Gamma_2(u)$ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{32, 27, 12(r-1)/r, 1; 1, 12/r, 27, 32\}$ и спектром $\{32^1, 8^{35(r-1)}, 2^{20}, -4^{70(r-1)}, -10^{84}\}$, являющийся покрытием сильно регулярного графа с параметрами $(105, 32, 4, 12)$.

До конца работы будем предполагать, что $d \geq 3$.

Лемма 2.3. *Параметр μ не больше 12.*

Доказательство. Пусть $\mu > 12$. По лемме 2.2 диаметр Γ равен 3, и по [1, предложения 2.2.7, 5.1.1] полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень. Далее, легко понять, что $c_3 + k_3 - 1 \geq k$. Отсюда по прямоугольному соотношению c_3 делит k_2b_2 и $c_3 + k_2b_2/c_3 \geq 57$.

Если $\mu \geq 21$, то ввиду леммы 2.1 имеем $b_2 \leq 6$. Так как k_2b_2 делится на 56, по прямоугольному соотношению получаем, что μ делит b_1b_2 и kb_1 . Поэтому $\mu \in \{30, 36\}$. Повторив те же рассуждения для $\mu \geq 30$, получим $\mu = 30, b_2 = 2, k_2 = 84$. Так как c_3 делит k_2b_2 и $c_3 + k_2b_2/c_3 \geq 57$, то $c_3 = 56$, Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, 2; 1, 30, 56\}$ и полином $w_4(x)$ не имеет отличных от 56 целых корней. Противоречие.

Пусть $\mu = 20$. Тогда $k_2 = 126$, и по лемме 2.1 $b_2 \leq 6$. Так как 56 делит k_2b_2 , то $b_2 = 4$. Так как c_3 делит k_2b_2 и $c_3 + k_2b_2/c_3 \geq 57$, то $c_3 = 56$, Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, 4; 1, 20, 56\}$, и полином $w_4(x)$ не имеет отличных от 56 целых корней. Противоречие.

Пусть $\mu = 18$. Тогда $k_2 = 140$, и по лемме 2.1 $b_2 \leq 7$. Так как 56 делит k_2b_2 , то b_2 четно. По лемме 2.2 $c_3 \geq 24$. Так как c_3 делит k_2b_2 и $c_3 + k_2b_2/c_3 \geq 57$, то $c_3 \in \{24, 28, 30, 35, 40, 42, 56\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, b_2; 1, 18, c_3\}$. Только в случаях $b_2 = 6$ и $c_3 = 30$, $b_2 = 6$ и $c_3 = 42$, $b_2 = 4$ и $c_3 = 56$ полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень $-2, 14, -16$ соответственно, но кратности этих собственных значений не целые.

Пусть $\mu = 15$. Тогда $k_2 = 168$, и по лемме 2.1 $b_2 \leq 9$. По лемме 2.2 $c_3 \geq 21$. Так как c_3 делит k_2b_2 и $c_3 + k_2b_2/c_3 \geq 57$, то $c_3 \in \{21, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 48, 49, 54, 56\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, b_2; 1, 15, c_3\}$. Только в случаях $b_2 = 6, 9$ и $c_3 = 42$, $b_2 = 1$ и $c_3 = 56$, $b_2 = 6$ и $c_3 = 56$, $b_2 = 7$ и $c_3 = 56$ полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень $-14, -1, -16$ и 8 соответственно, но кратности собственных значений 14 и 8 не целые, кратность -1 равна 56 (и кратности дробных собственных значений не целые), кратность -16 равна 18 (в последнем случае $p_{33}^3 < 0$).

Пусть $\mu = 14$. Тогда $k_2 = 180$, и по лемме 2.1 $b_2 \leq 10$. Противоречие с тем, что k_2b_2 делится на 56. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если диаметр Γ равен 3, то Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ и спектр $\{56^1, 8^{133}, -1^{56}, -7^{152}\}$.*

Доказательство. Пусть диаметр Γ равен 3. Тогда ввиду [1, предложения 2.2.7, 5.1.1] полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень.

Пусть $\mu = 12$. Тогда $k_2 = 210$, и по лемме 2.1 $b_2 \leq 12$. Так как 56 делит k_2b_2 , то b_2 делится на 4. По лемме 2.2 имеем $18 \leq c_3 \leq 56$. Так как c_3 делит k_2b_2 , то $c_3 \in \{18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, b_2; 1, 12, c_3\}$. Только в перечисленных ниже случаях полином $w_4(x)$ имеет целый корень, отличный от 56. В случае $b_2 = 12$ и $c_3 = 18$ имеется корень -10 , но $p_{33}^3 = -1$. В случае $b_2 = 4$ и $c_3 = 36$ имеется корень 4, но $p_{33}^3 < 0$. В случае $b_2 = 12$ и $c_3 = 45$ имеется корень 1, но значение p_{33}^3 не целое. В случае $b_2 = 12$ и $c_3 = 48$ имеется корень -16 , но значение p_{33}^3 не целое. В случаях $b_2 = 8$ и $c_3 = 20$, $b_2 = 12$ и $c_3 = 30$, $b_2 = 12$ и $c_3 = 42$, $b_2 = 8$ и $c_3 = 56$, $b_2 = 4$ и $c_3 = 56$ имеется, соответственно, корень 4, 2, 14, -16 и 8, но кратности собственных значений, не равных 2, не целые, кратность 2 равна 260 (в последнем случае $p_{33}^3 = -3$).

Пусть $\mu = 10$. Тогда $k_2 = 252$, и по лемме 2.1 $b_2 \leq 14$. Так как 56 делит k_2b_2 , то b_2 четно. По лемме 2.2 имеем $17 \leq c_3 \leq 56$. Также c_3 делит k_2b_2 и $c_3 + k_2b_2/c_3 \geq 57$, поэтому $c_3 \in \{18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 54, 56\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, b_2; 1, 10, c_3\}$. Только в случаях $b_2 = 2$ и $c_3 = 21$, $b_2 = 6$ и $c_3 = 36$, $b_2 \in \{2, \dots, 14\}$ и $c_3 = 42$, $b_2 = 2$ и $c_3 = 56$ полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень $-7, 4, 14$ и 8 соответственно, но кратности собственных значений, не равных 14, не целые, кратность 14 равна 24 (только в случае $b_2 = 4$, но тогда $p_{33}^3 < 0$).

Пусть $\mu = 9$. Тогда $k_2 = 280$, и по лемме 2.1 $b_2 \leq 15$. По лемме 2.2 имеем $17 \leq c_3 \leq 56$. Так как c_3 делит $k_2 b_2$ и $c_3 + k_2 b_2 / c_3 \geq 57$, то $c_3 \in \{18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 49, 50, 52, 55, 56\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, b_2; 1, 9, c_3\}$. Во всех случаях, кроме двух ($b_2 = 3$ и $c_3 = 42$, $b_2 = 1$ и $c_3 = 56$), если $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень, то он имеет не целую кратность. В случае $b_2 = 3$ и $c_3 = 42$ все собственные значения целые -14 , 5 и -7 , но только кратность -7 целая. В случае $b_2 = 1$ и $c_3 = 56$ граф Γ имеет допустимый массив пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ и спектр $\{56^1, 8^{133}, -1^{56}, -7^{152}\}$.

Пусть $\mu = 8$. Тогда $k_2 = 315$. Ввиду $56 \mid k_2 b_2$ по лемме 1.3 имеем $b_2 \in \{8, 16\}$. Далее, $17 \leq c_3 \leq 56$, $c_3 \mid k_2 b_2$, поэтому $c_3 \in \{18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, b_2; 1, 8, c_3\}$. Полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень 4 при $b_2 = 8$ и $c_3 = 36$, но $p_{33}^3 = -5$. В случаях $b_2 = 16$ и $c_3 = 20$, $b_2 = 16$ и $c_3 = 42$ полином $w_4(x)$ имеет целые корни $-26, 4, -8$ и $14, 2, -8$ соответственно, но кратность собственного значения -8 дробная. В случаях $b_2 = 16$ и $c_3 = 30$, $b_2 = 16$ и $c_3 = 42$, $b_2 = 16$ и $c_3 = 48$ полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень $-2, 14$ и -16 соответственно, но их кратности не целые.

Пусть $\mu = 7$. Тогда $k_2 = 360$. Ввиду $56 \mid k_2 b_2$ по лемме 1.3 имеем $b_2 \in \{7, 14\}$. Далее, $17 \leq c_3 \leq 56$, $c_3 \mid k_2 b_2$, поэтому $c_3 \in \{18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56\}$ и Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, b_2; 1, 7, c_3\}$. В случае $b_2 = 7$ и $c_3 = 42$ полином $w_4(x)$ имеет целые корни $-14, 3, -7$ и $14, 2, -8$ соответственно, но кратности собственных значений 14 и 3 дробные. В случаях $b_2 = 14$ и $c_3 = 21$, $b_2 = 14$ и $c_3 = 42$ полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень -7 и 14 соответственно, но их кратности не целые.

Пусть $\mu = 6$. Тогда $k_2 = 420$. По лемме 1.3 имеем $b_2 \leq 14$. Из $56 \mid k_2 b_2$ получим, что b_2 четно. Из $17 \leq c_3 \leq 56$, $c_3 \mid k_2 b_2$ получим $c_3 \in \{18, 20, 21, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 49, 50, 56\}$, и Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, b_2; 1, 6, c_3\}$. В следующих случаях полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень: при $b_2 = 10$ и $c_3 = 36$ имеется корень 4, но значение p_{33}^3 не целое; при $b_2 = 10$ и $c_3 = 50$ имеется корень -10 , но кратности всех неглавных собственных значений не целые; в случаях $b_2 = 6$ и $c_3 = 24$, $b_2 = 12$ и $c_3 = 35$, $b_2 = 2$ и $c_3 = 40$, $b_2 \in \{6, 12\}$ и $c_3 = 42$, $b_2 = 10$ и $c_3 = 50$, $b_2 = 12$ и $c_3 = 56$ имеется, соответственно, корень $8, -7, 8, 14, -10$ и -16 , но кратности этих собственных значений не целые.

Пусть $\mu = 5$. Тогда $k_2 = 504$. По лемме 1.3 имеем $b_2 \leq 16$. Учитывая $17 \leq c_3 \leq 56$, $k_2 b_2 / c_3 + c_3 \geq 57$ и $c_3 \mid k_2 b_2$, получим $c_3 \in \{18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 49, 52, 54, 56\}$, и Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, b_2; 1, 5, c_3\}$. В случае $b_2 \in \{1, \dots, 16\}$ и $c_3 = 42$ полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень -14 , и его кратность целая только при $b_2 = 8$, но тогда число p_{22}^2 не целое. В случае $b_2 = 1$ и $c_3 = 56$ полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень -1 кратности 56, но кратности не целых собственных значений дробные. В случаях $b_2 = 6$ и $c_3 = 21$, $b_2 = 11$ и $c_3 = 22$, $b_2 = 9$ и $c_3 = 24$ полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень $-9, 26$ и 8 соответственно, но их кратности не целые.

Пусть $\mu = 4$. Тогда $k_2 = 630$. По лемме 1.3 имеем $b_2 \leq 20$. Из $56 \mid k_2 b_2$ получим, что b_2 делится на 4. Учитывая $17 \leq c_3 \leq 56$ и $c_3 \mid k_2 b_2$, имеем $c_3 \in \{18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 56\}$, и Γ имеет массив пересечений $\{56, 45, b_2; 1, 4, c_3\}$. В случае $b_2 \in \{4, 8, \dots, 20\}$ и $c_3 = 42$ полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень -14 , и его кратность целая только при $b_2 = 20$, но тогда кратности не целых собственных значений дробные. В случаях $b_2 = 12$ и $c_3 = 24$, $b_2 = 16$ и $c_3 = 30$, $b_2 = 20$ и $c_3 = 30$, $b_2 = 12$ и $c_3 = 36$, $b_2 = 4$ и $c_3 = 40$, $b_2 = 12$ и $c_3 = 45$ полином $w_4(x)$ имеет отличный от 56 целый корень $-8, -6, 2, 4, 8$ и -1 соответственно, но их кратности не целые. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. Как следует из доказанной леммы, в случае $d = 3$ имеется единственный допустимый массив пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. Но по лемме 1.3 граф Гевиртца не содержит индуцированные многоугольники порядка 9 или изолированные многоугольники порядка 4 и 5. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ будут изучены в отдельной статье.

3. Графы большого диаметра

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d , большего 3, в котором окрестность каждой вершины изоморфна графу Гевиртца. Зафиксируем вершину u в Γ .

Лемма 3.1. *Верно неравенство $d \leq 5$, причем в случае $d = 5$ имеем $b_4 = 1$ и $c_5 = 56$.*

Доказательство. По лемме 1.7 имеем $d \leq 5$.

Пусть $d = 5$ и $d(u, w) = 3$. Положим $C = [w] \cap \Gamma_2(u)$, $B = [w] \cap \Gamma_4(u)$. По лемме 1.7 степень любой вершины в графе C не меньше 5 и B является графом Смита.

Возьмем $z \in B$. Допустим, что $b_4 > 1$ и подграф $[z] \cap \Gamma_5(u)$ содержит две различные вершины p, q . Тогда $[w] \cap [p]$ содержит 2-путь z_1, z, z_3 . Так как окрестность вершины z в графе $[z_1] \cap [z_3]$ совпадает с $\{w, p\}$, то $\{z_1, z_3\}$ не содержится в $[q]$. Следовательно, степень произвольной вершины $z \in B$ не меньше 3 в графе B . Противоречие со строением графов Смита. Значит, $b_4 = 1$.

Возьмем $p \in \Gamma_5(u) \cap [z]$. Допустим, что $c_5 < 56$ и $\Gamma_5(u) \cap [p]$ содержит вершину q . Тогда $[z] \cap [q]$ содержит 2-путь p_1, p, p_3 . Так как $b_4 = 1$, то $p_1, p_3 \in \Gamma_4(u)$. Но тогда $[p_1]$ содержит две вершины p, q из $\Gamma_5(u)$. Противоречие с тем, что $b_4 = 1$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Диаметр Γ равен 4.*

Доказательство. Допустим, что $d > 4$. Тогда по лемме 3.1 $d = 5$, $b_4 = 1$, $c_5 = 56$. Так как сильно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца, не имеют дистанционно регулярных накрытий диаметра 5, то Γ не является антиподальным графом. Отсюда по лемме 1.6 имеем $k_2 \leq k_5(k_5 - 1)$.

Пусть $\mu > 4$. По лемме 1.3 имеем $b_2 \leq 16$. Противоречие с тем, что в графе Γ верно неравенство $b_2 \geq c_3 \geq 17$. Значит, $\mu = 4$, $k_2 = 630$, $k_2 b_2$ делится на 56, поэтому b_2 делится на 4 и по лемме 1.3 имеем $b_2 \leq 20$. Так как $b_2 \geq c_3 \geq 17$, то $b_2 = 20$ и $c_3 \in \{18, 20\}$.

Допустим, что $c_3 = 18$. Тогда $k_3 = 700$ и по лемме 2.1 $b_3 \leq 7$. Поскольку $b_3 b_4$ делится на μ , то $b_3 = 4$. Заметим, что по лемме 1.6 $k_5 \geq 26$. Поэтому $k_3 b_3 / c_4 = k_4 = c_5 k_5 / b_4 \geq 56 \cdot 26$, следовательно, $c_4 \leq 25/13$. Противоречие с тем, что $c_4 \geq c_3 = 18$.

Аналогично доказывается, что $c_3 \neq 20$. Значит, граф Γ диаметра 5 не существует. Лемма доказана.

Компьютерный перебор массивов пересечений графов диаметра 4 и проверка известных (см. [1]) условий допустимости массивов показывает, что все допустимые массивы пересечений указаны в замечании 1 разд. 2. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Дистанционно регулярные графы Тервиллигера, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Докл. РАН. 2009. Т. 428, № 2. С. 157–160.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О 2-локально графах Зейделя // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, № 4. С. 67–80.
4. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** О графах Крейна без треугольников // Докл. РАН. 2006. Т. 403, № 6. С. 727–730.
5. **Махнев А.А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ -подграфы // Дискрет. анализ и исследование операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.
6. **The GAP Group**, GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Version 4.4.12. 2008. URL: <http://www.gap-system.org>.
7. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** Spectra of graphs (course notes). URL: <http://www.win.tue.nl/aeb/>.

8. **Terwilliger P.** A new feasibility condition for distance-regular graphs // Discrete Math. 1986. Vol. 61. P. 311–315.
9. **Dam E.R. van, Haemers W.H.** Eigenvalues and diameter of graphs // Linear Multilin. Alg. 1995. Vol. 39. P. 33–44.
10. **Brouwer A.E., Mesner D.M.** The connectivity of strongly regular graphs // Europ. J. Combin. 1985. Vol. 6. P. 215–216.
11. **Juriscic A., Koolen J.** 1-Homogeneous graphs with cocktail party μ -graphs // J. Algebr. Comb. 2003. Vol. 18. P. 79–98.

Гаврилюк Александр Львович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: ax-g@mail.ru

Поступила 25.07.2009

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр.
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: paduch@imm.uran.ru

УДК 519.854

УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

М. В. Девятерикова, А. А. Колоколов, А. П. Колосов

Работа посвящена вопросам применения унимодулярных преобразований в целочисленном линейном программировании с целью уменьшения мощности L -накрытий задач и повышения эффективности алгоритмов их решения. Построены семейства задач, которые являются трудными для некоторых алгоритмов отсечения, ветвей и границ и перебора L -классов. Предложены унимодулярные преобразования, позволяющие существенно ускорить процесс решения рассматриваемых задач, а также повысить устойчивость некоторых алгоритмов при малых колебаниях исходных данных.

Ключевые слова: целочисленное программирование, унимодулярные преобразования, устойчивость алгоритмов, отсечения Гомори.

M. V. Devyaterikova, A. A. Kolokolov, A. P. Kolosov. Unimodular transformations for problems of integer programming and analysis of the efficiency of their application.

The paper is devoted to issues of applying unimodular transformations in integer linear programming with the aim of decreasing the cardinality of L -covers of problems and increasing the efficiency of algorithms of their solution. Families of problems are constructed that are difficult for some cutting, branch and bound, and L -class enumeration algorithms. Unimodular transformations are suggested that allow one to accelerate the process of solving such problems and to increase the stability of some algorithms under small variations of initial data.

Keywords: integer programming, unimodular transformations, stability of algorithms, Gomory cuts.

Введение

Для исследования задач целочисленного программирования (ЦП), построения и анализа алгоритмов, основанных на релаксации условия целочисленности, развивается метод регулярных разбиений. С использованием этого метода исследована сложность решения ряда задач ЦП, изучена структура некоторых классов выпуклых многогранников, введены новые классы отсечений, построены оценки числа итераций для известных алгоритмов целочисленного программирования, разработаны новые алгоритмы. Значительное число результатов получено на основе L -разбиения [6, 7].

Важную роль в вопросах применения рассматриваемого метода играют дробные накрытия задач ЦП, которые последовательно “снимаются” алгоритмами в процессе их решения. Во многих случаях сложность задач целочисленного программирования определяется мощностью L -разбиения дробного накрытия (L -накрытия) задачи.

Одним из перспективных способов уменьшения мощности L -накрытий является использование унимодулярных преобразований, которые встречаются в различных разделах целочисленного программирования. В частности, они применяются при исследовании многогранников задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП) [5, 10], в полностью целочисленных алгоритмах отсечения (прямых и двойственных) и некоторых других [1, 6, 12], при доказательстве полиномиальной разрешимости задачи ЦЛП в случае фиксированного числа переменных [11]. Хорошо известно, что изменение порядка переменных (простейшее унимодулярное преобразование) может существенно влиять на эффективность решения задач ЦЛП.

В данной работе построены семейства задач ЦЛП, которые обладают L -накрытиями экспоненциальной от длины входа мощности и являются трудными для многих алгоритмов, основанных на использовании релаксационных множеств задач, в частности

алгоритмов отсечения, ветвей и границ, перебора L -классов. Показано, что применение унимодулярных преобразований специального вида позволяет значительно уменьшить мощность L -накрытий указанных задач и ускорить процесс их решения. Основное внимание при этом уделено первому алгоритму отсечения Гомори. Кроме того, установлено, что этот алгоритм является неустойчивым при малых колебаниях релаксационных множеств, и предложены унимодулярные преобразования, повышающие его устойчивость.

1. Предварительные сведения

1.1. Постановки задач и L -разбиение

Рассматривается задача поиска некоторой точки множества

$$M_0 = M \cap \mathbb{Z}^n,$$

где $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$, A — целочисленная $(m \times n)$ -матрица, b — целочисленный m -вектор, M — непусто и ограничено.

Целочисленную точку множества M_0 можно искать, например, решая следующую задачу ЦЛП: найти лексикографически максимальную точку множества $M \cap \mathbb{Z}^n$, т. е.

$$\text{найти } z^* = \text{lexmax}(M_0). \quad (1.1)$$

Важное место в вопросах исследования задач и алгоритмов ЦЛП занимает множество

$$M_* = \{x : x \in M, x \succ z \quad \forall z \in M_0\},$$

которое называется дробным покрытием задачи (1.1). Во многих случаях для решения задачи ЦЛП требуется исключить (отсечь) все дробное покрытие задачи.

Значительное число результатов для задач ЦЛП получено на основе метода регулярных разбиений [7]. Наиболее изученным и широко используемым регулярным разбиением является L -разбиение, которое можно определить следующим образом. Точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($x \succ y$) называются L -эквивалентными, если не существует отделяющей их точки $z \in \mathbb{Z}^n$ такой, что $x \succ z \succ y$. Здесь \succ, \succeq — символы лексикографического сравнения векторов. Эквивалентные точки образуют классы, которые называются L -классами. L -класс, состоящий только из нецелочисленных точек, называется дробным. Каждая целочисленная точка образует отдельный L -класс. Разбиение произвольного множества X на L -классы называется L -разбиением (L -структурой) этого множества и обозначается X/L . L -разбиение обладает следующими полезными свойствами:

1. Любой дробный L -класс $V \in \mathbb{R}^n/L$ может быть представлен в виде

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = a_1, \dots, x_{r-1} = a_{r-1}, a_r < x_r < a_r + 1\},$$

где a_j — некоторые целые числа, $j = 1, \dots, r$, $1 \leq r \leq n$. Величина r называется рангом L -класса.

2. Пусть X, X' — непустые множества в \mathbb{R}^n . Будем говорить, что X лексикографически больше X' ($X \succ X'$), если $x \succ x'$ для всех $x \in X$ и $x' \in X'$. Это отношение является линейным порядком для фактор-множества X/L . Отсюда вытекает, что если X ограничено, то X/L можно записать как

$$X/L = \{V_1, \dots, V_p\}, \quad V_i \succ V_{i+1}, \quad i = 1, \dots, p-1.$$

Это свойство используется при разработке алгоритмов перебора L -классов [7].

Множество M_*/L называется L -накрытием. Сложность решения задачи (1.1) для ряда алгоритмов ЦП, в том числе для алгоритмов отсечения, связана с величиной $|M_*/L|$ (“объемом” дробного накрытия M_* , измеренным с помощью L -разбиения). Во многих случаях задачи с мощными L -накрытиями требуют экспоненциального от длины входа числа итераций алгоритмов ЦЛП, основанных на использовании релаксационных множеств.

1.2. Унимодулярные преобразования и L -накрытия задач

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u_{ij} \in \mathbb{Z}$, $i, j = 1, \dots, n$. Рассмотрим преобразование координат U :

$$\begin{aligned} U &= (u_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n, \\ y &= Ux. \end{aligned}$$

Матрица U называется унимодулярной, если $\det U = \pm 1$ [13].

Для ЦЛП важное свойство унимодулярных преобразований заключается в том, что целочисленная решетка инвариантна относительно любого унимодулярного преобразования пространства. Кроме того, такие преобразования сохраняют неизменными площади фигур и объемы тел.

Простейшим примером унимодулярного преобразования является следующее:

$$y_i = x_{k_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $k_i \in N = \{1, \dots, n\}$, (k_1, \dots, k_n) — перестановка чисел $1, \dots, n$. Известно, что порядок переменных существенно влияет на процесс решения задач ЦЛП.

Ранее унимодулярные преобразования уже использовались для уменьшения мощности L -накрытий релаксационных множеств. В частности, исследован многогранник Джерослоу

$$\mathcal{D} = \left\{ x : x \in B^n, \quad 2 \sum_{j=1}^n x_j = k \right\},$$

где $B^n = \{x : 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, n\}$, $n \geq 2$, k — нечетное, $1 \leq k < 2n$. На множестве \mathcal{D} рассмотрим задачу ЦЛП с произвольной линейной целевой функцией. Для ее решения методом ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг) требуется экспоненциальное число итераций. Нетрудно увидеть, что в этой задаче $\mathcal{D}_* = \mathcal{D}$. Доказано [6], что задача вида (1.1) на множестве \mathcal{D} обладает мощным L -накрытием:

$$|\mathcal{D}_*/L| \geq 2C_{n-1}^{\lfloor k/2 \rfloor}.$$

Рассмотрим унимодулярное преобразование:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ y_2 &= \quad \quad x_2, \\ &\quad \quad \quad \dots \\ y_n &= \quad \quad \quad \quad \quad x_n. \end{aligned}$$

Это преобразование переводит \mathcal{D} в многогранник

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{y \in \mathbb{R}^n : 2y_1 = k, \quad 0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 2, \dots, n\}.$$

Множество $\tilde{\mathcal{D}}_*$ будет состоять из точек единственного L -класса

$$V = \{y \in \mathbb{R}^n : \lfloor k/2 \rfloor < y_1 < \lfloor k/2 \rfloor + 1, \quad 0 \leq y_j \leq 1, \quad j = 2, \dots, n\}.$$

Задача ЦЛП с любой линейной целевой функцией на новом многограннике требует не более трех итераций метода ветвей и границ.

Имеется пример задачи, когда использование любых унимодулярных преобразований не позволяет уменьшить мощность L -накрытия. Пусть $J_1 \subseteq N$, $J_0 = N \setminus J_1$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha \geq 2$. Рассмотрим многогранник \mathcal{K} следующего вида:

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \alpha \sum_{j \in J_1} x_j - \alpha \sum_{j \in J_0} x_j \leq \alpha |J_1| - 1, \quad 0 \leq x_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \right\}.$$

Известно, что $\mathcal{K}_* = \mathcal{K}$, $|\mathcal{K}_*/L| = (2^n - 1)$ [7]. Установлено, что для задачи (1.1) на данном многограннике ни одно унимодулярное преобразование не может привести к уменьшению мощности L -накрытия.

1.3. Устойчивость алгоритмов ЦЛП по релаксационному множеству

Пусть Ψ — некоторый бесконечный класс выпуклых многогранных множеств пространства \mathbb{R}^n , M — непустое множество из Ψ .

Рассмотрим положительное число ε и некоторую метрику ρ в \mathbb{R}^n . Определим

$$M(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(M, x) \leq \varepsilon\}.$$

Множество $M^+(\varepsilon) \in \Psi$ называется допустимым ε -расширением множества M , если $M \subseteq M^+(\varepsilon) \subseteq M(\varepsilon)$.

Будем говорить, что непустое множество $M^- \in \Psi$ является допустимым сужением M , если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $M^- \subseteq M$;
- 2) $M^- \cap \mathbb{Z}^n = M \cap \mathbb{Z}^n$.

Положим $\varepsilon'_M = \sup\{\varepsilon > 0 : M(\varepsilon) \cap \mathbb{Z}^n = M \cap \mathbb{Z}^n\}$. При $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_M)$ определим допустимое ε -изменение множества M как множество $\widetilde{M} \in \Psi$, для которого выполняется $M^- \subseteq \widetilde{M} \subseteq M^+(\varepsilon)$.

Отметим, что множество M может иметь целый класс допустимых расширений, сужений и изменений при фиксированном ε .

Обозначим через \mathcal{A} алгоритм решения задачи (1.1) и через $I_{\mathcal{A}}(M)$ — число итераций алгоритма при решении этой задачи с релаксационным множеством M . Будем говорить, что алгоритм \mathcal{A} устойчив для задач ЦЛП на множествах из Ψ , если существует $\varepsilon_M \in (0, \varepsilon'_M)$ для любого $M \in \Psi$ и найдется полином $p(n)$, не зависящий от M , такие, что имеет место соотношение

$$I_{\mathcal{A}}(\widetilde{M}) \leq p(n)I_{\mathcal{A}}(M)$$

для всех допустимых ε_M -изменений \widetilde{M} .

1.4. Алгоритм отсечения Гомори

В данной работе исследуется вариант первого алгоритма Гомори (обозначим его G_1), основанный на использовании лексикографического двойственного симплекс-метода (ЛДСМ) [6], с отсечениями типа

$$\sum_{j=1}^n \{\tilde{a}_{pj}\} t_j \geq \{\tilde{a}_{p0}\},$$

где \tilde{a}_{pj} — коэффициент симплексной таблицы, принадлежащий производящей строке с номером p и j -му столбцу, $\{\tilde{a}_{pj}\} = \tilde{a}_{pj} - [\tilde{a}_{pj}]$, $j = 0, 1, \dots, n$; t_j — соответствующие небазисные

переменные, $j = 1, \dots, n$. В алгоритме G_1 отсечения строятся по первой строке с дробным коэффициентом в столбце свободных членов и только для оптимальных симплексных таблиц. При этом начальная симплексная таблица имеет следующий вид (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

	1	$-x_1$	$-x_2$	\dots	$-x_n$
x_1	0	-1	0	\dots	0
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_n	0	0	0	\dots	-1
$x_{(n+1)}$	$a_{(n+1)0}$	$a_{(n+1)1}$	$a_{(n+1)2}$	\dots	$a_{(n+1)n}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$x_{(n+m)}$	$a_{(n+m)0}$	$a_{(n+m)1}$	$a_{(n+m)2}$	\dots	$a_{(n+m)n}$

Отметим, что отсечения алгоритма G_1 являются регулярными, т. е. вместе с непрерывным оптимумом текущей задачи линейного программирования (ЛП) исключают и все точки L -класса множества M , содержащего данный оптимум. Известно, что для алгоритма G_1 при решении общей задачи ЦЛП вида (1.1) имеет место оценка [6]

$$\frac{1}{H} |M_*/L| \leq I_{G_1}(M) \leq |M_*/L|, \quad (1.2)$$

где H — верхняя оценка глубины отсечений. Под глубиной отсечения будем понимать число полностью исключаемых им из релаксационного множества L -классов.

2. Оценки числа итераций

2.1. Исследование задач на плоскости

В данном разделе построены семейства задач ЦЛП с мощными (экспоненциальными от длины входа) L -накрытиями. Найдено число итераций, выполняемых при решении задач этих семейств алгоритмом G_1 . Предложены унимодулярные преобразования, позволяющие уменьшить мощности L -накрытий задач и ускорить процесс их решения указанным алгоритмом.

Пусть $\alpha \geq 3$ — целочисленный параметр. Рассмотрим семейство задач $K_1(\alpha)$

$$f(x) = x_1 \rightarrow \max$$

при условиях

$$\begin{aligned} -(\alpha - 1)x_1 + \alpha x_2 &\leq 0, \\ \alpha x_1 - (\alpha - 1)x_2 &\leq \alpha, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

Нами исследуются L -накрытия лексикографических задач следующего семейства $\tilde{K}_1(\alpha)$:

$$\text{найти } z^* = \text{lexmax}(M_1(\alpha) \cap \mathbb{Z}^2),$$

где $M_1(\alpha)$ — многогранник задач семейства $K_1(\alpha)$.

Теорема 1. Для мощности L -накрытия любой задачи семейства $\tilde{K}_1(\alpha)$ справедливо следующее соотношение:

$$|M_1(\alpha)_*/L| = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \text{ — четное,} \\ \alpha - 1 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Отметим, что задачи из $\tilde{K}_1(\alpha)$ имеют только по две допустимые целочисленные точки: $(0, 0)$ и $(1, 0)$, причем последняя из них — оптимальное решение. Лексикографически максимальной точкой многогранника $M_1(\alpha)$ является точка $(\alpha^2/(2\alpha - 1), (\alpha - 1)\alpha/(2\alpha - 1))$.

Таким образом, дробное накрытие задачи $\tilde{K}_1(\alpha)$ состоит только из точек L -классов ранга 1 вида

$$V_i^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : i < x_1 < i + 1\}, \quad i = 1, \dots, \lfloor \alpha^2/(2\alpha - 1) \rfloor$$

и L -классов ранга 2 вида

$$V_j^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = j, \quad j - 1 < x_2 < j\}, \quad j = 1, \dots, \lfloor \alpha^2/(2\alpha - 1) \rfloor.$$

Так как $\lfloor (\alpha^2)/(2\alpha - 1) \rfloor = \alpha/2$ при четном α , а при нечетном — $\lfloor (\alpha^2)/(2\alpha - 1) \rfloor = (\alpha - 1)/2$, то количество всех L -классов V_i^1 и V_j^2 равно α при четном α и $(\alpha - 1)$ — при нечетном. Теорема доказана.

Непосредственно из этого результата и оценки (1.2) вытекает, что число итераций алгоритма G_1 не превосходит α . Докажем, что оценка (1.2) на семействе $\tilde{K}_1(\alpha)$ является точной.

Теорема 2. Для семейства $\tilde{K}_1(\alpha)$ справедливы следующие соотношения:

$$I_{G_1}(M_1(\alpha)) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \text{ — четное,} \\ \alpha - 1 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда α — четное. Введем обозначение: $T^{k,p}$ — симплексная таблица с номером p на k -й итерации алгоритма G_1 .

Исходная симплексная таблица $T^{1,1}$ не является L -нормальной. Для ее L -нормализации можно провести итерацию прямого симплекс-метода с дополнительным ограничением $x_1 + x_2 \leq \alpha + 1$, которому удовлетворяют все точки исходного релаксационного множества.

Покажем, что на шаге $(1 + 2k).1$ симплексная таблица имеет следующий вид (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

$T^{(1+2k).1}$	1	s_{2k}	s_{2k-1}
x_1	$\frac{\alpha - 2(k-1)}{2}$	0	1
x_2	$\frac{\alpha - 2k}{2}$	1	0
x_3	$\frac{\alpha + 2(k-1)}{2}$	$-\alpha$	$\alpha - 1$
x_4	$\frac{2k - \alpha}{2}$	$\alpha - 1$	$-\alpha$
x_5	$2k$	-1	-1

Доказательство проводится индукцией по k (табл. 3–8).

Т а б л и ц а 3

$T^{1.1}$	1	x_1	x_2
x_1	0	-1	0
x_2	0	0	-1
x_3	0	$1 - \alpha$	α
x_4	α	α	$1 - \alpha$
x_5	$\alpha + 1$	1	1

Т а б л и ц а 4

$T^{1.2}$	1	x_5	x_2
x_1	$\alpha + 1$	1	1
x_2	0	0	-1
x_3	$\alpha^2 - 1$	$\alpha - 1$	$2\alpha - 1$
x_4	$-\alpha^2$	$-\alpha$	$1 - 2\alpha$
x_5	0	-1	0

Т а б л и ц а 6

Т а б л и ц а 5

$T^{1.3}$	1	x_5	x_4
x_1	$1 + \frac{\alpha^2 - \alpha}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}$	$\frac{1}{2\alpha - 1}$
x_2	$\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha}{2\alpha - 1}$	$-\frac{1}{2\alpha - 1}$
x_3	-1	-1	1
x_4	0	0	-1
x_5	0	-1	0

$T^{1.4}$	1	x_3	x_4
x_1	$\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha}{2\alpha - 1}$
x_2	$\frac{\alpha^2 - \alpha}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}$
x_3	0	-1	0
x_4	0	0	-1
x_5	1	-1	-1
s_1	$-\frac{\alpha}{4\alpha - 2}$	$-\frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}$	$-\frac{\alpha}{2\alpha - 1}$

Т а б л и ц а 7

$T^{2.1}$	1	x_3	s_1
x_1	$\frac{\alpha}{2}$	0	1
x_2	$\frac{2\alpha^2 - 3\alpha + 1}{4\alpha - 2}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{\alpha - 1}{\alpha}$
x_3	0	-1	0
x_4	$\frac{1}{2}$	$\frac{\alpha - 1}{\alpha}$	$-\frac{2\alpha - 1}{\alpha}$
x_5	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{\alpha}$	$-\frac{2\alpha - 1}{\alpha}$
s_2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha} - 1$

Т а б л и ц а 8

$T^{3.1}$	1	s_2	s_1
x_1	$\frac{\alpha}{2}$	0	1
x_2	$\frac{\alpha - 2}{2}$	1	0
x_3	$\frac{\alpha}{2}$	$-\alpha$	$\alpha - 1$
x_4	$\frac{2 - \alpha}{2}$	$\alpha - 1$	$-\alpha$
x_5	2	-1	-1

Т а б л и ц а 9

$T^{(1+2k).1}$	1	s_{2k}	s_{2k-1}
x_1	$\frac{\alpha - 2(k-1)}{2}$	0	1
x_2	$\frac{\alpha - 2k}{2}$	1	0
x_3	$\frac{\alpha + 2(k-1)}{2}$	$-\alpha$	$\alpha - 1$
x_4	$\frac{2k - \alpha}{2}$	$\alpha - 1$	$-\alpha$
x_5	$2k$	-1	-1

Т а б л и ц а 10

$T^{(1+2k).2}$	1	s_{2k}	x_4
x_1	$\frac{\alpha^2 - (2k-1)\alpha + 2k}{2\alpha}$	$\frac{\alpha - 1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$
x_2	$\frac{\alpha - 2k}{2}$	1	0
x_3	$\frac{(4k-1)\alpha - 2k}{2\alpha}$	$\frac{1 - 2\alpha}{\alpha}$	$\frac{\alpha - 1}{\alpha}$
x_4	0	0	-1
x_5	$\frac{(4k+1)\alpha - 2k}{2\alpha}$	$\frac{1 - 2\alpha}{\alpha}$	$-\frac{1}{\alpha}$
s_{2k+1}	$-\frac{\alpha + 2k}{2\alpha}$	$-\frac{\alpha - 1}{\alpha}$	$-\frac{1}{\alpha}$

Т а б л и ц а 11

$T^{(2+2k).1}$	1	s_{2k}	s_{2k+1}
x_1	$\frac{\alpha - 2k}{2}$	0	1
x_2	$\frac{\alpha - 2k}{2}$	1	0
x_3	$\frac{2k - \alpha}{2}$	$-\alpha$	$\alpha - 1$
x_4	$\frac{\alpha + 2k}{2}$	$\alpha - 1$	$-\alpha$
x_5	$2k + 1$	-1	-1

Для $k = 1$, т. е. для $T^{3.1}$ (см. табл. 8), утверждение верно. Предположим, что оно справедливо при $k \geq 2$, и докажем, что это имеет место и для $(k+1)$ (табл. 9–13).

После очередного симплексного преобразования ясно, что элементы следующей таблицы $T^{(1+2(k+1)).1}$ (см. табл. 13) вычисляются по формулам, которые получаются из элементов таблицы $T^{(1+2k).1}$ (см. табл. 9) при подстановке в них $(k+1)$ вместо k .

Итак, по индукции показано, что таблица $T^{(1+2k).1}$ имеет указанный вид. Процесс завершается при $k = \alpha/2$. В этом случае таблица $T^{(1+2k).1}$ (табл. 9) становится оптимальной и мы имеем решение $x_1 = 1, x_2 = 0$. В случае $\alpha > 2k$ таблица $T^{(1+2k).1}$ не является прямо допустимой по строке, соответствующей x_4 . Таким образом, будет выполнено $2k = \alpha$ итераций алгоритма G_1 . Для случая нечетного α доказательство проводится аналогично. Теорема доказана. \square

Т а б л и ц а 12

$T^{(2+2k).2}$	1	x_3	s_{2k+1}
x_1	$\frac{\alpha - 2k}{2}$	0	1
x_2	$\frac{\alpha^2 - (2k + 1)\alpha + 2k}{2\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{\alpha - 1}{\alpha}$
x_3	0	-1	0
x_4	$\frac{(4k + 1)\alpha - 2k}{2\alpha}$	$\frac{\alpha - 1}{\alpha}$	$\frac{1 - 2\alpha}{\alpha}$
x_5	$\frac{(4k + 3)\alpha - 2k}{2\alpha}$	$-\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1 - 2\alpha}{\alpha}$
$s_{2(k+1)}$	$-\frac{\alpha + 2k}{2\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$	$-\frac{\alpha - 1}{\alpha}$

Т а б л и ц а 13

$T^{(1+2(k+1)).1}$	1	$s_{2(k+1)}$	s_{2k+1}
x_1	$\frac{\alpha - 2k}{2}$	0	1
x_2	$\frac{\alpha - 2(k + 1)}{2}$	1	0
x_3	$\frac{\alpha + 2k}{2}$	$-\alpha$	$\alpha - 1$
x_4	$\frac{2(k + 1) - \alpha}{2}$	$\alpha - 1$	$-\alpha$
x_5	$2(k + 1)$	-1	-1

Так как отсечения в G_1 являются регулярными, то из теорем 1 и 2 следует, что их глубина равна единице.

Для метода перебора L -классов и метода ветвей и границ получены результаты, аналогичные теореме 2 (экспоненциальное число итераций от длины входа для задач семейства $K_1(\alpha)$) [3].

Укажем унимодулярное преобразование U_0 множества $M_1(\alpha)$, которое позволяет сделать мощность L -накрытия не зависящей от α :

$$y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_2.$$

Отсюда вытекает

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_2.$$

Подставляя эти значения в исходную задачу, получаем:

$$\begin{aligned} -(\alpha - 1)y_1 + y_2 &\leq 0, \\ \alpha y_1 + y_2 &\leq \alpha, \\ y_1 + y_2 &\geq 0, \\ y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

При указанном преобразовании целевая функция семейства $K_1(\alpha)$ принимает вид $y_1 + y_2 \rightarrow \max$.

Нетрудно проверить, что все точки множества $U_0(M_1(\alpha))$, кроме $(1, 0)$ и $(0, 0)$, лежат в одном дробном L -классе, определяемом условием $0 < y_1 < 1$. Таким образом, L -разбиение многогранника $U_0(M_1(\alpha))$ состоит из трех L -классов. При этом лексикографически максимальная точка $(1, 0)$ является целочисленной. Поэтому алгоритм G_1 завершит работу на задачах семейства $U_0(\tilde{K}_1(\alpha))$ после решения первой же задачи линейного программирования. Алгоритмам ветвей и границ и перебора L -классов при решении задач семейства $U_0(K_1(\alpha))$ также потребуются несколько итераций.

Однако унимодулярные преобразования позволяют значительно уменьшить мощность L -накрытий задач и в том случае, когда релаксационное множество задачи вообще не содержит целочисленных точек. Рассмотрим семейство $K_2(\alpha)$, обладающее этим свойством. Оно отличается от $K_1(\alpha)$ наличием дополнительного ограничения $x_1 + x_2 \geq 2$.

Рассмотрим L -накрытия лексикографических задач семейства $\tilde{K}_2(\alpha)$

$$\text{найти } z^* = \text{lexmax}(M_2(\alpha) \cap \mathbb{Z}^2),$$

где $M_2(\alpha)$ — многогранник задачи семейства $K_2(\alpha)$. Используя рассуждения, проведенные при анализе семейства $\tilde{K}_1(\alpha)$, нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Для мощности L -накрытия любой задачи семейства $\tilde{K}_2(\alpha)$ справедливо соотношение*

$$|M_2(\alpha)_*/L| = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{если } \alpha \text{ — четное,} \\ \alpha & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Нами показано, что как и в случае рассмотренного выше семейства, задачи из $\tilde{K}_2(\alpha)$ требуют для своего решения алгоритмом G_1 экспоненциального от длины входа числа итераций. Это же утверждение справедливо для алгоритмов ветвей и границ и перебора L -классов при решении задач семейства $K_2(\alpha)$. После применения предложенного выше преобразования U_0 к задачам семейств $K_2(\alpha)$ и $\tilde{K}_2(\alpha)$ L -разбиение множества $U_0(M_2(\alpha))$ будет состоять из одного дробного L -класса. Это означает, что задачи рассматриваемых семейств решаются указанными алгоритмами за одну или несколько итераций.

2.2. Анализ многомерного случая

Представляет интерес построение семейств с аналогичными свойствами в пространстве \mathbb{R}^n . Такое семейство можно получить на основе семейства $K_1(\alpha)$.

Пусть n — четное, $\alpha \geq 3$ — целочисленный параметр. Рассмотрим семейство $K_1^n(\alpha)$, которое имеет вид

$$f(x) = x_1 \rightarrow \max$$

при условиях

$$\begin{aligned}
 -(\alpha - 1)x_1 + \alpha x_2 &\leq 0, \\
 \alpha x_1 - (\alpha - 1)x_2 &\leq \alpha, \\
 -(\alpha - 1)x_3 + \alpha x_4 &\leq 0, \\
 \alpha x_3 - (\alpha - 1)x_4 &\leq \alpha, \\
 &\dots \\
 -(\alpha - 1)x_{n-1} + \alpha x_n &\leq 0, \\
 \alpha x_{n-1} - (\alpha - 1)x_n &\leq \alpha, \\
 x_1, \dots, x_n &\geq 0 \quad - \text{целые.}
 \end{aligned}$$

Используем также соответствующее семейство лексикографических задач $\tilde{K}_1^n(\alpha)$:

$$\text{найти } z^* = \text{lexmax}(M_1^n(\alpha) \cap \mathbb{Z}^n),$$

где $M_1^n(\alpha)$ — многогранник задач из $K_1^n(\alpha)$.

Теорема 4. *Для мощности L -накрытия любой задачи семейства $\tilde{K}_1^n(\alpha)$ справедливо следующее соотношение:*

$$|M_1^n(\alpha)_*/L| = \begin{cases} \frac{n}{2}\alpha, & \text{если } \alpha \text{ — четное,} \\ \frac{n}{2}(\alpha - 1) & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Аналогично двумерному случаю оптимальное решение любой задачи из $\tilde{K}_1^n(\alpha)$ имеет вид $(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$, а лексикографически максимальной точкой многогранника $M_1^n(\alpha)$ является точка

$$\left(\alpha^2/(2\alpha - 1), (\alpha - 1)\alpha/(2\alpha - 1), \dots, \alpha^2/(2\alpha - 1), (\alpha - 1)\alpha/(2\alpha - 1) \right).$$

Таким образом, дробное покрытие задачи из $\tilde{K}_1^n(\alpha)$ состоит только из точек L -классов ранга $(2k + 1), k = 0, \dots, (n/2 - 1)$ вида

$$\begin{aligned}
 V_{ik}^1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1, x_2 = 0, \dots, x_{2k-1} = 1, x_{2k} = 0, i < x_{2k+1} < i + 1 \right\}, \\
 i = 1, \dots, \lfloor \alpha^2/(2\alpha - 1) \rfloor
 \end{aligned}$$

и L -классов ранга $2k, k = 1, \dots, n/2$

$$\begin{aligned}
 V_{jk}^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1, x_2 = 0, \dots, x_{2k-3} = 1, x_{2k-2} = 0, x_{2k-1} = j, j - 1 < x_{2k} < j \right\}, \\
 j = 1, \dots, \lfloor \alpha^2/(2\alpha - 1) \rfloor.
 \end{aligned}$$

Так как $\lfloor \alpha^2/(2\alpha - 1) \rfloor = \alpha/2$ при четном α , а при нечетном $\lfloor \alpha^2/(2\alpha - 1) \rfloor = (\alpha - 1)/2$, то получаем утверждение теоремы. Теорема доказана. \square

Найдем значение числа итераций первого алгоритма Гомори для задач семейства $\tilde{K}_1^n(\alpha)$.

Теорема 5. *Для семейства $\tilde{K}_1^n(\alpha)$ справедливы следующие соотношения:*

$$I_{G_1}(M_1^n(\alpha)) = \begin{cases} \frac{n}{2}\alpha, & \text{если } \alpha \text{ — четное,} \\ \frac{n}{2}(\alpha - 1) & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Т а б л и ц а 14

$T^{1.1}$	1	x_1	x_2
x_1	0	-1	0
x_2	0	0	-1
x_3	0	$1 - \alpha$	α
x_4	α	α	$1 - \alpha$
x_5	$n\alpha$	1	0
x_6	$n\alpha$	0	1

Т а б л и ц а 15

$T^{1.2}$	1	x_5	x_2
x_1	$n\alpha$	1	0
x_2	0	0	-1
x_3	$n\alpha^2 - n\alpha$	$\alpha - 1$	α
x_4	$\alpha - n\alpha^2$	$-\alpha$	$1 - \alpha$
x_5	0	-1	0
x_6	$n\alpha$	0	1

Т а б л и ц а 17

Т а б л и ц а 16

$T^{1.3}$	1	x_5	x_6
x_1	$n\alpha$	1	0
x_2	$n\alpha$	0	1
x_3	$-n\alpha$	$\alpha - 1$	$-\alpha$
x_4	$\alpha - n\alpha$	$-\alpha$	$\alpha - 1$
x_5	0	-1	0
x_6	0	0	-1

$T^{1.4}$	1	x_4	x_6
x_1	$n\alpha - n + 1$	$\frac{1}{\alpha}$	$1 - \frac{1}{\alpha}$
x_2	$n\alpha$	0	1
x_3	$-2n\alpha + n + \alpha - 1$	$1 - \frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha} - 2$
x_4	0	-1	0
x_5	$n - 1$	$-\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha} - 1$
x_6	0	0	-1

Т а б л и ц а 18

$T^{1.5}$	1	x_4	x_3
x_1	$\frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}$
x_2	$\frac{\alpha^2 - \alpha}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha}{2\alpha - 1}$
x_3	0	0	-1
x_4	0	-1	0
x_5	$\frac{2n\alpha^2 - n\alpha - \alpha^2}{2\alpha - 1}$	$\frac{\alpha}{1 - 2\alpha}$	$\frac{1 - \alpha}{2\alpha - 1}$
x_6	$\frac{2n\alpha^2 - n\alpha - \alpha^2 + \alpha}{2\alpha - 1}$	$-\frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}$	$-\frac{\alpha}{2\alpha - 1}$

Доказательство. Для приведения начальной таблицы к L -нормальной форме добавим n ограничений вида $x_j \leq \beta$, $j = 1, \dots, n$ и выполним итерации ЛДСМ с каждой из добавленных строк в отдельности. Такой прием позволяет сохранить блочную структуру таблицы, в результате чего можно ограничиться отдельным рассмотрением каждого блока, который содержит только две переменные исходной задачи. Очевидно, что общее число итераций алгоритма Гомори будет в $n/2$ раз больше числа итераций для одного блока. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что в случае $n = 2$ имеет место следующее утверждение (табл. 14–18):

$$I_{G_1}(M_1^2(\alpha)) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \text{ — четное,} \\ \alpha - 1 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Строки, соответствующие переменным x_5 и x_6 , могут быть вычеркнуты из таблицы $T^{1.5}$ (см. табл. 18). С точностью до перестановки столбцов получаем таблицу, к которой приходим и с использованием L -нормализации, полученной на основе неравенства $x_1 + x_2 \leq \alpha + 1$. Поэтому далее в каждом из блоков общей симплексной таблицы процесс пойдет таким же образом, как и в теореме 2. Благодаря сохранению блочной структуры отдельные блоки не влияют друг на друга, и вычисления в каждом из них будут выполнены последовательно. Поскольку таких блоков $n/2$, то теорема доказана. \square

Аналогично доказываются теоремы об экспоненциальном от длины входа числе итераций метода ветвей и границ и перебора L -классов для семейства $K_1^n(\alpha)$.

Как и в двумерном случае, для семейства $\tilde{K}_1^n(\alpha)$ можно построить унимодулярное преобразование U_0^n пространства, которое позволяет сделать мощность L -накрытия задач не зависящей от α и ускорить процесс решения:

$$U_0^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После применения этого преобразования мощность L -накрытий задач рассматриваемого семейства будет равна нулю. Следовательно, алгоритмам Гомори и перебора L -классов в данном случае потребуется одна итерация.

3. Устойчивость алгоритмов и унимодулярные преобразования

Устойчивость к малым изменениям исходных данных является важной характеристикой алгоритмов ЦЛП. Ранее нами была исследована устойчивость ряда алгоритмов ЦЛП при малых колебаниях как релаксационного множества, так и целевой функции [2, 9]. В частности, было показано, что метод перебора L -классов и алгоритмы с вполне регулярными отсечениями устойчивы при малых колебаниях релаксационного множества, а метод ветвей и границ является неустойчивым [2]. В данном разделе мы рассмотрим поведение первого алгоритма Гомори при малых изменениях релаксационного множества, а также влияние унимодулярных преобразований на устойчивость указанного алгоритма.

Пусть α — целочисленный параметр, $\alpha \geq 3$. Рассмотрим семейство задач $S(\alpha)$:

$$\text{найти } z^* = \text{lexmax}(M \cap \mathbb{Z}^2),$$

где M определяется следующими ограничениями:

$$2x_2 \leq 1, \quad x_1 - (\alpha - 2)x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Нетрудно проверить, что для любого α число итераций первого алгоритма Гомори при решении задач из этого семейства не превосходит 2, хотя мощность L -накрытия $|M_*/L|$ равна $(\alpha - 1)$.

Построим множество $M^+(\varepsilon)$ — допустимое ε -расширение множества M :

$$2x_1 + 2p\alpha x_2 \leq \alpha(p + 1), \quad x_1 - (\alpha - 2)x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

где p — достаточно большое целое число.

Число итераций алгоритма G_1 при решении задачи вида (1.1) на множестве $M^+(\varepsilon)$ будет равно $(\alpha - 1)$, т. е. мощности его L -накрытия. Таким образом, соотношение $I_{G_1}(M^+(\varepsilon))/I_{G_1}(M)$ будет не меньше, чем $(\alpha - 1)/2$ и, следовательно, зависит от параметров задачи, а не от размерности пространства. Отсюда вытекает, что первый алгоритм Гомори не является устойчивым при малых колебаниях релаксационного множества на классе задач ЦЛП вида (1.1).

Использование унимодулярных преобразований не делает первый алгоритм Гомори устойчивым на всем классе задач ЦЛП, однако позволяет добиться этого на некоторых семействах задач, например на семействе $S(\alpha)$.

Рассмотрим простейшее унимодулярное преобразование U , которое определяется следующим образом:

$$y_1 = x_2, \quad y_2 = x_1.$$

Тогда L -накрытия множеств $U(M)$ и $U(M^+(\varepsilon))$ будут состоять из одного L -класса. Следовательно,

$$I_{G_1}(U(M^+(\varepsilon))) = I_{G_1}(U(M)) = 1.$$

Таким образом, алгоритм G_1^U , являющийся комбинацией рассмотренного унимодулярного преобразования и первого алгоритма отсечения Гомори, устойчив при малых колебаниях релаксационного множества на семействе $S(\alpha)$.

4. Заключение

В работе рассмотрены вопросы применения унимодулярных преобразований в целочисленном линейном программировании с целью уменьшения мощности L -накрытий задач и повышения эффективности алгоритмов. Построены семейства задач ЦЛП, которые требуют для своего решения экспоненциального числа итераций от длины входа для некоторых алгоритмов отсечения, ветвей и границ и перебора L -классов. Предложены унимодулярные преобразования, которые позволяют существенно снизить мощность L -накрытий и ускорить процесс решения задач указанными алгоритмами. Показано, что применение унимодулярных преобразований повышает устойчивость алгоритмов на отдельных семействах задач ЦЛП. Представляется перспективным отыскание и применение унимодулярных преобразований для ряда классов задач целочисленного программирования и алгоритмов их решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вотяков А.А.** Алгоритм решения обобщенной целочисленной задачи линейного программирования // Математические методы в некоторых задачах оптимального планирования: сб. Свердловск: Математический ин-т им. В.А. Стеклова, Свердловское отделение, 1967. С. 73–82.
2. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А.** Анализ устойчивости некоторых алгоритмов дискретной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 48–54.
3. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П.** Унимодулярные преобразования и некоторые алгоритмы целочисленного программирования // Дискретная оптимизация и исследование операций: материалы Рос. конф. Новосибирск: Ин-т математики, 2007. С. 124.

4. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П.** Исследование некоторых алгоритмов целочисленного программирования с использованием L -разбиения и унимодулярных преобразований: препринт / Омский гос. ун-т. Омск, 2009. 20 с.
5. **Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.** Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981. 344 с.
6. **Колоколов А.А.** Методы дискретной оптимизации: уч. пособие / Омский гос. ун-т. Омск, 1984. 76 с.
7. **Колоколов А.А.** Регулярные разбиения и отсекающие в целочисленном программировании // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. № 2. С. 18–39.
8. **Колоколов А.А., Девятерикова М.В.** Задачи целочисленного программирования и унимодулярные преобразования // Математическое программирование: тр. XIV Байкал. междунар. шк.-семинара “Методы оптимизации и их приложения” / ИСЭМ СО РАН. Иркутск, 2008. Т. 1. С. 111–118.
9. **Колоколов А.А., Косарев Н.А.** Об устойчивости декомпозиционных алгоритмов с отсекающими Бендерса для некоторых задач размещения // Математическое программирование: тр. XIV Байкал. междунар. шк.-семинара “Методы оптимизации и их приложения” / ИСЭМ СО РАН. Иркутск, 2008. Т. 1. С. 428–434.
10. **Eisenbrand F., Schulz A.S.** Bounds on the Chvatal rank of polytopes in the 0/1-cube // *Combinatorica*. 2003. Vol. 23, no. 2. P. 245–261.
11. **Lenstra, Jr., H.W.** Integer programming with a fixed number of variables // *Math. Oper. Res.* 1983. Vol. 8, no. 4. P. 538–548.
12. **Maaren H. van, Dang C.** Simplicial pivoting algorithms for tractable class of integer programs // *J. Comb. Optim.* 2002. Vol. 6, no. 2. P. 133–142.
13. **Nemhauser G.L., Wolsey I.A.** Integer and combinatorial optimization. New York: John Wiley & Sons, 1999. 766 p.

Девятерикова Марина Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Омский гос. техн. ун-т
e-mail: devy_m@mail.ru

Поступила 10.09.2009

Колоколов Александр Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. лабораторией
Омский филиал Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru

Колосов Антон Павлович
инженер
Инженерный центр “Автоматика”
e-mail: apkolosov@mail.ru

УДК 517.95 + 533.6

ЭВОЛЮЦИЯ ГАЗОВЫХ ТЕЧЕНИЙ, ПРИМЫКАЮЩИХ К ВАКУУМУ В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ СИЛ ТЯГОТЕНИЯ И КОРИОЛИСА¹

С. Л. Дерябин, А. В. Мезенцев

Рассматривается эволюция течений идеального политропного газа, примыкающих в вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса. Решение строится в виде сходящихся рядов. В параметрической форме получен закон движения свободной поверхности газ-вакуум.

Ключевые слова: Идеальный политропный газ, сила Кориолиса, свободная поверхность газ-вакуум, сходящиеся ряды.

S. L. Deryabin, A. V. Mezentsev. Evolution of gas flows adjacent to vacuum under the action of gravity and Coriolis force.

The evolution of flows of an ideal polytropic gas adjacent to vacuum is considered under the action of gravity and Coriolis force. A solution is constructed in the form of converging series. A motion law for the free gas-vacuum surface is obtained in parametric form.

Keywords: ideal polytropic gas, Coriolis force, free gas-vacuum surface, converging series.

Введение

Задачи об истечении газа в вакуум рассматривались ранее (см. [1–10]). Подробный обзор полученных результатов можно найти в [2, 3].

В [1] решение задачи об истечении в вакуум впервые было построено в виде характеристических рядов в окрестности звуковой характеристики, отделяющей исходное фоновое течение от искомой волны разрежения. В [4] доказано, что при схлопывании одномерной полости свободная поверхность некоторое время движется с постоянной скоростью. Этот результат обобщен на случай двумерных и трехмерных течений [5, 6] и одномерных течений в условиях самогравитации [7, 8]. Также исследовались трехмерные течения в условиях действия массовых сил, зависящих от пространственных переменных [9], в том числе эволюция закрученных течений под действием силы тяготения [10].

В данной работе исследуется общая трехмерная задача о непрерывном примыкании газа к вакууму в случае, когда на газовое тело действует массовая сила, зависящая от времени, пространственных переменных и от неизвестных функций — параметров газа: плотности, скорости, энтропии.

Также подробно исследуется частный случай этой задачи, когда плотность силы является суммой кориолисова ускорения и ускорения свободного падения. Естественно, что возникновение подобных течений возможно только при специально подобранных начальных данных. Тем не менее в природе имеются содержательные примеры таких течений. Так, в случае, когда снаружи от некоторой осесимметричной поверхности находится газ, а по другую сторону от нее — вакуум, возникающее течение можно использовать для приближенного моделирования средней вертикальной части восходящих закрученных потоков типа торнадо [11].

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00052).

1. Задача о непрерывном примыкании газа к вакууму в условиях действия массовой силы

Пусть в момент времени $t = t_0$ трехмерная поверхность Γ с уравнением $z = \phi(x, y)$ отделяет идеальный политропный газ от вакуума. В момент времени $t = t_0$ известны распределения параметров газа: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = \{u_0(\mathbf{x}), v_0(\mathbf{x}), w_0(\mathbf{x})\}$ — вектора скорости газа, где u_0, v_0, w_0 — проекции вектора скорости на декартовы координаты; $s = s_0(\mathbf{x})$ — энтропийной функции; $\sigma = \sigma_0(\mathbf{x})$ — функции, связанной с плотностью газа ρ соотношением $\sigma = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$, $\gamma = \text{const} > 1$ — показатель политропы газа, $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Также предполагается, что на газ действует массовая сила с плотностью $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \sigma, \mathbf{V}, s)$, зависящей от времени, пространственных переменных и значений параметров газа.

Функция $\phi(x, y)$, задающая поверхность Γ , а также функции $\mathbf{V}_0, s_0, \sigma_0, \mathbf{f}$ предполагаются аналитическими по всем входящим в них переменным.

Далее задача исследуется при условии, что плотность газа, а следовательно и функция σ во все моменты времени равны нулю на Γ_0 — свободной поверхности газ-вакуум: $\sigma(t, \mathbf{x})|_{\Gamma_0} = 0$. Закон движения поверхности Γ_0 ($\Gamma_0|_{t=t_0} = \Gamma$) заранее неизвестен и определяется в ходе решения задачи, т. е. исследуется задача со свободной границей.

Рассматривается система уравнений, описывающая неизэнтропические течения идеального политропного газа в условиях действия массовой силы [2, 12]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_t + \sigma_x u + \sigma_y v + \sigma_z w + \frac{\gamma-1}{2} \sigma (u_x + v_y + w_z) &= 0, \\
 u_t + u_x u + u_y v + u_z w + \frac{2}{\gamma-1} s^2 \sigma \sigma_x + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s s_x &= f(t, x, y, z, u, v, w, s, \sigma), \\
 v_t + v_x u + v_y v + v_z w + \frac{2}{\gamma-1} s^2 \sigma \sigma_y + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s s_y &= g(t, x, y, z, u, v, w, s, \sigma), \\
 w_t + w_x u + w_y v + w_z w + \frac{2}{\gamma-1} s^2 \sigma \sigma_z + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s s_z &= h(t, x, y, z, u, v, w, s, \sigma), \\
 s_t + s_x u + s_y v + s_z w &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{f} = \{f, g, h\}$ — декартовы проекции плотности массовой силы, а уравнение состояния идеального политропного газа имеет вид

$$p = \frac{A^2(S) \rho^\gamma}{\gamma}, \quad \gamma = \text{const} > 1,$$

где $s = A(S)$ — энтропийная функция, S — энтропия газа.

В системе (1.1) введем новую независимую переменную $\eta = z - z_0(t, x, y)$, где $z = z_0(t, x, y)$ — неизвестный закон движения свободной поверхности Γ_0 . Поскольку в начальный момент времени Γ_0 совпадает с Γ , то $z_0(t_0, x, y) = \phi(x, y)$. Заметим, что так введя новую независимую переменную, мы поверхность Γ_0 взяли за новую координатную плоскость $\eta = 0$.

Перепишем систему (1.1) в новых независимых переменных:

$$\begin{aligned}
 \sigma_t + \sigma_x u + \sigma_y v + (w - z_0 t - z_0 x u - z_0 y v) \sigma_\eta + \frac{\gamma-1}{2} \sigma (u_x + v_y + w_\eta - z_0 x u_\eta - z_0 y v_\eta) &= 0, \\
 u_t + u_x u + u_y v + (w - z_0 t - z_0 x u - z_0 y v) u_\eta + \frac{2}{\gamma-1} s^2 \sigma (\sigma_x - z_0 x \sigma_\eta) &+ \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s (s_x - z_0 x s_\eta) = f(t, x, y, \eta + z_0, u, v, w, s, \sigma), \\
 v_t + v_x u + v_y v + (w - z_0 t - z_0 x u - z_0 y v) v_\eta + \frac{2}{\gamma-1} s^2 \sigma (\sigma_y - z_0 y \sigma_\eta) & \\
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s (s_y - z_{0y} s_\eta) = g(t, x, y, \eta + z_0, u, v, w, s, \sigma), \\
 w_t + w_x u + w_y v + (w - z_{0t} - z_{0x} u - z_{0y} v) w_\eta + \frac{2}{\gamma - 1} s^2 \sigma \sigma_\eta \\
 & + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 s s_\eta = h(t, x, y, \eta + z_0, u, v, w, s, \sigma), \\
 s_t + s_x u + s_y v + (w - z_{0t} - z_{0x} u - z_{0y} v) s_\eta = 0.
 \end{aligned}$$

Для системы (1.2) имеем условия при $t = t_0$:

$$\begin{aligned}
 \sigma(t_0, x, y, \eta) &= \sigma_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\
 u(t_0, x, y, \eta) &= u_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\
 v(t_0, x, y, \eta) &= v_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\
 w(t_0, x, y, \eta) &= w_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\
 s(t_0, x, y, \eta) &= s_0(x, y, \eta + \phi(x, y)).
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

А также условие на свободной поверхности Γ_0 , т. е. при $\eta = 0$:

$$\sigma(t, x, y, 0) = 0. \tag{1.4}$$

Для того чтобы решить поставленную начально-краевую задачу (1.2)–(1.4), необходимо, в частности, найти закон движения свободной поверхности Γ_0 (т. е. найти функцию $z = z_0(t, x, y)$), а также значения газодинамических параметров на ней. Для этого в системе (1.2) положим $\eta = 0$ и, учитывая условие (1.4), получим

$$\begin{aligned}
 z_{0t} + z_{0x} u_0 + z_{0y} v_0 &= w_0, \\
 u_{0t} + u_{0x} u_0 + u_{0y} v_0 &= f(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0), \\
 v_{0t} + v_{0x} u_0 + v_{0y} v_0 &= g(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0), \\
 w_{0t} + w_{0x} u_0 + w_{0y} v_0 &= h(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0), \\
 s_{0t} + s_{0x} u_0 + s_{0y} v_0 &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Из условий (1.3) при подстановке $\eta = 0$ получаются начальные условия для системы (1.5):

$$\begin{aligned}
 z_0(t_0, x, y) &= \phi(x, y), \\
 u_0(t_0, x, y) &= u_0(x, y, \phi(x, y)), \\
 v_0(t_0, x, y) &= v_0(x, y, \phi(x, y)), \\
 w_0(t_0, x, y) &= w_0(x, y, \phi(x, y)), \\
 s_0(t_0, x, y) &= s_0(x, y, \phi(x, y)).
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Поскольку система (1.5) — аналитическая и начальные условия (1.6) задаются аналитическими функциями, то по теореме Ковалевской [13] задача (1.5), (1.6) имеет единственное аналитическое решение

$$\begin{aligned}
 z_0 &= z_{00}(t, x, y), & u_0 &= u_{00}(t, x, y), & v_0 &= v_{00}(t, x, y), \\
 w_0 &= w_{00}(t, x, y), & s_0 &= s_{00}(t, x, y).
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Исследуем задачу (1.5), (1.6) с помощью семейства характеристических кривых [13], являющихся решениями специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В

случае уравнений (1.5) эта система имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{d\tau} &= 1, & \frac{dx}{d\tau} &= u_0, & \frac{dy}{d\tau} &= v_0, & \frac{dz_0}{d\tau} &= w_0, \\
\frac{du_0}{d\tau} &= f(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0), \\
\frac{dv_0}{d\tau} &= g(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0), \\
\frac{dw_0}{d\tau} &= h(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0), \\
\frac{ds_0}{d\tau} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Проинтегрировав первое уравнение системы (1.8), получим $\tau = t - t_0$. Теперь в качестве начальных условий берутся координаты точки $M_0(x_{00}, y_{00}, z_{00})$, лежащей на начальной свободной поверхности Γ , и значения газодинамических параметров (1.6) $u_{00}, v_{00}, w_{00}, s_{00}$, вычисленные в этой точке. Тогда решение системы (1.8) с такими начальными условиями задает траекторию движения произвольной точки, лежащей на свободной поверхности Γ_0 . Но, поскольку система (1.8) описывает движение материальной точки в поле действия массовой силы, справедлива следующая

Теорема 1. *Каждая частица газа, лежащая на свободной поверхности Γ_0 , движется как материальная точка в поле действия массовой силы с учетом значения скорости частицы в момент времени $t = t_0$.* \square

Теперь для системы (1.2), используя решение (1.7), ставим другую начально-краевую задачу — задачу с данными на свободной поверхности Γ_0 ($\eta = 0$):

$$\begin{aligned}
\sigma(t, x, y, 0) &= 0, \\
u(t, x, y, 0) &= u_{00}(t, x, y), \\
v(t, x, y, 0) &= v_{00}(t, x, y), \\
w(t, x, y, 0) &= w_{00}(t, x, y), \\
s(t, x, y, 0) &= s_{00}(t, x, y)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

и с начальными условиями (1.3).

Теорема 2. *Имеется $t_* > t_0$ такое, что при $t_0 \leq t \leq t_*$ в некоторой окрестности Γ_0 существует единственное локально-аналитическое решение задачи (1.2), (1.3), (1.9).*

Доказательство данной теоремы сводится, как и в [2], к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [2]. Задача (1.2), (1.9) является характеристической задачей Коши с данными на характеристике кратности пять, поэтому для построения единственного локально-аналитического решения надо задать пять дополнительных условий. Этими условиями и являются условия (1.3). \square

Для конструктивного представления решения задачи (1.2), (1.3), (1.9) разложим его в ряд по степеням η

$$\mathbf{q}(t, x, y, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{q}_k(t, x, y) \frac{\eta^k}{k!}, \quad \mathbf{q} = \{\sigma, u, v, w, s\}, \tag{1.10}$$

что при малых η возможно в силу аналитичности решения задачи (1.2), (1.3), (1.9) в некоторой окрестности Γ_0 .

В системе (1.2) положим $\eta = 0$ и, учитывая (1.9), получим тождество.

Продифференцируем систему (1.2) по η , положим $\eta = 0$. Будем иметь систему транспортных уравнений (см. [2–10]):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1t} + \sigma_{1x}u_0 + \sigma_{1y}v_0 + \frac{\gamma+1}{2}(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)\sigma_1 + \frac{\gamma-1}{2}\sigma_1(u_{0x} + v_{0y}) &= 0, \\
 u_{1t} + u_{1x}u_0 + u_{1y}v_0 + (w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)u_1 + u_{0x}u_1 + u_{0y}v_1 \\
 - \frac{2}{\gamma-1}s_0^2z_{0x}\sigma_1^2 - f_\sigma^0\sigma_1 - f_u^0u_1 - f_v^0v_1 - f_w^0w_1 - f_s^0s_1 &= 0, \\
 v_{1t} + v_{1x}u_0 + v_{1y}v_0 + (w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)v_1 + v_{0x}u_1 + v_{0y}v_1 \\
 - \frac{2}{\gamma-1}s_0^2z_{0y}\sigma_1^2 - g_\sigma^0\sigma_1 - g_u^0u_1 - g_v^0v_1 - g_w^0w_1 - g_s^0s_1 &= 0, \\
 w_{1t} + w_{1x}u_0 + w_{1y}v_0 + (w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)w_1 + w_{0x}u_1 + w_{0y}v_1 \\
 + \frac{2}{\gamma-1}s_0^2\sigma_1^2 - h_\sigma^0\sigma_1 - h_u^0u_1 - h_v^0v_1 - h_w^0w_1 - h_s^0s_1 &= 0, \\
 s_{1t} + s_{1x}u_0 + s_{1y}v_1 + (w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)s_1 + w_{0x}s_1 + w_{0y}s_1 &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

решение которой описывает поведение первых выводящих с Γ_0 производных газодинамических параметров. Здесь

$$\begin{pmatrix} f_\sigma^0 \\ g_\sigma^0 \\ h_\sigma^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\sigma(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0) \\ g_\sigma(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0) \\ h_\sigma(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} f_s^0 \\ g_s^0 \\ h_s^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_s(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0) \\ g_s(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0) \\ h_s(t, x, y, z_0, u_0, v_0, w_0, s_0, 0) \end{pmatrix}.$$

Продифференцируем систему (1.2) по η k раз, положим $\eta = 0$ и, учитывая уже найденные коэффициенты ряда (1.10), будем иметь

$$\begin{aligned}
 \sigma_{kt} + \sigma_{kx}u_0 + \sigma_{ky}v_0 + \left(\frac{\gamma-1}{2}k + 1\right)\sigma_1(w_k - z_{0x}u_k - z_{0y}v_k) \\
 + \left(\frac{\gamma-1}{2} + k\right)\sigma_k(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1) + \frac{\gamma-1}{2}\sigma_k(u_{0x} + v_{0y}) &= F_{1k}(t, x, y), \\
 u_{kt} + u_{kx}u_0 + u_{ky}v_0 + k(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)u_k + u_{0x}u_k + u_{0y}v_k - (w_k - z_{0x}u_k - z_{0y}v_k)u_1 \\
 - \frac{2}{\gamma-1}(k+1)s_0^2z_{0x}\sigma_1\sigma_k - f_\sigma^0\sigma_k - f_u^0u_k - f_v^0v_k - f_w^0w_k - f_s^0s_k &= F_{2k}(t, x, y), \\
 v_{kt} + v_{kx}u_0 + v_{ky}v_0 + k(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)v_k + v_{0x}u_k + v_{0y}v_k - (w_k - z_{0x}u_k - z_{0y}v_k)v_1 \\
 - \frac{2}{\gamma-1}(k+1)s_0^2z_{0y}\sigma_1\sigma_k - g_\sigma^0\sigma_k - g_u^0u_k - g_v^0v_k - g_w^0w_k - g_s^0s_k &= F_{3k}(t, x, y), \\
 w_{kt} + w_{kx}u_0 + w_{ky}v_0 + k(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)w_k + w_{0x}u_k + w_{0y}v_k - (w_k - z_{0x}u_k - z_{0y}v_k)w_1 \\
 + \frac{2}{\gamma-1}(k+1)s_0^2\sigma_1\sigma_k - h_\sigma^0\sigma_k - h_u^0u_k - h_v^0v_k - h_w^0w_k - h_s^0s_k &= F_{4k}(t, x, y), \\
 s_{kt} + s_{kx}u_0 + s_{ky}v_1 + k(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)s_k + (w_k - z_{0x}u_k - z_{0y}v_k)s_1 \\
 + s_{0x}u_k + s_{0y}v_k &= F_{5k}(t, x, y).
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Функции $F_{ik}(t, x, y)$, $1 \leq i \leq 5$ известным образом зависят от уже найденных коэффициентов ряда (1.10) \mathbf{q}_l , $l < k$ и ввиду громоздкости здесь не приводятся. Единственное решение систем (1.11), (1.12) получается при задании начальных условий $\mathbf{q}_k(t_0, x, y)$, которые однозначно определяются при разложении в ряд по степеням η условий (1.3).

Системы (1.12) линейны, поэтому первые особенности решений этих систем совпадают с особенностями решений систем (1.5), (1.11). Функции (1.7), задающие решение системы (1.5), особенностей не имеют, следовательно, для определения момента времени $t = t_*$, являющегося

граничной точкой области сходимости рядов (1.10), необходимо исследовать систему транспортных уравнений (1.11). Таким образом, справедливо

Утверждение. *Решение задачи о непрерывном примыкании газа к вакууму в условиях действия массовой силы наиболее общего вида построено в виде рядов (1.10), сходящихся в окрестности свободной границы газ-вакуум. Для определения закона движения свободной поверхности получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.8), фактически описывающая движение материальной точки в поле действия данной массовой силы.*

2. Задача о непрерывном примыкании газа к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса

В этом разделе будут рассматриваться изэнтропические течения идеального политропного газа, примыкающие к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса. Как и в [11], течения будут строиться в относительной декартовой системе координат с осями Ox , Oy , Oz , направленными соответственно на восток, север, и вверх от поверхности Земли (рис. 1). Будет полагаться, что точка O — начало декартовой системы координат — лежит на поверхности Земли в северном полушарии на параллели с широтой ψ (см. рис. 1).

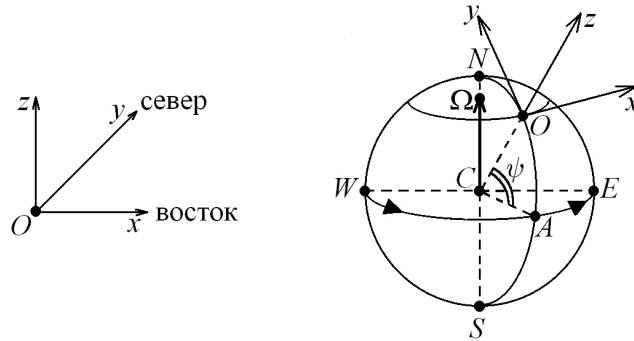


Рис. 1

Тогда в относительной системе координат постоянный вектор Ω — вектор угловой скорости Земли — имеет следующий вид:

$$\Omega = (0, \Omega_2, \Omega_3); \quad \Omega_2 = \Omega \cos \psi, \quad \Omega_3 = \Omega \sin \psi,$$

где Ω — модуль вектора Ω : $\Omega = |\Omega|$ определяемый по формуле

$$\Omega = \frac{2\pi}{24} \frac{1}{\text{ч}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2} \frac{1}{\text{с}}.$$

Система уравнений, описывающая изэнтропические течения идеального политропного газа в условиях действия сил тяготения и Кориолиса, имеет следующий вид [11]:

$$\begin{aligned} c_t + c_x u + c_y v + c_z w + \frac{\gamma - 1}{2} c(u_x + v_y + w_z) &= 0, \\ u_t + u_x u + u_y v + u_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_x &= 2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w, \\ v_t + v_x u + v_y v + v_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_y &= -2\Omega_3 u, \\ w_t + w_x u + w_y v + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} c c_z &= 2\Omega_2 u - g. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь g — ускорение свободного падения, c — скорость звука газа, u, v, w — проекции вектора скорости в декартовой системе координат x, y, z .

Пусть в момент времени $t = t_0$ распределения параметров газа

$$\begin{aligned} c(t_0, x, y, z) &= c_0(x, y, z), \\ u(t_0, x, y, z) &= u_0(x, y, z), \\ v(t_0, x, y, z) &= v_0(x, y, z), \\ w(t_0, x, y, z) &= w_0(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.2)$$

задаются аналитическими функциями.

В системе (2.1), как и в разд. 1, введем новую независимую переменную $\eta = z - z_0(t, x, y)$, где $z = z_0(t, x, y)$ — неизвестный закон движения свободной поверхности Γ_0 . В начальный момент времени Γ_0 совпадает с Γ , т. е. $z_0(t_0, x, y) = \phi(x, y)$. Заметим, что введя так новую независимую переменную, мы поверхность Γ_0 взяли за новую координатную плоскость $\eta = 0$. Получим систему

$$\begin{aligned} c_t + c_x u + \sigma_y v + (w - z_{0t} - z_{0x}u - z_{0y}v)c_\eta + \frac{\gamma - 1}{2}c(u_x + v_y + w_\eta - z_{0x}u_\eta - z_{0y}v_\eta) &= 0, \\ u_t + u_x u + u_y v + (w - z_{0t} - z_{0x}u - z_{0y}v)u_\eta + \frac{2}{\gamma - 1}c(c_x - z_{0x}c_\eta) &= 2\Omega_3 v - 2\Omega_2 w, \\ v_t + v_x u + v_y v + (w - z_{0t} - z_{0x}u - z_{0y}v)v_\eta + \frac{2}{\gamma - 1}c(c_y - z_{0y}c_\eta) &= -2\Omega_3 u, \\ w_t + w_x u + w_y v + (w - z_{0t} - z_{0x}u - z_{0y}v)w_\eta + \frac{2}{\gamma - 1}cc_\eta &= 2\Omega_2 u - g. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условия (2.2) перейдут соответственно в условия

$$\begin{aligned} c(t_0, x, y, \eta) &= c_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\ u(t_0, x, y, \eta) &= u_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\ v(t_0, x, y, \eta) &= v_0(x, y, \eta + \phi(x, y)), \\ w(t_0, x, y, \eta) &= w_0(x, y, \eta + \phi(x, y)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

А условие на свободной поверхности Γ_0 будет иметь вид

$$c(t, x, y, 0) = 0. \quad (2.5)$$

Поскольку система (2.1) является частным случаем системы (1.1), то теоремы, полученные в разд. 1, справедливы и для задачи (2.3)–(2.5). Поэтому в данном разделе статьи главной задачей будет исследование закона движения свободной поверхности Γ_0 . Для этого в системе (2.3) положим $\eta = 0$ и, учитывая условия (2.5), получим систему

$$\begin{aligned} z_{0t} + z_{0x}u_0 + z_{0y}v_0 &= w_0, \\ u_{0t} + u_{0x}u_0 + u_{0y}v_0 &= 2\Omega_3 v_0 - 2\Omega_2 w_0, \\ v_{0t} + v_{0x}u_0 + v_{0y}v_0 &= -2\Omega_3 u_0, \\ w_{0t} + w_{0x}u_0 + w_{0y}v_0 &= 2\Omega_2 u_0 - g, \end{aligned} \quad (2.6)$$

решения которой описывают закон движения свободной поверхности Γ_0 и значения параметров газа на и в ней.

Как и в разд. 1, продолжим исследование системы (2.6) с помощью семейства характеристических кривых [13], являющихся решениями системы обыкновенных дифференциальных

уравнений. В случае уравнений (2.6) эта система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} &= 1, \quad \frac{dx}{d\tau} = u_0, \quad \frac{dy}{d\tau} = v_0, \quad \frac{dz_0}{d\tau} = w_0, \\ \frac{du_0}{d\tau} &= 2\Omega_3 v_0 - 2\Omega_2 w_0, \\ \frac{dv_0}{d\tau} &= -2\Omega_3 u_0, \\ \frac{dw_0}{d\tau} &= 2\Omega_2 u_0 - g.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Последние три уравнения системы (2.7) совпадают с известной системой обыкновенных дифференциальных уравнений [11, 14, 15], описывающей движение отдельной материальной точки под действием сил тяготения и Кориолиса. В работах [14, 15] решение этой системы было построено в виде рядов. В работе [11] подробно исследовалась система для так называемой “тяжелой” материальной точки, в которой в первых двух уравнениях полагается $w = 0$, третье уравнение просто исключается. В данной работе построим и проанализируем решение системы (2.7) без упрощающих предположений.

Проинтегрировав первое уравнение системы (2.7), получим $\tau = t - t_0$. Теперь в качестве начальных условий берутся координаты точки $M_0(x_{00}, y_{00}, z_{00})$, лежащей на начальной свободной поверхности Γ , и значения газодинамических параметров (2.2) u_{00}, v_{00}, w_{00} , вычисленные в этой точке. Тогда решение системы (2.7) с такими начальными условиями задает траекторию движения точки, лежащей на свободной поверхности Γ_0 .

Проинтегрируем систему (2.7). Заметим, что $\Omega = \sqrt{\Omega_2^2 + \Omega_3^2}$. Получим, как и в [11]:

$$\begin{aligned}u_0 &= C_1 \cos(2\Omega\tau) + C_2 \sin(2\Omega\tau) + \frac{\cos\psi}{2\Omega}g, \\ v_0 &= -C_1 \sin\psi \sin(2\Omega\tau) + C_2 \sin\psi \cos(2\Omega\tau) - \frac{\sin 2\psi}{2}g\tau + C_3 \cos\psi, \\ w_0 &= C_1 \cos\psi \sin(2\Omega\tau) - C_2 \cos\psi \cos(2\Omega\tau) - (g \sin^2\psi)\tau + C_3 \sin\psi, \\ x &= \frac{C_1}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{C_2}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + \frac{\cos\psi}{2\Omega}g\tau + C_4, \\ y &= C_1 \frac{\sin\psi}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + C_2 \frac{\sin\psi}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\sin 2\psi}{4}g\tau^2 + (C_3 \cos\psi)\tau + C_5, \\ z_0 &= -C_1 \frac{\cos\psi}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) - C_2 \frac{\cos\psi}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\sin^2\psi}{2}g\tau^2 + (C_3 \sin\psi)\tau + C_6.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Здесь $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, — произвольные постоянные, появившиеся в результате интегрирования.

Учитывая начальные условия,

$$\begin{aligned}x|_{t=t_0} &= x_{00}, \quad y|_{t=t_0} = y_{00}, \quad z_0|_{t=t_0} = z_{00}, \\ u_0|_{t=t_0} &= u_{00}, \quad v_0|_{t=t_0} = v_{00}, \quad w_0|_{t=t_0} = w_{00},\end{aligned}\tag{2.9}$$

получим выражения для констант

$$\begin{aligned}C_1 &= u_{00} - \frac{\cos\psi}{2\Omega}g, \\ C_2 &= v_{00} \sin\psi - w_{00} \cos\psi, \\ C_3 &= v_{00} \cos\psi + w_{00} \sin\psi, \\ C_4 &= x_{00} + \frac{1}{2\Omega}(v_{00} \sin\psi - w_{00} \cos\psi),\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$C_5 = y_{00} - \frac{\sin \psi}{2\Omega} u_{00} + \frac{\sin 2\psi}{8\Omega^2} g,$$

$$C_6 = z_{00} + \frac{\cos \psi}{2\Omega} u_{00} - \frac{\cos^2 \psi}{4\Omega^2} g.$$

Исключим τ из четвертого и пятого выражения решений (2.8). Для этого из формул для x, y выразим следующие соотношения:

$$C_1 \sin(2\Omega\tau) - C_2 \cos(2\Omega\tau) = 2\Omega \left(x - \frac{\cos \psi}{2\Omega} g\tau - C_4 \right),$$

$$C_1 \cos(2\Omega\tau) + C_2 \sin(2\Omega\tau) = \frac{2\Omega}{\sin \psi} \left(y + \frac{1}{4} \sin(2\psi) g\tau^2 - C_3\tau - C_5 \right).$$
(2.11)

Возводя в квадрат обе части равенств (2.11) и складывая получившиеся выражения, будем иметь

$$C_1^2 + C_2^2 = 4\Omega^2 \left(x - \frac{\cos \psi}{2\Omega} g\tau - C_4 \right)^2 + \frac{4\Omega^2}{\sin^2 \psi} \left(y + \frac{1}{4} \sin(2\psi) g\tau^2 - C_3\tau - C_5 \right)^2.$$
(2.12)

Линия (2.12), являющаяся проекцией траектории движения точки на свободной поверхности Γ_0 в плоскость xOy , может быть названа эллипсом Кориолиса, параметры которого соответственно равны:

$$a^2 = \frac{C_1^2 + C_2^2}{4\Omega^2}; \quad b^2 = \frac{(C_1^2 + C_2^2) \sin^2 \psi}{4\Omega^2};$$

$$x_0(\tau) = \frac{\cos \psi}{2\Omega} g\tau + C_4; \quad y_0(\tau) = -\frac{1}{4} \sin(2\psi) g\tau^2 + C_3\tau + C_5.$$
(2.13)

Здесь a, b — полуоси эллипса, $x_0(\tau), y_0(\tau)$ — координаты центра эллипса. Если исключить τ из двух последних соотношений (2.13), то получим следующее уравнение:

$$y_0 = C_5 + \frac{2\Omega C_3}{g \cos \psi} (x_0 - C_4) - \Omega \sin \psi (x_0 - C_4)^2.$$

Соответственно, центр эллипса Кориолиса (2.12) в свою очередь движется по параболе.

Заметим, что начальные условия (2.9) однозначно определяют константы (2.10) и, следовательно, единственным образом параметры эллипса Кориолиса. То есть для каждого начальных условий (2.9) строится свой эллипс Кориолиса. Тем самым установлена следующая теорема.

Теорема 3. *Каждая частица, лежащая на свободной поверхности Γ_0 , движется по траектории, в проекции которой на плоскость xOy лежит свой эллипс Кориолиса с параметрами, однозначно определяемыми начальным положением точки и начальными значениями газодинамических параметров.* □

З а м е ч а н и е. Необходимо заметить, что из анализа движения отдельных частиц на свободной поверхности Γ_0 сделать вывод о движении всей поверхности Γ_0 достаточно трудно по следующим причинам:

1. Для каждой частицы, лежащей на начальной поверхности, приходится строить свой эллипс Кориолиса со своим центром и своими полуосями.

2. Хотя полуоси эллипса со временем не изменяются, но его центр движется и даже в проекции траектории на плоскость xOy возникает достаточно сложная кривая.

3. Кроме того, траектории движения частиц являются пространственными линиями и без постановки конкретных начальных условий понять, будут ли они двигаться вверх или вниз, невозможно.

Поэтому решение (2.8) при постановке конкретных начальных условий требуется анализировать численно.

Если продифференцировать систему (2.3) по η , положив $\eta = 0$, будем иметь систему транспортных уравнений

$$\begin{aligned}
c_{1t} + c_{1x}u_0 + c_{1y}v_0 + \frac{\gamma + 1}{2}(w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)c_1 + \frac{\gamma - 1}{2}(u_{0x} + v_{0y})c_1 &= 0, \\
u_{1t} + u_{1x}u_0 + u_{1y}v_0 + (w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)u_1 - \frac{2}{\gamma - 1}z_{0x}c_1^2 - u_{0x}u_1 + (u_{0y} - 2\Omega_3)v_1 + 2\Omega_2w_1 &= 0, \\
v_{1t} + v_{1x}u_0 + v_{1y}v_0 + (w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)v_1 - \frac{2}{\gamma - 1}z_{0y}c_1^2 + (v_{0x} + 2\Omega_3)u_1 + v_{0y}v_1 &= 0, \\
w_{1t} + w_{1x}u_0 + w_{1y}v_0 + (w_1 - z_{0x}u_1 - z_{0y}v_1)w_1 + \frac{2}{\gamma - 1}c_1^2 + (w_{0x} - 2\Omega_2)u_1 + w_{0y}v_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Используя метод характеристических кривых [13], сведем систему транспортных уравнений (2.14) к виду, удобному для численного исследования

$$\begin{aligned}
c_{1\tau} + \frac{\gamma + 1}{2}\left(w_1 - \frac{z_{0\tau}}{u_0}u_1 - \frac{z_{0\tau}}{v_0}v_1\right)c_1 + \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{u_{0\tau}}{u_0} + \frac{v_{0\tau}}{v_0}\right)c_1 &= 0, \\
u_{1\tau} + \left(w_1 - \frac{z_{0\tau}}{u_0}u_1 - \frac{z_{0\tau}}{v_0}v_1\right)u_1 - \frac{2}{\gamma - 1}\frac{z_{0\tau}}{u_0}c_1^2 + \frac{u_{0\tau}}{u_0}u_1 + \left(\frac{u_{0\tau}}{v_0} - 2\Omega_3\right)v_1 + 2\Omega_2w_1 &= 0, \\
v_{1\tau} + \left(w_1 - \frac{z_{0\tau}}{u_0}u_1 - \frac{z_{0\tau}}{v_0}v_1\right)v_1 - \frac{2}{\gamma - 1}\frac{z_{0\tau}}{v_0}c_1^2 + \left(\frac{v_{0\tau}}{u_0} + 2\Omega_3\right)u_1 + \frac{v_{0\tau}}{v_0}v_1 &= 0, \\
w_{1\tau} + \left(w_1 - \frac{z_{0\tau}}{u_0}u_1 - \frac{z_{0\tau}}{v_0}v_1\right)w_1 + \frac{2}{\gamma - 1}c_1^2 + \left(\frac{w_{0\tau}}{u_0} - 2\Omega_2\right)u_1 + \frac{w_{0\tau}}{v_0}v_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Система (2.15) является нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и при задании конкретных начальных данных она может быть исследована численными методами.

В заключение рассмотрим течение, примыкающее к вакууму и в начальный момент времени закрученное, как твердое тело. В работе [11] при моделировании течения газа в вертикальной части торнадо использовано цилиндрически-симметричное течение, примыкающее к вакууму и имеющее в главной части следующие значения газодинамических параметров:

$$c(r) = \omega\sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}(r^2 - r_*^2)}, \quad u_1(r) = 0, \quad u_2(r) = \omega r, \quad u_3(r) = w_{00} = \text{const} > 0.$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — проекции вектора скорости в цилиндрической системе координат, а $r \geq r_*$.

Эти значения газодинамических параметров возьмем в качестве начальных условий для системы (2.3). В декартовой системе координат они будут иметь вид

$$\begin{aligned}
c_0(x, y, z) &= \omega\sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}(x^2 + y^2 - r_*^2)}, \\
u_0(x, y, z) &= -\omega y, \quad v_0(x, y, z) = \omega x, \quad w_0(x, y, z) = w_{00}.
\end{aligned}$$

А начальная свободная поверхность Γ будет цилиндрической поверхностью, в основании которой окружность радиуса r_*

$$x^2 + y^2 = r_*^2. \tag{2.16}$$

В расчетах траекторий движения частиц по формулам (2.8) использовались следующие безразмерные константы [11]:

$$\omega = 1, \quad \Omega = 0.01, \quad \psi = \frac{\pi}{6}, \quad g = 0.09, \quad r_* = 1.$$

Начальные данные задавались в сорока точках начальной окружности (2.16). Для простоты восприятия на рис.2 приведены восемь точек, за эволюцией которых мы будем следить и далее.

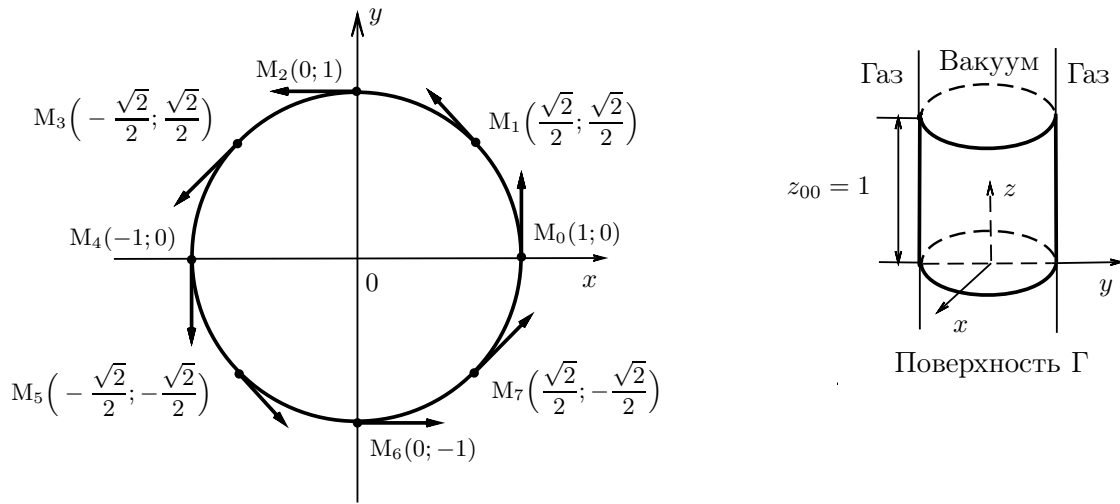


Рис. 2

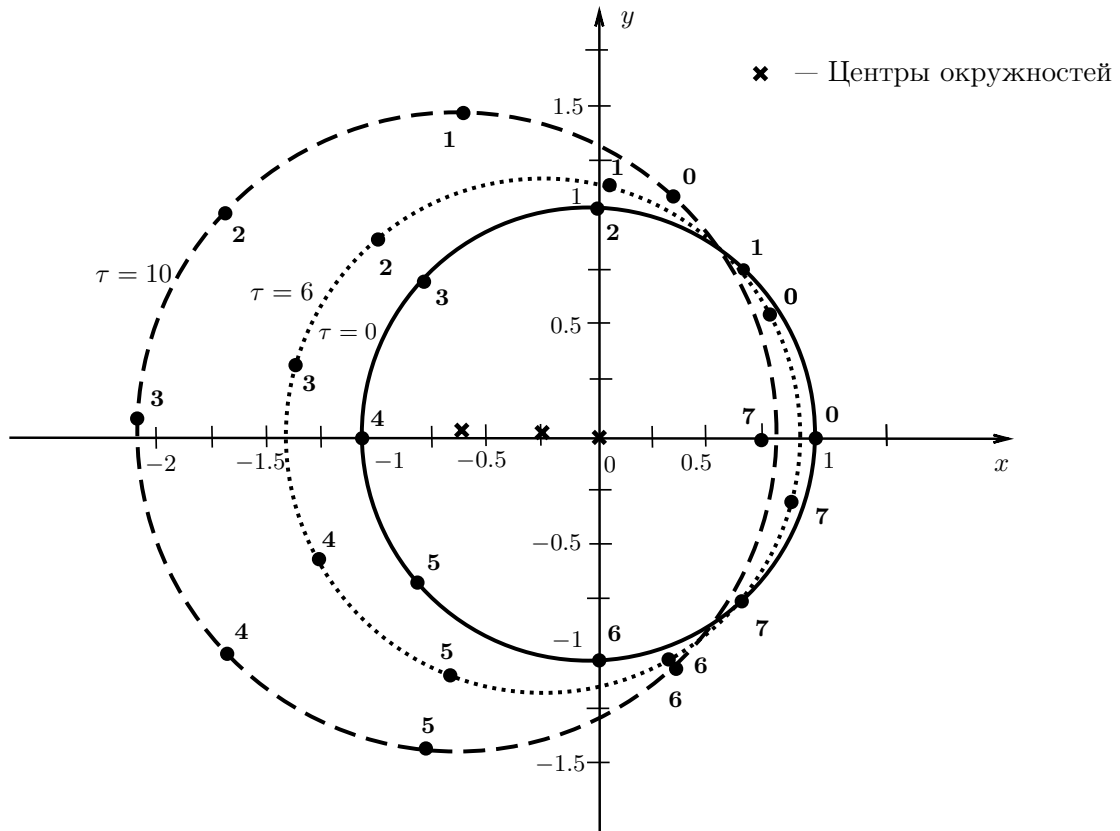


Рис. 3

Во всех рассчитанных вариантах полагалось $z_{00} = 1$, а значения w_{00} изменялись от 0.1 до 10.

Расчеты показали:

1. При начальных условиях w_{00} , принадлежащих отрезку $[0.1; 10]$, траектория частицы, выходящая из точки начальной окружности (см. рис. 2), является восходящей некоторое время $\tau = \tau^*$, после чего траектория становится нисходящей, причем чем больше w_{00} , тем больше τ^* . Для каждой частицы газа время τ^* — одно и то же, а высота подъема — своя (табл.).

Т а б л и ц а

τ	n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	z_0	1	1	1	1	1	1	1	1
6	z_0	5.371	5.349	5.340	5.348	5.370	5.392	5.402	5.393
10	z_0	6.464	6.402	6.375	6.398	6.458	6.520	6.548	6.524

2. Во все моменты времени, пока частицы газа на свободной поверхности двигались вверх, сохранялась закрутка течения против часовой стрелки (рис. 3).

3. С изменением времени проекция свободной поверхности в плоскость xOy оставалась окружностью. Радиус окружности увеличивался, а центр смещался на запад — существенно и на север — незначительно.

В результате можно сделать вывод, что в течение некоторого времени τ^* частицы газа на свободной поверхности движутся по восходящим винтовым линиям. Эти линии существенно деформированы — в западном и незначительно — в северном направлениях.

Авторы благодарят С.П. Баутина за полезное обсуждение данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров А.Ф. Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
2. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с.
3. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Аналитическое моделирование истечения идеального газа в вакуум // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 77–120.
4. Баутин С.П. Схлопывание одномерной полости // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 50–59.
5. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Истечение идеального газа в вакуум // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, №4. С. 817–820.
6. Дерябин С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 65. С. 56–74.
7. Дерябин С.Л., Чуев Н.П. Сферически-симметричное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 77–84.
8. Дерябин С.Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44.
9. Дерябин С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа в условиях действия внешних массовых сил // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 83. С. 60–71.
10. Дерябин С.Л. Начальная эволюция закрученных газовых объемов, примыкающих к вакууму // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 1. С. 21–36.
11. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 92 с.
12. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
13. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
14. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1983. 640 с.
15. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.

Дерябин Сергей Львович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Урал. гос. ун-т путей сообщения
e-mail: SDeryabin@math.usurt.ru

Мезенцев Алексей Владимирович
зав. лаб.
Урал. гос. ун-т путей сообщения
e-mail: AMezentsev@math.usurt.ru

Поступила 18.06.2009

УДК 519.14

О ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С $k = 10$, $\lambda = 3$ ¹**К. С. Ефимов, А. А. Махнев, М. С. Нирова**

Неориентированный v -вершинный граф, в котором степени всех вершин равны k , каждое ребро содержится точно в λ треугольниках, и пересечение окрестностей любых двух вершин, находящихся на расстоянии 2, содержит точно μ вершин, называется вполне регулярным с параметрами (v, k, λ, μ) . В работе получена классификация вполне регулярных графов с $k = 10, \lambda = 3$.

Ключевые слова: вполне регулярный граф, дистанционно регулярный граф.

K. S. Efimov, A. A. Makhnev, M. S. Nirova. On amply regular graphs with $k = 10, \lambda = 3$.

An undirected graph with v vertices in which the degrees of all vertices are equal to k , each edge is contained in exactly λ triangles, and the intersection of the neighborhoods of any two vertices at distance 2 contains exactly μ vertices is called amply regular with parameters (v, k, λ, μ) . A classification of amply regular graphs with $k = 10, \lambda = 3$ is obtained.

Keywords: amply regular graph, distance-regular graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через a^\perp обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a . Под собственными значениями графа понимаются собственные значения его матрицы смежности. В дальнейшем слово “подграф” будет означать индуцированный подграф. Пусть \mathcal{F} — семейство графов. Граф Γ называется локально \mathcal{F} графом, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро графа Γ лежит точно в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем λ -подграфом (μ -подграфом).

Через K_{m_1, \dots, m_n} обозначим полный n -дольный граф с долями порядков m_1, \dots, m_n . Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$. Граф $K_{1, m}$ называется *m -лапой*. *Треугольным графом $T(m)$* называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m \times n$ решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Единственный сильно регулярный граф с параметрами $(10, 3, 0, 1)$ называется графом Петерсена. По аналогии с листом Мебиуса, *m -призмой Мебиуса* назовем

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00009) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект 10-01-91151).

граф, полученный из графа вершин и ребер боковой поверхности m -призмы, разрезанием по боковому ребру, переворачиванием правой стороны на 180° и склеиванием.

Полный (вполне несвязный) подграф данного графа называется *кликкой* (коккликкой).

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в регулярном графе Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Положим $a_i(u, w) = k - b_i(u, w) - c_i(u, w)$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1 = b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$. Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и любых вершин u, w , находящихся на расстоянии i в Γ , имеем $b_i(u, w) = b_i$ и $c_i(u, w) = c_i$. Граф диаметра d называется антиподальным, если отношение — совпадать или находиться на расстоянии d — является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. Антиподальным частным Γ' называется факторграф антиподального графа Γ , вершинами которого являются указанные классы эквивалентности, и два класса смежны, если некоторая вершина одного класса смежна с вершиной другого. Если все классы эквивалентности состоят из r вершин, то Γ называется r -накрытием графа Γ' .

Пусть Γ — связный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Петерсена. Тогда [1, теорема 1.16.5] Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{10, 6; 1, 6\}$ (граф $\bar{T}(7)$), $\{10, 6, 4, 1; 1, 2, 6, 10\}$ (граф Конвея — Смита) или $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$.

В [3] изучение графов с $b_1 = 6$ редуцировано к описанию графов с $k = 10, \lambda = 3$. В данной работе изучаются вполне регулярные графы с $k = 10, \lambda = 3$.

Теорема. Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами $(v, 10, 3, \mu)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) диаметр Γ равен 2 и Γ является дополнительным графом к треугольному графу $T(7)$ или одним из десяти графов с параметрами $(28, 10, 3, 4)$;
- (2) $\mu = 3$, диаметр Γ равен 3 и $34 \leq v \leq 37$;
- (3) $\mu = 2$ и Γ является графом Конвея — Смита или графом Доро.

Следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с $k = 10, \lambda = 3$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) диаметр Γ равен 2 и Γ является дополнительным графом к треугольному графу $T(7)$ или одним из десяти графов с параметрами $(28, 10, 3, 4)$;
- (2) $\mu = 2$ и Γ является графом Конвея — Смита или графом Доро.

1. Редукция к графам диаметра 3

Приведем некоторые вспомогательные результаты, необходимые для доказательства теоремы.

Лемма 1.1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) . Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n - t$, $-t$ графа Γ — целые числа, где $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2t$ и кратность собственного значения $n - t$ равна $k(t - 1)(k + t)/(\mu n)$. Далее, если t — целое число, большее 1, то $t - 1$ делит $k - \lambda - 1$ и

$$\mu = \lambda + 2 + (t - 1) - \frac{k - \lambda - 1}{t - 1}, \quad n = t - 1 + \frac{k - \lambda - 1}{t - 1}.$$

Доказательство. Это [2, лемма 3.1].

Лемма 1.2. Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами $\lambda \leq \mu \neq 1$. Если $d(u, w) = i$ и $x \in [w] \cap \Gamma_{i-1}(u)$, то $c_i(u, w) \geq c_{i-1}(u, x) + 1$.

Доказательство. Лемма следует из доказательства [1, предложение 1.9.1].

Лемма 1.3. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, являющийся антиподальным r -накрытием n -клик. Тогда $n - 2 - \lambda = (r - 1)\mu$ и Γ имеет новые собственные значения θ и τ , являющиеся корнями квадратного уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - (n - 1)$, и кратность θ определяется как

$$m_\theta = \frac{n(n-1)(r-1)}{n-1+\theta^2}.$$

Доказательство. См. [1, следствие 4.2.6]. \square

Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами $(v, 10, 3, \mu)$. В случае $\mu = 2$ согласно [1, теорема 1.16.3] граф Γ является локально петерсеновским графом Тервиллигера, а в случае $\mu \geq 4$ граф Γ является дополнительным графом к треугольному графу $T(7)$ или одним из десяти графов с параметрами $(26, 10, 3, 4)$ [4]. Поэтому до конца работы мы будем предполагать, что Γ является связным вполне регулярным графом с параметрами $(v, 10, 3, 3)$.

Лемма 1.4. Выполняются следующие утверждения:

- (1) диаметр Γ больше 2;
- (2) для любых двух вершин u, x с $d(u, x) = 2$ подграф $[u] \cap [x]$ не является кликой, $b_2(u, x) \leq 4$, причем в случае $b_2(u, x) = 4$ подграф $[u] \cap [x]$ является треугольником;
- (3) $\Gamma_2(u)$ содержит не более 3 вершин x_i с $b_2(u, x_i) = 4$.

Доказательство. Пусть $d(\Gamma) = 2$. По лемме 1.1 число $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 28$ должно быть квадратом целого числа; противоречие. Утверждение (1) доказано.

Выберем две вершины u, x с $d(u, x) = 2$. Если $[u] \cap [x]$ является кликой, то число ребер между $[u] \cap [x]$ и $[u] - [x]$ равно 9, поэтому $[u] - [x]$ содержит либо вершину, смежную с 3 вершинами из $[u] \cap [x]$, либо 2 вершины, каждая из которых смежна с 2 вершинами из $[u] \cap [x]$. Аналогичное утверждение верно для подграфа $[x] - [u]$; противоречие с тем, что $[u] \cap [x]$ содержит такие две вершины a, c , что $[a] \cap [c]$ содержит u, x и 2 вершины из $([u] - [x]) \cup ([x] - [u])$.

Пусть $b_2(u, x) \geq 5$. Тогда $a_2(u, x) \leq 2$ и окрестность любой вершины w из $[u] \cap [x]$ содержится в $u^\perp \cup \Gamma_2(u)$. Если степень w в графе $[u] \cap [x]$ не больше 1, то эта степень равна 1 и $[w]$ содержит две вершины из $[x] \cap \Gamma_2(u)$. В этом случае найдется еще одна вершина w' степени 1 в $[u] \cap [x]$ и $[w] \cap [w']$ содержит u, x и две вершины из $[x] \cap \Gamma_2(u)$; противоречие. Поэтому $[u] \cap [x]$ является треугольником и каждая вершина из $[u] \cap [x]$ смежна с единственной вершиной из $[x] \cap \Gamma_2(u)$. Так как $|[x] \cap \Gamma_2(u)| \leq 2$, то найдутся две вершины w, w' из $[u] \cap [x]$, смежные с общей вершиной из $[x] \cap \Gamma_2(u)$. Противоречие с тем, что $[w] \cap [w']$ содержит u, x , вершину из $[x] \cap \Gamma_2(u)$ и вершину из $[u] \cap [x]$. Итак, для любых двух вершин u, x с $d(u, x) = 2$ выполняется неравенство $b_2(u, x) \leq 4$.

Пусть $b_2(u, x) = 4$. Предположим сначала, что некоторая вершина w изолирована в подграфе $[u] \cap [x]$. Тогда $[w]$ содержит три вершины из $[x] \cap \Gamma_2(u)$. Далее, вершина w' из $[u] \cap [x] - \{w\}$ имеет степень, не большую 1 в $[u] \cap [x]$, и $[w] \cap [w']$ содержит u, x и две вершины из $[x] \cap \Gamma_2(u)$; противоречие. Если $[u] \cap [x]$ не является треугольником, то $[u] \cap [x]$ содержит две вершины w, w' степени 1 и вершину степени 2. Противоречие с тем, что $[w] \cap [w']$ содержит u, x , вершину из $[x] \cap \Gamma_2(u)$ и вершину из $[u] \cap [x]$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\Gamma_2(u)$ содержит две вершины x_1, x_2 с $b_2(u, x_i) = 4$. Тогда треугольники $[u] \cap [x_1]$ и $[u] \cap [x_2]$ не пересекаются, иначе они пересекаются по ребру $\{w_1, w_2\}$. Противоречие с тем, что $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u, x_1, x_2 и 2 вершины из $[u] \cap ([x_1] \cup [x_2])$. Так как $[u]$ содержит не более 3 попарно непересекающихся треугольников, то $\Gamma_2(u)$ содержит не более 3 вершин x_i с $b_2(u, x_i) = 4$.

Лемма 1.5. Пусть u, y — вершины из Γ с $d(u, y) = 3$. Тогда $c_3(u, y) \geq 6$ и число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше 63.

Доказательство. Пусть $c_3(u, y) = 4$. Заметим, что для вполне регулярного графа Γ и любых вершин u, y с $d(u, y) = 3$ имеем $c_3(u, y) = c_3(y, u)$ (число ребер между $[u] \cap \Gamma_2(y)$ и $[y] \cap \Gamma_2(u)$ равно $\mu|[u] \cap \Gamma_2(y)| = \mu|[y] \cap \Gamma_2(u)|$). Положим $[u] \cap \Gamma_2(y) = \{w_1, \dots, w_4\}$ и $[y] \cap \Gamma_2(u) = \{x_1, \dots, x_4\}$. Тогда каждая вершина w_i смежна ровно с тремя вершинами из $\{x_1, \dots, x_4\}$. Поэтому вершины w_1, \dots, w_4 можно упорядочить так, что вершина w_i не смежна с x_i . В этом случае $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u, x_3, x_4 и подграф $\{w_1, \dots, w_4\}$ не содержит вершин степени 2. В противном случае для двух вершин $w_i, w_j \in [w_1]$ подграф $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u, w_l и 2 вершины из $\{x_1, \dots, x_4\}$, что невозможно. Симметрично, подграф $\{x_1, \dots, x_4\}$ не содержит вершин степени 2. Если 2 вершины w_i, w_j не смежны, то ввиду леммы 1.4 подграф $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и ребро подграфа $\{x_1, \dots, x_4\}$. Противоречие с тем, что тогда $\{x_1, \dots, x_4\}$ содержит не менее 4 ребер.

Пусть $c_3(u, y) = 5$, $[u] \cap \Gamma_2(y) = \{w_1, \dots, w_5\}$ и $[y] \cap \Gamma_2(u) = \{x_1, \dots, x_5\}$. Докажем утверждение:

(a) $[u] \cap \Gamma_2(y)$ не содержит треугольников и степень любой вершины в графе $[u] \cap \Gamma_2(y)$ не больше 2.

Число троек вершин (w_i, x_j, x_l) таких, что $w_i \in [x_j] \cap [x_l]$, равно 15, а число 2-подмножеств в $\{x_1, \dots, x_5\}$ равно 10, поэтому $\{x_1, \dots, x_5\}$ содержит 5 пар вершин, смежных с парами вершин из $\{w_1, \dots, w_5\}$, и 5 пар вершин, смежных с единственной вершиной из $\{w_1, \dots, w_5\}$. Теперь $[y] \cap \Gamma_2(u)$ не содержит треугольников. В противном случае для треугольника $\{x_1, x_2, x_3\}$ подграф $[x_i] \cup [x_j]$ содержит $\{w_1, \dots, w_5\}$ для любых двух индексов $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Противоречие с тем, что $[x_3]$ содержит по две вершины из $\{w_1, \dots, w_5\} - [x_1]$ и из $\{w_1, \dots, w_5\} - [x_2]$. Если $[x_4]$ содержит 3 вершины x_1, x_2, x_3 , то снова подграф $[x_i] \cup [x_j]$ содержит $\{w_1, \dots, w_5\}$ для любых двух индексов $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Противоречие с тем, что $[x_3]$ содержит по две вершины из $\{w_1, \dots, w_5\} - [x_1]$ и из $\{w_1, \dots, w_5\} - [x_2]$.

Докажем утверждение:

(b) если $\{x_1, \dots, x_5\}$ — пятиугольник, то вершина из $\Gamma - (y^\perp \cup \{w_1, \dots, w_5\})$ смежна не более чем с 1 вершиной из $\{x_1, \dots, x_5\}$.

Пусть $\{x_1, \dots, x_5\}$ — пятиугольник. Тогда для любых двух несмежных вершин x_j, x_l подграф $[x_j] \cap [x_l]$ содержит y и по вершине из $\{x_1, \dots, x_5\}$ и из $\{w_1, \dots, w_5\}$. Поэтому $\{x_1, \dots, x_5\} - [w_i]$ является ребром и для любых смежных вершин x_r, x_s подграф $[x_r] \cap [x_s]$ содержит y и 2 вершины из $\{w_1, \dots, w_5\}$. Отсюда любая вершина из $\Gamma - (y^\perp \cup \{w_1, \dots, w_5\})$ смежна не более чем с 1 вершиной из $\{x_1, \dots, x_5\}$.

Докажем утверждение:

(c) подграф $\{x_1, \dots, x_5\}$ является пятиугольником.

Пусть $\{x_1, \dots, x_5\}$ содержит изолированную вершину или две вершины степени 1. Тогда число ребер между $\{x_1, \dots, x_5\}$ и $[y] \cap \Gamma_3(u)$ не меньше 7. Поэтому $[y] \cap \Gamma_3(u)$ содержит либо вершину z , смежную с 3 вершинами x_i, x_j, x_l , либо 2 вершины z_1, z_2 , смежные с парами вершин из $\{x_1, \dots, x_5\}$, и из пункта (b) следует, что $\{w_1, \dots, w_5\}$ не является пятиугольником. В первом случае $[x_l]$ содержит по 2 вершины из $\{w_1, \dots, w_5\} - [x_i]$ и из $\{w_1, \dots, w_5\} - [x_j]$; противоречие. Во втором случае для $x_i, x_j \in [z_1]$ подграф $\{w_1, \dots, w_5\}$ содержит вершину w_l из $[x_i] \cap [x_j]$ и по 2 вершины из $[x_i] - [x_j]$, $[x_j] - [x_i]$. Поэтому число ребер между $\{w_1, \dots, w_5\}$ и $[z_1] \cap \Gamma_2(u) - \{x_i, x_j\}$ равно 9. Отсюда $[z_1] \cap \Gamma_2(u) - \{x_i, x_j\}$ содержит либо вершину, смежную с 3 вершинами из $\{w_1, \dots, w_5\}$, либо 2 вершины, смежные с парами вершин из $\{w_1, \dots, w_5\}$. Так как $|\{x_1, \dots, x_5\} \cap [z_i]| = 2$, то $c_3(u, z_1) = c_3(u, z_2) = 8$ и $[u] - \{w_1, \dots, w_5\}$ содержит вершину a из $\Gamma_2(z_1) \cap \Gamma_2(z_2)$. Значит, число вершин из $[y] \cap \Gamma_3(u)$, смежных с парами вершин из $\{x_1, \dots, x_5\}$ равно 2. Далее, $\{x_1, \dots, x_5\}$ не пересекает $[a] \cap \Gamma_2(y)$, поэтому $c_3(y, a) = 5$, $[y] \cap \Gamma_3(u) = [y] \cap \Gamma_2(a)$ и $\{w_1, \dots, w_5\}$ не пересекает $[a]$. Теперь число ребер между $\{w_1, \dots, w_5\}$ и $[u] \cap \Gamma_3(y) - \{a\}$ не меньше 7; противоречие. Утверждение (c) доказано.

