

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

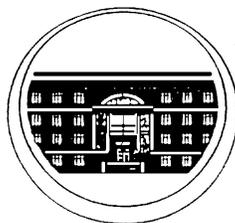
ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 16

№ 1

2010



ЕКАТЕРИНБУРГ

**Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 16, № 1.** Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. 288 с.

ISSN 0134-4889

**Главный редактор** чл.-корр. РАН В. И. Бердышев

**Зам. гл. редактора** В. В. Кабанов

**Редакционная коллегия**

А. Г. Бабенко, Н. В. Величко,  
Л. П. Власов, М. И. Гусев, А. Р. Данилин,  
А. Ф. Клейменов, А. С. Кондратьев, А. И. Короткий,  
В. И. Максимов, О. Н. Ульянов (*отв. секретарь*)

**Редакционный совет**

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин,  
акад. РАН А. М. Ильин, акад. РАН Н. Н. Красовский,  
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,  
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,  
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов

**Отв. редакторы выпуска** В. Н. Ушаков, А. Г. Ченцов

УДК 517.977.8

**ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПОЗИЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ<sup>1</sup>****Ю. В. Авербух**

В работе рассматривается неантагонистическая игра двух лиц. Предложено инфинитезимальное условие на множество выигрышей в ситуации равновесия по Нэшу. Это условие описывается в терминах производной от многозначного отображения вдоль множества направлений.

Ключевые слова: дифференциальные игры, равновесие по Нэшу.

Yu. V. Averboukh. Infinitesimal characterization of feedback Nash equilibrium.

The two-person nonzero-sum differential game is considered. The infinitesimal-like condition on set-valued map to be a set of values of differential game is proposed. This condition is formulated in the terms of derivative of set-valued map along the set of directions.

Key words: differential game, feedback Nash equilibrium.

**Введение**

Настоящая работа посвящена исследованию множества значений неантагонистической дифференциальной игры в ситуации равновесия по Нэшу. Эта задача рассматривается в свете методов, разработанных для исследования антагонистических дифференциальных игр в работах Н.Н. Красовского, А.И. Субботина и их учеников. В работе используется позиционная формализация, предложенная Н.Н. Красовским [1, 2] для случая антагонистической дифференциальной игры. Применение этой формализации для случая неантагонистической игры было рассмотрено в [3].

Позиционная формализация позволила установить факт существования решения антагонистической игры благодаря теореме об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [2]. С использованием теоремы об альтернативе устанавливается непустота множества равновесных по Нэшу решений неантагонистической игры [3, 4]. Решение строится при помощи так называемых стратегий наказания. С использованием этой же техники описывается множество все значений в ситуации равновесия по Нэшу [3, 5].

В настоящей работе предложены инфинитезимальные условия, при которых заданное многозначное отображение является множеством значений игры по Нэшу (т. е. множеством выигрышей в ситуациях равновесия по Нэшу). Также получены условия, при которых значения непрерывной функции позиции со значения в декартовом квадрате прямой являются некоторыми значениями игры по Нэшу. Показано, что эти условия обобщают метод систем уравнений типа Гамильтона — Якоби, в частности описанный в [6].

**1. Определения и обозначения**

Мы рассматриваем управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t \in [t_0, \vartheta_0], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00436-а).

Предполагается, что переменная  $u$  — управление первого игрока, переменная  $v$  — управление второго игрока. Игроки стремятся максимизировать свой терминальный выигрыш, т. е.  $i$ -й игрок максимизирует значение величины  $\sigma_i(x(\vartheta_0))$ . Накладываются стандартные ограничения на систему. Мы считаем, что  $P$  и  $Q$  — компакты, функции  $f$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  непрерывны; также функция  $f$  локально липшицева по  $x$  и удовлетворяет по фазовой переменной условию подлинейного роста.

Мы следуем позиционной формализации, предложенной в работах Н.Н. Красовского [1, 2], и ее варианту, предложенному для неантагонистических дифференциальных игр в [3]. Под позиционной стратегией первого игрока понимаем пару  $U = (u(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon))$ . Здесь  $u(t, x, \varepsilon)$  — произвольная функция позиции  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$  и параметра точности  $\varepsilon$ ,  $\beta_1(\varepsilon)$  — функция выбора мелкости шага; мы предполагаем, что  $\beta_1(\varepsilon)$  непрерывна,  $\beta_1(\varepsilon) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Аналогично, под позиционной стратегией второго игрока понимаем пару  $V = (v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon))$ .

Пусть задана позиция  $(t_*, x_*)$ . Пошаговое движение, выходящее из позиции  $(t_*, x_*)$ , определяется следующим образом. Предполагается, что игроки выбрали параметры точности  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  соответственно. Также пусть первый игрок выбрал некоторое разбиение отрезка  $[t_*, \vartheta_0]$   $\Delta_1 = \{\tau_j\}_{j=0}^r$ , мелкость которого не превосходит  $\varepsilon_1$ ; аналогично предположим, что второй игрок выбрал разбиение  $\Delta_2 = \{\xi_k\}_{k=1}^r$ , мелкость которого не превосходит  $\varepsilon_2$ . Пошаговым движением называем функцию  $x[\cdot]$  — решение уравнения (1.1) при том, что управление первого игрока на полуинтервалах  $[\tau_j, \tau_{j+1})$  равно  $u(\tau_j, x[\tau_j], \varepsilon_1)$ , управление второго игрока на полуинтервалах  $[\xi_k, \xi_{k+1})$  равно  $v(\xi_k, x[\xi_k], \varepsilon_2)$ . Обозначим пошаговое движение через  $x[\cdot, t_*, x_*; U, \varepsilon_1, \Delta_1; V, \varepsilon_2, \Delta_2]$ . Обозначим множество всех пошаговых движений, выходящих из позиции  $(t_*, x_*)$  при выбранных стратегиях  $U$  и  $V$  и параметрах точности  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , через  $X(t_*, x_*; U, \varepsilon_1; V, \varepsilon_2)$ . Если  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , то пошаговое движение называется согласованным.

Конструктивным движением называется любой равномерный предел движений  $x[\cdot, t^k, x^k; U, \varepsilon_1^k, \Delta_1^k; V, \varepsilon_2^k, \Delta_2^k]$  при  $t^k \rightarrow t_*$ ,  $x^k \rightarrow x_*$ ,  $\varepsilon_1^k \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_2^k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Множество конструктивных движений обозначим через  $X(t_*, x_*; U, V)$ . Из теоремы Арцела следует, что множество конструктивных движений непусто. Если предел берется только по согласованным пошаговым движениям, то получившийся предел будем называть согласованным конструктивным движением. Множество всех согласованных конструктивных движений обозначим через  $X^c(t_*, x_*; U, V)$ . Это множество также непусто.

В настоящей работе мы используем следующее определение равновесного по Нэшу решения. Пусть  $(t_*, x_*)$  — некоторая позиция. Пара стратегий первого и второго игроков  $U^N$  и  $V^N$  образует *равновесное по Нэшу решение игры* в позиции  $(t_*, x_*)$ , если для любых стратегий  $U$  и  $V$  выполнены неравенства

$$\max \{ \sigma_1(x[\vartheta_0]) : x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U, V^N) \} \leq \min \{ \sigma_1(x^c[\vartheta_0]) : x^c[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^N, V^N) \},$$

$$\max \{ \sigma_2(x[\vartheta_0]) : x[\cdot] \in X(t_*, x_*, U^N, V) \} \leq \min \{ \sigma_2(x^c[\vartheta_0]) : x^c[\cdot] \in X^c(t_*, x_*, U^N, V^N) \}.$$

Пару выигрышей игроков  $(J_1, J_2)$ , определяемую решениями по Нэшу, будем называть значением игры по Нэшу. Далее мы будем исследовать многозначное отображение, которое каждой позиции  $(t_*, x_*)$  ставит в соответствие множество всех значений игры по Нэшу. Обозначим это отображение через  $\mathcal{N} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ .

В [3, 4] доказано, что множество решений по Нэшу непусто при выполнении условия седловой точки в маленькой игре. Доказательство теоремы основано на использовании вспомогательных антагонистических игр. В случае, когда условие седловой точки в маленькой игре не выполнено, решение по Нэшу существует в классе смешанных стратегий или в классе пар “контрстратегия — чистая стратегия” [3].

Ниже будем считать, что выполнено условие седловой точки в маленькой игре: для всех  $t \in [t_0, \vartheta_0]$ ,  $x, s \in \mathbb{R}^n$  справедливо равенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle.$$

**З а м е ч а н и е.** Если условие седловой точки в маленькой игре не выполнено, то будем рассматривать решение в смешанных стратегиях, т. е. рассматриваем систему

$$\dot{x} = \int_P \int_Q f(t, x, u, v) \nu(dv) \mu(du), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \text{грм}(P), \quad \nu \in \text{грм}(Q), \quad (1.2)$$

где  $\mu$  — управление первого игрока,  $\nu$  — управление второго игрока,  $\text{грм}(P)$ ,  $\text{грм}(Q)$  — множества регулярных вероятностных мер на  $P$  и  $Q$  соответственно (множества  $P$  и  $Q$  оснащаются борелевскими  $\sigma$ -алгебрами). В этом случае множества  $\text{грм}(P)$  и  $\text{грм}(Q)$ , ограничивающие управления, наделяются  $*$ -слабой топологией, в которой они, как известно, компактны. В дальнейшем переход от системы (1.1) к системе (1.2) специально отмечать не будем.

Рассмотрим игру  $\Gamma_1$ , в которой первый игрок стремится максимизировать значение терминального функционала платы  $\sigma_1(x(\vartheta_0))$ , а второй игрок ему противодействует. Функцию цены игры  $\Gamma_1$  обозначим через  $\omega_1$ . Аналогично рассмотрим дифференциальную игру  $\Gamma_2$ , в которой второй игрок стремится максимизировать значение функционала  $\sigma_2(x(\vartheta_0))$ , а первый игрок ему противодействует. Функцию цены этой игры обозначим через  $\omega_2$ . Отметим, что  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — непрерывные функции позиции.

## 2. Формулировка основного результата

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x) \triangleq \text{co}\{f(t, x, u, v) : u \in P, v \in Q\}. \quad (2.1)$$

Обозначим множество его решений с начальным условием  $x(t_*) = x_*$  через  $\text{Sol}(t_*, x_*)$ .

**Утверждение 1.** Пусть многозначное отображение  $\mathcal{T} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  удовлетворяет следующим свойствам:

$$(N1) \quad \mathcal{T}(t, x) \subset [\omega_1(t, x), \infty) \times [\omega_2(t, x), \infty) \text{ для всех } (t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n;$$

$$(N2) \quad \mathcal{T}(\vartheta_0, x) = \{(\sigma_1(x), \sigma_2(x))\} \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n;$$

(N3) для всех  $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ ,  $(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t_*, x_*)$  существует движение  $y(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$  такое, что

$$(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t, y(t)), \quad t \in [t_*, \vartheta_0].$$

Тогда  $\mathcal{T}(t, x) \subset \mathcal{N}(t, x)$  для всех  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ .

Это утверждение следует из [3, теорема 1.4].

Далее будут рассматриваться замкнутые многозначные отображения. Говорят [7], что отображение  $\mathcal{T} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  замкнуто, если замкнут график  $\mathcal{T}$ , иными словами,  $\text{Cl}[\mathcal{T}] = \mathcal{T}$ . Здесь  $\text{Cl}$  — операция замыкания графика

$$\begin{aligned} [\text{Cl}\mathcal{T}](t, x) \triangleq & \left\{ (J_1, J_2) : \exists \{(t^k, x^k)\}_{k=1}^\infty \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \exists \{(z_1^k, z_2^k)\} \subset \mathbb{R}^2 : \right. \\ & \left. (z_1^k, z_2^k) \in \mathcal{T}(t^k, x^k), \quad (t^k, x^k) \rightarrow (t, x), \quad (z_1^k, z_2^k) \rightarrow (J_1, J_2), \quad k \rightarrow \infty \right\}. \end{aligned}$$

Пусть  $I$  — произвольное множество индексов. Если многозначные отображения  $\mathcal{T}^\alpha : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\alpha \in I$ , удовлетворяют условиям (N1)–(N3), то многозначное отображение  $\mathcal{T}^* : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ , определенное по правилу  $\mathcal{T}^* = \text{Cl}\mathcal{T}$ , где

$$\mathcal{T}(t, x) \triangleq \left[ \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{T}^\alpha(t, x) \right],$$

также замкнуто, имеет компактные образы и удовлетворяет условиям (N1)–(N3).

Обозначим через  $\mathcal{T}^+$  замыкание поточечного объединения всех полунепрерывных сверху многозначных отображений из  $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$  в множество всех подмножеств  $\mathbb{R}^2$ , удовлетворяющих условиям (N1)–(N3).

Из [3] следует, что для всех  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$  справедливо равенство  $\mathcal{T}^+(t, x) = \mathcal{N}(t, x)$ .

Далее мы приведем формулировку условия (N3) в терминах, аналогичных слабой инвариантности, и инфинитезимальную форму этого условия.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{T} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  замкнуто. Тогда условие (N3) эквивалентно тому, что для всех  $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ ,  $(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t_*, x_*)$  существуют  $\theta > t_*$  и  $y(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$  такие, что

$$(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t, y(t)), \quad t \in [t_*, \theta].$$

Теорема 1 доказана в разд. 4.

Для того чтобы сформулировать инфинитезимальную форму условия (N3), мы рассмотрим производную, аналогичную производной по Адамару. Обозначим через  $\text{dist}$  расстояние в  $\mathbb{R}^2$  между точкой  $(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$  и множеством  $A \subset \mathbb{R}^2$ , определяемое следующей формулой:

$$\text{dist}[(J_1, J_2), A] \triangleq \inf\{|\zeta_1 - J_1| + |\zeta_2 - J_2| : (\zeta_1, \zeta_2) \in A\}.$$

Определим модуль-производную многозначного отображения по направлению

$$D_H \mathcal{T}(t, x; (J_1, J_2), w) \triangleq \liminf_{\delta \downarrow 0, w' \rightarrow w} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta w')]}{\delta}.$$

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{T} : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$  замкнуто. Тогда условие (N3) эквивалентно тому, что для всех  $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$

$$\sup_{(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t_*, x_*)} \inf_{w \in \mathcal{F}(t_*, x_*)} D_H \mathcal{T}(t_*, x_*; (J_1, J_2), w) = 0. \quad (2.2)$$

Теорема 2 также доказана в разд. 4.

Отметим одно достаточное условие того, что функция  $(c_1, c_2) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  доставляет равновесие по Нэшу. Ниже используются обозначения

$$H_1(t, x, s) \triangleq \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle, \quad H_2(t, x, s) \triangleq \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle.$$

Если  $(c_1, c_2) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ , то модуль-производной функции  $(c_1, c_2)$  по Адамару в позиции  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$  вдоль направления  $w \in \mathbb{R}^n$  будем называть величину

$$d_{abs}(c_1, c_2)(t, x; w) \triangleq \liminf_{\delta \downarrow 0, w' \rightarrow w} \frac{|c_1(t + \delta, x + \delta w') - c_1(t, x)| + |c_2(t + \delta, x + \delta w') - c_2(t, x)|}{\delta}.$$

**Следствие 1.** Пусть функция  $(c_1, c_2) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  непрерывна,  $(c_1(\vartheta_0, \cdot), c_2(\vartheta_0, \cdot)) = (\sigma_1(\cdot), \sigma_2(\cdot))$ , функции  $c_i$  являются верхним решением дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + H_i(t, x, \nabla c_i) = 0, \quad (2.3)$$

и для всех  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$

$$\inf_{w \in \mathcal{F}(t, x)} d_{abs}(c_1, c_2)(t, x; w) = 0.$$

Тогда для всех  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$  пара чисел  $(c_1(t, x), c_2(t, x))$  является некоторым значением игры по Нэшу.

Следствие 1 вытекает из определений модуль-производных и того, что  $\omega_i$  является наименьшим верхним решением уравнения (2.3) [7].

Далее мы покажем, что сформулированный результат является обобщением метода систем уравнений типа Гамильтона — Якоби. При некоторых условиях этот метод доставляет решение в классе непрерывных стратегий [6].

**Предложение 1.** Пусть функция  $(\varphi_1, \varphi_2) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  дифференцируема,  $(\varphi_1(\vartheta_0, \cdot), \varphi_2(\vartheta_0, \cdot)) = (\sigma_1(\cdot), \sigma_2(\cdot))$ . Пусть также функция  $(\varphi_1, \varphi_2)$  удовлетворяет следующему условию: для каждой позиции  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$  существуют  $u^n \in P$ ,  $v^n \in Q$  такие, что

$$\max_{u \in P} \langle \nabla \varphi_1(t, x), f(t, x, u, v^n) \rangle = \langle \nabla \varphi_1(t, x), f(t, x, u^n, v^n) \rangle, \quad (2.4)$$

$$\max_{v \in Q} \langle \nabla \varphi_2(t, x), f(t, x, u^n, v) \rangle = \langle \nabla \varphi_2(t, x), f(t, x, u^n, v^n) \rangle \quad (2.5)$$

и

$$\frac{\partial \varphi_i(t, x)}{\partial t} + \langle \nabla \varphi_i(t, x), f(t, x, u^n, v^n) \rangle = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Тогда функция  $(\varphi_1, \varphi_2)$  удовлетворяет условиям следствия 1.

Данное предложение доказано в разд. 4.

Если пару  $(u^n, v^n)$  можно выбрать однозначно для каждой позиции  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$  и каждой пары направлений  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$ , то определены гамильтонианы  $\mathcal{H}_i$  по формуле

$$\mathcal{H}_i(t, x, s_1, s_2) \triangleq \langle s_i, f(t, x, u^n, v^n) \rangle, \quad i = 1, 2.$$

Тогда условие (2.6) эквивалентно тому, что функция  $(\varphi_1, \varphi_2)$  является решением системы дифференциальных уравнений типа Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \mathcal{H}_i(t, x, \nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2) = 0, \quad i = 1, 2.$$

### 3. Пример

Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую динамикой

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \end{cases} \quad (3.1)$$

$t \in [0, 1]$ ,  $u, v \in [-1, 1]$ . Функционалы выигрыша определим формулами  $\sigma_1(x, y) \triangleq -|x - y|$ ,  $\sigma_2(x, y) \triangleq y$ . Напомним, что игроки стремятся максимизировать выигрыши.

Для того чтобы найти многозначную функцию  $\mathcal{N} : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ , найдем значения вспомогательных отображений  $\mathcal{S}_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , где

$$\mathcal{S}_i(t, x_*, y_*) \triangleq \{z \in \mathbb{R} : \omega_i(t, x_*, y_*) \leq z \leq c_i^+(t, x_*, y_*)\}.$$

Здесь

$$c_i^+(t, x, y) \triangleq \sup_{u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}} \sigma_i \left( x + \int_t^{\vartheta_0} u(\xi) d\xi, y + \int_t^{\vartheta_0} v(\xi) d\xi \right).$$

Ясно, что

$$\mathcal{N}(t, x_*, y_*) \subset \mathcal{S}_1(t, x_*, y_*) \times \mathcal{S}_2(t, x_*, y_*). \quad (3.2)$$

Таким образом,  $\mathcal{S}_i(t, x_*, y_*)$  ограничивает множество значений игры по Нэшу.

Начнем с определения  $\mathcal{S}_2$ . Для этого найдем функцию цены  $\omega_2(t, x_*, y_*)$  в игре  $\Gamma_2$  (в ней первый игрок стремится минимизировать значение  $\sigma_2(x, y)$ , второй игрок стремится максимизировать это значение). Функция цены в этой равна  $y_* + (1-t)$ . Также  $c_2^+(t, x_*, y_*) = y_* + (1-t)$ . Следовательно,

$$\mathcal{S}_2(t, x_*, y_*) = y_* + (1-t). \quad (3.3)$$

Перейдем к определению  $\mathcal{S}_1$ . Благодаря методу программных итераций [9] имеем, что

$$\omega_1(t, x_*, y_*) = -|x_* - y_*|.$$

Также

$$c_1^+(t, x_*, y_*) = \min \{ -|x_* - y_*| + 2(1-t), 0 \}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{S}_1(t, x_*, y_*) = [\omega_1(t, x_*, y_*), c_1^+(t, x_*, y_*)]. \quad (3.4)$$

Теперь перейдем к вычислению  $\mathcal{N}(t, x_*, y_*)$ . В силу линейности правой части системы (3.1) и выпуклости ограничений, любое управление порождающее движение, представляет из себя пару постоянных управлений  $(u, v) \in P \times Q$ . Имеем, что для всех  $(J_1, J_2) \in \mathcal{S}_1(t, x_*, y_*) \times \mathcal{S}_2(t, x_*, y_*)$

$$D_H \mathcal{N}(t, x_*, y_*; (J_1, J_2), (u, v)) \geq \liminf_{\delta \downarrow 0, v' \rightarrow v} \frac{|y_* + \delta v' + (1-t-\delta) - y_* - (1-t)|}{\delta} = |v - 1|.$$

Таким образом, если на  $w = (u, v)$  реализуется нулевое значение производной многозначного отображения, то  $v = 1$ .

Ниже будут рассмотрены два случая:

1.  $y_* \geq x_*$ ;
2.  $y_* < x_*$ .

Вначале рассмотрим случай  $y_* \geq x_*$ . Пусть  $(J_1, J_2) \in \mathcal{N}(t, x_*, y_*)$ . Следовательно, существует движение  $(x(\cdot), y(\cdot)) \in \text{Sol}(t, x_*, y_*)$  такое, что  $(J_1, J_2) \in \mathcal{N}(\theta, x(\theta), y(\theta))$ ,  $\theta \in [t, 1]$ . Из определения управляемой системы и свойства  $v = 1$  следует, что существует  $u \in [-1, 1]$  со свойством:  $x(1) = x_* + u(1-t)$ ,  $y(1) = y_* + (1-t)$ . Следовательно,  $y(1) \geq x(1)$ . Таким образом, из свойства (N2) получаем, что

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_1(x(1), y(1)) = -y(1) + x(1) = -y_* - (1-t) + x_* + u(1-t) \\ &= -y_* + x_* + (1-t)(u-1) \leq -y_* + x_* = -|x_* - y_*|. \end{aligned}$$

Причем равенство достигается лишь при  $u = 1$ . Из свойства (N1) следует, что имеет место вложение

$$\mathcal{N}(t, x_*, y_*) \subset \{(-|x_* - y_*|, y_* + (1-t))\}.$$

Подставив в выражение для  $D_H \mathcal{N}(t, x_*, y_*; (-|x_* - y_*|, y_* + (1-t)), w)$  значение  $w = (1, 1)$ , заключаем, что для  $y_* \geq x_*$

$$\mathcal{N}(t, x_*, y_*) = \{(-|x_* - y_*|, y_* + (1-t))\}.$$

Пусть теперь  $y_* < x_*$ . Покажем, что в этом случае

$$\mathcal{N}(t, x_*, y_*) = \mathcal{S}_1(t, x_*, y_*) \times \mathcal{S}_2(t, x_*, y_*) = \left[ -|x_* - y_*|, \min \{ -|x_* - y_*| + 2(1-t), 0 \} \right] \times \{y_* + (1-t)\}.$$

Как видно, условия (N1) и (N2) для этого отображения выполняются. Пусть  $\gamma_0$  — максимальное число из отрезка  $[0, 2]$  такое, что  $-|x_* - y_*| + \gamma_0(1-t) \leq 0$ . Пусть  $(J_1, J_2) \in \mathcal{N}(t, x_*, y_*)$ ,

тогда  $J_2 = y_* + (1 - t)$ ,  $J_1 = -|x_* - y_*| + d(1 - t)$ , где  $d \in [0, \gamma_0]$ . Покажем, что существует  $\delta > 0$  со свойством

$$(J_1, J_2) \in \mathcal{N}(t + \delta, x_* + \delta u, y_* + \delta) \quad (3.5)$$

при  $u = 1 - d$ . Для этого достаточно показать, что

$$J_1 \in \left[ y_* - x_* + \delta d, \min \{ y_* - x_* + \delta d + 2(1 - t - \delta), 0 \} \right].$$

В самом деле,  $y_* - x_* + d(1 - t) \geq y_* - x_* + \delta d$  при  $\delta < (1 - t)$ . Поскольку  $d \leq \gamma_0$ , получаем, что

$$J_1 = y_* - x_* + d(1 - t) \leq y_* - x_* + \delta d + \gamma_0(1 - t - \delta).$$

Так же

$$y_* - x_* + \delta d + \gamma_0(1 - t - \delta) \leq \min \{ y_* - x_* + d\delta + 2(1 - t - \delta); 0 \}.$$

В самом деле, поскольку  $\gamma_0 \leq 2$ , верно неравенство

$$y_* - x_* + \delta d + \gamma_0(1 - t - \delta) \leq y_* - x_* + d\delta + 2(1 - t - \delta).$$

Кроме того,  $y_* - x_* + \delta d + \gamma_0(1 - t - \delta) \leq d\delta - \gamma_0\delta \leq 0$  в силу выбора  $d$ . Таким образом, условие

$$J_1 \leq \min \{ y_* - x_* + \delta d + 2(1 - t - \delta), 0 \} = y_* - x_* + \delta d + \gamma_1(1 - t - \delta)$$

также выполнено. Из (3.5) следует, что

$$D_H \mathcal{N}(t, x_*, y_*; (J_1, J_2), (1 - d, 1)) = 0.$$

В силу того что  $\mathcal{N}(t, x_*, y_*)$  совпадает в этом случае с наибольшим по включению достижимым множеством, заключаем, что  $\mathcal{N}(t, x_*, y_*)$  и есть множество всех значений игры по Нэшу.

Проведем сравнение полученного результата, с тем результатом, который можно получить на основе вспомогательной системы уравнений в частных производных [6]. Для данной задачи система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} u_*(t, x, y) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} v_*(t, x, y) = 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} u_*(t, x, y) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} v_*(t, x, y) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Здесь величины  $u_*(t, x, y)$  и  $v_*(t, x, y)$  определяются из условий

$$\frac{\partial \varphi_1(t, x, y)}{\partial x} u_*(t, x, y) = \max_{u \in P} \left[ \frac{\partial \varphi_1(t, x, y)}{\partial x} u \right], \quad \frac{\partial \varphi_2(t, x, y)}{\partial y} v_*(t, x, y) = \max_{v \in Q} \left[ \frac{\partial \varphi_2(t, x, y)}{\partial y} v \right].$$

Из предложения 1 следует, что если пара функций  $(\varphi_1, \varphi_2)$  является решением системы уравнений (3.6), то  $\varphi_2(t, x, y) = y + (1 - t)$ . Таким образом  $v_*(t, x, y) = 1$ . Следовательно, система (3.6) сводится к уравнению

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0. \quad (3.7)$$

В силу [7, теорема 5.6] получаем, что функция

$$\varphi_1(t, x, y) = \begin{cases} x - y, & x \leq y, \\ -x + y + 2(1 - t), & x > y, -x + y + 2(1 - t) < 0, \\ 0, & x > y, -x + y + 2(1 - t) \geq 0 \end{cases}$$

является минимаксным решением уравнения (3.7). В самом деле, в областях гладкости уравнение (3.7) выполняется в классическом смысле. А на поверхностях разрыва производных

( $\{(t, x, y) : x = y\}$ ,  $\{(t, x, y) : -x + y + 2(1 - t) = 0\}$ ) частные производные от сужения функции  $\varphi_1$  равны 0, и также удовлетворяют уравнению (3.7). Как видно, функция  $\varphi_1$  является негладкой. В силу того что минимаксное решение единственно, а любое классическое решение является минимаксным, классического решения системы уравнений (3.6) не существует. В то же время из выражения для  $\mathcal{N}(t, x, y)$  видно, что  $(\varphi_1(t, x, y), \varphi_2(t, x, y)) \in \mathcal{N}(t, x, y)$ . Более того,

$$\varphi_1(t, x, y) = \max \left\{ J_1 \in \mathbb{R} : \exists J_2 \in \mathbb{R} \quad (J_1, J_2) \in \mathcal{N}(t, x, y) \right\}.$$

Иными словами,  $(\varphi_1(t, x, y), \varphi_2(t, x, y))$  есть наилучшее значение игры по Нэшу в позиции  $(t, x, y)$ .

Можно проверить, что пара функций  $(\varphi_1, \varphi_2)$  удовлетворяет условиям следствия 1. Одновременно целое семейство функций удовлетворяет условиям упомянутого следствия. А именно, пусть  $\gamma \in [0, 2]$ ,

$$c_1^\gamma(t, x_*, y_*) = \begin{cases} -|x_* - y_*|, & y_* \geq x_*; \\ \min \{ -|x_* - y_*| + \gamma(1 - t); 0 \}, & y_* < x_* \end{cases}$$

$$c_2^\gamma(t, x_*, y_*) = y_* + (1 - t).$$

Покажем, что при любом  $\gamma$  пара функций  $(c_1^\gamma, c_2^\gamma)$  удовлетворяет условиям следствия 1. Имеем, что в рассматриваемом случае

$$H_1(t, x, y, s_x, s_y) = |s_x| - |s_y|, \quad H_2(t, x, y, s_x, s_y) = |s_y| - |s_x|.$$

Покажем, что функции  $c_i^\gamma$  являются верхними решениями уравнений (2.3). Для этого воспользуемся условием [7, определение U4]. Требуется доказать, что для всех  $(t, x, y) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^2$   $(a, s_x, s_y) \in D^- c_i^\gamma(t, x, y)$  выполнено неравенство

$$a + H_i(s_x, s_y) \leq 0. \quad (3.8)$$

Здесь  $D^-$  обозначает субдифференциал функции [7, (6.10)]. Непосредственным вычислением с использованием свойств субдифференциалов [10] получаем, что

$$D^- c_1^\gamma(t, x, y) = \begin{cases} \{(0, -1, 1)\}, & y > x, \\ \{(0, 0, 0)\}, & y < x < y + \gamma(1 - t), \\ \{(-\gamma, -1, 1)\}, & x > y + \gamma(1 - t), \\ \{(0, \lambda, -\lambda) : \lambda \in [0, 1]\}, & x = y, \\ \{(-\lambda\gamma, -\lambda, \lambda) : \lambda \in [0, 1]\}, & x = y + \gamma(1 - t). \end{cases}$$

$$D^- c_2^\gamma(t, x, y) = \{(-1, 0, 1)\}.$$

Подстановка вычисленных субдифференциалов дает, что условие (3.8) выполнено для  $i = 1, 2$ .

Также  $c_i(1, x_*, y_*) = \sigma_i(x_*, y_*)$ . Кроме того,  $d_{abs}(c_1^\gamma, c_2^\gamma)(t, x_*, y_*; 1 - d, 1) = 0$  при

$$d = \begin{cases} 0, & y_* \geq x_*; \\ \max \left\{ r \in [0, \gamma] : -|x_* - y_*| + r(1 - t) \leq 0 \right\}, & y_* < x_*. \end{cases}$$

Отметим, что  $(\varphi_1, \varphi_2) = (c_1^2, c_2^2)$ .

#### 4. Слабая инвариантность множества выигрышей

В настоящем разделе будут доказаны утверждения, сформулированные в разд. 2. Вначале будет дано

**Доказательство теоремы 1.** Если условие (N3) выполнено, то в теореме 1 можно выбрать  $\theta = \vartheta_0$ .

Пусть теперь для всех  $(t_*, x_*)$ ,  $(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t_*, x_*)$  существуют такие  $\theta$  и  $y(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$ , что

$$(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t, y(t)), \quad t \in [t_*, \theta]. \quad (4.1)$$

Пусть  $\Theta$  — множество тех моментов  $\theta$ , для которых (4.1) выполнено при некотором  $y(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$ . Обозначим через  $\tau \triangleq \sup \Theta$ . Покажем, что  $\tau \in \Theta$ . В самом деле, пусть  $\theta_k \in \Theta$ ,  $\theta_k \rightarrow \tau$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Можно считать, что  $\theta_k < \theta_{k+1} \leq \tau$ . Для каждого  $k$  (4.1) верно при  $\theta = \theta_k$ ,  $y(\cdot) = y_k(\cdot) \in \text{Sol}(t_*, x_*)$ . В силу компактности пучка решений можно считать, что  $y_k(\cdot) \rightarrow y^*(\cdot)$ ,  $k \rightarrow \infty$ , здесь  $y^*(\cdot)$  — некоторый элемент  $\text{Sol}(t_*, x_*)$ . В силу замкнутости отображения  $\mathcal{T}$  имеем, что  $(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(\theta_k, y^*(\theta_k))$ . Та же замкнутость дает, что  $(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(\tau, y^*(\tau))$ . Обозначим  $x^* = y^*(\tau)$ .

Покажем, что  $\tau = \vartheta_0$ . Если  $\tau < \vartheta_0$ , то по условию существуют движение  $\hat{y}(\cdot) \in \text{Sol}(\tau, x^*)$  и момент  $\theta' > \tau$  такие, что  $(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t, \hat{y}(t))$ ,  $t \in [\tau, \theta']$ . Введем в рассмотрение движение

$$\tilde{y}(t) \triangleq \begin{cases} y^*(t), & t \in [t_*, \tau], \\ \hat{y}(t), & t \in [\tau, \theta']. \end{cases}$$

Из определения  $\theta'$  следует, что условие (4.1) верно при  $\theta = \theta'$ ,  $y(\cdot) = \tilde{y}(\cdot)$ . Таким образом  $\theta' \in \Theta$ , что противоречит выбору  $\tau$ . Следовательно,  $\tau = \vartheta_0$  и условие (N3) выполнено.  $\square$

**Доказательство теоремы 2.** Заметим, что условие, сформулированное в теореме 1, может быть переформулировано следующим образом: график  $\mathcal{T}$  — множество  $\text{gr}\mathcal{T} \triangleq \{(t, x, J_1, J_2) : (t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n, (J_1, J_2) \in \mathcal{T}\}$  — слабо инвариантен относительно дифференциального включения

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathcal{F}}(t, x) \triangleq \text{co} \left\{ \begin{pmatrix} f(t, x, u, v) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : u \in P, v \in Q \right\}.$$

Условие слабой инвариантности графика  $\mathcal{T}$  относительно дифференциального включения  $\widehat{\mathcal{F}}$  формулируется (см. [7, 8]) следующим образом:

$$D_t(\text{gr}\mathcal{T})(t, x, J_1, J_2) \cap \widehat{\mathcal{F}}(t, x) \neq \emptyset \quad (4.2)$$

для всех  $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ ,  $(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t, x)$ . Здесь  $D_t$  обозначает производную многозначного отображения по времени: если  $\mathcal{G} \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{G}[t]$  — сечение множества по времени

$$\mathcal{G}[t] \triangleq \{w \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in \mathcal{G}\},$$

а символ  $d$  обозначает евклидово расстояние от точки до множества, то

$$(D_t\mathcal{G})(t, y) \triangleq \left\{ h \in \mathbb{R}^m : \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{d(y + \delta h; \mathcal{G}[t + \delta])}{\delta} = 0 \right\}.$$

Покажем, что условия (2.2) и (4.2) эквивалентны.

Заметим, что условие (2.2) эквивалентно тому, что для каждой пары  $(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t, x)$

$$\inf_{w \in \mathcal{F}(t, x)} \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma))]}{\delta} = 0.$$

Нижняя грань по  $w$  в формуле

$$\inf_{w \in \mathcal{F}(t,x)} \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma))]}{\delta}$$

достигается для каждой пары  $(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t, x)$ . В самом деле, пусть  $\{w^r\}_{r=1}^\infty$  — минимизирующая последовательность. В силу компактности  $\mathcal{F}(t, x)$  можно считать, что  $w^r \rightarrow w^*$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $w^* \in \mathcal{F}(t, x)$ . Покажем, что

$$\begin{aligned} \tilde{b} &\triangleq \inf_{w \in \mathcal{F}(t,x)} \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma))]}{\delta} \\ &= \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w^* + \gamma))]}{\delta}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В самом деле, для каждого  $r \in \mathbb{N}$ , существуют последовательности  $\{\delta^{r,k}\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{\gamma^{r,k}\}_{k=1}^\infty$  такие, что  $\delta^{r,k}, \|\gamma^{r,k}\| \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$  и

$$\begin{aligned} b^r &\triangleq \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta, t + \delta(w^r + \gamma))]}{\delta} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta^{r,k}, t + \delta^{r,k}(w^r + \gamma^{r,k}))]}{\delta^{r,k}}. \end{aligned}$$

Пусть  $\hat{k}(r)$  — такой номер, что

$$\delta^{r, \hat{k}(r)}, \|\gamma^{r, \hat{k}(r)}\|, \left| \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta^{r, \hat{k}(r)}, t + \delta^{r, \hat{k}(r)}(w^r + \gamma^{r, \hat{k}(r)}))]}{\delta^{r, \hat{k}(r)}} - b^r \right| < 2^{-r}.$$

Положим  $\hat{\delta}^r \triangleq \delta^{r, \hat{k}(r)}$ ,  $\hat{\gamma}^r \triangleq \gamma^{r, \hat{k}(r)} + w^r - w^*$ . Заметим, что  $\hat{\delta}^r, \|\hat{\gamma}^r\| \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ .

Имеем, что

$$\begin{aligned} &\inf_{w \in \mathcal{F}(t,x)} \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma))]}{\delta} \\ &\leq \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w^* + \gamma))]}{\delta} \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \hat{\delta}^r, x + \hat{\delta}^r(w^* + \hat{\gamma}^r))]}{\hat{\delta}^r}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \hat{\delta}^r, x + \hat{\delta}^r(w^* + \hat{\gamma}^r))]}{\hat{\delta}^r} \\ &= \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta^{r, \hat{k}(r)}, x + \delta^{r, \hat{k}(r)}(w^* + \gamma^{r, \hat{k}(r)} + w^r - w^*))]}{\delta^{r, \hat{k}(r)}} \\ &= \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta^{r, \hat{k}(r)}, x + \delta^{r, \hat{k}(r)}(w^k + \gamma^{r, \hat{k}(r)}))]}{\delta^{r, \hat{k}(r)}} \\ &\leq b^r + 2^{-r} \rightarrow \tilde{b}, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Имеем, что в (4.4) правая и левая части равны, это означает, что (4.3) верно.

Таким образом, условие (2.2) эквивалентно тому, что для всех  $(J_1, J_2) \in \mathcal{T}(t, x)$  существует некоторое  $w \in \mathcal{F}(t, x)$  со свойством

$$\liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \frac{\text{dist}[(J_1, J_2), \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma))]}{\delta}$$

$$= \liminf_{\delta \downarrow 0, \gamma \in \mathbb{R}^n, \|\gamma\| \downarrow 0} \inf \left\{ \frac{|\zeta_1 - J_1| + |\zeta_2 - J_2|}{\delta} : (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathcal{T}(t + \delta, x + \delta(w + \gamma)) \right\} = 0. \quad (4.5)$$

Теперь докажем, что это условие эквивалентно условию (4.2).

Предположим вначале, что выполнено условие (4.2). Это означает, что существуют последовательности  $\{\delta^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $\{\gamma^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\{\varepsilon_1^k\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{\varepsilon_2^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  такие, что

- $\delta^k, \|\gamma^k\|, \varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ ;
- $(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k), J_1 + \delta^k \varepsilon_1^k, J_2 + \delta^k \varepsilon_2^k) \in \text{gr}\mathcal{T}$ .

Второе условие можно переформулировать в виде

$$(J_1 + \delta^k \varepsilon_1^k, J_2 + \delta^k \varepsilon_2^k) \in \mathcal{T}(t + \delta^k, t + \delta^k(w + \gamma^k)).$$

Таким образом,

$$\inf \left\{ \frac{|\zeta_1 - J_1| + |\zeta_2 - J_2|}{\delta^k} : (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathcal{T}(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k)) \right\} = \varepsilon_1^k + \varepsilon_2^k.$$

В силу выбора  $\{\varepsilon_1^k\}$ ,  $\{\varepsilon_2^k\}$  получаем, что (4.5) выполняется.

Пусть теперь верно (4.5), докажем, что выполняется (4.2). В самом деле, пусть  $\{\delta^k\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{\gamma^k\}_{k=1}^\infty$  — минимизирующая последовательность. В силу компактности образов  $\mathcal{T}(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k))$  для каждого  $k$  найдутся такие  $\varepsilon_1^k$  и  $\varepsilon_2^k$ , что

$$(J_1 + \delta^k \varepsilon_1^k, J_2 + \delta^k \varepsilon_2^k) \in \mathcal{T}(t, x + \delta^k(w + \gamma^k)).$$

Из (4.5) следует, что  $\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ . Оценим  $d((w + \delta^k w, J_1, J_2), \text{gr}\mathcal{T}[t + \delta^k])$ . В самом деле

$$(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k), J_1 + \delta^k \varepsilon_1^k, J_2 + \delta^k \varepsilon_2^k) \in \text{gr}\mathcal{T}.$$

Отсюда следует, что

$$d((w + \delta^k w, J_1, J_2), \text{gr}\mathcal{T}[t + \delta^k]) \leq \delta^k \sqrt{\|\gamma^k\|^2 + (\varepsilon_1^k)^2 + (\varepsilon_2^k)^2}.$$

Сходимость  $\delta^k, \|\gamma^k\|, \varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k \rightarrow 0$  дает равенство

$$\begin{pmatrix} w \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in D_t(\text{gr}\mathcal{T})(t, x, J_1, J_2).$$

В силу того что  $\widehat{\mathcal{F}}(t, x) = \mathcal{F} \times \{(0, 0)\}$ , заключаем, что (4.2) верно.  $\square$

В заключение мы приведем

**Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 1.** Из (2.4) и условия седловой точки в маленькой игре следует, что

$$\langle \nabla \varphi_1(t, x), f(t, x, u^n, v^n) \rangle \geq \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle \nabla \varphi_1(t, x), f(t, x, u, v) \rangle = H_1(t, x, \nabla \varphi_1(t, x)).$$

Аналогично из (2.5) и условия седловой точки в маленькой игре следует, что

$$\langle \nabla \varphi_2(t, x), f(t, x, u^n, v^n) \rangle \geq \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle \nabla \varphi_2(t, x), f(t, x, u, v) \rangle = H_2(t, x, \nabla \varphi_2(t, x)).$$

Отсюда и из условия (2.6) заключаем, что

$$\frac{\partial \varphi_i(t, x)}{\partial t} + H_i(t, x, \nabla \varphi_i(t, x)) \leq 0, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку функция  $\varphi_i$  дифференцируема, то ее субдифференциал в позиции  $(t, x)$  равен  $\{\partial\varphi_1(t, x)/\partial t, \nabla\varphi_1(t, x)\}$ . Следовательно, функция  $\varphi_1$  является верхним решением уравнения (2.3) при  $i = 1$  (см. [7, условие (U4)]). Аналогично, функция  $\varphi_2$  является верхним решением уравнения (2.3) при  $i = 2$ .

Покажем, что  $d_{abs}(\varphi_1, \varphi_2)(t, x; w) = 0$  для некоторого  $w \in \mathcal{F}(t, x)$ . А именно, для  $w = f(t, x, u^n, v^n)$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} & d_{abs}(\varphi_1, \varphi_2)(t, x; w) \\ &= \liminf_{\delta \downarrow 0, \|\gamma\| \rightarrow 0} \frac{|\varphi_1(t + \delta, x + \delta(w + \gamma)) - \varphi_1(t, x)| + |\varphi_2(t + \delta, x + \delta(w + \gamma)) - \varphi_2(t, x)|}{\delta}. \end{aligned}$$

Пусть  $\{\delta^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $\{\gamma^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$  — минимизирующие последовательности. Тогда

$$\begin{aligned} & d_{abs}(\varphi_1, \varphi_2)(t, x; w) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varphi_1(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k)) - \varphi_1(t, x)| + |\varphi_2(t + \delta^k, x + \delta^k(w + \gamma^k)) - \varphi_2(t, x)|}{\delta^k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta^k} \left[ \left| \frac{\partial\varphi_1(t, x)}{\partial t} \delta^k + \langle \nabla\varphi_1(t, x), \delta^k(w + \gamma^k) \rangle + o(\delta^k) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial\varphi_2(t, x)}{\partial t} \delta^k + \langle \nabla\varphi_2(t, x), \delta^k(w + \gamma^k) \rangle + o(\delta^k) \right| \right] \\ &= \left| \frac{\partial\varphi_1(t, x)}{\partial t} + \langle \nabla\varphi_1(t, x), w \rangle \right| + \left| \frac{\partial\varphi_2(t, x)}{\partial t} + \langle \nabla\varphi_2(t, x), w \rangle \right|. \end{aligned}$$

В силу выбора  $w = f(t, x, u^n, v^n)$  и условия (2.6) имеем, что оба модуля равны 0. Таким образом,  $d_{abs}(\varphi_1, \varphi_2)(t, x; w) = 0$ .  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
3. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 185 с.
4. **Кононенко А.Ф.** О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, вып. 2. С. 285–288.
5. **Чистяков С.В.** О бескоалиционных дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1052–1055.
6. **Basar T., Olsder G.J.** Dynamic noncooperative game theory. London; New York: Academic Press, 1995. 535 p.
7. **Субботин А. И.** Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003. 336 с.
8. **Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N.** Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Probl. Contr. Inform. Theory. 1985. Vol. 14, no. 3. P 155–167.
9. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
10. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 431 с.

Авербух Юрий Владимирович  
канд. физ.-мат. наук  
старший науч. сотрудник  
И-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: ayv@imm.uran.ru

Поступила 28.12.2009

УДК 519.856.2

## ОПТИМАЛЬНЫЕ КАНАЛЫ СВЯЗИ С ШУМОМ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНИВАНИЯ И КОРРЕКЦИИ ДВИЖЕНИЯ<sup>1</sup>

Б. И. Ананьев

Рассматриваются некоторые классы каналов передачи данных с гауссовским шумом, используемые в задачах оценивания и коррекции движения. Необходимость изучения каналов связи с шумом возникает при учете коммуникационных ограничений при решении указанных задач. Предполагается, что объект управления или оценивания находится на значительном удалении от центра управления и обработки информации (ЦУпОИ), где производится оценка его фазового состояния и вырабатывается управляющее воздействие. Объект и ЦУпОИ связаны информационным каналом с шумом и ограничениями на параметры. В каждом направлении при входе в канал информация кодируется, а на выходе декодируется. В указанных классах информационных каналов определяется наилучший канал в среднеквадратичном смысле. В связи с возможной статистической неопределенностью помех, воздействующих на объект, определяются оптимальные минимаксные каналы. Рассмотрено применение оптимальных каналов связи при решении задач оценивания и коррекции движения.

Ключевые слова: оценивание, коррекция движения, программное управление, канал связи, гауссовский шум.

B. I. Anan'ev. Optimal communication channels with noise in problems of estimation and motion correction.

Some classes of data communication channels with Gaussian noise, which can be used in problems of estimation and motion correction, are considered. The necessity to study the communication channels with noise arises under solving the mentioned problems when communication constraints are taken into account. It is assumed that a controlled or estimated object is situated at a considerable distance from the control and information processing center (CIPC), where a phase state of the object is estimated and a control action is formed. The object and the CIPC are connected by the information channel with noise and parameter constraints. Information is encoded at the channel entrance in each direction; it is decoded at the exit. In the specified classes of information channels, the best channel is determined in the mean-square sense. Because of the possible statistical uncertainty of disturbances acting on the object, optimal minimax channels are determined. An application of the optimal communication channels to above problems of estimation and motion correction is considered.

Keywords: estimation, motion correction, program control, communication channel, Gaussian noise.

### Введение

В некоторых задачах оценивания и коррекции движения [1–4] при коммуникационных ограничениях рассматривается случайный процесс вида  $\mathbf{z}_t = Lq_t + z_t$ , где  $L$  — постоянная матрица размера  $n \times M$ , а составляющие  $q_t$  и  $z_t$  подчиняются дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{q}_t &= \mathbf{A}_t q_t + \mathbf{v}_t, & q_0 &\in \mathbf{M}, & \mathbf{v}_t &\in \mathbf{V}_t, \\ dz_t &= A_t z_t dt + d\Xi_t, & t &\in [0, T], & z_0 &\sim N(0, \gamma). \end{aligned} \quad (0.1)$$

Здесь  $\mathbf{A}_t$ ,  $A_t$  — матричные функции соответствующих размерностей;  $\Xi_t$  — винеровский процесс с  $\text{cov}(d\Xi, d\Xi) = \mathbf{R}_t dt$ ;  $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^M$  и  $\mathbf{V}_t \subset \mathbb{R}^M$  — заданные выпуклые и компактные множества;  $N(\bar{x}, \gamma)$  — гауссовское распределение с параметрами  $\bar{x}$ ,  $\gamma$ ;  $\mathbf{v}_t$  — детерминированное возмущение. Для системы (0.1) требуется как можно точнее передать в центр управления и обработки информации (ЦУпОИ) вектор  $\mathbf{z}_t \in \mathbb{R}^n$  по каналу с шумом, не зависящим от  $\Xi_t$ , с целью уточнения фазового состояния объекта или выработки в ЦУпОИ управляющего воздействия с последующей его передачей обратно на объект.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00341, 10-01-00672) и программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

При передаче информации по каналу связи может использоваться класс *кодирующих устройств* вида

$$d\theta_t = A_t^0(\theta)dt + B_t(\theta)(\mathbf{C}_t \mathbf{z}_t dt + d\zeta_t), \quad \theta_0 = 0, \quad \mathbf{C}_t = (\lambda_t(\theta)\gamma_t^-)^{1/2}, \quad (0.2)$$

где  $\theta_t \in \mathbb{R}^n$ ;  $A^0$ ,  $B$  и  $\lambda \geq 0$  — неупреждающие функционалы;  $\det B_t \neq 0$ ;  $\zeta_t$  — стандартный винеровский процесс, не зависящий от  $\Xi_t$ ;  $\gamma^-$  — псевдообратная матрица. Матричная функция  $\gamma_t$  удовлетворяет уравнению Риккати

$$\dot{\gamma}_t = A_t \gamma_t + \gamma_t A_t' + \mathbf{R}_t - \gamma_t \mathbf{C}_t' \mathbf{C}_t \gamma_t, \quad \gamma_0 = \gamma, \quad (0.3)$$

где символ  $'$  означает транспонирование. Параметры кодирующего устройства должны подчиняться энергетическим ограничениям

$$\mathbb{E} \|B_t^{-1} A_t^0(\theta) + \mathbf{C}_t \mathbf{z}_t\|^2 \leq \mathbb{P}, \quad t \in [0, T], \quad (0.4)$$

где  $\mathbb{E}$  — математическое ожидание,  $\mathbb{P}$  — заданная константа. Здесь и далее  $\|\cdot\|$  — евклидова норма. Предполагается, что величина  $\theta_t$  измеряется в ЦУПОИ на выходе канала связи. Отметим, что одномерные кодирующие устройства вида (0.2)–(0.4) рассматривались в [5]. Здесь мы обобщаем ряд результатов из указанной книги и адаптируем их для наших задач в случае многомерных систем вида (0.1), (0.2). Далее оптимальные каналы связи применяются для решения некоторых задач оценивания и коррекции движения. Отметим, что восстановление входных сигналов при детерминированных коммуникационных ограничениях рассмотрено в работе [6].

## 1. Взаимная информация процессов и пропускная способность $n$ -векторного гауссовского канала связи

Пусть все случайные величины заданы на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Через  $(C_T^n, \mathcal{B}_T^n)$  обозначим пространство непрерывных  $n$ -мерных функций на отрезке  $[0, T]$  с борелевской  $\sigma$ -алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами. На указанном пространстве определены вероятностные меры  $\mu_{\mathbf{z}}$ ,  $\mu_{\theta}$ ,  $\mu_{\mathbf{z},\theta}$ , порожденные соответствующими процессами  $\mathbf{z}_t$ ,  $\theta_t$ . В данном разделе предполагаем, что  $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_t\}$  — произвольный случайный процесс в измеримом фазовом пространстве  $(C_T^m, \mathcal{B}_T^m)$ , причем размерность  $m$  может не совпадать с  $n$ . Согласно [5; 7, с. 41] *взаимная информация* между процессами  $\mathbf{z}$  и  $\theta$  определяется формулой

$$\mathbf{I}_T(\mathbf{z}, \theta) = \int_{C_T^m \times C_T^n} \left( \log \frac{d\mu_{\mathbf{z},\theta}}{d(\mu_{\mathbf{z}} \times \mu_{\theta})}(\mathbf{z}, \theta) \right) \mu_{\mathbf{z},\theta}(d\mathbf{z}, d\theta), \quad (1.1)$$

причем полагается  $\mathbf{I}_T(\mathbf{z}, \theta) = +\infty$ , если мера  $\mu_{\mathbf{z},\theta}$  не является абсолютно непрерывной относительно меры  $\mu_{\mathbf{z}} \times \mu_{\theta}$ .

Рассмотрим более общее, чем (0.2), кодирующее устройство в  $\mathbb{R}^n$

$$d\theta_t = A_t(\mathbf{z}, \theta)dt + B_t(\theta)d\zeta_t, \quad \theta_0 = 0, \quad (1.2)$$

где  $\zeta_t$  — стандартный винеровский процесс в  $\mathbb{R}^n$ , не зависящий от  $\mathbf{z}_t$ . Предполагается выполнение следующих условий:

1. Вектор  $A_t$  и матрица  $B_t$  являются неупреждающими функционалами, т. е. зависят при каждом  $t$  от элементов  $\mathbf{z}_s$ ,  $\theta_s$ , где  $s \in [0, t]$ .

2. Уравнение (1.2) имеет единственное сильное решение, т. е. при каждом  $t$  функция  $\theta_t$  является  $\mathcal{F}_t^{\mathbf{z},\zeta}$ -измеримой. Здесь и далее символ типа  $\mathcal{F}_t^{\mathbf{z},\zeta}$  используется для обозначения  $\sigma$ -подалгебры в  $\mathcal{F}$ , порожденной процессами  $\mathbf{z}$ ,  $\zeta$ , рассматриваемыми на  $[0, t]$ .

3. Для любых элементов  $x, \tilde{x} \in C_T^n$

$$\|B_t(x) - B_t(\tilde{x})\|^2 \leq L_1 \int_0^t \|x_s - \tilde{x}_s\|^2 dK(s) + L_2 \|x_t - \tilde{x}_t\|^2,$$

$$\|B_t(x)\|^2 \leq L_1 \int_0^t (1 + \|x_s\|^2) dK(s) + L_2 (1 + \|x_t\|^2), \quad B_t(x)B_t'(x) > 0,$$

где  $K(s)$  — неубывающая непрерывная справа функция;  $0 \leq K(s) \leq 1$ ;  $C, L_1, L_2$  — константы.

4. Интеграл

$$\int_0^T \mathbb{E} \|B_t^{-1}(\theta) A_t(\mathbf{z}, \theta)\|^2 dt$$

конечен.

Приведем теорему [5, с. 624] о вычислении взаимной информации  $\mathbf{I}_T(\mathbf{z}, \theta)$ , (1.1) между процессами  $\mathbf{z}$  и  $\theta$  для уравнения (1.2). Отметим, что эта теорема приведена в упомянутой книге для скалярного случая. Однако доказательство более общего векторного случая получается по той же схеме.

**Теорема 1.1.** Пусть выполнены условия 1–4. Тогда

$$\mathbf{I}_T(\mathbf{z}, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^T \mathbb{E} \left( \|B_t^{-1}(\theta) A_t(\mathbf{z}, \theta)\|^2 - \|B_t^{-1}(\theta) \bar{A}_t(\theta)\|^2 \right) dt,$$

где  $\bar{A}_t(\theta) = \mathbb{E}(A_t(\mathbf{z}, \theta) | \mathcal{F}_t^\theta)$ .

Примем, что энергетические возможности передающего устройства характеризуются неравенством

$$\int_0^T \mathbb{E} \|B_t^{-1}(\theta) A_t(\mathbf{z}, \theta)\|^2 \leq \mathbb{P}T. \quad (1.3)$$

При ограничении (1.3) пропускная способность  $n$ -векторного канала связи определяется формулой

$$\mathbb{C} = \sup \frac{1}{T} \mathbf{I}_T(\mathbf{z}, \theta),$$

где верхняя грань берется по всем сообщениям  $\mathbf{z}$  произвольной размерности  $m$  и всевозможным неупреждающим функционалам  $A_t(\mathbf{z}, \theta)$  и  $B_t(\theta)$ , удовлетворяющим условиям 1–4. Присутствие процесса  $\theta$  в качестве аргумента означает наличие обратной связи в кодирующем устройстве. Однако использование функционалов  $A_t(\mathbf{z})$  и  $B_t$  без обратной связи при подсчете  $\mathbb{C}$  не уменьшает этой величины. Действительно, из теоремы 1.1 и формулы (1.3) следует неравенство  $\mathbb{C} \leq \mathbb{P}/2$ . С другой стороны, можно привести нижеследующий пример.

Рассмотрим  $n$ -мерный случайный процесс  $x_t^\alpha$ , подчиненный уравнению

$$dx_t^\alpha = -\alpha x_t^\alpha dt + \sqrt{\frac{2\alpha\mathbb{P}}{n}} d\xi_t,$$

где  $\mathbb{E}x_0^\alpha = 0$ ,  $\text{cov}(x_0^\alpha, x_0^\alpha) = \mathbb{P}I_n/n$  и  $\xi_t$  — стандартный  $n$ -мерный винеровский процесс, а также  $n$ -мерное кодирующее устройство вида

$$d\theta_t = x_t^\alpha dt + d\zeta_t, \quad \theta_0 = 0,$$

где стандартный  $n$ -мерный винеровский процесс  $\zeta_t$  не зависит от  $\xi_t$ . Из теоремы 1.1 следует равенство

$$\mathbf{I}_T(x, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^T \mathbb{E} (\|x_t^\alpha\|^2 - \|\bar{x}_t^\alpha\|^2) dt.$$

Несложно подсчитать, что  $\mathbb{E}\|x_t^\alpha\|^2 = \text{tr cov}(x_t^\alpha, x_t^\alpha)$ , где  $\text{cov}(x_t^\alpha, x_t^\alpha) \equiv \mathbb{P}I_n/n$ ,  $\text{tr}$  — след матрицы. Кроме того, выполняется уравнение фильтрации

$$d\bar{x}_t^\alpha = -\alpha\bar{x}_t^\alpha + \gamma_t(d\theta_t - \bar{x}_t^\alpha dt), \quad \bar{x}_0^\alpha = 0,$$

где  $\gamma_t = \text{cov}(x_t^\alpha, x_t^\alpha | \mathcal{F}_t^\theta) \leq \mathbb{P}I_n/n$ . Из теории Калмана — Бьюси следует, что процесс  $\bar{\xi}_t$ , для которого  $d\bar{\xi}_t = d\theta_t - \bar{x}_t^\alpha dt$ , является стандартным  $n$ -мерным винеровским процессом. Следовательно,

$$\bar{x}_t^\alpha = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \gamma_s d\bar{\xi}_s.$$

Отсюда

$$\mathbb{E}\|\bar{x}_t^\alpha\|^2 = \text{tr cov}(\bar{x}_t^\alpha, \bar{x}_t^\alpha) = \text{tr} \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} \gamma_s^2 ds \leq \mathbb{P}^2(1 - e^{-2\alpha t})/(2\alpha n).$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow \infty$ , приходим к равенству  $\mathbb{C} = \mathbb{P}/2$ . Итак, справедлива

**Теорема 1.2.** Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда пропускная способность  $\mathbb{C} = \mathbb{P}/2$   $n$ -векторного канала с обратной связью совпадает с пропускной способностью канала без обратной связи.

## 2. Оптимальное кодирование и декодирование при передаче гауссовского сигнала по $n$ -векторному каналу связи

Пусть вначале передаваемый сигнал является постоянной  $n$ -мерной случайной величиной  $x \sim N(\bar{x}, \gamma)$ , причем параметры  $\bar{x}$ ,  $\gamma$  известны. Кодирование осуществляется согласно уравнению

$$d\theta_t = A_t^0(\theta)dt + B_t(\theta)(\mathbf{C}_t x dt + d\zeta_t), \quad \theta_0 = 0, \quad \mathbf{C}_t = (\lambda_t(\theta)\gamma_t^-)^{1/2}, \quad (2.1)$$

аналогичному (0.2), где матрица  $\gamma_t$  определяется из уравнения  $\dot{\gamma}_t = -\lambda_t(\theta)\gamma_t$ ,  $\gamma_0 = \gamma$ , и, следовательно, равна

$$\gamma_t = \gamma \exp\left(-\int_0^t \lambda_s(\theta) ds\right). \quad (2.2)$$

Будем считать, что условия 1–4 предыдущего раздела выполнены и декодирование в момент  $t$  представляет собой неупреждающий функционал  $\hat{x}_t(\theta)$  от процесса  $\theta$ . Определим величину

$$\Delta_t = \inf \mathbb{E}\|x - \hat{x}_t(\theta)\|^2, \quad t \in [0, T],$$

где нижняя грань берется по всем коэффициентам кодирования  $A_\bullet^0$ ,  $B_\bullet$ ,  $\lambda_\bullet$  и декодированиям  $\hat{x}_t(\theta)$ . В силу неравенства  $\mathbb{E}\|x - \hat{x}_t(\theta)\|^2 \geq \mathbb{E}\|x - m_t(\theta)\|^2$ , где  $m_t(\theta) = \mathbb{E}(x | \mathcal{F}_t^\theta)$ , достаточно искать только оптимальное кодирование, и

$$\Delta_t = \inf_{A_\bullet^0, B_\bullet, \lambda_\bullet} \mathbb{E}\|x - m_t(\theta)\|^2. \quad (2.3)$$

Величина  $m_t(\theta)$  определяется из уравнения фильтрации

$$dm_t = \gamma_t \mathbf{C}_t B_t^{-1} (d\theta_t - A_t^0 dt - B_t \mathbf{C}_t m_t dt), \quad m_0 = \bar{x},$$

где  $\gamma_t = \text{cov}(x, x | \mathcal{F}_t^\theta)$  задается равенством (2.2). Теперь если при каждом  $t$  имеются энергетические ограничения

$$\int_0^t \mathbb{E} \|B_s^{-1} A_s^0 + \mathbf{C}_s x\|^2 ds \leq \mathbb{P}t, \quad (2.4)$$

то левая часть неравенства (2.4) есть сумма двух интегралов:  $\int_0^t \mathbb{E} \|B_s^{-1} A_s^0 + \mathbf{C}_s m_s\|^2 ds + \int_0^t \mathbb{E} \|\mathbf{C}_s(x - m_s)\|^2 ds$ . Отсюда с использованием (2.2) получаем

$$\int_0^t \mathbb{E} \|\mathbf{C}_s(x - m_s)\|^2 ds = \text{rank } \gamma \cdot \int_0^t \mathbb{E} \lambda_s(\theta) ds \leq \mathbb{P}t. \quad (2.5)$$

Отметим, что это неравенство превращается в равенство при  $\lambda_s \equiv \bar{\lambda} = \mathbb{P}/\text{rank } \gamma$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|x - m_t(\theta)\|^2 &= \text{tr } \mathbb{E} \gamma_t = \text{tr } \gamma \cdot \mathbb{E} \exp \left( - \int_0^t \lambda_s(\theta) ds \right) \\ &\geq \text{tr } \gamma \cdot \exp \left( - \mathbb{E} \int_0^t \lambda_s(\theta) ds \right) \geq \text{tr } \gamma \cdot \exp(-\bar{\lambda}t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь использовано неравенство Иенсена для выпуклых функций и (2.5). Неравенство (2.6) также превращается в равенство при  $\lambda_s \equiv \bar{\lambda}$ . Положим  $B_s^{-1} A_s^0 = -\mathbf{C}_s m_s$ . Тогда при  $\lambda_s \equiv \bar{\lambda}$  энергетические ограничения (2.4) превращаются в равенство. Итак, справедлива

**Лемма 2.1.** Уравнение (2.1) при  $A_t^0 = -B_t \mathbf{C}_t m_t$ ,  $\lambda_s \equiv \bar{\lambda} = \mathbb{P}/\text{rank } \gamma$  обеспечивает оптимальное кодирование в среднеквадратичном смысле при передаче постоянного гауссовского сигнала в классе (2.1), (2.2) при ограничении (2.4). При этом ошибка воспроизведения  $\Delta_t$  (см. (2.3)) равна  $\text{tr } \gamma \cdot \exp(-\bar{\lambda}t)$ , а энергетические неравенства (2.4) превращаются в равенства при всех  $t \in [0, T]$ . Сказанное справедливо при любой матрице  $B_t(\theta)$  с условием  $\det B_t(\theta) \neq 0$ . Оптимальное декодирование  $\bar{m}_t$  определяется из уравнений

$$\begin{aligned} d\bar{m}_t &= (\bar{\lambda}\gamma)^{1/2} \exp(-\bar{\lambda}t/2) B_t^{-1} d\theta_t, \quad \bar{m}_0 = \bar{x}, \\ d\theta_t &= B_t \left( (\bar{\lambda}\gamma^{-})^{1/2} \exp(\bar{\lambda}t/2) (x - \bar{m}_t) dt + d\zeta_t \right), \quad \theta_0 = 0. \end{aligned}$$

**З а м е ч а н и е 2.1.** Рассмотрим класс кодирующих устройств (2.1), (2.2), не использующих обратную связь. Иначе говоря, считаем, что функционалы  $A_t^0$ ,  $B_t$ ,  $\lambda_t$  зависят только от времени. Нижнюю грань (2.3) обозначим теперь через  $\tilde{\Delta}_t$ . Левая часть неравенства (2.4) есть сумма двух интегралов:  $\int_0^t \mathbb{E} \|B_s^{-1} A_s^0 + \mathbf{C}_s \bar{x}\|^2 ds + \int_0^t \mathbb{E} \|\mathbf{C}_s(x - \bar{x})\|^2 ds$ . С использованием (2.2) получаем

$$\int_0^t \mathbb{E} \|\mathbf{C}_s(x - \bar{x})\|^2 ds = \text{rank } \gamma \cdot \int_0^t \lambda_s \exp \left( \int_0^s \lambda_u du \right) ds \leq \mathbb{P}t.$$

Отсюда следует  $\exp \left( - \int_0^t \lambda_s ds \right) \geq \text{rank } \gamma / (\text{rank } \gamma + \mathbb{P}t)$ . Это неравенство и предыдущее превращаются в равенства при  $\lambda_s \equiv \tilde{\lambda}_s = \mathbb{P}/(\text{rank } \gamma + \mathbb{P}s)$ . С другой стороны,

$$\mathbb{E} \|x - m_t(\theta)\|^2 = \text{tr } \gamma_t = \text{tr } \gamma \cdot \exp \left( - \int_0^t \lambda_s ds \right) \geq \text{tr } \gamma \cdot \text{rank } \gamma / (\text{rank } \gamma + \mathbb{P}t) = \tilde{\Delta}_t.$$

Равенство здесь достигается при  $\lambda_s \equiv \tilde{\lambda}_s$ . При этом для оптимального кодирования следует полагать  $A_t^0 = -B_t \mathbf{C}_t \bar{x}$ . Итак, мы получили, что ошибка  $\tilde{\Delta}_t$  воспроизведения сигнала без использования обратной связи строго больше  $\Delta_t$ .

**З а м е ч а н и е 2.2.** Покажем, что найденное в лемме 2.1 кодирование, помимо оптимальности в среднеквадратичном смысле, дает также максимальную информацию  $\mathbf{I}_t(x, \theta)$  об  $x$  в принимаемом сообщении  $\theta_0^t = \{\theta_s : s \leq t\}$  в классе всех кодирований (2.1) при ограничении (2.4). При этом  $\mathbf{I}_t(x, \theta) = \mathbb{P}t/2$ . Действительно, в силу теоремы 1.1 и ограничения (1.3) имеем  $\mathbf{I}_t(x, \theta) \leq \mathbb{P}t/2$ . С другой стороны, возьмем  $A_t^0 = -B_t \mathbf{C}_t m_t$ ,  $\lambda_s \equiv \bar{\lambda}$ , как в лемме 2.1. В данном случае в силу (2.4), (2.5) получаем равенство взаимной информации величине  $\mathbb{P}t/2$ .

Перейдем теперь к общему случаю из введения, считая, что параметры  $q_0$ ,  $\gamma$  и  $\mathbf{v}_t$  известны как на объекте, так и в ЦУПОИ. Пусть так же, как и выше,

$$\Delta_t = \inf \mathbf{E} \|\mathbf{z}_t - \hat{\mathbf{z}}_t(\theta)\|^2, \quad t \in [0, T],$$

где нижняя грань берется по всем коэффициентам кодирования  $A_\bullet^0$ ,  $B_\bullet$ ,  $\lambda_\bullet$  и декодированиям  $\hat{\mathbf{z}}_t(\theta)$ . Ясно, что

$$\Delta_t = \inf_{A_\bullet^0, B_\bullet, \lambda_\bullet} \mathbf{E} \|\mathbf{z}_t - Lq_t - m_t(\theta)\|^2 = \inf_{\lambda_\bullet} \text{tr} \mathbf{E} \gamma_t, \quad (2.7)$$

где  $m_t(\theta) = \mathbf{E}(z_t | \mathcal{F}_t^\theta)$  и  $\gamma_t = \text{cov}(z_t, z_t | \mathcal{F}_t^\theta)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} dm_t &= A_t m_t dt + \gamma_t \mathbf{C}_t' B_t^{-1} (d\theta_t - (A_t^0 + B_t \mathbf{C}_t (m_t + Lq_t)) dt), \quad m_0 = 0, \\ \dot{\gamma}_t &= A_t \gamma_t + \gamma_t A_t' + \mathbf{R}_t - \lambda_t \gamma_t, \quad \gamma_0 = \gamma. \end{aligned}$$

Последнее уравнение, совпадающее с (0.3), имеет явное решение

$$\gamma_t = X(t, 0) \gamma X(t, 0)' \exp \left( - \int_0^t \lambda_u(\theta) du \right) + \int_0^t X(t, s) \mathbf{R}_s X(t, s)' \exp \left( - \int_s^t \lambda_u(\theta) du \right) ds. \quad (2.8)$$

Здесь и далее  $X(t, s)$  — фундаментальная матрица однородного уравнения  $\dot{z}_t = A_t z_t$ . Левая часть неравенства (0.4) представима в виде суммы  $\mathbf{E} \|B_t^{-1} A_t^0 + \mathbf{C}_t (m_t + Lq_t)\|^2 + \mathbf{E} \|\mathbf{C}_t (z_t - m_t)\|^2$ . Отсюда следует неравенство

$$\mathbf{E} \|\mathbf{C}_t (z_t - m_t)\|^2 = \mathbf{E} (\lambda_t(\theta) \cdot \text{rank} \gamma_t) \leq \mathbb{P}. \quad (2.9)$$

Нетрудно проверить, что величина  $\text{rank} \gamma_t$  является целочисленной неслучайной функцией, совпадающей с  $\text{rank} \beta_t$ , где матрица  $\beta_t$  служит решением уравнения

$$\dot{\beta}_t = A_t \beta_t + \beta_t A_t' + \mathbf{R}_t, \quad \beta_0 = \gamma. \quad (2.10)$$

Следовательно, из (2.8)–(2.10) вытекает неравенство

$$\mathbf{E} \lambda_t(\theta) \leq \mathbb{P} / \text{rank} \beta_t = \bar{\lambda}_t. \quad (2.11)$$

В силу неравенства Иенсена находим  $\mathbf{E} \exp \left( - \int_s^t \lambda_u(\theta) du \right) \geq \exp \left( - \int_s^t \bar{\lambda}_u du \right)$ . Таким образом, с учетом (2.7), (2.8) приходим к выводу.

**Теорема 2.1.** Уравнение (0.2) при  $A_t^0 = -B_t \mathbf{C}_t (m_t + Lq_t)$ ,  $\lambda_t \equiv \bar{\lambda}_t = \mathbb{P} / \text{rank} \beta_t$  обеспечивает оптимальное кодирование в среднеквадратичном смысле при передаче сигнала  $\mathbf{z}_t$ , формируемого уравнениями (0.1), в классе кодирующих устройств вида (0.2), (0.3) при ограничениях (0.4). При этом ошибка воспроизведения  $\Delta_t$  (см. (2.7)) равна  $\text{tr} \bar{\gamma}_t$ , где матрица  $\bar{\gamma}_t$  определяется уравнением

$$\dot{\bar{\gamma}}_t = A_t \bar{\gamma}_t + \bar{\gamma}_t A_t' + \mathbf{R}_t - \bar{\lambda}_t \bar{\gamma}_t, \quad \bar{\gamma}_0 = \gamma,$$

а энергетические неравенства (0.4) превращаются в равенства при всех  $t \in [0, T]$ . Сказанное справедливо при любой матрице  $B_t(\theta)$  с условием  $\det B_t(\theta) \neq 0$ . Оптимальное декодирование  $\bar{\mathbf{z}}_t = Lq_t + \bar{m}_t$  находится из уравнений

$$\begin{aligned} d\bar{m}_t &= A_t \bar{m}_t dt + (\bar{\lambda}_t \bar{\gamma}_t)^{1/2} B_t^{-1} d\theta_t, \quad \bar{m}_0 = 0, \\ d\theta_t &= B_t \left( (\bar{\lambda}_t \bar{\gamma}_t)^{1/2} (z_t - \bar{m}_t) dt + d\zeta_t \right), \quad \theta_0 = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что при  $A_t \equiv 0$ ,  $\mathbf{R}_t \equiv 0$  заключение теоремы 2.1 совпадает с выводом леммы 2.1, хотя ограничения (2.4) являются интегральными, а (0.4) — мгновенными.