Из утверждений (b) — (c) следует, что каждая вершина из $[y] \cap \Gamma_3(u)$ смежна точно с одной вершиной из $\{x_1, \dots, x_5\}$, подграф $[y] \cap \Gamma_3(u)$ является пятиугольником и $[y]$ — призма или

призма Мебиуса. Симметрично, $\{w_1, \dots, w_5\}$ и $[u] \cap \Gamma_3(y)$ являются пятиугольниками.

Так как любая 2-коклика из $\{w_1, \dots, w_5\}$ лежит в окрестности единственной вершины из $\{x_1, \dots, x_5\}$, то каждая вершина из $\{x_1, \dots, x_5\}$ смежна с 2-путем из $\{w_1, \dots, w_5\}$. Если $[x_2]$ содержит вершины x_1, x_3 , то, без ограничения общности, x_1 смежна с путем w_1, w_2, w_3 , а вершина x_3 смежна с путем w_4, w_5, w_1 . Тогда $[w_1]$ содержит x_2 и вершина x_2 смежна с w_5, w_1, w_2 ; противоречие с тем, что $[w_1] \cap [x_2]$ содержит w_2, w_5, x_1, x_3 .

По лемме 1.3 число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $3 \cdot 4 + 17 \cdot 3 = 63$. Лемма доказана.

Лемма 1.6. Пусть $\Gamma_4(u)$ — непустой граф и Δ — множество всех вершин из $\Gamma_3(u)$, смежных с вершинами из $\Gamma_4(u)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) для $y \in \Delta$ имеем $c_3(u, y) = 6$;
- (2) число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не меньше $6|\Gamma_3(u)|$ и $|\Gamma_3(u)| \leq 10$;
- (3) Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{10, 6, 3, 1; 1, 3, 6, 10\}$.

Доказательство. Пусть $y \in \Delta$. Если $z \in [y] \cap \Gamma_4(u)$, то $[y] \cap [z]$ содержит 3 вершины из $\Gamma_3(u) \cup \Gamma_4(u)$ и $c_3(u, y) \leq 6$. Утверждение (1) доказано.

По лемме 1.3 число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $3 \cdot 4 + 17 \cdot 3 = 63$. С другой стороны, по утверждению (1) число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не меньше $6|\Gamma_3(u)|$ и $|\Gamma_3(u)| \leq 10$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $z \in \Gamma_4(u)$. По лемме 1.2 имеем $c_4(u, z) \geq 7$. Если z' — вторая вершина из $\Gamma_4(u)$, то $[z] \cup [z']$ содержит не менее $4 + 3 + 4$ вершин из $\Gamma_3(u)$. Противоречие с тем, что $|\Gamma_3(u)| \leq 10$.

Итак, $|\Gamma_4(u)| = 1$ и $\Delta = \Gamma_3(u)$. Если $|\Gamma_4(x)| = 0$ для некоторой вершины x , то $|\Gamma_3(x)| = 11$ и число ребер между $\Gamma_2(x)$ и $\Gamma_3(x)$ не меньше 120, но не больше 110; противоречие. Итак, Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{10, 6, 3, 1; 1, 3, 6, 10\}$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{10, 6, 3, 1; 1, 3, 6, 10\}$ имеет собственное значение $b_1 - 1 = 5$ и ввиду [1, теорема 4.4.11] не существует.

2. Графы диаметра 3

До конца работы будем предполагать, что диаметр Γ равен 3 и зафиксируем геодезический путь u, w, x, y . Заметим, что $v > 32$. В противном случае $\Gamma_3(u) = \{y\}$ и $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$ является регулярным графом степени 4 на 10 вершинах. Число 2-путей (в том числе треугольников) с концами в $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$ равно $3 \binom{10}{2} = 135$. С другой стороны, средние вершины таких 2-путей попадают в $[u] \cup [y]$ (для 60 путей) или в $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$ (для 60 путей); противоречие.

Лемма 2.1. Для любых $u, x \in \Gamma$ с $d(u, x) = 2$ выполняются следующие утверждения:

- (1) если $b_2(u, x) = 3$, то $[x] \cap \Gamma_3(u)$ не является кокликой;
- (2) для любых двух вершин u, x с $d(u, x) = 2$ выполняется неравенство $b_2(u, x) \leq 3$ и число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше 60.

Доказательство. Пусть $b_2(u, x) = 3$ и $\Gamma_3(u) \cap [x] = \{y_1, \dots, y_3\}$ является кокликой. Тогда $\Gamma_2(u) \cap [x] = \{x_1, \dots, x_3, x'\}$, где y_i несмежна с x_i и $[x] \cap [x'] = \{y_1, \dots, y_3\}$. Теперь вершину x' можно взять в роли x и $[y_1] \cap [y_2]$ содержит x, x', x_3 и еще одну вершину из $[x']$; противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $b_2(u, x) = 4$. Положим $[u] \cap [x] = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\Gamma_2(u) \cap [x] = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $\Gamma_3(u) \cap [x] = \{y_1, \dots, y_4\}$. Тогда $\{w_1, w_2, w_3\}$ — треугольник, $[w_1] \cap [y_i] = \{x\}$ содержит две вершины для любого $i \in \{1, \dots, 4\}$. Так как $b_1(u, w_1) = 6$, то $[w_1] - (u^\perp \cup \{x\})$ содержит 3 вершины, смежные с парами вершин из $\{y_1, \dots, y_4\}$. Значит, $\cup_i ([w_i] - u^\perp)$ содержит 9 вершин, смежных с парами вершин из $\{y_1, \dots, y_4\}$. Далее, имеется двенадцать 2-путей с концевыми вершинами в $\{y_1, \dots, y_4\}$ и центром в $\Gamma - \{x\}$. Не более 3 из этих центров попадают в $\{x_1, \dots, x_3\} \cup$

$\{y_1, \dots, y_4\}$. Поэтому число ребер между $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{y_1, \dots, y_4\}$ не больше 6. Если указанное число ребер равно 6, то подграф $\{x_1, \dots, x_3\}$ является кокликкой и $\{y_1, \dots, y_4\}$ является 3-лапой, 3-путем или объединением изолированной вершины и треугольника. В любом случае число указанных центров, попадающих в $\{y_1, \dots, y_4\}$, не меньше 2; противоречие. Значит, число ребер между $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{y_1, \dots, y_4\}$ меньше 6. Отсюда указанное число ребер равно 4 и подграф $\{y_1, \dots, y_4\}$ имеет точно 4 ребра. Если $\{y_1, \dots, y_4\}$ — четырехугольник, то число указанных центров, попадающих в $\{y_1, \dots, y_4\}$, равно 4. Если же $\{y_1, \dots, y_4\}$ — объединение треугольника и вершины степени 1, то число указанных центров, попадающих в $\{y_1, \dots, y_4\}$, равно 5. В любом случае имеем противоречие.

Лемма 2.2. *Число вершин v графа Γ не меньше 34.*

Доказательство. Если $v = 33$, то $|\Gamma_3(u)| = 2$ для любой вершины u . Пусть $\Gamma_3(u) = \{y, z\}$, $\Gamma_3(y) = \{u, y'\}$, $\Gamma_3(z) = \{u, z'\}$, $\Delta_u = \Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$ и $\Delta = \Delta_u$.

Допустим, что вершины y, z смежны. Тогда $|\Delta| = 5$, $y' \in [u]$, $[y']$ содержит 4 вершины из u^\perp и по 3 вершины из $[z]$ и из Δ . Положим $[y] \cap [z] = \{x_1, x_2, x_3\}$. Если степень вершины x_i в подграфе $\{x_1, x_2, x_3\}$ равна δ , то $[x_i]$ содержит y, z , 3 вершины из $[u]$, $4 - \delta$ вершин из $\Gamma_2(u) \cap ([y] \cup [z])$ и $\delta + 1$ вершин из Δ . Если $e \in \Delta - \{y', z'\}$ и $[e]$ содержит β вершин из $\{x_1, x_2, x_3\}$, то $[e]$ содержит 3 вершины из $[u]$, $6 - \beta$ вершин из $\Gamma_2(u) \cap ([y] \cup [z])$ и $1 + \beta$ вершин из Δ .

Пусть степень вершины x_2 в подграфе $\{x_1, x_2, x_3\}$ равна 2. Тогда степени вершин x_1, x_3 в подграфе $\{x_1, x_2, x_3\}$ равны 1, Δ содержит по 2 вершины из $[x_1], [x_3]$ и $\Delta \cap [x_2]$ содержит по вершине из $[x_1], [x_3]$ и вершину вне $[x_1] \cup [x_3]$. Поэтому $[x_1] \cup [x_2] \cup [x_3]$ содержит 9 вершин из $[u]$ и $y' = z'$; противоречие с тем, что тогда $|[y']| \leq 9$.

Пусть подграф $\{x_1, x_2, x_3\}$ содержит изолированную вершину и две вершины степени 1. Тогда число ребер между $\{x_1, x_2, x_3\}$ и Δ равно 5. Поэтому Δ содержит либо по две вершины степени 1 и 3, либо по одной вершине степени 1 и 3, либо пять вершин степени 2. В первом случае Δ содержит треугольник и две висячие вершины, во втором случае Δ содержит четырехугольник и одну висячую вершину, а в третьем случае Δ является пятиугольником. Имеется тридцать троек вершин $(\{p, q\}, r)$ с $p, q \in \Delta$, $r \in [p] \cap [q]$. Имеется 6 троек с $r \in \{y', z'\}$, 2 тройки с $r \in \{x_1, x_2, x_3\}$ и не более 7 троек с $r \in \Delta$. Далее, r попадает в $[u] - \{y', z'\}$, если она смежна по крайней мере с 2 вершинами из $\{x_1, x_2, x_3\}$, попадает в $([y] - z^\perp) \cup ([z] - y^\perp)$, если она смежна по крайней мере с 1 вершиной из $\{x_1, x_2, x_3\}$ (причем лежит в $2i - 1$ тройках, если она смежна точно с i вершинами из $\{x_1, x_2, x_3\}$). Противоречие с тем, что общее число указанных троек не больше 24.

Пусть подграф $\{x_1, x_2, x_3\}$ является кокликкой. Тогда Δ является объединением изолированного ребра и треугольника. Имеется тридцать троек вершин $(\{p, q\}, r)$ с $p, q \in \Delta$, $r \in [p] \cap [q]$. Имеется 6 троек с $r \in \{y', z'\}$, 3 тройки с $r \in \Delta$. Далее, r попадает в $[u] - \{y', z'\}$, если она смежна по крайней мере с 2 вершинами из $\{x_1, x_2, x_3\}$ (причем лежит в $2i - 3$ тройках, если она смежна точно с i вершинами из $\{x_1, x_2, x_3\}$), попадает в $([y] - z^\perp) \cup ([z] - y^\perp)$, если она смежна по крайней мере с 1 вершиной из $\{x_1, x_2, x_3\}$ (причем лежит в $2i - 1$ тройках, если она смежна точно с i вершинами из $\{x_1, x_2, x_3\}$). Противоречие с тем, что общее число указанных троек не больше 27.

Допустим, что $d(y, z) = 2$. Тогда $|\Delta| = 3$ и если $y' \in \Delta$, то $[y']$ содержит по 3 вершины из $[u]$, $[z]$ и не более 2 вершин из Δ ; противоречие. Если $y' \in [u] \cup [z]$, то $[y']$ содержит 7 вершин из $u^\perp \cup z^\perp$ и 3 вершины из Δ .

Если степень вершины x в подграфе $[y] \cap [z]$ равна δ , то $[x]$ содержит y, z , $6 - \delta$ вершин из $\Gamma_2(u) \cap ([y] \cup [z])$ и $\delta - 1$ вершин из Δ . Если $e \in \Delta$ и $[e]$ содержит β вершин из $[y] \cap [z]$, то $[e]$ содержит $6 - \beta$ вершин из $\Gamma_2(u) \cap ([y] \cup [z])$ и $\beta + 1$ вершин из Δ . Поэтому либо $[y] \cap [z]$ и Δ являются геодезическими 2-путями, средние вершины которых смежны, либо $([y] \cap [z]) \cup \Delta$ является 3-призмой.

Пусть $w \in ([u] \cup [y] \cup [z]) - (\Delta \cup ([y] \cap [z]))$ и $[w]$ содержит γ вершин из $[y] \cap [z]$. Тогда $[w]$ содержит $10 - \gamma$ вершин из $u^\perp \cup y^\perp \cup z^\perp$ и γ вершин из Δ . Поэтому число ребер между $[u] - \{y', z'\}$ и Δ равно числу ребер между $[u] - \{y', z'\}$ и $[y] \cap [z]$. Таким образом, $y', z' \notin [u]$ и $[y']$ содержит 3 вершины из $[u]$, 4 — из z^\perp и все 3 вершины из Δ . Симметрично, Δ содержится в $[z']$.

Положим $\Gamma_3(y') = \{y, y''\}$, $\Gamma_3(z') = \{z, z''\}$. Если Δ является 3-кликкой, то $\{y''\} = [u] - \cup_{w \in \Delta} [w] = \{z''\}$. В этом случае $[y] \cap [z] = \Delta_{y''}$ и $[u] - \{y''\}$ имеет два разбиения тройками вершин, попадающими в окрестности вершин из $[y] \cap [z]$ и в окрестности вершин из Δ . Аналогичные разбиения имеются для графа $[y''] - \{u\}$. При этом каждая вершина из $[u] \cap [y'']$ смежна с единственной вершиной из Δ и из $[y] \cap [z]$. Пусть вершины f_1, f_2 из $[y] \cap [z]$ не смежны с вершиной e из Δ . Тогда одна из этих вершин, скажем f_1 , не смежна с вершиной из $[y] \cap [z] \cap [e]$. Противоречие с тем, что $[f_1] \cap [e]$ содержит по 2 вершины из $[y] \cap [z] \cup \Delta$ и из $([y''] - u^\perp) \cup ([u] - (y'')^\perp)$.

Значит, Δ является 2-путем abc , $[y] \cap [z]$ является 2-путем def и подграф $\{a, b, c, d, e, f\}$ содержит по 2 ребра в указанных путях и еще одно ребро $\{b, e\}$. Положим $\Gamma_3(y'') = \{y', y'''\}$, $\Gamma_3(z'') = \{z', z'''\}$. Если $y'' = z''$, то $[y'''] \cap [u] = \Delta_{y'}$. С другой стороны, $z' \in \Gamma_3(z'')$ и $[z']$ содержит $\Delta_{y'}$, поэтому $z' = y'''$.

Допустим, что $y'' \neq z''$. Тогда $[y''] \cap [z] = \Delta_y$, $[z''] \cap [y] = \Delta_z$. Перейдя от u к y , получим $z', y''' \in [y]$ и $[y'] \cap [y'''] = \Delta$, поэтому $z' = y'''$. Противоречие с тем, что $z' \in \Gamma_3(y'')$ и $y'' = z''$.

Таким образом, граф Γ_3 является объединением изолированных n -угольников, $n \in \{3, 6\}$. Если Γ_3 не содержит шестиугольников, то Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{10, 6, 1; 1, 3, 10\}$. По [1, предложение 1.10.5] такой граф не существует.

Итак, Γ_3 содержит шестиугольник $\Sigma = \{u, y, y', y'' = z'', z', z\}$ и треугольник $\{w, w', w''\}$. Тогда Γ содержит шесть подграфов Δ_x , $x \in \Sigma$ и 3 тройки вершин, попадающих в окрестности пар антиподальных вершин шестиугольника Σ (например, $[u] \cap [y'']$). Без ограничения общности $w \in [u]$. Если $w \in \Delta_{y'}$, то можно считать, что $y', z \in [w']$ и $y, y'' \in [w'']$. В этом случае w и w'' — концевые вершины в 2-путях $\Delta_{y'}$ и Δ_z , поэтому $[u] \cap [z'] = \Delta_{y'}$ не пересекает $[w'']$. Поэтому $[w'']$ содержит 2-путь xyy'' , где $x \in [w''] \cap \Delta_z$, и по 3 вершины из $[u]$, $[z']$. Противоречие с тем, что $|[z] \cap [w'']| \leq 2$.

Если $w \in [u] \cap [y'']$, то можно считать, что либо $y', z' \in [w']$ и $y, z \in [w'']$, либо $w' \in [y] \cap [z']$ и $w'' \in [y'] \cap [z]$. В первом случае противоречие получается как и в предыдущем абзаце. Значит, Γ_3 содержит 1 или 3 треугольника, вершины которых попадают в окрестности пар антиподальных вершин шестиугольника Σ .

Теперь Γ_3 содержит такие шестиугольники $\{w_i, p_i, p'_i, p''_i = q''_i, q'_i, q_i\}$, что $w_i \in \Delta_{y'} = [u] \cap [z']$, $i = 1, 2, 3$. Тогда Δ и $\Delta_{y''}$ не пересекают $\{p_i, q_i\}$. Если $p_i \in \Delta_y = [z] \cap [y'']$, то $d(p_i, q_i) \leq 2$. Значит, одна из вершин p_i, q_i попадает в Δ_z , а вторая в $[y'] \cap [z]$. Противоречие с тем, что Γ_3 не содержит треугольников, вершины которых попадают в окрестности пар антиподальных вершин шестиугольника Σ . Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{10, 6, 3; 1, 3, 6\}$, не существует, и число вершин v графа Γ не больше 40.*

Доказательство. Если $v = 41$, то $|\Gamma_3(u)| = 10$ для любой вершины u и число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ равно 60. Поэтому Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{10, 6, 3; 1, 3, 6\}$.

По [1, предложение 4.1.1] собственные значения $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$ графа Γ диаметра d — это корни многочлена $w_{d+1}(x)$, где $w_0(x) = 1$, $w_1(x) = x$ и $w_{i+1}(x) = (x - a_i)w_i(x) - c_i b_{i-1} w_{i-1}(x)$. В случае $d = 3$ многочлен $w_4(x)$ имеет по крайней мере два целочисленных корня (см. [1, с. 130, первый абзац]). В нашем случае $w_2(x) = (x - 3)x - 10$, $w_3(x) = (x - 4)(x^2 - 3x - 10) - 18x = x^3 - 7x^2 - 16x + 40$ и $w_4(x) = (x - 4)(x^3 - 7x^2 - 16x + 40) - 18(x^2 - 3x - 10) = (x - 10)(x^3 - x^2 - 16x - 2)$. Противоречие с тем, что $w_4(x)$ имеет единственный целый корень.

Лемма 2.4. Пусть $\Gamma_3(u)$ содержит изолированную вершину y . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $\Gamma_3(u) - \{y\}$ содержится в $\Gamma_2(y)$;
- (2) $\Gamma_3(u)$ не содержит вершин z с $c_3(u, z) = 6$;
- (3) $|\Gamma_3(u)| \leq 6$;
- (4) $\Gamma_3(u)$ содержит не более двух изолированных вершин.

Доказательство. Пусть $d(y, z) = 3$ для некоторой вершины $z \in \Gamma_3(u)$. По лемме 2.2 граф $\Sigma = \Gamma_3(u) - \{y, z\}$ не пуст.

Если вершина z изолирована в $\Gamma_3(u)$, то для любой вершины $p \in \Sigma$ подграф $[p] \cap \Gamma_2(u)$ содержит по 3 вершины из $[y]$, $[z]$ и 4 вершины из Σ . Так как число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше 60, то Σ является 5-кликкой или октаэдром. В первом случае получим $|\Gamma_2(u)| \geq 30$, а во втором $\mu(\Sigma) = 4$.

Пусть степень вершины z в графе $\Gamma_3(u)$ равна α , $\{w_1, \dots, w_\alpha\} = [u] - \Gamma_2(z)$, $\{x_1, \dots, x_\alpha\} = \Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$. Так как окрестность каждой вершины из $\Gamma_2(z) \cap [u]$ содержит по 3 вершины из $[y]$, $[z]$, то $[x_i]$ содержит 3 вершины из $\{w_1, \dots, w_\alpha\}$, поэтому $\alpha \geq 3$. Если $\alpha = 3$, то $[w_1] \cap [w_2]$ содержит вершины u, x_1, \dots, x_3 ; противоречие. Значит, $\alpha = 4$ и можно упорядочить вершины x_1, \dots, x_4 так, что вершина w_i не смежна с x_i . Тогда $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u, x_3, x_4 . Далее, каждая вершина из $[y]$ смежна не более чем с одной вершиной из $\{w_1, \dots, w_4\}$ и число ребер между $[y]$ и $[u] \cap \Gamma_2(z)$ не меньше 20. Противоречие с тем, что число указанных ребер не больше 18.

Итак, $\Gamma_3(u) - \{y\} \subset \Gamma_2(y)$. Утверждение (1) доказано.

Положим $\Delta = \Gamma_3(u) - \{y\}$. Допустим, что $z \in \Delta$ и $c_3(u, z) = 6$. Так как имеется 9 ребер между $[y] \cap [z]$ и $[u] \cap \Gamma_2(z)$, то каждая пара вершин из $[y] \cap [z]$ попадает в окрестность вершины из $[u] \cap \Gamma_2(z)$. Итак, степень каждой вершины в графе $[y] \cap [z]$ не больше 1, а любая вершина из $[y] - [z]$ смежна не более чем с одной вершиной из $[y] \cap [z]$. Значит, $[y] \cap [z]$ является объединением изолированной вершины и ребра. Так как ввиду леммы 2.1 каждая вершина из $[y] \cap [z]$ смежна не более чем с одной вершиной из $[z] \cap \Gamma_3(u)$, то число ребер между $[y] \cap [z]$ и $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$ не меньше 4. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $[z] \cap \Gamma_2(u)$ смежна с 2 вершинами из $[y] \cap [z]$. Утверждение (2) доказано.

Допустим, что $|\Gamma_3(u)| \geq 8$. Тогда число ребер между $\Gamma_3(u) - \{y\}$ и $[y]$ не меньше 21. Противоречие с тем, что некоторая вершина x из $[y]$ смежна с 3 вершинами из $\Gamma_3(u) - \{y\}$ и $b_2(u, x) \geq 4$.

Пусть $|\Gamma_3(u)| = 7$. Тогда число ребер между Δ и $[y]$ равно 18. Поэтому $[y]$ содержит либо единственную вершину, не смежную с вершинами из Δ , и девять вершин, смежных с парами вершинами из Δ , либо две вершины, смежные с одной вершиной из Δ и восемь вершин, смежных с парами вершин из Δ . Далее, число ребер между $\Gamma_2(u) - [y]$ и Δ не меньше 24.

Допустим, что $z \in \Gamma_3(u)$ и $c_3(u, z) = 7$. Имеется 9 ребер между $[y] \cap [z]$ и $[u] \cap \Gamma_2(z)$, поэтому по крайней мере две пары вершин из $[y] \cap [z]$ попадают в окрестности вершин из $[u] \cap \Gamma_2(z)$. Если $[y] \cap [z]$ является кокликкой, то число ребер между $[y] - [z]$ и $[y] \cap [z]$ равно 9. Противоречие с тем, что не более одной вершины из $[y] - [z]$ смежно с 2 вершинами из $[y] \cap [z]$ и число указанных ребер не больше 8. Пусть $[y] \cap [z]$ является объединением изолированной вершины и ребра. Так как каждая вершина из $[y] \cap [z]$ смежна не более чем с одной вершиной из $\Delta(z)$, то число ребер между $[y] \cap [z]$ и $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$ не меньше 4. В этом случае либо $\Gamma_3(y)$ не пересекает $[z]$, либо единственная вершина из $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$ смежна с 2 вершинами в $[y] \cap [z]$, две вершины из $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$ смежны точно с одной вершиной из $[y] \cap [z]$ и одна вершина из $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$ попадает в $\Gamma_3(y)$. Если же $[y] \cap [z]$ является 2-путем, то число ребер между $[y] \cap [z]$ и $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$ не меньше 2, поэтому $[z] \cap \Gamma_2(u) - [y]$ содержит не менее двух вершин, смежных с единственной вершиной из $[y] \cap [z]$, и не более двух вершин из $\Gamma_3(y)$. Итак, $[z]$ содержит не более 2 вершин из $\Gamma_3(y)$ и не менее 2 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$.

Если $z \in \Gamma_3(u)$ и $c_3(u, z) \geq 8$, то $[z]$ содержит не более 3 вершин из $\Gamma_3(y)$ и не менее 2 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$. Поэтому число ребер между Δ и подграфом $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$ не меньше 12.

Заметим, что вершина из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$ смежна не более чем с 4 вершинами из $\Gamma_3(u) \cup \Gamma_3(y)$. Поэтому число ребер между $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$ и $\Gamma_3(u) \cup \Gamma_3(y)$ не больше 16. Без ограничения общности число ребер между $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$ и Δ не больше 8; противоречие. Утверждение (3) доказано.

Пусть $\Gamma_3(u)$ содержит три изолированных вершины y_1, y_2, y_3 . Тогда $\Gamma_2(u)$ содержит три вершины из $[y_1] \cap [y_2]$ и по 7 вершин из $[y_1] - [y_2]$ и из $[y_2] - [y_1]$. Противоречие с тем, что $\Gamma_2(u) \cap [y_3]$ содержит по три вершины из $[y_1], [y_2]$ и не более 3 вершин вне $[y_1] \cup [y_2]$.

Лемма 2.5. Пусть $y, z \in \Gamma_3(u)$ и $|[y] \cap [z] \cap \Gamma_2(u)| = 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если $c_3(u, z) = 6$, то $c_3(u, y) \geq 8$, причем в случае равенства подграф $[u] \cap \Gamma_2(z)$ не содержится в $\Gamma_2(y)$;
- (2) если $c_3(u, z) = c_3(u, y) = 7$, то $|[u] \cap \Gamma_2(z) \cap \Gamma_2(y)| = 5$.

Доказательство. Пусть $c_3(u, z) = 6$ и $[u] - (\Gamma_2(z) \cup \Gamma_2(y)) = \{w_1, \dots, w_\alpha\}$. Допустим сначала, что $[u] \cap \Gamma_2(z) \subset \Gamma_2(y)$. Если $c_3(u, y) = 7$, то $\alpha = 3$, $|\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])| = 9$ и число ребер между $\{w_1, \dots, w_3\}$ и $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$ равно 18. Противоречие с тем, что $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u и 3 вершины из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$. Аналогичное противоречие получается в случае $c_3(u, y) = 8$. Пусть $c_3(u, y) = 6$. Тогда $|\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])| = 10$ и число ребер между $\{w_1, \dots, w_4\}$ и $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$ равно 24. Противоречие с тем, что число флагов вида $\{p, q, r\}$, где $r \in \Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$, а p, q — различные вершины из $([u] - (\Gamma_2(z) \cup \Gamma_2(y))) \cap [r]$, не меньше 22.

Пусть $[u] \cap \Gamma_2(z)$ не содержится в $\Gamma_2(y)$. Повторив рассуждения из предыдущего абзаца, получим $c_3(u, y) \geq 8$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $c_3(u, z) = c_3(u, y) = 7$ и $|[u] \cap \Gamma_2(z) \cap \Gamma_2(y)| \geq 6$. Тогда $|\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])| = 8$ и $|[u] - (\Gamma_2(y) \cup \Gamma_2(z))| \geq 2$. Противоречие с тем, что для двух вершин $w_1, w_2 \in [u] - (\Gamma_2(y) \cup \Gamma_2(z))$ подграф $[w_1] \cap [w_2]$ содержит не менее 4 вершин из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$.

Лемма 2.6. Пусть y, z — такие вершины из $\Gamma_3(u)$, что $[y] \cap [z]$ содержит 3 вершины из $\Gamma_2(u)$. Тогда $c_3(u, z) \geq 7$ и в случае $c_3(u, z) = 7$ выполняются следующие утверждения:

- (1) если $|[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)| < 7$, то вершины y, z смежны и $c_3(u, y) \geq 8$;
- (2) если $[u] \cap \Gamma_2(z)$ содержится в $\Gamma_2(y)$, то $c_3(u, y) \geq 9$ и $[y] \cap [z]$ либо является 2-путем, либо не содержит вершин степени 2;
- (3) если $[y] \cap [z]$ является 3-кокликой, то вершины y, z смежны.

Доказательство. Положим $\Gamma_2(u) \cap [y] \cap [z] = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z]) = \Psi$. Если $[x_1] \cap [x_2]$ содержит вершину из $[u]$, то $|[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)| \geq 6$, иначе $|[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)| \geq 7$.

Пусть $c_3(u, z) = 6$. По лемме 2.4 вершина y не изолирована в $\Gamma_3(u)$. Как и в предыдущей лемме, получим, что $c_3(u, y) = 9$. Для любого из 2-путей с концами в $[y] \cap [z]$ его средняя вершина лежит в $\{y, z\} \cup ([u] \cap \Gamma_2(z))$. Поэтому $[y] \cap [z]$ не содержит вершин степени 2 и каждая вершина из $([y] \cup [z]) - (\{y, z\} \cup ([y] \cap [z]))$ смежна не более чем с одной вершиной из $[y] \cap [z]$. Отсюда $[y] \cap [z]$ является объединением изолированной вершины и ребра. Так как число ребер между $[y] \cap [z]$ и $\Gamma_3(u) \cap [z] - \{y\}$ не больше 3, то вершины y, z смежны.

Пусть $w \in [u] - \Gamma_2(y)$, $\Gamma_3(u) \cap [z] = \{y, s_1, s_2, s_3\}$. Тогда $[w]$ содержит 6 вершин из Ψ и $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma_2(w)$. Пусть степень вершины s_1 в графе $\{s_1, s_2, s_3\}$ равна α . Если $\alpha = 0$, то $[s_1]$ содержит 3 вершины из $\Gamma_2(u) \cap [z]$ и $c_3(u, s_1) = 9$. Если $\alpha = 1$, то $[s_1]$ содержит 2 вершины из $\Gamma_2(u) \cap [z]$ и ввиду леммы 2.5 имеем $c_3(u, s_1) = 8$ и $[u] \cap \Gamma_2(z)$ не содержится в $\Gamma_2(s_1)$. Если $\alpha = 2$, то $[s_1]$ содержит точно одну вершину из $\Gamma_2(u) \cap [z]$. Если между $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\{s_1, s_2, s_3\}$ нет ребер, то число ребер между $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$ не меньше 4; противоречие. Пусть s_j смежна с вершиной из $\{x_1, x_2, x_3\}$. Если $\alpha = 0$, то $[s_1] \cap [s_j]$ содержит z и 2 вершины из $\Psi - [w]$. Противоречие с тем, что для i , отличного от 1, j подграф $[s_i] \cap [s_j]$ содержит z , вершину из $\Psi - [w]$ и 2 вершины из $\Psi \cap [w]$. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\{s_1, s_2, s_3\}$ содержит ребро и изолированную вершину. Допустим, что вершина s_j изолирована в $\{s_1, s_2, s_3\}$. Если еще одна вершина s_i смежна с вершиной из $\{x_1, x_2, x_3\}$, то получим противоречие, как и выше.

Если же обе вершины из $\{s_1, s_2, s_3\} - \{s_j\}$ не смежны с вершинами из $\{x_1, x_2, x_3\}$, то $[s_i] \cap [s_j]$ содержит z и по вершине из $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$ и из $\Psi - [w]$. Противоречие с тем, что пересечение окрестностей вершин из $\{s_1, s_2, s_3\} - \{s_j\}$ содержит z и 3 вершины из $\Psi \cap [w]$. Пусть $\{s_1, s_2, s_3\}$ является кокликкой. Если еще одна вершина s_i смежна с вершиной из $\{x_1, x_2, x_3\}$, то $[s_i] \cap [s_j]$ содержит z вершину из $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$ и 2 из $\Psi - [w]$; противоречие. Если же обе вершины из $\{s_1, s_2, s_3\} - \{s_j\}$ не смежны с вершинами из $\{x_1, x_2, x_3\}$, то пересечение окрестностей вершин из $\{s_1, s_2, s_3\} - \{s_j\}$ содержит z и 3 вершины из $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$; противоречие. Итак, $c_3(u, z) \geq 7$.

Пусть $c_3(u, z) = 7$. Допустим, что $[u] \cap \Gamma_2(z)$ не содержится в $\Gamma_2(y)$. Тогда 3 вершины из $[u] \cap \Gamma_2(z) \cap \Gamma_2(y)$ смежны с парами вершин из $[y] \cap [z]$, поэтому $[y] \cap [z]$ не содержит вершин степени 2 и каждая вершина из $[y] \cup [z] - \{y, z\}$ смежна не более чем с одной вершиной из $[y] \cap [z]$. Если $c_3(u, y) = 7$, то $[u] - (\Gamma_2(y) \cup \Gamma_2(z))$ содержит 2 вершины w_1, w_2 , $|\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])| = 9$ и $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u и 3 вершины из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$; противоречие.

Если вершины y, z не смежны, то $c_3(u, y) \leq 9$. Допустим, что $[y] \cap [z]$ является кокликкой. Тогда число ребер между $[y] \cap [z]$ и $[y] - [z]$ равно 9. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $[y] - [z]$ смежна с 2 вершинами из $[y] \cap [z]$. Значит, $[y] \cap [z]$ является объединением изолированной вершины и ребра, причем каждая вершина из $[y] \cup [z] - (\{y, z\} \cup [y] \cap [z])$ смежна точно с одной вершиной из $[y] \cap [z]$. Противоречие с тем, что $[y] \cup [z]$ содержит 4 вершины из $\Gamma_3(u)$, а число ребер между $[y] \cap [z]$ и $\Gamma_3(u) - \{y, z\}$ не больше 3. Утверждение (1) доказано.

Пусть $[u] \cap \Gamma_2(z)$ содержится в $\Gamma_2(y)$. Если $c_3(u, y) \leq 8$, то подграф $[u] - (\Gamma_2(y) \cup \Gamma_2(z))$ содержит 2 вершины w_1, w_2 , $|\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])| \leq 9$ и $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u и 3 вершины из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$; противоречие. Значит, $c_3(u, y) \geq 9$. Допустим, что $[u] \cap \Gamma_2(z)$ содержит вершину w , смежную с тремя вершинами из $[y] \cap [z]$. Если $c_3(u, y) = 9$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$ равно 21. С другой стороны, каждая вершина из $[u] \cap \Gamma_2(z) - \{w\}$ смежна с единственной вершиной из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$, каждая вершина из $[u] \cap \Gamma_2(y) - (\{w\} \cup \Gamma_2(z))$ смежна с тремя вершинами из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$. Наконец, одна вершина из $[u] - \Gamma_2(y)$ смежна с 6 вершинами из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$ и указанное число ребер равно 22; противоречие. Если $c_3(u, y) = 10$, то число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$ равно 18. С другой стороны, каждая вершина из $[u] \cap \Gamma_2(z) - \{w\}$ смежна с единственной вершиной из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$, каждая вершина из $[u] \cap \Gamma_2(y) - (\{w\} \cup \Gamma_2(z))$ смежна с тремя вершинами из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$. Поэтому указанное число ребер равно 19, снова противоречие.

Таким образом, две вершины из $[u] \cap \Gamma_2(z)$ смежны с парами вершин из $[y] \cap [z]$. Поэтому $[y] \cap [z]$ либо является 2-путем, либо не содержит вершин степени 2. Утверждение (2) доказано.

Если $[y] \cap [z]$ является 3-кокликкой, то ввиду (2) подграф $[u] \cap \Gamma_2(z)$ не содержится в $\Gamma_2(y)$, и по (1) вершины y, z смежны.

Лемма 2.7. Пусть y, z — несмежные вершины из $\Gamma_3(u)$, $c_3(u, z) = 7$ и $|[y] \cap [z] \cap \Gamma_2(u)| = 3$. Тогда $c_3(u, y) = 10$.

Доказательство. Пусть $c_3(u, y) = 9$, $[y] \cap \Gamma_3(u) = \{r\}$, $[z] \cap \Gamma_3(u) = \{s_1, s_2, s_3\}$, $[u] \cap \Gamma_3(z) = \{w_1, w_2, w_3\}$, где $w_3 \in \Gamma_3(y)$, и $\Delta = \Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$. Докажем:

а) $|[w_3] \cap \Delta| = 6$, вершина x из $\Delta - [w_3]$ попадает в $[w_1] \cap [w_2]$ и если $c_3(u, s_i) = 7$, то $|[s_i] \cap \Delta| \leq 3$.

Ясно, что $|\Delta| = 7$ и $[w_3]$ содержит 6 вершин из Δ . Положим $\Delta - [w_3] = \{x\}$. Подграф $[w_1] \cap \Gamma_2(u)$ содержит 3 вершины из $[z]$ и 3 вершины из Δ . Так как $u \in [w_1] \cap [w_3]$, то $[w_1]$ содержит 2 вершины из $\Delta \cap [w_3]$ и вершину x . Симметрично, $x \in [w_2]$.

Пусть $c_3(u, s_i) = 7$ и $|[s_i] \cap \Delta| = 4$. Тогда вершина s_i смежна с x , поэтому $w_1, w_2, w_3 \in \Gamma_2(s_i)$. Если $|[z] \cap [s_i] \cap \Gamma_2(u)| \geq 2$, то $|[u] \cap \Gamma_2(z) \cap \Gamma_2(s_i)| \geq 5$ и по лемме 2.5 получим $c_3(u, s_i) \geq 8$; противоречие. Значит, $|[z] \cap [s_i] \cap \Gamma_2(u)| = 1$, s_i^\perp содержит s_1, s_2, s_3 и 3 вершины из $[y] \cap \Gamma_2(u)$. Заметим, что $[u] \cap \Gamma_2(s_i)$ не содержится в $\Gamma_2(y)$; противоречие с леммой 2.6. Утверждение а) доказано. Докажем:

б) $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(w_3)$ и $r \in \Gamma_2(z) \cap \Gamma_2(w_3)$.

Если $s_1 \in \Gamma_3(y)$, то $[s_1] \cap \Gamma_2(u)$ содержит 3 вершины из $[z]$ и 4 вершины из Δ ; противоречие с утверждением а). Пусть $s_1 \in \Gamma_3(w_3)$. Тогда $[s_1] \cap \Gamma_2(u)$ содержит не более 3 вершин в каждом из подграфов $[y]$, $[z]$ и, быть может, вершину x . Ввиду леммы 2.5 имеем $c_3(u, s_1) = 7$ и $|[s_1] \cap \Gamma_2(u)| = 3$. Противоречие с леммой 2.6.

Пусть $r \in \Gamma_3(z)$. Тогда $\Gamma_2(u) \cap [r]$ содержит 3 вершины из $[y]$ и 4 вершины из Δ , в частности, $c_3(u, r) = 7$. Если $c_3(u, s_1) = 7$, то $[s_1] \cap \Gamma_2(u)$ содержит 3 вершины из $[y]$; противоречие с тем, что $w_3 \in \Gamma_2(s_1)$. Значит, $c_3(u, s_i) \geq 8$ и число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не меньше $4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 9$; противоречие.

Пусть $r \in \Gamma_3(w_3)$. Тогда $\Gamma_2(u) \cap [r]$ содержит не более 3 вершин в каждом из подграфов $[y]$, $[z]$ и, быть может, вершину x . Снова ввиду леммы 2.5 имеем $c_3(u, r) = 7$ и $|[z] \cap [r] \cap \Gamma_2(u)| = 3$; противоречие с леммой 2.6. Утверждение б) доказано. Докажем:

в) подграф $\{s_1, s_2, s_3\}$ является объединением изолированной вершины и ребра, подграф $\Gamma_2(z) - ([u] \cup \{y\})$ содержит по шесть вершин, смежных точно с одной и с двумя вершинами из $\{s_1, s_2, s_3\}$, каждая вершина из $\Gamma_2(u) \cap [z] - [y]$ смежна точно с одной вершиной из $\{s_1, s_2, s_3\}$.

Заметим, что $|\Gamma_2(z) - ([u] \cup \{y\})| = 12$ и число ребер между $\{s_1, s_2, s_3\}$ и $\Gamma_2(z) - ([u] \cup \{y\})$ равно 18. Поэтому $\Gamma_2(z) - ([u] \cup \{y\})$ содержит по шесть вершин, смежных точно с одной и с двумя вершинами из $\{s_1, s_2, s_3\}$. Теперь $\{s_1, s_2, s_3\}$ не содержит вершин степени 2 и каждая вершина из $[z] - [y]$ смежна не более чем с одной вершиной из $\{s_1, s_2, s_3\}$. Поэтому $\{s_1, s_2, s_3\}$ является объединением изолированной вершины, скажем s_3 , и ребра, а каждая вершина из $[z] - [y]$ смежна точно с одной вершиной из $\{s_1, s_2, s_3\}$. Утверждение в) доказано.

Если s_1 смежна с r , то $\Gamma_2(u) \cap [s_1]$ содержит 2 вершины из $[z]$, вершину из $[y] - [z]$ и не более 4 вершин из Δ . Ввиду утверждения а) подграф $[s_1]$ содержит 3 вершины из Δ ; противоречие с леммой 2.5. Значит, вершины s_1, s_2 не смежны с r .

Ввиду утверждения в) вершина r смежна с s_3 и $\Gamma_2(u) \cap [s_3]$ содержит 3 вершины из $[z]$, вершину из $[y] - [z]$ и, ввиду леммы 2.6, четыре вершины из Δ . В этом случае $w_1, w_2, w_3 \in \Gamma_2(s_3)$. Противоречие с тем, что $\Gamma_2(u) \cap [z] \cap [s_3]$ содержит не менее 6 вершин.

Лемма 2.8. Пусть $c_3(u, z) = 6$, $[z] \cap \Gamma_3(u) = \{s_1, \dots, s_4\}$. Тогда вершина y из $\Gamma_3(u) - z^\perp$ либо смежна, по крайней мере, с одной вершиной из $\{s_1, \dots, s_4\}$, либо находится на расстоянии 3 от z и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $\{s_1, \dots, s_4\}$ является четырехугольником и $\Gamma_3(u) \subset z^\perp$;
- (2) вершины из $\{s_1, \dots, s_4\}$ можно упорядочить так, что s_1, \dots, s_4 является 3-путем и либо $\Gamma_3(u) \subset z^\perp$, либо $\Gamma_3(u) - z^\perp$ содержит единственную вершину y и $[y] \cap [z]$ содержит s_2, s_3 и вершину из $\Gamma_2(u)$;
- (3) $\{s_1, \dots, s_4\}$ является объединением изолированных ребер и $\Gamma_3(u) \subset z^\perp$.

Доказательство. Пусть $c_3(u, z) = 6$, $[u] - \Gamma_2(z) = \{w_1, \dots, w_4\}$.

Ввиду леммы 2.6 в графе $\{s_1, \dots, s_4\}$ нет изолированных вершин. Пусть s_1^\perp содержит $\Gamma_3(u) \cap [z]$. Если s_2 смежна с s_3, s_4 , то $[s_3] \cap [s_4]$ содержит z, s_1, s_2 , поэтому $[s_3], [s_4]$ содержат по 2 вершины из $\Gamma_2(u) \cap [z]$, $\Gamma_2(u) \cap [s_1]$ и из $\Gamma_2(u) \cap [s_2]$, и еще по одной вершине из $\Gamma_2(u)$. Противоречие с леммой 2.5. Значит, $\{s_2, s_3, s_4\}$ не содержит вершин степени 2. Если вершина s_2 изолирована в графе $\{s_2, s_3, s_4\}$, то $\Gamma_2(u) \cap [s_2]$ содержит по 2 вершины из $[z]$, $[s_1]$ и 4 вершины из $\Gamma_2(u) - ([z] \cup [s_1])$. Если же степень вершины s_2 в графе $\{s_2, s_3, s_4\}$ равна 1, то $\Gamma_2(u) \cap [s_2]$ содержит по 1 вершине из $[z]$, $[s_1]$ и не менее 4 вершин из $\Gamma_2(u) - ([z] \cup [s_1])$. В любом случае $\Gamma_2(u) \cap [s_2] \cap [s_3]$ содержит не более 1 вершины из $\Gamma_2(u) - ([z] \cup [s_1])$. Противоречие с тем, что тогда $\Gamma_2(u) \cap [s_4]$ содержит не более 3 вершин из $\Gamma_2(u) - ([z] \cup [s_1])$.

Итак, степень каждой вершины в графе $\{s_1, \dots, s_4\}$ равна 1 или 2. Вершина y из $\Gamma_3(u) - z^\perp$ либо смежна по крайней мере с одной вершиной из $\{s_1, \dots, s_4\}$, либо находится на расстоянии 3 от z . Допустим, что $d(y, z) = 3$. Тогда $d(y, s_i) = 2$. Если $c_3(u, y) = 10$, то $|\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])| = 4$, вершина w_i смежна с 3 вершинами из $[y]$ и с 3 вершинами из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$. Противоречие с тем, что для подходящих индексов i, j подграф $[w_i] \cap [w_j]$ содержит u , вершину из $[y]$ и 2 вершины из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$. Если $c_3(u, y) = 9$, $\Gamma_3(u) \cap [y] = \{r\}$, то $|\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])| = 5$.

Для несмежной с r вершины s_i по лемме 2.7 получим $c_3(u, s_i) = 8$ и $\Gamma_2(u) \cap [s_i]$ содержит 2 вершины из $[z]$ и по 3 вершины из $[y]$ и из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$. Каждая вершина w_j смежна с 3 вершинами из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$, поэтому $w_1, \dots, w_4 \in \Gamma_2(s_i)$. Противоречие с тем, что тогда $c_3(u, s_i) \geq 9$.

Если $c_3(u, y) = 8$, $\Gamma_3(u) \cap [y] = \{r_1, r_2\}$, то $|\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])| = 6$. Пусть степень s_1 в графе $\{s_1, \dots, s_4\}$ равна 2. Тогда ввиду леммы 2.6 вершина s_1 смежна с вершиной из $\{r_1, r_2\}$, скажем с r_1 . Поэтому $c_3(u, s_1) = 6$. Далее, можно считать, что степень s_2 в графе $\{s_1, \dots, s_4\}$ также равна 2, и $c_3(u, s_2) = 6$. Без ограничения общности вершины s_1, s_3 смежны. В графе $\Gamma_3(u) \cap [s_1] = \{z, s_2, s_3, r_1\}$ вершина r_1 смежна с s_2 или с s_3 . Если r_1 смежна с s_3 , то $c_3(u, s_3) \leq 7$. По лемме 2.5 подграф $[z] \cap [s_3]$ содержит не более 1 вершины из $\Gamma_2(u)$ и $\{s_1, s_2, s_4, s_3\}$ является циклом. В этом случае каждая вершина, смежная с 2 вершинами из $\{s_1, s_2, s_4, s_3\}$, попадает в $\{z, r_1, r_2\} \cup \{s_1, s_2, s_4, s_3\} \cup (\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z]))$. Противоречие с тем, что для подходящих индексов i, j подграф $[s_i] \cap [s_j]$ содержит вершину из $[y]$. Значит, r_1 смежна с s_2 , $c_3(u, r_1) \leq 7$ и $[r_1] \cap [s_1]$ содержит 2 вершины из $\Gamma_2(u)$; противоречие с леммой 2.5.

Итак, $\{s_1, \dots, s_4\}$ содержит 2 изолированных ребра. В этом случае $[z] \cap [s_i]$ содержит 2 вершины из $\Gamma_2(u)$ и $c_3(u, s_i) = 8$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не меньше $3 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 6 = 62$.

Если $c_3(u, y) = 7$, $\Gamma_3(u) \cap [y] = \{r_1, r_2, r_3\}$, то $|\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])| = 7$. Пусть степень s_1 в графе $\{s_1, \dots, s_4\}$ равна 2. Тогда ввиду леммы 2.6 вершина s_1 смежна с вершиной из $\{r_1, r_2, r_3\}$, скажем с r_1 . Поэтому $c_3(u, s_1) = 6$ и по лемме 2.5 подграф $\Gamma_2(s_1) \cap [u]$ не содержится в $\Gamma_2(y)$. Далее, можно считать, что степень s_2 в графе $\{s_1, \dots, s_4\}$ также равна 2 и $c_3(u, s_2) = 6$. Без ограничения общности вершины s_1, s_3 смежны. В графе $\Gamma_3(u) \cap [s_1] = \{z, s_2, s_3, r_1\}$ вершина r_1 смежна с s_2 или с s_3 . Если r_1 смежна с s_3 , то $c_3(u, s_3) \leq 7$, по лемме 2.5 подграф $[z] \cap [s_3]$ содержит не более 1 вершины из $\Gamma_2(u)$ и $\{s_1, s_2, s_4, s_3\}$ является циклом. Положим $[u] - \Gamma_2(y) = \{w'_1, w'_2\}$. Тогда каждая вершина, смежная с 2 вершинами из $\{s_1, s_2, s_4, s_3\}$, попадает в $\{z, r_1, r_2, w'_1, w'_2\} \cup \{s_1, s_2, s_4, s_3\} \cup (\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z]))$. Противоречие с тем, что для подходящих индексов i, j подграф $[s_i] \cap [s_j]$ содержит вершину из $[y]$. Значит, r_1 смежна с s_2 , $c_3(u, r_1) \leq 7$, и $[r_1] \cap [s_1]$ содержит 2 вершины из $\Gamma_2(u)$; противоречие с леммой 2.5.

Итак, $\{s_1, \dots, s_4\}$ содержит 2 изолированных ребра. В этом случае $[z] \cap [s_1]$ содержит 2 вершины из $\Gamma_2(u)$, и $c_3(u, s_i) = 8$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не меньше $4 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 6 = 66$.

Таким образом, каждая вершина из $\Gamma_3(u) - z^\perp$ смежна по крайней мере с одной вершиной из $\{s_1, \dots, s_4\}$.

Если s_1, \dots, s_4 является 4-циклом, то $\Gamma_2(u) - [z]$ содержит не более 8 вершин, смежных с парами вершин из $\{s_1, \dots, s_4\}$. Поэтому $\{s_1, \dots, s_4\}$ содержит не более двух вершин, смежных с 7 вершинами из $\Gamma_2(u)$. Пусть $y \in \Gamma_3(u) - z^\perp$. Если y смежна с 2 вершинами из $\{s_1, \dots, s_4\}$, скажем с s_1, s_2 , то $|\Gamma_3(u) - z^\perp| = 2$ и некоторое ребро из $\{s_1, \dots, s_4\}$ не содержится в окрестности никакой вершины из $\Gamma_3(u) - \{z\}$. Противоречие с леммой 2.5. Значит, каждая вершина $y \in \Gamma_3(u) - z^\perp$ смежна точно с одной вершиной из $\{s_3, s_4\}$. Если $y \in [s_1]$, то $[s_1] \cap [s_2]$ содержит 2 вершины из $\Gamma_2(u)$; снова противоречие с леммой 2.5. Итак, если $\{s_1, \dots, s_4\}$ является четырехугольником, то $\Gamma_3(u) \subset z^\perp$. Утверждение (1) доказано.

Если $\{s_1, \dots, s_4\}$ содержит точно две вершины степени 2, то без ограничения общности s_1, \dots, s_4 является 3-путем. В этом случае по лемме 2.5 имеем $c_3(u, s_1) = c_3(u, s_4) = 8$. Пусть $y \in \Gamma_3(u) - z^\perp$. Тогда $y \in [s_2] \cup [s_3]$. Если $y \in [s_2] - [s_3]$, то $c_3(u, s_2) = 6$, $c_3(u, s_3) = 7$ и $[s_2] \cap [s_3]$ содержит 2 вершины из $\Gamma_2(u)$; противоречие с леммой 2.5. Утверждение (2) доказано.

Пусть $\{s_1, \dots, s_4\}$ содержит 4 вершины степени 1. Тогда $\{s_1, \dots, s_4\}$ является объединением изолированных ребер и ввиду леммы 2.5 получим $c_3(u, s_i) = 8$. Поэтому $\Gamma_3(u) \subset z^\perp$.

Лемма 2.9. *Если $b_2(u, x) = 3$ и $[x] \cap \Gamma_3(u)$ — объединение изолированной вершины y_1 и ребра $\{y_2, y_3\}$, то $[u] \cap [x]$ является треугольником или 2-путем и $\Gamma_2(u) - \{x\}$ не содержит вершин, смежных с тремя вершинами y_1, y_2, y_3 .*

Доказательство. Пусть $b_2(u, x) = 3$ и $\Gamma_3(u) \cap [x]$ является объединением изолированной вершины y_1 и ребра $\{y_2, y_3\}$. Тогда число ребер между $\Gamma_2(u) \cap [x]$ и $\Gamma_3(u) \cap [x]$ равно 7. Далее, $[u] \cap [x]$ является треугольником или 2-путем w_1, w_2, w_3 , причем в последнем случае $\Gamma_2(u) \cap [x]$ — 4-кликка, содержащая по 2 вершины из $[w_1], [w_3]$.

Если некоторая вершина $x' \in \Gamma_2(u) \cap [x]$ смежна с тремя вершинами y_1, y_2, y_3 , то $[u] \cap [x]$ является треугольником $\{w_1, w_2, w_3\}$. В этом случае $[u] \cap [x']$ есть треугольник $\{w'_1, w'_2, w'_3\}$. Далее, $[x] - [x']$ содержит вершину p , смежную с парами вершин из $\{y_1, y_2, y_3\}$. Заметим, что вершина из $\{w_1, w_2, w_3\}$ смежна не более чем с одной вершиной из $\{w'_1, w'_2, w'_3\}$. Поэтому $[x] \cap [w'_i]$ содержит x' , быть может, вершину из $\{w_1, w_2, w_3\}$ и вершину из $[x] \cap \Gamma_2(u) - \{p, x'\}$. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $[x] \cap \Gamma_2(u) - \{p, x'\}$ смежна с 2 вершинами из $\{w'_1, w'_2, w'_3\}$.

Если некоторая вершина $x'' \in \Gamma_2(u) - x^\perp$ смежна с тремя вершинами y_1, y_2, y_3 , то $([x] \cup [x'']) \cap \Gamma_2(u)$ содержит 6 вершин, смежных с парами вершин из $\{y_1, y_2, y_3\}$; противоречие.

Лемма 2.10. Пусть y, z — такие вершины из $\Gamma_3(u)$, что $c_3(u, y) = c_3(u, z) = 7$. Если $|[y] \cap [z] \cap \Gamma_2(u)| = 1$, то $|[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)| = 4$.

Доказательство. Пусть $c_3(u, y) = c_3(u, z) = 7$ и $|[y] \cap [z] \cap \Gamma_2(u)| = 1$. Положим $\Delta = \Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$. Тогда $\Gamma_2(u)$ содержит по 6 вершин из $[y] - [z]$, $[z] - [y]$ и 7 вершин из Δ . Если $[u] \cap \Gamma_3(y) \cap \Gamma_3(z)$ содержит 2 вершины w, w' , то $[w] \cap [w']$ содержит не менее 5 вершин из Δ ; противоречие.

Если $|[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)| = 5$, то $[u] \cap \Gamma_3(y) \cap \Gamma_3(z)$ содержит вершину w , смежную с 6 вершинами из Δ . Далее, $[u] \cap \Gamma_2(y) - \Gamma_2(z)$ и $[u] \cap \Gamma_2(z) - \Gamma_2(y)$ содержат по 2 вершины, смежные с 3 вершинами из Δ . Противоречие с тем, что вершина из $\Delta - [w]$ смежна с указанными 4 вершинами из $[u]$.

Значит, $|[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)| = 4$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

В этом разделе с помощью детального разбора оставшихся случаев завершается доказательство теоремы. Из лемм 2.2–2.3 следует, что $34 \leq v \leq 40$. Через Y_i обозначим множество вершин y из $\Gamma_3(u)$ с $c_3(u, y) = i$.

Лемма 3.1. Число v вершин графа Γ не больше 38.

Доказательство. Допустим, что $v \geq 38$. По лемме 2.4 подграф $\Gamma_3(u)$ не содержит изолированных вершин. По лемме 2.8 получим $c_3(u, y) \geq 7$ для любой вершины $y \in \Gamma_3(u)$. Поэтому $v \neq 40$ (иначе число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не меньше 63).

Пусть $v = 39$. По лемме 2.8 имеем $|Y_6| = 0$, поэтому $|Y_7| \geq 4$. Допустим, что $y \in Y_9$. Тогда $|Y_7| \geq 7$. Поэтому $|\Gamma_2(u) \cap [y] \cap [z]| = 3$ для некоторой вершины $z \in Y_7$. Противоречие с леммой 2.7.

Значит, $c_3(u, y) \leq 8$ для любой вершины $y \in \Gamma_3(u)$. Предположим, что $c_3(u, y) = 7$ для вершины $y \in \Gamma_3(u)$. Если найдется такая вершина $z \in \Gamma_3(u) - \{y\}$, что $[y] \cap [z]$ содержит 3 вершины из $\Gamma_2(u)$, то по лемме 2.6 имеем $z \in Y_8 \cap [y]$. Если $[y] \cap [z]$ содержит не более 2 вершин из $\Gamma_2(u)$ для любой вершины $z \in \Gamma_3(u) - \{y\}$, то $\Gamma_3(u) \cap [y]$ содержит 3 вершины степени, не меньшей 1, поэтому $\Gamma_3(u) \cap [y]$ — треугольник или 2-путь. Противоречие с тем, что $\Gamma_3(u) - y^\perp$ содержит не менее 2 вершин, смежных с тройками вершин из $\Gamma_2(u) \cap [y]$.

Подграф $\Gamma_3(u) \cap [y]$ является 3-кликкой или объединением изолированной вершины и ребра. Но в последнем случае $\Gamma_3(u) - y^\perp$ содержит вершину z' , не смежную с вершинами из $\Gamma_3(u) \cap [y]$; противоречие. Если же $\Gamma_3(u) \cap [y]$ является 3-кликкой, то $\Gamma_3(u) \cap [y]$ содержится в Y_8 , и снова $\Gamma_3(u) - y^\perp$ содержит вершину z' , не смежную с вершинами из $\Gamma_3(u) \cap [y]$.

Лемма 3.2. Число v вершин графа Γ не больше 37.

Доказательство. Пусть $v = 38$. По лемме 2.4 подграф $\Gamma_3(u)$ не содержит изолированных вершин. Ввиду леммы 2.8 имеем $c_3(u, y) \geq 7$ для любой вершины $y \in \Gamma_3(u)$.

Допустим, что $c_3(u, y) = 9$ для некоторой вершины $y \in \Gamma_3(u)$, и положим $[u] \cap \Gamma_3(y) = \{w\}$, $[y] \cap \Gamma_3(u) = \{r\}$. Пусть $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_3(y)$ содержит вершину z , $[u] - \Gamma_2(z) = \{w_1, \dots, w_l\}$, где $l = 10 - c_3(u, z)$ и $\Delta = \Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$. Тогда $[w]$ содержит 3 вершины из Δ , в частности $c_3(u, z) \leq 8$. Если $c_3(u, z) = 8$, то $|\Delta| = 3$ и $\Delta \subset [w_i]$ для $i \in \{1, 2\}$. Противоречие с тем, что $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u и 3 вершины из Δ .

Значит, $c_3(u, z) = 7$ и $|\Delta| = 4$. Далее, каждая вершина из $\{w, w_1, \dots, w_3\}$ смежна с 3 вершинами из Δ . Поэтому для 2-путей с концами в Δ не более 6 средних вершин попадают в $\Gamma_3(u)$. Если для вершины s из $\Gamma_3(u) - \{y, z\}$ подграф $[s] \cap \Gamma_2(u)$ содержит точно 1 вершину из Δ , то $c_3(u, s) = 7$; противоречие с леммой 2.7. Значит, для любой вершины s из $\Gamma_3(u) - \{y, z\}$ подграф $[s] \cap \Gamma_2(u)$ содержит 2 вершины из Δ и по 3 вершины из $[y]$, $[z]$. Противоречие с тем, что для $q \in \Gamma_3(u) \cap [z]$ и $s \in \Gamma_3(u) \cap [q] - \{z\}$ подграф $[s] \cap \Gamma_2(u)$ содержит не более 2 вершин из $[z]$.

Итак, $\Gamma_3(u) - \{y\}$ содержится в $\Gamma_2(y)$. Если $c_3(u, r) = 9$, то каждая вершина из $\Gamma_3(u) - \{y\}$ смежна с 3 вершинами из $\Gamma_2(u) \cap [y]$, поэтому каждая вершина из $\Gamma_2(u) \cap [y]$ смежна точно с 2 вершинами из $\Gamma_3(u) - \{y\}$. Ввиду леммы 2.1 каждая вершина из $\Gamma_2(u) \cap [y] - [r]$ смежна с ребром из $\Gamma_3(u) - \{y, r\}$. По лемме 2.7 имеем $c_3(u, z) \geq 8$ для любой вершины $z \in \Gamma_3(u)$. Если $c_3(u, z) = 9$ для некоторой вершины $z \in \Gamma_3(u) - \{y, r\}$, то $|Y_9| = 4$, $|Y_8| = 3$ и каждая вершина из Δ смежна с 3 вершинами из $\Gamma_3(u) - \{y, r\}$. Противоречие с тем, что $\Gamma_3(u) - \{y, r\}$ содержит точно 4 ребра, каждое из которых попадает в окрестности 3 вершин из $\Gamma_2(u) \cap (([y] - [z]) \cup ([z] - [y]))$. Значит, $\Gamma_3(u) - \{y, r\}$ является пятиугольником и Δ содержит 2 вершины, смежные с 2-кокликами из $\Gamma_3(u) - \{y, r\}$, и 3 вершины, смежные с изолированной вершиной и ребром из $\Gamma_3(u) - \{y, r\}$. Теперь число 2-путей с концами в $\Gamma_3(u) - \{y, r\}$ и средней вершиной в Δ равно 10; противоречие.

Таким образом, $c_3(u, r) \leq 8$. Пусть $c_3(u, r) = 7$, $[r] \cap (\Gamma_3(u) - \{y\}) = \{p_1, p_2\}$. Ввиду леммы 2.7 каждая вершина из $\Gamma_3(u) - r^\perp$ смежна с вершиной из $\{p_1, p_2\}$. Без ограничения общности p_1 смежна с 2 вершинами из $\Gamma_3(u) - r^\perp$ и $c_3(u, p_1) = 7$. Отсюда $|\Gamma_2(u) \cap [r] \cap [p_1]| = 3$; противоречие с леммой 2.6.

Значит, $c_3(u, r) = 8$ и $[r] \cap (\Gamma_3(u) - \{y\})$ содержит единственную вершину p . Тогда p смежна точно с 2 вершинами из $\Gamma_2(u) \cap [y]$, а любая вершина из $\Gamma_3(u) - \{y, p\}$ смежна с 3 вершинами из $\Gamma_2(u) \cap [y]$, поэтому точно одна вершина x из $\Gamma_2(u) \cap [y]$ смежна с единственной вершиной из $\Gamma_3(u) - \{y\}$, а любая вершина из $\Gamma_2(u) \cap [y] - \{x\}$ смежна точно с 2 вершинами из $\Gamma_3(u) - \{y\}$. Далее, $c_3(u, q) \geq 8$ для $q \in \Gamma_3(u) - \{p\}$.

Если $\Gamma_3(u) - \{y, r, p\} \subset \Gamma_2(r)$, то $c_3(u, p) = 7$, число ребер между $\Gamma_2(u) \cap [r]$ и $\Gamma_3(u) - \{r\}$ равно 16 и каждая вершина из $\Gamma_2(u) \cap [r]$ смежна с 2 вершинами из $\Gamma_3(u) - \{r\}$.

Пусть $c_3(u, p) = 7$. Тогда число ребер между $\Gamma_2(u) \cap [p]$ и $\Gamma_3(u) - \{p\}$ не больше 14, но не меньше $2 + 3 + 10$; противоречие.

Значит, $c_3(u, p) > 7$ и $\Gamma_3(u) - \{y, r, p\}$ содержит вершину z из $\Gamma_3(r)$. Тогда $\Gamma_2(u) \cap [z]$ содержит 3 вершины из $[y]$ и 5 из 6 вершин в $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [r])$. Если вершина из $\Gamma_2(u) \cap [y] \cap [r]$ смежна с p , то либо $c_3(u, p) = 9$ и Δ содержит не менее 4 вершин из $[p] \cap [z]$, либо $c_3(u, p) = 8$, $[p] \cap [z]$ содержит 3 вершины из Δ и вершину из $\Gamma_3(u)$. В любом случае имеем противоречие. Итак, вершины из $\Gamma_2(u) \cap [y] \cap [r]$ не смежны с p , поэтому $\Gamma_2(u) \cap [p]$ содержит 2 вершины из $[y] - [r]$. Теперь $\Gamma_2(u) \cap [p]$ содержит вершину, смежную с 2 вершинами из $\Gamma_3(u)$, и вершину, смежную с вершиной s из $\Gamma_3(u) \cap [p]$. Положим $\Phi = [y] \cap \Gamma_2(u) - ([p] \cup [r])$. Тогда $[y] \cap [s]$ содержит по вершине из $[p]$, $[r]$ и из Φ . Поэтому $\Gamma_2(u) \cap [s]$ содержит 4 вершины из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [r])$, 3 из которых попадают в $[z]$. Отсюда $\Phi - [s] = [y] \cap [z]$ и $c_3(u, s) = c_3(u, z) = 8$, в частности вершины s, z смежны. Теперь каждая из вершин s', s'' , принадлежащих $\Gamma_3(u) - (\{s, z\} \cup r^\perp)$, смежна с 2 вершинами из $\Phi \cap [z]$; противоречие.

Таким образом, $\Gamma_3(u)$ не содержит вершин y с $c_3(u, y) = 9$. Допустим, что для любой вершины $y \in \Gamma_3(u)$ имеем $c_3(u, y) = 8$. Тогда $\Gamma_3(u)$ является семиугольником или объединением

треугольника и четырехугольника, а число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ равно 56. Так как вершины из $\Gamma_2(u)$, смежные с парами противоположных вершин четырехугольника, не смежны с вершинами треугольника, то $\Gamma_2(u)$ содержит 6 вершин, смежных с парами вершин треугольника, и 12 вершин, каждая из которых смежна с одной вершиной треугольника. По лемме 2.1 любая из этих 12 вершин смежна с ребром четырехугольника. Поэтому из 6 вершин, смежных с парами вершин треугольника, точно 2 не смежны с вершинами четырехугольника. Значит, найдется вершина z треугольника, смежная с единственной вершиной x , имеющей $b_2(u, x) = 2$. Противоречие с тем, что число 2-путей с началом z и концом в четырехугольнике равно 13.

Пусть $\Gamma_3(u)$ является семиугольником. Если $d(y, z) = 3$ для некоторых вершин $y, z \in \Gamma_3(u)$, то число ребер между $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$ и $\Gamma_3(u) - \{y, z\}$ равно $4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 14$. Теперь некоторая вершина из $\Gamma_2(u) - ([y] \cup [z])$ смежна с 4 вершинами из $\Gamma_3(u) - \{y, z\}$; противоречие. Значит, $d(y, z) \leq 2$ для любых вершин $y, z \in \Gamma_3(u)$. Поэтому число ребер между $\Gamma_2(u) \cap [z]$ и $\Gamma_3(u) - \{z\}$ равно $4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16$ и каждая вершина из $\Gamma_2(u)$, смежная с вершиной из $\Gamma_3(u)$, смежна с 3 вершинами из $\Gamma_3(u)$. Противоречие с тем, что число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не кратно 3.

Таким образом, $\Gamma_3(u)$ содержит 2 вершины y, z из Y_7 . Через α обозначим $|\Gamma_2(u) \cap [y] \cap [z]|$. Если $\alpha = 0$, то $d(y, z) \leq 2$, иначе $|\Gamma_3(u)| \geq 8$. В этом случае $[y] \cap [z]$ содержит 3-кликлу $\{r_1, r_2, r_3\}$, $\Gamma_3(u) - (y^\perp \cup z^\perp)$ содержит ребро $\{s_1, s_2\}$ и можно считать, что вершина s_1 смежна с r_1, s_2 смежна с r_2 . Поэтому $|\Gamma_2(u) \cap [y] \cap [r_1]| = 3$; противоречие с леммой 2.6. По лемме 2.6 получим $\alpha \neq 3$.

Если $\alpha = 1$, то по лемме 2.10 имеем $|[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)| = 4$. Далее, $\Gamma_3(u)$ содержит 2 вершины r_1, r_2 из $[y] \cap [z]$. Если вершины y, z смежны, то $\Gamma_3(u) - (y^\perp \cup z^\perp)$ содержит вершину s , не смежную ни с r_1 , ни с r_2 . Поэтому $|[y] \cap [s] \cap \Gamma_2(u)| = 3$; противоречие с леммой 2.6. Значит, вершины y, z не смежны, и $\Gamma_3(u)$ содержит вершину y' , смежную с y , вершину z' , смежную с z и еще одну вершину s . Если вершина r_i смежна с s , то $|\Gamma_2(u) \cap [y] \cap [r_i]| = 3$; противоречие с леммой 2.6. Значит, $\Gamma_3(u) \cap [s] = \{y', z'\}$. Если вершина y' не смежна с вершинами из $\{r_1, r_2, z'\}$, то $|\Gamma_2(u) \cap [y'] \cap [z]| = 3$; противоречие с леммой 2.6. Если вершина y' не смежна с вершинами из $\{r_1, r_2\}$, то $|\Gamma_2(u) \cap [y'] \cap [y]| = 3$; снова противоречие с леммой 2.6. Итак, можно считать, что y' смежна с r_1 , z' смежна с r_2 . Но в этом случае $|\Gamma_2(u) \cap [y] \cap [r_2]| = 3$; противоречие с леммой 2.6.

Значит, $\alpha = 2$, по лемме 2.5 число $|[u] \cap \Gamma_2(y) \cap \Gamma_2(z)|$ равно 5. Далее, $\Gamma_3(u)$ содержит единственную вершину r из $[y] \cap [z]$.

Если вершины y, z смежны, то $\Gamma_3(u)$ содержит вершину y' , смежную с y , вершину z' , смежную с z и вершины s_1, s_2 , не смежные ни с y ни с z . Так как одна из вершин s_1, s_2 не смежна с r , то можно считать, что s_1 не смежна с r и ввиду леммы 2.6 вершина s_1 смежна с y', z' . Поэтому $s_1 \in Y_8$. Далее, $[s_2]$ содержит 2 вершины из $\{r, y', z'\}$, попадающие в Y_7 , и имеющие двух общих соседей в $\Gamma_3(u)$; противоречие.

Итак, Y_7 — клика, и вершины y, z не смежны. Тогда $\Gamma_3(u)$ содержит 2 вершины y_1, y_2 из $[y] - [z]$ и 2 вершины z_1, z_2 из $[z] - [y]$. Если $|Y_7| = 2$, то либо $\{y_1, y_2\}$ и $\{z_1, z_2\}$ — ребра, либо $\{y_1, z_1\}$ и $\{y_2, z_2\}$ — ребра. В любом случае число ребер между $\Gamma_2(u) \cap [y]$ и $\Gamma_3(u) - \{y\}$ равно 15; противоречие. Поэтому $|Y_7| \geq 4$. Противоречие с тем, что Y_7 — клика. Лемма доказана.

Из лемм 3.1, 3.2 следует, что $34 \leq v \leq 37$. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. Допустим, что Γ — дистанционно регулярный граф с $k = 10, \lambda = 3$. Если $\mu \neq 3$, то по теореме Γ — граф из заключения следствия. Поэтому можно считать, что $\mu = 3$, по теореме диаметр Γ равен 3 и $34 \leq v \leq 37$. Заметим, что число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ равно $20b_2 = |\Gamma_3(u)|c_3$.

Если $v = 34$, то $|\Gamma_3(u)| = 3$, поэтому $b_2 \geq 3$ и $c_3 \geq 20$; противоречие.

Если $v = 35$, то $|\Gamma_3(u)| = 4$, поэтому $5b_2 = c_3$. Отсюда либо $b_2 = 1, c_3 = 5$, либо $b_2 = 2, c_3 = 10$. В первом случае имеем противоречие с тем, что степень вершины из $\Gamma_3(u)$ в Γ не больше 8. Во втором случае любые 2 вершины из $\Gamma_3(u)$ находятся на расстоянии 2 в Γ , иначе для

$y, z \in \Gamma_3(u)$ с $d(y, z) = 3$ получим $\Gamma_2(u) = [y] \cup [z]$; противоречие с тем, что для $x \in \Gamma_3(u) - \{y, z\}$ подграф $[x]$ содержит больше 3 вершин из $[y]$ или из $[z]$. Теперь $(\Gamma_3(u), \Gamma_2(u))$ является $2 - (4, 2, 3)$ схемой; противоречие с тем, что тогда каждая точка инцидентна $(v-1)\lambda/(k-1) = 9$ блокам.

Если $v = 36$, то $|\Gamma_3(u)| = 5$, поэтому $4b_2 = c_3$. Отсюда $b_2 = 2, c_3 = 8$ и $\Gamma_3(u)$ является 5-циклом $y_1y_2 \dots y_5$. Тогда число ребер между $[y_1] \cap \Gamma_2(u)$ и $\{y_2, \dots, y_5\}$ равно $2 \cdot 3 + 2 \cdot 2$. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $[y_1] \cap \Gamma_2(u)$ смежна с 2 вершинами из $\{y_2, \dots, y_5\}$.

Если $v = 37$, то $|\Gamma_3(u)| = 6$, поэтому $10b_2 = 3c_3$. Отсюда $b_2 = 3, c_3 = 10$ и $(\Gamma_3(u), \Gamma_2(u))$ является $2 - (6, 3, 3)$ схемой; противоречие с тем, что тогда каждая точка инцидентна $(v-1)\lambda/(k-1) = 15/2$ блокам. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-Regular Graphs. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Махнев А.А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ -подграфы // Дискр. анализ и исслед. операций 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.
3. **Ефимов К.С., Махнев А.А.** О реберно регулярных графах с $b_1 = 6$ // Тез. 7-й Международной школы-конференции по теории групп. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ 2008. С. 15–18.
4. **Махнев А.А.** О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68. С. 159–172.

Ефимов Константин Сергеевич
математик

Ин-т математики и механики УрО РАН

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-корр. РАН
зав. отделом

Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Нирова Марина Сефовна
канд. физ.-мат. наук
доцент

Кабардино-Балкарский гос. ун-т
e-mail: nirova_m@mail.ru

Поступила 16.06.2009

УДК 517.951, 533.6

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Л. Казаков

Предложено обобщение метода характеристических рядов, разработанного А.Ф. Сидоровым. Метод применяется для исследования начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, в том числе возникающих в газовой динамике. Построено решение одной смешанной задачи для системы квазилинейных уравнений в виде кратных рядов по степеням характеристических функций, доказан соответствующий аналог теоремы Коши — Ковалевской.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, начально-краевая задача, ряды, газовая динамика.

A. L. Kazakov. Application of the generalized method of characteristic series to the construction of a solution of an initial-boundary value problem for a system of quasi-linear equations.

A generalization of the method of characteristic series developed by A.F. Sidorov is suggested. The method is applied to the investigation of initial-boundary value problems for partial differential equations, including equations appearing in gas dynamics. A solution of a mixed problem for a system of quasi-linear equations is constructed in the form of multiple series in powers of characteristic functions, and the corresponding analog of the Cauchy–Kovalevskaya theorem is proved.

Keywords: partial differential equations, initial-boundary value problem, series, gas dynamics.

Введение

Идея метода характеристических рядов для построения решений начально-краевых задач для квазилинейных уравнений с частными производными восходит к Р. Куранту [1]. Детально метод был разработан А.Ф. Сидоровым [2]. В дальнейшем метод характеристических рядов, а также разработанный на его основе метод специальных рядов неоднократно успешно применялись для построения решений различных задач математической физики в работах самого А.Ф. Сидорова, а также его учеников (библиография весьма обширна, см., например, работы [3–7]).

В данной статье рассматривается смешанная задача специального вида для квазилинейных уравнений с частными производными. При $t = 0$ заданы начальные условия, кроме того, для всех искомых функций заданы дополнительные условия на характеристиках. Подобные задачи, в частности, возникают в газовой динамике [8].

Метод характеристических рядов состоит в том, что решение с характеристическим разрывом строится в виде

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t, \mathbf{x}) \varphi^k, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n),$$

где функция $\varphi(t, \mathbf{x}) = 0$ определяет характеристическую поверхность. Данный метод позволил построить сложные пространственные течения газа с характеристическими разрывами. Конечно, каждый конкретный ряд строится в предположении, что разрывы отсутствуют. Однако, поскольку метод характеристических рядов позволяет выделять линии разрывов производных, то с помощью операций состыковки рядов можно получать конструктивные описания

решений и в этих случаях. Метод был также перенесен на случай параболических уравнений, в том числе с вырождением.

Для построения решений, имеющих более одного характеристического разрыва, предлагается модифицировать метод характеристических рядов следующим образом: для представления решения использовать кратные характеристические ряды

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{k_1 \dots k_\nu}(t, \mathbf{x}) \varphi_1^{k_1} \times \dots \times \varphi_\nu^{k_\nu},$$

где $\varphi_1(t, \mathbf{x}) = 0, \dots, \varphi_\nu(t, \mathbf{x}) = 0$ — характеристические поверхности, принадлежащие различным семействам. Предложенное обобщение метода характеристических рядов, в частности, позволило построить решение новой начально-краевой задачи для системы квазилинейных уравнений, в том числе доказать аналог теоремы Коши — Ковалевской.

С точки зрения приложений построены решения модельных уравнений газовой динамики, которые позволяют описать некоторые новые неквазиодномерные (двумерные и трехмерные) нестационарные течения газа со слабыми разрывами. В настоящее время хорошо изучены одномерные и квазиодномерные (т. е. имеющие ту же конфигурацию, что и одномерные) нестационарные разрывные течения газа [9]. Общая теория неквазиодномерных течений пока далека от построения. В частности, не решена в общем случае двумерная неквазиодномерная задача о распаде произвольного разрыва. Имеются только отдельные результаты (см., например, [7, 8]).

В последние годы наблюдается увлечение численными методами газовой динамики в ущерб аналитическим. Отчасти это оправдывается быстрым развитием вычислительной техники. Представляется однако, что полный отказ от проведения аналитической работы ошибочен и может, в конечном счете, нанести ущерб качеству исследований, поскольку “многомерные нелинейные явления... иногда с трудом поддаются численному анализу... синтез же аналитических и численных подходов позволяет построить более экономичные методы” [8, с. 238]. Высказывание А.Ф. Сидорова по сей день во многом сохраняет свою актуальность.

1. Модельный пример и формулировка теоремы для системы трехмерных квазилинейных уравнений

В этом разделе рассматривается модельная задача, на примере которой раскрывается идея конструкции кратных характеристических рядов, а затем формулируется теорема 1 и обсуждаются ее условия.

Пример 1. Рассмотрим двумерное квазилинейное уравнение переноса

$$u_t + uu_x + uu_y = 0, \quad (1.1)$$

которое описывает перенос сохраняющейся скалярной величины и является модельным для газовой динамики. Для (1.1) поставим следующую смешанную задачу:

$$u|_{t=0} = 1, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad (1.2)$$

$$u|_{x=0} = f(t, y), \quad f(0, y) = 1. \quad (1.3)$$

В данном случае поверхности $x - t = C_1$, $y - t = C_2$ являются характеристиками.

Будем строить решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) в виде двойного характеристического ряда

$$u(t, x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{k, l}(t)(x - t)^k (y - t)^l. \quad (1.4)$$

При этом $a_{00} = 1$. Легко видеть, что в данном случае $u(t, x, y)|_{x=t, y=t} = 1$.

Коэффициенты ряда (1.4) определяются индукцией по $n = k + l$. При последовательном дифференцировании обеих частей уравнения (1.1) получаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ).

При этом $a_{1,0}$, $a_{0,1}$ определяются при решении нелинейной системы

$$\begin{cases} a'_{1,0} + a_{1,0}^2 + a_{1,0}a_{0,1} = 0, \\ a'_{0,1} + a_{0,1}^2 + a_{1,0}a_{0,1} = 0, \end{cases}$$

что обуславливает возможность возникновения градиентной катастрофы.

Для определения остальных коэффициентов ряда (1.4) получаются системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ)

$$\begin{cases} a'_{n,0} + [(n+1)a_{1,0} + a_{0,1}]a_{n,0} + a_{1,0}a_{n-1,1} + F_{n,0} = 0, \\ \dots \\ a'_{n-k,k} + [(n+1-k)a_{1,0} + (k+1)a_{0,1}]a_{n-k,k} + (n-k+1)a_{1,0}a_{n-k-1,k+1} \\ + (k+1)a_{0,1}a_{n-k+1,k-1} + F_{n-k,k} = 0, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ \dots \\ a'_{0,n} + [(n+1)a_{0,1} + a_{1,0}]a_{0,n} + a_{0,1}a_{1,n-1} + F_{0,n} = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Значения $F_{k,n-k}$ являются известными, если известны коэффициенты ряда (1.4) при $k + l = 0, 1, \dots, n-1$, формулы для их вычисления здесь не приводятся.

Начальные условия для (1.5) определяются при последовательном дифференцировании граничных условий (1.3). Пусть функция $f(t, y)$ является аналитической, а значит, может быть разложена в ряд по степеням t

$$f(t, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y)t^k,$$

где $f_k(y)$ — аналитические в окрестности нуля функции. Тогда с учетом (1.2), (1.3) имеем, что

$$a_{0,l}(0) = 0, \quad a_{1,l}(0) = -\frac{1}{l!} \left. \frac{\partial^l f_1(y)}{\partial y^l} \right|_{y=0}, \quad l = 1, \dots$$

И так далее. Последовательно определяются значения $a_{2,l}(0)$, $a_{3,l}(0)$, \dots . Таким образом, для системы ЛОДУ (1.5) получены задачи Коши (ЗК), которые в данном случае по теореме Коши имеют единственное аналитическое решение в области аналитичности функций $a_{1,0}$, $a_{0,1}$.

Сходимость рядов следует из теоремы 1 (см. ниже в данном разделе).

З а м е ч а н и е 1. Задача (1.1), (1.2), (1.3) рассматривалась еще А.Ф. Сидоровым [8, с. 239]. Однако ранее решение строилось в виде обычного характеристического ряда. Разумеется, решение в виде рядов (1.4) в области аналитичности является переразложением решения из работы А.Ф. Сидорова. Однако подход, предложенный в данной статье, позволяет, как будет показано ниже, конструктивно описать решение, имеющее разрыв производной не только на характеристике $x = t$ (как в [8]), но также одновременно и при $y = t$.

Рассмотрим теперь систему трехмерных квазилинейных уравнений

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + wu_z = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z = 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Здесь u, v, w — искомые функции, компоненты скорости; x, y, z — пространственные переменные, t — время. Для системы (1.6) зададим начальные данные Коши

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad \varphi|_{x=0} = 0, \quad v|_{t=0} = \psi(x, y, z), \quad \psi|_{y=0} = 0, \quad w|_{t=0} = \chi(x, y, z), \quad \chi|_{z=0} = 0 \quad (1.7)$$

и краевые условия

$$u|_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad w|_{z=0} = 0. \quad (1.8)$$

Для задачи (1.6), (1.7), (1.8) линии $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ являются характеристиками.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки $(x = 0, y = 0, z = 0)$. Тогда задача (1.6)–(1.8) имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $(t = 0, x = 0, y = 0, z = 0)$.

З а м е ч а н и е 2. К задаче (1.6)–(1.8) сводится, например, задача

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vv_y + ww_z = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + ww_z = 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi(x, y, z), & v|_{t=0} &= \psi(x, y, z), & w|_{t=0} &= \chi(x, y, z), \\ \varphi(0, y, z) &= c_1, & \psi(x, 0, z) &= c_2, & \chi(x, y, 0) &= c_3, \\ u|_{x=c_1t} &= c_1, & v|_{y=c_2t} &= c_2, & w|_{z=c_3t} &= c_3, \end{aligned} \quad (1.10)$$

если в ней выполнить следующую замену неизвестных функций и независимых переменных:

$$u' = u - c_1, \quad v' = v - c_2, \quad w' = w - c_3, \quad t' = t, \quad x' = x - c_1t, \quad y' = y - c_2t, \quad z' = z - c_3t.$$

З а м е ч а н и е 3. Задача (1.6), (1.7) при условии аналитичности функций $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$ по теореме Коши — Ковалевской имеет единственное аналитическое решение в виде ряда по степеням t с коэффициентами, зависящими от x, y, z . Однако теорема 1 позволяет удовлетворить дополнительным краевым условиям и за счет этого построить непрерывное кусочно-аналитическое решение, имеющее слабые разрывы на характеристических поверхностях (см. разд. 6).

Под *кусочно-аналитическим* здесь понимается решение, определенное в окрестности некоторой точки и имеющее следующую структуру: окрестность разбивается на секторы, в каждом из которых решение является аналитическим (т. е. может быть представлено в виде сходящегося степенного ряда), а на границах секторов условие аналитичности нарушается и терпят разрыв либо искомые функции (сильный разрыв), либо их производные (слабый = характеристический разрыв). В последнем случае границы секторов будут являться характеристическими поверхностями.

З а м е ч а н и е 4. Аналитическое решение задачи (1.6), (1.7), вообще говоря, является локальным (это, в частности, следует из теоремы Коши — Ковалевской, см. также (2.6)). Размер окрестности по пространственным переменным x, y, z определяется видом функций $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$, его нахождение требует дополнительного исследования. Размер окрестности по времени t обсуждается в разд. 5.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательству теоремы 1 будут посвящены разд. 2-4.

2. Построение формального решения задачи (1.6)–(1.8)

Решение задачи (1.6)–(1.8) строится в виде кратных характеристических рядов, которые в данном случае имеют вид кратных рядов по степеням пространственных переменных x, y, z с коэффициентами, зависящими от времени t . Для того чтобы избежать громоздких выкладок, приведем подробное доказательство теоремы 1 для случая двух искомого функций и двух

пространственных переменных (в общем случае теорема доказывается аналогично). Т. е. будем рассматривать задачу

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \varphi|_{x=0} = 0, \quad v|_{t=0} = \psi(x, y), \quad \psi|_{y=0} = 0, \quad (2.2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0. \quad (2.3)$$

Решение задачи (2.1)–(2.3), как отмечалось выше, строится в виде ряда

$$\zeta = \sum_{k,l=0}^{\infty} \zeta_{kl}(t) \frac{x^k y^l}{k!l!}, \quad \zeta_{k,l}(t) = \left. \frac{\partial^{k+l} \zeta}{\partial x^k \partial y^l} \right|_{x=y=0}. \quad (2.4)$$

Здесь символ ζ принимает значения u, v . Поскольку координатные плоскости в данном случае суть характеристики, ряды (2.4) являются кратными характеристическими рядами. Коэффициенты рядов определяются индукцией по $n = k + l$. При каждом $n = 0, 1, 2, \dots$ находят $\zeta_{k,l}$, $k + l = n$ при решении ЗК для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Из начальных условий (2.2) следует, что

$$u_{0,l} = v_{k,0} = 0,$$

в частности, при $n = 0$: $u_{0,0} = v_{0,0} = 0$. При $n = 1$ из (2.2) имеем, что $u_{0,1} = v_{1,0} = 0$.

Для нахождения $u_{1,0}$, $v_{0,1}$ первое уравнение (2.1) продифференцируем по x , второе — по y и положим $x = y = 0$. Учитывая также граничные условия (2.3), получаем ЗК для ОДУ

$$\begin{cases} u'_{1,0} + (u_{1,0})^2 = 0, & u_{1,0}(0) = \varphi'_x(0, 0), \\ v'_{0,1} + (v_{0,1})^2 = 0, & v_{0,1}(0) = \psi'_y(0, 0). \end{cases} \quad (2.5)$$

Задача (2.1) имеет решение

$$u_{1,0} = \frac{\varphi'_x(0, 0)}{t\varphi'_x(0, 0) + 1}, \quad v_{0,1} = \frac{\psi'_y(0, 0)}{t\psi'_y(0, 0) + 1}. \quad (2.6)$$

В частности, если $\varphi'_x(0, 0) = 0$, то $u_{1,0} \equiv 0$; если $\psi'_y(0, 0) = 0$, то $v_{0,1} \equiv 0$.

Уравнения (2.5) являются нелинейными. Дальнейшее построение коэффициентов рядов (2.4) последовательным дифференцированием уравнений системы (2.1) с учетом начальных и граничных условий (2.2), (2.3) сводится к решению ЗК для ЛОДУ.

Пусть известны все $u_{k,l}$, $v_{k,l}$ при $k + l = 1, 2, \dots, n - 1$. Тогда $u_{k,n-k}$, $v_{k,n-k}$ определяются следующим образом: $u_{0,n} = 0$, $v_{n,0} = 0$ — из начальных условий. Остальные коэффициенты находим при решении следующих ЗК для ЛОДУ:

$$\begin{cases} u'_{k,n-k} + [(k+1)u_{1,0} + (n-k)v_{0,1}]u_{k,n-k} + F_{k,n-k} = 0, & u_{k,n-k}(0) = \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(0, 0); \\ v'_{n-k,k} + [(n-k)u_{1,0} + (k+1)v_{0,1}]v_{n-k,k} + G_{n-k,k} = 0, & v_{n-k,k}(0) = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(0, 0), \\ k = 1, \dots, n; \end{cases} \quad (2.7)$$

функции $F_{k,n-k}$, $G_{k,n-k}$ известны в силу предположения индукции, формулы для их нахождения не приводятся ввиду громоздкости. Теорема Коши обеспечивает существование и единственность аналитического решения задачи (2.7) в некоторой окрестности точки $t = 0$.

Таким образом, формальное решение задачи (2.1)–(2.3) построено, причем оно определяется единственным образом.

3. Доказательство сходимости рядов (2.4)

Сходимость рядов (2.4) доказывается классическим методом мажорант (см., например, [1, с. 60]).

Перед построением мажорантной задачи приведем некоторые свойства мажорант [1].

Говорят, что функция $R(x_1, \dots, x_n)$ мажорирует $f(x_1, \dots, x_n)$ ($R \gg f$), если коэффициенты степенных рядов функций R и f

$$R(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l_1, \dots, l_n=0}^{\infty} R_{l_1, \dots, l_n} \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i^{l_i}}{l_i!} \right), \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l_1, \dots, l_n=0}^{\infty} f_{l_1, \dots, l_n} \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i^{l_i}}{l_i!} \right)$$

связаны неравенством $R_{l_1, \dots, l_n} \geq |f_{l_1, \dots, l_n}|$ при всех $l_1, \dots, l_n \geq 0$.

Для того чтобы $R \gg f$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $l \geq 0$

$$R_l(x_2, \dots, x_n) \gg f_l(x_2, \dots, x_n),$$

где

$$R_l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(x_2, \dots, x_n) \frac{x_1^l}{l!}, \quad f_l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(x_2, \dots, x_n) \frac{x_1^l}{l!}.$$

Если $R \gg f$ и степенной ряд функции R сходится в окрестности точки $O(x_1 = 0, \dots, x_n = 0)$ (функция R является аналитической), то степенной ряд функции f также сходится в той же окрестности начала координат и функция f тоже аналитическая.

Сложение, умножение на положительное число, перемножение, задание сложной функции, дифференцирование мажорант сохраняют для полученных результатов свойство мажорировать суммы, произведения, сложную функцию и частные производные от исходных мажорируемых функций. Если аналитическая в некоторой окрестности точки O функция R мажорирует нуль, то $R(x_1, x_2, \dots, x_n) \gg R(0, x_2, \dots, x_n)$. Если $C > R(0, \dots, 0) \geq 0$, то функция $1/[C - R(x_1, \dots, x_n)]$ в некоторой окрестности точки O является аналитической и мажорирует нуль.

Пусть даны две задачи Коши типа Ковалевской. Если правая часть и начальные данные одной из них (задачи А) мажорируют правую часть и начальные данные другой (задачи В), обе задачи имеют единственное формальное решение в виде рядов по степеням независимых переменных и ряд-решение задачи А сходится и мажорирует нуль, то решение задачи А мажорирует решение задачи В (и поэтому ряд-решение задачи В также сходится). Задача А в этом случае называется мажорантной задачей для В. Такое же свойство справедливо и в случае, когда начальные данные для разных искомым функций заданы не на одной и той же, а на двух поверхностях, если только соответствующие уравнения разрешены относительно производных, выводящих с этих поверхностей [7].

Поскольку, как было сказано, операция дифференцирования не выводит из класса аналитических функций, мы можем от обеих частей первого уравнения системы (2.1) взять производные по x , а от обеих частей второго — по y . Получим систему

$$\begin{cases} u_{tx} + u_x^2 + uu_{xx} + v_x u_y + v u_{yx} = 0, \\ v_{ty} + u_y v_x + u v_{xy} + v_y^2 + v v_{yy} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Введем новые искомые функции W_1, W_2, Z_1, Z_2 по формулам

$$W_1 = u_x, \quad W_2 = u_y, \quad Z_1 = v_x, \quad Z_2 = v_y. \quad (3.2)$$

Отсюда, в частности, следует, что $W_{2x} = W_{1y}$, $Z_{1y} = Z_{2x}$.

С учетом введенных обозначений система (3.1) примет вид

$$\begin{cases} W_{1t} = -uW_{1x} - vW_{1y} - W_1^2 - Z_1W_2, & Z_{2t} = -vZ_{2y} - uZ_{2x} - Z_2^2 - Z_1W_2, \\ u_x = W_1, & W_{2x} = W_{1y}, \quad v_y = Z_2, \quad Z_{1y} = Z_{2x}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Граничные условия для системы (3.3) следующие:

$$W_1|_{t=0} = \varphi'_x(x, y), \quad Z_2|_{t=0} = \psi'_y(x, y), \quad u|_{x=0} = 0, \quad W_2|_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad Z_1|_{y=0} = 0. \quad (3.4)$$

Задача (3.3), (3.4) эквивалентна задаче (2.1)–(2.3) в классе аналитических функций. Для этой задачи далее строится мажорантная задача.

Методами, аналогичными тем, которые применяются при доказательстве сходимости рядов в работе [7], можно показать, что мажорантная для (3.2), (3.3) задача будет иметь вид

$$\begin{cases} H_t = T_1H_x + T_2H_y + F, & H|_{t=0} = 0, \\ T_{1x} = H_y + F, & T_1|_{x=0} = 0, \\ T_{2y} = H_x + F, & T_2|_{y=0} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$F = \frac{M}{1 - \frac{t+x+y+2T_1+2H+2T_2}{\rho}}.$$

Тогда (при соответствующем выборе констант M, ρ) T_1 мажорирует u, W_2 ; $T_2 \gg v, Z_1$; $H \gg W_1 - \varphi'_x(x, y), Z_2 - \psi'_y(x, y)$.

Введем теперь новую независимую переменную ξ и определим функцию F^* :

$$\xi = t + x + y, \quad F^* = \frac{M}{1 - \frac{\xi + 2T_1 + 2H + 2T_2}{\rho}}.$$

Поскольку $F^* = F$, будем искать решение (3.5) в виде $H = H(\xi), T_1 = T_1(\xi), T_2 = T_2(\xi)$, т. е. решать следующую мажорантную задачу:

$$\begin{cases} H_\xi = T_1H_\xi + T_2H_\xi + F^*, & H|_{\xi=0} = 0, \\ T_{1\xi} = H_\xi + F^*, & T_1|_{\xi=0} = 0, \\ T_{2\xi} = H_\xi + F^*, & T_2|_{\xi=0} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Очевидно, что $T_1(\xi) = T_2(\xi)$. Если (3.6) записать в нормальном виде

$$\begin{cases} H_\xi = \frac{F^*}{1 - 2T}, & H|_{\xi=0} = 0, \\ T_\xi = F^* \frac{2(1 - T)}{1 - 2T}, & T|_{\xi=0} = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $T(\xi) = T_1(\xi) = T_2(\xi)$, то легко видеть, что полученная задача (3.7) по теореме Коши имеет единственное мажорирующее нуль решение. С другой стороны, по построению задачи (3.7), ее решение мажорирует решение задачи (2.1)–(2.3):

$$T(t + x + y) \gg v, Z_1, u, W_2; \quad H(t + x + y) \gg W_1 - \varphi'_x(x, y), Z_2 - \psi'_y(x, y).$$

Сходимость рядов (2.4) установлена, теорема 1 для случая двух независимых переменных и двух искомых функций доказана.

4. О доказательстве теоремы 1 в общем случае

Как уже отмечалось, доказательство теоремы 1 в общем случае проводится по вышеизложенной схеме, поэтому будем кратки в рассуждениях. Решение задачи (2.1)–(2.3) строится в виде кратных рядов по степеням пространственных переменных

$$\zeta = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \zeta_{k,l,m}(t) \frac{x^k y^l z^m}{k!l!m!}, \quad \zeta_{k,l,m}(t) = \left. \frac{\partial^{k+l+m} \zeta}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m} \right|_{x=y=z=0}. \quad (4.1)$$

Здесь уже символ ζ принимает значения u, v, w . Ряды (4.1) являются в данном случае характеристическими рядами.

Из граничных условий следует, что

$$u_{0,l,m} = v_{k,0,m} = w_{k,l,0} = 0,$$

в частности,

$$u_{0,0,0} = 0, \quad v_{0,0,0} = 0; \quad w_{0,0,0} = 0, \quad u_{0,1,0} = u_{0,0,1} = 0, \quad v_{1,0,0} = v_{0,0,1} = 0, \quad w_{1,0,0} = w_{0,1,0} = 0.$$

Для определения $u_{1,0,0}$, $v_{0,1,0}$, $w_{0,0,1}$ имеем ЗК для нелинейных ОДУ

$$\begin{cases} u_{1,0,0} + u_{1,0,0}^2 = 0, & u_{1,0,0}(0) = \varphi'_x(0, 0, 0), \\ v_{0,1,0} + v_{0,1,0}^2 = 0, & v_{0,1,0}(0) = \psi'_y(0, 0, 0), \\ w_{0,0,1} + w_{0,0,1}^2 = 0, & w_{0,0,1}(0) = \chi'_z(0, 0, 0). \end{cases} \quad (4.2)$$

Решение (4.2) имеет вид

$$u_{1,0,0} = \frac{\varphi'_x(0, 0, 0)}{t\varphi'_x(0, 0, 0) + 1}, \quad v_{0,1,0} = \frac{\psi'_y(0, 0, 0)}{t\psi'_y(0, 0, 0) + 1}, \quad w_{0,0,1} = \frac{\chi'_z(0, 0, 0)}{t\chi'_z(0, 0, 0) + 1}. \quad (4.3)$$

Остальные коэффициенты рядов (4.1) определяются индукцией (база индукции уже установлена) по суммарному порядку дифференцирования $n = k + l + m$ при решении ЗК для ЛОДУ

$$\begin{cases} u'_{k,l,m} + [(k+1)u_{1,0,0} + lv_{0,1,0} + mw_{0,0,1}]u_{k,l,m} + F_{k,l,m} = 0, & u_{k,l,m}(0) = \frac{\partial^{k+l+m} \varphi}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m}(0, 0, 0); \\ v'_{k,l,m} + [ku_{1,0,0} + (l+1)v_{0,1,0} + mw_{0,0,1}]v_{k,l,m} + G_{k,l,m} = 0, & v_{k,l,m}(0) = \frac{\partial^{k+l+m} \psi}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m}(0, 0, 0); \\ w'_{k,l,m} + [ku_{1,0,0} + lv_{0,1,0} + (m+1)w_{0,0,1}]w_{k,l,m} + H_{k,l,m} = 0, & w_{k,l,m}(0) = \frac{\partial^{k+l+m} \chi}{\partial x^k \partial y^l \partial z^m}(0, 0, 0). \end{cases} \quad (4.4)$$

Формулы для нахождения функций $F_{k,l,m}$, $G_{k,l,m}$, $H_{k,l,m}$ здесь не приводятся ввиду громоздкости. Отметим только, что эти функции будут известны, если известны производные порядка меньше, чем $n = k + l + m$. Задачи (4.4), очевидно, однозначно разрешимы, а значит, можно утверждать, что формальное решение задачи (1.6)–(1.8) построено.

Мажорантная задача может быть взята в виде

$$\begin{cases} H_\xi = \frac{F^*}{1-3T}, & H|_{\xi=0} = 0, \\ T_\xi = F^* \frac{(2-3T)}{1-3T}, & T|_{\xi=0} = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

где

$$\xi = t + x + y + z, \quad F^* = \frac{M}{1 - \frac{\xi + 9T + 3H}{\rho}}.$$

Решение задачи (4.5), очевидно, мажорирует нуль, а при надлежащем выборе констант M, ρ будет мажорировать решение задачи (1.6)–(1.8).

Этим завершается доказательство теоремы 1.

5. Анализ коэффициентов рядов (2.4)

Из (4.3) следует, что у рассматриваемой задачи в случае, когда

$$[\varphi'_x(0, 0, 0)]^2 + [\psi'_y(0, 0, 0)]^2 + [\chi'_z(0, 0, 0)]^2 \neq 0,$$

заведомо имеет место градиентная катастрофа. Для того чтобы определить моменты наступления этой катастрофы, необходимо найти наименьшее отрицательное η_1 и наибольшее положительное η_2 из значений $\varphi_x(0, 0, 0)$, $\psi_y(0, 0, 0)$, $\chi_z(0, 0, 0)$. Тогда, очевидно, все функции $u_{1,0,0}(t)$, $v_{0,1,0}(t)$, $w_{0,0,1}(t)$ будут аналитическими в интервале $(1/\eta_1; 1/\eta_2)$, а при $t = 1/\eta_1$ и $t = 1/\eta_2$ будет происходить градиентная катастрофа. Поскольку уравнения (4.4) являются линейными, других особенностей у коэффициентов рядов (4.1) не возникнет. Если все значения $\varphi_x(0, 0, 0)$, $\psi_y(0, 0, 0)$, $\chi_z(0, 0, 0)$ будут неположительны, то коэффициенты рядов (4.1) будут аналитическими функциями при всех $t > 0$, если неотрицательны — при $t < 0$.

6. Построение непрерывного кусочно-аналитического решения и пример

Используя теорему 1, можно на характеристиках $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ через слабые разрывы непрерывным образом состыковать различные аналитические решения системы (1.6), т. е. построить составное решение

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ u_+(t, x, y, z), & \text{если } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \end{cases} \\ v(t, x, y, z) &= \begin{cases} 0, & \text{если } y \leq 0, \\ v_+(t, x, y, z), & \text{если } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \end{cases} \\ w(t, x, y, z) &= \begin{cases} 0, & \text{если } z \leq 0, \\ w_+(t, x, y, z), & \text{если } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $u_+(t, x, y, z)$, $v_+(t, x, y, z)$, $w_+(t, x, y, z)$ — решение задачи (1.6)–(1.8) с некоторыми аналитическими функциями $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, $\chi(x, y, z)$.

В разных октантах формулы (6.1), вообще говоря, задают различные решения, которые “сшиты” на координатных плоскостях, являющихся в данном случае, как уже отмечалось, характеристическими поверхностями. При этом конфликта решений на характеристиках не возникает (это непосредственно следует из теоремы 1).

Для задачи (1.9), (1.10) данное непрерывное кусочно-аналитическое решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \begin{cases} c_1, & \text{если } x \leq c_1 t, \\ u_+(t, x, y, z), & \text{если } x \geq c_1 t, y \geq c_2 t, z \geq c_3 t; \end{cases} \\ v(t, x, y, z) &= \begin{cases} c_2, & \text{если } y \leq c_2 t, \\ v_+(t, x, y, z), & \text{если } x \geq c_1 t, y \geq c_2 t, z \geq c_3 t; \end{cases} \\ w(t, x, y, z) &= \begin{cases} c_3, & \text{если } z \leq c_3 t, \\ w_+(t, x, y, z), & \text{если } x \geq c_1 t, y \geq c_2 t, z \geq c_3 t. \end{cases} \end{aligned}$$

Система (1.6) интересна тем, в частности, что моделирует уравнения газовой динамики. Поэтому конструктивное доказательство теоремы 1, приведенное выше, совместно с формулами (6.1) можно интерпретировать как построение течения газа со слабыми разрывами на трех характеристических поверхностях, пересекающихся в одной точке. Иные подобные результаты автору неизвестны. Разумеется, для того чтобы построенное решение стало более

содержательными с точки зрения приложений, необходимо, во-первых, распространить теорему 1 на систему уравнений газовой динамики, а во-вторых, решить вопрос о “сшивке” рядов в области возмущенного течения. В общем случае данная проблема пока не исследована, однако нижеследующий пример показывает, какой может быть в данном случае конфигурация течения.

Пример 2. Рассмотрим двумерное линейное уравнение переноса

$$u_t + u_x + u_y = 0, \quad (6.2)$$

для которого поставлена следующая смешанная задача:

$$u|_{t=0} = 1, \quad x > 0, y > 0, \quad u|_{x=0} = f(t, y), \quad u|_{y=0} = g(t, x). \quad (6.3)$$

Предполагается, что выполнены условия согласования

$$f(0, y) = g(0, x) = 1, \quad f(t, 0) = g(t, 0). \quad (6.4)$$

Известно, что для уравнения (6.2) $x - t = C_1$, $y - t = C_2$ являются характеристиками. Будем строить решение задачи (6.2)–(6.4) в виде двойного характеристического ряда

$$u(t, x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{k, l}(t)(x - t)^k (y - t)^l. \quad (6.5)$$

Легко убедиться, что в (6.5) $a'_{k, l} = 0$, т. е. значения $a_{k, l}$ от t не зависят, $a_{k, l} = \text{const}$. Значения констант определяются из начальных и краевых условий (6.3), (6.4).

Точнее. Пусть в секторах Ω_1 , границами которого являются плоскость Oxt и характеристика $x - t = 0$, $x > 0$, и Ω_2 с границами Oyt и $y - t = 0$, $y > 0$ решения имеют вид

$$u_{\Omega_1}(t, x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{k, l}(x - t)^k (y - t)^l, \quad u_{\Omega_2}(t, x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} b_{k, l}(x - t)^k (y - t)^l. \quad (6.6)$$

Предполагается, что решения в Ω_1 и Ω_2 непрерывно состыкованы при $y = x$ (это также характеристика для уравнения (6.2)), а также, что функции $f(t, x)$, $g(t, y)$ являются аналитическими

$$f(t, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y)t^k, \quad g(t, x) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(x)t^l, \quad (6.7)$$

где $f_k(y)$ и $g_l(x)$ — также аналитические функции. Из (6.6), (6.7), в частности, следует, что

$$u(t, 0, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{k, l}(-t)^k (y - t)^l = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y)t^k, \quad u(t, x, 0) = \sum_{k, l=0}^{\infty} b_{k, l}(x - t)^k (-t)^l = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)t^k. \quad (6.8)$$

Из начальных данных (6.3) имеем, что $f_0(y) \equiv 1$, $g_0(x) \equiv 1$, из условий согласования (6.4) следует равенство $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(0)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(0)t^k$, а значит,

$$f_k(0) = g_k(0), \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.9)$$

Получение коэффициентов рядов (6.6) производится индукцией по первому индексу k для $a_{k, l}$ и по второму индексу l для $b_{k, l}$. Положив в граничных условиях (6.8) $t = 0$, получим, что

$$u(0, 0, y) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{0, l}y^l = f_0(y) \equiv 1, \quad u(0, x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k, 0}x^k = g_0(x) \equiv 1,$$

отсюда $a_{0,l}$, $b_{k,0}$ однозначно определяются: $a_{0,0} = b_{0,0} = 1$; $a_{0,k} = b_{k,0} = 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Далее. Продифференцируем граничные условия (6.8) по t и положим $t = 0$. После группировки слагаемых получим

$$u_t(0, 0, y) = - \sum_{l=0}^{\infty} [a_{1,l} + (l+1)a_{0,l+1}]y^l = f_1(y), \quad u_t(0, x, 0) = - \sum_{k=0}^{\infty} [b_{k,1} + (k+1)b_{k+1,0}]x^k = g_1(x),$$

отсюда следует, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{1,l}y^l = -f_1(y), \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_{k,1}x^k = -g_1(x)$$

и, значит, $a_{1,l}$, $b_{k,1}$ также однозначно определяются:

$$a_{1,l} = -\frac{1}{l!} \left. \frac{\partial^l f_1(y)}{\partial y^l} \right|_{y=0}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad b_{k,1} = -\frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k g_1(x)}{\partial x^k} \right|_{x=0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее последовательно определяются $a_{2,l}$, $b_{k,2}, \dots$. Итак, коэффициенты рядов (6.6) найдены.

Проверим теперь выполнение условия непрерывного примыкания при $x = y$. В данном случае оно имеет вид

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l}(x-t)^{k+l} = \sum_{k,l=0}^{\infty} b_{k,l}(x-t)^{k+l},$$

т. е. условие непрерывного примыкания решений в Ω_1 и Ω_2 может быть записано как

$$\sum_{k=0}^n a_{k,n-k} = \sum_{k=0}^n b_{k,n-k}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.10)$$

Индукцией по n легко устанавливается, что

$$\sum_{k=0}^n a_{k,n-k} = (-1)^n f_n^{(n)}(0), \quad \sum_{k=0}^n b_{k,n-k} = (-1)^n g_n^{(n)}(0).$$

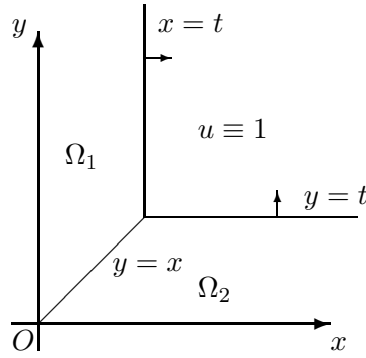
Отсюда с учетом (6.9) следует справедливость (6.10). Таким образом, установлено, что условие непрерывного примыкания при $y = x$ выполняется.

Сходимость построенных рядов прямо следует из аналитичности функций $f(t, x)$ и $g(t, x)$.

Проведенные рассуждения позволяют построить непрерывное, кусочно-аналитическое решение уравнения (6.2) следующего вида ($a_{k,l}$, $b_{k,l}$ строятся по изложенной выше процедуре):

$$u(t, x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq t, \quad y \geq t, \quad t \geq 0; \\ \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l}(x-t)^k(y-t)^l, & \text{если } y \leq x, \quad y \leq t, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ \sum_{k,l=0}^{\infty} b_{k,l}(x-t)^k(y-t)^l, & \text{если } x \leq y, \quad x \leq t, \quad t > 0, \quad y > 0. \end{cases}$$

Конфигурация решения приведена на рисунке (стрелками показаны направления движения характеристик).



Конфигурация решения в примере 2.

В каждый момент времени t в полосе Ω_1 и в полосе Ω_2 задача (6.2)–(6.4) имеет аналитические решения u_{Ω_1} и u_{Ω_2} (вообще говоря, различные). Эти решения непрерывно состыкованы между собой на прямой $x = y$ и, в свою очередь, каждое из них состыковано с постоянным решением $u \equiv 1$ на прямых $y = t$ и $x = t$ соответственно.

7. Формулировка теоремы для квазилинейной системы общего вида

Перейдем теперь от исследования конкретных задач к формулировке и последующему доказательству центральной теоремы данного исследования.

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений с частными производными, записанную в нормальном виде

$$\mathbf{U}_t + \sum_{k=1}^n A_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{U}) \mathbf{U}_{x_k} = \mathbf{b}(t, \mathbf{x}, \mathbf{U}). \quad (7.1)$$

Здесь $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_n)$ — вектор искомых функций; $t, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — независимые переменные; $A_k = (a_{k,ij})$, $k = 1, \dots, n$, $i, j = 1, \dots, n$ — матрицы, имеющие размер $n \times n$, компоненты которых зависят от искомых функций и независимых переменных; $\mathbf{b} = (b_i)$, $i = 1, \dots, n$ — вектор, компоненты которого также зависят от искомых функций и независимых переменных.

Система (7.1) содержит n уравнений, которые связывают n искомых функций и $n + 1$ независимую переменную, т. е. число уравнений совпадает с числом искомых функций, число независимых переменных на единицу больше числа искомых функций.

Для системы (7.1) рассмотрим смешанную задачу следующего вида:

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \quad (7.2)$$

где $\mathbf{U}_0 = (u_{01}(\mathbf{x}), \dots, u_{0n}(\mathbf{x}))$ — заданный вектор начальных данных.

Граничные условия имеют вид

$$u_k|_{x_k=0} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (7.3)$$

условия согласования начальных и граничных данных —

$$u_{0k}|_{x_k=0} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7.4)$$

Граничные условия (7.3) взяты в однородном виде для удобства дальнейших рассуждений, поскольку неоднородные условия (при выполнении простых и легко проверяемых условий) с помощью стандартной замены переменных могут быть сведены к однородным.

Теорема 2. Пусть функции $a_{k,ij}, b_i$, $k = 1, \dots, n$; $i, j = 1, \dots, n$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки $(t = 0, \mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{U} = \mathbf{0})$; функции $u_1(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x})$ являются

аналитическими в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x} = \mathbf{0})$. Пусть также справедливы равенства

$$A_k|_{x_k=0, u_k=0} = \mathcal{O}, \quad a_{k,ik}|_{x_i=0, u_i=0} = 0, \quad b_i|_{x_i=0, u_i=0} = 0, \quad k, i = 1, \dots, n, \quad i \neq k, \quad (7.5)$$

где \mathcal{O} — нулевая матрица. Тогда задача (7.1)–(7.3) при выполнении условий (7.4) имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $(t = 0, \mathbf{x} = \mathbf{0})$.

З а м е ч а н и е 5. По теореме Коши — Ковалевской (см., например, [1]) задача (7.1), (7.2) имеет единственное локально-аналитическое решение при условии аналитичности всех входных данных. Таким образом, задача (7.1)–(7.3), вообще говоря, является переопределенной и в общем случае не имеет решения даже в классе непрерывных функций. Однако теорема 2 показывает, что при выполнении определенных дополнительных условий существует единственное локально-аналитическое решение рассматриваемой смешанной задачи.

З а м е ч а н и е 6. Задача (7.1)–(7.3), насколько известно автору статьи, ранее в литературе не рассматривалась. Во всяком случае, теорем существования и единственности решения данной задачи в опубликованных работах автору статьи обнаружить не удалось. Ближе всего из известных задач она к характеристической задаче Коши (хзК). В частности, если $n = 1$, т. е. в случае одной пространственной переменной, задача (7.1)–(7.3) при выполнении условий (7.4), (7.5) является простейшей хзК стандартного вида [7] и попадает под действие соответствующей теоремы. Однако при $n \geq 2$ характеристические данные “разнесены” с одной характеристики на n характеристик. Указанное обстоятельство принципиально отличает теорему 2 от теоремы существования и единственности решения хзК стандартного вида [7].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательству теоремы 2 будут посвящены разд. 8–10.

8. Построение формального решения

Система в задаче (7.1)–(7.3), очевидно, является гиперболической, причем характеристики — координатные гиперплоскости $x_k = 0$, $k = 1, \dots, n$. Решение задачи (7.1)–(7.3) будет строиться как кратные характеристические ряды, которые в данном случае имеют вид кратных рядов по степеням пространственных переменных x_1, \dots, x_n с коэффициентами, зависящими от t . Для того чтобы не приводить чрезвычайно громоздкие выкладки, как и при доказательстве теоремы 1, проведем подробные рассуждения, которые доказывают теорему 2 в случае $n = 2$, т. е. для двух искомых функций и двух пространственных переменных. В общем случае теорема доказывается аналогично, поэтому мы ограничимся краткими пояснениями к доказательству (см. разд. 10). Итак, будем рассматривать задачу

$$\begin{cases} u_t + a_{11}u_x + a_{12}v_x + b_{11}u_y + b_{12}v_y + f = 0, \\ v_t + a_{21}u_x + a_{22}v_x + b_{21}u_y + b_{22}v_y + g = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Здесь $a_{ij} = a_{ij}(t, x, y, u, v)$, $b_{ij} = b_{ij}(t, x, y, u, v)$, $i, j = 1, 2$; $f = f(t, x, y, u, v)$, $g = g(t, x, y, u, v)$. Начальные условия (7.2) имеют вид

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad v|_{t=0} = \psi(x, y), \quad (8.2)$$

граничные условия (7.3) —

$$u|_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad (8.3)$$

условия согласования (7.4) —

$$\varphi|_{x=0} = 0, \quad \psi|_{y=0} = 0. \quad (8.4)$$

Решение задачи (8.1)–(8.4) будет строиться в виде рядов

$$u = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{kl}(t) \frac{x^k y^l}{k!l!}, \quad u_{k,l}(t) = \left. \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l} \right|_{x=y=0}; \quad v = \sum_{k,l=0}^{\infty} v_{kl}(t) \frac{x^k y^l}{k!l!}, \quad v_{k,l}(t) = \left. \frac{\partial^{k+l} v}{\partial x^k \partial y^l} \right|_{x=y=0}. \quad (8.5)$$

Так как координатные плоскости в данном случае суть характеристики, ряды (8.5) являются кратными характеристическими рядами. Их коэффициенты определяются индукцией по $n = k + l$. При $n = 0, 1, 2, \dots$ находим $u_{k,l}, v_{k,l}$ $k + l = n$ при решении ЗК для СОДУ.

Из граничных условий (8.3) следует, что

$$u_{0,l} = v_{k,0} = 0, \quad (8.6)$$

в частности, при $n = 0$ $u_{0,0} = v_{0,0} = 0$. Для построения последующих коэффициентов рядов (8.3) уравнения (8.1) необходимо дифференцировать по независимым переменным x, y . Но прежде введем следующие обозначения (здесь и далее верхний индекс обозначает не возведение в степень, а номер коэффициента; величины, которые возводятся в степень, будут заключаться в круглые скобки):

$$a_{ij}^1(t) = \left. \frac{\partial a_{ij}}{\partial u} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad a_{ij}^2(t) = \left. \frac{\partial a_{ij}}{\partial v} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad a_{ij}^3(t) = \left. \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad a_{ij}^4(t) = \left. \frac{\partial a_{ij}}{\partial y} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}; \quad (8.7)$$

$$b_{ij}^1(t) = \left. \frac{\partial b_{ij}}{\partial u} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad b_{ij}^2(t) = \left. \frac{\partial b_{ij}}{\partial v} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad b_{ij}^3(t) = \left. \frac{\partial b_{ij}}{\partial x} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad b_{ij}^4(t) = \left. \frac{\partial b_{ij}}{\partial y} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}; \quad (8.8)$$

$$a_{ij}^* = a_{ij} - a_{ij}^1 u - a_{ij}^2 v - a_{ij}^3 x - a_{ij}^4 y, \quad b_{ij}^* = b_{ij} - b_{ij}^1 u - b_{ij}^2 v - b_{ij}^3 x - b_{ij}^4 y, \quad i, j = 1, 2;$$

$$f^1(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad f^2(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad f^3(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad f^4(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}; \quad (8.9)$$

$$g^1(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad g^2(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad g^3(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}, \quad g^4(t) = \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\substack{x=y=0 \\ u=v=0}}. \quad (8.10)$$

$$f^* = f - f^1 u - f^2 v - f^3 x - f^4 y, \quad g^* = g - g^1 u - g^2 v - g^3 x - g^4 y.$$

При $n = 1$ из (8.6) имеем, что $u_{0,1} = v_{1,0} = 0$. Для нахождения $u_{1,0}, v_{0,1}$ первое уравнение (8.1) продифференцируем по x , второе — по y и положим $x = y = 0, u = v = 0$. Учитывая обозначения (8.7)–(8.10) и начальные условия (8.2), получаем ЗК для СОДУ

$$\begin{cases} u'_{1,0} + a_{11}^1(t)(u_{1,0})^2 + b_{12}^1(t)u_{1,0}v_{0,1} + [f^1(t) + a_{11}^3(t)]u_{1,0} = f_{1,0}, & u_{1,0}(0) = \varphi'_x(0,0), \\ v'_{0,1} + b_{22}^2(t)(v_{0,1})^2 + a_{21}^2(t)u_{1,0}v_{0,1} + [g^2(t) + b_{22}^4(t)]v_{0,1} = g_{0,1}, & v_{0,1}(0) = \psi'_y(0,0). \end{cases} \quad (8.11)$$

Здесь $f_{1,0}(t) = -[(a_{11}^*)'_x + (b_{12}^*)'_x + (f^*)'_x]|_{x=y=u=v=0}$, $g_{0,1}(t) = -[(a_{21}^*)'_y + (b_{22}^*)'_y + (g^*)'_y]|_{x=y=u=v=0}$.

Задача (8.11) при выполнении условий теоремы 2 имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $t = 0$. Однако, поскольку система (8.11) является нелинейной, в решении возможно появление особенности типа градиентной катастрофы.

Дальнейшее построение коэффициентов рядов (8.5) последовательным дифференцированием уравнений системы (8.1) с учетом начальных и граничных условий (8.2), (8.6) сводится к решению ЗК для систем ЛОДУ.

Пусть известны $u_{k,l}, v_{k,l}$ при $k + l = 1, \dots, n - 1$. Тогда $u_{k,n-k}, v_{k,n-k}$ определяются так: из начальных условий (8.6) $u_{0,n} = 0, v_{n,0} = 0$. Остальные коэффициенты находим при решении

следующих ЗК для систем ЛОДУ:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u'_{n,0} + [(n+1)a_{11}^1 u_{1,0} + b_{12}^1 v_{0,1} + na_{11}^3 + f_1] u_{n,0} \\
 + n(b_{11}^1 u_{1,0} + b_{11}^3) u_{n-1,1} + n(b_{12}^1 u_{1,0} + b_{12}^3) v_{n-1,1} = f_{n,0}, \\
 \dots \\
 u'_{k,n-k} + [(k+1)a_{11}^1 u_{1,0} + (b_{12}^1 + (n-k)b_{11}^2) v_{0,1} + ka_{11}^3 + (n-k)b_{11}^4 + f_1] u_{k,n-k} \\
 + [(ka_{12}^1 + a_{11}^2) u_{1,0} + (n-k+1)b_{12}^2 v_{0,1} + ka_{12}^3 + (n-k)b_{12}^4 + f_2] v_{k,n-k} \\
 + (n-k)(a_{11}^2 v_{0,1} + a_{11}^4) u_{k+1,n-k-1} + (n-k)(a_{12}^2 v_{0,1} + a_{12}^4) v_{k+1,n-k-1} \\
 + k(b_{11}^1 u_{1,0} + b_{11}^3) u_{k-1,n-k+1} + k(b_{12}^1 u_{1,0} + b_{12}^3) v_{k-1,n-k+1} = f_{k,n-k}, \\
 \dots \\
 v'_{k,n-k} + [(n-k+1)b_{22}^2 v_{1,0} + (a_{21}^2 + ka_{22}^1) u_{1,0} + ka_{22}^3 + (n-k)b_{22}^4 + g_2] v_{k,n-k} \\
 + [((n-k)b_{21}^2 + b_{22}^1) v_{0,1} + (k+1)a_{21}^1 u_{1,0} + ka_{21}^3 + (n-k)b_{21}^4 + g_1] u_{k,n-k} \\
 + (n-k)(a_{21}^2 v_{0,1} + a_{21}^4) u_{k+1,n-k-1} + (n-k)(a_{22}^2 v_{0,1} + a_{22}^4) v_{k+1,n-k-1} \\
 + k(b_{21}^1 u_{1,0} + b_{21}^3) u_{k-1,n-k+1} + k(b_{22}^1 u_{1,0} + b_{22}^3) v_{k-1,n-k+1} = g_{k,n-k}, \quad k = 1, \dots, n-1, \\
 \dots \\
 v'_{0,n} + [(n+1)b_{22}^2 v_{1,0} + a_{21}^2 u_{1,0} + nb_{22}^4 + g_2] v_{0,n} \\
 + n(a_{21}^2 v_{0,1} + a_{21}^4) u_{1,n-1} + n(a_{22}^2 v_{0,1} + a_{22}^4) v_{1,n-1} = g_{0,n}.
 \end{array} \right. \quad (8.12)$$

$$u_{k,n-k}(0) = \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(0, 0); \quad v_{n-k,k}(0) = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(0, 0), \quad k = 0, \dots, n. \quad (8.13)$$

Выражения для функций $f_{k,n-k}$, $g_{k,n-k}$ не приводятся из-за громоздкости. Впрочем, здесь существенно только то, что при выполнении условий теоремы 2 в силу предположения индукции это известные аналитические функции одной переменной t . Следовательно, теорема Коши обеспечивает существование и единственность аналитического решения задачи (8.12), (8.13) в некоторой окрестности точки $t = 0$. Поскольку система (8.12) является линейной, а значит, новых особенностей в решении, кроме тех, которые появляются на первом шаге, не возникнет.

Таким образом, формальное решение задачи (8.1)–(8.4) построено, причем оно определяется единственным образом.

9. Доказательство сходимости рядов

Сходимость рядов (8.5) доказывается методом мажорант. Поскольку решение ищется в классе аналитических функций, можно от обеих частей первого уравнения системы (8.1) взять производные по x , а от обеих частей второго — по y . Получим систему

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u_{tx} + (a_{11})_x u_x + a_{11} u_{xx} + (a_{12})_x v_x + a_{12} v_{xx} + b_{11} u_{yx} + (b_{11})_x u_y + b_{12} v_{yx} + (b_{12})_x v_y + (f)_x = 0, \\
 v_{ty} + (a_{21})_y u_x + a_{21} u_{xy} + (a_{22})_y v_x + a_{22} v_{xy} + b_{11} u_{yy} + (b_{21})_y u_y + b_{22} v_{yy} + (b_{12})_y v_y + (g)_y = 0,
 \end{array} \right. \quad (9.1)$$

где через $(\dots)_x$, $(\dots)_y$ обозначены полные производные.

Введем новые искомые функции W_1 , W_2 , Z_1 , Z_2 по формулам

$$W_1 = u_x, \quad W_2 = u_y, \quad Z_1 = v_x, \quad Z_2 = v_y. \quad (9.2)$$

Отсюда, в частности, следует, что $W_{2x} = W_{1y}$, $Z_{1y} = Z_{2x}$.

С учетом введенных обозначений система (9.1) примет вид

$$\begin{cases} W_{1t} = -a_{11}W_{1x} - a_{12}Z_{1x} - b_{11}W_{1y} - b_{12}Z_{1y} - F_1, \\ Z_{2t} = -a_{21}W_{2x} - a_{22}Z_{2x} - b_{21}W_{2y} - b_{22}Z_{2y} - F_2, \\ u_x = W_1, \quad W_{2x} = W_{1y}, \quad v_y = Z_2, \quad Z_{1y} = Z_{2x}. \end{cases} \quad (9.3)$$

Здесь

$$F_1 = -a_{11}^x W_1 - a_{12}^x Z_1 - b_{11}^x W_2 - b_{12}^x Z_2 - f^x, \quad F_2 = -a_{21}^y W_1 - a_{22}^y Z_1 - b_{21}^y W_2 - b_{22}^y Z_2 - g^y,$$

функции $a_{ij}^x, b_{ij}^x, a_{ij}^y, b_{ij}^y, f^x, g^y$ получаются соответственно из функций $(a_{ij})_x, (b_{ij})_x, (a_{ij})_y, (b_{ij})_y, (f)_x, (g)_y$ в результате замены (9.2) и зависят от искомым функций и независимых переменных.

Граничные условия для системы (9.3) следующие:

$$W_1|_{t=0} = \varphi'_x(x, y), \quad Z_2|_{t=0} = \psi'_y(x, y), \quad u|_{x=0} = 0, \quad W_2|_{x=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad Z_1|_{y=0} = 0. \quad (9.4)$$

Задача (9.3), (9.4) эквивалентна задаче (8.1)–(8.4) в классе аналитических функций. Для этой задачи далее строится мажорантная задача.

Предположим, что T_1 мажорирует u, W_2 ; $T_2 \gg v, Z_1$; $H \gg W_1 - \varphi'_x(x, y), Z_2 - \psi'_y(x, y)$. Тогда при соответствующем выборе констант M, ρ мажорантная для (9.3), (9.4) задача может быть взята в виде

$$\begin{cases} H_t = F(T_{1x} + T_{1y} + T_{2x} + T_{2y} + H_x + H_y + 1), \quad H|_{t=0} = 0, \\ T_{1x} = H_y + F, \quad T_1|_{x=0} = 0, \\ T_{2y} = H_x + F, \quad T_2|_{y=0} = 0, \end{cases} \quad (9.5)$$

где

$$F = \frac{M}{1 - \frac{t+x+y+2T_1+2H+2T_2}{\rho}}.$$

Введем теперь новую независимую переменную ξ и определим функцию F^*

$$\xi = t + \eta(x + y), \quad \eta > 0, \quad F^* = \frac{M_1}{1 - \frac{\xi + 2T_1 + 2H + 2T_2}{\rho_1}}.$$

Пусть константы M_1, ρ_1 таковы, что $F^*|_{\xi=t+\eta(x+y)} \gg F$. Будем искать решение (9.5) в виде $H = H(\xi), T_1 = T_1(\xi), T_2 = T_2(\xi)$, т. е. решать следующую мажорантную задачу:

$$\begin{cases} H_\xi = F^*(2\eta T_{1\xi} + 2\eta T_{2\xi} + 2\eta H_\xi + 1), \quad H|_{\xi=0} = 0, \\ T_{1\xi} = \eta H_\xi + F^*, \quad T_1|_{\xi=0} = 0, \\ T_{2\xi} = \eta H_\xi + F^*, \quad T_2|_{\xi=0} = 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

Очевидно, что $T_1(\xi) = T_2(\xi)$. Если записать (9.6) в нормальном виде

$$\begin{cases} H_\xi = \frac{F^*(1 + 4\eta F^*)}{1 - (4\eta^2 + 2\eta)F^*}, \quad H|_{\xi=0} = 0, \\ T_\xi = \frac{F^*\eta(1 + 4\eta F^*)}{1 - (4\eta^2 + 2\eta)F^*} + F^*, \quad T|_{\xi=0} = 0, \end{cases} \quad (9.7)$$

где $T(\xi) = T_1(\xi) = T_2(\xi)$, то легко видеть, что полученная задача (9.7) при надлежащем выборе η по теореме Коши имеет единственное мажорирующее нуль решение. С другой стороны, по построению задачи (9.7), ее решение мажорирует решение задачи (8.1)–(8.4)

$$T(t + x + y) \gg v, Z_1, u, W_2; \quad H(t + x + y) \gg W_1 - \varphi'_x(x, y), Z_2 - \psi'_y(x, y).$$

Таким образом, сходимость рядов (8.5) установлена, теорема 2 для случая двух независимых переменных и двух искомым функций доказана.

10. Доказательство теоремы 2 в общем случае

Как уже отмечалось, доказательство теоремы 1 в общем случае проводится по вышеизложенной схеме, поэтому будем кратки в рассуждениях. Решение строится в виде кратных рядов по степеням пространственных переменных

$$u_m = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} u_{m, k_1, \dots, k_n}(t) \frac{x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!}, \quad u_{m, k_1, \dots, k_n}(t) = \left. \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u_m}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right|_{x_1 = \dots = x_n = 0}. \quad (10.1)$$

Ряды (10.1) являются в данном случае кратными характеристическими рядами.

Построение коэффициентов рядов (10.1) проводится индукцией по $m = k_1 + \dots + k_n$.

При $m = 0$ из граничных условий следует, что

$$u_{k, 0, \dots, 0} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

При $m = 1$ большая часть коэффициентов определяется из граничных условий, для определения оставшихся имеем ЗК для нелинейной СОДУ.

Остальные коэффициенты рядов (10.1) (при $m \geq 2$) последовательно определяются при решении ЗК для систем ЛОДУ. Сходимость рядов доказывается методом мажорант, мажорантная задача может быть взята в виде

$$\begin{cases} H_{\xi} = \frac{F^*(1 + n^2 \eta F^*)}{1 - n(n+1)\eta F^*}, & H|_{\xi=0} = 0, \\ T_{\xi} = \frac{F^*(2 - n\eta F^*)}{1 - n(n+1)\eta F^*}, & T|_{\xi=0} = 0, \end{cases} \quad (10.2)$$

где

$$\xi = t + \eta(x_1 + \dots + x_n), \quad F^* = \frac{M_2}{1 - \frac{\xi + n^2 T + nH}{\rho_2}}.$$

Решение задачи (10.2) при надлежащем выборе η мажорирует нуль, а при надлежащем выборе констант M_2, ρ_2 будет мажорировать решение задачи (7.1)–(7.3).

Этим завершается доказательство теоремы 2.

З а м е ч а н и е 7. Используя теорему 2, можно на характеристиках x_k , $k = 0, \dots, n$ через слабые разрывы непрерывным образом состыковать различные аналитические решения системы (7.1) также, как это было сделано в разд. 8 для более простой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
2. **Сидоров А.Ф.** Метод решения некоторых краевых задач для нелинейных уравнений гиперболического типа и распространение слабых ударных волн // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 3. С. 426–434.
3. **Sidorov A.F.** Application of characteristic series to the solution of three-dimensional problems in gas dynamics // Numerical methods in fluid dynamics. М.: Mir, 1984. P. 184–206.
4. **Титов С.С.** Разложение решений нелинейных уравнений в двойные ряды // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 10. С. 1844–1850.
5. **Титов С.С.** Об аналитичности решений уравнения Кортевега–де Фриза, представленных рядами экспонент // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 2. С. 343–350.
6. **Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F.** Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special constructions of series // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. Vol. 8, № 2. P. 101–125.

7. **Баутин С.П.** Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.
8. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
9. **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

Казаков Александр Леонидович

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН

e-mail: kazakov@icc.ru

Поступила 26.10.2009

УДК 534.23

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ**Б. А. Касаткин, Н. В. Злобина**

На примере волновода Пекериса показана некорректность граничных задач для слоистого полупространства в классической постановке. Предложено одно из решений редуцированной граничной задачи Пекериса, удовлетворяющее обобщенному условию излучения на импедансной границе раздела, модовая часть которого представлена разложением по полной системе нормальных волн, регулярных, обобщенных и вытекающих. Построено расширение решения на полупространство в классе обобщенных функций, удовлетворяющее условию погашаемости на бесконечности. Сформулированы основы обобщенной теории. Анализируются особенности обобщенной теории в сравнении с классической.

Ключевые слова: граничная задача Пекериса, несамосопряженный оператор, обобщенные функции, модельное решение.

B. A. Kasatkin, N. V. Zlobina. Generalized theory of normal waves in layered media.

Using the example of the Pekeris waveguide, we show that boundary value problems for a layered half-space in the classical setting are ill-posed. One of the solutions of the reduced Pekeris boundary value problem is suggested, which satisfies the generalized radiation condition on the impedance interface. The mode part of this solution is represented by the expansion in the complete system of normal waves, including regular, generalized, and leaky waves. We construct an extension of the solution to the half-space in the class of generalized functions satisfying the quenching condition at infinity. Foundations of the generalized theory are formulated. Peculiarities of the generalized theory as compared to the classical theory are analyzed.

Keywords: Pekeris boundary value problem, non-self-adjoint operator, generalized functions, model solution.

Теория волновых процессов в слоистых средах, разработанная в классических работах [1–3], базируется на решении ключевой для гидроакустики граничной задачи, сформулированной и решенной Пекерисом в работе [1] для системы “жидкий однородный слой — жидкое однородное полупространство”. Предложенные Пекерисом модельная постановка и схема решения основаны на использовании интегрального преобразования Фурье — Бесселя с последующим выбором однозначной ветви радикала на плоскости комплексного спектрального параметра, которым определяется вертикальное волновое число в полупространстве. Сейчас можно лишь предполагать, что на выбор разреза на плоскости комплексного спектрального параметра, который в последующих работах получил название разреза Пекериса, оказала влияние более ранняя работа Лэмба [4], в которой аналогичный разрез был использован при решении граничной задачи для твердого однородного полупространства с источником на поверхности. Однако геометрическая аналогия в модельной постановке этих двух задач явилась слишком формальной, а физические различия, связанные именно со слоистостью жидкого полупространства, оказались столь велики, что потребовали отдельного рассмотрения.

Дело заключается в том, что именно в слоистом полупространстве, в котором слоистая система любой степени сложности нагружается на однородное полупространство, жидкое или твердое, появляются комплексный спектр собственных значений и вытекающие нормальные волны комплексного спектра, которые описывают утечку энергии из слоистого волновода в однородное полупространство. При этом сам оператор, описывающий граничную задачу, оказывается несамосопряженным, что подразумевает существование сопряженного оператора со своим спектром собственных значений, в равной степени относящегося к рассматриваемой граничной задаче. Иначе говоря, несамосопряженность оператора в конкретном случае задачи Пекериса связана именно с открытостью волновода в области докритических углов падения, что и является его характерной физической особенностью.

Однако собственные функции комплексного спектра не удовлетворяют условию погашаемости на бесконечности, так как их амплитуда экспоненциально растет по вертикальной координате в полупространстве. Отсюда следует, что в полном соответствии с теоремой существования и единственности Г.Д. Малюжинца [5] предложенное Пекерисом решение является некорректным в заявленной области определения. Вместе с тем и в соответствии с той же теоремой это решение может рассматриваться как вполне корректное решение редуцированной граничной задачи для собственно волновода с граничным условием импедансного типа, что и было отмечено в работе [6].

В последующих работах [2,3] была предпринята попытка избавиться от комплексного спектра иным выбором разреза, который получил название разреза ЕР (Ивинга — Джардетски — Пресс), что означало переход к самосопряженной модельной постановке, принципиально меняющей физическую модель слоистого полупространства и самого волновода Пекериса. В самосопряженной модельной постановке собственные функции дискретного спектра удовлетворяют условию погашаемости на бесконечности, но собственные функции сплошного спектра, входящие в виде интегральной суммы в боковую волну, всего лишь ограничены в области определения. Вместе с тем асимптотическая оценка боковой волны в полупространстве, выполненная в работе [7], показывает, что при достаточном удалении от источника она вырождается в сферическую волну, угловая зависимость которой вполне соответствует комплексному спектру вытекающих нормальных волн. Казалось бы это решение удовлетворяет основным требованиям, предъявляемым к корректным решениям, но ситуация оказалось существенно более сложной.

Дело в том, что самосопряженный оператор описывает волновод как консервативную систему без потерь, для которой поток мощности через импедансную границу раздела равен нулю при всех углах падения, включая и докритические. Однако это положение противоречит физически очевидному представлению о том, что волновод является открытой системой с неизбежными потерями энергии в области докритических углов падения. Именно об этом свидетельствует и вырождение в полупространстве боковой волны в сферическую, с которой связана отличная от нуля мощность излучения. Кажущееся противоречие объясняется тем, что в самосопряженной модельной постановке неизбежно появление вторичных источников монополярного типа, распределенных на оси симметрии в полупространстве, которых не было в исходной постановке задачи. Именно эти источники являются фактически источником энергии для сферической волны, существование которой в полупространстве подтверждается асимптотической оценкой боковой волны. Эта ситуация подробно проанализирована в работе [8], где показано также появление в решении двух точек ложной фокусировки звука, в которых поле давления имеет особенность типа $O(r^{-1})$, (r — цилиндрический радиус), а поле радиальной компоненты колебательной скорости имеет такую же особенность на всей оси симметрии, что нарушает корректность построенного решения. Иначе говоря, второе из классических решений также не является корректным при описании поля в полупространстве, но является вполне корректным, хотя и не единственным решением редуцированной граничной задачи для волновода с импедансным граничным условием, что и было отмечено в работе [8].

Появление двух модельных решений одной и той же граничной задачи, корректных только при описании звукового поля в волноводе, породило известную дискуссию о соответствии этих решений друг другу и исходной задаче, сформулированной для всего слоистого полупространства. К сожалению, сама дискуссия закончилась ошибочным выводом о тождественности этих принципиально различных модельных решений, сделанным в работе [9]. Понятно, что такой “благополучный” исход дискуссии снимал чрезвычайно болезненный вопрос о корректности задачи Пекериса в исходной постановке и самих классических решений [1–3], а по существу завел в тупик проблему нахождения звуковых полей в слоистых волноводах, нагруженных на полупространство. Наиболее отчетливо это проявляется в существовании целого класса аномальных явлений, которые классическая теория объяснить не может [10].

Цель настоящей работы заключается в построении корректного решения редуцированной

задачи Пекериса, соответствующего обобщенному условию излучения, с последующим его продолжением в полупространство в классе обобщенных функций.

Итак, рассмотрим граничную задачу Пекериса в исходной постановке [1]:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1(r, z) + k_1^2\varphi_1(r, z) &= -\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z - z_0), & r \in (0, \infty), & z \in (0, h) \\ \Delta\varphi_2(r, z) + k_2^2\varphi_2(r, z) &= 0, & r \in (0, \infty), & z \in (h, \infty) \\ z = 0, & \varphi_1(r, z) = 0, \\ z = h, & \rho_1\varphi_1(r, z) = \rho_2\varphi_2(r, z), & \frac{\partial\varphi_1(r, z)}{\partial z} &= \frac{\partial\varphi_2(r, z)}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi_1(r, z)$, $\varphi_2(r, z)$ — потенциал скорости в жидком слое и полупространстве соответственно; ρ_1 , ρ_2 — плотность среды в жидком слое и полупространстве соответственно; $k_{1,2} = \omega/c_{1,2}$, c_1 , c_2 — скорость звука в волноводе и полупространстве соответственно; ω — круговая частота.

Граничная задача (1) содержит бесконечно удаленную точку $r \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \infty$ в области определения решения. Отсюда следует, что при определении единственного решения необходимо использовать в том или ином виде условия на бесконечности (условия излучения, условия предельного поглощения или условия предельной амплитуды). Эти условия являются эквивалентными только для центросимметричного звукового поля, создаваемого точечным источником в однородном пространстве (полупространстве), но имеют свои особенности в случае слоистого полупространства, которое является областью определения решения в задаче Пекериса.

Первая особенность связана с тем, что горизонтальное направление является особым, вдоль которого параметры сопряженных сред не меняются, а звуковое поле в сопряженных средах должно быть осесимметричным, но не центросимметричным, как в случае однородного пространства. С учетом этого само решение задачи (1) можно искать в классе функций, допускающих представление в виде интеграла Фурье — Бесселя (интегрального преобразования Ханкеля):

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, z) &= \int_0^\infty \tilde{\varphi}_1(\xi, z) J_0(\xi r) \xi d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \tilde{\varphi}_1(\xi, z) H_0^{(2)}(\xi r) \xi d\xi, & z \in (0, h), \\ \varphi_2(r, z) &= \int_0^\infty \tilde{\varphi}_2(\xi, z) J_0(\xi r) \xi d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \tilde{\varphi}_2(\xi, z) H_0^{(2)}(\xi r) \xi d\xi, & z \in (h, \infty), \end{aligned} \quad (2)$$

где Фурье-трансформанты $\tilde{\varphi}_1(\xi, z)$, $\tilde{\varphi}_2(\xi, z)$ являются решениями граничной задачи для поперечных операторов M_1 , M_2 :

$$\begin{aligned} M_1\tilde{\varphi}_1(\xi, z) &= \frac{\partial^2\tilde{\varphi}_1(\xi, z)}{\partial z^2} + (k_1^2 - \xi^2)\tilde{\varphi}_1(\xi, z) = -\delta(z - z_0), & z \in (0, h), \\ M_2\tilde{\varphi}_2(\xi, z) &= \frac{\partial^2\tilde{\varphi}_2(\xi, z)}{\partial z^2} + (k_2^2 - \xi^2)\tilde{\varphi}_2(\xi, z) = 0, & z \in (h, \infty), \\ z = 0, & \tilde{\varphi}_1(\xi, z) = 0, \\ z = h, & \rho_1\tilde{\varphi}_1(\xi, z) = \rho_2\tilde{\varphi}_2(\xi, z), & \frac{\partial\tilde{\varphi}_1(\xi, z)}{\partial z} &= \frac{\partial\tilde{\varphi}_2(\xi, z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничная задача (3), оставаясь сингулярной по координате z , обычно решается в два этапа. На первом этапе она сводится к несингулярной краевой задаче для поперечного оператора M_1 с импедансным граничным условием на границе $z = h$:

$$M_1\tilde{\varphi}_1(\xi, z) = \frac{\partial^2\tilde{\varphi}_1(\xi, z)}{\partial z^2} + (k_1^2 - \xi^2)\tilde{\varphi}_1(\xi, z) = -\delta(z - z_0), \quad z \in (0, h), \quad (4)$$

$$z = 0, \quad \tilde{\varphi}_1(\xi, z) = 0,$$

$$z = h, \quad i\omega\rho_1\tilde{\varphi}_1(\xi, z) + Z_{\text{вх},2}\frac{\partial\tilde{\varphi}_1(\xi, z)}{\partial z} = 0, \quad Z_{\text{вх},2} = \frac{\rho_2\omega}{\sqrt{k_2^2 - \xi^2}}.$$

Специфика граничного условия в задаче (4) заключается в том, что импеданс полупространства зависит от угла падения или, что то же самое, от вертикального волнового числа в полупространстве. Однако вертикальное волновое число является двузначной функцией комплексной переменной ξ . Эта зависимость принципиально отличает граничное условие в форме (4) от граничного условия смешанного типа, известного как условие М.Л. Леонтовича. Дело в том, что в граничном условии по М.Л. Леонтовичу входной импеданс не зависит от угла падения и является чисто реактивным, что существенно упрощает граничную задачу, которая оказывается самосопряженной. В рассматриваемом случае двузначность вертикального волнового числа физически соответствует взаимосвязи сходящихся и расходящихся составляющих горизонтального волнового движения через механизм их трансформации при отражении от оси симметрии как от жесткой границы. Эта взаимосвязь проявляется в существовании регулярных и обобщенных составляющих суммарного волнового движения и, как следствие этого, регулярных и обобщенных нормальных волн, захваченных волноводом.

На втором этапе решение задачи (4) продолжается в модельное полупространство интегралом (2) единственным образом:

$$\tilde{\varphi}_2(\xi, z) = \rho_{12}\tilde{\varphi}_1(\xi, h)e^{-ik_{32}(z-h)}, \quad z \geq h, \quad (5)$$

$$\text{где } \rho_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad k_{32} = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}.$$

Понятно, что все формулировки исходной физической задачи в виде граничных задач (1)–(5) являются эквивалентными. Однако последняя ее формулировка позволяет определить вторую особенность задачи (1). Эта особенность заключается в том, что соответствующий ей оператор (4) является несамосопряженным оператором с комплексным дискретно-сплошным спектром, причем именно сплошной спектр “помнит” о том, что исходная задача (1) была сингулярной по вертикальной координате z . Математически несамосопряженность оператора означает чисто формально комплексность спектра собственных чисел. Физически это соответствует открытости волновода как колебательной системы в области докритических углов падения, в пределах которой неизбежна утечка энергии из волновода в полупространство, описываемая вытекающими нормальными волнами комплексного спектра. Сам комплексный спектр собственных чисел является характерным атрибутом слоистого полупространства (в терминологии Пекериса), в котором осесимметричное волновое движение не разделяется на сходящиеся и расходящиеся волны, принципиально связанные механизмом взаимной трансформации при отражении от оси симметрии как от жесткой границы.

С учетом этого условия излучения для операторов (2), (4) можно свести к правилам выбора “правильных” составляющих (собственных функций) дискретного и сплошного спектров. Для составляющих дискретного спектра условия излучения сводятся к выбору тех из них, для которых групповая скорость как скорость переноса энергии является неотрицательной, а скорость переноса энергии в суммарном волновом процессе остается ограниченной:

$$\left(\frac{d\xi_n}{d\omega}\right)^{-1} \geq 0, \quad \left(\frac{d\xi}{d\omega}\right)^{-1}_{\Sigma} \leq c_{\max}, \quad c_{\max} = \{c_1, c_2\}_{\max}, \quad (6)$$

где $c_{g,n} = \left(\frac{d\xi_n}{d\omega}\right)^{-1}$ — групповая скорость нормальной волны; $c_{g,\Sigma} = \left(\frac{d\xi}{d\omega}\right)^{-1}_{\Sigma}$ — групповая скорость в суммарном волновом процессе, которая может быть определена алгоритмом энергетического усреднения

$$\left(\frac{d\xi}{d\omega}\right)_{\Sigma} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{d\xi}{d\omega}\right)_n P_n^2, \quad \sum_{n=1}^N P_n^2 = 1,$$

где P_n — нормированные коэффициенты возбуждения нормальных волн дискретного спектра; N — число одновременно существующих нормальных волн с вещественной постоянной распространения.

Условие излучения для составляющих сплошного спектра оператора (4) следует записать в виде

$$\operatorname{Re}\sqrt{k_2^2 - \xi^2} \geq 0. \quad (7)$$

Иначе говоря, правило выбора разреза и верхнего листа римановой поверхности для радикала k_{32} можно трактовать как обобщенное условие излучения. В соответствии с обобщенным условием излучения “правильными” составляющими суммарного волнового процесса в полупространстве считаются только те, для которых поток мощности направлен из волновода в нижнее полупространство, представленное в задаче (4) входным импедансом $Z_{\text{вх}}$. Условия излучения (6), (7) в совокупности означают, что поток мощности в самом волноводе и на границе $z = h$ направлен всюду от источника в точку наблюдения, если она находится в волноводе, либо в нагрузку, роль которой играет нижнее полупространство с входным импедансом $Z_{\text{вх}}$, но не наоборот.

Если теперь к граничной задаче (2), (4) с условиями излучения (6), (7) добавить асимптотическую оценку на бесконечности в форме

$$r \rightarrow \infty, \quad \varphi(r) = O(r^{-1/2}),$$

которая совместима с законом сохранения энергии, то она становится вполне корректной, а ее решение удовлетворяет теореме существования и единственности в области $z \in (0, h)$.

Следует подчеркнуть, что другому выбору разреза будет соответствовать другое единственное решение граничной задачи (2)–(4). Определившись с единственным решением граничной задачи (4)–(7), можно продолжить ее решение в нижнее полупространство формулой (5):

$$\varphi_2(r, z) = \frac{\rho_{12}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(\xi, h) e^{-ik_{32}(z-h)} H_0^{(2)}(\xi r) \xi d\xi. \quad (8)$$

На этой стадии решения исходной задачи вместо условия излучения (7) нужно использовать условие ограниченности подынтегральной функции во всей области определения несобственного интеграла (8), которое имеет вид

$$-(h - z_0) \left| \operatorname{Im}\sqrt{k_1^2 - \xi^2} \right| + (z - h) \operatorname{Im}k_{32} + r \operatorname{Im}\xi \leq 0, \quad \operatorname{Im}\xi \leq 0. \quad (9)$$

Условие (9) определяет форму разреза на плоскости комплексного переменного ξ , которая параметрически зависит от координат точки наблюдения (r, z) , причем в предельном случае $z = h$ разрез (9) совпадает с разрезом (7), а в предельном случае $(z/r) \rightarrow \infty$ разрез (9) вырождается в разрез ЕЖР. Последнее обстоятельство означает, что построенное с учетом (9) решение будет удовлетворять принципу погашаемости на бесконечности. Общее решение граничной задачи (1) при любом способе определения радикала k_{32} дается формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(\xi, z) &= -\frac{e^{-ik_{31}z_0}}{k_{31}} \frac{1 + Ve^{-2ik_{31}(h-z_0)}}{\Delta} \sin(k_{31}z), \quad z \leq z_0, \\ \tilde{\varphi}_1(\xi, z) &= -\frac{e^{-ik_{31}z}}{k_{31}} \frac{1 + Ve^{-2ik_{31}(h-z)}}{\Delta} \sin(k_{31}z_0), \quad z \geq z_0, \\ \tilde{\varphi}_2(\xi, z) &= -\rho_{12} \frac{\sin(k_{31}z_0)}{k_{31}} \frac{(1 + V)e^{-ik_{31}h}}{\Delta} e^{-ik_{32}(z-h)}, \quad z \geq h, \quad \Delta = 1 + Ve^{-2ik_{31}h}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $k_{31} = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$.

Предложенная схема решения задачи Пекериса в исходной постановке (1), несмотря на формальное сходство, принципиально отличается от изложенной в классических работах [1–3] по следующим позициям:

1. Исходная задача Пекериса в формулировке (1)–(3) является некорректной и не подпадает под действие теоремы существования и единственности, впервые сформулированной для рассматриваемого класса задач Г.Д. Малюжинцем в работе [5]. Объясняется это тем, что собственные функции поперечного оператора (3) в полной совокупности не являются ограниченными в области определения и заведомо не удовлетворяют принципу погашаемости на бесконечности.

2. Задача (2), (4), или редуцированная задача Пекериса, удовлетворяет теореме существования и единственности в формулировке Г.Д. Малюжинца, но только при конкретном способе задания входного импеданса полупространства, т. е. при конкретном способе задания однозначной ветви радикала k_{32} . Каждому способу задания однозначной ветви радикала k_{32} соответствует своя модельная задача, имеющая свое единственное решение. Известное суждение о тождественности различных модельных решений [9], каждое из которых соответствует определенному разрезу и конкретному выбору однозначной ветви радикала k_{32} , является ошибочным.

3. При любом способе задания однозначной ветви радикала k_{32} решение редуцированной задачи Пекериса является корректным при описании поля в волноводе. Различие решений лежит на физическом уровне и может быть выявлено численным анализом [8] и сопоставлением с известными экспериментальными данными [6].

Проблема построения решения задачи Пекериса в физическом полупространстве по одному из модельных решений редуцированной граничной задачи является принципиально новой. Эта проблема может быть сведена к решению корректных граничных задач Дирихле или Неймана для полупространства с заданным на его поверхности распределением давления или нормальной компоненты колебательной скорости. Очевидно, однако, что если мы продолжим решение редуцированной задачи Пекериса в полупространство непрерывно по давлению, решив соответствующую задачу Дирихле, то оно будет разрывным по нормальной компоненте колебательной скорости. Аналогично, если мы продолжим то же самое решение непрерывно по нормальной компоненте колебательной скорости, решив задачу Неймана, то оно будет разрывным по давлению.

Для устранения разрывов нужно снова решать граничные задачи Дирихле или Неймана отдельно для волновода и полупространства и находить дифракционные поправки к ранее найденным решениям для звукового поля и в волноводе, и в полупространстве. На каждом шаге такой итерационной процедуры при компенсации скачка давления мы будем получать решение, разрывное по нормальной компоненте колебательной скорости, и наоборот. В случае если указанная итерационная процедура устранения разрывов окажется сходящейся, мы получим решение, удовлетворяющее исходной постановке (1), но оно будет отличаться от любого из решений редуцированной задачи (2)–(4), а следовательно, не будет решением редуцированной задачи. Это противоречие означает, что процесс устранения разрывов путем последовательного решения граничных задач Дирихле и Неймана не может быть сходящимся, а некорректность исходной задачи Пекериса во всей заявленной области определения является принципиально неустранимой.

Ниже излагается иной метод построения продолжения решения на физическое полупространство, в существенной мере опирающийся на условие (9) и на расширение класса функций, в пределах которого ищется искомое решение, с неизбежным переходом к обобщенному описанию и обобщенным функциям.

Пусть решение редуцированной задачи Пекериса представлено тем из них, которое удо-

влетворяет обобщенному условию излучения (7):

$$\varphi_1(r, z) = \pi i \left\{ \sum_{n(1)=1}^{N_1} \text{Res}(\xi_n^-) + \sum_{n(2)=1}^{N_2} \text{Res}(\xi_n^+) + 2 \sum_{n(3)=1}^{\infty} \text{Res}(\tilde{\xi}_n) \right\} + \int_{L_3} \tilde{\varphi}_1(\xi, z) H_0^{(2)}(\xi r) \xi d\xi, \quad (11)$$

где N_1 — число регулярных нормальных волн подмножества $n(1)$; N_2 — число обобщенных нормальных волн подмножества $n(2)$; $n(3)$ — счетное множество вытекающих нормальных волн комплексного спектра, а вычеты определены для функции $\tilde{\varphi}_1(\xi, z)$ в ее полюсах ξ_n^- , ξ_n^+ , лежащих на верхнем и нижнем берегах разреза (7), который обозначен как L_3 . Дискретная часть решения (11) представлена собственными функциями двух сопряженных операторов, соответствующих рассматриваемой несамосопряженной граничной задаче, в полном соответствии с принципом равноправия обоих реактивных импедансов. Для регулярных нормальных волн входной импеданс физического полупространства является реактивным, инерционным. Для обобщенных нормальных волн входной импеданс является реактивным, упругим. Физический смысл дискретного спектра вполне очевиден и связан с захватом энергии либо волноводом, либо полупространством.

Однако вытекающие нормальные волны и обобщенные нормальные волны ограничены только в модельном полупространстве, тогда как в физическом полупространстве их амплитуда экспоненциально растет по вертикальной координате. Более того, обобщенные нормальные волны следует сразу определить в классе обобщенных функций, разрывных на импедансной границе раздела. Объясняется это тем, что для физической реализации реактивного входного импеданса упругого типа неоднородная волна, которой продолжается расходящаяся обобщенная нормальная волна в полупространство, должна быть сходящейся волной. Только в этом случае входной импеданс полупространства будет определяться наличием жесткой границы, расположенной в направлении распространения, роль которой играет ось симметрии. Иначе говоря, две парциальные составляющие обобщенной нормальной волны, расходящаяся волна в волноводе и сходящаяся волна в полупространстве, принципиально связаны механизмом отражения от оси симметрии как от жесткой границы.

Как показано в работе [6], регулярные и обобщенные нормальные волны всегда существуют парами, причем на резонансных частотах, соответствующих кратным корням дисперсионного уравнения, зарождаются встречные расходящаяся и сходящаяся обобщенные волны, образующие поле типа стоячей волны. Для понимания физического смысла метода рассмотрим распространение в волноводе пары нормальных волн, регулярной и обобщенной, которые описываются выражением

$$\varphi_{nm}^{(\text{пад})}(r, z) = a_n \varphi_{1n}(\xi_n, z) H_0^{(2)}(\xi_n r) + a_m \varphi_{1m}(\xi_m, z) H_0^{(2)}(\xi_m r), \quad (12)$$

$$a_n = \frac{\sin(k_{31,n} z_0)}{E_n}, \quad \varphi_{1n} = \sin(k_{31,n} z), \quad E_n = 1 - \frac{\sin(2k_{31,n} h)}{2k_{31,n} h} - \rho_{12} \frac{\sin^2(k_{31,n} h)}{\alpha_{2n} h}, \quad n \in n(2),$$

$$a_m = \frac{\sin(k_{31,m} z_0)}{E_m}, \quad \varphi_{1m} = \sin(k_{31,m} z), \quad E_m = 1 - \frac{\sin(2k_{31,m} h)}{2k_{31,m} h} + \rho_{12} \frac{\sin^2(k_{31,m} h)}{\alpha_{2m} h}, \quad m \in m(1),$$

$$k_{31,n}^2 = k_1^2 - \xi_n^2, \quad \alpha_{2n}^2 = \xi_n^2 - k_2^2.$$

Будем считать, что в некоторой ближней зоне $r \leq r_m$ весовые коэффициенты возбуждения определяются источником и формулой (11), а в волновой зоне $r > r_m$ соотношение между ними в прошедшей волне и в паре отраженных волн изменяется некоторым образом:

$$\varphi_{nm}^{(\text{отр})}(r, z) = B_n \left[a_n \varphi_{1n}(\xi_n, z) J_0(\xi_n r) + \gamma_{mn} a_m \varphi_{1m}(\xi_m, z) J_0(\xi_m r) \right],$$

$$\varphi_{nm}^{(\text{пр})}(r, z) = C_n \left[a_n \varphi_{1n}(\xi_n, z) H_0^{(2)}(\xi_n r) + \gamma_{mn} a_m \varphi_{1m}(\xi_m, z) H_0^{(2)}(\xi_m r) \right], \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{mn} &= \frac{B_m}{B_n} = \frac{C_m}{C_n}, \quad \beta_{mn} = \gamma_{mn} \frac{a_m \sin(k_{31,m}h)}{a_n \sin(k_{31,n}h)}. \\ r = r_m &= (h - z_0) \frac{\xi_m}{k_{31,m}}; \\ \langle \varphi_{nm}^{(\text{пад})}(r_m) + \varphi_{nm}^{(\text{отр})}(r_m) \rangle &= \langle \varphi_{nm}^{(\text{пп})}(r_m) \rangle, \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \left[\varphi_{nm}^{(\text{пад})}(r) + \varphi_{nm}^{(\text{отр})}(r) \right] \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial r} \varphi_{nm}^{(\text{пп})}(r) \right\rangle, \\ \langle \varphi(r_m) \rangle &= \int_0^\infty \varphi(r_m, z) \varphi_m(\xi_m, z) dz.\end{aligned}$$

Сшивая звуковые поля непрерывно по давлению и нормальной компоненте колебательной скорости в среднем по сечению волновода, получаем систему уравнений для определения коэффициентов прохождения C_n и отражения B_n при произвольном значении весового коэффициента β_{mn} . Рассмотрим теперь энергетические соотношения в поле пары нормальных волн, вычисляя для этого поток мощности через поперечное сечение волновода

$$P_{\Sigma, nm}(r) = P_n + P_m + P_{r, nm}(r), \quad (14)$$

$$P_n = |C_n|^2 a_n^2 E_{1n}, \quad P_m = |C_n|^2 a_n^2 \sin^2(x_{1n}) \beta_{mn}^2 \frac{E_{1m}}{\sin^2(x_{1m})} = |C_m|^2 a_m^2 E_{1m},$$

$$\begin{aligned}P_{r, nm}(r) &= |C_n|^2 a_n^2 \sin^2(x_{1n}) 2\beta_{mn} \rho_{12} \frac{\xi_n + \xi_m \cos((\xi_n - \xi_m)r)}{\sqrt{\xi_n \xi_m} (\alpha_{2n} - \alpha_{2m}) h} \\ &= |C_n| |C_m| a_n a_m 2\rho_{12} \frac{\xi_n + \xi_m}{\sqrt{\xi_n \xi_m}} \sin(x_{1n}) \sin(x_{1m}) \frac{\cos((\xi_n - \xi_m)r)}{(\alpha_{2n} - \alpha_{2m}) h}, \\ x_{1n} &= k_{31,n} h, \quad x_{1m} = k_{31,m} h, \quad E_{1m} = 1 - \frac{\sin(2x_{1m})}{2x_{1m}}.\end{aligned}$$

Присутствие в суммарной мощности интерференционного члена (взаимной мощности $P_{r, nm}(r)$) объясняется тем, что собственные функции, соответствующие паре нормальных волн, не ортогональны в сечении волновода $z \in (0, h)$, а звуковые поля в волноводе и полупространстве связаны энергообменом. Проблему согласования звукового поля в волноводе с полупространством можно свести к задаче нахождения двух функций распределения скачка давления $\Delta p(h, r)$ и нормальной компоненты колебательной скорости $\Delta v_z(h, r)$ на импедансной границе, для которых вертикальный поток мощности $P_z(r)$ полностью скомпенсирует поток взаимной мощности $P_r(r)$ в (14).

Для решения этой вспомогательной задачи нужно использовать основное свойство парной структуры нормальных волн, которое заключается в их взаимной трансформации при отражении от импедансной границы со сдвигом. Это означает, что регулярная волна продолжается в полупространство обобщенной волной, обобщенная — регулярной, причем волна давления продолжается в полупространство непрерывной функцией вертикального распределения, а волна нормальной компоненты колебательной скорости — скачком с изменением знака на границе $z = h$:

$$\begin{aligned}\Delta p_{nm}(h, r) &= iC_n a_n \sin(x_{1n}) (1 - \beta_{mn}) \left[H_0^{(2)}(\xi_m r) - H_0^{(2)}(\xi_n r) \right], \\ -\Delta v_{z, nm}(h, r) &= C_n a_n \sin(x_{1n}) \rho_{12} (\alpha_{2n} - \beta_{mn} \alpha_{2m}) \left[H_0^{(2)}(\xi_m r) + H_0^{(2)}(\xi_n r) \right];\end{aligned} \quad (15)$$

при этом обе функции скачков в (15) зависят от весового коэффициента β_{mn} в (13).

Определяя поток взаимной мощности через импедансную границу раздела как

$$I_{z,nm}(h, r) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \Delta p_{nm} (-\Delta v_{z,nm}^*) = \frac{\rho_{12}}{2} |C_n|^2 a_n^2 \sin^2(x_{1n}) (1 - \beta_{mn}) (\alpha_{2n} - \beta_{mn} \alpha_{2m}) \\ \times 2 [N_0(\xi_m r) J_0(\xi_n r) - J_0(\xi_m r) N_0(\xi_n r)],$$

$$P_{z,nm}(r) = \int_r^\infty I_{z,nm}(h, r) 2\pi r dr = \rho_{12} |C_n|^2 a_n^2 \sin^2(x_{1n}) (1 - \beta_{mn}) (\alpha_{2n} - \beta_{mn} \alpha_{2m}) \\ \times h \frac{4(\xi_n + \xi_m) \cos((\xi_n - \xi_m)r)}{\sqrt{\xi_n \xi_m} (\alpha_{2n}^2 - \alpha_{2m}^2) h^2}$$

и используя условие полной компенсации потоков взаимной мощности $P_r(r) = P_z(r)$, находим искомый коэффициент β_{mn} и структуру пары нормальных волн, регулярной и обобщенной, согласованной с полупространством:

$$(\alpha_{2m} - \beta_{mn})(1 - \beta_{mn}) = \frac{\beta_{mn}}{2} (1 + \alpha_{nm}), \quad \alpha_{nm} = \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{2m}} > 1,$$

$$\beta_{mn} = \frac{3}{4} (1 + \alpha_{nm}) \pm \sqrt{\frac{9}{16} (1 + \alpha_{nm})^2 - \alpha_{nm}},$$

(16)

$$\varphi_{nm}(r, z) = C_n a_n \sin(\gamma_{1n}) \left[\frac{\varphi_{1n}(\xi_n, z)}{\sin(x_{1n})} H_0^{(2)}(\xi_n r) + \beta_{mn} \frac{\varphi_{1m}(\xi_m, z)}{\sin(x_{1m})} H_0^{(2)}(\xi_m r) \right];$$

причем в согласованном звуковом поле суммарная мощность любой пары нормальных волн удовлетворяет условию аддитивного сложения мощностей отдельных составляющих, которое, собственно говоря, и является энергетическим критерием согласования.

Все расчетные формулы для дифракционных добавок содержат в качестве параметра расстояние r_m , отсекаемое на оси r лучом, соответствующим регулярной составляющей пары волн. Однако условия согласования (16) выполняются тождественно по расстоянию, а, следовательно, этот параметр без потери общности можно положить равным нулю. В этом случае расчетные формулы для определения коэффициентов C_n , B_n упрощаются:

$$C_n = \frac{D_{mn} + a_{mn} E_m}{D_{mn} + b_{mn} E_m}, \quad B_n = i \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\xi_m}{\xi_n} \right) \frac{D_{mn} E_m (a_{mn} - b_{mn})}{(D_{mn} + b_{mn} E_m)^2},$$

$$D_{mn} = \rho_{12} \frac{\sin(x_{1n}) \sin(x_{1m})}{(\alpha_{2n} - \alpha_{2m}) h}, \quad b_{mn} = \beta_{mn} \frac{\sin(x_{1n})}{\sin(x_{1m})}.$$

Наконец, минимизируя коэффициент отражения B_n условием $|a_{mn} - b_{mn}| = \min$, которое зависит от конкретных условий возбуждения пары нормальных волн, можно выбрать одно из двух значение параметра согласования β_{mn} в (16). Иначе говоря, процедура согласования поля сопряженных пар нормальных волн с полупространством свелась к такой перенормировке коэффициентов возбуждения, которая обеспечивает полную компенсацию потоков взаимной мощности при минимальной (в некотором смысле) перестройке исходных коэффициентов возбуждения, найденных из решения редуцированной задачи Пекериса.

По найденным функциям скачков (15) из решения соответствующих граничных задач Дирихле и Неймана однозначно определяются дифракционные добавки к найденному ранее звуковому полю в волноводе и полупространстве:

$$\Delta \varphi_1(r, z) = \frac{\pi i}{2} \sum_n \left[\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \chi_l \sin \left(\chi_l \frac{z}{h} \right) W_{nm}(\xi_n, \xi_m, \hat{\xi}_l) H_0^{(2)}(\xi_l r) \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \left(\gamma_k \frac{z}{h} \right) U_{nm}(\xi_n, \xi_m, \hat{\xi}_k) H_0^{(2)}(\xi_k r) \right], \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
\chi_l &= l\pi, \quad \hat{\xi}_l^2 = k_1^2 - \left(\frac{\chi_l}{h}\right)^2, \quad \gamma_k = \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad \hat{\xi}_k^2 = k_1^2 - \left(\frac{\gamma_k}{h}\right)^2, \\
\Delta\varphi_2(r, z) &= -i\rho_{12} \\
&\times \sum_n \int_{-i\infty}^{k_2} \left[W_{nm}(\xi_n, \xi_m, \xi) \sin(k_{32}(z-h)) + \frac{U_{nm}(\xi_n, \xi_m, \xi)}{k_{32}h} \cos(k_{32}(z-h)) \right] H_0^{(2)}(\xi r) \xi d\xi, \quad (18) \\
W_{nm}(\xi_n, \xi_m, \xi) &= -\frac{1}{2} C_n a_n (1 - \beta_{mn}) \sin(x_{1n}) [F_n(\xi_n, \xi) - F_m(\xi_m, \xi)], \\
U_{nm}(\xi_n, \xi_m, \xi) &= \frac{\rho_{12}}{2} C_n a_n (\alpha_{2n} - \beta_{mn} \alpha_{2m}) h \sin(x_{1n}) [F_n(\xi_n, \xi) + F_m(\xi_m, \xi)], \\
F_n(\xi_n, \xi) &= \frac{1}{h^2} \int_0^\infty H_0^{(2)}(\xi_n r) J_0(\xi r) r dr = -i \frac{2}{\pi} \frac{1}{h^2 (\xi_n^2 - \xi^2)}.
\end{aligned}$$

Дифракционные добавки к полю в волноводе выражаются через присоединенные функции, роль которых играют собственные функции волновода с двумя мягкими границами и собственные функции волновода с верхней мягкой и нижней жесткой границами. Дифракционные добавки к полю в полупространстве суть сферические волны, создаваемые системой монополей и диполей, расположенных на импедансной границе. В случае согласования поля вытекающих нормальных волн с полупространством, в котором их амплитуда экспоненциально растет по вертикальной координате, критерий согласования также является энергетическим, но сама процедура несколько отличается от описанной выше.

Рассмотрим опять потоки мощности в поле любой вытекающей нормальной волны, которые представлены вертикальным потоком мощности через импедансную границу

$$P_{z,n} = P_0 \frac{\pi \rho_{12}}{2k_1 h} |a_n \sin(x_{1n})|^2 \frac{1 - \frac{2}{\pi} \psi_n}{\alpha_{2n} h}, \quad (19)$$

$$\psi_n = \arctg\left(\frac{\delta_n}{Re\xi_n}\right), \quad \xi_n = Re\xi_n - i\delta_n, \quad \psi_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

и горизонтальным потоком мощности в полупространстве через боковую поверхность цилиндра, ограниченную снизу линией вытекания $(z-h)Re\xi_n = rRek_{32,n}$

$$P_{r,n} = P_0 \frac{\pi \rho_{12}}{2k_1 h} |a_n \sin(x_{1n})|^2 \frac{\cos(\psi_n)}{\alpha_{2n} h}, \quad P_r \geq P_z, \quad P_0 = \omega \rho_1 k_1 2\pi. \quad (20)$$

Из условия равенства этих величин следует, что линия вытекания должна начинаться на источнике, отсекая на оси r расстояние $r = r_n = (h - z_0)Re\xi_n/Rek_{31,n}$, определяющее область существования $r \geq r_n$ вытекающей нормальной волны, согласованной с полупространством по энергетическому критерию. Отсюда следует, что в области $r \leq r_n$ поле в волноводе должно описываться стоячей волной с нулевым вертикальным потоком мощности. Такое поле формируется парой нормальных волн с волновыми числами $(\xi_n, -\xi_n^*)$, возбуждаемых источником. Его следует дополнить парой отраженных нормальных волн с волновыми числами $(\xi_n^*, -\xi_n)$. Коэффициенты отражения \tilde{B}_n и прохождения \tilde{C}_n согласованной вытекающей нормальной волны однозначно определяются условиями непрерывности поля на границе раздела $r = r_n$ по давлению и нормальной компоненте колебательной скорости. Суммарное поле из ближней зоны $r \leq r_n, z \leq h$ продолжается в полупространство полем типа стоячей волны в коридор вытекания—втекания, как это сделано в работе [11], причем нижняя граница коридора является каустической границей.

Таким образом, любая вытекающая волна в согласованном решении представлена расходящейся вытекающей волной в волновой области, в которой строго выполняется закон сохранения энергии, полем типа стоячей волны с нулевым потоком мощности в ближней зоне

и коридоре вытекания — втекания и зоной тени, где поле данной нормальной волны равно нулю. Очевидно также, что определенная таким образом вытекающая нормальная волна комплексного спектра относится к классу обобщенных (по С.Л. Соболеву) функций с финитной областью определения, которая однозначно определяется условием (9).

Упрощенная схема построения согласованного решения использована в работе [11]. В этой работе поле вытекающих нормальных волн продолжено в полупространство по описанному выше энергетическому критерию согласования, а поле пар нормальных волн — по упрощенному критерию (по среднему между верхним и нижним пределами на границе скачка). Упрощенному критерию согласования соответствует значение весового коэффициента $\gamma_{mn} = 3$ в (16), которое неплохо соответствует большему из двух вещественных корней, найденных по энергетическому критерию согласования. Там же описана специфика согласования с полупространством первой пары нормальных волн, в которой обобщенная составляющая становится неоднородной не только в полупространстве, но и в волноводе. В силу условия (9) область ее существования может быть продолжена в полупространство до горизонта $z = h + z_{\pi}$, $z_{\pi} = (h - z_0)\rho_1/\rho_2$, который играет роль каустической границы (горизонта полного внутреннего отражения по Ньютону).

Согласованное решение в волноводе представлено суммой пар нормальных волн вещественного спектра, коэффициенты возбуждения которых скорректированы по описанной выше схеме, суммой вытекающих расходящихся нормальных волн комплексного спектра, коэффициенты возбуждения которых также скорректированы, а само поле в ближней зоне дополнено сходящимися и втекающими волнами сопряженного спектра, и дифракционными поправками, которые описываются присоединенными функциями

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, z) = \sum_n C_n a_n \sin(x_{1n}) & \left[\frac{\varphi_{1n}(\xi_n, z)}{\sin(x_{1n})} H_0^{(2)}(\xi_n r) + \beta_{mn} \frac{\varphi_{1m}(\xi_m, z)}{\sin(x_{1m})} H_0^{(2)}(\xi_m r) \right] \\ & + \varphi_{1, \text{выт}}(r, z) + \Delta\varphi_1(r, z) + \Delta\varphi_{11}(r, z), \\ & n \in n(2), \quad m = n + 1, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\varphi_{\text{выт}}(r, z)$ — поле вытекающих нормальных волн; $\Delta\varphi_{11}(r, z)$ — дифракционная поправка, связанная с втеканием первой обобщенной нормальной волны в волновод [11].

Согласованное решение в полупространстве представлено первой обобщенной нормальной волной, вытекающей (с образованием поля типа стоячей волны) в придонный слой с каустической нижней границей, и суммой вытекающих расходящихся нормальных волн комплексного спектра, каждая из которых построена по описанной выше схеме с финитной областью определения

$$\varphi_2(r, z) = \varphi_{2, \text{выт}}(r, z) + \varphi_{2,1}(r, z) + \Delta\varphi_2(r, z), \quad (22)$$

где $\varphi_{2,1}(r, z)$ — поле первой обобщенной нормальной волны в придонном слое $z \in (h, h + z_{\pi})$ [11].

Поле вытекающих нормальных волн дополнено сходящимися втекающими волнами сопряженного спектра для описания поля типа стоячих волн в коридорах вытекания—втекания, нижняя граница которых также является каустической. Кроме того, решение в полупространстве представлено дифракционными поправками типа сферических волн, источниками которых являются вторичные излучатели монополюсно-дипольного типа, распределенные на импедансной границе раздела. Именно эти вторичные источники обеспечивают непрерывность поля по потоку взаимной мощности на границе раздела при использовании в полном наборе обобщенных (разрывных) собственных функций сопряженного оператора.

Физические различия классического решения, построенного с использованием разреза ЕРР, и обобщенного решения (20), (21), построенного в рамках изложенной обобщенной теории, частично проанализированные в работах [8, 10–12], столь существенны, что требуют отдельного рассмотрения. Отметим лишь главные из них:

1. В отличие от классической обобщенная теория правильно описывает волновод как открытую систему в области докритических углов падения.

2. В отличие от классической обобщенная теория описывает полное отражение как внутреннее отражение с затеканием и возвратом энергии в волновод, что полностью соответствует гипотезе Ньютона.

3. В отличие от классической обобщенная теория предсказывает существование на импедансной границе раздела (например, на границе раздела вода—морское дно) пограничной волны особого типа [11], для которой полное внутреннее отражение паритует эффект мягкого экрана, вследствие чего отражение при малых углах скольжения становится не противофазным, а каустическим.

Математические аспекты постановки и решения краевых задач для сингулярных несамосопряженных операторов, описывающих распространение звуковых волн в слоистых средах, существенно отличаются от классической ситуации в самосопряженной модельной постановке и требуют специального рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pekeris C.L.** Theory of propagation of explosive sound in shallow water // Geol. Soc. Am. 1948. № 27. P. 48–156.
2. **Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.
3. **Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.** Elastic waves in layered media. New York: McGraw-Hill, 1957. 380 p.
4. **Lamb H.** On the propagation of tremors over the surface on the elastic solid // Phyl. Trans. Roy. Soc. A. London, 1904. 203. P. 1–42.
5. **Малюжинец Г.Д.** Математическая формулировка задачи о вынужденных гармонических колебаниях в произвольной области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78, № 3. С. 439–442.
6. **Касаткин Б.А., Злобина Н.В.** Некорректные задачи и обобщенные волны в акустике слоистых сред. Владивосток: Дальнаука, 2005. 407 с.
7. **Шевченко В.В.** Собственные волны однородной плоской импедансной поверхности // Акуст. журн. 1967. Т. 9, № 2. С. 215–221.
8. **Касаткин Б.А., Злобина Н.В.** Корректная постановка задачи Пекериса и обобщенная теория слоистых волноводов // Акустика неоднородных сред: тр. науч. шк. проф. С.А. Рыбака. Троицк: Троянт, 2006. Вып. 7. С. 121–131.
9. **Де Санто Дж.** Теоретические методы в акустике океана // Акустика океана / под ред. Дж. Де Санто. М.: Мир, 1982. С. 16–90.
10. **Касаткин Б.А., Злобина Н.В.** Об одном классе аномальных явлений в акустике слоистых сред (обзор): сб. тр. XVIII сессии РАО. М.: ГЕОС, 2006. Т. 2. С. 217–220.
11. **Касаткин Б.А., Злобина Н.В.** Сравнительный анализ классического и обобщенного решений граничной задачи Пекериса // Акустика неоднородных сред: тр. науч. шк. проф. С.А. Рыбака. Троицк: Троянт, 2007. Вып. 8. С. 158–171.
12. Принципы построения гидроакустических навигационных систем дальнего радиуса действия / Б.А. Касаткин [и др.] [Электрон. ресурс]: Proceed. of the internat. conf. on Subsea technologies. Saint-Petersburg, 2007. 1 CD-ROM. URL: <http://www.subseatech2007.smtu.ru>.

Борис Анатольевич Касаткин

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. лабораторией

Ин-т проблем морских технологий ДВО РАН

e-mail: kasatkas@marine.febras.ru

Надежда Владимировна Злобина

канд. физ.-мат. наук

ученый секретарь

Ин-т проблем морских технологий ДВО РАН

e-mail: zlobina@marine.febras.ru

Поступила 04.08.2008

УДК 517.95

**РАЗРЕШИМОСТЬ В СЛАБОМ СМЫСЛЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ,
ОПИСЫВАЮЩЕЙ ТЕПЛОВУЮ КОНВЕКЦИЮ¹****А. И. Короткий**

Исследуется краевая задача для стационарной модели тепловой конвекции высоковязкой неоднородной несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска с нерегулярными граничными данными по температуре. Приведены некоторые условия однозначной разрешимости краевой задачи. Исследована гладкость слабого решения в зависимости от гладкости исходных данных и гладкости границы области, в которой идет поиск решения.

Ключевые слова: тепловая конвекция, нерегулярные граничные данные, слабое решение.

A.I.Korotkii. Solution in weak sense of a boundary value problem describing thermal convection.

Boundary value problem for the stationary model thermal convection of a high-viscosity inhomogeneous incompressible fluid in the Boussinesq approximation with irregular boundary data for temperature is investigated. Conditions of uniqueness solvability of the boundary value problem are specified. The smoothness of a weak solution subject to the smoothness of initial data and the smoothness of a boundary of a domain, where solution is sought, is investigated.

Key words: thermal convection, irregular boundary data, weak solution.

Введение

В работе изучается краевая задача для одной стационарной модели тепловой конвекции неоднородной несжимаемой высоковязкой жидкости в приближении Буссинеска. Соответствующая краевая задача представляет собой систему уравнений с частными производными вместе с краевыми условиями для искомых функций. Система уравнений рассматривается в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, и включает в себя уравнение Стокса вместе с уравнением несжимаемости для определения стационарного поля скоростей жидкости, а также стационарное уравнение теплового баланса для определения температуры жидкости. На границе $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω для искомого поля скоростей задается краевое условие прилипания, а для искомой температуры — смешанное неоднородное краевое условие, в котором задаются на одной части границы — тепловой поток, на другой оставшейся части границы — температура. Граница Γ области Ω может иметь различную гладкость. В частности, она может быть кусочно-гладкой, а сама область может быть выпуклой или невыпуклой. Особенность исследуемой здесь краевой задачи состоит в том, что она рассматривается при нерегулярных граничных данных по температуре. Это обстоятельство существенно усложняет исследование краевой задачи, поскольку граничные данные в этих условиях, вообще говоря, не могут быть продолжены внутрь области регулярным образом и краевая задача не может быть сведена классическим способом к краевой задаче с однородными граничными условиями. Нерегулярность исходных граничных данных приводит к необходимости ослабления понятия решения краевой задачи. Температурная составляющая решения может быть недифференцируемой. Статья продолжает исследования [1, 2]. Близкие по постановке задачи с регулярными граничными данными рассматривались в [3, 4].

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00029) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (“Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”).

1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача

$$\nabla \cdot (\mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t]) = \nabla p - \text{Ra } T \mathbf{g} - \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = \mathbf{v} \cdot \nabla T - q, \quad x \in \Omega, \quad (1.4)$$

$$\partial T / \partial \mathbf{n} = u, \quad x \in \Gamma_1 \subset \Gamma, \quad (1.5)$$

$$T = w, \quad x \in \Gamma_2 \subset \Gamma, \quad (1.6)$$

для нахождения неизвестных функций $T = T(x)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x)$, $p = p(x)$, $x \in \Omega$. Краевая задача (1.1)–(1.6) описывает в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с границей $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\text{meas } \Gamma_2 > 0$, установившееся движение вязкой неоднородной несжимаемой теплопроводной жидкости в приближении Буссинеска. Жидкость находится во внешнем силовом гравитационном поле с плотностью массовых сил \mathbf{g} и внешнем силовом поле иных массовых сил с объемной плотностью \mathbf{f} . Кроме того, жидкость находится под действием внешних тепловых режимов u на Γ_1 (ku — поток тепла через границу Γ_1) и w на Γ_2 (w — температура на границе Γ_2), а также внутренних источников тепла с объемной плотностью q [5–8]. Краевая задача записана в безразмерном виде. Жирным шрифтом, кроме x , выделены векторные величины. Физический смысл параметров в краевой задаче: $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка \mathbb{R}^n ; $\mathbf{v} = (v_1(x), \dots, v_n(x))$ — вектор скорости движения жидкости; $p = p(x)$ — давление; $T = T(x)$ — температура; $\mu = \mu(x)$ — вязкость; $k = k(x)$ — коэффициент теплопроводности; \mathbf{g} — вектор плотности внешних гравитационных сил; $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x)$ — вектор объемной плотности внешних негравитационных массовых сил; $q = q(x)$ — объемная плотность внутренних источников тепла; $u = u(x)$, $w = w(x)$ — температурные режимы на Γ_1 и Γ_2 соответственно; Ra — число Рэлея; $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ — единичная внешняя нормаль к Ω в точках x границы Γ .

Уточним постановку задачи. В качестве Ω далее будут рассматриваться ограниченные области, принадлежащие одному из следующих классов. Первый класс \mathfrak{K}_1 составляют области класса C^2 [9, с. 67; 10, с. 31; 11, с. 9]. Второй класс \mathfrak{K}_2 составляют области, являющиеся выпуклыми многоугольниками (при $n = 2$) или выпуклыми многогранниками (при $n = 3$). Третий класс \mathfrak{K}_3 составляют области, удовлетворяющие следующим трем условиям из [10]: условию 1 [10, с. 212] (условие строгой липшицевости), условию 2 [10, с. 212] (условие равномерной ограниченности собственных чисел соответствующей квадратичной формы) и условию \mathfrak{R} [10, с. 222] (условие сильной разрешимости задачи Пуассона с гладкими правыми частями и смешанными однородными граничными условиями, которые в данном случае соответствуют условиям (1.5), (1.6)). Части Γ_1 и Γ_2 границы Γ считаются открытыми и регулярными на Γ , принадлежащими тому же классу, что и сама граница Γ . В [9–13] описаны различные подклассы областей, содержащиеся в классах \mathfrak{K}_1 , \mathfrak{K}_2 или \mathfrak{K}_3 . Если не оговорено специально, то считается, что область Ω принадлежит любому из указанных классов областей.

Введем основные используемые пространства. Далее будут использоваться пространства Лебега $L_m(\Omega)$ и пространства Соболева $W_m^l(\Omega)$, $m \geq 1$, $l \geq 1$ [9–13], а также их векторные аналоги $\mathbf{L}_m(\Omega)$ и $\mathbf{W}_m^l(\Omega)$ соответственно, нормы в которых определяются обычным образом [10, с. 467]. Кроме того, будут использоваться гильбертовы пространства [7, с. 41]:

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0 \},$$

$$G(\Omega) = \{ \varphi \in W_2^2(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_2} = 0, \partial \varphi / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0 \},$$

$$D(\Omega) = \{ \psi \in W_2^1(\Omega) : \psi|_{\Gamma_2} = 0 \},$$

в которых используются нормы и скалярные произведения пространств $W_2^1(\Omega)$, $W_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ соответственно или эквивалентные им нормы. Определения пространств $L_2(\Gamma_1)$, $L_2(\Gamma_2)$ имеются, например, в [11, с. 136–140, 197; 13, с. 73–77] (см. также [9, 12, 14, 15]).

Введем понятие слабого решения краевой задачи. Под слабым решением краевой задачи (1.1)–(1.6) понимается пара функций $(T, \mathbf{v}) \in L_2(\Omega) \times \mathbf{H}(\Omega)$, удовлетворяющих тождествам

$$\int_{\Omega} \mu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t \right] \cdot \left[\nabla \boldsymbol{\eta} + (\nabla \boldsymbol{\eta})^t \right] dx = 2 \operatorname{Ra} \int_{\Omega} T \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} dx + 2 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (1.7)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot (k \nabla \varphi) + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) T dx = \int_{\Gamma_2} k w \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} k u \varphi d\Gamma - \int_{\Omega} q \varphi dx \quad \forall \varphi \in G(\Omega). \quad (1.8)$$

Классическое решение краевой задачи (1.1)–(1.6) является ее слабым решением, так как тождество (1.7) есть следствие равенства (1.1) (оно выводится из (1.1) аналогично тождеству для определения обобщенного решения краевой задачи Стокса (1.1)–(1.3) [7, с. 45, 46]), а тождество (1.8) — следствие равенства (1.4) (оно получается умножением последнего на функцию $\varphi \in G(\Omega)$ и интегрированием результата по Ω с применением формулы интегрирования по частям [13, с. 75], учетом граничных значений функций \mathbf{v} , T , φ и условия несжимаемости (1.2)). С другой стороны, если слабое решение краевой задачи (1.1)–(1.6) будет достаточно гладким, то оно станет и классическим решением этой краевой задачи.

Пусть всюду далее функции μ , k , \mathbf{f} и q принадлежат следующим классам:

$$\mu \in W_{\infty}^1(\Omega) : \quad \mu_1 \leq \mu(x) \leq \mu_2, \quad x \in \Omega, \quad \mu_1 = \operatorname{const} > 0, \quad \mu_2 = \operatorname{const} \geq \mu_1;$$

$$k \in W_{\infty}^1(\Omega) : \quad k_1 \leq k(x) \leq k_2, \quad x \in \Omega, \quad k_1 = \operatorname{const} > 0, \quad k_2 = \operatorname{const} \geq k_1;$$

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega), \quad q \in L_2(\Omega).$$

2. Вспомогательные задачи

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\nabla \cdot (k \nabla y) = -q, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$\partial y / \partial \mathbf{n} = u, \quad x \in \Gamma_1, \quad (2.2)$$

$$y = w, \quad x \in \Gamma_2. \quad (2.3)$$

Решение этой краевой задачи будет пониматься в слабом смысле как элемент пространства $y \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} y \nabla \cdot (k \nabla \varphi) dx = \int_{\Gamma_2} k w \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} k u \varphi d\Gamma - \int_{\Omega} q \varphi dx \quad \forall \varphi \in G(\Omega). \quad (2.4)$$

Это тождество получается из уравнения (2.1) умножением его на функцию $\varphi \in G(\Omega)$, интегрированием результата по Ω и последующим применением второй формулы Грина с учетом граничных значений функций y и φ .

Теорема 1. *Каковы бы ни были $q \in L_2(\Omega)$, $u \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$, краевая задача (2.1)–(2.3) имеет единственное слабое решение, удовлетворяющее неравенству*

$$\|y\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|q\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|u\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)}, \quad (2.5)$$

где C_1 , C_2 , C_3 — некоторые положительные константы, вычисляемые по известным исходным данным задачи и не зависящие от оцениваемых величин.

Доказательство теоремы осуществляется методом транспонирования [15, с. 78–80] (см. также [1, 16, 17]).

Легко проверить, что пара функций (T, \mathbf{v}) будет являться слабым решением краевой задачи (1.1)–(1.6) тогда и только тогда, когда пара функций (\tilde{T}, \mathbf{v}) , где $\tilde{T} = T - y$, будет являться слабым решением следующей краевой задачи с однородными граничными условиями:

$$\nabla \cdot (\mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t]) = \nabla p - \text{Ra} (\tilde{T} + y) \mathbf{g} - \mathbf{f}, \quad x \in \Omega, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot (k \nabla \tilde{T}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \tilde{T} + \nabla y), \quad x \in \Omega, \quad (2.9)$$

$$\partial \tilde{T} / \partial \mathbf{n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad (2.10)$$

$$\tilde{T} = 0, \quad x \in \Gamma_2. \quad (2.11)$$

Вопрос о разрешимости краевой задачи (1.1)–(1.6) сводится к вопросу о разрешимости краевой задачи (2.6)–(2.11). Если (\tilde{T}, \mathbf{v}) — решение задачи (2.6)–(2.11), то (T, \mathbf{v}) , где $T = \tilde{T} + y$, есть решение задачи (1.1)–(1.6). Однако однородность граничных условий для составляющей \tilde{T} решения (\tilde{T}, \mathbf{v}) краевой задачи (2.6)–(2.11) позволяет сформулировать разрешимость этой задачи в усиленной формулировке. Введем понятие обобщенного решения краевой задачи (2.6)–(2.11). Под обобщенным решением этой задачи будем понимать пару функций $(\tilde{T}, \mathbf{v}) \in D(\Omega) \times \mathbf{H}(\Omega)$, удовлетворяющих тождествам

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t] \cdot [\nabla \boldsymbol{\eta} + (\nabla \boldsymbol{\eta})^t] dx \\ & = 2 \text{Ra} \int_{\Omega} (\tilde{T} + y) \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} dx + 2 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}(\Omega), \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\int_{\Omega} (k \nabla \varphi + \mathbf{v} \varphi) \cdot \nabla \tilde{T} dx = \int_{\Omega} y \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (2.13)$$

Тождество (2.12) выводится аналогично тождеству (1.7). Тождество (2.13) может быть получено из тождества (1.8) с учетом (2.4) и с помощью переброски части производных в левой части (1.8), при использовании формулы интегрирования по частям с функции φ на функцию \tilde{T} . При этом следует учесть граничные значения функций \mathbf{v} , \tilde{T} , φ , условие несжимаемости (1.2) и плотность $G(\Omega)$ в $D(\Omega)$ в мерике пространства $W_2^1(\Omega)$. Это же тождество можно получить из уравнения (1.4) умножением его на функцию $\varphi \in D(\Omega)$, интегрированием результата по Ω и применением формулы интегрирования по частям с учетом граничных значений функций \mathbf{v} , \tilde{T} , φ и условия несжимаемости (1.2).

Ясно, что классическое решение краевой задачи (2.6)–(2.11) будет являться обобщенным решением этой краевой задачи, а обобщенное решение краевой задачи (2.6)–(2.11) — слабым решением этой задачи. С другой стороны, достаточно гладкое слабое решение задачи (2.6)–(2.11) будет являться обобщенным решением этой же задачи, а достаточно гладкое обобщенное решение задачи (2.6)–(2.11) будет классическим решением этой же задачи. Приступим к исследованию обобщенного решения краевой задачи (2.6)–(2.11).

3. Априорные оценки обобщенного решения

Выведем некоторые априорные оценки для обобщенного решения $(\tilde{T}, \mathbf{v}) \in D(\Omega) \times \mathbf{H}(\Omega)$ краевой задачи (2.6)–(2.11). Подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{v}$ в тождество (2.12). Тогда, учитывая неравенство Корна (см., например, [18, с. 62–64]):

$$C_4 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t \right] \cdot \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t \right] dx = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 dx,$$

получим

$$\begin{aligned} \mu_1 C_4 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 &\leq 2 \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{R}^n} \text{Ra} \|\tilde{T} + y\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)} + 2 \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \left(2 \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{R}^n} \text{Ra} \|\tilde{T} + y\|_{L_2(\Omega)} + 2 \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \right) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Сократив это неравенство на $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)}$, имеем

$$\mu_1 C_4 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq 2 \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{R}^n} \text{Ra} \|\tilde{T} + y\|_{L_2(\Omega)} + 2 \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.1)$$

Подставим $\varphi = \tilde{T}$ в тождество (2.13). Считая, что $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$, выводим

$$\begin{aligned} k_1 \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} k \nabla \tilde{T} \cdot \nabla \tilde{T} dx = \int_{\Omega} k \nabla \tilde{T} \cdot \nabla \tilde{T} dx + \int_{\Omega} \tilde{T} \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{T} dx = \int_{\Omega} y \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{T} dx \\ &\leq n \int_{\Omega} |y| \|\mathbf{v}\|_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \tilde{T}\|_{\mathbb{R}^n} dx \leq n \|\mathbf{v}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|y\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Сокращая это неравенство на $\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)}$, имеем

$$k_1 \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq n \|\mathbf{v}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|y\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.2)$$

Для областей Ω из класса \mathfrak{K}_1 из результатов [7, гл. 3, § 5] и теорем вложения [13, гл. 1, § 8] (см. также [1]) следует утверждение: если $\tilde{T} + y \in L_2(\Omega)$, то для обобщенного решения \mathbf{v} задачи Стокса (2.6)–(2.8), удовлетворяющего тождеству (2.12), имеют место включения $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$ и справедливы оценки

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)} \leq C_5 \text{Ra} \left(\|\tilde{T} + y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \right), \quad (3.3)$$

$$\|\mathbf{v}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq C_6 \text{Ra} \left(\|\tilde{T} + y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \right). \quad (3.4)$$

Для областей Ω из класса \mathfrak{K}_2 , проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из работ [19, 20], и используя соответствующие теоремы вложения, получаем утверждение аналогичное предыдущему: если $\tilde{T} + y \in L_2(\Omega)$, то для обобщенного решения \mathbf{v} задачи Стокса (2.6)–(2.8), удовлетворяющего тождеству (2.12), имеют место включения $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$ и оценки (3.3), (3.4).

Для областей Ω из класса \mathfrak{K}_3 , проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из работ [21, 22], и используя соответствующие теоремы вложения, получаем: если $\tilde{T} + y \in L_2(\Omega)$, то для обобщенного решения \mathbf{v} задачи Стокса (2.6)–(2.8), удовлетворяющего тождеству (2.12), справедливы включения $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^{3/2}(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$, имеют место оценка (3.4) и оценка

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_2^{3/2}(\Omega)} \leq C_7 \text{Ra} \left(\|\tilde{T} + y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \right). \quad (3.5)$$

Из неравенства (3.4) и неравенства Пуанкаре — Фридрихса [13, с. 116; 14, с. 360, 361, 374]

$$\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq C_8 \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \quad (3.6)$$

следует неравенство

$$\|\mathbf{v}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C_6 \text{Ra} \left(C_8 \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \right). \quad (3.7)$$

Допустим, что для исходных данных краевой задачи выполняется условие

$$n C_6 C_8 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)} < k_1. \quad (3.8)$$

Ясно, что это условие заведомо выполняется, когда число Ra достаточно мало или когда

$$n C_6 C_8 \text{Ra} \left(C_1 \|q\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|u\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} \right) < k_1.$$

Из неравенств (3.2) и (3.7) получаем

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{n C_6 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)} \left(\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \right)}{k_1 - n C_6 C_8 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)}}. \quad (3.9)$$

Из неравенств (3.7) и (3.9) выводим

$$\|\mathbf{v}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \frac{k_1 C_6 \text{Ra} \left(\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \right)}{k_1 - n C_6 C_8 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)}}. \quad (3.10)$$

Из неравенств (3.1), (3.6) и (3.9) имеем

$$\mu_1 C_4 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq 2 \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{R}^n} \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)} \frac{k_1 + n C_6 C_8 \text{Ra} \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}}{k_1 - n C_6 C_8 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)}} + 2 \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.11)$$

Для областей Ω из классов \mathfrak{K}_1 или \mathfrak{K}_3 из неравенств (3.3), (3.6) и (3.9) получаем

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)} \leq C_5 \text{Ra} \frac{k_1 \left(\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \right)}{k_1 - n C_6 C_8 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)}}. \quad (3.12)$$

Для областей Ω из класса \mathfrak{K}_2 из неравенств (3.5), (3.6) и (3.9) получаем

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}_2^{3/2}(\Omega)} \leq C_7 \text{Ra} \frac{k_1 \left(\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} \right)}{k_1 - n C_6 C_8 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)}}. \quad (3.13)$$

Сформулируем получившийся результат в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть функции $\tilde{T} \in D(\Omega)$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\Omega)$ удовлетворяют тождествам (2.12) и (2.13). Тогда для областей Ω из класса \mathfrak{K}_1 или \mathfrak{K}_2 имеют место включения $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_\infty(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$ и справедливы неравенства (3.1)–(3.4), а при выполнении условия (3.8) дополнительно выполняются неравенства (3.9)–(3.12). Для областей Ω из класса \mathfrak{K}_3 имеют место включения $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_\infty(\Omega)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^{3/2}(\Omega)$ и справедливы неравенства (3.1), (3.2), (3.4), (3.5), а при выполнении условия (3.8) дополнительно выполняются неравенства (3.9)–(3.11), (3.13).

4. Единственность обобщенного решения

Предположим, что краевая задача (2.6)–(2.11) имеет два обобщенных решения $(\tilde{T}_1, \mathbf{v}_1)$ и $(\tilde{T}_2, \mathbf{v}_2)$, удовлетворяющих тождествам (2.12), (2.13). Тогда разность этих решений $(\tilde{T}_*, \mathbf{v}_*)$, где $\tilde{T}_* = \tilde{T}_1 - \tilde{T}_2$, $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, будет удовлетворять следующим тождествам:

$$\int_{\Omega} \mu \left[\nabla \mathbf{v}_* + (\nabla \mathbf{v}_*)^t \right] \cdot \left[\nabla \boldsymbol{\eta} + (\nabla \boldsymbol{\eta})^t \right] dx = 2 \text{Ra} \int_{\Omega} \tilde{T}_* \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (4.1)$$

$$\int_{\Omega} (k \nabla \varphi + \mathbf{v}_1 \varphi) \cdot \nabla \tilde{T}_* dx = \int_{\Omega} (y + \tilde{T}_2) \mathbf{v}_* \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (4.2)$$

Из тождеств (4.1) и (4.2) можно вывести неравенства, аналогичные (3.2), (3.4) и (3.1):

$$k_1 \|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)} \leq n \|\mathbf{v}_*\|_{L_\infty(\Omega)} (\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\tilde{T}_2\|_{L_2(\Omega)}), \quad (4.3)$$

$$\|\mathbf{v}_*\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C_6 \text{Ra} C_8 \|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)}, \quad (4.4)$$

$$\mu_1 C_4 \|\mathbf{v}_*\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq 2 \text{Ra} \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{R}^n} \|\tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)}. \quad (4.5)$$

Допустим, что для исходных данных краевой задачи выполняется условие

$$n C_6 C_8 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)} (2k_1 + n C_6 C_8 \text{Ra} \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}) < k_1^2. \quad (4.6)$$

Ясно, что при этом выполняется также условие (3.8), а для решений $(\tilde{T}_1, \mathbf{v}_1)$ и $(\tilde{T}_2, \mathbf{v}_2)$ выполняются все априорные оценки, полученные в предыдущем разделе.

Из неравенств (4.3) и (4.4)₂ учитывая неравенство Пуанкаре — Фридрихса (3.6) и неравенство (3.9), справедливое для \tilde{T}_2 , выводим неравенство

$$\begin{aligned} & (k_1 - n C_6 C_8 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)})^2 \|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq (n C_6 C_8 \text{Ra})^2 \|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)} \|y\|_{L_2(\Omega)} (\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.6) следует, что (4.7) возможно только в случае $\|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)} = 0$. Тогда из оценки (4.4) имеем $\mathbf{v}_* = 0$, а из вариационного равенства (4.1) — $\tilde{T}_* = 0$. Отсюда следует единственность обобщенного решения $\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Сформулируем получившийся результат в виде теоремы.

Теорема 3. *Если исходные данные краевой задачи (2.6)–(2.11) удовлетворяют условию (4.6), то эта краевая задача может иметь не более одного обобщенного решения.*

5. Существование обобщенного решения

Пусть для исходных данных краевой задачи (2.6)–(2.11) выполняется условие (4.6). Докажем, что при выполнении этого условия существует обобщенное решение (\tilde{T}, \mathbf{v}) краевой задачи (2.6)–(2.11) в пространстве $D(\Omega) \times \mathbf{H}(\Omega)$. Рассмотрим в пространстве $D(\Omega)$ подмножество $D_*(\Omega)$, состоящее из функций, удовлетворяющих неравенству вида (3.9):

$$D_*(\Omega) = \left\{ \psi \in D(\Omega) : \|\nabla \psi\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{n C_6 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)} (\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)})}{k_1 - n C_6 C_8 \text{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)}} \right\}.$$

Множество $D_*(\Omega)$ является замкнутым подмножеством в гильбертовом пространстве $D(\Omega)$ и, следовательно, полным метрическим пространством с естественным расстоянием, индуцированным нормой пространства $D(\Omega)$.

Введем в рассмотрение оператор

$$A : D_*(\Omega) \ni \psi \rightarrow A(\psi) = \zeta \in D_*(\Omega),$$

действующий по следующему правилу. Сначала по элементу $\psi \in D_*(\Omega)$ находится элемент $\xi \in \mathbf{H}(\Omega)$, удовлетворяющий вариационному равенству

$$\int_{\Omega} \mu \left[\nabla \xi + (\nabla \xi)^t \right] \cdot \left[\nabla \eta + (\nabla \eta)^t \right] dx \quad (5.1)$$

$$= 2 \operatorname{Ra} \int_{\Omega} (\psi + y) \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx + 2 \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}(\Omega).$$

Затем по элементу $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}(\Omega)$ находится элемент $A(\psi) = \zeta \in D_*(\Omega)$, удовлетворяющий вариационному равенству

$$\int_{\Omega} (k \nabla \varphi + \varphi \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla \zeta \, dx = \int_{\Omega} y \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (5.2)$$

Покажем, что оператор A определен корректно. Существование элемента $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}(\Omega)$, удовлетворяющего вариационному равенству (5.1) при фиксированных $\psi \in D_*(\Omega)$, $y \in L_2(\Omega)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega)$, следует из результатов [7, гл. 2, § 1]. При этом (см. рассуждения в разд. 3) для $\boldsymbol{\xi}$ имеют место включения $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$ и $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$ для областей класса \mathfrak{K}_1 или класса \mathfrak{K}_2 , $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$ и $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{W}_2^{3/2}(\Omega)$ для областей класса \mathfrak{K}_3 ; справедливы также неравенства вида (3.1), (3.2), (3.4), (3.7). Из этих неравенств, а также неравенств (3.6), (3.8) и включения $\psi \in D_*(\Omega)$ получаем неравенства вида (3.9), (3.10), (3.11). Существование элемента $\zeta \in D(\Omega)$, удовлетворяющего вариационному равенству (5.2) при фиксированных $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}(\Omega)$, $y \in L_2(\Omega)$, следует из результатов [13, гл. 2]. При этом (см. рассуждения в разд. 3) для ζ имеет место неравенство вида (3.2). Из этого неравенства и неравенств, указанных выше для $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}(\Omega)$, получаем неравенство вида (3.9). Последнее означает, что $\zeta \in D_*(\Omega)$. Итак, оператор A определен корректно, он отображает множество $D_*(\Omega)$ в себя.

Докажем теперь, что оператор A является сжимающим. Предварительно заметим, если $A(\psi_1) = \zeta_1$, $A(\psi_2) = \zeta_2$, то разности $\zeta_* = \zeta_1 - \zeta_2$, $\psi_* = \psi_1 - \psi_2$, $\boldsymbol{\xi}_* = \boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2$, где $\boldsymbol{\xi}_1$ соответствует ψ_1 , а $\boldsymbol{\xi}_2$ соответствует ψ_2 при определении значения отображения A , удовлетворяют вариационным равенствам вида (4.1), (4.2) и неравенствам вида (4.3), (4.4), (4.5):

$$\int_{\Omega} \mu \left[\nabla \boldsymbol{\xi}_* + (\nabla \boldsymbol{\xi}_*)^t \right] \cdot \left[\nabla \boldsymbol{\eta} + (\nabla \boldsymbol{\eta})^t \right] \, dx = 2 \operatorname{Ra} \int_{\Omega} \psi_* \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dx \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} (k \nabla \varphi + \varphi \boldsymbol{\xi}_*) \cdot \nabla \zeta_* \, dx = \int_{\Omega} (y + \zeta_2) \boldsymbol{\xi}_* \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

$$k_1 \|\nabla \zeta_*\|_{L_2(\Omega)} \leq n \|\boldsymbol{\xi}_*\|_{L_{\infty}(\Omega)} (\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}), \quad (5.3)$$

$$\|\boldsymbol{\xi}_*\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq C_6 \operatorname{Ra} C_8 \|\nabla \psi_*\|_{L_2(\Omega)}, \quad (5.4)$$

$$\mu_1 C_4 \|\boldsymbol{\xi}_*\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq 2 \operatorname{Ra} \|\mathbf{g}\|_{\mathbb{R}^n} \|\psi_*\|_{L_2(\Omega)}. \quad (5.5)$$

Опираясь на (5.3)–(5.5), получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \rho(A(\psi_1), A(\psi_2)) &= \rho(\zeta_1, \zeta_2) = \|\nabla \zeta_1 - \nabla \zeta_2\|_{L_2(\Omega)} = \|\nabla \zeta_*\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq k_1^{-1} n \|\boldsymbol{\xi}_*\|_{L_{\infty}(\Omega)} (\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}) \leq k_1^{-1} n C_6 \operatorname{Ra} C_8 \|\nabla \psi_*\|_{L_2(\Omega)} (\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)}) \\ &\leq k_1^{-1} n C_6 C_8 \operatorname{Ra} \|\nabla \psi_*\|_{L_2(\Omega)} \left(\|y\|_{L_2(\Omega)} + \frac{n C_6 C_8 \operatorname{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)} (\|y\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)})}{k_1 - n C_6 C_8 \operatorname{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)}} \right) \\ &= \frac{n C_6 C_8 \operatorname{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)} (k_1 \|y\|_{L_2(\Omega)} + n C_6 C_8 \operatorname{Ra} \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)})}{k_1 (k_1 - n C_6 C_8 \operatorname{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)})} \|\nabla \psi_*\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \gamma \|\nabla \psi_*\|_{L_2(\Omega)} = \gamma \rho(\psi_1, \psi_2), \\ \gamma &= \frac{n C_6 C_8 \operatorname{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)} (k_1 \|y\|_{L_2(\Omega)} + n C_6 C_8 \operatorname{Ra} \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)})}{k_1 (k_1 - n C_6 C_8 \operatorname{Ra} \|y\|_{L_2(\Omega)})}. \end{aligned}$$

Если выполнено неравенство (4.6), то $0 < \gamma < 1$ и оператор A является сжимающим. Таким образом, оператор A является сжимающим, действующим из полного метрического пространства $D_*(\Omega)$ в себя. Тогда, согласно теореме Банаха о неподвижной точке [23, с. 88] существуют единственный элемент $\tilde{T} \in D_*(\Omega)$ и соответствующий ему единственный элемент $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega)$ такие, что $A(\tilde{T}) = \tilde{T}$, причем пара (\tilde{T}, \mathbf{u}) является обобщенным решением краевой задачи (2.6)–(2.11). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 4. *Если исходные данные краевой задачи (1.1)–(1.6) таковы, что $u \in L_2(\Gamma_1)$, $w \in L_2(\Gamma_2)$ и выполняется неравенство (4.6), то ее слабое решение $(T, \mathbf{v}) \in L_2(\Omega) \times \mathbf{H}(\Omega)$, удовлетворяющее тождествам (1.7), (1.8), существует и единственно. Кроме того, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_\infty(\Omega)$; для областей Ω из классов \mathfrak{K}_1 и \mathfrak{K}_2 имеет место включение $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$; для областей Ω из класса \mathfrak{K}_3 справедливо включение $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^{3/2}(\Omega)$. Компонента T слабого решения может быть представлена в виде суммы $T = \tilde{T} + y$, состоящей из компоненты $\tilde{T} \in D(\Omega)$ обобщенного решения $(\tilde{T}, \mathbf{v}) \in D(\Omega) \times \mathbf{H}(\Omega)$ краевой задачи (2.6)–(2.11) с однородными граничными условиями для \tilde{T} и слабого решения $y \in L_2(\Omega)$ вспомогательной задачи (2.1)–(2.3) с неоднородными граничными условиями. Для слабого решения и его составляющих справедливы оценки: (2.5), (3.1)–(3.5), (3.7), (3.9)–(3.13).*

6. Гладкость слабого решения

Пусть $u \in L_2(\Gamma_1)$, $w = z|_{\Gamma_2}$, где $z \in W_2^1(\Omega)$. В этом случае решение будет более гладким.

Из результатов работ [16] (для краевых условий первого рода) и [17] (для краевых условий второго рода) для слабого решения y краевой задачи (2.1)–(2.3) получаем, что $y \in W_2^1(\Omega)$ и

$$\|y\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_9 \|q\|_{L_2(\Omega)} + C_{10} \|u\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_{11} \|z\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad (6.1)$$

причем y удовлетворяет также вариационному равенству

$$\int_{\Omega} k \nabla y \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Gamma_1} k u \varphi \, d\Gamma + \int_{\Omega} q \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (6.2)$$

Таким образом, в краевой задаче (2.6)–(2.11) имеем $y \in W_2^1(\Omega)$. Тогда из [10, гл. 3, § 9] (см. также [16, 17]) имеем $\tilde{T} \in G(\Omega)$, $T = \tilde{T} + y \in W_2^1(\Omega)$, причем T удовлетворяет вариационному равенству

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla \tilde{T}) \varphi \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\nabla \tilde{T} + \nabla y) \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in L_2(\Omega), \quad (6.3)$$

а также для почти всех $x \in \Omega$ равенству

$$\nabla \cdot (k(x) \nabla \tilde{T}(x)) = \mathbf{v}(x) \cdot (\nabla \tilde{T}(x) + \nabla y(x)). \quad (6.4)$$

Из (6.3) или (6.4) легко выводится неравенство

$$k_1 \|\Delta \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\nabla k\|_{L_\infty(\Omega)} \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + n \|\mathbf{v}\|_{L_\infty(\Omega)} (\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla y\|_{L_2(\Omega)}). \quad (6.5)$$

Теорема 5. *Если исходные данные краевой задачи (1.1)–(1.6) таковы, что $u \in L_2(\Gamma_1)$, $w = z|_{\Gamma_2}$, $z \in W_2^1(\Omega)$, и выполняется неравенство (4.6), то ее слабое решение (T, \mathbf{v}) , удовлетворяющее тождествам (1.7), (1.8), помимо свойств, указанных в теореме 4, удовлетворяет следующим дополнительным свойствам. Для компоненты T слабого решения имеет место включение $T \in W_2^1(\Omega)$, причем в представлении $T = \tilde{T} + y$, $\tilde{T} \in G(\Omega)$, $y \in W_2^1(\Omega)$. При этом составляющая y удовлетворяет вариационному равенству (6.2) и для нее справедлива оценка (6.1). Составляющая \tilde{T} удовлетворяет вариационному равенству (6.3), равенству (6.4) и оценке (6.5).*

Из результатов [7, гл. 3, § 5] следует, что с повышением гладкости границы области Ω и гладкости функций \mathbf{f} , μ , k , гладкость компоненты \mathbf{v} слабого решения также повышается.

Пусть теперь $u = \partial z / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_1}$, $w = z|_{\Gamma_2}$, где $z \in W_2^2(\Omega)$. В этом случае слабое решение задачи (1.1)–(1.6) будет еще более гладким.

Из результатов работ [16] (для краевых условий первого рода) и [17] (для краевых условий второго рода) для слабого решения y краевой задачи (2.1)–(2.3) получаем, что $y \in W_2^2(\Omega)$ и

$$\|y\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C_{12} \|q\|_{L_2(\Omega)} + C_{13} \|z\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad (6.6)$$

причем y удовлетворяет также вариационному равенству

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (k \nabla y) \varphi \, dx = - \int_{\Omega} q \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in L_2(\Omega), \quad (6.7)$$

а также для почти всех $x \in \Omega$ равенству

$$\nabla \cdot (k(x) \nabla y(x)) = -q(x). \quad (6.8)$$

Таким образом, в краевой задаче (2.6)–(2.11) имеем $y \in W_2^2(\Omega)$. Тогда из [10, гл. 3, § 9] (см. также [16, 17]) имеем $\tilde{T} \in G(\Omega)$, $T = \tilde{T} + y \in W_2^2(\Omega)$, причем \tilde{T} удовлетворяет вариационному равенству (6.3), для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет равенству (6.4), а также удовлетворяет оценке (6.5).

Теорема 6. *Если исходные данные краевой задачи (1.1)–(1.6) таковы, что $u = \partial z / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_1}$, $w = z|_{\Gamma_2}$, $z \in W_2^2(\Omega)$, и выполняется неравенство (4.6), то ее слабое решение (T, \mathbf{v}) , удовлетворяющее тождествам (1.7), (1.8), помимо свойств, указанных в теоремах 4 и 5, удовлетворяет следующим дополнительным свойствам. Для компоненты T слабого решения имеет место включение $T \in W_2^2(\Omega)$, причем в представлении $T = \tilde{T} + y$, $\tilde{T} \in G(\Omega)$, $y \in W_2^2(\Omega)$. При этом составляющая y удовлетворяет вариационному равенству (6.7), для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет равенству (6.8), а также удовлетворяет оценке (6.6).*

7. О разрешимости задачи с разрывными коэффициентами

Пусть в этом разделе функции μ , k , u и w принадлежат следующим классам:

$$\mu \in L_{\infty}(\Omega) : \quad \mu_1 \leq \mu(x) \leq \mu_2, \quad x \in \Omega, \quad \mu_1 = \text{const} > 0, \quad \mu_2 = \text{const} \geq \mu_1; \quad (7.1)$$

$$k \in L_{\infty}(\Omega) : \quad k_1 \leq k(x) \leq k_2, \quad x \in \Omega, \quad k_1 = \text{const} > 0, \quad k_2 = \text{const} \geq k_1; \quad (7.2)$$

$$u \in L_2(\Gamma_1), \quad w = z|_{\Gamma_2}, \quad z \in W_2^1(\Omega); \quad (7.3)$$

все остальные параметры задачи (1.1)–(1.6) удовлетворяют прежним условиям. Классы (7.1), (7.2) часто применяются в приложениях при моделировании неоднородных, в частности, кучно-однородных сред.

Условие (7.3) с помощью замены искомой функции $\tilde{y} = y - z$ позволяет во вспомогательной краевой задаче (2.1)–(2.3) “перебросить” неоднородные граничные данные w в граничном условии (2.3) в “правую часть” и сделать это граничное условие однородным

$$\nabla \cdot (k \nabla \tilde{y}) = -\nabla \cdot (k \nabla z) - q, \quad x \in \Omega, \quad (7.4)$$

$$\partial(\tilde{y} + z) / \partial \mathbf{n} = u, \quad x \in \Gamma_1, \quad (7.5)$$

$$\tilde{y} = 0, \quad x \in \Gamma_2. \quad (7.6)$$

Условия (7.1) и (7.2) позволяют ввести понятие обобщенного решения краевой задачи (7.4)–(7.6) как функцию $\tilde{y} \in D(\Omega)$, удовлетворяющую вариационному равенству

$$\int_{\Omega} k \nabla \tilde{y} \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_{\Omega} k \nabla z \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Gamma_1} k u \varphi \, d\Gamma + \int_{\Omega} q \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (7.7)$$

Существование и единственность обобщенного решения краевой задачи (7.4)–(7.6) следует из результатов работ [10, гл. 3, § 5, 6; 13, гл. 2, § 3–5]. Разрешимость этой задачи легко также доказывается с помощью теоремы Лакса – Мильграма (см. аналогичные рассуждения в [1]). При $\varphi = \tilde{y}$ из (7.7) вытекает следующая оценка:

$$k_1 \|\nabla \tilde{y}\|_{L_2(\Omega)} \leq k_2 \|\nabla z\|_{L_2(\Omega)} + k_2 C_{14} \|u\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_{15} \|q\|_{L_2(\Omega)}. \quad (7.8)$$

Возвращаясь к функции $y = \tilde{y} + z$, получаем, что $y \in W_2^1(\Omega)$, $y|_{\Gamma_2} = z|_{\Gamma_2} = w$ и

$$k_1 \|\nabla y\|_{L_2(\Omega)} \leq (k_1 + k_2) \|\nabla z\|_{L_2(\Omega)} + k_2 C_{14} \|u\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_{15} \|q\|_{L_2(\Omega)}, \quad (7.9)$$

$$\|y\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_{16} \|z\|_{W_2^1(\Omega)} + C_{17} \|u\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_{18} \|q\|_{L_2(\Omega)}. \quad (7.10)$$

Далее, условия (7.1), (7.2) позволяют перейти к обобщенному решению $(\tilde{T}, \mathbf{v}) \in D(\Omega) \times \mathbf{H}(\Omega)$ краевой задачи (2.6)–(2.11), удовлетворяющему вариационным равенствам (2.12) и (2.13), которое подробно исследовалось выше. При этом $T = \tilde{T} + y \in W_2^1(\Omega)$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 7. *Если для исходных данных краевой задачи (1.1)–(1.6) выполняются условия (7.1)–(7.3) и неравенство (4.6), то ее слабое решение $(T, \mathbf{v}) \in L_2(\Omega) \times \mathbf{H}(\Omega)$ существует и единственно. При этом компонента T слабого решения представима в виде суммы $T = \tilde{T} + y$, $y = \tilde{y} + z$, и удовлетворяет включению $T \in W_2^1(\Omega)$; составляющая $\tilde{y} \in D(\Omega)$ удовлетворяет вариационному равенству (7.7); составляющая $\tilde{T} \in D(\Omega)$ и функция $\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\Omega)$ удовлетворяют вариационным равенствам (2.12) и (2.13). Кроме того, $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_\infty(\Omega)$. Для слабого решения и его составляющих справедливы оценки: (7.8)–(7.10), (3.1), (3.2), (3.4), (3.7), (3.9)–(3.11).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** О разрешимости стационарных задач естественной тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 61–73.
2. **Ковтунов Д.А.** Разрешимость стационарной задачи тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 1. С. 74–85.
3. **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Науч. кн., 1999. 352 с.
4. **Алексеев Г.В., Терешко Д.А.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 364 с.
5. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. N. Y.: Dover Publications, 1981. 654 p.
6. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. 736 с.
7. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961. 203 с.
8. **Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 320 с.
9. **Adams R.A.** Sobolev spaces. N. Y.: Acad. Press, 1975. 268 p.
10. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
11. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.

12. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
13. **Ладженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
14. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 5. М.: Физматлит, 1959. 657 с.
15. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
16. **Короткий А.И.** Зависимость решений эллиптических уравнений от коэффициентов и приложение к корректности задач оптимального управления // Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. С. 20–33.
17. **Короткий А.И.** Прямые и обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1993. 331 с.
18. **Литвинов В.Г.** Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 368 с.
19. **Kellogg R.B., Osborn J.E.** A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon // J. Funct. Anal. 1976. Vol. 21, no. 4. P. 397–431.
20. **Dauge M.** Stationary Stokes and Navier–Stokes systems on two- or three-dimensional domains with corners. Part I: Linearized equations // SIAM J. Math. Anal. 1989. Vol. 20, no. 1. P. 74–97.
21. **Brown R.M., Shen Z.** Estimates for the Stokes operator in Lipschitz domains // Indiana Univ. Math. J. 1995. Vol. 44, no. 4. P. 1183–1206.
22. **Brown R.M., Perry P.A., Shen Z.** On the dimension of the attractor for the non-homogenous Navier–Stokes equations in non-smooth domains // Indiana Univ. Math. J. 2000. Vol. 49, no. 1. P. 81–112.
23. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Короткий Александр Илларионович

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Поступила 26.10.2009

УДК 512.54

О РАЗЛИЧИИ БЕРНСАЙДОВЫХ ГРУПП $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$ ¹**А. А. Кузнецов, А. К. Шлёпкин**

В статье описан алгоритм для вычисления элементов и соотношений в бернсайдовых группах. После чего сделан сравнительный анализ групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$. Показано, что в формате минимальных слов данные группы совпадают до слов длины 29. На длинах 30–35 в группе $B_0(2, 5)$ найдены такие соотношения, что невыполнение хотя бы одного из которых в $B(2, 5)$ будет означать бесконечность данной группы.

Ключевые слова: проблема Бернсайда.

A. A. Kuznetsov, A. K. Shlepin. On the difference of the Burnside groups $B(2; 5)$ and $B_0(2; 5)$.

An algorithm for calculating elements and relations in Burnside groups is described. A comparative analysis of the groups $B(2; 5)$ and $B_0(2; 5)$ is carried out. It is shown that these groups coincide in the minimal word format up to words of length 29. For lengths of 30–35, relations are found in the group $B_0(2; 5)$ such that a violation of at least one of them in $B(2; 5)$ would mean the infinity of this group.

Keywords: Burnside problem.

Введение

В данной работе мы следуем определениям и обозначениям из [1]. В указанной работе был предложен алгоритм для вычисления элементов и соотношений в бернсайдовых группах в формате минимальных слов, основанный на групповом свойстве однозначности разрешения уравнения вида $ax = b$. Также в [1] было показано, что в формате минимальных слов группы $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$ совпадают на словах до длины 27 включительно.

В разд. 1 настоящей работы подробно описан новый алгоритм для вычисления элементов и соотношений в бернсайдовых группах в формате минимальных слов, основанный на свойстве ассоциативности групповой операции. При помощи данного алгоритма для бернсайдовой группы $B(m, n)$ строится последовательность специальных объектов $K_s(m, n)$, каждый из которых состоит из последовательности слов P_s , не превышающих по длине s , алгоритма обработки слов A_s и списка соотношений C_s , получаемого при помощи A_s . Имеет место равенство $\lim_{s \rightarrow \infty} K_s(m, n) = B(m, n)$.

В разд. 2 продолжен начатый в [1] сравнительный анализ групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$ до слов длины 35. Показано, что в формате минимальных слов данные группы совпадают на словах с длинами ≤ 29 . На длинах 30–35 в группе $B_0(2, 5)$ найден ряд таких соотношений, что невыполнение хотя бы одного из которых в $B(2, 5)$ будет означать бесконечность данной группы.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/3023), а также РФФИ (проекты 09-01-00717-а и 10-01-00509-а).

1. Описание алгоритма

1.1. Основные определения, используемые в работе

Запишем

$$B(m, n) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid g^n = e \rangle$$

— свободная бернсайдова группа периода n с множеством свободных порождающих $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, e — единица группы $B(m, n)$ и g — произвольный элемент из $B(m, n)$. На множестве элементов $B(m, n)$ введем отношение порядка “ \prec ” по правилу из [1]. Тогда для любого $g \in B(m, n)$ существует единственное минимальное слово v , представляющее данный элемент [1].

Лемма 1. *Моноид (полугруппа с единицей), в котором каждый элемент имеет конечный порядок, является группой.*

Доказательство. Пусть G — моноид, e — его единица и n_g — порядок элемента g из G , т. е. $g^{n_g} = e$. Покажем, что у g есть единственный обратный элемент $g^{-1} = g^{n_g-1}$. Действительно, $g^{-1}g = g^{n_g-1}g = g^{n_g} = e$ и $gg^{-1} = gg^{n_g-1} = g^{n_g} = e$, т. е. левый и правый обратные элементы совпадают. Предположим, что у g есть обратный элемент h , отличный от g^{n_g-1} . Тогда $hg = e$. Домножим данное равенство справа на g^{n_g-1} , получим $(hg)g^{n_g-1} = h(gg^{n_g-1}) = h = g^{n_g-1}$, что означает единственность обратного элемента. Таким образом, в G выполнены все групповые аксиомы. Лемма доказана.

1.2. Определение $K_1(m, n) = (P_1, A_1, C_1)$

Положим $P_1 = \{e \prec x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_m\}$ — множество слов, состоящее из пустого слова и слов, имеющих длину 1, упорядоченных относительно введенного выше порядка “ \prec ”. Следовательно, P_1 является упорядоченным множеством образующих группы $B(m, n)$ с единицей.

$A_1(w)$ — алгоритм n -апериодичности, который преобразует любое слово w в n -апериодическое слово. Опишем работу данного алгоритма.

1. Задаем исходное слово w .
2. Делаем проверку $w = px^nq$ (*).
 - 2.1. Если (*) выполняется, то $w = pq$. Возврат в п. 1.
 - 2.2. Если (*) не выполняется, то w — n -апериодическое слово. Алгоритм завершен.

Отметим, что либо $A_1(v) = v$ (т. е. алгоритм действует тождественно), либо $A_1(v) \prec v$.

$C_1 = \emptyset$ — список соотношений.

1.3. Построение $K_s(m, n)$ для $s > 1$

Определим

$$P_s^{(0)} = \underbrace{e \prec x_1 \prec \dots \prec x_m \prec \dots \prec \overbrace{v_1 \prec \dots \prec v_r}^{\text{слова длины } s-1}}_{P_{s-1}} \prec \underbrace{x_1v_1 \prec \dots \prec x_1v_r \prec \dots \prec x_mv_1 \prec \dots \prec x_mv_r}_{\text{слова длины } s}.$$

Таким образом, построение $P_s^{(0)}$ осуществляется добавлением к P_{s-1} упорядоченных слов длины s , которые получаются последовательным приписыванием образующих $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ к словам длины $s - 1$, взятых из P_{s-1} .

Обработаем каждое слово из $P_s^{(0)}$ алгоритмом A_{s-1} . Как было отмечено $A_{s-1}(v) \preceq v$, поэтому после обработки слов из $P_s^{(0)}$ в преобразованной последовательности слов могут получаться одинаковые слова. Оставим в последовательности только те слова, которые инвариантны относительно действия алгоритма A_{s-1} :

$$P_s^{(1)} = \{v \mid v \in P_s^{(0)} \ \& \ A_{s-1}(v) = v\},$$

т. е. если $A_{s-1}(v) = w \prec v$, то слово v удаляется из последовательности.

Запишем

$$P_s^{(1)} = \{v_1 \prec v_2 \prec \dots \prec v_{m_s}\}.$$

Далее осуществляем следующую проверку

$$v = A_s^{(0)}(v_i A_s^{(0)}(v_j v_k)) = A_s^{(0)}(A_s^{(0)}(v_i v_j) v_k) = w, \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, m_s),$$

где по определению $A_s^{(0)} = A_{s-1}$.

Пусть для некоторых i, j и k слово v не будет равно слову w . Тогда мы получаем соотношение в $B(m, n) - g_v = g_w$ (поскольку в группе выполняется свойство ассоциативности операции).

Пусть $v \prec w$. Считая по определению $C_s^{(0)} = C_{s-1} = \{c_1, c_2, \dots, c_{r-1}\}$ и $c_r = \{v = w\}$, запишем

$$C_s^{(1)} = C_s^{(0)} \cup c_r = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}.$$

Далее строим алгоритм $A_s^{(1)} = A_s^{(0)} * A_{c_r}$. Опишем действие $A_s^{(0)}$ на словах, записав $C_s^{(0)}$ в следующем виде:

$$C_s^{(0)} = \{v_k = w_k, v_k \prec w_k \mid k = 1, 2, \dots, r-1\}.$$

1. Задаем исходное слово y .
2. $y = A_1(y)$, $k = 1$.
3. Делаем проверку $y = pw_kq$ (*).
 - 3.1. Если (*) выполняется, то $y = pv_kq$. Возвращаемся в п. 2.
 - 3.2. Если (*) не выполняется, то делаем проверку $k < r - 1$ (**).
 - 3.2.1. Если (**) выполняется, то $k = k + 1$, возвращаемся в п. 3.
 - 3.2.2. Если (**) не выполняется, алгоритм $A_s^{(0)}$ завершает работу.

Затем “домножая” $A_s^{(0)}$ на A_{c_r} , получим $A_s^{(1)}$, который действует на словах аналогично $A_s^{(0)}$, но индекс k пробегает значения от 1 до r .

Применяя алгоритм $A_s^{(1)}$ ко всем словам из $P_s^{(1)}$, получим $P_s^{(2)}$, инвариантную относительно $A_s^{(1)}$. В результате имеем

$$P_s^{(2)} = \{v_1 \prec v_2 \prec \dots \prec v_{m_{s'}}\}.$$

Теперь опять осуществляем проверку

$$v = A_s^{(1)}(v_i A_s^{(1)}(v_j v_k)) = A_s^{(1)}(A_s^{(1)}(v_i v_j) v_k) = w, \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, m_{s'}).$$

Если найдутся такие i, j и k , что $v \neq w$, то снова получаем соотношение в $B(m, n) - v = w$.

Поэтому, список $C_s^{(1)}$ пополнится новым соотношением $c_{r+1} = \{v = w\}$, т. е.

$$C_s^{(2)} = C_s^{(1)} \cup c_{r+1} = \{c_1, c_2, \dots, c_{r+1}\}.$$

Вслед за изменением списка соотношений изменятся также алгоритм и последовательность $(A_s^{(1)} \xrightarrow{c_{r+1}} A_s^{(2)} \text{ и } P_s^{(2)} \xrightarrow{A_s^{(2)}} P_s^{(3)})$.

Данный процесс будет продолжаться до тех пор, пока при каком-то z не будет выполняться $A_s^{(z-1)}(v_i A_s^{(z-1)}(v_j v_k)) = A_s^{(z-1)}(A_s^{(z-1)}(v_i v_j) v_k)$ для всех $v_i, v_j, v_k \in P_s^{(z)}$.

Когда это будет выполнено, мы получим, что $P_s = P_s^{(z)}$, $A_s = A_s^{(z-1)}$ и $C_s = C_s^{(z-1)}$. Таким образом, объект $K_s(m, n) = (P_s, A_s, C_s)$ построен.

1.4. Условие конечности группы $B(m, n)$

Пусть $K_s(m, n) = K_{s+1}(m, n)$ для некоторого s , т. е. $P_s = P_{s+1}$, $A_s = A_{s+1}$ и $C_s = C_{s+1}$. В этом случае группа $B(m, n)$ будет конечной. Покажем это.

Положим $K(m, n) = (P_s, A_s, C_s, *)$, где операция $*$ определена на всех элементах из P_s по следующему правилу: $\forall a, b \in P_s \ a * b = A_s(ab)$. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть s — наименьшее натуральное число со свойством $K_s(m, n) = K_{s+1}(m, n)$, тогда $K(m, n) \simeq B(m, n)$ и, в частности, $|B(m, n)| = |P_s|$.