Обсудим вопрос об оптимальности канала связи вида (0.2)–(0.4) в случае, когда функционалы  $A_t^0$ ,  $B_t$ ,  $\lambda_t$  зависят только от времени. Нижнюю грань (2.7) обозначим через  $\tilde{\Delta}_t$ . Левую часть неравенства (0.4) представим в виде суммы  $\|B_t^{-1} A_t^0 + \mathbf{C}_t Lq_t\|^2 + \mathbb{E} \|\mathbf{C}_t z_t\|^2$ . Отсюда получим

$$\mathbb{E} \|\mathbf{C}_t z_t\|^2 = \lambda_t \text{tr}(\beta_t \gamma_t^-) \leq \mathbb{P},$$

где  $\beta_t$  — матрица, определяемая из (2.10). В силу представления типа (2.8) ясно, что нижняя грань в (2.7) достигается в случае равенства  $\lambda_t \text{tr}(\beta_t \gamma_t^-) = \mathbb{P}$ . Для решения этого уравнения введем функцию  $\mu_t = \exp\left(\int_0^t \lambda_u du\right)$ ,  $\mu_0 = 1$ . Через эту функцию выразим  $\lambda_t = \dot{\mu}_t / \mu_t$ . Далее получаем  $\lambda_t \text{tr}(\beta_t \gamma_t^-) = \dot{\mu}_t \text{tr}(\beta_t \Gamma_t^-(\mu))$ , где  $\Gamma_t(\mu)$  можно найти из уравнения

$$\dot{\Gamma}_t(\mu) = A_t \Gamma_t(\mu) + \Gamma_t(\mu) A_t' + \mu_t \mathbf{R}_t, \quad \Gamma_0(\mu) = \gamma. \quad (2.12)$$

Таким образом, приходим к выводу.

**Лемма 2.2.** Уравнение (0.2) при  $A_t^0 = -B_t \mathbf{C}_t Lq_t$ ,  $\lambda_t \equiv \tilde{\lambda}_t = \dot{\mu}_t / \mu_t$ , обеспечивает оптимальное кодирование в среднеквадратичном смысле при передаче сигнала  $\mathbf{z}_t$ , формируемого уравнениями (0.1), в классе кодирующих устройств без обратной связи вида (0.2), (0.3) при ограничениях (0.4). Здесь  $\mu_t > 1$  есть единственное решение уравнения с последствием

$$\dot{\mu}_t = \mathbb{P} / \text{tr}(\beta_t \Gamma_t^-(\mu)), \quad \mu_0 = 1,$$

где  $\Gamma_t(\mu)$  определяется (2.12). При этом ошибка воспроизведения  $\tilde{\Delta}_t$  (см. (2.7)) равна  $\text{tr} \tilde{\gamma}_t$ , где матрица  $\tilde{\gamma}_t$  определяется равенством (2.8) при  $\lambda_u \equiv \tilde{\lambda}_u$ . Сказанное справедливо при любой матрице  $B_t$  с условием  $\det B_t \neq 0$ . В силу того что  $\beta_t \geq \gamma_t$  при всяком  $\lambda_t \geq 0$ , справедливо неравенство  $\tilde{\Delta}_t \geq \Delta_t$ . На самом деле это неравенство строгое при всех  $t \in (0, T]$ .

**З а м е ч а н и е 2.3.** Найденное в теореме 2.1 кодирование, помимо оптимальности в среднеквадратичном смысле, дает также максимальную информацию  $\mathbf{I}_t(\mathbf{z}, \theta)$  о процессе  $\mathbf{z}_0^t$  в принятом сообщении  $\theta_0^t = \{\theta_s : s \leq t\}$  в классе кодирований (0.2)–(0.4). При этом  $\mathbf{I}_t(\mathbf{z}, \theta) = \mathbb{P}t/2$ . Действительно, в силу теоремы 1.1 и ограничения (0.4) имеем  $\mathbf{I}_t(\mathbf{z}, \theta) \leq \mathbb{P}t/2$ . С другой стороны, возьмем  $A_t^0 = -B_t \mathbf{C}_t (m_t + Lq_t)$ ,  $\lambda_t \equiv \bar{\lambda}_t = \mathbb{P} / \text{rank} \beta_t$ , как в теореме 2.1. В данном случае в силу (0.4), (2.9) получаем равенство взаимной информации величине  $\mathbb{P}t/2$ .

### 3. Дискретные $n$ -векторные гауссовские каналы связи

Предположим, что канал связи может передавать информацию с заданным дискретом времени  $\Delta > 0$ . В соответствии с этим преобразуем систему (0.1) в дискретную. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} X_i^\Delta &= X(i\Delta, (i-1)\Delta), \quad \mathbf{X}_i^\Delta = \mathbf{X}(i\Delta, (i-1)\Delta), \\ \mathbf{V}_i^\Delta &= \left\{ \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mathbf{X}(i\Delta, s) \mathbf{v}_s ds : \mathbf{v}_s \in \mathbf{V}_s \right\} \subset \mathbb{R}^M, \quad \Xi_i = \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} X(i\Delta, s) d\Xi_s, \quad q_i = q_{i\Delta}, \quad z_i = z_{i\Delta}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{X}(t, s)$  — фундаментальная матрица однородного уравнения  $\dot{q}_t = \mathbf{A}_t q_t$ . Тогда вместо (0.1) будем иметь дискретную систему

$$\begin{aligned} q_i &= \mathbf{X}_i^\Delta q_{i-1} + \mathbf{v}_i, \quad q_0 \in \mathbf{M}, \quad \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i^\Delta, \\ z_i &= X_i^\Delta z_{i-1} + \Xi_i, \quad i = 1, \dots, n_1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $n_1 \Delta = T$ ,  $\Xi_i \sim N(0, \mathbf{R}_i)$ ,  $\mathbf{R}_i = \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} X(i\Delta, s) \mathbf{R}_s X(i\Delta, s)' ds$ . При передаче информации по каналу связи может использоваться класс *кодирующих устройств* вида

$$\theta_i = A_i^0(\theta) + B_i(\theta)(\mathbf{C}_i \mathbf{z}_{i-1} + \zeta_i), \quad i = 1, \dots, n_1, \quad \mathbf{C}_i = (\lambda_i(\theta) \gamma_{i-1}^-)^{1/2}, \quad (3.2)$$

где  $\theta_i \in \mathbb{R}^n$ ;  $A^0$ ,  $B$  и  $\lambda \geq 0$  — неупреждающие функционалы, при каждом  $i$  зависящие только от  $\theta_1, \dots, \theta_{i-1}$ ;  $\det B_i \neq 0$ ;  $\zeta_i$  — стандартная последовательность гауссовского “белого шума”, не зависящая от  $\xi_i$ ;  $\gamma^-$  — псевдообратная матрица. Матричная функция  $\gamma_i$  удовлетворяет уравнению Риккати

$$\begin{aligned} \gamma_i &= X_i^\Delta \left( \gamma_{i-1} - \gamma_{i-1} \mathbf{C}_i' (I_n + \mathbf{C}_i \gamma_{i-1} \mathbf{C}_i')^{-1} \mathbf{C}_i \gamma_{i-1} \right) X_i^{\Delta'} + \mathbf{R}_i \\ &= X_i^\Delta \gamma_{i-1} X_i^{\Delta'} / (1 + \lambda_i(\theta)) + \mathbf{R}_i, \quad \gamma_0 = \gamma. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Наряду с (3.2), (3.3) рассматриваются и более общие устройства вида

$$\theta_i = A_i(\mathbf{z}, \theta) + B_i(\theta) \zeta_i, \quad i = 1, \dots, n_1, \quad (3.4)$$

где  $A$ ,  $B$  — неупреждающие функционалы. Предположим, что выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{n_1} \mathbb{E} \|B_i^{-1}(\theta) A_i(\mathbf{z}, \theta)\|^2 < \infty. \quad (3.5)$$

Тогда справедлив следующий аналог теоремы 1.1.

**Теорема 3.1.** *При условии (3.5) взаимная информация произвольного процесса  $\mathbf{z}$  и  $\theta$  из (3.4) за  $k$  шагов*

$$\mathbf{I}_k(\mathbf{z}, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \mathbb{E} \left( \|B_i^{-1}(\theta) A_i(\mathbf{z}, \theta)\|^2 - \|B_i^{-1}(\theta) \bar{A}_i(\theta)\|^2 \right),$$

где  $\bar{A}_i(\theta) = \mathbb{E}(A_i(\mathbf{z}, \theta) | \theta^{i-1})$ .

Примем, что выполняются мгновенные энергетические ограничения

$$\mathbb{E} \|B_i^{-1}(\theta) A_i(\mathbf{z}, \theta)\|^2 \leq \mathbb{P}. \quad (3.6)$$

Подобно тому, как это сделано в разд. 1, проверяется справедливость теоремы 1.2 для канала связи (3.4) при ограничении (3.6). При этом пропускная способность канала определяется как  $\mathbb{C} = \sup \mathbf{I}_{n_1}(\mathbf{z}, \theta) / n_1$ , где верхняя грань берется по всем сигналам и кодированиям (3.4).

Перейдем к определению оптимального кодирования-декодирования при известных параметрах  $q_0$  и  $\mathbf{v}_i$  системы (3.1), (3.2). Введем ошибку воспроизведения сигнала

$$\text{Err}_i = \inf \mathbb{E} \|\mathbf{z}_i - \hat{\mathbf{z}}_i\|^2 = \inf_{A_\bullet^0, B_\bullet, \lambda_\bullet} \mathbb{E} \|\mathbf{z}_i - Lq_i - m_i\|^2 = \inf_{\lambda^i} \text{tr } \mathbb{E} \gamma_i, \quad (3.7)$$

где  $m_i(\theta) = \mathbb{E}(z_i | \theta^i)$  и  $\gamma_i = \text{cov}(z_i, z_i | \theta^i)$  удовлетворяют уравнениям

$$m_i = X_i^\Delta \left( m_{i-1} + \mathbf{K}_{i-1} (\theta_i - A_i^0(\theta) - B_i(\theta) \mathbf{C}_i (m_{i-1} + Lq_{i-1})) \right), \quad m_0 = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{K}_{i-1} = \gamma_{i-1} \mathbf{C}_i' (I_n + \mathbf{C}_i \gamma_{i-1} \mathbf{C}_i')^{-1} B_i^{-1} = (\lambda_i(\theta) \gamma_{i-1})^{1/2} B_i^{-1} / (1 + \lambda_i(\theta))$$

и (3.3) соответственно. Левая часть неравенства (3.6) в случае  $A_i(x, \theta) = A_i^0(\theta) + B_i(\theta) \mathbf{C}_i \mathbf{z}_{i-1}$  представима в виде суммы  $\mathbb{E} \| B_i^{-1} A_i^0 + \mathbf{C}_i (m_{i-1} + Lq_{i-1}) \|^2 + \mathbb{E} \| \mathbf{C}_i (z_{i-1} - m_{i-1}) \|^2$ . Отсюда следует неравенство

$$\mathbb{E} \| \mathbf{C}_{i+1} (z_i - m_i) \|^2 = \mathbb{E} (\lambda_{i+1}(\theta) \cdot \text{rank } \gamma_i) \leq \mathbb{P}, \quad i \geq 0. \quad (3.9)$$

Нетрудно проверить, что величина  $\text{rank } \gamma_i$  является целочисленной неслучайной функцией, совпадающей с  $\text{rank } \beta_i$ , где матрица  $\beta_i$  служит решением уравнения

$$\beta_i = X_i^\Delta \beta_{i-1} X_i^{\Delta'} + \mathbf{R}_i, \quad \beta_0 = \gamma. \quad (3.10)$$

Следовательно, из (3.9), (3.10) вытекает неравенство

$$\mathbb{E} \lambda_i(\theta) \leq \mathbb{P} / \text{rank } \beta_{i-1} = \bar{\lambda}_i, \quad i \geq 1. \quad (3.11)$$

**Лемма 3.1.** *Минимум выражения (3.7) при ограничениях (3.11) достигается в случае  $\lambda_j(\theta) \equiv \bar{\lambda}_j$ ,  $j = 1, \dots, i$ .*

*Доказательство.* Из (3.3) следует представление

$$\gamma_i = \left( \prod_{j=1}^i X_j^{\Delta'} \right)' \gamma \left( \prod_{j=1}^i X_j^{\Delta'} \right) / \prod_{j=1}^i (1 + \lambda_j) + \sum_{k=1}^i \left( \prod_{j=k+1}^i X_j^{\Delta'} \right)' \mathbf{R}_k \left( \prod_{j=k+1}^i X_j^{\Delta'} \right) / \prod_{j=k+1}^i (1 + \lambda_j),$$

где полагается  $\prod_{j=i+1}^i X_j^{\Delta'} = I_n$  и  $\prod_{j=i+1}^i (1 + \lambda_j) = 1$ . В силу неравенства Иенсена и (3.11) имеем

$$\log \mathbb{E} \left( 1 / \prod_{j=k+1}^i (1 + \lambda_j) \right) \geq \mathbb{E} \sum_{j=k+1}^i \log (1 / (1 + \lambda_j)) \geq \sum_{j=k+1}^i \log (1 / (1 + \bar{\lambda}_j)) = \log \left( 1 / \prod_{j=k+1}^i (1 + \bar{\lambda}_j) \right).$$

Следовательно,  $\mathbb{E} \gamma_i \geq \bar{\gamma}_i$ , где  $\bar{\gamma}_i$  определяется уравнением

$$\bar{\gamma}_i = X_i^\Delta \bar{\gamma}_{i-1} X_i^{\Delta'} / (1 + \bar{\lambda}_i) + \mathbf{R}_i, \quad \bar{\gamma}_0 = \gamma.$$

Поэтому утверждение следует из импликации  $A \geq B \Rightarrow \text{tr } A \geq \text{tr } B$  для симметрических матриц.  $\square$

С учетом леммы 3.1 получаем вывод.

**Теорема 3.2.** *Уравнение (3.2) при  $A_i^0 = -B_i \mathbf{C}_i (m_{i-1} + Lq_{i-1})$ ,  $\lambda_i \equiv \bar{\lambda}_i = \mathbb{P} / \text{rank } \beta_{i-1}$ , обеспечивает оптимальное кодирование в среднеквадратичном смысле при передаче сигнала  $\mathbf{z}_i$ , формируемого уравнениями (3.1), в классе кодирующих устройств вида (3.2), (3.3) при ограничениях (3.6) в случае  $A_i(\mathbf{z}, \theta) = A_i^0(\theta) + B_i(\theta) \mathbf{C}_i \mathbf{z}_{i-1}$ . При этом ошибка воспроизведения  $\text{Err}_i$  (см. (3.7)) равна  $\text{tr } \bar{\gamma}_i$ , где матрица  $\bar{\gamma}_t$  определяется уравнением в лемме 3.1, а энергетические неравенства (3.6) превращаются в равенства при всех  $i = 1, \dots, n_1$ . Сказанное справедливо при любой матрице  $B_i(\theta)$  с условием  $\det B_i(\theta) \neq 0$ . Оптимальное декодирование  $\bar{\mathbf{z}}_i = Lq_i + \bar{m}_i$  находится из уравнений*

$$\bar{m}_i = X_i^\Delta (\bar{m}_{i-1} + \bar{\mathbf{K}}_{i-1} \theta_i), \quad \bar{m}_0 = 0,$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{i-1} = (\bar{\lambda}_i \bar{\gamma}_{i-1})^{1/2} B_i^{-1} / (1 + \bar{\lambda}_i); \quad \theta_i = B_i(\theta) \left( (\bar{\lambda}_i \bar{\gamma}_{i-1})^{1/2} (z_{i-1} - \bar{m}_{i-1}) + \zeta_i \right), \quad i = 1, \dots, n_1.$$

Обсудим случай, когда функционалы  $A_i^0$ ,  $B_i$ ,  $\lambda_i$  не зависят от  $\theta$ . Нижнюю грань (3.7) обозначим через  $\widetilde{\text{Erg}}_i$ . Левую часть неравенства (3.6) представим в виде суммы  $\text{E}\|B_i^{-1}A_i^0 + \mathbf{C}_i Lq_{i-1}\|^2 + \text{E}\|\mathbf{C}_i z_{i-1}\|^2$ . Отсюда получаем

$$\text{E}\|\mathbf{C}_{i+1} z_i\|^2 = \lambda_{i+1} \text{tr}(\beta_i \gamma_i^-) \leq \mathbb{P},$$

где  $\beta_i$  — матрица, определяемая из (3.10). В силу представления  $\gamma_i$  в лемме 3.1 ясно, что нижняя грань в (3.7) достигается в случае равенства  $\lambda_{i+1} = \mathbb{P}/\text{tr}(\beta_i \gamma_i^-)$ ,  $i \geq 0$ . Решение последнего уравнения обозначим  $\tilde{\lambda}_i$ . Таким образом, приходим к выводу.

**Лемма 3.2.** *Уравнение (3.2) при  $A_i^0 = -B_i \mathbf{C}_i Lq_{i-1}$ ,  $\lambda_i \equiv \tilde{\lambda}_i$ , обеспечивает оптимальное кодирование в среднеквадратичном смысле при передаче сигнала  $\mathbf{z}_i$ , формируемого уравнениями (3.1), в классе кодирующих устройств без обратной связи вида (3.2), (3.3) при ограничениях (3.6). При этом ошибка воспроизведения  $\widetilde{\text{Erg}}_i$  (см. (3.7)) равна  $\text{tr} \tilde{\gamma}_i$ , где матрица  $\tilde{\gamma}_i$  определяется уравнением (3.3) при  $\lambda_i \equiv \tilde{\lambda}_i$ . Сказанное справедливо при любой матрице  $B_i$  с условием  $\det B_i \neq 0$ . В силу того что  $\beta_i \geq \gamma_i$  при всяком  $\lambda_i \geq 0$ , справедливо неравенство  $\widetilde{\text{Erg}}_i \geq \text{Erg}_i$ . На самом деле это неравенство строгое при всех  $i = 1, \dots, n_1$ .*

**З а м е ч а н и е 3.1.** Найденное в теореме 3.2 кодирование, помимо оптимальности в среднеквадратичном смысле, дает также максимальную информацию  $\mathbf{I}_k(\mathbf{z}, \theta)$  о процессе  $\mathbf{z}^k$  в принимаемом сообщении  $\theta^k$  в классе кодирований (3.2), (3.3). При этом  $\mathbf{I}_k(\mathbf{z}, \theta) = \mathbb{P}k/2$ . Действительно, в силу теоремы 3.1 и ограничения (3.6) имеем  $\mathbf{I}_k(\mathbf{z}, \theta) \leq \mathbb{P}k/2$ . С другой стороны, возьмем  $A_i^0 = -B_i \mathbf{C}_i (m_{i-1} + Lq_{i-1})$ ,  $\lambda_i \equiv \tilde{\lambda}_i = \mathbb{P}/\text{rank} \beta_{i-1}$ , как в теореме 3.2. В данном случае в силу (3.6), (3.9) получаем равенство взаимной информации величине  $\mathbb{P}k/2$ .

#### 4. Минимаксные $n$ -векторные каналы связи

Рассмотрим только дискретные гауссовские каналы. Напомним, что мы предполагаем наличие включений  $q_0 \in \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{v}_t \in \mathbf{V}_t$ . Рассмотрим декодер  $\hat{\mathbf{z}}_i = Lq_i^* + \hat{z}_i$ , зависящий от набора параметров  $q_0^*$ ,  $\mathbf{v}^{*i}$  и определяемый уравнениями

$$\begin{aligned} q_i^* &= \mathbf{X}_i^\Delta q_{i-1}^* + \mathbf{v}_i^*, & q_0^* &\in \mathbf{M}, & \mathbf{v}_i^* &\in \mathbf{V}_i^\Delta, \\ \hat{z}_i &= X_i^\Delta (\hat{z}_{i-1} + \mathbf{K}_{i-1} \theta_i), & \hat{z}_0 &= 0, \\ \theta_i &= B_i (\mathbf{C}_i (\mathbf{z}_{i-1} - \hat{\mathbf{z}}_{i-1}) + \zeta_i), & i &\geq 1, & \mathbf{C}_i &= (\lambda_i(\theta) \gamma_{i-1}^-)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где матрицы  $\gamma_i$  и  $\mathbf{K}_{i-1}$  находятся из (3.3), (3.8). Предположим, что последовательность  $\mathbf{z}_i$  реализуется при некоторых не известных в ЦУПОИ параметрах  $q_0$ ,  $\mathbf{v}^i$ . Здесь и далее символом типа  $\mathbf{v}^i$  будет обозначаться набор параметров  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i\}$ . Обозначив разности  $\text{E}(\mathbf{z}_i | \theta^i, q_0, \mathbf{v}^i) - \hat{\mathbf{z}}_i$  через  $\mathbf{e}_i$ ,  $\text{E}(z_i | \theta^i, q_0, \mathbf{v}^i) - \hat{z}_i$  через  $e_i$ , а  $q_i - q_i^*$  через  $p_i$ , получим уравнения

$$\begin{aligned} e_i &= X_i^\Delta \left( e_{i-1} - \lambda_i \gamma_{i-1} \gamma_{i-1}^- / (1 + \lambda_i) \mathbf{e}_{i-1} \right), & e_0 &= 0; \\ p_i &= \mathbf{X}_i^\Delta p_{i-1} + \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^*, & p_0 &= q_0 - q_0^*; & \mathbf{e}_i &= Lp_i + e_i. \end{aligned}$$

Энергетические ограничения (3.6) здесь примут вид

$$\text{E}\|\mathbf{C}_i (\mathbf{z}_{i-1} - \hat{\mathbf{z}}_{i-1})\|^2 = \text{E} \lambda_i \text{rank} \gamma_{i-1} + \text{E} \lambda_i \mathbf{e}_{i-1}' \gamma_{i-1}^- \mathbf{e}_{i-1} \leq \mathbb{P}. \quad (4.2)$$

Будем рекуррентно подбирать параметры минимаксного декодера так, чтобы

$$\text{tr} \text{E} \gamma_i \rightarrow \min_{\lambda_i}, \quad \sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \text{E} \|\mathbf{e}_i\|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{v}_i^*}, \quad (4.3)$$

при ограничениях

$$\mathbb{E}\lambda_{i+1}\text{rank } \gamma_i + \sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbb{E}\lambda_{i+1} \mathbf{e}'_i \gamma_i^- \mathbf{e}_i \leq \mathbb{P}, \quad i \geq 1. \quad (4.4)$$

В случае  $i = 0$  выберем параметр  $q_0^*$  из решения задачи  $\sup_{q_0} \|Lp_0\|^2 \rightarrow \min_{q_0^*}$  и далее его не меняем. Очевидно, вектор  $Lq_0^*$  определится единственным образом и будет совпадать с чебышевским центром множества  $LM$  [4]. Ограничения типа (4.4) заменяются на

$$\lambda_1 \text{rank } \gamma + \lambda_1 \sup_{q_0} \mathbf{e}'_0 \gamma^- \mathbf{e}_0 \leq \mathbb{P}.$$

Следовательно, на первом шаге находим оптимальные значения параметров

$$\begin{aligned} \bar{q}_0^* &= \underset{q_0^*}{\text{argmin}} \sup_{q_0} \|Lp_0\|^2, \quad \bar{\lambda}_1 = \mathbb{P} / \left( \text{rank } \gamma + \sup_{q_0} \mathbf{e}'_0 \gamma^- \mathbf{e}_0 \right), \\ \bar{\mathbf{v}}_1^* &= \underset{\mathbf{v}_1^*}{\text{argmin}} \sup_{q_0, \mathbf{v}^1} \|\mathbf{e}_1\|^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

На втором шаге параметры (4.5) уже определены. Из (4.4) вытекает неравенство

$$\mathbb{E}\lambda_2 \leq \mathbb{P} / \left( \text{rank } \gamma_1 + \max_{q_0, \mathbf{v}^1} \mathbf{e}'_1 \gamma_1^- \mathbf{e}_1 \right).$$

Отсюда с учетом леммы 3.1 получаем, что величина  $\bar{\lambda}_2$  должна быть детерминированной, совпадающей с правой частью последнего неравенства. Параметр  $\mathbf{v}_2^*$  будет равен

$$\bar{\mathbf{v}}_2^* = \underset{\mathbf{v}_2^*}{\text{argmin}} \max_{q_0, \mathbf{v}^2} \|\mathbf{e}_2\|^2.$$

Продолжая рассуждения по индукции, приходим к выводу.

**Теорема 4.1.** *Параметры минимаксного декодера  $\hat{\mathbf{z}}_i = Lq_i^* + \hat{\mathbf{z}}_i$ , (4.1), доставляющие экстремумы в (4.3), определяются соотношениями (4.5) и*

$$\bar{\mathbf{v}}_i^* = \underset{\mathbf{v}_i^*}{\text{argmin}} \max_{q_0, \mathbf{v}^i} \|\mathbf{e}_i\|^2, \quad \bar{\lambda}_{i+1} = \mathbb{P} / \left( \text{rank } \gamma_i + \max_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbf{e}'_i \gamma_i^- \mathbf{e}_i \right), \quad i \geq 1.$$

*Данные параметры обеспечивают энергетические ограничения (4.2) для всех неизвестных элементов  $q_0, \mathbf{v}^i$  и гарантируют ошибку восстановления сигнала, не превышающую  $\text{Err}_i = \sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbb{E}\|\mathbf{z}_i - \hat{\mathbf{z}}_i\|^2 = \sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \|\bar{\mathbf{e}}_i\|^2 + \text{tr } \bar{\gamma}_i$  на  $i$ -м шаге.*

**З а м е ч а н и е 4.1.** В случае неоднозначности определения параметров  $\bar{\mathbf{v}}_i^*, \bar{q}_0^*$  выбираем их значения с минимальной нормой.

Считая, что  $\lambda_i$  — неслучайный параметр декодера, предложим другой способ формирования параметров. А именно, будем рекуррентно решать минимаксную задачу

$$\sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbb{E}\|\mathbf{z}_i - \hat{\mathbf{z}}_i\|^2 = \sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \|\mathbf{e}_i\|^2 + \text{tr } \gamma_i \rightarrow \min_{\mathbf{v}_i^*, \lambda_i}, \quad i \geq 1, \quad (4.6)$$

при энергетических ограничениях

$$\lambda_{i+1} \leq \mathbb{P} / \left( \text{rank } \gamma_i + \max_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbf{e}'_i \gamma_i^- \mathbf{e}_i \right), \quad i \geq 0. \quad (4.7)$$

При этом на первом шаге используем параметр  $\bar{q}_0^*$ , совпадающий с найденным в (4.5). На последующих шагах в правую часть неравенства (4.7) подставляются значения  $\mathbf{v}_i^*, \lambda_i$ , найденные из решения задачи (4.6) на предыдущем шаге. Эти значения, вообще говоря, могут отличаться от указанных в теореме 4.1.

## 5. Применение оптимальных $n$ -векторных каналов связи в некоторых задачах оценивания и коррекции движения

В задачах, рассмотренных в [1–3], исследуется случайный процесс, подчиненный уравнению

$$dx_t = (A_t x_t + v_t)dt + d\xi_t, \quad x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0), \quad v_t \in V_t, \quad \text{cov}(d\xi, d\xi) = Q_t dt, \quad (5.1)$$

для которого измеряемый сигнал имеет вид

$$dy_t = (C_t x_t + w_t)dt + d\eta_t, \quad y_0 = 0, \quad w_t \in W_t, \quad \text{cov}(d\eta, d\eta) = R_t dt, \quad R_t > 0, \quad (5.2)$$

где  $x_t \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_t \in \mathbb{R}^n$ ;  $\xi_t$ ,  $\eta_t$  — винеровские процессы;  $v_t$ ,  $w_t$  — детерминированные возмущения;  $\bar{x}_0 \in \mathcal{M}$ ;  $V_t$ ,  $W_t$  и  $\mathcal{M}$  — заданные выпуклые и компактные множества. Однако сигнал из (5.2) измеряется только на объекте. Поэтому для уточнения положения объекта и управления им из ЦУПОИ следует передать доступную информацию по каналу связи.

Положим  $\mathbf{A}_t = [0_n, C_t; 0_{m \times n}, A_t]$ ,  $\mathbf{v}_t = [w_t; v_t]$ ,  $q_0 = [0; \bar{x}_0]$ ,  $M = n + m$ ,  $\mathbf{M} = [0; \mathcal{M}]$ ,  $\mathbf{V}_t = [W_t; V_t]$ . Здесь и далее символ  $[y; x]$  означает вектор-столбец, составленный из столбцов  $y$  и  $x$ , или множество подобных векторов. Символ типа  $[A, B; C, D]$  используется для обозначения блочной матрицы. Пусть  $q_t$  удовлетворяет первому уравнению в (0.1). В случае  $P_0 = 0$ ,  $Q_t \equiv 0$ , получаем ситуацию из введения. В общем случае уравнений (5.1), (5.2) передаваемая величина  $y_t = L(q_t + z_t)$ , где  $L = [I_n, 0_{n \times m}]$  и вектор  $z_t$  определяется уравнением

$$dz_t = \mathbf{A}_t z_t dt + d\Xi_t, \quad z_0 \sim N(0, \gamma), \\ \text{cov}(d\Xi, d\Xi) = \mathbf{R}_t = \text{diag}\{R_t, Q_t\}, \quad \gamma = \text{diag}\{0_n, P_0\}.$$

Мы видим, что общая ситуация несколько сложнее, поскольку вектор  $z_t$  лишь частично наблюдаем и не может передаваться целиком. Пусть имеется дискретный по времени канал связи, как в разд. 3. Переходим к дискретной системе

$$q_i = \mathbf{X}_i^\Delta q_{i-1} + \mathbf{v}_i, \quad q_0 \in \mathbf{M}, \quad \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i^\Delta, \\ z_i = \mathbf{X}_i^\Delta z_{i-1} + \Xi_i, \quad i = 1, \dots, n_1,$$

где  $\Xi_i \sim N(0, \mathbf{R}_i)$ ,  $\mathbf{R}_i = \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \mathbf{X}(i\Delta, s) \mathbf{R}_s \mathbf{X}(i\Delta, s)' ds$ . Положим  $\mathbf{z}_i = q_i + z_i$  и рассмотрим кодирующее устройство вида

$$\theta_i = A_i^0(\theta) + B_i(\theta)(\mathbf{C}_i L \mathbf{z}_{i-1} + \zeta_i), \quad i = 1, \dots, n_1, \quad \mathbf{C}_i = (\lambda_i(\theta) \alpha_{i-1}^-)^{1/2},$$

где  $\theta_i \in \mathbb{R}^n$ , аналогичное (3.2). Здесь  $\alpha_i = L \gamma_i L'$  — левая верхняя клетка матрицы  $\gamma_i = [\alpha_i, \beta_i; \beta_i', \gamma_i^1]$ , удовлетворяющей уравнению

$$\gamma_i = \mathbf{X}_i^\Delta \left( \gamma_{i-1} - \gamma_{i-1} L' \mathbf{C}_i' (I_n + \mathbf{C}_i L \gamma_{i-1} L' \mathbf{C}_i')^{-1} \mathbf{C}_i L \gamma_{i-1} \right) \mathbf{X}_i^{\Delta'} + \mathbf{R}_i = \mathbf{X}_i^\Delta \left( \gamma_{i-1} \right. \\ \left. - \lambda_i [\alpha_{i-1}, \alpha_{i-1}^- \alpha_{i-1} \beta_{i-1}; \beta_{i-1}' \alpha_{i-1}^- \alpha_{i-1}, \beta_{i-1}' \alpha_{i-1}^- \beta_{i-1}] / (1 + \lambda_i) \right) \mathbf{X}_i^{\Delta'} + \mathbf{R}_i, \quad \gamma_0 = \gamma. \quad (5.3)$$

При известных параметрах  $q_0$ ,  $\mathbf{v}^i$  введем ошибку воспроизведения сигнала

$$\text{Err}_i = \inf_{A_i^0, B_i, \lambda_i} \mathbb{E} \|y_i - \hat{y}_i\|^2 = \inf_{\lambda_i} \text{tr} \mathbb{E} \alpha_i,$$

где  $\hat{y}_i = \mathbb{E}(y_i | \theta^i) = L \mathbb{E}(\mathbf{z}_i | \theta^i) = L \hat{\mathbf{z}}_i$  и  $\gamma_i = \text{cov}(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i | \theta^i)$  определяются из уравнений

$$\hat{\mathbf{z}}_i = \mathbf{X}_i^\Delta \left( \hat{\mathbf{z}}_{i-1} + \mathbf{v}_i + \mathbf{K}_{i-1} (\theta_i - A_i^0(\theta) - B_i(\theta) \mathbf{C}_i L \hat{\mathbf{z}}_{i-1}) \right), \quad \hat{\mathbf{z}}_0 = q_0, \\ \mathbf{K}_{i-1} = \gamma_{i-1} L' \mathbf{C}_i' (I_n + \mathbf{C}_i L \gamma_{i-1} L' \mathbf{C}_i')^{-1} B_i^{-1} = \gamma_{i-1} L' (\lambda_i \alpha_{i-1}^-)^{1/2} B_i^{-1} / (1 + \lambda_i) \quad (5.4)$$

и (5.3) соответственно. Из энергетических ограничений следует неравенство

$$\mathbb{E}\|\mathbf{C}_{i+1}(y_i - \hat{y}_i)\|^2 = \mathbb{E}(\lambda_{i+1}(\theta) \cdot \text{rank } \alpha_i) \leq \mathbb{P}, \quad i \geq 0.$$

В отличие от разд. 3 здесь будем находить параметры  $\lambda_i$  рекуррентно, не пересчитывая на шаге  $i$  ранее найденные  $\lambda^{i-1}$ . На первом шаге  $\alpha_0 = 0$ , но при  $i \geq 1$  будем иметь  $\alpha_i > 0$ , поскольку  $R_i > 0$ . Заметим, что функция  $f(x) = -x/(1+x)$  выпукла при  $x \geq 0$  и монотонно убывает. Значит, пошагово применяя неравенство Иенсена, получим теорему типа 3.2, где теперь  $A_i^0 = -B_i \mathbf{C}_i \hat{y}_{i-1}$ , и  $\lambda_i \equiv \bar{\lambda}_i = \mathbb{P}/\text{rank } \alpha_{i-1}$ ,  $i \geq 2$ .

Перейдем к определению минимаксных кодирующих и декодирующих устройств. Рассмотрим декодер  $\hat{y}_i^* = L\hat{z}_i^*$ , зависящий от набора параметров  $q_0^*$ ,  $\mathbf{v}^{*i}$  и определяемый уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{z}_i^* &= \mathbf{X}_i^\Delta (\hat{z}_{i-1}^* + \mathbf{v}_i^* + \mathbf{K}_{i-1}\theta_i), \quad \hat{z}_0^* = q_0^* \in \mathbf{M}, \quad \mathbf{v}_i^* \in \mathbf{V}_i^\Delta, \\ \theta_i &= B_i (\mathbf{C}_i(y_{i-1} - \hat{y}_{i-1}^*) + \zeta_i), \quad i \geq 1, \quad \mathbf{C}_i = (\lambda_i(\theta)\alpha_{i-1}^-)^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где матрицы  $\alpha_i$  и  $\mathbf{K}_{i-1}$  находятся из (5.3), (5.4). Предположим, что последовательность  $\mathbf{z}_i$  реализуется при некоторых не известных в ЦУПОИ параметрах  $q_0$ ,  $\mathbf{v}^i$ . Обозначив разности  $\mathbb{E}(\mathbf{z}_i | \theta^i, q_0, \mathbf{v}^i) - \hat{z}_i^*$  через  $\mathbf{e}_i$ , получим уравнение

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{X}_i^\Delta (\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_i^* - \lambda_i \gamma_{i-1} L' \alpha_{i-1}^- / (1 + \lambda_i) L \mathbf{e}_{i-1}), \quad \mathbf{e}_0 = q_0 - q_0^*. \quad (5.6)$$

Энергетические ограничения здесь примут вид

$$\mathbb{E}\|\mathbf{C}_i(y_{i-1} - \hat{y}_{i-1}^*)\|^2 = \mathbb{E}\lambda_i \text{rank } \alpha_{i-1} + \mathbb{E}\lambda_i \mathbf{e}_{i-1}' L' \alpha_{i-1}^- L \mathbf{e}_{i-1} \leq \mathbb{P}. \quad (5.7)$$

Так же, как и в предыдущем разделе, параметры минимаксного декодера рекуррентно подбираются так, чтобы

$$\text{tr } \mathbb{E}\alpha_i \rightarrow \min_{\lambda_i}, \quad \sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbb{E}\|\mathbf{L}\mathbf{e}_i\|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{v}_i^*}, \quad i \geq 2, \quad (5.8)$$

при ограничениях

$$\mathbb{E}\lambda_{i+1} \text{rank } \alpha_i + \sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbb{E}\lambda_{i+1} \mathbf{e}_i' L' \alpha_i^- L \mathbf{e}_i \leq \mathbb{P}, \quad i \geq 1. \quad (5.9)$$

В случае  $i = 0$  имеем  $y_0 = y_0^* = 0$ ,  $\alpha_0 = 0$ . Поэтому  $\lambda_1$  выбирается произвольно, например,  $\lambda_1 = 0$ . При  $i \geq 1$  всегда  $\text{rank } \alpha_i = n$ . Если  $i = 1$ , выберем параметры  $q_0^*$ ,  $\mathbf{v}_1^*$  из решения задачи

$$\sup_{q_0, \mathbf{v}_1} \|\mathbf{L}\mathbf{e}_1\|^2 \rightarrow \min_{q_0^*, \mathbf{v}_1^*}$$

и далее их не меняем. Очевидно, сумма  $L\mathbf{X}_1^\Delta(q_0^* + \mathbf{v}_1^*)$  определится единственным образом и будет совпадать с чебышевским центром множества  $L\mathbf{X}_1^\Delta(\mathbf{M} + \mathbf{V}_1^\Delta)$ . Следовательно, при  $i = 1$  из (5.9) находим ограничение

$$\mathbb{E}\lambda_2 \leq \mathbb{P} / \left( n + \max_{q_0, \mathbf{v}_1} \mathbf{e}_1' L' \alpha_1^- L \mathbf{e}_1 \right).$$

Итак, при  $i = 1$  на первом шаге с учетом неравенства Иенсена находим оптимальные значения параметров

$$\{\bar{q}_0^*, \bar{\mathbf{v}}_1^*\} = \underset{q_0^*, \mathbf{v}_1^*}{\text{argmin}} \sup_{q_0, \mathbf{v}_1} \|\mathbf{L}\mathbf{e}_1\|^2, \quad \bar{\lambda}_2 = \mathbb{P} / \left( n + \max_{q_0, \mathbf{v}_1} \mathbf{e}_1' L' \alpha_1^- L \mathbf{e}_1 \right). \quad (5.10)$$

На втором шаге параметры (5.10) уже определены. Продолжая рассуждения по индукции, приходим к выводу.

**Теорема 5.1.** *Параметры минимаксного декодера  $\hat{y}_i^* = L\hat{z}_i^*$ , (5.5), доставляющие экстремумы в (5.8), определяются соотношениями (5.10) и*

$$\bar{\mathbf{v}}_i^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{v}_i^*} \max_{q_0, \mathbf{v}^i} \|L\mathbf{e}_i\|^2, \quad \bar{\lambda}_{i+1} = \mathbb{P}/\left(n + \max_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbf{e}_i' L' \alpha_i^{-1} L \mathbf{e}_i\right), \quad i \geq 2.$$

*Данные параметры обеспечивают энергетические ограничения (5.7) для всех неизвестных элементов  $q_0, \mathbf{v}^i$  и гарантируют ошибку восстановления сигнала, не превышающую  $\operatorname{Err}_i = \sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbb{E} \|y_i - \hat{y}_i^*\|^2 = \sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \|L\bar{\mathbf{e}}_i\|^2 + \operatorname{tr} \bar{\alpha}_i$  на  $i$ -м шаге.*

**З а м е ч а н и е 5.1.** В случае неоднозначности определения параметров  $\bar{\mathbf{v}}_i^*, \bar{q}_0^*$  выбираем их значения с минимальной нормой.

Считая, что  $\lambda_i$  — неслучайный параметр декодера, предложим, как в предыдущем разделе, другой способ формирования параметров. А именно, будем рекуррентно решать минимаксную задачу

$$\sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbb{E} \|y_i - \hat{y}_i^*\|^2 = \sup_{q_0, \mathbf{v}^i} \|L\mathbf{e}_i\|^2 + \operatorname{tr} \alpha_i \rightarrow \min_{\mathbf{v}_i^*, \lambda_i}, \quad i \geq 2, \quad (5.11)$$

при энергетических ограничениях

$$\lambda_{i+1} \leq \mathbb{P}/\left(n + \max_{q_0, \mathbf{v}^i} \mathbf{e}_i' L' \alpha_i^{-1} L \mathbf{e}_i\right), \quad i \geq 1. \quad (5.12)$$

При этом на первом шаге используем параметры  $\bar{q}_0^*, \bar{\mathbf{v}}_1^*$ , совпадающие с найденными в (5.10). На последующих шагах в правую часть неравенства (5.12) подставляются значения  $\mathbf{v}_i^*, \lambda_i$ , найденные из решения задачи (5.11) на предыдущем шаге. Эти значения, вообще говоря, могут отличаться от указанных в теореме 5.1.

## 6. Пример

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} dx_t &= d\xi_t, \quad t \in [0, T], \quad x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0), \quad \|\bar{x}_0\|_\infty \leq \mu, \\ dy_t &= d\eta_t + (x_t + w_t)dt, \quad y_0 = 0, \quad \|w_t\|_\infty \leq \nu, \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Здесь  $w_t$  — детерминированное возмущение;  $\xi_t, \eta_t$  — независимые винеровские процессы с  $\operatorname{cov}(d\xi, d\xi) = Qdt$ ,  $\operatorname{cov}(d\eta, d\eta) = Rdt$ ;  $\|x\|_\infty = \max\{|x^1|, |x^2|\}$ . Разделим отрезок  $[0, T]$  на  $n_1$  равных частей в соответствии с дискретом времени кодирующего устройства и положим  $\Delta = T/n_1$ ,  $t_i = \Delta i$ ,  $i = 1, \dots, n_1$ . Интегрируя систему по шагам с помощью формулы Коши, находим дискретную систему

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + \xi_i, \quad y_i = \Delta x_{i-1} + \eta_i + w_i, \\ \xi_i &= \xi(t_i) - \xi(t_{i-1}), \quad y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}), \quad \|w_i\|_\infty \leq \nu\Delta, \\ \operatorname{cov}(\eta_i, \eta_i) &= R\Delta + Q\Delta^3/3, \quad \operatorname{cov}(\xi_i, \eta_i) = Q\Delta^2/2, \quad \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) = Q\Delta; \quad i = 1, \dots, n_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим способ восстановления сигнала  $y_i$ , предложенный в теореме 5.1. В силу равенств  $\mathbf{X}^\Delta = [0_2, I_2\Delta; 0_2, I_2]$ ,  $q_0 = [0; \bar{x}_0]$ ,  $\mathbf{v}_i = [w_i; 0]$ , из (5.6) находим, что векторы  $\mathbf{e}_i$  не зависят от  $\mathbf{v}_i$ . Кроме того, в силу центральной симметрии ограничивающих множеств можем считать, что  $\bar{x}_0^* = 0$ ,  $\bar{w}_i^* \equiv 0$ . Таким образом, (5.6) превращается в однородное уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \mathbf{X}^\Delta \left( \mathbf{e}_{i-1} - \lambda_i \gamma_{i-1} L' \alpha_{i-1}^- / (1 + \lambda_i) L \mathbf{e}_{i-1} \right) \\ &= \left[ -\lambda_i \Delta \beta_{i-1}' \alpha_{i-1}^- / (1 + \lambda_i), I_2 \Delta; -\lambda_i \beta_{i-1}' \alpha_{i-1}^- / (1 + \lambda_i), I_2 \right] \mathbf{e}_{i-1}, \quad \mathbf{e}_0 = q_0. \end{aligned}$$

Зададим числовые параметры:  $Q = q^2 I_2$ ,  $R = r^2 I_2$ ,  $P_0 = 0.01 I_2$ ,  $\mu = 1$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $q^2 = 0.06$ ,  $r^2 = 0.01$ ,  $T = 10$ ,  $\Delta = 0.1$ ,  $n_1 = 100$ . Изменение ошибки оценивания  $\text{Err}_i$  показано на рис. 1. Типичная картина восстановления сигнала  $y_i$  (одной координаты) с помощью минимаксного декодера показана на рис. 2, где звездочками отмечен декодированный сигнал. Здесь при моделировании полагаем  $w_i = \nu \Delta [\sin(\Delta i); \cos(\Delta i)]$ .

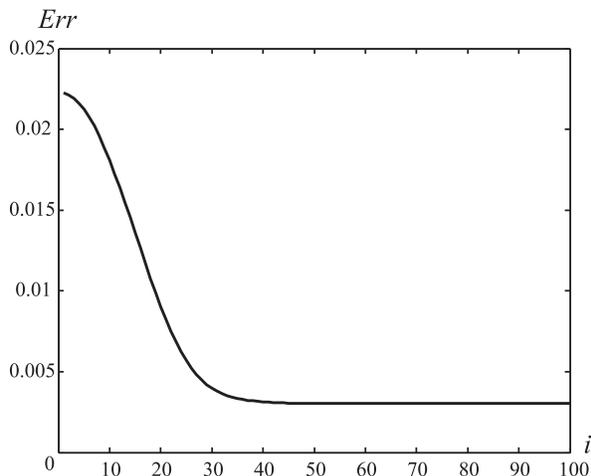


Рис. 1.

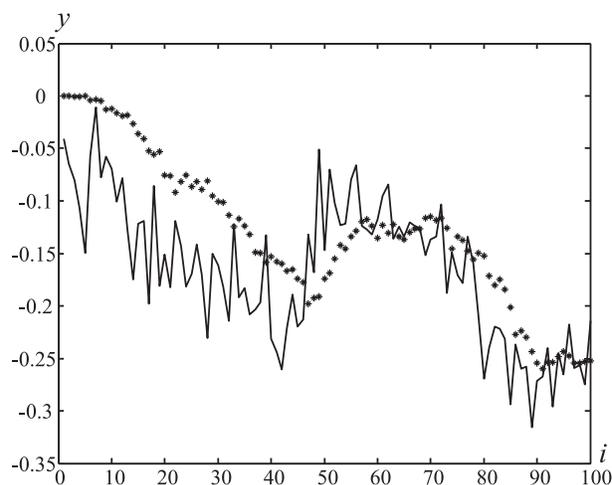


Рис. 2.

Отметим, что решение минимаксной задачи (5.11), (5.12) в данном примере не отличается от найденного.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ананьев Б.И.** Оценивание случайных информационных множеств многошаговых систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 35–41.
2. **Anan'ev B.I.** Multiestimates for linear-Gaussian continuous systems under communication constraints // 4th Internat. sci. conf. on physics and control (PHYSCON 2009): electronic publ. Catania, 2009. URL: <http://lib.physcon.ru/?item=1931> (IPACS Electronic Library.)
3. **Ананьев Б.И.** Коррекция движения статистически неопределенной системы при коммуникационных ограничениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 20–31.
4. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
5. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
6. **Ананьев Б.И., Аникин С.А.** Задача восстановления входных воздействий при коммуникационных ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 73–84.
7. **Колмогоров А.Н.** Теория информации и теория алгоритмов. М.: Наука, 1987. 304 с.

Ананьев Борис Иванович  
д-р физ.-мат. наук  
ведущий науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: [abi@imm.uran.ru](mailto:abi@imm.uran.ru)

Поступила 18.12.2009

УДК 518.9, 517.97

К ТЕОРЕМАМ О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ В АНОРМАЛЬНЫХ ТОЧКАХ<sup>1</sup>

А. В. Арутюнов

В работе рассматривается уравнение  $F(x, \sigma) = 0$ ,  $x \in K$ , в котором  $\sigma$  — параметр, а  $x$  — неизвестное, принимающее значение в заданном выпуклом конусе  $K$ , лежащем в банаховом пространстве  $X$ . Это уравнение исследуется в окрестности заданного решения  $(x_*, \sigma_*)$ , в котором может нарушаться условие регулярности Робинсона. В предположении выполнения введенного условия 2-регулярности, являющегося существенным ослаблением условия Робинсона, для этого уравнения получена теорема о неявной функции. Этот результат обобщает известные теоремы о неявной функции даже на случай, когда конус  $K$  совпадает со всем пространством  $X$ .

Ключевые слова: теорема о неявной функции, аномальная точка, условие регулярности Робинсона, 2-регулярность, условие 2-регулярности относительно конуса.

A. V. Arutyunov. On implicit function theorems at abnormal points.

We consider the equation  $F(x, \sigma) = 0$ ,  $x \in K$ , in which  $\sigma$  is a parameter and  $x$  is an unknown variable taking values in a specified convex cone  $K$  lying in a Banach space  $X$ . This equation is investigated in a neighborhood of a given solution  $(x_*, \sigma_*)$ , where Robinson's constraint qualification may be violated. We introduce the 2-regularity condition, which is considerably weaker than Robinson's constraint qualification; assuming that it is satisfied, we obtain an implicit function theorem for this equation. The theorem is a generalization of the known implicit function theorems even in the case when the cone  $K$  coincides with the whole space  $X$ .

Keywords: implicit function theorem, abnormal point, Robinson's constraint qualification, 2-regularity, 2-regularity with respect to a cone.

Пусть заданы банаховы пространства  $X, Y$ , топологическое пространство  $\Sigma$  и выпуклый замкнутый конус  $K \subseteq X$ . Пусть даны отображение  $F : X \times \Sigma \rightarrow Y$  и точки  $x_* \in K$ ,  $\sigma_* \in \Sigma$ , для которых  $F(x_*, \sigma_*) = 0$ .

Рассмотрим уравнение

$$F(x, \sigma) = 0, \quad x \in K, \quad (1)$$

в котором  $x$  — неизвестное, а  $\sigma$  — параметр. Исследование этого уравнения основано на теореме о неявной функции, которая при условии гладкости отображения  $F$  в тех или иных предположениях гарантирует существование решения уравнения (1)  $x(\sigma) \in K$  для всех  $\sigma$  из некоторой окрестности точки  $\sigma_*$  и его непрерывность как функции  $\sigma$ , а также дает линейную оценку отклонения решения  $\|x(\sigma) - x_*\|$  через величину  $\|F(x_*, \sigma)\|$ .

В случае, когда  $K = X$ , классическая теорема о неявной функции гласит (см. например, [1, 2]), что если выполнено условие нормальности  $Im \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*) = Y$  (его также часто называют условием регулярности или условием Люстерника), то уравнение (1) для всех  $\sigma$  из некоторой окрестности  $\sigma_*$  имеет решение  $x(\sigma)$ , которое непрерывно зависит от  $\sigma$  и удовлетворяет линейной оценке

$$\|x(\sigma) - x_*\| \leq \text{const} \|F(x_*, \sigma)\|. \quad (2)$$

В общем случае из теоремы об устойчивости Робинсона [3, 4] вытекает, что если выполнено условие регулярности

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*) \left( K + Lin\{x_*\} \right) = Y, \quad (3)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00619).

которое обычно называют условием Робинсона (при  $K = X$  оно превращается в приведенное выше условие нормальности), то для всех  $\sigma$  из некоторой окрестности точки  $\sigma_*$  уравнение (1) имеет решение  $x(\sigma) \in K$ , удовлетворяющее линейной оценке (2). (Здесь и ниже  $Lin$  обозначает линейную оболочку множества.) Правда, вопрос о возможности выбора решений  $x(\sigma) \in K$  так, чтобы отображение  $x(\cdot)$  было непрерывным, в цитированных работах не обсуждался. Тем не менее справедлива следующая

**(Классическая) теорема о неявной функции.** *Предположим, что отображение  $F : X \times \Sigma \rightarrow Y$  непрерывно в окрестности точки  $(x_*, \sigma_*)$ , строго дифференцируемо по  $x$  в этой точке равномерно по  $\sigma$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $\delta > 0$  и окрестность  $O$  точки  $\sigma_*$ , что если  $\sigma \in O$ ,  $\|x_1 - x_*\| \leq \delta$ ,  $\|x_2 - x_*\| \leq \delta$ , то*

$$\left\| F(x_2, \sigma) - F(x_1, \sigma) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)(x_2 - x_1) \right\| \leq \varepsilon \|x_2 - x_1\|,$$

*а также выполнено условие Робинсона (3). Тогда существуют окрестность  $O$  точки  $\sigma_*$  и непрерывное отображение  $x(\cdot) : O \rightarrow K$  такие, что*

$$F(x(\sigma), \sigma) \equiv 0, \quad \|x(\sigma) - x_*\| \leq \text{const} \|F(x_*, \sigma)\| \quad \forall \sigma \in O.$$

Эта теорема вытекает из приводимой ниже теоремы 2, а при достаточной гладкости отображения  $F$  из теоремы 3.

Даже если  $K = X$ , однако условие нормальности нарушается, то утверждение классической теоремы о неявной функции, вообще говоря, не имеет места, и исследование существования решения уравнения (1) существенно усложняется. Тем более сказанное относится и к общему случаю, если нарушается условие Робинсона. Наша цель — считая  $F$  гладким в окрестности точки  $(x_*, \sigma_*)$ , получить для уравнения (1) теорему о неявной функции в предположениях более слабых, чем условие Робинсона. Для случая  $K = X$  различные варианты теоремы о неявной функции были получены в работах [5–7].

В дальнейшем для выпуклого множества  $M$   $riM$  обозначает его относительную внутренность,  $cone$  — коническая оболочка множества. В произвольном нормированном пространстве замкнутый шар радиуса  $\delta$  с центром в точке  $x$  будем обозначать одинаково через  $B_\delta(x)$ , причем каждый раз из контекста будет понятно, в каком пространстве рассматривается шар; положим также  $B_\delta = B_\delta(0)$ , нормы в различных нормированных пространствах тоже обозначаются единообразно через  $\|\cdot\|$ , норма линейного оператора  $A$  обозначается через  $\|A\|$ ,  $B(X, Y)$  — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из  $X$  в  $Y$ , наделенное операторной нормой.

Пусть заданы точки  $x_* \in K$ ,  $\sigma_* \in \Sigma$ , причем  $F(x_*, \sigma_*) = 0$ . Относительно отображения  $F$  будем предполагать, что в некоторой окрестности точки  $(x_*, \sigma_*)$  оно дважды непрерывно дифференцируемо по  $x$  равномерно по  $\sigma$  и при каждом фиксированном  $\sigma$  его вторая частная производная  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\cdot, \sigma)$ , рассматриваемая как симметричное билинейное отображение, удовлетворяет условию Липшица по переменной  $x$  с одной и той же константой Липшица, не зависящей от  $\sigma$ . Это означает, что

$$\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \sigma)[\xi_1, \xi_2] \right\| \leq \text{const} \|\xi_1\| \|\xi_2\| \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in X,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_1, \sigma)[\xi_1, \xi_2] - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_2, \sigma)[\xi_1, \xi_2] \right\| \leq \text{const} \|x_1 - x_2\| \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in B_1$$

для всех  $x, x_1, x_2$  и  $\sigma$  из некоторых окрестностей точек  $x_*$  и  $\sigma_*$  соответственно.

Отображения  $F(x_*, \cdot)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \cdot)$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_*, \cdot)$  предполагаются непрерывными в точке  $\sigma_*$ .

Положим

$$\mathcal{K} = K + Lin\{x_*\}, \quad C = \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)(\mathcal{K}).$$

Будем предполагать, что линейная оболочка  $LinC$  конуса  $C$  замкнута и это подпространство топологически дополняемо. Через  $\pi$  обозначим линейный непрерывный оператор, проектирующий  $Y$  на какое-нибудь подпространство, дополняющее  $LinC$ .

**О п р е д е л е н и е.** Пусть

$$h \in \mathcal{K} : \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)h = 0, \quad -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_*, \sigma_*)[h, h] \in C. \quad (4)$$

Отображение  $F$  называется 2-регулярным в точке  $(x_*, \sigma_*)$  относительно  $K$  по направлению  $h$ , удовлетворяющему условию (4), если имеет место

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)(\mathcal{K}) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_*, \sigma_*)\left[h, \mathcal{K} \cap Ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)\right] = Y. \quad (5)$$

В предположении  $riC \neq \emptyset$  другое, но эквивалентное введенному определению 2-регулярности приведено в [9], и оба они являются естественным развитием понятия 2-регулярности, использованного для случая  $K = X$  в [5].

**Теорема 1.** *Предположим, что относительная внутренность  $riC$  непуста и отображение  $F$  2-регулярно в точке  $(x_*, \sigma_*)$  относительно  $K$  по некоторому направлению<sup>2</sup>. Тогда для произвольного вектора  $l \in riC$  существуют такие окрестность  $O$  точки  $\sigma_*$ ,  $\delta > 0$  и непрерывное отображение  $x(\cdot) : O \rightarrow K$ , что*

$$F(x(\sigma), \sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in O, \quad (6)$$

$$\|x(\sigma) - x_*\| \leq \text{const} \left( \Delta_1(\sigma) + \Delta_2(\sigma) + \|F(x_*, \sigma)\| + \rho(-F(x_*, \sigma), C_\delta)^{1/2} \right) \quad \forall \sigma \in O. \quad (7)$$

Здесь

$$\Delta_1(\sigma) = \sup \left\{ \left\| \pi \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma)x \right\|, \quad x \in LinK, \quad \|x\| \leq 1 \right\},$$

$$\Delta_2(\sigma) = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma)x \right\|, \quad x \in Ker \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma) \cap \mathcal{K}, \quad \|x\| \leq 1 \right\},$$

$\rho$  — расстояние от точки до множества и

$$C_\delta = \text{cone}(B_\delta(l)) \cap LinC.$$

Доказательство этой теоремы основано на следующем утверждении, которое мы приведем без доказательства. Пусть заданы линейный непрерывный оператор  $A : X \rightarrow Y$  и точка  $x_* \in K$ .

**Теорема 2.** *Предположим, что выполнено условие регулярности Робинсона  $A(K) + Lin\{Ax_*\} = Y$ . Тогда существует  $a > 0$ , для которого выполняется следующее утверждение. Для любых  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in (0, 1) : \beta \leq \alpha(2 + a\|A\|)^{-1}$  и любого непрерывного отображения  $\varphi : B_\alpha \times \Sigma \rightarrow Y$ , удовлетворяющих при всех  $\sigma \in \Sigma$  условиям*

$$a) \quad \|\varphi(x_1, \sigma) - \varphi(x_2, \sigma)\| \leq \|x_1 - x_2\|/2a \quad \forall x_1, x_2 \in B_\alpha \cap K,$$

$$b) \quad \|\varphi(0, \sigma)\| \leq \beta/2a,$$

существует такое непрерывное отображение  $x(\cdot) : \Sigma \rightarrow K$ , что

$$A(x(\sigma) - x_*) = \varphi(x(\sigma) - x_*, \sigma), \quad \|x(\sigma) - x_*\| \leq 2a\|\varphi(0, \sigma)\| \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

<sup>2</sup>Т.е. существует вектор  $h \in X$ , для которого имеет место (4), (5).

*З а м е ч а н и е.* Константа  $a$  полностью определяется конусом  $K$ , оператором  $A$  и точкой  $x_*$ .

**Следствие.** Пусть дано непрерывное отображение  $\mathcal{A} : \Sigma \rightarrow B(X, Y)$ . Предположим, что  $l \in \text{int}\mathcal{A}(\sigma_*)(K + \text{Lin}\{x_*\})$ . Тогда существуют такие  $\delta > 0$ , окрестность  $O$  точки  $\sigma_*$  и непрерывное отображение  $\chi : (\text{cone}B_\delta(l) \cap B_\delta) \times O \rightarrow X$ , что имеет место

$$x_*/2 + \chi(y, \sigma) \in K, \quad \mathcal{A}(\sigma)\chi(y, \sigma) \equiv y, \quad \|\chi(y, \sigma)\| \leq \text{const} \|y\| \quad \forall y, \sigma.$$

Доказательства теоремы 2 и следствия приведены в [8].

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.** Положим

$$L(\sigma) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma), \quad Q(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_*, \sigma), \quad \pi_1 y = y - \pi y,$$

т. е.  $\pi_1$  — линейный непрерывный оператор проектирования на  $Y_1 = \text{Lin}C$ . Для квадратичных отображений будем использовать обозначение  $Q[x]^2 \stackrel{\text{def}}{=} Q[x, x]$ .

По лемме Адамара справедливо представление

$$F(x, \sigma) = F(x_*, \sigma) + L(\sigma)(x - x_*) + Q(\sigma)[x - x_*]^2 + R(x, \sigma)[x - x_*]^2, \quad (8)$$

где при фиксированных  $(x, \sigma)$   $R(x, \sigma)$  является квадратичным отображением из  $X$  в  $Y$ , причем  $R(x_*, \sigma) \equiv 0$  и в окрестности  $x_*$  отображение  $R(\cdot, \sigma)$  удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица, не зависящей от  $\sigma$ .

Возьмем  $l \in \text{ri}C$ . В силу следствия к теореме 2 существуют такие  $\delta > 0$ , окрестность  $O$  точки  $\sigma_*$  и непрерывное отображение  $\chi : (C_\delta \cap B_\delta) \times O \rightarrow X$ , что имеет место

$$\pi_1 L(\sigma)\chi(y, \sigma) = y, \quad \|\chi(y, \sigma)\| \leq \text{const} \|y\|,$$

$$x_*/2 + \chi(y, \sigma) \in K \quad \forall y \in C_\delta \cap B_\delta \quad \forall \sigma \in O. \quad (9)$$

Рассмотрим декартово произведение  $\tilde{X} = X \times \mathbb{R}^1$ . Элементы пространства  $\tilde{X}$  будем отмечать тильдой, т. е.  $\tilde{x} = (x, x^0)$ ,  $x \in X$ ,  $x^0 \in \mathbb{R}^1$ , а норму определим как  $\|\tilde{x}\| = \|x\| + |x^0|$ . Линейный оператор  $N : \tilde{X} \rightarrow X$  определим по формуле  $N\tilde{x} = x + x^0 x_*$ . Положим  $\tilde{K} = \{\tilde{x} = (x, x^0) \in \tilde{X} : x \in K\} \subseteq \tilde{X}$ . Тогда  $N(\tilde{K}) = K + \text{Lin}\{x_*\} = \mathcal{K}$ .

Возьмем вектор  $h \in \mathcal{K}$ , для которого имеет место (4), (5). По условию  $-Q(\sigma_*)[h, h] \in L(\sigma_*)(\mathcal{K})$ . Поэтому, поскольку  $N(\tilde{K}) = \mathcal{K}$ , имеем

$$\exists \tilde{\xi}_0 \in \tilde{K} : L(\sigma_*)N\tilde{\xi}_0 = -Q(\sigma_*)[h, h].$$

Для  $y \in Y$  положим  $\mathcal{D}(y) = \{y_1 \in C_\delta : \|y - y_1\| \leq 2\rho(y, C_\delta)\}$ . Очевидно, каждое из множеств  $\mathcal{D}(y)$  непусто, выпукло и замкнуто. Покажем, что многозначное отображение  $\mathcal{D}$  полунепрерывно снизу в каждой точке  $\bar{y} \in Y$ .

Действительно, рассмотрим два случая. Пусть вначале,  $\bar{y} \in C_\delta$ . Тогда, если произвольная последовательность  $\{y_i\}$  сходится к  $\bar{y}$ , то  $\rho(y_i, C_\delta) \rightarrow 0$ ,  $i \rightarrow \infty$  и, следовательно, выбрав произвольные  $y_{1,i} \in \mathcal{D}(y_i)$ , имеем  $\|y_{1,i} - y_i\| \rightarrow 0 \Rightarrow y_{1,i} \rightarrow \bar{y}$ ,  $i \rightarrow \infty$ , что доказывает полунепрерывность снизу  $\mathcal{D}$ .

Предположим теперь, что  $\bar{y} \notin C_\delta$ . Тогда  $\rho(\bar{y}, C_\delta) > 0$ . Пусть  $y_1 \in \mathcal{D}(\bar{y})$ . Докажем, что

$$\exists y_{1,i} \in C_\delta : \rho(y_{1,i}, C_\delta) < 2\rho(\bar{y}, C_\delta) \quad \forall i, \quad y_{1,i} \rightarrow y_1, \quad i \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Действительно, выберем  $z \in C_\delta : \|\bar{y} - z\| < 2\rho(\bar{y}, C_\delta)$  и для натуральных  $i$  положим  $y_{1,i} = z i^{-1} + (1 - i^{-1})y_1$ . Тогда, очевидно,  $\|y_{1,i} - \bar{y}\| \leq i^{-1}\|z - \bar{y}\| + (1 - i^{-1})\|y_1 - \bar{y}\| < 2\rho(\bar{y}, C_\delta)$ , что доказывает (10). Полунепрерывность снизу  $\mathcal{D}$  в точке  $\bar{y}$  непосредственно вытекает из (10).

Таким образом доказано, что многозначное отображение  $\mathcal{D}$  удовлетворяет всем предположениям теоремы Майкла о непрерывном селекторе (см. [10, 11]). Поэтому по теореме Майкла существует такое непрерывное отображение  $y_1(\cdot) : Y \rightarrow C_\delta$ , что  $\|y - y_1(y)\| \leq 2\rho(y, C_\delta)$ . Положим  $y_2(y) = y - y_1(y)$ . Произвольный вектор  $y \in Y$  можно представить в виде

$$y = y_1(y) + y_2(y), \quad y_1(y) \in C_\delta, \quad \|y_2(y)\| \leq 2\rho(y, C_\delta), \quad \|y_1(y)\| \leq 3\|y\|,$$

так как  $\rho(y, C_\delta) \leq \|y\| \Rightarrow \|y_2(y)\| \leq 2\|y\| \Rightarrow \|y_1(y)\| \leq 3\|y\|$ .

Перепишем уравнение (1) в эквивалентном виде

$$F(x, \sigma) - F(x_*, \sigma) = -F(x_*, \sigma). \quad (11)$$

Положим

$$y_s(\sigma) = y_s(-F(x_*, \sigma)), \quad s = 1, 2, \quad \chi(\sigma) = \chi(y_1(\sigma), \sigma).$$

Очевидно, так определенные отображения  $y_1$ ,  $y_2$  и  $\chi$  непрерывны на  $\Sigma$  как суперпозиции непрерывных отображений. Кроме того, в силу (9)

$$\pi_1 L(\sigma) \chi(\sigma) = y_1(\sigma), \quad (12)$$

$$\|\chi(\sigma)\| \leq \text{const} \|F(x_*, \sigma)\| \quad \forall \sigma \in O. \quad (13)$$

Далее имеем  $\|y_1(\sigma)\| = \|y_1(-F(x_*, \sigma))\| \leq 3\|F(x_*, \sigma)\|$ . Поэтому, уменьшая окрестность  $O$ , добьемся того, что  $\|y_1(\sigma)\| \leq \delta \forall \sigma \in O$ , откуда в силу (9)

$$x_*/2 + \chi(\sigma) \in K \quad \forall \sigma \in O. \quad (14)$$

Для  $\gamma > 0$  положим

$$D_\gamma = \left\{ \tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) : \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2 \in \tilde{K}, \|\tilde{\xi}_1\| \leq 1, \|\tilde{\xi}_2\| \leq \gamma, L(\sigma_*) N \tilde{\xi}_2 = 0 \right\}.$$

Зафиксируем  $\gamma \in (0, 1]$ . Положим

$$W = \left\{ \sigma \in \Sigma : \Delta_1(\sigma) + \Delta_2(\sigma) + \|F(x_*, \sigma)\| + \rho(-F(x_*, \sigma), C_\delta) > 0 \right\}.$$

(Цель введения множества  $W$  станет ясна ниже.)

Возьмем произвольное  $\sigma \in O \cap W$  и будем для него искать решение уравнения (11) в виде

$$\tilde{x}(\sigma) = x_* + \chi(\sigma) + \varepsilon h + \varepsilon N \tilde{\xi}_2 + \varepsilon^2 N(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_0), \quad (15)$$

где  $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) \in D_\gamma$  и  $\varepsilon > 0$  подлежат определению.

Рассмотрим вектор  $x_*/2 + \varepsilon h + \varepsilon N \tilde{\xi}_2 + \varepsilon^2 N(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_0)$ . По условию  $h \in K$ ,  $\tilde{\xi}_0 \in \tilde{K} \Rightarrow h = h_0 + \theta x_*$ ,  $N \tilde{\xi}_0 = \xi_0 + \xi_0^0 x_*$ , где  $h_0, \xi_0 \in K$ ,  $\theta, \xi_0^0 \in \mathbb{R}^1$ . Кроме того, в силу определения множества  $D_\gamma$  имеем  $N \tilde{\xi}_i = \xi_i + \xi_i^0 x_*$ , где  $\xi_i \in K$ ,  $|\xi_i^0| \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ . Следовательно, существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что

$$x_*/2 + \varepsilon h + \varepsilon N \tilde{\xi}_2 + \varepsilon^2 N(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_0) \in K \quad \forall \tilde{\xi} \in D_1, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Отсюда в силу (14)  $\tilde{x}(\sigma) \in K$  для всех указанных  $\tilde{\xi}, \varepsilon$ .

Для удобства положим  $N \tilde{\xi}_i = \xi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Подставляя  $\tilde{x}(\sigma)$  в (11) в силу (8), приведем (11) к виду

$$\begin{aligned} & \pi L(\sigma) \chi(\sigma) + \varepsilon \hat{L}(\sigma)(h + \xi_2) + \varepsilon^2 \left( L(\sigma) \xi_1 + L(\sigma) \xi_0 + Q(\sigma)[h]^2 + 2Q(\sigma)[h, \xi_2] \right) \\ & + 2\varepsilon Q(\sigma)[h, \chi(\sigma) + \varepsilon^2(\xi_1 + \xi_0)] + Q(\sigma)[\chi(\sigma) + \varepsilon \xi_2 + \varepsilon^2(\xi_1 + \xi_0)]^2 \\ & + R(\tilde{x}(\sigma), \sigma)[\tilde{x}(\sigma) - x_*]^2 = y_2(\sigma). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $\hat{L}(\sigma) : KerL(\sigma_*) \cap LinK \rightarrow Y$  обозначает сужение линейного оператора  $L(\sigma)$  на подпространство  $KerL(\sigma_*) \cap LinK$ , а  $\tilde{x}(\sigma)$  определено по формуле (15). При этом возможность замены оператора  $L(\sigma)$  на его сужение  $\hat{L}(\sigma)$  обусловлена тем, что по построению  $h, \xi_2 = N\tilde{\xi}_2 \in KerL(\sigma_*) \cap LinK$ . Кроме того, при выводе полученного равенства использовано то, что в силу (12)  $L(\sigma)\chi(\sigma) - y_1(\sigma) = \pi L(\sigma)\chi(\sigma)$ .

Деля на  $\varepsilon^2$ , приводим уравнение (11) к виду

$$A\tilde{\xi} = -\varphi(\tilde{\xi}; \varepsilon, M, \eta, \sigma) \quad (17)$$

при

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2), \quad M = \varepsilon^{-1}\hat{L}(\sigma), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2), \\ \eta_1 &= \varepsilon^{-1}\chi(\sigma), \quad \eta_2 = \varepsilon^{-1}\hat{L}(\sigma)h + \varepsilon^{-2}(\pi L(\sigma)\chi(\sigma) - y_2(\sigma)). \end{aligned}$$

Здесь линейный оператор  $A : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow Y$  определяется по формуле

$$A\tilde{\xi} = A(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) = L(\sigma_*)N\tilde{\xi}_1 + 2Q(\sigma_*)[h, N\tilde{\xi}_2],$$

а отображение  $\varphi$  по формуле

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{\xi}; \varepsilon, M, \eta, \sigma) &= \left( Q(\sigma)[h, h] + L(\sigma)N\tilde{\xi}_0 \right) + \left( L(\sigma) - L(\sigma_*) \right) N\tilde{\xi}_1 + 2 \left( Q(\sigma)[h, N\tilde{\xi}_2] - Q(\sigma_*)[h, N\tilde{\xi}_2] \right) \\ &\quad + 2Q(\sigma) \left[ h, \eta_1 + \varepsilon N(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_0) \right] + Q(\sigma) \left[ \eta_1 + N\tilde{\xi}_2 + \varepsilon N(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_0) \right]^2 \\ &\quad + R(\tilde{x}(\sigma), \sigma) \left[ \eta_1 + h + N\tilde{\xi}_2 + \varepsilon N(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_0) \right]^2 + MN\tilde{\xi}_2 + \eta_2. \end{aligned}$$

Здесь  $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in Y \times Y$ ,  $M \in B(KerL(\sigma_*) \cap LinK, Y)$ .