Доказательство. Поскольку

$$K_s(m, n) = (P_s, A_s, C_s) = K_{s+1}(m, n) = (P_{s+1}, A_{s+1}, C_{s+1}),$$

то $P_s = P_{s+1} = P_{s+2} = \dots$. Другими словами, для любого слова w , $A_s(w) = v \in P_s$. Это означает, что $K(m, n)$ конечен, т. е. $\forall a, b \in P_s \ a * b = A_s(ab) = c \in P_s$. Покажем, что операция $*$ обладает свойством ассоциативности в $K(m, n)$. Действительно, $\forall a, b, c \in P_s \ a * (b * c) = A_s(aA_s(bc)) = A_s(A_s(ab)c) = (a * b) * c$, таким образом $K(m, n)$ является моноидом. Так как все элементы из $K(m, n)$ имеют конечный порядок, то по лемме 1 $K(m, n)$ является группой, изоморфной $B(m, n)$ по построению. $|K(m, n)| = |B(m, n)| = |P_s|$. Теорема доказана.

1.5. Условие бесконечности группы $B(m, n)$

Пусть теперь $\forall s \in \mathbb{N} \ K_s(m, n) \neq K_{s+1}(m, n)$. Отсюда следует $|P_s| < |P_{s+1}|$.

Определим $P = \lim_{s \rightarrow \infty} P_s$ следующим образом: $P = \{v_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ — бесконечная упорядоченная последовательность слов в алфавите образующих $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, обладающая следующим свойством: $\forall v \in P \ \exists r \in \mathbb{N} : \forall s \geq r \ v \in P_s$.

Определим $A(w) = \lim_{s \rightarrow \infty} A_s(w)$, где A — алгоритм, действующий на всех словах w в алфавите образующих $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ по правилу, указанному ниже. Пусть r наименьшее натуральное число такое, что для выбранного слова $w \ \forall s \geq r \ A_r(w) = A_s(w) = v \in P$. Положим $A(w) = A_r(w)$.

Покажем, что алгоритм A обладает следующим свойством: $\forall a, b, c \in P: A(aA(bc)) = A(A(ab)c)$. Пусть $L(a) = s_1$, $L(b) = s_2$, $L(c) = s_3$ и $s \geq (s_1 + s_2 + s_3)$ — такое наименьшее натуральное число, что $A(abc) = A_s(abc) = v \in P$. По определению алгоритма $A_s: A_s(aA_s(bc)) = A_s(A_s(ab)c)$, свойство доказано.

Определим $C = \lim_{s \rightarrow \infty} C_s$. $C = \{c_i \mid i = 1, 2, \dots\} = \{v_i = w_i, v_i \prec w_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ — бесконечный, упорядоченный относительно w_i список соотношений из $B(m, n)$, обладающий следующим свойством: $\forall c_i \in C \ \exists r \in \mathbb{N} : \forall s \geq r \ c_i \in C_s$.

Обозначим $\lim_{s \rightarrow \infty} K_s(m, n) = (P, A, C, *)$, где операция $*$ определена на всех элементах из P по следующему правилу: $\forall a, b \in P \ a * b = A(ab)$. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $s \in \mathbb{N}$ и для всех $s \ |P_s| < |P_{s+1}|$. Тогда $\lim_{s \rightarrow \infty} K_s(m, n) \simeq B(m, n)$ и, в частности, $B(m, n)$ бесконечна.

Доказательство. Для любого слова w в алфавите образующих $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ будет выполняться $A(w) = v \in P$. Это означает, что $\forall a, b \in P \ a * b = A(ab) = c \in P$. Покажем, что операция $*$ обладает свойством ассоциативности в $\lim_{s \rightarrow \infty} K_s(m, n)$. Действительно, $\forall a, b, c \in P \ a * (b * c) = A(aA(bc)) = A(A(ab)c) = (a * b) * c$, таким образом $\lim_{s \rightarrow \infty} K_s(m, n)$ является моноидом. Так как все элементы в $\lim_{s \rightarrow \infty} K_s(m, n)$ имеют конечный порядок, то по лемме 1 $\lim_{s \rightarrow \infty} K_s(m, n)$ является группой. По построению $\lim_{s \rightarrow \infty} K_s(m, n) = (P, A, C, *)$ — бесконечная свободная m -порожденная группа периода n , изоморфная $B(m, n)$. Теорема доказана.

2. Сравнительный анализ групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$

Т а б л и ц а

Некоторые соотношения в группе $B_0(2, 5)$

Длина	Соотношения
30	$122121121221121212211212212112 = 212121122112212121122112212121$ $121212211221121212211221121212 = 211212212112212121122121121221$
31	$1221122121211221122121212222111 = 2121122121121221121212211212212$ $1112222121212211221121212211221 = 2122121122121211221211212211212$ $1211212211212122112122121122121 = 2221111212121122112212121122112$ $1212211212212112212121122121121 = 2112211212122112211212121111222$ $112221121211222112121122111212 = 2121112211121211222112121122211$ $1121211222112121112211121211122 = 2211121211122111212112221121211$ $1221211212212112111122211112112 = 2112111122211112112122121121221$ $1122212122211222121221112212122 = 2212122111221212221122212122211$ $1221112112112111221211212212112 = 2112122121121221112112112111221$ $1212221122212122111221212211122 = 2211122121221112212122211222121$
32	$12211222121111211222212222121112 = 21211112121221122112112121112111$ $11211121222112111121121212111221 = 21111212112112211122121211112112$ (всего 47 соотношений)
33	$122212221112212211221122122112211 = 221111221122212211221112211221222$ $111122121212222112212212211122122 = 222212222121221111221221112221111$ (всего 70 соотношений)
34	$1112121221122112112121112111222211 = 2121211221122212111121122221222212$ $1221121222211121212212212221212211 = 2222122111122221211221212111122212$ (всего 259 соотношений)
35	$11212122112211212121111222121121121 = 22211122221212211212212112212121122$ $11112121122121122121121221122121211 = 22112121221121221211221212222111222$ (всего 585 соотношений)

Используя ЭВМ, для группы $B(2, 5)$ был вычислен объект $K_{35}(2, 5)$. Расчеты были проведены на кластере Института космических и информационных технологий Сибирского федерального университета. Для работы было выделено 125 однородных вычислительных узлов в режиме непрерывного доступа. Каждый узел снабжен процессором с тактовой частотой 3 ГГц и ОЗУ 4 ГБ. В качестве программного инструмента реализации была взята система компьютерной алгебры MATLAB 7.7.0 с подключенными дополнительными модулями MATLAB Distributed Computing Server и MATLAB Parallel Computing Toolbox. Общее время машинных вычислений $\approx 10^4$ часов. Было получено, что в формате минимальных слов $|C_{35}(2, 5)| = 104409$ и $|P_{35}(2, 5)| \approx 5^{14}$.

Пусть ψ — гомоморфизм группы $B(2, 5)$ на группу $B_0(2, 5)$, заданный правилом $\psi(g_v) \rightarrow k(h_v)$, где h_v — элемент, вычисленный по слову v в группе $B_0(2, 5)$, по аналогии с элементом g_v в группе $B(2, 5)$ [1]. При помощи компьютерных вычислений, используя ψ , получается минимально возможный список соотношений для группы $B_0(2, 5)$ в терминах $\{1, 2\}$ слов, поз-

воляющий из любого слова в указанном алфавите, не превышающего по длине 35, получить минимальное слово.

Путем сравнения компьютерных расчетов для групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$ были получены следующие результаты.

Теорема 3. Пусть v, w — два слова в алфавите образующих $\{1, 2\}$, $L(v) \leq 29$ и $L(w) \leq 29$. Тогда $v = w$ — соотношение в группе $B_0(2, 5)$ тогда и только тогда, когда $v = w$ — соотношение в группе $B(2, 5)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно вычисления.

Однако длина 30 явилась своеобразной “точкой расхождения” групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$. На длине 30 и последующих длинах в $B_0(2, 5)$ имеются соотношения, доказать справедливость которых в $B(2, 5)$ по алгоритму из разд. 1 и по алгоритму из [1] при применении соотношений, длины левой и правой части которых ≤ 35 , не удастся (см. табл.). Поэтому имеет место

Теорема 4. Если в группе $B(2, 5)$ не выполняется хотя бы одно соотношение из таблицы, то тогда группа $B(2, 5)$ бесконечна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Указанные выше соотношения справедливы в $B_0(2, 5)$. Например,

$$\begin{aligned} \psi(1221211212211212211212212112) &= \psi(212121122112212121122112212121) \\ &= 3^1 4^2 5^2 6^1 7^4 8^1 9^1 11^3 12^3 13^4 14^3 15^2 16^2 17^2 18^2 20^4 21^2 22^1 23^4 24^4 25^4 26^3 27^1 28^1 29^1 31^4 32^2 34^4. \end{aligned}$$

И так далее. Поэтому, если хотя бы одно из соотношений не будет выполняться в $B(2, 5)$, то $B(2, 5) \neq B_0(2, 5)$, а это означает бесконечность $B(2, 5)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов А.А., Шлёпкин А.К. Сравнительный анализ бернсайдовых групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 125–132.

Кузнецов Александр Алексеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой
Сибирский гос. аэрокосмич. ун-т
e-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru

Поступила 25.01.2010

Шлёпкин Анатолий Константинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Красноярский гос. аграрный ун-т
e-mail: ak_kgau@mail.ru

УДК 517.955

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СМЕШАННОЙ
ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ
ПРОИЗВОДНЫЕ ПО ВРЕМЕНИ**

Р. Ч. Кулаев

В работе рассматривается начально-краевая задача для параболического уравнения, заданного на геометрическом графе, с краевыми условиями, содержащими производную по времени. Устанавливается теорема существования решения краевой задачи, дающая представление решения в виде контурного интеграла.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение на графе, метод контурного интеграла.

R. Ch. Kulaev. Existence theorem for a parabolic mixed problem on a graph with boundary conditions containing time derivatives.

The initial-boundary value problem is considered for a parabolic equation on a geometric graph with boundary conditions containing a time derivative. The theorem on the existence of a solution of the boundary value problem is established, which allows one to represent solutions as contour integrals.

Keywords: differential equation on a graph, method of contour integral.

В настоящей работе рассматривается смешанная задача для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} u \right) + q(x) u, \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, T], \quad (0.1)$$

заданного на геометрическом графе Γ .

В каждой граничной вершине a графа Γ решение уравнения должно удовлетворять условию

$$\alpha(a) \frac{\partial}{\partial x} u(a, t) + \beta(a) \frac{\partial}{\partial t} u(a, t) + \delta(a) u(a, t) = F(a), \quad a \in \partial\Gamma, \quad t > 0, \quad (0.2)$$

а в каждой внутренней вершине a на решение уравнения (0.1) накладываются условия непрерывности и одно условие согласования

$$u_k(a, t) - u_{k_0}(a, t) = 0, \quad k, k_0 \in I(a),$$

$$\sum_{k \in I(a)} \alpha_k(a) \frac{\partial}{\partial x} u_k(a, t) + \beta_k(a) \frac{\partial}{\partial t} u_k(a, t) + \delta(a) u(a, t) = F(a), \quad a \in V. \quad (0.3)$$

В начальный момент времени $t = 0$ ставится условие

$$u(x, 0) = \Phi(x). \quad (0.4)$$

В формулах (0.1) и (0.4) полагаем $p \in C^2[\Gamma]$, $\inf_{x \in \Gamma} p(x) > 0$, $q \in C[\Gamma]$, $\Phi \in C^2[\Gamma] \cap C[\Gamma]$. В условиях (0.2), (0.3) $F(a)$ — числа, свои для каждой вершины графа, $\{\alpha_k(a)\}_{k \in I(a)}$, $\{\beta_k(a)\}_{k \in I(a)}$, $\delta(a)$ — наборы вещественных чисел. При этом считаем, что $\alpha_k(a) > 0$, $\beta_k(a) \geq 0$, $k \in I(a)$ для любой вершины. В условиях согласования (0.3) считаем, что все производные посчитаны в направлении к вершине a .

Рассматриваемая задача имеет естественную физическую интерпретацию. Она моделирует процесс распространения тепла в системе стержней, копирующей граф Γ . В узловых точках системы стержни могут быть спаяны или соединены муфтами, каждая из которых имеет свою теплоемкость, что выражается условиями (0.2), (0.3).

1. Предварительные сведения и обозначения

Под геометрическим графом в настоящей работе понимается одномерное стратифицированное многообразие, вложенное в \mathbb{R}^n и обозначаемое через Γ [1]. Ребра графа — это пространственные гладкие кривые, не имеющие самопересечений. Вершина графа — точка, являющаяся концом одного или нескольких ребер. Ребра графа и вершины заданы независимо друг от друга, при этом ребра графа обозначаются через γ или γ_k , если они занумерованы, а вершины — через a , a_j или b_j (при этом предполагается, что нумерация вершин независима от нумерации ребер).

Считая ребра графа Γ занумерованными, обозначим через V множество вершин графа, которые являются концевыми точками двух и более ребер. Такие вершины мы называем внутренними. Вершины графа, не принадлежащие V , будем называть граничными и обозначать их через $\partial\Gamma$. Если вершина a является концевой точкой ребра γ_k , то будем говорить, что ребро γ_k примыкает к вершине a . Множество индексов всех ребер, примыкающих к внутренней вершине a , обозначим $I(a)$. Всюду далее полагаем, что граф Γ является конечным и связным множеством в \mathbb{R}^n .

Под функцией на графе понимается обычное отображение $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$. Через u_k будем обозначать сужение функции u на ребро γ_k , т. е. $u_k(x) = u(x)$ при $x \in \gamma_k$, $u_k(x) \equiv 0$ при $x \in \Gamma \setminus \gamma_k$. Везде ниже полагаем, что все рассматриваемые функции равномерно непрерывны по переменной x на каждом ребре графа. Множество всех таких функций мы обозначим через $C[\Gamma]$. Далее, если a — произвольная вершина (граничная или внутренняя) графа Γ , то под $u_k(a)$ понимается $\lim_{x \rightarrow a} u_k(x)$, $x \in \gamma_k$.

Дифференцирование функций по переменной $x \in \Gamma$ на каждом ребре $\gamma \in \Gamma$ осуществляется по параметру, причем подразумевается, что для этого ребро параметризовано в одном из двух возможных направлений.

Под интегралом функции $u \in C[\Gamma]$, взятым по графу Γ , понимаем сумму интегралов по всем ребрам графа.

Спектральная задача, соответствующая смешанной задаче (0.1)–(0.4), имеет вид [2]:

$$(p u')' + q u - \lambda u = \Psi(x). \quad (1.1)$$

$$\alpha(a)u'(a) + [\beta(a)\lambda + \delta(a)]u(a) = F(a), \quad a \in \partial\Gamma, \quad (1.2)$$

$$u_k(a) - u_{k_0}(a) = 0, \quad k, k_0 \in I(a),$$

$$\sum_{k \in I(a)} \alpha_k(a)u'_k(a) + \{\beta(a)\lambda + \delta(a)\}u(a) = F(a), \quad a \in V. \quad (1.3)$$

На коэффициенты задачи (1.1)–(1.3) накладываются те же ограничения, что и для задачи (0.1)–(0.4).

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты работы [2].

Спектр задачи (1.1)–(1.3) состоит из последовательности собственных значений, не имеющей конечной предельной точки. Все собственные значения задачи (1.1)–(1.3) расположены в полосе конечной ширины с центром в начале координат комплексной плоскости, границы которой параллельны вещественной оси. Обозначим через $\Delta(\rho)$ характеристический определитель, где $\rho = \sqrt{-\lambda}$. Выбросим из ρ -плоскости внутренности малых кругов радиуса r с центрами в нулях ρ_k функции $\Delta(\rho)$ и обозначим через \mathbb{C}_r , оставшуюся часть ρ -плоскости. Тогда в \mathbb{C}_r выполняется неравенство

$$|\rho^{-d}\Delta(\rho)| \geq C > 0,$$

где C зависит лишь от радиусов выбрасываемых кругов. Пусть $\rho \in \mathbb{C}$ не является нулем характеристического определителя $\Delta(\rho)$. Обозначим через $G(x, \xi, \rho)$ функцию Грина [1, 3] интегрального оператора, обращающего спектральную задачу. Тогда решение задачи (1.1)–(1.3)

можно представить в виде

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) \frac{\Psi(\xi)}{p(\xi)} d\xi + H(x, \rho),$$

где $H(x, \rho)$ — решение однородного уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), (1.3) и асимптотической оценке

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} H(x, \rho) \right| \leq |\rho|^\nu \max |F(a_n)| \sum_{k=1}^m \left\{ C_{k1} \left| \exp \left(i\rho \int_{a_k}^x \Theta^{(1)}(z) dz \right) \right| \right. \\ \left. + C_{k2} \left| \exp \left(-i\rho \int_x^{b_k} \Theta^{(2)}(z) dz \right) \right| \right\}, \quad \nu = 0, 1, 2; \end{aligned} \quad (1.4)$$

здесь m — число ребер графа, C_{ks} — числа, зависящие от r , $\Theta^{(1)}(z) = 1/\sqrt{p(z)}$, $\Theta^{(2)}(z) = -1/\sqrt{p(z)}$ при $\text{Im } \rho \geq 0$ и, наоборот, $\Theta^{(1)}(z) = -1/\sqrt{p(z)}$, $\Theta^{(2)}(z) = 1/\sqrt{p(z)}$ при $\text{Im } \rho < 0$.

Функция Грина удовлетворяет следующему асимптотическому представлению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} G(x, \xi, \rho) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_k(x, \xi, \rho) + (i\rho)^{\nu-1} \sum_{k=1}^m [\eta_{k1}^{(\nu)}(x)] \exp \left(i\rho \int_{a_k}^x \Theta^{(1)}(z) dz \right) \\ &\times \left\{ \exp \left(-i\rho \int_{a_k}^{\xi} \Theta^{(2)}(z) dz \right) [\zeta_k^{(2)}(\xi)] \frac{\mathcal{E}_{k1}^{(1)}(\rho)}{\Delta(\rho)} + \exp \left(i\rho \int_{\xi}^{b_k} \Theta^{(1)}(z) dz \right) [\zeta_k^{(1)}(\xi)] \frac{\mathcal{E}_{k2}^{(1)}(\rho)}{\Delta(\rho)} \right\} \\ &+ (i\rho)^{\nu-1} \sum_{k=1}^m [\eta_{k2}^{(\nu)}(x)] \exp \left(-i\rho \int_x^{b_k} \Theta^{(2)}(z) dz \right) \\ &\times \left\{ \exp \left(-i\rho \int_{a_k}^{\xi} \Theta^{(2)}(z) dz \right) [\zeta_k^{(2)}(\xi)] \frac{\mathcal{E}_{k1}^{(2)}(\rho)}{\Delta(\rho)} + \exp \left(i\rho \int_{\xi}^{b_k} \Theta^{(1)}(z) dz \right) [\zeta_k^{(1)}(\xi)] \frac{\mathcal{E}_{k2}^{(2)}(\rho)}{\Delta(\rho)} \right\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где функции $\mathcal{E}_{ks}^{(j)}(\rho)/\Delta(\rho)$ ограничены некоторым числом в \mathbb{C}_r ;

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_k(x, \xi, \rho) = \begin{cases} 0, & \xi \in \gamma_n, x \in \gamma_j, n \neq j; \\ (i\rho)^{\nu-1} [\mu_{k1}^{(\nu)}(x, \xi)] \exp \left(i\rho \int_{\xi}^x \Theta^{(1)}(z) dz \right), & \gamma_k = [a_k, b_k], a_k \leq \xi \leq x \leq b_k; \\ -(i\rho)^{\nu-1} [\mu_{k2}^{(\nu)}(x, \xi)] \exp \left(i\rho \int_{\xi}^x \Theta^{(2)}(z) dz \right), & \gamma_k = [a_k, b_k], a_k \leq x \leq \xi \leq b_k, \end{cases} \quad (1.6)$$

$\zeta_k^{(s)}(\xi) = (2\Theta_k^{(1)}(\xi)\Theta_k^{(s)}(\xi))^{-1}$, $\mu_{ks}^{(\nu)}(x, \xi) = (\Theta_k^{(s)}(x))^{\nu-1} \zeta_k^{(1)}(\xi)/\sqrt{p_k(x)}$, $s = 1, 2$, $\nu = 0, 1, 2$, а прямые скобки $[\mu]$ обозначают сумму $\mu + O(1/\rho)$.

2. Теорема существования решения задачи (0.1)–(0.4)

2.1. Существование решения однородного уравнения с неоднородными краевыми условиями и нулевым начальным условием

Обозначим через Π полосу комплексной ρ -плоскости

$$\Pi = \left\{ \rho \in \mathbb{C} : - \int_{\Gamma} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \leq \operatorname{Im} \rho \leq \int_{\Gamma} \frac{dx}{\sqrt{p(x)}} \right\}.$$

Нули характеристического определителя $\Delta(\rho)$ спектральной задачи (1.1)–(1.3) лежат в полосе Π [2].

Пусть $\psi \in (0, \pi/4)$. Обозначим через L разомкнутый контур, лежащий в верхней полуплоскости комплексной ρ -плоскости, не имеющий общих точек с множеством Π и такой, что прямые $\arg \rho = \psi$ и $\arg \rho = \pi - \psi$ являются асимптотами.

Теорема 1. При $\Phi(x) \equiv 0$ решение задачи (0.1)–(0.4) существует и может быть представлено формулой

$$u_1(x, t) = \frac{1}{\pi i} \int_L e^{-\rho^2 t} \frac{H(x, \rho)}{\rho} d\rho, \quad (2.1)$$

где $H(x, \rho)$ – решение однородного уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), (1.3).

Доказательство. Для $\nu = 0, 1, 2$ и $s = 0, 1, 2, \dots$ определим интегралы

$$\mathcal{J}_{\nu, s}(L) = \frac{1}{\pi i} \int_L e^{-\rho^2 t} \frac{(-\rho^2)^s}{\rho} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} H(x, \rho) d\rho, \quad (2.2)$$

которые получаются формальным дифференцированием под знаком интеграла в правой части (2.1) по переменной t s раз и ν раз по переменной x . Покажем, что интегралы (2.2) сходятся равномерно относительно $x \in \Gamma$ и $t \in (0, T]$.

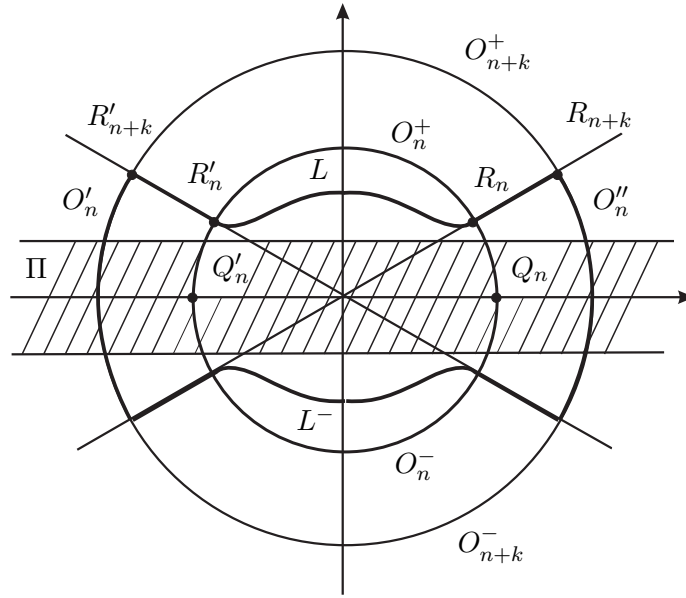
Пусть Q_n (рисунок) – круги малого радиуса с центрами в нулях характеристического определителя $\Delta(\rho)$ спектральной задачи. Обозначим через O_n последовательность окружностей радиусов r_n с центром в начале координат ρ -плоскости, не пересекающих кругов Q_n , где $r_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Пусть, далее, L_n есть часть контура L , расположенная внутри окружности O_n . Предположим, что $L \setminus L_n$ совпадает с достаточно отдаленными частями прямых, определяемых уравнениями $\arg \rho = \psi$ и $\arg \rho = \pi - \psi$. Через R_n обозначим точки пересечения контура L с окружностями O_n , лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} \rho > 0$, а через R'_n симметричные точкам R_n относительно мнимой оси.

Очевидно, что для доказательства равномерной сходимости интегралов (2.2) достаточно показать, что части этих интегралов по отдаленным кускам $R_n R_{n+j}$ и $R'_n R'_{n+j}$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ для всех j равномерно относительно $t \in (0, T]$ и $x \in \Gamma$.

Рассмотрим функцию $H(x, \rho)$. Из определения величин $\Theta^{(1)}$ и $\Theta^{(2)}$ следует, что в правой части неравенства (1.4) показатели экспонент имеют отрицательные вещественные части. Поэтому можно записать неравенство

$$\left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} H(x, \rho) \right| \leq C_\nu |\rho|^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \quad (2.3)$$

где C_ν – константы, зависящие только от радиусов, выбрасываемых из Π кругов Q_n .



Рассмотрим интеграл $\mathcal{J}_{\nu,s}(R_n R_{n+j})$. Учитывая (2.3), получим

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{J}_{\nu,s}(R_n R_{n+j}) \right| &= \left| \int_{R_n R_{n+j}} e^{-\rho^2 t} \frac{(-\rho^2)^s}{\rho} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} H(x, \rho) d\rho \right| \\ &\leq \int_{R_n R_{n+j}} |e^{-\rho^2 t}| |\rho|^{2s-1} \left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} H(x, \rho) \right| |d\rho| \leq C_\nu \int_{R_n R_{n+j}} \exp(-t|\rho|^2 \cos(2 \arg \rho)) |\rho|^{2s-1+\nu} |d\rho|. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поскольку при достаточно больших n отрезок $R_n R_{n+j}$ лежит на прямой $\arg \rho = \psi$ и $\psi \in (0, \pi/4)$, то $\cos(2 \arg \rho) > 0$. Поэтому при $n \rightarrow +\infty$ подынтегральная функция убывает быстрее любой степени ρ^{-1} , а значит, $\mathcal{J}(P_n P_{n+j}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ равномерно относительно $t > 0$ и $x \in \Gamma$. Аналогичное утверждение верно и для $\mathcal{J}_{\nu,s}(R'_n R'_{n+j})$, что позволяет делать заключение о сходимости к нулю интеграла $\mathcal{J}_{\nu,s}(R'_n R'_{n+j})$ при $n \rightarrow +\infty$, равномерной по $t > 0$ и $x \in \Gamma$.

Если $t = 0$, то при любом фиксированном $x \in \Gamma$ имеем с учетом (1.4)

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{J}_{0,0}(R_n R_{n+j}) \right| &= \left| \int_{R_n R_{n+j}} \frac{H(x, \rho)}{\rho} d\rho \right| \\ &\leq \int_{R_n R_{n+j}} \sum_{k=1}^m \frac{1}{|\rho|} \left\{ C_{k1} \left| \exp \left(i\rho \int_{a_k}^x \Theta^{(1)}(z) dz \right) \right| + C_{k2} \left| \exp \left(-i\rho \int_x^{b_k} \Theta^{(2)}(z) dz \right) \right| \right\} |d\rho|. \end{aligned}$$

Вещественные части показателей степеней экспонент отрицательны, поэтому при достаточно больших значениях n интеграл $\mathcal{J}_{0,0}(R_n R_{n+j})$ стремится к нулю. Аналогичное заключение справедливо и для $\mathcal{J}_{0,0}(R'_n R'_{n+j})$.

Таким образом, интегралы $\mathcal{J}_{\nu,s}(L)$ сходятся равномерно по $x \in \Gamma$ и по $t \in (0, T]$, а интеграл (2.1) сходится равномерно по $t \in [0, T]$ при каждом $x \in \Gamma$. Следовательно, под знаком интеграла (2.1) можно дифференцировать по x два раза, а по t — любое число раз при $x \in \Gamma$ и $t > 0$. При этом функции, определяемые формулой (2.2), принадлежат $C[\Gamma]$ при любом $t \in (0, T]$.

Кроме того, под знаком интегралов (2.2) можно переходить к пределу при $x \rightarrow a$, $x \in \Gamma$, $a \in \partial\Gamma \cup V$. В интеграле же (2.1) можно переходить к пределу при $t \rightarrow 0$.

Покажем теперь, что функция $u_1(x, t)$, определенная в (2.1), удовлетворяет уравнению (0.1) и краевым условиям (0.2), (0.3). Подставим интеграл из (2.1) в уравнение (0.1)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_L e^{-\rho^2 t} \frac{H(x, \rho)}{\rho} d\rho - \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} \int_L e^{-\rho^2 t} \frac{H(x, \rho)}{\rho} d\rho \right) - q(x) \int_L e^{-\rho^2 t} \frac{H(x, \rho)}{\rho} d\rho \\ &= \int_L \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} \left\{ -\rho^2 H(x, \rho) - \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} H(x, \rho) \right) - q(x) H(x, \rho) \right\} d\rho \equiv 0, \end{aligned}$$

так как $H(x, \rho)$ есть решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1).

Далее, ввиду того что функция $H(\cdot, \rho)$ удовлетворяет краевым условиям (1.2), (1.3), при $t > 0$ имеем

$$l_j \left(\frac{1}{\pi i} \int_L e^{-\rho^2 t} \frac{H(\cdot, \rho)}{\rho} d\rho \right) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} l_j(H(\cdot, \rho)) d\rho = \frac{c_j}{\pi i} \int_L \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho, \quad (2.5)$$

где l_j — линейные функционалы, определяющие систему условий (1.2), (1.3), $c_j = 0$, если функционал l_j описывает условие непрерывности, и $c_j = F(a)$, если функционал l_j описывает граничное условие или условие согласования.

Рассмотрим интеграл

$$\int_L \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho.$$

Обозначим через O_n^+ дугу окружности O_n между точками $R_n R'_n$, лежащую в верхней полуплоскости, а через O_n^- обозначим дугу окружности O_n , симметричную относительно вещественной оси дуге O_n^+ . Аналогично обозначим через L_n^- контур, симметричный контуру L_n . Пусть O'_n и O''_n — части окружности $O_n \setminus (O_n^+ \cup O_n^-)$. Наконец, обозначим через Ω_n замкнутый контур, являющийся объединением кривых $L_n \cup O'_n \cup L_n^- \cup O''_n$. Тогда имеем

$$\int_{L_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho = \int_{L_n^-} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho. \quad (2.6)$$

Кроме того, в силу определения дуг O'_n и O''_n имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{O'_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{O''_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\psi}^{\psi} \exp(-tr_n^2 e^{i2\varphi}) i d\varphi \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\psi}^{\psi} e^{-r_n^2 \cos 2\varphi} d\varphi = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{O'_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{O''_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho = 0. \quad (2.7)$$

Используя (2.6), (2.7) и интегральную формулу Коши, получим

$$\begin{aligned} \int_L \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\int_{L_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho + \int_{L_n^-} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{L_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho + \int_{O_n'} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho + \int_{L_n^-} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho + \int_{O_n''} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} d\rho = \pi i. \end{aligned}$$

Подставляя полученное значение в правую часть (2.5), убеждаемся, что функция $u_1(x, t)$ из (2.1) удовлетворяет краевым условиям (0.2), (0.3).

Для завершения доказательства остается показать, что функция $u_1(x, t)$ удовлетворяет начальному условию. Используем равномерную по $t \in [0, T]$ сходимость интеграла (2.1) при каждом $x \in \Gamma$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{e^{-\rho^2 t}}{\rho} H(x, \rho) d\rho = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{H(x, \rho)}{\rho} d\rho = \frac{1}{\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} \frac{H(x, \rho)}{\rho} d\rho.$$

Так как контур L_n лежит вне полосы Π , то функция $H(x, \rho)/\rho$ аналитична по ρ в области, ограниченной кривыми L_n и O_n^+ . Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\pi i} \int_L e^{-\rho^2 t} \frac{H(x, \rho)}{\rho} d\rho \right| &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{O_n^+} \frac{H(x, \rho)}{\rho} d\rho \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{O_n^+} \sum_{k=1}^m \left\{ C_{k1} \left| \exp \left(i\rho \int_{a_k}^x \Theta^{(1)}(z) dz \right) \right| + C_{k2} \left| \exp \left(-i\rho \int_x^{b_k} \Theta^{(2)}(z) dz \right) \right| \right\} \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned}$$

Согласно определению $\Theta^{(1)}(x)$ и $\Theta^{(2)}(x)$ вещественные части степеней экспонент отрицательны при достаточно больших значениях n . Поэтому подынтегральные функции в правой части последнего неравенства при $\rho \in O_n^+$ убывают быстрее любой степени ρ^{-1} . Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_L e^{-\rho^2 t} \frac{H(x, \rho)}{\rho} d\rho = 0.$$

З а м е ч а н и е. Теорема остается справедливой, если в формуле (2.1) заменить контур L на контур L^- , симметричный относительно вещественной оси.

2.2. Существование решения однородного уравнения с однородными краевыми условиями и ненулевым начальным условием

Теорема 2. *Решение задачи (0.1)–(0.4) при $F(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma \cup V$ и $\Phi \in C^2[\Gamma]$ существует. Это решение представляется в виде*

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{\pi i} \int_L \rho \int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) e^{-\rho^2 t} \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi d\rho. \quad (2.8)$$

Доказательство. Согласно (1.5) и в силу выбора контура L производные от решения однородной спектральной задачи (1.1)–(1.3) ограничены на контуре L равномерно по $x \in \Gamma$. Следовательно, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \int_{R_n R_{n+j}} e^{-\rho^2 t} \rho^{2s+1} \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi d\rho \right| \\ & \leq C \int_{r_n}^{r_{n+j}} \exp\left(-t|\rho|^2 \cos(2 \arg \rho)\right) |\rho|^{2s+\nu} |d\rho| \\ & \leq C \exp\left(-\frac{1}{2} t r_n^2 \cos(2 \arg \psi)\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} t |\rho|^2 \cos(2 \arg \psi)\right) |\rho|^{2s+\nu} |d\rho| \\ & = \frac{2C \exp\left(-1/2 t r_n^2 \cos(2 \arg \psi)\right)}{\left(\sqrt{t \cos(2 \arg \psi)}\right)^{2s+\nu+1}} \int_0^\infty e^{-\tau^2} \tau^{2s+\nu} d\tau, \end{aligned}$$

где C — постоянное число. Из этого неравенства следует равномерная сходимость интеграла

$$\int_L \rho^{2s+1} e^{-\rho^2 t} \int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi \quad (2.9)$$

относительно $x \in \Gamma$ и $t \in (0, T]$, что обеспечивает возможность дифференцирования под знаком интеграла по контуру L . Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial}{\partial x} u_2(x, t) \right) + q(x) u_2(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u_2(x, t) \\ & = \frac{-1}{\pi i} \int_{\Omega} \rho e^{-\rho^2 t} \left(p(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} p(x) + q(x) + \rho^2 \right) \int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi d\rho \\ & = \frac{-1}{\pi i} \int_L \rho e^{-\rho^2 t} \Phi(x) d\rho = \frac{\Phi(x)}{\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{O_n^+} \rho e^{-\rho^2 t} d\rho = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $u_2(x, t)$, определяемая формулой (2.8), удовлетворяет однородному уравнению (0.1), причем функции, определяемые интегралами (2.9), принадлежат $C[\Gamma]$ при $t > 0$.

Далее, так как функция

$$\int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi$$

является решением спектральной задачи (1.1)–(1.3) при однородных краевых условиях, то, подставляя $u_2(x, t)$ в краевые условия (2.2), (2.4), получим

$$\frac{-1}{\pi i} \int_{\Gamma} \rho e^{-\rho^2 t} l_j \left(\int_{\Gamma} G(\cdot, \xi, \rho) \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right) d\rho = 0.$$

Остается показать, что функция $u_2(x, t)$ удовлетворяет начальному условию. Для этого рассмотрим функцию

$$I(x, t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \rho e^{-\rho^2 t} \int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi - \Phi(x)$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_L \rho e^{-\rho^2 t} \left\{ \int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi - \frac{1}{\rho^2} \Phi(x) \right\} d\rho. \quad (2.10)$$

Покажем, что интеграл (2.10) сходится равномерно по $t \in [0, T]$ при каждом $x \in \Gamma$. После этого переходом к пределу при $t \rightarrow 0$ покажем, что $I(x, t) \rightarrow 0$.

Воспользуемся асимптотическими представлениями (1.5), (1.6). На ребре γ_k имеем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k} G_k(x, \xi, \rho) \frac{\Phi_k(\xi)}{p_k(\xi)} d\xi - \frac{1}{\rho^2} \Phi_k(x) &= \int_{\gamma_k} K_k(x, \xi, \rho) \frac{\Phi_k(\xi)}{p_k(\xi)} d\xi - \frac{1}{\rho^2} \Phi_k(x) \\ &= \frac{1}{i\rho} \int_{a_k}^x [\mu_{k1}^{(0)}(x, \xi)] \exp\left(i\rho \int_{\xi}^x \Theta^{(1)}(z) dz\right) \frac{\Phi_k(\xi)}{p_k(\xi)} d\xi \\ &\quad - \frac{1}{i\rho} \int_x^{b_k} [\mu_{k2}^{(0)}(x, \xi)] \exp\left(-i\rho \int_x^{\xi} \Theta^{(2)}(z) dz\right) \frac{\Phi_k(\xi)}{p_k(\xi)} d\xi - \frac{1}{\rho^2} \Phi_k(x). \end{aligned}$$

Учитывая, что $p \in C^2[\Gamma]$, проинтегрируем по частям два раза

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho^2} \frac{[\mu_{k1}^{(0)}(x, x)]}{\Theta_k^{(1)}(x)} \frac{\Phi_k(x)}{p_k(x)} - \frac{\exp\left(i\rho \int_{a_k}^x \Theta^{(1)}(z) dz\right)}{\rho^2 \Theta_k^{(1)}(a_k)} [\mu_{k1}^{(0)}(x, a_k)] \frac{\Phi_k(a_k)}{p_k(a_k)} \\ &\quad + \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{1}{\Theta_k^{(1)}(\xi)} \exp\left(i\rho \int_{\xi}^x \Theta^{(1)}(z) dz\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{[\mu_{k1}^{(0)}(x, \xi)] \Phi_k(\xi)}{\Theta_k^{(1)}(\xi) p_k(\xi)} \Big|_{a_k}^x \right. \\ &\quad \left. + \int_{a_k}^x \exp\left(i\rho \int_{\xi}^x \Theta^{(1)}(z) dz\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\Theta_k^{(1)}(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{[\mu_{k1}^{(0)}(x, \xi)] \Phi_k(\xi)}{\Theta_k^{(1)}(\xi) p_k(\xi)} \right) d\xi \right\} \\ &\quad - \frac{\exp\left(-i\rho \int_x^{b_k} \Theta^{(2)}(z) dz\right)}{\rho^2 \Theta_k^{(2)}(b_k)} \frac{\Phi_k(b_k)}{p_k(b_k)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{[\mu_{k2}^{(0)}(x, x)]}{\Theta_k^{(2)}(x)} \frac{\Phi_k(x)}{p_k(x)} \\ &\quad - \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{1}{\Theta_k^{(2)}(\xi)} \exp\left(-i\rho \int_x^{\xi} \Theta^{(2)}(z) dz\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{[\mu_{k2}^{(0)}(x, \xi)] \Phi_k(\xi)}{\Theta_k^{(2)}(\xi) p_k(\xi)} \Big|_x^{b_k} \right. \\ &\quad \left. - \int_x^{b_k} \exp\left(i\rho \int_{\xi}^x \Theta^{(1)}(z) dz\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\Theta_k^{(2)}(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{[\mu_{k2}^{(0)}(x, \xi)] \Phi_k(\xi)}{\Theta_k^{(2)}(\xi) p_k(\xi)} \right) d\xi \right\} - \frac{1}{\rho^2} \Phi_k(x). \end{aligned}$$

Из определения функций $\mu_{ks}^{(0)}$ следует, что при $|\operatorname{Im} \rho| \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{[\mu_{k1}^{(0)}(x, x)]}{\Theta_k^{(1)}(x)} + \frac{[\mu_{k2}^{(0)}(x, x)]}{\Theta_k^{(2)}(x)} \right\} \frac{\Phi_k(x)}{p_k(x)} - \frac{1}{\rho^2} \Phi_k(x) = 0.$$

Следовательно, на контуре L подынтегральная функция (2.10) убывает быстрее, чем ρ^{-2} , что влечет равномерную относительно $t \in [0, T]$ сходимость интеграла (2.10).

Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ в (2.10), получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} I(x, t) &= \int_L \rho \left\{ \int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi - \frac{1}{\rho^2} \Phi(x) \right\} d\rho \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{L_n} \rho \left\{ \int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi - \frac{1}{\rho^2} \Phi(x) \right\} d\rho \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{O_n^+} \rho \left\{ \int_{\Gamma} G(x, \xi, \rho) \frac{\Phi(\xi)}{p(\xi)} d\xi - \frac{1}{\rho^2} \Phi(x) \right\} d\rho, \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из аналитичности подынтегральной функции в области между контуром L_n и O_n^+ .

Так как подынтегральная функция убывает быстрее, чем ρ^{-2} , получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} I(x, t) = 0.$$

З а м е ч а н и е. Теорема 2 остается справедливой, если в формуле (2.8) заменить контур L на контур L^- , симметричный относительно вещественной оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный [и др.]. М.: Физматлит, 2004. 272 с.
2. **Кулаев Р.Ч.** О параболической задаче на графе с краевыми условиями содержащими производную по времени: препринт № 1 / Юж. мат. ин-т ВНЦ РАН. Владикавказ, 2009. 43 с.
3. **Покорный Ю.В., Карелина И.Г.** О функции Грина задачи Дирихле на графе // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 3. С. 942–944.

Кулаев Руслан Черменович
канд. физ.-мат. наук, доцент
старший науч. сотрудник
Южный математический ин-т ВНЦ РАН
e-mail: kulaev@smath.ru

Поступила 08.05.2009

УДК 517.965+514.74

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**В. А. Кыров**

В данной работе решаются функциональные уравнения, появляющиеся в симплектической геометрии.

Ключевые слова: феноменологически симметричная геометрия, функциональное уравнение.

V. A. Kyrov. Functional equations in symplectic geometry.

Functional equations arising in symplectic geometry are solved.

Keywords: phenomenologically symmetric geometry, functional equation.

Введение

На многообразии M , $\dim M = m \in \mathbb{N}$, пусть задана функция $f : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, называемая *метрической*, с открытой и плотной областью определения S_f . Локальные координаты в M обозначим (x^1, \dots, x^m) . Метрическая функция предполагается аналитической в области своего определения и невырожденной, т. е. выполняется аксиома [1]:

Аксиома невырожденности. Для $m+1$ точек $i, i_1, \dots, i_m \in M$, таких что $\langle ii_1 \rangle, \dots, \langle ii_m \rangle \in S_f$, $\langle i_1 i \rangle, \dots, \langle i_m i \rangle \in S_f$, выполняются неравенства

$$\frac{\partial(f(ii_1), \dots, f(ii_m))}{\partial(x_i^1, \dots, x_i^m)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(i_1 i), \dots, f(i_m i))}{\partial(x_i^1, \dots, x_i^m)} \neq 0,$$

где (x_i^1, \dots, x_i^m) — координаты точки $i \in M$.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что на многообразии M метрическая функция f задает феноменологически симметричную геометрию, если она не вырождена и является инвариантом $m(m+1)/2$ -параметрической группы движений [1].

Под движением понимается преобразование $\lambda : M \rightarrow M$, сохраняющее метрическую функцию, т. е. для любой пары $\langle ij \rangle \in S_f$, $\langle \lambda(i)\lambda(j) \rangle \in S_f$, выполняется равенство $f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij)$ [1]. Множество всех движений образует группу Ли. Ее алгебра Ли состоит из операторов

$$X = X_1 \partial_{x^1} + \dots + X_m \partial_{x^m}, \quad (1)$$

где $X_s(x^1, \dots, x^m)$ — аналитические функции, $s = 1, \dots, m$. Через операторы записывается критерий инвариантности метрической функции [2, с. 35]

$$X(i)f(ij) + X(j)f(ij) = 0. \quad (2)$$

На плоскости \mathbb{R}^2 феноменологически симметричной геометрией является симплектическая геометрия с метрической функцией

$$\theta = \theta(ij) = x_i y_j - x_j y_i,$$

где (x_i, y_i) — координаты точки $i \in \mathbb{R}^2$. Базисные операторы алгебры Ли группы движений симплектической плоскости:

$$X^1 = y \partial_x, \quad X^2 = x \partial_y, \quad X^3 = x \partial_x - y \partial_y. \quad (3)$$

Цель данной работы — построение трехмерных феноменологически симметричных геометрий в \mathbb{R}^3 с метрическими функциями вида

$$f(ij) = f(\theta(x_i, x_j, y_i, y_j), z_i, z_j). \quad (4)$$

Теорема. Метрическая функция $f(ij)$ трехмерной феноменологически симметричной геометрии вида (4) с точностью до подходящих координат и масштабного преобразования (функция от метрической) единственна и задается формулой

$$f(ij) = x_i y_j - x_j y_i + z_i - z_j. \quad (5)$$

Заметим, что феноменологически симметричная геометрия с метрической функцией (5) впервые упоминается в работе [3], где называется трехмерной симплектической геометрией.

Доказательство теоремы

Метрическую функцию будем искать в виде

$$f(ij) = f(x_i y_j - x_j y_i, z_i, z_j) = f(\theta, z_i, z_j). \quad (6)$$

По критерию инвариантности (2) для операторов X и Y вида (1) алгебры Ли группы движений имеем функциональные уравнения:

$$[X_1(i)y_j - X_2(i)x_j - X_1(j)y_i + X_2(j)x_i] \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + X_3(i) \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0, \quad (7)$$

$$[Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i] \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + Y_3(i) \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + Y_3(j) \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0, \quad (8)$$

причем $X_3 \neq 0, Y_3 \neq 0$, поскольку иное приводит к противоречию. Действительно, если $X_3 = 0$, то по аксиоме невырожденности $\partial f(ij)/\partial \theta \neq 0$, поэтому

$$X_1(i)y_j - X_2(i)x_j - X_1(j)y_i + X_2(j)x_i = 0. \quad (9)$$

Лемма. Решением функционального уравнения (9) является следующая система функций:

$$X_1 = ax + by, \quad X_2 = cx - ay,$$

где $a, b, c = \text{const}$.

Доказательство. Продифференцируем тождество (9) дважды по x_i и x_j ; по y_i и y_j ; по x_i и y_j ; по z_i и по x_j , а также по z_i и y_j , потом, разделяя переменные, будем иметь систему уравнений:

$$X'_{1x} = a = \text{const}, \quad X'_{2y} = -a, \quad X'_{2x} = c = \text{const}, \quad X'_{1y} = b = \text{const}, \quad X'_{1z} = 0, \quad X'_{2z} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем искомое. \square

Несложно заметить, что оператор X алгебры Ли группы инвариантности метрической функции (6) равен тогда линейной комбинации операторов X^1, X^2, X^3 . Значит, группа движений имеет размерность меньше 6. Противоречие.

Итак, $X_3 \neq 0, Y_3 \neq 0$.

Пусть $X_1(i)y_j - X_2(i)x_j - X_1(j)y_i + X_2(j)x_i = 0$. Тогда уравнение (7) принимает вид

$$X_3(i) \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0. \quad (10)$$

Так как производные в него входящие не равны нулю (аксиома невырожденности), то справедливо тождество

$$X_3(i)/X_3(j) = \varphi(\theta, z_i, z_j).$$

Дифференцируя его по x_i и по x_j , после чего умножая соответственно на y_i и y_j , затем складывая результаты, а также дифференцируя по y_i и y_j , потом умножая соответственно на x_i и x_j , и снова складывая, далее разделяя переменные, получаем

$$yX'_{3x} = \alpha X_3, \quad xX'_{3y} = \beta X_3, \quad \alpha = \text{const}, \quad \beta = \text{const}.$$

Подставляя в исходное тождество общий интеграл найденных уравнений, имеем $\alpha = \beta = 0$. Тогда $X_3 = a(z)$.

Подставляя найденное в (10), интегрируя и переобозначая $\int dz/a(z) \rightarrow z$, получаем

$$f(ij) = f(x_i y_j - x_j y_i, z_i - z_j) = f(\theta, w), \quad w = z_i - z_j. \quad (11)$$

Подставим теперь (11) в уравнение (8):

$$[Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i] \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + (Y_3(i) - Y_3(j)) \frac{\partial f(ij)}{\partial w} = 0. \quad (12)$$

Если в (12)

$$Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i = 0,$$

то по аксиоме невырожденности $Y_3 = \text{const}$, и наоборот. Это уравнение совпадает с (9), а решение записывается по лемме, из которой следует, что оператор Y алгебры Ли группы инвариантности метрической функции (6) равен линейной комбинации операторов X^1, X^2, X^3 и оператора $X = \partial_z$. Тогда группа движений имеет размерность меньше 6. Противоречие.

Итак, в (12) $Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i \neq 0$ и $Y_3 \neq \text{const}$. Тогда получаем функциональное уравнение

$$Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i = (Y_3(i) - Y_3(j))\psi(\theta, w) \neq 0. \quad (13)$$

Дифференцируя по всем координатам точек i и j , а затем разделяя переменные, получаем $\psi = a = \text{const}$. Подставляя этот результат в тождество (13), а затем в (12), имеем дифференциальное уравнение

$$a \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + \frac{\partial f(ij)}{\partial w} = 0.$$

Решая это уравнение и переобозначая $-az \rightarrow z$, получаем метрическую функцию (5).

Предположим теперь, что в уравнениях (7) и (8) $X_1(i)y_j - X_2(i)x_j - X_1(j)y_i + X_2(j)x_i \neq 0$, $Y_1(i)y_j - Y_2(i)x_j - Y_1(j)y_i + Y_2(j)x_i \neq 0$. Перепишем уравнение (7) в виде

$$X_1(i)y_j - X_2(i)x_j - X_1(j)y_i + X_2(j)x_i + X_3(i)\psi_1(ij) + X_3(j)\psi_2(ij) = 0, \quad (14)$$

где $\psi_1(ij) = (\partial f(ij)/\partial z_i)/(\partial f(ij)/\partial \theta)$, $\psi_2(ij) = (\partial f(ij)/\partial z_j)/(\partial f(ij)/\partial \theta)$. Разложим функции X_1, X_2, X_3 в ряд Тейлора по степеням x и y , а функции ψ_1 и ψ_2 по степеням θ :

$$X_{1,2,3} = a_{1,2,3}^0(z) + a_{1,2,3}^s(z)x_s + \dots + a_{1,2,3}^{s_1 \dots s_l}(z)x_{s_1} \dots x_{s_l} + \dots,$$

$$\psi_{1,2} = b_{1,2}^0(z_i, z_j) + b_{1,2}^1(z_i, z_j)\theta + \dots + b_{1,2}^l(z_i, z_j)\theta^l + \dots,$$

где $s, s_1, \dots, s_l = 1, 2$, $x_1 = x, x_2 = y$. Подставляя данные разложения в (14) и сравнивая коэффициенты перед соответствующими степенями, будем иметь

$$X_1 = \alpha(z)x + by, \quad X_2 = cx + \alpha(z)y, \quad X_3 = a(z), \quad a, c = \text{const}, \quad \alpha \neq 0.$$

Подставляя найденное в (7) и переобозначая $\int dz/a(z) \rightarrow z$, будем иметь

$$(\alpha(z_i) + \alpha(z_j))\theta \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0. \quad (15)$$

Решая аналогично уравнение (8), получаем

$$(\beta(z_i) + \beta(z_j))\theta \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + b(z_i) \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + b(z_j) \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0, \quad \beta \neq 0. \quad (16)$$

Обозначим:

$$C_i = C_j = 1/(\alpha(z_i) + \alpha(z_j)), \quad D_i = b(z_i)/(\beta(z_i) + \beta(z_j)), \quad D_j = b(z_j)/(\beta(z_i) + \beta(z_j)).$$

Тогда

$$\theta \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + C_i \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + C_j \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0, \quad \theta \frac{\partial f(ij)}{\partial \theta} + D_i \frac{\partial f(ij)}{\partial z_i} + D_j \frac{\partial f(ij)}{\partial z_j} = 0.$$

Из первого уравнения вычитая второе, будем иметь

$$(C_i - D_i)/(C_j - D_j) = u(ij) \neq 1, \quad u(ij)u(ji) = 1.$$

Возвращаясь с этим тождеством в предыдущую систему, получаем

$$C_i - C_j u(ij) = D_i - D_j u(ij) = v(ij) \neq 0, \quad v(ji)u(ij) = -v(ij).$$

Подставляя сокращающие обозначения и записывая эту систему еще для точек ji , имеем

$$\begin{aligned} 1 - u(ij) &= (\alpha(z_i) + \alpha(z_j))v(ij), & b(z_i) - b(z_j)u(ij) &= (\beta(z_i) + \beta(z_j))v(ij), \\ 1 - u(ji) &= (\alpha(z_i) + \alpha(z_j))v(ji), & b(z_j) - b(z_i)u(ji) &= (\beta(z_i) + \beta(z_j))v(ji). \end{aligned}$$

Умножим каждое уравнение второй системы на $u(ij)$, а затем из первой системы вычтем вторую, после чего приведем подобные, получим систему двух уравнений, которую разрешим относительно $v(ij)$, тогда будем иметь

$$2/(\alpha(z_i) + \alpha(z_j)) = (b(z_i) + b(z_j))/(\beta(z_i) + \beta(z_j)), \quad b' \neq 0.$$

Приводя подобные и дифференцируя по переменным z_i и z_j , получаем $b'_i \alpha'_j + b'_j \alpha'_i = 0$, следовательно, $\alpha' = 0$. Интегрируя тогда уравнение (15), получаем

$$f(ij) = f(\theta e^{2z_i}, \theta e^{2z_j}) = f(u, v).$$

Подставляя найденное в (16), имеем

$$[\beta(z_i) + \beta(z_j) + 2b(z_i)]u \frac{\partial f(ij)}{\partial u} + [\beta(z_i) + \beta(z_j) + 2b(z_j)]v \frac{\partial f(ij)}{\partial v} = 0. \quad (17)$$

Из этого уравнения получаем

$$(\beta(z_i) + \beta(z_j) + 2b(z_i))/(\beta(z_i) + \beta(z_j) + 2b(z_j)) = q = \text{const.}$$

Тогда, интегрируя уравнение (17), получаем метрическую функцию

$$f(ij) = (x_i y_j - x_j y_i)^{1-q} e^{z_i - q z_j}.$$

Можно показать, что группа движений геометрии с данной метрической функцией имеет размерность меньше 6, т. е. геометрия не является феноменологически симметричной.

Итак, теорема доказана полностью. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Михайличенко Г.Г.** О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 2. С. 284–288.
2. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. **Лев В.Х.** Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1985. № 125. С. 90–103.

Кыров Владимир Александрович
канд. физ.-мат. наук
доцент
Горно-Алтайский гос. ун-т
e-mail: kfizika@gasu.ru

Поступила 08.05.2009

УДК 517.929.5

О ЦИКЛАХ ДИСКРЕТНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Ласунский

Для дискретного логистического уравнения $x_{k+1} = x_k \exp(r_k(1-x_k))$, $k \in Z_+$, где $\{r_k\}$ — положительная n -периодическая последовательность, показано, что при условии $\prod_{k=0}^{n-1}(1-r_k) > 1$ уравнение имеет не менее двух положительных n -циклов, отличных от положения равновесия. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: логистическое уравнение, циклы, устойчивость, положение равновесия.

A. V. Lasunskii. On cycles of a discrete periodic logistic equation.

For the discrete logistic equation $x_{k+1} = x_k \exp(r_k(1-x_k))$, $k \in Z_+$, where $\{r_k\}$ is a positive n -periodic sequence, it is shown that, under the condition $\prod_{k=0}^{n-1}(1-r_k) > 1$, the equation has at least two positive n -cycles distinct from the equilibrium. Examples are considered.

Keywords: logistic equation, cycles, stability, equilibria.

Введение

Рассмотрим дискретное неавтономное логистическое уравнение

$$x_{k+1} = x_k \exp(r_k(1-x_k m_k^{-1})), \quad k \in Z_+, \quad (1)$$

где $\{r_k\}$ и $\{m_k\}$ — положительные ограниченные последовательности. Это уравнение является дискретным аналогом непрерывной модели динамики численности популяции изолированного вида

$$\dot{x} = r(t)x(t)(1-x(t)m^{-1}(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

где $r(t)$ и $m(t)$ — положительные функции на \mathbb{R}_+ .

Если $r(t)$ и $m(t)$ — непостоянные положительные периодические функции с общим периодом T , то уравнение (2) имеет положительное T -периодическое решение, которое является аттрактором любого положительного решения (2) при $t \rightarrow +\infty$ [1, 2]. Естественный аналогичный вывод для уравнения (1) с положительными n -периодическими последовательностями $\{r_k\}$ и $\{m_k\}$ в общем случае не имеет места [3], что показано на конкретных примерах. В терминах коэффициентов уравнения (1) в статье [3] получены достаточные условия существования глобально асимптотически устойчивого периодического решения, а следовательно, доказана его единственность при выполнении указанных условий. Для случая $m_k = m$ и периодического коэффициента r_k это условие имеет вид $r_k \leq 1 + \ln 2$, $k \in Z_+$. Единственное периодическое решение в этом случае $x_k = m$ является глобальным аттрактором.

Отметим результат [4], касающийся уравнения (1) с $m_k = \text{const}$ и переменным положительным коэффициентом r_k . Если положительная последовательность r_k такова, что $\sum_{k=0}^{+\infty} r_k = +\infty$ и $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} r_k \leq 2$, то все решения уравнения (1) стремятся к положительному равновесию. Ясно, что это утверждение в случае периодического коэффициента r_k усиливает предыдущий результат [3].

Естественно предположить, что уравнение (1) с $m_k = \text{const}$ и n -периодическим коэффициентом r_k таким, что $\max_k r_k > 2$, имеет n -периодические решения, отличные от положения равновесия. Отметим, что уравнение (1) при $m_k = m$ заменой $x_k = my_k$ можно привести к виду $y_{k+1} = y_k \exp(r_k(1-y_k))$.

1. Дискретное периодическое логистическое уравнение

Рассмотрим уравнение

$$x_{k+1} = x_k \exp(r_k(1 - x_k)), \quad k \in Z_+, \quad (3)$$

в котором $\{r_k\}$ — положительная n -периодическая последовательность.

Теорема. Если справедливо неравенство

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 - r_k) > 1, \quad (4)$$

то уравнение (3) кроме положительного равновесия имеет не менее двух положительных n -циклов.

З а м е ч а н и е. Из неравенства (4) следует, что среди членов положительной n -периодической последовательности $\{r_k\}$ существует $r_k > 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Элементы a_0, a_1, \dots, a_{n-1} n -цикла ($a_k > 0$, $a_k \neq 1$) ищем из системы

$$\begin{cases} a_1 = a_0 \exp(r_0(1 - a_0)), \\ a_2 = a_1 \exp(r_1(1 - a_1)), \\ \dots \\ a_{n-1} = a_{n-2} \exp(r_{n-2}(1 - a_{n-2})), \\ a_0 = a_{n-1} \exp(r_{n-1}(1 - a_{n-1})). \end{cases}$$

Перемножив уравнения системы, имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} r_k(1 - a_k) = 0. \quad (5)$$

Это же соотношение можно получить и другим способом. Из уравнения (3) имеем

$$x_k = x_0 \exp \sum_{i=0}^{k-1} r_i(1 - x_i).$$

Если воспользоваться периодическим краевым условием: $x_0 = x_n$, приходим к (5). Положим $b_k = 1 - a_k$, $b_k \neq 0$, $b_k < 1$. Для определения членов периодической последовательности $\{b_k\}$ получаем систему

$$\begin{cases} b_1 - 1 = (b_0 - 1) \exp(r_0 b_0), \\ b_2 - 1 = (b_1 - 1) \exp(r_1 b_1), \\ \dots \\ b_{n-1} - 1 = (b_{n-2} - 1) \exp(r_{n-2} b_{n-2}), \\ b_0 - 1 = (b_{n-1} - 1) \exp(r_{n-1} b_{n-1}). \end{cases}$$

Соотношение (5) принимает вид $\sum_{k=0}^{n-1} r_k b_k = 0$. Для коэффициента b_0 имеем уравнение

$$\begin{aligned} r_0 b_0 + r_1 (1 + (b_0 - 1) \exp(r_0 b_0)) + r_2 (1 + (b_0 - 1) \exp(r_0 b_0) \exp(r_1 (1 + (b_0 - 1) \exp(r_0 b_0)))) \\ + r_3 (1 + (b_0 - 1) \exp(r_0 b_0) \exp(r_1 (1 + (b_0 - 1) \exp(r_0 b_0)))) \\ \times \exp(r_2 (1 + (b_0 - 1) \exp(r_0 b_0) \exp(r_1 (1 + (b_0 - 1) \exp(r_0 b_0)))))) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем две последовательности $\{\psi_k(b_0)\}$, $\{f_k(b_0)\}$ рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}\psi_0(b_0) &= 1, & \psi_k(b_0) &= \psi_{k-1}(b_0) \exp(r_{k-1}(1 + (b_0 - 1)\psi_{k-1}(b_0))), \\ f_0(b_0) &= r_0, & f_k(b_0) &= f_{k-1}(b_0) + r_k \psi_k(b_0).\end{aligned}$$

Из уравнения (6) имеем

$$b_0 = 1 - (f_{n-1}(b_0))^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} r_k.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = 1 - (f_{n-1}(t))^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} r_k, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Так как

$$f_{n-1}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k,$$

то

$$\varphi'(0) = f'_{n-1}(0) \left(\sum_{k=0}^{n-1} r_k \right)^{-1}.$$

Докажем, что $\varphi'(0) > 1$, если выполнено условие $\prod_{k=0}^{n-1} (1 - r_k) > 1$. Так как $\psi_k(0) = 1, k = 0, 1, \dots, n-1$, то $\psi'_k(0) = \psi'_{k-1}(0) + r_{k-1}(1 - \psi'_{k-1}(0))$. Решая задачу Коши для линейного разностного уравнения первого порядка $\psi'_k(0) = (1 - r_{k-1})\psi'_{k-1}(0) + r_{k-1}$, $\psi'_0(0) = 0$, получаем

$$\psi'_k(0) = 1 - \prod_{i=0}^{k-1} (1 - r_i).$$

Далее имеем

$$f'_k(0) = f'_{k-1}(0) + r_k \psi'_k(0)$$

и по индукции убеждаемся, что

$$f'_k(0) = \sum_{i=0}^k r_i + \prod_{i=0}^k (1 - r_i) - 1.$$

Для определения b_0 используем уравнение $t = \varphi(t)$. Корень $t = 0$ этого уравнения соответствует положению равновесия $x_k = 1$ уравнения (3). Получаем

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0, & \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) &= 1, & \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t) &= -(r_1 + \dots + r_{n-1})r_0^{-1}, \\ \varphi'(0) &= f'_{n-1}(0) \left(\sum_{i=0}^{n-1} r_i \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} r_i + \prod_{i=0}^{n-1} (1 - r_i) - 1 \right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} r_i \right)^{-1} > 1,\end{aligned}$$

так как $\prod_{i=0}^{n-1} (1 - r_i) > 1$. Из геометрических соображений ясно, что уравнение $t = \varphi(t)$ имеет еще по крайней мере два нетривиальных корня $t_{1,2}$, причем $t_1 \in (-(r_1 + \dots + r_{n-1})r_0^{-1}; 0)$, $t_2 \in (0; 1)$. Заметим, что если $b_0 < 1$, то все $b_k < 1, k = 1, \dots, n-1$, и элементы n -циклов $a_k = 1 - b_k$ — положительные числа. Случай $b_k \neq 0, b_{k+1} = 0$ невозможен, так как из соотношения $b_{k+1} = 0$ последовательно получаем $b_{k+2} = 0, \dots, b_{n-1} = 0, b_0 = 0, \dots, b_k = 0$. Противоречие. Теорема доказана. \square

З а м е ч а н и е. Если $n = 2$, то

$$\varphi(t) = 1 - (r_0 + r_1)(r_0 + r_1 \exp(r_0 t))^{-1}, \quad \varphi'(t) > 0, \quad \varphi''(t) = 0$$

только при $t = r_0^{-1} \ln(r_0 r_1^{-1})$, поэтому уравнение (3) с 2-периодическим коэффициентом r_k имеет ровно два положительных 2-цикла при условии, что $r_k r_{k+1} > r_k + r_{k+1}$.

Для исследования циклов на устойчивость нужно оценить модули мультипликаторов циклов. В случае одномерного отображения $x_{k+1} = g_k(x_k)$ для n -цикла \tilde{x}_k мультипликатор равен $\prod_{k=0}^{n-1} g'_k(\tilde{x}_k)$. В нашем случае $g_k(x) = x \exp(r_k(1-x))$, поэтому

$$\prod_{k=0}^{n-1} g'_k(\tilde{x}_k) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 - r_k \tilde{x}_k) \right) \exp \sum_{k=0}^{n-1} r_k (1 - \tilde{x}_k).$$

С учетом соотношения (5) для мультипликатора цикла получаем

$$\prod_{k=0}^{n-1} g'_k(\tilde{x}_k) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - r_k \tilde{x}_k).$$

Рассмотрим примеры, когда r_k — положительная периодическая последовательность с периодом 2 или 3 и выполнено соотношение (4).

Пример 1. Уравнение (3), в котором $r_{2k} = \ln 5$, $r_{2k+1} = 2 \ln 5$, имеет ровно два 2-цикла: $x_{2k} = 0,7704$; $x_{2k+1} = 1,1148$; $\bar{x}_{2k} = 2,6078$; $\bar{x}_{2k+1} = 0,1961$. Первый из этих циклов асимптотически устойчив, так как мультипликатор цикла $\prod_{k=0}^1 (1 - r_k x_k) = 0,6209$ по модулю меньше 1. Второй цикл неустойчив, так как его мультипликатор $\prod_{k=0}^1 (1 - r_k \bar{x}_k) = -1,1790$ по модулю больше 1.

Пример 2. Уравнение (3), в котором $r_{3k} = \ln 7$, $r_{3k+1} = 3 \ln 7$, $r_{3k+2} = 6^{-1} \ln 7$, имеет по крайней мере два 3-цикла: $x_{3k} = 0,3616$; $x_{3k+1} = 1,2524$; $x_{3k+2} = 0,2870$; $\bar{x}_{3k} = 1,3839$; $\bar{x}_{3k+1} = 0,6556$; $\bar{x}_{3k+2} = 4,8955$. Оба цикла неустойчивы, так как

$$\prod_{k=0}^2 (1 - r_k x_k) = -1,6963, \quad \prod_{k=0}^2 (1 - r_k \bar{x}_k) = -2,8129.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Coleman B.D.** Nonautonomous logistic equations as models of the adjustment of populations to environmental changes // Math. Biosci. 1979. Vol. 45. P. 159–173.
2. **Coleman B.D., Hsieh Y.H. and Knowles G.P.** On the optimal choice of r for a population in a periodic environment // Math. Biosci. 1979. Vol. 46. P. 71–85.
3. **Zhou Zhan and Zou Xingfu.** Stable periodic solutions in a discrete periodic logistic equation // Appl. Math. Lett. 2003. Vol. 16. P. 165–171.
4. **Xiang Hong-jun, Liao Lu-sheng, Wang Jin-hua.** Global attractivity of a nonautonomous discrete Smith equation // J. Changde Teach. Univ. Natur. Sci. Ed. 2001. Vol. 13, no. 1. P. 13–15.

Ласунский Александр Васильевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент,
Новгородский гос. ун-т им. Ярослава Мудрого
e-mail: Alexandr.Lasunsky@novsu.ru

Поступила 25.05.2009

УДК 517.927.25

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА В СЛУЧАЕ, КОГДА СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЛЕДЫ СТЕПЕНЕЙ ЕГО РЕЗОЛЬВЕНТЫ НАХОДЯТСЯ ПРИБЛИЖЕННО

Е. М. Малек

Пусть дискретный дифференциальный оператор действует в сепарабельном гильбертовом пространстве. Собственные значения этого оператора можно вычислять с помощью спектральных следов степеней резольвенты. Если резольвента — ядерный оператор, то вместо степеней резольвенты рассматриваем конечномерные матрицы и вычисляем приближенные значения спектральных следов.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, резольвента, собственные значения.

E. M. Maleko. Approximate calculation of the first eigenvalues of a discrete operator in the case when spectral traces of powers of its resolvent are found approximately.

We consider a discrete differential operator in a separable Hilbert space. Eigenvalues of this operator can be calculated with the use of spectral traces of powers of its resolvent. If the resolvent is a kernel operator, then finite-dimensional matrices are considered instead of powers of the resolvent and approximate values of spectral traces are calculated.

Keywords: Hilbert space, resolvent, eigenvalues.

Введение

Очень часто резольвенту дискретного оператора, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, явно получить бывает очень сложно или вообще невозможно. Однако, если спектральные следы степеней резольвенты находятся приближенно достаточно точно и легко без знания явного вида самой резольвенты, то этим можно воспользоваться в вычислении первых собственных чисел дискретного оператора. С полученными приближенными следами можно поступать так же, как и с точными в *модифицированном методе А.А. Дородницына*, суть которого (см. [1, 2]) сводится к следующему: пусть вычисляются точно левые части равенств

$$\int_a^b G_k(x, x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (*)$$

связывающие итерированные функции Грина рассматриваемого одномерного дифференциального оператора с ее собственными значениями. Оставляя первые N равенств (*), обрываем в них ряды и, никак не оценивая, отбрасываем остатки рядов со слагаемых под номером $N + 1$. Решая полученную таким образом систему алгебраических уравнений относительно неизвестных λ_n , $1 \leq n \leq N$, находим приближенные значения первых N собственных чисел.

1. Метод вычисления первых собственных чисел

Пусть дискретный самосопряженный оператор T действует в сепарабельном гильбертовом пространстве \mathbb{H} ; $S(T) := \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ — спектр оператора T , собственные числа λ_i которого занумерованы по возрастанию модулей с учетом кратностей; $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — набор соответствующих собственных функций, образующих в \mathbb{H} ортонормированный базис (см. [3]). Резольвента $R_{\lambda_0}(T) := (T - \lambda_0 I)^{-1}$ является ядерной с комплексным параметром $\lambda_0 \in \Lambda :=$

$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \lambda_i, \lambda_i \in S(T)\}$, который выбран таким образом, что собственные числа $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i(\lambda_0) := 1/(\lambda_i - \lambda_0)$, $i \in \mathbb{N}$, этого оператора образуют невозрастающую по модулю последовательность. Будем предполагать, что $\mathcal{D}(R_\lambda(T)) \supset \mathcal{D}(T)$ для любого комплексного λ , лежащего внутри Λ .

Пусть P — линейный ограниченный оператор и такой, что $\mathcal{D}(P) = \mathbb{H}$ и $q = \|PR_\lambda(T)\| < 1$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Тогда резольвента $R_\lambda(T + P)$ представима в виде сходящегося ряда Неймана

$$R_\lambda(T + P) = R_\lambda(T) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k R_\lambda(T) [PR_\lambda(T)]^k.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ таково, что $|\tilde{\lambda}_n| > |\tilde{\lambda}_{n+1}|$. Обозначим через L_n линейную оболочку векторов ψ_i , $i = \overline{1, n}$, (т. е. $L_n := L(\{\psi_i\}_{i=1}^n)$) и так как она замкнута, то L_n — подпространство в \mathbb{H} .

Будем в дальнейшем для $\lambda \in \Lambda$ и P таких, что $\|PR_\lambda(T)\| < 1$, рассматривать сужения $R_{\lambda,n}^{(n)}(T + P)$, $R_\lambda^{(n)}(T)$, $P^{(n)}$ соответственно операторов

$$R_{\lambda,n}(T + P) := R_\lambda(T) + \sum_{k=1}^n (-1)^k R_\lambda(T) [PR_\lambda(T)]^k, \quad R_\lambda(T), \quad P$$

на L_n , т. е.

$$R_{\lambda,n}^{(n)}(T + P) := R_\lambda^{(n)}(T) + \sum_{k=1}^n (-1)^k R_\lambda^{(n)}(T) [P^{(n)} R_\lambda^{(n)}(T)]^k, \quad (1.1)$$

$$R_\lambda^{(n)}(T) := \sum_{i=1}^n \frac{(\cdot, \psi_i)}{\lambda_i - \lambda} \psi_i,$$

$$P^{(n)} := \mathbb{P}_{L_n} P \mathbb{P}_{L_n}, \quad \text{где} \quad \mathbb{P}_{L_n} \mathbb{H} = L_n.$$

Нетрудно доказать, что $R_{\lambda,n}^{(n)}(T + P) \rightarrow R_\lambda(T + P)$ равномерно по λ на произвольно заданном компакте $G \subset \mathbb{C}$ таком, что $\lambda_j \notin G$, $j \in \mathbb{N}$, и $\|PR_\lambda(T)\| < 1$. Для этого достаточно сослаться на ограниченность операторов $R_\lambda^{(n)}(T)$ и $R_\lambda(T)$ и на существование $n_0 \in \mathbb{N}$, при котором для $\forall \lambda \in G$ и для $\forall n \geq n_0$ справедливо неравенство $\|P^{(n)} R_\lambda^{(n)}(T)\| < 1$. Тогда оценка по операторной норме из \mathbb{H} ряда (1.1) может быть представлена в виде абсолютно сходящегося бесконечного геометрического ряда.

Найдем для произвольного $\lambda \in G$ матричные представления степеней

$$\left[AR_{\lambda,n}^{(n)}(T + P) \right]^t, \quad t = \overline{1, n},$$

оператора $R_{\lambda,n}^{(n)}(T + P)$. При этом нам понадобятся матричные представления операторов $R_\lambda^{(n)}(T)$ и $P^{(n)}$

$$AR_\lambda^{(n)}(T) := \text{diag} \{ (\lambda_i - \lambda)^{-1} \}_{i=1}^n$$

и

$$AP^{(n)} := \{ a_{ij} \}_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = (P\psi_i, \psi_j).$$

Тогда из (1.1) получаем

$$\begin{aligned} AR_{\lambda,n}^{(n)}(T + P) &:= AR_\lambda^{(n)}(T) \left[I + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(AP^{(n)} AR_\lambda^{(n)}(T) \right)^k \right] \\ &= \text{diag} \{ (\lambda_i - \lambda)^{-1} \}_{i=1}^n \left[I + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\{ a_{i,j} / (\lambda_j - \lambda) \}_{i,j=1}^n \right)^k \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обозначим через $P^{(\lambda,n)}(x)$ характеристический многочлен матрицы $AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$. Вычислив предварительно по формуле (1.2) матрицу $AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$, найдем степени

$$\left[AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)\right]^t, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Известно из теоремы Лидского, что матричные и спектральные следы конечномерных (и ядерных тоже) операторов совпадают. Обозначив через $\varphi_t(\lambda, n)$, $t \in \mathbb{N}$, спектральные следы матриц $\left[AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)\right]^t$, найдем их значения по формуле

$$\varphi_t(\lambda, n) = Sp\left[AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)\right]^t. \quad (1.3)$$

Пусть $\{\mu_i(\lambda)\}_{i=1}^{\infty}$ — набор собственных чисел оператора $R_{\lambda}(T+P)$, занумерованных по убыванию модулей с учетом алгебраической кратности для некоторого $\lambda \in G$. Тогда

$$|\varphi_t(\lambda)| = \left|Sp[AR_{\lambda}(T+P)]^t\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i(\lambda)|^t < \infty, \quad t \in \mathbb{N},$$

так как оператор $R_{\lambda}(T+P)$ — ядерный.

Теперь поступим следующим образом. Рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n

$$\sum_{i=1}^n x_i^m = \varphi_m(\lambda, n) (\approx \varphi_m(\lambda)), \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

В [1, 2] для вычисления спектров дискретных операторов рассматривались системы типа (1.4)

$$\sum_{i=1}^n x_i^m = \varphi_m(0), \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

причем в этих работах нет возмущений операторов какими-то другими, а в [2] оценена скорость сходимости обратных значений компонент вектор-решения данной системы к соответствующим собственным числам исследуемого оператора.

Из равномерной сходимости последовательности операторов $R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$ к оператору $R_{\lambda}(T+P)$ по $\lambda \in G$ следует, что для любого конечного натурального t последовательность матриц $\left[AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)\right]^t$ будет стремиться к бесконечномерной матрице $[AR_{\lambda}(T+P)]^t$ равномерно по $\lambda \in G$, поэтому, учитывая непрерывность операции взятия матричного следа, будем иметь

$$\varphi_t(\lambda, n) \rightarrow \varphi_t(\lambda) \quad \text{равномерно по } \lambda \in G. \quad (1.5)$$

Отсюда, если $\{\mu_i(\lambda, n)\}_{i=1}^n$ — набор собственных чисел оператора $R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$ и $N \in \mathbb{N}$ таково, что $|\lambda_N| < |\lambda_{N+1}|$, то для каждого $n \gg N$ можно подобрать нумерацию чисел $\mu_i(\lambda, n)$, $i = \overline{1, N}$, при которой из (1.5) и непрерывной зависимости нулей характеристического многочлена произвольной квадратной матрицы с комплексными элементами от коэффициентов этого многочлена получим:

$$\mu_i(\lambda, n) \rightarrow \mu_i(\lambda) \quad \text{равномерно по } \lambda \in G \quad \text{для } i = \overline{1, N}.$$

Для доказательства этого факта достаточно показать, что следы $\varphi_t(\lambda, n)$, $1 \leq t \leq n$, входят в коэффициенты характеристического многочлена $P^{(\lambda,n)}(x)$ полиномиальным образом. Покажем это. Так как $\{\mu_i(\lambda, n)\}_{i=1}^n$ — набор собственных чисел оператора $R_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$, а значит и матрицы $AR_{\lambda,n}^{(n)}(T+P)$, то многочлен $P^{(\lambda,n)}(x)$ можно представить в виде

$$P^{(\lambda,n)}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \mu_i(\lambda, n)) = x^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k(n) x^{n-k},$$

где $\sigma_k(n)$ — k -е элементарные симметрические многочлены от чисел $\mu_1(\lambda, n), \mu_2(\lambda, n), \dots, \mu_n(\lambda, n)$. Из хорошо известных в алгебре формул Ньютона имеем

$$\sigma_k(n) = (-1)^{k+1} \left\{ \varphi_k(\lambda, n) - \varphi_{k-1}(\lambda, n)\sigma_1(n) + \varphi_{k-2}(\lambda, n)\sigma_2(n) - \dots (-1)^{k+1} \varphi_1(\lambda, n)\sigma_{k-1}(n) \right\} / k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

что и требовалось. В результате доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $N \in \mathbb{N}$ таково, что $|\lambda_N| < |\lambda_{N+1}|$. Тогда для каждого $n \gg N$ подбирается нумерация чисел $\mu_i(\lambda, n)$, $i = \overline{1, N}$, при которой $\mu_i(\lambda, n) \rightarrow \mu_i(\lambda)$ равномерно по $\lambda \in G$. При этом также равномерно по $\lambda \in G$

$$\nu_i(\lambda, n) = \lambda + 1/\mu_i(\lambda, n) \rightarrow \nu_i = \lambda + 1/\mu_i(\lambda)$$

для $i = \overline{1, N}$. Здесь $\{\nu_i\}_{i=1}^N$ — набор первых собственных чисел оператора $T+P$; $\{\mu_i(\lambda, n)\}_{i=1}^n$ — решение системы (1.4). \square

Итак, получена теорема о том, что вычисляемые по формуле (1.3) значения $\varphi_t(\lambda, n) = \varphi_t(\lambda) + \varepsilon_t(\lambda, n)$, $t = \overline{1, n}$, ($\varphi_t(\lambda)$ — неизвестные точные значения спектральных следов операторов $[R_\lambda(T+P)]^t$ и $|\varepsilon_t(\lambda, n)| \rightarrow 0$) можно использовать для приближенного вычисления первых собственных чисел оператора $T+P$. Оценки величин $\varepsilon_t(\lambda, n)$ проводятся в этой статье не будут.

З а м е ч а н и е. В реальных расчетах для получения значительно более точных результатов вместо матриц $AR_{\lambda, n}^{(n)}(T+P)$ лучше строить матрицы $AR_{\lambda, m}^{(n)}(T+P)$, где $m \gg n$. В этом случае следы степеней и собственные числа матриц $AR_{\lambda, m}^{(n)}(T+P)$ будем обозначать соответственно через $\varphi_t(\lambda, n, m)$ и $\mu_i(\lambda, n, m)$, $t, i = \overline{1, n}$.

2. Демонстрация метода на примере некоторых возмущенных дискретных операторов

П р и м е р 1. Возмущенный квадрат оператора Эрмита.

Рассмотрим действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = L_2^\omega(-\infty, \infty)$, $\omega = \exp(-x^2)$, оператор $T = A^2$, где $A := -d^2/dx^2 + 2xd/dx + I$. Областью определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T будем считать множество всех функций f , обладающих следующими свойствами: f, f', f'' и f''' — абсолютно непрерывны на любом отрезке числовой оси, $Tf \in \mathbb{H}$. Хорошо известно, что спектр оператора T составляют числа $\lambda_n = (2n+1)^2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а соответствующими собственными функциями, образующими в \mathbb{H} ортонормированный базис, являются $\psi_n = c_n^{-1}H_n$, где H_n — многочлены Эрмита, $c_n = \|H_n\|_H$, $\|y\|_H = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)|y|^2 dx \right)^{1/2}$ — норма в \mathbb{H} .

Пусть P — оператор умножения на функцию $p \in L_\infty(-\infty, \infty)$ и $\lambda \neq \lambda_i$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причем $\forall i \|p\|_\infty / |\lambda_i - \lambda| < 1$, $\|p\|_\infty = \text{essential sup}_{x \in (-\infty, \infty)} |p(x)|$. Тогда $\mathcal{D}(T+P) = \mathcal{D}(T)$ и операторы $R_\lambda(T+P) := (T+P - \lambda I)^{-1}$ и $R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}$ — ядерные резольвенты. Выберем натуральные $n \gg 1$, $m \gg n$ и сначала по формуле

$$AR_{\lambda, m}^{(n)}(T+P) := \text{diag}\{(\lambda_i - \lambda)^{-1}\}_{i=0}^n \left[I + \sum_{k=1}^m (-1)^k \left(\{a_{i,j}/(\lambda_j - \lambda)\}_{i,j=0}^n \right)^k \right] \quad (2.1)$$

вычислим $AR_{\lambda, m}^{(n)}(T+P)$, а затем по формулам

$$\varphi_t(\lambda, n, m) = Sp \left[AR_{\lambda, m}^{(n)}(T+P) \right]^t \quad (2.2)$$

для $t = \overline{1, n}$ — значения $\varphi_t(\lambda, n, m)$. Здесь $a_{i,j} = (P\psi_i, \psi_j)$, $i, j = \overline{0, n}$. Далее используем $\varphi_t(\lambda, n, m)$ в приближенном вычислении первых собственных чисел $\mu_i(\lambda)$, $i = \overline{1, N}$ ($N \ll n$), оператора $R_\lambda(T + P)$ по способу, описанному в теореме.

Итак, пусть конкретно $n = 15$, $m = 100$, $N = 5$, $\lambda = -4$, а функция

$$p(x) = \begin{cases} 3x^3 - 5x + 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Тогда $q = \|p\|_\infty / |\lambda_0 - \lambda| = (1 + \sqrt{5} \times 10/9) / 5 < 1$. При этом погрешность $\|R_\lambda(T + P) - R_{\lambda, m}(T + P)\|$ вычисления $R_\lambda(T + P)$ не будет превосходить $q^{101} / (1 - q) < 0.48 \times 10^{-15}$.

В математическом пакете Maple 8 найдем спектральные следы $\varphi_t(-4, 15, 100)$ матричных операторов $\left[AR_{-4, 100}^{(15)}(T + P)\right]^t$ для $t = \overline{1, 15}$, производя вычисления с числами, имеющими в своей записи сорок значащих цифр в десятичной системе счисления. Получим

$$\varphi_1(-4, 15, 100) = 0.3480172088461569261845846148779359334,$$

$$\varphi_2(-4, 15, 100) = 0.0382145776747650303905072800360106843,$$

...

$$\varphi_{15}(-4, 15, 100) = 0.8442547327634289688536118717511 \times 10^{-12}.$$

Теперь вычислим приближенные первые пять ($N = 5$) собственных числа ν_i оператора $T + P$ по способу, описанному в теореме:

$$\nu_0 \approx 1.683232597354394544365138961179299809129,$$

$$\nu_1 \approx 9.55507466448721858656036704048898413186,$$

$$\nu_2 \approx 25.22148674895796718272120587855855840674,$$

$$\nu_3 \approx 49.30573380396792525809488923054561761987,$$

$$\nu_4 \approx 81.20440377916502403225432758205246453778.$$

Если взять λ чисто мнимым комплексным числом, например пусть $\lambda = 5i$, и проделать те же действия, что и выше, то получаются следующие результаты:

$$\nu_0 \approx 1.683232597354394544365138961179299809127 - 0.1 \times 10^{-38}i,$$

$$\nu_1 \approx 9.555074664487218586560367040488983600167 + 0.92896 \times 10^{-34}i,$$

$$\nu_2 \approx 25.22148674895796718272120587846510127931 - 0.94931214587 \times 10^{-28}i,$$

$$\nu_3 \approx 49.30573380396792525809488667833592963403 + 0.4794905654362502 \times 10^{-23}i,$$

$$\nu_4 \approx 81.20440377916502403226425230308965897789 - 0.44170030901765524 \times 10^{-20}i,$$

причем

$$\Delta\nu_0\{-4, 5i\} < 0.23 \times 10^{-38}, \quad \Delta\nu_1\{-4, 5i\} < 0.54 \times 10^{-33},$$

$$\Delta\nu_2\{-4, 5i\} < 0.14 \times 10^{-27}, \quad \Delta\nu_3\{-4, 5i\} < 0.55 \times 10^{-23},$$

$$\Delta\nu_4\{-4, 5i\} < 0.11 \times 10^{-19}.$$

Обозначение $\Delta\nu_j\{-4, 5i\}$ представляет собой модуль разности чисел, приближающих одно и то же значение ν_j , но полученных при помощи разных λ : $\lambda = -4$ и $\lambda = 5i$.

Пример 2. Возмущенный оператор Якоби.

Рассмотрим действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = L_2^\omega(-1, 1)$, $\omega = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta \neq -1$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, оператор

$$T := -(1 - x^2)d^2/dx^2 - [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]d/dx + I.$$

Областью определения $\mathcal{D}(T)$ этого оператора будем считать множество всех функций f , обладающих следующими свойствами: f и f' — абсолютно непрерывны на отрезке $[-1, 1]$, $Tf \in \mathbb{H}$. Спектр оператора T составляют числа $\lambda_n = 1 + n(n + \alpha + \beta + 1)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, а соответствующими собственными функциями, образующими в \mathbb{H} ортонормированный базис, являются

$$\psi_n = c_n^{-1} P_n^{\alpha, \beta},$$

где $P_n^{\alpha, \beta}$ — многочлены Якоби, $c_n = \|P_n^{\alpha, \beta}\|_H$, $\|y\|_H = \left(\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta |y|^2 dx \right)^{1/2}$ — норма в \mathbb{H} .

Пусть P — оператор умножения на функцию $p \in L_\infty(-1, 1)$ и $\lambda \neq \lambda_i$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причем $\forall i \|p\|_\infty / |\lambda_i - \lambda| < 1$, $\|p\|_\infty = \operatorname{essential\,sup}_{x \in (-1, 1)} |p(x)|$. Тогда $\mathcal{D}(T + P) = \mathcal{D}(T)$ и операторы

$R_\lambda(T + P) := (T + P - \lambda I)^{-1}$ и $R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}$ — ядерные резольвенты. Выберем натуральные $n \gg 1$, $m \gg n$ и по формулам (2.1), (2.2) вычислим спектральные следы $\varphi_t(\lambda, n, m)$ матричных операторов $\left[AR_{\lambda, m}^{(n)}(T + P) \right]^t$ для $t = \overline{1, n}$. Далее используем значения $\varphi_t(\lambda, n, m)$ в приближенном вычислении первых собственных чисел $\mu_i(\lambda)$, $i = \overline{1, N}$ ($N \ll n$), оператора $R_\lambda(T + P)$ по способу, описанному в теореме.

Выберем конкретные значения некоторых параметров: $n = 17$, $m = 100$, $N = 4$, $\lambda = -10$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, а функция $p(x) = 6x^5 - 2x^2 + x - 1$. Тогда

$$\lambda_n = 1 + n(n + 6), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$q = \|p\|_\infty / |\lambda_0 - \lambda| = 10/11 < 1$. При этом погрешность $\|R_\lambda(T + P) - R_{\lambda, m}(T + P)\|$ вычисления $R_\lambda(T + P)$ не будет превосходить $q^{101} / (1 - q) < 0.00073$.

В математическом пакете Maple 8 найдем спектральные следы $\varphi_t(-10, 17, 100)$ матричных операторов $\left[AR_{-10, 100}^{(17)}(T + P) \right]^t$ для $t = \overline{1, 17}$, производя вычисления с числами, имеющими в своей записи сорок значащих цифр в десятичной системе счисления. Получим

$$\varphi_1(-10, 17, 100) = 0.3315749973133419812432366793584316585,$$

$$\varphi_2(-10, 17, 100) = 0.0171474363553331790506737840936613736,$$

...

$$\varphi_{17}(-10, 17, 100) = 0.1110248832772119713054078767952 \times 10^{-17}.$$

Теперь вычислим четыре ($N = 4$) приближенных первых собственных числа ν_i оператора $T + P$ по способу, описанному в теореме:

$$\nu_0 \approx -0.057883895310552005669224532476753202387,$$

$$\nu_1 \approx 6.67773310230740233769509035283872641031,$$

$$\nu_2 \approx 15.55086694199288161582890973767213723841,$$

$$\nu_3 \approx 26.44615410541437542656000068078359846532.$$

Если взять λ комплексным числом, например пусть $\lambda = 11i$, и производить действия с числами, имеющими в своей записи семьдесят значащих цифр, то получаются следующие результаты:

$$\nu_0 \approx -0.057883895310552005669224532476753202329120606810269629118152050 + 0.1 \times 10^{-67}i,$$

$$\nu_1 \approx 6.6777331023074023376950903528387231722212316163145003258010776 - 0.101 \times 10^{-65}i,$$

$$\nu_2 \approx 15.550866941992881615828909737694659548699584469841099199701317 + 0.4793 \times 10^{-64}i,$$

$$\nu_3 \approx 26.446154105414375426560000654210303955281196236279510568435993 - 0.43536881 \times 10^{-60}i,$$

причем

$$\Delta \nu_0\{-10, 11i\} < 0.58 \times 10^{-37}, \quad \Delta \nu_1\{-10, 11i\} < 0.33 \times 10^{-32},$$

$$\Delta \nu_2\{-10, 11i\} < 0.23 \times 10^{-28}, \quad \Delta \nu_3\{-10, 11i\} < 0.27 \times 10^{-25}.$$

Обозначение $\Delta \nu_j\{-10, 11i\}$ представляет собой модуль разности чисел, приближающих одно и то же значение ν_j , но полученных при помощи разных λ : $\lambda = -10$ и $\lambda = 11i$.

П р и м е р 3. Возмущенный оператор Лежандра.

Рассмотрим действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = L_2(-1, 1)$ оператор

$$T := -(1 - x^2)d^2/dx^2 + 2xd/dx + I.$$

Областью определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T будем считать множество всех функций f , обладающих следующими свойствами: f и f' — абсолютно непрерывны на отрезке $[-1, 1]$, $Tf \in \mathbb{H}$. Спектр оператора T составляют числа $\lambda_n = 1 + n(n+1)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а соответствующими собственными функциями, образующими в \mathbb{H} ортонормированный базис, являются $\psi_n = c_n^{-1}P_n$, где P_n — многочлены Лежандра, $c_n = \|P_n\|_H$, $\|y\|_H = \left(\int_{-1}^1 |y|^2 dx\right)^{1/2}$ — норма в \mathbb{H} .

Пусть P — оператор умножения на функцию $p \in L_\infty(-1, 1)$ и $\lambda \neq \lambda_i$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причем $\forall i \|p\|_\infty/|\lambda_i - \lambda| < 1$, $\|p\|_\infty = \operatorname{essential\,sup}_{x \in (-1, 1)} |p(x)|$. Тогда $\mathcal{D}(T + P) = \mathcal{D}(T)$ и операторы $R_\lambda(T + P) := (T + P - \lambda I)^{-1}$ и $R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}$ — ядерные резольвенты. Выберем натуральные $n \gg 1$, $m \gg n$ и по формулам (2.1), (2.2) вычислим спектральные следы $\varphi_t(\lambda, n, m)$ матричных операторов $\left[AR_{\lambda, m}^{(n)}(T + P)\right]^t$ для $t = \overline{1, n}$. Далее используем значения $\varphi_t(\lambda, n, m)$ в приближенном вычислении первых собственных чисел $\mu_i(\lambda)$, $i = \overline{1, N}$ ($N \ll n$), оператора $R_\lambda(T + P)$ по способу, описанному в теореме.

Выберем значения параметров: $n = 15$, $m = 10 \times n$, $N = 4$, $\lambda = -5$, а функция $p(x) = -2x^4 + 4x^3 - 3x + 2$. Тогда $q = \|p\|_\infty/|\lambda_0 - \lambda| = 1/2 < 1$. При этом погрешность $\|R_\lambda(T + P) - R_{\lambda, m}(T + P)\|$ вычисления $R_\lambda(T + P)$ не будет превосходить $q^{m+1}/(1 - q) < 0.71 \times 10^{-45}$.

В математическом пакете Maple 8 найдем спектральные следы $\varphi_t(-5, 15, 150)$ матричных операторов $\left[AR_{-5, 150}^{(15)}(T + P)\right]^t$ для $t = \overline{1, 15}$, производя вычисления с числами, имеющими в своей записи сорок значащих цифр в десятичной системе счисления. Получим

$$\varphi_1(-5, 15, 150) = 0.5296500533517618939783243790809521656,$$

$$\varphi_2(-5, 15, 150) = 0.0416189217292694347068704716935529448,$$

...

$$\varphi_{15}(-5, 15, 150) = 0.11115944314959532027165112736123 \times 10^{-13}.$$

Теперь вычислим четыре ($N = 4$) приближенных первых собственных числа ν_i оператора $T + P$ по способу, описанному в теореме:

$$\nu_0 \approx 2.468105015061687004129086852937927720610,$$

$$\nu_1 \approx 4.124448259479618061712951352240919754888,$$

$$\nu_2 \approx 8.17806649956457081783211184254832146635,$$

$$\nu_3 \approx 14.25593185528600311943743373104424472018.$$

Если взять то же λ , а $n = 19$, $m = 10n$ и производить действия с числами, имеющими в своей записи пятьдесят значащих цифр, то получаются следующие результаты:

$$\nu_0 \approx 2.4681050150616870035279742469469801285649391858641,$$

$$\nu_1 \approx 4.1244482594796180547899014538974553600650858283312,$$

$$\nu_2 \approx 8.178066499564570782632936355681391865467957005837,$$

$$\nu_3 \approx 14.255931855286002787398775053844292280548547046146,$$

причем

$$\Delta\nu_0\{n : 15, 19; m : 150, 190\} < 0.61 \times 10^{-18},$$

$$\Delta\nu_1\{n : 15, 19; m : 150, 190\} < 0.7 \times 10^{-17},$$

$$\Delta\nu_2\{n : 15, 19; m : 150, 190\} < 0.36 \times 10^{-16},$$

$$\Delta\nu_3\{n : 15, 19; m : 150, 190\} < 0.34 \times 10^{-15}.$$

Обозначение $\Delta\nu_j\{n : 15, 19; m : 150, 190\}$ представляет собой модуль разности чисел, приближающих одно и то же значение ν_j , но полученных при помощи разных пар $\{n, m\}$: $\{n = 15, m = 150\}$ и $\{n = 19, m = 190\}$.

Пример 4. Возмущенный квадрат оператора Лагерра.

Рассмотрим действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = L_2^w(0, \infty)$, $w(x) = e^{-x}x^\alpha$, $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, оператор $T = A^2$, где

$$A := -xd^2/dx^2 - (\alpha + 1 - x)d/dx + I.$$

Областью определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T будем считать множество всех функций f , обладающих следующими свойствами: f, f', f'' и f''' — абсолютно непрерывны на любом отрезке из \mathbf{R}_+ и $Tf \in \mathbb{H}$. Спектр оператора T составляют числа $\lambda_n = (1 + n)^2$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а соответствующими собственными функциями, образующими в \mathbb{H} ортонормированный базис, являются $\psi_n = c_n^{-1}L_n^\alpha$, где L_n^α — многочлены Лагерра, $c_n = \|L_n^\alpha\|_H$, $\|y\|_H = \left(\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha|y|^2 dx\right)^{1/2}$ — норма в \mathbb{H} .

Пусть P — оператор умножения на функцию $p \in L_\infty(0, \infty)$ и $\lambda \neq \lambda_i$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причем $\forall i \|p\|_\infty/|\lambda_i - \lambda| < 1$, $\|p\|_\infty = \text{essential sup } |p(x)|$. Тогда $\mathcal{D}(T + P) = \mathcal{D}(T)$ и операторы

$R_\lambda(T + P) := (T + P - \lambda I)^{-1}$ и $R_\lambda(T) := (T - \lambda I)^{-1}$ — ядерные резольвенты. Выберем натуральные $n \gg 1$, $m \gg n$ и по формулам (2.1), (2.2) вычислим спектральные следы $\varphi_t(\lambda, n, m)$ матричных операторов $[AR_{\lambda, m}^{(n)}(T + P)]^t$ для $t = \overline{1, n}$. Далее используем значения $\varphi_t(\lambda, n, m)$ в приближенном вычислении первых собственных чисел $\mu_i(\lambda)$, $i = \overline{1, N}$ ($N \ll n$), оператора $R_\lambda(T + P)$ по способу, описанному в теореме.

Выберем значения некоторых параметров: $n = 17$, $m = 10n$, $N = 3$, $\alpha = 2$, $\lambda = -3$, а функция $p(x) = \exp(-x)(x^3 - 2x^2 + 3x - 2)$. Тогда $q = \|p\|_\infty/|\lambda_0 - \lambda| = 1/2 < 1$. При этом погрешность $\|R_\lambda(T + P) - R_{\lambda, m}(T + P)\|$ вычисления $R_\lambda(T + P)$ не будет превосходить $q^{m+1}/(1 - q) < 0.67 \times 10^{-51}$.

В математическом пакете Maple 8 найдем спектральные следы $\varphi_t(-3, 17, 170)$ матричных операторов $[AR_{-3, 150}^{(15)}(T + P)]^t$ для $t = \overline{1, 17}$, производя вычисления с числами, имеющими в своей записи сорок значащих цифр в десятичной системе счисления. Получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(-3, 17, 170) &= 0.6537292730845117910808893564191224299, \\ \varphi_2(-3, 17, 170) &= 0.0814215131113897928870065521948034128, \\ &\dots \\ \varphi_{17}(-3, 17, 170) &= 0.1854463347506667491108585167162 \times 10^{-11}. \end{aligned}$$

Теперь вычислим три ($N = 3$) приближенных первых собственных числа ν_i оператора $T + P$ по способу, описанному в теореме:

$$\begin{aligned} \nu_0 &\approx 1.485080615862498427979450310134625137440, \\ \nu_1 &\approx 4.218014487787066765271507407459501449852, \\ \nu_2 &\approx 9.13371647111302993828952620031034215445. \end{aligned}$$

Если взять то же λ , а $n = 19$, $m = 10n$ и производить действия с числами, имеющими в своей записи пятьдесят значащих цифр, то получаются следующие результаты:

$$\begin{aligned} \nu_0 &\approx 1.4850805874261708569217099911490233132277814100970, \\ \nu_1 &\approx 4.2180143420793777288438191925960389598303156788653, \\ \nu_2 &\approx 9.133715967964588145573781491405940757067451655708, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} \Delta\nu_0\{n : 17, 19; m : 170, 190\} &< 0.285 \times 10^{-7}, \\ \Delta\nu_1\{n : 17, 19; m : 170, 190\} &< 0.146 \times 10^{-6}, \\ \Delta\nu_2\{n : 17, 19; m : 170, 190\} &< 0.504 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Обозначение $\Delta\nu_j\{n : 17, 19; m : 170, 190\}$ представляет собой модуль разности чисел, приближающих одно и то же значение ν_j , но полученных при помощи разных пар $\{n, m\}$: $\{n = 17, m = 170\}$ и $\{n = 19, m = 190\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Садовничий В.А., Дубровский В.В., Малекo Е.М.** Об одном способе приближенного нахождения собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля // Докл. РАН. 1999. Т. 369, № 1. С. 16–18.
2. **Садовничий В.А., Дубровский В.В., Малекo Е.М., Попов А.Ю.** Корректность метода А. А. Дородницына приближенного вычисления собственных значений одного класса краевых задач // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 4. С. 471–476.
3. **Малекo Е.М., Королева В.В.** О построении следов “подходящих резольвент” степеней возмущенного оператора // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. шк. “Понтрягинские чтения — XV”. Воронеж, 2004. С. 141.

Малекo Евгений Михайлович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Магнитогорский гос. техн. ун-т
e-mail: emaleko@rambler.ru

Поступила 17.09.2009

УДК 517.982.272+515.122.55

СЛАБО МНОЖЕСТВЕННО-ОТКРЫТАЯ ТОПОЛОГИЯ¹**А. В. Осипов**

В работе исследуются свойства слабо множественно-открытой топологии на множестве $C(X)$ всех вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X . Изучаются взаимоотношения \mathbb{R} -компактно-открытой топологии с хорошо известными множественно-открытыми и равномерными топологиями на множестве $C(X)$.

Ключевые слова: пространство непрерывных функций, множественно-открытая топология, топология равномерной сходимости на семействе множеств.

A. V. Osipov. Weakly set-open topology.

The properties of the weakly set-open topology on the set $C(X)$ of all real-valued functions defined on a Tikhonov space X are studied. The relation between the \mathbb{R} -compact-open topology and the well-known set-open and uniform topologies on the set $C(X)$ is investigated.

Keywords: space of continuous functions, set-open topology, topology of uniform convergence on a family of sets.

Введение

На множестве $C(X)$ всех вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X , можно рассматривать несколько классических топологий. В этой работе рассматривается топология равномерной сходимости, множественно-открытая топология, слабо множественно-открытая топология и топология равномерной сходимости на ограниченных подмножествах.

Топология равномерной сходимости задается базой в каждой точке $f \in C(X)$. Эта база состоит из всех множеств $\{g \in C(X) : \sup\{|g(x) - f(x)| < \varepsilon : x \in X\}\}$. Естественным обобщением этой топологии является топология равномерной сходимости на элементах семейства λ (λ -топология), где λ — фиксированное семейство непустых подмножеств X . Базу λ -топологии в точке $f \in C(X)$ образуют все множества вида $\{g \in C(X) : \exists a < \varepsilon |f(x) - g(x)| \leq a, \text{ для всех } x \in F\}$, где $F \in \lambda$, $\varepsilon > 0$.

Если в качестве семейства λ взять все конечные подмножества X , то получившаяся топология называется топологией поточечной сходимости; если же все компактные подмножества X , то — топологией равномерной сходимости на компактах, или компактно-открытой. Компактно-открытую топологию впервые определил Р. Фокс [8] как топологию, предбазу которой образуют все множества вида $\{f \in C(X) : f(F) \subseteq U\}$, где F — компактное подмножество X , а U — открытое подмножество числовой прямой. Заметим, что топология поточечной сходимости может быть определена похожим образом: заменой в определении предбазы компактных подмножеств конечными. Топологическое пространство $C(X)$ с топологией равномерной сходимости на семействе λ будем обозначать $C_{\lambda,u}(X)$. Если $\{X\} \in \lambda$, то $C_u(X)$.

Множественно-открытая топология является обобщением компактно-открытой топологии и топологии поточечной сходимости. Множественно-открытая топология на семействе λ непустых подмножеств X (λ -открытая топология) была впервые введена Р. Аренсом и Ж. Дугунджи [5]. Предбазу λ -открытой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X) : f(F) \subseteq U\}$,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00139-а), программы Отделения математических наук РАН и молодежного научного гранта УрО РАН.

где $F \in \lambda$, а U — открытое подмножество числовой прямой. Топологическое пространство $C(X)$ с множественно-открытой топологией на семействе λ будем обозначать $C_\lambda(X)$.

Топология равномерной сходимости на ограниченных подмножествах (ограничено-открытая топология) была определена в 1970 г. Бучволтером [7]. Предбазу такой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X) : \overline{f(F)} \subseteq U\}$, где F — ограниченное подмножество X , а U — открытое подмножество числовой прямой. Топологическое пространство $C(X)$ с ограниченно-открытой топологией на семействе всех ограниченных подмножеств X будем обозначать $C_b(X)$.

В этой работе на множестве $C(X)$ рассматривается слабо множественно-открытая топология, изучаются ее топологические свойства и взаимоотношения с другими топологиями на множестве $C(X)$.

Все пространства, рассматриваемые в работе, предполагаем тихоновскими. Если X и Y — два топологических пространства, то запись $X \geq Y$ ($X > Y$, $X = Y$) означает, что X и Y совпадают как множества и топология на X сильнее или равна (строго сильнее, равна) топологии на Y . Символы \mathbb{R} и \mathbb{N} обозначают множество вещественных и натуральных чисел соответственно; через \mathbb{R}^ω обозначается счетное тихоновское произведение пространства \mathbb{R} . Нуль-множеством или функционально замкнутым называется множество, которое равно $f^{-1}(0)$ для некоторой функции $f \in C(X)$. Функционально открытым (или конуль-множеством) называется дополнение до нуль-множества. Покрытие называется функционально открытым, если оно состоит из функционально открытых множеств. Если X — топологическое пространство, а $G \subseteq C(X)$, то подмножество $A \subseteq X$ называют G -ограниченным при условии, что $f(A)$ — ограниченное подмножество \mathbb{R} для любой функции $f \in G$. Если множество A является G -ограниченным при $G = C(X)$, то A называют ограниченным на X . Ограниченные подмножества иногда называют относительно псевдокомпактными. Замыкание множества A будем обозначать как \overline{A} , символом \emptyset обозначаем пустое множество. Если $A \subseteq X$, а $f \in C(X)$, то через $f|_A$ обозначаем сужение функции f на множество A . Как обычно, $f(A)$ и $f^{-1}(A)$ — это соответственно образ и полный прообраз множества A при отображении f . Остальные обозначения можно найти в [4].

1. \mathbb{R} -компактные множества и их свойства

Понятие \mathbb{R} -компактного множества впервые встречается в работе М.А. Асанова [1].

О п р е д е л е н и е. Подмножество A пространства X называется \mathbb{R} -компактным, если для любой непрерывной на X вещественнозначной функции f множество $f(A)$ компактно в \mathbb{R} .

Отметим, что в определении можно компактность множества $f(A)$ заменить просто на его замкнутость. Действительно, если $f(A)$ замкнуто, но не ограничено, рассмотрим функцию $h(t) = \operatorname{arctg}(t)$, тогда $h(f(x)) \in C(X)$, и $h(f(A))$ — незамкнутое множество.

В случае $A = X$ свойство множества A быть \mathbb{R} -компактным совпадает с псевдокомпактностью пространства X .

Очевидно, что любое псевдокомпактное подмножество является \mathbb{R} -компактным.

Заметим, что любое \mathbb{R} -компактное множество является ограниченным по определению. Приведем пример, в котором понятия “псевдокомпактность”, “ \mathbb{R} -компактность” и “ограниченность” будут отличаться даже для замкнутых подмножеств.

П р и м е р 1. Пусть \mathbb{N} — счетный дискрет, S — максимальное по включению семейство почти дизъюнктивных подмножеств \mathbb{N} . Добавим к пространству \mathbb{N} множество точек $A = \{a_s \mid s \in S\}$. Положим $X = \mathbb{N} \cup A$. Топология на X такова: все точки \mathbb{N} изолированные, а базисная окрестность в точке a_s — все множество s , кроме конечного числа точек.

Полученное пространство обозначается как Ψ и называется пространством Исбела — Мрувка. Отметим, что оно псевдокомпактно [4]. В [3] было доказано, что множество A является \mathbb{R} -компактным и, как замкнутый дискрет в себе, подпространство A не является псевдокомпактным.

Пусть $B = \{a_{s_i} \mid i = 1, 2, \dots\}$ — произвольное счетное подмножество A . Оно замкнуто в X , так как все множество A — замкнутый дискрет. Но множество B не \mathbb{R} -компактно. В самом деле, построим функцию f таким образом: если $x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} (s_i \cup a_{s_i})$, то $f(x) = 0$. Если $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} (s_i \cup a_{s_i})$, то $f(x) = 1/i$, где i — наименьший номер такой, что $x \in s_i \cup a_{s_i}$. Легко видеть, что f непрерывна, и $f(a_{s_i}) = 1/i$, поэтому $f(B)$ не компактно. Таким образом, B — замкнутое ограниченное подмножество (как подмножество псевдокомпактного пространства), не являющееся \mathbb{R} -компактным.

Отметим некоторые свойства \mathbb{R} -компактных подмножеств, рассмотренные в [3] и в [1]:

1. Любое замкнутое подмножество счетно компактного пространства \mathbb{R} -компактно.
2. Не всякое \mathbb{R} -компактное подмножество компактного пространства замкнуто.
3. Замыкание \mathbb{R} -компактного множества \mathbb{R} -компактно.
4. \mathbb{R} -компактность не сохраняется при пересечении и при переходе к замкнутому подмножеству.
5. Если $A \subseteq X$ — \mathbb{R} -компактное множество, то A — также \mathbb{R}^n -компактное множество (т. е. для любой непрерывной функции, действующей из X в \mathbb{R}^n , образ A является компактным подмножеством \mathbb{R}^n).
6. Если любое замкнутое подмножество пространства X является \mathbb{R} -компактным, тогда X счетно компактное пространство.

Также интересно отметить, что замыкание в регулярном пространстве со счетной базой любого ограниченного (\mathbb{R} -компактного) подмножества является компактом.

Утверждение 1. Если $A \subseteq X$ — \mathbb{R} -компактное множество, то A — также \mathbb{R}^{ω} -компактное множество (т. е. для любой непрерывной функции, действующей из X в \mathbb{R}^{ω} , образ A является компактным подмножеством \mathbb{R}^{ω}).

Доказательство. Пусть $f \in C(X, \mathbb{R}^{\omega})$. Заметим, что проекция $f(A)$ на каждый из множителей есть компакт, поэтому $f(A)$ лежит в произведении компактов, так что достаточно доказать, что $f(A)$ замкнуто в \mathbb{R}^{ω} . Пусть $y \in \overline{f(A)}$. Рассмотрим функцию $g : \mathbb{R}^{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $g(x)$ равно расстоянию от x до y в \mathbb{R}^{ω} (такая функция найдется, так как \mathbb{R}^{ω} — метризуемое пространство). Это непрерывная функция, и $g^{-1}(0) = y$. Тогда $(g \circ f)(A)$ — компактное в \mathbb{R} множество и точка 0 лежит в его замыкании. Отсюда $0 \in (g \circ f)(A)$, $y \in f(A)$ и $f(A)$ — замкнуто. Утверждение доказано.

Теорема 1. Множество A является \mathbb{R} -компактным подмножеством X тогда и только тогда, когда из любого счетного функционально открытого покрытия множества A можно выделить конечное подпокрытие.

Доказательство. Пусть A является \mathbb{R} -компактным подмножеством X и $\{W_i\}_i$ — счетное функционально открытое покрытие множества A , где $W_i = X \setminus f_i^{-1}(0)$ для некоторой функции $f_i \in C(X)$. Рассмотрим диагональное произведение $f = \Delta f_i$, действующее из X в $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_i = \mathbb{R}^{\omega}$. В силу утверждения 1 множество $f(A)$ является компактным подмножеством \mathbb{R}^{ω} . Рассмотрим открытое покрытие $\{W_i \times \prod_{j \neq i} \mathbb{R}_j\}_i$ множества $f(A)$. В силу компактности выделяем конечное подпокрытие $\{W_{i_k} \times \prod_{j \neq i_k} \mathbb{R}_j\}_{k=1}^m$. Отсюда $\{W_{i_k}\}_{k=1}^m$ является конечным подпокрытием множества A .

Докажем обратное. Пусть из любого счетного функционально открытого покрытия множества A можно выделить конечное подпокрытие. Предположим противное, что A не \mathbb{R} -компактно, т. е. существует функция $f \in C(X)$ такая, что $f(A)$ не замкнуто. Пусть $y \in \overline{f(A)} \setminus f(A)$. Рассмотрим семейство $\{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [y - 1/n, y + 1/n])\}_{n \in \mathbb{N}}$, являющееся счетным функционально открытым покрытием множества A . Выделим конечное подпокрытие

$\{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [y - 1/n_k, y + 1/n_k])\}_{k=1}^m$. Тогда для всех $n > \max_{k=1, m} \{n_k\}$ интервал $(y - 1/n, y + 1/n)$ не пересекается с $f(A)$. Получили противоречие.

Следствие 1. *Пересечение \mathbb{R} -компактного множества и нуль-множества является \mathbb{R} -компактным множеством.* \square

Отметим, что существует вполне регулярное псевдокомпактное пространство, содержащее нуль-множество, которое не является псевдокомпактным [9].

Заметим, что в тихоновских пространствах псевдокомпактность пространства X эквивалентна слабо компактности (feebly compact), где слабо компактность означает, что из любого счетного покрытия пространства X можно выделить конечное подсемейство, объединение которого будет всюду плотно в X .

Следствие 2. *Подмножество A пространства X является \mathbb{R} -компактным тогда и только тогда, когда из любого счетного функционально открытого покрытия множества A можно выделить конечное подсемейство, замыкание объединения элементов которого будет содержать множество A .*

Доказательство. Пусть $\{W_i\}_i$ — счетное функционально открытое покрытие множества A . Для каждого i построим счетную систему функционально открытых множеств $\{V_k^i\}_k$ такую, что $\overline{V_k^i} \subseteq W_i$ и $\bigcup_k V_k^i = W_i$. Поскольку $\{W_i\}_i$ — счетное функционально открытое покрытие множества A , множество A содержится в $\bigcup_{i,k} V_k^i$. Тогда можно выделить конечное подсемейство $\{V_{k_1}^{i_1}, \dots, V_{k_s}^{i_s}\}$ такое, что $A \subseteq \bigcup_{j=1}^s \overline{V_{k_j}^{i_j}}$. Заметим, что конечное семейство $\{W_{i_j}\}_{j=1}^s$ является покрытием множества A .

2. Слабо множественно-открытая топология

Далее будут использоваться следующие обозначения подсемейств ограниченных подмножеств X :

- $F(X)$ — семейство всех конечных подмножеств X ;
- $K(X)$ — семейство всех компактных подмножеств X ;
- $KC(X)$ — семейство всех счетно компактных подмножеств X ;
- $PS(X)$ — семейство всех псевдокомпактных подмножеств X ;
- $RC(X)$ — семейство всех \mathbb{R} -компактных подмножеств X ;
- $B(X)$ — семейство всех ограниченных подмножеств X .

Заметим, что $F(X) \subseteq K(X) \subseteq KC(X) \subseteq PS(X) \subseteq RC(X) \subseteq B(X)$. Хорошо известно, что замыкание псевдокомпактного (ограниченного) подмножества X будет псевдокомпактным (ограниченным) подмножеством. Это утверждение справедливо и для \mathbb{R} -компактных множеств (см. [3]).

Отметим, что для замкнутого подмножества A в нормальном пространстве X следующие свойства эквивалентны:

- 1) A — счетно компактное;
- 2) A — псевдокомпактное;
- 3) A — \mathbb{R} -компактное;
- 4) A — ограниченное.

Пусть λ — семейство подмножеств X , тогда можно определить топологию на $C(X)$, полагая предбазисными открытыми множествами все множества вида: $[A, U] = \{f \in C(X) : f(F) \subseteq U\}$, где $F \in \lambda$, а U — открытое подмножество числовой прямой. Назовем эту топологию *слабо множественно-открытой* и соответствующее топологическое пространство будем обозначать $C_{\lambda^*}(X)$.

Отметим, что любое открытое множество в слабо множественно-открытой топологии является открытым множеством во множественно-открытой топологии, чем поясняется “слабость” этой топологии относительно множественно-открытой. Действительно, если $[A, U]$ — произвольное предбазисное множество в $C_{\lambda^*}(X)$ и f — произвольная точка из $[A, U]$, тогда существует такое V , что $\overline{f(F)} \subset V \subset \overline{V} \subset U$ и $[A, V]$ является открытой окрестностью точки f во множественно-открытой топологии, содержащейся в $[A, U]$.

Заметим, что если $\lambda = F(X)$ (соответственно, $K(X)$), то мы получим топологию поточечной сходимости (соответственно, компактно-открытую) на $C(X)$. В этих двух топологиях U можно всегда предполагать ограниченным интервалом [10].

Легко проверить, что если к семейству λ добавить все конечные объединения, то топология не меняется. Если λ является π -сетью, то топология будет хаусдорфовой. Далее предполагаем, что семейство λ является π -сетью и замкнуто относительно конечных объединений.

Так как для любого \mathbb{R} -компактного множества A выполняется $f(A) = \overline{f(A)}$ для любой функции $f \in C(X)$, то в случае $\lambda \subseteq RC(X)$ в определении предбазисных множеств оператор замыкания можно опустить. Тогда полученная топология будет в точности множественно-открытой топологией на семействе λ . Отметим, что если рассматривать множественно-открытую топологию на произвольном семействе ограниченных подмножеств, то в общем она может не совпадать со слабо множественно-открытой. Например, если $X = \mathbb{R}$ и λ — семейство всех ограниченных интервалов (ограниченных подмножеств), то топологии множественно-открытая и слабо множественно-открытая разные.

Когда λ совпадает с одним из семейств $F(X), K(X), KC(X), PS(X), RC(X)$, тогда слабо множественно-открытые топологии на $C(X)$ суть в точности множественно-открытые топологии: поточечной сходимости, компактно-открытая, счетно компактно-открытая, псевдокомпактно-открытая и \mathbb{R} -компактно-открытая соответственно. А если $\lambda = B(X)$, то слабо множественно-открытую топологию называют ограничено-открытой. Соответствующие топологические пространства обозначаются: $C_p(X), C_c(X), C_{kc}(X), C_{ps}(X), C_{rc}(X)$ и $C_b(X)$.

Пусть $\overline{\lambda} = \{\overline{A} : A \in \lambda\}$. Заметим, что слабо множественно-открытая топология не изменится, если λ заменить на $\overline{\lambda}$. Действительно для любой функции $f \in C(X)$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$; следовательно $\overline{f(\overline{A})} = \overline{f(A)}$. Таким образом, $C_{\lambda^*}(X) = C_{\overline{\lambda}^*}(X)$. В частности, для $C_{ps}(X), C_{rc}(X)$ и $C_b(X)$ мы можем рассматривать замкнутые псевдокомпактные, замкнутые \mathbb{R} -компактные и замкнутые ограниченные подмножества соответственно.

Если τ — семейство открытых подмножеств \mathbb{R} , то через $C_{\lambda^*}^{\tau}(X)$ обозначим множество $C(X)$ с топологией, порожденной семейством предбазисных подмножеств $[A, U] = \{f \in C(X) : f(F) \subseteq U\}$, где $F \in \lambda$ и $U \in \tau$.

Понятно, что $C_{\lambda^*}^{\tau}(X) \leq C_{\lambda^*}(X)$ и что в общем случае топологические пространства $C_{\lambda^*}^{\tau}(X)$ и $C_{\lambda^*}(X)$ могут отличаться (даже если τ состоит из элементов некоторой базы).

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{R}$ и λ является семейством всех дискретных подмножеств \mathbb{R} , а τ состоит из конечных объединений интервалов.

Очевидно, что $\left[\mathbb{N}, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (i - 1/i, i + 1/i) \right]$ является открытым множеством в $C_{\lambda^*}(X)$, но не является открытым множеством в $C_{\lambda^*}^{\tau}(X)$.

Теорема 2. Пусть $\lambda \subseteq B(X)$ и замкнуто относительно пересечений с нуль-множествами (т. е. если $F \in \lambda$ и Φ — нуль-множество, тогда $F \cap \Phi \in \lambda$), а τ — множество всех ограниченных интервалов. Тогда $C_{\lambda^*}^{\tau}(X) = C_{\lambda^*}(X)$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $C_{\lambda^*}^{\tau}(X) \geq C_{\lambda^*}(X)$. Пусть $W = \bigcap_{i=1}^k [F_i, U_i]$ — произвольное базисное множество в $C_{\lambda^*}(X)$ и $f \in W$. Тогда $\overline{f(F_i)} \subseteq U_i$. Каждое открытое множество в \mathbb{R} можно представить в виде объединения не более чем счетного числа открытых непересекающихся интервалов. Тогда $U_i = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_{i,j}$ для $i = 1, \dots, k$, где

$U_{i,n} \cap U_{i,m} = \emptyset$ при $n \neq m$; $U_{i,j}$ — интервал. Так как F_i ограничено, $\overline{f(F_i)}$ компактно. Выделяем конечное подпокрытие так, чтобы $\overline{f(F_i)} \subseteq \bigcup_{j=1}^{r(i)} U_{i,j}$ и $\overline{f(F_i)} \cap U_{i,j} \neq \emptyset$. Заметим, что $S_{i,j} = \overline{f(F_i)} \cap U_{i,j}$ — замкнутое подмножество \mathbb{R} . Положим $F_{i,j} = f^{-1}(S_{i,j}) \cap F_i$. В силу замкнутости семейства λ относительно пересечений с нуль-множествами $F_{i,j} \in \lambda$. Тогда ясно, что $f \in \bigcap_{i=1}^k \left(\bigcap_{j=1}^{r(i)} [F_{i,j}, U_{i,j}] \right) \subseteq W$. Теорема доказана.

Следствие 3. Пусть $\lambda = B(X)$, а τ — множество всех ограниченных интервалов, тогда $C_{\lambda^*}^{\tau}(X) = C_{\lambda^*}(X)$.

Следствие 4. Пусть $\lambda \subseteq RC(X)$ и замкнуто относительно пересечений с нуль-множествами (т. е. если $F \in \lambda$ и Φ — нуль-множество, тогда $F \cap \Phi \in \lambda$), а τ — множество ограниченных интервалов, тогда $C_{\lambda}^{\tau}(X) = C_{\lambda}(X)$.

Доказательство. По следствию 1 множество $F \cap \Phi$ является \mathbb{R} -компактным, поэтому замкнутость относительно таких пересечений не выводит семейство λ из класса \mathbb{R} -компактных множеств.

Следствие 5. Пусть $\lambda = RC(X)$, а τ — множество ограниченных интервалов, тогда $C_{\lambda}^{\tau}(X) = C_{\lambda}(X)$. \square

Рассмотрим следующий вид топологий на множестве $C(X)$ — топологии равномерной сходимости на элементах λ , где $\lambda \subseteq B(X)$. Для любого $A \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$ обозначим $A_{\varepsilon} = \{(f, g) \in C(X) \times C(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in A\}$. Легко заметить, что семейство $\{A_{\varepsilon} : A \in \lambda, \varepsilon > 0\}$ является базой для некоторой равномерности на $C(X)$. Обозначим множество $C(X)$ с топологией, индуцированной равномерностью, как $C_{\lambda,u}(X)$. Эта топология называется топология равномерной сходимости на семействе λ . Для любого $f \in C(X)$, $A \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$ обозначим $\langle f, A, \varepsilon \rangle = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in A\}$. Тогда для любого $f \in C(X)$ семейство $\{\langle f, A, \varepsilon \rangle : A \in \lambda, \varepsilon > 0\}$ образует базу в точке f в пространстве $C_{\lambda,u}(X)$. Поскольку топология порождена равномерностью, $C_{\lambda,u}(X)$ — вполне регулярное пространство. Заметим, что также как в слабо множественно-открытой топологии, семейство λ можно заменить на $\overline{\lambda}$ без изменения топологии, т. е. $C_{\lambda,u}(X) = C_{\overline{\lambda},u}(X)$. Легко проверить, что если к семейству λ добавить все конечные объединения, то топология не меняется.

Топологию равномерной сходимости на семействе λ можно определить и другим путем. Для каждого $A \in \lambda$ определим полуорму p_A на $C(X)$:

$$p_A(f) = \sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

Для каждого $A \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$ пусть

$$V_{A,\varepsilon} = \{f \in C(X) : p_A(f) < \varepsilon\} \text{ и } \Psi = \{V_{A,\varepsilon} : A \in \lambda, \varepsilon > 0\}.$$

Очевидно, что для каждого $f \in C(X)$, $f + \Psi = \{f + V : V \in \Psi\}$ база в точке f . Так как топология определяется семейством полуорм, она локально выпукла. Заметим, что для каждого $f \in C(X)$ справедливо $f + V_{A,\varepsilon} \subseteq \langle f, A, \varepsilon \rangle$ и $\langle f, A, \varepsilon/2 \rangle \subseteq f + V_{A,\varepsilon}$ для любого $A \in \lambda$. Отсюда следует, что топология равномерной сходимости на элементах λ совпадает с топологией, порожденной семейством полуорм $\{p_A : A \in \lambda\}$. Таким образом, $C_{\lambda,u}(X)$ является локально-выпуклым пространством.

Когда λ совпадает с одним из семейств $F(X), K(X), KC(X), PS(X), RC(X)$ или $B(X)$, соответствующие топологические пространства будем обозначать: $C_{p,u}(X), C_{c,u}(X), C_{kc,u}(X), C_{ps,u}(X), C_{rc,u}(X), C_{b,u}(X)$.

Предположим, что λ_1 и λ_2 — два семейства ограниченных подмножеств X . Будем говорить, что λ_1 аппроксимирует λ_2 (или λ_2 аппроксимируется λ_1), если для любого $A \in \lambda_2$ и любого открытого множества V , содержащего A , существует конечный набор элементов B_1, \dots, B_n из λ_1 таких, что $A \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n \subseteq V$. Заметим, что λ аппроксимирует $F(X)$ тогда и только тогда, когда λ сеть. Неравенство $\lambda_1 \leq \lambda_2$ означает, что для любого $A \in \lambda_1$, существует $B \in \lambda_2$ такое, что $A \subseteq B$.

В [10] было доказано, что если $\lambda \subseteq B(X)$ и λ — сеть на X , тогда $C_{\lambda^*}(X)$ — тихоновское пространство. Оказывается, что даже в случае, когда λ π -сеть из компактных множеств, пространство $C_{\lambda^*}(X)$ может быть нерегулярным [2, пример 6.2].

Заметим, что $C_p(X)$, $C_c(X)$, $C_{kc}(X)$, $C_{ps}(X)$, $C_{rc}(X)$, $C_b(X)$ — тихоновские пространства [10]. Там же был получен критерий: $C_{\lambda,u}(X)$ — хаусдорфовое пространство тогда и только тогда, когда $\bigcup\{A : A \in \lambda\}$ всюду плотно в X . Таким образом, $C_{p,u}(X)$, $C_{c,u}(X)$, $C_{kc,u}(X)$, $C_{ps,u}(X)$, $C_{rc,u}(X)$, $C_{b,u}(X)$ — тихоновские пространства.

Пусть $C^*(X)$ обозначает множество всех ограниченных функций в $C(X)$. Хорошо известно, что $C^*(X)$ — плотное подмножество $C_p(X)$ и $C_c(X)$. Отметим, что это будет верно и для произвольного семейства $\lambda \subseteq B(X)$, т. е. $C^*(X)$ является плотным подмножеством и в $C_{\lambda^*}(X)$, и в $C_{\lambda,u}(X)$ [10].

3. Сравнение различных топологий

В этом разделе рассматривается вопрос взаимоотношений между слабо множественно-открытой топологией и топологией равномерной сходимости на элементах произвольных семейств λ . В случае, когда $\lambda \subseteq K(X)$, отношения топологий исследовались Р. Маккоем и И. Нтанту [11].

Предложение 1. *Если λ состоит из компактных множеств, то $C_{\lambda,u}(X, Y) \supseteq C_\lambda(X, Y)$. Если дополнительно λ наследственно замкнуто (т. е. вместе с каждым своим элементом содержит все его замкнутые подмножества), то эти топологии совпадают.*

В работе С.Э. Нохрина и А.В. Осипова были получены следующие результаты о совпадении множественно-открытой топологии и топологии равномерной сходимости в более общем случае (см. [3, теоремы 2.1, 2.2]):

Предложение 2. *Пусть λ состоит из \mathbb{R} -компактных множеств и вместе с каждым своим элементом содержит все содержащиеся в нем \mathbb{R} -компактные подмножества. Тогда $C_{\lambda,u}(X) = C_\lambda(X)$.*

Заметим, что предложение 2 будет верным, даже если семейство λ состоит из \mathbb{R} -компактных множеств и замкнуто относительно пересечений с нуль-множествами.

Предложение 3. *Пусть $C_\lambda(X) = C_{\lambda,u}(X)$. Тогда семейство λ состоит из \mathbb{R} -компактных множеств и для любого элемента $A \in \lambda$ и любого его \mathbb{R} -компактного подмножества B множества $\langle B, U \rangle$ и $\langle f, B, \varepsilon \rangle$ открыты в этих топологиях при всех U , открытых в \mathbb{R} , $f \in C(X)$ и $\varepsilon > 0$ (т. е. можно полагать, что в семейство λ входят все \mathbb{R} -компактные подмножества его элементов). \square*

Предложения 2 и 3 показывают, что \mathbb{R} -компактность является существенным свойством при рассмотрении вопросов о совпадении множественно-открытой топологии и топологии равномерной сходимости на семействе λ .

Отметим, что в случае $\lambda = RC(X)$ слабо множественно-открытая топология совпадает с множественно-открытой топологией, которая (по предложению 2 и следствию 1) совпадает с топологией равномерной сходимости на элементах $RC(X)$.

В общем случае множественно-открытая топология является более сильной, чем слабо множественно-открытая.

В случае, когда $\lambda \subseteq B(X)$, Кунду и Раха в [10] доказали, что $C_{\lambda,u}(X) \geq C_{\lambda^*}(X)$.

Следующая теорема дает необходимое условие на семейство λ , при котором слабо множественно-открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости на элементах λ .

Теорема 3. Пусть $C_{\lambda^*}(X) = C_{\lambda,u}(X)$. Тогда семейство λ состоит из ограниченных множеств.

Для доказательства потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть $C_{\lambda^*}(X) = C_{\lambda,u}(X)$, $A \in \lambda$ и для некоторой функции $f \in C(X)$ множество $f(A)$ является неограниченным сверху. Тогда существует $a \in \mathbb{R}$, такое что $[a, +\infty) \subseteq \overline{f(A)}$.

Доказательство леммы. Допустим, что для любого $a \in \mathbb{R}$ луч $[a, +\infty) \not\subseteq \overline{f(A)}$. Тогда существует дизъюнктная система интервалов $\{(c_i, b_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что $(c_i, b_i) \cap \overline{f(A)} = \emptyset$ для всех $i \in \mathbb{N}$, а последовательности $\{c_i\}$ и $\{b_i\}$ стремятся к $+\infty$. Получаем, что $\overline{f(A)} \subseteq \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (c_i, b_i) \right)$. Пусть $h \in C(\mathbb{R})$ такая, что $h(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (c_i, b_i)) = \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию $h \circ f \in C(X)$ и ее окрестность в слабо множественно-открытой топологии $[A, W]$, где $W = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (i - 1/i, i + 1/i)$.

По условию $C_{\lambda^*}(X) = C_{\lambda,u}(X)$, значит у функции $h \circ f$ существует окрестность в топологии равномерной сходимости $V = \langle h \circ f, B, \varepsilon \rangle$ такая, что $V \subseteq [A, W]$.

Заметим, что $A \subseteq B$. Действительно, если бы существовала точка $z \in A \setminus B$, то в силу вполне регулярности пространства X нашлась бы функция $p \in C(X)$, такая, что $p|_B = (h \circ f)|_B$ и $p(z) \notin W$. Тогда получили бы, что $p \in V$, но $p \notin [A, W]$.

Рассмотрим функцию $q(x) = (h \circ f)(x) + d$, где $d = \min\{1/2, \varepsilon/2\}$. Так как $|q(x) - (h \circ f)(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, то $q \in V$. Заметим, что найдется $i \in \mathbb{N}$, при котором $1/i < d$, тем самым существует точка $x_0 \in A$ так, что $q(x_0) \notin W$, значит, $q \notin [A, W]$. Получили противоречие с предположением, что для любого $a \in \mathbb{R}$, луч $[a, +\infty) \not\subseteq \overline{f(A)}$. Таким образом, существует $a \in \mathbb{R}$, такое что $[a, +\infty) \subseteq \overline{f(A)}$. \square

З а м е ч а н и е. Пусть $f(A)$ является неограниченным снизу множеством; тогда существует $b \in \mathbb{R}$, такое что $(-\infty, b] \subseteq \overline{f(A)}$. Для доказательства достаточно рассмотреть функцию $-f$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $A \in \lambda$ и A — неограниченное множество. Тогда существует функция $f \in C(X)$ такая, что $f(A)$ — неограниченное множество. Например, будем полагать, что $f(A)$ неограничено сверху.

Пусть $f \in [A, S]$, где S — произвольное открытое множество, не совпадающее с \mathbb{R} и содержащее $\overline{f(A)}$. Тогда по лемме существует $b \in \mathbb{R}$, такое что $[b, +\infty) \subseteq S$. В силу $C_{\lambda^*}(X) = C_{\lambda,u}(X)$ у функции f существует базисная окрестность в топологии равномерной сходимости $\langle f, D, \varepsilon \rangle$ такая, что $\langle f, D, \varepsilon \rangle \subseteq [A, S]$. У функции f существует также базисная окрестность в слабо множественно-открытой топологии $\bigcap_i^n [A_i, W_i]$ такая, что $\bigcap_i^n [A_i, W_i] \subseteq \langle f, D, \varepsilon \rangle$.

Отметим, что $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$. Действительно, если бы существовала точка $z \in A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$, то в силу вполне регулярности пространства X нашлась бы функция $p \in C(X)$ такая, что $p|_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = f|_{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ и $p(z) \notin S$. Тогда получили бы, что $p \in \bigcap_i^n [A_i, W_i]$, но $p \notin [A, S]$. Аналогично показывается, что $A \subseteq D$.

По лемме для любого $i \leq n$ множество $\overline{f(A_i)}$ либо ограничено сверху некоторым числом l_i , либо содержит луч $[b_i, +\infty)$. Пусть $m = \max_{1 \leq i \leq n} \{l_i, b_i\}$ и $r = m + \varepsilon$. Множество $f^{-1}(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ является функционально открытым, поэтому можно построить неотрицательную непрерывную

функцию $v \in C(X)$ такую, что $v(x) = 0$ для $x \notin f^{-1}(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ и $v(x_a) = 2 \cdot \varepsilon$ для некоторой точки $x_a \in A \cap f^{-1}(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. Функция $f + v \in C(X)$ не принадлежит $\langle f, D, \varepsilon \rangle$. Действительно, для $x_a \in A \subseteq D$ выполняется $|f(x_a) - (f + v)(x_a)| = |f(x_a) - f(x_a) - v(x_a)| = 2 \cdot \varepsilon > \varepsilon$.

Заметим, что $f + v \in \bigcap_i^n [A_i, W_i]$. Действительно, пусть $y \in A_i$, тогда если $y \notin f^{-1}(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, то $(f + v)(y) = f(y) \in W_i$, а если $y \in f^{-1}(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, то $(f + v)(y) = f(y) + v(y) \in [m, +\infty) \subseteq W_i$.

Таким образом, получили противоречие с тем, что $\bigcap_i^n [A_i, W_i] \subseteq \langle f, D, \varepsilon \rangle$. Получаем, что для любого $A \in \lambda$ и любого $f \in C(X)$ множество $f(A)$ ограничено. \square

З а м е ч а н и е. Пусть $C_{\lambda^*}(X) \leq C_{\lambda, u}(X)$. Тогда семейство λ состоит из таких множеств, что для любого $A \in \lambda$ и функции $f \in C(X)$ образ $f(A)$ либо ограничен, либо содержит луч $[a, +\infty)$ (либо луч $(-\infty, a]$) для некоторого $a \in \mathbb{R}$.

Следующая теорема усиливает результат полученный Кунду и Раха (см. [10, теорема 3.2]): если λ — семейство, состоящее из ограниченных подмножеств и замкнутое относительно канонических замкнутых подмножеств (т. е. для любого $A \in \lambda$ множества $B \subseteq A$ вида $B = \overline{Int_A B}^A$ также принадлежат семейству λ), тогда $C_{\lambda^*}(X) = C_{\lambda, u}(X)$.

Теорема 4. Пусть λ — семейство, состоящее из ограниченных подмножеств, и для любого $A \in \lambda$ и функционально открытого множества W такого, что $A \cap W \neq \emptyset$, следует, что $\overline{A \cap W} \in \lambda$. Тогда $C_{\lambda^*}(X) = C_{\lambda, u}(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко следует из [10, теоремы 3.2].

Теорема 5. Пусть $C_{\lambda^*}(X) = C_{\lambda, u}(X)$. Пусть λ_m — максимальное семейство, для которого $C_{\lambda^*}(X) = C_{\lambda_m}(X)$. Тогда для любого $A \in \lambda_m$ и функционально открытого множества W такого, что $A \cap W \neq \emptyset$, следует, что $\overline{A \cap W} \in \lambda_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 3 семейство λ состоит из ограниченных множеств. Для любого A множество $\overline{A \cap W}$ является ограниченным как подмножество ограниченного. Рассмотрим семейство $\lambda_1 = \lambda \cup \overline{A \cap W}$. Ясно, что $C_{\lambda^*}(X) \leq C_{\lambda_1}(X)$. По [3, теорема 3.1] получаем, что $C_{\lambda_1}(X) \leq C_{\lambda_1, u}(X)$. Хорошо известно, что равномерная топология на элементах семейства не меняется, если добавить к семейству любое подмножество любого элемента семейства. Поэтому $C_{\lambda_1, u}(X) = C_{\lambda, u}(X)$. По условию $C_{\lambda, u}(X) = C_{\lambda^*}(X)$. Получаем

$$C_{\lambda^*}(X) \leq C_{\lambda_1}(X) \leq C_{\lambda_1, u}(X) = C_{\lambda, u}(X) = C_{\lambda^*}(X),$$

т. е. все четыре топологии на $C(X)$ совпадают. Откуда следует, что $\overline{A \cap W} \in \lambda_m$.

Следствие 6. Для произвольного тихоновского пространства X , $C_{j^*}(X) = C_{j, u}(X)$, где $j = F(X), K(X), KC(X), PS(X), RC(X), B(X)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асанов М.О.** Пространство непрерывных отображений: дис. . . канд. физ.-мат. наук, Свердловск, 1980. 125 с.
2. **Нохрин С.Э.** Пространство непрерывных функций в множественно-открытых топологиях: дис. . . канд. физ.-мат. наук, Екатеринбург, 1997. 131 с.
3. **Нохрин С.Э., Осипов А.В.** К вопросу о совпадении множественно-открытой и равномерной топологий // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. Т. 15, № 2. С. 177–184.
4. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 750 с.
5. **Arens R., Dugundji J.** Topologies for functions spaces // Pac. J. Math. 1951. Vol. 1. P. 5–31.
6. **Beckenstein E., Narici L., Suffel C.** Topological algebras // North-Holland Math. Studies. Vol. 24. Notas de Matemática. No. 60. Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1977. 370 p.

7. **Buchwalter H.** Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier // Sem. Choquet. 1970. Exp. 14. 15 p.
8. **Fox R.H.** On topologies for function spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 51. P. 429–432.
9. **Frolík Z.** Generalisations of compact and Lindelöf spaces // Czech. Math. J. 1959. Vol. 9. P. 172–217.
10. **Kundu S., Raha A.B.** The bounded-open topology and its relatives // Rend. Istit. Math. Univ. Trieste. 1995. Vol. 27, no. 1–2. P. 61–77.
11. **McCoy R.A., Ntantu I.** Topologies properties of spaces of continuous functions // Lect. Notes Math. Vol. 1315. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 124 p.
12. **McCoy R.A., Ntantu I.** Countability properties of function spaces with set-open topologies // Topology Proc. 1985. Vol. 10, no. 2. P. 329–345.

Осипов Александр Владимирович
канд. физ.-мат. наук
старший научн. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: OAB@list.ru

Поступила 10.04.2009

УДК 512.54

О ГРУППАХ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ЦИКЛИЧЕСКИХ И ПРОЕКТИВНЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП¹

Д. Н. Панюшкин, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов

Пусть G — группа, а \mathfrak{R} — некоторое множество групп. Будем говорить, что группа G насыщена группами из множества групп \mathfrak{R} , если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G , изоморфной некоторой группе из \mathfrak{R} . В работе доказывается, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R} = \{L_2(2^n) \times \langle t_m \rangle \mid n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots\}$, где $(|L_2(2^n)|, |t_m|) = 1$, или из множества $\mathfrak{R} = \{L_2(5) \times \langle v \rangle\}$, $|v| = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, является локально конечной.

Ключевые слова: периодическая группа, группа Шункова, насыщенность.

D. N. Panyushkin, L. R. Tukhvatullina, K. A. Filippov. On a Shunkov group saturated by central extensions of cyclic groups by projective special linear groups.

Let G be a group, and let \mathfrak{R} be some set of groups. We say that the group G is saturated by groups from the set \mathfrak{R} if any finite subgroup of G is contained in a subgroup of G isomorphic to some group from \mathfrak{R} . We prove that a periodic Shunkov group saturated by groups from $\mathfrak{R} = \{L_2(2^n) \times \langle t_m \rangle \mid n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots\}$, where $(|L_2(2^n)|, |t_m|) = 1$, or from $\mathfrak{R} = \{L_2(5) \times \langle v \rangle\}$, where $|v| = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, is locally finite.

Keywords: periodic group, Shunkov group, saturation.

Введение

Пусть G — группа, а \mathfrak{R} — некоторое множество групп. Будем говорить, что группа G насыщена группами из множества групп \mathfrak{R} , если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G , изоморфной некоторой группе из \mathfrak{R} [7].

В работе [5] К.А. Филипповым доказана локальная конечность периодической группы Шункова (бесконечная группа называется группой Шункова, если в каждом ее сечении по конечной подгруппе, включая единичную, любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу), насыщенной группами из множества $\mathfrak{R} = \{L_2(q) \times Z_2\}$, где Z_2 — группа порядка 2.

В настоящей работе исследована периодическая группа Шункова, насыщенная прямыми произведениями циклических и проективных специальных линейных групп размерности два. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Бесконечная периодическая группа Шункова G , насыщенная группами из множества $\mathfrak{R} = \{L_2(2^n) \times \langle t_m \rangle \mid n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots\}$, где $(|L_2(2^n)|, |t_m|) = 1$, локально конечна и изоморфна прямому произведению локально циклической группы без инволюций на локально конечную группу $L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 2.*

Теорема 2. *Бесконечная периодическая группа Шункова G , насыщенная группами из множества $\mathfrak{R} = \{L_2(5) \times \langle v \rangle\}$, где $|v| = 2^k$, $k = 1, 2, \dots$, локально конечна и изоморфна $L \times V$, где $L \simeq L_2(5)$, а V — локально циклическая 2-группа.*

¹Работа выполнена при поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/3023) и РФФИ (проект 09-01-00717-а).

1. Известные факты и вспомогательные утверждения

Предложение 1 [1,2]. Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^n > 2$, P — силовская 2-подгруппа группы G . Тогда:

1. P — элементарная абелева группа, и любые две силовские 2-подгруппы группы G пересекаются тривиальным образом.
2. $C_G(a) = P$ для любой инволюции $a \in P$.
3. Любой элемент нечетного порядка из G инвертируется некоторой инволюцией.
4. $B = N_G(P) = P\lambda H$ — группа Фробениуса с ядром P и циклическим неизвариантным множителем H порядка $q - 1$, действующим транзитивно на множестве $P^\#$.
5. $N = N_G(H) = H\lambda\langle t \rangle$ — группа диэдра.
6. Если K — подгруппа в G и K обладает нормальной подгруппой нечетного порядка, то $N_G(K)$ — группа диэдра.
7. G порождается любыми двумя силовскими 2-подгруппами.

Предложение 2 [1,2]. Пусть $G = L_2(5)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Силовская 5-подгруппа P группы G — циклическая порядка 5 и $B = N_G(P) = P\lambda H$ — группа Фробениуса с ядром P и неизвариантным множителем H порядка 2.
2. $C_G(b) = \langle b \rangle$ для любого $1 \neq b \in P$.
3. Силовская 2-подгруппа группы G является четверной группой.
4. Если a — инволюция из G , то $C_G(a)$ — четверная группа.
5. Если $|a| = |b| = 5$ и $b \notin \langle a \rangle$, то $|[a, b^m]| = 5$ для некоторого целого $1 \leq m \leq 4$.

Предложение 3 [6]. Пусть G — группа Шункова, $H_1 < H_2 < \dots < H_i < \dots$ — цепочка ее нормальных подгрупп такая, что для любой ее подгруппы H_i из этой цепочки фактор-группа G/H_i является группой Шункова и $H = \bigcup_{i=1} H_i$. Тогда G/H — группа Шункова.

Предложение 4 [5]. Бесконечная периодическая группа Шункова, насыщенная группами $L_2(p^n)$, где p — простое число, изоморфна $L_2(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики p .

Предложение 5 (теорема Шмидта [3]). Расширение локально конечной группы при помощи локально конечной группы есть локально конечная группа.

2. Доказательство теоремы 1

До конца раздела G означает бесконечную периодическую группу Шункова, насыщенную группами из множества $\mathfrak{R} = \{L_2(2^n) \times \langle t_m \rangle\}$, где $(|L_2(2^n)|, |t_m|) = 1$, а $n, m = 1, 2, \dots$. Для любой конечной группы K из G обозначим через $\mathfrak{R}(K)$ множество всех подгрупп из G , содержащих K и изоморфных группам из \mathfrak{R} .

Лемма 1. Пусть M — конечная подгруппа группы G , изоморфная группе из \mathfrak{R} . Тогда $Z(M) \subset Z(G)$.

Доказательство. По условиям теоремы $M = L \times \langle v \rangle$, где $L \simeq L_2(2^n)$, $\langle v \rangle$ — центр группы M и $(|L|, |v|) = 1$. Покажем, что $v \in Z(G)$.

Пусть i — произвольная инволюция из L , $b \in \langle v \rangle$ — элемент нечетного простого порядка. Предположим, что $b \notin Z(G)$. Тогда существует элемент $g \in G$, что $b^g \neq b$. По определению группы Шункова $\langle b, b^g \rangle$ — конечная группа, и по условиям теоремы $\langle b, b^g \rangle \subset M_1 = L_1 \times \langle v_1 \rangle$, $L_1 \simeq L_2(2^{n_1})$. Рассмотрим случаи:

1. $b \in L_1$. Тогда в L_1 существует некоторая инволюция z , инвертирующая элемент b : $b^z = b^{-1}$. Рассмотрим группу $\langle b, z, i \rangle$. В ней подгруппа $\langle b \rangle$ нормальна. Тогда мы можем рассмотреть фактор-группу $\langle b, z, i \rangle / \langle b \rangle$, которая является конечной, поскольку порождена двумя инволюциями. Следовательно, конечной является и группа $\langle b, z, i \rangle$. По условию теоремы $\langle b, z, i \rangle \subset M_2 = L_2 \times \langle v_2 \rangle$, $L_2 \simeq L_2(2^{n_2})$. Элемент b не может содержаться в L_2 , так как $b \in C_{M_2}(i)$, а в L_2 централизатор инволюции совпадает с силовской 2-подгруппой. Значит, $b \in \langle v_2 \rangle = Z(M_2)$. Но с другой стороны b не может лежать в центре группы M_2 , так как $b^z = b^{-1}$. Полученное противоречие означает, что этот случай невозможен.

2. $b = hs$, где $h \in L_1$, $s \in \langle v_1 \rangle$. Этот случай невозможен, так как элемент b имеет простой нечетный порядок p , в то время как порядки элементов h и s взаимно просты: $b^p = (hs)^p = h^p s^p \neq 1$.

3. $b \in \langle v_1 \rangle$. Тогда $bb^g = b^g b$ и элемент b перестановочен с любым сопряженным с ним элементом, т. е. в G существует абелева подгруппа вида $\langle b \rangle \times \langle b^{g^1} \rangle \times \dots \times \langle b^{g^k} \rangle$, $k > 1$ и она вложима в конечную группу $M_3 = L_3 \times \langle v_3 \rangle$, где $L_3 \simeq L_2(2^{n_3})$. Но в группе M_3 нет таких подгрупп (предложение 1). Опять противоречие.

Тогда остается только одна возможность: $b^g = b$ для любого $g \in G$. Итак, все элементы простого порядка из $Z(M)$ содержатся в $Z(G)$.

Пусть теперь b — элемент непростого порядка из $Z(M)$, $g \in G$ — произвольный элемент и $p < |b|$ — некоторое простое нечетное число, делящее $|b|$. Обозначим $b_1 = b^p$. Пусть $b_1 \in Z(G)$ (индуктивное предположение). Тогда фактор-группа $\langle b, b^g \rangle / \langle b_1 \rangle$ конечна (так как G — группа Шункова) и сама группа $\langle b, b^g \rangle$ тоже является конечной. По условию насыщенности $\langle b, b^g \rangle \subset M_4 = L_4 \times \langle v_4 \rangle$, $L_4 \simeq L_2(2^{n_4})$. Если $b \in L_4$, то $b_1 = b^p \in L_4$, что противоречит тому, что $b_1 \in Z(M_4)$ (по индуктивному предположению). Следовательно, $b \in Z(M_4) = \langle v_4 \rangle$. Аналогично $b^g \in \langle v_4 \rangle$. Но тогда $\langle b^g \rangle = \langle b \rangle$ и $g \in N_G(\langle b \rangle)$. Следовательно, имеет место разложение $\langle b \rangle \rtimes \langle g \rangle$. По условию насыщенности $\langle b \rangle \rtimes \langle g \rangle \subset M_5 = L_5 \times \langle v_5 \rangle$, $L_5 \simeq L_2(2^{n_5})$. Тогда, рассуждая как выше, получаем, что $b \in Z(M_5)$ и $bg = gb$. В силу произвольности выбора элемента $g \in G$ получаем, что $Z(M) \subset Z(G)$. Лемма доказана.

Лемма 2. $Z(G)$ — локально циклическая группа без инволюций.

Доказательство. Действительно, любая конечно порожденная подгруппа из $Z(G)$ содержится в центре некоторой конечной подгруппы $M = L \times \langle v \rangle \simeq L_2(2^n) \times \langle v \rangle$, а $Z(M)$ является циклической группой без инволюций. Лемма доказана.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/Z(G)$. Как показано в предыдущей лемме, $Z(G)$ — локально циклическая группа. Значит, $Z(G)$ можно представить в виде бесконечной цепочки вложенных конечных подгрупп $Z_1 < Z_2 < \dots < Z_i < \dots$ таких, что $Z(G) = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$. Причем фактор-группы по конечным группам G/Z_i — группы Шункова. Тогда по предложению 3 фактор-группа $\overline{G} = G/Z(G)$ — группа Шункова.

Пусть \overline{K} — конечная подгруппа из \overline{G} . Для некоторой конечной подгруппы K из G $\overline{K} = KZ(G)/Z(G)$.

По условию насыщенности конечная подгруппа $K \subset M_1 = L_1 \times \langle v_1 \rangle$, где $L_1 \simeq L_2(2^{n_1})$. Из леммы 1 следует, что $M_1 \cap Z(G) = Z(M_1) = \langle v_1 \rangle$. Поэтому

$$\overline{K} \subseteq M_1 Z(G) / Z(G) = (L_1 \times \langle v_1 \rangle) Z(G) / Z(G) = L_1 Z(G) / Z(G) \simeq L_2(2^{n_1}).$$

Таким образом, любая конечная подгруппа из фактор-группы \overline{G} содержится в некоторой конечной подгруппе \overline{M} из \overline{G} и $\overline{M} \simeq L_2(2^n)$. Это означает, что \overline{G} — периодическая группа Шункова, насыщенная элементами из множества $\mathcal{L} = \{L_2(2^n) | n = 1, 2, \dots\}$. Тогда по предложению 4 $\overline{G} = G/Z(G)$ — локально конечная группа, изоморфная $L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 2.

Так как Q — счетное множество, то мы можем выбрать цепочку конечных полей

$$Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_i < \cdots,$$

таких что

$$Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i,$$

где $|Q_i| = 2^{n_i}$ и этой последовательности поставить в соответствие цепочку конечных подгрупп группы \bar{G}

$$\bar{G}_1 < \bar{G}_2 < \cdots < \bar{G}_i < \cdots, \quad (*)$$

где $\bar{G}_i \simeq L_2(2^{n_i})$ и

$$\bar{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{G}_i.$$

Для некоторой конечной подгруппы G_i из G

$$\bar{G}_i = G_i Z(G)/Z(G) \simeq L_2(2^{n_i}).$$

Так как $G_i Z(G)/Z(G) \simeq G_i/(G_i \cap Z(G)) = G_i/Z(G_i)$, то

$$G_i/Z(G_i) \simeq L_2(2^{n_i}).$$

Возможны 2 случая:

1. $Z(G_i) = 1$. Тогда $\bar{G}_i = (G_i \times Z(G))/Z(G)$, где $G_i \simeq L_2(Q_i) = L_2(2^{n_i})$.
2. $Z(G_i) \neq 1$. По условию насыщенности

$$G_i \subseteq M_i = L_i \times \langle v_i \rangle,$$

где $L_i \simeq L(2^{n_i})$ и $(|L_i|, |v_i|) = 1$. Обозначим через H_i подгруппу, порожденную всеми инволюциями из G_i .

Покажем, что $H_i \leq L_i$. Действительно, пусть x — инволюция из G_i и $x \notin L_i$. Так как $|v_i|$ — нечетное число, то $x \notin \langle v_i \rangle$ и, следовательно, $x = yw$ для некоторых $1 \neq y \in L_i$, $1 \neq w \in \langle v_i \rangle$. Так как $(|y|, |w|) = 1$, то $x = x^{|w|} = (yw)^{|w|} = y^{|w|} w^{|w|} = y^{|w|} \in L_i$. Имеем противоречие с выбором x . В силу произвольности выбора инволюции x получаем, что $H_i \leq L_i$.

Покажем, что $H_i Z(G)/Z(G) = G_i Z(G)/Z(G) = \bar{G}_i \simeq L_2(2^{n_i})$. Действительно, группа $L_2(2^{n_i})$ порождена инволюциями, поэтому порождающими элементами фактор-группы $G_i Z(G)/Z(G)$ являются смежные классы $xZ(G)$, где x — инволюция из G_i ($Z(G)$ — группа без инволюций). Так как H_i — подгруппа, порожденная всеми инволюциями из G_i , то выполняется $H_i Z(G)/Z(G) = G_i Z(G)/Z(G)$ и $H_i Z(G)/Z(G) \simeq L_2(2^{n_i})$.

Покажем, что $H_i \simeq L_2(2^{n_i})$. Действительно, $H_i Z(G)/Z(G) = H_i/(H_i \cap Z(G)) \simeq L_2(2^{n_i})$. Предположим, что $1 \neq t \in H_i \cap Z(G)$. Так как $H_i \leq L_i$, то $t \in Z(L_i)$, что противоречит тому, что L_i — простая группа. Следовательно, $H_i \cap Z(G) = 1$ и $H_i \simeq L_2(2^{n_i})$.

Итак, как и в первом случае, $\bar{G}_i = (H_i \times Z(G))/Z(G)$, где $H_i \simeq L_2(Q_i) = L_2(2^{n_i})$.

Поскольку группам \bar{G}_i соответствует цепочка (*), то

$$(H_1 \times Z(G))/Z(G) < (H_2 \times Z(G))/Z(G) < \cdots < (H_i \times Z(G))/Z(G) < \cdots.$$

То есть

$$(H_1 \times Z(G)) < (H_2 \times Z(G)) < \cdots < (H_i \times Z(G)) < \cdots.$$

Пусть $a_i \in H_i$ и $a_i = a_{i+1}z$ для некоторых $a_{i+1} \in H_{i+1}$, $z \in Z(G)$. Тогда

$$a_i^{|z|} = (a_{i+1}z)^{|z|} = a_{i+1}^{|z|} z^{|z|} = a_{i+1}^{|z|} \neq 1,$$

поскольку порядки элементов a_i (и, соответственно, a_{i+1}) и z взаимно просты по условию теоремы. Следовательно, $a_i \in H_{i+1}$. Отсюда видим, что подгруппы H_i составляют цепочку

$$H_1 < H_2 < \dots < H_i < \dots,$$

объединение H которой, очевидно, изоморфно $L_2(Q)$. Таким образом, $G = H \times Z(G)$, где $H \simeq L_2(Q)$ и $Z(G)$ — локально циклическая группа без инволюций. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

До конца раздела G означает бесконечную периодическую группу Шункова, насыщенную группами из множества $\mathfrak{R} = \{L_2(5) \times \langle t \rangle\}$, где $|t| = 2^k$; $k = 1, 2, \dots$. Для любой конечной подгруппы K из G обозначим через $\mathfrak{R}(K)$ множество всех подгрупп из G , содержащих K и изоморфных группам из \mathfrak{R} .

Лемма 3. Пусть $a \in G$ имеет порядок 3 или 5. Тогда $C_G(a)$ содержит ровно одну циклическую 2-подгруппу фиксированного порядка.

Доказательство. Предположим обратное и пусть x, y — две различные инволюции из G , перестановочные с элементом a . Так как группа $\langle x, y, a \rangle$ конечна, то по условию насыщенности $\langle x, y, a \rangle \subseteq L \times \langle v \rangle \in \mathfrak{R}(\langle x, y, a \rangle)$, где $L \simeq L_2(5)$, $|v| = 2^k$ для некоторого натурального k . Ясно, что $a \in L$. Предположим, что $x \notin \langle v \rangle$. Так как $C_{L_1}(a) = \langle a \rangle$, то $x \notin L$ и, значит, $x = sh$ для некоторых $s \in L$ и $h \in \langle v \rangle$ таких, что $s^2 = h^2 = 1$. Подействуем на x сопряжением a :

$$x^a = s^a h^a = s^a h = x = sh.$$

Отсюда следует, что $s^a = s$ и, значит, $s = 1$ (предложение 2), т. е. $x \in \langle v \rangle$. Совершенно аналогично показывается, что $y \in \langle v \rangle$. Поскольку $\langle v \rangle$ — циклическая 2-группа, то $x = y$.

Сделаем следующее индуктивное предположение: если в $C_G(\langle a \rangle)$ существует циклическая подгруппа $\langle b_0 \rangle$, $|b_0| = 2^k$, $k > 1$, то она единственна. Докажем методом от противного, что если в $C_G(\langle a \rangle)$ имеется циклическая подгруппа $\langle b \rangle$, $|b| = 2^{k+1}$, то она тоже единственна.

Предположим, что существует другая циклическая группа $\langle c \rangle \in C_G(\langle a \rangle)$, $\langle c \rangle \neq \langle b \rangle$, $|c| = 2^{k+1}$. Рассмотрим подгруппу $\langle a, b, c \rangle$. В ней конечная абелева подгруппа $\langle a, b^2 \rangle = \langle a, c^2 \rangle$ является нормальной (равенство $\langle b^2 \rangle = \langle c^2 \rangle$ следует из индуктивного предположения). Тогда фактор-группа $\langle a, b, c \rangle / \langle a, b^2 \rangle$ конечна, поскольку порождена двумя инволюциями. Следовательно, по теореме Шмидта конечна и группа $\langle a, b, c \rangle$. По условиям теоремы $\langle a, b, c \rangle$ вложима в конечную подгруппу $L^* \times \langle v^* \rangle \in \mathfrak{R}(\langle a, b, c \rangle)$, где $L^* \simeq L_2(5)$, $|v^*| = 2^m$ для некоторого натурального $m > k$. Но по предположению 2 в $L^* \times \langle v^* \rangle$ существует только одна циклическая группа порядка 2^{k+1} , лежащая в центре группы $L^* \times \langle v^* \rangle$, а именно в подгруппе $\langle v^* \rangle$. Получили противоречие. Следовательно, $\langle b \rangle = \langle c \rangle$. Лемма доказана.

Из леммы 3, в частности, следует, что все 2-элементы группы $C_G(\langle a \rangle)$ порождают циклическую 2-подгруппу.

Лемма 4. Пусть $a, b \in G$, $|a| = |b| = 5$ и $b \notin \langle a \rangle$. Тогда элементы a и b^k для некоторого целого $1 \leq k \leq 4$ сопряжены в G .

Доказательство. Предположим, что это не так и пусть a и b — два несопряженных элемента порядка 5 из G . По предположению 2 порядок коммутатора $[a, b^m]$ равен 5 для некоторого целого $1 \leq m \leq 4$. Поэтому мы всегда можем переопределить элемент b таким образом (рассмотреть соответствующую степень), чтобы $|[a, b]| = 5$. Группы $\langle a, a^b \rangle$ и $\langle b, b^a \rangle$ конечны (так как G — группа Шункова). По условию насыщенности

$$\langle a, a^b \rangle \subseteq L_1 \times \langle v_1 \rangle \in \mathfrak{R}(\langle a, a^b \rangle)$$

и

$$\langle b, b^a \rangle \subseteq L_2 \times \langle v_2 \rangle \in \mathfrak{R}(\langle b, b^a \rangle).$$

Очевидно, что

$$\langle a, a^b \rangle \subseteq L_1$$

и

$$\langle b, b^a \rangle \subseteq L_2.$$

Подгруппы $\langle a, a^b \rangle$ и $\langle b, b^a \rangle$ имеют общий элемент $c = [a, b] = a^b a = b^{-1} b^a$, тоже имеющий порядок 5 (см. выше). Тогда элемент a сопряжен в L_a с $[a, b]^m$ для некоторого целого $1 \leq m \leq 4$; в свою очередь элемент $[a, b]^m$ сопряжен в L_b с b^k для некоторого целого $1 \leq k \leq 4$. Следовательно, a и b^k также сопряжены. Лемма доказана.

Лемма 5. *В G существует бесконечная локально циклическая 2-группа V .*

Доказательство. По [6] в G найдется бесконечная абелева локально конечная подгруппа H . Без ограничения общности можно считать, что H — максимальная в указанном смысле. Рассмотрим два случая:

1. H является 2-группой. Предположим сначала, что в H существует элементарная абелева подгруппа A ранга k : $A = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_k \rangle$. По условию насыщенности $A \subset L \times \langle v \rangle$, где $L \simeq L_2(5)$; $|v| = 2^m$. Из подгруппового описания $L_2(5)$ следует, что в $L \times \langle v \rangle$ максимальной элементарной абелевой группой является группа порядка 8, т. е. $k \leq 3$ и A может быть только группой $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle$, где $\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \subset L$, $\langle a_3 \rangle \subset \langle v \rangle$. Из этого следует, что в H существуют элементы порядка > 2 .

Возьмем элементы $b_4, b_8 \in H$ соответственно порядка 4 и 8 (как и выше, легко показать, что в H существуют элементы порядка 4, 8 и т.д.). Тогда по условию насыщенности конечная группа $\langle b_4, b_8 \rangle \subseteq L_1 \times \langle v_1 \rangle \in \mathfrak{R}(\langle b_4, b_8 \rangle)$, где $L_1 \simeq L_2(5)$; $|v_1| = 2^{m_1}$ для некоторого натурального $m_1 > 1$. По предположению $2 \nmid b_4, b_8 \notin L$. Значит, $b_4 = x_1 t_1$, где $x_1 \in L_1$ и x_1 — инволюция; $t_1 \in \langle v_1 \rangle$. Тогда $b_4^2 = (x_1 t_1)^2 = x_1^2 t_1^2 = t_1^2 \in \langle v_1 \rangle$. Точно также, $b_8^2 = (x_2 t_2)^2 = t_2^2 \in \langle v_1 \rangle$. Получаем, что b_4^2 и b_8^2 содержатся в одной циклической группе, а так как $|b_8^2| = 4 = |b_4|$, то $\langle b_4 \rangle = \langle b_8^2 \rangle \subseteq \langle v_1 \rangle$. Теперь рассматриваем группу $\langle b_4, b_8, b_{16} \rangle \in H$, где b_{16} — элемент порядка 16 из H . По условию насыщенности конечная группа $\langle b_4, b_8, b_{16} \rangle \subseteq L_2 \times \langle v_2 \rangle \in \mathfrak{R}(\langle b_4, b_8, b_{16} \rangle)$, где $L_2 \simeq L_2(5)$; $|v_2| = 2^{m_2}$. Аналогично показывается, что $\langle b_4 \rangle \subset \langle b_8 \rangle = \langle b_{16}^2 \rangle \subseteq \langle v_2 \rangle$. Перебирая таким образом все элементы четвертого порядка и выше из H , получим, что все они лежат в локально циклической группе.

Итак, если H — 2-группа, то $H = A \times V$, где A — элементарная абелева группа порядка ≤ 4 ; V — локально циклическая 2-группа.

2. H является группой нечетного порядка. Так как H — абелева группа, то H есть произведение своих силовских p -подгрупп. Покажем, что H не может одновременно содержать элементы порядка 3 и порядка 5. Предположим противное и пусть $a, b \in H$, $|a| = 3$, $|b| = 5$. По условию насыщенности конечная абелева подгруппа $K = \langle a, b \rangle \subseteq L \times \langle v \rangle \in \mathfrak{R}(\langle a, b \rangle)$, где $L \simeq L_2(5)$; $|v| = 2^k$ для некоторого натурального $k \geq 1$. Очевидно, что $a, b \in L$. Но в L централизатор $C_L(b) = \langle b \rangle$ не содержит элементов порядка 3. Противоречие. Итак, $H = R \times T$, где R — силовская p -подгруппа ($p = 3$ или 5); T — силовская 2-подгруппа. Очевидно, $|R| = 3$ в силу вложимости любой конечной подгруппы из R в подгруппу группы G , изоморфную группе из множества \mathfrak{R} . Поэтому T — бесконечная 2-группа и в силу пункта 1 $T = A \times V$, где A — элементарная абелева группа порядка ≤ 4 ; V — локально циклическая 2-группа. Из леммы 3 следует, что любой элемент из R может централизовать только одна инволюция. Поэтому $|A| = 1$ и $H = R \times V$, где R — группа порядка 3 (или 5); V — бесконечная локально циклическая 2-группа.

Итак, $H = W \times V$, где W — элементарная абелева группа порядка либо 3, либо 5, либо 4, V — бесконечная локально циклическая 2-группа. Лемма доказана.

Лемма 6. $V \subseteq Z(G)$.

Доказательство. Рассмотрим локально циклическую 2-группу V из предыдущей леммы. Обозначим через h_k элемент порядка 2^k из V , $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, можем считать, что $h_{k+1}^2 = h_k$.

Возьмем элемент h_{k+1} (т. е. элемент порядка 2^2 , 2^3 и так далее). По условию насыщенности $h_{k+1} \in L_{k+1} \times \langle v_{k+1} \rangle \in \mathfrak{R}(h_{k+1})$. Так как в L_{k+1} нет 2-элементов порядка выше второго, то $h_{k+1} = x_{k+1}y_{k+1}$, где $x_{k+1} \in L_{k+1}$, $|x_{k+1}| \leq 2$; $y_{k+1} \in \langle v_{k+1} \rangle$. Тогда $h_k = h_{k+1}^2 \in \langle v_{k+1} \rangle$ и $h_k \in C_G(L_{k+1})$. Таким образом,

любой элемент h_k из V централизует некоторый элемент пятого порядка a_k .

По лемме 2 все элементы a_k (некоторые их степени) сопряжены, т. е.

$$h_i^{g_i} \in C_G(a_k), \text{ для любого } h_i \in V \text{ и некоторого } g_i \in G.$$

Это означает, что $C_G(a_k)$ содержит 2-элемент любого порядка. Так как $h_i^2 = h_{i-1}$, то

$$\langle (h_i^2)^{g_i} \rangle = \langle h_{i-1}^{g_{i-1}} \rangle \subset C_G(a_k)$$

и, с учетом предыдущей леммы,

все 2-элементы из $C_G(a_k)$ образуют бесконечную циклическую 2-группу V_k .

Очевидно, что все подгруппы V_k (для всех k) сопряжены между собой и с группой V . Докажем методом индукции, что все подгруппы V_k совпадают с подгруппой V и $V \subseteq Z(G)$, где $Z(G)$ — центр группы G .

Пусть a_i и a_j — два различных элемента порядка 5. Используя введенные выше обозначения, считаем, что $V_i \subset C_G(a_i)$ и $V_j \subset C_G(a_j)$, где V_i, V_j — бесконечные циклические 2-группы. Группа $\langle a_i, a_j \rangle$ конечна, так как a_i и a_j^m сопряжены для некоторого $1 \leq m \leq 4$ (лемма 4). По условию насыщенности $\langle a_i, a_j \rangle \subset L_* \times \langle v_* \rangle \in \mathfrak{R}(\langle a_i, a_j \rangle)$. Понятно, что $a_i, a_j \in L_1$. Тогда инволюция $z \in \langle v_* \rangle$ содержится в централизаторе обоих элементов a_i и a_j . Но по лемме 3 элемент нечетного порядка централизуется только одной инволюцией. Значит, $z \in V_i \cap V_j$. Так как некоторая подгруппа V_m содержит инволюцию h_1 из V (см. предыдущий абзац), то $h_1 = z$ и $h_1 \in V_i \cap V_j$. Кроме того, инволюция h_1 централизует не только все элементы порядка 5, но и все элементы порядка 3 (поскольку любой элемент порядка 3 содержится в подгруппе, изоморфной группе $L_2(5)$, которая порождена элементами порядка 5). Предположим, что существует 2-элемент b , который не перестановочен с инволюцией h_1 . По условию насыщенности $\langle b \rangle \subset L_b \times \langle v_b \rangle \in \mathfrak{R}(\langle b \rangle)$. Подгруппа L_b порождена элементами порядка 5, значит, инволюция из $\langle v_b \rangle$ совпадает с инволюцией h_1 . Но тогда h_1 перестановочна с элементом $b \in L_b \times \langle v_b \rangle$. Противоречие с выбором элемента b .

Итак, инволюция h_1 содержится в центре $Z(G)$ группы G и $h_1 \in \bigcap_i V_i$.

Предположим, что все подгруппы V_i пересекаются по подгруппе $\langle h_k \rangle$ порядка 2^k из подгруппы V и $h_k \in Z(G)$ (индуктивное предположение). Докажем, что $h_{k+1} \in \bigcap_i V_i$, $h_{k+1} \in Z(G)$.

Так как $h_k \in Z(G)$, то $\langle h_k \rangle \triangleleft G$ и мы можем рассмотреть фактор-группу $\overline{G} = G/\langle h_k \rangle$. Очевидно, что \overline{G} — периодическая группа Шункова. Пусть \overline{T} — некоторая конечная подгруппа группы \overline{G} и $T\langle h_k \rangle$ — ее полный прообраз в группе G . Группа $T\langle h_k \rangle$ конечна и по условию насыщенности $T\langle h_k \rangle \subset L_T \times \langle v_T \rangle \in \mathfrak{R}(T\langle h_k \rangle)$. Понятно, что $h_k \in \langle v_T \rangle$. Тогда, переходя обратно к фактор-группе \overline{G} , получаем, что $\overline{T} \subset \overline{L}_T \times \langle \overline{v}_T \rangle \in \mathfrak{R}(\overline{T})$, где $\overline{L}_T \simeq L_2(5)$; $\langle \overline{v}_T \rangle$ — циклическая 2-группа. Таким образом, \overline{G} — снова периодическая группа Шункова, насыщенная группами $L \times \langle v \rangle$, где $L \simeq L_2(5)$, $\langle v \rangle$ — циклическая 2-группа. Значит, все, сказанное выше, справедливо и для группы \overline{G} . Обозначим через $\overline{a}_i, \overline{a}_j$ и $\overline{V}_i, \overline{V}_j$ образы элементов a_i, a_j

и V_i, V_j соответственно. Рассуждая аналогично, легко показать, что подгруппы \bar{V}_i и \bar{V}_j снова пересекаются по инволюции, обозначим ее \bar{w} . Более того, точно так же показывается, что инволюция $\bar{w} \in Z(\bar{G})$. Возвращаясь к группе G , получаем, что $w \in \bigcap_i V_i$, $|w| = 2^{k+1}$ и $w^2 = h_k$. Так как некоторая подгруппа V_s содержит элемент h_{k+1} из V , то $h_{k+1} = w$. Покажем теперь, что $h_{k+1} \in Z(G)$. Действительно, из того, что $\bar{w} = \bar{h}_{k+1} \in Z(\bar{G})$, следует равенство смежных классов $h_{k+1}g\langle h_k \rangle = gh_{k+1}\langle h_k \rangle$, где g — произвольный элемент из G . Равенство смежных классов означает выполнение одного из равенств

$$h_{k+1}g = gh_{k+1}h_k^n, \text{ где } 1 \leq n \leq |h_k|.$$

Так как $h_k = h_{k+1}^2$, то

$$h_{k+1}g = gh_{k+1}h_{k+1}^{2n} = gh_{k+1}^{2n+1}.$$

То есть

$$h_{k+1}^g = h_{k+1}^{2n+1} \text{ для любого } g \in G,$$

что означает $\langle h_{k+1} \rangle \triangleleft G$. Предположим, что $h_{k+1}^g = h_{k+1}^{2n+1} \neq h_{k+1}$ для некоторого $g \in G$, т. е. $n \neq 2^k$. Тогда можно рассмотреть конечную группу $\langle h_{k+1}, g \rangle = \langle h_{k+1} \rangle \rtimes \langle g \rangle$. По условию насыщенности $(\langle h_{k+1} \rangle \rtimes \langle g \rangle) \subset L_g \times \langle v_g \rangle \in \mathfrak{R}(\langle h_{k+1} \rangle \rtimes \langle g \rangle)$. Так как $|h_{k+1}| = 2^{k+1}$ и $h_{k+1}^2 = h_k \in \langle v_g \rangle$, то $h_{k+1} = ud$, где u — инволюция из L_g ; d — элемент порядка 2^{k+1} из $\langle v_g \rangle$. Тогда

$$h_{k+1}^g = (ud)^g = u^g d^g = u^g d = h_{k+1}^{2n+1} = (ud)^{2n+1} = u^{2n+1} d^{2n+1} = ud^{2n+1},$$

$$u^g = ud^{2n},$$

что невозможно в случае $d^{2n} \neq 1$, так как $u^g \in L_g$ для любого $g \in L_g \times \langle v_g \rangle$. Тогда $d^{2n} = 1$ и $n = 2^k$, т. е.

$$h_{k+1}^g = h_{k+1} \text{ для любого } g \in G.$$

Итак, $h_{k+1} \in Z(G)$ и $h_{k+1} \in \bigcap_i V_i$. Так как $V = \bigcup_i h_i$, то $V \subseteq Z(G)$. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $G^* = \langle a^g | a, g \in G, |a| = 5 \rangle$. Тогда $G^*V = L \times V$, где $L \simeq L_2(5)$, и $(L \times V) \triangleleft G$.

Доказательство. Пусть G^* — группа, порожденная всеми элементами порядка 5. Понятно, что G^* — нормальная подгруппа в группе G . Рассмотрим группу $G^*V = VG^*$. Как было показано выше, $V \triangleleft G^*V$, и мы можем рассмотреть фактор-группу G^*V/V . Пусть \bar{T} — конечная подгруппа из G^*V/V . Тогда для некоторой конечной группы T из G^* $\bar{T} = TV/V$. По условию насыщенности $T \subset L_1 \times \langle v_1 \rangle \in \mathfrak{R}(T)$. Так как группа L_1 порождена элементами порядка 5, то $L_1 \subseteq G^*$, $v_1 \in V$ и

$$\bar{T} \subset (L \times V)/V \simeq L_2(5).$$

Таким образом, любая конечная подгруппа из фактор-группы G^*V/V содержится в некоторой конечной подгруппе из G^*V/V , изоморфной группе $L_2(5)$. Это означает, что G^*V/V — периодическая группа Шункова, насыщенная группой $L_2(5)$. Тогда по предложению 4 G^*V/V — конечная группа, изоморфная $L_2(5)$ и $G^*V = L \times V$, где $L \simeq L_2(5)$.

Лемма 8. $G = L \times V$.

Доказательство. Предположим противное и пусть $G \setminus (L \times V) \neq \emptyset$. Обозначим $M = L \times V$. Рассмотрим фактор-группу $\bar{G} = G/M$. Это группа Шункова. Пусть \bar{x} — элемент из \bar{G} и x — его полный прообраз в G . Без ограничения общности можно считать, что x — 2-элемент. Действительно, если это не так и $|x| = m \cdot 2^k$, где m — нечетное число, то $\langle x \rangle = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $|a| = m$, $a \in M$, $|b| = 2^k$. Тогда можем положить $x = b$ — 2-элемент. Группа $\langle x, M \rangle$ является локально конечной, а потому можем рассмотреть в ней конечную подгруппу $\langle x, L \rangle$. По условию насыщенности $\langle x, L \rangle \subset L^* \times \langle v^* \rangle \in \mathfrak{R}(\langle x, L \rangle)$. Очевидно, что $L = L^*$, $v^* \in V$. Но тогда $x \in M$. Противоречие с выбором x . Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М. Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968. 120 с.
2. Горенштейн Д. Конечные простые группы. М.: Мир, 1985. 350 с.
3. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977. 240 с.
4. Лыткина Д.В., Филиппов К.А. О периодических группах, насыщенных $L_2(q)$ и ее центральными расширениями // Мат. системы. Красноярск: КрасГАУ, 2006. №5. С. 35–45.
5. Филиппов К.А. Группы, насыщенные конечными неабелевыми простыми группами и их центральными расширениями: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2005. 80 с.
6. Шлепкии А.К. Группы Шункова с дополнительными ограничениями: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 2003. 130 с.
7. Шлепкии А.К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тез. 3-й Междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993. С. 369.

Панюшкин Денис Николаевич
аспирант
Красноярский гос. аграрный ун-т

Поступила 28.09.2009

Тухватуллина Ляйсан Ринатовна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Красноярский гос. аграрный ун-т
e-mail: lyaisan_78@mail.ru

Филиппов Константин Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
доцент
Красноярский гос. аграрный ун-т
e-mail: filiprov@mail.ru

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ТЕРМИНАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ТРАЕКТОРИЯХ СИСТЕМЫ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ¹

Ю. В. Парышева

Рассматривается задача оптимального управления с быстрыми и медленными переменными, гладкими геометрическими ограничениями на управление и терминальным функционалом качества. Показана связь оптимального управления с решением некоторой нелинейной системы алгебраических уравнений для вектора начальных условий сопряженных переменных принципа максимума. На основе полученных соотношений, а также известных результатов по асимптотике решения такой системы уравнений, построена равномерная асимптотика оптимального управления в регулярном случае.

Ключевые слова: оптимальное управление, терминальный критерий качества, ограниченные управления, сингулярные возмущения, асимптотические разложения.

Yu. V. Parysheva. Asymptotics of the optimal control in a linear optimal control problem.

An optimal control problem is considered with fast and slow variables, smooth geometric constraints on the control, and a terminal performance criterion. The connection is shown between the optimal control and a solution of a certain nonlinear system of algebraic equations for the vector of the initial conditions of conjugate variables in the maximum principle. Based on this connection and the known results on the asymptotics of a solution to this system of equations, the uniform asymptotics of the optimal control is obtained in the regular case.

Keywords: optimal control, terminal performance criterion, bounded controls, singular perturbations, asymptotic expansions.

1. Введение

В настоящей работе продолжается исследование асимптотики решения возмущенной задачи оптимального управления [1, 2] с малым параметром при производных [3–5] и гладкими ограничениями на управление [6–9].

В [6–9] средствами выпуклого анализа путем минимизации функции цены на области достижимости системы получено выражение оптимального значения функционала качества через некоторый конечномерный вектор, удовлетворяющий определенной нелинейной системе алгебраических уравнений. На основании исследования асимптотики решения этой системы уравнений построена асимптотика оптимального значения функционала качества.

В данной работе показано, что решение рассмотренной системы уравнений естественным образом связано с вектором начальных значений сопряженных переменных принципа максимума. Это позволяет использовать результаты [6–9] для получения асимптотики оптимального управления в рассматриваемой задаче.

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 08-01-00260), Программы научных школ (НШ-6249.2010) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Проблемы нелинейной динамики”.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления [1, 2] с быстрыми и медленными переменными [3–5]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\varepsilon &= A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t \in [0, T], & \|u\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon &= A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0) = x^0, & y_\varepsilon(0) = y^0, \\ \sigma(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)) &\rightarrow \inf_{\|u\| \leq 1} \sigma(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)) =: \omega_\varepsilon(T, x^0, y^0), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; $A_{ij}, B_i, i, j = 1, 2$, — постоянные матрицы соответствующей размерности;

$$Re\ sp(A_{22}) \leq -\alpha < 0 \quad (sp(A_{22}) \text{ — спектр матрицы } A_{22}); \quad (2)$$

а $\sigma(\cdot)$ — бесконечно дифференцируемая на \mathbb{R}^n , строго выпуклая и кофинитная (т. е. $\forall x \in \mathbb{R}^n \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1}\sigma(\lambda x) = +\infty$ [10]) функция.

При этих условиях функция $\sigma^*(\cdot)$ — сопряженная к $\sigma(\cdot)$ в смысле выпуклого анализа — также будет бесконечно дифференцируемой на \mathbb{R}^n , строго выпуклой и кофинитной [10]. В частности,

$$\begin{aligned} \text{матрица } D^2\sigma^*(r) \text{ вторых производных функции } \sigma^*(\cdot) \\ \text{положительно определена при всех } r. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в рассматриваемых конечномерных пространствах.

Рассмотрим также следующую нелинейную систему алгебраических уравнений относительно векторов $r_\varepsilon^1 \in \mathbb{R}^n$, $r_\varepsilon^2 \in \mathbb{R}^m$:

$$e^{A_\varepsilon T} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} - \int_0^T \frac{e^{A_\varepsilon \tau} B_\varepsilon B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix}}{\|B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix}\|} d\tau = \nabla \sigma^*(r_\varepsilon^1, r_\varepsilon^2), \quad (4)$$

где $\nabla \sigma^*(\cdot)$ — градиент функции $\sigma^*(\cdot)$.

Покажем связь оптимального управления $u_\varepsilon^{opt}(t)$ в задаче (1) с решением $r_\varepsilon^1, r_\varepsilon^2$ уравнений (4) и исследуем асимптотику $u_\varepsilon^{opt}(t)$.

3. Определяющие соотношения для оптимального управления

Обозначим

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{1}{\varepsilon} A_{21} & \frac{1}{\varepsilon} A_{22} \end{pmatrix}, \quad B_\varepsilon := \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\varepsilon} B_2 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что пара матриц $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ удовлетворяет условию вполне управляемости.

Применим принцип максимума [1, 2, 11] к задаче (1). Сопряженная система имеет вид

$$\dot{\Psi}_\varepsilon = -A_\varepsilon^* \Psi_\varepsilon, \quad (5)$$

где

$$\Psi_\varepsilon = \begin{pmatrix} \Psi_\varepsilon^1 \\ \Psi_\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \Psi_\varepsilon^1 \in \mathbb{R}^n, \quad \Psi_\varepsilon^2 \in \mathbb{R}^m,$$

с граничным условием

$$\begin{pmatrix} \Psi_\varepsilon^1(T) \\ \Psi_\varepsilon^2(T) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \sigma(x_\varepsilon^{opt}(T), y_\varepsilon^{opt}(T)) \\ \nabla_y \sigma(x_\varepsilon^{opt}(T), y_\varepsilon^{opt}(T)) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а оптимальное управление $u_\varepsilon^{opt}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\langle \Psi_\varepsilon(t), B_\varepsilon u_\varepsilon^{opt}(t) \rangle = \max_{\|v\| \leq 1} \langle \Psi_\varepsilon(t), B_\varepsilon v \rangle. \quad (7)$$

Здесь и далее, если A — линейный оператор (матрица), то A^* — сопряженный к A оператор (транспонированная матрица).

Из (5) находим, что

$$\begin{pmatrix} \Psi_\varepsilon^1(t) \\ \Psi_\varepsilon^2(t) \end{pmatrix} = e^{-A_\varepsilon^* t} \begin{pmatrix} l_\varepsilon^1 \\ l_\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\begin{pmatrix} l_\varepsilon^1 \\ l_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$ — подлежащий дальнейшему определению вектор начальных условий при $t = 0$ для сопряженных переменных $\Psi_\varepsilon^1(t), \Psi_\varepsilon^2(t)$.

Из (6) и (8) следует, что

$$e^{-A_\varepsilon^* T} \begin{pmatrix} l_\varepsilon^1 \\ l_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_x \sigma(x_\varepsilon^{opt}(T), y_\varepsilon^{opt}(T)) \\ \nabla_y \sigma(x_\varepsilon^{opt}(T), y_\varepsilon^{opt}(T)) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Обозначим

$$\begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix} := -e^{-A_\varepsilon^* T} \begin{pmatrix} l_\varepsilon^1 \\ l_\varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда (8) и (9) запишутся в виде

$$\begin{pmatrix} \Psi_\varepsilon^1(t) \\ \Psi_\varepsilon^2(t) \end{pmatrix} = -e^{A_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_x \sigma(x_\varepsilon^{opt}(T), y_\varepsilon^{opt}(T)) \\ \nabla_y \sigma(x_\varepsilon^{opt}(T), y_\varepsilon^{opt}(T)) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Из (7) и (10) следует, что если

$$B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

то

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = - \frac{B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix}}{\left\| B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right\|}. \quad (12)$$

Тогда для соответствующей оптимальной траектории справедливо

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_\varepsilon^{opt}(t) \\ y_\varepsilon^{opt}(t) \end{pmatrix} &= e^{A_\varepsilon t} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} - \int_0^t e^{A_\varepsilon(t-\tau)} B_\varepsilon u_\varepsilon^{opt}(\tau) d\tau \\ &= e^{A_\varepsilon t} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} - \int_0^t \frac{e^{A_\varepsilon(t-\tau)} B_\varepsilon B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(T-\tau)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix}}{\left\| B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(T-\tau)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right\|} d\tau. \end{aligned}$$

В точке $t = T$ имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_\varepsilon^{opt}(T) \\ y_\varepsilon^{opt}(T) \end{pmatrix} &= e^{A_\varepsilon T} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} - \int_0^T \frac{e^{A_\varepsilon(T-\tau)} B_\varepsilon B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(T-\tau)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix}}{\left\| B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(T-\tau)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right\|} d\tau \\ &= e^{A_\varepsilon T} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} - \int_0^T \frac{e^{A_\varepsilon \tau} B_\varepsilon B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix}}{\left\| B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right\|} d\tau. \end{aligned}$$

Поэтому условие (11) принимает вид

$$\begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \nabla \sigma \left(e^{A_\varepsilon T} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} - \int_0^T \frac{e^{A_\varepsilon \tau} B_\varepsilon B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix}}{\left\| B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right\|} d\tau \right),$$

что, в силу [12, с. 31], эквивалентно уравнениям (4).

Поскольку в рассматриваемых условиях принцип максимума является достаточным [11, с. 375] для оптимальности управления $u_\varepsilon^{opt}(t)$, то получаем следующий результат:

Лемма 1. *Оптимальное управление $u_\varepsilon^{opt}(t)$ в задаче (1) определяется соотношением (12), где векторы $r_\varepsilon^1, r_\varepsilon^2$ являются решением уравнений (4).* \square

Пусть всюду в дальнейшем функционал качества в (1) зависит только от медленных переменных $\sigma(x, y) = \sigma(x)$.

Отметим, что тогда $\nabla_y \sigma(x_\varepsilon^{opt}(T), y_\varepsilon^{opt}(T)) = 0$, и в соответствии с (11)

$$\begin{pmatrix} r_\varepsilon^1 \\ r_\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_x \sigma(x_\varepsilon^{opt}(T)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому выражение (12) для оптимального управления, а также уравнения (4) принимают следующий вид:

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = - \frac{B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^*(T-t)} \begin{pmatrix} r_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}, \quad (13)$$

где r_ε — решение уравнения

$$\text{пр}_x \left\{ e^{A_\varepsilon T} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} - \int_0^T \frac{e^{A_\varepsilon \tau} B_\varepsilon B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} r_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| B_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} r_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} d\tau \right\} = \nabla \sigma^*(r_\varepsilon). \quad (14)$$

Здесь для произвольного $n + m$ -вектора $r := \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, где $r_1 \in \mathbb{R}^n$, $r_2 \in \mathbb{R}^m$, через $\text{пр}_x r$ обозначается проекция вектора r на подпространство первых n его координат: $\text{пр}_x r := r_1$.

4. Асимптотика оптимального управления

Исследуем асимптотику при $\varepsilon \rightarrow +0$ оптимального управления $u_\varepsilon^{opt}(t)$ в задаче (1), используя полученные соотношения (13), (14).

Рассмотрим задачу (1) при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_0 x_0 + B_0 u, & A_0 &:= A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}, & B_0 &:= B_1 - A_{12} A_{22}^{-1} B_2, \\ x_\varepsilon(0) &= x^0, & t &\in [0, T], & \|u\| &\leq 1, \\ \sigma(x_0(T)) &\rightarrow \inf_{\|u\| \leq 1} \sigma(x_0(T)) =: \omega_0(T, x^0). \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя к задаче (15) те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 1, для задачи (1) получаем

Лемма 2. *Для оптимального управления $u_0^{opt}(t)$ в задаче (15) справедливо*

$$u_0^{opt}(t) = - \frac{B_0^* e^{A_0^*(T-t)} r_0}{\|B_0^* e^{A_0^*(T-t)} r_0\|}, \quad (16)$$

где вектор r_0 является решением уравнения

$$e^{A_0 T} x^0 - \int_0^T \frac{e^{A_0 \tau} B_0 B_0^* e^{A_0^* \tau} r_0}{\|B_0^* e^{A_0^* \tau} r_0\|} d\tau = \nabla \sigma^*(r_0). \quad (17)$$

□

В работе [9] исследована асимптотика решения r_ε уравнения (14) и показана справедливость следующего утверждения:

Теорема 1. *Пусть выполнены (2), (3), а также следующие условия:*

$$\|B_0^* e^{A_0^* t} r_0\| \neq 0, \text{ при всех } t \in [0, T]; \quad (18)$$

$$\|(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^*) r_0\| \neq 0, \text{ при всех } \tau \in (0, +\infty); \quad (19)$$

$$(B_1^* r_0 \neq 0) \vee ((B_1 = 0) \wedge (B_2^* A_{12}^* r_0 \neq 0)). \quad (20)$$

Тогда решение уравнения (14) r_ε раскладывается в асимптотический ряд по степеням ε

$$r_\varepsilon \sim r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k r_k, \quad (21)$$

где начальное приближение r_0 является решением уравнения (17), соответствующего предельной задаче (15). □

Для произвольной квадратной $n + m$ -матрицы C будем далее обозначать через C^{11} , C^{12} , C^{21} , C^{22} блоки матрицы C с размерностями, соответственно, $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$ такие, что

$$C = \begin{pmatrix} C^{11} & C^{12} \\ C^{21} & C^{22} \end{pmatrix}.$$

Используя эти обозначения, запишем (13) в виде

$$u_\varepsilon^{opt}(T-t) = - \frac{U_\varepsilon^*(t) r_\varepsilon}{\|U_\varepsilon^*(t) r_\varepsilon\|}, \quad (22)$$

где

$$U_\varepsilon^*(t) = B_1^* \left(e^{A_\varepsilon^* t} \right)^{11} + \frac{1}{\varepsilon} B_2^* \left(e^{A_\varepsilon^* t} \right)^{12}. \quad (23)$$

Для блоков $(e^{A_\varepsilon^* t})^{11}$ и $(e^{A_\varepsilon^* t})^{12}$ матричной экспоненты $e^{A_\varepsilon^* t}$ справедливы следующие равномерные на $[0, T]$ асимптотические разложения [4]:

$$\left(e^{A_\varepsilon^* t} \right)^{12} \sim \varepsilon \left(-A_{22}^{*-1} A_{12}^* e^{A_0^* t} + e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* \right) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \left(\widehat{A}_k^{12*}(t) + \Pi_k \widehat{A}^{12*}(\tau) \right), \quad (24)$$

$$\left(e^{A_\varepsilon^* t} \right)^{11} \sim e^{A_0^* t} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\widehat{A}_k^{11*}(t) + \Pi_k \widehat{A}^{11*}(\tau) \right), \quad t \in [0, T], \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (25)$$

где $\widehat{A}_k^{11}(t)$, $\widehat{A}_k^{12}(t)$, $\Pi_k \widehat{A}^{11}(\tau)$, $\Pi_k \widehat{A}^{12}(\tau)$ — аналитические матричнозначные функции, при этом

$$\exists K_k > 0 \quad \exists \beta_k > 0 \quad \left\| \Pi_k \widehat{A}^{11}(\tau) \right\| \leq K_k e^{-\beta_k \tau}, \quad \left\| \Pi_k \widehat{A}^{12}(\tau) \right\| \leq K_k e^{-\beta_k \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad k \geq 0; \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \exists M_k > 0 \quad \exists \gamma_k > 0 \quad \left\| \widehat{A}_k^{11}(0) + \Pi_k \widehat{A}^{11}(\tau) \right\| &\leq M_k (1 - e^{-\gamma_k \tau}), \quad \tau \geq 0, \quad k \geq 1, \\ \left\| \widehat{A}_k^{12}(0) + \Pi_k \widehat{A}^{12}(\tau) \right\| &\leq M_k (1 - e^{-\gamma_k \tau}), \quad \tau \geq 0, \quad k \geq 0; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_0^{11}(0) + \Pi_0 \widehat{A}^{11}(0) &= I, \quad \widehat{A}_k^{11}(0) + \Pi_k \widehat{A}^{11}(0) = 0, \quad k \geq 1, \\ \widehat{A}_k^{12}(0) + \Pi_k \widehat{A}^{12}(0) &= 0, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь и далее I — единичная матрица соответствующей размерности.

Из (23)–(25) следует, что равномерно по $t \in [0, T]$

$$U_\varepsilon^*(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k^*(t, \tau), \quad t \in [0, T], \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

где

$$U_k^*(t, \tau) = \widehat{U}_k^*(t) + \Pi_k \widehat{U}^*(\tau), \quad k \geq 0; \quad (29)$$

$$\widehat{U}_0^*(t) = B_1^* e^{A_0^* t} - B_2^* A_{22}^{*-1} A_{12}^* e^{A_0^* t} = B_0^* e^{A_0^* t}, \quad \Pi_0 \widehat{U}^*(\tau) = B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^*; \quad (30)$$

$$\widehat{U}_k^*(t) = B_1^* \widehat{A}_k^{11*}(t) + B_2^* \widehat{A}_{k+1}^{12*}(t), \quad \Pi_k \widehat{U}^*(\tau) = B_1^* \Pi_k \widehat{A}^{11*}(\tau) + B_2^* \Pi_{k+1} \widehat{A}^{12*}(\tau), \quad k \geq 1. \quad (31)$$

Отметим, что в точке $t = 0$ для нулевого приближения выполнено равенство $U_0^*(0, 0) = B_1^*$, а для всех остальных членов разложения в силу (29), (28) справедливо соотношение $U_k^*(0, 0) = 0$, $k \geq 1$. Следовательно, для всех ε $U_\varepsilon^*(0) = B_1^*$ или в соответствии с (22):

$$u_\varepsilon^{opt}(T) = -\frac{B_1^* r_\varepsilon}{\|B_1^* r_\varepsilon\|}. \quad (32)$$

Вне малой окрестности нуля при $t \in [\mu, T]$, $\mu := \varepsilon^p$ ($0 < p < 1$), пограничные функции в соответствии с (26) экспоненциально убывают при $\varepsilon \rightarrow +0$, и поэтому равномерно в этой области

$$U_\varepsilon^*(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widehat{U}_k^*(t), \quad t \in [\mu, T], \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (33)$$

В малой окрестности нуля $t \in [0, \mu]$ перейдем к внутренней переменной $\tau = t/\varepsilon$:

$$U_\varepsilon^*(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\widehat{U}_k^*(\varepsilon \tau) + \Pi_k \widehat{U}^*(\tau) \right), \quad t \in [0, \mu], \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

или

$$U_\varepsilon^*(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k S_k U^*(\tau), \quad t \in [0, \mu], \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (34)$$

где

$$S_k U^*(\tau) := \widehat{U}_k^*(0) + \widehat{U}_{k-1}'(0)\tau + \frac{1}{2}\widehat{U}_{k-2}''(0)\tau^2 + \dots + \frac{1}{k!}\widehat{U}_0^{*(k)}(0)\tau^k + \Pi_k \widehat{U}^*(\tau), \quad k \geq 0 \quad (35)$$

и в частности

$$S_0 U^*(\tau) = \widehat{U}_0^*(0) + \Pi_0 \widehat{U}^*(\tau) = B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^*. \quad (36)$$

Используя для $U_\varepsilon^*(t)$ внешнее разложение (33) вне пограничного слоя и внутреннее разложение (34) внутри пограничного слоя, а также разложение (21) для вектора r_ε , асимптотику $u_\varepsilon^{opt}(T-t)$ находим из формулы (22).

Для этого рассмотрим в общем случае асимптотику некоторого вектора вида

$$\frac{D_\varepsilon^*(s)r_\varepsilon}{\|D_\varepsilon^*(s)r_\varepsilon\|} = \frac{D_\varepsilon^*(s)r_\varepsilon}{\langle D_\varepsilon(s)D_\varepsilon^*(s)r_\varepsilon, r_\varepsilon \rangle^{1/2}} \quad (37)$$

в замкнутой области \mathcal{S} , если известны равномерная по $s \in \mathcal{S}$ степенная асимптотика матрицы $D_\varepsilon^*(s)$:

$$D_\varepsilon^*(s) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k D_k^*(s), \quad s \in \mathcal{S}, \quad (38)$$

и степенная асимптотика вектора r_ε :

$$r_\varepsilon \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k r_k. \quad (39)$$

Имеют место следующие разложения (40)–(43):

$$D_\varepsilon^*(s)r_\varepsilon \sim D_0^*(s)r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \overset{1}{F}_k(s, R_k), \quad \overset{1}{F}_k(s, R_k) := \sum_{n=0}^k D_n^*(s)r_{k-n}; \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \langle D_\varepsilon(s)D_\varepsilon^*(s)r_\varepsilon, r_\varepsilon \rangle &\sim \langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \overset{2}{F}_k(s, R_k), \\ \overset{2}{F}_k(s, R_k) &:= \sum_{\substack{(l,m,n,p) \in P_4(0,\dots,k), \\ l+m+n+p=k}} \langle D_l(s)D_m^*(s)r_n, r_p \rangle; \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle D_\varepsilon(s)D_\varepsilon^*(s)r_\varepsilon, r_\varepsilon \rangle^{1/2}} &\sim \frac{1}{\langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle^{1/2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \overset{3}{F}_k(s, R_k) \right), \\ \overset{3}{F}_k(s, R_k) &:= \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_k) \in P_k(1, \dots, k), \\ 0 \leq n_1, \dots, n_k \leq k, \\ l_1 n_1 + \dots + l_k n_k = k}} c_{(l_1, \dots, l_k)} \left(\frac{\overset{2}{F}_{l_1}(s, R_{l_1})}{\langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle} \right)^{n_1} \\ &\times \left(\frac{\overset{2}{F}_{l_2}(s, R_{l_2})}{\langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle} \right)^{n_2} \cdots \left(\frac{\overset{2}{F}_{l_k}(s, R_{l_k})}{\langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle} \right)^{n_k}; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{D_\varepsilon^*(s)r_\varepsilon}{\langle D_\varepsilon(s)D_\varepsilon^*(s)r_\varepsilon, r_\varepsilon \rangle^{1/2}} &\sim \frac{1}{\langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle^{1/2}} \left(D_0^*(s)r_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \overset{1}{F}_k(s, R_k) \right) \\
 &\times \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overset{3}{F}_k(s, R_k) \right) \sim \frac{D_0^*(s)r_0}{\langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle^{1/2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \overset{4}{F}_k(s, R_k), \\
 \overset{4}{F}_k(s, R_k) &:= \frac{\overset{1}{F}_k(s, R_k)}{\langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle^{1/2}} + \frac{\overset{3}{F}_k(s, R_k)D_0^*(s)r_0}{\langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle^{1/2}} \\
 &+ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\overset{3}{F}_n(s, R_n) \overset{1}{F}_{k-n}(s, R_{k-n})}{\langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle^{1/2}},
 \end{aligned} \tag{43}$$

где $R_k := (r_0, r_1, \dots, r_k)$, а запись $P_N(N_0, \dots, N_1)$ с $N_0 \leq N_1$ обозначает всевозможные упорядоченные наборы длины N целых чисел с повторениями из отрезка $[N_0, N_1]$.

Отметим, что формально разложения (42), (43) справедливы для всех $s \in \mathcal{S} \setminus \hat{\mathcal{S}}$, где

$$\hat{\mathcal{S}} := \{ \hat{s} \in \mathcal{S} : \langle D_0(\hat{s})D_0^*(\hat{s})r_0, r_0 \rangle = 0 \}.$$

Однако равномерными в $\mathcal{S} \setminus \hat{\mathcal{S}}$ эти разложения являются тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\overset{3}{F}_k(s, R_k)$, $\overset{4}{F}_k(s, R_k)$, $k \geq 0$, ограничены по $s \in \mathcal{S} \setminus \hat{\mathcal{S}}$.

Если $\hat{\mathcal{S}} \neq \emptyset$, то, как видно из (42), (43), коэффициенты $\overset{3}{F}_k(s, R_k)$, $\overset{4}{F}_k(s, R_k)$ ограничены по $s \in \mathcal{S} \setminus \hat{\mathcal{S}}$ тогда и только тогда, когда все функции $\overset{2}{F}_k(s, R_k)$, $k \geq 0$, или, соответственно, все $\langle D_l(s)D_m^*(s)r_n, r_p \rangle$, $l, m, n, p \geq 0$, имеют в точках $\hat{s} \in \hat{\mathcal{S}}$ ноль того же или более высокого порядка, что и $\langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle$, в противном случае $\overset{3}{F}_k(s, R_k)$, $\overset{4}{F}_k(s, R_k)$ имеют нарастающие с номером k особенности в точках $\hat{s} \in \hat{\mathcal{S}}$, в связи с чем построение равномерной асимптотики для (37) в окрестности точек $\hat{s} \in \hat{\mathcal{S}}$ требует применения соответствующих методов регуляризации, дающих, как правило, уже не степенные асимптотики.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Лемма 3. Пусть выполнены (38), (39). Для функции (37) справедливо степенное разложение (43), равномерное по $s \in \mathcal{S} \setminus \hat{\mathcal{S}}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (44) или условие (45):

$$\hat{\mathcal{S}} = \emptyset, \text{ т. е. } \langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle \neq 0, \quad s \in \mathcal{S}; \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{S}} \neq \emptyset \text{ и при этом для всех } \hat{s} \in \hat{\mathcal{S}} \text{ выполнено:} \\
 \langle D_l(s)D_m^*(s)r_n, r_p \rangle, \quad l, m, n, p \geq 0 \text{ имеют в точке } \hat{s} \\
 \text{ноль порядка } N_{l,m,n,p}(\hat{s}) \geq N_0(\hat{s}), \text{ где } N_0(\hat{s}) - \\
 \text{порядка нуля в точке } \hat{s} \text{ функции } \langle D_0(s)D_0^*(s)r_0, r_0 \rangle.
 \end{aligned} \tag{45}$$

□

Применим лемму 3 к функции (22) отдельно в области пограничного слоя и вне его, для чего рассмотрим условия (44), (45) соответственно для внутреннего (34) и внешнего (33) разложений функции $U_\varepsilon^*(t)$.

Для внешнего разложения условие (44) приобретает вид

$$\left\| \widehat{U}_0^*(t)r_0 \right\|^2 = \left\| B_0^* e^{A_0^* t} r_0 \right\|^2 \neq 0, \quad t \in [\mu, T], \tag{46}$$

что, в силу (16), соответствует непрерывности оптимального управления $u_0^{opt}(t)$ на $[0, T - \mu]$ или, поскольку $\mu = \varepsilon^p$ ($0 < p < 1$), на всем отрезке $[0, T]$.

Пусть выполнено (46). Рассмотрим условия (44), (45) для внутреннего разложения на границах его области определения — в точках $\tau = +\infty$ и $\tau = 0$.

Для $\tau = +\infty$ в соответствии с (36) справедливо

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \|S_0 U^*(\tau) r_0\|^2 = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left\| \left(\widehat{U}_0^*(0) + \Pi_0 \widehat{U}^*(\tau) \right) r_0 \right\|^2 = \left\| \widehat{U}_0^*(0) r_0 \right\|^2 \neq 0$$

в силу (46).

В точке $\tau = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \|S_0 U^*(\tau) r_0\|^2 &= \left\| B_1^* r_0 + B_2^* (e^{A_{22}^* \tau} - I) A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\|^2 \\ &\sim \left\| B_1^* r_0 + B_2^* A_{12}^* r_0 \tau + \sum_{k=2}^{+\infty} B_2^* A_{22}^{*k-1} A_{12}^* r_0 \frac{\tau^k}{k!} \right\|^2, \quad \tau \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Выполнимость условия (44) в точке $\tau = 0$ означает, что

$$\|B_1^* r_0\|^2 \neq 0;$$

это, в силу (32), соответствует непрерывности в точке $\tau = T$ оптимального управления $u_\varepsilon^{opt}(t)$ для всех достаточно малых ε .

Если же

$$\|B_1^* r_0\|^2 = 0,$$

т. е. если $\|S_0 U^*(\tau) r_0\|^2$ имеет в точке $\tau = 0$ ноль некоторого порядка N_0 , то в соответствии с (45) все $\langle S_m U^*(\tau) r_n, S_l U^*(\tau) r_p \rangle$, $m, l, n, p \geq 0$, должны иметь в точке $\tau = 0$ ноль того же или более высокого порядка, чем N_0 .

Пусть для определенности $B_2^* A_{12}^* r_0 \neq 0$, т. е. (47) $N_0 = 2$. Рассмотрим поведение в нуле $\langle S_m U^*(\tau) r_n, S_l U^*(\tau) r_p \rangle$, $l, m, n, p \geq 0$.

Из (35), (30), (31) следует, что

$$S_k U^*(\tau) = B_1^* S_{k,1} U^*(\tau) + B_2^* S_{k,2} U^*(\tau), \quad k \geq 0, \quad (48)$$

где

$$S_{k,1} U^*(\tau) := \widehat{A}_k^{11*}(0) + \widehat{A}_{k-1}^{11*'}(0)\tau + \frac{1}{2} \widehat{A}_{k-2}^{11*''}(0)\tau^2 + \dots + \frac{1}{k!} \widehat{A}_0^{11*(k)}(0)\tau^k + \Pi_k \widehat{A}^{11*}(\tau), \quad k \geq 0, \quad (49)$$

$$S_{k,2} U^*(\tau) := \widehat{A}_k^{12*}(0) + \widehat{A}_{k-1}^{12*'}(0)\tau + \frac{1}{2} \widehat{A}_{k-2}^{12*''}(0)\tau^2 + \dots + \frac{1}{k!} \widehat{A}_0^{12*(k)}(0)\tau^k + \Pi_k \widehat{A}^{12*}(\tau), \quad k \geq 0. \quad (50)$$

Отметим, что при этом в силу (27), (28):

$$\begin{aligned} S_{0,1} U^*(\tau) &= \widehat{A}_0^{11*}(0) + \Pi_0 \widehat{A}^{11*}(\tau) = I, \\ S_{k,1} U^*(\tau) &= O(\tau), \quad \tau \rightarrow 0, \quad k \geq 1; \end{aligned} \quad (51)$$

$$S_{k,2} U^*(\tau) = O(\tau), \quad \tau \rightarrow 0, \quad k \geq 0. \quad (52)$$

Из (48)–(52) следует, что

$$S_k U^*(\tau) = O(\tau), \quad \tau \rightarrow 0, \quad k \geq 1,$$

а для $k = 0$

$$S_0 U^*(\tau) = B_1^* + B_2^* S_{0,2} U^*(\tau).$$

Таким образом,

$$\langle S_m U^*(\tau) r_n, S_l U^*(\tau) r_p \rangle = \langle O(\tau) r_n, O(\tau) r_p \rangle = O(\tau^2), \quad \tau \rightarrow 0, \quad m \geq 1, \quad l \geq 1, \quad n, p \geq 0; \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \langle S_0 U^*(\tau) r_n, S_l U^*(\tau) r_p \rangle &= \langle B_1^* r_n, S_l U^*(\tau) r_p \rangle + O(\tau^2) \\ &= \langle B_1^* r_n, O(\tau) r_p \rangle + O(\tau^2), \quad \tau \rightarrow 0, \quad l \geq 1, \quad n, p \geq 0; \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \langle S_0 U^*(\tau) r_n, S_0 U^*(\tau) r_p \rangle &= \langle B_1^* r_n, B_1^* r_p \rangle + \langle B_1^* r_n, B_2^* S_{0,2} U^*(\tau) r_p \rangle \\ &+ \langle B_2^* S_{0,2} U^*(\tau) r_n, B_1^* r_p \rangle + \langle B_2^* S_{0,2} U^*(\tau) r_n, B_2^* S_{0,2} U^*(\tau) r_p \rangle \\ &= \langle B_1^* r_n, B_1^* r_p \rangle + \langle B_1^* r_n, O(\tau) r_p \rangle + \langle O(\tau) r_n, B_1^* r_p \rangle \\ &+ \langle O(\tau) r_n, O(\tau) r_p \rangle, \quad \tau \rightarrow 0, \quad n, p \geq 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Из (53)–(55) получаем, что все $\langle S_m U^*(\tau) r_n, S_l U^*(\tau) r_p \rangle$, $m, l, n, p \geq 0$ имеют в точке $\tau = 0$ ноль не менее второго порядка тогда и только тогда, когда

$$B_1^* r_k = 0, \quad k \geq 1.$$

Таким образом, условия (44), (45) для внешнего разложения функции $u_\varepsilon^{opt}(T-t)$ на всей области его определения $[0, T]$, а также для внутреннего разложения $u_\varepsilon^{opt}(T-t)$ в граничных точках его области определения $\tau = 0$ и $\tau = +\infty$ имеют вид

$$\|B_0^* e^{A_0^* t} r_0\| \neq 0, \quad \text{при всех } t \in [0, T], \quad (56)$$

$$(B_1^* r_0 \neq 0) \vee \left((B_1^* r_0 = 0) \wedge (B_1^* r_k = 0, k \geq 1) \wedge (B_2^* A_{12}^* r_0 \neq 0) \right). \quad (57)$$

Отметим, что (56), (57) соответствуют условиям (18), (20).

Во всех остальных точках $\tau \neq 0$, $\tau \neq +\infty$ области определения внутреннего разложения будем предполагать выполненным условие (44) (соответственно, условие (19)):

$$\|S_0 U^*(\tau) r_0\| = \left\| \left(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* \right) r_0 \right\| \neq 0, \quad \tau \in (0, +\infty).$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда равномерная по t в областях $[0; T - \varepsilon^{p_1}]$ и $[T - \varepsilon^{p_2}; T]$ с любыми $p_1, p_2 \in (0, 1)$ асимптотика оптимального управления $u_\varepsilon^{opt}(t)$ имеет вид

$$u_\varepsilon^{opt}(t) \sim u_0^{opt}(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t, R_k), \quad t \in [0, T - \varepsilon^{p_1}], \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (58)$$

$$u_\varepsilon^{opt}(t) \sim S_0 u(\tau_1, r_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k S_k u(\tau_1, R_k), \quad t \in [T - \varepsilon^{p_2}, T], \quad \tau_1 = \frac{T-t}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (59)$$

где

$u_0^{opt}(t)$ – оптимальное управление в задаче (15),

$$S_0 u(\tau_1, r_0) := - \frac{(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau_1} A_{22}^{*-1} A_{12}^*) r_0}{\|(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau_1} A_{22}^{*-1} A_{12}^*) r_0\|},$$

$u_k(t, R_k)$, $S_k u(\tau_1, R_k)$ – известные функции.

Доказательство. Применим лемму 3 к функции (22) при $t \in [\varepsilon^{p_1}, T]$, где для $U_\varepsilon^*(t)$ справедливо разложение (33), получим

$$u_\varepsilon^{opt}(T-t) \sim - \left(\frac{\widehat{U}_0^*(t)r_0}{\langle \widehat{U}_0(t)\widehat{U}_0^*(t)r_0, r_0 \rangle^{1/2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overset{6}{F}_k(t, R_k) \right), \quad t \in [\varepsilon^{p_1}, T].$$

В соответствии с (30) $\widehat{U}_0^*(t) = B_0^* e^{A_0^* t}$, а в соответствии с (16)

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = - \frac{B_0^* e^{A_0^*(T-t)} r_0}{\|B_0^* e^{A_0^*(T-t)} r_0\|},$$

поэтому

$$u_\varepsilon^{opt}(T-t) \sim u_0^{opt}(T-t) - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overset{6}{F}_k(t, R_k), \quad t \in [\varepsilon^{p_1}, T],$$

что и эквивалентно (58).

Далее применим лемму 3 к функции (22) при $t \in [0, \varepsilon^{p_2}]$, где для $U_\varepsilon^*(t)$ справедливо разложение (34), имеем

$$u_\varepsilon^{opt}(T-t) \sim - \left(\frac{S_0 \widehat{U}^*(\tau) r_0}{\langle S_0 \widehat{U}(\tau) S_0 \widehat{U}^*(\tau) r_0, r_0 \rangle^{1/2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overset{7}{F}_k(\tau, R_k) \right), \quad t \in [0, \varepsilon^{p_2}], \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

В соответствии с (36) $S_0 \widehat{U}^*(\tau) = B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^*$, поэтому

$$u_\varepsilon^{opt}(T-t) \sim - \frac{(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^*) r_0}{(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^*) r_0} - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \overset{7}{F}_k(\tau, R_k), \quad t \in [0, \varepsilon^{p_2}], \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

что и эквивалентно (59). □

Рассмотрим достаточные условия для (19). Отметим, что

$$\|S_0 U^*(\tau) r_0\| \geq \left\| \|B_0^* r_0\| - \|B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0\| \right\|. \quad (60)$$

Покажем, что при условии

$$(A_{22}^* = A_{22}) \wedge (A_{22} B_2 = B_2 A_{22}) \quad (61)$$

функция $\|B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0\|$ строго монотонно убывает при $\tau > 0$.

Пусть выполнено (61). Тогда для A_{22}^{*-1} существует $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$:

$$Q^{-1} = Q^*, \quad Q^* A_{22}^{*-1} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_m} \end{pmatrix}, \quad (62)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — собственные числа матрицы A_{22} .

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\| B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\|^2 &= 2 \langle B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{12}^* r_0, B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \rangle = 2 \langle p, A_{22}^{*-1} p \rangle \\ &= 2 \langle Q Q^{-1} p, A_{22}^{*-1} Q Q^{-1} p \rangle = 2 \langle Q^{-1} p, Q^* A_{22}^{*-1} Q Q^{-1} p \rangle = 2 \langle \tilde{p}, Q^* A_{22}^{*-1} Q \tilde{p} \rangle, \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$p := B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{12}^* r_0, \quad \tilde{p} := Q^{-1} p.$$

В силу (62), (2), (63)

$$\frac{d}{dt} \left\| B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\|^2 < 0. \quad (64)$$

Таким образом, при условии (61) функция $\left\| B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\|^2$ строго монотонно убывает при $\tau > 0$. Значит и функция $\left\| B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\|$ строго монотонно убывает от значения $\left\| B_2^* A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\|$ в точке $\tau = 0$ до значения 0 при $\tau = +\infty$. Если, кроме того,

$$\left\| B_2^* A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\| \leq \left\| B_0^* r_0 \right\|, \quad (65)$$

то в соответствии с (60)

$$\left\| S_0 U^*(\tau) r_0 \right\| \geq \left| \left\| B_0^* r_0 \right\| - \left\| B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\| \right| > \left| \left\| B_0^* r_0 \right\| - \left\| B_2^* A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\| \right| \geq 0, \quad \tau > 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \left\| B_2^* A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\|^2 - \left\| B_0^* r_0 \right\|^2 = \left\| B_2^* A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\|^2 - \left\| (B_1^* - B_2^* A_{22}^{*-1} A_{12}^*) r_0 \right\|^2 \\ & = - \left\| B_1^* r_0 \right\|^2 + 2 \langle B_1^* r_0, B_2^* A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \rangle = - \left\| B_1^* r_0 \right\|^2 + 2 \langle B_1^* r_0, A_{22}^{*-1} B_2^* A_{12}^* r_0 \rangle. \end{aligned} \quad (66)$$

Если теперь

$$(B_1^* r_0 = B_2^* A_{12}^* r_0) \vee (B_1^* r_0 = 0),$$

то из (66), аналогично (64), получаем, что

$$\left\| B_2^* A_{22}^{*-1} A_{12}^* r_0 \right\|^2 - \left\| B_0^* r_0 \right\|^2 \leq 0,$$

что и эквивалентно (65).

Таким образом, справедливо следующее простое достаточное условие выполнимости соотношения (19).

Предложение 1. Если

$$\left(A_{22}^* = A_{22} \right) \wedge \left(A_{22} B_2 = B_2 A_{22} \right) \wedge \left((B_1^* r_0 = B_2^* A_{12}^* r_0) \vee (B_1^* r_0 = 0) \right), \quad (67)$$

то

$$\left\| S_0 U^*(\tau) r_0 \right\| = \left\| \left(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} A_{22}^{*-1} A_{12}^* \right) r_0 \right\| \neq 0, \quad \tau \in (0, +\infty).$$

□

Отметим, что (67) выполнено, например, в случае, когда $(A_{22}^* = A_{22}) \wedge (B_2 = I) \wedge (B_1 = A_{12})$, а также в рассмотренном в [6, 7] случае непрямого управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1983. 390 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Мат. сб. 1952. Т. 31(73), № 3. С. 575–586.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

5. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
6. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстро стабилизирующемся непрямом управлении в регулярном случае // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 11. С. 1473–1480.
7. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстро стабилизирующемся непрямым управлением в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
8. **Данилин А.Р., Парышева Ю.В.** Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 55–65.
9. **Данилин А.Р., Парышева Ю.В.** Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 2. С. 151–154.
10. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
11. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
12. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.

Парышева Юлия Владимировна

Поступила 13.09.2009

аспирант

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: pva@sky.ru

УДК 512.542

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕТОК РЕШЕТКАМИ КОНГРУЭНЦИЙ ПОЛУГРУПП¹

А. Л. Попович, В. Б. Репницкий

В работе доказывается, что всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, компактные элементы которой образуют решетку с единицей, представима как решетка конгруэнций подходящей полугруппы.

Ключевые слова: алгебраическая решетка, дистрибутивная решетка, решетка конгруэнций, полугруппа.

A. L. Popovich, V. B. Repnitskii. On the representation of lattices by congruence lattices of semigroups.

It is proved that every distributive algebraic lattice such that its compact elements form a lattice with unit can be represented as a congruence lattice for an appropriate semigroup.

Keywords: algebraic lattice, distributive lattice, congruence lattice, semigroup.

1. Введение

Напомним, что элемент a полной решетки L называется *компактным*, если для любого множества элементов $X \subseteq L$ с условием $a \leq \bigvee X$ существует конечное подмножество $X' \subseteq X$ такое, что $a \leq \bigvee X'$. Полная решетка называется *алгебраической*, если всякий ее элемент является объединением компактных элементов.

Хорошо известная теорема Г. Гретцера и Е. Т. Шмидта [4] утверждает, что любая алгебраическая решетка представима как решетка конгруэнций подходящей универсальной алгебры. В то же время, как следует из результатов работы [2], существует модулярная алгебраическая решетка, которая не изоморфна решетке конгруэнций никакой алгебры конечной сигнатуры и, в частности, никакого группоида. Однако если потребовать, чтобы наибольший элемент алгебраической решетки был компактным, то такая решетка всегда представима как решетка конгруэнций некоторого группоида (см. [5]).

В настоящее время открытым остается следующий вопрос [10, проблема 3]: *всякая ли дистрибутивная алгебраическая решетка L изоморфна решетке конгруэнций подходящего группоида и, более того, полугруппы?* Известно, что если компактные элементы L образуют подрешетку, то L изоморфна решетке конгруэнций некоторой решетки с нулем (см. [9]), откуда, как заметил Р. Маккензи (см. [6]), следует представимость L решеткой конгруэнций группоида. К числу положительных результатов в этом направлении относится и один из основных результатов работы [8], утверждающий, что любая дистрибутивная алгебраическая решетка, мощность множества компактных элементов которой не выше \aleph_1 , изоморфна решетке нормальных делителей некоторой группы (очевидно, что решетка нормальных делителей группы G является решеткой конгруэнций G , рассматриваемой как полугруппа). Отметим, что в [11] приводится пример дистрибутивной алгебраической решетки, которая не изоморфна решетке конгруэнций никакой полурешетки.

¹Работа выполнена при поддержке научных грантов “Исследования по теории алгебраических систем и ее приложения в компьютерных науках и биоинформатике” (проект 2.1.1/3537), “Решеточные свойства полугрупп и полугрупповых многообразий” (проект 10-01-00524-а), а также грантом “Фундаментальные проблемы теории алгебраических систем и ее приложения в информатике” (проект 09-01-12142-офи_м).

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы:

Теорема. Пусть L — дистрибутивная алгебраическая решетка, компактные элементы которой образуют решетку, и пусть единица в L — компактный элемент. Тогда L изоморфна решетке конгруэнций подходящей полугруппы.

Доказательство теоремы приводится в разд. 3. Разд. 2 является подготовительным.

2. Вспомогательные результаты

1⁰. Мы придерживаемся стандартных понятий теорий полугрупп и решеток, которые можно найти в [1] и [3] соответственно.

Если \mathcal{P} есть \vee -полурешетка с нулем, то ее идеалом называется непустое подмножество элементов, замкнутое относительно объединения элементов и взятия меньших элементов. Через $J(\mathcal{P})$ обозначается решетка всех идеалов полурешетки \mathcal{P} .

Для произвольной алгебраической решетки L множество L_c всех ее компактных элементов образует \vee -полурешетку с нулем относительно частичного порядка в L . Как известно (см. [3]), L изоморфна решетке идеалов $J(L_c)$. Если пересечение любых двух компактных элементов в L снова компактный элемент, то L_c является решеткой. При этом L дистрибутивна тогда и только тогда, когда дистрибутивна решетка L_c .

Интервал в решетке между любыми двумя ее элементами $a \leq b$ обозначается через $[a, b]$.

Через $\text{Con } S$ мы обозначаем решетку конгруэнций полугруппы S , а через $\Theta_S(x, y)$ (или проще $\Theta(x, y)$) — наименьшую конгруэнцию, склеивающую элементы $x, y \in S$. Как обычно, S^1 есть полугруппа S с присоединенной единицей.

Через $F(X)$ обозначается свободная полугруппа с множеством X свободных порождающих, а через $S * T$ — свободное произведение полугрупп S и T . Канонические представления элементов в $F(X)$ и $S * T$ мы называем *словами*.

Существенную роль в статье играет понятие полугрупповой функции расстояния, определяемое ниже.

Пусть \mathcal{P} — произвольная \vee -полурешетка с нулем и S — полугруппа. Отображение $\delta : S \times S \rightarrow \mathcal{P}$ мы называем *полугрупповой функцией расстояния на S* , если выполняются следующие условия:

- 1) $\delta(x, x) = 0$ для любого $x \in S$;
- 2) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ для любых $x, y \in S$;
- 3) $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) \vee \delta(z, y)$ для любых $x, y, z \in S$;
- 4) $\delta(xs, yt) \leq \delta(x, y) \vee \delta(s, t)$ для любых $x, y, s, t \in S$.

Легко видеть, что условие 4 может быть заменено на более простое условие:

- 4') $\delta(xs, ys) \leq \delta(x, y)$ и $\delta(sx, sy) \leq \delta(x, y)$ для любых $x, y, s \in S$.

Положим $O_\delta(a) = \{(x, y) \in S \times S \mid \delta(x, y) \leq a\}$ для любого элемента $a \in \mathcal{P}$. Очевидно, что $O_\delta(a)$ есть конгруэнция на полугруппе S . Более общо, для произвольного идеала $I \in J(\mathcal{P})$ определим $O_\delta(I) = \{(x, y) \in S \times S \mid \delta(x, y) \in I\}$. Легко видеть, что $O_\delta(I)$ так же конгруэнция на S и $O_\delta(I) = \bigvee \{O_\delta(a) \mid a \in I\}$ в $\text{Con } S$.

Следующее простое утверждение, важное в идейном плане, есть частный случай [7, теорема 3.7] (см. также [10, предложение 2.3]). Для удобства читателя мы приводим его короткое независимое доказательство.

Предложение 1. Пусть $\delta : S \times S \rightarrow \mathcal{P}$ — полугрупповая функция расстояния, для которой выполнены следующие условия:

- 1) Для любых $a, b \in \mathcal{P}$ и $x, y \in S$, если $\delta(x, y) \leq a \vee b$, то $(x, y) \in O_\delta(a) \vee O_\delta(b)$.

2) Функция δ сюръективна.

3) Для любых $(x, y), (z, t) \in S \times S$, если $\delta(x, y) \leq \delta(z, t)$, то $(x, y) \in O_\delta(0) \vee \Theta(z, t)$. Тогда отображение $O_\delta : J(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Con } S$ есть изоморфизм решетки $J(\mathcal{P})$ на интервал $[O_\delta(0), S \times S]$ в $\text{Con } S$.

Доказательство. Покажем, что O_δ является вложением. Пусть I, J — два различных идеала \mathcal{P} . Предположим без ограничения общности, что $I \not\subseteq J$. Выберем $a \in I \setminus J$. В силу условия 2) существует пара $(x, y) \in S \times S$ такая, что $\delta(x, y) = a$. Ясно, что $(x, y) \in O_\delta(I) \setminus O_\delta(J)$, что означает $O_\delta(I) \neq O_\delta(J)$.

Теперь покажем, что O_δ сюръективно. Пусть $\Theta \in [O_\delta(0), S \times S]$. Рассмотрим множество идеалов $\{J \in J(\mathcal{P}) \mid O_\delta(J) \subseteq \Theta\}$. В силу леммы Цорна в нем существует максимальный по включению идеал I . Предположим, что $O_\delta(I) \neq \Theta$. Тогда существует такая пара $(x, y) \in S \times S$, что $(x, y) \in \Theta$ и $\delta(x, y) \notin I$. Рассмотрим идеал I' , порожденный элементами из I и элементом $\delta(x, y)$. Так как $I \subset I'$, из максимальной I следует, что $O_\delta(I') \not\subseteq \Theta$. Поэтому существует такая пара $(z, t) \in S \times S$, что $(z, t) \in O_\delta(I')$ и $(z, t) \notin \Theta$. Тогда $\delta(z, t) \in I'$ и, следовательно, $\delta(z, t) \leq c \vee \delta(x, y)$ для некоторого $c \in I$. В силу условия 1) $(z, t) \in O_\delta(c) \vee O_\delta(\delta(x, y))$. Это означает, что существуют $z = z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = t$ в S такие, что $\delta(z_i, z_{i+1}) \leq c$, либо $\delta(z_i, z_{i+1}) \leq \delta(x, y)$ при всяком $0 \leq i \leq n-1$. Поскольку $(z, t) \notin \Theta$, имеем $(z_j, z_{j+1}) \notin \Theta$ при некотором $0 \leq j \leq n-1$. Однако если $\delta(z_j, z_{j+1}) \leq c$, то $(z_j, z_{j+1}) \in O_\delta(c) \subseteq O_\delta(I) \subseteq \Theta$. Но и при $\delta(z_j, z_{j+1}) \leq \delta(x, y)$ в силу 3) выполняется $(z_j, z_{j+1}) \in O_\delta(0) \vee \Theta(x, y)$. Нетрудно видеть, что $O_\delta(0) \subseteq \Theta$ и $\Theta(x, y) \subseteq \Theta$, поэтому в любом случае $(z_j, z_{j+1}) \in \Theta$, что противоречит выбору j .

Таким образом, O_δ — биекция. При этом из определения $O_\delta(I)$ следует изотонность отображения O_δ . Поэтому O_δ является решеточным изоморфизмом. \square

2⁰. Мы фиксируем полугруппу S и полурешетку \mathcal{P} с нулем. При этом мы накладываем на \mathcal{P} дополнительные ограничения, а именно, требуем, чтобы \mathcal{P} была дистрибутивной решеткой с единицей относительно заданного на ней порядка. Зафиксируем также произвольную функцию расстояния $\delta : S \times S \rightarrow \mathcal{P}$ на полугруппе S . Следующее утверждение является ключевым в доказательстве теоремы.

Предложение 2. Для любых пар $(a, b), (c, d) \in S \times S$ с условием $\delta(a, b) \leq \delta(c, d)$ существуют полугруппа \tilde{S} и полугрупповая функция расстояния $\tilde{\delta} : \tilde{S} \times \tilde{S} \rightarrow \mathcal{P}$ такие, что S является подполугруппой в \tilde{S} , $\delta = \tilde{\delta}|(S \times S)$ и $(a, b) \in O_{\tilde{\delta}}(0) \vee \Theta(c, d)$ в \tilde{S} .

Разобьем доказательство на несколько этапов.

Этап 1. Рассмотрим свободную полугруппу $F(u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w})$ со свободными порождающими $u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w}$ и свободное произведение $\tilde{S} = S * F(u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w})$.

По заданным парам $(a, b), (c, d) \in S \times S$, где $\delta(a, b) \leq \delta(c, d)$, построим граф $G = (\tilde{S}, E)$ с помеченными ребрами следующим образом. Полугруппа \tilde{S} будет множеством вершин графа. Ребра из E удобно представлять в виде троек вида (p, e, q) , где $e \in \mathcal{P}$ — метка ребра, соединяющего вершины p и q из \tilde{S} . При этом две вершины могут соединяться несколькими ребрами с различными метками. Положим $(p, e, q) \in E$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- 0) $p = q$ и $e = 0$;
- 1) $p = sxt, q = syt$ и $e = \delta(x, y)$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y \in S$;
- 2) $p = sux\bar{u}t, q = sat$ и $e = \delta(x, c)$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x \in S$ (или симметрично);
- 3) $p = swx\bar{w}t, q = sbt$ и $e = \delta(x, d)$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x \in S$ (или симметрично);
- 4) Либо $p = sux\bar{u}t, q = svy\bar{v}t$, либо $p = svx\bar{v}t, q = swy\bar{w}t$, и $e = \delta(x, d) \vee \delta(y, c)$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $(x, y) \in S \times S$ (или симметрично).

Если для тройки $(p, e, q) \in E$ выполнено условие j ($0 \leq j \leq 4$), то мы будем говорить о *типе j* соответствующего ребра графа.

Мы также будем записывать ребро $(p, e, q) \in E$ типа j в виде $p \xleftarrow[e]{e} q$. Впрочем, мы будем опускать символы над или под стрелкой в тех случаях, когда они для нас не важны. Два ребра одного типа будем называть *подобными*. Число всех вхождений букв $u, \bar{u}, v, \bar{v}, w, \bar{w}$ в записи слова $r \in \tilde{S}$ будем называть *весом* r и обозначать $w(p)$; в частности, $w(p) = 0$ тогда и только тогда, когда $p \in S$.

Лемма 1. Пусть $p \xleftarrow[e_1]{e_1} q \xleftarrow[e_2]{e_2} r$ и $p = sg't$, $q = sh't = s'g''t'$, $r = s'h''t'$, где (g', h') , $(g'', h'') \in \{(x, y), (ux\bar{u}, a), (a, ux\bar{u}), (wx\bar{w}, b), (b, wx\bar{w}), (ux\bar{u}, vy\bar{v}), (vy\bar{v}, ux\bar{u}), (vx\bar{v}, wy\bar{w}), (wy\bar{w}, vx\bar{v})\}$ для некоторых $x, y \in S$, $s, t, s', t' \in \tilde{S}^1$ и метки e_1, e_2 определены в соответствии с правилами 1)–4). Пусть подслова h' и g'' в записи слова q не пересекаются. Тогда существует слово $q' \in \tilde{S}$ такое, что $p \xleftarrow[e_2]{e_2} q' \xleftarrow[e_1]{e_1} r$, причем $p \xleftarrow[e_2]{e_2} q'$ подобно $q \xleftarrow[e_2]{e_2} r$, и $q' \xleftarrow[e_1]{e_1} r$ подобно $p \xleftarrow[e_1]{e_1} q$. Кроме того, $w(q') \leq w(q)$ тогда и только тогда, когда $w(g') + w(h'') \leq w(h') + w(g'')$.