Рассмотрим уравнение (17) относительно неизвестного  $\tilde{\xi} \in D_\gamma$ , в котором

$$\tilde{\sigma} = (\varepsilon, M, \eta, \sigma) \in \tilde{\Sigma} = [0, \varepsilon_0] \times B(KerL(\sigma_*) \cap LinK, Y) \times (Y \times Y) \times O$$

является параметром. Покажем, что в точке  $\tilde{\xi} = 0$ ,  $\tilde{\sigma} = (0, 0, 0, \sigma_*)$  для этого уравнения выполнены все предположения теоремы 2.

По условию теоремы для оператора  $A$  в нуле выполнено условие Робинсона:  $A(K, K \cap Ker(L(\sigma_*)N)) = Y$ .

Рассмотрим отображение  $\varphi$ . Оно непрерывно и  $\varphi(0; 0, 0, 0, \sigma_*) = 0$ , так как по построению  $Q(\sigma_*)[h, h] + L(\sigma_*)N\tilde{\xi}_0 = 0$ .

Во-первых отметим, что уменьшая  $\gamma > 0$  и окрестность  $O$ , константу Липшица всех отображений  $Q(\sigma)[N\tilde{\xi}_2]^2$  на множестве  $D_\gamma$  можно сделать как угодно малой равномерно по  $\sigma \in O$ . Далее, в пространстве  $[0, \varepsilon_0] \times B(KerL(\sigma_*) \cap LinK, Y) \times (Y \times Y)$ , являющимся декартовым произведением трех метрических пространств, метрику определим как сумму метрик сомножителей. В этом пространстве рассмотрим шар  $O_\nu$  радиуса  $\nu \in (0, \varepsilon_0)$  с центром в нуле. В силу вышесказанного и из определения отображения  $\varphi$  вытекает, что уменьшая положительные  $\gamma, \nu$  и окрестность  $O$ , можно на множестве  $D_\gamma \times O_\nu \times O$  сделать константу Липшица отображения  $\varphi$  по переменной  $\tilde{\xi}$  как угодно малой.

Таким образом, можно считать, что  $\gamma, \nu$  и окрестность  $O$  выбраны так, что на множестве  $D_\gamma \times O_\nu \times O$  для  $A$  и  $\varphi$  найдутся  $a, \alpha$  и  $\beta$ , для которых выполнены предположения теоремы 2, и, значит, для каждого  $\tilde{\sigma} \in O_\nu \times O$  уравнение (17) имеет такое решение  $\tilde{\xi}(\tilde{\sigma}) \in D_1$ , что отображение  $\tilde{\xi}(\cdot)$  непрерывно.

Положим

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma) = \mu \left( \Delta_1(\sigma) + \Delta_2(\sigma) + \|F(x_*, \sigma)\| + \rho(-F(x_*, \sigma), C_\delta)^{1/2} \right), \quad (18)$$

где  $\mu \geq 1$  — константа, которую выберем ниже. Учитывая, что  $\sigma \in W \Rightarrow \varepsilon(\sigma) > 0$ , положим

$$M(\sigma) = \varepsilon(\sigma)^{-1} \hat{L}(\sigma), \quad \eta(\sigma) = (\eta_1(\sigma), \eta_2(\sigma)),$$

$$\eta_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma)^{-1} \chi(\sigma), \quad \eta_2(\sigma) = \varepsilon(\sigma)^{-1} \hat{L}(\sigma)h + \varepsilon(\sigma)^{-2} (\pi L(\sigma) \chi(\sigma) - y_2(\sigma)).$$

Получим некоторые оценки. В силу (13) имеем

$$\|\eta_1(\sigma)\| = \|\chi(\sigma)\| \varepsilon(\sigma)^{-1} \leq \text{const } \mu^{-1},$$

откуда

$$\|\pi L(\sigma) \chi(\sigma)\| \varepsilon(\sigma)^{-2} \leq (\|\chi(\sigma)\| \varepsilon(\sigma)^{-1}) \Delta_1(\sigma) \varepsilon(\sigma)^{-1} \leq \text{const } \mu^{-2},$$

поскольку в силу (9)  $\chi(\sigma) \in \mathcal{K}$ . Далее

$$\|y_2(\sigma)\| \varepsilon(\sigma)^{-2} \leq 2\rho(-F(x_*, \sigma), C_\delta) \varepsilon(\sigma)^{-2} \leq 2\mu^{-2},$$

$$\|M(\sigma)\| \leq \Delta_2(\sigma) \varepsilon(\sigma)^{-1} \leq \text{const } \mu^{-1} \Rightarrow$$

$$\|M(\sigma)h\| \leq \text{const } \mu^{-1} \Rightarrow \|\eta_2(\sigma)\| \leq \text{const } \mu^{-1}.$$

В силу полученных оценок выберем такое достаточно большое  $\mu$ , что  $\|M(\sigma)\| + \|\eta(\sigma)\| \leq 2/3\nu \forall \sigma \in O$ . Рассмотрим функцию  $\varepsilon(\sigma)$ , определенную формулой (18). Эта функция непрерывна и  $\varepsilon(\sigma_*) = 0$ . Поэтому, уменьшая окрестность  $O$  точки  $\sigma_*$ , в силу соображений непрерывности добьемся того, что  $\varepsilon(\sigma) \leq \nu/3 < \varepsilon_0$ ,  $\forall \sigma \in O$ .

Положим  $\tilde{\xi}(\sigma) = \tilde{\xi}(\varepsilon(\sigma), M(\sigma), \eta(\sigma), \sigma)$ . Подставим в (15)  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ ,  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(\sigma)$  и полученную суперпозицию обозначим через  $x(\sigma)$ .

В силу проведенных рассуждений для любого  $\sigma \in O \cap W$  вектор  $\tilde{\xi}(\sigma)$  является решением уравнения (17) при  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ ,  $M = M(\sigma)$ ,  $\eta = \eta(\sigma)$ . Следовательно,  $x(\sigma)$  является решением уравнения (11), причем по построению  $x(\sigma) \in K \forall \sigma \in O \cap W$ . Положим  $x(\sigma) = x_* \forall \sigma \in O \setminus W$ .

В силу (15)  $\|x(\sigma) - x_*\| \leq \|\chi(\sigma)\| + \text{const } \varepsilon(\sigma)$ . Отсюда в силу (13) и (18) непосредственно вытекает справедливость оценки (7).

По построению отображение  $x(\cdot)$  непрерывно на открытом множестве  $O \cap W$  как суперпозиция непрерывных отображений, а в точках  $\sigma \in O \setminus W$  оно непрерывно в силу оценки (7). Таким образом, построенное отображение  $x(\cdot)$  непрерывно на множестве  $O$  и, значит, является искомым. Теорема доказана.  $\square$

**З а м е ч а н и е.** Очевидна оценка  $\rho(-F(x_*, \sigma), C_\delta) \leq \|F(x_*, \sigma)\|$ .

В теореме 1 по сравнению с теоремой 3 из [8] усилена оценка (7) и несколько упрощено само доказательство.

При дополнительном предположении о том, что

$$\text{конус } \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)(K) \text{ является подпространством} \quad (19)$$

оценку (7) в теореме 1 можно усилить, опустив в ней слагаемое  $\Delta_2(\sigma)$ . А именно, справедлива

**Теорема 3.** Пусть выполнены все предположения теоремы 1, а также условие (19). Тогда существуют такие окрестность  $O$  точки  $\sigma_*$  и непрерывное отображение  $x(\cdot) : O \rightarrow K$ , что выполняется (6) и оценка

$$\|x(\sigma) - x_*\| \leq \text{const} \left( \Delta_1(\sigma) + \|F(x_*, \sigma)\| + \|\pi F(x_*, \sigma)\|^{1/2} \right).$$

Доказательство во многом повторяет доказательство теоремы 1, в котором опущены некоторые этапы. А именно, рассмотрим семейство линейных операторов  $\pi_1 L(\sigma) : X \rightarrow Y_1$ ,  $\sigma \in \Sigma$ , где в силу (19)  $Y_1 = \frac{\partial F}{\partial x}(x_*, \sigma_*)(K)$  является банаховым пространством. По условию  $\pi_1 L(\sigma_*)(K) = Y_1$  и, кроме того,  $\pi_1 L(\sigma_*)h = 0$ . Поэтому по теореме 1 существует такое определенное в некоторой окрестности  $O$  точки  $\sigma_*$  непрерывное отображение  $h(\cdot) : O \rightarrow K$ , что

$$\pi_1 L(\sigma)h(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in O, \quad h(\sigma) \rightarrow h, \quad \sigma \rightarrow \sigma_*.$$

Рассмотрим уравнение (11). Его решение будем искать в виде

$$\tilde{x}(\sigma) = x_* + \chi(\sigma) + \varepsilon h(\sigma) + \varepsilon N \tilde{\xi}_2 + \varepsilon^2 N(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_0),$$

где  $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) \in D_\gamma(\sigma)$  и  $\varepsilon > 0$  подлежат определению. Здесь

$$D_\gamma(\sigma) = \left\{ (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2) \in \tilde{K} \times \tilde{K} : \|\tilde{\xi}_1\| \leq 1, \|\tilde{\xi}_2\| \leq \gamma, \pi_1 L(\sigma)N\tilde{\xi}_2 = 0 \right\}.$$

Учитывая, что по построению  $\pi_1 \hat{L}(\sigma)h(\sigma) = 0$ ,  $\pi_1 \hat{L}(\sigma)N\tilde{\xi}_2 = 0 \forall \tilde{\xi} \in D_\gamma(\sigma)$ ,  $\forall \sigma \in O$ , получаем формулу (16), в которой второе слагаемое заменено на  $\varepsilon \pi \hat{L}(\sigma)(h + \xi_2)$ . Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, получаем требуемое. При этом в проводимых рассуждениях надо сделать следующие изменения: в определении множества  $W$  опустить второе слагаемое; уравнение (17) относительно неизвестного  $\tilde{\xi}$  дополнить еще одним уравнением:  $\pi_1 L(\sigma)\tilde{\xi}_2 = 0$ ; взять  $M = \varepsilon^{-1} \pi L(\sigma)$ ; первое слагаемое в  $\eta_2$  заменить на  $\varepsilon^{-1} \pi L(\sigma)h(\sigma)$ ; взять  $\varepsilon(\sigma)$  в виде

$$\varepsilon(\sigma) = \mu \left( \Delta_1(\sigma) + \|F(x_*, \sigma)\| + \rho(-F(x_*, \sigma), C_\delta)^{1/2} \right).$$

Теорема доказана. □

Классическая теорема о неявной функции является непосредственным следствием теоремы 3 (так как если выполняется условие Робинсона, то  $\pi = 0$ ). Из теоремы 3 получается также обобщенная теорема о неявной функции, обусловленная решением уравнения  $F(x, \sigma) = y$  относительно неизвестного  $x \in K$  (подробнее см. теорему 5 из [8]).

Теоремы 1 и 3 справедливы лишь в предположении непустоты  $riC$ . Однако если пространство  $Y$  бесконечномерно, то относительная внутренность лежащего в нем выпуклого конуса  $C$  может быть пуста. Поэтому приведем теорему о неявной функции, справедливую без априорного предположения непустоты  $riC$ .

**Теорема 4.** *Предположим, что отображение  $F$  2-регулярно в точке  $(x_*, \sigma_*)$  относительно  $K$  по некоторому направлению  $h \in X$ . Тогда существует окрестность  $O$  точки  $\sigma_*$  и непрерывное отображение  $x(\cdot) : O \rightarrow K$  такие, что имеет место (6) и*

$$\|x(\sigma) - x_*\| \leq \text{const} \left( \Delta_1(\sigma) + \Delta_2(\sigma) + \|F(x_*, \sigma)\|^{1/2} \right).$$

Доказательство этой теоремы также во многом повторяет доказательство теоремы 1. Для  $\sigma : \Delta_1(\sigma) + \Delta_2(\sigma) + \|F(x_*, \sigma)\| > 0$  рассмотрим уравнение (11). Его решение будем искать в виде

$$\tilde{x}(\sigma) = x_* + \varepsilon h + \varepsilon N \tilde{\xi}_2 + \varepsilon^2 N(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_0), \tag{20}$$

где  $\tilde{\xi} \in D_\gamma$  и  $\varepsilon > 0$  подлежат определению. Далее, как и при доказательстве теоремы 1 приходим к уравнению (17), но уже при  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta = \eta_2 = \varepsilon^{-1} \hat{L}(\sigma)h + \varepsilon^{-2} F(x_*, \sigma)$  и, исследуя его точно так же, найдем его решение  $\tilde{\xi}(\tilde{\sigma})$ .

Положим  $\varepsilon(\sigma) = \mu(\Delta_1(\sigma) + \Delta_2(\sigma) + \|F(x_*, \sigma)\|^{1/2})$ ,  $\eta(\sigma) = \varepsilon(\sigma)^{-1} \hat{L}(\sigma)h + \varepsilon(\sigma)^{-2} F(x_*, \sigma)$ . Очевидно,  $\|\eta(\sigma)\| \leq \text{const} \mu^{-1}$ , так как  $\varepsilon(\sigma)^{-2} \|F(x_*, \sigma)\| \leq \mu^{-1}$ . Затем следует повторить соответствующее окончание доказательства теоремы 1. Теорема доказана. □

Отметим, что если дополнительно к предположениям теоремы 4 выполняется условие (19), то в оценке (20) слагаемое  $\Delta_2(\sigma)$  можно опустить. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3.

Приведем пример, в котором выполнены предположения теоремы 1, а главным членом в оценке (7) является член  $\Delta_2$ .

Пример 1.

$$X = \mathbb{R}^5, \quad Y = \mathbb{R}^2, \quad \Sigma = \mathbb{R}_+^1, \quad K = \{x : x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_5 \geq 0\},$$

$$F_1(x, \sigma) = -x_1 + x_2^2 - x_3\sigma^\alpha = 0, \quad F_2(x, \sigma) = -x_5 + x_3x_4 - \sigma^\beta = 0,$$

где  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  заданы, причем  $\beta > 2\alpha$ .

Непосредственным вычислением проверяется, что предположения теоремы 1 выполнены в точке  $x_* = 0$ ,  $\sigma_* = 0$  при  $h = (0, 1, 0, 1, 0)$ . Очевидно,  $C$  — неположительный ортант в  $\mathbb{R}^2$  и, следовательно,  $\pi = 0 \Rightarrow \Delta_1(\sigma) \equiv 0$ . Возьмем произвольный вектор  $l \in \text{int}C$  и  $\delta > 0$ . Имеем  $|F(0, \sigma)| \equiv \sigma^\beta$ , откуда в силу замечания к теореме 1  $\rho(-F(0, \sigma), C_\delta)^{1/2} \leq \sigma^{\beta/2}$ . Кроме того,  $\Delta_2(\sigma) \equiv \sigma^\alpha$ .

Далее, если  $x = x(\sigma)$  удовлетворяет (1) при  $\sigma > 0$ , то  $x_2^2 \geq x_3\sigma^\alpha$ ,  $x_3 \geq \sigma^\beta/x_4 \Rightarrow x_2(\sigma)^2 x_4(\sigma) \geq \sigma^{\alpha+\beta}$ . Поэтому, если оценка  $|x(\sigma)| \leq \text{const } \sigma^\delta$  выполняется при всех малых  $\sigma > 0$ , то  $\delta \leq (\alpha + \beta)/3 < \beta/2$  (так как по условию  $\beta > 2\alpha$ .) Следовательно оценка:  $|x(\sigma)| \leq \text{const } \sigma^{\beta/2}$  при всех малых  $\sigma > 0$  не выполняется, и, значит, в (7) член  $\Delta_2$  является главным, причем оценка (7) принимает вид  $|x(\sigma)| \leq \text{const } \sigma^\alpha$ .

В следующем примере  $K = X$  и выполнены предположения теоремы 3, а главными членами в оценке (7) являются члены  $\Delta_1 = \Delta_2$ .

Пример 2.

$$X = \mathbb{R}^3, \quad Y = \mathbb{R}^2, \quad \Sigma = \mathbb{R}^1, \quad K = X,$$

$$F_1(x, \sigma) = \sigma x_1 + x_1 x_2 + \sigma^3 = 0, \quad F_2(x, \sigma) = x_3^2 + x_1 x_3 + \sigma^3 = 0.$$

Легко видеть, что предположения теоремы 3 выполнены в точке  $x_* = 0$ ,  $\sigma_* = 0$  при  $h = (1, 0, 0)$ . Далее,  $C_\delta = \{0\}$ ,  $\|F(0, \sigma)\|^{1/2} \leq \text{const } |\sigma|^{3/2}$  и  $\Delta_1(\sigma) \equiv \Delta_2(\sigma) \equiv |\sigma|$ , так как  $\pi$  — тождественный оператор и  $\text{Ker } \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = X$ . Поэтому в силу теоремы 3 имеет место оценка  $|x(\sigma)| \leq \text{const } |\sigma|$ .

В то же время покажем, что оценка  $\|x(\sigma)\| \leq \text{const } |\sigma|^{3/2}$  не выполняется. Действительно, предположим противное. Тогда имеет место представление  $x_s(\sigma) \equiv \sigma^{3/2} \xi_s(\sigma)$ , где  $\xi_s(\cdot)$ ,  $s = 1, 2, 3$  — некоторые ограниченные функции. Подставляя это представление в первое уравнение и деля полученное тождество на  $\sigma^3$ , заключаем, что  $\xi_1(\sigma) \rightarrow 0$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ . Подставляя это представление во второе уравнение и деля полученное тождество на  $\sigma^3$ , имеем  $\xi_3^2(\sigma) + \xi_1(\sigma)\xi_3(\sigma) + 1 \equiv 0$ , что приводит к противоречию, так как в силу вышесказанного  $\xi_1(\sigma)\xi_3(\sigma) \rightarrow 0$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ .

Другие примеры, в которых главным в оценке (7) является член  $\Delta_1$ , а также пример, показывающий существенность предположения (19) в теореме 3, приведены в [8]. Уравнение  $F(x, \sigma) = x_1^2 - x_2^2 - \sigma = 0$  при  $K = X = \mathbb{R}^2$ ,  $x_* = 0$ ,  $\sigma_* = 0$  дает пример, в котором главным в оценке (7) является член  $|F(0, \sigma)|^{1/2} = \rho(-F(0, \sigma), C_\delta)^{1/2} = \sqrt{|\sigma|}$ , так как здесь  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$  и  $C_\delta = \{0\}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. С.
2. Тихомиров В.М. Теорема Люстерника о касательном пространстве и некоторые ее модификации // Оптимальное управление. Математические вопросы управления производством. М.: Изд-во МГУ, 1977. Вып. 7. С. 22–30.
3. Robinson S. Stability theory for systems of inequalities. Part II: Differentiable nonlinear systems // SIAM J. Num. Anal. 1976. Vol. 13, no. 4. P. 497–513.

4. **Bonnans J.F., Shapiro A.** Perturbation analysis of optimization problems. New York: Springer-Verlag, 2000. P. 601.
5. **Аваков Е.Р.** Теоремы об оценках в окрестности особой точки отображения // Мат. заметки. 1990. Т. 47, вып. 5. С. 3–13.
6. **Измаилов А.Ф.** Теоремы о представлении семейств нелинейных отображений и теоремы о неявной функции // Мат. заметки. 2000. Т. 67, вып. 1. С. 57–68.
7. **Арутюнов А.В.** Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Аномальные точки // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 1. С. 3–26.
8. **Арутюнов А.В.** Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 2. С. 205–215.
9. **Арутюнов А.В.** Накрывание нелинейных отображений на конусе в окрестности аномальной точки // Мат. заметки. 2005. Т. 77, вып. 4. С. 483–497.
10. **Половинкин Е.С., Балашов М.В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. С. 416.
11. **Michael E.A.** Continuous selections // Ann. Math. 1956. Vol. 63, № 2. P. 361–382; Vol. 64, № 3. P. 562–580.

Арутюнов Арам Владимирович

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. кафедрой

Российский ун-т дружбы народов, ЮМИ ВНЦ РАН

e-mail: arutun@orc.ru

Поступила 24.12.2009

УДК 517.977

**К НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ****А. С. Банников, Н. Н. Петров**

Рассматривается классический нестационарный пример Понтрягина со многими участниками и фазовыми ограничениями на состояния убегающего при одинаковых динамических и инерционных возможностях игроков. Отдельно рассмотрен случай простого движения. Получены условия разрешимости задач преследования и уклонения.

Ключевые слова: групповое преследование, нестационарная задача, пример Л.С. Понтрягина, фазовые ограничения.

A. S. Bannikov, N. N. Petrov. On a nonstationary problem of group pursuit.

Pontryagin's classical nonstationary example with many participants and phase constraints on the evader's states with equal dynamic and inertia capabilities of the players is considered. The case of a simple motion is considered separately. Solvability conditions for problems of pursuit and evasion are obtained.

Keywords: group pursuit, nonstationary problem, Pontryagin's example, phase constraints.

**Введение**

Достаточно широкий класс линейных дифференциальных игр преследования охватывает обобщенный нестационарный контрольный пример Понтрягина [1–6]. Для такого класса игр рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего при условии, что убегающий в процессе игры не покидает пределы многогранного множества. При этом граница фазовых ограничений не является “линией смерти” для убегающего. Получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Отдельно рассмотрен случай простого преследования. Стационарный случай  $a(t) \equiv 1$  задачи простого преследования рассматривался многими авторами. В работах [7, 8] получено решение данной задачи без фазовых ограничений, причем в работе [7] рассмотрен случай, когда множество допустимых управлений игроков — шар, терминальные множества — начало координат, в работе [8] множество допустимых управлений и терминальные множества — выпуклые компакты. В работе [9] получено решение задачи с фазовыми ограничениями в случае, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар единичного радиуса, терминальные множества — начало координат, а фазовые ограничения — выпуклый компакт. В работе [10] получено решение задачи простого группового преследования с фазовыми ограничениями, когда множество, ограничивающее управления игроков, — шар единичного радиуса, терминальные множества — выпуклые компакты, а фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество. В работе [11] рассматривался случай, когда множество допустимых управлений игроков — выпуклый компакт, терминальные множества — выпуклые компакты, фазовые ограничения — выпуклое многогранное множество. Результаты примыкают к исследованиям [6, 12–14].

**1. Нестационарный пример Л. С. Понтрягина**

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $\Gamma$   $n + 1$  лиц:  $n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и убегающий  $E$ . Закон движения каждого из преследователей  $P_i$  имеет вид

$$x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)x_i = u_i, \quad u_i \in V. \quad (1.1)$$

Закон движения убегающего  $E$  имеет вид

$$y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + \dots + a_l(t)y = v, \quad v \in V. \quad (1.2)$$

Здесь  $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $a_1, \dots, a_l$  — непрерывные на  $[t_0, \infty)$  функции,  $i = 1, \dots, n$ . При  $t = t_0$  заданы начальные условия

$$\begin{aligned} x_i(t_0) &= x_{i0}^0, & \dot{x}(t_0) &= x_{i1}^0, \dots, x_i^{(l-1)}(t_0) = x_{il-1}^0, \\ y(t_0) &= y_0^0, & \dot{y}(t_0) &= y_1^0, \dots, y^{(l-1)}(t_0) = y_{l-1}^0, \end{aligned}$$

причем  $x_{i0} \neq y_0^0$ .

Дополнительно предполагается, что убегающий в процессе игры не покидает пределы выпуклого многогранного множества

$$D = \left\{ y \mid y \in \mathbb{R}^k, \langle p_j, y \rangle \leq \mu_j, j = 1, \dots, r \right\}, \quad (1.3)$$

где  $p_1, \dots, p_r$  — единичные векторы,  $\mu_1, \dots, \mu_r$  — вещественные числа такие, что  $\text{Int } D \neq \emptyset$ .

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t)z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in V, \quad (1.4)$$

$$z_i(t_0) = z_{i0}^0 = x_{i0}^0 - y_0^0, \dots, z_i^{(l-1)}(t_0) = z_{il-1}^0 = x_{il-1}^0 - y_{l-1}^0.$$

**О п р е д е л е н и е 1.** Будем говорить, что в игре  $\Gamma$  *происходит поимка*, если существуют момент  $T(z^0)$ , квазистратегии  $\mathcal{U}_1(t, z^0, v_t(\cdot)), \dots, \mathcal{U}_n(t, z^0, v_t(\cdot))$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  такие, что для любой измеримой функции  $v(\cdot)$ ,  $v(t) \in V$ ,  $y(t) \in D$ ,  $t \in [t_0, T(z^0)]$ , существуют момент времени  $\tau \in [t_0, T(z^0)]$  и номер  $s$  такие, что  $x_s(\tau) - y(\tau) = 0$ , где  $v_t(\cdot) = \{v(s), s \in [0, t]\}$ .

Обозначим через  $\varphi_q(t, s)$ ,  $q = 0, \dots, l-1$  ( $t \geq s \geq t_0$ ), решения уравнения

$$w^{(l)} + a_1(t)w^{(l-1)} + \dots + a_l(t)w = 0$$

с начальными условиями

$$w^{(j)}(s) = 0, \quad j = 0, \dots, q-1, q+1, \dots, l-1, \quad w^{(q)}(s) = 1.$$

**Предположение 1.** Для всех  $t \geq t_0$ ,  $t_0 \leq s \leq t$ , справедливо неравенство  $\varphi_{l-1}(t, s) \geq 0$ .

Пусть далее

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \varphi_0(t, t_0)z_{i0}^0 + \varphi_1(t, t_0)z_{i1}^0 + \dots + \varphi_{l-1}(t, t_0)z_{il-1}^0, \\ \eta(t) &= \varphi_0(t, t_0)y_0^0 + \varphi_1(t, t_0)y_1^0 + \dots + \varphi_{l-1}(t, t_0)y_{l-1}^0. \end{aligned}$$

**Предположение 2.** Существуют функции  $\beta_i \in C[t_0, \infty)$ , векторы  $z_i^0$ ,  $z_i^0 \neq 0$  такие, что

1.  $\beta_i(t) > 0$  для всех  $t > t_0$ ;
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_i(t)\xi_i(t) = z_i^0$ .

Обозначим  $\beta(t) = \min_i \beta_i(t)$ ,  $\lambda(z, v) = \sup \{ \lambda : \lambda \geq 0, -\lambda z \in V - v \}$ ,  $\lambda_i(v) = \lambda(z_i^0, v)$ ,  $\lambda_{j+n}(v) = \langle p_j, v \rangle$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $I(q) = \{1, \dots, n+q\}$ ,  $\delta_0 = \inf_{v \in V} \max_{q \in I(r)} \lambda_q(v)$ ,  $\xi_i^1(t) = \beta_i(t)\xi_i(t)$ ,  $V_1 = \{v : v \in V, \lambda_i(v) = 0, i = 1, \dots, n\}$ ,  $f(t) = \int_{t_0}^t \varphi_{l-1}(t, s) ds$ .

**Предположение 3.**

1. Функция  $\lambda(z, v)$  непрерывна во всех точках  $(z, v)$  таких, что  $\lambda(z, v) > 0$ ;
2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t)f(t) = \infty$ ;
3. Для каждого  $\tau > t_0$  выполнены следующие условия:

- 3.1.  $\|\beta(t)\eta(t)\|$  ограничена на  $[\tau, \infty)$ ;

- 3.2.  $\beta(t) \int_{t_0}^{\tau} \varphi_{l-1}(t, s) ds$  ограничена на  $[\tau, \infty)$ .

**Лемма 1.** Пусть для игры  $\Gamma$  выполнены предположения 1–3,  $D = \mathbb{R}^k$ ,  $\delta_0 > 0$ . Тогда существует момент  $T_0 > t_0$  такой, что для любой допустимой функции  $v(\cdot)$  найдется номер  $q$ , такой что

$$1 - \beta_q(T_0) \int_{t_0}^{T_0} \varphi_{l-1}(T_0, s) \lambda(\xi_q^1(T_0), v(s)) ds \leq 0.$$

**Лемма 2.** Пусть для игры  $\Gamma$  выполнены предположения 1–3,  $\delta_0 > 0$ ,  $r = 1$ ,  $\mu_1 = 0$ . Тогда существует момент  $T_0 > t_0$  такой, что для любой допустимой функции  $v(\cdot)$  найдется номер  $q$ , такой что

$$1 - \beta_q(T_0) \int_{t_0}^{T_0} \varphi_{l-1}(T_0, s) \lambda(\xi_q^1(T_0), v(s)) ds \leq 0.$$

**Доказательство.** Пусть  $T > t_0$  — произвольное число,  $v : [t_0, T] \rightarrow V$  — допустимая функция. Определим функции  $h_i$ :

$$h_i(t) = 1 - \beta_i(t) \int_{t_0}^t \varphi_{l-1}(t, s) \lambda(\xi_i^1(T), v(s)) ds;$$

$h_i(t_0) = 1$ ,  $h_i$  — непрерывные функции и

$$\sum_{i=1}^n h_i(T) \leq n - \beta(T) \int_{t_0}^T \varphi_{l-1}(T, s) \max_i \lambda(\xi_i^1(T), v(s)) ds.$$

Так как  $\lim_{T \rightarrow \infty} \xi_i^1(T) = z_i^0$ , то существует момент  $T_1 > t_0$  такой, что

$$\inf_v \max \left\{ \max_i \lambda(\xi_i^1(T), v), \lambda_{n+1}(v) \right\} \geq \delta = \frac{\delta_0}{2}$$

для всех  $T > T_1$ .

Так как  $y(t) \in D$ , то  $\langle p_1, y(t) \rangle \leq 0$  для всех  $t \geq t_0$ . Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\int_{T_1}^t \varphi_{l-1}(t, s) \langle p_1, v(s) \rangle ds \leq \mu(t) = -\langle p_1, \eta(t) \rangle - \int_{t_0}^{T_1} \varphi_{l-1}(t, s) \langle p_1, v(s) \rangle ds. \quad (1.5)$$

Определим два множества  $\Delta_1(t)$ ,  $\Delta_2(t) \subset [T_1, t]$  ( $t > T_1$ ) следующим образом:

$$\Delta_1(t) = \{ \tau \mid \tau \in [T_1, t], \langle p_1, v(\tau) \rangle < \delta \}, \quad \Delta_2(t) = \{ \tau \mid \tau \in [T_1, t], \langle p_1, v(\tau) \rangle \geq \delta \}.$$

Тогда

$$G_1 + G_2 = f_1(t), \quad -dG_1 + \delta G_2 \leq \mu(t),$$

где

$$G_{1,2} = \int_{\Delta_{1,2}(t)} \varphi_{l-1}(t, s) ds, \quad f_1(t) = \int_{T_1}^t \varphi_{l-1}(t, s) ds.$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$G_1 \geq \frac{\delta f_1(t) - \mu(t)}{d + \delta}. \quad (1.6)$$

Считая, что  $T > T_1$ , из неравенств (1.5), (1.6) получаем

$$\sum_i h_i(T) \leq n - \beta(T)\delta \int_{\Delta_1(T)} \varphi_{l-1}(T, s) ds \leq n - \delta\beta(T) \frac{\delta f_1(T) - \mu(T)}{d + \delta} = g(T).$$

В силу предположения 3 функции  $\|\beta(T)\langle p_1, \eta(T) \rangle\|$ ,  $\beta(T) \int_{t_0}^{T_1} \varphi_{l-1}(T, s) ds$  ограничены на  $[T_1, \infty)$  и, кроме того,  $\lim_{T \rightarrow \infty} \beta(T)f_1(T) = \infty$ . Поэтому  $\lim_{T \rightarrow \infty} g(T) = -\infty$ . Следовательно, существует момент  $T_0$ , удовлетворяющий условию леммы. Лемма доказана.  $\square$

Пусть

$$V(t) = \left\{ v(\cdot) \mid v : [t_0, t] \rightarrow V, v(\tau) \in V, y(\tau) \in D, \tau \in [t_0, t] \right\},$$

$$T(z^0) = \min \left\{ t \mid t \geq t_0, \inf_{v(\cdot) \in V(t)} \max_i \beta_i(t) \int_{t_0}^t \varphi_{l-1}(t, s) \lambda(\xi_i^1(t), v(s)) ds \geq 1 \right\}. \quad (1.7)$$

В силу леммы 2  $T(z^0) < \infty$ .

**Теорема 1.** Пусть для игры  $\Gamma$  выполнены предположения 1–3,  $D = \mathbb{R}^k$ ,  $\delta_0 > 0$ . Тогда в игре  $\Gamma$  происходит поимка.

**Теорема 2.** Пусть для игры  $\Gamma$  выполнены предположения 1–3,  $\delta_0 > 0$ ,  $\mu_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, r$  и хотя бы одно из следующих двух условий:

1.  $r = 1$ ;
2.  $\min_{v \in \text{conv } V_1} \max_j \langle p_j, v \rangle > 0$ .

Тогда в игре  $\Gamma$  происходит поимка.

**Доказательство.** Пусть  $v : [t_0, T] \rightarrow V$  — произвольное допустимое управление убегающего  $E$ ,  $T = T(z^0)$  и  $t_1$  — наименьший положительный корень функции  $h$  вида

$$h(t) = 1 - \max_i \beta_i(t) \int_{t_0}^t \varphi_{l-1}(t, s) \lambda(\xi_i^1(T), v(s)) ds.$$

Задаем управления преследователей  $P_i$ , полагая

$$u_i(\tau) = v(\tau) - \lambda(\xi_i^1(T), v(\tau)) \xi_i^1(T), \quad \tau \in [t_0, T].$$

Считаем, что  $\lambda(\xi_i^1(T), v(\tau)) = 0$  для всех  $\tau \in [t_1, T]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \beta_i(T)z_i(T) &= \xi_i^1(T) + \beta_i(T) \int_{t_0}^T \varphi_{l-1}(T, s)(u_i(s) - v(s))ds \\ &= \xi_i^1(T) \left( 1 - \beta_i(T) \int_{t_0}^{t_1} \varphi_{l-1}(T, s)\lambda(\xi_i^1(T), v(s))ds \right). \end{aligned}$$

Из (1.7) следует, что  $\beta_q(T)z_q(T) = 0$  при некотором  $q$ , и теорема в случае  $r = 1$  доказана.

Пусть выполнено условие 2 теоремы. Тогда по теореме Боннеблеста, Карлина, Шепли [15] существуют числа  $\alpha_j \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$  такие, что  $\inf_{v \in \text{conv } V_1} \sum_{j=1}^r \alpha_j \langle p_j, v \rangle > 0$ . Полагая

$$p = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r, \quad D_1 = \{y \mid y \in \mathbb{R}^k, \langle p, y \rangle \leq 0\},$$

получаем, что

$$D \subset D_1, \quad \inf_v \max_j \lambda_j(v) > 0,$$

где  $\lambda_{n+1}(v) = \langle p, v \rangle$ . Поэтому в силу ранее доказанного произойдет поимка в игре  $\Gamma_1$  с фазовым ограничением  $D_1$ . Следовательно, поимка произойдет и в игре  $\Gamma$ .

Теорема доказана.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть для игры  $\Gamma$  выполнены предположения 1–3,  $\mu_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $V = D_1(0)$ ,  $n \geq k$ ,

$$0 \in \text{Int conv} \{z_1^0, \dots, z_n^0, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда в игре  $\Gamma$  происходит поимка.

**Следствие 2.** Пусть для игры  $\Gamma$  выполнены предположения 1–3,  $D = \mathbb{R}^k$ ,  $V = D_1(0)$ ,

$$0 \in \text{Int conv} \{z_1^0, \dots, z_n^0\}.$$

Тогда в игре  $\Gamma$  происходит поимка.

**Пример 1.** Система (1.4) имеет вид

$$\ddot{z}_i + \frac{4}{t}\dot{z}_i + \frac{2}{t^2}z_i = u_i - v, \quad \|u_i\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1,$$

$$z_i(t_0) = z_{i0}^0, \quad \dot{z}_i(t_0) = z_{i1}^0, \quad t_0 > 0.$$

Тогда

$$\varphi_0(t, s) = \frac{2s}{t} - \frac{s^2}{t^2}, \quad \varphi_1(t, s) = \frac{s^2}{t} - \frac{s^3}{t^2}.$$

Кроме того

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)z_{i0}^0 + \varphi_1(t, t_0)z_{i1}^0 = \frac{2t_0 z_{i0}^0 + t_0^2 z_{i1}^0}{t} - \frac{t_0^2 z_{i0}^0 + t_0^3 z_{i1}^0}{t^2},$$

$$\beta_i(t) = t, \quad z_i^0 = 2t_0 z_{i0}^0 + t_0^2 z_{i1}^0.$$

Считаем, что  $z_i^0 \neq 0$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $\mu_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, r$ ,  $n \geq k$  и

$$0 \in \text{Int conv} \{z_1^0, \dots, z_n^0, p_1, \dots, p_r\}.$$

Тогда в игре  $\Gamma$  происходит поимка.

**Пример 2.** Система (1.4) имеет вид

$$\dot{z}_i + \frac{1}{t} z_i = u_i - v, \quad u_i, v \in V, \quad z_i(t_0) = z_i^0.$$

Для данного примера выполнены все предположения 1–3.

**Утверждение 2.** Пусть  $\delta_0 > 0$ ,  $\mu_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, r$  и выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

1.  $r = 1$ ;
2.  $\min_{v \in \text{conv } V_1} \max_j \langle p_j, v \rangle > 0$ .

Тогда в игре  $\Gamma$  происходит поимка.

## 2. Нестационарная задача простого преследования

### 2.1. Постановка задачи

В пространстве  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 2$ ) рассматривается дифференциальная игра  $n + 1$  лиц:  $n$  преследователей  $P_1, \dots, P_n$  и убегающего  $E$ .

Закон движения каждого из преследователей  $P_i$  имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \quad x_i(t_0) = x^0, \quad u_i \in Q. \quad (2.1)$$

Закон движения убегающего  $E$  имеет вид

$$\dot{y}(t) = a(t)v(t), \quad y(t_0) = y^0, \quad v \in Q, \quad (2.2)$$

причем  $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $M_i$  — заданные выпуклые компакты;  $a(t)$  — измеримая по Лебегу функция, интегрируемая на любом компактном подмножестве оси  $t$ ,  $\int_{t_0}^{+\infty} |a(s)| = +\infty$ ;  $Q$  — строго выпуклый компакт с гладкой границей,  $0 \in Q$ .

Будем полагать, что убегающий  $E$  в процессе игры не покидает пределы множества  $D$  вида (1.3).

Пусть  $T > t_0$  — произвольное число и  $\sigma$  — некоторое конечное разбиение отрезка  $[t_0, T]$ :  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_s < \tau_{s+1} = T$ .

**Определение 2.** Кусочно-программной стратегией  $V$  убегающего  $E$ , заданной на  $[t_0, T]$ , соответствующей разбиению  $\sigma$ , называется семейство отображений  $b^l$ ,  $l = 0, 1, \dots, s$ , ставящих в соответствие величинам

$$(\tau_l, x_1(\tau_l), \dots, x_n(\tau_l), y(\tau_l)) \quad (2.3)$$

измеримую функцию  $v_l(t)$ , определенную для  $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$  и такую, что  $v_l(t) \in Q$ ,  $y(t) \in D$ ,  $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ .

**Определение 3.** Кусочно-программной контрстратегией  $U_i$  преследователя  $P_i$ , соответствующей разбиению  $\sigma$ , называется семейство отображений  $c^l$ ,  $l = 0, 1, \dots, s$ , ставящих

в соответствие величинам (2.3) и управлению  $v_i(t)$  измеримую функцию  $u_i^i(t)$ , определенную для  $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$  и такую, что  $u_i^i(t) \in Q$ ,  $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ .

Пусть  $z^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$ . Обозначим данную игру  $\Gamma = \Gamma(n, z^0, D)$ .

**О п р е д е л е н и е 4.** В игре  $\Gamma$  возможно *уклонение от встречи*, если для любого числа  $T > t_0$  существуют разбиение  $\sigma$  интервала  $[t_0, T]$ , стратегия  $V$  убегающего  $E$ , соответствующая разбиению  $\sigma$ , такие, что для любых траекторий игроков  $P_i$  имеет место

$$x_i(t) - y(t) \notin M_i, \quad t \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $y(t)$  — реализовавшаяся в данной ситуации траектория убегающего  $E$ .

**О п р е д е л е н и е 5.** В игре  $\Gamma$  происходит *поймка*, если существует  $T > t_0$  и для любого разбиения  $\sigma$  интервала  $[t_0, T]$ , любой траектории  $y(t)$  игрока  $E$  существуют кусочно-программные контрстратегии  $U_i$  игроков  $P_i$ , соответствующие разбиению  $\sigma$ , момент  $\tau \in [t_0, T]$  и номер  $m \in \{1, 2, \dots, n\}$  такие, что

$$x_m(\tau) - y(\tau) \in M_m,$$

где  $x_m(t)$  — реализовавшаяся в данной ситуации траектория преследователя  $P_m$ .

Вместо систем (2.1) и (2.2) будем рассматривать систему

$$\dot{z}_i(t) = a(t)(u_i(t) - v(t)), \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \quad (2.4)$$

Введем функции  $\lambda_i$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_i(v, m_i) &= \max\{\lambda \mid v - \lambda(z_i^0 - m_i) \in Q, v \in Q\}, & \lambda_i(v) &= \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, m_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ \lambda_i^-(w, m_i) &= \max\{\lambda \mid w - \lambda(z_i^0 - m_i) \in -Q, w \in -Q\}, & \lambda_i^-(w) &= \max_{m_i \in M_i} \lambda_i^-(w, m_i), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Так как  $Q$  — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то функции  $\lambda_i$  непрерывны на  $Q$ ,  $\lambda_i^-$  непрерывны на  $-Q$  (см. [4]), и существуют

$$\delta(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(v), \quad \delta^-(z^0) = \min_{w \in -Q} \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i^-(w),$$

причем

$$\delta(z^0) = 0 \iff 0 \in \text{Int conv} \bigcup_{i=1}^n (z_i^0 - M_i) \iff \delta^-(z^0) = 0.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A^\pm(t) &= \{\tau \in [t_0, t] \mid \pm a(\tau) > 0\}, & A^\pm &= A^\pm(+\infty), \\ A^0(t) &= \{\tau \in [t_0, t] \mid a(\tau) > 0\}, & A^0 &= A^0(+\infty), \\ \alpha^\pm(t) &= \int_{A^\pm(t)} |a(s)| ds. \end{aligned}$$

## 2.2. Групповое преследование одного убегающего без фазовых ограничений

Рассмотрим случай, когда  $D = \mathbb{R}^k$ , т. е. на траекторию убегающего не наложено никаких фазовых ограничений.

**Теорема 3.** В игре  $\Gamma$  происходит *поймка* тогда и только тогда, когда  $\delta(z^0) > 0$ .

**Доказательство.** Из [4] следует, что функции  $\lambda_i(v, m_i)$ ,  $\lambda_i^-(w, m_i)$  непрерывны по совокупности переменных, а отображения  $\mathcal{M}_i(v) = \{m_i \in M_i | \lambda_i(v, m_i) = \lambda_i(v)\}$  однозначны и непрерывны.

Зададим контрстратегии  $U_i$  преследователей  $P_i$  следующим образом:

$$u_i^i(t) = \begin{cases} v_l(t) - \lambda_i(v_l(t)) (z_i^0 - \mathcal{M}_i(v_l(t))), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^+, \\ v_l(t), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^0, \\ v_l(t) + \lambda_i^-(-v_l(t)) (z_i^0 - \mathcal{M}_i(-v_l(t))), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^-, \end{cases}$$

где  $\sigma = \{t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{s+1} = T(z^0)\}$ ,  $V$  — произвольная стратегия убегающего  $E$ , соответствующая разбиению  $\sigma$ ,  $T(z^0)$  будет определено позже. Тогда для решения системы (2.4) справедливо представление

$$\begin{aligned} z_i(t) &= z_i^0 \left( 1 - \int_{A^+(t)} a(s) \lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)| \lambda_i^-(-v(s)) ds \right) \\ &+ \int_{A^+(t)} a(s) \mathcal{M}_i(v(s)) \lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(t)} |a(s)| \mathcal{M}_i(-v(s)) \lambda_i^-(-v(s)) ds. \end{aligned}$$

Из определения величин  $\delta(z^0)$ ,  $\delta^-(z^0)$  получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \left( 1 - \int_{A^+(t)} a(s) \lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)| \lambda_i^-(-v(s)) ds \right) \\ &= n - \left( \int_{A^+(t)} a(s) \sum_{i=1}^n \lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(t)} |a(s)| \sum_{i=1}^n \lambda_i^-(-v(s)) ds \right) \\ &\leq n - \left( \int_{A^+(t)} a(s) \max_{i=1..n} \lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(t)} |a(s)| \max_{i=1..n} \lambda_i^-(-v(s)) ds \right) \\ &\leq n - \left( \int_{A^+(t)} a(s) \delta(z^0) ds + \int_{A^-(t)} |a(s)| \delta^-(z^0) ds \right) \leq n - \min\{\delta(z^0), \delta^-(z^0)\} \int_{t_0}^t |a(s)| ds. \end{aligned}$$

Поэтому не позже момента

$$T(z^0) = t_0 + \min \left\{ t \mid \int_{t_0}^t |a(s)| ds = \frac{n}{\min\{\delta(z^0), \delta^-(z^0)\}} \right\}$$

хотя бы одна из величин  $1 - \int_{A^+(t)} a(s) \lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)| \lambda_i^-(-v(s)) ds$  обратится в нуль. Тогда

$$z_i(T(z^0)) = \int_{A^+(T(z^0))} a(s) \mathcal{M}_i(v(s)) \lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(T(z^0))} |a(s)| \mathcal{M}_i(-v(s)) \lambda_i^-(-v(s)) ds \in M_i.$$

Таким образом, хотя бы один из преследователей ловит к моменту  $T(z^0)$  убегающего  $E$ .

Пусть теперь для позиции  $z_0$  выполнено  $\delta(z^0) = 0$ . Это означает, что существуют векторы  $v_0, -w_0 \in Q$  такие, что  $\lambda_i(v_0) = 0$ ,  $\lambda_i^-(w_0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , при этом  $w_0$  можно выбрать таким, что  $C(Q, -p_0) = \langle -w_0, -p_0 \rangle$  ( $p_0$  — единичный опорный вектор к  $Q$  в точке  $v_0$ ). Зададим

стратегию убегающего следующим образом:  $\sigma = \{t_0, +\infty\}$ ,  $v(t) = \begin{cases} v_0, & a(t) \geq 0, \\ -w_0, & a(t) < 0. \end{cases}$

Предположим, что в игре  $\Gamma$  происходит поимка. Тогда существуют  $T > t_0$ , контрстратегии преследователей  $U_1, \dots, U_n$  такие, что  $z_i(T) \in M_i$  при некотором  $i \in \{1, \dots, n\}$ , а для  $z_i(T)$  справедливо представление

$$z_i(T) = z_i^0 + (u_1 - v_0)\alpha^+(T) + (u_2 - w_0)\alpha^-(T) = m_i \in M_i,$$

$$u_1 = \begin{cases} \frac{\int_{A^+(T)} a(s)u_i(s) ds}{\alpha^+(T)} \in Q, & \alpha^+(T) > 0, \\ v_0, & \alpha^+(T) = 0, \end{cases} \quad u_2 = \begin{cases} \frac{\int_{A^-(T)} a(s)u_i(s) ds}{\alpha^-(T)} \in -Q, & \alpha^-(T) > 0, \\ w_0, & \alpha^-(T) = 0. \end{cases}$$

Перенесем  $z_i^0$  в правую часть и умножим скалярно на  $p_0$

$$\alpha^+(T)\langle u_1 - v_0, p_0 \rangle + \alpha^-(T)\langle w_0 - u_2, -p_0 \rangle \leq 0 \leq \langle m_i - z_i^0, p_0 \rangle,$$

причем одновременное равенство 0 левой и правой части невозможно. Значит, в игре  $\Gamma$  происходит уклонение от встречи. Теорема доказана.  $\square$

### 2.3. Групповое преследование одного убегающего с фазовыми ограничениями

Будем теперь предполагать, что убегающий  $E$  в процессе игры не покидает пределы множества  $D$  вида 1.3,  $Q$  — шар радиуса  $R > 0$  с центром в начале координат. Пусть

$$\delta_1(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{s=1, \dots, n+r} \lambda_s(v), \quad \delta_1^-(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{s=1, \dots, n+r} \lambda_s(-v).$$

Величина  $\delta_1(z^0) = 0$  в том и только том случае [12], когда

$$0 \notin \text{Int conv} \{z_1^0 - M_1, \dots, z_n^0 - M_n, p_1, \dots, p_r\}.$$

Учитывая, что по определению  $\delta_1(z^0) \geq 0$ , получаем, что

$$\delta_1(z^0) > 0 \iff 0 \in \text{Int conv} \{z_1^0 - M_1, \dots, z_n^0 - M_n, p_1, \dots, p_r\} \iff \delta_1^-(z^0) > 0.$$

**Теорема 4.** Пусть число элементов множества  $\bigcup_{i=1}^n (z_i^0 - M_i)$  не меньше  $k$ . Тогда для того, чтобы в игре  $\Gamma$  происходила поимка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $\delta_1(z^0) > 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\delta_1(z^0) > 0$ . Докажем, что в игре  $\Gamma(n, z^0, D)$  происходит поимка.

1. Рассмотрим сначала случай  $r = 1$ . Пусть  $V$  — произвольная стратегия убегающего  $E$ , соответствующая некоторому разбиению  $\sigma = \{t_0 = \tau_0 < \dots < \tau_{s+1} = T\}$  некоторого интервала  $[t_0, T]$ .

Зададим контрстратегии  $U_i$  преследователей  $P_i$  следующим образом:

$$u_i^j(t) = \begin{cases} v_l(t) - \lambda_i(v_l(t)) (z_i^0 - \mathcal{M}_i(v_l(t))), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^+, \\ v_l(t), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^0, \\ v_l(t) + \lambda_i(-v_l(t)) (z_i^0 - \mathcal{M}_i(-v_l(t))), & t \in [\tau_l, \tau_{l+1}) \cap A^-. \end{cases}$$

Так как стратегия  $V$  допустима, то  $y(t) \in D$ ,  $t \in [t_0, T]$ . Это означает, что

$$\langle p_1, y(t) \rangle = \left\langle p_1, y^0 + \int_{t_0}^t a(s)v(s) ds \right\rangle = \langle p_1, y_0 \rangle + \int_{t_0}^t a(s)\langle p_1, v(s) \rangle ds \leq \mu_1.$$

Пусть  $T_1^\pm(t)$  и  $T_2^\pm(t)$  — подмножества интервала  $[t_0, T]$  такие, что

$$T_1^+(t) = \left\{ \tau \in [t_0, t] \mid \langle p_1, v(\tau) \rangle < \delta_1(z^0) \right\} \cap A^+(t),$$

$$T_2^+(t) = \left\{ \tau \in [t_0, t] \mid \langle p_1, v(\tau) \rangle \geq \delta_1(z^0) \right\} \cap A^+(t),$$

$$T_1^-(t) = \left\{ \tau \in [t_0, t] \mid \langle p_1, -v(\tau) \rangle < \delta_1(z^0) \right\} \cap A^-(t),$$

$$T_2^-(t) = \left\{ \tau \in [t_0, t] \mid \langle p_1, -v(\tau) \rangle \geq \delta_1(z^0) \right\} \cap A^-(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_0 = \mu_1 - \langle p_1, y^0 \rangle &\geq \int_{t_0}^t a(s)\langle p_1, v(s) \rangle ds = \int_{T_1^+(t)} |a(s)|\langle p_1, v(s) \operatorname{sign} a(s) \rangle ds \\ &+ \int_{T_2^+(t)} |a(s)|\langle p_1, v(s) \operatorname{sign} a(s) \rangle ds \geq -R \int_{T_1^+(t)} |a(s)| ds + \delta_1(z^0) \left( \int_{t_0}^t |a(s)| ds - \int_{T_2^+(t)} |a(s)| ds \right). \end{aligned}$$

Получаем следующую оценку для  $\int_{T_1^+(t)} |a(s)| ds$ :

$$\int_{T_1^+(t)} |a(s)| ds \geq \frac{\delta_1^0 \int_{t_0}^t |a(s)| ds - \mu_0}{R + \delta_1^0} \quad (\delta_1^0 = \delta_1(z^0)).$$

Из определения контрстратегий  $U_i$  и системы (2.4) получаем

$$\begin{aligned} z_i(t) &= z_i^0 \left( 1 - \int_{A^+(t)} a(s)\lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)|\lambda_i(-v(s)) ds \right) \\ &+ \int_{A^+(t)} a(s)\mathcal{M}_i(v(s))\lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(t)} |a(s)|\mathcal{M}_i(-v(s))\lambda_i(-v(s)) ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим функции

$$f_i(t) = 1 - \int_{A^+(t)} a(s)\lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)|\lambda_i(-v(s)) ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это непрерывные невозрастающие функции,  $f_i(t_0) = 1$  и

$$\sum_{i=1}^n f_i(t) = n - \int_{A^+(t)} a(s) \sum_{i=1}^n \lambda_i(v(s)) ds - \int_{A^-(t)} |a(s)| \sum_{i=1}^n \lambda_i(-v(s)) ds \leq n - \delta_1^0 \int_{T_1^+(t)} |a(s)| ds$$

$$\leq n - \delta_1^0 \left( \frac{\delta_1^0 \int_{t_0}^t |a(s)| ds - \mu_0}{R + \delta_1^0} \right).$$

Из последнего неравенства следует, что существует момент времени

$$T_0 \leq t_0 + \min \left\{ t \mid \int_{t_0}^t |a(s)| ds = \frac{n(R + \delta_1^0) + \mu_0 \delta_1^0}{\delta_1^0} \right\}$$

такой, что одна из функций  $f_i$  обратится в 0 в момент  $T_0$ . Поэтому при  $t = T_0$  будем иметь  $f_i(T_0) = 0$  и

$$z_i(T_0) = \int_{A^+(T_0)} a(s) \mathcal{M}_i(v(s)) \lambda_i(v(s)) ds + \int_{A^-(T_0)} |a(s)| \mathcal{M}_i(-v(s)) \lambda_i(-v(s)) ds \in M_i.$$

Это и означает, что в игре  $\Gamma(n, z^0, D)$  происходит поимка.

**2.** Пусть теперь  $r > 1$ . Так как  $\delta_1^0 > 0$ , то  $0 \in \text{Int conv}\{z_1^0 - M_1, \dots, z_n^0 - M_n, p_1, \dots, p_r\}$ . Это означает, что существуют  $b_1, \dots, b_m \in \bigcup_{i=1}^n (z_i^0 - M_i)$  такие, что векторы  $b_1, \dots, b_m, p_1, \dots, p_r$  образуют положительный базис [16]. Можно считать, что  $m \geq k$  и векторы  $b_1, \dots, b_k$  образуют базис  $\mathbb{R}^k$ . Так как  $b_1, \dots, b_m, p_1, \dots, p_r$  — положительный базис, то существуют положительные числа

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_m$$

такие, что

$$0 = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_m b_m.$$

Рассмотрим вектор  $p_0 = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r$ . Тогда векторы  $b_1, \dots, b_m, p_0$  образуют положительный базис  $\mathbb{R}^k$ .

Рассмотрим множество

$$D_1 = \{z \mid \langle z, p_0 \rangle \leq \mu_0\},$$

где  $\mu_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mu_i$ . Тогда  $D \subset D_1$ . Если  $p_0 \neq 0$ , то в силу п. 1 данной теоремы в игре  $\Gamma_1(n, z^0, D_1)$  происходит поимка. Если же  $p_0 = 0$ , то  $D_1 = \mathbb{R}^k$ , и в силу теоремы 3 в игре  $\Gamma_1(n, z^0, D_1)$  происходит поимка. Поэтому поимка произойдет и в игре  $\Gamma(n, z^0, D)$ .

Предположим, что  $\delta_1^0 \leq 0$ . Это означает, что существует вектор  $v_0 \in Q$  такой, что

$$\begin{aligned} \lambda_i(v_0) &= 0, & i &= 1, \dots, n, \\ \langle p_j, v_0 \rangle &\leq 0, & j &= 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Зададим стратегию  $V$  убегающего  $E$  следующим образом:

$$\sigma = \{t_0, +\infty\}, \quad v(t) = \begin{cases} v_0, & a(t) \geq 0, \\ -v_0, & a(t) < 0. \end{cases}$$

Стратегия  $V$  допустима, так как

$$\langle p_j, y(t) \rangle = \langle p_j, y^0 \rangle + \int_{t_0}^t a(s) \langle p_j, v(s) \rangle ds \leq \mu_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

Предположим, что в игре  $\Gamma$  происходит поимка. Тогда существуют  $T > t_0$ , контрстратегии преследователей  $U_1, \dots, U_n$  такие, что  $z_i(T) \in M_i$  при некотором  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Тогда, повторяя рассуждения из теоремы 3, приходим к невозможности включения  $z_i(T) \in M_i$ . Тем самым доказано, что в игре  $\Gamma(n, z^0, D)$  происходит уклонение от встречи. Теорема доказана.  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
4. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
5. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: МГУ, 1990. 197 с.
6. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 2009. 266 с.
7. **Пшеничный Б.Н.** Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. **Григоренко Н.Л.** Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вест. МГУ. 1983. № 1. С. 41–47. (Вычисл. математика и кибернетика.)
9. **Иванов Р.П.** Простое преследование на компакте // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1318–1321.
10. **Петров Н.Н.** Теория игр: учеб. пособие. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1997. 197 с.
11. **Петров Н.Н.** Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 1992. № 5. С. 22–26.
12. **Банников А.С.** Об одной задаче группового преследования // Вест. Удм. ун-та. 2009. Вып. 3. С. 3–11. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
13. **Мезенцев А.В.** О некотором классе дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1971. № 6. С. 3–7.
14. **Никольский М.С.** Нестационарные линейные дифференциальные игры I // Кибернетика. 1970. № 6. С. 98–101.
15. **Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.** Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974. 29 с.
16. **Петров Н.Н.** Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606–617.

Банников Александр Сергеевич  
аспирант  
Удм. гос. ун-т  
e-mail: bannikov\_a\_s@mail.ru

Поступила 11.01.2010

Петров Николай Никандрович  
д-р физ.-мат. наук  
декан  
Удм. гос. ун-т  
e-mail: npetrov@udmnet.ru

УДК 515.126.2+515.122.2

ОТОВАЖЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ<sup>1</sup>

Н. В. Величко

В работе приведены три теоремы, касающиеся непрерывных отображений прямой Зоргенфрея  $S$  на числовую прямую  $\mathbb{R}$ . В первой из них доказывается существование открытого отображения, во второй — несуществование открытого счетно-кратного отображения, в третьей — невозможность слабо замкнутого отображения.

Ключевые слова: прямая Зоргенфрея, вещественная прямая, открытое отображение, слабо замкнутое отображение,  $d$ -отображение,  $c$ -кратное отображение.

N. V. Velichko. Maps of the Sorgenfrey line.

Three theorems are presented concerning continuous maps of the Sorgenfrey line  $S$  onto the real line  $R$ . The first theorem proves the existence of an open map, the second theorem establishes the nonexistence of an open countably-multiple map, and the third theorem states the impossibility of a weakly closed map.

Keywords: Sorgenfrey line, real line, open map, weakly closed map,  $d$ -map,  $c$ -to-1 map.

В работе рассматриваются непрерывные сюръективные отображения в классе хаусдорфовых пространств.

На числовой прямой  $\mathbb{R}$  рассматриваются две топологии: топология стрелки  $s$ , базу которой образует семейство полуинтервалов  $\{[a, b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ , и естественная топология  $e$ .

Пространство  $(\mathbb{R}, s)$  обычно называют прямой Зоргенфрея.

Будем обозначать через  $S$  (через  $R$ ) пространство  $(\mathbb{R}, s)$  (пространство  $(\mathbb{R}, e)$ ).

Для произвольного множества  $A \subseteq \mathbb{R}$  будем обозначать через  $[A]_S$  (через  $[A]_R$ ) замыкание множества  $A$  в пространстве  $S$  (в пространстве  $R$ ).

**Теорема 1.** Пространство  $S$  допускает открытое отображение на пространство  $R$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $\mathcal{A}$  множество всех двоично-рациональных точек множества  $\mathbb{R}$ . Разобьем  $\mathcal{A}$  на счетное дизъюнктивное семейство слоев  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$  (где  $\mathbb{N}$  — множество всех положительных целых чисел). Множество  $\mathcal{A}$ , разбитое на слои, назовем двоично-рациональным массивом.

Далее потребуются следующие понятия.

Пусть  $J = [a, b)$  — произвольный полуинтервал в  $\mathbb{R}$ . Минимальным заполнением  $J$  назовем множество

$$\left\{ x_n(a) = a + \frac{b-a}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ y_n(a) = a + \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{b-a}{2^{i+1}} : 0 \leq i \leq n \right\} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Если  $a \in A_n, b \in A_n$  и  $(a, b) \cap A_n = \emptyset$ , то  $[a, b)$  назовем  $n$ -полуинтервалом.

Слои обладают следующими свойствами:

1. Для каждого  $a \in A_n$  найдутся  $a^-$  и  $a^+$  такие, что множества  $[a^-, a)$  и  $[a, a^+)$  являются  $n$ -полуинтервалами.

2.  $A_n = \cup \{P_a : a \in A_{n-1}\}$ , где  $P_a$  — минимальное заполнение  $(n-1)$ -полуинтервала  $[a, a^+)$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00139а) и Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН.

$\mathcal{A}$ -заполнением  $n$ -полуинтервала  $[a, a^+)$  назовем множество  $[a, a^+) \cap \mathcal{A}$ , интервала  $(a^-, a^+)$  — множество  $(a^-, a^+) \cap \mathcal{A}$ .

Положим  $\mathcal{A}_1 = \mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}$  — множество всех целых чисел),  $\mathcal{A}_2 = \cup \{P_a : a \in \mathbb{Z}\}$ . Предположим, что определены слои  $\mathcal{A}_i$  для всех  $i \leq n$  с выполнением условий 1 и 2. Положим  $\mathcal{A}_{n+1} = \{P_a : a \in \mathcal{A}_n\}$ . Ясно, что множество  $\mathcal{A}_{n+1}$  удовлетворяет необходимым условиям.

Построим теперь отображение  $f$  пространства  $S$  на пространство  $R$ . На первом этапе определим отображение  $f$  двоично-рационального массива  $\mathcal{A}$  в  $S$  на двоично-рациональный массив  $\mathcal{A}$  в  $R$  с выполнением условия  $f(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$ .

Положим  $f(a) = a$  при  $a \in \mathcal{A}_1$ . Далее достаточно для любого  $n$  определить отображение  $f$  на минимальном заполнении одного  $n$ -полуинтервала  $[a, a^+)$ .

Пусть  $a \in \mathcal{A}_1$ . Положим  $f(x_{2n-1}(a)) = x_n(f(a))$ ,  $f(x_{2n}(a)) = y_n((f(a))^-)$ ,  $f(y_{3n-2}(a)) = x_n((f(a))^-)$ ,  $f(y_{3n}(a)) = y_n(f(a))$  (для всех  $n \in \mathbb{N}$ ). Множество  $\{f(y_{3i-1}) : i \in \mathbb{N}\}$  разобьем на счетное дизъюнктное семейство бесконечных множеств  $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Упорядочим множества  $\{x_n(f(a)) : n \in \mathbb{N}\}$  и  $\{x_n((f(a))^-) : n \in \mathbb{N}\}$  по  $n$ , т. е.  $n < k$  влечет  $x_n(\dots) < x_k(\dots)$ . На множествах  $\{y_n((f(a))^-) : n \in \mathbb{N}\}$  и  $\{y_n(f(a)) : n \in \mathbb{N}\}$  сохраняем естественный порядок. Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  отобразим множество  $\gamma_{4n-3}$  на множество  $\{x_i(f(a)) : i \in \mathbb{N}\}$ , множество  $\gamma_{4n-2}$  — на множество  $\{y_i((f(a))^-) : i \in \mathbb{N}\}$ , множество  $\gamma_{4n-1}$  — на множество  $\{x_i((f(a))^-) : i \in \mathbb{N}\}$ , множество  $\gamma_{4n}$  — на множество  $\{y_i(f(a)) : i \in \mathbb{N}\}$  с сохранением порядка (естественного на всех  $\gamma_i$  и определенного выше для подмножеств, на которые производятся отображения).

Если  $a \in \mathcal{A}_i, i \geq 1$ , то построение  $f$  производится по формулам, описанным выше. Прделаем подобное для каждой точки  $a \in \mathcal{A}$ , получим необходимое отображение  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  с выполнением условия  $f(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$ .

Отметим, что для любой точки  $a \in \mathcal{A}$  выполняется формула:

$$(\alpha) \quad f([a, a^+) \cap \mathcal{A}) = ((f(a))^- , (f(a))^+) \cap \mathcal{A}.$$

Через  $d_n$  обозначим точную верхнюю грань длин  $n$ -полуинтервалов. Выполняются формулы  $d_1 = 1, d_2 = 1/4$  и далее  $d_n = 1/4 d_{n-1}$ . Отсюда, в частности, следует, что длина интервала  $(a^-, a^+)$  не превосходит  $2d_n$  (при  $a \in \mathcal{A}_n$ ), так что  $\{d_n\} \rightarrow 0$ . Далее, в силу плотности  $\mathcal{A}$  в  $S$  (в  $R$ ) для любого  $a \in \mathcal{A}$  выполняются формулы  $[[a, a^+) \cap \mathcal{A}]_S = [a, a^+)$ ,  $[(a^-, a^+) \cap \mathcal{A}]_R = [a^-, a^+]$ . Кроме того, если  $a \in \mathcal{A}_n, b \in (a^-, a^+) \cap \mathcal{A}_{n+1}$ , то  $[b^-, b^+]_R \subseteq (a^-, a^+)$ .

Пусть теперь  $x \in R \setminus \mathcal{A}$ . Для каждого  $n$  выберем точку  $a_n \in \mathcal{A}_n$  такую, что  $x \in [a_n, a_n^+)$ . Ясно, что  $[a_n, a_n^+] \subseteq (a_{n-1}, a_{n-1}^+)$ , так что мы имеем убывающую последовательность отрезков  $\{[a_n, a_n^+] : n \in \mathbb{N}\}$ , содержащих точку  $x$ . Так как  $\{d_n\} \rightarrow 0$ , то  $\cap \{[a_n, a_n^+] : n \in \mathbb{N}\} = \{x\} = \cap \{[a_n, a_n^+) : n \in \mathbb{N}\}$ . Аналогично, последовательность  $\{[f([a_n, a_n^+))]_R : n \in \mathbb{N}\} = \{[(f(a_n))^- , (f(a_n))^+]_R : n \in \mathbb{N}\}$  имеет в пересечении одну точку  $y \in R \setminus \mathcal{A}$ . Положим  $f(x) = y$ . Так как точка  $x$  выбрана произвольно, то можно считать построенным отображение  $f : S \rightarrow R$ .

Отображение  $f$  сюръективно. Действительно, пусть  $y$  — произвольная точка множества  $R \setminus \mathcal{A}$ . Для каждого  $n$  найдется единственная точка  $b_n \in \mathcal{A}_n$  такая, что  $y \in [b_n, b_n^+)$ . Выберем точку  $a_1 \in \mathcal{A}_1 \subseteq S$  такую, что  $f(a_1) = b_1$ . Далее для каждого  $n$  выберем точку  $a_n \in \mathcal{A}_n \subseteq S$  такую, что  $f(a_n) = b_n$  и  $a_n \in [a_{n-1}, a_{n-1}^+)$ . Положив  $a = \cap \{[a_n, a_{n-1}^+]_R : n \in \mathbb{N}\}$ , получим  $y = f(a)$ .

Формула  $(\alpha)$  приобретает следующую форму:

$$(\alpha) \quad f([a, a^+)) = ((f(a))^- , (f(a))^+).$$

Пусть  $a \in S$ . Предположим, что  $a \in \mathcal{A}_n$ . Тогда семейство  $\{[a, b) : a < b \leq a^+, b \in \mathcal{A}_{n+1}\}$  образует фундаментальное семейство окрестностей точки  $a \in S$ . Докажем, что для любого  $b$  множество  $f([a, b))$  открыто в  $R$ . Достаточно рассмотреть случай  $b = y_1(a)$ .

Так как  $(a, b) = \cup \{[x_n(a), x_{n-1}(a)) : n \geq 2\} \cup [x_1(a), y_1(a))$ , то  $f((a, b)) = \cup \{f([x_n(a), x_{n-1}(a))) : n \geq 2\} \cup f([x_1(a), y_1(a)))$  (см.  $(\alpha)$ ). Следовательно, множество  $f((a, b))$  открыто в  $R$  и совпадает с множеством  $(x_1((f(a))^- , f(a)) \cup (f(a), y_1(f(a)))$  (см. определение  $f$ ). Тогда  $f([a, b)) = (x_1((f(a))^- , y_1(f(a))),$  следовательно, множество  $f([a, b))$  открыто в  $R$ . Из того, что

$\{d_n\} \rightarrow 0$ , следует, что семейство  $\{f([a, b]) : b \leq y_1(a), b \in \mathcal{A}_{n+1}\}$  образует фундаментальную систему окрестностей точки  $f(a)$ .

Пусть теперь  $a \in S \setminus \mathcal{A}$ . Тогда  $\{a\} = \cap \{[b_n, b_n^+] : n \in \mathbb{N}\}$ , где  $b_n \in \mathcal{A}_n$  и последовательность  $\{[b_n, b_n^+] : n \in \mathbb{N}\}$  убывает. Базой в точке  $a$  будет семейство  $\{[a, b_n^+] : n \in \mathbb{N}\}$ . Для каждого  $n$  определяем множество  $B_n = [b_{n+1}^+, b_n^+] = \cup \{[c, c^+] : b_{n+1}^+ \leq c < b_n^+, c \in \mathcal{A}_{n+1}\}$ . Тогда  $(a, b_n^+) = \cup \{B_i : i \geq n\}$ . Так как  $f([c, c^+))$  открыто (см. (α)), то открыто и множество  $f(B_n)$ , а тогда и множество  $f((a, b_n^+))$ . Из определения  $f$  следует, что для точки  $b_n$  найдется точка  $c_n \in \mathcal{A}_n$  такая, что  $c_n > b_n^+, c_n < b_{n-1}^+$  и  $f(b_n) = f(c_n)$ . Так как  $f([c_n, c_n^+)) = f([b_n, b_n^+)) = ((f(b_n))^- , (f(b_n))^+ ) \ni f(a)$ , то множество  $f((a, b_n^+))$  совпадает с множеством  $f([a, b_n^+))$ , т. е. множество  $f([a, b_n^+))$  открыто для каждого  $n$ .

Доказанное означает, что отображение  $f$  открыто.

Легко проверяется, что если последовательность  $\{s_n\}$  сходится к точке  $a \in \mathcal{A}$ , то и последовательность  $\{f(s_n)\}$  сходится к точке  $f(a)$ . Это означает, что отображение  $f$  непрерывно.

Теорема доказана.  $\square$

Теорема 1 доказана также М.А. Патракеевым [1] (независимо и одновременно с автором).

**Теорема 2.** Любое открытое отображение  $f : S \rightarrow R$  является  $c$ -кратным, т. е.  $|f^{-1}(y)| \leq c$  для каждой точки  $y \in R$  и найдется точка  $y' \in R$  такая, что  $|f^{-1}(y')| = c$ , где  $c$  — мощность континуума.

Предварительно докажем

**Предложение 1.** Пусть  $f : S \rightarrow R$  — открытое отображение,  $I = [a, b]$  — произвольно выбранный отрезок в  $R$ . Тогда найдутся непустые полуинтервалы  $V'_0 = [z, z')$  и  $V'_1 = [u, u')$ , лежащие в множестве  $P = f^{-1}((a, b))$  и такие, что отрезки  $V_0 = [z, z']$  и  $V_1 = [u, u']$  не пересекаются,  $f(V_i) \subseteq I, i = 0, 1; f(V'_0) \supseteq f(V'_1)$ .

**Доказательство.** Выберем произвольно полуинтервал  $V = [x, x')$ , лежащий в  $P$ . Так как множество  $f(V)$  является окрестностью точки  $y = f(x)$ , то найдется отрезок  $I_0 = [a_0, b_0] \subseteq R$  такой, что  $I_0 \subseteq f(V)$  и  $y \in (a_0, b_0)$ . Положим  $A = f^{-1}((y, b_0)) \cap V$ . Если интервал  $(c, d)$  лежит в  $A$ , то  $c \in A$ . В противном случае образ открытого в  $S$  множества  $[c, d)$  не будет открытым (так как  $f((c, d)) \subseteq (y, b_0)$ , а  $f(c) \notin (y, b_0)$ ).