Доказательство. Поскольку слова h' и g'' в записи слова q не пересекаются, g'' является либо подсловом s , либо подсловом t . Предположим без ограничения общности, что g'' является подсловом t . Тогда для некоторого $m \in \tilde{S}^1$ должно выполняться $p = sg'mg''t'$, $q = sh'mg''t'$ и $r = sh'mh''t'$. Легко видеть, что слово $q' = sg'mh''t'$ удовлетворяет всем требованиям леммы. \square

Этап 2. Через $H(p, q)$ обозначим множество всех путей от вершины p до вершины q в графе $G = (\tilde{S}, E)$. Если Q — путь из p в q вида $p = p_0 \xleftarrow[e_1]{e_1} p_1 \xleftarrow[e_2]{e_2} p_2 \xleftarrow[e_3]{e_3} \dots \xleftarrow[e_n]{e_n} p_n = q$, то положим $e(Q) = e_1 \vee \dots \vee e_n$.

Лемма 2. Для любых вершин p и q в графе G , существует конечное множество $M(p, q) \subseteq H(p, q)$ такое, что для любого $Q \in H(p, q)$ существует $P \in M(p, q)$ с условием $e(P) \leq e(Q)$.

Разобьем ее **доказательство** на леммы 3 и 4. Для этого нам потребуются дополнительные конструкции.

Два пути из $H(p, q)$ назовем *k-смежными*, если один получен из другого заменой участка $p_{i-1} \xleftarrow[e_1]{e_1} p_i \xleftarrow[e_2]{e_2} p_{i+1}$ на участок $p_{i-1} \xleftarrow[e_2]{e_2} p'_i \xleftarrow[e_1]{e_1} p_{i+1}$, где $p_{i-1} = sg't$, $p_i = sh't = s'g''t'$, $p_{i+1} = s'h''t'$, причем (g', h') , $(g'', h'') \in \{(x, y), (ux\bar{u}, a), (a, ux\bar{u}), (wx\bar{w}, b), (b, wx\bar{w}), (ux\bar{u}, vy\bar{v}), (vy\bar{v}, ux\bar{u}), (vx\bar{v}, wy\bar{w}), (wy\bar{w}, vx\bar{v})\}$ для некоторых $x, y \in S$, $s, t, s', t' \in \tilde{S}^1$, подслова h' и g'' в записи слова q не пересекаются и $i \neq k$. Два пути P и P' назовем *k-эквивалентными*, если существует последовательность путей $P = Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_n = P'$ такая, что пути Q_i и Q_{i+1} k -смежны для всякого $0 \leq i \leq n-1$.

Пусть в пути P есть подпуть $p_{i-1} \xleftarrow[j_1]{j_1} p_i \xleftarrow[j]{j} p_{i+1} \xleftarrow[j_2]{j_2} p_{i+2}$. Будем говорить, что ребро $p_i \xleftarrow{j} p_{i+1}$ типа j можно *сократить*, если существует путь P' , отличающийся от P лишь тем, что в нем подпуть $p_{i-1} \xleftarrow[j_1]{j_1} p_i \xleftarrow[j]{j} p_{i+1} \xleftarrow[j_2]{j_2} p_{i+2}$ заменен либо на $p_{i-1} \xleftarrow[j_1]{j_1} p_{i+1} \xleftarrow[j_2]{j_2} p_{i+2}$, либо на $p_{i-1} \xleftarrow[j_1]{j_1} p_i \xleftarrow[j_2]{j_2} p_{i+2}$.

Через $w_v(p)$ будем обозначать в дальнейшем число вхождений символа v в слово p .

Рассмотрим множество $N(p, q)$ всех путей P из $H(p, q)$, удовлетворяющих следующим условиям:

M1. Существует индекс $k(P) \in \{0, \dots, n\}$ такой, что $w(p_i) \geq w(p_{i+1})$, $w_v(p_i) \geq w_v(p_{i+1})$ при $i < k(P)$ и $w(p_i) \leq w(p_{i+1})$, $w_v(p_i) \leq w_v(p_{i+1})$ при $i \geq k(P)$.

M2. Если для некоторого i выполняется $p_i = svy\bar{v}t$, $p_{i+1} = sux\bar{u}t$ и $p_{i+2} = sat$ ($s, t \in \tilde{S}^1$, $x, y \in S$), то $x = c$.

Если для некоторого i выполняется $p_i = svy\bar{v}t$, $p_{i+1} = swx\bar{w}t$ и $p_{i+2} = sat$ ($s, t \in \tilde{S}^1, x, y \in S$), то $x = d$.

Если для некоторого i выполняется $p_i = sat$, $p_{i+1} = sux\bar{u}t$ и $p_{i+2} = svy\bar{v}t$ ($s, t \in \tilde{S}^1, x, y \in S$), то $x = c$.

Если для некоторого i выполняется $p_i = sat$, $p_{i+1} = swx\bar{w}t$ и $p_{i+2} = svy\bar{v}t$ ($s, t \in \tilde{S}^1, x, y \in S$), то $x = d$.

М3. Нельзя сократить ни одного ребра типа 1.

М4. Нет подпутей вида $svx\bar{v}t \longleftrightarrow suy\bar{u}t \longleftrightarrow svx\bar{v}t$ и $svx\bar{v}t \longleftrightarrow swy\bar{w}t \longleftrightarrow svx\bar{v}t$ для любых $s, t \in \tilde{S}^1, x, y, z \in S$.

Теперь определим $M(p, q)$ как множество путей P из $N(p, q)$ таких, что всякий путь, $k(P)$ -эквивалентный P , лежит в $N(p, q)$. Покажем, что $M(p, q)$ — искомое множество, о котором говорится в лемме 2.

Лемма 3. *Множество $M(p, q)$ конечно.*

Доказательство. Из условия М1 следует, что в любом пути из H не более $w(p) + w(q)$ ребер типа 2 и 3, а ребер типа 4 не более $w_v(p) + w_v(q)$. Поскольку подпуты вида $sxt \longleftrightarrow syt \longleftrightarrow szt$ в силу условия НЗ встречаться не может, ребер типа 1 в пути не более $w_S(p)(w(p) + w(q) + w_v(p) + w_v(q) + 1)$, где $w_S(p)$ — минимальное число вхождений элементов из S в запись слова p . Таким образом, любой путь из $M(p, q)$ состоит не более чем из $(w_S(p) + 1)(w(p) + w(q) + w_v(p) + w_v(q)) + w_S(p)$ вершин.

В $M(p, q)$ для фиксированного набора $\{j_1, \dots, j_{n-1}\}$ рассмотрим множество путей, удовлетворяющих следующей диаграмме:

$$p = s_1g_1t_1 \xleftrightarrow{j_1} s_1h_1t_1 = s_2g_2t_2 \xleftrightarrow{j_2} s_2h_2t_2 \xleftrightarrow{j_3} \dots \xleftrightarrow{j_{n-1}} s_nh_nt_n = q,$$

где $s_i, t_i \in \tilde{S}^1$ и $(g_i, h_i) \in \{(x, y), (ux\bar{u}, a), (a, ux\bar{u}), (wx\bar{w}, b), (b, wx\bar{w}), (ux\bar{u}, vy\bar{v}), (vy\bar{v}, ux\bar{u}), (vx\bar{v}, wy\bar{w}), (wy\bar{w}, vx\bar{v})\}$ при $1 \leq i \leq n$. Покажем, что это множество состоит из одного пути, т. е. существует только одно ребро каждого типа. Это будет доказывать лемму, так как число вершин в каждом пути ограничено, а число подслов вида $x, ux\bar{u}, wx\bar{w}$ и $vx\bar{v}$ ($x \in S$) в каждом p_i конечно.

Пусть $p_i = sgt$ и $p_{i+1} = sht$, где $(g, h) \in \{(x, y), (ux\bar{u}, a), (a, ux\bar{u}), (wx\bar{w}, b), (b, wx\bar{w}), (ux\bar{u}, vy\bar{v}), (vy\bar{v}, ux\bar{u}), (vx\bar{v}, wy\bar{w}), (wy\bar{w}, vx\bar{v})\}$ для некоторых $x, y \in S$ и $s, t \in \tilde{S}^1$. Поскольку мы всегда можем перейти к k -эквивалентному пути, который тоже принадлежит $M(p, q)$, достаточно рассмотреть случаи, когда либо $p_{i+2} = sft$ для $f \in \{x, ux\bar{u}, wx\bar{w}, vx\bar{v}, uix\bar{u}\bar{u}, wwx\bar{w}\bar{w}, wwx\bar{w}\bar{u}, wix\bar{u}\bar{w}, vix\bar{u}\bar{v}, vwx\bar{w}\bar{v}\}$, либо $p_{i+1} = q$. При этом мы вновь учитываем, что возможность того, что $p_i = sux\bar{u}t$ и $p_{i+1} = sat$, двойственна возможности $p_i = swx\bar{w}t$ и $p_{i+1} = sbt$ (или симметрично). Поэтому будем рассматривать только первую возможность в каждой паре.

С л у ч а й 1.1: $p_i = sxt, p_{i+1} = syt, p_{i+2} = szt$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

С л у ч а й 1.2: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y \in S$.

С л у ч а й 1.3: $p_i = sxt, p_{i+1} = sat, p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, z \in S$.

С л у ч а й 1.4: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

С л у ч а й 1.5: $p_i = svx\bar{v}t, p_{i+1} = svy\bar{v}t, p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

С л у ч а й 2: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x \in S$.

С л у ч а й 3.1: $p_i = sat, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y, z \in S$.

С л у ч а й 3.2: $p_i = sat, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y \in S$.

С л у ч а й 3.3: $p_i = sat, p_{i+1} = sua\bar{u}t, p_{i+2} = suuz\bar{u}\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $z \in S$.

С л у ч а й 3.4: $p_i = sat, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y, z \in S$.

С л у ч а й 4.1: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = svy\bar{v}t, p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.
 С л у ч а й 4.2: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = sva\bar{v}t, p_{i+2} = svuz\bar{u}v\bar{t}$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, z \in S$.
 С л у ч а й 4.3: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = svy\bar{v}t, p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.
 С л у ч а й 4.4: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = svy\bar{v}t, p_{i+2} = swz\bar{w}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

С л у ч а й 5.1: $p_i = svx\bar{v}t, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

С л у ч а й 5.2: $p_i = svx\bar{v}t, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y \in S$.

С л у ч а й 5.3: $p_i = svx\bar{v}t, p_{i+1} = sua\bar{u}t, p_{i+2} = suuz\bar{u}v\bar{t}$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, z \in S$.

С л у ч а й 5.4: $p_i = svx\bar{v}t, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

С л у ч а й 6: $p_{i+1} = q$.

В случаях 1.3, 2, 3.3, 4.2, 5.3 и 6 переход от p_i к p_{i+1} возможно осуществить только одним способом. В случаях 3.4 и 5.2 должно выполняться условие M2, что также приводит к единственному способу перехода. Остальные случаи приводят к противоречию: случаи 3.2, 4.3, 4.4 противоречат условию M1, случаи 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, 3.1, 4.1, 5.1 — условию M3, а случай 5.4 — условию M4. Лемма доказана. \square

Лемма 4. Для любого пути $Q \in H(p, q)$ существует путь $P \in M(p, q)$ такой, что $e(P) \leq e(Q)$.

Доказательство. Пусть путь $Q = \{p = p_1, p_2, \dots, p_n = q\}$ принадлежит $H(p, q)$. Построим путь $P \in M(p, q)$ такой, что $e(Q) \geq e(P)$.

Для произвольного пути $R \in H(p, q)$ через $k(R)$ будем обозначать минимальный индекс k , для которого выполняются условия $w(p_j) \leq w(p_{j+1})$ и $w_v(p_j) \leq w_v(p_{j+1})$ при $j \geq k$ (здесь $k(R) = n$ в случае, если эти условия не выполняются одновременно ни для какого $j \leq n-1$). Через $i(R)$ будем обозначать максимальный индекс i с тем свойством, что $i < k(R)$, $w(p_i) \leq w(p_{i+1})$ и $w_v(p_i) \leq w_v(p_{i+1})$ (здесь $i(R) = 0$ в случае, если эти условия не выполняются одновременно ни для какого $i < k(R)$). Нетрудно видеть, что в случае $i(R) = 0$ путь R удовлетворяет условию M1.

В пути Q рассмотрим $k = k(Q)$, $i = i(Q)$ и ребро $p_i \longleftrightarrow p_{i+1}$. Для ясности, пусть $p_i = sgt$ и $p_{i+1} = sht$, где $(g, h) \in \{(x, y), (ux\bar{u}, a), (a, ux\bar{u}), (wx\bar{w}, b), (b, wx\bar{w}), (ux\bar{u}, vy\bar{v}), (vy\bar{v}, ux\bar{u}), (vx\bar{v}, wy\bar{w}), (wy\bar{w}, vx\bar{v})\}$. Благодаря лемме 1 можно считать, что либо $i+1 = k$, либо $p_{i+2} = sft$, где $f \in \{x, ux\bar{u}, wx\bar{w}, vx\bar{v}, wx\bar{u}u\bar{w}, wwx\bar{w}w\bar{w}, wwx\bar{w}u\bar{w}, wx\bar{u}u\bar{w}, vx\bar{u}v\bar{w}, vwx\bar{w}v\bar{w}\}$. Первый вариант невозможен в силу минимальности k . Поэтому, пользуясь максимальнойностью i , можно считать, что $w(p_{i+1}) \geq w(p_{i+2})$ и $w_v(p_{i+1}) \geq w_v(p_{i+2})$. Далее вновь учитывая двойственность, достаточно рассмотреть следующие случаи.

С л у ч а й 1: $p_i = sxt, p_{i+1} = syt, p_{i+2} = szt$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

С л у ч а й 2: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y \in S$.

С л у ч а й 3: $p_i = svx\bar{v}t, p_{i+1} = svy\bar{v}t, p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

С л у ч а й 4: $p_i = sat, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y, z \in S$.

С л у ч а й 5: $p_i = sat, p_{i+1} = suy\bar{u}t, p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y \in S$.

С л у ч а й 6: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = svy\bar{v}t, p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

С л у ч а й 7: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = svy\bar{v}t, p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

С л у ч а й 8: $p_i = sux\bar{u}t, p_{i+1} = svy\bar{v}t, p_{i+2} = swz\bar{w}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$.

Разберем каждый из них подробнее.

С л у ч а й 1: $p_i = sxt, p_{i+1} = syt, p_{i+2} = szt$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$. Построим новый путь Q' , который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2} . Поскольку $\delta(x, y) \vee \delta(y, z) \geq \delta(x, z)$, имеем $e(Q) \geq e(Q')$. При этом $i(Q') < i(Q)$.

С л у ч а й 2: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y \in S$. Построим новый путь Q' , который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2} . Поскольку $\delta(x, y) \vee \delta(y, c) \geq \delta(x, c)$, имеем $e(Q) \geq e(Q')$. При этом $i(Q') < i(Q)$.

С л у ч а й 3: $p_i = svx\bar{v}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$. Построим новый путь Q' , который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2} . Поскольку $\delta(x, y) \vee \delta(y, c) \vee \delta(z, d) \geq \delta(x, c) \vee \delta(z, d)$, имеем $e(Q) \geq e(Q')$. При этом $i(Q') < i(Q)$.

С л у ч а й 4: $p_i = sat$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y, z \in S$. Построим новый путь Q' , который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2} . Поскольку $\delta(y, c) \vee \delta(y, z) \geq \delta(z, c)$, имеем $e(Q) \geq e(Q')$. При этом длина пути Q' меньше длины пути Q .

С л у ч а й 5: $p_i = sat$, $p_{i+1} = suy\bar{u}t$, $p_{i+2} = sat$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $y \in S$. Построим новый путь Q' , который повторяет Q с той лишь разницей, что в нем нет вершин p_{i+1} и p_{i+2} . Очевидно, что $e(Q) \geq e(Q')$. При этом $i(Q') < i(Q)$.

С л у ч а й 6: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = svz\bar{v}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$. Построим новый путь Q' , который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2} . Поскольку $\delta(x, d) \vee \delta(y, c) \vee \delta(y, z) \geq \delta(x, d) \vee \delta(z, c)$, имеем $e(Q) \geq e(Q')$. При этом длина пути Q' меньше длины пути Q .

С л у ч а й 7: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = suz\bar{u}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$. Построим новый путь Q' , который повторяет Q с той лишь разницей, что от p_i сразу переходим к p_{i+2} при помощи правила 1. Поскольку $\delta(x, d) \vee \delta(y, c) \vee \delta(y, c) \vee \delta(z, d) \geq \delta(x, z)$, имеем $e(Q) \geq e(Q')$. При этом длина пути Q' меньше длины пути Q .

С л у ч а й 8: $p_i = sux\bar{u}t$, $p_{i+1} = svy\bar{v}t$, $p_{i+2} = swz\bar{w}t$ для некоторых $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$. Вес этих двух ребер равен $\delta(x, d) \vee \delta(y, c) \vee \delta(y, d) \vee \delta(z, c)$. Построим новый путь Q' , который повторяет Q с той лишь разницей, что последовательность ребер $p_i \xleftrightarrow{4} p_{i+1} \xleftrightarrow{4} p_{i+2}$ заменена на следующую последовательность:

$$sux\bar{u}t \xleftrightarrow{1} suz\bar{u}t \xleftrightarrow{2} sat \xleftrightarrow{1} sbt \xleftrightarrow{3} swx\bar{w}t \xleftrightarrow{1} swz\bar{w}t .$$

Вес новой последовательности равен $\delta(x, z) \vee \delta(z, c) \vee \delta(a, b) \vee \delta(x, d)$. Так как $\delta(x, d) \vee \delta(d, y) \vee \delta(y, c) \vee \delta(c, z) \geq \delta(x, z)$, $\delta(x, d) \vee \delta(c, y) \vee \delta(y, d) \vee \delta(z, c) \geq \delta(x, d) \vee \delta(c, d) \vee \delta(z, c)$ и $\delta(c, d) \geq \delta(a, b)$, имеем $\delta(x, d) \vee \delta(d, y) \vee \delta(y, c) \vee \delta(c, z) \geq \delta(z, x) \vee \delta(z, c) \vee \delta(a, b) \vee \delta(x, d)$. Следовательно, $e(Q) \geq e(Q')$. При этом $\sum_{p_i \in Q'} w_v(p_i) < \sum_{p_i \in Q} w_v(p_i)$.

Будем последовательно, раз за разом, проделывать эти преобразования. Поскольку число $\sum_{p_i \in Q} w_v(p_i)$ всегда неотрицательно, начиная с некоторого момента, случай 8 станет невозможным. После этого в каждом случае мы будем либо уменьшать $i(Q)$, либо уменьшать длину пути. Поэтому в итоге мы построим путь \bar{Q} такой, что $e(Q) \geq e(\bar{Q})$ и $i(\bar{Q}) = 0$. Как уже было отмечено выше, из этого следует, что \bar{Q} удовлетворяет условию M1.

В дальнейшем будем считать, что Q уже удовлетворяет условию M1. Нетрудно видеть, что всякий $k(Q)$ -эквивалентный путь Q' также удовлетворяет условию M1, причем $k(Q') = k(Q)$. Рассмотрим далее четыре следующих преобразования:

1. Всюду, где это возможно, сокращаем ребра типа 1.
2. Всюду, где это возможно, заменяем подпуть вида $svx\bar{v}t \xleftrightarrow{\quad} svy\bar{v}t \xleftrightarrow{\quad} svz\bar{v}t$ (здесь $s, t \in \tilde{S}^1$ и $x, y, z \in S$) на подпуть вида $svx\bar{v}t \xleftrightarrow{\quad} svz\bar{v}t$.
3. Ищем подпуть вида $svx\bar{v}t \xleftrightarrow{\quad} svy\bar{v}t \xleftrightarrow{\quad} sat$ и заменяем его отрезком пути вида $svx\bar{v}t \xleftrightarrow{\quad} suc\bar{u}t \xleftrightarrow{\quad} sat$.
- Ищем подпуть вида $svx\bar{v}t \xleftrightarrow{\quad} swy\bar{w}t \xleftrightarrow{\quad} sbt$ и заменяем его отрезком пути вида $svx\bar{v}t \xleftrightarrow{\quad} swd\bar{w}t \xleftrightarrow{\quad} sbt$.

Делаем аналогичные преобразования для подпутьей вида $sat \longleftrightarrow suy\bar{u}t \longleftrightarrow svx\bar{v}t$ и $sbt \longleftrightarrow swy\bar{w}t \longleftrightarrow svx\bar{v}t$.

4. Заменяем путь на ему $k(Q)$ -эквивалентный.

Будем последовательно применять эти преобразования. Поскольку при преобразованиях 1 и 2 уменьшается длина пути, а преобразование 3 в каждом пути может быть выполнено лишь конечное число раз, рано или поздно получится такой путь P , у которого все его $k(P)$ -эквивалентные пути обладают свойствами М1–М4. Тогда $P \in M(p, q)$. Нетрудно видеть, что при этом $e(P) \leq e(Q)$. Лемма доказана. \square

Лемма 2 вытекает теперь из лемм 3 и 4. \square

Лемма 5. Если $p, q \in S$, то для любого $P \in H(p, q)$ выполняется $e(P) \geq \delta(p, q)$.

Доказательство. В силу леммы 2 достаточно заметить, что если $p, q \in S$, то $M(p, q)$ содержит всего один путь, состоящий из двух вершин p и q с ребром между ними веса $\delta(p, q)$. Действительно, из условия М1 следует, что в любом пути из $M(p, q)$ нет ребер типа 2, 3, 4. Если же в некотором пути из p в q есть несколько ребер типа 1, то все они очевидным образом сокращаются до одного. \square

Этап 3. Положим $\tilde{\delta}(p, q) = \bigwedge \{e(Q) \mid Q \in H(p, q)\}$. В частности имеем $\tilde{\delta}(p, q) = 1$, если $H(p, q) = \emptyset$. С учетом леммы 2 отображение $\tilde{\delta}$ определено корректно.

Лемма 6. Отображение $\tilde{\delta} : \tilde{S} \times \tilde{S} \rightarrow \mathcal{P}$ является полугрупповой функцией расстояния, причем $\tilde{\delta} \mid S \times S = \delta$ и $\tilde{\delta}(a, uc\bar{u}) = \tilde{\delta}(ud\bar{u}, vc\bar{v}) = \tilde{\delta}(vd\bar{v}, wc\bar{w}) = \tilde{\delta}(wd\bar{w}, b) = 0$.

Доказательство. Из определения графа $G = (\tilde{S}, E)$ вытекает, что $(a, 0, uc\bar{u}), (ud\bar{u}, 0, vc\bar{v}), (vd\bar{v}, 0, wc\bar{w}), (wd\bar{w}, 0, b) \in E$, поэтому $\tilde{\delta}(a, uc\bar{u}) = \tilde{\delta}(ud\bar{u}, vc\bar{v}) = \tilde{\delta}(vd\bar{v}, wc\bar{w}) = \tilde{\delta}(wd\bar{w}, b) = 0$.

Далее, пусть $p, q \in S$. Тогда $\tilde{\delta}(p, q) = \bigwedge \{e(Q) \mid Q \in H(p, q)\} = \bigwedge \{e(Q) \mid Q \in M(p, q)\}$. Из леммы 5 следует, что $M(p, q)$ содержит один путь $p \xleftrightarrow{\delta(p, q)} q$, поэтому $\tilde{\delta}(p, q) = \delta(p, q)$.

По определению для любого $p \in \tilde{S}$ имеем тривиальный путь $p \xleftrightarrow{0} p$ и значит $\tilde{\delta}(p, p) = 0$. Симметричность $\tilde{\delta}$ очевидна. Проверим неравенство треугольника $\tilde{\delta}(p, q) \leq \tilde{\delta}(p, r) \vee \tilde{\delta}(r, q)$ для любых $p, q, r \in \tilde{S}$. Действительно, достаточно рассмотреть случай, когда $\tilde{\delta}(p, r) \neq 1$ и $\tilde{\delta}(r, q) \neq 1$, т. е. множества $H(p, r)$ и $H(r, q)$ непусты. Из двух путей $Q_1 \in H(p, r)$ и $Q_2 \in H(r, q)$ легко составить путь $Q \in H(p, q)$, причем $e(Q) = e(Q_1) \vee e(Q_2)$. Поэтому, используя дистрибутивность \bigwedge , мы получаем $\tilde{\delta}(p, r) \vee \tilde{\delta}(r, q) = \bigwedge \{e(Q') \mid Q' \in H(p, r)\} \vee \bigwedge \{e(Q'') \mid Q'' \in H(r, q)\} = \bigwedge \{e(Q') \vee e(Q'') \mid Q' \in H(p, r), Q'' \in H(r, q)\} \geq \bigwedge \{e(Q) \mid Q \in H(p, q)\} = \tilde{\delta}(p, q)$. Таким образом, мы проверили, что $\tilde{\delta}$ есть функция расстояния на \tilde{S} .

Осталось проверить, что для любых $p, q, r \in \tilde{S}$ выполнено $\tilde{\delta}(pr, qr) \leq \tilde{\delta}(p, q)$ и $\tilde{\delta}(rp, rq) \leq \tilde{\delta}(p, q)$. Действительно, из определения графа $G = (\tilde{S}, E)$ следует, что для произвольного ребра (p, e, q) и $r \in \tilde{S}$ тройка (pr, e, qr) снова является ребром, поэтому для любого $Q \in H(p, q)$ существует $P \in H(pr, qr)$, причем $e(Q) = e(P)$. Следовательно, либо $\tilde{\delta}(p, q) = 1 \geq \tilde{\delta}(pr, qr)$, либо $\tilde{\delta}(p, q) = \bigwedge \{e(Q) \mid Q \in H(p, q)\} \geq \bigwedge \{e(Q) \mid Q \in H(pr, qr)\} = \tilde{\delta}(pr, qr)$. Неравенство $\tilde{\delta}(rp, rq) \leq \tilde{\delta}(p, q)$ проверяется аналогично. Доказательство завершено. \square

Доказательство предложения 2. Построенная в данном разделе полугруппа удовлетворяет заключению леммы 6. Равенства $\tilde{\delta}(a, uc\bar{u}) = \tilde{\delta}(ud\bar{u}, vc\bar{v}) = \tilde{\delta}(vd\bar{v}, wc\bar{w}) = \tilde{\delta}(wd\bar{w}, b) = 0$ влекут включения $(a, uc\bar{u}), (ud\bar{u}, vc\bar{v}), (vd\bar{v}, wc\bar{w}), (wd\bar{w}, b) \in O_{\tilde{\delta}}(0)$. Вместе с тем, очевидны включения $(uc\bar{u}, ud\bar{u}), (vc\bar{v}, vd\bar{v}), (wc\bar{w}, wd\bar{w}) \in \Theta(c, d)$ в \tilde{S} . Это означает, что $(a, b) \in O_{\tilde{\delta}}(0) \vee \Theta(c, d)$ в \tilde{S} , т. е. полугруппа \tilde{S} с построенной на ней функцией расстояния $\tilde{\delta} : \tilde{S} \times \tilde{S} \rightarrow \mathcal{P}$ является искомой. \square

3. Доказательство основной теоремы

Данный раздел является заключительным. В нем мы показываем, как построенная в п. 2⁰ разд. 2 конструкция расширения полугруппы и заданной на ней функции расстояния, применяется в доказательстве основного результата.

Лемма 7. Пусть элементы $a, b, c \in \mathcal{P}$ таковы, что $c \leq a \vee b$. Тогда существуют полугруппа с нулевым умножением U , полугрупповая функция расстояния $\delta : U \times U \rightarrow \mathcal{P}$ и элементы $x, y, u, v, w \in U$ такие, что $\delta(x, u) = \delta(v, w) = a$, $\delta(u, v) = \delta(w, y) = b$ и $\delta(x, y) = c$.

Доказательство. В качестве U возьмем шестиэлементную полугруппу с нулевым умножением $\{x, y, u, v, w, 0\}$. Определим $\delta : U \times U \rightarrow \mathcal{P}$, полагая

$$\delta^{-1}(a) = \{(x, u), (v, w), (u, x), (w, v)\},$$

$$\delta^{-1}(b) = \{(u, v), (w, y), (v, u), (y, w)\},$$

$$\delta^{-1}(c) = \{(x, y), (y, x)\},$$

$$\delta^{-1}(a \vee c) = \{(u, y), (y, u)\},$$

$$\delta^{-1}(b \vee c) = \{(x, w), (w, x)\},$$

$$\delta^{-1}(0) = \Delta,$$

$\delta^{-1}(a \vee b)$ — множество всех остальных пар.

Легко проверить, что δ есть полугрупповая функция расстояния, а для элементов x, y, u, v, w выполняются все требуемые равенства. \square

Лемма 8. Существуют полугруппа T и полугрупповая функция расстояния $\delta : T \times T \rightarrow \mathcal{P}$ такие, что

1) δ — сюръективно;

2) Для любой тройки $(a, b, c) \in \mathcal{P}$ с условием $c \leq a \vee b$ существуют $x, y, u, v, w \in T$ такие, что $\delta(x, u) = \delta(v, w) = a$, $\delta(u, v) = \delta(w, y) = b$ и $\delta(x, y) = c$.

Доказательство. Рассмотрим множество X всех троек $(a, b, c) \in \mathcal{P}^3$ со свойством $c \leq a \vee b$. По каждой тройке $(a, b, c) \in X$ построим полугруппу и полугрупповую функцию расстояния, удовлетворяющие условию леммы 7; мы обозначим их $U_{(a,b,c)}$ и $\delta_{(a,b,c)}$ соответственно. Рассмотрим прямое произведение $\prod_{(a,b,c) \in X} U_{(a,b,c)}$. Выберем в нем подполугруппу T , состоящую из элементов, координаты которых отличаются от нуля лишь в конечном числе случаев. Определим отображение $\delta : T \times T \rightarrow \mathcal{P}$, полагая $\delta(x, y) = \bigvee_{(a,b,c) \in X} \delta_{(a,b,c)}(x_{(a,b,c)}, y_{(a,b,c)})$. Очевидно, δ сюръективно и является полугрупповой функцией расстояния. \square

Доказательство теоремы. Пусть L — дистрибутивная алгебраическая решетка, множество \mathcal{P} компактных элементов которой есть подрешетка с единицей. Тогда \mathcal{P} как решетка дистрибутивна и L изоморфна ее решетке идеалов $J(\mathcal{P})$. Требуется построить полугруппу S' и функцию δ' , для которых выполняются условия предложения 1.

Сначала возьмем полугруппу T и функцию δ из леммы 8 и рассмотрим вполне упорядоченное множество четверок $\{(x, y, z, t) \in T^4 \mid \delta(x, y) \leq \delta(z, t)\} = \{(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, t_\gamma) \mid 0 \leq \gamma < \chi\}$. Для каждого ординала γ построим полугруппу S_γ и функцию δ_γ следующим образом. Положим $S_0 = T$ и $\delta_0 = \delta$. Для непердельного ординала γ и соответствующей четверки $(x_{\gamma-1}, y_{\gamma-1}, z_{\gamma-1}, t_{\gamma-1}) \in S_{\gamma-1}^4$ с условием $\delta_{\gamma-1}(x_{\gamma-1}, y_{\gamma-1}) \leq \delta_{\gamma-1}(z_{\gamma-1}, t_{\gamma-1})$, используя предложения 2, определяем S_γ и δ_γ как расширение соответствующих $S_{\gamma-1}$ и $\delta_{\gamma-1}$. Если же γ предельный ординал, то полагаем

$$S_\gamma = \bigcup_{0 \leq \zeta < \gamma} S_\zeta \text{ и } \delta_\gamma = \bigcup_{0 \leq \zeta < \gamma} \delta_\zeta.$$

В итоге получим возрастающие по включению цепи полугрупп S_γ и функций расстояния δ_γ на этих полугруппах. Положим

$$S^{(1)} = \bigcup_{0 \leq \gamma < \chi} S_\gamma \quad \text{и} \quad \delta^{(1)} = \bigcup_{0 \leq \gamma < \chi} \delta_\gamma.$$

Ясно, что $T \subseteq S^{(1)}$ и $\delta \subseteq \delta^{(1)}$. К тому же пара $(S^{(1)}, \delta^{(1)})$ обладает тем свойством, что для любых пар $(x, y), (z, t) \in T \times T$ с условием $\delta(x, y) \leq \delta(z, t)$ выполняется $(x, y) \in O_{\delta^{(1)}}(0) \vee \Theta_{S^{(1)}}(z, t)$.

Далее построим цепочку таких расширений

$$(T, \delta) \subseteq (S^{(1)}, \delta^{(1)}) \subseteq (S^{(2)}, \delta^{(2)}) \subseteq \dots$$

и положим

$$S' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \quad \text{и} \quad \delta' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}.$$

По построению для любых пар $(x, y), (z, t) \in S' \times S'$ с неравенством $\delta'(x, y) \leq \delta'(z, t)$ имеем $(x, y) \in O_{\delta'}(0) \vee \Theta_{S'}(z, t)$, т. е. выполнено условие 3) предложения 1. Убедимся, что для S' и δ' выполнены остальные условия. Сюръективность δ' следует из леммы 8. Пусть $a, b \in \mathcal{P}$, $x, y \in S'$ такие, что $\delta'(x, y) \leq a \vee b$. Тогда по лемме 8 существуют элементы $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in S \subset S'$, для которых $\delta'(\bar{x}, \bar{u}) = \delta'(\bar{v}, \bar{w}) = a$, $\delta'(\bar{u}, \bar{v}) = \delta'(\bar{w}, \bar{y}) = b$ и $\delta'(\bar{x}, \bar{y}) = \delta'(x, y)$. Из первой группы равенств следует, что $\Theta_{S'}(\bar{x}, \bar{y}) \subseteq O_{\delta'}(a) \vee O_{\delta'}(b)$. Это вместе с неравенством $\delta'(\bar{x}, \bar{y}) \geq \delta'(x, y)$ влечет $(x, y) \in O_{\delta'}(0) \vee \Theta_{S'}(\bar{x}, \bar{y}) \subseteq O_{\delta'}(a) \vee O_{\delta'}(b)$. Таким образом, для (S', δ') выполнены все условия предложения 1. Отсюда заключаем, что $L \cong J(\mathcal{P}) \cong [O_{\delta'}(0), S' \times S'] \cong \text{Con } S'/O_{\delta'}(0)$, т. е. $S'/O_{\delta'}(0)$ — искомая полугруппа. Теорема доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2-х т. М.: Мир, 1972. Т. 1. 285 с.; Т. 2. 422 с.
2. Freese R., Lampe W. A., Taylor W. Congruence lattices of algebras of fixed similarity type. I // Pacific J. Math. 1979. Vol. 82. С. 59–68.
3. Grätzer G. General Lattice Theory. 2nd ed. New appendices by the author with B. A. Davey, R. Freese, B. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H. A. Priestley, H. Rose, E. T. Schmidt, F. Wehrung, and R. Wille, Basel: Birkhäuser Verlag, 1998. 663 p.
4. Grätzer G., Schmidt E. T. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras // Acta Sci. Math. (Szeged). 1963. Vol. 24. P. 34–59.
5. Lampe W. A. Congruence lattices of algebras of fixed similarity type. II // Pacific J. Math. 1982. Vol. 103. С. 475–508.
6. Lampe W. A. Results and problems on congruence lattice representations // Algebra Univers. 2006. Vol. 55. С. 127–135.
7. Repnitskiĭ V., Tůma J. Intervals in subgroup lattices of countable locally finite groups // Algebra Univers. 2008. Vol. 59. С. 49–71.
8. Ružička P., Tůma J., Wehrung F. Distributive congruence lattices of congruence-permutable algebras // J. Algebra. 2007. Vol. 311, no. 1. С. 96–116.
9. Schmidt E. T. The ideal lattice of a distributive lattice with 0 is the congruence lattice of a lattice // Acta Sci. Math. (Szeged). 1981. Vol. 43. С. 153–168.
10. Tůma J. Semilattice-valued measures // Contr. Gen. Alg. Klagenfurt, 2008. Vol. 18. P. 199–210.
11. Wehrung F. A solution to Dilworth's congruence lattice problem // Advances Math. 2007. Vol. 216. P. 610–625.

Поступила 22.12.2009

Репницкий Владимир Брониславович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького
e-mail: vladimir.repnitskii@usu.ru

Попович Александр Леонидович
магистрант
Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького
e-mail: tei_la@mail.ru

УДК 517.977

ОДИН ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ¹

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Развивается ранее предложенный геометрический метод исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Метод позволяет получать как точные решения уравнений, так и точные решения некоторых начальных и краевых задач. Получено обоснование соответствующего геометрического формализма. Для уравнения нестационарной осесимметричной фильтрации построено точное решение с заданным краевым режимом, получен фронт фильтрации.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, точные решения, уравнение фильтрации.

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. A geometric method for solving nonlinear partial differential equations.

A geometric method for investigating nonlinear partial differential equations, which was proposed earlier, is developed. The method allows one to obtain both exact solutions of equations and exact solutions of initial-value and boundary-value problems. The corresponding geometric formalism is substantiated. For a nonstationary axisymmetric filter equation, an exact solution with a given boundary regime is constructed and the filter front is obtained.

Keywords: nonlinear partial differential equations, exact solutions, filter equation.

Keywords: nonlinear differential equations in partial derivatives, exact solutions, filtration equation.

Введение

В статье развивается ранее предложенный геометрический подход к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для уравнения нестационарной осесимметричной фильтрации рассмотрена задача, поставленная в [1], построено точное решение с заданным краевым режимом, получен фронт фильтрации.

Пусть задано нелинейное уравнение в частных производных

$$L(x_i, u, u_i^{(1)}, u_{ij}^{(2)}, \dots, u_{i_1 \dots i_m}^{(m)}) = 0, \tag{0.1}$$

где $\{x_i\}$ ($i = 1, \dots, n$) — исходные независимые переменные уравнения; $u \in \mathbb{C}^m$ — неизвестная функция (решение уравнения); $u_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)}$ — частные производные функции u (верхний индекс указывает порядок производной, нижние индексы — номера независимых переменных, по которым берется производная); m — порядок уравнения ($1 \leq k \leq m$).

Пусть в отмеченном классе функций u уравнения (0.1) существует решение, хотя бы локальное. Предполагается, что существует замена переменных

$$\begin{cases} \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi, \\ \alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1, \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_{n-1}, \end{cases}$$

¹Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН №17 “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” при поддержке УрО РАН (проект 09-П-1-1006) и программы фундаментальных исследований, выполняемой в УрО РАН совместно с учеными СО РАН и ДВО РАН (проект 09-С-1-1004).

такая, что после перехода к новым переменным получаем $u = u(\psi)$. Якобиан преобразования отличен от нуля в некоторой области пространства \mathbb{R}^n , т. е. в этой области существует обратное преобразование $x_i = x_i(\psi, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ ($i = 1, \dots, n$). Тогда $\psi(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$ является поверхностью уровня функции u .

Если в уравнении (0.1) перейти к новым переменным, существование которых пока только предполагается, то

$$u_i^{(1)} = u' \psi_i, \quad u_{ij}^{(2)} = u'' \psi_i \psi_j + u' \psi_{ij}, \quad \dots$$

$$u_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}}^{(m)} = \frac{\partial^{(m-1)}(u' \psi_i)}{\partial x_i \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{m-1}}} = (u' + \psi_i)^{(m-1)}. \quad (0.2)$$

Здесь и далее штрих ($'$) означает дифференцирование по переменной ψ ; $\psi_i = \partial \psi / \partial x_i$; $\psi_{ij} = \partial^2 \psi / \partial x_i \partial x_j$. В дальнейшем также нижний индекс у функции ψ указывает на переменную, по которой берется производная, или на номер переменной, если независимые переменные пронумерованы.

Для широкого класса уравнений (0.1) полученное после замены переменных уравнение можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^N A_k(u, u', u'', \dots, u_\psi^{(m)}) B_k(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = 0, \quad u_\psi^{(m)} = \frac{\partial^m u}{\partial \psi^m}, \quad N \neq \infty. \quad (0.3)$$

Получение преобразования координат, существование которого предполагается, исследование и решение уравнения (0.3) в новых переменных имеет свои особенности и общие черты в зависимости от того присутствует ли в (0.3) один член B_k , содержащий производные функции ψ только первого порядка (не уменьшая общности можно считать, что $k = 1$), или два члена B_1, B_2 , содержащих производные функции ψ только первого порядка, или более двух членов, содержащих производные функции ψ только первого порядка.

В данной статье мы подробно остановимся на случае, когда в уравнении (0.3) есть два слагаемых, содержащих сомножители B_k , зависящие только от независимых переменных и от первых производных функции ψ , вида $B_1 = B_1(x_1, \dots, x_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$, $B_2 = B_2(x_1, \dots, x_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$.

1. Постановка задачи

Как отмечено выше, мы предполагаем, что $u = u(\psi)$. Выпишем условия, которым должно удовлетворять преобразование координат

$$x_i = x_i(\psi, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

чтобы это имело место

$$\sum_1^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \psi} = u_\psi, \quad u(\psi) \neq 0, \quad (1.2)$$

$$\sum_1^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Решая систему (1.2) относительно производных от u по x_i , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_\psi \frac{A_{1,i}}{D}, \quad D \neq 0. \quad (1.3)$$

Здесь D — определитель системы (1.2), $A_{1,i}$ — алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \psi} & \frac{\partial x_2}{\partial \psi} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \psi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (1.3) следует, что $\psi_i = A_{1,i}/D$ и

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \psi} = 1, \quad \Lambda_{j+1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n-1). \quad (1.4)$$

Таким образом, преобразование координат, существование которого предполагается, должно удовлетворять соотношениям (1.4).

Утверждение 1. *Якобиан преобразования координат (1.1), удовлетворяющего условиям (1.4), отличен от нуля.*

Доказательство. Докажем это утверждение методом от противного.

Предположим, что якобиан

$$I = \begin{vmatrix} x_{1\psi} & x_{1\alpha_1} & \cdots & x_{1\alpha_{n-1}} \\ x_{2\psi} & x_{2\alpha_1} & \cdots & x_{2\alpha_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n\psi} & x_{n\alpha_1} & \cdots & x_{n\alpha_{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда столбцы — линейно зависимы:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \psi} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.5)$$

где a_j не все равны нулю. Подставив выражения (1.5) в соотношение для Λ_1 (см. (1.4)) и перегруппировав слагаемые, получим

$$\Lambda_1 = 1 = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right) = 0.$$

Имеем противоречие. Следовательно, $I \neq 0$. □

Обратимся к соотношению (0.3). Подчеркнем, что в этом соотношении после перехода к новым независимым переменным все A_k зависят только от переменной ψ :

$$A_k = h_k(\psi) \quad (k = 1, \dots, N), \quad (1.6)$$

B_k , вообще говоря, могут зависеть и от других (новых) независимых переменных

$$B_k(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m}) = g_k(\psi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}). \quad (1.7)$$

Предположим, что в уравнении (0.3) по крайней мере одно B_k отлично от нуля. Не уменьшая общности можем считать, что $B_1 \neq 0$. Тогда, поделив все слагаемые в (0.3) на B_1 и используя

введенные в (1.6) и в (1.7) новые обозначения функций, сведем соотношение (0.3) к следующему:

$$h_1 + \sum_{k=2}^N h_k \lambda_{k-1}(\psi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) = 0, \quad \lambda_{k-1} = \frac{g_k}{g_1}. \quad (1.8)$$

Не будем забывать, что в первоначальных переменных $\lambda_{k-1} = B_k/B_1$, $h_k = A_k$.

Предположим также, что $h_2 \neq 0$, тогда, поделив все слагаемые в выражении (1.8) на $h_2(\psi)$, получим

$$\lambda_1 = - \left(\frac{h_1(\psi)}{h_2(\psi)} + S \right), \quad S = \sum_{k=3}^N \frac{h_k}{h_2} \lambda_{k-1}(\psi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}). \quad (1.9)$$

Подчеркнем, что функция λ_1 равна сумме двух функций, одна из которых зависит только от переменной ψ , другая зависит, вообще говоря, от всех новых независимых переменных.

Предположим, что соотношение (1.9) можно представить в виде

$$\lambda_1 = \mu_1(\psi) - \frac{h_1(\psi)}{h_2(\psi)} = f_1(\psi), \quad (1.10)$$

где

$$\mu_1(\psi) + \sum_{k=3}^N \frac{h_k}{h_2} \lambda_{k-1} = 0, \quad (1.11)$$

$\mu_1(\psi)$ — произвольная функция. По структуре (виду) соотношение (1.11) совпадает с соотношением (1.8), только под знаком суммы на одно слагаемое меньше. Если под знаком суммы не все h_k/h_2 равны нулю, то не уменьшая общности положим, что $h_3/h_2 \neq 0$, и поделим на это выражение, тогда получим

$$\lambda_2 = - \left(\frac{\mu_1(\psi)h_2(\psi)}{h_3(\psi)} + S_1 \right), \quad S_1 = \sum_{k=4}^N \frac{h_k}{h_3} \lambda_{k-1}(\psi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}). \quad (1.12)$$

Положим снова

$$\lambda_2 = \mu_2(\psi) - \frac{\mu_1(\psi)h_2(\psi)}{h_3(\psi)} = f_2(\psi), \quad \mu_2(\psi) + \sum_{k=4}^N \frac{h_k}{h_3} \lambda_{k-1} = 0. \quad (1.13)$$

Очевидно, продолжение описанной выше процедуры через конечное число шагов приведет к системе соотношений

$$\lambda_i = f_i(\psi) \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (1.14)$$

$$h_1(\psi) + \sum_{k=2}^N h_k(\psi) f_{k-1}(\psi) = 0. \quad (1.15)$$

Выпишем полученные соотношения (1.14), (1.15) в первоначальных переменных

$$\frac{B_{i+1}(x_i, \psi_i, \psi_{ij}, \dots, \psi_{i_1 i_2 \dots i_m})}{B_1(x_1, \dots, x_n, \psi_1, \dots, \psi_n)} = f_i(\psi) \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (1.16)$$

$$A_1(u, u', u'', \dots, u_\psi^{(m)}) + \sum_{k=2}^N A_k(u, u', u'', \dots, u_\psi^{(m)}) f_{k-1}(\psi) = 0. \quad (1.17)$$

Система (1.16) — система уравнений в частных производных, которую должны обращать в тождество функции $\psi = \psi(x_1, \dots, x_n)$, $f_i = f_i(\psi)$ ($i = 1, \dots, n-1$). Если функции $f_i = f_i(\psi)$ ($i = 1, \dots, n-1$) определены, то уравнение (1.17) становится обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) для определения функции $u(\psi)$. Как решить систему (1.16), (1.17) и определить неизвестные функции будет показано ниже.

2. Формулы преобразования координат

В предыдущем разделе предполагалось, что новые независимые переменные, обладающие нужными нам свойствами, известны. На самом деле мы не знаем вида поверхности уровня $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}$ и не знаем переменных α_j , $j = 1, 2, \dots, n - 1$. В этом разделе будет получено преобразование (1.1).

Обратимся к системе (1.16). Если нам удастся определить такие функции f_i , $i = 1, \dots, n - 1$, при которых система (1.16) с неизвестной функцией ψ будет совместна, то из этой системы будет определена функция $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Далее, решив ОДУ (1.17), в полученную функцию $u(\psi)$ подставим функцию $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и таким образом найдем решение уравнения (0.1) в первоначальных переменных.

Итак, рассматриваем случай, когда среди функций B_k , $k = 1, 2, \dots, N$, только две зависят от x_i и ψ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и не зависят от производных функции ψ порядка выше первого. Не уменьшая общности можно считать, что это функции B_1 и B_2 . Остальные выражения B_k , $k = 3, \dots, N$, содержат производные функции ψ выше первого порядка. Тогда выписанное ниже уравнение является уравнением в частных производных первого порядка относительно функции ψ :

$$B_2(x_i, \psi_i) - f_1(\psi)B_1(x_i, \psi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Выпишем для уравнения (2.1) систему уравнений характеристик [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= \frac{\partial B_2}{\partial \psi_i} - f_1 \frac{\partial B_1}{\partial \psi_i}, & \frac{d\psi}{ds} &= \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\frac{\partial B_2}{\partial \psi_i} - f_1 \frac{\partial B_1}{\partial \psi_i} \right), \\ \frac{d\psi_i}{ds} &= f_1' \psi_i B_1 - \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_i} - f_1 \frac{\partial B_1}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рассмотрим два возможных случая.

С л у ч а й 1:

$$\sum_{i=1}^n \psi_i \left(\frac{\partial B_2}{\partial \psi_i} - f_1 \frac{\partial B_1}{\partial \psi_i} \right) \neq 0.$$

Перепишем систему уравнений характеристик, выбрав в качестве независимой переменной ψ :

$$\frac{dx_i}{d\psi} = \left(\frac{\partial B_2}{\partial \psi_i} - f_1 \frac{\partial B_1}{\partial \psi_i} \right) / \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\frac{\partial B_2}{\partial \psi_i} - f_1 \frac{\partial B_1}{\partial \psi_i} \right) = V_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.3)$$

$$\frac{d\psi_i}{d\psi} = \left[f_1' \psi_i B_1 - \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_i} - f_1 \frac{\partial B_1}{\partial x_i} \right) \right] / \sum_{i=1}^n \psi_i \left(\frac{\partial B_2}{\partial \psi_i} - f_1 \frac{\partial B_1}{\partial \psi_i} \right) = W_i. \quad (2.4)$$

Решив систему (2.3), (2.4), определим $x_i = x_i(\psi, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_n})$, $\psi_i = \psi_i(\psi, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$, где $\{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_n}\}$ — $(2n - 1)$ произвольных постоянных.

Далее будем считать, что $c_j = c_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, и $c_{k_i} = c_{k_i}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$. В результате получим

$$\psi_i = \psi_i(\psi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}), \quad x_i = x_i(\psi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}), \quad (2.5)$$

причем второе из соотношений (2.5) будет искомым преобразованием координат, если мы дополнительно потребуем, чтобы полученные функции $x_i = x_i(\psi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ удовлетворяли соотношениям (1.4). Условий меньше, чем неизвестных функций, поэтому часть неизвестных функций остаются произвольными и могут быть использованы для удовлетворения начальных или краевых условий при решении соответствующих задач для уравнения (0.1).

С л у ч а й 2:

$$\sum_{i=1}^n \psi_i \left(\frac{\partial B_2}{\partial \psi_i} - f_1 \frac{\partial B_1}{\partial \psi_i} \right) = 0.$$

Решая систему (2.2), находим $x_i = x_i(s, \psi, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_n})$, $\psi_i = \psi_i(s, \psi, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$, где также $\{c_1, \dots, c_{n-1}, c_{k_1}, \dots, c_{k_n}\} - (2n - 1)$ произвольных постоянных.

Положив $s = \alpha_1$, а $c_j = c_j(\psi, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$, $j = 1, 2, \dots, n - 1$, $c_{k_i} = c_{k_i}(\psi, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$, и потребовав выполнения условий (1.4), получим искомое преобразование координат.

Таким образом определяется переход от первоначальных независимых переменных к новым независимым переменным $\{\psi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ с некоторым произволом.

Если произвольные функции каким-то образом определены, то, исключив из полученного преобразования координат $x_i = x_i(\psi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$, переменные α_j , $j = 1, 2, \dots, (n - 1)$, получим вид функции $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Остается найти $u(\psi)$ и подставить в полученное решение известную функцию $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3. Сведение уравнения (0.3) к системе ОДУ

Чтобы получить ОДУ для функции $u(\psi)$, нужно найти все функции f_{k-1} , ($k = 2, \dots, N - 1$).

Первые производные функции $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и исходные независимые переменные $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ удовлетворяют системе уравнений характеристик.

Найдем значения всех остальных производных функции ψ вдоль характеристик, составив расширенную систему уравнений характеристик [3, случай 1].

Запишем систему уравнений (2.4)

$$\frac{d\psi_i}{d\psi} = W_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

более подробно:

$$\frac{d\psi_i}{d\psi} = \sum_{j=1}^n \psi_{ij} \frac{dx_j}{d\psi} = W_i \quad (3.1)$$

и, продифференцировав (3.1) по x_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$, получим систему ОДУ, описывающую изменение вторых производных функции ψ вдоль характеристик:

$$\frac{d\psi_{i\nu}}{d\psi} = \frac{\partial W_i}{\partial x_\nu} - \sum_{j=1}^n \psi_{ij} \frac{\partial W_j}{\partial x_\nu} = W_{i\nu}. \quad (3.2)$$

Проделав аналогичную процедуру с уравнениями (3.2), получим соотношения, описывающие изменение третьих производных вдоль характеристик. Таким образом, уравнение (2.1) задает поведение всех производных функции ψ вдоль характеристик.

Следует заметить, что расширенная система уравнений характеристик всегда имеет первые интегралы. Это дифференциальные следствия уравнения (2.1).

Но производные функции $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ входят также в соотношения

$$B_k - f_{k-1} B_1 = 0 \quad (k = 3, 4, \dots, N), \quad (3.3)$$

и соотношения (3.3) должны обращаться в тождество вдоль характеристик, т. е. быть первыми интегралами расширенной системы уравнений характеристик (2.3), (3.1), (3.2), \dots . Чтобы это выполнялось, достаточно найти f_{k-1} , $k = 3, 4, \dots, N$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{df_{k-1}}{d\psi} = \frac{1}{B_1} \left[\frac{dB_k}{d\psi} - f_{k-1} \frac{dB_1}{d\psi} \right]. \quad (3.4)$$

Таким образом, функции f_{k-1} , $k = 3, 4, \dots, N$, определены.

Функция f_1 может быть выбрана произвольно. При решении задачи, поставленной для уравнения (0.1) (начальная, краевая задача, задача о примыкании течений и т. д.), функция f_1 определяется из условий задачи.

Выбрав функцию f_1 и решив систему уравнений (2.3), (2.4), (3.2), \dots , (3.4), (1.17), определим функцию решения $u(\psi)$, а подставив вместо ψ функцию $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получение которой описано в разд. 2, найдем решение уравнения (0.1).

Далее на примере уравнения фильтрации продемонстрируем, как изложенный выше общий подход может быть использован при решении конкретной задачи. Заметим, что изложенное ниже исследование уравнения фильтрации не претендует, естественно, на получение полного описания процесса фильтрации. Отметим также, что под фронтом фильтрации в каждый фиксированный момент времени понимается граница, отделяющая область нулевого фона (давление газа в уравнениях Лейбензона равно нулю) от области возмущенного движения, порожденного некоторым краевым режимом [4].

4. Расширенная система уравнений характеристик для уравнения нестационарной фильтрации

Уравнение нестационарной фильтрации в осесимметричном случае имеет вид [1]:

$$-p_t r^2 + \frac{1}{\gamma}(r^2 p_r^2 + p_\varphi^2) + p(r^2 p_{rr} + p_{\varphi\varphi} + r p_r) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь p — давление, γ — показатель политропы, (r, φ) — полярные координаты, t — время. Нижние индексы у функции p указывают по какой переменной берется производная от функции p .

Ищем такие координаты (ψ, α, β) , при которых $p = p(\psi(r, \varphi, t))$. Тогда $\psi(r, \varphi, t) = \text{const}$ — поверхность уровня для p . В новых переменных имеем

$$p_t = p' \psi_t, \quad p_r = p' \psi_r, \quad p_\varphi = p' \psi_\varphi, \quad (4.2)$$

$$p_{rr} = p'' \psi_r^2 + p' \psi_{rr}, \quad p_{\varphi\varphi} = p'' \psi_\varphi^2 + p' \psi_{\varphi\varphi}.$$

Подставив (4.2) в (4.1), получим

$$-p' r^2 \psi_t + \left(\frac{1}{\gamma} p'^2 + p p'' \right) (r^2 \psi_r^2 + \psi_\varphi^2) + p p' (r \psi_r + r^2 \psi_{rr} + \psi_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (4.3)$$

Здесь (см. (0.3)):

$$B_1 = r^2 \psi_t, \quad B_2 = r^2 \psi_r^2 + \psi_\varphi^2, \quad B_3 = r \psi_r + r^2 \psi_{rr} + \psi_{\varphi\varphi},$$

$$A_1 = -p', \quad A_2 = \frac{1}{\gamma} p'^2 + p p'', \quad A_3 = p p'.$$

Пусть $B_1 = r^2 \psi_t \neq 0$. Поделив на B_1 , будем считать, что

$$\frac{r^2 \psi_r^2 + \psi_\varphi^2}{r^2 \psi_t} = f_1(\psi), \quad (4.4)$$

$$\frac{r^2 \psi_{rr} + \psi_{\varphi\varphi} + r \psi_r}{r^2 \psi_t} = f_2(\psi), \quad (4.5)$$

тогда уравнение (4.3) можно записать так:

$$-p' + \left(\frac{1}{\gamma} p'^2 + p p'' \right) f_1 + p p' f_2 = 0. \quad (4.6)$$

Перепишем уравнение (4.4) в виде

$$r^2\psi_r^2 + \psi_\varphi^2 - f_1(\psi)r^2\psi_t = 0. \quad (4.7)$$

Выпишем для уравнения (4.7) систему уравнений характеристик [2]:

$$\frac{dr}{ds} = 2r^2\psi_r, \quad \frac{d\varphi}{ds} = 2\psi_\varphi, \quad \frac{dt}{ds} = -f_1r^2, \quad \frac{d\psi}{ds} = 2r^2\psi_r^2 + 2\psi_\varphi^2 - f_1r^2\psi_t = f_1r^2\psi_t,$$

$$\frac{d\psi_r}{ds} = f_1'r^2\psi_t\psi_r - 2r(\psi_r^2 - f_1\psi_t), \quad \frac{d\psi_\varphi}{ds} = f_1'r^2\psi_t\psi_\varphi, \quad \frac{d\psi_t}{ds} = f_1'r^2\psi_t^2.$$

Пусть $f_1 \neq 0$. Выбрав в качестве независимой переменной ψ , имеем

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{2\psi_r}{f_1\psi_t}, \quad \frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{2\psi_\varphi}{f_1r^2\psi_t}, \quad \frac{dt}{d\psi} = -\frac{1}{\psi_t}, \quad (4.8)$$

$$\frac{d\psi_\varphi}{d\psi} = \frac{f_1'}{f_1}\psi_\varphi, \quad \frac{d\psi_t}{d\psi} = \frac{f_1'}{f_1}\psi_t, \quad \frac{d\psi_r}{d\psi} = \frac{f_1'}{f_1}\psi_r + \frac{2(f_1\psi_t - \psi_r^2)}{f_1r\psi_t}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим два случая.

С л у ч а й 1: $f_1 \neq \text{const}$. Решив систему уравнений (4.8), (4.9), найдем, что

$$\psi_t = c_1(\alpha, \beta)f_1(\psi), \quad \psi_\varphi = c_2(\alpha, \beta)f_1(\psi), \quad \text{sign}(\psi_t) = \text{sign}(f_1), \quad c_1 > 0, \quad (4.10)$$

$$\psi_r = \pm \frac{f_1}{r} \sqrt{r^2c_1 - c_2^2} = \pm \frac{f_1[2u + c_3(\alpha, \beta)]c_1^{1/2}}{\sqrt{(2u + c_3)^2 + c_2^2}};$$

$$t = -\frac{u}{c_1} + c_4(\alpha, \beta), \quad u = \int \frac{d\psi}{f_1}, \quad (4.11)$$

$$r = \sqrt{\frac{(2u + c_3)^2 + c_2^2}{c_1}}, \quad \varphi = \text{arctg} \frac{2u + c_3}{c_2} + c_5(\alpha, \beta).$$

С л у ч а й 2: Если $f_1 = \text{const}$, то

$$\psi_t = c_1(\alpha, \beta), \quad \psi_\varphi = c_2(\alpha, \beta), \quad u = \psi/f_1, \quad \text{sign}(c_1) = \text{sign}(f_1),$$

$$\psi_r = \frac{1}{r} \sqrt{f_1c_1r^2 - c_2^2}, \quad r = \sqrt{\frac{(2\psi + c_3)^2 + c_2^2}{f_1c_1}},$$

где $c_1(\alpha, \beta)$, $c_2(\alpha, \beta)$ — произвольные функции.

Соотношение для Λ_1 (см.(1.4)) для этого конкретного случая обращается в тождество, а соотношения для Λ_{j+1} , $j = 1, 2, \dots, n-1$, имеют вид

$$2c_1^2 \frac{\partial c_4}{\partial \nu} + 2c_1c_2 \frac{\partial c_5}{\partial \nu} + 2c_1 \frac{\partial c_3}{\partial \nu} - c_3 \frac{\partial c_1}{\partial \nu} = 0 \quad (\nu = \alpha, \beta), \quad (4.12)$$

где $c_1(\alpha, \beta) > 0$, $c_2(\alpha, \beta)$ — произвольная функция.

Продифференцируем (4.7) по каждой переменной. Получим

$$\begin{aligned} 2r^2\psi_r\psi_{rr} + 2\psi_\varphi\psi_{\varphi r} - f_1r^2\psi_{rt} &= -2r(\psi_r^2 - f_1\psi_t) + f_1'r^2\psi_t\psi_r, \\ 2r^2\psi_r\psi_{r\varphi} + 2\psi_\varphi\psi_{\varphi\varphi} - f_1r^2\psi_{t\varphi} &= f_1'r^2\psi_t\psi_\varphi, \\ 2r^2\psi_r\psi_{rt} + 2\psi_\varphi\psi_{t\varphi} - f_1r^2\psi_{tt} &= f_1'r^2\psi_t^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Выпишем систему уравнений, описывающую изменение вторых производных вдоль характеристик:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{r\varphi}}{d\psi} &= -\psi_{r\varphi} \left(\frac{2\psi_r}{f_1\psi_t} \right)_r - \psi_{\varphi\varphi} \left(\frac{2\psi_\varphi}{r^2 f_1\psi_t} \right)_r + \psi_{t\varphi} \left(\frac{1}{\psi_t} \right)_r + \psi_r \psi_\varphi \left(\frac{f'_1}{f_1} \right)' + \left(\frac{f'_1}{f_1} \right) \psi_{r\varphi}, \\ \frac{d\psi_{\varphi\varphi}}{d\psi} &= -\psi_{r\varphi} \left(\frac{2\psi_r}{f_1\psi_t} \right)_\varphi - \psi_{\varphi\varphi} \left(\frac{2\psi_\varphi}{r^2 f_1\psi_t} \right)_\varphi + \psi_{t\varphi} \left(\frac{1}{\psi_t} \right)_\varphi + \psi_\varphi^2 \left(\frac{f'_1}{f_1} \right)' + \left(\frac{f'_1}{f_1} \right) \psi_{\varphi\varphi}, \quad (4.14) \\ \frac{d\psi_{rr}}{d\psi} &= -\psi_{rr} \left(\frac{2\psi_r}{f_1\psi_t} \right)_r - \psi_{r\varphi} \left(\frac{2\psi_\varphi}{r^2 f_1\psi_t} \right)_r + \psi_{tr} \left(\frac{1}{\psi_t} \right)_r + \left[\frac{2(f_1\psi_t - \psi_r^2) + r\psi_t\psi_r f'_1}{r f_1\psi_t} \right]_r.\end{aligned}$$

В (4.14) нижние индексы за скобками указывают, по какой переменной берется производная от выражения, заключенного в скобки. Остальные производные определяются из соотношений (4.13). Кроме того, вторые производные должны удовлетворять соотношению (4.5) тождественно по ψ , т. е. соотношение (4.5) должно быть первым интегралом расширенной системы характеристик $\{(4.8), (4.9), (4.14)\}$.

Теорема. Если $f_2(\psi) = f'_1(\psi)$, $f_1 \neq \text{const}$, то соотношение (4.5) является первым интегралом расширенной системы уравнений характеристик (4.8), (4.9), (4.14).

В этом случае $p(u)$ удовлетворяет уравнению (см. (4.6), (4.11)):

$$-p_u + p_u^2/\gamma + pp_{uu} = 0. \quad (4.15)$$

Доказательство. Если в расширенной системе уравнений характеристик заменим производные ψ_{rt} , $\psi_{t\varphi}$, ψ_{tt} их выражениями из (4.13), предварительно выразив производную $\psi_{\varphi\varphi}$ из (4.5), то для определения вторых производных получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{rr}}{d\psi} &= -\frac{2}{f_1\psi_t} \psi_{rr}^2 - \frac{2}{r^2 f_1\psi_t} \psi_{r\varphi}^2 + \left(\frac{f'_1}{f_1} + \frac{4\psi_r^2 f'_1}{f_1^2 \psi_t} \right) \psi_{rr} + \frac{4\psi_\varphi}{r^3 f_1\psi_t} \left(2 + \frac{f'_1 r \psi_r}{f_1} \right) \psi_{r\varphi} \\ &\quad + \left(\frac{f''_1}{f_1} \psi_r^2 + \frac{6\psi_r^2}{r^2 f_1\psi_t} - \frac{6}{r^2} + \frac{4f'_1 \psi_r^3}{r f_1^2 \psi_t} - \frac{4f'_1 \psi_r}{r f_1} - 2\psi_r^2 \left(\frac{f'_1}{f_1} \right)^2 \right), \\ \frac{d\psi_{\varphi\varphi}}{d\psi} &= -\frac{2r^2}{f_1\psi_t} \psi_{rr}^2 - \frac{2}{f_1\psi_t} \psi_{r\varphi}^2 + \left[\frac{4}{f_1\psi_t} \left(f_2 r^2 \psi_t - r\psi_r - \frac{f'_1}{f_1} \psi_\varphi^2 \right) - r^2 \frac{f'_1}{f_1} \right] \psi_{rr} + \frac{4\psi_r \psi_\varphi}{f_1\psi_t} \frac{f'_1}{f_1} \psi_{r\varphi} \\ &\quad + \left\{ -\frac{2}{r^2 f_1\psi_t} (f_2 r^2 \psi_t - r\psi_r)^2 + \left(\frac{4f'_1 \psi_\varphi^2}{r^2 f_1\psi_t} + \frac{f'_1}{f_1} \right) (f_2 r^2 \psi_t - r\psi_r) + \psi_\varphi^2 \left[\left(\frac{f'_1}{f_1} \right)' - \left(\frac{f'_1}{f_1} \right)^2 \right] \right\}, \\ \frac{d\psi_{r\varphi}}{d\psi} &= -\frac{4\psi_\varphi}{r f_1\psi_t} \psi_{rr} - \frac{2}{r f_1\psi_t} (f_2 r \psi_t - \psi_r) \psi_{r\varphi} + \left\{ \frac{4\psi_\varphi f_2}{r f_1} - \frac{4\psi_r \psi_\varphi}{r^2 f_1\psi_t} + 2\psi_\varphi \psi_r \frac{f_2 f'_1}{f_1^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\psi_\varphi f'_1}{r f_1} + \psi_r \psi_\varphi \left[\left(\frac{f'_1}{f_1} \right)' - \left(\frac{f'_1}{f_1} \right)^2 \right] \right\}.\end{aligned} \quad (4.16)$$

Продифференцировав (4.5) по ψ и подставив вместо соответствующих производных их выражения из (4.8), (4.9), получим

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{\varphi\varphi}}{d\psi} &= f_2' r^2 \psi_t + 2r f_2 \frac{2\psi_r}{f_1} + f_2 r^2 \psi_t \frac{f'_1}{f_1} - \frac{2\psi_r^2}{f_1\psi_t} - r\psi_r \frac{f'_1}{f_1} - \frac{2(f_1\psi_t - \psi_r^2)}{f_1\psi_t} - \frac{4r\psi_r}{f_1\psi_t} \psi_{rr} \\ &\quad - r^2 \left[-\frac{2}{f_1\psi_t} \psi_{rr}^2 - \frac{2}{r^2 f_1\psi_t} \psi_{r\varphi}^2 + \left(\frac{f'_1}{f_1} + \frac{4\psi_r^2 f'_1}{f_1^2 \psi_t} \right) \psi_{rr} + \frac{4\psi_\varphi}{r^3 f_1\psi_t} \left(2 + \frac{f'_1 r \psi_r}{f_1} \right) \psi_{r\varphi} \right]\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{f_1''}{f_1} \psi_r^2 + \frac{6\psi_r^2}{r^2 f_1 \psi_t} - \frac{6}{r^2} + \frac{4f_1' \psi_r^3}{r f_1^2 \psi_t} - \frac{4f_1' \psi_r}{r f_1} - 2\psi_r^2 \left(\frac{f_1'}{f_1} \right)^2 \right) \Big]. \quad (4.17)$$

Приравняв производную от $\psi_{\varphi\varphi}$ по ψ из (4.16) и (4.17), имеем

$$4r^2 \left\{ \psi_{rr} - 0.5 \left[\frac{f_1'}{f_1} \left(\psi_r^2 - \frac{\psi_\varphi^2}{r^2} \right) + \frac{f_2}{f_1} f_1 \psi_t \right] \right\}^2 + 4 \left[\psi_{r\varphi} - \frac{\psi_\varphi}{r} \left(1 + r\psi_r \frac{f_1'}{f_1} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} (r^2 \psi_r^2 + \psi_\varphi^2)^2 \left[\left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_1'}{f_1} \right)' + \frac{f_1'}{f_1} \left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_1'}{f_1} \right) + \left(\frac{f_2}{f_1} - \frac{f_1'}{f_1} \right)^2 \right] = 0. \quad (4.18)$$

Отсюда следует, что если $f_2 = f_1'$ и

$$\begin{aligned} \psi_{rr} &= \frac{f_1'}{f_1} \psi_r^2, & \psi_{r\varphi} &= \frac{\psi_\varphi}{r} \left(1 + \frac{f_1'}{f_1} r \psi_r \right), & \psi_{\varphi\varphi} &= \frac{f_1'}{f_1} \psi_\varphi^2 - r \psi_r, \\ \psi_{rt} &= \frac{f_1'}{f_1} \psi_r \psi_t, & \psi_{t\varphi} &= \frac{f_1'}{f_1} \psi_t \psi_\varphi & \psi_{tt} &= \frac{f_1'}{f_1} \psi_t^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

то равенство (4.18) выполняется. Нетрудно проверить, что производные (4.19) удовлетворяют системе уравнений (4.14). Следовательно, соотношение (4.5) является первым интегралом системы (4.14).

В уравнение (4.6) подставим $f_2 = f_1'$ и перейдем от независимой переменной ψ к независимой переменной u (см. (4.11)). В результате получим (4.15). Теорема доказана. \square

Следствие 1. Пусть $f_1 = \text{const}$ и $f_2 \neq 0$. Если $f_2 = f_1/(\psi + c_o)$, где $c_o = \text{const}$, то система (4.4), (4.5) совместна. В этом случае уравнение (4.6) имеет вид

$$-p' + \left(\frac{1}{\gamma} p'^2 + pp'' \right) f_1 + pp' \frac{f_1}{\psi + c_o} = 0. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) имеет частное решение

$$p = a\psi + b, \quad a = \gamma/[(\gamma + 1)f_1], \quad b = ac_o.$$

Следствие 2. Пусть $f_1 \neq \text{const}$ и $f_2 = 0$. Если $f_1 = a_o \exp(b_o\psi)$, где $a_o = \text{const}$, $b_o = \text{const}$, то система (4.4), (4.5) совместна. В этом случае уравнение (4.6) имеет вид

$$-p' + \left(\frac{1}{\gamma} p'^2 + pp'' \right) a_o \exp(b_o\psi) = 0.$$

Следствие 3. Пусть $f_1 \neq \text{const}$ и $f_2 \neq 0$. Тогда уравнение (4.15) имеет следующие решения:

$$p = \gamma u + a_o, \quad a_o = \text{const}, \quad (4.21)$$

$$\gamma u + b_o = \frac{\gamma p^{(\gamma+1)/\gamma} F(1, \gamma + 1, \gamma + 2, p^{1/\gamma}/s_o)}{s_o(\gamma + 1)},$$

$$b_o = \text{const}, \quad s_o = \text{const}, \quad s_o > 0,$$

$F(1, \gamma + 1, \gamma + 2, p^{1/\gamma}/s_o)$ — гипергеометрическая функция.

Выше выписаны некоторые точные решения уравнения (4.1) в новых переменных (решение зависит только от переменной ψ). Чтобы перейти к первоначальным независимым переменным, нужно знать вид функции $\psi = \psi(r, \varphi, t)$ или параметрическое задание этой функции, например,

$$\psi = \psi(r, \alpha, \beta), \quad t = t(r, \alpha, \beta), \quad \varphi = \varphi(r, \alpha, \beta).$$

Эти зависимости можно будет выписать, когда будут заданы функции $f_1(\psi)$ и $c_i(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ниже на примере решения одной конкретной задачи для уравнения (4.1) показано, как эти неизвестные функции можно определить.

5. Краевая задача для уравнения фильтрации

Для уравнения фильтрации будем решать следующую задачу:

З а д а ч а. Определить фронт фильтрации L_t для $t > 0$, если известен краевой режим для уравнения (4.1).

$$p(R, \varphi, t) = (a + b \cos 4\varphi)t \exp(-ct), \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \quad c = \text{const}.$$

$$p(R, \varphi, 0) = 0, \quad p_t(R, \varphi, 0) > 0.$$

В работе [1] поставленная задача решалась с использованием рядов и аппроксимаций Паде. Использование рядов позволило построить фронт фильтрации при $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3$, когда $R = 1$, $a = 1$, $b = 0.8$, $c = 5$, $\gamma = 1.4$. В случае применения аппроксимаций Паде фронт фильтрации удавалось получать до $t \approx 2$.

Будем строить фронт фильтрации, используя изложенный выше метод. Этот подход позволяет выписать точные аналитические выражения для фронта фильтрации.

Зададим начальное многообразие, для которого известно давление, в виде

$$\begin{aligned} r = R, \quad t = \beta, \quad \varphi = \alpha, \quad p(R, \alpha, \beta) &= (a + b \cos 4\alpha)\beta \exp(-c\beta), \\ p_t &= (a + b \cos 4\alpha)(1 - c\beta) \exp(-c\beta), \quad p_\varphi = -4b\beta \exp(-c\beta) \sin 4\alpha. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Тогда на многообразии (5.1), где в новых переменных $p = p(\psi)$, имеем

$$p_\varphi = p' \psi_\varphi = -4b\beta \exp(-c\beta) \sin 4\alpha, \quad (5.2)$$

$$p_t = p' \psi_t = (a + b \cos 4\alpha)(1 - c\beta) \exp(-c\beta). \quad (5.3)$$

Подставим в выражения (5.2), (5.3) значения $\psi_t = c_1 f_1$, $\psi_\varphi = c_2 f_1$ (см. (4.10)). Получим

$$\begin{aligned} p' f_1 c_1 &= (a + b \cos 4\alpha)(1 - c\beta) / \exp(c\beta), \\ p' f_1 c_2 &= -4b\beta \sin 4\alpha / \exp(c\beta). \end{aligned} \quad (5.4)$$

На фронте фильтрации $p = 0$. Причем $p = 0$ — характеристика уравнения (4.1). На характеристике для уравнения (4.1) должно выполняться условие совместности [2], которое в новых переменных $\{\psi, \alpha, \beta\}$ имеет вид (см. (4.6)):

$$-p' + p'^2 f_1 / \gamma = 0.$$

Это соотношение будет выполняться, если $p' = 0$ или $p' f_1 = p_u = \gamma$.

Положим с одной стороны от фронта фильтрации $p' = 0$. Этому условию будет удовлетворять решение $p(\psi(r, \varphi, t)) = 0$. С другой стороны от фронта, где выполняются соотношения (5.4), положим $p_u = p' f_1 = \gamma$ всюду, а не только на фронте фильтрации. Отсюда следует, что $f_1 = \gamma / p'$. Тогда, чтобы удовлетворялось уравнение (4.6), в этой области должно

выполняться условие $f_2 = -p''f_1/(p')^2$, т. е. $f_2 = f_1'$, что допустимо, ибо при таком условии система (4.4), (4.5) совместна (см. теорему). Выписанным выше условиям удовлетворяет решение (4.21), следовательно, к области, где давление $p(r, \varphi, \alpha) = 0$, через характеристику может примыкать решение (записанное в новых переменных) $p = \gamma u + a_0$.

Из условий (5.4) получим

$$\begin{aligned} c_1 &= (a + b \cos 4\alpha)(1 - c\beta)/[\gamma \exp(c\beta)], \\ c_2 &= -4b\beta \sin 4\alpha/[\gamma \exp(c\beta)]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Потребуем, чтобы характеристики (4.11) проходили через начальное многообразие (5.1):

$$R^2 = \frac{(2u + c_3)^2 + c_2^2}{c_1}, \quad \beta = c_4 - \frac{u}{c_1}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - c_5) = \frac{2u + c_3}{c_2}.$$

Отсюда определяем зависимости

$$c_3 = 2c_1(\beta - c_4) \pm \sqrt{c_1 R^2 - c_2^2}, \quad c_5 = \alpha - \operatorname{arctg} \left(\pm \frac{\sqrt{c_1 R^2 - c_2^2}}{c_2} \right). \quad (5.6)$$

Функции c_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, должны удовлетворять соотношениям (4.12). Подставив выражения (5.5), (5.6) в (4.12), получим условия, которым должна удовлетворять функция $c_4(\alpha, \beta)$:

$$\frac{\partial c_4}{\partial \alpha} = \frac{\beta - c_4}{c_1} \frac{\partial c_1}{\partial \alpha} + \frac{c_2}{c_1}, \quad \frac{\partial c_4}{\partial \beta} = \frac{\beta - c_4}{c_1} \frac{\partial c_1}{\partial \beta} + 2. \quad (5.7)$$

В случае, когда c_i , $i = 1, 2, 3, 5$, имеют вид (5.5), (5.6), получаем, что смешанные производные функции c_4 равны. Это позволяет нам, решив систему (5.7), определить c_4 .

Если $(1 - c\beta) \neq 0$ и $(a + b \cos 4\alpha) \neq 0$, то

$$c_4 = \frac{\beta(2 - c\beta)}{(1 - c\beta)} + \frac{Q\gamma \exp(c\beta)}{(1 - c\beta)(a + b \cos 4\alpha)}, \quad Q = \text{const.} \quad (5.8)$$

Подставив полученные функции $c_i(\alpha, \beta)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) из (5.5), (5.6), (5.8) в (4.11), получим преобразование координат, удовлетворяющее условиям (1.4) для этой конкретной задачи:

$$t = t(u, \alpha, \beta), \quad r = r(u, \alpha, \beta), \quad \varphi = \varphi(u, \alpha, \beta). \quad (5.9)$$

Положим в решении (4.21) $a_0 = 0$, тогда на фронте фильтрации, где $p = 0$, имеем $u = 0$. Положим также, что $Q = 0$ в (5.8). Эти предположения не уменьшают общности, а только приводят к сдвигу системы координат. Тогда, если в выражениях (5.9) положим $r = R$ и исключим α и β , то очевидно, что

$$\gamma u(R, \varphi, t) = (a + b \cos 4\varphi)t \exp(-ct) = p(R, \varphi, t),$$

т. е. на начальном многообразии (5.1) функция γu совпадает с функцией $p(r, \varphi, t)$.

Далее выпишем параметрическое представление решения задачи с заданным краевым условием (5.1):

$$\begin{aligned} p(r, \alpha, \beta) &= \frac{\gamma}{2} \left[\pm \left(\sqrt{c_1 r^2 - c_2^2} - \sqrt{c_1 R^2 - c_2^2} \right) - 2c_1(\beta - c_4) \right], \\ t(r, \alpha, \beta) &= c_4 - \frac{\pm \left(\sqrt{c_1 r^2 - c_2^2} - \sqrt{c_1 R^2 - c_2^2} \right) - 2c_1(\beta - c_4)}{2c_1}, \\ \varphi(r, \alpha, \beta) &= \alpha - \operatorname{arctg} \left(\pm \frac{\sqrt{c_1 R^2 - c_2^2}}{c_2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\pm \frac{\sqrt{r^2 c_1 - c_2^2}}{c_2} \right), \end{aligned}$$

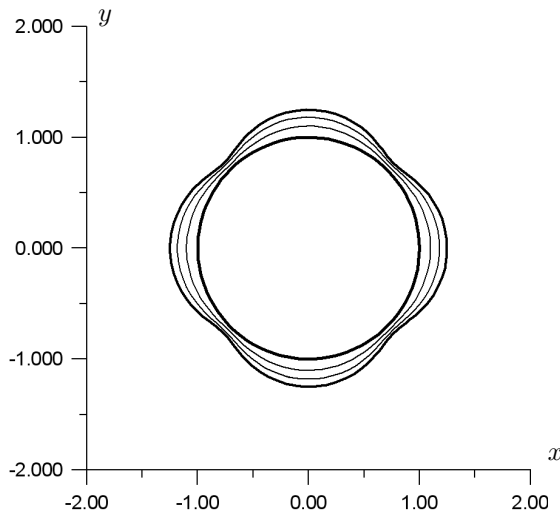


Рис. 1.

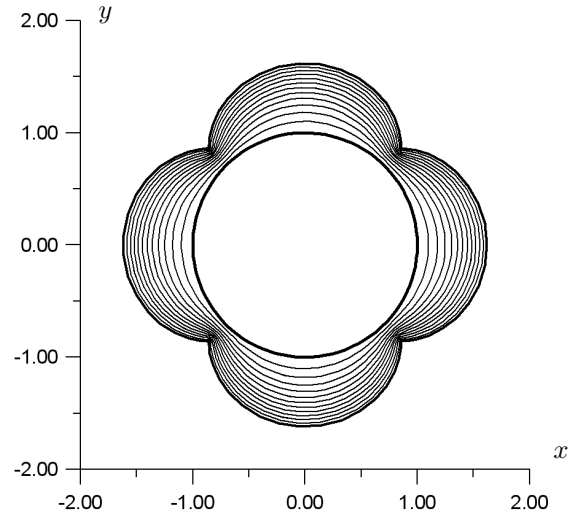


Рис. 2.

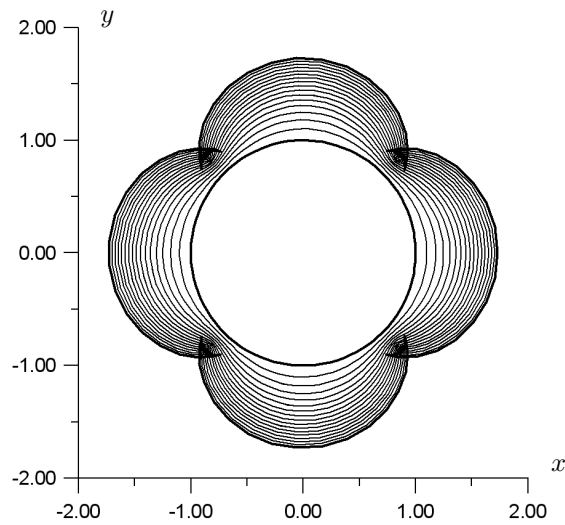


Рис. 3.

где c_1, c_2 определены в (5.5), а c_4 — в (5.8) ($Q = 0$). Если положим $p = \gamma u = 0$, то получим, что фронт фильтрации в декартовых координатах в фиксированные моменты времени t имеет вид

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

где

$$r(\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{c_3^2 + c_2^2}{c_1}}, \quad \varphi(\alpha, \beta) = c_5 + \operatorname{arctg} \frac{c_3}{c_2},$$

$$\beta = \frac{2 + ct \mp \sqrt{4 + c^2 t^2}}{2c}, \tag{5.10}$$

c_1, c_2 определены в (5.5), а c_3, c_5 выражены через эти функции в (5.6).

Чтобы при $t = 0$ выполнялось условие $r = R$ (начальное положение фронта фильтрации, см. (5.1)), перед корнем в (5.10) выбираем знак минус ($-$) для $\gamma > 0$.

Если в выражениях (5.6) в c_3 и c_5 выбираем перед корнем знак минус ($-$), то фронт фильтрации находится вне круга радиуса $r = R$ (рис. 1–3). В противном случае фронт фильтрации находится внутри этого круга (рис. 4–6).

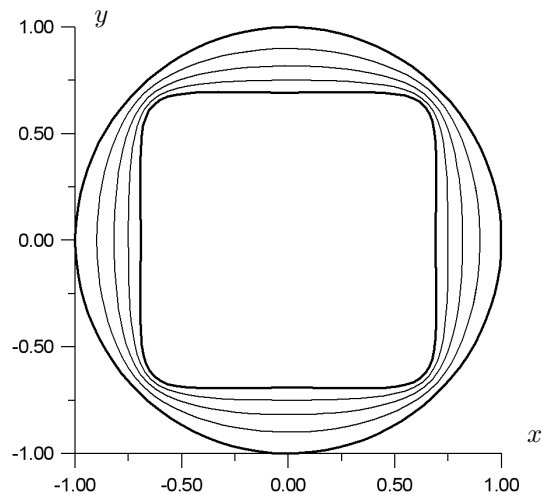


Рис. 4.

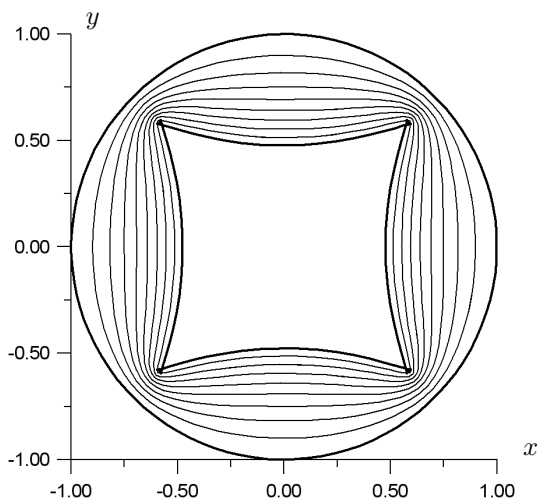


Рис. 5.

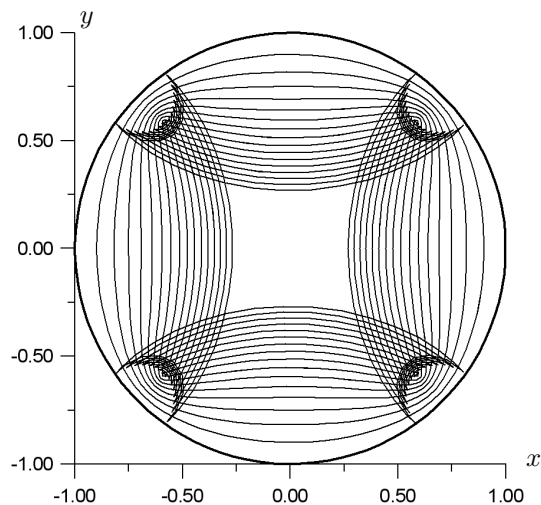


Рис. 6.

Если нас интересует только положение фронта фильтрации, то его можно получить другим способом.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$-r^2 p_t + (r^2 p_r^2 + p_\varphi^2)/\gamma = 0, \quad (5.11)$$

$$p(R, \varphi, t) = (a + b \cos(4\varphi))t \exp(-ct), \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \quad c = \text{const}, \quad R = \text{const}.$$

Выпишем для уравнения (5.11) систему уравнений характеристик [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= -r^2, & \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{2}{\gamma} p_\varphi, & \frac{dr}{ds} &= \frac{2}{\gamma} r^2 p_r, & \frac{dp}{ds} &= r^2 p_t, \\ \frac{dp_t}{ds} &= 0, & \frac{dp_\varphi}{ds} &= 0, & \frac{dp_r}{ds} &= 2r \left(p_t - \frac{1}{\gamma} p_r^2 \right). \end{aligned}$$

Пусть $r^2 p_t \neq 0$. Выбрав в качестве независимой переменной вдоль характеристики пере-

менную p , получим

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= -\frac{1}{p_t}, & \frac{d\varphi}{dp} &= \frac{2p_\varphi}{\gamma r^2 p_t}, & \frac{dr}{dp} &= \frac{2p_r}{\gamma p_t}, \\ \frac{dp_t}{dp} &= 0, & \frac{dp_\varphi}{dp} &= 0, & \frac{dp_r}{dp} &= 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\gamma} \frac{p_r^2}{r p_t}\right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Решив систему (5.12), находим

$$p_t = \gamma c_1(\alpha, \beta), \quad p_\varphi = \gamma c_2(\alpha, \beta), \quad p_r = \pm \frac{\gamma}{r} \sqrt{r^2 c_1 - c_2^2}, \quad (5.13)$$

$$r = \sqrt{\frac{(2p/\gamma + c_3)^2 + c_2^2}{c_1}}, \quad t = -\frac{p}{\gamma c_1} + c_4(\alpha, \beta), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2p/\gamma + c_3}{c_2} + c_5(\alpha, \beta). \quad (5.14)$$

Будем получать интегральную поверхность уравнения (5.11), требуя, чтобы каждая характеристическая кривая (5.13), (5.14) содержала некоторую точку многообразия [2]:

$$\begin{aligned} r &= R, \quad \varphi = \alpha, \quad t = \beta, \quad p(R, \alpha, \beta) = (a + b \cos(4\alpha))\beta \exp(-c\beta), \\ p_r(R, \alpha, \beta) &= \pm \frac{\sqrt{\gamma R^2 (a + b \cos(4\alpha))(1 - c\beta) \exp(-c\beta) - (4b\beta \sin(4\alpha) \exp(-c\beta))^2}}{R}, \\ p_\varphi(R, \alpha, \beta) &= -4b\beta \sin(4\alpha) \exp(-c\beta), \quad p_t(R, \alpha, \beta) = (a + b \cos(4\alpha))(1 - c\beta) \exp(-c\beta). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Нетрудно проверить, что для многообразия (5.15) выполняются условия полосы [2] и величины, определяющие полосу, удовлетворяют уравнению (5.11) тождественно по переменным α и β .

Характеристики будут выходить из заданного начального многообразия, если выполняются соотношения

$$p_t(R, \alpha, \beta) = \gamma c_1(\alpha, \beta), \quad p_\varphi(R, \alpha, \beta) = \gamma c_2(\alpha, \beta), \quad p_r(R, \alpha, \beta) = \pm \frac{\gamma}{R} \sqrt{R^2 c_1 - c_2^2}, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{(2p(R, \alpha, \beta)/\gamma + c_3)^2 + c_2^2}{c_1}}, \quad \beta = -\frac{p(R, \alpha, \beta)}{\gamma c_1} + c_4(\alpha, \beta), \\ \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{2p(R, \alpha, \beta)/\gamma + c_3}{c_2} + c_5(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Из соотношений (5.16), (5.17) находим

$$\begin{aligned} c_1 &= (a + b \cos(4\alpha))(1 - c\beta) \exp(-c\beta)/\gamma, \\ c_2 &= -4b\beta \sin(4\alpha) \exp(-c\beta)/\gamma, \\ c_3 &= -2(a + b \cos(4\alpha))\beta \exp(-c\beta)/\gamma \pm \sqrt{c_1 R^2 - c_2^2}, \\ c_4 &= \beta + \frac{(a + b \cos(4\alpha))\beta \exp(-c\beta)}{\gamma c_1} = \beta + \frac{\beta}{1 - c\beta} = \frac{\beta(2 - c\beta)}{1 - c\beta}, \\ c_5 &= \alpha - \operatorname{arctg} \frac{2(a + b \cos(4\alpha))\beta \exp(-c\beta)/\gamma + c_3}{c_2} = \alpha - \operatorname{arctg} \left(\pm \frac{\sqrt{c_1 R^2 - c_2^2}}{c_2} \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Сравнивая выражения для c_3 и c_4 в (5.18), получаем эквивалентную (5.6) запись для c_3 :

$$c_3 = 2c_1(\beta - c_4) \pm \sqrt{c_1 R^2 - c_2^2}.$$

Если полученные c_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, подставим в (5.14) и выпишем эти соотношения при $p = 0$, то получим формулы, совпадающие с формулами фронта фильтрации (5.10).

При $p = 0$ уравнение (4.1) совпадает с уравнением (5.11) и, естественно, их решения должны совпадать.

Таким образом, двумя различными подходами получены одинаковые формулы фронта фильтрации. \square

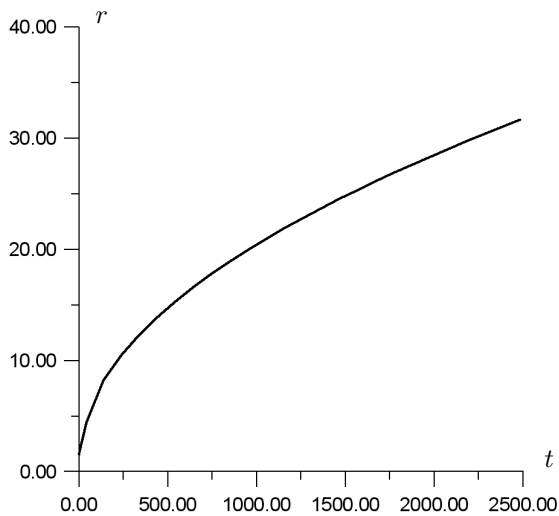


Рис. 7.

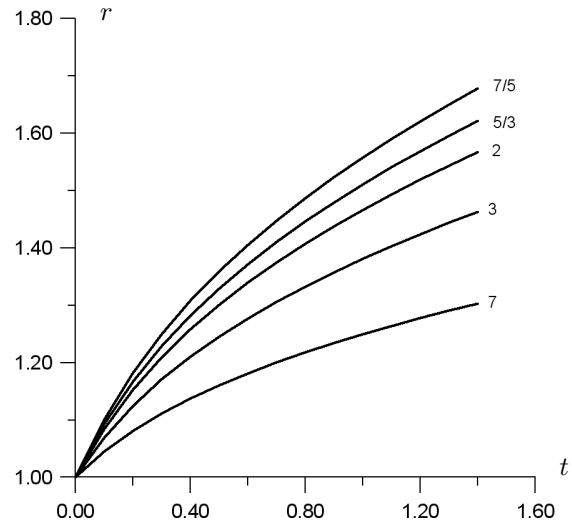


Рис. 8.

На рис. 1–7 изображено движение фронта фильтрации в зависимости от времени t при тех же условиях, что и в работе [1]: $a = 1$, $b = 0.8$, $c = 5$, $\gamma = 1.4$, $R = 1$.

При $t > 0.3$ наблюдается негладкость фронта возмущения, что еще раз подтверждает известную возможность получить нарушение гладкости на фронте, даже если вне фронта решение было классическим (как отмечено, например, в [5]).

На рис. 7 фронт возмущения распространяется вне окружности радиуса $R = 1$. Здесь показано положение $r = r(t)$ до $t < 2500$. На рис. 8 получен фронт возмущения при разных показателях политропы γ , когда $a = 1$, $b = 0.8$, $c = 5$, $R = 1$.

Заключение

Предлагаемый метод исследования и решения нелинейных уравнений в частных производных позволяет исследовать уравнения, принадлежащие широкому классу нелинейных уравнений в частных производных. Задавая произвольные функции удовлетворяющими лишь некоторым обязательным соотношениям (см. (1.4)), можно получать точные решения рассматриваемого уравнения.

В статье подробно рассмотрен в общем и на примере решения конкретной задачи лишь один из возможных случаев получения уравнения в новых переменных и определения преобразования координат, существование которого предполагается вначале, когда два выражения B_1 и B_2 зависят только от независимых переменных и первых производных функции ψ (см. введение). Ранее [6] этим же методом было исследовано уравнение потенциала для плоского нестационарного течения политропного газа и получены точные уравнения ударных волн, отделяющих область покоя или постоянного движения от потенциального течения. В дальнейшем предполагается рассмотреть получение преобразования координат, которое приводит к зависимости решения уравнения u только от одной независимой переменной, в других возможных случаях вида выражений B_k , $k = 1, 2, \dots, N$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров А.Ф. Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
3. Рубина Л.И. О распространении слабых разрывов для квазилинейных систем // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, №3. С. 435–443.

4. **Лейбензон Л.С.** Сборник трудов. Т. 2: Подземная гидродинамика. М: Из-во АН СССР, 1953. 544 с.
5. **Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 477 с.
6. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** О решении уравнения потенциала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 130–145.

Рубина Людмила Ильинична

канд. физ.-мат. наук

ст. науч. сотрудник

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: rli@imm.uran.ru

Поступила 17.11.2009

Ульянов Олег Николаевич

канд. физ.-мат. наук

ст. науч. сотрудник

ученый секретарь

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: uon@imm.uran.ru

УДК 517.988.67

О РЕШЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЕКТОРНЫМ ПАРАМЕТРОМ В СЕКТОРИАЛЬНЫХ ОКРЕСТНОСТЯХ¹

Н. А. Сидоров, Р. Ю. Леонтьев

Рассматривается нелинейное операторное уравнение $B(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0$. Линейный оператор $B(\lambda)$ не имеет ограниченного обратного при $\lambda = 0$. Нелинейный оператор $R(x, \lambda)$ непрерывен в окрестности нуля, $R(0, 0) = 0$. Получены достаточные условия существования непрерывного решения $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ в некотором открытом множестве S линейного нормированного пространства Λ . Нуль пространства Λ принадлежит границе множества S . Предложен способ построения решения с максимальным порядком малости в окрестности точки $\lambda = 0$. В качестве начального приближения берется нулевой элемент.

Ключевые слова: нелинейное операторное уравнение, ветвление решений, минимальная ветвь, регуляризаторы, векторный параметр.

N. A. Sidorov, R. Yu. Leont'ev. On solutions with the maximal order of vanishing of nonlinear equations with a vector parameter in sectorial neighborhoods.

The nonlinear operator equation $B(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0$ is considered. The linear operator $B(\lambda)$ has no bounded inverse operator for $\lambda = 0$. The nonlinear operator $R(x, \lambda)$ is continuous in a neighborhood of zero and $R(0, 0) = 0$. Sufficient conditions for the existence of a continuous solution $x(\lambda) \rightarrow 0$ as $\lambda \rightarrow 0$ in some open set S of a linear normed space Λ are obtained. The zero of the space Λ belongs to the boundary of the set S . A method of constructing a solution with the maximal order of vanishing in a neighborhood of the point $\lambda = 0$ is suggested. The zero element is taken as the initial approximation.

Keywords: nonlinear operator equation, branching solutions, minimal branch, regularizers, vector parameter.

Введение

Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение вида

$$B(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0, \quad (0.1)$$

где $B(\lambda)$ — замкнутый линейный оператор с плотной в пространстве X областью определения, не зависящей от параметра $\lambda \in \Lambda$. Нелинейный оператор $R : X \times \Lambda \rightarrow Y$ непрерывен в окрестности нуля по x и λ , $R(0, 0) = 0$.

Будем предполагать, что оператор $B(\lambda)$ имеет обратный оператор при $\lambda \in S$, причем

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \quad \text{при} \quad S \ni \lambda \rightarrow 0, \quad (0.2)$$

где S — открытое множество в пространстве Λ , границе которого принадлежит точка $\lambda = 0$, $a(\lambda) : S \subset \Lambda \rightarrow (0, +\infty)$ — положительный непрерывный функционал, $a(0) = 0$. Множество S назовем *секториальной окрестностью нуля*.

Требуется построить решение $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$ (далее, кратко, при $\lambda \rightarrow 0$) максимального порядка малости (“минимальную ветвь” малого решения) в нерегулярном случае, когда область значений оператора $B(0)$ может быть незамкнутой и размерность $\dim N(B(0)) \geq 1$.

¹Работа выполнена по теме НИР задания Федерального агентства по образованию (проект 091-08-102/1.2.08).

Если $B(0)$ — фредгольмов оператор, то для построения малых решений уравнения (0.1) можно использовать классические результаты теории ветвления решений нелинейных уравнений [1]. В частности, общие теоремы существования точек бифуркации в секториальных областях во фредгольмовом случае можно найти в [7] и в монографии [13, гл. 2]. Приближенные методы и их регуляризация в окрестности точек ветвления изучались в работах [4, 7–9] и др. Решения максимального порядка малости в некоторых случаях строились в работах [3, 5].

Введем множество

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\}. \quad (0.3)$$

Цель этой статьи — доказательство конструктивных теорем существования и единственности минимальных ветвей решений уравнения (0.1) в областях вида (0.3) с векторным параметром λ в секториальной окрестности S в общем случае, когда оператор $B(0)$ может не быть нормально разрешимым и $\dim N(B(0)) \geq 1$.

На основании доказанных теорем искомая ветвь решения строится методом последовательных приближений, сходящимся в области S при нулевом начальном приближении. Из полученных результатов вытекают результаты работ [3, 5].

В разд. 1 работы приведены теоремы существования и метод последовательных приближений минимальных ветвей решений уравнения (0.1) при выполнении оценки (0.2). В соответствующих итерационных формулах разд. 1 присутствует оператор $B^{-1}(\lambda)$. Поэтому ввиду неизбежных погрешностей вычислений этот метод последовательных приближений требует регуляризации в смысле теории некорректных задач [10; 2, разд. 3]. Регуляризация может быть проведена во фредгольмовом случае в окрестности точки ветвления решения сдвигом по параметру λ [8]. В некоторых конкретных примерах, когда оператор $B^{-1}(\lambda)$ построен явно, а точка $\lambda = 0$ оказывается устранимой особой точкой, регуляризация достигается путем сокращения на допустимую степень параметра λ в редуцированном уравнении.

В разд. 2 подробно рассмотрен случай, когда $B(0)$ — фредгольмов оператор и регуляризация соответствующего метода последовательных приближений основана на применении обобщенной леммы Шмидта [11, § 21, п. 21.4]. Показано, что во фредгольмовом случае при решении уравнения (0.1) целесообразно использовать метод последовательных приближений, применяя «асимптотические регуляризаторы», введенные в работе [5].

1. Достаточные условия существования минимальных ветвей решений уравнения (0.1) и метод последовательных приближений

Приведем достаточные условия существования малого решения в некоторой области $\Omega_0 \subseteq \Omega$ с указанием способа построения решения и его асимптотики.

Теорема 1. Пусть в области Ω выполнено условие (0.2) и при этом:

1) справедливо неравенство

$$\|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| \leq L(\lambda)r \|x_1 - x_2\|, \quad (1.1)$$

где $L(\lambda) = O(a(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$;

2) имеет место оценка $\|R(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Тогда найдется область $\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S_0 \subseteq S, 0 < r_0 \leq r\}$, в которой существует единственное решение уравнения (0.1) $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Последовательность $\{x_n\}$ $x_0 = 0$, где x_n строится методом последовательных приближений (см. (1.3)), сходится к этому решению.

Доказательство. С помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ уравнение (0.1) приведем к эквивалентной форме

$$V = -\frac{1}{a(\lambda)}B^{-1}(\lambda)R(a(\lambda)V, \lambda) \equiv \Phi(V, \lambda). \quad (1.2)$$

При этом ввиду оценки (1.1)

$$\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \leq \|B^{-1}(\lambda)\| L(\lambda)r \|V_1 - V_2\|$$

при $\lambda \in S$, $\|V_i\| \leq r$.

Ввиду оценки (0.2) $\|B^{-1}(\lambda)\| L(\lambda) \leq C$ при $\lambda \in S$, где $C > 0$ — фиксированная постоянная. Но тогда $\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \leq Cr \|V_1 - V_2\|$. Пусть $0 < q < 1$. Выберем $r_0 \leq \min\{q/C, r\}$. Тогда оператор $\Phi(V, \lambda)$ будет сжимающим в шаре $\|V\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$.

Далее,

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \|R(0, \lambda)\|.$$

В силу оценки (0.2) и условия 2) теоремы 1 существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \|R(0, \lambda)\| \leq (1 - q)r_0$$

и, следовательно,

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0 \text{ при } \lambda \in S_0, \|V\| \leq r_0.$$

Таким образом, согласно принципу сжимающих отображений уравнение (1.2) имеет единственное решение, последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = -B^{-1}(\lambda)R(x_{n-1}, \lambda), \quad (1.3)$$

$x_0 = 0$, сходится при $\forall \lambda \in S_0$ к этому решению. Теорема 1 доказана. \square

З а м е ч а н и е 1. В условиях теоремы 1 в шаре $\|x\| \leq a(\lambda)r_0$ при $\lambda \in S_0$ существует единственное малое решение. Заметим, что порядок этого решения как бесконечно малой в нуле может оказаться выше порядка бесконечно малой величины $a(\lambda)$.

В области $\|x\| \geq a(\lambda)r_0$ уравнение (0.1) может иметь и другие малые непрерывные решения, очевидно с более низким порядком малости, чем порядок решения $x(\lambda)$, единственного в шаре $S(0, a(\lambda)r_0)$, к которому сходится последовательность (1.3). Во фредгольмовом случае для отыскания решений более низких порядков малости можно применить приближенные методы, изложенные в [1, 4, 6, 7, 9, 13].

Следующие теоремы 2–4 позволяют ослабить условие 2) теоремы 1, заменив его на предположение существования непрерывной функции $b(\lambda) : S \subset \Lambda \rightarrow Y$, $b(0) = 0$, такой что

$$\|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| = o(a^2(\lambda)) \text{ при } \lambda \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

В теоремах 2–4 предполагается еще, что

$$B(\lambda) = B + a(\lambda)A + \omega(\lambda), \quad (1.5)$$

где B, A — замкнутые линейные операторы с плотными в банаховом пространстве X областями определения, $D(B) \subseteq D(A)$, $\omega(\lambda)$ — линейная непрерывная оператор-функция, $\|\omega(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$.

В доказательствах теорем 2–4, как и теоремы 1, используется принцип сжимающих отображений и эквивалентное уравнение (1.2). При этом часть доказательства, констатирующая сжимаемость соответствующего оператора, будет опускаться как подобная доказательству в теореме 1.

Теорема 2. Пусть выполнены оценки (0.2), (1.1), (1.4), причем оператор $B(\lambda)$ имеет вид (1.5). Пусть линейное уравнение $Bx = b(\lambda)$ имеет при $\lambda \in S$ решение $x^*(\lambda)$, причем $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$, $\|Ax^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$. Тогда в области Ω_0 существует единственное малое решение уравнения (0.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично теореме 1 уравнение (0.1) с помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ приводим к виду

$$V = \Phi(V, \lambda), \quad (1.6)$$

где оператор $\Phi(V, \lambda)$ определен в формуле (1.2) и на основании доказательства теоремы 1 в шаре $\|V\| \leq r_0$ при $\forall \lambda \in S$ является сжимающим.

Покажем, что найдется область $S_0 \subseteq S$, такая что при $\lambda \in S_0$ $\Phi : S(0, r_0) \rightarrow S(0, r_0)$. Действительно, воспользовавшись установленной сжимаемостью оператора $\Phi(V, \lambda)$, представлением (1.5) и оценками (0.2), (1.1), (1.4), имеем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda)\| &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)R(0, \lambda)\| \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)Bx^*(\lambda)\| \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)(B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda))x^*(\lambda)\| \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\| \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\| + \|B^{-1}(\lambda)Ax^*(\lambda)\| \\ &\quad + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x^*(\lambda)\|. \end{aligned}$$

Здесь в силу условий теоремы 2 последние 4 слагаемых стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно, выбором области $S_0 \subseteq S$ сумму этих четырех слагаемых можно сделать меньше, чем $(1 - q)r_0$ при $\forall \lambda \in S_0$. Поэтому существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ $\|\Phi(V, \lambda)\| \leq r_0$ в шаре $\|V\| \leq r_0$. Теорема 2 доказана. \square

З а м е ч а н и е 2. Если B — фредгольмов оператор и уравнение $Bx = b(\lambda)$ разрешимо, то можно положить $x^*(\lambda) = \Gamma b(\lambda)$, где Γ — оператор В.А. Треногина (см [11, с. 221] и разд. 2 ниже). Если при этом $\|b(\lambda)\| = o(a(\lambda))$, то очевидно выполнены оценки $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ и $\|Ax^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$.

В теоремах 1, 2 методом последовательных приближений строятся малые решения максимального порядка малости. При этом на основании замечания 1 порядок малости построенного решения может оказаться выше порядка бесконечно малой $a(\lambda)$.

Заметим, что главный член асимптотики решения в теоремах 1, 2 не выписан.

Теорема 3 решает вопрос о главном члене асимптотики минимальной ветви. В теореме 3 приведены достаточные условия существования и единственности малого непрерывного решения в некотором шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r_0$, где V_0 — определенный ненулевой элемент из пространства X . Для краткости записи введем обозначение

$$F(x, \lambda) \stackrel{def}{=} B(\lambda)x + R(x, \lambda).$$

Теорема 3. Пусть выполнены оценки (0.2), (1.4), оператор $B(\lambda)$ имеет вид (1.5). Пусть существует элемент $V_0 \in X$ такой, что линейное уравнение

$$B(\lambda)x = F(a(\lambda)V_0, \lambda) \quad (1.7)$$

имеет решение $x^*(\lambda)$, $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow 0$. Пусть в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r$ выполнено условие 1) теоремы 1.

Тогда существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ и $0 < r_0 \leq r$ такие, что при $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|x - a(\lambda)V_0\| \leq a(\lambda)r_0$ существует единственное непрерывное решение уравнения (0.1) вида $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$, где $V(\lambda) \rightarrow V_0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Доказательство. Рассмотрим эквивалентное уравнение (1.6) с оператором $\Phi(V, \lambda)$, при $\lambda \in S$ сжимающим на основании доказательства теоремы 1 в некотором шаре $\|V - V_0\| \leq r_0$, где $0 < r_0 \leq r$.

Покажем, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ будет выполнено $\Phi(V, \lambda) : S(V_0, r_0) \rightarrow S(V_0, r_0)$.

Действительно, используя сжимаемость оператора $\Phi(V, \lambda)$, имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda) - V_0\| &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(V_0, \lambda)\| + \|\Phi(V_0, \lambda) - V_0\| \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \left\| B^{-1}(\lambda) \left(R(a(\lambda)V_0, \lambda) + B(\lambda)a(\lambda)V_0 \right) \right\| \\ &\leq qr_0 + \frac{\|x^*(\lambda)\|}{a(\lambda)}. \end{aligned}$$

В силу оценки $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$ существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ выполняется неравенство $\|x^*(\lambda)\|/a(\lambda) \leq (1 - q)r_0$ и, следовательно, $\|\Phi(V, \lambda) - V_0\| \leq r_0$. Теорема 3 доказана. \square

В теореме 3 остался открытым вопрос о построении элемента V_0 , входящего в правую часть линейного уравнения (1.7). Следующая лемма показывает, что этот элемент можно выбрать в подпространстве $N(B(0))$.

Лемма 1. Пусть:

- 1) $R(0, \lambda) = a^2(\lambda)b + o(a^2(\lambda))$;
- 2) существует элемент $\varphi \in N(B)$ такой, что линейное уравнение

$$Bx = b + A\varphi \tag{1.8}$$

имеет решение x_0 ;

- 3) $\|R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$;
- 4) для оператора $B(\lambda)$ вида (1.5) выполнена оценка (0.2).

Тогда уравнение (1.7) при $V_0 = \varphi$ имеет малое решение $x^*(\lambda)$, причем $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$.

Доказательство. При $V_0 = \varphi$ уравнение (1.7) примет вид

$$B(\lambda)x = a^2(\lambda)A\varphi + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda).$$

Учитывая, что $A\varphi = Bx_0 - b$, получим следующее единственное решение уравнения (1.7):

$$x^*(\lambda) = B^{-1}(\lambda) \left\{ a^2(\lambda) (Bx_0 - b) + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi + R(a(\lambda)\varphi, \lambda) \right\}.$$

Теперь покажем, что $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$. Для этого, воспользовавшись тождеством $B = B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda)$, перепишем решение в виде

$$\begin{aligned} x^*(\lambda) &= a^2(\lambda)x_0 \\ &+ B^{-1}(\lambda) \left\{ a^2(\lambda) (-a(\lambda)A - \omega(\lambda))x_0 + R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - R(0, \lambda) + R(0, \lambda) - a^2(\lambda)b \right\}, \end{aligned}$$

откуда очевидна оценка $\|x^*(\lambda)\| = o(a(\lambda))$. \square

Замечание 3. Если оператор B — фредгольмов, $\{\varphi_i\}, \{\psi_i\}, i = 1 \dots n$ — базисы соответственно в $N(B)$ и $N^*(B)$, $\det \langle A\varphi_i, \psi_k \rangle |_{i,k=1,n} \neq 0$, то искомого φ в условии 2) леммы 1 можно построить в виде $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, где вектор (c_1, \dots, c_n) определяется однозначно из условия разрешимости уравнения (1.8).

Как следствие теоремы 3 и леммы 1 получаем следующий результат.

Следствие 1. Пусть выполнены условия леммы 1. Пусть в шаре $\|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r$ выполнено условие 1) теоремы 1. Тогда существуют секториальная окрестность $S_0 \subseteq S$ и $0 < r_0 \leq r$ такие, что при $\forall \lambda \in S_0$ в шаре $\|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r_0$ имеется единственное малое решение $x(\lambda)$ уравнения (0.1), причем $x(\lambda) \sim a(\lambda)\varphi$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Если область значений оператора B не замкнута, то в $N(B)$ может не быть вектора φ , при котором уравнение (1.8) разрешимо. Если, однако, в $N(B)$ найдется вектор φ , при котором $b + A\varphi \in \overline{R(B)}$, то можно получить такой результат.

Следствие 2. Пусть выполнены условия 1), 3) леммы 1, где в условии 3) элемент $\varphi \in N(B)$ такой, что $b + A\varphi \in \overline{R(B)}$. Пусть в шаре $\|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r$ выполняется условие 1) теоремы 1. Тогда сохраняется результат следствия 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ введем эквивалентное (0.1) уравнение (1.2). Сжимаемость соответствующего оператора $\Phi(V, \lambda)$ при $\forall \lambda \in S$ в некотором шаре $\|x - a(\lambda)\varphi\| \leq a(\lambda)r_0$, где $0 < r_0 \leq r$, показывается аналогично, как в теореме 1.

Остается показать, что существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ и $\forall V \in S(\varphi, r_0)$: $\|\Phi(V, \lambda) - \varphi\| \leq r_0$. С этой целью, используя сжатость оператора $\Phi(V, \lambda)$, получим оценку:

$$\begin{aligned} \|\Phi(V, \lambda) - \varphi\| &\leq \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(\varphi, \lambda)\| + \|\Phi(\varphi, \lambda) - \varphi\| \\ &\leq qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)(R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + B(\lambda)a(\lambda)\varphi)\|. \end{aligned}$$

Так как $\varphi \in N(B)$, то $B(\lambda)\varphi = a(\lambda)A\varphi + \omega(\lambda)\varphi$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)(R(a(\lambda)\varphi, \lambda) + B(\lambda)a(\lambda)\varphi)\| \\ &\leq \frac{1}{a(\lambda)} \|B^{-1}(\lambda)(R(a(\lambda)\varphi, \lambda) - a^2(\lambda)b + \omega(\lambda)a(\lambda)\varphi)\| + a(\lambda) \|B^{-1}(\lambda)(b + A\varphi)\|. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в последнем выражении — бесконечно малая величина при $\lambda \rightarrow 0$ в силу условий следствия 2. Покажем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} a(\lambda) \|B^{-1}(\lambda)(b + A\varphi)\| = 0,$$

так как $b + A\varphi \in \overline{R(B)}$. Рассмотрим оператор $a(\lambda)B^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in S$. В силу оценки (0.2) на любой последовательности $\{\lambda_n\}$ в S операторы $a(\lambda_n)B^{-1}(\lambda_n)$ являются равномерно ограниченными. Пусть элемент g принадлежит области значений оператора B , т. е. $g = Bx$, где $x \in D(B)$. Тогда

$$\begin{aligned} a(\lambda)B^{-1}(\lambda)g &= a(\lambda)B^{-1}(\lambda)Bx = a(\lambda)B^{-1}(\lambda)(B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda))x \\ &= a(\lambda)x - a^2(\lambda)B^{-1}(\lambda)Ax - a(\lambda)B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x, \end{aligned}$$

где справа нормы всех слагаемых бесконечно малы при $\lambda \rightarrow 0$. Итак, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} a(\lambda) \|B^{-1}(\lambda)g\| = 0$ при $\forall g \in R(B)$. Следовательно, на основании теоремы Банаха — Штейнгауза [11, с. 123] при $\forall g \in \overline{R(B)}$ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} a(\lambda) \|B^{-1}(\lambda)g\| = 0$. Следствие 2 доказано. \square

П р и м е р 1. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение:

$$\int_0^1 tsx(s) ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^2(s) ds - t\lambda^3 = 0, \quad x(t) \in C_{[0,1]}. \quad (1.9)$$

Здесь

$$B(\lambda)x = \int_0^1 ts x(s) ds + \lambda x(t),$$

$$R(x, \lambda) = - \int_0^1 x^2(s) ds - t\lambda^3.$$

Обратный оператор $B^{-1}(\lambda)$ имеет вид

$$B^{-1}(\lambda)f = \frac{1}{\lambda}f(t) - \frac{3t}{(3\lambda + 1)\lambda} \int_0^1 s f(s) ds \quad (1.10)$$

и удовлетворяет оценке (0.2) при $a(\lambda) = |\lambda|$.

Далее, легко видеть, что в некотором шаре $\|x\| \leq |\lambda|r$ выполнено условие 1) теоремы 1 с коэффициентом $L(\lambda) = 2|\lambda|$ и условие 2) теоремы 1.

Таким образом, на основании теоремы 1 уравнение (1.9) имеет в некотором шаре $\|x(t)\| \leq |\lambda|r_0 \leq |\lambda|r$ при $\forall \lambda : 0 < |\lambda| < \rho$ единственное решение, которое будет являться решением максимального порядка малости среди всех малых решений данного уравнения из окрестности нуля.