Заметим, что  $x \in [A]_S$ , так как  $f(x) \in [y, b_0]_R$ , а отображение  $f$  открыто. Из этого следует, что множество  $A$  распадается в дизъюнктное бесконечное семейство полуинтервалов  $J_i = [c_i, d_i)$ , максимальных в том смысле, что при  $i \neq j$  выполняется формула  $[c_i, d_i) \cap [c_j, d_j) = \emptyset$  (так как  $x \in [A]_S$ , но  $x \neq c_i$  для любого  $i$ ). Тогда  $f(A) = (y, b_0) = \cup \{f(J_j) : j \in \mathbb{N}\}$ , а так как множество  $(y, b_0)$  связно, то найдутся множества  $J_i$  и  $J_j$  такие, что  $f(J_j) \cap f(J_i) = T \neq \emptyset$ . Положим  $J'_i = f^{-1}(T) \cap J_i$  и  $J'_j = f^{-1}(T) \cap J_j$ . В открытом множестве  $J'_i$  выберем нетривиальный отрезок  $[z, z')$  и положим  $T_i = f([z, z'))$ . В открытом множестве  $f^{-1}(T_i) \cap J'_j$  выберем нетривиальный отрезок  $[u, u')$  и положим  $T_j = f([u, u'))$ . Ясно, что  $T_j \subseteq T_i$ .

Положим  $V'_0 = [z, z')$ ,  $V'_1 = [u, u')$ ,  $V_0 = [z, z']$ ,  $V_1 = [u, u']$ . Отметим, что  $f(V_0) \subseteq f(J'_i) \subseteq I_0 \subseteq I, f(V_1) \subseteq I_0 \subseteq I$  по выбору  $V_0$  и  $V_1$ . Выполняется включение  $f(V'_1) \subseteq f(V'_0)$ , так как  $f(V'_0) = T_i \supseteq T_j = f(V'_1)$ .

Предложение 1 доказано.  $\square$

**Доказательство теоремы 2.** Пусть  $f : S \rightarrow R$  — произвольное открытое отображение,  $x \in S$  и  $V = [x, x')$  — произвольная базисная окрестность точки  $x$ . Выберем отрезок  $I_0 = [a_0, b_0]$  длины  $\leq 1$ , лежащий в  $f(V)$ . Используя предложение 1, находим полуинтервалы  $V'_0 = [c_0, c'_0)$  и  $V'_1 = [c_1, c'_1)$ , лежащие в  $f^{-1}((a_0, b_0))$  и такие, что множества  $V_0 = [c_0, c'_0]$  и  $V_1 = [c_1, c'_1]$  не пересекаются,  $f(V_i) \subseteq I_0, i = 0, 1, f(V'_0) \supseteq f(V'_1)$ . Выберем отрезок  $I_1 = [a_1, b_1]$  длины  $\leq 2^{-1}$ , лежащий в  $f(V'_1)$ . Снова используя предложение 1, находим полуинтервалы  $V''_0 = [c_{00}, c'_{00})$  и  $V''_1 = [c_{01}, c'_{01})$ , лежащие в  $f^{-1}((a_1, b_1)) \cap V'_0$  и такие, что  $[c_{00}, c'_{00}) \cap$

$[c_{01}, c'_{01}] = \emptyset, f([c_{0i}, c'_{0i}]) \subseteq I_1, i = 0, 1, f(V'_{00}) \supseteq f(V'_{01})$ . Положим  $V_{00} = [c_{00}, c'_{00}], V_{01} = [c_{01}, c'_{01}]$ . Выберем отрезок  $I'_1 = [b_1, b'_1]$ , лежащий в  $f(V'_{01})$ . Находим, используя предложение 1, полуинтервалы  $V'_{10} = [c_{10}, c'_{10}]$  и  $V'_{11} = [c_{11}, c'_{11}]$ , лежащие в  $f^{-1}((b_1, b'_1))$  и такие, что множества  $V_{10} = [c_{10}, c'_{10}]$  и  $V_{11} = [c_{11}, c'_{11}]$  не пересекаются,  $f(V_{1i}) \subseteq I'_1 \subseteq I_1, i = 0, 1, f(V'_{11}) \subseteq f(V'_{10})$ .

Теперь стало понятно, что по индукции можно построить для каждого  $n$  отрезок  $I_n$ , для каждой последовательности  $\{i_1, \dots, i_n\}$ , состоящей из 0 и 1, — отрезок  $V_{i_1, \dots, i_n}$  такие, что выполняются условия:

- (a) последовательность отрезков  $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$  убывает, и длина  $d(I_n) \leq 1/n + 1, n \in \mathbb{N}$ ;
- (b) если последовательности  $\{i_1, \dots, i_n\}$  и  $\{j_1, \dots, j_n\}$  различны, то отрезки  $V_{i_1, \dots, i_n}$  и  $V_{j_1, \dots, j_n}$  не пересекаются;
- (c)  $V_{i_1, \dots, i_n} \subseteq V_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ ;
- (d)  $f(V_{i_1, \dots, i_n}) \subseteq I_{n-1}$ .

Для любой последовательности  $\{i_n : n \in \mathbb{N}\}$  из 0 и 1 семейство  $\{V_{i_1, \dots, i_n} : n \in \mathbb{N}\}$  является убывающим в силу (c). Следовательно, для любой последовательности  $\gamma = \{i_n : n \in \mathbb{N}\}$  из 0 и 1 найдется точка  $x(\gamma)$ , лежащая в  $\cap \{V_{i_1, \dots, i_n} : n \in \mathbb{N}\}$ . Так как  $f(V_{i_1, \dots, i_n}) \subseteq I_{n-1}$  (см. (d)), то  $f(x(\gamma)) = y = \cap \{T_i : i \in \mathbb{N}\}$ .

Теорема 2 доказана. □

Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называется *слабо замкнутым* (или *d-отображением*), если образ дискретного в  $X$  множества дискретен в  $Y$  (см. [2]).

**Теорема 3.** *Не существует непрерывного d-отображения пространства S на пространство R.*

Предварительно докажем следующее утверждение, имеющее самостоятельный интерес.

**Предложение 2.** *Не существует непрерывного d-отображения любого подпространства  $S' \subseteq S$  на несчетное счетно-компактное пространство  $Y$ .*

**Доказательство.** Пусть  $f$  —  $d$ -отображение подпространства  $S'$  пространства  $S$  на счетно-компактное пространство  $Y$ . Докажем, что  $Y$  не более чем счетно.

Будем обозначать через  $[x, x')$  множество  $J \cap S'$ , где  $J$  — числовой полуинтервал  $[x, x')$ , в частности,  $[x, \infty) = J \cap S'$ , где  $J$  — числовой полуинтервал  $[x, \infty)$ . Рассмотрим произвольное множество  $[x_1, x)$ , где  $x_1 \in S'$ . Точку  $x_2 \in S'$  выберем под условиями:  $x_1 < x_2 < x; f(x_1) \neq f(x_2)$  (если такое  $x_2$  найдется).

Пусть выбрана точка  $x_n \in [x_1, x)$  такая, что  $x_n > x_i, i < n$  и  $f(x_n) \neq f(x_i), i < n$ . Точку  $x_{n+1} \in [x_1, x)$  выберем (если такая найдется) под условиями  $x_n < x_{n+1}; f(x_{n+1}) \neq f(x_i), i \leq n$ . Поскольку последовательность  $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$  дискретна в  $S'$ , то и последовательность  $\{f(x_1), \dots, f(x_{n+1})\}$  будет дискретной в  $Y$ , так что в силу счетной компактности  $Y$  выбор точек  $x_i$  остановится на некотором  $m$ , т. е. множество  $f([x_m, x))$  будет состоять только из точек  $f(x_i), i \leq m$ , в частности, конечно.

Пусть теперь  $[x_1, x) = [x_1, \infty)$ . Тогда найдется точка  $x_m \in [x_1, \infty)$  такая, что множество  $f([x_m, \infty))$  конечно. Положим  $T = \{x \in S' : |f([x, \infty))| \leq \omega\}$ . Пусть  $a = \inf T$ . Тогда  $a = \inf S'$ .

Действительно, предположим, что  $a > \inf S'$ . Тогда найдется точка  $x_1 \in S'$  такая, что  $\inf S' < x_1 < a$ . Рассмотрим множество  $[x_1, a)$ . По доказанному выше найдется точка  $x_m \in [x_1, a)$  такая, что множество  $f([x_m, a))$  конечно. Найдется последовательность  $\{y_n\}$  точек  $T$  такая, что  $a = \lim\{y_n\}$ . Так как  $|f([y_n, \infty))| \leq \omega$ , то  $|\cup \{f([y_n, \infty)) : n \in \mathbb{N}\}| \leq \omega$ , следовательно,  $|f([a, \infty))| \leq \omega$ . Значит, множество  $f([x_m, \infty)) = f([x_m, a)) \cup f([a, \infty))$  не более чем счетно, следовательно,  $a$  должно быть меньше  $x_m$ , что противоречиво. Доказано, что  $a = \inf S'$ . Так как  $f([a, \infty)) = Y$ , то  $Y$  не более чем счетно.

Предложение 2 доказано. □

**Доказательство** теоремы 3. Предположим от противного, что существует сюръективное непрерывное  $d$ -отображение  $f : S \rightarrow R$ . Рассмотрим отрезок  $[a, b] \subseteq R, a \neq b$ . Положим

$S' = f^{-1}([a, b])$ . Пусть  $f'$  — сужение отображения  $f$  на множество  $S'$ . Тогда  $f'$  является непрерывным отображением  $S'$  на  $[a, b]$ . Действительно, если  $A$  — дискретное в  $S'$  множество, то  $A$  дискретно в  $S$  (множество  $S'$  замкнуто в  $S$ ) и  $f'(A) = f(A)$  дискретно в  $[a, b]$ . По предположению 2 множество  $f(S')$  должно быть не более чем счетным, но  $f(S') = [a, b]$  — противоречие.

Теорема 3 доказана. □

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Патракеев М.А.** Непрерывные отображения прямой Зоргенфрея на вещественную прямую // Вест. Томского гос. у-та. 2008. Т. 1, № 2. С. 67–75.
2. **Величко Н.В.** О непрерывных отображениях топологических пространств // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 3. С. 541–557.

Величко Николай Васильевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. сектором  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: vel@imm.uran.ru

Поступила 09.06.2009

УДК 517.977

## О НУЛЕВОЙ ДИНАМИКЕ ОДНОГО КЛАССА РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

И. В. Гайшун

Для одного класса двухпараметрических дискретных систем с одномерными входной и выходной переменными построены обратная связь и подпространство  $L$  начальных условий, инвариантное относительно замкнутой системы, все решения из которого обращают в нуль выходную функцию. Предложены два способа построения уравнений с фазовым пространством  $L$ , задающих указанные решения.

Ключевые слова: двухпараметрические дискретные системы, нулевая динамика.

I. V. Gaishun. On the zero dynamics of one class of distributed discrete systems.

For a class of two-parametric discrete systems with one-dimensional input and output variables, we construct a feedback and a subspace  $L$  of initial conditions that is invariant under a closed system and such that all the solutions from this subspace make the output function vanish. We propose two methods of constructing equations with the phase space  $L$  that determine such solutions.

Keywords: two-parameter discrete systems, zero dynamics.

### Введение

В теории обыкновенных дифференциальных и дискретных систем под нулевой динамикой понимается совокупность движений, вдоль которых выходная переменная нулевая (см. [1, 2]). В предлагаемой работе нулевая динамика изучается для распределенных дискретных систем, имеющих одномерные входные и выходные переменные. Предполагается, что фазовым пространством является совокупность ограниченных последовательностей. В классе таких последовательностей формулируются критерии управляемости и наблюдаемости. Кроме того, определен относительный порядок системы, который играет существенную роль при анализе нулевой динамики. Выделено подпространство (подпространство нулевой динамики) начальных значений, приводящих к тривиальному выходу. Описана структура этого подпространства и предложены два способа построения уравнений, задающих решения, расположенные в нем.

### 1. Постановка задачи

Пусть  $A_j$ ,  $b_j$  и  $c_j$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ) —  $(n \times n)$ -матрицы,  $n$ -вектор-столбцы и  $n$ -вектор-строки над полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Рассмотрим распределенную двухпараметрическую дискретную систему

$$x(t+1, s) = \sum_{j=0}^N A_j x(t, s+j) + \sum_{j=0}^N b_j u(t, s+j) \quad (1.1)$$

с выходом

$$y(t, s) = \sum_{j=0}^N c_j x(t, s+j), \quad (1.2)$$

где переменная  $t$  изменяется в множестве  $\mathbb{Z}_+$  неотрицательных целых чисел, а переменная  $s$  — в множестве  $\mathbb{Z}$  всех целых чисел. Функция  $u(t, s)$  трактуется как управление или входное воздействие.

Обозначим через  $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$  пространство ограниченных последовательностей  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Управление  $u(t, s)$  назовем допустимым, если при любом фиксированном  $t \in \mathbb{Z}_+$  функция  $s \rightarrow u(t, s)$  принадлежит пространству  $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ . Очевидно, что для каждого элемента  $\alpha \in B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$  и каждого допустимого управления  $u(t, s)$  уравнение (1.1) имеет единственное решение  $x(t, s)$ , удовлетворяющее начальному условию

$$x(0, s) = \alpha(s), \quad (1.3)$$

при этом всякая функция  $s \rightarrow x(t, s)$  расположена в пространстве  $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ .

Следуя [1, 2], изучим совокупность решений, удовлетворяющих тождеству  $y(t, s) = 0$  ( $t \geq 0$ ). Это приводит к необходимости построения такой обратной связи

$$u(t, s) = \sum_{j=0}^M k_j x(t, s + j) \quad (1.4)$$

( $k_j$  —  $n$ -вектор-строки,  $M$  — неотрицательное целое число) и такого подпространства  $L \subset B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$  (подпространства нулевой динамики), что решения замкнутой системы с начальными значениями (1.3) из множества  $L$  удовлетворяют условию  $y(t, s) = 0$  ( $t \geq 0$ ). Управление (1.4) в этом случае называется эквивалентным [1]. Исследованию сформулированной задачи и посвящена данная работа.

Заметим, что система (1.1), (1.2) включает в себя ряд дискретных аналогов различных уравнений с частными производными. Кроме того, она как составная часть входит во многие математические модели обработки изображений (подробности см. в [3]).

## 2. Управляемость и наблюдаемость

По коэффициентам системы (1.1), (1.2) определим полиномиальные матрицы

$$A(\delta) = \sum_{j=0}^N A_j \delta^j, b(\delta) = \sum_{j=0}^N b_j \delta^j, c(\delta) = \sum_{j=0}^N c_j \delta^j \quad (2.1)$$

формальной переменной  $\delta$ . Если считать, что  $\delta \in \mathbb{C}$ , то (2.1) — обычные полиномиальные матрицы. Если же предположить, что  $\delta$  — оператор сдвига по переменной  $s$  (т. е.  $\delta \varphi(t, s) = \varphi(t, s + 1)$ ), то (2.1) — операторы в соответствующих пространствах ограниченных последовательностей. С помощью этих операторов уравнения (1.1), (1.2) можно записать следующим образом:

$$x(t + 1, s) = A(\delta)x(t, s) + b(\delta)u(t, s), \quad y(t, s) = c(\delta)x(t, s). \quad (2.2)$$

Будем говорить, что система (1.1) управляема в пространстве ограниченных последовательностей  $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ , если существует такое целое число  $t_1 > 0$ , что для любых различных  $\alpha, \alpha_1 \in B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$  можно указать такое допустимое управление  $u^*(t, s)$ , при котором решение  $x(t, s)$  с начальным условием (1.3) удовлетворяет равенству  $x(t_1, s) = \alpha_1(s)$  ( $s \in \mathbb{Z}$ ).

Незначительно модифицируя соответствующие рассуждения из монографии [3], легко прийти к заключению о справедливости следующего утверждения.

**Теорема 1.** *Управляемость в пространстве  $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$  имеет место тогда и только тогда, когда полиномиальная матрица*

$$\{b(\delta), A(\delta)b(\delta), \dots, A(\delta)^{n-1}b(\delta)\}$$

*комплексной переменной  $\delta$  невырождена при всяком  $\delta \in \mathbb{C}$  единичного модуля.*

Пусть в уравнении (1.1)  $u(t, s) = 0$ ; оно называется наблюдаемым по выходу (1.2) в классе ограниченных последовательностей  $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$ , если найдется такое целое  $t_1 > 0$ , что при любых различных начальных функциях  $\alpha_1, \alpha_2 \in B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$  выходные функции  $y_1(t, s), y_2(t, s)$ , порожденные ими, различны на множестве  $\{(t, s) : 0 \leq t \leq t_1\}$ .

Из принципа двойственности, сформулированного в [3], вытекает

**Теорема 2.** Система (1.1) наблюдаема по выходу (1.2) в пространстве  $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$  в том и только в том случае, когда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} c(\delta) \\ c(\delta)A(\delta) \\ \dots\dots\dots \\ c(\delta)A(\delta)^{n-1} \end{pmatrix} = n \tag{2.3}$$

для каждого  $\delta \in \mathbb{C}, |\delta| = 1$ .

**З а м е ч а н и е.** Сформулированным критериям управляемости и наблюдаемости можно дать следующую интерпретацию: система (1.1), (1.2) управляема (наблюдаема) в пространстве  $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$  тогда и только тогда, когда для любого числа  $\delta \in \mathbb{C}$  единичного модуля управляема (наблюдаема) по Калману [4] обыкновенная дискретная система  $z_{t+1} = A(\delta)z_t + b(\delta)v_t$  (обыкновенная дискретная система  $z_{t+1} = A(\delta)z_t, w_t = c(\delta)z_t$ ).

### 3. Относительный порядок

Предположим, что система (1.1), (1.2) управляема и наблюдаема в классе ограниченных последовательностей. Используя терминологию, принятую в случае обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2], целое число  $r, 1 \leq r < n$ , будем называть ее относительным порядком, если полиномы  $c(\delta)A(\delta)^j b(\delta)$  ( $j = 0, 1, \dots, r - 1$ ) комплексной переменной  $\delta$  не зависят от  $\delta$  и выполняются условия

$$\begin{aligned} c(\delta)b(\delta) = 0, \quad c(\delta)A(\delta)b(\delta) = 0, \quad \dots, \quad c(\delta)A(\delta)^{r-2}b(\delta) = 0, \\ c(\delta)A(\delta)^{r-1}b(\delta) = \text{const} \neq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Иначе говоря,  $r$  — относительный порядок системы (1.1), (1.2) или, что то же самое, системы (2.2), если вектор  $b(\delta)$  ортогонален первым  $r - 1$  строкам полиномиальной матрицы, фигурирующей в формуле (2.3), а произведение ее  $r$ -й строки на столбец  $b(\delta)$  — ненулевая константа.

Из работы [5] и уже упоминавшегося принципа двойственности следует, что в предположении наблюдаемости в классе  $B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n)$  всякую систему (2.2) с помощью линейного обратимого преобразования можно представить в так называемой канонической форме, когда

$$A(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0(\delta) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1(\delta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1}(\delta) \end{pmatrix}, \quad c(\delta) = (0, 0, \dots, 1). \tag{3.2}$$

Легко убедиться, что в данном случае равенства (3.1) имеют вид

$$b_n(\delta) = b_{n-1}(\delta) = \dots = b_{n-r+2}(\delta) = 0, \quad b_{n-r+1}(\delta) = \text{const} \neq 0 \tag{3.3}$$

( $b_j(\delta)$  — компоненты вектора  $b(\delta)$ ), и поэтому система (2.2) в канонической форме (3.2) обладает относительным порядком  $r$  тогда и только тогда, когда верны соотношения (3.3).

#### 4. Подпространство нулевой динамики

Пусть выполняются условия (3.1) так, что система (1.1), (1.2) имеет относительный порядок  $r$ . Тогда

$$\begin{aligned} y(t, s) &= c(\delta)x(t, s), \quad y(t+1, s) = c(\delta)A(\delta)x(t, s), \quad \dots, \quad y(t+r-1, s) = c(\delta)A(\delta)^{r-1}x(t, s), \\ y(t+r, s) &= c(\delta)A(\delta)^r x(t, s) + c(\delta)A(\delta)^{r-1}b(\delta)u(t, s). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Положим

$$u(t, s) = -\frac{c(\delta)A(\delta)^r x(t, s)}{c(\delta)A(\delta)^{r-1}b(\delta)}. \quad (4.2)$$

Так как  $c(\delta)A(\delta)^{r-1}b(\delta)$  — ненулевая константа, то обратная связь (4.2) допускает представление в форме (1.4).

**Теорема 3.** Пусть система (1.1), (1.2) с относительным порядком  $r$  замкнута управлением (4.2), записанным в виде (1.4). Тогда подпространство  $L$  ее нулевой динамики определяется следующим образом:

$$L = \left\{ \alpha \in B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n) : c(\delta)\alpha(s) = 0, \quad c(\delta)A(\delta)\alpha(s) = 0, \quad \dots, \quad c(\delta)A(\delta)^{r-1}\alpha(s) = 0 \right\}. \quad (4.3)$$

**Доказательство.** Пусть  $\alpha \in L$ . Из соотношений (4.1) вытекает, что выходная переменная  $y(t, s)$ , порожденная начальным значением (1.3), удовлетворяет равенствам  $y(0, s) = c(\delta)\alpha(s) = 0$ ,  $y(1, s) = c(\delta)A(\delta)\alpha(s) = 0, \dots, y(r-1, s) = c(\delta)A(\delta)^{r-1}\alpha(s) = 0$ . Кроме того, по построению входного воздействия (4.2) выполняется тождество  $y(t+r, s) = 0$ . Поэтому  $y(t, s) = 0$  при всех  $t \geq 0$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ . Теорема доказана.

Легко убедиться, что подпространство нулевой динамики (4.3) инвариантно относительно уравнения (1.1), замкнутого обратной связью (4.2), а именно, если  $\alpha \in L$ , то при любом  $t \in \mathbb{Z}_+$  последовательность  $s \rightarrow x(t, s)$  принадлежит множеству  $L$ ; здесь  $x(t, s)$  — решение, порожденное начальным условием (1.3).

В каноническом случае (3.2) подпространство (4.3), очевидно, определяется требованиями

$$\alpha_{n-r+1}(s) = 0, \quad \alpha_{n-r+2}(s) = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n(s) = 0, \quad (4.4)$$

где  $\alpha_j(s)$  — компоненты вектор-функции  $\alpha(s)$ .

#### 5. Структура подпространства нулевой динамики

Опишем более детально подпространство (4.3). Обозначим через  $S_r(\delta)$  матрицу со строками  $c(\delta), c(\delta)A(\delta), \dots, c(\delta)A(\delta)^{r-1}$ , считая пока переменную  $\delta$  элементом поля комплексных чисел. Согласно [6], существуют такие полиномиальные квадратные матрицы соответствующих размеров, удовлетворяющие условиям

$$\det P(\delta) = \text{const} \neq 0, \quad \det Q(\delta) = \text{const} \neq 0, \quad (5.1)$$

что

$$P(\delta)S_r(\delta)Q(\delta) = \begin{pmatrix} p_1(\delta) & & & \vdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & p_r(\delta) & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

при этом в силу наблюдаемости в классе ограниченных последовательностей все многочлены  $p_j(\delta)$  отличны от нуля при каждом  $\delta \in \mathbb{C}$  единичного модуля, т. е.

$$p_j(\delta) \neq 0 \quad (\delta \in \mathbb{C}, |\delta| = 1). \quad (5.2)$$

Пусть теперь  $\delta$  — оператор сдвига по переменной  $s$ . Из результатов монографии [3] следует, что требования (5.1) гарантируют обратимость операторов  $P(\delta)$  и  $Q(\delta)$ . Поэтому соотношения  $c(\delta)A(\delta)^j \alpha(s) = 0$  ( $j = 0, 1, \dots, r-1$ ) эквивалентны равенствам

$$p_1(\delta)\psi_1(s) = 0, \quad p_2(\delta)\psi_2(s) = 0, \quad \dots, \quad p_r(\delta)\psi_r(s) = 0, \quad (5.3)$$

где  $\psi_j(s)$  — компоненты вектор-функции  $\psi(s) = Q(\delta)^{-1}\alpha(s)$ . Таким образом, подпространство  $L$  состоит из таких и только таких  $n$ -вектор-функций  $\alpha(s)$ , что  $\alpha(s) = Q(\delta)\psi(s)$ , при этом первые  $r$  координаты векторной последовательности  $\psi(s)$  — это всевозможные ограниченные решения обыкновенных дискретных уравнений (5.3), а остальные  $n-r$  координаты произвольны. Однако, поскольку выполняются условия (5.2), ограниченных решений, кроме нулевых, уравнения (5.3) иметь не могут. Поэтому окончательно подпространство нулевой динамики задается следующим образом:

$$L = \left\{ \alpha \in B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^n) : \alpha(s) = Q(\delta)\psi(s), \quad \psi_1(s) = \dots = \psi_r(s) = 0, \quad \psi_{r+j}(s) \in B(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \right. \\ \left. j = 1, 2, \dots, n-r \right\}.$$

## 6. Уравнения нулевой динамики

Так как подпространство (4.3) инвариантно относительно уравнения (1.1), замкнутого управлением (1.4), найденным по формуле (4.2), возникает задача построения уравнений (уравнений нулевой динамики) движений вдоль многообразия  $L$ . Для решения этой задачи поступим следующим образом. Совершим в системе (1.1), замкнутой управлением (4.2), замену переменных  $w(t, s) = S(\delta)x(t, s)$ , где  $S(\delta)$  — матрица, фигурирующая в формуле (2.3). Тогда равенства  $c(\delta)x(t, s) = 0, c(\delta)A(\delta)x(t, s) = 0, \dots, c(\delta)A(\delta)^{r-1}x(t, s) = 0$ , которым удовлетворяет всякое решение, лежащее в подпространстве  $L$ , перейдут в соотношения  $w_1(t, s) = 0, w_2(t, s) = 0, \dots, w_r(t, s) = 0$  ( $w_j(t, s)$  — координаты вектора  $w(t, s)$ ). Поэтому, полагая в преобразованной системе первые  $r$  компонент столбца  $w(t, s)$  нулевыми, придем к уравнениям нулевой динамики, записанным в переменных  $w_{r+1}(t, s), \dots, w_n(t, s)$ .

Другой способ построения уравнений нулевой динамики основан на уже упоминавшейся возможности приведения системы (1.1), (1.2) к каноническому виду (3.2), в случае которого такие уравнения находятся достаточно просто. В самом деле, из условий (3.3) следует, что эквивалентное управление (4.2) определяется формулой  $u(t, s) = b_{n-r+1}^{-1}x_{n-r}(t, s)$  ( $b_{n-r+1} \equiv b_{n-r+1}(\delta) = \text{const} \neq 0$ ), а подпространство нулевой динамики задается соотношениями (4.4). Поэтому уравнения нулевой динамики имеют вид

$$x_1(t+1, s) = -\frac{b_1(\delta)x_{n-r}(t, s)}{b_{n-r+1}}, \quad x_2(t+1, s) = x_1(t, s) - \frac{b_2(\delta)x_{n-r}(t, s)}{b_{n-r+1}}, \quad \dots, \\ x_{n-r}(t+1, s) = x_{n-r-1}(t, s) - \frac{b_{n-r}(\delta)x_{n-r}(t, s)}{b_{n-r+1}}. \quad (6.1)$$

Таким образом, если относительный порядок системы (1.1), (1.2) равен  $r$ , то в некоторых новых переменных уравнения нулевой динамики могут быть представлены равенствами (6.1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Об уравнениях и свойствах нулевой динамики линейных управляемых стационарных систем // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 12. С. 1626–1636.

2. **Гайшун И.В.** О нулевой динамике линейных нестационарных дискретных систем с одним входом и скалярным выходом // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 5. С. 701–708.
3. **Гайшун И.В.** Многопараметрические системы управления. Минск: Наука и техника, 1996. 199 с.
4. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. **Гайшун И.В.** Канонические формы линейных дискретных двухпараметрических систем // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 7. С. 964–968.
6. **Гантмахер Р.Ф.** Теория матриц. М.: Наука, 1988. 575 с.

Гайшун Иван Васильевич  
д-р физ.-мат. наук  
академик НАН Беларуси  
директор  
Ин-т математики НАН Беларуси  
e-mail: gaishun@im.bas-net.by

Поступила 22.01.2009

УДК 517.977

## АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ<sup>1</sup>

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

Рассматривается задача о быстродействии для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными и гладкими геометрическими ограничениями на управление. Строится асимптотика времени быстродействия и оптимального управления относительно малого параметра при производных в уравнениях системы и малого возмущения начальных условий.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of the optimal time in a singular perturbation linear problem.

A time-optimal control problem is considered for a linear system with fast and slow variables and smooth geometric constraints on the control. For the optimal time and optimal control, asymptotic expansions in a small parameter at the derivatives in the equations of the system and a small perturbation of the initial conditions are constructed.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singular perturbation problems, small parameter.

### Введение

Рассматривается задача о быстродействии [1–4] для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными [5–8] и гладкими геометрическими ограничениями на управление. Строится асимптотика времени быстродействия и оптимального управления относительно малого параметра при производных в уравнениях системы и малого возмущения начальных условий. В настоящей работе используются методы, развитые в [9, 10]. Исследуемые системы не входят в класс систем, изученных ранее в работе [11], поскольку не удовлетворяют предположениям, сделанным в [11].

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}_1 = -\alpha x_1 + u_1, \\ \varepsilon \dot{x}_2 = -\alpha x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1, \\ \dot{x}_4 = x_2, \end{cases} \quad (1)$$

$$x(0) = x^0 + \mu \tilde{x}, \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00260), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2215.2008.1) и Программы фундаментальных исследований президиума РАН.

$$U : u_1^2 + u_2^2 \leq 1, \quad (3)$$

$$x(\Theta) = 0, \quad \Theta \longrightarrow \min, \quad (4)$$

здесь  $\alpha > 0$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  и  $0 < \mu \ll 1$ .

Задача (1)–(4) моделирует движение материальной точки малой массы  $\varepsilon > 0$  с сопротивлением на плоскости под действием ограниченной управляющей силы  $u(t)$ , лежащей в этой плоскости. В начальный момент времени известно состояние (положение и скорость) материальной точки  $x^0 + \mu \tilde{x}$  ( $\mu > 0$  – малый параметр). Невозмущенный начальный вектор  $x^0$  задан так, что при  $\mu = 0$  оптимальное управление  $u_\varepsilon(t)$  имеет одну точку разрыва. Требуется за наименьшее время перевести материальную точку в начало координат и остановить ее.

Запишем систему (1) и начальные условия (2) в матричной форме

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{z} &= -\alpha z + u, \\ \dot{y} &= z, \end{aligned} \quad (5)$$

$$z(0) = z^0 + \mu \tilde{z}, \quad y(0) = y^0 + \mu \tilde{y}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \\ z^0 &= \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}, \quad y^0 = \begin{pmatrix} x_3^0 \\ x_4^0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{y} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

тем самым,

$$x = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}, \quad x^0 = \begin{pmatrix} z^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{\varepsilon} E & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

здесь  $E$  – единичная матрица  $2 \times 2$ .

## 2. Доказательство разрешимости задачи

Пусть  $\Xi_\varepsilon(T, x^0)$  – область достижимости системы (1)–(3) из начального состояния  $x^0$  к моменту времени  $T$  [3, 7].

Приведенная система [7, гл. 3] имеет вид

$$\dot{y} = \frac{1}{\alpha} u. \quad (8)$$

Область достижимости этой системы  $\Xi_{0,y}(T, y^0) = B[y^0, T/\alpha]$  – шар в пространстве  $\mathbb{R}^2$  с центром в точке  $y^0$ , а оптимальное время быстрогодействия перевода системы (8) из состояния  $y^0$  в  $0 \in \mathbb{R}^2$  равно  $\Theta_0 = \alpha \|y^0\|$ , здесь и далее  $\|\cdot\|$  – евклидова норма.

Следуя [7, с. 69], для системы (5) определим множество

$$R = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \mathcal{U} ds,$$

где  $\mathcal{U}$  – множество допустимых управлений. Множество  $R$  – выпуклый компакт в пространстве  $\mathbb{R}^2$  [7], опорная функция [12] для  $R$  имеет вид [4]

$$\rho(\psi|R) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} \rho(\psi|U) ds = \|\psi\| \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} ds = \frac{1}{\alpha} \|\psi\| = \rho\left(\psi|B\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]\right).$$

Таким образом,

$$\Xi_0(T, x^0) = \left\{ x : z \in B\left[0, \frac{1}{\alpha}\right], y \in B\left[y^0, \frac{T}{\alpha}\right] \right\} = B\left[0, \frac{1}{\alpha}\right] \times B\left[y^0, \frac{T}{\alpha}\right].$$

В [7, гл. 3, с. 70] доказано, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_H(\Xi_\varepsilon, \Xi_0) = 0,$$

где  $d_H$  — метрика Хаусдорфа [12].

Напомним некоторые свойства хаусдорфова расстояния [4, 12]. Если  $M_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) — выпуклые компакты, то

$$d_H(M_1, M_2) = \sup_{\|\psi\|=1} |\rho(\psi | M_1) - \rho(\psi | M_2)|, \quad (9)$$

$$d_H(M_1 + M_2, M_3 + M_4) \leq d_H(M_1, M_3) + d_H(M_2, M_4). \quad (10)$$

Из равенства (9), в частности, следует, что если

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} d_H(M_\nu, M_0) = 0,$$

то

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \inf_{\|\psi\|=1} \rho(\psi | M_\nu) = \inf_{\|\psi\|=1} \rho(\psi | M_0). \quad (11)$$

В силу формулы Коши для системы (1)–(3) справедливо равенство

$$\Xi_\varepsilon(T, x^0 + \mu \tilde{x}) = \Xi_\varepsilon(T, x^0) + \mu e^{A(\varepsilon)T} \tilde{x}, \quad (12)$$

здесь матричная экспонента  $e^{A(\varepsilon)T}$ , построенная по матрице  $A(\varepsilon)$  (7),

$$e^{A(\varepsilon)T} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}T} E & 0 \\ \frac{\varepsilon}{\alpha} (1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}T}) & E \end{pmatrix} \quad (13)$$

получена непосредственным вычислением с учетом вида этой матрицы.

**Лемма 1.** Для рассматриваемых областей достижимости справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} d_H(\Xi_\varepsilon(T, x^0 + \mu \tilde{x}), \Xi_0(T, x^0)) = 0.$$

**Доказательство.** В силу равенства (12), свойства (10) и равномерной ограниченности по  $\varepsilon$  матрицы  $e^{A(\varepsilon)T}$  (13) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_H(\Xi_\varepsilon(T, x^0 + \mu \tilde{x}), \Xi_0(T, x^0)) = d_H(\Xi_\varepsilon(T, x^0) + \mu e^{A(\varepsilon)T} \tilde{x}, \Xi_0(T, x^0) + \{0\}) \\ &\leq d_H(\Xi_\varepsilon(T, x^0), \Xi_0(T, x^0)) + d_H(\mu e^{A(\varepsilon)T} \tilde{x}, \{0\}) \xrightarrow{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 1.** При любых  $x^0$  и  $\tilde{x}$  существуют  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\mu_0 > 0$  такие, что для любых  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $\mu \in (0, \mu_0)$  задача (5), (6), (3), (4) разрешима и

$$\Theta(\varepsilon, \mu) \xrightarrow{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} \Theta_0 = \alpha \|y^0\|.$$

Доказательство проведем в несколько этапов.

1. Возьмем  $T_\delta = \alpha \|y^0\| + \delta$  для произвольного  $\delta > 0$ , тогда  $0 \in \text{int } \Xi_{0,y}(T_\delta, y^0)$ , а значит, и  $B_y[0, r_\delta] \subset \Xi_{0,y}(T_\delta, y^0)$  для некоторого  $r_\delta$ . Считая, что  $r_\delta < 1/\alpha$ , имеем

$$B_{\mathbb{R}^4}[0, r_\delta] \subset \Xi_0(T_\delta, x^0).$$

2. Докажем, что если  $0 \in \text{int } \Xi_0(T_\delta, x^0)$  для некоторого момента времени  $T_\delta$ , то существуют  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\mu_0 > 0$  такие, что для любых  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $\mu \in (0, \mu_0)$  выполняется  $0 \in \Xi_\varepsilon(T_\delta, x^0 + \mu\tilde{x})$ .

Пусть

$$B_{\mathbb{R}^4}[0, r_\delta] \subset \Xi_0(T_\delta, x^0).$$

Тогда для любого  $\psi \in \mathbb{R}^4$ ,  $\|\psi\| = 1$ , выполняется

$$r_\delta = \rho(\psi | B_{\mathbb{R}^4}[0, r_\delta]) \leq \rho(\psi | \Xi_0(T_\delta, x^0)),$$

что равносильно

$$r_\delta \leq \inf_{\|\psi\|=1} \rho(\psi | \Xi_0(T_\delta, x^0)).$$

В силу леммы 1 и равенства (11) имеем

$$\inf_{\|\psi\|=1} \rho(\psi | \Xi_\varepsilon(T_\delta, x^0 + \mu\tilde{x})) \xrightarrow{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} \inf_{\|\psi\|=1} \rho(\psi | \Xi_0(T_\delta, x^0)) \geq r_\delta > \frac{r_\delta}{2}.$$

Тогда найдутся такие  $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$ , что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $0 < \mu < \mu_0$  выполняется

$$\inf_{\|\psi\|=1} \rho(\psi | \Xi_\varepsilon(T_\delta, x^0 + \mu\tilde{x})) > \frac{r_\delta}{2},$$

т. е.

$$0 \in B_{\mathbb{R}^4}\left[0, \frac{r_\delta}{2}\right] \subset \Xi_\varepsilon(T_\delta, x^0 + \mu\tilde{x}).$$

Отметим, что  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  зависят от  $\delta$ .

3. Задача быстродействия при таких  $\varepsilon$  и  $\mu$  разрешима [3, гл. 2, с. 138], и справедливо неравенство

$$\Theta(\varepsilon, \mu) \leq T_\delta = \Theta_0 + \delta.$$

Отсюда следует, что

$$\underline{\lim}_{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} \Theta(\varepsilon, \mu) \leq \overline{\lim}_{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} \Theta(\varepsilon, \mu) \leq \Theta_0 + \delta,$$

или, переходя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ ,

$$\widehat{\Theta} = \underline{\lim}_{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} \Theta(\varepsilon, \mu) \leq \overline{\lim}_{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} \Theta(\varepsilon, \mu) \leq \Theta_0.$$

4. Предположим, что  $\underline{\lim}_{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} \Theta(\varepsilon, \mu) < \Theta_0$ , тогда найдется  $\delta_0 > 0$  такое, что

$$\widehat{\Theta} < \Theta_0 - \delta_0.$$

Тогда найдется последовательность  $(\varepsilon_n, \mu_n) \rightarrow (0, 0)$  такая, что

$$\Theta(\varepsilon_n, \mu_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \widehat{\Theta} < \widehat{\Theta} + \delta_0 < \Theta_0, \quad (14)$$

и, начиная с некоторого номера,

$$\Theta(\varepsilon_n, \mu_n) \leq \widehat{\Theta} + \delta_0. \quad (15)$$

Для этих же  $(\varepsilon_n, \mu_n)$  выполняется

$$0 \in \Xi_{\varepsilon_n}(\Theta(\varepsilon_n, \mu_n), x^0 + \mu_n\tilde{x}). \quad (16)$$

5. Отметим хорошо известный в теории оптимального управления [3] факт, что если  $0 \in U$ , управляемая система линейна  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ ,  $u \in U$ , и  $0 \in \Xi(T_0, x_0)$  — области достижимости рассматриваемой системы к моменту времени  $T_0$ , то при всех  $T_1 > T_0$  выполняется  $0 \in \Xi(T_1, x_0)$ .

6. В силу предыдущего замечания из (15) и (16) получаем

$$0 \in \Xi_{\varepsilon_n}(\widehat{\Theta} + \delta_0, x^0 + \mu_n \tilde{x}),$$

а значит, такое включение выполняется в силу леммы 1 и для предельного множества [12]

$$0 \in \Xi_0(\widehat{\Theta} + \delta_0, x^0) = B \left[ 0, \frac{1}{\alpha} \right] \times B \left[ y_0, \frac{\widehat{\Theta} + \delta_0}{\alpha} \right].$$

Отсюда следует, что в пространстве  $\mathbb{R}^2$

$$0 \in B \left[ y_0, \frac{\widehat{\Theta} + \delta_0}{\alpha} \right] = \Xi_{0,y}(\widehat{\Theta} + \delta_0, y^0).$$

Поскольку в силу (14) выполняется  $\widehat{\Theta} + \delta_0 < \Theta_0$ , то это противоречит тому, что  $\Theta_0$  — время быстродействия приведенной системы. Значит, предположение п. 4 неверно, и

$$\lim_{\varepsilon, \mu \rightarrow 0} \Theta(\varepsilon, \mu) = \Theta_0. \quad \square$$

Отметим, что с помощью аналогичных рассуждений можно установить непрерывность времени быстродействия  $\Theta(\varepsilon, \mu)$  при фиксированном  $\varepsilon$  и  $\mu \rightarrow 0$ .

В работе [8] для линейной задачи быстродействия с быстрыми и медленными переменными и многогранником в качестве ограничивающего множества доказано, что  $\Theta(\varepsilon) \rightarrow \Theta_0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### 3. Задача с невозмущенным начальным условием

Нетрудно проверить, что система (1) удовлетворяет условию управляемости [2], тогда в силу вида ограничений (3) для рассматриваемой задачи принцип максимума Понтрягина [1] является необходимым и достаточным условием оптимальности управления.

Рассмотрим сначала задачу (5), (3), (4) с невозмущенным начальным условием

$$z(0) = z^0, \quad y(0) = y^0. \quad (17)$$

Сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi}_z = \frac{\alpha}{\varepsilon} \psi_z - \psi_y, \quad \dot{\psi}_y = 0.$$

Тогда

$$\psi_y = l_y, \\ \psi_z = e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} t} l_z - \int_0^t e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} (t-\eta)} l_y d\eta = e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} t} l_z + \frac{\varepsilon}{\alpha} \left( 1 - e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} t} \right) l_y,$$

где векторы  $l_z = l_z(\varepsilon)$ ,  $l_y = l_y(\varepsilon)$  не зависят от  $t$ . Согласно принципу максимума оптимальное управление  $u_\varepsilon(t)$  удовлетворяет соотношению

$$\langle \psi_z(t), u_\varepsilon(t) \rangle = \max_{\|u\| \leq 1} \langle \psi_z(t), u \rangle = \|\psi_z(t)\|,$$

здесь и далее  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в соответствующем конечномерном пространстве. Тогда при  $t$  таких, что  $l_z(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} t}\right) l_y(\varepsilon) \neq 0$ , оптимальное управление имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = \frac{l_z(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} t}\right) l_y(\varepsilon)}{\left\| l_z(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} t}\right) l_y(\varepsilon) \right\|}, \quad (18)$$

а из (5), (17) получаем

$$z_\varepsilon(t) = e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} t} z^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} (t-\tau)} u_\varepsilon(\tau) d\tau,$$

$$y_\varepsilon(t) = y^0 + \int_0^t z_\varepsilon(\eta) d\eta.$$

Тогда

$$0 = z_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) = e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon} z^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\Theta_\varepsilon} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} (\Theta_\varepsilon - \tau)} u_\varepsilon(\tau) d\tau, \quad (19)$$

$$0 = y_\varepsilon(\Theta_\varepsilon) = y^0 + \int_0^{\Theta_\varepsilon} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} \eta} d\eta z^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\Theta_\varepsilon} d\eta \int_0^\eta e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} (\eta - \tau)} u_\varepsilon(\tau) d\tau$$

$$= y^0 + \frac{\varepsilon}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon}\right) z^0 + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\Theta_\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} (\Theta_\varepsilon - \tau)}\right) u_\varepsilon(\tau) d\tau$$

$$= y^0 + \frac{\varepsilon}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon}\right) z^0 + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\Theta_\varepsilon} u_\varepsilon(\tau) d\tau + \frac{\varepsilon}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon} z^0, \quad (20)$$

где  $\Theta_\varepsilon$  — значение времени быстрогодействия. Таким образом, из (19), (20) получили систему уравнений

$$0 = z^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\Theta_\varepsilon} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} t} u_\varepsilon(t) dt, \quad (21)$$

$$0 = y^0 + \frac{\varepsilon}{\alpha} z^0 + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\Theta_\varepsilon} u_\varepsilon(t) dt.$$

В случае, когда вектор начальной скорости  $y^0$  коллинеарен радиус-вектору начального положения точки  $z^0$ , оптимальное движение, очевидно, является прямолинейным. Без ограничения общности будем рассматривать начальные векторы вида

$$z^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix}, \quad y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При этих начальных условиях задача (1)–(4) фактически становится двумерной со скалярным управлением. Пусть  $\nu > 0$ , тогда соответствующее этим начальным условиям оптимальное управление имеет единственную (равномерно по  $\varepsilon$ ) точку разрыва  $\bar{t}_\varepsilon \in (t^0, \Theta_\varepsilon)$  (в силу теоремы о числе точек переключения [1]). Из уравнений (18), (21) находим

$$l_z = \begin{pmatrix} 0 \\ l_2(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad l_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sign} \left( l_2(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} t}\right) \right) \end{pmatrix},$$

$$\text{sign} \left( l_2(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\alpha} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} t} \right) \right) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq t < \bar{t}_\varepsilon, \\ 1 & \text{при } \bar{t}_\varepsilon \leq t \leq \Theta_\varepsilon, \end{cases} \quad l_2(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\varepsilon}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} \bar{t}_\varepsilon}.$$

Тогда в силу (21) получаем

$$1 = -\frac{\varepsilon}{\alpha} \nu - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\bar{t}_\varepsilon} (-1) dt - \frac{1}{\alpha} \int_{\bar{t}_\varepsilon}^{\Theta_\varepsilon} dt = -\frac{1}{\alpha} (\varepsilon \nu - 2\bar{t}_\varepsilon + \Theta_\varepsilon).$$

Отсюда  $\bar{t}_\varepsilon = (\alpha + \varepsilon \nu + \Theta_\varepsilon) / 2$ . Далее,

$$\nu = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\bar{t}_\varepsilon} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} t} (-1) dt - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\bar{t}_\varepsilon}^{\Theta_\varepsilon} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} t} dt = \frac{1}{\alpha} \left( 2e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} \bar{t}_\varepsilon} - 1 - e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon} \right) = \frac{1}{\alpha} \left( 2e^{\frac{\alpha}{2\varepsilon} \Theta_\varepsilon} e^{\frac{\alpha}{2\varepsilon} (\alpha + \varepsilon \nu)} - 1 - e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} \Theta_\varepsilon} \right).$$

Решая квадратное уравнение относительно  $e^{\frac{\alpha}{2\varepsilon} \Theta_\varepsilon}$ , получаем

$$e^{\frac{\alpha}{2\varepsilon} \Theta_\varepsilon} = e^{\frac{\alpha}{2\varepsilon} (\alpha + \varepsilon \nu)} \left( 1 + \sqrt{1 - (1 + \alpha \nu) e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} (\alpha + \varepsilon \nu)}} \right),$$

или

$$\Theta_\varepsilon = \alpha + \varepsilon \nu + \frac{2\varepsilon}{\alpha} \ln \left( 1 + \sqrt{1 - (1 + \alpha \nu) e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} (\alpha + \varepsilon \nu)}} \right). \quad (22)$$

Из формулы (22) получаем следующие асимптотические равенства:

$$\Theta_\varepsilon = \alpha + \varepsilon \left( \nu + 2 \frac{\ln 2}{\alpha} \right) + \mathbb{O}, \quad \bar{t}_\varepsilon = \Theta_\varepsilon - \varepsilon \frac{\ln 2}{\alpha} + \mathbb{O} = \alpha + \varepsilon \left( \nu + \frac{\ln 2}{\alpha} \right) + \mathbb{O} \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \quad (23)$$

$$l_2(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{\alpha} + \mathbb{O} \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Здесь  $\mathbb{O}$  — асимптотический нуль относительно степенной асимптотической последовательности  $\{\varepsilon^{n\sigma}\}$ , т. е.  $\forall \gamma > 0 \quad \mathbb{O} = o(\varepsilon^\gamma) \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$ .

Заметим, что векторы  $l_z(\varepsilon)$ ,  $l_y(\varepsilon)$  определены с точностью до одного и того же постоянного положительного множителя.

#### 4. Построение асимптотики времени быстрогодействия

Обратимся к исходной задаче (1)–(4). Без ограничения общности зададим возмущение начального вектора (2) в виде  $\tilde{x} = (0, 0, 1, 0)^T$  и рассмотрим задачу с начальным условием  $x(0) = (0, \nu, \mu, 1)^T$ .

Соотношения (18), (21) выполняются и для возмущенной задачи с заменой  $\Theta_\varepsilon$  на  $\Theta = \Theta(\varepsilon, \mu)$ ,  $x^0$  на  $x^0 + \mu \tilde{x}$ ,  $u_\varepsilon(t)$  на  $\bar{u}(t; \varepsilon, \mu)$ ,  $l_z(\varepsilon)$  на  $l_z = l_z(\varepsilon, \mu)$  и  $l_y(\varepsilon)$  на  $l_y = l_y(\varepsilon, \mu)$ . Введем новые неизвестные векторы

$$r_1 = e^{\frac{\alpha}{\varepsilon} \Theta} \left( l_z - \frac{\varepsilon}{\alpha} l_y \right), \quad r_2 = \frac{\varepsilon}{\alpha} l_y,$$

тогда при  $t$  таких, что  $e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} (\Theta - t)} r_1 + r_2 \neq 0$ , оптимальное управление в задаче будет иметь вид

$$\bar{u}(t; \varepsilon, \mu) = \frac{e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} (\Theta - t)} r_1 + r_2}{\left\| e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon} (\Theta - t)} r_1 + r_2 \right\|}. \quad (24)$$

Отметим, что векторы  $r_1 = r_1(\varepsilon, \mu)$ ,  $r_2 = r_2(\varepsilon, \mu)$ , как и  $l_z(\varepsilon, \mu)$ ,  $l_y(\varepsilon, \mu)$ , определены с точностью до одного и того же постоянного положительного множителя, поэтому будем считать, что векторы  $r_1$ ,  $r_2$  ограничены при  $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ .

После замены переменной в определенном интеграле по формуле  $\eta = e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\Theta-t)}$  основную систему уравнений (21) можно записать в виде

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \end{pmatrix} - \frac{1}{\alpha} \int_1^{e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}} \frac{\eta r_1 + r_2}{\|\eta r_1 + r_2\|} d\eta, \quad (25a)$$

$$0 = \begin{pmatrix} \mu \\ 1 + \varepsilon \frac{\nu}{\alpha} \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon}{\alpha^2} \int_1^{e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}} \frac{1}{\eta} \frac{\eta r_1 + r_2}{\|\eta r_1 + r_2\|} d\eta. \quad (25b)$$

Отметим, что в силу уравнений (25a) и (25b) выполняется  $\|r_1\| \cdot \|r_2\| \neq 0$ .

После интегрирования система (25) примет вид

$$v_1 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} = \frac{r_1}{\|r_1\|^2} \Phi_1 + \frac{\|r_1\|^2 r_2 - \langle r_1, r_2 \rangle r_1}{\|r_1\|^3} \Phi_2, \quad (26a)$$

$$v_2 = \varepsilon \frac{r_1}{\|r_1\|} \Phi_2 - \varepsilon \frac{r_2}{\|r_2\|} \Phi_3, \quad (26b)$$

где

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \nu \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \mu \alpha^2 \\ \alpha^2 + \varepsilon \nu \alpha \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 = \|e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} r_1 + r_2\| - \|r_1 + r_2\|, \quad (27)$$

$$\Phi_2 = \ln \left| \frac{\langle r_1, r_2 \rangle + \|r_1\|^2 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} + \|r_1\| \cdot \|e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} r_1 + r_2\|}{\langle r_1, r_2 \rangle + \|r_1\|^2 + \|r_1\| \cdot \|r_1 + r_2\|} \right|, \quad (28)$$

$$\Phi_3 = \ln \left| \frac{\langle r_1, r_2 \rangle + \|r_2\|^2 e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} + e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \|r_2\| \cdot \|e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} r_1 + r_2\|}{\langle r_1, r_2 \rangle + \|r_2\|^2 + \|r_2\| \cdot \|r_1 + r_2\|} \right|. \quad (29)$$

Отметим, что в силу теоремы 1 и принципа максимума Понтрягина у системы уравнений (26) есть решение  $r_1(\varepsilon, \mu)$ ,  $r_2(\varepsilon, \mu)$ ,  $\Theta(\varepsilon, \mu)$ , причем  $\Theta(\varepsilon, \mu) = \alpha + o(1)$ ,  $(\varepsilon, \mu \rightarrow 0)$ .

Умножим скалярно уравнения (26a) на вектор  $r_1$ , получим

$$e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \langle v_1, r_1 \rangle = \Phi_1, \quad (30)$$

тогда в силу равенства (27) имеем

$$e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \langle v_1, r_1 \rangle = \|e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} r_1 + r_2\| - \|r_1 + r_2\|. \quad (31)$$

Принимая во внимание предположение об ограниченности  $\|r_1\|$  и  $\|r_2\|$ , имеем

$$\|r_1\|^2 + 2\langle r_1, r_2 \rangle = \mathcal{O} \left( \|r_1\| e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \right), \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0). \quad (32)$$

Тогда

$$\|r_1\| = \mathcal{O}(\|r_2\|), \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0). \quad (33)$$

Нормируем вектор  $(r_1^T, r_2^T)^T$  следующим образом:

$$\|r_2\| = \varepsilon, \quad (34)$$

тогда из уравнения (31), в частности, получим

$$\begin{aligned}\|r_1 + r_2\| &= \varepsilon + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right) \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0), \\ \|r_1\| &= \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0).\end{aligned}$$

Здесь и далее символы  $\mathcal{O}$  и  $\mathbb{O}$  имеют соответствующий смысл при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $0 < \mu \leq \mu_0$ .

Далее, умножим уравнения (26а) на вектор  $r_2 \|r_1\|^3$ :

$$e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \langle v_1, r_2 \rangle \|r_1\|^3 = \|r_1\| \langle r_1, r_2 \rangle \Phi_1 + (\|r_1\|^2 \cdot \|r_2\|^2 - \langle r_1, r_2 \rangle^2) \Phi_2,$$

тогда в силу равенства (30) имеем

$$(\|r_1\|^2 \cdot \|r_2\|^2 - \langle r_1, r_2 \rangle^2) \Phi_2 = \mathcal{O}\left(\|r_1\|^3 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right) \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0). \quad (35)$$

Оценим далее величину  $\Phi_2$  (28), используя равенства (31)–(34):

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \ln \left| \frac{2\langle r_1, r_2 \rangle + 2\|r_1\|^2 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} + 2\|r_1\| \left( e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \langle v_1, r_1 \rangle + \|r_1 + r_2\| \right)}{2\langle r_1, r_2 \rangle + 2\|r_1\|^2 + 2\|r_1\| \cdot \|r_1 + r_2\|} \right| \\ &= \ln \left| \frac{-\|r_1\|^2 + \mathcal{O}\left(\|r_1\| e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right) + 2\|r_1\|^2 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} + 2\|r_1\| \langle v_1, r_1 \rangle e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} + 2\|r_1\| \cdot \|r_1 + r_2\|}{-\|r_1\|^2 + \mathcal{O}\left(\|r_1\| e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right) + 2\|r_1\|^2 + 2\|r_1\| \cdot \|r_1 + r_2\|} \right| \\ &= \ln \left| \frac{-\|r_1\|^2 + 2\varepsilon \|r_1\| + \|r_1\| \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right)}{\|r_1\|^2 + 2\varepsilon \|r_1\| + \|r_1\| \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right)} \right| = \ln \left| \frac{2\varepsilon - \|r_1\| + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right)}{2\varepsilon + \|r_1\| + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right)} \right| \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0). \quad (36)\end{aligned}$$

Равенство (31) с учетом (34) допускает  $\|r_1\| = \mathbb{O}$ . В этом случае из (36) следует, что  $\Phi_2 = \mathbb{O}$  и

$$\Phi_3 = \ln \left| \frac{\mathbb{O} + 2\varepsilon^2 e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}}{\mathbb{O} + 2\varepsilon^2} \right| = \frac{\alpha}{\varepsilon} \Theta + \mathbb{O},$$

поэтому уравнения (26b) при  $\mu = 0$  принимают вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^2 + \varepsilon\nu\alpha \end{pmatrix} = \mathbb{O} - \alpha\Theta \frac{r_2}{\|r_2\|}.$$

Отсюда для  $\bar{r}_2 = r_2/\|r_2\|$ , ( $\|\bar{r}_2\| = 1$ ) получаем

$$\bar{r}_2 = -\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha + \varepsilon\nu}{\Theta} \end{pmatrix} + \mathbb{O},$$

или  $1 = (\alpha + \varepsilon\nu)/\Theta + \mathbb{O}$ , т. е.  $\Theta = \alpha + \varepsilon\nu + \mathbb{O}$ , что противоречит формуле (23), поскольку нарушается непрерывность времени быстрогодействия при фиксированном  $\varepsilon$  и  $\mu \rightarrow 0$ .

Итак,  $\|r_1\| \neq \mathbb{O}$ , тогда  $\Phi_2 \neq \mathbb{O}$ , и в силу равенства (35) имеем

$$\|r_1\|^2 \cdot \|r_2\|^2 - \langle r_1, r_2 \rangle^2 = \mathbb{O} \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0), \quad (37)$$

т. е. вектор  $r_1$  “почти” коллинеарен  $r_2$ .

Отметим, что в силу (32) из (37) получим

$$\|r_1\|^2 \cdot \|r_2\|^2 = \frac{1}{4}\|r_1\|^4 + \mathbb{O}, \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0)$$

или с учетом условия (34)

$$\|r_1\| = 2\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon, \mu \rightarrow 0). \quad (38)$$

Теперь из (38) и (31) получаем

$$\begin{aligned} \|r_1\|^2 + 2\langle r_1, r_2 \rangle &= \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right), \\ \|e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} r_1 + r_2\| &= \|r_1 + r_2\| + \mathcal{O}\left(\varepsilon e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right), \\ \|r_1 + r_2\| &= \varepsilon + \mathcal{O}\left(\varepsilon e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right) \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (39)$$

Отметим, что в силу (30) справедливо равенство

$$\frac{r_1}{\|r_1\|^2} \Phi_1 = \frac{r_1}{\|r_1\|^2} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \langle v_1, r_1 \rangle,$$

или

$$\frac{r_1}{\|r_1\|^2} \Phi_1 = \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right) \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0).$$

Поскольку уравнения (26а) можно записать в виде

$$v_1 = \frac{r_1}{\|r_1\|^2} \langle v_1, r_1 \rangle + \frac{\|r_1\|^2 r_2 - \langle r_1, r_2 \rangle r_1}{\|r_1\|^3} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \Phi_2,$$

то с учетом соотношений (39) получим

$$\frac{\|r_1\|^2 r_2 - \langle r_1, r_2 \rangle r_1}{\|r_1\|^3} e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \Phi_2 = \frac{1}{\|r_1\|} \left( r_2 + \frac{1}{2} r_1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right) \right) e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \Phi_2 = \mathcal{O}(1),$$

или

$$\left[ \left( r_2 + \frac{1}{2} r_1 \right) e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \Phi_2 = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (40)$$

Из формулы (36) при условии (38) получаем, что  $\Phi_2 \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ , поэтому из (40) следует, что

$$\left( r_2 + \frac{1}{2} r_1 \right) e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\varepsilon, \mu \rightarrow 0).$$

Введем новый неизвестный вектор  $\rho = \rho(\varepsilon, \mu)$  по формуле

$$\left( r_2 + \frac{1}{2} r_1 \right) e^{\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} = \rho,$$

при этом  $\|\rho\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ .

Перепишем основную систему уравнений (26) для новых неизвестных  $r_1$  и  $\rho$ , заменяя вектор  $r_2$  по формуле

$$r_2 = -\frac{1}{2} r_1 + \rho e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}, \quad (41)$$

а  $\Phi_1$  по формуле (30):

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{r_1}{\|r_1\|^2} \langle v_1, r_1 \rangle + \frac{\|r_1\|^2 \rho - \langle r_1, \rho \rangle r_1}{\|r_1\|^3} \Phi_2, \\ v_2 &= \varepsilon \frac{r_1}{\|r_1\|} \Phi_2 - \varepsilon \frac{-\frac{1}{2} r_1 + \rho e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}}{\left\| -\frac{1}{2} r_1 + \rho e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta} \right\|} \Phi_3. \end{aligned} \quad (42)$$

Система (42) эквивалентна системе (26) и, значит, разрешима. При этом  $\|r_1\| = 2\varepsilon + \mathbb{O}$ ,  $\|\rho\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$ .

Для технического удобства изменим условие (34), нормируем вектор  $(r_1^T, r_2^T)^T$  следующим образом:

$$\|r_1\| = \varepsilon. \quad (43)$$

Введем в рассмотрение новые векторы  $e_1$  и  $e_2$  так, что

$$e_1 = \frac{r_1}{\|r_1\|}, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = 0, \quad \|e_2\| = 1.$$

Тогда

$$\|e_1\| = 1, \quad r_1 = \varepsilon e_1, \quad \rho = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \quad (44)$$

для некоторых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , при этом  $\lambda_i = \mathcal{O}(\varepsilon)$  ( $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ ,  $i = 1, 2$ ).

Из формул (28) и (29) с учетом (41), (43) получим

$$\Phi_2 = -2\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta - 2\ln\varepsilon + \ln\lambda_2^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{-1}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right),$$

$$\Phi_3 = 3\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta - 2\ln 2 + 2\ln\varepsilon - \ln\lambda_2^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{-1}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right).$$

Уравнения (42) теперь примут вид

$$v_1 = e_1 \langle v_1, e_1 \rangle + \frac{\lambda_2}{\varepsilon^2} e_2 \left( -2\alpha\Theta - 2\varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon\ln\lambda_2^2 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right) \right), \quad (45a)$$

$$v_2 = (\alpha\Theta - 2\varepsilon\ln 2) e_1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{-1}e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Theta}\right). \quad (45b)$$

Из уравнений (45b) и  $\|e_1\| = 1$  с учетом соотношения  $\Theta(\varepsilon, \mu) = \alpha + o(1)$  ( $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ ) получаем

$$e_1 = \left( \frac{\mu\alpha^2}{\alpha^2 + \varepsilon\nu\alpha} \right) \frac{1}{\alpha\Theta - 2\varepsilon\ln 2} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}}\right), \quad (46)$$

$$\Theta = \sqrt{(\alpha + \varepsilon\nu)^2 + \mu^2\alpha^2} + 2\varepsilon\frac{\ln 2}{\alpha} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}}\right), \quad (47)$$

$\gamma > 0$ ,  $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ . Отметим, что  $\Theta(\varepsilon, 0) = \Theta_\varepsilon + \mathbb{O}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  (23). Подставляя (47) в (46), получим

$$e_1 = \left( \frac{\mu\alpha}{\alpha + \varepsilon\nu} \right) \frac{1}{\sqrt{(\alpha + \varepsilon\nu)^2 + \mu^2\alpha^2}} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon}}\right). \quad (48)$$

Соотношение (47) дает полную степенную асимптотику оптимального времени быстрогодействия. А из равенств (48), (44) и (41) легко получить степенные асимптотические формулы для векторов  $r_1$  и  $r_2$ . Тем самым установлена следующая теорема.

**Теорема 2.** Для оптимального времени быстрогодействия  $\Theta(\varepsilon, \mu)$  и векторов  $r_1$  и  $r_2$  справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\Theta(\varepsilon, \mu) = \sqrt{(\alpha + \varepsilon\nu)^2 + \mu^2\alpha^2} + 2\varepsilon\frac{\ln 2}{\alpha} + \mathbb{O}, \quad \varepsilon, \mu \rightarrow 0,$$

$$r_1 = \left( \frac{\mu\alpha}{\alpha + \varepsilon\nu} \right) \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\alpha + \varepsilon\nu)^2 + \mu^2\alpha^2}} + \mathbb{O}, \quad \varepsilon, \mu \rightarrow 0,$$

$$r_2 = -\left( \frac{\mu\alpha}{\alpha + \varepsilon\nu} \right) \frac{\varepsilon}{2\sqrt{(\alpha + \varepsilon\nu)^2 + \mu^2\alpha^2}} + \mathbb{O}, \quad \varepsilon, \mu \rightarrow 0.$$

□

**Теорема 3.** Пусть управление (24) порождается вектором  $(\tilde{r}_1^T, -\tilde{r}_1^T/2)^T$ , где

$$\tilde{r}_1 = \begin{pmatrix} \mu\alpha \\ \alpha + \varepsilon\nu \end{pmatrix} \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\alpha + \varepsilon\nu)^2 + \mu^2\alpha^2}},$$

а время движения равно

$$\tilde{\Theta} = \sqrt{(\alpha + \varepsilon\nu)^2 + \mu^2\alpha^2} + 2\varepsilon \frac{\ln 2}{\alpha},$$

тогда к моменту времени  $\tilde{\Theta}$  материальная точка попадет в  $\mathbb{O}$ -окрестность начала координат.

**Доказательство.** В силу равенства  $\tilde{r}_2 = -\tilde{r}_1/2$  непосредственно из уравнений (19), (20) получаем

$$z(\tilde{\Theta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\tilde{\Theta}} \end{pmatrix} + \frac{\tilde{r}_1}{\varepsilon\alpha} \int_{e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\tilde{\Theta}}}^1 \frac{2\eta - 1}{|2\eta - 1|} d\eta = e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\tilde{\Theta}} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} + \frac{\tilde{r}_1}{\varepsilon\alpha} \right) = \mathbb{O},$$

$$\begin{aligned} y(\tilde{\Theta}) &= \begin{pmatrix} \mu \\ 1 + \varepsilon\frac{\nu}{\alpha} \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\tilde{\Theta}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} + \frac{\tilde{r}_1}{\alpha^2} \int_{e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\tilde{\Theta}}}^1 \frac{1}{\eta} \cdot \frac{2\eta - 1}{|2\eta - 1|} d\eta - \frac{\tilde{r}_1}{\alpha^2} \int_{e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\tilde{\Theta}}}^1 \frac{2\eta - 1}{|2\eta - 1|} d\eta \\ &= \begin{pmatrix} \mu \\ 1 + \varepsilon\frac{\nu}{\alpha} \end{pmatrix} + \frac{\tilde{r}_1}{\alpha^2} \left( 2 \ln 2 - \frac{\alpha}{\varepsilon} \tilde{\Theta} \right) - \frac{\varepsilon}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\tilde{\Theta}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \end{pmatrix} - \frac{\tilde{r}_1}{\alpha^2} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\tilde{\Theta}} = \mathbb{O}, \quad \varepsilon, \mu \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем  $\Theta(\varepsilon, \mu) = \tilde{\Theta}(\varepsilon, \mu) + \mathbb{O}$ ,  $z(\tilde{\Theta}) = \mathbb{O}$  и  $y(\tilde{\Theta}) = \mathbb{O}$  ( $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ ), значит, управление, порожденное вектором  $(\tilde{r}_1^T, -\tilde{r}_1^T/2)^T$ , есть  $\mathbb{O}$ -оптимальное или, в терминах [11], субоптимальное любого порядка.  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредлидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
5. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, № 1. P. 111–113.
6. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
7. Дончев А. Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
8. Гичев Т.Р., Дончев А.Л. Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстрого действия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
9. Данилин А.Р., Ильин А.М. Асимптотика решения задачи о быстродействии при возмущении начальных условий // Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 96–103.
10. Данилин А.Р., Ильин А.М. О структуре решения одной возмущенной задачи быстрого действия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.

11. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
12. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.

Данилин Алексей Руфимович  
д-р физ.-мат. наук  
зав. отделом  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 11.11.2009

Эльберт Александр Евгеньевич  
канд. физ.-мат. наук  
науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: koo@imm.uran.ru

УДК 534.4 + 517.9

**ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ,  
ОПИСЫВАЮЩЕЙ ТЕПЛОВУЮ КОНВЕКЦИЮ<sup>1</sup>****А. И. Короткий, Д. А. Ковтунов**

Исследуется задача оптимального граничного управления тепловыми источниками для стационарной модели естественной тепловой конвекции высоковязкой неоднородной несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. Приводятся некоторые условия разрешимости задачи, указываются необходимые и достаточные условия оптимальности. Для ряда частных случаев функционала качества выписаны условия оптимальности и соответствующие сопряженные задачи, определяющие градиент функционала. Описаны процедуры численного нахождения оптимального управления, основанные на градиентных методах. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: оптимальное управление, тепловая конвекция, градиентный метод.

A. I. Korotkii, D. A. Kovtunov. Optimal boundary control of a system describing thermal convection.

A problem of optimal boundary control of thermal sources for a stationary model of natural thermal convection of a high-viscosity inhomogeneous incompressible fluid in the Boussinesq approximation is investigated. Some conditions for the solvability of the problem are given; necessary and sufficient optimality conditions are specified. Optimality conditions and the corresponding conjugate problems defining the gradient of the quality functional are written for a number of particular cases of the functional. Procedures for the numerical finding of an optimal control based on gradient methods are described. The results of numerical experiments are given.

Keywords: optimal control, thermal convection, gradient method.

**Введение**

Теория управления объектами, описываемыми системами с распределенными параметрами, в частности, краевыми задачами для уравнений механики сплошной среды, всегда привлекала пристальное внимание специалистов по теории управления и ее приложениям. В последние годы особый интерес вызывает теория управления гидродинамическими, тепловыми, диффузионными, электромагнитными и другими полями в жидких средах. Одной из целей теории и приложений в этой области является установление наиболее эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах. В гидродинамике задача уменьшения сил сопротивления в вязкой жидкости всегда была и остается актуальной. Широкий круг задач управления связан с созданием течений жидкости с заданными динамическими и топологическими свойствами. В тепловой конвекции интерес представляют задачи управления режимом течения вязкой теплопроводной жидкости с помощью источников тепла, а также задачи минимизации температурных градиентов либо максимальных температур в определенных частях области течения. Возможное управление осуществляется путем инъекции жидкости через некоторую часть границы области течения либо нагреванием или охлаждением определенных ее участков [1, 2]. В инженерной экологии задачи управления возникли при решении актуальных проблем защиты окружающей среды от антропогенного воздействия [3]. Задачи управления течениями электромагнитных жидкостей (МГД-течениями) исторически появились сначала в металлургии и литейном производстве при разработке оптимальных технологий бесконтактного электромагнитного размешивания расплавленных металлов и в ядерной индустрии при создании эффективных систем жидкометаллического охлаждения агрегатов

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00029) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (“Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”).

ядерной энергетики [4–7]. Подобные задачи управления возникают также при создании установок для промышленного выращивания кристаллов [8, 9]. Одной из целей моделирования и управления в процессах МГД вязкой теплопроводной жидкости является изучение влияния электромагнитного поля на развитие конвекции. В некоторых случаях, например, при охлаждении ядерных реакторов, электромагнитное поле используется для усиления конвекции. В установках по выращиванию кристаллов, наоборот, оно необходимо для подавления конвекции, поскольку усиление последней приводит к ухудшению качества выращиваемых кристаллов. Исследование вопроса о возможности подавления или усиления конвекции естественным образом ставит задачи управления для различных моделей жидкостей [10, 11].

Наряду с задачами управления важную роль в приложениях играют обратные задачи для моделей механики сплошной среды. Типичная обратная задача для моделей гидродинамики состоит в следующем. В некоторой части области течения жидкости задается нужный гидродинамический режим и требуется определить или создать реализующие этот режим гидродинамические источники (управления). В случае модели тепловой конвекции дополнительная информация о состоянии системы может задаваться уже не только в виде гидродинамического режима, но и теплового поля, а искомые источники (управления) могут отыскиваться в классах источников как “гидродинамического”, так и “теплового” типа. Точно так же для моделей МГД теплопроводной жидкости дополнительная информация о состоянии системы может задаваться в виде гидродинамического режима либо теплового или электромагнитного поля, а искомые механизмы управления могут иметь как “гидродинамический”, так и “тепловой” или “электромагнитный” тип. Целесообразно отметить, что исследование обратных задач можно свести к исследованию соответствующих экстремальных задач. Это достигается путем введения соответствующего функционала качества, адекватно отвечающего рассматриваемой обратной задаче, и последующей его минимизации на допустимых решениях исходной задачи. На этом пути возникают “обратные” экстремальные задачи, для исследования которых можно применять методологию, развитую для исследования задач управления (экстремальных задач). Исследованию описанного выше круга задач посвящена обширная литература, в которой изучаются различные аспекты этих задач (как чисто теоретические, так и прикладные). Однако эта тема еще далеко не исчерпана. Многие фундаментальные и прикладные задачи ждут своего решения.

Математическое описание указанных выше проблем включает три компонента: цель; механизмы управления, используемые для достижения цели; ограничения, которым должны удовлетворять состояния и управления рассматриваемой системы. Роль ограничений обычно играют непосредственные прямые ограничения на допустимые управления, проистекающие из физических условий реализации того или иного механизма управления системой, и уравнения рассматриваемой модели сплошной среды (гидродинамики, тепловой конвекции, магнитной гидродинамики, электромагнетизма и другие), желаемая цель достигается путем минимизации определенного функционала качества. Таким образом, математическая постановка задачи управления может быть сведена к экстремальной задаче условной или безусловной минимизации некоторого функционала в функциональном пространстве. Далее к полученной экстремальной задаче может применяться тот или иной формализм решения абстрактных экстремальных задач (по этому поводу можно упомянуть, к примеру, работы и монографии А.Д. Иоффе и В.М. Тихомирова [12], Ф.П. Васильева [13], Ж. Сеа [14], Э. Полака [15], Ф. Кларка [16], В.Ф. Демьянова и А.М. Рубинова [17], Ж.Л. Лионса [18], А.В. Фурсикова [19], В.Г. Литвинова [20], Г.В. Алексеева [11] и многих других авторов). Таким образом, указанная методика решения задачи будет состоять из нескольких этапов: формулировки уравнений состояния и введения оператора краевой задачи; исследования свойств решения краевой задачи; формулировки задачи управления и исследования ее разрешимости; формулировки необходимых и достаточных условий оптимальности и их обоснования; теоретического и численного анализа системы оптимальности. Описанная методика решения экстремальной задачи представляет собой в определенном смысле универсальную процедуру, которую можно применять

при исследовании задач управления для большинства моделей сплошной среды. Однако в этой универсальности одновременно скрываются известные достоинства и недостатки.

В данной работе исследуются задачи граничного оптимального управления тепловыми источниками для стационарных моделей естественной тепловой конвекции неоднородной несжимаемой высоковязкой жидкости в приближении Буссинеска. Управление объектом осуществляется с помощью тепловых воздействий через границу объекта. Соответствующая краевая задача тепловой конвекции представляет собой систему уравнений с частными производными вместе с краевыми условиями для искомых функций. Система уравнений рассматривается в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , и включает в себя уравнение Стокса вместе с уравнением несжимаемости для определения стационарного поля скоростей жидкости, а также стационарное уравнение теплового баланса для определения температуры жидкости. На границе  $\Gamma = \partial\Omega$  области  $\Omega$  для искомого поля скоростей задается краевое условие прилипания, а для искомой температуры задается смешанное неоднородное краевое условие, в котором на одной части границы задается тепловой поток, на другой — температура, на третьей — граничное условие иного, например, третьего рода. Далее для простоты будем рассматривать случай с граничными условиями первого или второго типа. Граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  может иметь различную гладкость. В частности, она может быть кусочно-гладкой, а сама область может быть выпуклой или невыпуклой. Особенность рассматриваемой здесь краевой задачи тепловой конвекции и соответствующей задачи граничного управления состоит в том, что она решается в областях с нерегулярной границей и нерегулярными граничными данными на этой границе. Это дает возможность рассматривать управляющие воздействия на границе  $\Gamma$  из достаточно широкого функционального класса. С одной стороны, это обстоятельство существенно усложняет исследование задачи, поскольку граничные данные в этих условиях, вообще говоря, не могут быть продолжены внутрь области регулярным образом и краевая задача не может быть сведена классическим способом к краевой задаче с однородными граничными условиями. С другой стороны, упомянутое обстоятельство дает возможность поставить задачи управления в естественных функциональных пространствах. Нерегулярность исходных граничных данных приводит к необходимости ослабления понятия решения краевой задачи. В работе используется введенное и исследованное авторами понятие слабого решения краевой задачи тепловой конвекции [21, 22]. Данная работа связана также с исследованием граничных обратных задач [23, 24], в которых для процессов, описываемых моделями высоковязкой несжимаемой жидкости, требуется восстановить некоторый неизвестный тепловой граничный режим по какой-либо дополнительной информации о процессе на границе. Такие обратные задачи часто возникают на практике, например, в геофизике и технике, когда прямые измерения искомых величин невозможны на определенной части границы объекта, но известна некоторая дополнительная информация об объекте на другой части его границы. По этой дополнительной информации и должно осуществляться восстановление искомых величин. Некоторые варианты рассматриваемой здесь задачи управления были представлены в [25]. Близкие по постановке задачи управления с регулярными граничными данными для различных моделей жидкости изучались с помощью принципа Лагранжа в работах [11, 26–29]. Многие классы задач оптимального управления для систем с распределенными параметрами, в том числе описывающих различные модели динамики жидкости, рассматривались в [18, 19].

## 1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система, состоянием которой является пара функций  $(T, \mathbf{v})$ ,  $T = T(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , удовлетворяющих краевой задаче

$$\mu \Delta \mathbf{v} = \nabla p - \text{Ra } T \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = \mathbf{v} \cdot \nabla T - f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.4)$$

$$\partial T / \partial \mathbf{n} = u, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \subset \Gamma, \quad (1.5)$$

$$T = w, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \subset \Gamma. \quad (1.6)$$

Краевая задача (1.1)–(1.6) описывает в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , с границей  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\text{mes} \Gamma_2 > 0$ , установившееся движение вязкой неоднородной несжимаемой теплопроводной ньютоновской жидкости в приближении Буссинеска, находящейся во внешнем силовом поле с плотностью массовых сил  $\mathbf{g}$  под действием внешних тепловых режимов  $u$  на  $\Gamma_1$  ( $ku$  — поток тепла через границу  $\Gamma_1$ ) и  $w$  на  $\Gamma_2$  ( $w$  — температура на границе  $\Gamma_2$ ), а также внутренних источников тепла с плотностью  $f$  [30–33]. Краевая задача записана в обезразмеренном виде. Физический смысл параметров в краевой задаче:  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  — точка  $\mathbb{R}^n$ ;  $\mathbf{v} = (v_1(x), \dots, v_n(x))$  — вектор скорости движения жидкости;  $p = p(\mathbf{x})$  — давление;  $T = T(\mathbf{x})$  — температура;  $\mu$  — вязкость;  $k = k(\mathbf{x})$  — коэффициент теплопроводности;  $f = f(\mathbf{x})$  — плотность внутренних источников тепла;  $u = u(\mathbf{x})$ ,  $w = w(\mathbf{x})$  — температурные режимы на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно;  $\text{Ra}$  — число Рэлея;  $\mathbf{g}$  — вектор плотности внешних массовых сил;  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$  — единичная внешняя нормаль к  $\Omega$  в точках  $\mathbf{x}$  границы  $\Gamma$ .

Параметры (тепловые режимы)  $u$  и  $w$  будут считаться управляющими воздействиями на систему, удовлетворяющими ограничениям  $u \in U$  и  $w \in W$  соответственно, где  $U$  и  $W$  — некоторые множества допустимых управлений. Пусть пара  $(T, \mathbf{v}) = (T[u, w], \mathbf{v}[u, w])$ , где  $T[u, w] = T(\cdot; u, w) = T(\mathbf{x}; u, w)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\mathbf{v}[u, w] = \mathbf{v}(\cdot; u, w) = \mathbf{v}(\mathbf{x}; u, w)$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , обозначает решение краевой задачи (1.1)–(1.6), соответствующее допустимым управлениям  $(u, w) \in U \times W$ . Пусть на допустимых управлениях и соответствующих им решениях определен некоторый функционал качества  $J = J[u, w] = J(T[u, w], \mathbf{v}[u, w], u, w)$ .

Задача оптимального управления состоит в минимизации функционала  $J = J[u, w]$  на множестве допустимых управлений  $(u, w) \in U \times W$ :

$$J = J[u, w] = J(T[u, w], \mathbf{v}[u, w], u, w) \rightarrow \min : (u, w) \in U \times W. \quad (1.7)$$

На рис. 1 изображена схема воздействия управлений на объект.

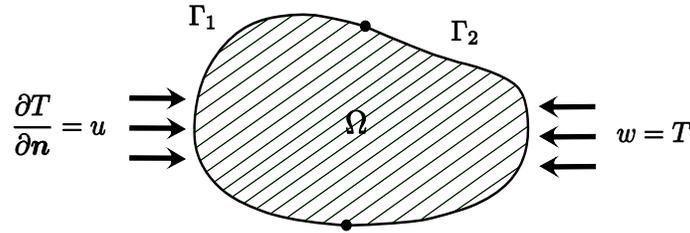


Рис. 1. Схема управления объектом.

Уточним постановку задачи и сформулируем основные вспомогательные утверждения. В качестве  $\Omega$  далее будут рассматриваться ограниченные области, принадлежащие одному из следующих классов. Первый класс  $\mathfrak{K}_1$  составляют области класса  $C^2$  [34, с. 67; 35, с. 31; 36, с. 9]. Второй класс  $\mathfrak{K}_2$  составляют области, удовлетворяющие следующим трем условиям из [35]: условию 1 [35, с. 212] (условие строгой липшицевости), условию 2 [35, с. 212] (условие равномерной ограниченности собственных чисел соответствующей квадратичной формы) и условию  $\mathfrak{R}$  [35, с. 222] (условие сильной разрешимости задачи Пуассона с гладкими правыми частями и смешанными однородными граничными условиями, которые в данном случае соответствуют условиям (1.5)–(1.6)). В [34–38] описаны различные подклассы областей, содержащиеся в классах  $\mathfrak{K}_1$  или  $\mathfrak{K}_2$ .

Введем основные используемые пространства. Далее по тексту будут использоваться пространства Лебега  $L_m(\Omega)$  и пространства Соболева  $W_m^l(\Omega)$ ,  $m \geq 1$ ,  $l \geq 1$  [34–38], а также их

векторные аналоги  $\mathbf{L}_m(\Omega)$  и  $\mathbf{W}_m^l(\Omega)$  соответственно, нормы в которых определяются обычным образом [35, с. 467]. Кроме того, будут использоваться банаховы пространства [32, с. 41]

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0, \nabla \cdot \mathbf{v}|_{\Omega} = 0 \},$$

$$G(\Omega) = \{ \varphi \in W_2^2(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_2} = 0, \partial \varphi / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = 0 \},$$

в которых используются нормы пространств  $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$  и  $W_2^2(\Omega)$  соответственно или эквивалентные им нормы. Определения пространств  $L_2(\Gamma_1)$ ,  $L_2(\Gamma_2)$ ,  $W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ ,  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$  имеются, например, в [36, с. 136–140, 197; 38, с. 73–77; 40, с. 45], см. также [18, 34, 37].

Введем понятие слабого решения краевой задачи. Под слабым решением краевой задачи (1.1)–(1.6) понимается пара функций  $(T, \mathbf{v}) \in L_2(\Omega) \times \mathbf{H}(\Omega)$ , удовлетворяющих тождествам

$$\mu \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} T \mathbf{g} \cdot \mathbf{f} dx \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (1.8)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot (k \nabla \varphi) + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi) T dx = \int_{\Omega} f \varphi dx + \int_{\Gamma_2} k w \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} k u \varphi d\Gamma \quad \forall \varphi \in G(\Omega). \quad (1.9)$$

Классическое решение краевой задачи (1.1)–(1.6) является и ее слабым решением, так как тождество (1.8) является следствием равенства (1.1) (оно определяется аналогично тождеству для обобщенного решения краевой задачи Стокса (1.1)–(1.3) [32, с. 45–46]), а тождество (1.9) является следствием равенства (1.4) (оно получается умножением последнего на функцию  $\varphi \in G(\Omega)$  и интегрированием результата по  $\Omega$  с применением второй формулы Грина [41, с. 171] и формулы интегрирования по частям [38, с. 75] с учетом граничных значений функций  $\mathbf{v}$ ,  $T$ ,  $\varphi$  и условия несжимаемости (1.2)). С другой стороны, если слабое решение краевой задачи (1.1)–(1.6) будет достаточно гладким, то оно будет являться и классическим решением этой задачи.

Пусть всюду далее функции  $k$  и  $f$  принадлежат следующим классам:

$$k \in W_{\infty}^1(\Omega) : k_1 \leq k(x) \leq k_2, \quad x \in \Omega, \quad k_1 = \text{const} > 0, \quad k_2 = \text{const} \geq k_1;$$

$$f \in L_2(\Omega).$$

Сформулируем утверждение о разрешимости краевой задачи (1.1)–(1.6). Предварительно запишем одно условие, которому должны удовлетворять исходные данные задачи:

$$n \text{ Ra} \mu^{-1} \left( C_1 \|u\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_2 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)} \right) < 1, \quad (1.10)$$

где

$$C_1 = C_3^2 C_4 C_6, \quad C_2 = C_3 C_5 C_6,$$

$C_3$  — константа из неравенства Пуанкаре — Фридрикса [38, с. 62], [39, с. 360, 361, 374]

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq C_3 \|\nabla \psi\|_{L_2(\Omega)}, \quad \psi \in W_2^1(\Omega), \quad \psi|_{\Gamma_2} = 0;$$

$C_4$  — константа из теоремы вложения [35, с. 79], [39, с. 360, 361, 375]

$$\|\psi\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_4 \|\nabla \psi\|_{L_2(\Omega)}, \quad \psi \in W_2^1(\Omega);$$

$C_5$  — константа из теоремы вложения [35, с. 215]

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_5 \|\Delta \psi\|_{L_2(\Omega)}, \quad \psi \in G(\Omega);$$

$C_6$  — константа из оценки обобщенного решения задачи Стокса (1.1)–(1.3) [21, 32]

$$\| \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} \leq C_6 \text{Ra} \mu^{-1} \| T \|_{L_2(\Omega)}.$$

Здесь и всюду далее символы  $C_i$  будут обозначать положительные константы, вычисляемые по известным исходным данным задачи и не зависящие от оцениваемых величин. Заметим, если множества  $U$  и  $W$  ограничены в пространствах  $L_2(\Gamma_1)$  и  $L_2(\Gamma_2)$  соответственно, а число  $\text{Ra} \mu^{-1}$  достаточно мало, то условие (1.10) будет выполняться равномерно по  $u \in U$  и  $w \in W$ .

**Теорема 1.** *Для любых  $u \in L_2(\Gamma_1)$  и  $w \in L_2(\Gamma_2)$ , удовлетворяющих неравенствам (1.10), слабое решение краевой задачи (1.1)–(1.6) существует и единственно, причем  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_\infty(\Omega)$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^{3/2}(\Omega)$  и для этого решения справедливы оценки*

$$\| T \|_{L_2(\Omega)} \leq C_7 \left( \| f \|_{L_2(\Omega)} + \| u \|_{L_2(\Gamma_1)} + \| w \|_{L_2(\Gamma_2)} \right),$$

$$\| \mathbf{v} \|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} + \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq C_8 \text{Ra} \mu^{-1} \| T \|_{L_2(\Omega)}.$$

На самом деле для областей  $\Omega$  класса  $\mathfrak{K}_1$  имеет место включение  $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$ , это же включение справедливо и для областей  $\Omega$  класса  $\mathfrak{K}_2$ , представляющих собой выпуклые многогранники, при этом  $p \in W_2^1(\Omega)$  и справедлива оценка

$$\mu \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{W}_2^2(\Omega)} + \| \nabla p \|_{L_2(\Omega)} \leq C_9 \text{Ra} \| T \|_{L_2(\Omega)}.$$

Если помимо всех прочих условий теоремы  $w \in W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , то компонента  $T$  слабого решения обладает дополнительной гладкостью  $T \in W_2^1(\Omega)$  и для нее справедлива оценка

$$\| T \|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_{10} \left( \| f \|_{L_2(\Omega)} + \| u \|_{L_2(\Gamma_1)} + \| w \|_{W_2^{1/2}(\Gamma_2)} \right),$$

а для областей  $\Omega$  класса  $C^3$  имеют место включения  $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^3(\Omega)$ ,  $p \in W_2^2(\Omega)$  и справедлива оценка

$$\mu \| \mathbf{v} \|_{\mathbf{W}_2^3(\Omega)} + \| \nabla p \|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_{11} \text{Ra} \| T \|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобного утверждения в [21], см. также [32, гл. 3, теоремы 2 и 3; 44–46].

**Теорема 2.** *Пусть для любых допустимых управлений из множеств  $U$  и  $W$  выполняется условие (1.10). Тогда для последовательностей управлений  $\{u_m\} \subset U$ ,  $\{w_m\} \subset W$  и соответствующих им решений  $(T_m, \mathbf{v}_m) = (T[u_m, w_m], \mathbf{v}[u_m, w_m])$  имеют место сходимости:*

1) если  $U \subset L_2(\Gamma_1)$ ,  $W \subset L_2(\Gamma_2)$ ,  $u_m \rightharpoonup u_0$  слабо в  $L_2(\Gamma_1)$ ,  $w_m \rightharpoonup w_0$  слабо в  $L_2(\Gamma_2)$ , то  $T_m \rightharpoonup T_0$  слабо в  $L_2(\Omega)$ ,  $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0$  в  $\mathbf{H}(\Omega)$ ;

2) если  $U \subset L_2(\Gamma_1)$ ,  $W \subset L_2(\Gamma_2)$ ,  $u_m \rightarrow u_0$  слабо в  $L_2(\Gamma_1)$ ,  $w_m \rightarrow w_0$  в  $L_2(\Gamma_2)$ , то  $T_m \rightarrow T_0$  в  $L_2(\Omega)$ ,  $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0$  в  $\mathbf{H}(\Omega)$ ;

3) если  $U \subset L_2(\Gamma_1)$ ,  $W \subset W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ ,  $u_m \rightarrow u_0$  слабо в  $L_2(\Gamma_1)$ ,  $w_m \rightarrow w_0$  слабо в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , то  $T_m \rightarrow T_0$  слабо в  $W_2^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0$  в  $\mathbf{H}(\Omega)$ ,  $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0$  слабо в  $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ , для областей  $\Omega$  класса  $C^3$  имеют место сходимости:  $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0$  слабо в  $\mathbf{W}_2^3(\Omega)$  и  $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0$  в  $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ ;

4) если  $U \subset L_2(\Gamma_1)$ ,  $W \subset W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ ,  $u_m \rightarrow u_0$  в  $L_2(\Gamma_1)$ ,  $w_m \rightarrow w_0$  в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , то  $T_m \rightarrow T_0$  в  $W_2^1(\Omega)$ ,  $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0$  в  $\mathbf{H}(\Omega)$ ,  $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0$  слабо в  $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ , для областей  $\Omega$  класса  $C^3$  имеют место сходимости:  $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0$  слабо в  $\mathbf{W}_2^3(\Omega)$  и  $\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0$  в  $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ .

**Доказательство.** Доказательство теоремы следует из оценок, указанных в теореме 1, и результатов работ [42, 43]. Осуществляется доказательство в результате выполнения соответствующих предельных переходов в интегральных тождествах (1.8), (1.9) или равенстве (1.1).

Проверим первое утверждение теоремы. Рассмотрим произвольные последовательности  $\{u_m\} \subset U \subset L_2(\Gamma_1)$ ,  $\{w_m\} \subset W \subset L_2(\Gamma_2)$  такие, что  $u_m \rightharpoonup u_0$  слабо в  $L_2(\Gamma_1)$ ,  $w_m \rightharpoonup w_0$  слабо в  $L_2(\Gamma_2)$ . Поскольку норма слабо полунепрерывна снизу, то из (1.10) следует, что свойство (1.10) выполняется и для предельных функций  $u_0 \in L_2(\Gamma_1)$ ,  $w_0 \in L_2(\Gamma_2)$ , поэтому для этих предельных функций существует единственное решение  $(T_0, \mathbf{v}_0) = (T[u_0, w_0], \mathbf{v}[u_0, w_0]) \in L_2(\Omega) \times \mathbf{H}(\Omega)$ . Из слабой сходимости управлений следует ограниченность их норм (ограниченность норм следует также из условия (1.10))

$$\|u_m\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq C_{12}, \quad \|w_m\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq C_{13}.$$

Тогда из оценок, приведенных в теореме 1, следует ограниченность решений

$$\|T_m\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{14},$$

$$\|\mathbf{v}_m\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega)} + \|\mathbf{v}_m\|_{\mathbf{H}(\Omega)} \leq C_{15}.$$

Из полученных оценок для решений следует, что можно выделить подпоследовательность последовательности решений, для которой имеют место сходимости

$$T_{m_l} \rightharpoonup T_* \in L_2(\Omega) \quad \text{слабо в } L_2(\Omega), \quad (1.11)$$

$$\mathbf{v}_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{v}_* \in \mathbf{H}(\Omega) \quad \text{слабо в } \mathbf{H}(\Omega), \quad (1.12)$$

$$\mathbf{v}_{m_l} \star \rightharpoonup \mathbf{v}_* \quad \star\text{-слабо в } \mathbf{L}_\infty(\Omega), \quad (1.13)$$

а из теорем вложения [32, гл. 1, § 1; 38, гл. 1, § 7, § 8] имеем

$$\mathbf{v}_{m_l} \rightarrow \mathbf{v}_* \quad \text{сильно в } \mathbf{L}_\lambda(\Omega), \quad 1 \leq \lambda < 6,$$

$$\nabla \varphi \in \mathbf{L}_6(\Omega) \quad \text{для } \varphi \in \mathbf{G}(\Omega).$$

Записав для решения  $(T_{m_l}, \mathbf{v}_{m_l})$  соответствующие интегральные тождества (1.8), (1.9), определяющие это решение, и выполнив в нем предельный переход при  $l \rightarrow \infty$ , получим, что предельные элементы  $T_*$  и  $\mathbf{v}_*$  удовлетворяют этим тождествам с  $u = u_0$  и  $w = w_0$ . В силу единственности слабого решения получаем

$$T_* = T_0, \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{v}_0.$$

Из проведенных рассуждений и единственности решения следует также, что последовательность решений  $\{(T_m, \mathbf{v}_m)\}$  имеет единственную предельную точку в указанных выше топологиях (см. (1.11)–(1.13)), поэтому сходимости (1.11)–(1.13) имеют место и для самой последовательности решений  $\{(T_m, \mathbf{v}_m)\}$ .

Для завершения доказательства первой части теоремы осталось доказать сильную сходимость скоростей. Записав (1.8) для  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_m$ ,  $T = T_m$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{v}_m$  и выполнив в полученном равенстве предельный переход при  $m \rightarrow \infty$ , получим сходимость норм

$$\mu \|\mathbf{v}_m\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2 = \text{Ra} \int_{\Omega} T_m \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_m dx \rightarrow \text{Ra} \int_{\Omega} T_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_0 dx = \mu \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}(\Omega)}^2.$$

Из слабой сходимости элементов и сходимости норм в гильбертовом пространстве  $\mathbf{H}(\Omega)$  следует сильная сходимость элементов

$$\mathbf{v}_m \rightarrow \mathbf{v}_0 \quad \text{сильно в } \mathbf{H}(\Omega).$$

Докажем вторую часть теоремы. Из первой части теоремы следует, что фактически нужно доказать лишь сильную сходимостъ  $T_m \rightarrow T_0$  в  $L_2(\Omega)$ . Рассмотрим интегралы

$$F_m^{(1)}(\varphi) = \int_{\Gamma_1} k u_m \varphi d\Gamma, \quad F_m^{(2)}(\varphi) = \int_{\Gamma_2} k w_m \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma, \quad F_m^{(3)}(\varphi) = \int_{\Omega} (\mathbf{v}_m \cdot \nabla \varphi) T_m dx$$

как функционалы над  $G(\Omega)$ . Легко проверить (см., например, [42, 43]), что они являются линейными непрерывными функционалами над  $G(\Omega)$ , т. е. являются элементами сопряженного пространства  $G(\Omega)^*$ . Можно проверить (см., например, [42, 43]), что они при  $m \rightarrow \infty$  сходятся сильно в  $G(\Omega)^*$  к соответствующим функционалам

$$F_0^{(1)}(\varphi) = \int_{\Gamma_1} k u_0 \varphi d\Gamma, \quad F_0^{(2)}(\varphi) = \int_{\Gamma_2} k w_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma, \quad F_0^{(3)}(\varphi) = \int_{\Omega} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi) T_0 dx.$$

Отсюда уже следует [42, 43], что

$$T_m \rightarrow T_0 \quad \text{сильно в } L_2(\Omega).$$

Доказательство третьей и четвертой частей теоремы аналогичны доказательствам первой и второй частей.

## 2. Разрешимость задачи оптимального управления

Утверждение о разрешимости задачи оптимального управления можно получить, опираясь на теорему 2 и теорему функционального анализа [47, с. 97] о минимуме полунепрерывного снизу функционала, заданного на соответствующем компакте.

**Теорема 3.** *Задача оптимального управления (1.7) имеет хотя бы одно решение, если функционал  $J = J(T, \mathbf{v}, u, w)$  полунепрерывен снизу, а множества  $U$  и  $W$  компактны в одном из следующих смыслов:*

1) *функционал  $J$  полунепрерывен снизу слабо по  $T$  на  $L_2(\Omega)$ , сильно по  $\mathbf{v}$  на  $\mathbf{H}(\Omega)$ , слабо по  $u$  на  $L_2(\Gamma_1)$ , слабо по  $w$  на  $L_2(\Gamma_2)$ , множества  $U$  и  $W$  слабо компактны в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $L_2(\Gamma_2)$  соответственно;*

2) *функционал  $J$  полунепрерывен снизу сильно по  $T$  на  $L_2(\Omega)$ , сильно по  $\mathbf{v}$  на  $\mathbf{H}(\Omega)$ , слабо по  $u$  на  $L_2(\Gamma_1)$ , сильно по  $w$  на  $L_2(\Gamma_2)$ , множество  $U$  слабо компактно в  $L_2(\Gamma_1)$ , множество  $W$  компактно в  $L_2(\Gamma_2)$ ;*

3) *функционал  $J$  полунепрерывен снизу слабо по  $T$  на  $W_2^1(\Omega)$ , сильно по  $\mathbf{v}$  на  $\mathbf{H}(\Omega)$ , слабо по  $u$  на  $L_2(\Gamma_1)$ , слабо по  $w$  на  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , множество  $U$  слабо компактно в  $L_2(\Gamma_1)$ , множество  $W$  слабо компактно в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ ;*

4) *функционал  $J$  полунепрерывен снизу сильно по  $T$  на  $W_2^1(\Omega)$ , сильно по  $\mathbf{v}$  на  $\mathbf{H}(\Omega)$ , сильно по  $u$  на  $L_2(\Gamma_1)$ , сильно по  $w$  на  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , множество  $U$  сильно компактно в  $L_2(\Gamma_1)$ , множество  $W$  сильно компактно в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ .*

О единственности оптимального управления в такой общей постановке задачи ничего определенного сказать нельзя. Однако если множество  $U \times W$  выпукло и функционал  $J = J[u, w]$  является строго выпуклым на  $U \times W$ , то задача (1.7) может иметь не более одного оптимального управления [13, с. 159, 160].

### 3. Необходимые и достаточные условия оптимальности

Необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи (1.7) можно получить, опираясь на общие теоремы об экстремуме в теории экстремальных задач, см., например, [12; 13, с. 524].

**Теорема 4.** *Если функционал  $J = J[u, w]$  дифференцируем по Гато или Фреше по переменным  $u \in L_2(\Gamma_1)$  и  $w \in L_2(\Gamma_2)$ , а множества  $U$  и  $W$  являются выпуклыми, то для оптимального элемента  $(u_*, w_*) \in U \times W$  задачи (1.7) выполняются условия*

$$\langle J'_u[u_*, w_*], u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U, \quad (3.1)$$

$$\langle J'_w[u_*, w_*], w - w_* \rangle \geq 0 \quad \forall w \in W. \quad (3.2)$$

В случае  $u_* \in \text{int } U$ ,  $w_* \in \text{int } W$  равенства (3.1), (3.2) превращаются в равенства

$$J'_u[u_*, w_*] = 0, \quad J'_w[u_*, w_*] = 0.$$

Если, кроме того, функционал  $J$  является выпуклым на  $U \times W$ , то условия (3.1), (3.2) являются достаточными для того, чтобы пара управлений  $(u_*, w_*)$  была оптимальной в задаче (1.7).

Условия (3.1), (3.2) можно записать также в виде принципов минимума

$$\langle J'_u[u_*, w_*], u_* \rangle = \min \left\{ \langle J'_u[u_*, w_*], u \rangle : u \in U \right\},$$

$$\langle J'_w[u_*, w_*], w_* \rangle = \min \left\{ \langle J'_w[u_*, w_*], w \rangle : w \in W \right\}.$$

### 4. Частные случаи функционалов качества

Рассмотрим несколько частных случаев функционалов качества в задаче оптимального управления (1.7). Не вдаваясь в детали выкладок и обоснований, схема которых приведена в [23–25], считая используемые функции достаточно гладкими, в каждом частном случае выпишем соответствующие производную и градиент Гато, запишем сопряженную задачу, из которой находится градиент, запишем также необходимые условия оптимальности.

**Случай 1.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = \|T[u, w] - \varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (T(\mathbf{x}; u, w) - \varphi(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x},$$

$\varphi$  — заданная функция из  $L_2(\Omega)$ .

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $L_2(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $L_2(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производные и градиенты определяются соотношениями

$$J'_u[u, w](h) = \int_{\Gamma_1} k \omega[u, w] h d\Gamma, \quad \nabla_u J[u, w] = k \omega[u, w] \Big|_{\Gamma_1}, \quad (4.1)$$

где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
 \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\
 \nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} &= -2(T[u, w] - \varphi), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
 \partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\
 \omega &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2; \\
 J'_w[u, w](h) &= \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial \psi[u, w]}{\partial \mathbf{n}} h d\Gamma, \quad \nabla_w J[u, w] = k \frac{\partial \psi[u, w]}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2},
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

где  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned}
 \mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
 \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
 \boldsymbol{\eta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\
 \nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{g} &= 2(T[u, w] - \varphi), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
 \partial \psi / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\
 \psi &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.
 \end{aligned}$$

Необходимые условия оптимальности выпишем в виде принципов минимума

$$u_* : \int_{\Gamma_1} k \omega[u_*, w_*] u_* d\Gamma = \min \left\{ \int_{\Gamma_1} k \omega[u_*, w_*] u d\Gamma : u \in U \right\}, \tag{4.3}$$

$$w_* : \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}} w_* d\Gamma = \min \left\{ \int_{\Gamma_2} k \frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}} w d\Gamma : w \in W \right\}. \tag{4.4}$$

В частных случаях, когда множества допустимых управлений имеют структуру

$$U = \{ u \in L_2(\Gamma_1) : u(\mathbf{x}) \in S, \mathbf{x} \in \Gamma_1 \},$$

$$W = \{ w \in L_2(\Gamma_2) : w(\mathbf{x}) \in Y, \mathbf{x} \in \Gamma_2 \},$$

где  $S = [s_1, s_2]$  и  $Y = [y_1, y_2]$  — отрезки на числовой прямой  $\mathbb{R}$ , имеем

$$\omega[u_*, w_*](\mathbf{x}) u_*(\mathbf{x}) = \min \left\{ s \omega[u_*, w_*](\mathbf{x}) : s \in S \right\}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) w_*(\mathbf{x}) = \min \left\{ y \frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) : y \in Y \right\}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

Эти равенства равносильны включениям

$$u_*(\mathbf{x}) \in \operatorname{argmin} \left\{ s \omega[u_*, w_*](\mathbf{x}) : s \in S \right\}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$w_*(\mathbf{x}) \in \operatorname{argmin} \left\{ y \frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) : y \in Y \right\}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

В частности, если  $\omega[u_*, w_*](\mathbf{x}) \neq 0$  для почти всех  $\mathbf{x} \in \Gamma_1$  (в смысле поверхностной меры Лебега на  $\Gamma$ ),  $\partial \psi[u_*, w_*] / \partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) \neq 0$  для почти всех  $\mathbf{x} \in \Gamma_2$  (в смысле поверхностной меры Лебега на  $\Gamma$ ), то  $u_*(\mathbf{x}) = \tilde{u}_*(\mathbf{x})$  для почти всех  $\mathbf{x} \in \Gamma_1$ ,  $w_*(\mathbf{x}) = \tilde{w}_*(\mathbf{x})$  для почти всех  $\mathbf{x} \in \Gamma_2$ ,

$$\tilde{u}_*(\mathbf{x}) = \begin{cases} s_1, & \text{если } \omega[u_*, w_*](\mathbf{x}) \geq 0, \\ s_2, & \text{если } \omega[u_*, w_*](\mathbf{x}) < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{w}_*(\mathbf{x}) = \begin{cases} y_1, & \text{если } \frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) \geq 0, \\ y_2, & \text{если } \frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) < 0. \end{cases}$$

Если  $U$  есть замкнутый шар  $S_\alpha[u_0; L_2(\Gamma_1)]$  в  $L_2(\Gamma_1)$  радиуса  $\alpha > 0$  с центром в точке  $u_0 \in L_2(\Gamma_1)$ , а  $W$  есть замкнутый шар  $S_\beta[w_0; L_2(\Gamma_2)]$  в  $L_2(\Gamma_2)$  радиуса  $\beta > 0$  с центром в точке  $w_0 \in L_2(\Gamma_2)$ , то

$$u_* = u_0 - \alpha k \omega[u_*, w_*], \quad w_* = w_0 - \beta k \frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}}.$$

**Случай 2.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = \|\nabla T[u, w] - \nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{m=1}^n \int_{\Omega} \left( \frac{\partial T(\mathbf{x}; u, w)}{\partial x_m} - \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_m} \right)^2 d\mathbf{x},$$

$\varphi$  — заданная функция из  $W_2^1(\Omega)$ .

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производная  $J'_u[u, w]$  и градиент  $\nabla_u J[u, w]$  определяются соотношениями (4.1), где теперь  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

$$\nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} = 2(\Delta T[u, w] - \Delta \varphi), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$k \partial \omega / \partial \mathbf{n} = 2(\partial T[u, w] / \partial \mathbf{n} - \partial \varphi / \partial \mathbf{n}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$\omega = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

Производная  $J'_w[u, w]$  и градиент  $\nabla_w J[u, w]$  определяются соотношениями

$$J'_w[u, w](h) = \int_{\Gamma_2} \varkappa[u, w] h d\Gamma, \quad \nabla_w J[u, w] = \varkappa[u, w] \Big|_{\Gamma_2},$$

$$\varkappa[u, w] = k \frac{\partial \psi[u, w]}{\partial \mathbf{n}} + 2 \left( \frac{\partial T[u, w]}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right),$$

где теперь  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta})$  сопряженной задачи

$$\mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\eta} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\boldsymbol{\eta} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

$$\nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{g} = -2(\Delta T[u, w] - \Delta \varphi), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$k \partial \psi / \partial \mathbf{n} = -2(\partial T[u, w] / \partial \mathbf{n} - \partial \varphi / \partial \mathbf{n}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$\psi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.$$

Необходимые условия оптимальности можно записать в виде принципов минимума

$$u_* : \int_{\Gamma_1} k \omega[u_*, w_*] u_* d\Gamma = \min \left\{ \int_{\Gamma_1} k \omega[u_*, w_*] u d\Gamma : u \in U \right\},$$

$$w_* : \int_{\Gamma_2} \varkappa[u, w] w_* d\Gamma = \min \left\{ \int_{\Gamma_2} \varkappa[u, w] w d\Gamma : w \in W \right\}.$$

**Случай 3.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = \|T[u, w] - \varphi\|_{L_2(\Gamma_0)}^2 = \int_{\Gamma_0} (T(\mathbf{x}; u, w) - \varphi(\mathbf{x}))^2 d\Gamma,$$

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1, \quad \varphi - \text{заданная функция из } L_2(\Gamma_0).$$

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производная  $J'_u[u, w]$  и градиент  $\nabla_u J[u, w]$  определяются соотношениями (4.1), где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_0, \\ k \partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 2(T[u, w] - \varphi), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \\ \omega &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Производная  $J'_w[u, w]$  и градиент  $\nabla_w J[u, w]$  определяются соотношениями (4.2), где  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{\eta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{g} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \psi / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_0, \\ k \partial \psi / \partial \mathbf{n} &= -2(T[u, w] - \varphi), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \\ \psi &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Необходимые условия оптимальности имеют вид (4.3), (4.4).

**Случай 4.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = \left\| \frac{\partial T[u, w]}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \right\|_{L_2(\Gamma_0)}^2 = \int_{\Gamma_0} \left( \frac{\partial T(\mathbf{x}; u, w)}{\partial \mathbf{n}} - \varphi(\mathbf{x}) \right)^2 d\Gamma,$$

$\Gamma_0 \subset \Gamma_2$ ,  $\varphi$  — заданная функция из  $L_2(\Gamma_0)$ .

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $W_2^{1/2}(\Gamma_1)$  и  $W_2^1(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $W_2^{1/2}(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $W_2^1(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производная  $J'_u[u, w]$  и градиент  $\nabla_u J[u, w]$  определяются соотношениями (4.1), где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ k \omega &= -2(\partial T[u, w] / \partial \mathbf{n} - \varphi), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \\ \omega &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_0. \end{aligned}$$

Производная  $J'_w[u, w]$  и градиент  $\nabla_w J[u, w]$  определяются соотношениями (4.2), где  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{\eta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \mathbf{g} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \psi / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ k \psi &= 2(\partial T[u, w] / \partial \mathbf{n} - \varphi), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \\ \psi &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_0. \end{aligned}$$

Необходимым условиям оптимальности можно придать вид (4.3), (4.4).

**Случай 5.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = \| \mathbf{v}[u, w] - \boldsymbol{\xi} \|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (v_i(\mathbf{x}; u, w) - \xi_i(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x},$$

$\boldsymbol{\xi}$  — заданная функция из  $L_2(\Omega)$ .

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $L_2(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $L_2(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производная  $J'_u[u, w]$  и градиент  $\nabla_u J[u, w]$  определяются соотношениями (4.1), где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q &= -2(\mathbf{v}[u, w] - \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \omega &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.\end{aligned}$$

Производная  $J'_w[u, w]$  и градиент  $\nabla_w J[u, w]$  определяются соотношениями (4.2), где  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned}\mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q &= 2(\mathbf{v}[u, w] - \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{\eta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{g} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \psi / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \psi &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.\end{aligned}$$

Необходимым условиям оптимальности можно придать вид (4.3), (4.4).

**Случай 6.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = \|\boldsymbol{\sigma}_a[u, w] - \boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_{ai}(\mathbf{x}; u, w) - \xi_i(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}.$$

Он имеет смысл среднеквадратичного отклонения векторного поля напряжений  $\boldsymbol{\sigma}_a$ , действующего в вязкой жидкости на площадки, ориентированные единичным вектором  $\mathbf{a}$ , от заданного в области  $\Omega$  векторного поля  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ . Здесь  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$  — полный тензор напряжений вязкой жидкости,  $\boldsymbol{\sigma}_a = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}$  — вектор напряжения, действующего со стороны вязкой жидкости на площадку, ортогональную вектору  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n$ , со стороны этого вектора  $\mathbf{a}$

$$\boldsymbol{\sigma}_a = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\sigma}_{ai} \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\sigma}_{ai} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ki} a_k, \quad \sigma_{ki} = \mu \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - p \delta_{ki}.$$

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $L_2(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $L_2(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производная  $J'_u[u, w]$  и градиент  $\nabla_u J[u, w]$  определяются соотношениями (4.1), где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned}\mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q &= -2(\boldsymbol{\sigma}_a[u, w] - \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \omega &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.\end{aligned}$$

Производная  $J'_w[u, w]$  и градиент  $\nabla_w J[u, w]$  определяются соотношениями (4.2), где  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta})$  сопряженной задачи

$$\mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q = 2(\boldsymbol{\sigma}_a[u, w] - \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\
\boldsymbol{\eta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma, \\
\nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{g} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\
\partial \psi / \partial \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\
\psi &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2.
\end{aligned}$$

Необходимым условиям оптимальности можно придать вид (4.3), (4.4).

По своей форме полученные результаты не изменились бы, если  $\mathbf{a}$  считать векторным полем  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$  единичных векторов, заданных в области  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

**Случай 7.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = \| -\boldsymbol{\sigma}_n[u, w] - \boldsymbol{\xi} \|_{L_2(\Gamma)}^2 = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} ( -\boldsymbol{\sigma}_{ni}(\mathbf{x}; u, w) - \xi_i(\mathbf{x}) )^2 d\Gamma,$$

имеющий смысл среднеквадратичного отклонения векторного поля напряжений  $-\boldsymbol{\sigma}_n$ , создаваемого вязкой жидкостью на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ , от заданного на границе векторного поля  $\boldsymbol{\xi} \in L_2(\Gamma)$ .

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производная  $J'_u[u, w]$  и градиент  $\nabla_u J[u, w]$  определяются соотношениями (4.1), где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned}
\mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\
\nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\
\mathbf{z} &= 2(\boldsymbol{\sigma}_n[u, w] + \boldsymbol{\xi}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \\
\nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\
\partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\
\omega &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2.
\end{aligned}$$

Производная  $J'_w[u, w]$  и градиент  $\nabla_w J[u, w]$  определяются соотношениями (4.2), где  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned}
\mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\
\boldsymbol{\eta} &= -2(\boldsymbol{\sigma}_n[u, w] + \boldsymbol{\xi}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \\
\nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{g} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\
\partial \psi / \partial \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\
\psi &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2.
\end{aligned}$$

Необходимым условиям оптимальности можно придать вид (4.3), (4.4).

**Случай 8.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = \| \operatorname{rot} \mathbf{v}[u, w] - \boldsymbol{\xi} \|_{L_2(\Omega^*)}^2,$$

имеющий смысл среднеквадратичного отклонения вихря  $\text{rot } \mathbf{v}$  поля скоростей  $\mathbf{v}$  от заданного в подобласти  $\Omega^* \subset \Omega$  векторного поля  $\boldsymbol{\xi} \in L_2(\Omega^*)$  ( $\Omega^*$  — область такого же класса, что и  $\Omega$ ). При  $\boldsymbol{\xi} = 0$  функционал описывает меру турбулентности течения жидкости в подобласти  $\Omega^*$ .

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производная  $J'_u[u, w]$  и градиент  $\nabla_u J[u, w]$  определяются соотношениями (4.1), где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z}, \boldsymbol{\vartheta})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{z} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \mu \Delta \boldsymbol{\vartheta} &= -2(\text{rot } \mathbf{v}[u, w] - \boldsymbol{\xi}), & \mathbf{x} \in \Omega^*, \\ \boldsymbol{\vartheta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega^*, \\ \nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} + Ra (\mathbf{g} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{\vartheta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \omega &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Производная  $J'_w[u, w]$  и градиент  $\nabla_w J[u, w]$  определяются соотношениями (4.2), где  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{\eta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \mu \Delta \boldsymbol{\zeta} &= 2(\text{rot } \mathbf{v}[u, w] - \boldsymbol{\xi}), & \mathbf{x} \in \Omega^*, \\ \boldsymbol{\zeta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega^*, \\ \nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{g} + Ra (\mathbf{g} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{\zeta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \psi / \partial \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \psi &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Необходимым условиям оптимальности можно придать вид (4.3), (4.4).

**Случай 9.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = \left\| - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_n[u, w] d\Gamma - \mathbf{b} \right\|_{\mathbb{R}^n}^2,$$

имеющий смысл отклонения вектора суммарной силы, действующей со стороны вязкой жидкости на границу  $\Gamma$  области  $\Omega$ , от заданного вектора  $\mathbf{b}$ . При  $\mathbf{b} = 0$  получаем задачу о минимизации величины силы, действующей со стороны вязкой жидкости на границу  $\Gamma$ .

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производная  $J'_u[u, w]$  и градиент  $\nabla_u J[u, w]$  определяются соотношениями (4.1), где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned}\mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{z} &= -2(\boldsymbol{\sigma}_n[u, w] + \mathbf{b}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \omega &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2.\end{aligned}$$

Производная  $J'_w[u, w]$  и градиент  $\nabla_w J[u, w]$  определяются соотношениями (4.2), где  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned}\mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \boldsymbol{\eta} &= 2(\boldsymbol{\sigma}_n[u, w] + \mathbf{b}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{g} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \partial \psi / \partial \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \psi &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2.\end{aligned}$$

Необходимым условиям оптимальности можно придать вид (4.3), (4.4).

**Случай 10.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = \left\| - \int_{\Gamma^*} \boldsymbol{\sigma}_n[u, w] d\Gamma - \mathbf{b} \right\|_{\mathbb{R}^n}^2.$$

Будем считать, что через подобласть  $\Omega^* \subset \Omega$  жидкость не протекает, на границе  $\Gamma^*$  подобласти  $\Omega^*$  для скорости задано граничное условие прилипания ( $\mathbf{v} = 0$  на  $\Gamma^*$ ), для температуры задано для определенности граничное условие отсутствия теплообмена ( $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$  на  $\Gamma^*$ ). Тогда краевая задача для определения установившейся тепловой конвекции в области  $\Omega \setminus \overline{\Omega^*}$  будет поставлена корректно. Функционал качества имеет смысл отклонения вектора суммарной силы, действующей на область (тело)  $\Omega^*$  при его обтекании вязкой жидкостью, от заданного вектора  $\mathbf{b}$ . При  $\mathbf{b} = 0$  получим задачу о минимизации величины силы, действующей со стороны вязкой жидкости на область (тело)  $\Omega^*$ .

На рис. 2 приведена графическая иллюстрация рассматриваемого случая.

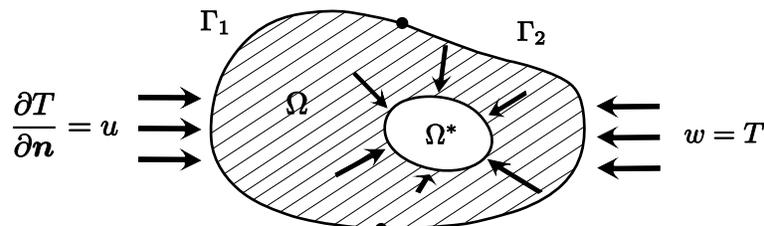


Рис. 2. Иллюстрация задачи.

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производная  $J'_u[u, w]$  и градиент  $\nabla_u J[u, w]$  определяются соотношениями (4.1), где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\ \mathbf{z} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \mathbf{z} &= 2(\boldsymbol{\sigma}_n[u, w] + \mathbf{b}), & \mathbf{x} \in \Gamma^*, \\ \nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\ \partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \\ \omega &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Производная  $J'_w[u, w]$  и градиент  $\nabla_w J[u, w]$  определяются соотношениями (4.2), где  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\ \boldsymbol{\eta} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \boldsymbol{\eta} &= -2(\boldsymbol{\sigma}_n[u, w] + \mathbf{b}), & \mathbf{x} \in \Gamma^*, \\ \nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{g} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\ \partial \psi / \partial \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \\ \psi &= 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_2. \end{aligned}$$

Необходимым условиям оптимальности можно придать вид (4.3), (4.4).

**Случай 11.** Пусть функционал качества имеет вид

$$J = J[u, w] = -\mathbf{b} \cdot \int_{\Gamma^*} \boldsymbol{\sigma}_n[u, w] d\Gamma,$$

имеющий смысл проекции вектора суммарной силы, действующей на тело  $\Omega^*$  при его обтекании вязкой жидкостью, на заданное направление, определяемое единичным вектором  $\mathbf{b}$ .

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $W_2^{1/2}(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производная  $J'_u[u, w]$  и градиент  $\nabla_u J[u, w]$  определяются соотношениями (4.1), где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\ \nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \\
\nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} &= -Ra \mathbf{b} \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\
\partial \omega / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \\
\omega &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.
\end{aligned}$$

Производная  $J'_w[u, w]$  и градиент  $\nabla_w J[u, w]$  определяются соотношениями (4.2), где  $\psi = \psi[u, w]$  — компонента решения  $(\psi, \boldsymbol{\eta})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned}
\mu \Delta \boldsymbol{\eta} - \psi \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\
\boldsymbol{\eta} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \\
\nabla \cdot (k \nabla \psi) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \psi + Ra \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{g} &= Ra \mathbf{b} \cdot \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\Omega^*}, \\
\partial \psi / \partial \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^*, \\
\psi &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2.
\end{aligned}$$

Необходимым условиям оптимальности можно придать вид (4.3), (4.4).

**Случай 12.** Пусть функционал качества имеет вид

$$\begin{aligned}
J = J[u, w] &= \|T[u, w] - \varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \gamma_1 \|u\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + \gamma_2 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)}^2, \\
\varphi &\text{ — заданная функция из } L_2(\Omega), \quad \gamma_1 = \text{const} > 0, \quad \gamma_2 = \text{const} > 0.
\end{aligned}$$

Пусть в данном случае на  $\Gamma_1$  выполняется граничное условие

$$T = u, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1.$$

Пусть множества  $U$  и  $W$  выпуклы, ограничены и замкнуты в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $L_2(\Gamma_2)$  соответственно, тогда хотя бы одна пара оптимальных управлений  $(u_*, w_*) \in U \times W$  существует, что следует из слабой компактности множеств  $U$  в  $L_2(\Gamma_1)$  и  $W$  в  $L_2(\Gamma_2)$ , а также из слабой полунепрерывности снизу функционала  $J$  на  $U \times W$ .

Производные и градиенты по управлению  $u$  определяются соотношениями

$$J'_u[u, w](h) = \int_{\Gamma_1} \left( k \frac{\partial \omega[u, w]}{\partial \mathbf{n}} + 2\gamma_1 u \right) h d\Gamma, \quad \nabla_u J[u, w] = k \frac{\partial \omega[u, w]}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} + 2\gamma_1 u,$$

где  $\omega = \omega[u, w]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\begin{aligned}
\mu \Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u, w] - \nabla q &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
\nabla \cdot \mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
\mathbf{z} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \\
\nabla \cdot (k \nabla \omega) + \mathbf{v}[u, w] \cdot \nabla \omega + Ra \mathbf{z} \cdot \mathbf{g} &= 2(T[u, w] - \varphi), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\
\omega &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma.
\end{aligned}$$

Необходимое условие оптимальности для  $u$  выпишем в виде принципа минимума

$$u_* : \int_{\Gamma_1} \left( k \frac{\partial \omega[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}} + 2\gamma_1 u_* \right) u_* d\Gamma = \min \left\{ \int_{\Gamma_1} \left( k \frac{\partial \omega[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}} + 2\gamma_1 u_* \right) u d\Gamma : u \in U \right\}.$$

В частном случае, когда множество допустимых управлений имеет структуру

$$U = \{ u \in L_2(\Gamma_1) : u(\mathbf{x}) \in S, \mathbf{x} \in \Gamma_1 \},$$

имеем

$$u_*(\mathbf{x}) \in \operatorname{argmin} \left\{ s \left( \frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) + 2\gamma_1 u_*(\mathbf{x}) \right) : s \in S \right\}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

в частности, при  $S = [-\nu, +\nu]$ ,  $\nu = \operatorname{const} > 0$ , имеем

$$u_*(\mathbf{x}) = -\nu \operatorname{sign} \left( \frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) + 2\gamma_1 u_*(\mathbf{x}) \right) \quad \text{для почти всех } \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

когда

$$\frac{\partial \psi[u_*, w_*]}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) + 2\gamma_1 u_*(\mathbf{x}) \neq 0 \quad \text{для почти всех } \mathbf{x} \in \Gamma_1.$$

Аналогичные соотношения выписываются и по отношению к управлению  $w$ , поскольку управления  $u$  и  $w$  входят “симметрично”.

## 5. Приближенное нахождение оптимального управления

Минимизация функционала качества (1.7) может осуществляться различными методами [13–15]. Вычислительная практика показала [23–25], что для приближенного нахождения оптимального управления можно успешно использовать различные варианты метода проекции градиента

$$(u_{m+1}, w_{m+1}) = PR_{(U \times W)} \left( (u_m, w_m) - \beta_m (\nabla_u J[u_m, w_m], \nabla_w J[u_m, w_m]) \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(u_0, w_0) \in U \times W, \quad \beta_m \in (0, \infty), \quad \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m = \infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 < \infty,$$

где  $PR_{(U \times W)}(u, w)$  — проекция элемента  $(u, w)$  на множество  $U \times W$ ,  $\beta_m$  — параметры метода. О некоторых других способах выбора параметров метода  $\beta_m$  см., например, [13]. При численной реализации градиентного метода хорошо зарекомендовал себя метод сопряженных градиентов Флетчера — Ривса [15], поскольку он не накладывает жестких требований на выбор начального приближения и показывает хорошую скорость сходимости по сравнению, например, с методом наискорейшего спуска [13–15].

Некоторые общие утверждения о свойствах метода проекции градиента приведены, например, в [13–15]. Не вдаваясь в детали обоснования метода в частных случаях, указанных выше, отметим, что обычно этот метод дает монотонное убывание по функционалу, сходимость значений функционала к минимальному значению и сходимость в том или ином смысле последовательности управлений ко множеству оптимальных управлений задачи, т. е.

$$J[u_1, w_1] \geq J[u_2, w_2] \geq \dots \geq J[u_m, w_m] \geq \dots,$$

$$J[u_m, w_m] \rightarrow J_* = \min \{ J[u, w] : (u, w) \in U \times W \},$$

$$(u_m, w_m) \rightarrow (U_*, W_*) = \{ (u, w) \in U \times W : J[u, w] = J_* \}.$$

В некоторых случаях, например, когда задача минимизации имеет несколько точек минимума или когда исходные данные задачи зашумлены (заданы с погрешностью), некоторую устойчивость вычислительному процессу может придать тихоновская регуляризация минимизируемого функционала

$$J_{\gamma_1 \gamma_2}[u, w] = J[u, w] + \gamma_1 \|u\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + \gamma_2 \|w\|_{L_2(\Gamma_2)}^2, \quad \gamma_1 = \text{const} > 0, \quad \gamma_2 = \text{const} > 0.$$

## 6. Численное моделирование

Рассмотрим численный пример, относящийся к случаю 12 при  $\mu = 1$ ,  $k = 1$ ,  $f = 0$ ,  $\mathbf{g} = \mathbf{e}_2$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 0$ :

$$\Delta \mathbf{v} = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \subset \mathbb{R}^2, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (6.3)$$

$$\Delta T = \mathbf{v} \cdot \nabla T, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.4)$$

$$T = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \Gamma_1, \quad (6.5)$$

$$T = u, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq l_1\}; \quad (6.6)$$

$$J[u] = \int_{\Omega} (T[u] - \varphi)^2 d\mathbf{x} \longrightarrow \min : u \in U,$$

$$U = \{u \in L_2(\Gamma_1) : |u(x_1)| \leq 1, 0 \leq x_1 \leq l_1\}.$$

При этом

$$J'_u[u](h) = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \omega[u]}{\partial \mathbf{n}} h d\Gamma, \quad \nabla_u J[u] = \frac{\partial \omega[u]}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1},$$

где  $\omega = \omega[u]$  — компонента решения  $(\omega, \mathbf{z})$  сопряженной задачи

$$\Delta \mathbf{z} - \omega \nabla T[u] - \nabla q = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{z} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (6.9)$$

$$\Delta \omega + \mathbf{v}[u] \cdot \nabla \omega + Ra z_2 = 2(T[u] - \varphi), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.10)$$

$$\omega = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (6.11)$$

Опишем кратко схему численных расчетов. На каждой итерации метода сопряженных градиентов последовательно выполняются следующие четыре шага.

1. Известное  $u = u_m \in U$  подставляется в граничное условие (6.6) краевой задачи (6.1)–(6.6), и находится решение  $(T[u], \mathbf{v}[u])$  этой задачи ( $p[u]$  не используется).

2. Найденное решение  $(T[u], \mathbf{v}[u])$  подставляется в сопряженную задачу (6.7)–(6.11), и находится ее решение  $(\omega[u], \mathbf{z}[u])$  ( $\mathbf{z}[u]$  не используется).

3. Вычисляется  $\frac{\partial \omega[u]}{\partial \mathbf{n}}$  на  $\Gamma_1$ , это дает градиент  $\nabla_u J[u] = -\frac{\partial \omega[u]}{\partial x_2}(x_1, 0)$ ,  $0 \leq x_1 \leq l_1$ .

4. Полученный градиент подставляется в итерационный процесс метода сопряженных градиентов, и находится новое приближение к оптимальному управлению  $u_{m+1}$

$$u_{m+1} = u_m - \beta_m \nabla_u J[u_m], \quad m = 0, 1, \dots$$

Вычисления останавливаются при выполнении условия

$$J[u_m] + \|\nabla_u J[u_m]\|_{L_2(\Gamma_1)} < \delta,$$

где  $\delta$  — некоторое заданное положительное число, контролирующее точность вычислений. Найденный элемент  $u_m$ , удовлетворяющий этому условию, принимается за приближение к искомому оптимальному управлению.

Аналогично [23, 24] краевые задачи (6.1)–(6.6) и (6.7)–(6.11) упрощались путем перехода от естественных переменных “скорость, давление” к переменным “функция тока, вихрь скорости” и решались численно конечно-разностным методом с использованием безусловно-устойчивой разностной схемы на равномерной сетке в  $51 \times 51$  узлов.

Приведем результаты численного моделирования по вычислению оптимальных управлений. Пусть для определенности  $l_1 = l_2 = 1$ . В первом примере оптимальное управление является гладким

$$u_* = u_*(x_1) = 0.25 \sin(2\pi x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq 1; \quad \varphi = T[u_*]; \quad J_* = 0;$$

во втором примере оптимальное управление разрывно:

$$u_*(x_1) = 0.5 x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq 0.5; \quad u_*(x_1) = 0.5 x_1 - 0.5, \quad 0.5 \leq x_1 \leq 1; \quad \varphi = T[u_*]; \quad J_* = 0.$$

На рис. 3 показано гладкое оптимальное управление и приближение к нему; на рис. 4 изображен график компоненты решения  $T = T[u_*]$ , соответствующего оптимальному управлению  $u = u_*$ ; на рис. 5 показано изменение относительной погрешности  $\varepsilon = \varepsilon(m) = \|u_m - u_*\|_{L_2(\Gamma_1)} / \|u_*\|_{L_2(\Gamma_1)}$  в зависимости от номера итерации  $m$ ; на рис. 7 показано изменение значения функционала  $J = J[u_m]$  и нормы градиента  $\|\nabla J\| = \|\nabla_u J[u_m]\|_{L_2(\Gamma_1)}$  в зависимости от номера итерации  $m$ ; приближения  $u_1$  и  $u_2$  практически совпадают с  $u_*$ , а  $T[u_1]$  и  $T[u_2]$  практически совпадают с  $T[u_*]$ , поэтому на рис. 6 и 8 изображены графики разностей  $\delta T = T[u_1] - T[u_*]$  и  $\delta T = T[u_2] - T[u_*]$  соответственно. На рис. 9–14 отображены аналогичные результаты, относящиеся к разрывному управлению. На рис. 12 и 14 изображены графики компонент  $T = T[u_3]$  и  $T = T[u_{10}]$ , отвечающие управлениям  $u = u_3$  и  $u = u_{10}$  из итерационной последовательности. Как в первом, так и во втором примере в методе минимизации функционала качества стартовой точкой служила функция  $u_0 = 0$ , которую следует отнести к достаточно далекому от модельных решений начальному приближению как по норме (в первом примере  $\|u_*\|_{L_2(\Gamma_1)} = \sqrt{2}/8 \approx 0.177$ , во втором примере  $\|u_*\|_{L_2(\Gamma_1)} = \sqrt{3}/12 \approx 0.144$ ), так и по качественному поведению.

Приведенные ниже результаты расчетов показывают применимость выбранного метода для численного решения поставленной задачи оптимального управления. Отметим, что в случае нахождения гладкого оптимального управления выбранный итерационный процесс сходится очень быстро. Уже на первых итерациях получается приемлемое приближение к искомому оптимальному управлению. В случае нахождения разрывного оптимального управления итерационный процесс сходится медленнее, но в конечном итоге также дает приемлемое приближение.

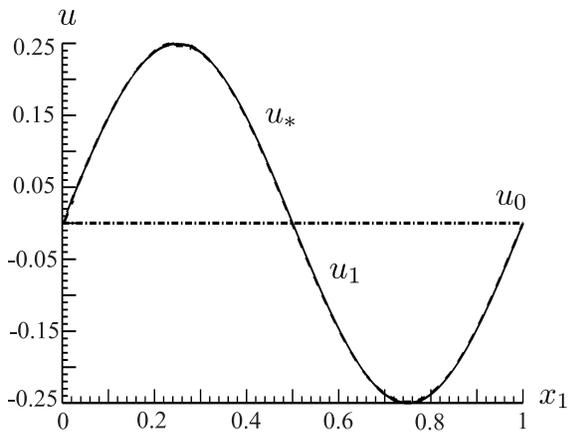


Рис. 3.

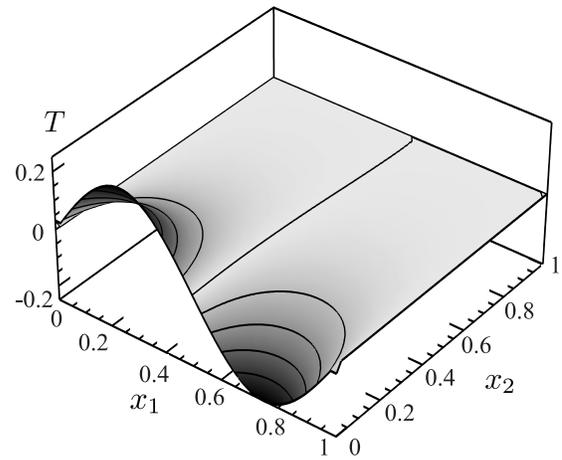


Рис. 4.

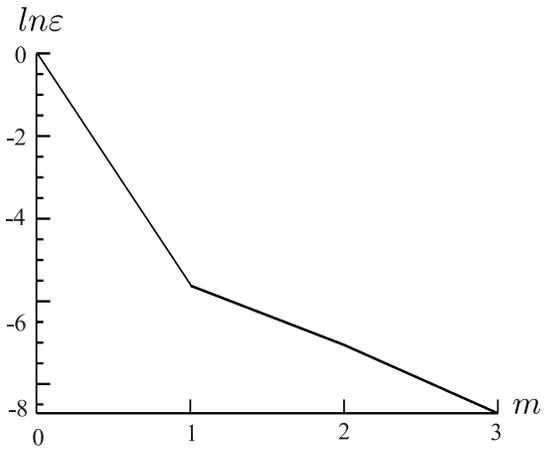


Рис. 5.

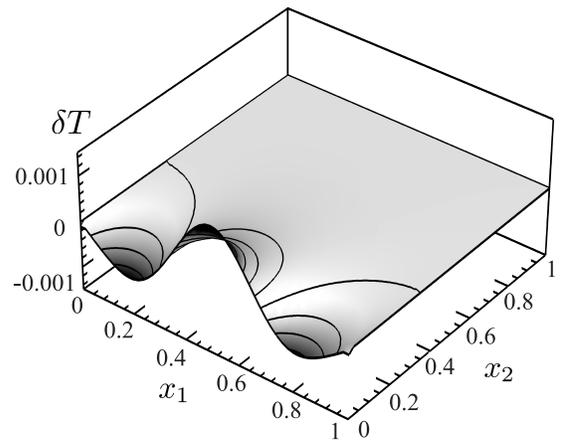


Рис. 6.

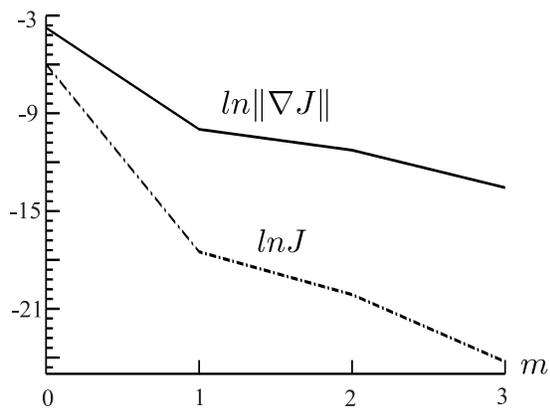


Рис. 7.

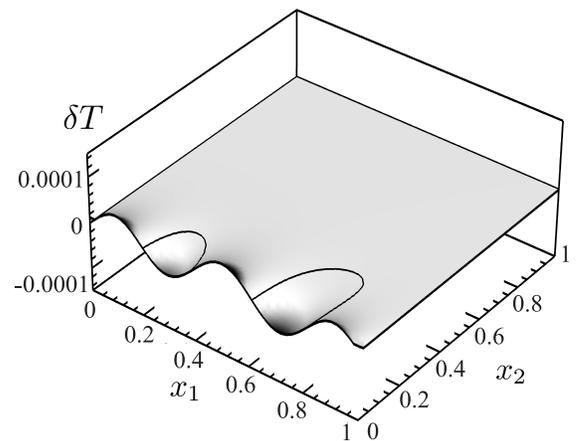


Рис. 8.

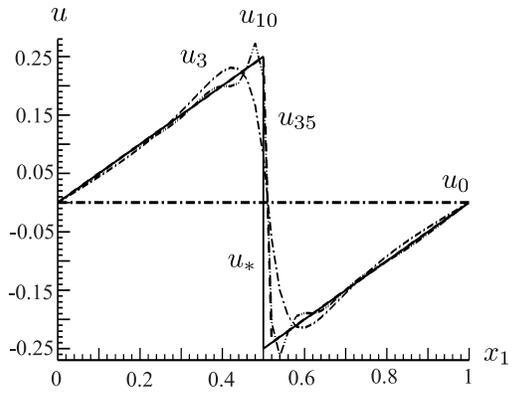


Рис. 9.

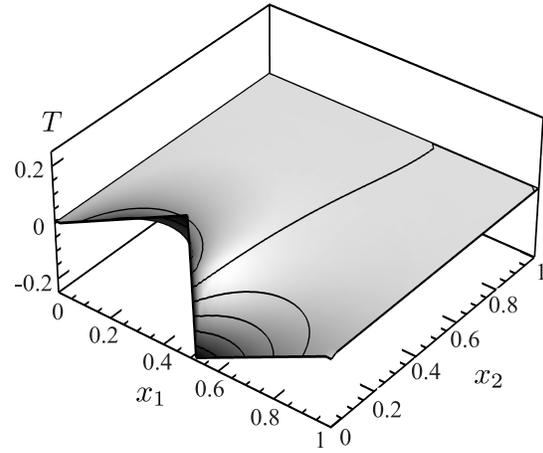


Рис. 10.

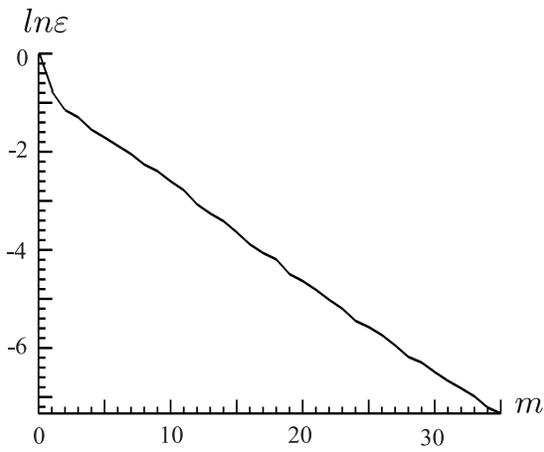


Рис. 11.

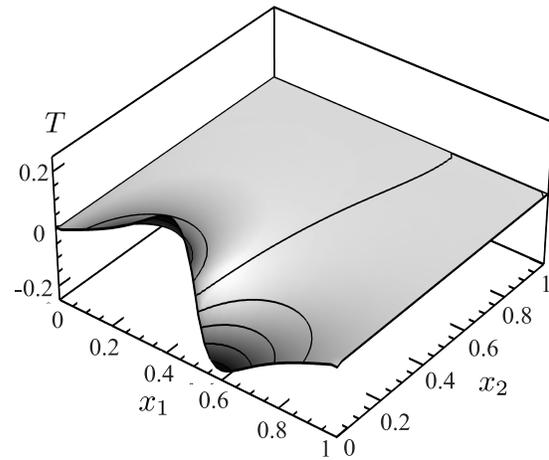


Рис. 12.

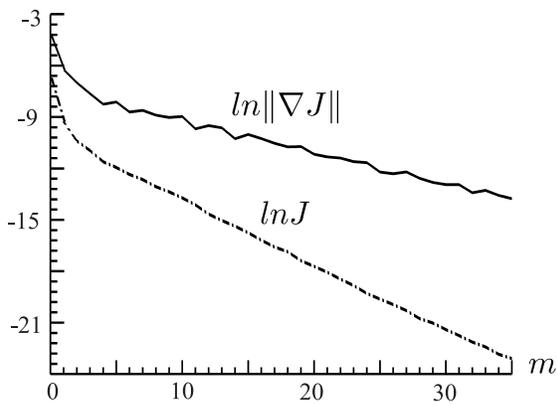


Рис. 13.

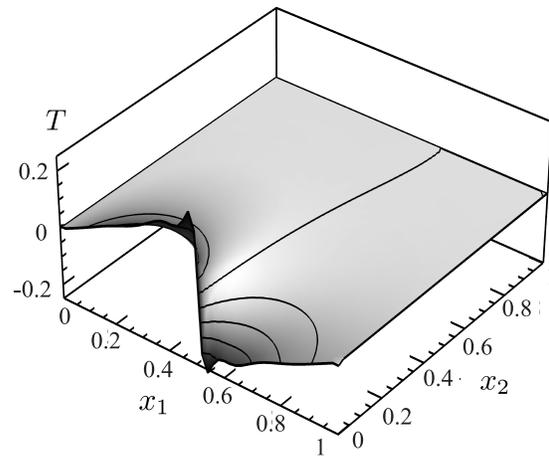


Рис. 14.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gad-el-Hak M.** Flow control // *Appl. Mech. Rev.* 1989. Vol. 42, № 10. P. 261–393.
2. **Алифанов О.М.** Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 277 с.
3. **Марчук Г.И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
4. **Верге Л.А.** Магнитная гидродинамика в металлургии. М.: Наука, 1975. 288 с.
5. **Гельфгат Ю.М., Лиелаусис О.А., Щербинин Э.В.** Жидкий металл под воздействием электромагнитных сил. Рига: Зинатне, 1976. 248 с.
6. **Глухих В.А., Тананаев А.В., Кириллов И.Р.** Магнитная гидродинамика в ядерной энергетике. М.: Наука, 1987. 264 с.
7. **Лаврентьев И.В.** Жидкометаллические системы термоядерных реакторов-токамаков // *Магнитная гидродинамика.* 1990. № 2. С. 105–124.
8. **Шашков Ю.Н.** Выращивание монокристаллов методом вытягивания. М.: Наука, 1982. 312 с.
9. **Muller G.** Convection and inhomogeneties in crystal growth from the melt. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. 150 p.
10. **Gunzburger M.D.** Flow control. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. 381 p.
11. **Алексеев Г.В., Терешко Д.А.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 364 с.
12. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
13. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
14. **Сea Ж.** Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.
15. **Полак Э.** Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1974. 376 с.
16. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
17. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
18. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
19. **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 352 с.
20. **Литвинов В.Г.** Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 368 с.
21. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** О разрешимости стационарных задач естественной тепловой конвекции высоковязкой жидкости // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2008. Т. 14, № 1. С. 61–73.
22. **Ковтунов Д.А.** Разрешимость стационарной задачи тепловой конвекции высоковязкой жидкости // *Дифференц. уравнения.* 2009. Т. 45, № 1. С. 74–85.
23. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов // *Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби: тр. Междунар. семинара, посвященного 60-летию акад. А.И. Субботина.* Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2006. Т. 2. С. 82–91.
24. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2006. Т. 12, № 2. С. 81–97.
25. **Короткий А.И.** Граничное оптимальное управление системой, описывающей тепловую конвекцию высоковязкой неоднородной несжимаемой жидкости // *Дифференциальные уравнения и топология: тез. докл. Междунар. конф., посвященной 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина.* М.: Изд-во ВМК МГУ, 2008. С. 353.
26. **Алексеев Г.В.** Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнения тепловой конвекции // *Сиб. мат. журн.* 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.
27. **Алексеев Г.В., Смышляев А.Б., Терешко Д.А.** Разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса при смешанных краевых условиях // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2003. Т. 43, № 1. С. 66–80.
28. **Алексеев Г.В.** Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // *Сиб. мат. журн.* 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
29. **Алексеев Г.В.** Разрешимость краевой задачи для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // *Сиб. мат. журн.* 2006. Т. 9, № 1. С. 13–27.

30. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. New York: Dover Publications, 1981. 654 p.
31. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Физматлит, 2001. 736 с.
32. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961. 203 с.
33. **Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 320 с.
34. **Adams R.A.** Sobolev spaces. New York: Acad. Press, 1975. 268 p.
35. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
36. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
37. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
38. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
39. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 5. М.: Физматлит, 1959. 657 с.
40. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
41. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 832 с.
42. **Короткий А.И.** Зависимость решений эллиптических уравнений от коэффициентов и приложении к корректности задач оптимального управления // Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 20–33.
43. **Короткий А.И.** Прямые и обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1993. 331 с.
44. **Kellogg R.B., Osborn J.E.** A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon // J. Funct. Anal. 1976. Vol. 21. № 4. P. 397–431.
45. **Dauge M.** Stationary Stokes and Navier-Stokes systems on two- or three-dimensional domains with corners. Part I: Linearized equations // SIAM J. Math. Anal. 1989. Vol. 20, № 1. P. 74–97.
46. **Brown R.M., Shen Z.** Estimates for the Stokes operator in Lipschitz domains // Indiana Univ. Math. J. 1995. Vol. 44, № 4. P. 1183–1206.
47. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.

Поступила 4.09.2009.