Укажем регулярный способ построения искомого решения методом последовательных приближений. Используя замену $x(t) = \lambda V(t)$ и явный вид оператора (1.10), уравнение (1.9) сведем к регулярному виду:

$$V(t) = \left(1 - \frac{3t}{6\lambda + 2}\right) \int_0^1 V^2(s) ds + \frac{3\lambda^2 t}{3\lambda + 1}.$$

Единственное малое решение последнего можно построить методом последовательных приближений

$$V_{n+1}(t) = \left(1 - \frac{3t}{6\lambda + 2}\right) \int_0^1 V_n^2(s) ds + \frac{3\lambda^2 t}{3\lambda + 1},$$

выбрав в качестве начального приближения $V_0 = 0$, или методом неопределенных коэффициентов в виде ряда $V(t) = \sum_{i=2}^{\infty} V_i(t)\lambda^i$.

Построенное решение уравнения (1.9) будет иметь вид

$$x(t) = 3t\lambda^3 - 9t\lambda^4 + \frac{45t + 6}{2}\lambda^5 - \frac{81t + 36}{2}\lambda^6 + \dots$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin sx(s) ds + (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)x(t) - x^4(t) - f(t, \lambda_1, \lambda_2) = 0, \quad x(t) \in C_{[0, \pi]}, \quad (1.11)$$

где вектор $\lambda \in \mathbb{R}^2$, $a_i \neq 0$. Функция $f(t, \lambda_1, \lambda_2)$ непрерывна по t и аналитична по λ_1, λ_2 . Секториальная окрестность S , в которой ищется решение, определяется условием $\text{sign } \lambda_i = \text{sign } a_i$.

Здесь

$$B(\lambda)x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin sx(s) ds + (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)x(t).$$

Оператор $B^{-1}(\lambda)$ имеет вид

$$B^{-1}(\lambda)h = \frac{1}{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2}h(t) - \frac{2 \sin t}{\pi(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + 1)(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)} \int_0^\pi \sin sh(s) ds$$

и удовлетворяет оценке (0.2) при $a(\lambda) = |a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2|$.

Если $\|f(t, \lambda_1, \lambda_2)\| = o(|a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2|^2)$, то будут выполнены все условия теоремы 1.

Если $f(t, \lambda_1, \lambda_2) = \sin t \sum_{i+k=2} a_{ik} \lambda_1^i \lambda_2^k + o(|a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2|^2)$, то будут выполнены все условия теоремы 2.

В обоих случаях интегральное уравнение имеет решение $x(t, \lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

П р и м е р 3. Пусть $X = Y = H$. Рассмотрим уравнение

$$(B_0 + a(\lambda)B_1)x = R(x, \lambda) + b(\lambda), \quad (1.12)$$

где B_0 — самосопряженный неотрицательный оператор, B_1 — самосопряженный положительный оператор, т. е. $(B_0x, x) \geq 0$, $(B_1x, x) \geq \gamma(x, x)$ для $\forall x \in H$. Нелинейный оператор $R(x, \lambda)$ удовлетворяет условию 1) теоремы 1, $\|b(\lambda)\| = o(a^2(\lambda))$. Уравнение (1.12) удовлетворяет всем условиям теоремы 1, причем $\|(B_0 + a(\lambda)B_1)^{-1}\| \leq 1/(\gamma a(\lambda))$.

В разд. 2 рассматривается случай фредгольмова оператора $B(0)$, когда условие (0.2) связано с максимальной длиной обобщенных жордановых цепочек оператора B_0 [1, гл. 9] и можно предложить другой метод последовательных приближений для построения минимальных ветвей.

2. Построение минимальных ветвей решений во фредгольмовом случае

Пусть теперь уравнение (0.1) имеет вид

$$B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda). \quad (2.1)$$

Линейный оператор $B(\lambda)$ удовлетворяет условиям введения, причем $B(0)$ — фредгольмов оператор, $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(B(0))$, $\{\psi_i\}_1^n$ — базис в $N^*(B(0))$. Нелинейный оператор $R : X \times \Lambda \rightarrow Y$ непрерывен по x и λ в окрестности нуля, $R(0, 0) = 0$,

$$\|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| \leq L(r)\|x_1 - x_2\|$$

при $|\lambda| \leq \rho$ и x_1, x_2 из шара $S(0, r)$, $L(r) = O(r)$. Функция $b(\lambda) : \Lambda \rightarrow Y$ определена и непрерывна в окрестности точки $\lambda = 0$, $b(0) = 0$. Так как $B(0)$ — фредгольмов оператор, то нетрудно указать способ проверки условия (0.2) построением обратного оператора $B^{-1}(\lambda)$. Действительно, введем, согласно обобщенной лемме Шмидта [11, § 21, п. 21.4], ограниченный оператор Треногина

$$\Gamma = \left(B(0) + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1}.$$

Здесь $\langle \varphi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $\langle z_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$.

Введем обозначение $A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} B(\lambda) - B(0)$.

Пусть при $x \in D(B(0))$

I. $\|A(\lambda)x\| \leq c(\lambda)(\|x\| + b\|B(0)x\|)$, где $c(\lambda) : S \subset \Lambda \rightarrow (0, +\infty)$ — определенный в секторальной окрестности S нуля положительный непрерывный функционал, $c(0) = 0$, $b \geq 0$.

Заметим, что $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} A(\lambda)\Gamma = 0$ и оператор $I - A(\lambda)\Gamma$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S_0 \subset S$, где $\|A(\lambda)\Gamma\| \leq q < 1$.

Пусть

II. $\left| \det \langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda)\varphi_i, \psi_k \rangle_{i,k=\overline{1,n}} \right| = \Delta(\lambda)$, где $\Delta(\lambda) \sim a(\lambda)$ при $S \ni \lambda \rightarrow 0$, $a(\lambda)$, как и в разд. 1, положительный непрерывный функционал, $a(0) = 0$.

З а м е ч а н и е 4. Если $\left| \det \left\langle \sum_{j=0}^{p-1} (A(\lambda)\Gamma)^j A(\lambda)\varphi_i, \psi_k \right\rangle_{i,k=\overline{1,n}} \right| \sim c \|\lambda\|^\alpha$ при $\lambda \rightarrow 0$ и $\alpha \leq p$, то условие II выполняется при $a(\lambda) = c \|\lambda\|^\alpha$.

Лемма 2. Пусть $B(0)$ — фредгольмов оператор и выполнены условия I, II. Тогда оператор $B(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при $\lambda \in S$ и выполнена оценка (0.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать решение линейного уравнения $B(\lambda)x = f$ при $\lambda \in S$ в виде

$$x = \Gamma u + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i,$$

где $\langle u, \varphi_k \rangle = 0$, $k = \overline{1, n}$.

Тогда $u = (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} \left(f + A(\lambda) \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right)$. При этом вектор $c = (c_1, \dots, c_n)^1$ определится при $\lambda \in S$ из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n \langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda)\varphi_i, \psi_k \rangle c_i = \langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} f, \psi_k \rangle, \quad k = \overline{1, n}$$

с невырожденной при $\lambda \in S$ матрицей, согласно условиям II.

Ввиду условия II выполнена оценка $\|c\| = O(1/a(\lambda))$ и лемма 2 доказана. \square

Далее пусть $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$, где $\|B_1 x\| \leq a(\|x\| + b\|B_0 x\|)$, $a > 0$, $b \geq 0$, B_0 — фредгольмов оператор.

Пусть [1, гл.9]

III. Элементы $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, p_i}$ образуют полный B_1 — жорданов набор фредгольмова оператора B_0 , а функционалы $\{\psi_i^{(k)}\}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, p_i}$ образуют полный B_1^* — жорданов набор оператора B_0^* .

Напомним [1, гл. 9], что не ограничивая общности, в условии III далее можно считать:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(k)} &= (\Gamma B_1)^{k-1} \varphi_i^{(1)}, \quad \psi_i^{(k)} = (\Gamma^* B_1^*)^{k-1} \psi_i^{(1)}, \quad k = \overline{2, p_i}, \quad i = \overline{1, n}, \\ \langle B_1 \varphi_i^{(p_i)}, \psi_k^{(1)} \rangle &= \delta_{ik}, \quad \langle B_1^* \psi_i^{(p_i)}, \varphi_k^{(1)} \rangle = \delta_{ik}, \quad \Gamma = \left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1}, \\ \gamma_i &= B_1^* \psi_i^{(p_i)}, \quad z_i = B_1 \varphi_i^{(p_i)}. \end{aligned}$$

О п р е д е л е н и е. Линейный оператор $\Gamma(\lambda)$ называется левым асимптотическим регуляризатором оператор-функции $B(\lambda)$, если $\lim_{S \ni \lambda \rightarrow 0} \Gamma(\lambda)B(\lambda)x = x$ при $\forall x \in D(B)$.

Аналогично вводится правый асимптотический регуляризатор оператора $B(\lambda)$.

Если $\lambda = 0$ является изолированной особой фредгольмовой точкой оператор-функции $B(\lambda)$, то асимптотические регуляризаторы можно построить в явном виде.

Лемма 3. Пусть $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$ и условие III выполнено. Тогда в окрестности $0 < |c(\lambda)| < \varepsilon$ существует ограниченный обратный оператор $B^{-1}(\lambda)$, а также левый и правый регуляризаторы $\Gamma_l(\lambda)$ и $\Gamma_r(\lambda)$ оператора $B(\lambda)$, определяемые формулами

$$\Gamma_l(\lambda) = \Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(p_i+1-s)} \rangle \varphi_i^{(1)},$$

$$\Gamma_r(\lambda) = \Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle \varphi_i^{(p_i+1-s)}.$$

При этом $B^{-1}(\lambda) = \Gamma_r(\lambda)(I - c(\lambda)B_1\Gamma)^{-1}$, где $\|B^{-1}(\lambda)\| = O(1/c^p(\lambda))$, $p = \max(p_1, \dots, p_n)$.

Если B_1 — ограниченный оператор и $0 < |c(\lambda)| < 1/(\|\Gamma\|\|B_1\|)$, то будут справедливы операторные тождества

$$B^{-1}(\lambda) = (I - c(\lambda)\Gamma B_1)^{-1}\Gamma_l(\lambda) = \Gamma_r(\lambda)(I - c(\lambda)B_1\Gamma)^{-1}.$$

Доказательство. Существование обратного оператора $B^{-1}(\lambda)$ в окрестности $0 < |c(\lambda)| < \varepsilon$ при выполнении условия III хорошо известно [1, с. 428]. Справедливость операторных тождеств

$$\Gamma_l(\lambda)(B_0 - c(\lambda)B_1) = I - c(\lambda)\Gamma B_1,$$

$$(B_0 - c(\lambda)B_1)\Gamma_r(\lambda) = I - c(\lambda)B_1\Gamma$$

проверяется простыми вычислениями исходя из определения оператора

$$\Gamma \stackrel{def}{=} \left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right)^{-1}$$

и построения элементов $\{\varphi_i^{(j)}\}$, $\{\psi_i^{(j)}\}$, $\{\gamma_i\}$, $\{z_i\}$. □

З а м е ч а н и е 5. Используя определение оператора Γ и тождества $\langle z_l, \psi_i^{(k)} \rangle = 0$ при $i \neq l$, $k \neq 1$, легко проверить, что регуляризаторы $\Gamma_r(\lambda)$ и $\Gamma_l(\lambda)$ являются эпиморфизмами.

З а м е ч а н и е 6. Пусть B_0, M, B_1 — линейные ограниченные операторы из пространства $L(X \rightarrow X)$, X — банахово пространство. Пусть оператор M коммутирует с операторами B_0, B_1 , имеет ограниченный обратный и выполнено условие III. Тогда левый регуляризатор оператора $B_0 - c(\lambda)B_1$ имеет вид

$$\Gamma_l(\lambda) = \Gamma - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{p_i} c^{-s}(\lambda) \langle M^{-s} \cdot, \psi_i^{(p_i+1-s)} \rangle \varphi_i^{(1)}$$

и выполнится тождество

$$\Gamma_l(\lambda)(B_0 - c(\lambda)MB_1) = I - c(\lambda)\Gamma MB_1.$$

Левые и правые регуляризаторы для оператора $L(\partial/\partial t)B_0 - B_1$ с дифференциальным оператором при фредгольмовом операторе B_0 вводились в [13, с. 5; 5]. Подобные регуляризаторы использовались при численном решении алгебро-дифференциальных уравнений [12].

Левые и правые регуляризаторы можно использовать при построении решений уравнения (2.1).

Теорема 4. Пусть оператор $B(\lambda) = B_0 - c(\lambda)B_1$ и выполнено условие III, причем $\max(p_1, \dots, p_n) = p$, B_1 — ограниченный оператор. Пусть $\|b(\lambda)\| = o(c(\lambda))$, $\|R(x, \lambda)\| = O(\|x\|^l)$, $l \geq 2$, $t \geq pl/(l-1)$. Тогда уравнение (2.1) при $\lambda \in S_0 \subset S$ имеет единственную минимальную ветвь $x(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Ветвь $x(\lambda)$ удовлетворяет оценке $\|x(\lambda)\| = o(c(\lambda)^{p/(l-1)})$, последовательность $x_n(\lambda)$, где

$$x_n = c(\lambda)\Gamma B_1 x_{n-1} + \Gamma_l(\lambda)(R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)), \tag{2.2}$$

$x_0 = 0$, $n = 1, 2, \dots$, сходится при $\lambda \in S_0$ к этой ветви.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя к обеим частям уравнения (2.1) оператор $\Gamma_l(\lambda)$, являющийся при $\lambda \in S$ эпиморфизмом, получим уравнение

$$x - c(\lambda)\Gamma B_1 x = \Gamma_l(\lambda)(R(x, \lambda) + b(\lambda)). \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) с помощью замены

$$x = c(\lambda)^{p/(l-1)} V \quad (2.4)$$

приведем к виду

$$V - c(\lambda)\Gamma B_1 V = c(\lambda)^{-p/(l-1)} \Gamma_l(\lambda)(R(c(\lambda)^{p/(l-1)} V, \lambda) + b(\lambda)). \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) в силу условий теоремы 4 в окрестности точки $\lambda = 0$, $V = 0$ удовлетворяет всем условиям теоремы о неявном операторе [11, с. 409]. Поэтому уравнение (2.5) имеет единственное решение $V(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$. Последовательность

$$V_n = c(\lambda)\Gamma B_1 V_{n-1} + c(\lambda)^{-p/(l-1)} \Gamma_l(\lambda)(R(c(\lambda)^{p/(l-1)} V_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)),$$

$V_0 = 0$, сходится к этому решению. Учитывая замену (2.4), убеждаемся, что и последовательные приближения (2.2) сходятся к искомой ветви. \square

З а м е ч а н и е 7. Система разветвления малых решений [1, с. 354] в условиях теоремы 4 имеет вид

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}(\lambda) \xi_k = \Gamma_i(\xi, \lambda) + b_i(\lambda), \quad i = \overline{1, n},$$

где $a_{ik}(\lambda) = \delta_{ik} c(\lambda)^{pk} + o(c(\lambda)^{pk})$, $i, k = \overline{1, n}$, $|\Gamma_i(\xi, \lambda)| = O(|\xi|^l)$, $|b_i(\lambda)| = o(|c(\lambda)|^m)$, $m \geq \max(p_1, \dots, p_n) \cdot l/(l-1)$. Эта система имеет в области $|\xi| \leq r c(\lambda)^{p/(l-1)}$ единственное малое решение с оценкой $|\xi| = o(c(\lambda)^{p/(l-1)})$. Поэтому существование и единственность минимальной ветви уравнения (2.1) вытекают из структуры системы разветвления.

С л е д с т в и е 3. Пусть в условиях теоремы 4 $\langle B_1 \varphi_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$, $i, k = \overline{1, n}$. Тогда последовательность x_n , где x_n определяется единственным образом из линейного уравнения

$$\left(B_0 + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i \right) x_n = \left(I - \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i \right) (R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)) + c(\lambda) B_1 x_{n-1}, \quad (2.6)$$

где $x_0 = 0$, $\gamma_i = B_1^* \psi_i$, $z_i = B_1 \varphi_i$, сходится к минимальной ветви решения уравнения (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\langle B_1 \varphi_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}$, то левый регуляризатор в формуле (2.2) имеет вид

$$\Gamma_l(\lambda) = \Gamma - \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i.$$

Поэтому на основании теоремы 4 последовательность x_m определяется следующим образом:

$$x_m = c(\lambda)\Gamma B_1 x_{m-1} + \left(\Gamma - \frac{1}{c(\lambda)} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i \right) (R(x_{m-1}, \lambda) + b(\lambda)),$$

$x_0 = 0$. Умножая обе части этого выражения на обратный оператор Γ^{-1} , приходим к искомому результату (2.6). \square

П р и м е р 4. Интегральное уравнение

$$u(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos s [(1 + \lambda)u(s) - su^3(s)] ds = \lambda^3 \cos x$$

имеет ровно три малых решения

$$u^1 = -\lambda^2 \cos x + O(|\lambda|^3),$$

$$u^{2,3} = \pm 2\sqrt{\frac{\lambda}{3\pi}} \cos x + O(|\lambda|)$$

и удовлетворяет условиям следствия 3. При этом $n = 1$, $\varphi = \psi = \gamma = z = \cos x/\sqrt{\pi}$, $\Gamma = I$.

Последовательные приближения, сходящиеся к минимальной ветви $u^1(x, \lambda)$, можно строить согласно следствию 3 по формуле

$$u_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos s (\lambda u_{m-1}(s) - s u_{m-1}^3(s) + \frac{s}{\lambda} u_{m-1}^3(s)) ds - \lambda^2 \cos x + \lambda^3 \cos x,$$

$$u_0(x) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вайнберг М.М., Треногин В.А.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
2. **Иванов В.К.** Избранные научные труды. Математика. М.: Физматлит, 2008. 552 с.
3. **Леонтьев Р.Ю.** Теоремы о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений // Вест. ЮУрГУ. 2008. №15(115), вып. 1. С. 37–41. (Математическое моделирование и программирование.)
4. **Логинов Б.В., Сидоров Н.А.** Групповая симметрия уравнения разветвления Ляпунова — Шмидта и итерационные методы в задаче о точке бифуркации // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 5. С. 681–691.
5. **Сидоров Н.А.** Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы // Нелинейные граничные задачи / Ин-т прикл. математики и механики. Донецк, 2004. Вып. 14. С. 161–164.
6. **Сидоров Н.А.** Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982. 312 с.
7. **Сидоров Н.А., Треногин В.А.** Точки бифуркации нелинейных уравнений // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Под ред. В.А. Треногина, А.Ф. Филиппова. М.: Физматлит, 2003. С. 5–49.
8. **Сидоров Н.А., Треногин В.А.** Регуляризация простых решений // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 1. С. 180–185.
9. **Сидоров Н.А.** Явная и неявная параметризация при построении разветвляющихся решений итерационными методами // Мат. сб. 1995. Т. 182, № 2. С. 129–141.
10. **Тихонов А.Н., Иванов В.К., Лаврентьев М.М.** Некорректно поставленные задачи // Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 1970. С. 224–238.
11. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007. 488 с.
12. **Чистяков В.Ф.** Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. 278 с.
13. **Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov [at al.]** Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 548 p.

Сидоров Николай Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор ИМЭИ ИГУ
гл. науч. сотрудник ИДСТУ СО РАН
e-mail: sidorov@math.isu.runnet.ru

Поступила 13.11.2009

Леонтьев Роман Юрьевич
аспирант
ИМЭИ ИГУ
e-mail: lev_roma@bk.ru

УДК 517.948

О ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ¹**В. П. Танана, А. И. Сидикова**

Предложен оптимальный по порядку метод приближенного решения задачи вычисления значений неограниченного оператора.

Ключевые слова: операторные уравнения, регуляризация, оптимальный метод, оценка погрешности, некорректная задача.

V. P. Tanana, A. I. Sidikova. On the guaranteed accuracy estimate of an approximate solution of one inverse problem of thermal diagnostics.

An order-optimal method of the approximate solution of the problem of calculating the values of an unbounded operator is suggested.

Keywords: operator equations, regularization, optimal method, error estimate, ill-posed problem.

Введение

При планировании стендовых испытаний ракетных двигателей важную роль играет точность решения соответствующей обратной задачи тепловой диагностики [1]. Для достижения этой точности необходимо использовать более совершенные математические модели, в которых учтены теплофизические свойства взаимодействия твердых тел с окружающей средой. Все это приводит к решению обратных смешанных граничных задач для уравнения теплопроводности. Для приближенного решения соответствующих задач необходимо получать гарантированные оценки их погрешности, которые определяют степень достоверности теоретических расчетов.

В настоящей работе методом проекционной регуляризации [2] решена обратная смешанная граничная задача для уравнения теплопроводности и получены точные по порядку оценки погрешности этого решения.

1. Постановка задачи

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$\partial u(x, t) / \partial t = \partial^2 u(x, t) / \partial x^2, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

решение $u(x, t)$ которого удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.2)$$

$$u(0, t) = h(t), \quad t \geq 0 \quad (1.3)$$

и

$$\partial u(1, t) / \partial x + \kappa u(1, t) = 0, \quad \kappa > 0, \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-96000).

где $h(t) \in C^2[0, \infty)$; $h(0) = h'(0) = 0$ и существует число $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \geq t_0$

$$h(t) = 0. \quad (1.5)$$

Предположим, что функция $h(t)$ нам не известна и подлежит определению, а вместо нее в точке $x_1 \in (0, 1)$ измеряется температура $f(t)$ стержня, соответствующая данному процессу

$$u(x_1, t) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

В дальнейшем функции $u(x, t)$, $f(t)$ и $h(t)$ будем считать комплекснозначными, т. е.

$$u(x, t) = u_1(x, t) + iu_2(x, t), \quad f(t) = f_1(t) + if_2(t) \quad \text{и} \quad h(t) = h_1(t) + ih_2(t),$$

где $u_i(x, t)$, $f_i(t)$ и $h_i(t)$ — действительные функции, $i = 1, 2$.

Для решения данной обратной задачи будем использовать преобразование Фурье решения $u(x, t)$ по переменной t на полупрямой $[0, \infty)$.

Для правомерности применения этого преобразования в разд. 2 докажем, что

$$u(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)), \quad u'_x(x, t) \in C([0, 1] \times (0, \infty)), \quad u''_{xx}(x, t) \in C((0, 1) \times (0, \infty))$$

и для любого $t > 0$ $u''_{xx}(x, t) \in L_2[0, 1]$, а в разд. 3 — что существует число $\bar{c} > 0$ такое, что для любого $t \geq t_0 + 2$

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left\{ |u(x, t)|, |u'_x(x, t)|, |u''_{xx}(x, t)| \right\} \leq \bar{c} e^{-(t-t_0-1)}.$$

2. Исследование гладкости функции $u(x, t)$

Поскольку гладкость функции $u(x, t)$ определяется соответствующей гладкостью ее действительной $Re[u(x, t)]$ и мнимой $Im[u(x, t)]$ составляющих, то исследование гладкости функции $u(x, t)$ достаточно провести в предположении, что функции $u(x, t)$ и $h(t)$ действительны.

Сделаем замену

$$U(x, t) = u(x, t) + [\kappa x / (1 + \kappa) - 1] h(t). \quad (2.1)$$

Тогда

$$\partial U(x, t) / \partial t = \partial^2 U(x, t) / \partial x^2 + [\kappa x / (1 + \kappa) - 1] h'(t), \quad 0 < x < 1, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

$$U(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.3)$$

$$U(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

$$U'_x(1, t) + \kappa U(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

Используя методику, изложенную в [3, с. 83], запишем решение задачи (2.2)–(2.5) в виде ряда

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin \lambda_n x, \quad (2.6)$$

где λ_n являются нетривиальными положительными решениями уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = -\lambda / \kappa, \quad (2.7)$$

$$\int_0^1 \sin^2 \lambda_n x dx = (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)/4\lambda_n, \quad (2.8)$$

а

$$U_n(t) = 2b_n \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} h'(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

где

$$b_n = -4/(2\lambda_n - \sin 2\lambda_n). \quad (2.10)$$

Интегрируя правую часть равенства (2.9) по частям, получим

$$U_n(t) = \frac{2b_n}{\lambda_n^2} \left[h'(t) - \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} h''(\tau) d\tau \right]. \quad (2.11)$$

Лемма 1. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), определяемое формулами (2.6)–(2.10). Тогда $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть

$$r_1 = \max_{t \in [0, t_0]} (|h(t)| + |h'(t)| + |h''(t)|). \quad (2.12)$$

Тогда оценим общий член ряда (2.6)

$$|U_n(t) \sin \lambda_n x| \leq |U_n(t)|. \quad (2.13)$$

Из (2.10) и (2.11) следует, что

$$|U_n(t)| \leq \frac{8}{\lambda_n^2(2\lambda_n - 1)} \left[|h'(t)| + \max_{0 \leq \tau \leq t} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \int_0^t |h''(\tau)| d\tau \right]. \quad (2.14)$$

Так как

$$\max_{0 \leq \tau \leq t} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \leq 1,$$

то из (2.12) и (2.14) получаем, что

$$|U_n(t)| \leq 16r_1 t_0 / (2\lambda_n^3 - \lambda_n^2). \quad (2.15)$$

Из (2.7) вытекает, что для любого n

$$\lambda_n = (2n + 1)\pi/2 + \mu_n, \quad (2.16)$$

где

$$\mu_n \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.17)$$

а из (2.16) и (2.17) следует существование чисел c_1 и $c_2 > 0$ таких, что для любого n

$$c_1(n + 1) \leq \lambda_n \leq c_2(n + 1). \quad (2.18)$$

Из (2.13), (2.15) и (2.18) следует существование числа $c_3 > 0$ такого, что для любого n

$$|U_n(t) \sin \lambda_n x| \leq c_3(n + 1)^{-3}. \quad (2.19)$$

Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-3}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса ряд (2.6) сходится равномерно на полосе $[0, 1] \times [0, \infty)$.

Таким образом, из теоремы о предельном переходе под знаком ряда вытекает, что

$$U(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0 \quad (\text{равномерно на } [0, 1]), \quad (2.20)$$

а из (2.1) и (2.19) следует утверждение леммы.

Из леммы 1 и соотношений (2.1), (2.6), (2.19) и (2.20) получаем, что

$$u(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)). \quad (2.21)$$

Для исследования гладкости функции $U'_x(x, t)$ рассмотрим ряд, составленный из первых производных по x слагаемых ряда (2.6)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n U_n(t) \cos \lambda_n x. \quad (2.22)$$

Из (2.13), (2.14) и (2.18) будет следовать существование числа $c_4 > 0$ такого, что для любых значений $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$ и n

$$|\lambda_n U_n(t) \cos \lambda_n x| \leq c_4 (n+1)^{-2}. \quad (2.23)$$

Из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-2}$ и соотношения (2.23) по признаку Вейерштрасса вытекает равномерная сходимость ряда (2.22) в полосе $[0, 1] \times [0, \infty)$.

Таким образом, из теоремы 7, доказанной [4, с. 476], следует, что для любых значений $x \in [0, 1]$ и $t > 0$ справедливо равенство

$$U'_x(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n U_n(t) \cos \lambda_n x,$$

$U'_x(x, t)$ продолжимо по непрерывности до $t = 0$, а потому

$$U'_x(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)). \quad (2.24)$$

Из (2.1) и (2.24) получаем, что

$$\bar{u}'_x(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)), \quad (2.25)$$

где для любых $t > 0$ и $0 < x < 1$ $\bar{u}'_x(x, t) = u'_x(x, t)$.

Теперь рассмотрим ряд, составленный из вторых производных слагаемых ряда (2.6)

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 U_n(t) \sin \lambda_n x. \quad (2.26)$$

Из (2.18) и (2.23) будет следовать существование числа $c_5 > 0$ такого, что для любых значений $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$ и n

$$|\lambda_n^2 U_n(t) \sin \lambda_n x| \leq c_5 (n+1)^{-1}. \quad (2.27)$$

Из (2.27) очевидно, что для любого $t > 0$ ряд (2.26) будет сходиться в метрике пространства $L_2[0, 1]$.

Так как оператор d^2/dx^2 , определенный на классе функций

$$D = \left\{ \varphi(x) : \varphi, \varphi', \varphi'' \in L_2[0, 1], \varphi(0) = 0 \text{ и } \varphi'(1) + \kappa\varphi(1) = 0 \right\},$$

замкнут в пространстве $L_2[0, 1]$, то из равномерной сходимости ряда (2.22) и сходимости ряда (2.26) в метрике пространства $L_2[0, 1]$ будет следовать, что для любого $t > 0$

$$\partial^2 U(x, t)/\partial x^2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 U_n(t) \sin \lambda_n x \quad \text{почти всюду.} \quad (2.28)$$

Из (2.1) и (2.28) будет следовать, что для любого $t > 0$

$$u''_{xx}(x, t) \in L_2[0, 1]. \quad (2.29)$$

Теперь перейдем к более детальному исследованию непрерывности функции $u''_{xx}(x, t)$ в полосе $(0, 1] \times (0, \infty)$. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \lambda_n x / (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)$$

сходится равномерно на отрезке $[\varepsilon, 1]$.

Доказательство. Сначала преобразуем уравнение (2.7)

$$\sin \lambda + \lambda \cos \lambda / \kappa = 0. \quad (2.30)$$

Из (2.30) следует, что

$$\kappa \cdot \sin \lambda / \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} + \lambda \cdot \cos \lambda / \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2} = 0. \quad (2.31)$$

Обозначим

$$\sin \alpha = \kappa / \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}, \quad \cos \alpha = \lambda / \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}. \quad (2.32)$$

Из (2.31) и (2.32) очевидно, что

$$\cos(\lambda - \alpha) = 0. \quad (2.33)$$

Ввиду того что $\lambda > 0$, а $\operatorname{tg} \lambda < 0$, из (2.33) получаем, что

$$\lambda - \alpha = \pi/2 + \pi n. \quad (2.34)$$

Из (2.32) и (2.34) следует, что

$$\sin[\lambda_n - (\pi/2 + \pi n)] = \kappa / \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2},$$

где

$$\lambda_n = (\pi/2 + \pi n) + \alpha_n \quad (2.35)$$

и ввиду (2.7)

$$\alpha_n \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

Из (2.31), (2.35) и (2.36) вытекает, что для любого n

$$\sin \alpha_n \leq 1/\kappa \pi n. \quad (2.37)$$

Из (2.35)–(2.37) получаем, что

$$|\sin \lambda_n x - \sin(\pi/2 + \pi n)x| \leq 2 \sin(\alpha_n/2) \leq 2/\kappa \pi n, \quad (2.38)$$

$$\frac{\sin \lambda_n x}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} = \frac{\sin \lambda_n x}{2\lambda_n} + \left(\frac{\sin \lambda_n x}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} - \frac{\sin \lambda_n x}{2\lambda_n} \right)$$

и

$$\left| \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)x}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} - \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)x}{2\lambda_n} \right| \leq \frac{1}{\lambda_n(\lambda_n - 1)}. \quad (2.39)$$

Обозначим $\varphi_n(x) = (\sin \lambda_n x - \sin(\pi/2 + \pi n)x)$,

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)x}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} - \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi n)x}{2\lambda_n} \right).$$

Тогда

$$\sin(\lambda_n x)/(2\lambda_n - \sin 2\lambda_n) = \sin(\pi/2 + \pi n)x/2\lambda_n + \varphi_n(x)/(2\lambda_n - \sin 2\lambda_n) + \psi_n(x), \quad (2.40)$$

а из (2.38)–(2.40) следует утверждение леммы.

Лемма 3. Для любого $\varepsilon > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 U_n(t) \sin \lambda_n x$$

сходится равномерно в полосе $[\varepsilon, 1] \times [0, \infty)$.

Доказательство. Из (1.5) и (2.12) получаем оценку

$$\left| \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} h''(\tau) d\tau \right| \leq r_1/\lambda_n^2. \quad (2.41)$$

Из (2.18) и (2.41) очевидно, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} h''(\tau) d\tau \right] \frac{\sin \lambda_n x}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} \quad (2.42)$$

сходится равномерно в полосе $[0, 1] \times [0, \infty)$.

Так как из (2.10), (2.11) следует, что для любого n

$$\lambda_n^2 U_n(t) \sin \lambda_n x = \frac{8h'(t) \sin \lambda_n x}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} - 8 \left[\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} h''(\tau) d\tau \right] \frac{\sin \lambda_n x}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}, \quad (2.43)$$

то из леммы 2 и соотношений (2.42) и (2.43) вытекает, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 U_n(t) \sin \lambda_n x$$

сходится равномерно в полосе $[\varepsilon, 1] \times [0, \infty)$.

Тем самым лемма доказана.

Из леммы 3 следует, что для любых значений $x \in (0, 1)$ и $t > 0$

$$U''_{xx} = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 U_n(t) \sin \lambda_n x, \quad (2.44)$$

кроме того, из леммы 3 и (2.44) получаем, что функция U''_{xx} продолжима по непрерывности до $t = 0$. Обозначим это продолжение через $\bar{U}''_{xx}(x, t)$.

Тогда

$$\bar{U}''_{xx}(x, t) \in C((0, 1] \times [0, \infty)), \quad (2.45)$$

а из (2.1) и (2.45) вытекает, что

$$\bar{u}''_{xx}(x, t) \in C((0, 1] \times [0, \infty)), \quad (2.46)$$

где для любых $t > 0$ и $0 < x < 1$ $\bar{u}''_{xx}(x, t) = u''_{xx}(x, t)$.

Пусть $T > 0$, $\Phi(t) \in C[0, T]$.

Тогда из (2.25) и (2.46) следует, что

$$\int_0^T u'_x(x, t) \Phi(t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^T u(x, t) \Phi(t) dt \right] \quad (2.47)$$

и

$$\int_0^T u''_{xx}(x, t) \Phi(t) dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^T u(x, t) \Phi(t) dt \right]. \quad (2.48)$$

Для окончательного обоснования применимости преобразования Фурье по t на полупрямой $[0, \infty)$ для решения задачи (1.1), (1.2), (1.4) и (1.6) необходимо формулы (2.47) и (2.48) распространить на случай $T = \infty$. Для этого исследуем скорость убывания функций $u(x, t)$, $u'_x(x, t)$ и $u''_{xx}(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$.

3. Исследование скорости убывания функций $u(x, t)$, $u'_x(x, t)$ и $u''_{xx}(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$

Так как скорость убывания функций $u(x, t)$, $u'_x(x, t)$ и $u''_{xx}(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяется скоростями убывания ее действительных и мнимых составляющих, то этот вопрос достаточно исследовать в предположении действительных функций $h(t)$ и $u(x, t)$.

Для этого рассмотрим вспомогательную задачу, использующую условие (1.5).

$$\partial u(x, t) / \partial t = \partial^2 u(x, t) / \partial x^2, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq t_0, \quad (3.1)$$

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (3.3)$$

и

$$\partial u(1, t) / \partial x + \kappa u(1, t) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (3.4)$$

Из (1.5), (2.21), (2.25) и (2.29) следует, что

$$u_0(x) \in W_2^2[0, 1], \quad u_0(0) = 0, \quad u_0'(1) + \kappa u_0(1) = 0. \quad (3.5)$$

Решение задачи (3.1)–(3.4) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} \sin \lambda_n x, \quad (3.6)$$

где λ_n определены формулой (2.7), а

$$u_n = \frac{4\lambda_n}{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} \int_0^1 u_0(x) \sin \lambda_n x dx. \quad (3.7)$$

Интегрируя правую часть равенства (3.7) по частям, получим

$$u_n = -\frac{4}{\lambda_n(2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} \int_0^1 u_0''(x) \sin \lambda_n x dx. \quad (3.8)$$

Из (3.5) и (3.8) следует существование числа $c_6 > 0$ такого, что для любого n

$$|u_n| \leq c_6/\lambda_n^2. \quad (3.9)$$

Из (3.6) и (3.9) имеем, что для любого $t \geq t_0 + 1$

$$|u(x, t)| \leq c_6 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}, \quad (3.10)$$

$$|u'_x(x, t)| \leq c_6 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} \quad (3.11)$$

и

$$|u''_{xx}(x, t)| \leq c_6 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}. \quad (3.12)$$

Так как

$$e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} = e^{-\lambda_n^2} \cdot e^{-\lambda_n^2(t-t_0-1)}, \quad (3.13)$$

а из (2.18) очевидно, что

$$e^{-\lambda_n^2} \leq [e^{c_1^2}]^{-n}, \quad (3.14)$$

то из (3.1), (3.10)–(3.14) получаем существование числа $c_7 > 0$ такого, что для любого $t \geq t_0 + 2$

$$\sup_{x \in [0, 1]} \left\{ |u(x, t)|, |u'_x(x, t)|, |u'_t(x, t)|, |u''_{xx}(x, t)| \right\} \leq c_7 e^{-(t-t_0-1)}. \quad (3.15)$$

Из (2.25), (2.46), (2.47), (2.48) и (3.15) на основании теоремы, доказанной в [5, с. 476], следует

Теорема 1. Пусть $\Phi(t) \in C[0, \infty)$ и ограничена на этой полупрямой. Тогда справедливы соотношения

$$\int_0^{\infty} u'_x(x, t) \Phi(t) dt = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\infty} u(x, t) \Phi(t) dt \right]$$

и

$$\int_0^{\infty} u''_{xx}(x, t) \Phi(t) dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\int_0^{\infty} u(x, t) \Phi(t) dt \right].$$

4. Постановка обратной граничной задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) и сведение ее к задаче вычисления значений неограниченного оператора

Пусть $\overline{H} = L_2[0, \infty) + iL_2[0, \infty)$ над полем комплексных чисел, а множество $M_r \subset \overline{H}$ и определено формулой

$$M_r = \left\{ h(t) : h(t) \in \overline{H}, \int_0^{\infty} |h(t)|^2 dt + \int_0^{\infty} |h'(t)|^2 dt \leq r^2 \right\}, \quad (4.1)$$

где r — известное положительное число. Тогда предположим, что при $f(t) = f_0(t)$, участвующем в условии (1.6), существует функция $h_0(t)$, принадлежащая множеству M_r , но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in \overline{H} \cap L_1[0, \infty)$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\|_{\overline{H}} \leq \delta. \quad (4.2)$$

Требуется, используя f_δ, δ и M_r , определить приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) и оценить уклонение $\|h_\delta - h_0\|$ приближенного решения h_δ от точного h_0 .

Для решения данной задачи введем оператор F , отображающий \overline{H} на \overline{H} и определяемый формулой

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} h(t) e^{-i\tau t} dt, \quad \tau \geq 0, \quad h(t) \in \overline{H}, \quad (4.3)$$

а F^{-1} — оператор, обратный F ,

$$F^{-1}[g(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} g(\tau) e^{i\tau t} d\tau, \quad t \geq 0. \quad (4.4)$$

Лемма 4. Для операторов F и F^{-1} , определяемых формулами (4.3) и (4.4), справедливы следующие соотношения:

$$\|F\| \leq \sqrt{2} \quad \text{и} \quad \|F^{-1}\| \leq \sqrt{2}.$$

Доказательство. Докажем первое из соотношений. Для этого возьмем произвольную функцию $h(t) \neq 0$ из пространства \overline{H} и продолжим ее на отрицательную полуось, положив

$$h(t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (4.5)$$

Таким образом, $h(t) \in L_2(-\infty, \infty) + iL_2(-\infty, \infty)$.

Обозначим через $\overline{h}(\tau)$ преобразование Фурье функции $h(t)$

$$\overline{h}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\tau t} dt, \quad -\infty < \tau < \infty. \quad (4.6)$$

Из теоремы Планшереля, сформулированной в [6, с. 412], очевидно, что

$$\|\overline{h}(\tau)\| = \|h(t)\|. \quad (4.7)$$

Пусть $\hat{h}(\tau) = F[h(t)]$. Тогда из (4.3), (4.5) и (4.6) следует, что для любого $\tau \geq 0$

$$\hat{h}(\tau) = \sqrt{2} \overline{h}(\tau). \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (4.8) получаем, что при условии $\tau \geq 0$

$$\|\hat{h}(\tau)\| \leq \sqrt{2}\|\bar{h}(\tau)\| = \sqrt{2}\|h(t)\|,$$

т. е.

$$\|F\| \leq \sqrt{2}.$$

Второе соотношение доказывается аналогично. Из теоремы 1 следует применимость преобразования F , определяемого формулой (4.3), к решению задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.6).

Таким образом, сведем ее к следующей

$$\partial^2 \hat{u}(x, \tau) / \partial x^2 = i\tau \hat{u}(x, \tau), \quad x \in (0, 1), \quad \tau > 0, \quad (4.9)$$

где $\hat{u}(x, \tau) = F[u(x, t)]$.

$$\hat{u}(x_1, \tau) = \hat{f}(\tau), \quad (4.10)$$

где $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$.

$$\partial \hat{u}(1, \tau) / \partial x + \kappa \hat{u}(1, \tau) = 0. \quad (4.11)$$

Решение уравнения (4.9) имеет вид

$$\hat{u}(x, \tau) = A(\tau)e^{\mu_0 x \sqrt{\tau}} + B(\tau)e^{-\mu_0 x \sqrt{\tau}}, \quad (4.12)$$

где $\mu_0 = (1 + i)/\sqrt{2}$, а $A(\tau)$ и $B(\tau)$ — произвольные функции.

Из (4.10)–(4.12) следует, что

$$\hat{u}(0, \tau) = \frac{\operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\tau} + (\mu_0 \sqrt{\tau})^{-1} \kappa \operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}}{\operatorname{ch} \mu_0 (1 - x_1) \sqrt{\tau} + (\mu_0 \sqrt{\tau})^{-1} \kappa \operatorname{sh} \mu_0 (1 - x_1) \sqrt{\tau}} \hat{f}(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (4.13)$$

Обозначим знаменатель правой части формулы (4.13) через $g(\tau)$

$$g(\tau) = \operatorname{ch} \mu_0 (1 - x_1) \sqrt{\tau} + (\mu_0 \sqrt{\tau})^{-1} \kappa \operatorname{sh} \mu_0 (1 - x_1) \sqrt{\tau}.$$

Лемма 5. Пусть $\kappa \leq 1/2$. Тогда существует число $c_9 > 0$ такое, что для любого $\tau \geq 0$

$$|g(\tau)| \geq c_9.$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[g(\tau)] &= \left\{ \cos((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) [\sqrt{2\kappa^2/\tau} \operatorname{sh}((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) + \operatorname{ch}((1 - x_1)\sqrt{\tau/2})] \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2\kappa^2/\tau} \operatorname{ch}((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) \sin((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) \right\}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[g(\tau)] &= \left\{ \sin((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) [\sqrt{2\kappa^2/\tau} \operatorname{ch}((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) + \operatorname{sh}((1 - x_1)\sqrt{\tau/2})] \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2\kappa^2/\tau} \operatorname{sh}((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) \cos((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) \right\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

то из (4.14) имеем, что при условии $0 \leq (1 - x_1)\sqrt{\tau/2} \leq \pi/3$, $\cos((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) \geq 1/2$ и

$$|g(\tau)| \geq \cos((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) \operatorname{ch}((1 - x_1)\sqrt{\tau/2}) \geq 1/2. \quad (4.16)$$

Если $\pi/3 \leq (1-x_1)\sqrt{\tau/2} \leq \pi/2$, то $\sin((1-x_1)\sqrt{\tau/2}) \geq 1/2$ и из (4.14) имеем, что

$$|g(\tau)| \geq \sqrt{2\kappa^2/\tau} \sin((1-x_1)\sqrt{\tau/2}) \operatorname{ch}((1-x_1)\sqrt{\tau/2}) \geq (1-x_1)\kappa \operatorname{ch}(\pi/3)/\pi. \quad (4.17)$$

Если $\pi/2 \leq (1-x_1)\sqrt{\tau/2} \leq 3\pi/4$, то $\sin((1-x_1)\sqrt{\tau/2}) \geq \sqrt{2}/2$ и из (4.14) следует, что

$$|g(\tau)| \geq (1-x_1)2\sqrt{2}\kappa \operatorname{ch}(\pi/2)/3\pi. \quad (4.18)$$

Если $3\pi/4 \leq (1-x_1)\sqrt{\tau/2} \leq \pi$, то $-\cos((1-x_1)\sqrt{\tau/2}) \geq \sqrt{2}/2$ и из (4.15) получаем, что

$$|g(\tau)| \geq (1-x_1)\sqrt{2}\kappa \operatorname{sh}(3\pi/4)/2\pi. \quad (4.19)$$

Таким образом, из (4.16)–(4.19) следует существование числа $c_8 > 0$ такого, что для любого $\tau \in [0, 2\pi^2/(1-x_1)^2]$

$$|g(\tau)| \geq c_8. \quad (4.20)$$

Так как $\kappa \leq 1/2$, а

$$|g(\tau)| \geq |\operatorname{ch} \mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} - \kappa/\sqrt{\tau}| |\operatorname{sh} \mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}|,$$

то нетрудно проверить существование числа $c_9 > 0$ такого, что для любого $\tau \geq 2\pi^2/(1-x_1)^2$

$$|g(\tau)| \geq c_9. \quad (4.21)$$

Из (4.20) и (4.21) получаем утверждение леммы.

Обозначим $\hat{u}(0, \tau)$ через $\hat{h}(\tau)$ и преобразуем формулу (4.13)

$$\hat{h}(\tau) = \frac{\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau + i\kappa^2}} \operatorname{ch} \mu_0 \sqrt{\tau} + \frac{\kappa}{\mu_0 \sqrt{\tau + i\kappa^2}} \operatorname{sh} \mu_0 \sqrt{\tau}}{\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau + i\kappa^2}} \operatorname{ch} \mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + \frac{\kappa}{\mu_0 \sqrt{\tau + i\kappa^2}} \operatorname{sh} \mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau}} \hat{f}(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (4.22)$$

Пусть $\beta(\tau)$ определена формулой

$$\operatorname{ch} \beta(\tau) = \sqrt{\tau}/\sqrt{\tau + i\kappa^2}. \quad (4.23)$$

Из (4.23) вытекает, что

$$\beta(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (4.24)$$

а из (4.22) — что

$$\hat{h}(\tau) := T\hat{f}(\tau) = \operatorname{ch} [\mu_0\sqrt{\tau} + \beta(\tau)] \cdot \operatorname{ch}^{-1} [\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + \beta(\tau)] \hat{f}(\tau). \quad (4.25)$$

Пусть $\hat{h}_0(\tau) = T\hat{f}_0(\tau)$, $\hat{f}_0(\tau) = F[f_0(t)]$, $\hat{f}_\delta(\tau) = F[f_\delta(t)]$.

Тогда из леммы 4 и формулы (4.2) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta - \hat{f}_0\| \leq \sqrt{2}\delta. \quad (4.26)$$

Множество M_r , определяемое формулой (4.1), при преобразовании F перейдет в множество $\hat{M}_r = F[M_r]$, определяемое формулой

$$\hat{M}_r = \left\{ \hat{h}(\tau) : \hat{h}(\tau) \in \overline{H}, \int_0^\infty (1 + \tau^2) |\hat{h}(\tau)|^2 d\tau \leq 2r^2 \right\}. \quad (4.27)$$

Из того что $h_0(t) \in M_r$, получаем, что

$$\hat{h}_0(\tau) \in \hat{M}_r. \quad (4.28)$$

Тем самым обратная задача (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) свелась к приближенному вычислению значения неограниченного оператора T .

5. Решение задачи (4.25)–(4.28)

Чтобы использовать для решения задачи (4.25)–(4.28) метод проекционной регуляризации, описанный в [7], разобьем ее на две. Первая из этих задач есть вычисление некоторого ограниченного оператора T^1 и тем самым является корректной, а вторая — вычисление некоторого неограниченного оператора T^2 , удовлетворяющего условиям монотонности, сформулированным в лемме 6.

Таким образом, первая из задач имеет вид

$$T^1 \hat{f}^1(\tau) = \operatorname{ch} [\mu_0 \sqrt{\tau} + \beta(\tau)] \cdot \operatorname{ch}^{-1} [\mu_0(1 - x_1) \sqrt{\tau} + \beta(\tau)] \hat{f}^1(\tau) = \hat{h}^1(\tau), \quad (5.1)$$

где $0 \leq \tau \leq 4$, $\hat{f}^1(\tau) = \hat{f}(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq 4$ и $\hat{h}^1(\tau) = \hat{h}(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq 4$.

Из леммы 5 и (4.23) следует, что при $\kappa \leq 1/2$ функция

$$\operatorname{ch} [\mu_0 \sqrt{\tau} + \beta(\tau)] \cdot \operatorname{ch}^{-1} [\mu_0(1 - x_1) \sqrt{\tau} + \beta(\tau)]$$

непрерывна на отрезке $[0, 4]$, а из формулы (5.1) — что оператор T^1 ограничен в пространстве $\overline{H}_1 = L_2[0, 4] + iL_2[0, 4]$ и существует число $c_{10} > 0$ такое, что

$$\|T^1\| \leq c_{10}. \quad (5.2)$$

Вторая задача является задачей вычисления значений неограниченного оператора T^2 , определяемого формулой

$$T^2 \hat{f}^2(\tau) = \operatorname{ch} [\mu_0 \sqrt{\tau} + \beta(\tau)] \cdot \operatorname{ch}^{-1} [\mu_0(1 - x_1) \sqrt{\tau} + \beta(\tau)] \hat{f}^2(\tau) = \hat{h}^2(\tau), \quad (5.3)$$

где $\tau \geq 4$, $\hat{f}^2(\tau) = \hat{f}(\tau)$ при $\tau \geq 4$, а $\hat{h}^2(\tau) = \hat{h}(\tau)$ при $\tau \geq 4$ в пространстве $\overline{H}_2 = L_2[4, \infty) + iL_2[4, \infty)$.

Для решения задачи (5.3) используем семейство операторов $\{T_\alpha^2 : \alpha > 4\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha^2 \hat{f}^2(\tau) = \begin{cases} T^2 \hat{f}^2(\tau), & \tau \leq \alpha, \\ 0, & \tau > \alpha. \end{cases} \quad (5.4)$$

Приближенное значение $\hat{h}_\delta^{2,\alpha}(\tau)$ задачи (5.3) определим формулой

$$\hat{h}_\delta^{2,\alpha}(\tau) = T_\alpha^2 \hat{f}_\delta^2(\tau), \quad \tau \geq 4. \quad (5.5)$$

Для выбора параметра регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ в формуле (5.5) рассмотрим оценку

$$\|\hat{h}_\delta^{2,\alpha} - \hat{h}_0^2\| \leq \|\hat{h}_\delta^{2,\alpha} - \hat{h}_0^{2,\alpha}\| + \|\hat{h}_0^{2,\alpha} - \hat{h}_0^2\|, \quad (5.6)$$

где $\hat{h}_0^{2,\alpha}(\tau) = T_\alpha^2 \hat{f}_0^2(\tau)$.

Так как из (4.26), (5.4) и (5.5) следует, что

$$\|\hat{h}_\delta^{2,\alpha} - \hat{h}_0^{2,\alpha}\| \leq \sqrt{2} \|T_\alpha^2\| \delta,$$

то перейдем к оценке $\|T_\alpha^2\|$.

Лемма 6. *Существуют числа $\alpha_0 > 4$, $c_{11} > 0$ и $c_{12} > 0$ такие, что для любого $\alpha \geq \alpha_0$*

$$c_{12} e^{x_1 \sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \leq \|T_\alpha^2\| \leq c_{11} e^{x_1 \sqrt{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Доказательство. Из определения нормы оператора

$$\|T_\alpha^2\| = \sup_{0 \leq \tau \leq \alpha} \left\{ |\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]| / |\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]| \right\}. \quad (5.7)$$

Так как $\beta(\tau) = \beta_1(\tau) + i\beta_2(\tau)$, то

$$|\operatorname{ch}[\mu_0\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]| = \sqrt{\operatorname{ch}^2[\sqrt{\tau/2} + \beta_1(\tau)] - \sin^2[\sqrt{\tau/2} + \beta_2(\tau)]}, \quad (5.8)$$

$$|\operatorname{ch}[\mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} + \beta(\tau)]| = \sqrt{\operatorname{ch}^2[(1-x_1)\sqrt{\tau/2} + \beta_1(\tau)] - \sin^2[(1-x_1)\sqrt{\tau/2} + \beta_2(\tau)]}. \quad (5.9)$$

Из (5.7)–(5.9) следует, что

$$\|T_\alpha^2\| = \operatorname{ch}[\sqrt{\alpha/2} + \beta_1(\alpha)] \cdot \operatorname{ch}^{-1}[(1-x_1)\sqrt{\alpha/2} + \beta_1(\alpha)] + o(1) \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (5.10)$$

Из (4.24), (5.10) вытекает существование c_{12} и $c_{11} > 0$ таких, что при достаточно больших значениях α

$$c_{12}e^{x_1\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \leq \|T_\alpha^2\| \leq c_{11}e^{x_1\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Тем самым лемма доказана.

Пусть

$$\omega^2(\alpha) = \sup \left\{ \int_\alpha^\infty |\hat{h}_0^2(\tau)|^2 d\tau : \hat{h}_0(\tau) \in \hat{M}_r \right\}. \quad (5.11)$$

Тогда

$$\sup \{ \|\hat{h}_0^{2,\alpha} - \hat{h}_0^2\| : \hat{h}_0 \in \hat{M}_r \} = \omega(\alpha). \quad (5.12)$$

Из (4.27) получаем, что при условии $\hat{h}_0^2(\tau) \in \hat{M}_r$

$$\int_4^\infty (1+\tau^2) |\hat{h}_0^2(\tau)|^2 d\tau \leq 2r^2. \quad (5.13)$$

Из (5.11) и (5.13) очевидно, что

$$\omega^2(\alpha) = 2r^2/(1+\alpha^2). \quad (5.14)$$

Таким образом, из (5.6), (5.12), (5.14) и леммы 6 определяем, что

$$\|\hat{h}_\delta^{2,\alpha} - \hat{h}_0^2\| \leq \sqrt{2}r/\sqrt{1+\alpha^2} + c_{11}e^{x_1\sqrt{\alpha/2}}\delta. \quad (5.15)$$

Параметр регуляризации $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\delta)$ в формуле (5.4) выберем из условия

$$\sqrt{1+\alpha^2}e^{x_1\sqrt{\alpha/2}} = r/c_{11}\delta. \quad (5.16)$$

Тогда из (5.15) и (5.16) следует, что

$$\|\hat{h}_\delta^{2,\bar{\alpha}(\delta)} - \hat{h}_0^2\| \leq 2\sqrt{2}r/\sqrt{1+\bar{\alpha}^2(\delta)}. \quad (5.17)$$

Так как функция $\sqrt{1+\alpha^2}e^{x_1\sqrt{\alpha/2}}$ строго возрастает по α и изменяется от 0 до ∞ , то существует единственное решение $\bar{\alpha}(\delta)$ уравнения (5.16).

Для упрощения оценки (5.17) рассмотрим два уравнения

$$e^{x_1 \sqrt{\alpha/2}} = r/c_{11} \delta \quad (5.18)$$

и

$$e^{2x_1 \sqrt{\alpha/2}} = r/c_{11} \delta. \quad (5.19)$$

Решения уравнений (5.18) и (5.19) обозначим через $\bar{\alpha}_1(\delta)$ и $\bar{\alpha}_2(\delta)$.

Тогда из (5.16), (5.18) и (5.19) следует, что при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$\bar{\alpha}_2(\delta) \leq \bar{\alpha}(\delta) \leq \bar{\alpha}_1(\delta). \quad (5.20)$$

Из (5.18) и (5.19) вытекает, что $\bar{\alpha}_1(\delta) = (2/x_1^2) \cdot \ln^2(r/c_{11}\delta)$ и $\bar{\alpha}_2(\delta) = (1/2x_1^2) \cdot \ln^2(r/c_{11}\delta)$, а из (5.20), что

$$\bar{\alpha}(\delta) \sim \ln^2 \delta \text{ при } \delta \rightarrow 0. \quad (5.21)$$

Из (5.17) и (5.21) следует существование числа $c_{13} > 0$ такого, что при достаточно малых значениях δ справедливо неравенство

$$\|\hat{h}_\delta^{2, \bar{\alpha}(\delta)} - \hat{h}_0^2\| \leq c_{13} \ln^{-2} \delta. \quad (5.22)$$

Из теоремы, доказанной в [8], и соотношений (5.6), (5.14) и леммы 6 получаем, что оценка (5.22) является точной по порядку, т. е. существует число $c_{14} > 0$ такое, что при достаточно малых значениях δ

$$\sup \left\{ \|\hat{h}_\delta^{2, \bar{\alpha}(\delta)} - \hat{h}_0^2\| : \hat{h}_0^2 \in \hat{M}_r, \|\hat{f}_\delta^2 - \hat{f}_0^2\| \leq \sqrt{2}\delta \right\} \geq c_{14} \ln^{-2} \delta. \quad (5.23)$$

Далее решение задачи (5.1) обозначим через $\hat{h}_\delta^1(\tau)$

$$\hat{h}_\delta^1(\tau) = T^1 \hat{f}_\delta^1(\tau). \quad (5.24)$$

Из (5.2) и (5.24) следует, что

$$\|\hat{h}_\delta^1(\tau) - \hat{h}_0^1(\tau)\| \leq \sqrt{2}c_{10}\delta, \quad (5.25)$$

где $\hat{h}_0^1(\tau) = T^1 \hat{f}_0^1(\tau)$.

Решение задачи (4.25)–(4.28) определим формулой

$$\hat{h}_\delta(\tau) = \hat{h}_\delta^1(\tau) + \hat{h}_\delta^{2, \bar{\alpha}(\delta)}(\tau). \quad (5.26)$$

Тогда из соотношений (5.22), (5.25) и (5.26) следует существование числа $c_{15} > 0$ такого, что

$$\|\hat{h}_\delta(\tau) - \hat{h}_0(\tau)\| \leq c_{15} \ln^{-2} \delta. \quad (5.27)$$

Из (5.23) очевидно, что оценка (5.27) является точной по порядку.

Теперь, воспользовавшись преобразованием F^{-1} , обратным к F , получим решение задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.6)

$$h_\delta(t) = F^{-1}[\hat{h}_\delta(\tau)]. \quad (5.28)$$

Из леммы 3 и соотношений (5.27) и (5.28) для приближенного решения $h_\delta(t)$ задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) будет справедлива точная по порядку оценка погрешности

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\| \leq \sqrt{2} c_{15} \ln^{-2} \delta.$$

6. Некоторые комментарии к постановке задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.6)

Важность получения оценок погрешности определяемого в задаче (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) граничного условия не вызывает сомнения. При этом сильно завышенные оценки практической ценности не представляют. Отсюда возникает вопрос о получении точных или точных по порядку оценок. В настоящей работе, в предположении что тепловой процесс длится бесконечно долго, получены точные по порядку оценки погрешности.

Заметим, что в реальной жизни тепловой процесс, описанный в задаче (1.1)–(1.5), длится в течение конечного времени, потому в постановке задачи естественно было бы положить $t \in [0, T]$, где $T \neq \infty$, но для этого случая нет методов получения точных по порядку оценок погрешности приближенного решения, соответствующей обратной задачи, а рассмотрение процесса на полупрямой $[0, \infty)$ по времени, является, по-видимому, минимальным расширением соответствующей задачи, обеспечивающим требуемую точность оценок. Это расширение удобней всего осуществить, положив $h(t) = 0$ при $t \geq t_0$, хотя и необязательно (см. [8]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Исаков Г.Н., Кузин А.Я., Савельев В.Н., Ермолаев Ф.В.** Определение характеристик тонкослойных теплозащитных покрытий из решения обратных задач тепло- и массопереноса // Физика горения и взрыва. 2003. № 5. С. 86–97.
2. **Танана В.П., Данилин А.Р.** Об оптимальности регуляризирующих алгоритмов при решении некорректных задач // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 7. С. 1323–1326.
3. **Фарлоу С.** Уравнения с частными производными М.: Мир, 1985. 384 с.
4. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 2006. 864 с.
5. **Зорич В.А.** Математический анализ. Т. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.
6. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа . М.: Наука, 1972. 623 с.
7. **Танана В.П., Сидикова А.И.** Об оптимальности по порядку одного метода вычисления значений неограниченного оператора и его приложения // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3(39). С. 130–140.
8. **Танана В.П.** Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7(18), № 2. С. 117–132.

Танана Виталий Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой выч. математики
Южно-Урал. гос. ун-т
e-mail: tvpa@susu.ac.ru

Поступила 10.12.2009

Сидикова Анна Ивановна
ст. преподаватель
Южно-Урал. гос. ун-т
e-mail: 7413604@mail.ru

УДК 519.6

**СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА
НА ТРЕХЗВЕННУЮ ЛЕНТУ****Ю. А. Шашкин**

Известно, что степень симплициального отображения триангуляции леммы Шпернера равна единице. Аналогично доказано, что степень клеточного отображения прямоугольника на трехзвенную ленту равна 3.

Ключевые слова: лемма Шпернера, симплициальное отображение, клеточное отображение прямоугольника.

Yu. A. Shashkin. The degree of a cellular map of a rectangle to a three-link band.

It is known that the degree of a simplicial triangulation map in Sperner's lemma is equal to 1. It is proved similarly that the degree of a cellular map of a rectangle to a three-link band is equal to 3.

Keywords: Sperner's lemma, simplicial map, cellular map of a rectangle.

Мы начнем с леммы Шпернера [1], хорошо известной в комбинаторной геометрии [2–4].

Рассмотрим произвольный треугольник на плоскости, разбитый на малые треугольники со следующим свойством: любые два малых треугольника либо совсем не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или общую сторону.

Такое разбиение исходного треугольника называется *триангуляцией*, малые треугольники называются *гранями* триангуляции, стороны малых треугольников — ее *ребрами*, а их вершины — ее *вершинами* или *точками*.

Лемма (Шпернера). Пусть имеется триангуляция треугольника. Три вершины основного треугольника отмечены числами 1, 2 и 3. Концы первого ребра отмечены числами 1 и 2, причем между двумя концами этого ребра находятся еще несколько дополнительных отметок 1 и 2 в произвольном числе и в произвольном порядке; концы второго ребра имеют отметки 2 и 3, между концами второго ребра имеются еще несколько дополнительных отметок 2 и 3, расположенных аналогичным образом; на концах третьего ребра — отметки 3 и 1; дополнительные отметки расположены тоже аналогично. Внутри треугольника отметки 1, 2 и 3 даются совершенно произвольно. Тогда имеется хотя бы одна грань с тремя разными отметками 1, 2, 3.

На самом деле в лемме Шпернера идет речь о некотором отображении триангуляции исходного треугольника на сам треугольник — номера вершин у граней триангуляции показывают, в какую вершину исходного треугольника они отображаются.

На треугольниках с размеченными вершинами можно задать следующую *ориентацию*: некоторая грань треугольника с отметками 1, 2, 3 считается положительной, если обход ее границы от отметки 1 к отметке 2, затем от 2 к 3 и от 3 к 1 совершается против часовой стрелки, и считается отрицательной — в противоположном случае.

Можно показать [3], что в лемме Шпернера разность между положительными и отрицательными гранями треугольника равна единице, и эта разность называется *степенью* рассмотренного отображения триангуляции на исходный треугольник.

Оказывается, что имеется аналогия между треугольниками и прямоугольниками. Переходим теперь к прямоугольникам.

Назовем m -звенной лентой прямоугольник на плоскости размера $1 \times m$, разбитый на m квадратов, вершины которых пронумерованы в порядке обхода границы этого прямоугольника против часовой стрелки.

На рис. 1. приведены примеры 1, 2, 3 и 4-звенных лент.

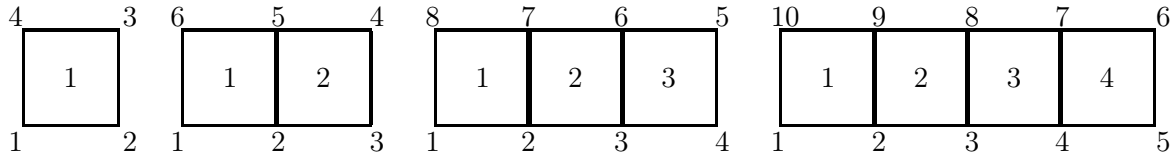


Рис. 1.

Рассмотрим также прямоугольники, разбитые на большое число малых квадратов прямыми, расположенными горизонтально или вертикально. Малые квадраты называются *гранями*, их грани имеют *ребра* и *вершины*. Две вершины, лежащие на ребре, называются *соседними*.

Каждая вершина прямоугольника всегда будет отмечена некоторым числом, а границы любой ленты и прямоугольника ориентированы против часовой стрелки.

Мы предполагаем, что каждой ленте будет соответствовать аналогичный ей прямоугольник, т. е. прямоугольник, углы которого (внешние вершины — вершины, из которых исходят только два ребра) пронумерованы, как и углы соответствующей m -звенной ленты:

$$(1, 2, 3, 4), (1, 3, 4, 6), (1, 4, 5, 8), \dots, (1, m + 1, m + 2, 2(m + 1)).$$

Будем считать, что ориентация границы каждой ленты и прямоугольника задается обходом ее против часовой стрелки.

В качестве примера укажем теперь, какие отметки будут иметь вершины, расположенные на границе прямоугольника, соответствующего трехзвенной ленте.

На всей границе против часовой стрелки отметки идут в следующем порядке: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8; при этом между парой отметок 1 и 2 имеются такие же отметки 1 и 2, но в произвольном порядке и в произвольном числе, затем пары 2 и 3, 3 и 4, ..., 7 и 8 и, наконец, пара 8 и 1 (рис. 2).

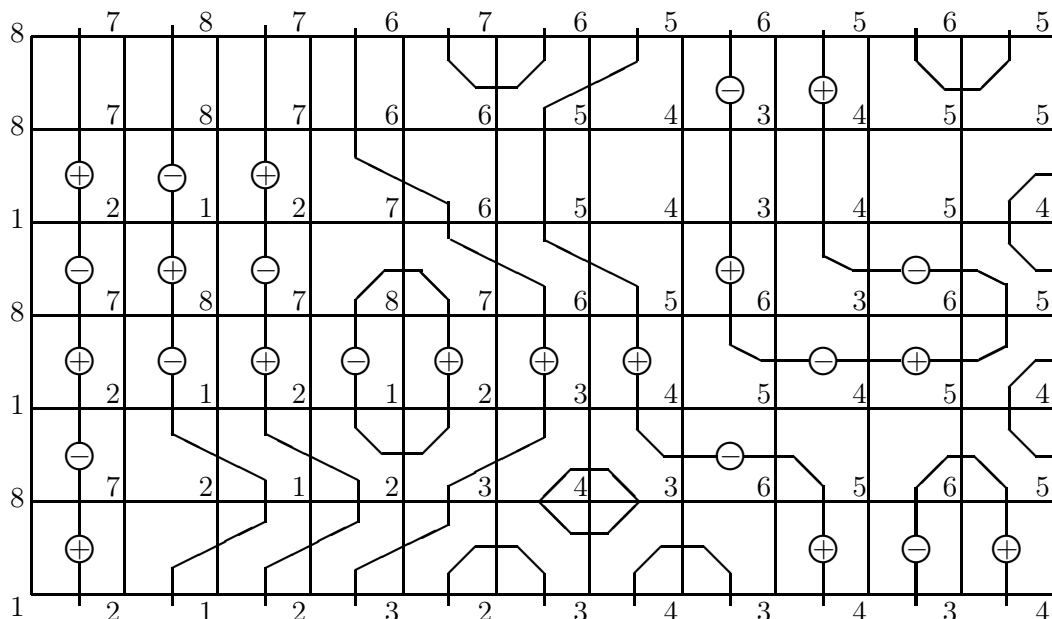


Рис. 2.

Мы скажем, что *прямоугольник определяет отображение на ленту*, если каждая его вершина переходит в какую-то вершину ленты с той же отметкой, причем две соседние из них переходят в соседние, или же они совпадают.

Очевидно, что на границе трехзвенной ленты указаны уже отметки. Поэтому внутри ленты следует отметить соседние точки, такие как 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 81, 27 и 36 (или некоторые одинаковые отметки: 11, 22, 33 и т. д.). Кроме того, следует исключить соседние ребра: 13, 14, 17, 16, 15, 28, 26, 25, 38, 37, 35, 48 и 47.

Ребра границы прямоугольника с *различными* отметками, а именно 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78 и 81, называются *положительными*, а такие как 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87 и 18 — *отрицательными*. Ребра с *одинаковыми* отметками (например, 11, 22, 88) не имеют ориентации.

Все грани прямоугольника

$$1278, \quad 2367, \quad 3456, \quad 8721, \quad 7632, \quad 6543$$

имеют *различные* отметки и поэтому называются *полными*. Первые три из них положительны (они отмечены на рис. 2 знаком плюс), остальные отрицательны (обозначены знаком минус). Неполные грани, как, например, 1227, не имеют ориентации.

Разность между числами положительных и отрицательных полных граней называется *степенью* отображения, определяемого прямоугольником на 3-звенную ленту.

Итак, мы доказываем теорему.

Теорема. *Степень отображения, определяемого прямоугольником с углами 1, 4, 5, 8 на трехзвенную ленту, равна 3.*

Доказательство. Будем доказывать эту теорему *методом прогулок* [4, 5]. Наша цель — обойти все полные грани, чередуя в процессе прохождения положительные и отрицательные грани.

Рассмотрим *пути*, входящие в границу прямоугольника и выходящие из нее (см. рис. 2) (они обозначены угловыми отрезками). Пути пересекают некоторые ребра и грани. Обязательное условие состоит в том, чтобы пути пересекали ребра только с *различными*, но никак не с *одинаковыми* отметками.

Из нижней границы пути идут следующим образом. Когда путь проходит, например, через ребро 12, то он оставляет слева от себя все отметки 1 и справа от себя отметки 2 (возможно, проходя через неполные грани). Договоримся, что, встречая полную положительную грань 1278, он пересекает ее ребра 12 и 78, но совсем не пересекает ребра 27 и 81 (данная договоренность распространяется и на грани 2367 и 3456). После прохождения через ребро 78 путь гуляет по неполным граням и оставляет слева от себя отметки 8 и справа от себя отметки 7, затем встречает полную отрицательную грань 8721 и т. д. Таким образом, полные грани чередуются: 1278, 8721, 1278,

Среди неполных граней мы видим грань 1212, имеющую два противоположных ребра. Договоримся, что, входя через положительное ребро 12 границы, путь должен двигаться одним из двух различных способов: он идет в нижнее ребро грани 1212, затем поворачивает налево или направо и при этом каждый раз оставляет слева от себя отметку 1 и справа от себя отметку 2. Аналогично если путь идет через отрицательное ребро 21 границы, то он поворачивает налево или направо и при этом оставляет слева от себя отметку 2 и справа от себя отметку 1, как показано на рис 3.

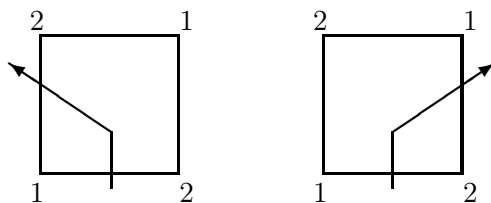


Рис. 3.

Третий способ движения — через грань 7878 (т. е. между двумя параллельными ребрами, как показано на рис. 4) — запрещен, так как иначе мы имели бы две соседние положительные грани 1278 и 7812 (а также другие), которые не чередовались бы, что для нас неприемлемо. Таким образом, через неполные грани нельзя идти путем, параллельным стороне, разделяя две одноименные вершины.

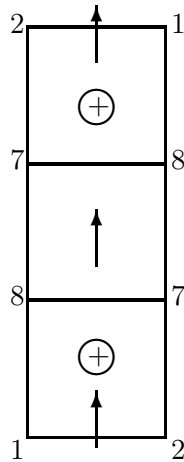


Рис. 4.

Следовательно, встречая грани типов 1212, 7878, 2323 и т. д., пути могут разветвляться и гулять разными способами.

Теперь мы проследим все возможные пути в прямоугольнике.

Рассмотрим сначала пути, входящие в нижнюю границу. Путь идет через ребро 12 и выходит из верхней границы через ребро 78; на нем имеется нечетное число полных граней, которые чередуются, начиная с положительной грани 1278 и кончая положительной же гранью 1278, Назовем его путем типа 1).

Путь идет в нижнюю границу через ребро 21 и выходит из верхней границы через ребро 87; на нем имеется нечетное число полных граней, которые чередуются, начиная с отрицательной грани 8721 и кончая отрицательной же гранью, Назовем его путем типа 2).

Можно показать, что имеется нечетное число путей типов 1) и 2). (Может случиться, что какой-то путь входит в ребро 12 и, поворачивая обратно, выходит из 21. Поэтому число путей типов 1) и 2) не изменяется и остается нечетным.) Пути этих типов чередуются, начиная с типа 1) и кончая типом 2). Когда чередование этих путей выполнено, то все полные грани расположатся в одну последовательность и будут тоже чередоваться, начиная с положительной грани 1278 и кончая ею же. Поэтому число положительных граней 1278 на единицу больше, чем отрицательных 8721, т. е. разность чисел положительных граней (1278) и отрицательных граней (8721) равна 1.

Рассмотрим теперь пути, которые идут между ребрами 23 и 67, а также ребрами 32 и 76 и снова между ребрами 23 и 67. Тогда опять имеется нечетное число таких же путей (в примере на рис. 2 этот путь только один; в других аналогичных местах имеется в виду их нечетное число). Поэтому число положительных граней 2367 на единицу больше, чем отрицательных 7632, т. е. опять разность между числами положительных и отрицательных граней такого типа равна 1.

Это справедливо для путей от 34 до 56, затем от 43 до 65 и снова от 34 и до 56.

Таким образом, суммируя разности по трем парам полных граней, получаем, что число положительных граней на 3 больше числа отрицательных граней, т. е. что степень отображения прямоугольника на трехзвенную ленту равна 3. Теорема доказана.

Интересно отметить такие пути, в которых можно не учитывать полные грани при подсчете, так как их общие суммы равны нулю (см. рис. 2). Эти пути входят в нижнюю границу и возвращаются в нее обратно (а также, возможно, в левую, правую и верхнюю границы). Таков,

например, путь от ребра 81 до ребра 18. Видны “пустые” циклы, например цикл вокруг отметки 4. В целом все циклы имеют следующий вид: путь входит дважды в одну и ту же полную грань, тогда она становится положительной и отрицательной; путь входит последовательно в грани, например в 1278 и 2367 и обратно, тогда две из них становятся положительными и потом отрицательными; таким образом, суммы всех граней в каждом цикле равны нулю.

З а м е ч а н и е. Можно было бы доказать аналогичное утверждение для прямоугольников с углами 1, 2, 3, 4; 1, 3, 4, 6; 1, 5, 6, 10.

Автор выражает искреннюю признательность А.Р. Данилину за полезные обсуждения и ценные замечания к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Sperner E.** Neuer Beweis die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1928. Vol. 6. S. 265–272.
2. **Хадвигер Г., Дебрунер Г.** Комбинаторная геометрия плоскости. М.: Наука, 1965. 171 с.
3. **Шашкин Ю.А.** Неподвижные точки. М.: Наука, 1989. 80 с.
4. **Шашкин Ю.А.** Комбинаторные леммы и симплициальные отображения. Екатеринбург : Изд-во УрГУ, 1999. 126 с.
5. **Fan K.** Simplicial maps from an orientable n -pseudomanifold into S^m with the octahedral triangulation // J. Combin. Theory. 1967. Vol 2. P. 588 – 602.

Шашкин Юрий Алексеевич

канд. физ.-мат. наук

гл. программист

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: sha@imm.uran.ru

Поступила 16.04.2009

УДК 512.53

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НАД МОНОИДОМ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ. НЕПРИВОДИМЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА**А. Н. Шевляков**

В статье описаны неприводимые координатные моноиды алгебраических множеств над аддитивным моноидом натуральных чисел. Получено разложение произвольного алгебраического множества над \mathbb{N} в объединение неприводимых компонент, исследованы свойства неприводимых компонент.

Ключевые слова: натуральные числа, алгебраическая геометрия, моноид, универсальное замыкание.

A. N. Shevlyakov. Algebraic geometry over the monoid of natural numbers. Irreducible algebraic sets.

Irreducible coordinate monoids of algebraic sets over the additive monoid of natural numbers are described. An arbitrary algebraic set over \mathbb{N} is decomposed into the union of irreducible components, and the properties of the irreducible components are investigated.

Keywords: natural numbers, algebraic geometry, monoid, universal closure.

Введение

В стандартном курсе линейной алгебры рассматриваются системы линейных уравнений над полем. Алгебраические множества, задаваемые такими системами, допускают простое описание и классификацию. Решение систем линейных уравнений над аддитивной группой целых чисел \mathbb{Z} является более сложной задачей, так как удовлетворительно описать алгебраические множества удастся лишь с точностью до изоморфизма.

В статье А.Г. Мясникова и В.Н. Ремесленникова “Algebraic geometry over groups II: logical foundations” [4] была решена более общая проблема. А именно: для любой абелевой группы A описаны координатные группы алгебраических множеств над A . Описание координатных групп влечет описание алгебраических множеств с точностью до изоморфизма. В частности, в [4] было показано, что множество координатных групп при решении систем уравнений над \mathbb{Z} состоит из всех конечных степеней группы \mathbb{Z} .

Кроме того, в [4] был применен логический подход к проблемам алгебраической геометрии над абелевыми группами. Было доказано, что координатные группы алгебраических множеств над абелевой группой A принадлежат A -квазимногообразию $A - \text{qvar}(A)$, порожденному группой A . Более того, множество всех координатных групп, соответствующих неприводимым алгебраическим множествам, совпадает с множеством всех конечно порожденных над A групп из A -универсального замыкания $A - \text{ucl}(A)$ группы A (определения A -квазимногообразия и A -универсального замыкания даны в разд. 1 нашей статьи). По этой причине нахождение хорошего списка аксиом для универсальных классов $A - \text{qvar}(A)$, $A - \text{ucl}(A)$ исключительно важно при описании координатных групп всех алгебраических множеств и координатных групп неприводимых алгебраических множеств над A . Авторами статьи [4] были найдены достаточно удобные наборы аксиом для классов $A - \text{qvar}(A)$, $A - \text{ucl}(A)$, порожденных абелевой группой A .

Построение алгебраической геометрии значительно усложняется при переходе от абелевых групп к коммутативным полугруппам (моноидам). Для коммутативных полугрупп нет удовлетворительного описания решетки всех квазимногообразий и нет полной классификации подпрямо неразложимых коммутативных полугрупп. Это обуславливает отсутствие удобной

системы аксиом для квазимногообразия и универсального замыкания, порожденных заданной полугруппой S . Следовательно, не существует универсальной процедуры, позволяющей по заданной коммутативной полугруппе S описать все ее координатные полугруппы.

По этой причине в данной статье мы рассматриваем алгебраическую геометрию над наиболее простейшим коммутативным моноидом — однопорожденным. Наиболее естественная реализация однопорожденного моноида — множество натуральных чисел \mathbb{N} с операцией сложения. Изучению алгебраической геометрии над \mathbb{N} в языке без констант посвящена работа П.В. Мораря, А.Н. Шевлякова “Algebraic geometry over additive positive monoids. Systems of coefficient-free equations” [3]. В этой работе мы начинаем изучение алгебраической геометрии над \mathbb{N} с константами. Уравнение над \mathbb{N} в этом случае можно представлять как равенство $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n = a$, $\gamma_i, a \in \mathbb{Z}$, и описанию координатных моноидов, определяемых такими системами, посвящена данная работа.

Приведем содержание и результаты нашей статьи. Все используемые в работе определения универсальной алгебраической геометрии могут быть найдены в [1], и большая часть этих определений сформулирована в разд. 1 для моноида \mathbb{N} .

В работах трех авторов Э.Ю. Данияровой, А.Г. Мясникова, В.Н. Ремесленникова “Unification theorems in algebraic geometry” [1] и “Algebraic geometry over algebraic structures II: Foundations” [2] сформулированы и доказаны так называемые объединяющие теоремы для произвольных алгебраических систем, основной смысл которых состоит в доказательстве эквивалентности семи различных определений для координатных алгебр над фиксированной алгебраической системой A . В разд. 1 мы адаптируем основные определения и формулировки объединяющих теорем для случая, когда алгебра A является коммутативным моноидом.

В подразд. 2.1 указан общий вид уравнений над \mathbb{N} . Подраздел 2.2 содержит сводку результатов статьи [3] о системах однородных уравнений над натуральными числами. В подразд. 2.3 будет дано важное определение \mathbb{N} -позитивности для коммутативных моноидов и доказана следующая теорема, описывающая неприводимые координатные моноиды алгебраических множеств, заданных системами уравнений с коэффициентами в \mathbb{N} .

В третьем разделе нашей работы будет указан метод разложения произвольного алгебраического множества Y над \mathbb{N} в объединение неприводимых алгебраических множеств Y_i (неприводимых компонент) и будут описаны свойства множеств Y_i .

1. Основные понятия алгебраической геометрии над аддитивным моноидом натуральных чисел

В данном разделе понятия и основные теоремы универсальной алгебраической геометрии статьи [1] будут адаптированы для случая аддитивного моноида натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Напомним, что моноидом называется алгебраическая система с бинарной ассоциативной операцией и нейтральным элементом относительно этой операции.

Пусть A — некоторый подмоноид аддитивного моноида натуральных чисел \mathbb{N} . Моноид B будем называть A -моноидом, если B содержит выделенный подмоноид, изоморфный моноиду A . Более формально определение A -моноида выглядит следующим образом: A -моноидом называется пара (B, λ) , где $\lambda: A \rightarrow B$ — вложение моноидов.

Будем говорить, что A -моноид B конечно порожден над A , если B порождается множеством A и некоторым конечным множеством S .

Пусть B_1 и B_2 — A -моноиды, λ_1 и λ_2 — соответствующие вложения моноида A в B_1 и B_2 . Гомоморфизм моноидов $\varphi: B_1 \rightarrow B_2$ назовем A -гомоморфизмом, если он тождественно действует на подмоноиде A , т. е. $\varphi(\lambda_1(a)) = \lambda_2(a)$ для всех $a \in A$. Через $\text{Hom}_A(B_1, B_2)$ обозначим множество всевозможных A -гомоморфизмов из моноида B_1 в моноид B_2 .

Так как мы в качестве A рассматриваем некоторый подмоноид натуральных чисел, то \mathbb{N} очевидным образом является A -моноидом.

Пусть C — A -моноид. Будем говорить, что моноид C *A-аппроксимируется* моноидом \mathbb{N} , если для любой пары неравных элементов $c_1, c_2 \in C$ найдется A -гомоморфизм $\varphi: C \rightarrow \mathbb{N}$ такой, что $\varphi(c_1) \neq \varphi(c_2)$. Если для любого натурального числа k и набора c_1, \dots, c_k попарно различных элементов моноида C существует A -гомоморфизм $\varphi: C \rightarrow \mathbb{N}$ такой, что для всех $i \neq j$ выполняется $\varphi(c_i) \neq \varphi(c_j)$, то будем говорить, что моноид C *A-дискриминируется* моноидом \mathbb{N} .

Рассмотрим язык $\mathcal{L} = \langle +, 0 \rangle$. Как было указано в начале раздела, любая модель языка \mathcal{L} с ассоциативной операцией $+$ и нейтральным элементом 0 называется *моноидом*. В своей работе мы будем рассматривать только коммутативные моноиды, и поэтому мы используем традиционные для коммутативных моделей обозначения $+, 0$.

Также мы будем рассматривать расширенный язык $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in A\}$, в котором новые константные символы c_a соответствуют элементам моноида $A \subseteq \mathbb{N}$.

Приведем определения двух важных классов формул языка \mathcal{L}_A .

- Универсальное предложение — это замкнутая формула вида

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

где $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — бескванторная формула.

- Квазитождество — универсальное предложение с бескванторной частью вида

$$\bigwedge_{i=1}^m t_i(\bar{x}) = s_i(\bar{x}) \quad \rightarrow \quad r_1(\bar{x}) = r_2(\bar{x}),$$

где $s_i(\bar{x}), t_i(\bar{x}), r_1(\bar{x}), r_2(\bar{x})$ — термы языка \mathcal{L}_A .

Все истинные на A -моноиде \mathbb{N} универсальные формулы и квазитождества языка \mathcal{L}_A определяют следующие два класса моноидов. *A-универсальное замыкание* (*A-квазимногообразие*) моноида \mathbb{N} состоит из всех A -моноидов, на которых истинны все универсальные предложения (квазитождества) языка \mathcal{L}_A , истинные в аддитивном моноиде натуральных чисел \mathbb{N} .

A -универсальное замыкание и A -квазимногообразие A -моноида \mathbb{N} обозначаются через $A - \text{ucl}(\mathbb{N})$ и $A - \text{qvar}(\mathbb{N})$ соответственно, и, как следует из определений, справедливо включение $A - \text{ucl}(\mathbb{N}) \subseteq A - \text{qvar}(\mathbb{N})$.

Зафиксируем множество переменных $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. В любом коммутативном A -моноиде с сокращениями произвольный терм $t(\bar{x})$ языка \mathcal{L}_A от переменных X эквивалентен терму вида

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n + c_a,$$

где натуральные числа γ_i служат для сокращения записи $\gamma_i x_i = \underbrace{x + x + \dots + x}_{\gamma_i \text{ раз}}$. Таким обра-

зом, каждый терм языка \mathcal{L}_A может быть представлен элементом свободного коммутативного A -моноида $F_A(X) = A \oplus F(X)$ ($F(X)$ — свободный коммутативный моноид, порожденный множеством X).

Произвольный набор атомарных формул языка \mathcal{L}_A

$$\mathcal{S} = \{t_i(\bar{x}) = s_i(\bar{x}) \mid i \in I, t_i(\bar{x}), s_i(\bar{x}) \in F_A(X)\}$$

будем называть *системой уравнений* с коэффициентами в моноиде A или *системой A-уравнений*.

Понятие решения системы A -уравнений \mathcal{S} в A -моноиде \mathbb{N} определяется естественным образом и обозначается через $V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$.

Отметим два частных случая вхождения подмоноида A в моноид \mathbb{N} . Если $A = \mathbb{N}$, то алгебраическая геометрия над моноидом \mathbb{N} называется *диофантовой*. В случае $A = \{0\}$ языки \mathcal{L} и \mathcal{L}_A совпадают и уравнения над A не содержат ненулевых констант. По этой причине системы уравнений при $A = \{0\}$ будем называть *бескоэффициентными* или *однородными*. Алгебраической геометрии над \mathbb{N} в языке без констант \mathcal{L} посвящена работа [3].

Множество $Y \subseteq \mathbb{N}^n$ будем называть *алгебраическим над A -моноидом \mathbb{N}* , если существует система A -уравнений \mathcal{S} такая, что $Y = V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$. Две системы A -уравнений $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ от переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) называются *эквивалентными* над \mathbb{N} , если $V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S}_1) = V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S}_2)$.

Непустое алгебраическое множество называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде конечного объединения алгебраических множеств, не совпадающих с ним. В противном случае множество называется *приводимым*.

Введем важное для алгебраической геометрии понятие радикала.

Пусть $Y \subseteq \mathbb{N}^n$ — произвольное алгебраическое множество над A -моноидом \mathbb{N} . Тогда *радикал* $\text{Rad}_A(Y)$ множества Y есть множество A -уравнений (следствий), которым удовлетворяют все точки множества Y . В частности, если $Y = \emptyset$, то радикал совпадает с множеством всех A -уравнений.

Радикал системы уравнений \mathcal{S} определяется как $\text{Rad}_A(\mathcal{S}) = \text{Rad}_A(V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S}))$.

Пусть Y — алгебраическое множество. Тогда *координатный A -моноид* множества Y есть фактормоноид моноид $F_A(X)$ по конгруэнции

$$t(\bar{x}) \sim s(\bar{x}) \iff t(p) = s(p) \text{ для любого } p \in Y.$$

Координатный A -моноид множества Y обозначается $\Gamma_A(Y)$ и имеет представление

$$\langle X, A \mid \text{Rad}_A(Y) \rangle.$$

Одной из основных задач алгебраической геометрии является задача классификация алгебраических множеств с точностью до изоморфизма (понятие изоморфизма алгебраических множеств см. в [1]). Эквивалентной задачей является классификация координатных моноидов, а именно справедливо следующее утверждение.

Предложение 1 [1]. *Алгебраические множества Y_1, Y_2 над \mathbb{N} , определенные системами A -уравнений, изоморфны тогда и только тогда, когда A -изоморфны их координатные моноиды.*

Каждой точке $p = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$ сопоставим отображение $\varphi_p: F_A(X) \rightarrow \mathbb{N}$, определяемое правилом $\varphi_p(t(\bar{x})) = t(b_1, \dots, b_n)$. Для отображений φ_p справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть Y — алгебраическое множество, определенное системой уравнений с коэффициентами в A . Если точка p принадлежит множеству $Y \subseteq \mathbb{N}^n$, то $\varphi_p \in \text{Hom}_A(\Gamma_A(Y), \mathbb{N})$. Верно и обратное утверждение: для любого гомоморфизма $\varphi \in \text{Hom}_A(\Gamma_A(Y), \mathbb{N})$ существует точка $p \in \mathbb{N}^n$ такая, что $\varphi = \varphi_p$. \square*

Координатный A -моноид будем называть *неприводимым*, если он соответствует неприводимому множеству. Данное определение корректно, так как в [1] доказано, что если координатные A -моноиды двух алгебраических множеств Y_1, Y_2 изоморфны, то множество Y_1 неприводимо тогда и только тогда, когда Y_2 неприводимо.

Следующий факт легко следует из свойств алгоритма Гаусса при решении систем линейных уравнений над полем.

A -моноид \mathbb{N} является *A -нетеровым по уравнениям*, т. е. для любой бесконечной системы A -уравнений \mathcal{S} от переменных x_1, \dots, x_n существует конечная подсистема $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ такая, что $V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S}) = V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S}_0)$.

A -нетеровость по уравнениям позволяет рассматривать лишь конечные системы, и, кроме того, справедливо следующее предложение.

Предложение 3 [1]. *Любое алгебраическое множество над A -моноидом \mathbb{N} представляется в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств (неприводимых компонент). Если же ни одна из неприводимых компонент не содержится в другой, то такое представление единственно с точностью до перестановки неприводимых компонент.*

Следующие утверждения являются следствиями доказанных в [1] и [2] общих теорем для произвольной нетеровой по уравнениям алгебраической системы в языке без предикатов.

Теорема 1. Пусть A является подмоноидом аддитивного моноида натуральных чисел \mathbb{N} и пусть A -моноид C конечно порожден над A . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) C — координатный моноид алгебраического множества над \mathbb{N} для системы уравнений с коэффициентами в A .
- 2) Моноид C A -аппроксимируется моноидом \mathbb{N} .
- 3) $C \in A - \text{qvar}(\mathbb{N})$.

Теорема 2. Пусть A является подмоноидом аддитивного моноида натуральных чисел \mathbb{N} . Пусть A -моноид C конечно порожден над A . Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) C — координатный моноид неприводимого алгебраического множества над \mathbb{N} для системы уравнений с коэффициентами из A .
- 2) Моноид C A -дискриминируется моноидом \mathbb{N} .
- 3) $C \in A - \text{ucl}(\mathbb{N})$.

2. Алгебраическая геометрия над \mathbb{N}

2.1. Вид уравнений

В этом разделе мы начинаем изучать алгебраическую геометрию над аддитивным моноидом натуральных чисел \mathbb{N} с коэффициентами в фиксированном подмоноиде A .

По теореме 1 все координатные A -моноиды алгебраических над \mathbb{N} множествами должны принадлежать A -квазимногообразию, порожденному моноидом \mathbb{N} . Следовательно, в каждом координатном A -моноиде должны быть истинны все квазитожества, истинные в \mathbb{N} . В частности, все координатные A -моноиды алгебраических множеств над A -моноидом \mathbb{N} должны быть коммутативными и с сокращениями, поскольку эти свойства записываются в виде квазитожеств языка \mathcal{L}_A :

$$Ax_{comm} : \forall x \forall y (x + y = y + x) \sim \forall x \forall y (0 = 0 \rightarrow x + y = y + x),$$

$$Ax_{canc} : \forall x \forall y \forall z (x + z = y + z \rightarrow x = y).$$

Таким образом, в любом коммутативном A -моноиде с сокращениями произвольная атомарная формула эквивалентна формуле вида

$$\sum_{i \in I} \gamma_i x_i + a = \sum_{j \in J} \gamma_j x_j + a', \quad (2.1)$$

где элементы $a, a' \in A$ соответствуют константам $c_a, c_{a'}, \gamma_i, \gamma_j \in \mathbb{N}$, $I \cap J = \emptyset$.

Заметим, что в формуле (2.1) выражение $\gamma_i x$ есть сокращение для записи $\underbrace{x + x + \dots + x}_{\gamma_i \text{ раз}}$.

Коэффициентами уравнения (в соответствии с нашим определением) являются свободные члены a, a' .

З а м е ч а н и е 1. Равенство (2.1) не всегда можно преобразовать к виду, где свободный член, являющийся элементом моноида A , присутствовал бы только в одной части уравнения. В качестве примера можно рассмотреть уравнение $x + 3 = y + 5$ над моноидом $A \subseteq \mathbb{N}$, порожденным числами 3, 5.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $A \neq \{0\}$. Так как A является подмоноидом \mathbb{N} , то любое уравнение с коэффициентами из A можно рассматривать как уравнение с коэффициентами в \mathbb{N} .

Покажем, что любое уравнение с коэффициентами в \mathbb{N} можно эквивалентным образом преобразовать к уравнению с коэффициентами в заданном моноиде A .

Пусть $t(\bar{x}) + n = s(\bar{x}) + n'$ — произвольное уравнение с коэффициентами в \mathbb{N} и a — произвольный ненулевой элемент моноида A . Взяв a -кратное обеих частей уравнения, получим

$$at(\bar{x}) + an = as(\bar{x}) + an',$$

$$\underbrace{t(\bar{x}) + t(\bar{x}) + \dots + t(\bar{x})}_{a \text{ раз}} + na = \underbrace{s(\bar{x}) + s(\bar{x}) + \dots + s(\bar{x})}_{a \text{ раз}} + n'a,$$

где $na = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ раз}}$, $n'a = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n' \text{ раз}}$ являются элементами моноида A . Подобным об-

разом любая система \mathbb{N} -уравнений может быть преобразована к эквивалентной системе уравнений с коэффициентами в A . Следовательно, системы уравнений с коэффициентами из A и \mathbb{N} определяют одинаковый набор алгебраических множеств. Поскольку основной задачей алгебраической геометрии является классификация алгебраических множеств, то изучение алгебраической геометрии над A -моноидом \mathbb{N} может быть заменено на изучение диофантовой ($A = \mathbb{N}$) алгебраической геометрии над \mathbb{N} .

2.2. Случай бескоэффициентных уравнений

Приведем основные результаты статьи [3], справедливые для алгебраической геометрии над \mathbb{N} в языке $\mathcal{L} = \langle +, 0 \rangle$ ($A = \{0\}$).

О п р е д е л е н и е 1. Моноид будем называть *позитивным*, если сумма любой пары его ненулевых элементов не равна нулю. Иными словами, в позитивном моноиде истинно следующее квазитождество языка \mathcal{L} :

$$Ax_{pos} : \forall x \forall y (x + y = 0) \rightarrow (x = 0).$$

Теорема 3. *Для того чтобы конечно порожденный моноид M являлся неприводимым координатным моноидом алгебраического множества над \mathbb{N} , заданного системой бескоэффициентных уравнений, необходимо и достаточно, чтобы моноид M был коммутативным позитивным и с сокращениями.*

Теорема 4. *Все координатные моноиды алгебраических множеств над \mathbb{N} , заданных системой бескоэффициентных уравнений, являются неприводимыми.*

Из теорем 3, 4 выводится следствие, которое будет использовано в разд. 3.

Следствие 1. *Пусть Y_1, \dots, Y_m ($m \geq 2$) — алгебраические множества, заданные системами бескоэффициентных уравнений, и $Y_i \not\subseteq Y_j$ ($i \neq j$). Тогда объединение $Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ не является алгебраическим множеством.*

2.3. Системы уравнений с коэффициентами

Перейдем к рассмотрению систем уравнений с коэффициентами из моноида A . Учитывая замечание 2, далее будем предполагать, что $A = \mathbb{N}$, т. е. коэффициенты в уравнениях могут быть произвольными натуральными числами.

Следующее определение является ключевым при описании неприводимых координатных \mathbb{N} -моноидов над \mathbb{N} и выступает обобщением понятия позитивности координатных моноидов в случае бескоэффициентных уравнений.

О п р е д е л е н и е 2. \mathbb{N} -моноид M будем называть \mathbb{N} -*позитивным*, если для любой пары его элементов m_1, m_2 таких, что $m_1 + m_2 \in \mathbb{N}$, выполнено $m_1 \in \mathbb{N}$ и $m_2 \in \mathbb{N}$, что эквивалентно тому, что множество $M \setminus \mathbb{N}$ является полугруппой.

Свойство \mathbb{N} -позитивности моноидов выражается следующим бесконечным семейством универсальных формул $\mathbf{Ax}_{\mathbb{N}\text{-pos}}$ языка $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y [x + y = 0 \rightarrow (x = 0)], \\ & \forall x \forall y [x + y = 1 \rightarrow (x = 0 \vee x = 1)], \\ & \forall x \forall y [x + y = 2 \rightarrow (x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2)], \\ & \dots \\ & \forall x \forall y [x + y = n \rightarrow (x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee \dots \vee x = n)], \\ & \dots \end{aligned}$$

Понятие \mathbb{N} -позитивности имеет следующий смысл. Пусть Y — алгебраическое множество, определенное системой \mathbb{N} -уравнений \mathcal{S} . Если в радикале $\text{Rad}_{\mathbb{N}}(Y)$ нет уравнений вида $t(X) = n$, где $n \in \mathbb{N}$, то координатный \mathbb{N} -моноид $\Gamma_{\mathbb{N}}(Y)$ \mathbb{N} -позитивен.

Так как $\text{Ax}_{\text{pos}} \in \mathbf{Ax}_{\mathbb{N}\text{-pos}}$, то любой \mathbb{N} -позитивный моноид является позитивным.

Следующая теорема описывает координатные \mathbb{N} -моноиды, соответствующие неприводимым алгебраическим множествам, заданным системами уравнений с коэффициентами в \mathbb{N} .

Теорема 5. *Пусть конечно порожденный над \mathbb{N} моноид M является координатным моноидом непустого алгебраического множества, заданного системой уравнений с коэффициентами в \mathbb{N} . Моноид M неприводим над \mathbb{N} тогда и только тогда, когда M является \mathbb{N} -позитивным.*

Доказательство. *Необходимость* следует из теоремы 2. В самом деле, \mathbb{N} -моноид M должен принадлежать \mathbb{N} -универсальному замыканию $\mathbb{N}\text{-ucl}(\mathbb{N})$, и поэтому в M должны быть истинны универсальные формулы, истинные в \mathbb{N} . Так как все формулы семейства $\mathbf{Ax}_{\mathbb{N}\text{-pos}}$ истинны в \mathbb{N} и записываются в виде универсальных формул, то любая формула из $\mathbf{Ax}_{\mathbb{N}\text{-pos}}$ должна быть истинна также и в M . Следовательно, \mathbb{N} -моноид M является \mathbb{N} -позитивным.

Докажем достаточность. Введем на множестве элементов M отношение эквивалентности \sim по следующему правилу:

$$m_1 \sim m_2 \iff \exists a_1, a_2 \in \mathbb{N} \quad m_1 + a_1 = m_2 + a_2.$$

Класс эквивалентности элемента $m \in M$ будем обозначать $[m]_{\mathbb{N}}$. Заметим, что все элементы моноида \mathbb{N} попадают в класс эквивалентности $[0]_{\mathbb{N}}$ и, кроме того, для \mathbb{N} -позитивного моноида M справедливо равенство $[0]_{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

Пусть $\chi_{\mathbb{N}}$ — отображение, ставящее каждому элементу $m \in M$ его класс эквивалентности $[m]_{\mathbb{N}}$. Непосредственно проверяется, что множество классов эквивалентности $\chi_{\mathbb{N}}(M)$ образует коммутативный моноид (нулем моноида является класс $[0]_{\mathbb{N}}$). Кроме того, отображение $\chi_{\mathbb{N}}$ является гомоморфизмом моноидов.

Так как \mathbb{N} -моноид M \mathbb{N} -позитивен, то, как следует из определения гомоморфизма $\chi_{\mathbb{N}}$, моноид $\chi_{\mathbb{N}}(M)$ позитивен.

Докажем, что \mathbb{N} \mathbb{N} -дискриминирует моноид M . Пусть m_1, m_2, \dots, m_k — различные элементы моноида M . Покажем что существует \mathbb{N} -гомоморфизм Ψ со свойством $\Psi(m_i) \neq \Psi(m_j)$.

Так как моноид $\chi_{\mathbb{N}}(M)$ позитивен, то по теореме 3 $\chi_{\mathbb{N}}(M)$ является координатным моноидом неприводимого алгебраического множества над \mathbb{N} , заданного системой бескоэффициентных уравнений. По теореме 2 мы получаем, что \mathbb{N} дискриминирует моноид $\chi_{\mathbb{N}}(M)$. Следовательно, существует гомоморфизм $\varphi : \chi_{\mathbb{N}}(M) \rightarrow \mathbb{N}$ такой, что

$$\varphi(\chi_{\mathbb{N}}(m_i)) \neq \varphi(\chi_{\mathbb{N}}(m_j)) \quad \text{при} \quad \chi_{\mathbb{N}}(m_i) \neq \chi_{\mathbb{N}}(m_j).$$

Так как соответствующее моноиду M алгебраическое множество непусто, то по предложению 2 существует \mathbb{N} -гомоморфизм $\psi \in \text{Hom}_{\mathbb{N}}(M, \mathbb{N})$.

Определим отображение моноида M

$$\Psi(m) = \psi(m) + d\varphi(\chi_{\mathbb{N}}(m)),$$

где натуральное число d будет выбрано ниже. Так как отображения ψ, φ являются гомоморфизмами, то непосредственно проверяется, что $\Psi \in \text{Hom}_{\mathbb{N}}(M, \mathbb{N})$.

Возможны два случая.

1) Допустим, что $\chi_{\mathbb{N}}(m_i) \neq \chi_{\mathbb{N}}(m_j)$ для всех пар чисел $i \neq j$. Так как моноид M позитивен и, следовательно, не содержит кручения, то равенство

$$\Psi(m_i) = \psi(m_i) + d\varphi(\chi_{\mathbb{N}}(m_i)) = \psi(m_j) + d\varphi(\chi_{\mathbb{N}}(m_j)) = \Psi(m_j)$$

возможно лишь при одном значении d . Но так как элементов m_i конечное число, то существует натуральное число d , при котором элементы m_1, \dots, m_k под действием $\Psi(m)$ будут отображаться в разные элементы моноида \mathbb{N} .

2) Если $\chi_{\mathbb{N}}(m_i) = \chi_{\mathbb{N}}(m_j)$ для некоторых $i \neq j$, то $m_i + a = m_j$ для некоторого ненулевого натурального числа a . Очевидно, что если $\Psi(m_i) = \Psi(m_j)$, то и $\Psi(a) = 0$. Последнее равенство невозможно, так как Ψ — \mathbb{N} -гомоморфизм.

Итак, \mathbb{N} -гомоморфизм Ψ обладает свойством $\Psi(m_i) \neq \Psi(m_j)$ ($i \neq j$). Поскольку набор m_1, \dots, m_k выбирался произвольно, получаем, что \mathbb{N} \mathbb{N} -дискриминирует M , и с помощью теоремы 2 заключаем, что M — неприводимый координатный \mathbb{N} -моноид алгебраического множества, заданного системой уравнений с коэффициентами в \mathbb{N} . Теорема доказана.

Фактически было доказано более сильное утверждение.

Теорема 6. *Конечно порожденный над \mathbb{N} моноид M является координатным моноидом неприводимого алгебраического множества над \mathbb{N} тогда и только тогда, когда M коммутативен, \mathbb{N} -позитивен, с сокращениями, и множество \mathbb{N} -гомоморфизмов $\text{Hom}_{\mathbb{N}}(M, \mathbb{N})$ непусто.*

Из теорем 2 и 5 получаем аксиоматизацию класса $\mathbb{N}\text{-ucl}(\mathbb{N})$.

Предложение 4. *Универсальный класс $\mathbb{N}\text{-ucl}(\mathbb{N})$ аксиоматизируем всеми истинными на \mathbb{N} квазитождествами и формулами $\mathbf{Ax}_{\mathbb{N}\text{-pos}}$ языка $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как свойства ассоциативности операции $+$ и нулевого элемента записываются в виде квазитождеств, то каждый элемент класса $\mathbb{N}\text{-ucl}(\mathbb{N})$ является \mathbb{N} -моноидом.

Пусть M — конечно порожденный над \mathbb{N} \mathbb{N} -позитивный моноид, принадлежащий \mathbb{N} -квазимонообразию, порожденному \mathbb{N} . По теоремам 3, 5 мы получаем, что $M \in \mathbb{N}\text{-ucl}(\mathbb{N})$.

Если в качестве M взять бесконечно порожденный над \mathbb{N} \mathbb{N} -моноид из \mathbb{N} -квазимонообразия $\mathbb{N}\text{-qvar}(\mathbb{N})$, то любой его конечно порожденный \mathbb{N} -подмоноид принадлежит классу $\mathbb{N}\text{-ucl}(\mathbb{N})$. Так как \mathbb{N} -универсальное замыкание определяется своими конечно порожденными подмоделями, то и $M \in \mathbb{N}\text{-ucl}(\mathbb{N})$. Следствие доказано.

3. Разложение алгебраического множества в объединение неприводимых компонент

В теореме 6 с помощью условия \mathbb{N} -позитивности были описаны координатные моноиды неприводимых алгебраических множеств над \mathbb{N} . Из предложения 3 следует, что все приводимые множества над \mathbb{N} получаются как конечные объединения неприводимых. Однако, в отличие от классической алгебраической геометрии над полем, не любое конечное объединение неприводимых алгебраических множеств над \mathbb{N} будет алгебраическим множеством.

Из теоремы 4 следует, что все алгебраические множества, заданные системами бескоэффициентных уравнений, неприводимы. Из этого следует, что никакое нетривиально конечное объединение неприводимых алгебраических множеств, заданных системами бескоэффициентных уравнений, не является алгебраическим множеством. Этот результат был сформулирован выше в виде следствия 1.

В отличие от систем бескоэффициентных уравнений среди алгебраических множеств, определенных системами \mathbb{N} -уравнений, существуют приводимые алгебраические множества. Следовательно, объединение конечного числа неприводимых алгебраических множеств может быть снова алгебраическим множеством. В качестве нетривиального примера можно рассмотреть следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} u = 1, \\ v = 0, \\ x + 1 = y, \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0, \\ v = 1, \\ x = y, \end{cases}$$

объединение решений которых является алгебраическим множеством, определенным системой

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ x + u = y. \end{cases} \quad (3.2)$$

Примеры, подобные рассмотренному выше, показывают, что по заданным неприводимым алгебраическим множествам Y_1, Y_2, \dots, Y_m решение задачи, является ли их объединение алгебраическим множеством, достаточно сложно. Поэтому в данном разделе мы рассмотрим обратную проблему.

Проблема. Пусть Y — непустое приводимое алгебраическое множество над \mathbb{N} , заданное системой уравнений с коэффициентами в \mathbb{N} . Требуется найти разложение Y в объединение неприводимых компонент $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ и исследовать свойства множеств Y_i .

Итак, пусть дано приводимое множество Y , определенное системой уравнений

$$\mathcal{S} = \begin{cases} t_1(\bar{x}) = s_1(\bar{x}), \\ t_2(\bar{x}) = s_2(\bar{x}), \\ \dots \\ t_r(\bar{x}) = s_r(\bar{x}), \end{cases} \quad (3.3)$$

с коэффициентами в \mathbb{N} . Систему уравнений \mathcal{S} можно записать в виде $\{\tau_i(\bar{x}) = \sigma_i(\bar{x}) + a_i \mid 1 \leq i \leq r, a_i \in \mathbb{N}\}$, где термы τ_i, σ_i являются бескоэффициентными.

Если множество Y приводимо, то по теореме 5 координатный \mathbb{N} -моноид $\Gamma_{\mathbb{N}}(Y)$ не является \mathbb{N} -позитивным. Это означает, что существует терм $t(\bar{x}) = \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \dots + \delta_n x_n + a'$ такой, что радикалу множества Y принадлежит уравнение $t(\bar{x}) = a, a \in \mathbb{N}$. Пусть $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ — множество переменных системы \mathcal{S} , входящих с ненулевым коэффициентом в уравнения вида $t(\bar{w}) = a$ из радикала $\text{Rad}_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$. Например, для указанной выше системы уравнений (3.2) имеем $\bar{w} = \{u, v\}$.

Очевидно, что каждое из уравнений $t(\bar{w}) = a \in \text{Rad}_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$ имеет конечное число решений в \mathbb{N} . По этой причине переменные множества \bar{w} будем называть *ограниченными*. Неограниченные переменные системы \mathcal{S} будем обозначать через $\bar{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$.

Рассмотрим систему $\bar{\mathcal{S}}$ от ограниченных переменных \bar{w} , состоящую из всех уравнений вида $t(\bar{w}) = a$, принадлежащих радикалу системы \mathcal{S} , т. е.

$$t(\bar{w}) = a \in \bar{\mathcal{S}} \iff t(\bar{w}) = a \in \text{Rad}_{\mathbb{N}}(\mathcal{S}). \quad (3.4)$$

Так как каждое из уравнений системы $\bar{\mathcal{S}}$ имеет конечное число решений, то и $|\mathbb{V}_{\mathbb{N}}(\bar{\mathcal{S}})| = m < \infty$. Пусть

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1k}), \\ &(\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2k}), \\ &\dots \\ &(\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \dots, \alpha_{mk}) \end{aligned}$$

— все решения системы уравнений $\bar{\mathcal{S}}$ в натуральных числах. Заметим, что $m > 1$. Иначе ($m = 1$) значения термов w_i и α_{1i} совпадали бы на всем множестве Y и по определению координатного \mathbb{N} -моноида в $\Gamma_{\mathbb{N}}(Y)$ были бы выполнены равенства $w_i = \alpha_{1i}$. Следовательно, для любого уравнения вида $t_1(\bar{w}) + t_2(\bar{w}) = a \in \text{Rad}_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$ выполнялось бы $t_1(\bar{w}), t_2(\bar{w}) \in \mathbb{N}$ и \mathbb{N} -моноид $\Gamma_{\mathbb{N}}(Y)$ являлся бы \mathbb{N} -позитивным и неприводимым (теорема 5). Однако последнее противоречит приводимости множества Y .

Рассмотрим следующие системы уравнений ($1 \leq i \leq m$):

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{S} \cup \begin{cases} w_1 = \alpha_{i1}, \\ w_2 = \alpha_{i2}, \\ \dots \\ w_k = \alpha_{ik}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Например, для системы уравнений (3.2) имеем $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \cup \{u = 1, v = 0\}$, $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} \cup \{u = 0, v = 1\}$.

Заметим, что системы уравнений \mathcal{S}_i могут определять пустые множества, например для $\{2z_1 + w_1 = 2z_2, w_1 + w_2 = 2\}$ получим, что система уравнений $\{2z_1 + w_1 = 2z_2, w_1 = 1, w_2 = 1\}$ несовместна над \mathbb{N} .

Обозначим решения систем \mathcal{S}_i через Y_i . Так как наборы $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik})$ пробегает все решения системы $\bar{\mathcal{S}}$, то $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$.

Пусть $\langle \mathcal{S} \rangle$ — множество \mathbb{N} -уравнений вида 2.1, получаемых из линейных комбинаций уравнений системы \mathcal{S} (3.3) с натуральными коэффициентами. Иными словами, $t(\bar{x}) = s(\bar{x}) \in \langle \mathcal{S} \rangle$, если $t(\bar{x}) = s(\bar{x})$ получается из линейной комбинации

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^r \beta_i t_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^r \beta_i s_i(\bar{x}) \right\}$$

приведением подобных членов и применением правила сокращения. Далее мы будем считать, что $\beta_i \in \mathbb{Z}$ (если $\beta_i < 0$, то мы полагаем, что в линейную комбинацию вместо уравнения $t_i(\bar{x}) = s_i(\bar{x})$ входит уравнение $s_i(\bar{x}) = t_i(\bar{x})$).

Из определения множества $\langle \mathcal{S} \rangle$ следует, что $\langle \mathcal{S} \rangle \subseteq \text{Rad}_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$.

Обозначим через $\mathcal{S}_0 = \{\tau_i(\bar{x}) = \sigma_i(\bar{x}) | 1 \leq i \leq r\}$ систему однородных уравнений, соответствующую системе \mathcal{S} .

Лемма 1. Пусть система уравнений \mathcal{S} совместна над \mathbb{N} , и бескоэффициентное уравнение вида $t(\bar{x}) = 0$ принадлежит множеству $\langle \mathcal{S}_0 \rangle$. Тогда множество $\langle \mathcal{S} \rangle$ содержит уравнение $t(\bar{x}) = a, a \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Уравнение $t(\bar{x}) = 0$ есть линейная комбинация уравнений $\tau_i(\bar{x}) = \sigma_i(\bar{x})$ с целыми коэффициентами β_i . Тогда линейная комбинация уравнений системы \mathcal{S}

$$\sum_{i=1}^r \beta_i \tau_i(\bar{x}) = \sum_{i=1}^r \beta_i \sigma_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^r \beta_i a_i$$

принадлежит множеству $\langle \mathcal{S} \rangle$ и равна $t(\bar{x}) = \sum_{i=1}^r \beta_i a_i$. Если число $\sum_{i=1}^r \beta_i a_i$ отрицательно, то нетрудно проверить, что множеству $\langle \mathcal{S} \rangle$ принадлежит несовместное над \mathbb{N} уравнение $t(\bar{x}) - \sum_{i=1}^r \beta_i a_i = 0$, что противоречит совместности системы \mathcal{S} . Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть уравнение $t(\bar{w}) = a$ принадлежит радикалу $\text{Rad}_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$. Тогда существует уравнение $t'(\bar{w}) = a'$, принадлежащее множеству $\langle \mathcal{S} \rangle$.

Доказательство. Предположим противное, а именно: множество $\langle \mathcal{S} \rangle$ не содержит уравнений вида $t'(\bar{w}) = a'$.

Пусть \mathcal{S}_0 — система однородных уравнений, соответствующая системе \mathcal{S} . Тогда по лемме 1 во множестве $\langle \mathcal{S}_0 \rangle$ нет уравнений вида $t'(\bar{w}) = 0$.

Более того, во множестве $\langle \mathcal{S}_0 \rangle$ нет уравнений вида $t'(\bar{w}, \bar{z}) = 0$, содержащих неограниченные переменные \bar{z} (в противном случае по лемме 1 существует уравнение $t'(\bar{w}, \bar{z}) = a' \in \langle \mathcal{S} \rangle$, и переменные множества \bar{z} , входящие в терм t' , являются ограниченными).

Таким образом, моноид M_0 , заданный представлением $\langle \bar{w}, \bar{z} | \mathcal{S}_0 \rangle$, является позитивным в квазимногообразии коммутативных моноидов с сокращениями. По теореме 3 моноид M_0 является координатным моноидом некоторого алгебраического множества над \mathbb{N} , заданного системой бескоэффициентных уравнений. Следовательно, $\langle \mathcal{S}_0 \rangle = \text{Rad}_0(\mathcal{S}_0)$, где через $\text{Rad}_0(\mathcal{S}_0)$ обозначен радикал системы \mathcal{S}_0 , состоящий из бескоэффициентных уравнений.

Если уравнения $w_1 = 0, w_2 = 0, \dots, w_k = 0$ принадлежат радикалу $\text{Rad}_0(\mathcal{S}_0)$, то по лемме 1 уравнения $w_1 = n_1, w_2 = n_2, \dots, w_k = n_k, n_i \in \mathbb{N}$ принадлежат радикалу $\text{Rad}_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$, и в этом случае, как было показано выше в данном разделе, множество Y неприводимо.

Следовательно, существует решение системы уравнений \mathcal{S}_0 , в котором не все переменные множества \bar{w} равны нулю. Без ограничения общности мы можем считать, что $\bar{p} \in V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S}_0)$ и $w_1 \neq 0$ в точке \bar{p} .

Точки $\bar{y} + \alpha \bar{p}$, где $\bar{y} \in V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$, принадлежат множеству $V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$ для любого натурального α . Так как $w_1 \neq 0$ в точке \bar{p} , то при увеличении числа α множество $V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$ будет содержать точки со сколь угодно большими координатами w_1 . Но это противоречит тому, что переменная w_1 принимает не более m различных значений $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1m}$ на множестве $V_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$. Лемма доказана.