Короткий Александр Илларионович  
 д-р физ.-мат. наук  
 зав. отделом  
 Ин-т математики и механики УрО РАН  
 e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Ковтунов Дмитрий Александрович  
 гл. программист  
 Ин-т математики и механики УрО РАН  
 e-mail: dakovtunov@mail.ru

УДК 519.63

**СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ<sup>1</sup>****А. В. Лекомцев, В. Г. Пименов**

Рассматриваются двумерные уравнения параболического типа с эффектами запаздываний по временной составляющей. Конструируется схема переменных направлений для численного решения этих уравнений. Рассматривается вопрос о сведении задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями. Исследуются порядок погрешности аппроксимации для схемы переменных направлений, устойчивость и порядок сходимости.

Ключевые слова: уравнения параболического типа, запаздывание, метод переменных направлений.

A. V. Lekomtsev, V. G. Pimenov. Convergence of the alternating direction method for the numerical solution of a heat conduction equation with delay.

Two-dimensional parabolic equations with delay effects in the time component are considered. An alternating direction scheme is constructed for the numerical solution of these equations. The question on the reduction of the problem with inhomogeneous boundary conditions to a problem with homogeneous boundary conditions is considered. The order of approximation error for the alternating direction scheme, stability, and convergence order are investigated.

Keywords: parabolic equations, delay, alternating direction method.

**Введение**

В работе для двумерного уравнения параболического типа с эффектами запаздываний по временной составляющей конструируется метод переменных направлений и изучается порядок его сходимости. Качественные аспекты подобных математических объектов изучались с общих позиций, в частности, в монографии [1], где объектом исследований выступает уравнение вида

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(u_t),$$

где  $u$  — элемент банахова пространства,  $u_t = \{u(t+s), -\tau \leq s \leq 0\}$  — предыстория состояния,  $f$  — нелинейное отображение,  $A$  — инфинитезимально порождающий оператор полугруппы. Такие уравнения содержат, в частности, и уравнения параболического типа с запаздыванием, которые возникают при моделировании многих процессов [1]. Гораздо меньше разработаны численные алгоритмы решения для подобных задач, можно отметить лишь работу [2], где с позиции присущего автору подхода к численному решению задач с запаздыванием как к непрерывному методу строится и исследуется аналог неявного метода трапеций для одномерного случая. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с эффектами запаздываний (функционально-дифференциальных уравнений, сокращенно ФДУ) численные методы хорошо разработаны, в частности, с позиции подхода [3], основанного на идее разделения конечномерной и бесконечномерной фазовых составляющих и идее применения интерполяции с заданными свойствами дискретной предыстории модели, составлены эффективные пакеты прикладных программ. С позиций этого подхода в работах [4, 5] изучались некоторые численные алгоритмы решения одномерного уравнения теплопроводности.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00141) и программы Президиума РАН “Фундаментальные науки — медицине”.

В работе [6] с позиции сеточных методов была сконструирована схема переменных направлений для двумерного уравнения теплопроводности с использованием интерполяции с заданными свойствами дискретной предыстории модели.

В данной работе приводится доказательство основного результата, анонсированного в работе [6]: теоремы о порядке сходимости алгоритма. При этом используется как техника общего подхода к исследованию линейно разностных схем [7], так и техника исследования разностных схем решения функционально-дифференциальных уравнений [3, 8]. Кроме того, в данной работе, в отличие от работы [6], рассмотрен вопрос о сведении задачи с неоднородными граничными условиями к задаче с однородными граничными условиями и получены достаточные условия применения такого сведения в рамках общей схемы.

## 1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим уравнение теплопроводности с эффектом последействия вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y, \cdot)), \quad (1.1)$$

здесь  $x \in [0, X]$ ,  $y \in [0, Y]$  — пространственные и  $t \in [t_0, \theta]$  — временная независимые переменные;  $u(x, y, t)$  — искомая функция;  $u_t(x, y, \cdot) = \{u(x, y, t + s), -\tau \leq s < 0\}$  — функция-предыстория искомой функции к моменту  $t$ ;  $\tau$  — величина запаздывания.

Пусть заданы начальные условия

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y, t), \quad x \in [0, X], \quad y \in [0, Y], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (1.2)$$

и граничные условия

$$u(0, y, t) = g_0(y, t), \quad u(X, y, t) = g_1(y, t), \quad y \in [0, Y], \quad t \in [t_0, \theta], \quad (1.3)$$

$$u(x, 0, t) = g_2(x, t), \quad u(x, Y, t) = g_3(x, t), \quad x \in [0, X], \quad t \in [t_0, \theta]. \quad (1.4)$$

Задача (1.1)–(1.4) представляет собой простейшую краевую задачу для уравнения теплопроводности с эффектом запаздывания общего вида. Будем предполагать, что функции  $\varphi$ ,  $g_0$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  и функционал  $f$  таковы, что эта задача имеет единственное решение  $u(x, y, t)$ , понимаемое в классическом смысле, причем функция  $u(x, y, t)$  обладает требуемой в нижеприведенных рассуждениях гладкостью. Отметим, что вопросы существования и единственности подобных задач рассматривались в [1].

Обозначим через  $Q = Q[-\tau, 0)$  множество функций  $u(s)$ , кусочно-непрерывных на полуинтервале  $[-\tau, 0)$ , с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа; также функции  $u(s)$  имеют конечный левый предел в нуле. Определим норму функции на  $Q$  соотношением  $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{-\tau \leq s < 0} \|u(s)\|$ . Дополнительно будем предполагать, что функционал  $f(x, y, t, u, v)$  определен на  $[0, X] \times [0, Y] \times [t_0, \theta] \times \mathbb{R} \times Q$  и липшицев по двум последним аргументам, т.е. найдется такая константа  $L_f$ , что для всех  $x \in [0, X]$ ,  $y \in [0, Y]$ ,  $t \in [t_0, \theta]$ ,  $u^1 \in \mathbb{R}$ ,  $u^2 \in \mathbb{R}$ ,  $v^1(\cdot) \in Q$ ,  $v^2(\cdot) \in Q$  выполняется

$$\left| f(x, y, t, u^1, v^1(\cdot)) - f(x, y, t, u^2, v^2(\cdot)) \right| \leq L_f \left( |u^1 - u^2| + \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q \right). \quad (1.5)$$

## 2. Метод переменных направлений

Разобьем отрезки изменения пространственных переменных  $[0, X]$  и  $[0, Y]$  на части с шагами  $h_1 = X/N_1$  и  $h_2 = Y/N_2$  соответственно, введя точки  $x_i = ih_1$ ,  $i = 0, \dots, N_1$ ,  $y_j = jh_2$ ,  $j = 0, \dots, N_2$ , и разобьем отрезок изменения временной переменной  $[t_0, \theta]$  на части с шагом  $\Delta > 0$ ,

введем точки  $t_k = t_0 + k\Delta$ ,  $k = 0, \dots, M$ . Будем считать, что величина  $\tau/\Delta = m$  — целое число. Обозначим через  $\bar{\omega}_h$  равномерную по  $x$  и  $y$  сетку с шагами  $h_1$  и  $h_2$  соответственно. То есть

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih_1, y_j = jh_2 : i = 0, \dots, N_1, j = 0, \dots, N_2, (i, j) \neq \{(0, 0); (N_1, 0); (0, N_2); (N_1, N_2)\} \right\}.$$

Обозначим через  $\omega_h = \{x_i = ih_1, y_j = jh_2 : i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1\}$ . Пусть  $\gamma_h$  — граница сеточной области  $\bar{\omega}_h$ , содержащая все узлы на сторонах прямоугольника, кроме его вершин,  $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ .

Приближения функций  $u(x_i, y_j, t_k)$  в узлах будем обозначать через  $u_k^{ij}$ . При всяких фиксированных  $i = 0, \dots, N_1$  и  $j = 0, \dots, N_2$  введем дискретную предысторию к моменту  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, M : \{u_l^{ij}\}_k = \{u_l^{ij}, k - m \leq l \leq k\}$ . Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение  $I$ , ставящее в соответствие всякому моменту  $t_k$  ( $k = 0, \dots, M$ ) и дискретной предыстории  $\{u_l^{ij}\}_k$  к моменту  $t_k$  функцию  $v_k^{ij}(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$ . В дальнейшем индекс  $k$  у функции  $v_k^{ij}(\cdot)$  будем опускать.

**О п р е д е л е н и е 1.** Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности  $\Delta^p$  на точном решении, если существуют константы  $C_1$  и  $C_2$  такие, что для всех  $i, j, k$  и  $t \in [t_k - \tau, t_{k+1}]$  выполняется неравенство

$$\|v^{ij}(t) - u(x_i, y_j, t)\| \leq C_1 \max_{k-m \leq l \leq k} \|u_l^{ij} - u(x_i, y_j, t_l)\| + C_2 \Delta^p.$$

Например, кусочно-линейная интерполяция

$$v^{ij}(t_k + s) = \left( (t_l - t_k - s)u_{l-1}^{ij} + (t_k + s - t_{l-1})u_l^{ij} \right) / \Delta, \quad t_{l-1} \leq t_k + s \leq t_l, \quad l \leq k,$$

с экстраполяцией продолжением

$$v^{ij}(t_k + s) = \left( (-s)u_{k-1}^{ij} + (\Delta + s)u_k^{ij} \right) / \Delta, \quad t_k \leq t_k + s \leq t_{k+1},$$

имеет второй порядок [3]. Рассмотрим метод, который по аналогии с подобным методом для двумерного уравнения теплопроводности без запаздывания [7] будем называть методом переменных направлений. Определим  $u_{k+1/2}^{ij}$  и  $u_{k+1}^{ij}$  из решения систем, которые могут быть решены трехдиагональной прогонкой:

$$\left( u_{k+1/2}^{ij} - u_k^{ij} \right) / (\Delta/2) = \frac{a^2}{h_1^2} \left( u_{k+1/2}^{i+1j} - 2u_{k+1/2}^{ij} + u_{k+1/2}^{i-1j} \right) + \frac{a^2}{h_2^2} \left( u_k^{ij+1} - 2u_k^{ij} + u_k^{ij-1} \right) + F_{k+1/2}^{ij} (v^{ij}(\cdot)), \quad (2.1)$$

$$\left( u_{k+1}^{ij} - u_{k+1/2}^{ij} \right) / (\Delta/2) = \frac{a^2}{h_1^2} \left( u_{k+1}^{i+1j} - 2u_{k+1}^{ij} + u_{k+1}^{i-1j} \right) + \frac{a^2}{h_2^2} \left( u_{k+1}^{ij+1} - 2u_{k+1}^{ij} + u_{k+1}^{ij-1} \right) + F_{k+1/2}^{ij} (v^{ij}(\cdot)), \quad (2.2)$$

где  $i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1, k = 0, \dots, M - 1$ , с начальными и граничными условиями

$$u_0^{ij} = \varphi(x_i, y_j, t_0), \quad i = 0, \dots, N_1, \quad j = 0, \dots, N_2,$$

$$v^{ij}(t) = \varphi(x_i, y_j, t), \quad t < t_0, \quad i = 0, \dots, N_1, \quad j = 0, \dots, N_2,$$

$$u_k^{0j} = g_0(y_j, t_k), \quad u_k^{N_1j} = g_1(y_j, t_k), \quad j = 0, \dots, N_2, \quad k = 0, \dots, M, \quad (2.3)$$

$$u_k^{i0} = g_2(x_i, t_k), \quad u_k^{iN_2} = g_3(x_i, t_k), \quad i = 0, \dots, N_1, \quad k = 0, \dots, M, \quad (2.4)$$

$$u_{k+1/2}^{0j} = \left( u_k^{0j} + u_{k+1}^{0j} \right) / 2 - \Delta \Lambda_2 \left( u_{k+1}^{0j} - u_k^{0j} \right) / 4, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad k = 0, \dots, M - 1, \quad (2.5)$$

$$u_{k+1/2}^{N_1j} = \left( u_k^{N_1j} + u_{k+1}^{N_1j} \right) / 2 - \Delta \Lambda_2 \left( u_{k+1}^{N_1j} - u_k^{N_1j} \right) / 4, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad k = 0, \dots, M - 1, \quad (2.6)$$

через  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  обозначены:  $\Lambda_1 u_k^{ij} = \left( u_k^{i+1j} - 2u_k^{ij} + u_k^{i-1j} \right) a^2 / h_1^2$ ,  $\Lambda_2 u_k^{ij} = \left( u_k^{ij+1} - 2u_k^{ij} + u_k^{ij-1} \right) a^2 / h_2^2$ .

В качестве  $F_k^{ij}(v^{ij}(\cdot))$  возьмем функционал  $f(x_i, y_j, t_k, u_k^{ij}, v^{ij}(\cdot))$ . Функционал  $F_k^{ij}(v^{ij}(\cdot))$  определен на  $Q[-\tau, \Delta]$  и является липшицевым по переменной  $v(\cdot)$  с константой  $L_f$ .

Перепишем систему (2.1), (2.2) в операторной форме

$$(u_{k+1/2}^{ij} - u_k^{ij})/(\Delta/2) = \Lambda_1 u_{k+1/2}^{ij} + \Lambda_2 u_k^{ij} + F_{k+1/2}^{ij}(v^{ij}(\cdot)), \quad (2.7)$$

$$(u_{k+1}^{ij} - u_{k+1/2}^{ij})/(\Delta/2) = \Lambda_1 u_{k+1/2}^{ij} + \Lambda_2 u_{k+1}^{ij} + F_{k+1/2}^{ij}(v^{ij}(\cdot)), \quad (2.8)$$

где  $i = 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $j = 1, \dots, N_2 - 1$ ,  $k = 0, \dots, M - 1$ . Заметим, что значение функционала  $F_{k+1/2}^{ij}(v^{ij}(\cdot))$  вычисляется явно за счет интерполяции и экстраполяции.

Исключим сеточную функцию  $u_{k+1/2}^{ij}$ . Для этого преобразуем систему (2.7), (2.8):

$$(E - \Delta\Lambda_1/2)u_{k+1/2}^{ij} = (E + \Delta\Lambda_2/2)u_k^{ij} + \Delta F_{k+1/2}^{ij}(v^{ij}(\cdot))/2, \quad (2.9)$$

$$(E - \Delta\Lambda_2/2)u_{k+1}^{ij} = (E + \Delta\Lambda_1/2)u_{k+1/2}^{ij} + \Delta F_{k+1/2}^{ij}(v^{ij}(\cdot))/2. \quad (2.10)$$

Применим к (2.9) оператор  $(E + \Delta\Lambda_1/2)$ , а к (2.10) —  $(E - \Delta\Lambda_1/2)$  и сложим

$$(E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)u_{k+1}^{ij} = (E + \Delta\Lambda_1/2)(E + \Delta\Lambda_2/2)u_k^{ij} + \Delta F_{k+1/2}^{ij}(v^{ij}(\cdot)),$$

следовательно,

$$(E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)(u_{k+1}^{ij} - u_k^{ij})/\Delta + [(E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2) - (E + \Delta\Lambda_1/2)(E + \Delta\Lambda_2/2)]u_k^{ij}/\Delta = F_{k+1/2}^{ij}(v^{ij}(\cdot)),$$

откуда получаем

$$B \frac{u_{k+1}^{ij} - u_k^{ij}}{\Delta} + Au_k^{ij} = F_{k+1/2}^{ij}(v^{ij}(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad k = 0, \dots, M - 1, \quad (2.11)$$

где  $B = (E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)$ ,  $A = -\Lambda_1 - \Lambda_2$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Невязкой метода назовем

$$\Psi_k^{ij} = B[u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)]/\Delta + Au(x_i, y_j, t_k) - F_{k+1/2}^{ij}(u_{t_{k+1/2}}(x_i, y_j, (\cdot))). \quad (2.12)$$

Определение порядка невязки метода при конкретном выборе  $F$  проводится с помощью тейлоровского разложения функции  $u(x, y, t)$  (при условиях соответствующей гладкости). Так, например, справедливо следующее утверждение, полностью соответствующее аналогичному утверждению без запаздывания для метода переменных направлений [7].

**Теорема 1.** *Невязка метода переменных направлений имеет порядок  $\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим  $\delta u = u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)$ . Подставим оператор  $B$  в определение невязки (2.12). Получим

$$\begin{aligned} & (E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)[u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)]/\Delta + Au(x_i, y_j, t_k) - F_{k+1/2}^{ij}(u_{t_{k+1/2}}(x_i, y_j, (\cdot))) \\ &= \delta u/\Delta + A[u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)]/2 + Au(x_i, y_j, t_k) + \Delta\Lambda_1\Lambda_2\delta u/4 - F_{k+1/2}^{ij}(u_{t_{k+1/2}}(x_i, y_j, (\cdot))) \\ &= \frac{\delta u}{\Delta} + \frac{A}{2}(u(x_i, y_j, t_{k+1}) + u(x_i, y_j, t_k)) + \Delta\Lambda_1\Lambda_2\frac{\delta u}{4} - f\left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{k+\frac{1}{2}}^{ij}, u_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x_i, y_j, (\cdot))\right). \quad (2.13) \end{aligned}$$

Будем раскладывать по формуле Тейлора точное решение уравнения (1.1)–(1.4) в окрестности точки  $(x_i, y_j, t_{k+1/2})$  при условиях ограниченных производных соответствующих порядков. Тогда

$$\delta u = \Delta \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_{k+1/2}) + O(\Delta^3), \quad (2.14)$$

$$[u(x_i, y_j, t_{k+1}) + u(x_i, y_j, t_k)]/2 = u(x_i, y_j, t_{k+1/2}) + O(\Delta^2). \quad (2.15)$$

Используя разложение по формуле Тейлора и определение оператора  $A$ , получаем

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+1/2}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+1/2}) \right) = -Au(x_i, y_j, t_{k+1/2}) + O(h_1^2) + O(h_2^2). \quad (2.16)$$

Подставим соотношения (2.14)–(2.16) в (2.13) и используем то, что операторы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  ограничены и  $u$  является решением уравнения (1.1). Получим

$$\begin{aligned} \Psi_k^{ij} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_{k+1/2}) - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+1/2}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+1/2}) \right) \\ &- f \left( x_i, y_j, t_{k+1/2}, u_{k+1/2}^{ij}, u_{t_{k+1/2}}(x_i, y_j, (\cdot)) \right) + O(\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2) = O(\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2). \end{aligned}$$

Из этого соотношения немедленно вытекает заключение теоремы.  $\square$

Обозначим величину погрешности метода в узлах через  $\varepsilon_k^{ij} = u(x_i, y_j, t_k) - u_k^{ij}$ .

**О п р е д е л е н и е 3.** Будем говорить, что метод сходится, если  $\varepsilon_k^{ij} \rightarrow 0$  при  $h_1 \rightarrow 0$ ,  $h_2 \rightarrow 0$  и  $\Delta \rightarrow 0$  при всех  $i = 0, \dots, N_1$ ,  $j = 0, \dots, N_2$  и  $k = 0, \dots, M$ .

В силу нелинейного характера зависимости функционала  $f$  (а следовательно, и  $F$ ) от состояния и его предыстории обычные методы исследования устойчивости [7] неприменимы. Однако к данной задаче, как и к другим эволюционным задачам с эффектом запаздывания для исследования сходимости схем применим аппарат абстрактных схем с последствием, ранее разработанный в [8] для случая функционально-дифференциальных уравнений. Изложим основные моменты этого аппарата применительно к нашему случаю.

### 3. Общая разностная схема с последствием и ее порядок сходимости

Пусть задан отрезок  $[t_0, \theta]$  и число  $\tau > 0$  — величина запаздывания.

Шагом сетки назовем число  $\Delta > 0$  такое, что  $\tau/\Delta = m$  — целое число,  $\{\Delta\}$  — множество шагов.

Сеткой (равномерной) назовем конечный набор чисел

$$\Sigma_\Delta = \{t_i = t_0 + i\Delta \in [t_0 - \tau, \theta], i = -m, \dots, M\}.$$

Обозначим  $\Sigma_\Delta^- = \{t_i \in \Sigma_\Delta, i \leq 0\}$ ,  $\Sigma_\Delta^+ = \{t_i \in \Sigma_\Delta, i \geq 0\}$ .

Дискретной моделью назовем всякую сеточную функцию  $t_i \in \Sigma_\Delta \rightarrow y(t_i) = y_i \in Y$ ,  $i = -m, \dots, M$ , где  $Y$  —  $q$ -мерное нормированное пространство с нормой  $\|\cdot\|_Y$ . Будем предполагать, что размерность  $q$  пространства  $Y$  зависит от числа  $h > 0$ .

Для  $n \geq 0$  предысторией дискретной модели к моменту  $t_n$  назовем множество  $\{y_i\}_n = \{y_i \in Y, i = n - m, \dots, n\}$ . Пусть  $V$  — линейное нормированное пространство с нормой  $\|\cdot\|_V$  (интерполяционное пространство). Оператором интерполяции дискретной предыстории модели назовем отображение  $I : I(\{y_i\}_n) = v \in V$ .

Будем говорить, что оператор интерполяции удовлетворяет условию липшицевости, если найдется такая константа  $L_I$ , что для всех предысторий дискретной модели  $\{y_i^1\}_n$  и  $\{y_i^2\}_n$  выполняется

$$\|v^1 - v^2\|_V \leq L_I \max_{-m \leq i \leq n} \|y_i^1 - y_i^2\|_Y.$$

Стартовыми значениями модели назовем функцию  $\Sigma_{\Delta}^{-} \rightarrow Y$

$$y(t_i) = y_i, \quad i = -m, \dots, 0. \quad (3.1)$$

Формулой продвижения модели на шаг назовем алгоритм

$$y_{n+1} = Sy_n + \Delta\Phi(t_n, I(\{y_i\}_n), \Delta), \quad (3.2)$$

где функция продвижения на шаг  $\Phi : \Sigma_{\Delta}^{+} \times V \times \{\Delta\} \rightarrow Y$ , оператор перехода  $S : Y \rightarrow Y$  — линейный оператор.

Таким образом, дискретная модель (численный метод, в дальнейшем просто метод) определяется стартовыми значениями (3.1), формулой продвижения на шаг (3.2) и оператором интерполяции. Будем предполагать, что функция  $\Phi(t_n, v, \Delta)$  в (3.2) липшицева по второму аргументу, т. е. найдется такая константа  $L_{\Phi}$ , что для всех  $t_n \in \Sigma_{\Delta}^{+}$ ,  $\Delta \in \{\Delta\}$ ,  $v^1, v^2 \in V_n$  выполняется

$$\|\Phi(t_n, v^1, \Delta) - \Phi(t_n, v^2, \Delta)\|_Y \leq L_{\Phi} \|v^1 - v^2\|_V.$$

Функцией точных значений назовем отображение

$$Z(t_i, \Delta) = z_i \in Y, \quad i = -m, \dots, M.$$

Будем предполагать, что задание функции точных значений является следствием задания точного решения задачи (1.1)–(1.4).

Будем говорить, что стартовые значения модели имеют порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , если найдется константа  $C$  такая, что

$$\|z_i - y_i\|_Y \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2}), \quad i = -m, \dots, 0.$$

Будем говорить, что метод сходится с порядком  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , если существует константа  $C$  такая, что

$$\|z_n - y_n\|_Y \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2}),$$

для всех  $n = -m, \dots, M$ .

Индексы у норм в дальнейшем будем опускать.

Назовем метод (3.2) устойчивым, если  $\|S\| \leq 1$ .

Погрешностью аппроксимации (невязкой) с интерполяцией назовем сеточную функцию

$$d_n = (z_{n+1} - Sz_n)/\Delta - \Phi(t_n, I(\{z_i\}_{-m}^n), \Delta), \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (3.3)$$

Будем говорить, что метод (3.2) имеет порядок погрешности аппроксимации с интерполяцией  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , если существует константа  $C$  такая, что

$$\|d_n\| \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2})$$

для всех  $n = 1, \dots, M$ .

Справедлива следующая основная теорема.

**Теорема 2.** Пусть метод (3.2) устойчив, функция  $\Phi$  удовлетворяет условию липшицевости по второму аргументу, оператор интерполирования  $I$  удовлетворяет условию липшицевости, стартовые значения имеют порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , погрешность аппроксимации с интерполяцией имеет порядок  $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$ , где  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ ,  $p_3 > 0$ ,  $p_4 > 0$ , тогда метод сходится, причем порядок сходимости не меньше  $\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}$ .

Доказательство. Обозначим  $\delta_n = y_n - z_n$ ,  $n = -m, \dots, M$ , тогда для  $n = 0, \dots, M-1$  имеем

$$\delta_{n+1} = S\delta_n + \Delta\widehat{\delta}_n + \Delta d_n, \quad (3.4)$$

где

$$\Delta\widehat{\delta}_n = \Phi(t_n, I(\{z_i\}_n), \Delta) - \Phi(t_n, I(\{y_i\}_n), \Delta).$$

Из предположений о липшицевости отображений  $\Phi$  и  $I$  следует

$$\|\Delta\widehat{\delta}_n\| \leq K \max_{n-m \leq i \leq n} \{\|\delta_i\|\}, \quad (3.5)$$

где  $K = L_\Phi L_I$ . Из (3.4) вытекает

$$\delta_{n+1} = S^{n+1}\delta_0 + \Delta \sum_{j=0}^n S^{n-j}\widehat{\delta}_j + \Delta \sum_{j=0}^n S^{n-j}d_j. \quad (3.6)$$

Из (3.6), (3.5) и определения устойчивости оператора  $S$  следует

$$\|\delta_{n+1}\| \leq K\Delta \sum_{j=0}^n \max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} + \|\delta_0\| + (\theta - t_0) \max_{0 \leq i \leq N-1} \{\|d_i\|\}. \quad (3.7)$$

Обозначим

$$R_0 = \max_{-m \leq i \leq 0} \{\|\delta_i\|\}, \quad R = \max_{0 \leq i \leq N-1} \{\|d_i\|\}, \quad D = R_0 + (\theta - t_0)R, \quad (3.8)$$

тогда оценку (3.7) можно переписать как

$$\|\delta_{n+1}\| \leq K\Delta \sum_{j=0}^n \max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} + D. \quad (3.9)$$

Индукцией по  $n = 1, \dots, M$  докажем оценку

$$\|\delta_n\| \leq D(1 + K\Delta)^n. \quad (3.10)$$

*База индукции.* Если в (3.9) положить  $n = 0$ , то  $\|\delta_1\| \leq K\|\delta_0\| + D \leq (1 + K\Delta)D$ .

*Шаг индукции.* Пусть оценка (3.10) верна для всех индексов от 1 до  $n$ . Покажем, что оценка справедлива и для  $n+1$ . Зафиксируем  $j \leq n$ . Пусть  $i_0 = i_0(j)$  — тот индекс, на котором достигается  $\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\}$ . Возможны две ситуации:

- 1)  $i_0 \leq 0$ , тогда  $\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} = \|\delta_{i_0}\| \leq R_0 \leq D(1 + K\Delta)^j$ .
- 2)  $1 \leq i_0 \leq j$ , тогда по индуктивному предположению

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} = \|\delta_{i_0}\| \leq D(1 + K\Delta)^{i_0} \leq D(1 + K\Delta)^j.$$

Таким образом, в любом случае выполняется оценка

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|\} \leq D(1 + K\Delta)^j.$$

Из полученной оценки и (3.9) вытекает

$$\|\delta_{n+1}\| \leq K\Delta \sum_{j=0}^n D(1 + K\Delta)^j + D = D(1 + K\Delta)^n.$$

Таким образом, оценка (3.10) доказана, и из нее получаем оценку

$$\|\delta_n\| \leq D \exp(K(\theta - t_0)). \quad (3.11)$$

Так как по определению (3.8) величины  $D$  выполняется

$$D \leq C(\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}),$$

то из (3.11) вытекает заключение теоремы.  $\square$

#### 4. Сведение к однородным граничным условиям

Перепишем метод переменных направлений (2.1), (2.2) в следующем виде:

$$-\sigma_1 u_{k+1/2}^{i-1j} + (2\sigma_1 + 1) u_{k+1/2}^{ij} - \sigma_1 u_{k+1/2}^{i+1j} - \sigma_2 u_k^{ij-1} + (2\sigma_2 - 1) u_k^{ij} - \sigma_2 u_k^{ij+1} = \frac{\Delta}{2} F_{k+1/2}^{ij} (v^{ij}(\cdot)), \quad (4.1)$$

$$-\sigma_1 u_{k+1/2}^{i-1j} + (2\sigma_1 - 1) u_{k+1/2}^{ij} - \sigma_1 u_{k+1/2}^{i+1j} - \sigma_2 u_{k+1}^{ij-1} + (2\sigma_2 + 1) u_{k+1}^{ij} - \sigma_2 u_{k+1}^{ij+1} = \frac{\Delta}{2} F_{k+1/2}^{ij} (v^{ij}(\cdot)), \quad (4.2)$$

где  $i = 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $j = 1, \dots, N_2 - 1$ ,  $k = 0, \dots, M - 1$ ,  $\sigma_1 = \Delta a^2 / 2h_1^2$ ,  $\sigma_2 = \Delta a^2 / 2h_2^2$ .

Для сведения системы (4.1), (4.2) к однородным граничным условиям используем подход, описанный в [9]. Дальнейшие рассуждения мы будем производить для некоторого произвольного индекса  $k$  от 0 до  $M$ . В разностной системе (4.1), (4.2) исключим граничные условия и результат запишем в векторно-матричной форме. С этой целью сначала введем в рассмотрение матрицы  $A_1$ ,  $A_2$  и векторы  $\{u_k^j\}$ ,  $\{F_k^j\}$ ,  $\{\bar{g}_k^j\}$ ,  $j = 1, \dots, N_2 - 1$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 + 1 & -\sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 2\sigma_1 + 1 & -\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 2\sigma_1 + 1 & -\sigma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma_1 & 2\sigma_1 + 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 - 1 & -\sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 2\sigma_1 - 1 & -\sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & 2\sigma_1 - 1 & -\sigma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma_1 & 2\sigma_1 - 1 \end{pmatrix},$$

$\{u_k^j\} = (u_k^{1j}, \dots, u_k^{N_1-1j})^T$ ,  $\{F_k^j\} = (F_k^{1j}(v^{1j}(\cdot)), \dots, F_k^{N_1-1j}(v^{N_1-1j}(\cdot)))^T$ ,  $\{\bar{g}_k^j\} = (g_0(y_j, t_k), 0, \dots, 0, g_1(y_j, t_k))^T$ . Здесь  $T$  — знак транспонирования. Используя граничные условия (2.3)–(2.6), перепишем систему уравнений (4.1), (4.2) в следующем виде:

$$-\sigma_2 u_k^{j-1} + A_1 u_{k+1/2}^j + (2\sigma_2 - 1) u_k^j - \sigma_2 u_k^{j+1} = \frac{\Delta}{2} F_{k+1/2}^j + \frac{\sigma_1}{2} (\bar{g}_k^j + \bar{g}_{k+1}^j) - \frac{\Delta}{4} \sigma_1 \Lambda_2 (\bar{g}_{k+1}^j - \bar{g}_k^j), \quad (4.3)$$

$$-\sigma_2 u_{k+1}^{j-1} + A_2 u_{k+1/2}^j + (2\sigma_2 + 1) u_{k+1}^j - \sigma_2 u_{k+1}^{j+1} = \frac{\Delta}{2} F_{k+1/2}^j + \frac{\sigma_1}{2} (\bar{g}_k^j + \bar{g}_{k+1}^j) - \frac{\Delta}{4} \sigma_1 \Lambda_2 (\bar{g}_{k+1}^j - \bar{g}_k^j), \quad (4.4)$$

где  $j = 1, \dots, N_2 - 1$ , при условии, что

$$u_k^0 = (g_2(x_1, t_k), \dots, g_2(x_{N_1-1}, t_k))^T = \hat{g}_{2k}, \quad u_k^{N_2} = (g_3(x_1, t_k), \dots, g_3(x_{N_1-1}, t_k))^T = \hat{g}_{3k}. \quad (4.5)$$

Из уравнений (4.3), (4.4) исключим граничные условия (4.5). Тогда будем иметь

$$A_1 u_{k+1/2}^1 + (2\sigma_2 - 1) u_k^1 - \sigma_2 u_k^2 = \frac{\Delta}{2} F_{k+1/2}^1 + \frac{\sigma_1}{2} (\bar{g}_k^1 + \bar{g}_{k+1}^1) - \frac{\Delta}{4} \sigma_1 \Lambda_2 (\bar{g}_{k+1}^1 - \bar{g}_k^1) + \sigma_2 \hat{g}_{2k}, \quad (4.6)$$

$$A_2 u_{k+1/2}^1 + (2\sigma_2 + 1) u_{k+1}^1 - \sigma_2 u_{k+1}^2 = \frac{\Delta}{2} F_{k+1/2}^1 + \frac{\sigma_1}{2} (\bar{g}_k^1 + \bar{g}_{k+1}^1) - \frac{\Delta}{4} \sigma_1 \Lambda_2 (\bar{g}_{k+1}^1 - \bar{g}_k^1) + \sigma_2 \hat{g}_{2k+1}, \quad (4.7)$$

$$-\sigma_2 u_k^{j-1} + A_1 u_{k+1/2}^j + (2\sigma_2 - 1) u_k^j - \sigma_2 u_k^{j+1}$$

$$= \Delta F_{k+1/2}^j / 2 + \sigma_1 (\bar{g}_k^j + \bar{g}_{k+1}^j) / 2 - \Delta \sigma_1 \Lambda_2 (\bar{g}_{k+1}^j - \bar{g}_k^j) / 4, \quad j = 2, \dots, N_2 - 2, \quad (4.8)$$

$$-\sigma_2 u_{k+1}^{j-1} + A_2 u_{k+1/2}^j + (2\sigma_2 + 1) u_{k+1}^j - \sigma_2 u_{k+1}^{j+1}$$

$$= \Delta F_{k+1/2}^j / 2 + \sigma_1 (\bar{g}_k^j + \bar{g}_{k+1}^j) / 2 - \Delta \sigma_1 \Lambda_2 (\bar{g}_{k+1}^j - \bar{g}_k^j) / 4, \quad j = 2, \dots, N_2 - 2, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
& -\sigma_2 u_k^{N_2-2} + A_1 u_{k+1/2}^{N_2-1} + (2\sigma_2 - 1) u_k^{N_2-1} \\
& = \Delta F_{k+1/2}^{N_2-1}/2 + \sigma_1 (\bar{g}_k^{N_2-1} + \bar{g}_{k+1}^{N_2-1})/2 - \Delta \sigma_1 \Lambda_2 (\bar{g}_{k+1}^{N_2-1} - \bar{g}_k^{N_2-1})/4 + \sigma_2 \hat{g}_{3k}, \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sigma_2 u_{k+1}^{N_2-2} + A_2 u_{k+1/2}^{N_2-1} + (2\sigma_2 + 1) u_{k+1}^{N_2-1} \\
& = \Delta F_{k+1/2}^{N_2-1}/2 + \sigma_1 (\bar{g}_k^{N_2-1} + \bar{g}_{k+1}^{N_2-1})/2 - \Delta \sigma_1 \Lambda_2 (\bar{g}_{k+1}^{N_2-1} - \bar{g}_k^{N_2-1})/4 + \sigma_2 \hat{g}_{3k+1}. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Обозначим  $\bar{\sigma}_1 = 2\sigma_1/\Delta = a^2/h_1^2$ ,  $\bar{\sigma}_2 = 2\sigma_2/\Delta = a^2/h_2^2$ .

Из этой системы видно, что мы можем свести задачу к задаче с однородными граничными условиями. Правая часть уравнений (4.6), (4.8), (4.10) будет равна  $\tilde{F}_{k+1/2}$ , а (4.7), (4.9), (4.11) равна  $\tilde{\tilde{F}}_{k+1/2}$ . Функционалы  $\tilde{F}_{k+1/2}$  и  $\tilde{\tilde{F}}_{k+1/2}$  определяются следующим образом:

$$\tilde{F}_{k+1/2} = F_{k+1/2} + \bar{\sigma}_1 (\bar{F}_k + \bar{F}_{k+1})/2 + \bar{\sigma}_2 \bar{\bar{F}}_k - \Delta \bar{\sigma}_1 \Lambda_2 (\bar{F}_{k+1} - \bar{F}_k)/4,$$

$$\tilde{\tilde{F}}_{k+1/2} = F_{k+1/2} + \bar{\sigma}_1 (\bar{F}_k + \bar{F}_{k+1})/2 + \bar{\sigma}_2 \bar{\bar{F}}_{k+1} - \Delta \bar{\sigma}_1 \Lambda_2 (\bar{F}_{k+1} - \bar{F}_k)/4,$$

где функционалы  $F_k$ ,  $\bar{F}_k$ ,  $\bar{\bar{F}}_k$  равны

$$\begin{aligned}
F_k &= \begin{pmatrix} F_k^{11} & \cdots & F_k^{1N_2-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_k^{N_1-11} & \cdots & F_k^{N_1-1N_2-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_k = \begin{pmatrix} g_0(y_1, t_k) & \cdots & g_0(y_{N_2-1}, t_k) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ g_1(y_1, t_k) & \cdots & g_1(y_{N_2-1}, t_k) \end{pmatrix}, \\
\bar{\bar{F}}_k &= \begin{pmatrix} g_2(x_1, t_k) & 0 & \cdots & 0 & g_3(x_1, t_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_2(x_{N_1-1}, t_k) & 0 & \cdots & 0 & g_3(x_{N_1-1}, t_k) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

## 5. Вложение схемы переменных направлений в общую разностную схему с последствием

Проведем вложение схемы (2.11) в общую разностную схему с последствием. При каждом  $t_k \in \Sigma_\Delta$  определим значения дискретной модели вектором  $z_k = (u_k^{11}, u_k^{12}, \dots, u_k^{1N_2-1}, u_k^{21}, u_k^{22}, \dots, u_k^{2N_2-1}, \dots, u_k^{N_1-1N_2-1})^T \in Z$ , где  $Z$  — векторное пространство размерности  $q = (N_1-1)(N_2-1)$ . Тогда систему (2.11) можно переписать в виде уравнения

$$B(z_{k+1} - z_k)/\Delta + Az_k = F_{k+1/2}(v(\cdot)), \quad k = 0, \dots, M-1, \quad (5.1)$$

где  $F_{k+1/2}(v(\cdot)) = (F_{k+1/2}^{11}(v^{11}(\cdot)), \dots, F_{k+1/2}^{N_1-1N_2-1}(v^{N_1-1N_2-1}(\cdot)))^T$ ,  $v(\cdot) = I(\{u_l\}_k) \in Q^q[-\tau, \Delta]$ . Здесь  $V = Q^q[-\tau, \Delta]$  — интерполяционное пространство, пространство  $q$ -мерных вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит пространству  $Q[-\tau, \Delta]$ .

Исследуем устойчивость полученной схемы. Для этого используем общую теорию устойчивости двухслойных схем. Чтобы применить данную теорию, граничные условия должны быть однородными. Для этого воспользуемся разд. 4 и способом исключения сеточной функции  $u_{k+1/2}^{ij}$  из системы (2.9), (2.10). Рассмотрим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta} \left[ \left( E + \frac{\Delta}{2} \Lambda_1 \right) \frac{\Delta}{2} \tilde{F}_{k+1/2}^{ij} + \left( E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_1 \right) \frac{\Delta}{2} \tilde{\tilde{F}}_{k+1/2}^{ij} \right] = \frac{1}{2} \left( E + \frac{\Delta}{2} \Lambda_1 \right) \left[ F_{k+1/2}^{ij} + \frac{\bar{\sigma}_1}{2} (\bar{F}_k^{ij} + \bar{F}_{k+1}^{ij}) + \bar{\sigma}_2 \bar{\bar{F}}_k^{ij} \right. \\
& \left. - \frac{\Delta}{4} \bar{\sigma}_1 \Lambda_2 (\bar{F}_{k+1}^{ij} - \bar{F}_k^{ij}) \right] + \frac{1}{2} \left( E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_1 \right) \left[ F_{k+1/2}^{ij} + \frac{\bar{\sigma}_1}{2} (\bar{F}_k^{ij} + \bar{F}_{k+1}^{ij}) + \bar{\sigma}_2 \bar{\bar{F}}_{k+1}^{ij} - \frac{\Delta}{4} \bar{\sigma}_1 \Lambda_2 (\bar{F}_{k+1}^{ij} - \bar{F}_k^{ij}) \right]
\end{aligned}$$

$$= F_{k+1/2}^{ij} + \frac{\bar{\sigma}_1}{2} \left( \bar{F}_k^{ij} + \bar{F}_{k+1}^{ij} - \frac{\Delta}{2} (\Lambda_2 \bar{F}_{k+1}^{ij} - \Lambda_2 \bar{F}_k^{ij}) \right) + \frac{\bar{\sigma}_2}{2} \left( \bar{\bar{F}}_k^{ij} + \bar{\bar{F}}_{k+1}^{ij} - \frac{\Delta}{2} (\Lambda_1 \bar{\bar{F}}_{k+1}^{ij} - \Lambda_1 \bar{\bar{F}}_k^{ij}) \right). \quad (5.2)$$

Вспомним определение оператора  $\Lambda_1$ :  $\Lambda_1 u_k^{ij} = (u_k^{i+1j} - 2u_k^{ij} + u_k^{i-1j})a^2/h_1^2$ .

Так как  $\bar{F}_k^{ij}, \bar{F}_{k+1}^{ij}$  не зависит от  $u_k^{ij}$ , то  $\Lambda_1 \bar{F}_k^{ij} = 0$ ,  $\Lambda_1 \bar{\bar{F}}_{k+1}^{ij} = 0$ ,  $\Lambda_2 \bar{F}_k^{ij} = 0$ ,  $\Lambda_2 \bar{F}_{k+1}^{ij} = 0$ . Тогда соотношение (5.2) записывается в виде

$$\frac{1}{\Delta} \left[ \left( E + \frac{\Delta}{2} \Lambda_1 \right) \frac{\Delta}{2} \tilde{F}_{k+1/2}^{ij} + \left( E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_1 \right) \frac{\Delta}{2} \tilde{\bar{F}}_{k+1/2}^{ij} \right] = F_{k+1/2}^{ij} + \frac{\bar{\sigma}_1}{2} (\bar{F}_k^{ij} + \bar{F}_{k+1}^{ij}) + \frac{\bar{\sigma}_2}{2} (\bar{\bar{F}}_k^{ij} + \bar{\bar{F}}_{k+1}^{ij}).$$

Отсюда следует, что для однородных граничных условий правая часть уравнения (5.1) будет равна

$$G_k(v(\cdot)) = F_{k+1/2}(v(\cdot)) + \bar{\sigma}_1 \bar{G}_k(v(\cdot)) + \bar{\sigma}_2 \bar{\bar{G}}_k(v(\cdot)), \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}_k(v(\cdot)) = & \left( (g_0(y_1, t_k) + g_0(y_1, t_{k+1}))/2, \dots, (g_0(y_{N_2-1}, t_k) + g_0(y_{N_2-1}, t_{k+1}))/2, 0, \dots, 0, \right. \\ & \left. (g_1(y_1, t_k) + g_1(y_1, t_{k+1}))/2, \dots, (g_1(y_{N_2-1}, t_k) + g_1(y_{N_2-1}, t_{k+1}))/2 \right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{G}}_k(v(\cdot)) = & \left( (g_2(x_1, t_k) + g_2(x_1, t_{k+1}))/2, 0, \dots, 0, (g_3(x_1, t_k) + g_3(x_1, t_{k+1}))/2, \right. \\ & (g_2(x_2, t_k) + g_2(x_2, t_{k+1}))/2, 0, \dots, 0, (g_3(x_{N_1-2}, t_k) + g_3(x_{N_1-2}, t_{k+1}))/2, \\ & \left. (g_2(x_{N_1-1}, t_k) + g_2(x_{N_1-1}, t_{k+1}))/2, 0, \dots, 0, (g_3(x_{N_1-1}, t_k) + g_3(x_{N_1-1}, t_{k+1}))/2 \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Итак, уравнение (5.1) будет выглядеть следующим образом:

$$B \frac{z_{k+1} - z_k}{\Delta} + Az_k = F_{k+1/2}(v(\cdot)) + \bar{\sigma}_1 \bar{G}_k(v(\cdot)) + \bar{\sigma}_2 \bar{\bar{G}}_k(v(\cdot)), \quad k = 0, \dots, M-1. \quad (5.6)$$

Введем пространство  $Z$  сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$  и обращающихся в нуль на  $\gamma_h$ , со скалярным произведением

$$(z, u) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{ij} u^{ij} h_1 h_2$$

и нормой  $\|z\| = \sqrt{(z, z)}$ . Докажем, что операторы  $A = -\Lambda_1 - \Lambda_2$ ,  $B = (E - \Delta \Lambda_1/2)(E - \Delta \Lambda_2/2) -$  самосопряженные и положительные в  $Z$ . Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (-\Lambda_1 z, u) &= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \Lambda_1 z^{ij} u^{ij} h_1 h_2 = - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{a^2}{h_1^2} (z^{i+1j} - 2z^{ij} + z^{i-1j}) u^{ij} h_1 h_2 \\ &= - \frac{a^2}{h_1^2} \left( \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i+1j} u^{ij} h_1 h_2 - 2 \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{ij} u^{ij} h_1 h_2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{i-1j} u^{ij} h_1 h_2 \right) \\ &= - \frac{a^2}{h_1^2} \left( \sum_{i=2}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{ij} u^{i-1j} h_1 h_2 - 2 \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{ij} u^{ij} h_1 h_2 + \sum_{i=0}^{N_1-2} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{ij} u^{i+1j} h_1 h_2 \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

В силу однородности граничных условий выполняется  $u^{ij} = 0$ ,  $z^{ij} = 0$  для индексов  $i = 0$ ,  $j = 0$ ,  $i = N_1$ ,  $j = N_2$ . Следовательно, соотношение (5.7) имеет вид

$$(-\Lambda_1 z, u) = - \frac{a^2}{h_1^2} \left( \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{ij} u^{i-1j} h_1 h_2 - 2 \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{ij} u^{ij} h_1 h_2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{ij} u^{i+1j} h_1 h_2 \right)$$

$$= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} z^{ij} \frac{a^2}{h_1^2} (u^{i+1j} - 2u^{ij} + u^{i-1j}) h_1 h_2 = (z, -\Lambda_1 u).$$

Из этого соотношения получаем, что оператор  $-\Lambda_1$  — самосопряженный. Аналогичным образом получаем, что оператор  $-\Lambda_2$  — самосопряженный.

Покажем, что  $-\Lambda_1$  — положительный оператор.

$$\begin{aligned} (-\Lambda_1 u, u) &= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \Lambda_1 u^{ij} u^{ij} h_1 h_2 = - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \frac{a^2}{h_1^2} (u^{i+1j} - 2u^{ij} + u^{i-1j}) u^{ij} h_1 h_2 \\ &= \frac{a^2}{h_1^2} \sum_{j=1}^{N_2-1} ((u^{1j})^2 + (u^{N_1-1j})^2) h_1 h_2 + \frac{a^2}{h_1^2} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (u^{ij} - u^{i+1j})^2 h_1 h_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Скалярное произведение  $(-\Lambda_1 u, u) = 0$ , когда все слагаемые соотношения (5.8) равны 0. Следовательно,  $u^{ij} = 0$  для  $i = 1, \dots, N_1 - 1, j = 1, \dots, N_2 - 1$ . Откуда получаем, что  $u = 0$ . Из этого вытекает, что  $-\Lambda_1$  — положительный оператор. Аналогично доказывается, что оператор  $-\Lambda_2$  — положительный. Так как  $A = -\Lambda_1 - \Lambda_2$ , то  $A$  — самосопряженный положительный оператор. Операторы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  перестановочны, так как

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \Lambda_2 u^{ij} &= \Lambda_1 u^{ij+1} - 2\Lambda_1 u^{ij} + \Lambda_1 u^{ij-1} = u^{i+1j+1} - 2u^{ij+1} + u^{i-1j+1} - 2u^{i+1j} + 4u^{ij} - 2u^{i-1j} + u^{i+1j-1} \\ &\quad - 2u^{ij-1} + u^{i-1j-1} = \Lambda_2 u^{i+1j} - 2\Lambda_2 u^{ij} + \Lambda_2 u^{i-1j} = \Lambda_2 \Lambda_1 u^{ij}, \quad i = 0, \dots, N_1, \quad j = 0, \dots, N_2. \end{aligned}$$

Тогда  $(-\Lambda_1)(-\Lambda_2)$  — самосопряженный положительный оператор (см. [7, с. 594]). Следовательно,  $B = (E - \Delta\Lambda_1/2)(E - \Delta\Lambda_2/2)$  — самосопряженный положительный оператор.

Так как  $B$  — положительный оператор в конечномерном гильбертовом пространстве, то существует  $B^{-1}$  (см. [7, с. 595]). Следовательно, можно привести уравнение (5.6) к явной форме

$$z_{k+1} = S z_k + \Delta \Phi(t_k, I(\{z_l\}_k), \Delta), \quad k = 0, \dots, M-1, \quad (5.9)$$

где оператор перехода определяется формулой  $S = E - \Delta B^{-1}A$ , а функция продвижения на шаг — формулой  $\Phi(t_k, v, \Delta) = B^{-1}G_k(v(\cdot))$ . Аналогично получаем, что существует  $A^{-1}$ .

Введем в пространстве  $Z$  энергетическую норму  $\|z\|_A = \sqrt{(Az, z)}$ .

Определим операторы  $\bar{\Lambda}_1$  и  $\bar{\Lambda}_2$  следующим образом:  $\Lambda_1 = \bar{\Lambda}_1 a^2/h_1^2$ ,  $\Lambda_2 = \bar{\Lambda}_2 a^2/h_2^2$ .

Так как  $\Lambda_1 \Lambda_2$  — положительный самосопряженный оператор, то и  $\bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2$  является положительным самосопряженным оператором в силу положительности  $a$ ,  $h_1$  и  $h_2$ .

Докажем, что для некоторого числа  $\varepsilon > 0$  выполняется неравенство

$$B > \varepsilon E + \Delta A/2. \quad (5.10)$$

Для этого рассмотрим

$$B - \frac{1}{2}\Delta A = \left(E - \frac{\Delta}{2}\Lambda_1\right)\left(E - \frac{\Delta}{2}\Lambda_2\right) + \frac{1}{2}\Delta(\Lambda_1 + \Lambda_2) = E + \frac{\Delta^2}{4}\Lambda_1\Lambda_2 = E + \frac{\Delta^2}{4}\frac{a^4}{h_1^2 h_2^2}\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2. \quad (5.11)$$

Так как  $\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2$  — положительный самосопряженный оператор в конечномерном гильбертовом пространстве, то по §1 из дополнения в [7] получаем

$$(\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2 u, u) \geq \delta_{\min} \|u\|^2 > \delta_{\min} \|u\|^2/2, \quad (5.12)$$

где  $\delta_{\min}$  — наименьшее собственное значение оператора  $\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2$ . Так как  $\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2$  — положительный оператор, то  $\delta_{\min} > 0$ . Соотношение (5.12) показывает, что  $\bar{\Lambda}_1\bar{\Lambda}_2 > \delta_{\min} E/2$ . Следовательно, соотношение (5.11) будет иметь вид  $B - \Delta A/2 > (1 + \Delta^2 a^4 \delta_{\min}/8h_1^2 h_2^2)E$ . Значит, условие (5.10)

выполняется, если  $\varepsilon = 1 + \Delta^2 a^4 \delta_{\min} / 8h_1^2 h_2^2$ . Из условия (5.10) следует, что для схемы (5.1) верно неравенство (см. [7, гл. VI, § 2, теорема 7])

$$\|z_{k+1}\|_A^2 \leq \|z_0\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left( \sum_{l=0}^k \Delta \|G_l\|^2 \right). \quad (5.13)$$

Вспомним, что мы переходили к однородным граничным условиям. Поэтому неравенство (5.13) для исходной правой части с помощью соотношения (5.3) будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \|z_{k+1}\|_A^2 &\leq \|z_0\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left( \sum_{l=0}^k \Delta \|F_{l+\frac{1}{2}} + \bar{\sigma}_1 \bar{G}_l + \bar{\sigma}_2 \bar{\bar{G}}_l\|^2 \right) \leq \|z_0\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \left( \sum_{l=0}^k \Delta \|F_{l+\frac{1}{2}}\|^2 \right) \\ &+ \frac{(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)^2}{2\varepsilon} \left( \sum_{l=0}^k \Delta \max\{\|\bar{G}_l\|^2, \|\bar{\bar{G}}_l\|^2\} \right) + \frac{\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2}{2\varepsilon} \left( \sum_{l=0}^k \Delta \|F_{l+\frac{1}{2}}\| \max\{\|\bar{G}_l\|, \|\bar{\bar{G}}_l\|\} \right). \end{aligned}$$

Применим  $\varepsilon$ -неравенство ( $\|u\|\|v\| \leq \varepsilon\|u\|^2 + \|v\|^2/4\varepsilon$  для произвольного  $\varepsilon > 0$ ) для  $\varepsilon = 1/(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)$ , получим

$$\|z_{k+1}\|_A^2 \leq \|z_0\|_A^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_{l=0}^k \Delta \|F_{l+\frac{1}{2}}\|^2 \right) + \frac{5(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)^2}{8\varepsilon} \left( \sum_{l=0}^k \Delta \max\{\|\bar{G}_l\|^2, \|\bar{\bar{G}}_l\|^2\} \right). \quad (5.14)$$

Из соотношений (5.4) и (5.5) следует, что  $\|\bar{G}_l\| \leq \max(\|g_0\|, \|g_1\|)$ ,  $\|\bar{\bar{G}}_l\| \leq \max(\|g_2\|, \|g_3\|)$ . Тогда оценим сверху выражение

$$\begin{aligned} \frac{5(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)^2}{8\varepsilon} \left( \sum_{l=0}^k \Delta \max\{\|\bar{G}_l\|^2, \|\bar{\bar{G}}_l\|^2\} \right) &\leq \frac{5a^4(h_1^2 + h_2^2)^2 8h_1^2 h_2^2}{8h_1^4 h_2^4 \Delta^2 a^4 \delta_{\min}} 2(\theta - t_0) \\ \times \max(\|g_0\|^2, \|g_1\|^2, \|g_2\|^2, \|g_3\|^2) &\leq 10 \frac{\theta - t_0}{\delta_{\min}} \max(\|g_0\|^2, \|g_1\|^2, \|g_2\|^2, \|g_3\|^2) \left( \frac{h_1^2 + h_2^2}{\Delta h_1 h_2} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

**Предположение 1.** Существует константа  $K$  такая, что  $h_1^2 + h_2^2 \leq K \Delta h_1 h_2$ .

Используя предположение 1, неравенство (5.15) можно записать в виде

$$\frac{5(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2)^2}{8\varepsilon} \left( \sum_{l=0}^k \Delta \max\{\|\bar{G}_l\|^2, \|\bar{\bar{G}}_l\|^2\} \right) \leq 10 \frac{\theta - t_0}{\delta_{\min}} \max(\|g_0\|^2, \|g_1\|^2, \|g_2\|^2, \|g_3\|^2) K^2.$$

Таким образом неравенство (5.14) преобразуется в следующее:

$$\|z_{k+1}\|_A^2 \leq \|z_0\|_A^2 + \left( \sum_{l=0}^k \Delta \|F_{l+\frac{1}{2}}\|^2 \right) + G, \quad (5.16)$$

где  $G = 10(\theta - t_0) \max(\|g_0\|^2, \|g_1\|^2, \|g_2\|^2, \|g_3\|^2) K^2 / \delta_{\min}$  — положительная константа, не зависящая от  $\Delta$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ . Если хотя бы одно из первых двух слагаемых отлично от нуля, например,  $\|z_0\|_A > 0$ , то обозначим через  $L_1 = 1 + G/\|z_0\|_A$ , значит, неравенство (5.16) преобразуется в следующее

$$\|z_{k+1}\|_A^2 \leq L_1 \|z_0\|_A^2 + \left( \sum_{l=0}^k \Delta \|F_{l+\frac{1}{2}}\|^2 \right). \quad (5.17)$$

Если же два первых слагаемых равны нулю, то мы получаем однородную задачу с нулевым начальным условием. Данная задача по теореме существования и единственности (см. [1])

имеет решение только в случае нулевых граничных условий, и это решение тождественно равно нулю. Таким образом из оценки (5.17) следует, что

$$\|z_{k+1}\|_A \leq \sqrt{L_1} \|z_0\|_A + \left( \sum_{l=0}^k \Delta \|F_{l+\frac{1}{2}}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применим к обеим частям уравнения (5.1) оператор  $A^{-1} > 0$ . Получим

$$\tilde{B}(z_{k+1} - z_k)/\Delta + \tilde{A}z_k = A^{-1}F_{k+1/2}, \quad k = 0, \dots, M-1,$$

где  $\tilde{A} = E$ ,  $\tilde{B} = A^{-1} + \Delta E/2 + \Delta^2 A^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2/4$ . Так как  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $A^{-1}$  — положительные и самосопряженные операторы в конечномерном гильбертовом пространстве, то по предыдущим рассуждениям получаем, что  $\tilde{B} > \varepsilon A^{-1} + \Delta E/2$ . Поэтому по [7, гл. VI, § 2, теорема 10] имеет место оценка

$$\|z_{k+1}\| \leq \sqrt{L_1} \|z_0\| + \left( \sum_{l=0}^k \Delta \|F_{l+\frac{1}{2}}\|_{A^{-1}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом схема (5.1) устойчива по начальным данным и по правой части при условии, что существует константа  $K$  такая, что  $h_1^2 + h_2^2 \leq K \Delta h_1 h_2$ .

Определим функцию точных значений соотношениями

$$w_k = \left( u(x_1, y_1, t_k), u(x_1, y_2, t_k), \dots, u(x_{N_1-1}, y_{N_2-1}, t_k) \right)^T \in Z, \quad k = 0, \dots, M-1.$$

Стартовые значения модели можно взять равными функции точных значений

$$z_j = w_j = \left( \varphi(x_1, y_1, t_j), \varphi(x_1, y_2, t_j), \dots, \varphi(x_{N_1-1}, y_{N_2-1}, t_j) \right)^T, \quad j = -m, \dots, 0.$$

Определения невязки без интерполяции (2.12) в схеме переменных направлений для уравнения теплопроводности и невязки с интерполяцией (3.3) в общей схеме существенно отличаются. Однако справедлива теорема, которая связывает эти два определения.

**Теорема 3.** Пусть невязка метода в смысле (2.12) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , функции  $F_k^{ij}$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  липшицев и имеет порядок погрешности  $\Delta^{p_0}$  на точном решении. Тогда невязка с интерполяцией в смысле (3.3) имеет порядок  $\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ .

**Доказательство.** Запишем определение невязки в смысле (3.3)

$$d_n = (w_{n+1} - S w_n)/\Delta - \Phi \left( t_n, I(\{w_i\}_{-m}^n), \Delta \right), \quad n = 0, \dots, M-1.$$

Так как  $B$  — линейный оператор и существует  $B^{-1}$ , то  $B^{-1}$  тоже является линейным оператором. В конечномерном пространстве линейный оператор является ограниченным, следовательно,  $B$  и  $B^{-1}$  являются ограниченными.

Для каждой компоненты вектора  $w$  получаем

$$\begin{aligned} \|d_n^{ij}\| &= \|B^{-1} B d_n^{ij}\| = \left\| B^{-1} \left[ B(u(x_i, y_j, t_{n+1}) - S u(x_i, y_j, t_n))/\Delta - B \Phi(t_n, I(\{u(x_i, y_j, t_l)\}_n), \Delta) \right] \right\| \\ &= \left\| B^{-1} \left[ B(u(x_i, y_j, t_{n+1}) - (E - \Delta B^{-1} A)u(x_i, y_j, t_n))/\Delta - B B^{-1} F_{n+\frac{1}{2}}^{ij} (I(\{u(x_i, y_j, t_l)\}_n)) \right] \right\|, \end{aligned}$$

где  $n = 0, \dots, M-1$ . Добавим и вычтем  $F_{n+1/2}^{ij}(u_{t_{n+1/2}}(x_i, y_j, (\cdot)))$ . Получим

$$\|d_n^{ij}\| = \left\| B^{-1} \left[ B(u(x_i, y_j, t_{n+1}) - u(x_i, y_j, t_n))/\Delta + A u(x_i, y_j, t_n) - F_{n+1/2}^{ij}(u_{t_{n+1/2}}(x_i, y_j, (\cdot))) \right] \right\|$$

$$-F_{n+1/2}^{ij} (I(\{u(x_i, y_j, t_l)\}_{n+1/2})) + F_{n+1/2}^{ij} (u_{t_{n+1/2}}(x_i, y_j, (\cdot))) \Big] \Big\|, \quad n = 0, \dots, M-1.$$

Из определения порядка невязки метода в смысле (2.12), липшицевости  $F$  по  $v(\cdot)$ , ограниченности оператора  $B^{-1}$  и определения порядка оператора интерполяции-экстраполяции получаем для  $n = 0, \dots, M-1$

$$\|d_n^{ij}\| \leq C_{B^{-1}} C_1 (\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}) + C_{B^{-1}} L_f C_2 \Delta^{p_0} \leq C_{B^{-1}} (C_1 + L_f C_2) (\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}).$$

Следовательно, норма вектора  $d_n$  удовлетворяет неравенству

$$\|d_n\| = \max_{ij} \|d_n^{ij}\| \leq C_{B^{-1}} (C_1 + L_f C_2) (\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}).$$

Из данного соотношения вытекает заключение теоремы.  $\square$

Вложение схемы переменных направлений для уравнения теплопроводности в общую схему проведено, и из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть невязка метода в смысле (2.12) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , функции  $F_k^{ij}$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  липшицев и имеет порядок погрешности  $\Delta^{p_0}$  на точном решении. Также будем считать, что выполняется предположение 1. Тогда метод сходится с порядком  $\Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ .

С помощью данной теоремы получаем, что метод переменных направлений с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок  $\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2$ .

## 6. Численное моделирование

Пример 1. Тестовый пример.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + bu(t - \tau, x, y) + \cos(t)(x^2 + y^2) - 4a^2 \sin(t) - b \sin(t - \tau)(x^2 + y^2),$$

$t \in [0, \pi/2]$ ,  $x \in [0, 5]$ ,  $y \in [0, 5]$ ,  $\tau = 0.1$ ;  $a, b$  — параметры. Начальные условия:

$$u(s, x, y) = \sin(s)(x^2 + y^2), \quad -\tau \leq s \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq y \leq 5.$$

Граничные условия:

$$u(t, x, 0) = \sin(t)x^2, \quad u(t, x, 5) = \sin(t)(x^2 + 25), \quad u(t, 0, y) = \sin(t)y^2, \quad u(t, 5, y) = \sin(t)(25 + y^2).$$

Точным решением является  $u(t, x, y) = \sin(t)(x^2 + y^2)$ . Параметры уравнения были взяты следующим образом:  $a = b = 10$ . Далее приведены результаты численного эксперимента. На рис. 1 и 2 изображена разница между приближенным и точным решениями уравнения.

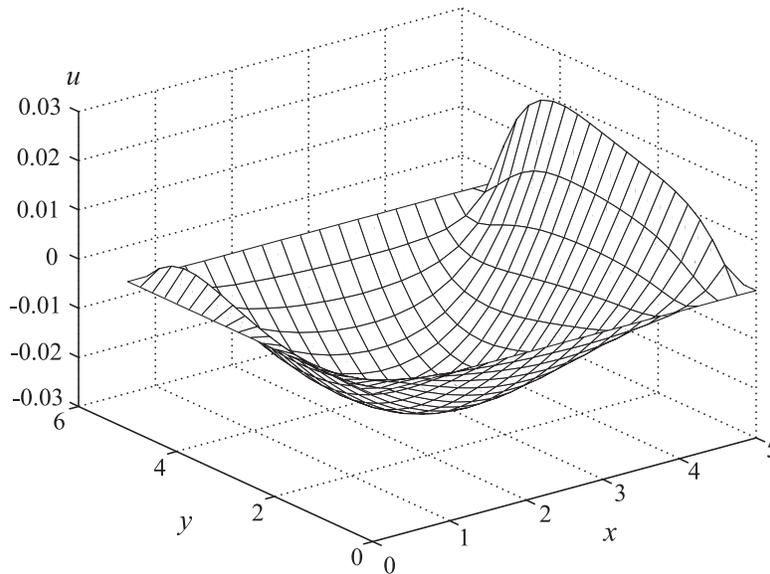


Рис. 1. Число точек разбиения по  $t$ :  $M = 25$ , по  $x$ :  $N_1 = 20$ , по  $y$ :  $N_2 = 20$ .

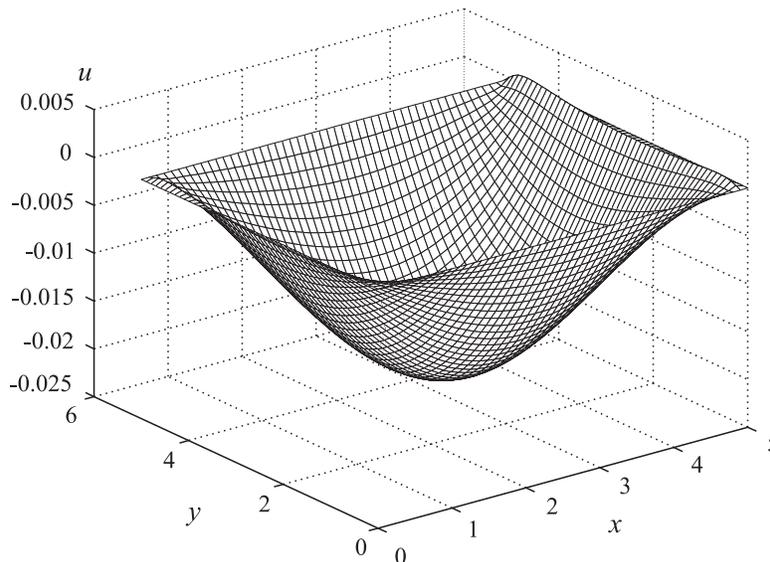


Рис. 2. Число точек разбиения по  $t$ :  $M = 100$ , по  $x$ :  $N_1 = 50$ , по  $y$ :  $N_2 = 50$ .

Пример 2. Уравнение Колмогорова — Пискунова — Петровского с запаздыванием.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \alpha u(t, x, y) (1 - u(t - \tau, x, y)),$$

$t \in [1, 10]$ ,  $x \in [0, 2]$ ,  $y \in [0, 4]$ ,  $\tau = 1$ ;  $\alpha$  — параметр. Начальные условия:

$$u(s, x, y) = s, \quad 1 - \tau \leq s \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4.$$

Граничные условия:

$$u(t, x, 0) = 1, \quad u(t, x, 4) = 1, \quad u(t, 0, y) = 1, \quad u(t, 2, y) = 1.$$

Параметр уравнения был взят следующим образом:  $\alpha = 10$ . Далее приведены результаты численного эксперимента. На рис. 3, 4 и 5 изображено приближенное решение уравнения.

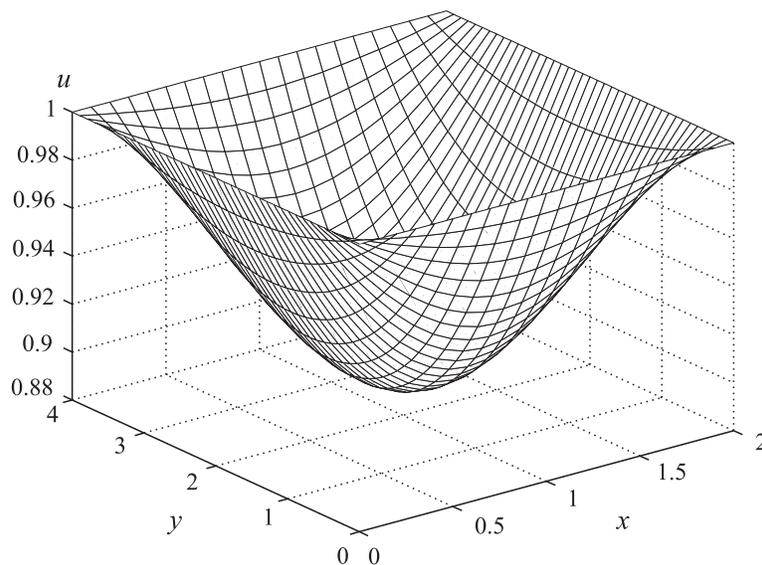


Рис. 3. Решение при  $t = 2,5$ . Число точек разбиения по  $t$ :  $M = 400$ , по  $x$ :  $N_1 = 20$ , по  $y$ :  $N_2 = 40$ .

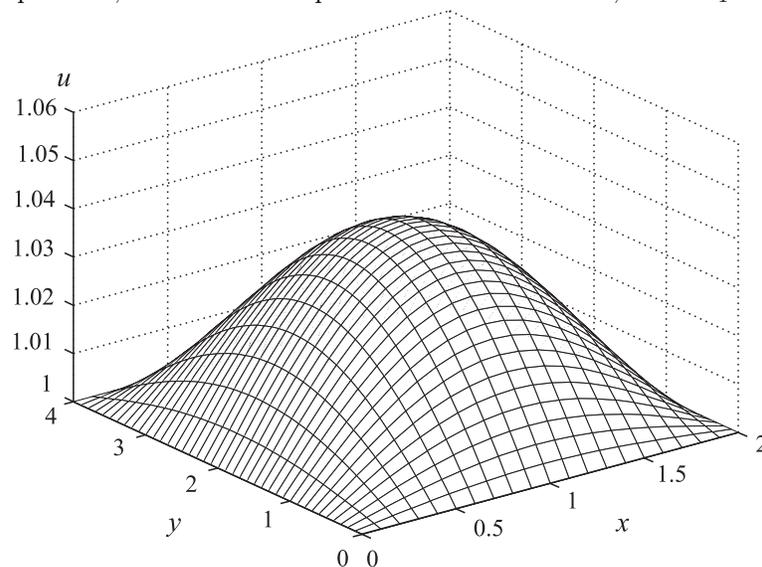


Рис. 4. Решение при  $t = 3,5$ . Число точек разбиения по  $t$ :  $M = 400$ , по  $x$ :  $N_1 = 20$ , по  $y$ :  $N_2 = 40$ .

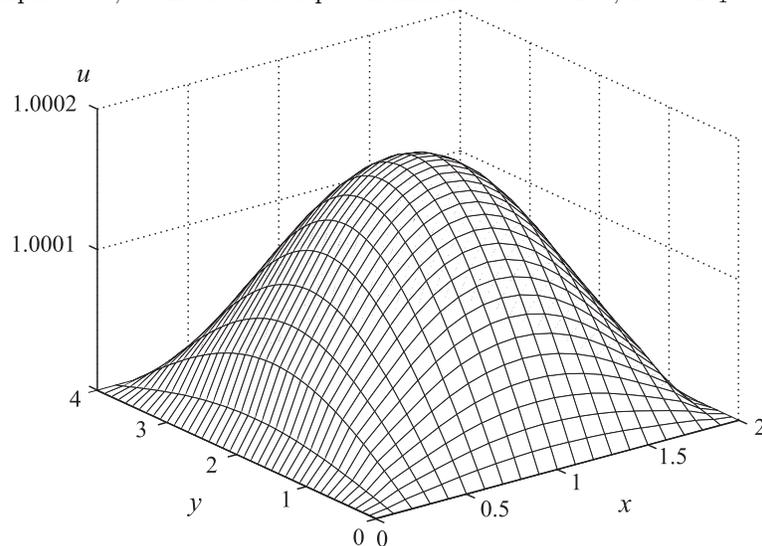


Рис. 5. Решение при  $t = 8$ . Число точек разбиения по  $t$ :  $M = 400$ , по  $x$ :  $N_1 = 20$ , по  $y$ :  $N_2 = 40$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Wu J.** Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996. 429 p.
2. **Tavernini L.** Finite difference approximations for a class of semilinear volterra evolution problems // SIAM J. Numer. Anal. 1977. Vol. 14, no. 5. P. 931–949.
3. **Ким А.В., Пименов В.Г.** *i*-гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 256 с.
4. **Пименов В.Г.** Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вест. Удм. ун-та. 2008. Вып. 2. С. 113–116. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
5. **Пименов В.Г., Ложников А.Б.** Алгоритмы численного решения уравнения теплопроводности с последствием // Проблемы динамического управления. М.: ВМК МГУ, 2008. Вып. 3. С. 161–169.
6. **Лекомцев А.В.** Метод переменных направлений для численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 2(36). С. 8–13.
7. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
8. **Пименов В.Г.** Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 105–114.
9. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.

Лекомцев Андрей Валентинович  
аспирант  
программист  
Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького  
e-mail: lekom@olympus.ru

Поступила 02.11.2009

Пименов Владимир Германович  
д-р физ.-мат. наук, проф.  
зав. кафедрой  
Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького  
e-mail: vladimir.pimenov@usu.ru

УДК 517.977

**ПРЯМОЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЛЯПУНОВСКИХ ВЕЛИЧИН  
ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ<sup>1</sup>****Г. А. Леонов, Н. В. Кузнецов, Е. В. Кудряшова**

В работе предложен прямой метод изучения поведения двумерных динамических систем в критическом случае, когда линейная часть системы имеет два чисто мнимых собственных числа. Данный метод позволяет строить приближения решений системы и времени “оборота” траектории в виде конечного ряда по степеням начального данного. С помощью символьных вычислений и предложенного метода в работе построены первые приближения решения и выписаны выражения для первых трех ляпуновских величин системы Льенара.

Ключевые слова: ляпуновские величины, предельный цикл, символьные вычисления

G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, E. V. Kudryashova. A direct method for calculating Lyapunov values of two-dimensional dynamical systems.

A direct method is proposed for studying the behavior of two-dimensional dynamical systems in the critical case when the linear part of the system has two purely imaginary eigenvalues. This method allows one to construct approximations to solutions of the system and to the “turn-round” time of the trajectory in the form of a finite series in powers of the initial datum. With the help of symbolic computations and the proposed method, first approximations of a solution are constructed and expressions for the first three Lyapunov quantities of the Liénard system are written.

Keywords: Lyapunov quantities, limit cycle, symbolic computations.

С вычислением ляпуновских величин связан важный в инженерной механике вопрос о поведении динамической системы при значениях параметра, близких к границе области устойчивости. Следуя работе Н.Н. Баутина [1], различают “опасные” и “безопасные” границы, малое нарушение которых влечет малые (обратимые) или необратимые изменения состояния системы. Такие изменения соответствуют, например, сценариям “мягкого” и “жесткого” возбуждения колебаний, рассмотренным А.А. Андроновым [2]. В классических работах А. Пуанкаре [3] и А.М. Ляпунова [4] для анализа поведения системы вблизи границы устойчивости был развит метод вычисления так называемых ляпуновских величин (или констант Пуанкаре — Ляпунова), которые определяют поведение системы вблизи границы. Так, в случае двух комплексно сопряженных характеристических корней двумерной системы в окрестности стационарной точки (критический случай) при пересечении границы устойчивости от отрицательных значений действительной части корней к положительным, если первая не равная нулю ляпуновская величина отрицательна, то появляется единственный устойчивый предельный цикл, который стягивается в точку при обратном изменении параметра, что соответствует “безопасной” границе. Напротив, если первая не равная нулю ляпуновская величина положительна, при малых изменениях траектория может отойти бесконечно далеко от состояния равновесия, что соответствует “опасной” границе.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке проектов: Совета по грантам Президента РФ, федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2009-2013 гг.), аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 гг.)”.

Отметим также, что малые возмущения системы с несколькими равными нулю ляпуновскими величинами могут приводить [5–13] к появлению нескольких “малых” предельных циклов (малых вибраций).

При вычислении ляпуновских величин обычно рассматривается двумерная достаточно гладкая система с двумя чисто мнимыми собственными числами линейной части

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= x + g(x, y).\end{aligned}\tag{0.1}$$

Задачи большей размерности (два чисто мнимых корня и остальные отрицательные), если следовать результату А.М. Ляпунова [4], могут быть сведены к двумерной.

В настоящее время существует несколько методов [12, 13, 15, 16] нахождения ляпуновских величин и их компьютерных реализаций, которые позволяют определять ляпуновские величины в виде символьных выражений, зависящих от коэффициентов разложения правых частей уравнений системы. Эти методы различаются по сложности алгоритмов и компактности получаемых символьных выражений. Первый метод нахождения ляпуновских величин был предложен в работе [3]. Этот метод основывается на том факте, что линейная часть системы имеет очевидный интеграл  $x^2 + y^2$ , и заключается в последовательном построении не зависящего от времени интеграла для приближений системы.

Другой подход к вычислению ляпуновских величин связан с нахождением приближения решения системы. Классический подход [4] использует замены для приведения времени оборота всех траекторий к константе (как, например, в полярной системе координат) и процедуры рекуррентного построения приближений решений.

В данной статье предложен прямой метод вычисления ляпуновских величин, основанный на построении приближений решений (в виде конечной суммы по степеням начальных данных) в исходной евклидовой системе координат и во временной области. Преимуществом данного метода является идеологическая простота и наглядность. Этот подход также может применяться для решения задачи различения изохронного центра, так как позволяет найти приближение времени “оборота” траектории в зависимости от начальных данных.

## 1. Нахождение приближения решения

Следуя работам [14, 15], будем предполагать, что правые части имеют непрерывные частные производные  $(n+1)$ -го порядка в открытой окрестности  $U$  радиуса  $R_U$  точки  $(x, y) = (0, 0)$

$$f(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathbb{C}^{(n+1)}(U).\tag{1.1}$$

И, следовательно, в окрестности  $U$  имеет место представление

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \sum_{k+j=2}^n f_{kj} x^k y^j + o((|x| + |y|)^n) = f_n(x, y) + o((|x| + |y|)^n), \\ g(x, y) &= \sum_{k+j=2}^n g_{kj} x^k y^j + o((|x| + |y|)^n) = g_n(x, y) + o((|x| + |y|)^n).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Условие существования  $(n+1)$ -х частных производных по  $x$  и  $y$  для  $f$  и  $g$  будет использоваться для простоты изложения и может быть ослаблено.

Рассмотрим решение  $x(t, x(0), y(0))$ ,  $y(t, x(0), y(0))$  системы (0.1) с начальными данными

$$x(0) = 0, \quad y(0) = h, \quad h \in [0, H],\tag{1.3}$$

где  $H$  достаточно мало, и обозначим

$$x(t, h) = x(t, 0, h), \quad y(t, h) = y(t, 0, h).$$

**Лемма 1.** *Существует такое положительное число  $H \in (0, R_U)$ , что для всех  $h \in [0, H]$  решение  $(x(t, h), y(t, h))$  определено при  $t \in [0, 4\pi]$ .*

Справедливость леммы вытекает из наличия двух чисто мнимых собственных чисел матрицы линейного приближения системы (0.1).

Отсюда согласно [17] справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Если выполнено условие гладкости (1.1), то*

$$x(\cdot, \cdot), y(\cdot, \cdot) \in \mathbb{C}^{(n+1)}([0, 4\pi] \times [0, H]). \quad (1.4)$$

Далее мы будем использовать гладкость функций  $f$  и  $g$  и следовать первому методу Ляпунова на конечном интервале времени [18, 19].

Введем обозначения  $\tilde{x}_{h^k}(t) = \frac{\partial^k x(t, \eta)}{k! \partial^k \eta}|_{\eta=0}$ ,  $\tilde{y}_{h^k}(t) = \frac{\partial^k y(t, \eta)}{k! \partial^k \eta}|_{\eta=0}$ . Суммы

$$x_{h^m}(t, h) = \sum_{k=1}^m \tilde{x}_{h^k}(t) h^k, \quad y_{h^m}(t, h) = \sum_{k=1}^m \tilde{y}_{h^k}(t) h^k$$

будем называть  $m$ -м приближением решения системы по  $h$ .

Из условия гладкости правых частей системы следует, что для каждого фиксированного  $t$  решение системы может быть представлено в виде

$$x(t, h) = x_{h^m}(t, h) + o(h^m), \quad y(t, h) = y_{h^m}(t, h) + o(h^m), \quad (1.5)$$

где остаточные члены  $o(h^m)$  принадлежат  $\mathbb{C}^1$  и равномерно ограничены по времени на рассматриваемом множестве  $([0, 4\pi] \times [0, H])$ .

Подставим представление (1.5) для  $m = 1$  в систему (0.1). В полученных равенствах приравняем коэффициенты при  $h^1$  и, учитывая (1.2), получим

$$\frac{d\tilde{x}_{h^1}(t)}{dt} = -\tilde{y}_{h^1}(t), \quad \frac{d\tilde{y}_{h^1}(t)}{dt} = \tilde{x}_{h^1}(t). \quad (1.6)$$

Отсюда, учитывая условия на начальные данные (1.3), для первого приближения по  $h$  решения  $(x(t, h), y(t, h))$  имеем

$$x_{h^1}(t, h) = \tilde{x}_{h^1}(t)h = -h \sin(t), \quad y_{h^1}(t, h) = \tilde{y}_{h^1}(t)h = h \cos(t). \quad (1.7)$$

Аналогично, для нахождения второго приближения  $(x_{h^2}(t, h), y_{h^2}(t, h))$  подставим представление

$$x(t, h) = x_{h^2}(t, h) + o(h^2), \quad y(t, h) = y_{h^2}(t, h) + o(h^2) \quad (1.8)$$

в формулу (1.2) для  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ . Заметим, что коэффициенты при  $h^2$  в получившихся выражениях для  $f$  и  $g$  (обозначим их через  $u_{h^2}^f$  и  $u_{h^2}^g$  соответственно) в силу (1.2) будут зависеть только от  $\tilde{x}_{h^1}(t)$  и  $\tilde{y}_{h^1}(t)$ , т. е. с учетом (1.7) будут известными функциями времени и не будут зависеть от неизвестных функций  $\tilde{x}_{h^2}(t)$  и  $\tilde{y}_{h^2}(t)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x_{h^2}(t, h) + o(h^2), y_{h^2}(t, h) + o(h^2)) &= u_{h^2}^f(t)h^2 + o(h^2), \\ g(x_{h^2}(t, h) + o(h^2), y_{h^2}(t, h) + o(h^2)) &= u_{h^2}^g(t)h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Подставляя (1.8) в систему (0.1) для определения  $\tilde{x}_{h^2}(t)$  и  $\tilde{y}_{h^2}(t)$ , имеем

$$\frac{d\tilde{x}_{h^2}(t)}{dt} = -\tilde{y}_{h^2}(t) + u_{h^2}^f(t), \quad \frac{d\tilde{y}_{h^2}(t)}{dt} = \tilde{x}_{h^2}(t) + u_{h^2}^g(t).$$

**Лемма 3.** Для решений системы

$$\frac{d\tilde{x}_{h^k}(t)}{dt} = -\tilde{y}_{h^k}(t) + u_{h^k}^f(t), \quad \frac{d\tilde{y}_{h^k}(t)}{dt} = \tilde{x}_{h^k}(t) + u_{h^k}^g(t)$$

с начальными данными

$$\tilde{x}_{h^k}(0) = 0, \quad \tilde{y}_{h^k}(0) = 0 \quad (1.9)$$

имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{h^k}(t) &= u_{h^k}^g(0) \cos(t) + \cos(t) \int_0^t \cos(\tau) ((u_{h^k}^g(\tau))' + u_{h^k}^f(\tau)) d\tau \\ &\quad + \sin(t) \int_0^t \sin(\tau) ((u_{h^k}^g(\tau))' + u_{h^k}^f(\tau)) d\tau - u_{h^k}^g(t), \\ \tilde{y}_{h^k}(t) &= u_{h^k}^g(0) \sin(t) + \sin(t) \int_0^t \cos(\tau) ((u_{h^k}^g(\tau))' + u_{h^k}^f(\tau)) d\tau \\ &\quad - \cos(t) \int_0^t \sin(\tau) ((u_{h^k}^g(\tau))' + u_{h^k}^f(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Равенства (1.10) проверяются непосредственно дифференцированием.

Повторяя указанную процедуру определения коэффициентов  $\tilde{x}_{h^k}$  и  $\tilde{y}_{h^k}$ , функций  $u_{h^k}^f(t)$  и  $u_{h^k}^g(t)$ , по формуле (1.10) последовательно найдем приближения  $(x_{h^k}(t, h), y_{h^k}(t, h))$  для  $k = 1, \dots, n$ . При  $h \in [0, H]$  и  $t \in [0, 4\pi]$  имеем

$$\begin{aligned} x(t, h) &= x_{h^n}(t, h) + o(h^n) = \sum_{k=1}^n \tilde{x}_{h^k}(t) h^k + o(h^n), \\ y(t, h) &= y_{h^n}(t, h) + o(h^n) = \sum_{k=1}^n \tilde{y}_{h^k}(t) h^k + o(h^n). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь в силу леммы 2

$$\tilde{x}_{h^k}(\cdot), \tilde{y}_{h^k}(\cdot) \in \mathbb{C}^n([0, 4\pi]), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.12)$$

и оценка  $o(h^n)$  является равномерной  $\forall t \in [0, 4\pi]$ . Из (1.9) и выбора начальных данных в (1.6) получим

$$x_{h^k}(0, h) = x(0, h) = 0, \quad y_{h^k}(0, h) = y(0, h) = h, \quad k = 1, \dots, n.$$

## 2. Определение времени “оборота” траектории

Рассмотрим для начального данного  $h \in (0, H]$ , следуя [20], время  $T(h)$  первого пересечения решения  $(x(t, h), y(t, h))$  с полупрямой  $\{x = 0, y > 0\}$ . Доопределим (по непрерывности) функцию  $T(h)$  в нуле:  $T(0) = 2\pi$ . Так как первое приближение решения согласно (1.7) пересечет полупрямую через время  $2\pi$ , то время пересечения представимо в виде

$$T(h) = 2\pi + \Delta T(h),$$

где  $\Delta T(h) = O(h)$ . В силу определения  $T(h)$

$$x(T(h), h) = 0. \quad (2.1)$$

Так как  $x(\cdot, \cdot)$  имеет согласно (1.4) непрерывные частные производные по обоим аргументам до порядка  $n$  включительно и  $\dot{x}(t, h) = -\cos(t)h + o(h)$ , то по теореме о неявной функции  $T(\cdot)$

$n$  раз дифференцируема. Можно показать, что  $T(h)$  дифференцируема  $n$  раз также и в нуле. Тогда

$$T(h) = 2\pi + \sum_{k=1}^n \tilde{T}_k h^k + o(h^n), \quad \tilde{T}_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k T(h)}{dh^k}. \quad (2.2)$$

Подставляя выражение (2.2) для  $t = T(h)$  в правую часть первого уравнения (1.11) и обозначая коэффициент при  $h^k$  через  $\tilde{x}_k$ , получим разложение  $x(T(h), h)$  по степеням  $h$

$$x(T(h), h) = \sum_{k=1}^n \tilde{x}_k h^k + o(h^n).$$

Чтобы выразить коэффициенты  $\tilde{x}_k$  через коэффициенты  $\tilde{T}_k$ , положим  $t = 2\pi + \tau$  в (1.11)

$$x(2\pi + \tau, h) = \sum_{k=1}^n \tilde{x}_{h^k}(2\pi + \tau) h^k + o(h^n). \quad (2.3)$$

В силу условия гладкости (1.12)

$$\tilde{x}_{h^k}(2\pi + \tau) = \tilde{x}_{h^k}(2\pi) + \sum_{m=1}^n \tilde{x}_{h^k}^{(m)}(2\pi) \frac{\tau^m}{m!} + o(\tau^n), \quad k = 1, \dots, n.$$

Подставим полученное представление в выражение (2.3) для решения  $x(2\pi + \tau, h)$  при  $\tau = \Delta T(h)$  и соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $h$ . Поскольку  $(\Delta T(h))^n = O(h^n)$ , то, учитывая выражение (2.2) для  $T(h)$ , согласно (2.1) получим

$$\begin{aligned} h : \quad & 0 = \tilde{x}_1 = \tilde{x}_{h^1}(2\pi), \\ h^2 : \quad & 0 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_{h^2}(2\pi) + \tilde{x}'_{h^1}(2\pi) \tilde{T}_1, \\ \dots & \\ h^n : \quad & 0 = \tilde{x}_n = \tilde{x}_{h^n}(2\pi) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда можно последовательно определить коэффициенты  $\tilde{T}_{k=1, \dots, n-1}$ , так как в выражение для  $\tilde{x}_k$  могут входить только коэффициенты  $\tilde{T}_{1 \leq m < k}$  и множитель  $\tilde{x}'_{h^1}(2\pi)$  перед  $\tilde{T}_{k-1}$  равен  $-1$ .

Проведем аналогичную процедуру для определения коэффициентов  $\tilde{y}_k$  разложения

$$y(T(h), h) = \sum_{k=1}^n \tilde{y}_k h^k + o(h^n).$$

Для этого подставим представление

$$\tilde{y}_{h^k}(2\pi + \Delta T(h)) = \tilde{y}_{h^k}(2\pi) + \sum_{m=1}^n \tilde{y}_{h^k}^{(m)}(2\pi) \frac{\Delta T(h)^m}{m!} + o(h^n), \quad k = 1, \dots, n$$

в выражение

$$y(2\pi + \Delta T(h), h) = \sum_{k=1}^n \tilde{y}_{h^k}(2\pi + \Delta T(h)) h^k + o(h^n).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $h$ , получим равенства

$$\begin{aligned} h : \quad & \tilde{y}_1 = \tilde{y}_{h^1}(2\pi), \\ h^2 : \quad & \tilde{y}_2 = \tilde{y}_{h^2}(2\pi) + \tilde{y}'_{h^1}(2\pi) \tilde{T}_1, \\ \dots & \\ h^n : \quad & \tilde{y}_n = \tilde{y}_{h^n}(2\pi) + \dots \end{aligned}$$

для последовательного определения  $\tilde{y}_{k=1, \dots, n}$ , где  $\tilde{y}_{h^k=1, \dots, n}(\cdot)$  и  $\tilde{T}_{k=1, \dots, n-1}$  — определенные выше величины.

Таким образом, для  $n = 2m + 1$  при условии  $f(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot) \in \mathbb{C}^{(2m+2)}(U)$  нами последовательно найдены приближения решения  $(x(t, h), y(t, h))$  в момент времени  $t = T(h)$  первого пересечения с полупрямой  $\{x = 0, y > 0\}$  с точностью до  $o(h^{2m+1})$  и приближение самого времени  $T(h)$  с точностью до  $o(h^{2m})$ . Если при этом  $\tilde{y}_k = 0$  для  $k = 2, \dots, 2m$ , то  $\tilde{y}_{2m+1}$  называется  $m$ -й ляпуновской величиной  $L_m$ . Заметим, что согласно теореме Ляпунова первый коэффициент разложения  $\tilde{y}_k$ , отличный от нуля, всегда имеет нечетный номер, и знак  $\tilde{y}_k$  (ляпуновской величины) при достаточно малых начальных данных  $h$  определяет качественное поведение (закрутку, раскрутку) траектории  $(x(t, h), y(t, h))$  на плоскости.

### 3. Приближения решения и ляпуновские величины для системы Лъенара

Для исследования предельных циклов двумерных систем часто возможно использовать сведение к системе Лъенара специального вида [21]. Так для квадратичных систем такое сведение [22] позволяет проводить асимптотическое интегрирование системы и получать аналитические условия существования “больших” предельных циклов [23].

Используя рассмотренные выше методы, найдем приближения решения системы Лъенара

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + g_{x1}(x)y + g_{x0}(x).\end{aligned}$$

Здесь  $g_{x1}(x) = g_{11}x + g_{21}x^2 \dots$ ,  $g_{x0}(x) = g_{20}x^2 + g_{30}x^3 \dots$ .

Тогда для приближения решения имеем

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{h1}(t) &= -\sin(t), \\ \tilde{x}_{h2}(t) &= \frac{1}{3} \left( -g_{11} \sin(t) \cos(t) + \sin(t)g_{11} - g_{20} \cos(t)^2 + 2 \cos(t)g_{20} - g_{20} \right), \\ \tilde{x}_{h3}(t) &= \frac{1}{72} \left( -9 \sin(t)g_{11}^2 \cos(t)^2 + 9g_{30} \sin(t) \cos(t)^2 + 6 \sin(t) \cos(t)^2 g_{20}^2 + 16g_{11}^2 \sin(t) \cos(t) \right. \\ &\quad - 32 \sin(t) \cos(t)g_{20}^2 - 4 \sin(t)g_{20}^2 - 9 \sin(t)g_{21}t + 9 \sin(t)g_{11}g_{20}t - 10 \sin(t)g_{11}^2 + 18 \sin(t)g_{30} \\ &\quad + 48g_{11}g_{20} \cos(t)^2 + 30 \cos(t)g_{20}^2 t + 3 \cos(t)g_{11}^2 t - 15g_{11}g_{20} \cos(t)^3 \\ &\quad \left. - 33g_{11} \cos(t)g_{20} - 27 \cos(t)g_{30}t + 9 \cos(t)g_{21} - 9g_{21} \cos(t)^3 \right); \\ \tilde{y}_{h1}(t) &= \cos(t), \\ \tilde{y}_{h2}(t) &= \frac{1}{3} \left( -2g_{20} \sin(t) \cos(t) + 2 \sin(t)g_{20} - g_{11} + 2g_{11} \cos(t)^2 - \cos(t)g_{11} \right), \\ \tilde{y}_{h3}(t) &= \frac{1}{72} \left( -27g_{21} \cos(t)^2 \sin(t) + 18 \sin(t)g_{21} + 30 \sin(t)g_{20}^2 t - 27 \sin(t)g_{30}t + 3 \sin(t)g_{11}^2 t \right. \\ &\quad + 96g_{11}g_{20} \cos(t) \sin(t) - 42 \sin(t)g_{11}g_{20} - 45 \sin(t)g_{11}g_{20} \cos(t)^2 - 11g_{11}^2 \cos(t) - 14 \cos(t)g_{20}^2 \\ &\quad + 27g_{30} \cos(t) - 18 \cos(t)^3 g_{20}^2 + 27g_{11}^2 \cos(t)^3 - 27g_{30} \cos(t)^3 + 16g_{11}^2 - 9 \cos(t)g_{11}g_{20}t \\ &\quad \left. + 64 \cos(t)^2 g_{20}^2 + 9 \cos(t)g_{21}t - 32g_{11}^2 \cos(t)^2 - 32g_{20}^2 \right).\end{aligned}$$

Для первых трех ляпуновских величин имеем

$$L_1 = -\frac{\pi}{4}(g_{20}g_{11} - g_{21}).$$

Если  $g_{21} = g_{20}g_{11}$ , то  $L_1 = 0$  и

$$L_2 = \frac{\pi}{24}(3g_{41} - 5g_{20}g_{31} - 3g_{40}g_{11} + 5g_{20}g_{30}g_{11}).$$

Если  $g_{41} = \frac{5}{3}g_{20}g_{31} + g_{40}g_{11} - \frac{5}{3}g_{20}g_{30}g_{11}$ , то  $L_2 = 0$  и

$$L_3 = -\frac{\pi}{576} \left( 70g_{20}^3g_{30}g_{11} + 105g_{20}g_{51} + 105g_{30}^2g_{11}g_{20} + 63g_{40}g_{31} \right. \\ \left. - 63g_{11}g_{40}g_{30} - 105g_{30}g_{31}g_{20} - 70g_{20}^3g_{31} - 45g_{61} - 105g_{50}g_{11}g_{20} + 45g_{60}g_{11} \right).$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баутин Н.Н.** Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Л.: ОГИЗ; Гостехиздат, 1949. 164 с.
2. **Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С. Е.** Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
3. **Poincare H.** Memoire sur les courbes definiées par lesequations diffeentielles // J. de. Mathematiques Pures et Appliquees. 1885. Vol. 1, № 4. P. 167–244.
4. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. Харьков: Изд-во Харьков. мат. об-ва, 1892. 250 с.
5. **Баутин Н.Н.** О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояний равновесия типа фокус или центр // Мат. сб. 1952. Т. 30(72), вып. 1. С. 181–196. (Transl. into English by F. V. Atkinson and published by the AMS in 1954 as translation number 100, 396–413; reprint, AMS Transl. 1962. № 5(1). P. 396–413.)
6. **Lloyd N.G.** Limit cycles of polynomial systems — some recent developments // New direction in dynamical systems. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Vol. 127. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. P. 192–234.
7. **Li J.** Hilbert’s 16th problem and bifurcation of planar polynomial vector fields // Int. J. Bifurcation Chaos. 2003. № 13. P. 47–106.
8. **Chavarriga J., Grau M.** Some open problems related to 16th Hilbert problem // Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.) 2003. № 9. P. 1–26.
9. **Lynch S.** Symbolic computation of Lyapunov quantities and the second part of Hilbert’s sixteenth problem // Differential equations with symbolic computations. Basel: Birkhäuser, 2005. P. 1–26.
10. **Dumortier F., Llibre J., Artes J.** Qualitative theory of planar differential systems. Berlin: Springer, 2006. 302 p.
11. **Christopher C. & Li Ch.** Limit cycles of differential equations. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007. 171 p. (Advanced courses in mathematics CRM Barcelona.)
12. **Gine J.** On some problems in planar differential systems and Hilbert’s 16th problem // Chaos, Solutions and Fractals. 2007. Vol. 31, iss. 5. P. 1118–1134.
13. **Yu P., Chen G.** Computation of focus values with applications // Nonlinear Dynamics. 2008. Vol. 51, no. 3. P. 409–427.
14. **Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В.** Циклы двумерных систем. Компьютерные вычисления, доказательства, эксперименты // Вест. Санкт-Петерб. гос. ун-та. 2008. Сер 1. № 3. С. 25–61.
15. **Kuznetsov N.V., Leonov G.A.** Lyapunov quantities, limit cycles and strange behavior of trajectories in two-dimensional quadratic systems // J. of Vibroengineering. 2008. Vol. 10, iss. 4. P. 460–467.
16. **Kuznetsov N.V.** Stability and oscillations of dynamical systems: theory and applications. Jyväskylä: Jyväskylä University Printing House, 2008. 120 p.
17. **Hartman P.** Ordinary differential equation. New York: John Willey & Sons, 1964. 612 p.
18. **Lefschetz S.** Differential equations: Geometric theory. New York: Interscience Publishers, 1957. 388 с.
19. **Cesari L.** Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Berlin: Springer, 1959. 271 p.
20. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 525 с.
21. **Черкасс Л.А.** О циклах уравнения  $y' = Q_2(x, y)/P_2(x, y)$  // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 3. С. 1422–1437.

22. **Леонов Г.А.** Two-dimensional quadratic systems as a Lienard equation // Differ. Equations Dynam. Syst. 1997. Vol. 5, №3/4. P. 289–297.
23. **Леонов Г.А.** Предельные циклы уравнения Льенара с разрывными коэффициентами // Докл. РАН. Сер. Механика. 2009. Т. 426, № 1. С. 47–50.

Леонов Геннадий Алексеевич  
д-р физ.-мат. наук  
чл.-корр. РАН  
декан  
Санкт-Петербургский гос. ун-т  
e-mail: leonov@math.spbu.ru

Поступила 04.03.2009

Кузнецов Николай Владимирович  
канд. физ.-мат. наук  
доцент  
Санкт-Петербургский гос. ун-т  
e-mail: kuznetsov@math.spbu.ru

Кудряшова Елена Владимировна  
канд. физ.-мат. наук  
науч. сотрудник  
Санкт-Петербургский гос. ун-т

УДК 519.6

**СИГМА-КОМПАКТНОСТЬ МЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР  
И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ЧАСТОТ К ВЕРОЯТНОСТЯМ<sup>1</sup>****Е. Г. Пыткеев, М. Ю. Хачай**

В статье исследуются топологические свойства псевдометрического пространства, определяемого мерой. Доказывается критерий компактности и  $\sigma$ -компактности этого пространства. В качестве следствия выводится новое достаточное условие равномерной сходимости (по классу событий) частот к вероятностям.

Ключевые слова: метрическая булева алгебра, сигма-компактность, равномерная сходимость частот к вероятностям по классу событий.

E. G. Pytkeev, M. Yu. Khachai. Sigma-compactness of metric Boolean algebras and uniform convergence of frequencies to probabilities.

The topological properties of a pseudometric space defined by a measure are investigated. Criteria of compactness and  $\sigma$ -compactness of this space are proved. A new sufficient condition for the uniform convergence (over an event class) of frequencies to probabilities is proved as a corollary.

Keywords: metric Boolean algebra, sigma-compactness, uniform convergence of frequencies to probabilities over an event class.

**Введение**

Задача обучения распознаванию образов является одним из наиболее активно изучаемых объектов современной теоретической информатики. В простейшем случае распознавания двух классов задача может быть сформулирована следующим образом. Задано вероятностное пространство  $(\Xi \times \Omega, \mathcal{A}, P)$ . Здесь  $\Xi$  интерпретируется как множество результатов измерительных экспериментов, проводимых над объектами, подлежащими распознаванию, и, как правило, является подмножеством  $\mathbb{R}^n$ . Множество  $\Omega = \{0, 1\}$  играет роль множества номеров (названий) классов (образов), и  $\mathcal{A}$  — некоторая  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Xi \times \Omega$ , например, порожденная борелевской  $\sigma$ -алгеброй над  $\mathbb{R}^n$ . Особенность задачи обучения состоит в том, что пространство элементарных исходов  $\Xi \times \Omega$  и  $\sigma$ -алгебра событий предполагаются известными исследователю, а вероятностная мера  $P$  — нет. Точнее, мера  $P$  задается конечной выборкой “заверенных” результатов измерений

$$(x_1, \omega_1), \dots, (x_l, \omega_l), \quad (1)$$

называемой обучающей. Дополнительно задается множество индикаторных функций

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : \Xi \rightarrow \Omega : \alpha \in \Lambda\},$$

называемых решающими правилами. Для каждого  $\alpha \in \Lambda$  множество  $S_\alpha = \{(x, \omega) : \omega \neq f_\alpha(x)\}$  предполагается измеримым, т. е. обладает вероятностью  $P(S_\alpha)$ , интерпретируемой как вероятность неверной классификации правилом  $f_\alpha$ . Задача обучения распознаванию состоит в поиске решающего правила, обладающего наименьшей вероятностью ошибочной классификации

$$\min \left\{ P(S_\alpha) \equiv \int_{\Xi \times \Omega} (w - f_\alpha(x))^2 dP(x, \omega) : \alpha \in \Lambda \right\}. \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 07-07-00168 и 09-01-00139), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2081.2008.1), Программы фундаментальных исследований Президиума РАН и Математического Отделения РАН.

Если мера  $P$  известна, то задача (2) является задачей вариационного исчисления и может быть (при некоторых допущениях) решена аналитически. Соответствующее оптимальное решение называется байесовым классификатором. В общем случае, когда мера  $P$  задана выборкой (1), задача требует дополнительной формализации.

Метод минимизации эмпирического риска [1] является одним из общепризнанных и хорошо исследованных подходов к построению такой формализации. В рамках данного подхода предлагается каждому решающему правилу (событию  $S_\alpha$ ) сопоставить частоту  $\nu(S_\alpha)$  ошибок классификации, вычисленную по обучающей выборке (1), и для поиска приближенного решения задачи (2) перейти к решению задачи

$$\min \left\{ \nu(S_\alpha) \equiv \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l (\omega_i - f_\alpha(x_i))^2 : \alpha \in \Lambda \right\}. \quad (3)$$

Задача (3) вполне формализована и разрешима при произвольной выборке (1). К сожалению, ее оптимальное решение  $\alpha^* = \alpha^*((x_1, \omega_1), \dots, (x_l, \omega_l))$  зависит от случайной выборки (1) и, вообще говоря, не обязано являться решением исходной задачи (2), даже приближенным.

Говорят, что задача (3) *корректно аппроксимирует* задачу (2), если

$$P(S_{\alpha^*}) \xrightarrow{P} \inf_{\alpha \in \Lambda} P(S_\alpha)$$

при устремлении длины выборки к бесконечности.

Естественным достаточным условием корректной аппроксимируемости задачи (2) задачей (3) является условие равномерной сходимости частот к вероятностям по классу событий  $S_\alpha$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть  $(X, \mathcal{A}, P)$  — вероятностное пространство и  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  — произвольный класс событий. Говорят, что имеет место равномерная сходимость частот к вероятностям по классу  $\mathcal{B}$ , если выполнено одно из условий

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} |\nu(B) - P(B)| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{или} \quad \sup_{B \in \mathcal{B}} |\nu(B) - P(B)| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$$

при стремлении  $l \rightarrow \infty$ . В первом случае говорят о сходимости по вероятности, а во втором — почти наверное.

Очевидно, наличие равномерной сходимости (почти наверное) частот к вероятностям для произвольного конечного класса  $\mathcal{B}$  следует из усиленного закона больших чисел. Для бесконечных классов известен критерий, доказанный В.Н. Вапником и А.Я. Червоненкисом [1], связывающий наличие равномерной сходимости с условием подлинейного роста энтропии класса  $\mathcal{B}$ , а также ряд достаточных условий [1, 2], основанных на оценках емкости (VCD) класса событий. Однако практическое использование критерия затруднено неизвестностью исходной вероятностной меры, используемой при вычислении энтропии, а достаточные условия ориентированы на наихудший случай и потому излишне осторожны.

В данной работе предлагается новый подход к выводу достаточных условий равномерной по классу событий сходимости частот к вероятностям, опирающийся исключительно на топологические свойства индуцированной им  $\sigma$ -алгебры.

## 1. Псевдометрика, определяемая мерой

Пусть  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  — измеримое пространство,  $\mu$  — неотрицательная конечная счетно-аддитивная мера. Как известно, мера  $\mu$  порождает псевдометрику

$$\rho_\mu(A, B) = \mu(A \Delta B) \equiv \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A),$$

разбивающую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{A}$  на классы эквивалентности

$$(\forall A, B \in \mathcal{A}) (A \sim B) \Leftrightarrow (\rho_\mu(A, B) = 0).$$

Псевдометрика  $\rho_\mu$  известна как расстояние Фреше — Никодима, а определяемое ей метрическое пространство  $((\mathcal{A}/\sim), \rho_\mu)$  является метрической булевой алгеброй. В данном разделе исследуются свойства исходного псевдометрического пространства  $(\mathcal{A}, \rho_\mu)$ . Некоторые из приведенных ниже утверждений известны или могут быть получены в качестве следствия из более общих результатов, справедливых, например, для метрических решеток (см., например, [4]). Тем не менее из соображений удобства изложения они также приводятся с доказательством.

**Теорема 1.** *Пространство  $(\mathcal{A}, \rho_\mu)$  полно.*

**Доказательство.** Пусть  $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$  — произвольная фундаментальная последовательность. Докажем ее сходимость к подходящему элементу  $\mathcal{A}$ . Рассмотрим произвольную последовательность положительных чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

для которой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. По определению фундаментальной последовательности, существует подпоследовательность  $\{B_n\} = \{A_{k_n}\}$ , обладающая свойством

$$\rho_\mu(B_n, B_{n+1}) < a_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Поскольку для доказательства сходимости  $\{A_n\}$  достаточно обосновать сходимость  $\{B_n\}$ , перейдем к рассмотрению этой последовательности. Определим  $B$  равенством

$$B = \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$$

и убедимся в том, что

$$\rho_\mu(B_n, B) = \mu(B_n \setminus B) + \mu(B \setminus B_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Поскольку последовательность  $\{C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k\}_{n=1}^{\infty}$  убывающая, то  $B \subset C_n$  и

$$\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n),$$

в силу счетной аддитивности  $\mu$ . Зафиксировав произвольное  $\varepsilon > 0$ , выберем  $N = N(\varepsilon)$  так, чтобы

$$\max \left\{ \sum_{k=N}^{\infty} a_k, \mu(C_N) - \mu(B) \right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбранное  $N$  искомо. В самом деле, для произвольного  $n > N$

$$\mu(B_n \setminus B) \leq \mu \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \setminus B \right) = \mu(C_n \setminus B) = \mu(C_n) - \mu(B) \leq \mu(C_N) - \mu(B) < \varepsilon/2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mu(B \setminus B_n) &= \mu \left( \bigcap_{t=1}^{\infty} \bigcup_{k=t}^{\infty} B_k \setminus B_n \right) \leq \mu \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k \setminus B_n \right) = \mu \left( \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \left( \bigcup_{k=n}^m B_k \setminus \bigcup_{j=n}^{m-1} B_j \right) \right) \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu \left( \bigcup_{k=n}^m B_k \setminus \bigcup_{j=n}^{m-1} B_j \right) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu \left( \bigcup_{k=n}^{m-1} B_k \cup B_m \setminus \bigcup_{j=n}^{m-1} B_j \cup B_{m-1} \right) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu(B_m, B_{m-1}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_{\mu}(B_{k+1}, B_k) < \sum_{k=n}^{\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом,

$$\rho_{\mu}(B, B_n) = \mu(B_n \setminus B) + \mu(B \setminus B_n) < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Получим условия, необходимые и достаточные для компактности и  $\sigma$ -компактности пространства  $(\mathcal{A}, \rho_{\mu})$ . По теореме Хаусдорфа, справедливой для псевдометрических пространств, компактность полного пространства  $(\mathcal{A}, \rho_{\mu})$  эквивалентна существованию конечной  $\varepsilon$ -сети (для каждого  $\varepsilon > 0$ ). Пространство  $(\mathcal{A}, \rho_{\mu})$  называется  $\sigma$ -компактным, если найдется не более чем счетное семейство компактов  $\{\mathcal{C}_n\}$  такое, что  $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{A}$  и  $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{C}_n$ .

Напомним еще несколько необходимых определений.

**О п р е д е л е н и е 2.** Элемент  $A \in \mathcal{A}$  называется *атомом* меры  $\mu$ , если  $\mu(A) > 0$  и

$$(\forall B \in \mathcal{A}, B \subset A) (\mu(B) = \mu(A)) \vee (\mu(B) = 0).$$

Пусть  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  — семейство попарно не эквивалентных атомов. Очевидно,  $\mathcal{A}'$  не более чем счетно. Кроме того, без ограничения общности можно полагать, что  $\mathcal{A}'$  дизъюнктно. Введем обозначение

$$X' = X \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A.$$

**О п р е д е л е н и е 3.** Мера  $\mu$  называется (*чисто*) *атомической*, если  $\mu(X') = 0$ . Мера  $\mu$  называется *безатомной*, если  $\mathcal{A}' = \emptyset$ .

Опишем несколько важных для дальнейших рассуждений свойств безатомной конечной  $\sigma$ -аддитивной меры.

**Лемма 1.** Пусть мера  $\mu$  безатомная. Справедливы следующие соотношения. 1. Для произвольного  $\alpha > 0$  и произвольного  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A) > 0$ , найдется элемент  $B \in \mathcal{A}$ ,  $B \subset A$ , такой, что  $0 < \mu(B) \leq \alpha$ . 2. Для произвольного  $\varepsilon \in (0, \mu(X)]$  существует разбиение  $F_1 \cup \dots \cup F_n = X$ ,  $n = n(\varepsilon)$ , такое, что  $\mu(F_i) \leq \varepsilon$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Без ограничения общности всюду в доказательстве полагаем, что  $\mu(X) > 0$ .

1. Предположим от противного, что для некоторого  $A_1 \in \mathcal{A}$  условие не выполнено. Тогда, в частности,  $\mu(A_1) > \alpha$ . Поскольку  $A_1$  — не атом, найдется  $B_1 \in \mathcal{A}$ ,  $B_1 \subset A_1$ , такой, что  $0 < \mu(B_1) < \mu(A_1)$ . По предположению, справедливы неравенства  $\mu(B_1) > \alpha$  и  $\mu(A_1 \setminus B_1) > \alpha$ . Элемент  $A_2 = A_1 \setminus B_1$  также не является атомом, следовательно, существует  $B_2 \in \mathcal{A}$ ,  $B_2 \subset A_2$  такой, что  $\min\{\mu(B_2), \mu(A_2 \setminus B_2)\} > \alpha$ . Продолжая процесс по индукции, построим дизъюнктную последовательность  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ , для каждого элемента которой выполнено неравенство  $\mu(B_k) > \alpha$ . Но тогда для  $X \supset \bigcup_k B_k$ , в силу счетной аддитивности меры  $\mu$ , получаем

$$\mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_k B_k\right) = \infty,$$

что противоречит условию конечности меры.

2. Зафиксируем произвольное  $\varepsilon \in (0, \mu(X)]$ . Для каждого  $A \in \mathcal{A}$  введем обозначение

$$\beta(A) = \sup \{ \mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A, \mu(B) \leq \varepsilon \}.$$

По доказанному выше,

$$(\mu(A) > 0) \Rightarrow (\beta(A) \in (0, \varepsilon]). \quad (4)$$

Выберем произвольный элемент  $F_1 \in \mathcal{A}$  так, чтобы  $0 < \mu(F_1) \leq \beta(X) \leq \varepsilon$ . Пусть элементы  $F_1, \dots, F_k$  построены. Если  $\mu(X \setminus \bigcup_{i=1}^k F_i) \leq \varepsilon$ , искомое разбиение  $F_1 \cup \dots \cup F_k \cup (X \setminus \bigcup_{i=1}^k F_i)$  найдено. В противном случае выберем произвольный элемент  $F_{k+1} \in \mathcal{A}$  так, чтобы

$$F_{k+1} \subset \left( X \setminus \bigcup_{i=1}^k F_i \right) \text{ и } \frac{1}{2} \beta \left( X \setminus \bigcup_{i=1}^k F_i \right) \leq \mu(F_{k+1}) \leq \varepsilon.$$

По построению,  $F_{k+1} \cap F_i = \emptyset$  для каждого  $i \in \mathbb{N}_k$ .

Пусть последовательность  $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$  построена, и  $F_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ . Для произвольного натурального  $n$  справедливы неравенства

$$\beta(F_0) \leq \beta \left( X \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i \right) \leq 2\mu(F_{n+1}).$$

В силу счетной аддитивности меры, ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i)$  сходится, следовательно,  $\mu(F_n) \rightarrow 0$ , откуда  $\beta(F_0) = 0$  и, ввиду (4),  $\mu(F_0) = 0$ . Выберем  $n$  так, чтобы  $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(F_i) < \varepsilon$ . Элементы

$$F_1, \dots, F_n, \bigcup_{i=n+1}^{\infty} F_i \cup F_0$$

образуют искомое разбиение. Лемма доказана.

Заметим, что в более общей формулировке лемма 2 известна (см., например, [3]) как лемма Сакса.

**Лемма 2.** Пусть мера  $\mu$  безатомная. Найдется элемент  $A \in \mathcal{A}$  такой, что

$$\mu(A) = \frac{\mu(X)}{2}.$$

**Доказательство.** Исключим из рассмотрения случай  $\mu(X) = 0$ , при котором справедливость утверждения леммы очевидна. Положим  $A_0 = \emptyset$  и  $\alpha_1 = \mu(X)/2$ . По лемме 2 существует конечное разбиение  $F_1^1 \cup \dots \cup F_{n(1)}^1 = X$  такое, что

$$\alpha_1 \geq \mu(F_1^1) \geq \dots \geq \mu(F_{n(1)}^1).$$

Пусть

$$m(1) = \max \left\{ p : \sum_{i=1}^p \mu(F_i^1) \leq \frac{\mu(X)}{2} - \mu(A_0) \right\} \text{ и } A_1 = A_0 \cup \bigcup_{i=1}^{m(1)} F_i^1.$$

В общем случае пусть для  $k \geq 1$  найден элемент  $A_k$ . Если  $\mu(A_k) = \mu(X)/2$ , лемма доказана. В противном случае положим

$$\alpha_{k+1} = \min \left\{ \frac{\mu(X)}{2} - \mu(A_k), \frac{\mu(X)}{2^{k+1}} \right\}$$

и построим разбиение  $F_1^{k+1} \cup \dots \cup F_{n(k+1)}^{k+1}$  множества  $F_{m(k)+1}^k$  так, что

$$\alpha_{k+1} \geq \mu(F_1^{k+1}) \geq \dots \geq \mu(F_{n(k+1)}^{k+1}),$$

после чего определим

$$m(k+1) = \max \left\{ p : \sum_{i=1}^p \mu(F_i^{k+1}) \leq \frac{\mu(X)}{2} - \mu(A_k) \right\} \text{ и } A_{k+1} = A_k \cup \bigcup_{i=1}^{m(k+1)} F_i^{k+1}.$$

Пусть построена последовательность  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ . По построению, данная последовательность возрастающая, и

$$0 \leq \frac{\mu(X)}{2} - \mu(A_n) \leq \mu(F_{m(n)+1}^n) \leq \frac{\mu(X)}{2^n}.$$

Следовательно, в силу счетной аддитивности меры  $\mu$ ,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \frac{\mu(X)}{2}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть  $\mu(X) > 0$  и мера  $\mu$  безатомная. Существует последовательность  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$  такая, что  $\mu(S_n) > 0$  и  $\rho_{\mu}(S_i, S_j) \geq \mu(X)/2$  для произвольных  $i \neq j$ .

**Доказательство.** Индуктивно применяя лемму 2, для каждого  $k \in \mathbb{N}$  введем обозначение  $I(k) = \{0, \dots, 2^k - 1\}$  и построим конечное семейство

$$\mathcal{B}(k) = \{B_p^k \in \mathcal{A} : p \in I(k)\}.$$

Элементы  $B_0^1$  и  $B_1^1$  выберем так, чтобы

$$B_0^1 \cup B_1^1 = X, \quad B_0^1 \cap B_1^1 = \emptyset \quad \text{и} \quad \mu(B_0^1) = \mu(B_1^1) = \frac{\mu(X)}{2}.$$

Пусть  $\mathcal{B}(i)$  построено для каждого  $i \in \mathbb{N}_k$ . Определим  $\mathcal{B}(k+1)$  по следующему правилу. Для каждого  $p \in I(k)$  выберем  $B_{2p}^{k+1}$  и  $B_{2p+1}^{k+1}$  так, чтобы

$$B_{2p}^{k+1} \cup B_{2p+1}^{k+1} = B_p^k, \quad B_{2p}^{k+1} \cap B_{2p+1}^{k+1} = \emptyset \quad \text{и} \quad \mu(B_{2p}^{k+1}) = \mu(B_{2p+1}^{k+1}) = \frac{\mu(B_p^k)}{2}. \quad (5)$$

По построению, для произвольного  $k \in \mathbb{N}$  выполнены соотношения

$$\mu(B_p^k) = \frac{\mu(X)}{2^k} \quad (p \in I(k)), \quad B_s^k \cap B_t^k = \emptyset \quad (\{s, t\} \subset I(k)). \quad (6)$$

Перейдем к построению последовательности  $\{S_n\}$ . Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  определим множества  $P_k = S_{2k-1}$  и  $Q_k = S_{2k}$  равенствами

$$P_k = \bigcup_{t \in I(k-1)} B_{2t}^k \quad \text{и} \quad Q_k = \bigcup_{t \in I(k-1)} B_{2t+1}^k.$$

По построению,  $P_k, Q_k \in \mathcal{A}$  для произвольного  $k \in \mathbb{N}$ , и верны равенства

$$P_k \cap Q_k = \emptyset \quad \text{и} \quad \mu(P_k) = \mu(Q_k) = \frac{\mu(X)}{2}, \quad (7)$$

в силу (6), следовательно,  $\rho_{\mu}(P_k, Q_k) = \mu(X)$ .

Для завершения доказательства осталось показать, что для произвольных натуральных  $i < j$  справедливо неравенство

$$\min \{ \rho_{\mu}(P_i, P_j), \rho_{\mu}(Q_i, Q_j), \rho_{\mu}(P_i, Q_j), \rho_{\mu}(Q_i, P_j) \} \geq \frac{\mu(X)}{2}.$$

Покажем, что  $\rho_{\mu}(P_i, P_j) \geq \mu(X)/2$ , остальные случаи могут быть разобраны по аналогии. Рекуррентно пользуясь соотношениями (5) для  $B_{2t}^i$ , представим  $P_i$  в виде разбиения

$$P_i = \bigcup_{t \in I(i-1)} \left\{ B_{2t \times 2^{k-i+u}}^k : u \in I(k-i) \right\},$$

в точности половина элементов которого имеют четный нижний индекс, т. е. принадлежат  $P_k$ . Следовательно,

$$\mu(P_i \setminus P_k) = \frac{\mu(P_i)}{2} = \frac{\mu(X)}{4}.$$

Поскольку  $\mu(P_k) = \mu(P_i)$ , в силу (7), справедливо равенство  $\mu(P_k \setminus P_i) = \mu(P_i \setminus P_k)$ , следовательно,

$$\rho_\mu(P_i, P_k) = \mu(P_k \setminus P_i) + \mu(P_i \setminus P_k) = \frac{\mu(X)}{2}.$$

Лемма доказана.

## 2. Условия $\sigma$ -компактности пространства $(\mathcal{A}, \rho_\mu)$

Пусть мера  $\mu$  атомическая,  $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$  — семейство попарно не эквивалентных атомов, определяющих меру  $\mu$ . Тогда, очевидно, для произвольного  $A \in \mathcal{A}$

$$\mu(A) = \sum_{\mu(A \cap A_i) > 0} \mu(A_i).$$

**Теорема 2.** *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) пространство  $(\mathcal{A}, \rho_\mu)$  компактно,
- 2) пространство  $(\mathcal{A}, \rho_\mu)$   $\sigma$ -компактно,
- 3) мера  $\mu$  атомическая.

**Доказательство.** Импликация 1)  $\Rightarrow$  2) очевидна.

2)  $\Rightarrow$  3). Пусть пространство  $(\mathcal{A}, \rho_\mu)$   $\sigma$ -компактно,  $\{\mathcal{C}_n\}$  — семейство компактов,  $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{A}$  и  $\cup_n \mathcal{C}_n = \mathcal{A}$ . Пусть  $\{A_k\}$  — упомянутое выше семейство (всех) попарно не эквивалентных атомов меры  $\mu$ , и

$$Z = X \setminus \bigcup_k A_k.$$

Покажем, что мера  $\mu$  является атомической, т. е.  $\mu(Z) = 0$ .

Пусть, от противного, выполнено условие  $\mu(Z) > 0$ . По теореме 1, пространство  $(\mathcal{A}, \rho_\mu)$  полно, следовательно, по теореме Бэра, найдутся  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $T \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(T) > 0$ , и  $\varepsilon > 0$  такие, что

$$\{A \in \mathcal{A} : \rho_\mu(A, T) < \varepsilon\} \subset \mathcal{C}_{n_0}. \quad (8)$$

Возможны две альтернативы:  $\mu(Z \setminus T) > 0$  и  $\mu(Z \setminus T) = 0$ . Рассмотрим их по отдельности и в каждом случае придем к противоречию.

В самом деле, пусть  $\mu(Z \setminus T) > 0$ . Поскольку сужение меры на множество  $Z$ , а следовательно, и на  $Z \setminus T$  является безатомной мерой, то, по лемме 1, найдется подмножество  $F \subset Z \setminus T$ ,  $F \in \mathcal{A}$ , такое, что  $0 < \mu(F) < \varepsilon$ . По лемме 3, существует последовательность  $\{F_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ , для которой  $F_i \subset F$  и  $\rho_\mu(F_i, F_j) \geq \mu(F)/2$  при произвольных  $i \neq j$ . Определим  $B_i = T \cup F_i$ , тогда

$$\rho_\mu(B_i, T) = \mu(F_i) \leq \mu(F) < \varepsilon,$$

значит, в силу (8),  $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{C}_{n_0}$ . С другой стороны, для произвольных  $i \neq j$ ,

$$\rho_\mu(B_i, B_j) = \rho_\mu(F_i, F_j) \geq \frac{\mu(F)}{2},$$

следовательно, ни одна подпоследовательность последовательности  $\{B_i\}_{i=1}^\infty$  не является сходящейся, что противоречит компактности  $\mathcal{C}_{n_0}$ .

Рассмотрим случай  $\mu(Z \setminus T) = 0$ . Поскольку  $\mu(Z) > 0$ , то  $\mu(T) > 0$  и  $\mu(Z \cap T) > 0$ . Проведя рассуждения аналогично предыдущему случаю, выберем  $F \in \mathcal{A}$ ,  $F \subset Z \cap T$  так, чтобы  $0 < \mu(F) < \varepsilon$ , и построим последовательность  $\{F_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ ,  $F_i \subset F$  такую, что  $\rho_{\mu}(F_i, F_j) \geq \mu(F)/2$  (при  $i \neq j$ ). Задав последовательность  $\{B_i\}$  равенствами  $B_i = T \setminus F_i$ , в силу соотношений

$$\begin{aligned}\rho_{\mu}(B_i, T) &= \rho_{\mu}(T \setminus F_i, T) = \mu(F_i) \leq \mu(F) < \varepsilon, \\ \rho_{\mu}(B_i, B_j) &= \rho_{\mu}(T \setminus F_i, T \setminus F_j) = \rho_{\mu}(F_i, F_j) \geq \frac{\mu(F)}{2},\end{aligned}$$

придем к противоречию с компактностью  $\mathcal{C}_{n_0}$ . Следовательно, предположение о том, что  $\mu(Z) > 0$ , неверно. Импликация 2)  $\Rightarrow$  3) доказана.

3)  $\Rightarrow$  1). Пусть мера  $\mu$  атомическая,  $\mathcal{A}' = \{A_i\} \subset \mathcal{A}$  — дизъюнктное семейство попарно неэквивалентных атомов, удовлетворяющее условиям:

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}'} \mu(A_i) = \mu(X), \quad \mu(A_i) > 0.$$

Без ограничения общности полагаем

$$\mu(A_1) \geq \mu(A_2) \geq \dots$$

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и построим конечную  $\varepsilon$ -сеть  $\mathcal{N}(\varepsilon)$ . Определим  $n = n(\varepsilon)$  равным  $|\mathcal{A}'|$ , если  $\mathcal{A}'$  конечно, в противном случае выберем  $n$  так, чтобы

$$\sum_{i > n} \mu(A_i) < \varepsilon.$$

Каждому элементу  $A \in \mathcal{A}$  сопоставим множество

$$I_A = \{i \in \mathbb{N}_n : \mu(A_i \cap A) > 0\}$$

и элемент

$$V_A = \bigcup_{i \in I_A} A_i.$$

Семейство  $\mathcal{N}(\varepsilon) = \{V_A : A \in \mathcal{A}\}$  — искомая  $\varepsilon$ -сеть. В самом деле, по построению,  $|\mathcal{N}(\varepsilon)| \leq 2^n$ . Далее, для произвольного  $A \in \mathcal{A}$

$$A \Delta V_A = \left( \bigcup_{A_i: i \notin I_A} A_i \cap A \right) \cup \left( \bigcup_{i \in I_A} A_i \setminus A \right) \cup (X' \cap A).$$

Следовательно, по построению,  $\mu(A \Delta V_A) = 0$ , если  $\mathcal{A}'$  конечно, и

$$\mu(A \Delta V_A) = \mu\left(\bigcup_{i > n} A_i \cap A\right) \leq \sum_{i > n} \mu(A_i) < \varepsilon,$$

в противном случае. Импликация 3)  $\Rightarrow$  1), а вместе с ней и теорема доказаны.

Заметим, что при условии сепарабельности пространства  $(\mathcal{A}, \rho_{\mu})$  (которому, очевидно, удовлетворяют компактные и  $\sigma$ -компактные пространства) удается конструктивно описать структуру атомов меры  $\mu$ .

Пусть  $K \subset \mathcal{A}$  — не более чем счетное всюду плотное подмножество и

$$Z = X \setminus \bigcup\{A : A \in K\}.$$

Поскольку  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра,  $Z \in \mathcal{A}$ . Убедимся в том, что  $\mu(Z) = 0$ . В самом деле, для произвольного  $n \in \mathbb{N}$  найдется элемент

$$A = A(Z, n) \in K$$

такой, что  $\rho_\mu(A, Z) < 1/n$ . По выбору  $Z$ , справедливо равенство  $A \cap Z = \emptyset$ . Предположив для какого-либо натурального  $m$ , что  $\mu(Z) \geq 1/m$ , получим противоречие:

$$\frac{1}{m} > \rho_\mu(A(Z, m), Z) = \mu(A(Z, m) \setminus Z) + \mu(Z \setminus A(Z, m)) = \mu(A(Z, m)) + \mu(Z) \geq \frac{1}{m}.$$

Следовательно,  $\mu(Z) < 1/n$  при произвольном  $n \in \mathbb{N}$ , т. е.  $\mu(Z) = 0$ .

Пусть далее  $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$  — алгебра, порожденная семейством  $K$ , и

$$Z_1 = \cup\{C \in \mathcal{P} : \mu(C) = 0\}.$$

Так как алгебра  $\mathcal{P}$  не более чем счетна, а  $\mu$  — счетно-аддитивная мера, то  $\mu(Z_1) = 0$ , значит, и  $\mu(Z \cup Z_1) = 0$ . Пусть

$$X_1 = X \setminus (Z \cup Z_1) \text{ и } \mathcal{P}_1 = \{A \cap X_1 : A \in \mathcal{P}\}.$$

По построению,  $\mathcal{P}_1$  — алгебра, и для произвольного  $D \in \mathcal{P}_1$

$$(\mu(D) = 0) \Rightarrow (D = \emptyset).$$

Определим на  $X_1$  бинарное отношение  $\sim$  правилом

$$(x \sim y) \Leftrightarrow (\forall D \in \mathcal{P}_1) (\{x, y\} \subset D) \vee (\{x, y\} \cap D = \emptyset).$$

Введенное отношение, очевидно, является отношением эквивалентности. Пусть

$$(X_1 / \sim) = \{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}.$$

Заметим, что класс эквивалентности  $Y_\alpha$ , представителем которого является некоторый  $x \in X_1$ , может быть задан равенством

$$Y_\alpha = \cap\{D \in \mathcal{P}_1 : x \in D\},$$

следовательно,  $Y_\alpha \in \mathcal{A}$ , так как алгебра  $\mathcal{P}_1$  не более чем счетна. Пусть

$$\Lambda_1 = \{\alpha \in \Lambda : \mu(Y_\alpha) > 0\}.$$

Множество  $\Lambda_1$  также не более чем счетно, поскольку классы  $Y_\alpha$  попарно дизъюнкты.

**Теорема 3.** Пусть пространство  $(\mathcal{A}, \rho_\mu)$  сепарабельно, тогда множество атомов меры  $\mu$  совпадает с  $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda_1\}$  с точностью до эквивалентности.

**Доказательство.** Покажем, что для каждого  $\alpha \in \Lambda_1$  класс  $Y_\alpha$  является атомом меры  $\mu$ , т. е. для произвольного разбиения  $B_1 \cup B_2 = Y_\alpha$ ,  $\mu(B_1) \geq \mu(B_2)$ , выполнено условие  $\mu(B_2) = 0$ . В самом деле, пусть от противного найдется  $m \in \mathbb{N}$  такое, что  $\mu(B_2) \geq 1/m$ . По условию, найдется

$$A = A(B_1, m) \in K, \text{ для которого } \rho_\mu(A, B_1) < 1/m.$$

По построению  $Y_\alpha$ , либо  $A \cap Y_\alpha = \emptyset$ , либо  $A \supset Y_\alpha$ . Однако первая альтернатива невозможна, так как в этом случае  $A \cap B_1 = \emptyset$ , и, следовательно,

$$\rho_\mu(A, B_1) = \mu(A) + \mu(B_1) \geq \mu(B_2) \geq \frac{1}{m}.$$

Во втором случае также приходим к противоречию, поскольку при  $A \supset Y_\alpha$

$$\rho_\mu(A, B_1) = \mu(A \setminus B_1) \geq \mu(Y_\alpha \setminus B_1) = \mu(B_2) \geq \frac{1}{m}.$$

Таким образом,  $\mu(B_2) < 1/n$  для произвольного натурального  $n$ , т. е.  $\mu(B_2) = 0$ .

2. Для завершения доказательства достаточно показать, что множество

$$Z = X \setminus \cup\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda_1\}$$

не содержит атомов. Предположим от противного, что найдется атом  $C \in \mathcal{A}$ ,  $C \subset Z$ . Поскольку алгебра  $\mathcal{P}_1$  не более чем счетна, то множество

$$C_1 = C \setminus \cup\{C \cap D : D \in \mathcal{P}_1, \mu(C \cap D) = 0\}$$

измеримо и  $\mu(C_1) = \mu(C)$ . Выберем произвольный  $x \in C_1$  и рассмотрим содержащий его класс эквивалентности  $Y_\alpha$ . По выбору  $x \in Z$ ,  $\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_1$ , и  $\mu(Y_\alpha) = 0$ . С другой стороны, по построению  $C_1$ , для произвольного  $D \in \mathcal{P}_1$ ,  $\mu(C \cap D) > 0$ , следовательно,  $\mu(C \cap D) = \mu(C)$ , поскольку  $C$  — атом. Поэтому

$$\mu(Y_\alpha) = \mu(\cap\{D \in \mathcal{P}_1 : x \in D\}) \geq \mu(\cap\{C \cap D : D \in \mathcal{P}_1, x \in D\}) = \mu(C) > 0,$$

что противоречит выбору  $Y_\alpha$ . Теорема доказана.

Как следует из формулировки теоремы 3, ее условие явно не использует свойства множества  $X$ . Следует ожидать, что при добавлении дополнительных ограничений на его структуру, могут быть получены более точные результаты. Например, известна [5] следующая теорема.

**Теорема 4.** Пусть  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  — измеримое пространство, где  $X$  является метрическим пространством, а  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A}$  содержит борелевскую  $\sigma$ -алгебру. Тогда каждый атом меры  $\mu$  эквивалентен подходящему одноточечному множеству.

### 3. Условия равномерной по классу событий сходимости частот к вероятностям

В этом разделе мы будем дополнительно предполагать, что изучаемая мера  $\mu$  является вероятностной, и вернемся к традиционным для теории вероятностей терминологии и обозначениям. В частности, измеримое пространство будем называть вероятностным и обозначать  $(X, \mathcal{A}, P)$ , элементы  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{A}$  будем называть событиями, а значение меры  $P(A)$  для произвольного  $A \in \mathcal{A}$  — вероятностью события  $A$ . Свяжем полученные в предыдущих разделах результаты с условием равномерной сходимости частот к вероятностям по заданному классу событий  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ . Как упоминалось выше, наличие равномерной сходимости (с вероятностью 1) для произвольного конечного  $\mathcal{B}$  является прямым следствием усиленного закона больших чисел. Понятие конечно-аппроксимируемого класса, введенное А.А. Боровковым, позволяет распространить это свойство на бесконечные классы событий.

**О п р е д е л е н и е 4.** Класс событий  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  называется *конечно-аппроксимируемым*, если для произвольного  $\varepsilon \in (0, 1)$  найдутся число  $n = n(\varepsilon)$  и конечный класс  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\varepsilon) \subset \mathcal{A}$ ,  $|\mathcal{C}| = n$ , такие, что

$$(\forall B \in \mathcal{B}) (\exists C_1, C_2 \in \mathcal{C}) \quad (C_1 \subset B \subset C_2) \wedge (\rho_P(C_1, C_2) \equiv P(C_2 \setminus C_1) < \varepsilon).$$

Известна [6] следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть  $(X, \mathcal{A}, P)$  вероятностное пространство и  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  — конечно-аппроксимируемый класс событий, тогда

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} |\nu(B) - P(B)| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Заметим, что, по теореме Хаусдорфа, замыкание произвольного конечно-аппроксимируемого класса  $\mathcal{B}$  в псевдометрическом пространстве  $(\mathcal{A}, \rho_p)$  компактно. К сожалению, даже компактности класса  $\mathcal{B}$  не всегда достаточно для наличия расномерной (по этому классу) сходимости частот к вероятностям. Тем не менее справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть  $(X, \mathcal{A}, P)$  вероятностное пространство.

1. Если мера  $P$  атомическая, то равномерная сходимость частот к вероятностям имеет место по произвольному не более чем счетному классу  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ .

2. Если мера  $P$  не является атомической, то в пространстве  $(\mathcal{A}, \rho_p)$  существует не более чем счетный компакт  $\mathcal{B}$  такой, что для произвольной выборки длины  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} |\nu(B) - P(B)| = 1.$$

**Доказательство.** 1. Пусть мера  $P$  — атомическая. Исключим из рассмотрения случай конечного класса  $\mathcal{B}$ , для которого справедливость утверждения, как упоминалось выше, следует из закона больших чисел. Пусть  $\mathcal{A}' = \{A_i\} \subset \mathcal{A}$  — дизъюнктное семейство попарно не эквивалентных атомов, удовлетворяющее условиям:

$$\sum_{A_i \in \mathcal{A}'} P(A_i) = P(X), \quad P(A_i) > 0.$$

По аналогии с доказательством теоремы 2, полагаем выполненным соотношение

$$\mu(A_1) \geq \mu(A_2) \geq \dots$$

Проведем доказательство для случая счетного множества  $\mathcal{A}'$ , случай конечного множества атомов может быть рассмотрен по аналогии. Для произвольного  $\varepsilon \in (0, 1)$  выберем число  $n = n(\varepsilon)$  так, чтобы

$$\sum_{i > n} P(A_i) < \varepsilon.$$

Каждому элементу  $B \in \mathcal{B}$  сопоставим множество  $N(B) = \{i \in \mathbb{N}_n : P(A_i \cap B) > 0\}$  и события

$$E(B) = \bigcup_{i \in N(B)} A_i \setminus B \quad \text{и} \quad F(B) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus N(B)} A_i \cap B.$$

По выбору  $N(B)$ ,

$$P(E(B)) = P(F(B)) = 0.$$

Введем обозначения

$$E = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} E(B), \quad F = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} F(B), \quad G = \bigcup_{i > n} A_i.$$

В силу счетности класс  $\mathcal{B}$ ,  $P(E) = P(F) = 0$ . Сопоставим каждому событию  $B \in \mathcal{B}$  события

$$C(B) = \bigcup_{i \in N(B)} A_i \setminus E \quad \text{и} \quad D(B) = C(B) \cup F \cup G.$$

По построению,  $C(B) \subset B \subset D(B)$  и  $P(D(B) \setminus C(B)) < \varepsilon$ . Поскольку

$$|\{C(B), D(B) : B \in \mathcal{B}\}| \leq 2^{n+1},$$

класс  $\mathcal{B}$  конечно-аппроксимируемый. Следовательно, равномерная по классу  $\mathcal{B}$  сходимости частот к вероятностям, в силу теоремы 5, имеет место.

2. Пусть мера  $P$  не является атомической, т. е. существует  $Z \in \mathcal{A}$ ,  $P(Z) > 0$ , такое, что сужение  $P$  на  $Z$  (условная вероятность) является безатомной мерой. Применив процедуру, аналогичную использованной при доказательстве леммы 3, для каждого  $k \in \mathbb{N}$  определим множество  $I(k) = \{0, \dots, 2^k - 1\}$  и построим конечное семейство

$$\mathcal{B}(k) = \{B_p^k \in \mathcal{A} : B_p^k \subset Z, p \in I(k)\}.$$

Элементы  $B_0^1$  и  $B_1^1$  выберем так, чтобы

$$B_0^1 \cup B_1^1 = Z, \quad B_0^1 \cap B_1^1 = \emptyset \quad \text{и} \quad P(B_0^1) = P(B_1^1) = \frac{P(Z)}{2}.$$

Пусть  $\mathcal{B}(i)$  построено для каждого  $i \in \mathbb{N}_k$ . Определим  $\mathcal{B}(k+1)$  по следующему правилу. Для каждого  $p \in I(k)$  выберем  $B_{2p}^{k+1}$  и  $B_{2p+1}^{k+1}$  так, чтобы

$$B_{2p}^{k+1} \cup B_{2p+1}^{k+1} = B_p^k, \quad B_{2p}^{k+1} \cap B_{2p+1}^{k+1} = \emptyset \quad \text{и} \quad P(B_{2p}^{k+1}) = P(B_{2p+1}^{k+1}) = \frac{P(B_p^k)}{2}.$$

По построению, для произвольного  $k \in \mathbb{N}$  выполнены соотношения:

$$P(B_p^k) = \frac{P(Z)}{2^k} \quad (p \in I(k)), \quad B_s^k \cap B_t^k = \emptyset \quad (\{s, t\} \subset I(k)).$$

Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  определим конечное семейство

$$\mathcal{C}_k = \left\{ C_{k,I} = \bigcup_{p \in I} B_p^k : I \subset I(k), |I| = k \right\}.$$

Сформируем из элементов  $\mathcal{C}_k$  последовательность  $\{D_t\}$ , упорядочив  $C_{k,I}$  лексикографически

$$D_1 = C_{1,\{0\}}, \quad D_2 = C_{1,\{1\}}, \quad D_3 = C_{2,\{0,1\}}, \quad D_4 = C_{2,\{0,2\}}, \quad \dots, \quad D_8 = C_{2,\{2,3\}}, \quad \dots$$

Пусть  $\mathcal{D} = \{\emptyset\} \cup \{D_n\}_{n=1}^\infty$ . По построению,

$$P(C_{k,I}) = \frac{k}{2^k} P(Z),$$

следовательно,  $\rho_p(D_n, \emptyset) = P(D_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , и  $\mathcal{D}$  — компакт в пространстве  $(\mathcal{A}, \rho_p)$ . Для произвольной конечной выборки

$$x_1, \dots, x_l \tag{9}$$

из генеральной совокупности  $X$  и произвольного  $\varepsilon > 0$  укажем подходящее событие  $C_{k,I}$  такое, что  $P(C_{k,I}) < \varepsilon$ , а частота  $\nu(C_{k,I})$ , вычисленная по выборке (9), равна 1. В самом деле, выберем  $k \in \mathbb{N}$  так, чтобы выполнялись условия

$$k \geq l, \quad \frac{kP(Z)}{2^k} < \varepsilon.$$

Поскольку, по построению, элементы множества  $\mathcal{B}(k)$  образуют разбиение события  $Z$ , найдутся такие элементы

$$B_{i_1}^k, \dots, B_{i_k}^k,$$

что

$$\{x_1, \dots, x_l\} \subset B_{i_1}^k \cup \dots \cup B_{i_k}^k,$$

значит, для  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ ,  $\nu(C_{k,I}) = 1$ . При этом,  $P(C_{k,I}) < \varepsilon$ , по выбору  $k$ . Следовательно,

$$\sup_{n \rightarrow \infty} |\nu(D_n) - P(D_n)| \geq \nu(C_{k,I}) - P(C_{k,I}) > 1 - \varepsilon,$$

и теорема доказана, в силу произвольности выбора  $\varepsilon$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Условие п. 1 теоремы 6, в силу справедливости теоремы 2, эквивалентно условию  $\sigma$ -компактности пространства  $(\mathcal{A}, \rho_p)$ . Очевидно, последнее условие может быть ослаблено. Для наличия равномерной сходимости частот к вероятностям по классу  $\mathcal{B}$  достаточно  $\sigma$ -компактности пространства  $(\mathcal{A}(\mathcal{B}), \rho'_p)$ , где  $\mathcal{A}(\mathcal{B})$  —  $\sigma$ -алгебра, индуцированная классом  $\mathcal{B}$ , а  $P'$  — сужение меры  $P$  на  $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Если дополнительно к условию п. 1 теоремы 6 каждый атом меры  $P$  эквивалентен некоторому одноэлементному подмножеству  $\{x\}$  множества элементарных исходов  $X$ , то равномерная сходимость имеет место по произвольному классу событий  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ . В частности, данное утверждение верно для произвольного дискретного вероятностного пространства.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.** Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974. 528 с.
2. **Vapnik V.N.** Statistical learning theory. New York: Wiley, 1998. 740 p.
3. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 896 с.
4. **Биркгоф Г.** Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.
5. **Кадец В.М.** Курс функционального анализа. Харьков: Изд-во Харьк. национал. ун-та, 2004. 504 с.
6. **Боровков А.А.** Математическая статистика. Новосибирск: Наука; Изд-во Института математики СО РАН, 1997. 772 с.

Пыткеев Евгений Георгиевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
ведущий науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: pyt@imm.uran.ru

Поступила 15.12.2009

Хачай Михаил Юрьевич  
д-р физ.-мат. наук  
зав. отделом  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

УДК 517.977

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ПРОГРАММНОЙ ПОМЕХЕ В ФОРМАЛИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ МИНИМАКСНОГО РИСКА (СОЖАЛЕНИЯ)<sup>1</sup>

Д. А. Серков

В работе рассматривается задача оптимального управления в условиях неопределенности для системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, и терминального показателя качества. Управление и помеха стеснены геометрическими ограничениями. Задача формализуется в классах неупреждающих стратегий управления и программных помех на основе конструктивных идеальных движений и критерия минимаксного риска (сожаления) Сэвиджа. Приведены свойства используемых пучков движений и ряд соотношений, характеризующих функцию оптимального риска — элемент указанной формализации.

Ключевые слова: оптимальное управление, программные помехи, критерий Сэвиджа.

D. A. Serkov. On some properties of the control problem under a program interference in a formalization based on the minimax risk (regret) criterion.

An optimal control problem under uncertainty for a system described by an ordinary differential equation with a terminal quality criterion is considered. The control and interference are subject to geometric constraints. The problem is formalized in classes of nonanticipating control strategies and program interferences with the use of constructive ideal motions and the Savage minimax risk (regret) criterion. The properties of the used motion bundles are described and a number of relations characterizing the optimal risk function, which is an element of the formalization, are presented.

Keywords: optimal control, program interference, Savage criterion.

### Введение

Рассматривается управляемая система в условиях динамических помех. Динамика системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Управление и помеха стеснены геометрическими ограничениями. Сторона, формирующая управление, стремится минимизировать терминальный показатель качества. В отношении помехи предполагается, что она формируется программно, т. е. не зависит от состояния управляемой системы или действий управляющей стороны, и является измеримой функцией времени.

Задачи управления при программной помехе, рассматриваемые как вспомогательные, использовались для нахождения оптимального гарантированного результата и оптимальных позиционных стратегий [1–5]. Позже, в начале 1990-х такие задачи обсуждались уже как самостоятельные А. И. Субботиным и А. Г. Ченцовым и назывались задачами со “слепой” помехой.

В данной работе автор следует идеологии исследований [3–5] и продолжает рассмотрение задач оптимального управления при программной помехе, формализованных на основе критерия минимаксного риска (сожаления) Сэвиджа [8–10]. В основу формализации положены конструктивные движения [1–3], отвечающие выбранной неупреждающей стратегии управления и различным программным помехам. Рассмотрение более широкого по сравнению с позиционным класса стратегий повлекло изменения в определении пошаговых движений [3], необходимые для сохранения свойств пучков конструктивных движений, подобных полугрупповому свойству. Приведены свойства указанных пучков движений, даны интегральные представления функции оптимального риска — элемент используемой формализации — и функции,

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00313-а).