Предположим теперь, что хотя бы одно из множеств Y_i приводимо. По теореме 5 это означает, что \mathbb{N} -уравнение

$$\delta_1 z_1 + \delta_2 z_2 + \dots + \delta_l z_l + \tau(\bar{w}) = a \quad (3.6)$$

принадлежит радикалу $\text{Rad}_{\mathbb{N}}(Y_i)$ и, таким образом, переменные z_i , входящие в это уравнение с ненулевым коэффициентом δ_i , являются ограниченными для множества Y_i . Пусть a_τ — свободный член терма $\tau(\bar{w})$. Если $a_\tau > a$, то уравнение (3.6) неразрешимо в натуральных числах, что противоречит тому, что множество Y_i непусто. Если $a_\tau \leq a$, то после сокращения правая часть равенства (3.6) не содержит свободного члена. Следовательно, мы можем изначально предполагать, что терм τ является бескоэффициентным.

Так как переменные множества \bar{w} принимают в Y_i фиксированные значения α_{ij} , то радикалу $\text{Rad}_{\mathbb{N}}(Y_i)$ принадлежит уравнение $\delta_1 z_1 + \delta_2 z_2 + \dots + \delta_l z_l + \tau(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}) = \tilde{a}$. Следовательно, мы можем изначально предполагать, что уравнение (3.6) имеет вид

$$\delta_1 z_1 + \delta_2 z_2 + \dots + \delta_l z_l = a \quad \text{если} \quad \tau(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}) \leq \tilde{a} \quad (3.7)$$

или

$$\delta_1 z_1 + \delta_2 z_2 + \dots + \delta_l z_l + a = 0 \quad \text{если} \quad \tau(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}) > \tilde{a}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим уравнение (3.7) (уравнение (3.8) неразрешимо над \mathbb{N} и не может принадлежать радикалу непустого алгебраического множества Y_i).

По лемме 2 множеству $\langle \mathcal{S}_i \rangle$ принадлежит уравнение $t(\bar{z}) = a'$, $a' \in \mathbb{N}$.

Так как система уравнений \mathcal{S}_i состоит из системы уравнений \mathcal{S} и равенств $w_j = \alpha_{ij}$, то уравнение $t(\bar{z}) = a'$ получено как линейная комбинация уравнений системы \mathcal{S} , в которой все переменные множества \bar{w} заменены на значения $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{im}$. Следовательно, множеству $\langle \mathcal{S} \rangle$ принадлежит уравнение

$$t(\bar{z}) + \sigma(\bar{w}) = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_k w_k + \tilde{a}, \quad \gamma_i \in \mathbb{N},$$

где $\sigma(\bar{w})$ — терм от переменных \bar{w} ($\sigma(\bar{w})$ может содержать свободный член).

По определению множества \bar{w} для каждой переменной w_i существует уравнение $t_{w_i}(\bar{w}) = a_{w_i} \in \text{Rad}_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$, содержащее переменную w_i . Обозначим через $t_{\bar{w}}(\bar{w}) = a_{\bar{w}}$ сумму всех уравнений $t_{w_i}(\bar{w}) = a_{w_i}$. Очевидно, что уравнение $t_{\bar{w}}(\bar{w}) = a_{\bar{w}}$ принадлежит радикалу $\text{Rad}_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$ и содержит все переменные множества \bar{w} .

Пусть

$$d = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \tilde{a}\}.$$

Просуммировав d раз обе части уравнения $t_{\bar{w}}(\bar{w}) = a_{\bar{w}}$, мы получим уравнение $dt_{\bar{w}}(\bar{w}) = da_{\bar{w}} \in \text{Rad}_{\mathbb{N}}(\mathcal{S})$, в котором коэффициенты при каждой переменной w_j не меньше натурального числа γ_j и $da_{\bar{w}} > \tilde{a}$. Последнее означает, что терм $dt_{\bar{w}}(\bar{w})$ можно представить в виде суммы $t(\bar{z}) + \sigma(\bar{w}) + t'(\bar{w})$. Поэтому радикалу множества Y принадлежит уравнение

$$t(\bar{z}) + \sigma(\bar{w}) + t'(\bar{w}) = da_{\bar{w}}. \quad (3.9)$$

Так как переменные z_i удовлетворяют равенству (3.9) с правой частью $da_{\bar{w}} \in \mathbb{N}$, то по определению множества \bar{w} получаем $z_i \in \bar{w}$, что противоречит неограниченности переменных z_i в системе \mathcal{S} . Таким образом, заключаем, что множество Y_i неприводимо.

Полученные выше разложения множества Y в объединение неприводимых множеств Y_i позволяют уточнить предложение 3 для приводимых алгебраических множеств над \mathbb{N} . Переменную x будем называть *фиксированной* в алгебраическом множестве Y , если уравнение $x = a$ ($a \in \mathbb{N}$) принадлежит радикалу $\text{Rad}_{\mathbb{N}}(Y)$.

Предложение 5. Пусть Y — произвольное алгебраическое множество, заданное системой уравнений с коэффициентами в \mathbb{N} . Тогда Y представимо в виде конечного объединения попарно непересекающихся неприводимых множеств Y_1, Y_2, \dots, Y_k . Более того, множества Y_i обладают одинаковым непустым набором фиксированных переменных.

Доказательство. Непосредственно следует из построения систем уравнений (3.5). \square

Автор выражает признательность Владимиру Никаноровичу Ремесленникову за постановку задачи и научное руководство работой, а также Павлу Вячеславовичу Морарю за ценные предложения при написании текста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V.** Unification theorems in algebraic geometry: eprint arXiv: 0808.2522v1 [math.AG]. 2008. 28 p.
URL: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0808/0808.2522v1.pdf.
2. **Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V.** Algebraic geometry over algebraic structures II: Foundations: eprint arXiv:1002.3562v1 [math.AG]. 2010. 54 p.
URL: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1002/1002.3562v1.pdf.
3. **Morar P., Shevlyakov A.** Algebraic geometry over the additive monoid of natural numbers: systems of coefficient free equations // Combinatorial and geometric group theory: Dortmund and Carleton conferences. Basel: Birkhäuser Verlag, 2010. P. 261–278.
4. **Myasnikov A., Remeslennikov V.** Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations // J. Algebra. 2000. Vol. 234, no. 1. P. 225–276.

Шевляков Артем Николаевич
аспирант

Омский филиал ин-та математики СО РАН
e-mail: a_shev1@mail.ru

Поступила 27.07.2009

УДК 519.16

**О ВЫЧИСЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ И ТИПОВ ПОВЕДЕНИЯ
КОМБИНАТОРНОЙ СЛОЖНОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ ЯЗЫКОВ¹****А. М. Шур**

Основной количественной характеристикой языка L над конечным алфавитом Σ является комбинаторная сложность — функция $C_L(n) = |L \cap \Sigma^n|$. Мы выражаем тип и параметры асимптотического поведения функции комбинаторной сложности регулярного языка через характеристики конечного автомата и приводим эффективные алгоритмы вычисления этих характеристик. На основе полученных результатов мы описываем колебания комбинаторной сложности для произвольных, префиксных и факториальных регулярных языков.

Ключевые слова: регулярный язык, конечный автомат, комбинаторная сложность, индекс роста.

A. M. Shur. Calculating parameters and behavior types of combinatorial complexity for regular languages.

The main quantitative characteristics of a language L over a finite alphabet Σ is the function $C_L(n) = |L \cap \Sigma^n|$ called the combinatorial complexity of L . We relate the type and parameters of the asymptotic behaviour of this function for a regular language L to the parameters of the corresponding finite automaton. Then we give efficient algorithms to calculate such parameters of finite automata. Using these results, we describe the oscillations of combinatorial complexity for arbitrary, prefix, and factorial regular languages.

Keywords: regular language, finite automaton, combinatorial complexity, growth rate.

Введение

Комбинаторная сложность языка L — это функция, описывающая рост языка: для натурального n она равна количеству слов длины n в L . Это наиболее естественная “подсчитывающая” функция, связанная с языком. Вместе с другими подобными функциями, такими как арифметическая сложность, сложность по подсловам, по палиндромам, по шаблонам и по максимальным шаблонам, она характеризует “богатство” формального языка. Комбинаторная сложность (под другим названием) изучалась еще Морсом и Хедлундом [16]. Первое систематическое исследование комбинаторной сложности класса языков было проведено Эренфойхтом и Розенбергом в 1973–83 гг.; начало было положено в [10]. Рассмотренные ими классы D0L- и HD0L-языков достаточно узки, но играют важную роль в комбинаторике слов. Подборки результатов о комбинаторной сложности можно найти в [5, гл. 9] и в [2]. Необходимо упомянуть также большой массив работ, посвященных функциям роста различных алгебр, т. е. комбинаторной сложности языков минимальных термов (для заданных алгебры и порождающего множества), см., например, [13, 15, 22, 24, 26]. Пожалуй, самым известным алгебраическим результатом о функциях роста является теорема Громова [12]: конечно порожденная группа имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда она является конечным расширением нильпотентной группы.

Естественными классами для изучения с точки зрения комбинаторной сложности являются ступени иерархии Хомского и ее обобщений. Первая работа о сложности регулярных языков появилась еще в 1958 г. [6]. Многократно переоткрывался результат о дихотомии, впервые явно отмеченный в [25]: комбинаторная сложность контекстно-свободного языка либо полиномиальна, либо экспоненциальна (промежуточный рост невозможен). В [7] впервые к изуче-

¹Работа выполнена при поддержке программы Рособразования “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/3537) и РФФИ (проект 09-01-12142).

нию комбинаторной сложности была привлечена теория производящих функций, оказавшаяся мощным инструментом (см. [18]).

Для регулярных языков при помощи производящих функций легко описать все типы асимптотического поведения комбинаторной сложности (см. ниже теорему 2), но нельзя ответить на вопрос об эффективном вычислении типа и параметров асимптотического поведения заданного регулярного языка. Однако для количественных характеристик вопросы эффективного вычисления очень важны. Основные цели данной работы — выразить упомянутые параметры асимптотического поведения через характеристики конечных автоматов, привести эффективные алгоритмы вычисления этих характеристик и изучить возможные виды колебаний комбинаторной сложности регулярных языков.

Мы рассматриваем отдельно два важных подкласса регулярных языков, состоящие из факториальных (замкнутых относительно подслов) и префиксных (замкнутых относительно префиксов) языков соответственно; к факториальным относятся все языки, задаваемые “негативными” свойствами (например, не содержать подслов определенного вида), а префиксные языки соответствуют детерминированным конечным автоматам без нетерминальных вершин.

Работа состоит из шести разделов. Раздел 1 — предварительный, в разд. 2 приводится описание видов асимптотического поведения комбинаторной сложности регулярного языка на основе результатов о производящих функциях, в разд. 3 и 4 параметры асимптотического поведения связываются с характеристиками конечных автоматов, в разд. 5 описано вычисление этих характеристик, а разд. 6 посвящен колебаниям комбинаторной сложности.

1. Предварительные сведения

Напомним необходимые определения и обозначения. Сведения по данной тематике можно также почерпнуть в [8, 9, 14, 23].

1.1. Языки и автоматы

Мы рассматриваем слова и языки над конечным алфавитом, обозначаемым Σ . Слово u является *подсловом* (соответственно, *префиксом*, *суффиксом*) слова w , если w представимо в виде $\bar{v}u\hat{v}$ (соответственно $u\hat{v}$, $\bar{v}u$) для некоторых (возможно, пустых) слов \bar{v} и \hat{v} . Как обычно, через Σ^n мы обозначаем множество всех n -буквенных слов, а через Σ^* — множество всех слов над Σ . Языки, получаемые из языка $L \subseteq \Sigma^*$ замыканием относительно взятия префиксов (суффиксов, подслов) обозначаются через $\text{PR}(L)$ (соответственно, $\text{SUF}(L)$ и $\text{FACT}(L)$). Язык называется *префиксным* (*суффиксным*, *факториальным*), если он совпадает с соответствующим своим замыканием.

Детерминированным конечным автоматом (далее просто *автоматом*) называется пятерка $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, s, T)$, где Σ — алфавит; Q — конечное множество *состояний* автомата; $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ — *частичная функция переходов*; $s \in Q$ — *начальное состояние*; $T \subseteq Q$ — множество *терминальных состояний*. Автомат удобно отождествлять с помеченным орграфом, имеющим множество вершин Q и множество помеченных дуг, состоящее из всех троек вида (q, a, q') , где $q, q' \in Q$, $a \in \Sigma$ и $\delta(q, a) = q'$. Всякий (s, t) -маршрут, где $t \in T$, называется *распознающим*, а его метка — словом, *распознаваемым* автоматом. Через $L(\mathcal{A})$ обозначается язык, *распознаваемый* автоматом \mathcal{A} , состоящий в точности из всех слов, распознаваемых \mathcal{A} . Класс таких языков совпадает с классом регулярных языков.

Автомат называется *плотным*, если каждая из его вершин содержится в каком-нибудь распознающем маршруте. Изучая автоматы как орграфы, мы часто опускаем метки. Поскольку для любого автомата число распознаваемых слов длины n равно числу распознающих маршрутов этой длины, для вычисления комбинаторной сложности мы будем считать маршруты, а не слова. Для фиксированного автомата число (u, v) -маршрутов длины n будем обозначать через $P_{uv}(n)$, а число маршрутов длины n , начинающихся в вершине u , — через $P_{u*}(n)$.

Если в определении автомата заменить функцию переходов на *множество переходов* $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ и отказаться от единственности начального состояния, получится *недетерминированный* конечный автомат. Последующие определения переносятся на случай недетерминированного автомата очевидным образом.

1.2. Сложность

Для языка L мы интересуемся асимптотическим поведением комбинаторной сложности. При сравнении функций мы опираемся на стандартные O -, Ω - и Θ -обозначения. Кроме того, для описания “верхней” асимптотики для немонотонных функций мы вводим обозначения $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Theta}$ следующим образом: $f(n) = \bar{\Omega}(g(n))$ тогда и только тогда, когда существуют последовательность $\{n_i\}_1^\infty$ и константа $C > 0$ такие, что $f(n_i) \geq Cg(n_i)$ для всех i ; $f(n) = \bar{\Theta}(g(n))$ тогда и только тогда, когда $f(n) = O(g(n))$ и $f(n) = \bar{\Omega}(g(n))$, т. е. существуют последовательность $\{n_i\}_1^\infty$ и константы $0 < C_1 < C_2$ такие, что $C_1g(n_i) \leq f(n_i)$ для всех i и $f(n) \leq C_2g(n)$ для всех n .

Важнейшей характеристикой функции f , заданной на множестве неотрицательных целых чисел, является *индекс роста* $\limsup_{n \rightarrow \infty} (f(n))^{1/n}$, определяющий основную асимптотическую составляющую функции f при $n \rightarrow \infty$. Индекс роста комбинаторной сложности языка мы называем *индексом роста языка*.

З а м е ч а н и е 1. Комбинаторная сложность языка над конечным алфавитом растет не более чем экспоненциально. Поэтому при оценке функции выражениями типа $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$, $\bar{\Omega}(f(n))$, $\Theta(f(n))$ и $\bar{\Theta}(f(n))$ мы всегда можем выбрать функцию f вида $f(n) = g(n)\alpha^n$, где $\alpha \geq 1$, а g — неубывающая функция субэкспоненциального роста. В дальнейшем рассматриваются только такие функции f .

Асимптотическое поведение функций комбинаторной сложности будет удобно описывать при помощи приводимого ниже определения. Пусть, как обычно, \mathbb{N}_0 — множество натуральных чисел с нулем, \mathbb{R}^+ — множество неотрицательных вещественных чисел, а слово “асимптотически” означает “для всех значений аргумента, больших некоторой константы”. Пусть $F(n) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ — функция, r — натуральное число. Множество $\{f_0(n), \dots, f_{r-1}(n)\}$ (нестрого) возрастающих функций $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *асимптотическим множеством* для $F(n)$, если для каждого из множеств $N_i = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \bmod r = i\}$ либо $f_i(n) \equiv 0$ и $F(n)$ асимптотически равно нулю на N_i , либо $f_i(n) \not\equiv 0$ и найдется число $\gamma_i > 1$ такое, что неравенство $|F(n)/f_i(n) - 1| < \gamma_i^{-n}$ асимптотически верно на N_i . Каждую из функций $f_i(n)$ будем называть *асимптотической функцией для $F(n)$ на множестве N_i* .

Отметим, что в приведенном определении использовано условие более сильное, чем эквивалентность F и f_i на множестве N_i . Действительно, мы требуем не только сходимости отношения $F(n)/f_i(n)$ к единице при стремлении n к бесконечности по множеству N_i , но и экспоненциальной скорости этой сходимости.

1.3. Орграфы и линейная алгебра

Компонентой сильной связности (в дальнейшем — просто *компонентой*) орграфа G называется максимальный по включению подграф G' в G такой, что существует маршрут из любой вершины G' в любую другую вершину этого подграфа. Орграф называется *сильно связным*, если он состоит из единственной компоненты. *Графом компонент \hat{G}* орграфа G называется ациклический орграф, полученный из G стягиванием всех дуг внутри каждой из компонент. Таким образом, вершины \hat{G} можно считать компонентами графа G . Существует естественная *проекция* из G на \hat{G} , отображающая каждую вершину в ее компоненту. Тем самым можно определить *проекцию* маршрута в G , которая является путем в \hat{G} , и *проективный прообраз* пути в \hat{G} , являющийся подграфом в G .

Поскольку матрица смежности орграфа неотрицательна, к ней можно применить классическую теорему Перрона — Фробениуса. Эта теорема приведена ниже для *неразложимых* матриц. Матрица смежности орграфа неразложима тогда и только тогда, когда орграф сильно связан.

Теорема 1 (Перрон, Фробениус; см. [23]). Пусть M — неразложимая неотрицательная матрица, α — спектральный радиус M . Тогда

- (1) α — собственное число матрицы M ;
- (2) все собственные числа M с модулем α являются простыми;
- (3) если существует ровно r таких собственных чисел, а именно $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, то $\lambda_j = \alpha \varepsilon_r^j$, где $j = 1, \dots, r$, а $\varepsilon_r = e^{(2\pi i/r)}$ есть первообразный корень из единицы r -й степени;
- (4) у матрицы M есть строго положительный собственный вектор, принадлежащий α .

Если M является матрицей смежности орграфа G , то упомянутое число α называется *индексом* G и обозначается $Ind(G)$. Заметим, что α — алгебраическое число. Известно [9], что индекс орграфа равен максимуму из индексов его компонент. Компоненты индекса 0 одноэлементны, а компоненты индекса 1 являются простыми циклами. Индексы остальных компонент строго больше единицы. Количество r собственных чисел с максимальным модулем называется *числом импримитивности* неразложимой матрицы (или сильно связного орграфа). Для орграфов это число равно наибольшему общему делителю длин всех циклов.

2. Асимптотическое поведение комбинаторной сложности

Асимптотическое поведение комбинаторной сложности регулярных языков может быть описано при помощи производящих функций и формальных степенных рядов. А именно, объединив несколько результатов из [18, разд. II.9 и II.10], получим применительно к регулярным языкам следующую теорему:

Теорема 2. Для любого регулярного языка L существуют натуральные числа l и r такие, что для любого $j = 0, \dots, r-1$ и любого $n \geq l$, такого что $n \bmod r = j$, справедливо равенство

$$C_L(n) = p_j(n)\alpha_j^n + \sum_i p_{ji}(n)\alpha_{ji}^n, \quad (2.1)$$

где число слагаемых конечно; $\alpha_j \geq 0$ и α_{ji} — некоторые алгебраические числа; $\alpha_j > \max |\alpha_{ji}|$, а все p_j и p_{ji} — ненулевые многочлены с алгебраическими коэффициентами, причем коэффициенты многочленов p_j — вещественные.

З а м е ч а н и е 2. Говоря в дальнейшем о сумме вида (2.1), мы всегда имеем в виду сумму из правой части равенства (2.1), все члены которой удовлетворяют свойствам, указанным в теореме 2.

Из теоремы 2 немедленно получаются два следствия о значимых для асимптотического поведения параметрах комбинаторной сложности.

Следствие 1. Для любого регулярного языка L существуют натуральное число r , алгебраические числа $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1} \in \{0\} \cup [1, \infty)$ и ненулевые многочлены p_0, \dots, p_{r-1} с алгебраическими вещественными коэффициентами, такие что множество $\{p_0(n)\alpha_0^n, \dots, p_{r-1}(n)\alpha_{r-1}^n\}$ является асимптотическим для комбинаторной сложности $C_L(n)$.

Следствие 2. Для любого регулярного языка L найдутся целое число $m \geq 0$ и алгебраическое число $\alpha \in \{0\} \cup [1, \infty)$, такие что $C_L(n) = \bar{\Theta}(n^m \alpha^n)$.

В этой статье нас в первую очередь интересует вопрос о вычислении параметров комбинаторной сложности. Наиболее важными параметрами, безусловно, являются α и m из следствия 2, т. е. индекс роста и степень полинома при этом индексе. Кроме α и m интерес представляет число r – размер асимптотического множества, а также коэффициенты многочленов p_j . Некоторые сведения о числах r и α_j , а также о многочленах p_j можно почерпнуть из доказательств упомянутых результатов из [18], однако построить по этим сведениям эффективные алгоритмы вряд ли возможно. Чтобы параметры сложности регулярных языков было удобно вычислять, мы свяжем их с эффективно вычисляемыми характеристиками автоматов.

Следующий результат об индексе роста, по-видимому, является фольклорным. Короткое доказательство можно найти, например, в [19]. Параметрам r и m посвящены два следующих раздела.

Теорема 3. Пусть \mathcal{A} – плотный автомат, $L = L(\mathcal{A})$. Тогда $\alpha(L) = \text{Ind}(\mathcal{A})$.

3. Параметр r

Для того чтобы оценить r , дадим необходимое определение. Компоненту c плотного автомата \mathcal{A} назовем *значимой*, если для некоторого множества натуральных чисел $\{n_i\}_1^\infty$ через c проходит распознающий маршрут длины n_i , а ни через одну из компонент, индекс которых больше $\text{Ind}(c)$, такой маршрут не проходит.

Теорема 4. Пусть \mathcal{A} – плотный автомат, $L = L(\mathcal{A})$. Тогда параметр r в теореме 2 может быть выбран равным наименьшему общему кратному чисел импримитивности всех значимых компонент автомата \mathcal{A} . В частности, функция $C_L(n)$ имеет асимптотическое множество мощности r .

Фактически мы приведем конструктивное доказательство теоремы 2, контролируя попутно параметр r . Доказательство опирается на три леммы.

Лемма 1. Пусть s, u и v – вершины орграфа и $P_{su}(n) = \bar{\Theta}(f(n))$. Тогда если существует (u, v) -маршрут, то $P_{sv}(n) = \bar{\Omega}(f(n))$, а если существует еще и (v, u) -маршрут, то $P_{sv}(n) = \bar{\Theta}(f(n))$.

Доказательство. Пусть k – длина некоторого (u, v) -маршрута. По условию $P_{su}(n) = \bar{\Omega}(f(n))$ и $P_{su}(n) = O(f(n))$. Первое равенство означает, что найдется последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_1^\infty$, такая что для некоторой константы C_1 и любого i выполнено неравенство $P_{su}(n_i) \geq C_1 f(n_i)$. Заметим, что $P_{sv}(n_i + k) \geq P_{su}(n_i)$, поскольку каждый (s, u) -маршрут длины n можно продолжить (u, v) -маршрутом длины k , получая (s, v) -маршрут. Далее, существует константа C_2 , такая что $f(n + k) \leq C_2 f(n)$ для любого n (см. замечание 1). Следовательно,

$$P_{sv}(n_i + k) \geq P_{su}(n_i) \geq C_1 f(n_i) \geq \frac{C_1}{C_2} f(n_i + k)$$

для всех $i \geq 1$, откуда $P_{sv}(n) = \bar{\Omega}(f(n))$ по определению.

Докажем второе утверждение. Пусть r – длина некоторого (v, u) -маршрута. Тогда $P_{su}(n+r) \geq P_{sv}(n)$. Поскольку $P_{su}(n) = O(f(n))$, можно записать $P_{su}(n+r) \leq C_3 f(n+r)$ для некоторой константы C_3 и всех n . Выбрав константу C_4 так, чтобы для всех n выполнялось $f(n+r) \leq C_4 f(n)$, получаем

$$P_{sv}(n) \leq P_{su}(n+r) \leq C_3 f(n+r) \leq C_3 C_4 f(n)$$

для любого n , т. е. $P_{sv}(n) = O(f(n))$. В итоге, $P_{sv}(n) = \bar{\Theta}(f(n))$.

Лемма 2. Пусть G — неоднородный сильно связанный орграф с индексом α и числом импримитивности r . Тогда для любых вершин u, v из G найдутся числа $j \in \{0, \dots, r-1\}$, $\mu > 0$, и δ , $0 < \delta \leq \alpha$, такие что

$$P_{uv}(n) = \begin{cases} \mu\alpha^n + O((\alpha - \delta)^n), & \text{если } n \bmod r = j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В частности, $P_{uv}(n) = \bar{\Theta}(\alpha^n)$.

Доказательство. Сначала докажем, что длины всех (u, v) -маршрутов в графе G равны по модулю r . Поскольку длина любого цикла кратна r (см. подразд. 1.3), длина любого (u, u) -маршрута также кратна r . Возьмем (v, u) -маршрут длины n и положим $j = n \bmod r$. Тогда длина любого (u, v) -маршрута сравнима с $(r-j)$ по модулю r (в противном случае длина (u, u) -маршрута, полученного соединением такого (u, v) -маршрута с выбранным (v, u) -маршрутом, не будет кратна r). Таким образом, достаточно проверить первое неравенство для $P_{uv}(n)$.

В дальнейшем доказательстве использован стандартный прием — сведение к нормальной форме Жордана. Пусть M — матрица смежности графа G , k — ее размер. Для удобства будем считать, что множество вершин графа G есть $\{1, \dots, k\}$. Как известно, $P_{uv}(n) = M^n[u, v]$. Покажем, что функция $\bar{P}_{uv}(n) = P_{uv}(n)/\alpha^n$ имеет асимптотическое множество, состоящее из r констант. Рассмотрим матрицу $\bar{M} = (1/\alpha)M$. Ее собственные числа имеют вид λ/α , где λ — собственное число матрицы M . По теореме 1, жорданова форма матрицы \bar{M} имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \varepsilon_r & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \varepsilon_r^{r-1} & & \\ & & & \boxed{J_1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \boxed{J_t} \end{pmatrix}$$

(жордановы клетки J_1, \dots, J_t содержат собственные значения, по модулю меньше 1). Нетрудно видеть, что n -я степень жордановой клетки с собственным значением λ имеет вид

$$J_\lambda^n[i, j] = \begin{cases} \binom{n}{i-j} \cdot \lambda^{n-i+j}, & \text{если } i \geq j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку биномиальный коэффициент $\binom{n}{i-j}$ является полиномом от n , можно заключить, что при $|\lambda| < 1$ и n , стремящемся к бесконечности, все элементы матрицы J_λ^n стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью. Следовательно, все элементы матрицы J^n , кроме r верхних диагональных элементов, либо равны нулю, либо стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью. Так как J является жордановой формой матрицы \bar{M} , имеем $\bar{M} = TJT^{-1}$, где T — матрица перехода, столбцы которой являются векторами соответствующего жорданова базиса. Далее, $\bar{M}^n = TJ^nT^{-1}$. Обозначим элементы матриц в правой части последнего равенства через a, b, c (с индексами), соответственно. Тогда

$$\bar{P}_{uv}(n) = \bar{M}^n[u, v] = \sum_{x,y=1}^k a_{ux}b_{xy}c_{yv} = a_{u1}c_{1v} + a_{u2}c_{2v}\varepsilon_r^n + \dots + a_{ur}c_{rv}\varepsilon_r^{(r-1)n} + O(\gamma^n) \quad (3.1)$$

при некотором $\gamma < 1$. Таким образом, для всех значений n , сравнимых между собой по модулю r , правая часть (3.1) принимает одно и то же значение с точностью до экспоненциально

малого слагаемого. Следовательно, функция $\overline{P}_{uv}(n)$ по определению имеет асимптотическое множество, состоящее из r констант; обозначим их через μ_0, \dots, μ_{r-1} . Все эти константы неотрицательны, так как неотрицательна левая часть (3.1). Поскольку ранее мы доказали, что все значения n , для которых $P_{uv}(n) > 0$ (а значит, $\overline{P}_{uv}(n) > 0$), сравнимы по модулю r , все константы, кроме одной, равны нулю. Покажем, что одна из констант нулю не равна. Заметим, что при условии $\mu_0 = \dots = \mu_{r-1} = 0$ полином $(r-1)$ -й степени

$$a_{u1}c_{1v} + a_{u2}c_{2v}x + \dots + a_{ur}c_{rv}x^{r-1}$$

имеет r различных корней, а именно $\varepsilon_r, \varepsilon_r^2, \dots, \varepsilon_r^r = 1$. Следовательно, все коэффициенты этого полинома — нули. Но a_{u1} является координатой главного собственного вектора матрицы \overline{M} , т. е. $a_{u1} \neq 0$ для всех u по теореме 1 (4). Далее, матрица T^{-1} не содержит нулевых столбцов, откуда $c_{1v} \neq 0$ для некоторого v . Тем самым для данного v и каждого u в асимптотическом множестве функции $\overline{P}_{uv}(n)$ есть ненулевая константа. Тогда, в частности, $P_{uv}(n) = \overline{\Theta}(\alpha^n)$. Отсюда по лемме 1 получаем $P_{uv}(n) = \overline{\Theta}(\alpha^n)$ для любых вершин u и v . Значит, при любых u и v асимптотическое множество функции $\overline{P}_{uv}(n)$ содержит ненулевую константу. Отсюда по определению асимптотического множества функция $P_{uv}(n)$ обязана иметь вид, указанный в условии леммы 2. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть s — начальная, а u — произвольная вершина автомата \mathcal{A} , некоторый (s, u) -маршрут имеет проекцию $q = (c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_t)$, $P_{su}^q(n)$ — количество (s, u) -маршрутов длины n , имеющих проекцию q , и $\alpha = \max_i \text{Ind}(c_i)$. Тогда $P_{su}^q(n) = \Omega(\alpha^n)$ на множестве $\overline{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid P_{su}^q(n) > 0\}$.

Доказательство. Пусть c_i — неоднородная компонента с числом импримитивности r_i и $\alpha_i = \text{Ind}(c_i)$. Далее, пусть существует (s, u) -маршрут длины n_0 ; зафиксируем один из таких маршрутов. Он входит в c_i в некоторой вершине v_1 и покидает c_i в некоторой вершине v_2 . Следовательно, этот маршрут получается соединением (s, v_1) -маршрута длины l_1 , (v_1, v_2) -маршрута длины $(n_0 - l_1 - l_2)$ и (v_2, u) -маршрута длины l_2 (некоторые из этих длин могут равняться нулю). По лемме 2 число (v_1, v_2) -маршрутов длины n есть $\Omega(\alpha_i^n)$ на множестве $\{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod r_i = (n_0 - l_1 - l_2) \bmod r_i\}$ и равно нулю для всех остальных значений n . Но тогда $P_{su}^q(n) = \Omega(\alpha_i^{n-l_1-l_2}) = \Omega(\alpha_i^n)$ на множестве $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \bmod r_i = n_0 \bmod r_i\}$. Перебирая все возможные длины (s, u) -маршрутов, мы получаем, что $P_{su}^q(n) = \Omega(\alpha_i^n)$ на множестве \overline{N} . Проанализировав тем же способом все неоднородные компоненты из q , получаем требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 4. Пусть язык L распознается плотным автоматом \mathcal{A} с начальной вершиной s . Имеем $C_L(n) = \sum P_{su}(n)$, где u пробегает множество терминальных вершин. В свою очередь, $P_{su}(n)$ есть (конечная) сумма количеств (s, u) -маршрутов длины n с фиксированной проекцией. Обозначим через $P_{su}^q(n)$ количество (s, u) -маршрутов длины n с проекцией $q = (c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_t)$ и вычислим представление функции $P_{su}^q(n)$ суммами вида (2.1) средствами теории матриц.

Пусть \mathcal{A}^q — автомат, являющийся полным прообразом пути q относительно проекции. Тем самым (s, u) -маршрут учитывается в $P_{su}^q(n)$ тогда и только тогда, когда он является маршрутом в \mathcal{A}^q ; далее мы работаем только с автоматом \mathcal{A}^q . Можно считать, что по крайней мере одна из компонент c_1, \dots, c_t неоднородна, поскольку в противном случае требуемое представление состоит из единственной нулевой суммы.

Пусть A — матрица смежности автомата \mathcal{A}^q , а $\chi(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0$ — характеристический многочлен матрицы A . По теореме Гамильтона — Кэли, $\chi(A) = O$, т. е. $\mathbf{x} \cdot \chi(A) = \mathbf{0}$ для любого вектора \mathbf{x} . Для произвольного фиксированного вектора \mathbf{x} рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{F}(n) = \mathbf{x}A^n$. Эта функция удовлетворяет линейному однородному рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{F}(n) = -a_{k-1}\mathbf{F}(n-1) - \dots - a_0\mathbf{F}(n-k),$$

поскольку $\mathbf{F}(n-k) \cdot \chi(A) = \mathbf{0}$. По основной теореме о таких соотношениях (см., например, [17]), функция $\mathbf{F}(n)$ может быть задана явно с использованием корней *характеристического многочлена* рекуррентного соотношения (в нашем случае этот многочлен совпадает с $\chi(\lambda)$). А именно предположим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ — все корни упомянутого многочлена (т. е. собственные числа матрицы A), d_1, \dots, d_h — их кратности. Тогда

$$\mathbf{F}(n) = (\mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{12}n + \dots + \mathbf{b}_{1d_1}n^{d_1-1})\lambda_1^n + \dots + (\mathbf{b}_{h1} + \dots + \mathbf{b}_{hd_h}n^{d_h-1})\lambda_h^n, \quad (3.2)$$

где векторные константы $\mathbf{b}_{11}, \dots, \mathbf{b}_{hd_h}$ однозначно определяются значениями $\mathbf{F}(0), \dots, \mathbf{F}(k-1)$ через систему линейных уравнений с алгебраическими коэффициентами. Тем самым все компоненты векторов $\mathbf{b}_{11}, \dots, \mathbf{b}_{hd_h}$ являются алгебраическими числами.

Занумеруем вершины автомата \mathcal{A}^q числами от 1 до k так, чтобы вершина s получила номер 1. Имеем $A^n[u, v] = P_{uv}^q(n)$. Возьмем $\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)$; тогда функция $\mathbf{F}(n)$ возвращает первую строку матрицы A^n , т. е. $(\mathbf{F}(n))_i = P_{su_i}^q(n)$. Следовательно, равенство (3.2) можно переписать в скалярном виде

$$P_{su}^q(n) = (b_{11} + b_{12}n + \dots + b_{1d_1}n^{d_1-1})\lambda_1^n + \dots + (b_{h1} + \dots + b_{hd_h}n^{d_h-1})\lambda_h^n. \quad (3.3)$$

Без ограничения общности положим $\alpha = \lambda_1 = \dots = |\lambda_g| > |\lambda_{g+1}| \geq \dots \geq |\lambda_h|$. Обозначив через \bar{p}_i многочлен, на который умножается λ_i^n , перепишем (3.3) в виде

$$P_{su}^q(n) = (b_{11} + \dots + b_{1d_1}n^{d_1-1})\lambda_1^n + \dots + (b_{g1} + \dots + b_{gd_g}n^{d_g-1})\lambda_g^n + \sum_{i=g+1}^h \bar{p}_i(n)\lambda_i^n. \quad (3.4)$$

Характеристический многочлен матрицы A является произведением характеристических многочленов матриц смежности компонент c_1, \dots, c_t . Применяя теорему 1 (3) к каждой компоненте индекса α , получим, что каждое из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ является произведением α на некоторый корень из единицы, причем степени этих корней делят числа импримитивности соответствующих компонент. Пусть r — наименьшее общее кратное всех чисел импримитивности компонент индекса α , тогда для любого $i = 1, \dots, g$ имеем $\lambda_i = \alpha \varepsilon_r^{j_i}$ при некотором натуральном $j_i \leq r$. Заметим также, что кратность собственного числа λ_1 не меньше кратности любого из собственных чисел $\lambda_2, \dots, \lambda_g$ по теореме 1 (1,2). Следовательно, в (3.4) мы можем вынести α^n за скобки из главной части выражения для $P_{su}^q(n)$ и перегруппировать члены в скобках следующим образом:

$$P_{su}^q(n) = \left(\sum_{j=1}^r \bar{b}_{j1} \varepsilon_r^{jn} + \sum_{j=1}^r \bar{b}_{j2} \varepsilon_r^{jn} \cdot n + \dots + \sum_{j=1}^r \bar{b}_{jd_1} \varepsilon_r^{jn} \cdot n^{d_1-1} \right) \alpha^n + \sum_{i=g+1}^h \bar{p}_i(n)\lambda_i^n. \quad (3.5)$$

Коэффициенты “с чертой” в (3.5) — это либо перегруппированные коэффициенты “без черты”, либо нули. Очевидно, что каждая из сумм внутри скобок является r -периодической функцией. Следовательно, выражение в скобках равно одному из r многочленов в зависимости от значения $(n \bmod r)$. Обозначим эти многочлены через p_0, \dots, p_{r-1} . Заметим, что если при $n = n_0$ выражение в скобках равно нулю, то $P_{su}^q(n_0) = 0$ по лемме 3. Для каждого $j = 0, \dots, r-1$ положим $\alpha_j = \alpha$, $p_{ji} = \bar{p}_i$, $\alpha_{ji} = \lambda_i$, если $p_j \neq 0$, а в случае $p_j = 0$ положим $p_j = 1$, $\alpha_j = 0$. Отбросив теперь нулевые слагаемые из суммы по i , получим для функции $P_{su}^q(n)$ представление суммами вида (2.1). В самом деле, все коэффициенты многочленов p_j и p_{ji} — алгебраические, так как получены суммированием компонент векторов $\mathbf{b}_{11}, \dots, \mathbf{b}_{hd_h}$, все многочлены p_j — вещественные, так как функция $P_{su}^q(n)$ вещественна, а остальные требования к (2.1) очевидно выполнены.

Итак, комбинаторная сложность $C_L(n)$ является конечной суммой функций вида $P_{su}^q(n)$, каждая из которых представима суммами вида (2.1) так, что параметр r является наименьшим общим кратным чисел импримитивности тех компонент из соответствующей проекции q ,

индекс которых — наибольший, а все числа α_j равны либо нулю, либо этому наибольшему индексу. Просуммируем представления функций $P_{su}^q(n)$ так, чтобы минимизировать количество сумм вида (2.1). Упорядочим функции $P_{su}^q(n)$ по убыванию соответствующих чисел α_j (т. е. индексов роста) и просуммируем от начала полученного списка к его концу.

Будем выполнять суммирование двумя способами. Основной способ: если функция $F_1(n)$ может быть представлена r_1 суммами вида (2.1), а функция $F_2(n)$ — r_2 суммами вида (2.1), то вначале каждую из них записать с помощью НОК(r_1, r_2) сумм вида (2.1), “размножив” каждую из сумм необходимое количество раз, а затем сложить соответствующие суммы, получая представление функции $F_1(n)+F_2(n)$. Вспомогательный способ будем применять, когда функция F_1 доминирует над F_2 , т. е. когда при сложении по основному способу старшие члены всех сумм вида (2.1) в представлении функции $F_1(n)+F_2(n)$ совпадают со старшими членами в соответствующем представлении F_1 . В этом случае для получения представления функции $F_1(n)+F_2(n)$ достаточно прибавить к каждой сумме вида (2.1) из представления F_1 функцию F_2 в виде (3.3), не заботясь о том, чтобы самое быстрорастущее слагаемое было вещественным, поскольку оно все равно растет медленней первого слагаемого из суммы вида (2.1) для F_1 .

Проведя суммирование, посмотрим, числа импримитивности каких компонент автомата \mathcal{A} участвовали в вычислении параметра r , т. е. количества сумм вида (2.1) в полученном представлении функции $C_L(n)$. Число импримитивности компоненты s учитывалось, если, во-первых, индекс роста некоторой функции P_{su}^q равен $Ind(c)$, т. е. $Ind(c) = \max_{c_i \in q} Ind(c_i)$, а во-вторых, сложение с упомянутой функцией P_{su}^q осуществлялось по основному способу. Поскольку сложение функций $P_{su}^q(n)$ производилось по убыванию индекса, мы немедленно получаем, что число импримитивности компоненты учитывается тогда и только тогда, когда эта компонента является значимой. Поскольку параметр r равен наименьшему общему кратному чисел импримитивности всех учтенных компонент, теорема полностью доказана.

4. Параметр m . Некоторые следствия

Теорема 5. Пусть \mathcal{A} — плотный автомат, $L = L(\mathcal{A})$, а m — максимальное количество компонент индекса $\alpha(L)$, которые можно соединить маршрутом в \mathcal{A} . Тогда $\alpha(L) = \Theta(n^{m-1}\alpha^n)$.

Пусть, как и в предыдущем разделе, $P_{su}^q(n)$ есть число всех (s, u) -маршрутов длины n в автомате \mathcal{A} , имеющих фиксированную проекцию $q = (c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_t)$, \mathcal{A}^q — полный прообраз пути q в \mathcal{A} , A — матрица смежности автомата \mathcal{A}^q . Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 4. Пусть ровно m компонент автомата \mathcal{A}^q имеют индекс $\alpha = Ind(\mathcal{A}^q)$. Тогда $P_{su}^q(n) = \Theta(n^{m-1}\alpha^n)$.

Доказательство. Рассмотрим суммы вида (2.1) в представлении функции $P_{su}^q(n)$. Как показано в доказательстве теоремы 4, α_j равно либо 0, либо α . По теореме 1(п.1, 2) α является корнем кратности m характеристического многочлена матрицы A , а значит, при $\alpha_j = \alpha$ многочлен p_j , определяемый из равенства (3.5), имеет степень не выше $m-1$. Докажем по индукции, что эта степень равна $m-1$.

При $m = 1$ утверждение немедленно следует из леммы 3. Перейдем к шагу индукции. Пусть c_i — компонента индекса α с самым большим номером. Любой (s, v) -маршрут длины n с проекцией $(c_1 \rightarrow \dots \rightarrow c_i)$ можно представить в виде

$$\underbrace{s \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k}_{\in (c_1 \cup \dots \cup c_{i-1})} \rightarrow \underbrace{v_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_n = v}_{\in c_i}. \quad (4.1)$$

По предположению индукции, число (s, v_k) -маршрутов длины k есть $\bar{\Theta}(k^{m-2}\alpha^k)$, как и число маршрутов длины k из s в любую другую вершину компоненты c_{i-1} , а число маршрутов длины $n-k-1$ между любыми вершинами компоненты c_i равно $\bar{\Theta}(\alpha^{n-k-1})$. Пусть l_1 — минимально возможное значение k , а l_2 — минимально возможное значение $n-k$ в маршруте вида (4.1). Тогда для любого k такого, что $l_1 \leq k \leq n-l_2$, число маршрутов вида (4.1) есть $\bar{\Theta}(1) \cdot k^{m-2} \alpha^{n-1}$. Суммируя количества маршрутов по всем k от l_1 до $n-l_2$, мы получаем $\Theta(n)$ ненулевых слагаемых; следовательно, полученная сумма есть $\bar{\Theta}(n^{m-1}\alpha^n)$.

Осталось заметить, что из вершин компоненты c_i можно добраться до вершины u , откуда по лемме 1 имеем $P_{su}^q(n) = \bar{\Omega}(n^{m-1}\alpha^n)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5 теперь очевидно: $C_L(n)$ представляет собой конечную сумму функций вида $P_{su}^q(n)$, самая быстрорастущая из которых, согласно условию теоремы и лемме 4, есть $\bar{\Theta}(n^{m-1}\alpha^n)$.

Следствие 3. *Если плотные автоматы изоморфны как непомеченные орграфы, то распознаваемые ими языки имеют одни и те же параметры (m, α) комбинаторной сложности.*

Доказательство очевидно.

Характер связи между параметрами сложности регулярного языка и свойствами автомата приводит к следующему отличительному для регулярных языков свойству.

Предложение 1. *Любой регулярный язык L имеет те же самые параметры (m, α) комбинаторной сложности, что и языки $\text{PR}(L)$, $\text{SUF}(L)$ и $\text{FACT}(L)$.*

Доказательство. Пусть язык L распознается плотным автоматом \mathcal{A} . Любой маршрут из начальной вершины \mathcal{A} помечен префиксом слова из L по определению плотного автомата. Значит, пометив в \mathcal{A} все вершины как терминальные, получим плотный автомат \mathcal{A}' , распознающий язык $\text{PR}(L)$. Автоматы \mathcal{A} и \mathcal{A}' изоморфны как непомеченные орграфы, т. е. язык $\text{PR}(L)$ имеет те же параметры (m, α) , что и L , по следствию 3.

Для произвольного слова $w = a_1 \dots a_n$ обозначим $\overleftarrow{w} = a_n \dots a_1$. Пусть, кроме того, $\overleftarrow{L} = \{\overleftarrow{w} \mid w \in L\}$. Легко заметить, что $C_L(n) = C_{\overleftarrow{L}}(n)$. Из очевидных равенств $\text{PR}(L) = \text{SUF}(\overleftarrow{L})$ и $\text{FACT}(L) = \text{SUF}(\text{PR}(L))$ следует, что языки $\text{SUF}(L)$ и $\text{FACT}(L)$ также имеют параметры (m, α) .

Замечание 3. Для нерегулярного языка L функции $C_L(n)$ и $C_{\text{FACT}(L)}(n)$ могут различаться сколь угодно сильно. Например, язык префиксов бесконечного слова над конечным алфавитом Σ имеет константную сложность 1, а его замыкание относительно подслов — язык всех конечных подслов этого слова — практически любую сложность от константной до $|\Sigma|^n$.

5. Вычисление параметров комбинаторной сложности

Пусть \mathcal{A} — плотный автомат с N вершинами, $L = L(\mathcal{A}) \in \Sigma^*$. Вначале рассмотрим задачу о вычислении параметров m и α . Эту задачу естественно разбить на четыре более мелкие:

- (1) выделение случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$;
- (2) вычисление m в случае $\alpha = 1$;
- (3) вычисление α в случае $\alpha > 1$;
- (4) вычисление m в случае $\alpha > 1$.

Согласно теореме 5, для решения четвертой задачи требуется разбить автомат на компоненты и построить граф компонент. При этом можно попутно решить первые две задачи либо уменьшить размер третьей.

Для разбиения на компоненты воспользуемся алгоритмом Тарьяна [21]. Этот алгоритм позволяет параллельно с выделением компонент отслеживать и связи между ними, т. е. строить граф компонент. При регистрации очередной найденной компоненты нетрудно посчитать

в ней вершины и проверить, не является ли она простым циклом. Алгоритм Тарьяна работает за время $O(N \cdot |\Sigma|)$ и требует дополнительную память объемом $O(N)$. По окончании работы алгоритма мы знаем, какой из случаев $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$ имеет место; если $\alpha = 1$, значение m легко вычисляется по графу компонент.

Параметр α является индексом автомата, т. е. корнем характеристического многочлена. Поэтому в общем случае можно вести речь только о вычислении α с любой наперед заданной допустимой абсолютной погрешностью $\delta < 1$. Как показано в [27] (см. также [20]), это вычисление можно провести за время $O(-\log \delta \cdot N \cdot |\Sigma|)$ с использованием дополнительной памяти объемом $O(-\log \delta \cdot N)$, без построения многочлена и работы с матрицей смежности. Заметим, что вычисление индекса производится по отдельности для всех нетривиальных компонент, предварительно найденных алгоритмом Тарьяна.

Для решения четвертой задачи осталось научиться сравнивать индексы α_1 и α_2 двух нетривиальных компонент между собой (в том случае, когда применение алгоритма из [27] показывает лишь то, что $|\alpha_1 - \alpha_2| < \delta$). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — характеристические (или минимальные, это несущественно) многочлены этих двух компонент, $d(x) = \text{НОД}(f(x), g(x))$, $f(x) = f_1(x)d(x)$, $g(x) = g_1(x)d(x)$. По теореме 1 (2) числа α_1 и α_2 являются простыми корнями многочленов $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Тогда в случае $\alpha_1 = \alpha_2$ наибольшие корни многочленов $f_1(x)$ и $g_1(x)$ меньше наибольшего корня многочлена $d(x)$. В случае же $\alpha_1 > \alpha_2$ наибольший корень $f_1(x)$ больше наибольшего корня многочлена $d(x)$, а наибольший корень $g_1(x)$ либо больше, либо меньше наибольшего корня многочлена $d(x)$. Зная, что два числа не равны и умея находить каждое из них с любой степенью точности, мы всегда можем установить, какое из чисел больше. Тем самым мы можем сравнить α_1 и α_2 .

Проверим, что вычислительная сложность построенного алгоритма сравнения α_1 и α_2 зависит от N полиномиально. В самом деле, можно использовать метод Леверрье для вычисления коэффициентов характеристического многочлена или метод Крылова (см. [23]) для вычисления коэффициентов минимального многочлена матрицы. Оба метода можно реализовать так, чтобы они выполняли $O(N^3 \cdot |\Sigma|)$ операций. Сами коэффициенты с ростом N растут не более чем экспоненциально благодаря известной теореме о связи между коэффициентами характеристического многочлена и числом линейных подграфов орграфа (см. [9], теорема 1.2). Таким образом, длина записи коэффициента есть $O(N)$, а следовательно, время на выполнение одной операции также не превосходит $O(N)$. Нахождение многочлена $d(x)$ и деление на него многочленов $f(x)$ и $g(x)$ требует $O(N^2)$ операций, а вычисление наибольшего корня многочлена с допустимой абсолютной погрешностью $\delta < 1$ требует $O(-\log \delta \cdot N)$ операций, т. е. зависимость от N везде полиномиальна.

Величина δ стоит несколько особняком. Однако насчет значения δ , гарантирующего различие индексов роста любых двух компонент с не более чем N вершинами, можно высказать следующее разумное предположение: порядок этого значения обратен числу неизоморфных сильно связных орграфов с не более чем N вершинами, каждая из которых к тому же имеет степень не выше $|\Sigma|$. Для орграфов с N вершинами и заданным ограничением на степени вершин можно построить $(N+1)^{N \cdot |\Sigma|}$ различных матриц смежности (без учета изоморфизма и требования сильной связности). Отсюда заключаем, что $-\log \delta = O(N \cdot |\Sigma| \cdot \log N)$, если высказанное предположение верно.

Теперь решим более сложную задачу: вычислим параметр r (мощность асимптотического множества для $C_L(n)$) и для каждого $j = 0, \dots, r-1$ найдем такие числа m_j, α_j , что асимптотическое множество $\{f_0(n), \dots, f_{r-1}(n)\}$ удовлетворяет условию $f_j(n) = \Theta(n^{m_j} \alpha_j^n)$ для всех $j = 0, \dots, r-1$.

С учетом предыдущих рассмотрений мы можем считать, что нами уже построен граф компонент и известны значения индексов всех компонент (с устраивающей нас точностью, в частности, позволяющей сравнить любые два из этих индексов). Будем перебирать все пути $q = (c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots \rightarrow c_t)$, в прообразе которых есть распознающий маршрут, и приближенно строить асимптотические множества соответствующих функций $P_{su}^q(n)$. Отметим, что лемму 4

можно немного усилить, показав, что в асимптотическом множестве для $P_{su}^q(n)$ все ненулевые функции имеют вид $\Theta(n^{m-1}\alpha^n)$. Находить параметры α и m мы умеем; число r асимптотических функций для $P_{su}^q(n)$ также легко найти: это НОК чисел импримитивности всех m идентифицированных компонент максимального индекса. Осталось установить, какие асимптотические функции равны 0.

Разобьем все (s, u) -маршруты с проекцией q на классы. Каждый класс определяется набором вершин $(v_1, \dots, v_{t-1}, v'_2, \dots, v'_t)$, таким что для всех i выполняется (а) $v_i, v'_i \in c_i$ и (б) дуга (v_i, v'_{i+1}) принадлежит маршруту, т. е. маршруты из одного класса имеют одни и те же переходы между компонентами. Размер асимптотического множества и нулевые функции в нем для каждой из функций $P_{sv_1}(n), P_{v'_2v_2}(n), \dots, P_{v'_t u}(n)$ легко вычислить, пользуясь леммой 2. Далее вычислим число d — НОД чисел импримитивности компонент c_1, \dots, c_t , и числа j_1, \dots, j_t , которым равны (по модулю d) длины всех (s, v_1) -, (v'_2, v_2) -, \dots , (v_t, u) -маршрутов соответственно. Тогда длины всех (s, u) -маршрутов из рассматриваемого класса сравнимы с $(j_1 + \dots + j_t + t - 1)$ по модулю d . Более того, в силу максимальности d для достаточно больших n (s, u) -маршрут из рассматриваемого класса обязательно существует, если $n \bmod r \equiv (j_1 + \dots + j_t + t - 1) \pmod{d}$. Следовательно, i -я асимптотическая функция для числа (s, u) -маршрутов из рассматриваемого класса равна нулю тогда и только тогда, когда $i \not\equiv (j_1 + \dots + j_t + t - 1) \pmod{d}$. Вычислив множество номеров нулевых асимптотических функций для каждого из классов (s, u) -маршрутов с проекцией q и взяв пересечение этих множеств, получим множество нулевых асимптотических функций для $P_{su}^q(n)$.

Итак, для каждой функции $P_{su}^q(n)$ мы владеем следующей информацией об асимптотическом множестве: количество функций, номера нулевых функций и параметры m и α , общие для всех ненулевых функций. Далее следуем доказательству теоремы 4, см. с. 278: упорядочиваем все функции $P_{su}^q(n)$ и складываем их асимптотические множества основным или вспомогательным способом. (Точнее говоря, мы всякий раз выполняем сложение основным способом, а если в результате обнаруживается, что доминирует первое слагаемое, то откатываем операцию и заменяем способ на вспомогательный.) В результате мы получим требуемые параметры асимптотического множества для комбинаторной сложности языка L .

Заметим, что предложенный алгоритм в общем случае уже не является полиномиальным, так как число путей в графе компонент может расти быстрее полинома (хотя медленнее экспоненты) от числа вершин в исходном автомате.

Мы показали, что для комбинаторной сложности регулярного языка можно вычислить следующую информацию об асимптотическом множестве: количество функций и параметры (m, α) роста каждой из функций (при этом α в общем случае нельзя найти точно, но можно приближать с любой степенью точности). Естественный вопрос — можем ли мы быть еще более точными и вычислить коэффициенты, а не только степень полиномов p_j в асимптотических функциях для $C_L(n)$? Оказывается, в общем случае для этого нужно знать представление суммами вида (2.1) для любой пары вершин внутри любой компоненты c . Но для этого надо найти все собственные числа матрицы смежности компоненты c , после чего вычислить явную формулу вида (3.3), решив систему линейных уравнений, коэффициенты которой заданы с некоторой погрешностью. С ростом размера компоненты это быстро становится практически неразрешимой задачей. Приводимый ниже пример преследует две цели: продемонстрировать один из немногих нетривиальных случаев, когда коэффициенты полинома p_j могут быть точно вычислены, и показать, что эти коэффициенты зависят от всех членов в представлениях вида (2.1) функций $P_{su}^q(n)$, где $q = (c)$.

П р и м е р. Рассмотрим язык $\Phi \subseteq \{a, b\}^*$, состоящий из всех слов, не содержащих двух непересекающихся вхождений под слова aa . Этот язык является факториальным и регулярным, а минимальный распознающий его автомат приведен на рис. 1. Индекс этого автомата равен золотому сечению ϕ . Из изоморфизма двух компонент следует, что $C_\Phi(n) = \bar{\Theta}(n\phi^n)$.

По теореме 4 имеем $r = 1$, т. е. асимптотическое множество для $C_\Phi(n)$ состоит из единственной функции; вычислим ее. В данном случае все функции $P_{uv}(n)$ могут быть вычис-

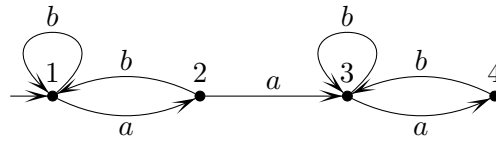


Рис. 1. Минимальный автомат, распознающий факториальный регулярный язык Φ сложности $\bar{\Theta}(n\phi^n)$. Все вершины являются терминальными.

лены явно. Нетрудно заметить, что $P_{11}(n) = P_{33}(n) = F_{n+1}$, где F_{n+1} — $(n+1)$ -е число Фибоначчи, а поскольку $P_{12}(n) = P_{11}(n-1)$, получаем $P_{12}(n) = P_{34}(n) = F_n$. Напомним, что $F_n = (\phi^n + (-1)^{n-1}\phi^{-n})/\sqrt{5}$. Далее, заметим, что $P_{14}(n) = \sum_{k=1}^{n-2} P_{12}(k) \cdot P_{34}(n-k-1)$. Простыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} P_{14}(n) &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{n-2} (\phi^k + (-1)^{k-1}\phi^{-k})(\phi^{n-k-1} + (-1)^{n-k}\phi^{k+1-n}) \\ &= \frac{\phi^{n-1}}{5} \sum_{k=1}^{n-2} (1 + (-1)^{k-1}\phi^{-2k} + (-1)^{n-k}\phi^{2k+2-2n} + O(\phi^{-2n})) \\ &= \frac{\phi^{n-1}}{5} \left(n-2 + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{k-1}\phi^{-2k} + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{n-k}\phi^{2k+2-2n} + O(\phi^{-2n}) \right). \end{aligned}$$

В скобках остались две суммы геометрических прогрессий, причем эти прогрессии состоят из одних и тех же членов. Заменяем их на удвоенную сумму ряда и подходящее O :

$$P_{14}(n) = \frac{\phi^{n-1}}{5} \left(n-2 + 2 \frac{\phi^{-2}}{1+\phi^{-2}} + O(\phi^{6-2n}) + O(\phi^{-2n}) \right).$$

После элементарных преобразований получаем, что асимптотическая функция для $P_{14}(n)$ равна $\left(\frac{n}{5\phi} - \frac{2}{5\sqrt{5}}\right)\phi^n$. Аналогичными вычислениями получим, что $\left(\frac{n}{5} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)\phi^n$ есть асимптотическая функция для $P_{13}(n)$. Теперь можно вычислить асимптотическую функцию $f(n)$ для $C_\Phi(n)$:

$$f(n) = \frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \left(\frac{n}{5\phi} - \frac{2}{5\sqrt{5}}\right)\phi^n + \left(\frac{n}{5} - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)\phi^n = \left(\frac{\phi n}{5} + \frac{5\phi+2}{5\sqrt{5}}\right)\phi^n. \quad (5.1)$$

Асимптотическая функция (5.1) очень хорошо приближает $C_\Phi(n)$: уже для $n = 10$ она равна 509.009 при $C_\Phi(10) = 509$. При этом необходимо отметить, что если мы при вычислении $P_{14}(n)$ и $P_{13}(n)$ заменим точные значения функций P_{12} , P_{33} и P_{34} на значения соответствующих асимптотических функций, отбросив “пренебрежимо малое” слагаемое, то разница будет ощутимой: свободный коэффициент в полиноме изменится на $2/(\phi+2)$ и абсолютная ошибка приближения при $n = 10$ составит примерно 68.

6. Колебания комбинаторной сложности

В этом, заключительном, разделе мы изучаем такой элемент поведения комбинаторной сложности как колебания между сравнительно низкими и сравнительно высокими значениями. Это сравнительно малоизученная тема; три результата заслуживают упоминания. Первые два из них связаны с комбинаторной сложностью бесконечных слов (т. е. языков всех конечных подслов таких слов). Кассень [3] показал, что линейная комбинаторная сложность бесконечного слова всегда имеет ограниченную вариацию, что делает невозможным и “большие” колебания. С другой стороны, Балох и Боллобас [1] построили над двухбуквенным алфавитом бесконечное слово, комбинаторная сложность которого колеблется между линейным и

“почти экспоненциальным” (вида $\bar{\Theta}(2^{n/\log n})$) ростом. Третий результат относится к такому классическому комбинаторному объекту, как язык сильно бескубных слов над двухбуквенным алфавитом. Кассенем [4] доказано, что в комбинаторной сложности этого языка можно выделить подпоследовательности, демонстрирующие полиномиальный рост с разными степенями полинома.

Наличие или отсутствие колебаний у функции $f(n)$ удобно выражать в терминах отношения $f(n+1)/f(n)$. Функция f колеблется, если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n+1)/f(n))$ не существует. Если $\limsup_{n \rightarrow \infty} (f(n+1)/f(n)) = \infty$ или $\liminf_{n \rightarrow \infty} (f(n+1)/f(n)) = 0$, мы будем говорить, что f колеблется резко. Если же предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(n+1)/f(n))$ существует, то он совпадает с индексом роста функции f (этот факт — стандартное упражнение по матанализу).

Некоторые ограничения на колебания сложности регулярного языка описаны в следующих двух леммах.

Лемма 5. *Сложность префиксного регулярного языка не может колебаться резко.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть L — префиксный регулярный язык над k -буквенным алфавитом. Для любого слова из L любой длины $(n+1)$ его префикс длины n также лежит в L , откуда $(C_L(n+1)/C_L(n)) \leq k$, т.е. требуемый верхний предел конечен. По следствию 1 у L есть асимптотическое множество $\{f_0(n), \dots, f_{r-1}(n)\}$. Ограничение сверху для дроби $C_L(n+1)/C_L(n)$ является ограничением сверху и для дробей $f_1(n+1)/f_0(n), f_2(n+1)/f_1(n), \dots, f_0(n+1)/f_{r-1}(n)$. Поскольку каждая функция $f_i(n)$ является произведением полинома и экспоненты, дробь $f_i(n+1)/f_i(n)$ также ограничена сверху. Значит, дробь $f_i(n+1)/f_j(n)$ ограничена сверху для любых i, j . Тогда обратная дробь $f_j(n)/f_i(n+1)$ ограничена снизу, так же как $f_j(n+1)/f_i(n)$. В итоге все отношения асимптотических функций ограничены снизу, и мы получаем $\liminf_{n \rightarrow \infty} C(n+1)/C(n) > 0$.

Следствие 4. *Асимптотическое множество для сложности префиксного (в частности, факториального) регулярного языка имеет вид $\{p_0(n)\alpha^n, \dots, p_{r-1}(n)\alpha^n\}$, где степени всех полиномов $p_i(n)$ совпадают.*

Лемма 6. *Полиномиальная сложность факториального регулярного языка не может колебаться.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим асимптотическое множество $\{p_0(n), \dots, p_{r-1}(n)\}$ для факториального языка L сложности $\bar{\Theta}(n^m)$ ($m > 0$). По определению асимптотического множества для достаточно больших n имеем $C_L(n) = p_{n \bmod r}(n)$, причем по следствию 4 степени полиномов $p_0(n), \dots, p_{r-1}(n)$ совпадают. Пусть $p_i(n) = \xi n^m + O(n^{m-1})$, $p_{i+1}(n) = \eta n^m + O(n^{m-1})$. Как известно [11], сложность факториального языка либо ограничена, либо строго возрастает. Предположение $\xi > \eta$ противоречит монотонности $C_L(n)$, поскольку для больших n получаем

$$p_{i+1}(n+1) = \eta(n+1)^m + O(n^{m-1}) = \eta n^m + O(n^{m-1}) < \xi n^m + O(n^{m-1}) = p_i(n).$$

Значит, старшие коэффициенты полиномов совпадают. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} C_L(n+1)/C_L(n) = 1$, т.е. колебаний нет.

Теорема 6. *Все возможные виды колебательного поведения комбинаторной сложности с различными параметрами (m, α) для произвольных, префиксных и факториальных регулярных языков перечислены в следующей таблице (P — резкие колебания, K — колебания, H — нет колебаний):*

Регулярные языки	$m = 0, \alpha = 1$	$m > 0, \alpha = 1$	$m = 0, \alpha > 1$	$m > 0, \alpha > 1$
Произвольные	P, K, H	P, K, H	P, K, H	P, K, H
Префиксные	K, H	K, H	K, H	K, H
Факториальные	K, H	H	K, H	K, H

Доказательство. Формулировка теоремы показывает, что ограничения на колебания сложности регулярных языков исчерпываются приведенными в леммах 5 и 6. Таким образом, доказательство теоремы состоит из нескольких групп примеров. Все примеры построены в двухбуквенном алфавите.

1. Примеры языков без колебаний сложности (все языки — факториальные).

- 1) $L = a^* + b^*$, $C_L(n) = 2$ для всех $n > 0$.
- 2) $L = b^*a^*$, $C_L(n) = n + 1$.
- 3) $L = (a + b)^*$, $C_L(n) = 2^n$.
- 4) $L = \Phi$ (см. пример на с. 281), $m = 1$, $\alpha = \phi$ (см. пример на с. 281).

2. Примеры языков с резкими колебаниями сложности (все языки содержат слова только четной длины).

- 1) $L = (a^2)^* + (b^2)^*$, $C_L(2n) = 2$ для всех $n > 0$.
- 2) $L = (b^2)^*(a^2)^*$, $C_L(2n) = n + 1$.
- 3) $L = ((a + b)^2)^*$, $C_L(2n) = 2^n$.
- 4) $L = L(\mathcal{A})$, $m = 1$, $\alpha = \sqrt{\phi}$ (см. п. 5 ниже).²

3. Примеры факториальных языков сложности $O(1)$ с колебаниями.

Балох и Боллобас [1] построили бесконечную серию $\{B_s\}$ языков над двухбуквенным алфавитом, таких что $C_{B_s}(n)$ колеблется между константами $(2s-1)$ и s^2 . Напомним определение этой серии и докажем, что языки B_s являются регулярными. Для любых целых чисел $s \geq 2$ и $r \geq 1$ определим множество слов $W_{r,s} = \{b^i a^{4rs-i-j} b^j \mid 0 \leq i, j \leq s-1\}$. Далее положим $X_s = \bigcup_{r \geq 1} W_{r,s}$ и $B_s = \text{ФАСТ}(X_s)$. Каждое слово из множества $W_{r,s}$ имеет следующую структуру: на первых $(s-1)$ позициях может стоять как a , так и b , но за a всегда следует другое a ; затем следует сегмент $a^{4(r-1)s+2s+2}$; в последних $(s-1)$ позициях снова могут стоять как a , так и b , но за b всегда следует другое b . Следовательно, недетерминированный автомат на рис. 2 распознает язык X_s . Этот автомат является плотным, так как любой маршрут в нем является отрезком распознающего маршрута. Таким образом, если мы сделаем все вершины этого автомата одновременно начальными и терминальными, мы получим недетерминированный автомат, распознающий $B_s = \text{ФАСТ}(X_s)$.

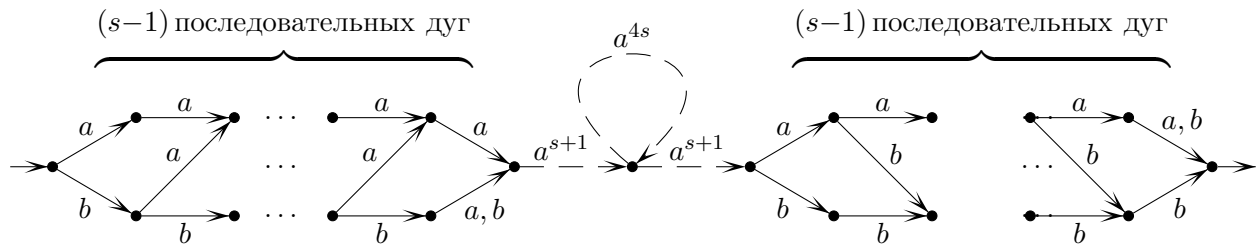


Рис. 2. Плотный недетерминированный автомат, распознающий язык X_s . Штриховые дуги, помеченные словами, заменяют последовательности обычных дуг.

4. Пример префиксного языка сложности $\Theta(n)$ с колебаниями.

На рис. 3 приведен автомат, распознающий префиксный язык K , сложность которого равна $\bar{\Theta}(n)$ по теореме 5. Для более точных подсчетов заметим, что $C_K(n) = P_{sx}(n) + P_{sy}(n) + P_{sz}(n) + O(1)$. Для $n \geq 4$ получаем

$$P_{sx}(n) = P_{sy}(n-1) + n \bmod 2; \quad P_{sy}(n) = P_{sx}(n-1) + \eta(n); \quad P_{sz}(n) = P_{sy}(n-1), \quad (6.1)$$

²Упомянутый автомат \mathcal{A} получается из автомата на рис. 4 следующим образом: оставляем только начальную вершину и две ближайшие к ней нетривиальные компоненты, самую правую из вершин делаем единственной терминальной вершиной.

где $\eta(n) = 1$, если $n \bmod 3 = 1$, и 0 в противном случае. Из (6.1) выводим

$$\begin{aligned} P_{sx}(n+6) &= P_{sx}(n) + 4, & P_{sy}(n+6) &= P_{sy}(n) + 1 & \text{для нечетных } n; \\ P_{sx}(n+6) &= P_{sx}(n) + 1, & P_{sy}(n+6) &= P_{sy}(n) + 4 & \text{для четных } n. \end{aligned}$$

Таким образом, для нечетных n можно записать $P_{sx}(n) = 4n/6 + O(1)$, $P_{sy}(n) = n/6 + O(1)$, $P_{sz}(n) = 4n/6 + O(1)$, откуда $C_K(n) = 3n/2 + O(1)$. Для четных n имеем $P_{sx}(n) = n/6 + O(1)$, $P_{sy}(n) = 4n/6 + O(1)$, $P_{sz}(n) = n/6 + O(1)$ и $C_K(n) = n + O(1)$. Следовательно, функция $C_K(n)$ колеблется.

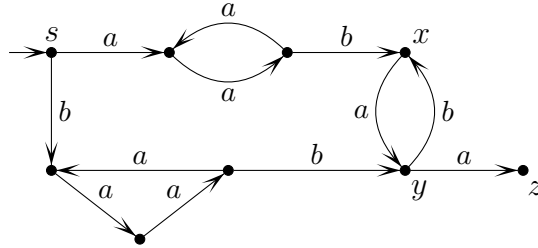


Рис. 3. Плотный автомат, распознающий префиксный язык K . Все вершины — терминальные.

5. Примеры факториальных языков экспоненциальной сложности с колебаниями.

Рассмотрим язык $E_m \subseteq \{a, b\}^*$ ($m \geq 0$), заданный следующими условиями: в любом слове из E_m нет подслов a^2 и b^4 , а подслово $abba$ встречается не более m раз (вхождения подслова $abba$ могут перекрываться). Язык E_m , очевидно, факториальный. Он распознается автоматом на рис. 4. Поскольку все нетривиальные компоненты в изображенном на этом рисунке орграфе изоморфны и имеют число импримитивности 2, сложность любого языка, распознаваемого автоматом с данным орграфом, имеет асимптотическое множество не более чем из двух функций ввиду теоремы 4. Докажем, что асимптотическое множество для $C_{E_m}(n)$ действительно состоит из двух функций и предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{E_m}(n+1)/C_{E_m}(n))$ не существует.

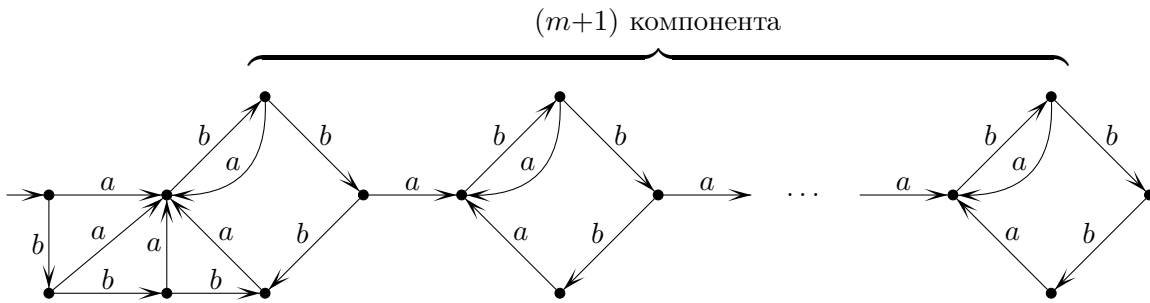


Рис. 4. Плотный автомат, распознающий факториальный язык E_m . Все вершины — терминальные.

Вершины каждой из нетривиальных компонент автомата на рис. 4 мы будем называть левой, правой, верхней и нижней, и обозначать соответственно l, r, t и b , при необходимости используя индексы от 0 до m . Вначале посчитаем количество маршрутов внутри компоненты, начинающихся в левой вершине:

$$P_{ll}(2k) = F_{k+1}, \quad P_{ll}(2k+1) = 0; \quad P_{ll}(n) = P_{lt}(n+1) = P_{lr}(n+2) = P_{lb}(n+3). \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует, что $P_{l*}(2k) = P_{l*}(2k+1) = F_{k+1} + F_k = F_{k+2}$. Теперь мы можем вычислить функцию $C_{E_0}(n)$ для любого $n \geq 4$. Любой распознающий маршрут такой длины состоит из (s, l) -пути и маршрута, начинающегося в l . Существует единственный (s, l) -путь длины t для $t = 1, 2, 3, 4$. Следовательно,

$$C_{E_0}(n) = \sum_{i=1}^4 P_{l*}(n-i) = \begin{cases} [n = 2k] & = 2F_{k+1} + 2F_k = 2F_{k+2} \\ [n = 2k+1] & = F_{k+2} + 2F_{k+1} + F_k = F_{k+4}. \end{cases} \quad (6.3)$$

Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} (C_{E_0}(2k+1)/C_{E_0}(2k)) = \phi^2/2$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} (C_{E_0}(2k)/C_{E_0}(2k-1)) = 2/\phi$, функция $C_{E_0}(n)$ колеблется. Пример факториального языка с колеблющейся сложностью, имеющей параметры $m = 0$, $\alpha = \sqrt{\phi} > 1$, построен.

Докажем, что функция $C_{E_m}(n)$ колеблется при любом $m > 0$. Вначале вычислим значение $P_{sr_0}(n)$. Поскольку $P_{lr}(2k) = F_k$, $P_{lr}(2k+1) = 0$ из (6.2), получим, аналогично (6.3), $P_{sr_0}(2k-1) = P_{sr_0}(2k) = F_k$ (для $k \geq 2$).

Справедливо равенство

$$C_{E_1}(n) = \sum_{i=3}^{n-1} P_{sr_0}(i) \cdot P_{l^*}(n-i-1) + C_{E_0}(n). \quad (6.4)$$

Поскольку нас интересуют только старшие коэффициенты полиномов в асимптотическом множестве для $C_{E_1}(n)$, заменим функции в правой части (6.4) их асимптотическими функциями. По уже найденным формулам для $P_{sr_0}(n)$ и $P_{l^*}(n)$ можно построить асимптотические множества для этих функций. Эти множества имеют вид $\{\xi(\sqrt{\phi})^n, \xi\sqrt{\phi}(\sqrt{\phi})^n\}$ и $\{\eta\sqrt{\phi}(\sqrt{\phi})^n, \eta(\sqrt{\phi})^n\}$, соответственно, для некоторых констант ξ и η . Для нечетных n , числа i и $(n-i-1)$ имеют одинаковую четность, откуда

$$C_{E_1}(n) = 2\xi\eta \cdot n(\sqrt{\phi})^n + O((\sqrt{\phi})^n).$$

При четных n числа i и $(n-i-1)$ имеют разную четность, и формула выглядит как

$$C_{E_1}(n) = \xi\eta \left(\sqrt{\phi} + \frac{1}{\sqrt{\phi}} \right) n(\sqrt{\phi})^n + O((\sqrt{\phi})^n).$$

Поскольку $(\sqrt{\phi} + 1/\sqrt{\phi}) > 2$, функция $C_{E_1}(n)$ колеблется. Теперь покажем, что ситуация в случае $m > 1$ не отличается от ситуации при $m = 1$. Как нетрудно видеть,

$$P_{sr_1}(n) = \sum_{i=3}^{n-3} P_{sr_0}(i) \cdot P_{lr}(n-i-1). \quad (6.5)$$

Зная, что $P_{sr_0}(2k-1) = P_{sr_0}(2k)$, $P_{lr}(2k) \neq 0$ и $P_{lr}(2k+1) = 0$, можно заметить, что при $n = 2k+1$ сумма в правой части содержит в точности те же ненулевые слагаемые, что и при $n = 2k$, т.е. $P_{sr_1}(2k) = P_{sr_1}(2k+1)$. Записывая аналогичные (6.5) равенства для $P_{sr_2}(n), \dots, P_{sr_m}(n)$, мы при помощи того же самого наблюдения получим для каждой из этих функций равенство пар соседних значений. Тем самым асимптотическое множество для функции $P_{sr_j}(n)$ при $j > 0$ обладает тем же свойством, что и асимптотическое множество для $P_{sr_0}(n)$, а именно старшие коэффициенты многочленов этого множества различаются множителем $\sqrt{\phi}$. Следовательно, проведенное выше рассуждение для $C_{E_1}(n)$ может быть воспроизведено в общем случае, т.е. все функции $C_{E_m}(n)$ колеблются. Таким образом, мы построили пример колеблющейся функции сложности с параметрами $(m, \sqrt{\phi})$ для любого натурального m . Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Balogh J., Bollobas B.** Hereditary properties of words // RAIRO Inf. Theor. Appl. 2005. Vol. 39. P. 49–65.
2. **Berstel J.** Growth of repetition-free words—a review // Theor. Comput. Sci. 2005. Vol. 340, no. 2. P. 280–290.
3. **Cassaigne J.** Special factors of sequences with linear subword complexity // Developments in language theory, II / Eds. J. Dassow, G. Rozenberg, A. Salomaa. Singapore: World Scientific, 1996. P. 25–34.
4. **Cassaigne J.** Counting overlap-free binary words // Lect. Notes Comp. Sci.: Proc. 10th Ann. symp. on theoretical aspects of computer science. 1993. Vol. 665. P. 216–225.

5. **Choffrut C., Karhumäki J.** Combinatorics of words // Handbook of formal languages / Eds. G. Rozenberg, A. Salomaa. Vol. 1, ch. 6. Berlin: Springer, 1997. P. 329–438.
6. **Chomsky N., Miller G.A.** Finite state languages // Inf. and Control. 1958. Vol. 1, no. 2. P. 91–112.
7. **Chomsky N., Schützenberger M.P.** The algebraic theory of context-free languages // Computer programming and formal system / Eds. P. Braffort, D. Hirschberg. Amsterdam: North-Holland, 1963. P. 118–161.
8. Introduction to algorithms / Т.Н. Cormen [et al.]. 2nd edition. Cambridge MA: The MIT Press, 2001. 1202 p.
9. **Cvetković D.M., Doob M., Sachs H.** Spectra of graphs. Theory and applications. 3rd edition. Heidelberg: Johann Ambrosius Barth, 1995. 447 p.
10. **Ehrenfeucht A., Rozenberg G.** A limit theorem for sets of subwords in deterministic TOL languages // Inform. Process. Lett. 1973. Vol. 2. P. 70–73.
11. **Ehrenfeucht A., Rozenberg G.** On subword complexities of homomorphic images of languages // RAIRO Inform. Theor. 1982. Vol. 16. P. 303–316.
12. **Gromov M.** Groups of polynomial growth and expanding maps // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1981. Vol. 53. P. 53–73.
13. **Krause G., Lenagan T.H.** Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension // Research Notes in Math. Vol. 116. Pitman, 1985. 212 p.
14. **Lothaire M.** Combinatorics on words. Reading MA: Addison-Wesley, 1983. 238 p.
15. **Milnor J.** Growth of finitely generated solvable groups // J. Diff. Geom. 1968. Vol. 2. P. 447–450.
16. **Morse M., Hedlund G.A.** Symbolic dynamics // Amer. J. Math. 1938. Vol. 60. P. 815–866.
17. **Odlyzko A.M.** Asymptotic enumeration methods // Handbook of combinatorics / Eds. R.L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász. Vol. 2, ch. 22. Amsterdam: Elsevier, 1995. P. 1063–1230.
18. **Salomaa A., Soittola M.** Automata-theoretic aspects of formal power series. New York: Springer, 1978. 167 p.
19. **Shur A.M.** Comparing complexity functions of a language and its extendable part // RAIRO Theor. Inf. Appl. 2008. Vol. 42, no. 3. P. 647–655.
20. **Shur A.M.** Combinatorial complexity of regular languages // Lect. Notes Comp. Sci. / Eds. E.A. Hirsch [et al.]. 2008. Vol. 5010. P. 289–301.
21. **Tarjan R.** Depth-first search and linear graph algorithms // SIAM J. Computing. 1972. Vol. 1, no. 2. P. 146–160.
22. **Trofimov V.I.** Growth functions of finitely generated semigroups // Semigroup Forum. 1980. Vol. 21. P. 351–360.
23. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. Изд. 4-е. М.: Физматлит, 1988. 552 с.
24. **Говоров В.Е.** Градуированные алгебры // Мат. заметки. 1972. Vol. 12. С. 197–204.
25. **Трофимов В.И.** Функции роста некоторых классов языков // Кибернетика. 1981. № 6. С. 9–12.
26. **Уфнарковский В.А.** О росте алгебр // Вест. МГУ. Сер. 1. 1978. № 4. С. 59–65. (Математика. Механика.)
27. **Шур А.М.** Индексы роста языков ограниченной экспоненты // Изв. вузов. Математика. 2009. № 9. С. 82–88.

Шур Арсений Михайлович
канд. физ.-мат. наук
доцент
Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького
e-mail: Arseny.Shur@usu.ru

Поступила 30.11.2009

УДК 517.928.7, 517.977.58

АВТОФАЗИРОВКА СОЛИТОНОВ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ¹**А. Е. Эльберт, А. Р. Данилин**

Исследуется воздействие на солитон нелинейного уравнения Шрёдингера внешнего волнового возмущения с медленно изменяющейся частотой. Для уравнений, описывающих эволюцию во времени параметров возмущенного солитона, строится стандартная система с быстрыми и медленными переменными. Решается задача по максимизации усредненной амплитуды возмущенного солитона в главном порядке по амплитуде внешнего воздействия.

Ключевые слова: автофазировка, авторезонанс, метод осреднения.

A. E. El'bert, A. R. Danilin. Optimized autophasing of solitons.

The effect of an external wave perturbation with a slowly varying frequency on a soliton of the nonlinear Schrödinger equation is investigated. For equations describing the time evolution of parameters of the perturbed soliton, a standard system with fast and slow variables is constructed. The problem of maximizing the averaged amplitude of the perturbed soliton in the principal order of the amplitude of the external perturbation is solved.

Keywords: autophasing of solitons, autoresonance, averaging method.

Введение

В работе рассматривается интересное явление *автофазировки* (или, иначе, *авторезонанса*) [3, 5], возникающее в некоторых динамических нелинейных системах. Оно состоит в возбуждении в системе колебаний с большой амплитудой, в то время как амплитуда самой накачки мала. Авторезонанс используется в ускорителях релятивистских частиц, в задачах о нагреве плазмы, управлении амплитудой солитона намагниченности в легкоосном магнетике и других интересных физических приложениях.

Будем рассматривать уравнение вида

$$iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2u = \varepsilon e^{ikx + i \int \Omega(t) dt},$$

где возмущение в правой части мало ($0 < \varepsilon \ll 1$). При $\varepsilon = 0$ имеется точное солитонное решение²

$$u = \frac{A}{\operatorname{ch} z} e^{i\Phi}.$$

В [3] выводится система уравнений для параметров $A(t), \delta(t)$ возмущенного солитона³. Она имеет вид

$$\begin{cases} A_t = -\varepsilon \frac{g(A, P)}{2\Omega(t) + k^2} \sin \delta, \\ \delta_t = \Delta\omega - \varepsilon \frac{g_A(A, P)}{2\Omega(t) + k^2} \cos \delta, \end{cases} \quad (1)$$

$$g(A, P) = A^2 F\left(\frac{P}{A^2}\right), \quad F(x) = \pi(1 + x^2) \operatorname{sech} \frac{\pi x}{2}, \quad \Delta\omega = \frac{1}{2A^2} (A^4 - k^2 A^2 + P^2) - \Omega(t). \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” и гранта РФФИ (проект 08-01-00260).

² $\Phi = \frac{V}{A}z + \theta$, $z = A(x - \xi)$, $\xi = Vt + \xi_0$, $\theta = \omega t + \theta_0$, $\omega = \frac{1}{2}(A^2 + V^2)$, $\Omega(t) = \Omega_0 + \alpha t$.

³ $\delta = \theta - \psi - k\xi$, $\Delta\omega = \omega - \Omega(t) - kV$, $P = A(V - k) = \operatorname{const}$.

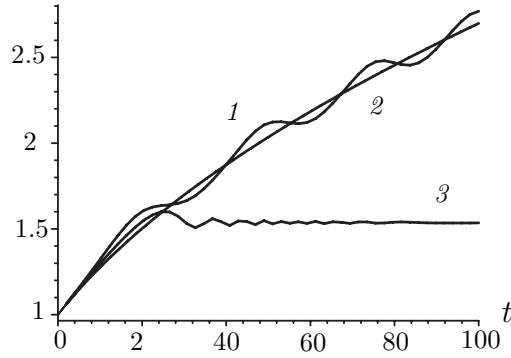


Рис. 1. 1 — $A(t)$, решение системы (1), $\beta = \pi$; 2 — усредненная амплитуда \bar{A} ; 3 — амплитуда $A(t)$ при $\beta = 4$, отсутствие авторезонанса; везде $\varepsilon = 0.01$, $P = 0$, $\Omega_0 + k^2/2 = 1/2$, $A(0) = 1$, $\delta(0) = -\pi/2$.

Здесь A — амплитуда, δ — разность фаз возмущенного солитона и накачки, $\Omega(t) = \Omega_0 + \alpha t$ — частота возмущения. Предполагается, что частота возмущения меняется медленно, поэтому $\alpha = \beta\varepsilon$. Захват фазы происходит на начальных временах (рис. 1).

Поэтому в [3] вводится медленное время $\tau = \sqrt{\varepsilon} \cdot t$ и система уравнений (1) переходит в систему

$$\begin{cases} A_\tau = -\sqrt{\varepsilon} \frac{g(A, P)}{2(\Omega_1 + \beta\sqrt{\varepsilon} \cdot \tau)} \sin \delta, \\ \delta_\tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{A^2}{2} + \frac{P^2}{2A^2} - \Omega_1 \right) - \beta\tau - \sqrt{\varepsilon} \frac{g_A(A, P)}{2(\Omega_1 + \beta\sqrt{\varepsilon} \cdot \tau)} \cos \delta, \end{cases} \quad (3)$$

$$\Omega_1 = \Omega_0 + k^2/2,$$

которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ сводится к уравнению нелинейного маятника

$$\delta_{\tau\tau} = \lambda \sin \delta - \beta, \quad \lambda = -\frac{g(A)(A^4 - P^2)}{A(A^4 + P^2)} \Big|_{t=0}. \quad (4)$$

Режим автофазировки получается в том случае, если начальные данные попадают внутрь сепаратрисной кривой уравнения (4) (рис. 2).

В [3] аккуратно исследуются разные случаи начальных данных и параметров исходной системы, при которых происходит захват фазы. Выясняется, что сепаратрисы возникают лишь при выполнении соотношения

$$\left| \frac{\beta}{\lambda} \right| < 1. \quad (5)$$

В настоящей работе исследуется система уравнений (3). Она сводится к стандартной автономной системе уравнений с медленными и быстрыми переменными, для которой можно воспользоваться известной методикой усреднения [1, 4, 2]. Для усредненной амплитуды ставится оптимизационная задача

$$\bar{A}(0) = 1, \quad \bar{A}(\tau) = \kappa > 2, \quad \tau_1 = \min(\tau), \quad (6)$$

параметры управления $\beta, \delta(0), \Omega_0, k, P$ ищутся в главном порядке по $\varepsilon \rightarrow 0$. Для простоты предполагается, что

$$\Omega_1 = \Omega_0 + k^2/2 \quad (7)$$

не зависит от ε . Более подробно постановку задачи см. в разд. 2.

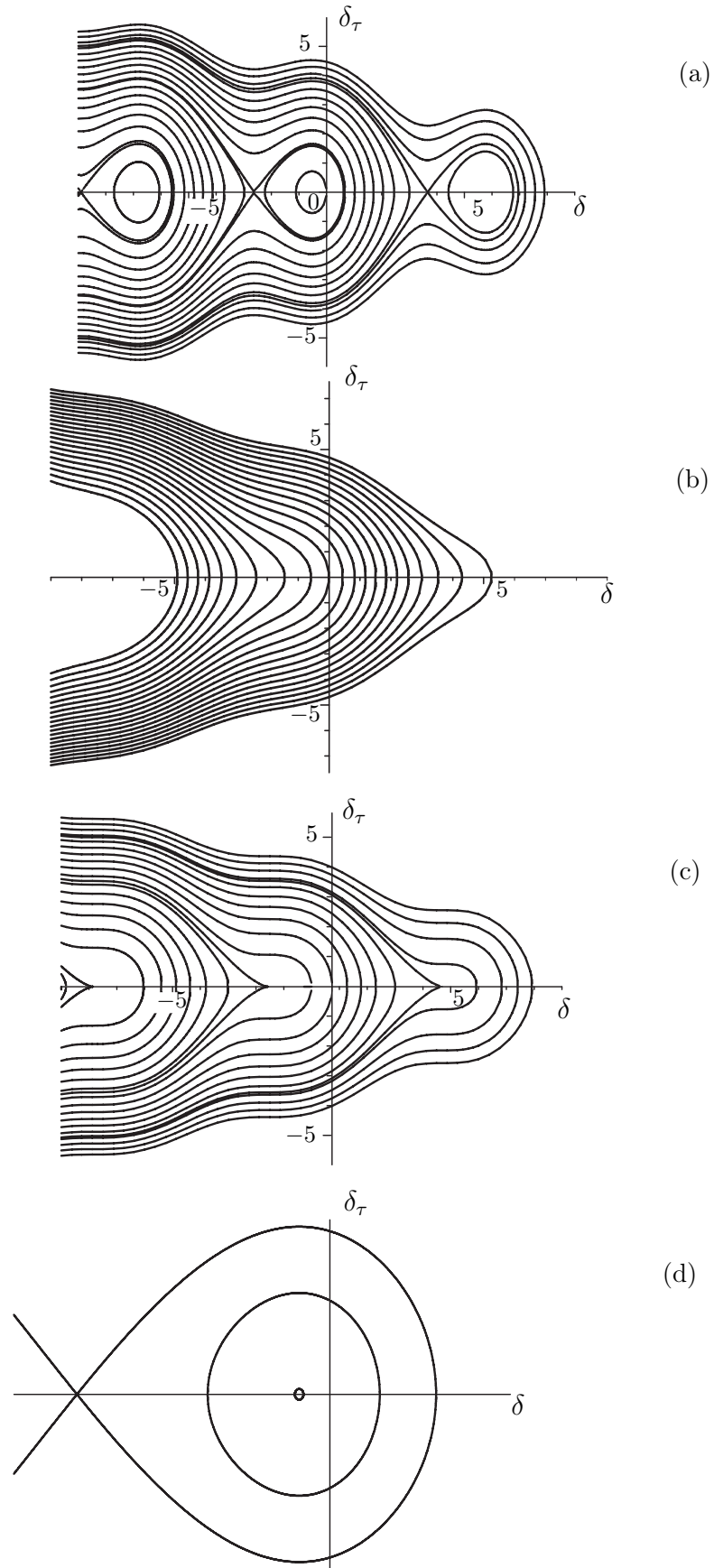


Рис. 2. Фазовый портрет уравнения (4): (a) — $|\beta/\lambda| < 1$, (b) — $|\beta/\lambda| > 1$, (c) — $|\beta/\lambda| = 1$, (d) — $\beta = 1, \lambda = -3$.

1. Приведение к стандартной форме

Вводим еще одно медленное время $\theta = \mu\tau = \varepsilon t$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$. Из (3) получаем

$$\begin{cases} A_\tau = -\frac{\mu g(A, P) \sin \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)}, \\ \theta_\tau = \mu, \\ \delta_\tau = \frac{1}{\mu} \left(\frac{A^2}{2} + \frac{P^2}{2A^2} - \Omega_1 \right) - \beta\tau - \frac{\mu g_A(A, P) \cos \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)}. \end{cases} \quad (8)$$

Для ограниченности δ_τ при $\mu \rightarrow 0$ с учетом $A(0) = 1$ следует положить

$$\Omega_1 = \frac{1 + P^2}{2}. \quad (9)$$

Тогда

$$\delta_\tau(0) = -\frac{\mu g_A(1, P) \cos \delta(0)}{1 + P^2}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} \delta_{\tau\tau} = & -\left(A - \frac{P^2}{A^3} \right) \frac{g(A, P) \sin \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} - \beta + \frac{\mu g_A(A, P) \sin \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{A^2}{2} + \frac{P^2}{2A^2} - \Omega_1 \right) - \beta\tau \right. \\ & \left. - \frac{\mu g_A(A, P) \cos \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} \right] + \frac{\mu g_{AA}(A, P) \cos \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} \cdot \frac{\mu g(A, P) \sin \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} + \frac{\mu g_A(A, P) \cos \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)^2} \cdot \beta\mu, \\ \delta_{\tau\tau} = & \lambda(A, \beta\theta, P) \sin \delta - \beta + \mu^2 q(A, \theta, \delta, \beta, P), \end{aligned}$$

где

$$\lambda(A, \beta\theta, P) = \left(\frac{A^2}{2} + \frac{P^2}{2A^2} - \Omega_1 \right) \frac{g_A(A, P)}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} - \left(A - \frac{P^2}{A^3} \right) \frac{g(A, P)}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} - \frac{g_A(A, P)\beta\theta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)}, \quad (10)$$

$$q(A, \theta, \delta, \beta, P) = -\frac{g_A(A, P) \sin \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} \cdot \frac{g_A(A, P) \cos \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} + \frac{g_{AA}(A, P) \cos \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} \cdot \frac{g(A, P) \sin \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)} + \frac{\beta g_A(A, P) \cos \delta}{2(\Omega_1 + \beta\theta)^2}.$$

Согласно [3] имеем

$$E = \frac{\delta_\tau^2}{2} + V(A, \theta, \delta, \beta, P), \quad V(A, \theta, \delta, \beta, P) = \lambda(A, \beta\theta, P) \cos \delta + \beta\delta,$$

$$E(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu g_A(1, P) \cos \delta(0)}{1 + P^2} \right)^2 + \frac{(P^2 - 1)g(1, P)}{1 + P^2} \cos \delta(0) + \beta\delta(0).$$

Следуя [1, гл. 3], для периода имеем

$$T_0(A, \theta, E, \beta, P) = \oint \frac{d\delta}{\delta_\tau}, \quad \delta_\tau = \pm \sqrt{2} \sqrt{E - \lambda(A, \beta\theta, P) \cos \delta - \beta\delta}.$$

Интеграл берется по замкнутой траектории в фазовом пространстве при одном обходе в сторону возрастания τ (по часовой стрелке на рис. 2, (d)).

$$\omega(A, \theta, E, \beta, P) = \frac{2\pi}{T_0(A, \theta, E, \beta, P)}, \quad \Psi(A, \theta, E, \delta, \beta, P) = \omega(A, \theta, E, \beta, P) \int_{\delta(0)}^{\delta} \frac{d\delta}{\delta_\tau}.$$

Из равенства $\psi = \Psi(A, \theta, E, \delta, \beta, P)$ однозначно находится $\delta = \delta(A, \theta, E, \psi, \beta, P)$. Эта функция 2π -периодична по ψ .

Система уравнений (8) переходит в систему

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\tau = \mu X(A, \theta, E, \psi, \beta, P), \\ \theta_\tau = \mu, \\ E_\tau = \mu \left[\mu q(A, \theta, \delta, \beta, P) \delta_\tau + \left(\frac{\partial \lambda(A, \beta \theta, P)}{\partial A} X(A, \theta, E, \psi, \beta, P) + \frac{\partial \lambda(A, \beta \theta, P)}{\partial \theta} \right) \cos \delta \right], \\ \psi_\tau = \omega(A, \theta, E, \beta, P) + \mu \left[\mu q(A, \theta, \delta, \beta, P) \delta_\tau \Psi_E + \Psi_A X(A, \theta, E, \psi, \beta, P) + \Psi_\theta \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \lambda(A, \beta \theta, P)}{\partial A} X(A, \theta, E, \psi, \beta, P) + \frac{\partial \lambda(A, \beta \theta, P)}{\partial \theta} \right) \Psi_E \cos \delta \right], \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(0) = 1, \\ \theta(0) = 0, \\ E(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu g_A(1, P) \cos \delta(0)}{1 + P^2} \right)^2 + \frac{(P^2 - 1)g(1, P)}{1 + P^2} \cos \delta(0) + \beta \delta(0), \\ \psi(0) = 0, \end{array} \right. \quad (12)$$

где

$$X(A, \theta, E, \psi, \beta, P) = -\frac{g(A, P) \sin \delta}{2(\Omega_1 + \beta \theta)}, \quad \delta = \delta(A, \theta, E, \psi, \beta, P).$$

Эти построения справедливы при движении внутри сепаратрисной кривой, т. е. при

$$|\beta/\lambda(A, \beta \theta, P)| < 1$$

и подходящем $\delta(0)$. Таким образом, получилась система вида

$$\left\{ \begin{array}{l} I_\tau = \mu f(I, \psi, \mu), \\ \psi_\tau = \omega(I) + \mu h(I, \psi, \mu), \quad I, f \in \mathbb{R}^3, \quad I = (A, \theta, E). \end{array} \right.$$

Согласно стандартным методам осреднения [4] главный член разложения усредненной амплитуды при $\mu \rightarrow 0$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{A}_\tau = \mu \langle X \rangle, \quad \bar{\theta} = \theta = \mu \tau, \quad (13)$$

$$\langle X \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\bar{A}, \theta, \bar{E}, \psi, \beta, P) d\psi. \quad (14)$$

Так как $A(0) = 1$, то начальное условие для \bar{A} имеет вид

$$\bar{A}(0) = A(0) = 1. \quad (15)$$

Задача (13), (15) определяет главный член разложения $A(\tau)$ при $\mu \rightarrow 0$. Известны теоремы о близости \bar{A} к точному решению A при $\tau \leq \text{const}/\mu$, $\mu \rightarrow 0$ [2]. Усредненная амплитуда \bar{A} как раз наиболее интересна в физических приложениях.

2. Постановка задачи

1. Рассматривается задача (11), (12). Она с учетом (7), (9) зависит от параметров $\beta, \delta(0), k, P$ и малого параметра μ . При этом $\beta > 0$, $\lambda(1, 0, P) < 0$.

2. Из равенства $\psi = \Psi(A, \theta, E, \delta, \beta, P)$ однозначно находится $\delta = \delta(A, \theta, E, \psi, \beta, P)$.

3. Определяется функция (14) и ставится задача (13), (15).

4. Находится функция $\bar{A}(\tau)$, зависящая от параметров $\beta, \delta(0), k, P$ и малого параметра μ .
5. Обозначим через $\tau_1(\mu, \kappa, \beta, \delta(0), k, P)$ значение τ , при котором $\bar{A}(\tau) = \kappa$ для заданного $\kappa > 2$.
6. Ставится оптимизационная задача. Требуется найти такие параметры $\beta, \delta(0), k, P$, что главный член разложения $\tau_1(\mu, \kappa, \beta, \delta(0), k, P)$ при $\mu \rightarrow 0$ принимает минимальное значение

$$\min_{\beta, \delta(0), k, P} \lim_{\mu \rightarrow 0} \tau_1(\mu, \kappa, \beta, \delta(0), k, P) / \sqrt{\mu}.$$

При этом должно выполняться условие наличия сепаратрисы

$$\left| \frac{\beta}{\lambda(\bar{A}, \beta\theta, P)} \right| < 1,$$

а $\delta(\tau)$ и $\delta_\tau(\tau)$ должны удовлетворять условию попадания внутрь сепаратрисы для уравнения (4) ($\lambda = \lambda(\bar{A}, \beta\theta, P)$).

3. Интегрирование \bar{A}

Рассмотрим уравнение (13). Для этого найдем $\langle X \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= -\frac{g(\bar{A}, P)}{2\pi 2(\Omega_1 + \beta\theta)} \oint \frac{\omega(\bar{A}, \theta, \bar{E}, \beta, P) \sin \xi d\xi}{\pm \sqrt{2} \sqrt{E - \lambda(\bar{A}, \beta\theta, P) \cos \xi - \beta\xi}} \\ &= -\frac{g(\bar{A}, P)}{2\pi 2(\Omega_1 + \beta\theta)} \cdot \frac{2\pi}{T_0(\bar{A}, \theta, \bar{E}, \beta, P)} \oint \frac{\sin \xi - \beta/\lambda(\bar{A}, \beta\theta, P) + \beta/\lambda(\bar{A}, \beta\theta, P)}{\pm \sqrt{2} \sqrt{E - \lambda(\bar{A}, \beta\theta, P) \cos \xi - \beta\xi}} d\xi \\ &= -\frac{\beta g(\bar{A}, P)}{2(\Omega_1 + \beta\theta) \lambda(\bar{A}, \beta\theta, P)}. \end{aligned}$$

С учетом (2) и (10) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle X \rangle} &= -\frac{2(\Omega_1 + \beta\theta) \lambda(\bar{A}, \beta\theta, P)}{\beta g(\bar{A}, P)} = -\frac{1}{\beta} \left[\left(\frac{\bar{A}^2}{2} + \frac{P^2}{2\bar{A}^2} - \Omega_1 - \beta\theta \right) \frac{2\bar{A}F - \bar{A}^2 F' \cdot 2P/\bar{A}^3}{\bar{A}^2 F} \right. \\ &\quad \left. - \left(\bar{A} - \frac{P^2}{\bar{A}^3} \right) \right] = \frac{1}{\beta} \left[\bar{A} - \frac{P^2}{\bar{A}^3} + \left(\frac{\bar{A}^2}{2} + \frac{P^2}{2\bar{A}^2} - \Omega_1 - \beta\theta \right) \left(\frac{2PF'}{\bar{A}^3 F} - \frac{2}{\bar{A}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{2}{\bar{A}} (\Omega_1 + \beta\theta) \left(1 - \frac{PF'}{\bar{A}^2 F} \right) - \frac{2P^2}{\bar{A}^3} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (13) свелось к уравнению

$$\frac{2}{\beta \bar{A}} \left[(\Omega_1 + \beta\theta) \left(1 - \frac{PF'(P/\bar{A}^2)}{\bar{A}^2 F(P/\bar{A}^2)} \right) - \frac{P^2}{\bar{A}^2} \right] \bar{A}_\theta = 1.$$

Сделаем замену

$$\frac{1}{\bar{A}^2} = z, \quad dz = -\frac{2}{\bar{A}^3} d\bar{A}.$$

Имеем

$$\left[(\Omega_1 + \beta\theta) \left(\frac{F(Pz)}{z} \right)_\theta \left(-\frac{z^2}{F(Pz)} \right) - P^2 z \right] \left(-\frac{z_\theta}{z} \right) = \beta$$

или

$$(\Omega_1 + \beta\theta) \left(\ln \frac{F(Pz)}{z} \right)_\theta + P^2 z_\theta = \beta.$$

Еще одна замена

$$x = \Omega_1 + \beta\theta \quad (16)$$

приводит к уравнению

$$x \left(\ln \frac{F(Pz)}{z} \right)_x + P^2 z_x = 1. \quad (17)$$

Таким образом, (6) с учетом (9) свелась к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \text{Начальная точка: } \theta_0 = 0, \quad x_0 = \Omega_1 = \frac{1 + P^2}{2}, \quad \bar{A}_0 = 1, \quad z_0 = 1, \\ \text{Конечная точка: } \theta_1 = \mu\tau_1, \quad x_1 = \Omega_1 + \beta\tau_1 \text{ — плавающая точка, } \bar{A}_1 = \kappa, \quad z_1 = 1/\kappa^2. \end{aligned}$$

Начальное условие для уравнения (17) имеет вид

$$z((1 + P^2)/2) = 1. \quad (18)$$

Лемма 1. Если $z(x)$ — решение задачи (17), (18) и выполнено

$$|P| \leq \frac{1}{2}, \quad x \geq \frac{1 + P^2}{2}, \quad 0 < z(x) \leq 1,$$

то справедливо

$$z_x(x) < 0.$$

Доказательство леммы следует из представления уравнения (17) в виде

$$z_x = \left[x \left(\frac{P^2 z - 1/z}{1 + P^2 z^2} - \frac{\pi P}{2} \operatorname{th} \frac{\pi P z}{2} \right) + P^2 \right]^{-1}. \quad (19)$$

□

Лемма 2. Для решения задачи (17), (18) существует точка $x_1 > x_0$ такая, что

$$z(x_1) = 1/\kappa^2.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда в силу леммы 1 существует $\gamma > 1/\kappa^2$ такое, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x) = \gamma$. Тогда

$$\frac{P^2 z - 1/z}{1 + P^2 z^2} - \frac{\pi P}{2} \operatorname{th} \frac{\pi P z}{2} \rightarrow \gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P^2 \gamma - 1/\gamma}{1 + P^2 \gamma^2} - \frac{\pi P}{2} \operatorname{th} \frac{\pi P \gamma}{2}$$

и $\gamma_1 < 0$. В этом случае из (19) при больших \tilde{x} и \hat{x} получим соотношение

$$z(\hat{x}) - z(\tilde{x}) = \int_{\tilde{x}}^{\hat{x}} \frac{dx}{P^2 + x(\gamma_1 + o(1))} \rightarrow \infty$$

при $\hat{x} \rightarrow +\infty$ и фиксированном \tilde{x} , что противоречит соотношению $\gamma < z(x) \leq 1$. □

Лемма 3. При $\kappa > 2$ разность $x_1 - x_0$, как функция от P , имеет при $P = 0$ локальный минимум.

Доказательство. Пусть $v(y, P)$ — функция, обратная к $z(x)$. Тогда в силу (19) функция v удовлетворяет следующей задаче Коши для линейного уравнения

$$\frac{dv}{dy} = vQ(y, P) + P^2, \quad v(1) = \frac{1 + P^2}{2}, \quad y \in (0, 1), \quad (20)$$

где

$$Q(y, P) = \frac{P^2 y^2 - 1}{y(1 + P^2 y^2)} - \frac{\pi P}{2} \operatorname{th} \frac{\pi P y}{2}. \quad (21)$$

Рассмотрим величину

$$\varphi(P) \stackrel{\text{def}}{=} x_1(P) - x_0(P) = v(y_0, P) - \frac{1 + P^2}{2}, \quad \text{где } y_0 = 1/\kappa^2.$$

Поскольку правая часть уравнения и начальное условие (20) есть гладкие и четные по P функции, то и $\varphi(P)$ — четная и дифференцируемая по P . Поэтому $\varphi'(0) = 0$. Найдем $\varphi''(0)$. Отметим, что

$$\left. \frac{\partial v(y, P)}{\partial P} \right|_{P=0} = 0.$$

Поэтому для

$$w(y) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial^2 v(y, P)}{\partial P^2} \right|_{P=0} = 0$$

получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dy} = wQ(y, 0) + v_0 \frac{\partial^2 Q(y, 0)}{\partial P^2} + 2, \\ w(1) = 1. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь v_0 — решение задачи Коши (20) при $P = 0$ (из (21) имеем $Q(y, 0) = -1/y$):

$$\frac{v_0}{dy} = -\frac{v_0}{y}, \quad v_0(1) = \frac{1}{2}.$$

Тем самым $v_0 = \frac{1}{2y}$.

Так как $\frac{\partial^2 Q(y, 0)}{\partial P^2} = \frac{8 - \pi^2}{2} \cdot y$, то задача (22) принимает вид

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{w}{y} + \alpha, \quad w(1) = 1,$$

где

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{8 - \pi^2}{4} + 2 = \frac{16 - \pi^2}{4} > 0.$$

Поэтому $w = \frac{2 - \alpha}{2y} + \frac{\alpha y}{2} = \frac{2 - \alpha + \alpha y_0^2 - 2y_0}{2y_0}$.

Найдем $\varphi''(0)$:

$$\varphi''(0) = w(y_0) - 1 = \frac{2 - \alpha}{2y_0} + \frac{\alpha y_0}{2} - 1 = \frac{2 - \alpha + \alpha y_0^2 - 2y_0}{2y_0} = \frac{(1 - y_0)(2 - \alpha(y_0 + 1))}{2y_0}.$$

Для $y_0 = 1/\kappa^2$ при $\kappa > 2$ имеем

$$2 - \alpha(y_0 + 1) > 2 - \frac{16 - \pi^2}{4} \left(1 + \frac{1}{4}\right) > 0.$$

Следовательно, и $\varphi''(0) > 0$. □

Итак, для минимальности $x_1 - x_0$ надо взять $P = 0$.

Из (16) видно, что при фиксированном $x_1 - x_0$ при увеличении β уменьшается τ_1 . Однако β нельзя выбирать сколь угодно большим, так как необходимо попадание внутрь сепаратрисы (см. рис. 2), должно выполняться соотношение (5). Если $|\beta/\lambda(A, \beta\theta, P)| > 1$, то при некотором достаточно малом μ автофазировка пропадает.

Посмотрим на соотношение $\left| \frac{\beta}{\lambda} \right| \leq 1$. Поскольку при $P = 0$

$$g(A, 0) = \pi A^2, \quad g_A(A, 0) = 2\pi A, \quad \Omega_1 = \frac{1}{2},$$

то $\lambda(A, 0, 0) = -\pi A$, поэтому

$$\left| \frac{\beta}{\lambda(A, 0, 0)} \right| = \frac{\beta}{\pi A}.$$

Таким образом, это выражение убывает при росте A и при $A \leq 1$ справедливо $\frac{\beta}{\pi A} \leq \frac{\beta}{\pi}$, которое и надо положить 1.

В этом случае сепаратрисные кривые вырождаются в точки $\delta = -\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. рис. 2, (с)).

Таким образом, получаем следующую теорему:

Теорема. Значение τ_1 достигает локального минимума при $P = 0$, $\delta(0) = -\pi/2$:

$$\Omega_0 + \frac{k^2}{2} = \frac{1}{2}, \quad F(x) = \pi, \quad g(A, P) = \pi A^2, \quad \beta = |\lambda(1, 0, 0)| = \pi, \quad z(x) = \frac{1}{2x},$$

$$\bar{A}(\tau) = \sqrt{1 + 2\pi\mu\tau}, \quad \bar{A}(t) = \sqrt{1 + 2\pi\epsilon t}, \quad \tau_1 = \frac{\kappa^2 - 1}{2\pi\sqrt{\epsilon}}.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
2. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.Н. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные исследования. М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. Т. 3. С. 5–290.
3. Баталов С.В., Маслов Е.М., Шагалов А.Г. Автофазировка солитонов // Журн. эксперимент. и теоретич. физики. 2009. Vol. 135, вып. 5. С. 1021–1028.
4. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
5. Калякин Л.А. Асимптотический анализ моделей авторезонанса // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, вып. 5 (383). С. 3–72.

Данилин Алексей Руфимович

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 28.08.2009

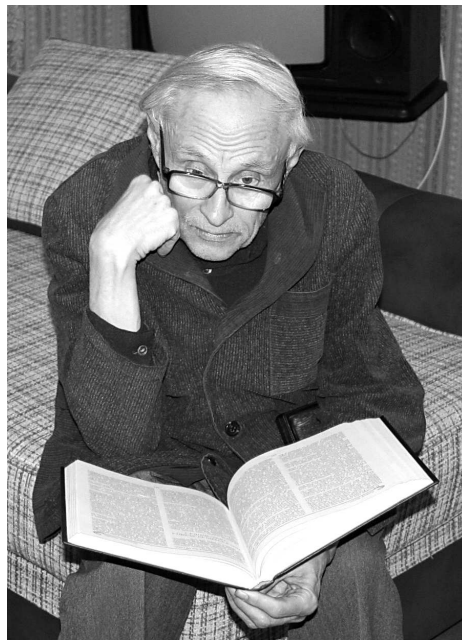
Эльберт Александр Евгеньевич

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: aee@imm.uran.ru

ВЛАСОВ ЛЕОНИД ПЕТРОВИЧ

19 марта на 73-м году ушел из жизни ведущий научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН Власов Леонид Петрович. Он окончил Уральский государственный университет (1956–1962), аспирантуру при Уральском университете (1964–1967). В 1967 г. защитил кандидатскую диссертацию “Чебышевские множества и их обобщения”. Работая в Институте математики и механики, прошел все ступени от лаборанта до ведущего научного сотрудника.

Л.П.Власов являлся одним из самых известных в научном мире специалистов по геометрическим вопросам теории приближений в банаховых пространствах. Ему принадлежат глубокие результаты, касающиеся проблемы выпуклости чебышевских множеств и их свойств, таких как связность, “солнечность”, непрерывность метрической проекции и т.д. Им разработана общая схема построения обобщенных элементов наилучшего приближения, изучены вопросы характеристики, существования и единственности таких элементов. Исследовано строение замкнутых граней единичного шара в банаховых пространствах и, в частности, в пространствах абстрактных функций.

Л.П.Власов являлся автором около 40 научных работ, среди которых особое место занимают две обзорные статьи, опубликованные в “Успехах математических наук” — ведущем математическом журнале России. Неоценим его вклад в издательскую деятельность Института. С 2000 г. являлся научным редактором и высоко квалифицированным переводчиком английской версии журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”. Широкий математический кругозор, удивительная интуиция, честность ученого, необходимые в этом деле скрупулезность, принципиальность и ответственность в значительной мере определили высокий уровень Трудов.

Леонид Петрович был доброжелательным и отзывчивым человеком. Светлая память о Леониде Петровиче Власове навсегда сохранится в наших сердцах.

СОДЕРЖАНИЕ

А. С. Апарцин, В. А. Спиряев. О неупрощаемых ламберт-оценках решений одного класса нелинейных интегральных неравенств	3
В. А. Белоногов. О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. V	13
А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев, Д. В. Падучих. Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца	35
М. В. Девятерикова, А. А. Колоколов, А. П. Колосов. Унимодулярные преобразования для задач целочисленного программирования и анализ эффективности их применения	48
С. Л. Дерябин, А. В. Мезенцев. Эволюция газовых течений, примыкающих к вакууму в условиях действия сил тяготения и Кориолиса	63
К. С. Ефимов, А. А. Махнев, М. С. Нирова. О вполне регулярных графах с $k = 10, \lambda = 3$	75
А. Л. Казаков. Применение обобщенного метода характеристических рядов при построении решения одной начально-краевой задачи для системы квазилинейных уравнений	91
Б. А. Касаткин, Н. В. Злобина. Обобщенная теория нормальных волн в слоистых средах	109
А. И. Короткий. Разрешимость в слабом смысле одной краевой задачи, описывающей тепловую конвекцию	121
А. А. Кузнецов, А. К. Шлёпкин. О различии бернсайдовых групп $B(2, 5)$ и $B_0(2, 5)$	133
Р. Ч. Кулаев. Теорема существования для параболической смешанной задачи на графе с краевыми условиями, содержащими производные по времени	139
В. А. Кыров. Функциональные уравнения в симплектической геометрии	149
А. В. Ласунский. О циклах дискретного периодического логистического уравнения	154
Е. М. Малеко. Приближенное вычисление первых собственных чисел дискретного оператора в случае, когда спектральные следы степеней его резольвенты находятся приближенно	158
А. В. Осипов. Слабо множественно-открытая топология	167
Д. Н. Панюшкин, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов. О группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических групп посредством проективных специальных линейных групп	177

Ю. В. Парышева. Асимптотика оптимального управления в задаче минимизации терминального функционала на траекториях системы с быстрыми и медленными переменными.....	186
А. Л. Попович, В. Б. Репницкий. О представлении решеток решетками конгруэнций полугрупп.....	199
Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов. Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных	209
Н. А. Сидоров, Р. Ю. Леонтьев. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях.....	226
В. П. Танана, А. И. Сидикова. О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики	238
Ю. А. Шашкин. Степень отображения прямоугольника на трехзвенную ленту.....	253
А. Н. Шевляков. Алгебраическая геометрия над моноидом натуральных чисел. Неприводимые алгебраические множества	258
А. М. Шур. О вычислении параметров и типов поведения комбинаторной сложности регулярных языков	270
А. Е. Эльберт, А. Р. Данилин. Автофазировка солитонов с оптимизацией.....	288
ВЛАСОВ Леонид Петрович	297

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16

№ 2

2010

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TeX-редактор Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 05.05.10. Формат $60 \times 84^{1/8}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 37,5. Уч.-изд. л. 32,0 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226