аналогичной гарантированному результату в теории, использующей минимаксный критерий, для этой же функции получены неравенства типа неравенств динамического программирования. Приводимые результаты обобщают на случай более широкого семейства неупреждающих стратегий утверждения из публикации [10], полученные для позиционных стратегий управления.

## 1. Динамика системы

Рассматривается управляемая система, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями и краевым условием

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u[\tau], v[\tau]), & x(t) = z \in \mathbb{R}^n, \\ u[\tau] \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^l, & v[\tau] \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^m, \quad \tau \in [t, \vartheta] \subseteq [t_0, \vartheta] \equiv T, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  суть компактные множества,  $\equiv$  — равенство по определению. В отношении функции  $f(\cdot)$  будем предполагать, что она непрерывна по совокупности аргументов в области  $T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ , локально липшицева по второй переменной

$$\|f(\tau, x_1, u, v) - f(\tau, x_2, u, v)\| \leq L_f \|x_1 - x_2\|, \quad (\tau, x_i) \in G, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q}, \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

где  $G$  — любое ограниченное подмножество из  $T \times \mathbb{R}^n$ ,  $L_f \equiv L_f(G)$  — константа Липшица, зависящая от множества  $G$ ; удовлетворяет условию

$$\|f(\tau, x, u, v)\| \leq \varkappa(1 + \|x\|), \quad (\tau, x, u, v) \in T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}.$$

Двойные скобки  $\|\cdot\|$  обозначают евклидову норму элемента соответствующего пространства. При указанных условиях решение  $x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot])$  задачи (1.1) существует на всем интервале  $[t, \vartheta]$  и единственно для любых измеримых по Борелю реализациях управления  $u[\cdot]$  и помех  $v[\cdot]$ , удовлетворяющих указанным в (1.1) ограничениям [7, II.4]. Множества всех измеримых реализаций управления и помехи, удовлетворяющих ограничениям (1.1), обозначим соответственно  $\mathbf{U}_T$  и  $\mathbf{V}_T$ . Для множеств сужений элементов из  $\mathbf{U}_T$  и  $\mathbf{V}_T$  на произвольный интервал  $[t_1, t_2] \subseteq T$  используем обозначения  $\mathbf{U}_{[t_1, t_2]}$  и  $\mathbf{V}_{[t_1, t_2]}$ .

Зададим произвольное компактное множество  $G_0 \subset \mathbb{R}^n$  и выделим следующее подмножество пространства состояний системы (1.1):

$$G \equiv \mathbf{cl}_{T \times \mathbb{R}^n} \left\{ (t, z) \in T \times \mathbb{R}^n \mid z = x(t, t_0, z_0, u[\cdot], v[\cdot]), z_0 \in G_0, u[\cdot] \in \mathbf{U}_T, v[\cdot] \in \mathbf{V}_T \right\}$$

(символы  $\mathbf{cl}_Z A$  обозначают слова “замыкание множества  $A$  в топологии пространства  $Z$ ”). В силу определения множество  $G$  компактно в  $T \times \mathbb{R}^n$ , и при любых  $u[\cdot] \in \mathbf{U}_T$ ,  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ ,  $(t, z) \in G$  движение  $x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot])$  не покинет  $G$  вплоть до момента  $\vartheta$ . Обозначим  $X(t, z, v[\cdot])$  замыкание множества  $\{x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot]) : u[\cdot] \in \mathbf{U}_T\}$  в пространстве  $C([t, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$  с нормой равномерной сходимости

$$X(t, z, v[\cdot]) \equiv \mathbf{cl}_{C([t, \vartheta]; \mathbb{R}^n)} \{x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot]) : u[\cdot] \in \mathbf{U}_T\}. \quad (1.3)$$

Будем обозначать  $X(t, z, v[\cdot])|_\tau$  множество позиций фазового пространства, через которые проходят движения из пучка  $X(t, z, v[\cdot])$  в некоторый момент  $\tau \in [t, \vartheta]$

$$X(t, z, v[\cdot])|_\tau \equiv \{x(\tau) \mid x(\cdot) \in X(t, z, v[\cdot])\}.$$

## 2. Стратегии и движения

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения. Пусть имеются непустое множество  $W$ , функции  $p, q : \mathbb{R} \mapsto W$  и ограниченная на  $W$  функция  $g : W \mapsto \mathbb{R}$ , а также числа  $t' \in [t, \vartheta]$  и  $\varepsilon > 0$ , тогда

$$(p, q)_{t'}[\tau] \equiv \begin{cases} p[\tau], & \tau \in [t, t'], \\ q[\tau], & \tau \in [t', \vartheta], \end{cases}$$

$$\varepsilon\text{-argsup}_{w \in W} g(w) \equiv \left\{ w' \in W \mid g(w') \geq \sup_{w \in W} g(w) - \varepsilon \right\}, \quad \operatorname{argmax}_{w \in W} g(w) \equiv \bigcap_{\varepsilon > 0} \varepsilon\text{-argsup}_{w \in W} g(w),$$

$$\varepsilon\text{-arginf}_{w \in W} g(w) \equiv \left\{ w' \in W \mid g(w') \leq \inf_{w \in W} g(w) + \varepsilon \right\}, \quad \operatorname{argmin}_{w \in W} g(w) \equiv \bigcap_{\varepsilon > 0} \varepsilon\text{-arginf}_{w \in W} g(w).$$

Обозначим  $\Delta \equiv \{\tau_i, i \in 0..n_\Delta \mid \tau_0 = t, \tau_{n_\Delta} = \vartheta, \tau_{i-1} < \tau_i, i \in 1..n_\Delta\}$  некоторое разбиение отрезка  $[t, \vartheta] \subseteq T$ , а  $\mathbf{d}(\Delta)$  — диаметр этого разбиения:  $\mathbf{d}(\Delta) \equiv \max\{\tau_i - \tau_{i-1} \mid i \in 1..n_\Delta\}$ .

Пусть для произвольного  $t \in T$  — начального момента движения системы (1.1) и произвольного  $\tau \in (t, \vartheta]$  — текущего момента движения определено отображение

$$U_{[t, \tau]} : C([t, \tau]; \mathbb{R}^n) \times \mathbf{U}_{[t, \tau]} \times \mathbf{V}_{[t, \tau]} \times \Delta \rightarrow \mathbf{U}_{[\tau, \vartheta]}. \quad (2.1)$$

Семейство этих отображений при всех указанных  $t$  и  $\tau$  назовем *стратегией* и обозначим той же буквой  $U$  без индекса. Содержательно первый аргумент отвечает истории движения системы (1.1), второй и третий — реализациям управления и помехи на временном интервале  $[t, \tau]$ , а последний — набору моментов коррекции управления на интервале  $[t, \vartheta]$ . Таким образом, мы предполагаем, что сторона, в текущий момент формирующая управляющее воздействие, имеет возможность использовать информацию о состоянии движения и значениях управления и помехи во все предыдущие моменты движения нашей управляемой системы, включая начальный. Для указания значения управления  $U_{[t, \tau]}(x(\cdot), u[\cdot], v[\cdot], \Delta)$  в заданный момент времени  $s \in [\tau, \vartheta]$  будем писать  $U_{[t, \tau]}(x(\cdot), u[\cdot], v[\cdot], \Delta)[s]$ . Множество всех стратегий вида (2.1) обозначим  $\mathbf{U}_{na}$ .

Определим движения, порожденные стратегией  $U \in \mathbf{U}_{na}$ , следуя понятию конструктивного идеального движения [3, § 6]: вначале для произвольных  $(t, z) \in G$ ,  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ ,  $\Delta$  — разбиение отрезка  $[t, \vartheta]$ , построим множество *пошаговых движений*

$$X(t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot]) \subset X(t, z, v[\cdot]),$$

порожденных *законом управления*  $\{U, \Delta\}$  и помехой  $v[\cdot]$  из начального положения  $(t, z)$ , и множество *реализаций управления*

$$\mathbf{U}(t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot]) \subset \mathbf{U}_{[t, \vartheta]},$$

случившихся при этих пошаговых движениях, следующим образом. Положим на первом шаге разбиения множество реализаций равным множеству всех допустимых управлений

$$\mathbf{U}(t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot])|_{[t, \tau_1]} = \mathbf{U}_{[t, \tau_1]}. \quad (2.2)$$

Определим множества  $\mathbf{U}(t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot])|_{[t, \tau_i]}$  для всех остальных  $\tau_i \in \Delta$  ( $i = 2..n_\Delta$ ):

$$\mathbf{U}(t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot])|_{[t, \tau_{i+1}]} \equiv \left\{ (u, u')_{\tau_i}[\cdot] \mid u[\cdot] \in \mathbf{U}(t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot])|_{[t, \tau_i]}, \right. \\ \left. u'[\cdot] = U_{[t, \tau_i]}(x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot]), u[\cdot], v[\cdot])|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} \right\}$$

и множество  $X(t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot])$ :

$$X(t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot]) \equiv \left\{ x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot]) : u[\cdot] \in U(t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot]) \right\}. \quad (2.3)$$

Определим (и обозначим  $X(t, z, U, v[\cdot])$ ) множество *конструктивных движений* как замыкание в пространстве  $C([t, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$  множества всех предельных элементов последовательностей вида

$$\left\{ x_k(\cdot) \in X(t, z_k, \{U, \Delta_k\}, v[\cdot]), k \in \mathbb{N} \mid \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - z\| = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0 \right\}.$$

Понятно, что при любых  $(t, z) \in G$ ,  $U \in \mathbf{U}_{na}$ ,  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$  выполнены включения

$$X(t, z, U, v[\cdot]) \subseteq X(t, z, v[\cdot]).$$

Для произвольных стратегий  $U, U' \in \mathbf{U}_{na}$  определим склейку  $(U, U')_{t'}$  в момент  $t'$ : пусть  $t', \tau \in [t, \vartheta]$ ,  $x(\cdot) \in C([t, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ ,  $u[\cdot] \in \mathbf{U}_{[t, \vartheta]}$ ,  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, \vartheta]}$ , положим

$$\begin{aligned} ((U, U')_{t'})_{[t, \tau]}(x(\cdot), u[\cdot], v[\cdot], \Delta)[s] \equiv \\ \begin{cases} U_{[t, \tau]}(x(\cdot), u[\cdot], v[\cdot], \Delta)[s], & \tau \in [t, t'], \\ (U_{[t, \tau]}(x(\cdot), u[\cdot], v[\cdot], \Delta), U'_{[t', \tau]}(x(\cdot), u[\cdot], v[\cdot], \Delta))_{t'}[s], & \tau \in (t', \vartheta], \end{cases} \quad s \in [t, \vartheta]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из определения склейки непосредственно следует соотношение  $(U, U')_{t'} \in \mathbf{U}_{na}$ .

**Лемма 1** (неупреждаемость управления и движений). *Для произвольных  $(t, z) \in G$ ,  $t' \in [t, \vartheta]$ ,  $U, U_1, U_2 \in \mathbf{U}_{na}$ , разбиения  $\Delta$  отрезка  $[t, \vartheta]$ ,  $v[\cdot], v_1[\cdot], v_2[\cdot] \in \mathbf{V}_T$  и  $x(\cdot) \in X(t, z, (U, U_1)_{t'}, v[\cdot])$  выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t, z, \{(U, U_1)_{t'}, \Delta\}, (v, v_1)_{t'}[\cdot])|_{[t, t']} &= \mathbf{U}(t, z, \{(U, U_2)_{t'}, \Delta\}, (v, v_2)_{t'}[\cdot])|_{[t, t']}, \\ X(t, z, \{(U, U_1)_{t'}, \Delta\}, (v, v_1)_{t'}[\cdot])|_{[t, t']} &= X(t, z, \{(U, U_2)_{t'}, \Delta\}, (v, v_2)_{t'}[\cdot])|_{[t, t']}, \\ x(\cdot)|_{[t', \vartheta]} &\in X(t', x(t'), U_1, v[\cdot]). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Доказательство леммы 1 вытекает непосредственно из определений.

**Лемма 2.** *Для произвольных  $(t, z) \in G$ ,  $t' \in [t, \vartheta]$ ,  $U \in \mathbf{U}_{na}$ ,  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, \vartheta]}$  и  $x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])$  найдется стратегия  $U' \in \mathbf{U}_{na}$  такая, что для любой  $v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t', \vartheta]}$  выполняется включение*

$$X(t', x(t'), U', v'[\cdot]) \subseteq \{y(\cdot)|_{[t', \vartheta]} \mid y(\cdot) \in X(t, z, U, (v, v')_{t'}[\cdot]), y(t') = x(t')\}. \quad (2.6)$$

**Доказательство.** Пусть последовательность пошаговых движений

$$\{x_k(\cdot) \equiv x(\cdot, t, z_k, u_k[\cdot], v[\cdot]) : k \in \mathbb{N}\}$$

сходится к конструктивному движению  $x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])$  на интервале  $[t, \vartheta]$ , т. е.

$$u_k[\cdot] \in \mathbf{U}(t, z_k, \{U, \Delta_k\}, v[\cdot]), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\Delta_k) = 0. \quad (2.7)$$

Определим стратегию  $U'$ , обладающую заявленным свойством (2.6), следующим образом. Пусть имеются произвольные  $x'(\cdot) \in C([t', \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ ,  $u'[\cdot] \in \mathbf{U}_{[t', \vartheta]}$ ,  $v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t', \vartheta]}$  и разбиение  $\Delta'$  интервала  $[t', \vartheta]$ . Положим

$$U'_{[t', \tau]}(x'(\cdot), u'[\cdot], v'[\cdot], \Delta') \equiv U_{[t, \tau]}(\bar{x}(\cdot), (u_{\bar{k}}, u')_{t'}[\cdot], (v, v')_{t'}[\cdot], \bar{\Delta}), \quad (2.8)$$

где

$$\bar{x}(\cdot) \equiv x(\cdot, t, z_{\bar{k}}, (u_{\bar{k}}, u')_{t'}[\cdot], (v, v')_{t'}[\cdot]), \quad \bar{\Delta} \equiv (\Delta_{\bar{k}} \cap [t, t']) \cup \Delta', \quad (2.9)$$

$$\bar{k} \equiv \bar{k}(\Delta') \equiv \min \{k \in \mathbb{N} \mid \mathbf{d}(\Delta_k) \leq \mathbf{d}(\Delta')\}. \quad (2.10)$$

Выберем произвольную последовательность разбиений  $\Delta'_k$  интервала  $[t', \vartheta]$  с измельчающимся шагом:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\Delta'_k) = 0$ . Рассмотрим последовательность пошаговых движений стратегии  $U'$

$$\left\{ x'_k(\cdot) \equiv x(\cdot, t', z'_k, u'_k[\cdot], v'[\cdot]) \mid u'_k[\cdot] \in \mathbf{U}(t', z'_k, \{U', \Delta'_k\}, v'[\cdot]), k \in \mathbb{N} \right\},$$

сходящуюся в  $C([t', \vartheta]; \mathbb{R}^n)$  к некоторому элементу  $x'(\cdot) \in X(t, x(t'), U', v'[\cdot])$ , и соответствующую последовательность

$$\left\{ y_k(\cdot) \equiv y(\cdot, t, z_k, u_k[\cdot], (v, v')_{t'}[\cdot]) \mid u_k[\cdot] \in \mathbf{U}(t, z_k, \{U, \bar{\Delta}_k\}, (v, v')_{t'}[\cdot]), k \in \mathbb{N} \right\}$$

пошаговых движений стратегии  $U$  на интервале  $[t, \vartheta]$ , где  $z_k \equiv z_{\bar{k}}$ ,  $\bar{\Delta}_k \equiv (\Delta_{\bar{k}} \cap [t, t']) \cup \Delta'_k$ , а значение  $\bar{k}$  выбирается по  $\Delta'_k$  из условия (2.10). Из построений сразу следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\bar{\Delta}_k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(\cdot) - y_k(\cdot)\|_{C([t, t']; \mathbb{R}^n)} = 0, \quad u_k[\tau] = u'_k[\tau], \quad \tau \in [\tau'_{1k}, \vartheta],$$

где  $\tau'_{1k}$  — второй элемент разбиения  $\Delta'_k$  (правая граница первого интервала в разбиении). Оценим расстояние между элементами этих последовательностей. При  $\tau \in [t', \vartheta]$  имеем

$$\begin{aligned} \|y_k(\tau) - x'_k(\tau)\| &\leq \|y_k(t') - z'_k\| \\ &+ \int_{t'}^{\tau'_{1k}} \left\| f(s, y_k(s), u_k[s], v'[s]) - f(s, x'_k(s), u'_k[s], v'[s]) \right\| ds \\ &+ \int_{\tau'_{1k}}^{\vartheta} \left\| f(s, y_k(s), u_k[s], v'[s]) - f(s, x'_k(s), u'_k[s], v'[s]) \right\| ds. \end{aligned}$$

Обозначив  $\varkappa$  максимум функции  $f$  на множестве  $G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$  и учитывая, что  $u'_k[s] = u_k[s]$  при  $s \in [\tau'_{1k}, \vartheta]$ , последнее неравенство можно преобразовать к виду

$$\|y_k(\tau) - x'_k(\tau)\| \leq \mu_k + \int_{t'}^{\vartheta} L_f \|y_k(s) - x'_k(s)\| ds, \quad \tau \in [t', \vartheta],$$

где  $\mu_k \equiv \|y_k(t') - x(t')\| + \|z'_k - x(t')\| + 2\varkappa \mathbf{d}(\Delta'_k)$ , а  $L_f$  — константа Липшица для функции  $f$  (см. (1.2)). Используя неравенство Гронуолла [7, теорема II.4.4], из последнего соотношения получим оценку

$$\|y_k(\tau) - x'_k(\tau)\| \leq \mu_k \left( 1 + L_f(\vartheta - t') \exp(L_f(\vartheta - t')) \right),$$

означающую, что при возрастании  $k$  пошаговые движения  $y_k(\cdot)$ ,  $x'_k(\cdot)$  неограниченно сближаются в  $C([t', \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ . Значит, последовательность  $\{y_k(\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$  сходится на всем интервале  $[t, \vartheta]$  к некоторому конструктивному движению  $y(\cdot) \in X(t, z, U, (v, v')_{t'})$  и  $y(\cdot)|_{[t', \vartheta]} = x'(\cdot)$ , что влечет выполнение включения (2.6). Доказательство закончено.

Отличием от традиционного определения пошаговых движений является включение всех допустимых реализаций управления на первом интервале разбиения (см. (2.2)). В силу указанного изменения удается получить удобное для дальнейших результатов свойство пучков движений (2.5). Для класса позиционных стратегий свойство (2.5) обеспечивается варьированием начального момента пошагового движения (см., например, [3, § 6]).

### 3. Оценка стратегии

Качество управления оценивается терминальным показателем вида

$$\gamma(x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot])) = \sigma(x(\vartheta, t, z, u[\cdot], v[\cdot])), \quad (3.1)$$

который следует минимизировать, распоряжаясь реализацией  $u[\cdot] \in \mathbf{U}_T$ . Будем предполагать функцию  $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  локально липшицевой и обозначим  $L_\sigma$  константу Липшица, подходящую для множества  $G|_\vartheta \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\vartheta, x) \in G\}$ :

$$|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| \leq L_\sigma \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in G|_\vartheta.$$

Для произвольных  $(t, z) \in G$  и  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$  *оптимальным результатом* назовем и обозначим  $\rho(t, z, v[\cdot])$  следующую величину:

$$\rho(t, z, v[\cdot]) \equiv \min_{x(\cdot) \in X(t, z, v[\cdot])} \sigma(x(\vartheta)). \quad (3.2)$$

Минимум в определении  $\rho(\cdot)$  достигается в силу непустоты и компактности в пространстве  $C([t, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$  пучка конструктивных движений  $X(t, z, v[\cdot])$  и непрерывности значений показателя качества относительно равномерной топологии этого пространства.

**О п р е д е л е н и е 1.** Назовем *риском стратегии*  $U \in \mathbf{U}_{na}$  в позиции  $(t, z) \in G$  и обозначим  $\mathbf{r}(t, z, U)$  величину

$$\mathbf{r}(t, z, U) \equiv \sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_T \\ x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])}} \{\sigma(x(\vartheta)) - \rho(t, z, v[\cdot])\}. \quad (3.3)$$

Назовем *оптимальным риском задачи управления* (1.1), (3.1) в позиции  $(t, z) \in G$  в классе  $\mathbf{U}_{na}$  (или, для краткости, *оптимальным риском в позиции*  $(t, z)$ ) и обозначим  $\mathbf{r}(t, z)$  величину

$$\mathbf{r}(t, z) \equiv \inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \mathbf{r}(t, z, U) = \inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_T \\ x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])}} \{\sigma(x(\vartheta)) - \rho(t, z, v[\cdot])\}. \quad (3.4)$$

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть задано  $\varepsilon \geq 0$ . Стратегию  $U_\varepsilon \in \mathbf{U}_{na}$  назовем  $\varepsilon$ -*оптимальной по риску в позиции*  $(t, z) \in G$ , если

$$\mathbf{r}(t, z, U_\varepsilon) \leq \mathbf{r}(t, z) + \varepsilon,$$

или (что эквивалентно), если для всех  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$  верно неравенство

$$\sup_{x(\cdot) \in X(t, z, U_\varepsilon, v[\cdot])} \sigma(x(\vartheta)) \leq \rho(t, z, v[\cdot]) + \mathbf{r}(t, z) + \varepsilon. \quad (3.5)$$

Используя обозначение

$$\alpha(t, z, v[\cdot]) \equiv \rho(t, z, v[\cdot]) + \mathbf{r}(t, z), \quad (3.6)$$

неравенство (3.5) можно также переписать в виде

$$\sup_{x(\cdot) \in X(t, z, U_\varepsilon, v[\cdot])} \sigma(x(\vartheta)) \leq \alpha(t, z, v[\cdot]) + \varepsilon.$$

Функция  $\alpha$  подобна функции оптимального гарантированного результата, возникающей в теории оптимального управления при наличии помех или неопределенностей [3–5]. В частности,

$$\alpha(\vartheta, z, v[\cdot]) = \sigma(z), \quad z \in G|_\vartheta$$

и, сохраняя (не увеличивая) значения  $\alpha$  вдоль движения системы, стратегия обеспечивает оптимальный в рассматриваемом смысле результат.

Множество всех  $\varepsilon$ -оптимальных по риску стратегий в позиции  $(t, z)$  обозначим  $\mathbf{U}_{na}^\varepsilon(t, z)$ . Из свойств нижней грани непосредственно следует, что при любых  $(t, z) \in G$ ,  $\varepsilon > 0$  выполняется соотношение

$$\mathbf{U}_{na}^\varepsilon(t, z) \neq \emptyset.$$

Стратегии из множества  $\mathbf{U}_{na}^0(t, z)$  будем называть *оптимальными по риску в позиции*  $(t, z)$ .

#### 4. Интегральное представление функций риска и функции $\alpha(\cdot)$

**Лемма 3.** При сделанных предположениях функция оптимального результата удовлетворяет условию Липшица по начальной позиции: существует константа  $L_\rho \geq 0$  такая, что для любых  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ ,  $(t_1, z_1), (t_2, z_2) \in G$  выполнены неравенства

$$|\rho(t_1, z_1, v[\cdot]) - \rho(t_2, z_2, v[\cdot])| \leq L_\rho(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|). \quad (4.1)$$

**Доказательство.** Для функции  $\rho$  неравенство (4.1) следует из ее определения (3.2) и определения множества  $X(t, z, v[\cdot])$  (см. (1.3)): эта функция является поточечной нижней гранью семейства равностепенно (по параметрам  $u[\cdot], v[\cdot]$ ) липшицевых по  $(t, z)$  функций

$$\left\{ G \ni (t, z) \rightarrow \varphi(t, z) \equiv \sigma(x(\vartheta, t, z, u[\cdot], v[\cdot])) \in \mathbb{R} : u[\cdot] \in \mathbf{U}_T \right\}.$$

В самом деле, пусть для определенности  $t_2 \geq t_1$ . При  $\tau \in [t_2, \vartheta]$  обозначим  $\Delta x(\tau) \equiv x_1(\tau) - x_2(\tau)$ , где  $x_1(\tau) \equiv x(\tau, t_1, z_1, u[\cdot], v[\cdot])$ ,  $x_2(\tau) \equiv x(\tau, t_2, z_2, u[\cdot], v[\cdot])$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|\Delta x(\tau)\| &\leq \|z_1 - z_2\| + \int_{t_1}^{t_2} \|f(s, x_1(s), u[s], v[s])\| ds \\ &+ \int_{t_2}^{\tau} \left\| f(s, x_1(s), u[s], v[s]) - f(s, x_2(s), u[s], v[s]) \right\| ds \end{aligned}$$

или

$$\|\Delta x(\tau)\| \leq \varkappa(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|) + \int_{t_2}^{\tau} L_f \|\Delta x(s)\| ds,$$

где  $\varkappa \equiv \max\{1, \|f(\tau, x, u, v)\| : (\tau, x, u, v) \in G \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}\}$ . Отсюда в силу неравенства Гроуолла [7, теорема II.4.4] для произвольного  $\tau \in [t_2, \vartheta]$  получим

$$\begin{aligned} \|\Delta x(\tau)\| &\leq \varkappa(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|) + \exp(L_f(\vartheta - t_2)) \int_{t_2}^{\tau} L_f \varkappa(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|) ds \\ &\leq \varkappa(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|) (1 + L_f(\vartheta - t_2) \exp(L_f(\vartheta - t_2))). \end{aligned}$$

Значит, для любой функции  $\varphi$  из вышеуказанного семейства и любой пары позиций  $(t_1, z_1), (t_2, z_2) \in G$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |\varphi(t_1, z_1) - \varphi(t_2, z_2)| &\equiv \left| \sigma(x(\vartheta, t_1, z_1, u[\cdot], v[\cdot])) - \sigma(x(\vartheta, t_2, z_2, u[\cdot], v[\cdot])) \right| \\ &\leq L_\sigma \|\Delta x(\vartheta)\| \leq L_\sigma \varkappa(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|) (1 + L_f(\vartheta - t_2) \exp(L_f(\vartheta - t_2))) \\ &\equiv L_\rho(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|). \end{aligned}$$

Таким образом, константа  $L_\rho$  оценивается величиной  $L_\sigma \varkappa (1 + L_f(\vartheta - t_2) \exp(L_f(\vartheta - t_2)))$ .

Пусть  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ ,  $(\tau, x) \in G$ ,  $w \in \mathbb{R}^n$ ; обозначим

$$\frac{\partial \rho(\tau, x, v[\cdot])}{\partial [1, w]} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\rho(\tau + \varepsilon, x + \varepsilon w, v[\cdot]) - \rho(\tau, x, v[\cdot])}{\varepsilon}$$

производную функции  $\rho(\cdot, v[\cdot]) : G \rightarrow \mathbb{R}$  в позиции  $(\tau, x)$  по направлению  $(1, w)$ , если предел справа существует.

Пусть  $U \in \mathbf{U}_{na}$  и  $x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])$ . Известно, что движение  $x(\cdot) : [t, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  дифференцируемо при почти всех  $\tau \in [t, \vartheta]$  (в смысле меры Лебега на множестве  $[t, \vartheta]$ ); обозначим  $\dot{x}(\tau)$  производную движения  $x(\cdot)$  в точке дифференцируемости  $\tau$ .

**Лемма 4.** При сделанных предположениях для любых  $(t, z) \in G$ ,  $U \in \mathbf{U}_{na}$ ,  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$   $x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])$  функция

$$s \mapsto \frac{\partial \rho(s, x(s), v[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(s)]}$$

почти всюду определена, измерима и интегрируема по Лебегу на интервале  $[t, \vartheta]$ , и выполняются равенства

$$\mathbf{r}(t, z, U) = \sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_T \\ x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])}} \int_t^{\vartheta} \frac{\partial \rho(s, x(s), v[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(s)]} ds, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{r}(t, z) = \inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_T \\ x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])}} \int_t^{\vartheta} \frac{\partial \rho(s, x(s), v[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(s)]} ds. \quad (4.3)$$

**Доказательство.** Пусть выбраны произвольные  $(t, z) \in G$ ,  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ ,  $U \in \mathbf{U}_{na}$  и  $x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])$ . Тогда функция  $\tau \mapsto \rho(\tau, x(\tau), v[\cdot])$  в силу леммы 3 является абсолютно непрерывной, а значит, почти всюду дифференцируемой и представимой в виде интеграла собственной производной [7, I.4.42]:

$$\rho(\tau, x(\tau), v[\cdot]) = \rho(t, x(t), v[\cdot]) + \int_t^{\tau} \rho'_s(s, x(s), v[\cdot]) ds.$$

Рассмотрим полную производную функции  $\tau \rightarrow \rho(\tau, x(\tau), v[\cdot])$  в точках  $\tau \in [t, \vartheta]$ , где существуют производные  $\dot{x}(\tau)$  и  $\rho'_\tau(\tau, x(\tau), v[\cdot])$  (множество тех  $\tau$ , где хотя бы одна из указанных производных не существует, имеет меру ноль):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\rho(\tau + \varepsilon, x(\tau + \varepsilon), v[\cdot]) - \rho(\tau, x(\tau), v[\cdot])}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\rho(\tau + \varepsilon, x(\tau) + \varepsilon \dot{x}(\tau), v[\cdot]) - \rho(\tau, x(\tau), v[\cdot])}{\varepsilon} \\ &+ \frac{\rho(\tau + \varepsilon, x(\tau + \varepsilon), v[\cdot]) - \rho(\tau + \varepsilon, x(\tau) + \varepsilon \dot{x}(\tau), v[\cdot])}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Левый предел существует и конечен. Значит, если одно из слагаемых в правом пределе сходится к конечной величине, то второе слагаемое также имеет конечное предельное значение и в сумме эти два предела равны значению предела слева. Оценим второе слагаемое. Из определения дифференцируемости функции  $x(\cdot)$  в точке  $\tau$  и неравенства (4.1) при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  получаем

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\rho(\tau + \varepsilon, x(\tau + \varepsilon), v[\cdot]) - \rho(\tau + \varepsilon, x(\tau) + \varepsilon \dot{x}(\tau), v[\cdot])}{\varepsilon} \right| \\ &\leq L_\rho \left| \frac{x(\tau + \varepsilon) - x(\tau) - \varepsilon \dot{x}(\tau)}{\varepsilon} \right| = L_\rho \left| \frac{\varepsilon O(\varepsilon)}{\varepsilon} \right| = L_\rho |O(\varepsilon)|, \end{aligned}$$

где величина  $O(\varepsilon)$  такова, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O(\varepsilon) = 0$ . Следовательно, второе слагаемое сходится к нулю при любом из указанных моментов  $\tau \in [t, \vartheta]$ . Значит, первое слагаемое в правой части (4.4) при всех таких  $\tau$  имеет предел. Этот предел по определению равен  $\frac{\partial \rho(\tau, x(\tau), v[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(\tau)]}$ .

Таким образом, для почти всех  $\tau \in [t, \vartheta]$  выполняется равенство

$$\rho'_\tau(\tau, x(\tau), v[\cdot]) = \frac{\partial \rho(\tau, x(\tau), v[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(\tau)]},$$

а значит, выполняются все указанные в лемме свойства функции

$$s \mapsto \frac{\partial \rho(s, x(s), v[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(s)]},$$

и при всех  $\tau \in [t, \vartheta]$  верны соотношения

$$\rho(\tau, x(\tau), v[\cdot]) = \rho(t, x(t), v[\cdot]) + \int_t^\tau \frac{\partial \rho(s, x(s), v[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(s)]} ds. \quad (4.5)$$

В силу определения  $\rho(\cdot)$  и  $x(\cdot)$  последнее равенство при  $\tau = \vartheta$  может быть переписано в виде

$$\sigma(x(\vartheta)) - \rho(t, z, v[\cdot]) = \int_t^\vartheta \frac{\partial \rho(s, x(s), v[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(s)]} ds. \quad (4.6)$$

Так как соотношение (4.6) верно при любых  $(t, z) \in G$ ,  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ ,  $U \in \mathbf{U}_{na}$ ,  $x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])$ , утверждения (4.2), (4.3) следуют из равенства (4.6) и определения функций риска стратегии и оптимального риска (см.(3.3), (3.4)). Доказательство завершено.

**Лемма 5.** Пусть функция оптимального риска удовлетворяет условию Липшица: существует константа  $L_r \geq 0$  такая, что для любых  $(t_1, z_1), (t_2, z_2) \in G$  выполнены неравенства

$$|\mathbf{r}(t_1, z_1) - \mathbf{r}(t_2, z_2)| \leq L_r(|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|). \quad (4.7)$$

Тогда для любых  $(t, z) \in G$ ,  $t' \in [t, \vartheta]$ ,  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ ,  $x(\cdot) \in X(t, z, v[\cdot])$  функция

$$s \mapsto \frac{\partial \alpha(s, x(s), v[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(s)]}$$

почти всюду определена, измерима и интегрируема по Лебегу на интервале  $[t, \vartheta]$ , и выполняется равенство

$$\alpha(t', x(t'), v[\cdot]) - \alpha(t, z, v[\cdot]) = \int_t^{t'} \frac{\partial \alpha(s, x(s), v[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(s)]} ds. \quad (4.8)$$

**Доказательство.** В силу леммы 3, условия (4.7) и определения функции  $\alpha(\cdot)$  (см. (3.6)) последняя удовлетворяет условию Липшица в области  $G$  при всех  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ . В этих условиях доказательство леммы аналогично доказательству равенства (4.5).

## 5. Неравенства для функции $\alpha$

**Теорема 1.** При всех  $(t, z) \in G$ ,  $t' \in [t, \vartheta]$  выполнены неравенства

$$\inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, t']} \\ z' \in X(t, z, U, v[\cdot])|_{t'} \\ v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t', \vartheta]}}} \left\{ \alpha(t', z', v'[\cdot]) - \alpha(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) \right\} \geq 0. \quad (5.1)$$

**Доказательство.** Пусть выбраны произвольные  $(t, z) \in G$ ,  $t' \in [t, \vartheta]$ ,  $U \in \mathbf{U}_{na}$  и  $\varepsilon > 0$ . С помощью операции склейки стратегий в момент  $t'$  стратегию  $U \in \mathbf{U}_{na}$  можно продолжить (изменить) на интервале  $[t', \vartheta]$  в зависимости от сложившейся на интервале  $[t, t']$  истории движения  $x(\cdot)$ :

$$\bar{U} \equiv (U, U_{(\varepsilon, t', x(t'))}_{t'}), \quad (5.2)$$

где  $U_{(\varepsilon, t', x(t'))} \in \mathbf{U}_{na}$  некоторые специально подбираемые стратегия. Причем можно сделать это так, чтобы выполнялись соотношения

$$\sigma(x(\vartheta)) \leq \rho(t', x(t'), v'[\cdot]) + \mathbf{r}(t', x(t')) + \varepsilon, \quad (5.3)$$

каковы бы ни были  $v[\cdot], v'[\cdot] \in \mathbf{V}_T$  и  $x(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, (v, v')_{t'}[\cdot])$ . Данный факт доказывается стандартными приемами теории дифференциальных уравнений на основании компактности множества  $X(t, z, U, v[\cdot])|_{t'}$  и непустоты множеств  $\mathbf{U}_{na}^\varepsilon(t', x(t'))$  при произвольных  $\varepsilon > 0$  и  $x(t') \in X(t, z, U, v[\cdot])|_{t'}$ .

Вычитая из правой и левой частей (5.3) величину  $\rho(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot])$  получим неравенства

$$\sigma(x(\vartheta)) - \rho(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) \leq \rho(t', x(t'), v'[\cdot]) + \mathbf{r}(t', x(t')) - \rho(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) + \varepsilon. \quad (5.4)$$

Перейдем в правой, а затем в левой части (5.4) к верхней грани по  $v[\cdot], v'[\cdot] \in \mathbf{V}_T$  и  $x(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, (v, v')_{t'}[\cdot])$ :

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{v[\cdot], v'[\cdot] \in \mathbf{V}_T \\ x(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, (v, v')_{t'}[\cdot])}} \{ \sigma(x(\vartheta)) - \rho(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) \} \\ & \leq \sup_{\substack{v[\cdot], v'[\cdot] \in \mathbf{V}_T \\ x(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, (v, v')_{t'}[\cdot])}} \left\{ \rho(t', x(t'), v'[\cdot]) + \mathbf{r}(t', x(t')) - \rho(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) \right\} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Нижняя грань по  $U \in \mathbf{U}_{na}$  левой части этого неравенства в силу определения равна величине  $\mathbf{r}(t, z)$ . Следовательно, по определению функции  $\alpha(\cdot)$  имеем

$$\sup_{\substack{v[\cdot], v'[\cdot] \in \mathbf{V}_T \\ x(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, (v, v')_{t'}[\cdot])}} \left\{ \alpha(t', x(t'), v'[\cdot]) - \alpha(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) \right\} \geq -\varepsilon. \quad (5.5)$$

Выражение под знаком верхней грани в (5.5) зависит лишь от сужений  $x(\cdot)|_{[t, t']}$  движений из  $X(t, z, \bar{U}, (v, v')_{t'}[\cdot])$ . В силу определения (5.2) и леммы 1 имеем  $X(t, z, \bar{U}, (v, v')_{t'}[\cdot])|_{[t, t]} = X(t, z, U, (v, v')_{t'}[\cdot])|_{[t, t]}$  и, так как стратегия  $U$  была выбрана произвольно, получим

$$\inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, t]} \\ x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot]) \\ v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t', \vartheta]}}} \left\{ \alpha(t', x(t'), v'[\cdot]) - \alpha(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) \right\} \geq -\varepsilon. \quad (5.6)$$

Для завершения доказательства, пользуясь произвольностью выбора, устремим  $\varepsilon$  к нулю.

**Теорема 2.** При всех  $(t, z) \in G$ ,  $t' \in [t, \vartheta]$ ,  $\varepsilon > 0$  верны неравенства

$$\inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, t]} \\ z' \in X(t, z, U, v[\cdot])|_{t'} \\ v'[\cdot] \in \mathbf{V}(t, z, t', z', U, v[\cdot], \varepsilon)}} \left\{ \alpha(t', z', v'[\cdot]) - \alpha(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) \right\} \leq \varepsilon, \quad (5.7)$$

где

$$V(t, z, t', z', U, v[\cdot], \varepsilon) \equiv \varepsilon\text{-argsup}_{\bar{v}[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t', \vartheta]}} \left\{ \max_{\substack{y(\cdot) \in X(t, z, U, (v, \bar{v})_{t'}[\cdot]) \\ y(t') = z'}} \sigma(y(\vartheta)) - \rho(t', z', \bar{v}[\cdot]) \right\}.$$

**Доказательство.** Пусть  $(t, z) \in G$ ,  $\varepsilon' > 0$  и  $\bar{U} \in \mathbf{U}_{na}^{\varepsilon'}(t, z)$ . По определению  $\mathbf{U}_{na}^{\varepsilon'}(t, z)$  для любых  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$  и  $x(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, v[\cdot])$  будут выполняться соотношения

$$\mathbf{r}(t, z) \geq \sigma(x(\vartheta)) - \rho(t, z, v[\cdot]) - \varepsilon'.$$

В частности, при произвольных  $t' \in [t, \vartheta]$ ,  $v[\cdot], v'[\cdot] \in \mathbf{V}_T$  и  $x(\cdot), y(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, (v, v')_{t'}[\cdot])$  таких, что  $y(t') = x(t')$ , выполняется неравенство

$$\mathbf{r}(t, z) \geq \rho(t', x(t'), v'[\cdot]) - \rho(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) + \sigma(y(\vartheta)) - \rho(t', y(t'), v'[\cdot]) - \varepsilon'.$$

Значит, при любых  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ ,  $x(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, v[\cdot])$ ,  $\varepsilon > 0$  и

$$v'[\cdot] \in \varepsilon\text{-argsup}_{\bar{v}[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t', \vartheta]}} \left\{ \max_{\substack{y(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, (v, \bar{v})_{t'}[\cdot]) \\ y(t') = x(t')}} \sigma(y(\vartheta)) - \rho(t', y(t'), \bar{v}[\cdot]) \right\}$$

будут верны неравенства

$$\mathbf{r}(t, z) \geq \rho(t', x(t'), v'[\cdot]) - \rho(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) + \sup_{\substack{\bar{v}[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t', \vartheta]} \\ y(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, (v, \bar{v})_{t'}[\cdot]) \\ y(t') = x(t')}} \left\{ \sigma(y(\vartheta)) - \rho(t', y(t'), \bar{v}[\cdot]) \right\} - \varepsilon - \varepsilon'. \quad (5.8)$$

Верхняя грань из правой части (5.8) с помощью леммы 2 может быть оценена снизу функцией оптимального риска в позиции  $(t', x(t'))$

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{\bar{v}[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t', \vartheta]} \\ y(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, (v, \bar{v})_{t'}[\cdot]) \\ y(t') = x(t')}} \left\{ \sigma(y(\vartheta)) - \rho(t', y(t'), \bar{v}[\cdot]) \right\} \\ & \geq \inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{\substack{\bar{v}[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t', \vartheta]} \\ y(\cdot) \in X(t', x(t'), U, \bar{v}[\cdot])}} \left\{ \sigma(y(\vartheta)) - \rho(t', y(t'), \bar{v}[\cdot]) \right\} = \mathbf{r}(t', x(t')). \end{aligned}$$

Таким образом, при произвольных  $(t, z) \in G$ ,  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$  существует  $\bar{U} \in \mathbf{U}_{na}$  такая, что для всех  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, t']}$ ,  $x(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, v[\cdot])$  и  $v'[\cdot] \in V(t, z, t', x(t'), \bar{U}, v[\cdot], \varepsilon)$  будут выполнены неравенства

$$\mathbf{r}(t, z) \geq \rho(t', x(t'), v'[\cdot]) - \rho(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) + \mathbf{r}(t', x(t')) - \varepsilon' - \varepsilon.$$

Вследствие этого (см. (3.6)) верны неравенства

$$\sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, t']} \\ x(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}, v[\cdot]) \\ v'[\cdot] \in V(t, z, t', x(t'), \bar{U}, v[\cdot], \varepsilon)}} \left\{ \alpha(t', x(t'), v'[\cdot]) - \alpha(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) \right\} \leq \varepsilon' + \varepsilon.$$

Переходя к нижней грани по всем  $U \in \mathbf{U}_{na}$ , освободимся от  $\varepsilon'$  и, обозначив  $z' \equiv x(t')$ , получим искомое соотношение (5.7).

**Следствие 1.** Пусть для  $(t, z) \in G$ ,  $t' \in [t, \vartheta]$  при всех  $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ ,  $U \in \mathbf{U}_{na}$  и  $z' \in X(t, z, U, v[\cdot])|_{t'}$  выполняется

$$\emptyset \neq V(t, z, t', z', U, v[\cdot]) \equiv \operatorname{argmax}_{\bar{v}[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t', \vartheta]}} \left\{ \max_{\substack{y(\cdot) \in X(t, z, U, (v, \bar{v})_{t'}[\cdot]) \\ y(t') = z'}} \sigma(y(\vartheta)) - \rho(t', z', \bar{v}[\cdot]) \right\}, \quad (5.9)$$

тогда выполнено неравенство

$$\inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, t']} \\ z' \in X(t, z, U, v[\cdot])|_{t'} \\ v'[\cdot] \in V(t, z, t', z', U, v[\cdot])}} \left\{ \alpha(t', z', v'[\cdot]) - \alpha(t, z, (v, v')_{t'}[\cdot]) \right\} \leq 0. \quad (5.10)$$

**Доказательство.** В силу определения операции  $\operatorname{argmax}$  неравенство (5.10) получается из неравенства (5.7) предельным переходом при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Условие (5.9) заведомо выполняется, например, для линейных систем с выпуклыми геометрическими ограничениями на помеху.

**Следствие 2.** Пусть верны соотношения (4.8) и (5.10). Тогда выполняются неравенства

$$\inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,t']} \\ x(\cdot) \in X(t,z,U,v[\cdot]) \\ v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t',\vartheta]}}} \int_t^{t'} \frac{\partial \alpha(s, x(s), (v, v')_t[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(s)]} ds \geq 0, \quad (5.11)$$

$$\inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{\substack{v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,t']} \\ x(\cdot) \in X(t,z,U,v[\cdot]) \\ v'[\cdot] \in V(t,z,t',x(t'),U,v[\cdot])}} \int_t^{t'} \frac{\partial \alpha(s, x(s), (v, v')_t[\cdot])}{\partial [1, \dot{x}(s)]} ds \leq 0. \quad (5.12)$$

**Доказательство.** Неравенства (5.11) и (5.12) получаются из неравенств (5.1), (5.10) применением леммы 5.

Как отмечалось, функция  $\alpha(\cdot)$  (см. (3.6)) выступает аналогом функции оптимального гарантированного результата в теории, использующей минимаксный критерий оценки. И так же, как оптимальная гарантия в минимаксной теории, функция  $\alpha(\cdot)$  может служить основой построения оптимальной стратегии (в смысле критерия минимаксного риска). Последние неравенства и их прототипы (5.1), (5.10), имея противоположный знак, отличаются лишь ограничениями на элемент  $v'[\cdot]$ . Это обстоятельство открывает возможность получения на их основе инфинитезимальных соотношений для функция  $\alpha(\cdot)$  и, как следствие, алгоритмов построения риск-оптимальных стратегий для более широкого класса систем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н.** Дифференциальная игра сближения-уклонения. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18.
2. **Красовский Н. Н.** Дифференциальная игра сближения-уклонения. II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 3. С. 22–42.
3. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
5. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
6. **Savage L. J.** The theory of statistical decision // J. Amer. Stat. Association. 1951. No. 46. P. 55–67.
7. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
8. **Серков Д. А.** Стратегии минимаксного риска (сожаления) в системе с простыми движениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 121–135.
9. **Серков Д. А.** Стратегия минимаксного риска (сожаления) для одного класса задач управления в условиях динамических помех // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 192–200.
10. **Serkov D. A.** On the optimal risk function for the system under dynamic disturbances // Preprints (DVD-ROM) of IFAC workshop on control applications of optimization (IFAC CAO'09). Jyväskylä, 2009.

Серков Дмитрий Александрович  
канд. физ.-мат. наук  
гл. программист  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: serkov@imm.uran.ru

Поступила 11.01.2010

УДК 519.6

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ “НА УЗКИЕ МЕСТА”<sup>1</sup>****А. Н. Сесекин, А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов**

Рассматривается задача экстремальной маршрутизации с критерием, имеющим смысл длины наибольшего ребра ломаной. Предполагается, что затраты на каждом шаге (этапе) перемещения могут зависеть от списка заданий, не выполненных к началу данного перемещения. Кроме того, имеются ограничения в виде условий предшествования. Конструируется экономичный вариант процедуры на основе метода динамического программирования (МДП).

Ключевые слова: маршрутизация, условия предшествования.

A. N. Seseikin, A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. One bottleneck routing problem.

An extremal routing problem with a criterion that has the sense of the greatest edge length of a polygonal line is considered. It is assumed that the costs at every step (stage) of the travel may depend on a list of tasks that have not been fulfilled by the beginning of this step. In addition, there are constraints in the form of precedence conditions. An economical variant of the procedure is constructed based on the dynamic programming method.

Keywords: routing, precedence conditions.

**1. Введение**

Статья продолжает исследования [1] и посвящена вопросам оптимальной маршрутизации перемещений при наличии ограничений в условиях, когда критерий качества соответствует идейно задаче “на узкие места” [2] и включает комбинацию оценочных функций, допускающих каждая явную зависимость от списка заданий.

Как и в [1], постановка допускает условия предшествования, которые могут отражать различные ограничения технологического характера. Заметим, что условия предшествования использовались в так называемой задаче курьера [3]. В данном случае (как и в [1]) рассматривается ее многозначный аналог: города (терминология, принятая в известной задаче коммивояжера) заменены мегаполисами (точнее: конечными множествами). По этой причине решение не исчерпывается одним только маршрутом (перестановка индексов), а включает еще и трассу, т. е. кортеж точек посещения; как следствие решение определяется в виде пары маршрут-трасса, а условия предшествования касаются выбора маршрута.

В связи с содержательными постановками задач “на узкие места” можно отметить следующую. Предположим, что некоторое устройство выполняет серию работ, связанных с перемещениями и последовательным “выключением” источников тех или иных воздействий (например, радиационных), потенциально угрожающих его нормальному функционированию. Имеется некоторый допуск на степень упомянутого воздействия при решении каждой элементарной задачи; эти задачи в своей совокупности составляют комплексную задачу, подлежащую выполнению. Будем полагать, что вредное воздействие образуют только те источники, которые соответствуют мегаполисам, которые на данный момент остались непосещенными в процессе перемещений упомянутого устройства. Для того чтобы оценить возможность выполнения комплекса работ по посещению мегаполисов без превышения допуска на каждом этапе, можно ввести экстремальную задачу, критерий которой определяется максимумом интенсивностей вредных воздействий при последовательном посещении мегаполисов (мы считаем, что,

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00436), программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления”.

попадая в любую точку мегаполиса, перемещающееся устройство имеет возможность “выключения” источника вредного воздействия, связанного с данным мегаполисом; можно полагать даже, что эти “выключения” как раз и составляют задания, подлежащие обязательному исполнению). Получим вариант известной задачи “на узкие места”. Ее особенностью является то обстоятельство, что затраты на этапах решения комплексной задачи явным образом зависят от списка заданий, оставшихся невыполненными на данный момент времени.

Обращаясь к ранее упомянутой задаче о функционировании в агрессивной среде, отметим, что используемый ниже неаддитивный вариант функции агрегирования индивидуальных затрат может (на идейном уровне) соответствовать постановке, в рамках которой требуется обеспечить устойчивое функционирование устройства при выполнении всего комплекса работ. Имеется в виду обеспечение требования, состоящего в том, чтобы на всем протяжении времени функционирования устройства степень вредного воздействия не превышала бы заданного допуска. Мы добавляем в упомянутую “бинарную” постановку (в которой возможны лишь два варианта: 1) работа устройства в пределах допуска, 2) поломка за счет превышения допуска) элементы оптимизации наиболее интенсивных вредных воздействий среди возможных этапов перемещений, полагая при этом, что при меньшей интенсивности упомянутых воздействий обеспечивается более высокий уровень надежности технического устройства.

Заметим, что мы ориентируемся на обеспечение работ при повышенной радиации, конкретизируя вредные воздействия, которые могут возникать при демонтаже оборудования энергоблоков атомных электрических станций (АЭС), выведенных из эксплуатации. Предполагается, что в результате мероприятий по демонтажу оборудования реализуется последовательное “выключение” источников излучения. Стало быть, выбирая тот или иной маршрут (и сопутствующие ему обстоятельства), мы влияем на характер воздействия радиации в процессе перемещения устройства на территории энергоблока. Разумеется, задача, рассматриваемая в дальнейшем, является модельной и ориентированной на исследование качественных закономерностей; применение развиваемого ниже подхода в содержательных задачах, связанных с функционированием АЭС, требует специального дополнительного изучения.

## 2. Постановка задачи

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество  $X$ , точку  $x^0 \in X$ , натуральное число  $N$ ,  $N \geq 2$ , и непустые конечные множества  $M_1, \dots, M_N$ , каждое из которых является подмножеством (п/м)  $X$ . Упомянутые множества  $M_i$  играют роль мегаполисов в задаче о построении системы перемещений

$$(x_0 = x^0) \longrightarrow (x_1 \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow \dots \longrightarrow (x_N \in M_{\alpha(N)}), \quad (2.1)$$

где  $\alpha$  — перестановка [4] индексов  $1, 2, \dots, N$ . Мы полагаем, что  $x^0 \notin M_i$  при всех  $i = 1, \dots, N$ , а множества  $M_1, \dots, M_N$  попарно не пересекаются. Перестановку  $\alpha$  в (2.1) именуем маршрутом, а кортеж  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  — трассой.

Для последующей постановки задачи потребуются некоторые обозначения. Для произвольных объектов  $u$  и  $v$  через  $\{u; v\}$  обозначаем неупорядоченную пару [5] этих объектов, т. е. множество, содержащее  $u, v$  и не содержащее никаких других объектов. Разумеется, для всякого объекта  $y$   $\{y\} \triangleq \{y; y\}$  есть одноэлементное множество, содержащее  $y$ . Каждое множество является объектом. В согласии с [5] полагаем, что при всяком выборе объектов  $y$  и  $z$   $(y, z) \triangleq \{\{y\}; \{y; z\}\}$  (упорядоченная пара объектов  $y$  и  $z$ ), где (здесь и ниже)  $\triangleq$  — равенство по определению. Пусть  $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$  и  $\mathcal{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathcal{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ ; при  $k \in \mathcal{N}_0$  и  $l \in \mathcal{N}_0$  полагаем  $\overline{k, l} \triangleq \{i \in \mathcal{N}_0 | (k \leq i) \& (i \leq l)\}$ . Всюду в дальнейшем придерживаемся следующего соглашения относительно обозначений, связанных с выбором наибольшего в обычном смысле из конечного набора элементов  $\mathbb{R}$ , где  $\mathbb{R}$  — вещественная прямая. Речь идет об использовании символа  $\sup$ , что соответствует строгому определению точной верхней грани.

Если  $u \in \mathbb{R}$  и  $v \in \mathbb{R}$ , то  $\sup(\{u; v\}) \in \mathbb{R}$  — точная верхняя грань неупорядоченной пары  $\{u; v\}$  — есть наибольшее из чисел  $u$  и  $v$ ; данное обозначение (т. е.  $\sup(\{u; v\})$ ) будем использовать для наибольшего из чисел  $u, v$  без дополнительных пояснений. Если  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{R}$  и  $w \in \mathbb{R}$ , то  $\sup(\{u; \sup(\{v; w\})\}) = \sup(\{\sup(\{u; v\}); w\})$  есть наибольшее из чисел  $u, v$  и  $w$ .

Если  $S$  — множество, то через  $\text{Fin}(S)$  обозначаем семейство всех непустых конечных п/м  $S$ . Как уже отмечалось,  $N \in \mathcal{N}$ ,  $2 \leq N$  и

$$(M_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \longrightarrow \text{Fin}(X). \quad (2.2)$$

Напомним, что  $x^0 \notin M_i \ \forall i \in \overline{1, N}$ ; кроме того,  $M_{i_1} \cap M_{i_2} = \emptyset \ \forall i_1 \in \overline{1, N} \ \forall i_2 \in \overline{1, N} \setminus \{i_1\}$ . Тем самым определена система (2.2) попарно не пересекающихся целевых множеств и начальная точка (база), не принадлежащая этим множествам. На выбор маршрута  $\alpha$  (см. (2.1)) накладываются ограничения в виде условий предшествования, для формулировки которых введем натуральное число  $n \in \mathcal{N}$  и следующие два кортежа:

$$(p_i)_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \longrightarrow \overline{1, N}, \quad (q_i)_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \longrightarrow \overline{1, N}. \quad (2.3)$$

Каждую пару  $(p_j, q_j)$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , именуем адресной (см. [1, с. 130]), что на идейном уровне отвечает требованиям вида

$$M_{p_1} \longrightarrow M_{q_1}, \dots, M_{p_n} \longrightarrow M_{q_n} \quad (2.4)$$

к выбору системы перемещений (2.1). Смысл (2.4) состоит в следующем: посещение множества  $M_{q_1}$  допускается только после посещения  $M_{p_1}, \dots$ , посещение множества  $M_{q_n}$  допускается только после посещения  $M_{p_n}$ ; при этом “по пути” от  $M_{p_j}$  к  $M_{q_j}$  допускается посещение каких-то других целевых множеств. Для точной формулировки введем некоторые обозначения, согласующиеся с [1].

Через  $\mathbb{P}$  обозначаем множество всех перестановок в  $\overline{1, N}$ , именуемых (полными) маршрутами; если  $\lambda \in \mathbb{P}$ , то  $\lambda^{-1} \in \mathbb{P}$  есть def перестановка, обратная к  $\lambda$ , т. е. перестановка, для которой  $\lambda(\lambda^{-1}(k)) = \lambda^{-1}(\lambda(k)) = k \ \forall k \in \overline{1, N}$ . В этих обозначениях, следуя [1, (2.7)], полагаем, что

$$\mathbb{A} \triangleq \{\lambda \in \mathbb{P} \mid \lambda^{-1}(p_i) < \lambda^{-1}(q_i) \ \forall i \in \overline{1, n}\}, \quad (2.5)$$

и получаем множество всех допустимых в смысле (2.4) маршрутов.

С каждым маршрутом  $\alpha \in \mathbb{P}$  связываем множество допустимых (а точнее,  $\alpha$ -допустимых) трасс или траекторий; именно, через  $\mathfrak{X}[\alpha]$  обозначаем (как и в [1, с. 130]) множество всех кортежей

$$(x_i)_{i \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \longrightarrow X, \quad (2.6)$$

для каждого из которых  $x_0 = x^0$  и, кроме того,  $x_j \in M_{\alpha(j)} \ \forall j \in \overline{1, N}$ ; при этом, конечно,  $\mathfrak{X}[\alpha] \neq \emptyset$ . Заметим, что, как видно из (2.1), объектами нашего выбора являются маршрут  $\alpha$  и какой-либо элемент  $\mathfrak{X}[\alpha]$ . Получающееся совокупное решение — упорядоченную пару — именуем далее парой маршрут-трасса.

Всюду в дальнейшем полагаем заданной функцию

$$\mathbf{c} : X \times X \times \mathfrak{N} \longrightarrow [0, \infty[, \quad (2.7)$$

где  $\mathfrak{N}$  — семейство всех непустых п/м  $\overline{1, N}$ . Из (2.7) следует, в частности, что при

$$K \in \mathfrak{N}, \quad i \in \overline{1, N} \setminus K, \quad j \in K, \quad y \in M_i, \quad z \in M_j \quad (2.8)$$

определено значение  $\mathbf{c}(y, z, K) \in [0, \infty[$ ; наборы параметров  $(K, i, j, y, z)$ , удовлетворяющие (2.8), называем далее естественными. Именно, каждый набор (2.8) отвечает ситуации перемещения

$$(y \in M_i) \longrightarrow (z \in M_j) \quad (2.9)$$

в условиях, когда множество оставшихся на момент перемещения (2.9) заданий, формирующих вредные воздействия, есть  $K$ , для которого  $j \in K$  (после перемещения (2.9) источник воздействия с номером  $j$  будет выключен). Условимся, однако, определять для формального удобства агрегированный критерий “расширенным”, допуская в ходе его построения не только естественные наборы (2.8). Впрочем, можно принять, что существенные значения функции (2.7) определяются только для ситуаций вида (2.8), а для всех прочих случаев реализации триплетов  $(x, y, K)$  значения  $\mathbf{c}(x, y, K)$  полагаются, например, равными нулю.

Если  $\alpha \in \mathbb{P}$ , то полагаем при всяком выборе кортежа (2.6), что

$$\mathfrak{C}_\alpha((x_i)_{i \in \overline{0, N}}) \triangleq \max_{i \in \overline{1, N}} \mathbf{c}(x_{i-1}, x_i, \{\alpha(j) : j \in \overline{i, N}\}) \in [0, \infty[. \quad (2.10)$$

Заметим, что значение (2.10) определено, в частности, при  $\alpha \in \mathbb{A}$  и  $(x_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}_\alpha$ ; только такие значения нас и будут интересовать.

Через  $\mathcal{K}$  обозначаем семейство всех непустых п/м множества  $\overline{1, n}$ .

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным (как и в [1]) следующее:

**Условие 2.1.**  $\forall K \in \mathcal{K} \exists i \in K : p_i \neq q_j \quad \forall j \in K$ .

Как следствие имеем свойство:  $p_j \neq q_j \quad \forall j \in \overline{1, n}$ . С учетом [1, (2.13)] получаем, что  $\mathbb{A} \neq \emptyset$ . Как уже отмечалось,  $\mathfrak{X}[\alpha] \neq \emptyset \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}$ . Таким образом, ограничения задачи

$$\mathfrak{C}_\alpha((x_i)_{i \in \overline{0, N}}) \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}, \quad (x_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}[\alpha] \quad (2.11)$$

совместны, а потому корректно определяется значение задачи (2.11):

$$V \triangleq \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \min_{(x_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}[\alpha]} \mathfrak{C}_\alpha((x_i)_{i \in \overline{0, N}}) \in [0, \infty[. \quad (2.12)$$

Нашей целью является нахождение значения (2.11), т. е. глобального экстремума задачи (2.11), а также построение оптимальной в смысле (2.11), (2.12) пары маршрут-трасса

$$(\alpha^0, (x_i^0)_{i \in \overline{0, N}}), \quad (2.13)$$

где  $\alpha^0 \in \mathbb{A}$ ,  $(x_i^0)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}[\alpha^0]$  и при этом  $\mathfrak{C}_{\alpha^0}((x_i^0)_{i \in \overline{0, N}}) = V$ .

### 3. Редукция основной задачи и уравнение Беллмана

Для решения задачи (2.11), т. е. для нахождения ее экстремума (2.12) и оптимальной пары маршрут-трасса (2.13), будем использовать вариант МДП, применяемый, однако, после специального преобразования ограничений задачи (2.11) и последующего расширения (см. [6, § 2.2]). Упомянутое преобразование использовалось и в разд. 3 работы [1]. Нам потребуются некоторые новые обозначения, следующие [1]. Через  $\mathbf{N}$  и  $\mathfrak{N}$  обозначаем семейства всех и всех непустых п/м  $\overline{1, N}$  соответственно. Если  $K \in \mathfrak{N}$ , то через  $|K|$  обозначаем количество элементов множества  $K$ ; полагаем также, что  $(\text{bi})[K]$  есть def множество всех биекций

$$(\alpha_i)_{i \in \overline{1, |K|}} : \overline{1, |K|} \longrightarrow K \quad (3.1)$$

множества  $\overline{1, |K|}$  на  $K$ . Биекции вида (3.1) будем называть частичными маршрутами. Легко видеть, что  $\mathbb{P} = (\text{bi})[\overline{1, N}]$ . Полагаем, наконец, что  $|\emptyset| \triangleq 0$ ; тогда число  $|K| \in \overline{0, N}$  определено для всех  $K \in \mathbf{N}$ . С учетом (2.3) полагаем, что при  $K \in \mathfrak{N}$  множество  $\Sigma[K]$  определено в [1, (3.1)]. Кроме того, в соответствии с [1, с. 132] определяем оператор

$$\mathbf{I} : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N} \quad (3.2)$$

посредством следующего правила (см. также более общее определение [6, (2.2.28)]):

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{q_j : j \in \Sigma[K]\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \quad (3.3)$$

В терминах (3.2), (3.3) конструируем специальные частичные маршруты, полагая при  $K \in \mathfrak{N}$ , что множество  $(\mathbf{I} - \text{bi})[K]$  (см. [1, с. 132]) определяется выражением

$$(\mathbf{I} - \text{bi})[K] \triangleq \{\alpha \in (\text{bi})[K] \mid \alpha(k) \in \mathbf{I}(\{\alpha(l) : l \in \overline{k, m}\}) \quad \forall k \in \overline{1, m}\}, \quad (3.4)$$

где  $m \triangleq |K|$ . В (3.4) введено фактически новое ограничение на выбор частичных маршрутов. Напомним, что ([1, (3.3)], см. также предложение 2.2.2 в [6])  $(\mathbf{I} - \text{bi})[K] \neq \emptyset$  при  $K \in \mathfrak{N}$ ; напомним и полезное следствие (см. [1, (3.4)])

$$\mathbb{A} = (\mathbf{I} - \text{bi})[\overline{1, N}]. \quad (3.5)$$

Представления (3.4), (3.5) определяют нужное преобразование ограничений основной задачи (2.11). Однако сейчас (подобно разд. 3 работы [1]) имеет смысл построить сразу естественное расширение (2.11), привлекая к рассмотрению подобные задачи с неполным, вообще говоря, списком заданий. Для этого наряду с частичными маршрутами будем использовать и частичные трассы. Именно, следуя [1, с. 132], при  $x \in X$ ,  $K \in \mathfrak{N}$ ,  $\alpha \in (\text{bi})[K]$  введем, полагая  $m \triangleq |K|$ , множество  $\mathcal{X}[x; K; \alpha]$  всех кортежей

$$(x_i)_{i \in \overline{0, m}} : \overline{0, m} \longrightarrow X, \quad (3.6)$$

для каждого из которых: 1)  $x_0 = x$ ; 2)  $x_j \in M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1, m}$ . Кортежи (3.6) рассматриваем в качестве частичных трасс, получая всякий раз в виде  $\mathcal{X}[x; K; \alpha]$  непустое конечное множество, соответствующее задаче организации перемещений

$$(x_0 = x) \longrightarrow (x_1 \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow \dots \longrightarrow (x_m \in M_{\alpha(m)}), \quad (3.7)$$

где, как уже отмечалось,  $m = |K|$ . Конкретный вариант перемещений (3.7) также определяет пару маршрут-трасса, где, однако, и маршрут  $\alpha$ , и трасса  $(x_i)_{i \in \overline{0, m}}$  являются, вообще говоря, частичными по отношению к основной задаче (2.11); в этой связи см. обсуждение в [1, с. 132]. Для оценки качества (3.7) нам потребуются специальный функционал качества, логика построения которого согласуется с (2.10). Этот функционал также определяем (по соображениям методического характера) в расширенном варианте, полагая при  $m \in \overline{1, N}$ , что  $\mathfrak{X}_m$  есть def множество всех кортежей (3.6).

Итак, если  $K \in \mathfrak{N}$  и  $\alpha \in (\text{bi})[K]$ , то

$$\mathfrak{C}_\alpha^0[K] : \mathfrak{X}_m \longrightarrow [0, \infty[, \quad (3.8)$$

где  $m \triangleq |K|$ , определяем правилом

$$\mathfrak{C}_\alpha^0[K]((x_i)_{i \in \overline{0, m}}) \triangleq \max_{i \in \overline{1, m}} \mathbf{c}(x_{i-1}, x_i, \{\alpha(j) : j \in \overline{i, m}\}) \quad \forall (x_i)_{i \in \overline{0, m}} \in \mathfrak{X}_m. \quad (3.9)$$

Заметим, что (3.8), (3.9) нам потребуются по существу лишь в случаях, когда  $(x_i)_{i \in \overline{0, m}} \in \mathcal{X}[x; K; \alpha]$ , где  $m = |K|$ . Введем в рассмотрение задачи

$$\mathfrak{C}_\alpha^0[K]((x_i)_{i \in \overline{0, |K|}}) \longrightarrow \min, \quad \alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K], \quad (x_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathcal{X}[x; K; \alpha], \quad (3.10)$$

где  $x \in X$  и  $K \in \mathfrak{N}$ . Систему всевозможных задач (3.10) условимся называть расширением исходной задачи (2.11). Здесь мы учитываем (3.5), а также следующее легко проверяемое свойство. Именно, при  $\alpha \in \mathbb{P}$

$$\mathfrak{X}[\alpha] = \mathcal{X}[x^0; \overline{1, N}; \alpha], \quad (3.11)$$

и, кроме того, согласно (2.10) и (3.9)  $\forall (x_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}_N$

$$\mathfrak{C}_\alpha((x_i)_{i \in \overline{1, N}}) = \mathfrak{C}_\alpha^0[\overline{1, N}]((x_i)_{i \in \overline{0, N}}), \quad (3.12)$$

где учтено очевидное равенство  $N = |\overline{1, N}|$ . В качестве следствия мы получаем (2.11) как вариант задачи (3.10), соответствующий случаю  $x = x^0$  и  $K = \overline{1, N}$ . Поэтому система задач (3.10) действительно может рассматриваться в качестве расширения задачи (2.11). В этой связи каждой укороченной (по смыслу) задаче (3.10) сопоставляем ее экстремум: если  $x \in X$  и  $K \in \mathfrak{N}$ , то

$$v(x, K) \triangleq \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]} \min_{(x_i)_{i \in \overline{0, |K|}} \in \mathcal{X}[x; K; \alpha]} \mathfrak{C}_\alpha^0[K]((x_i)_{i \in \overline{0, |K|}}) \in [0, \infty[. \quad (3.13)$$

Тогда согласно (2.12), (3.11) – (3.13) имеем (в соответствии с принципом расширения) равенство

$$V = v(x^0, \overline{1, N}). \quad (3.14)$$

Удобно, кроме того, ввести систему значений  $v(x, \emptyset)$ ,  $x \in X$ . Именно, полагаем, что

$$v(x, \emptyset) \triangleq 0 \quad \forall x \in X. \quad (3.15)$$

Теперь, посредством (3.13)–(3.15) определена функция Беллмана

$$(x, K) \longrightarrow v(x, K) : X \times \mathbf{N} \longrightarrow [0, \infty[. \quad (3.16)$$

В связи с данными соглашениями отметим аналогичные по форме построения в [1, с. 133].

**Предложение 3.1.** *Если  $x \in X$  и  $K \in \mathfrak{N}$ , то справедливо равенство*

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, y, K); v(y, K \setminus \{j\})\}). \quad (3.17)$$

**Доказательство.** Полагаем, что  $\mathbf{n} \triangleq |K|$ ,  $\mathbf{n} \in \overline{1, N}$ . Имеет смысл выделить простейший случай  $\mathbf{n} = 1$ , для которого  $K = \{j\}$  при некотором  $j \in \overline{1, N}$ . В этом случае (bi)[ $K$ ] и  $(\mathbf{I} - \text{bi})[K]$  суть одноэлементные множества (учитываем, что  $\Sigma[K] = \Sigma[\{j\}] = \emptyset$  согласно [1, (3.1)]), содержащие каждое отображение  $\alpha_0$  из  $\{1\}$  на  $K$ , для которого  $\alpha_0(1) \triangleq j$ . При этом  $\mathcal{X}[x; K; \alpha_0]$  есть множество всех (тривиальных) кортежей  $(x_i)_{i \in \overline{0, 1}} \in \mathfrak{X}_1$ , у которых  $x_0 = x$  и  $x_1 \in M_j$ . Тогда согласно (3.9), (3.13) и (3.15)

$$\begin{aligned} v(x, K) &= v(x, \{j\}) = \min_{(x_i)_{i \in \overline{0, 1}} \in \mathcal{X}[x; K; \alpha_0]} \mathfrak{C}_{\alpha_0}^0[K]((x_i)_{i \in \overline{0, 1}}) = \min_{y \in M_j} \mathbf{c}(x, y, \{j\}) \\ &= \min_{y \in M_j} \mathbf{c}(x, y, K) = \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, y, K); 0\}) = \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, y, K); v(y, \emptyset)\}) \\ &= \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, y, K); v(y, K \setminus \{j\})\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, y, K); v(y, K \setminus \{j\})\}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

(здесь снова учитывается цепочка равенств  $\mathbf{I}(K) = \mathbf{I}(\{j\}) = \{j\} = K$ ). Итак, при  $\mathbf{n} = 1$  равенство (3.17) установлено.

Пусть теперь  $\mathbf{n} \in \overline{2, N}$ ; тогда  $\mathbf{n} - 1 \in \overline{1, N}$  и для определения  $v(y, K \setminus \{j\})$  при  $j \in \mathbf{I}(K)$  и  $y \in M_j$  следует использовать (3.13), так как  $K \setminus \{j\} \in \mathfrak{N}$ . Для определения  $v(x, K)$  также используем (3.13). Выберем (см. (3.13)) маршрут  $\mathbf{a} \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]$  и трассу  $(y_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{X}[x; K; \mathbf{a}]$ , для которых справедливо равенство

$$v(x, K) = \mathfrak{C}_{\mathbf{a}}^0[K]((y_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}). \quad (3.19)$$

Тогда  $y_0 = x$  и  $y_j \in M_{\mathbf{a}(j)} \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ . В частности, по свойствам биекций  $\mathbf{I}(\{\mathbf{a}(l) : l \in \overline{1, \mathbf{n}}\}) = \mathbf{I}(K)$ , а потому (см. (3.4))  $\mathbf{a}(1) \in \mathbf{I}(K)$  и при этом  $y_1 \in M_{\mathbf{a}(1)}$ . Тогда

$$\min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, y, K); v(y, K \setminus \{j\})\}) \leq \sup(\{\mathbf{c}(x, y_1, K); v(y_1, T)\}), \quad (3.20)$$

где  $T \triangleq K \setminus \{\mathbf{a}(1)\}$ . Заметим, что  $|T| = \mathbf{n} - 1$ , а потому имеем, в частности, свойство  $T \in \mathfrak{M}$ , что позволяет воспользоваться представлением (3.13) в следующем варианте:

$$v(y_1, T) = \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[T]} \min_{(x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}} \in \mathcal{X}[y_1; T; \alpha]} \mathfrak{C}_\alpha^0[T]((x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}}). \quad (3.21)$$

Заметим, что  $\mathbf{a} : \overline{1, \mathbf{n}} \rightarrow K$ , а тогда, при  $i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}$ , в частности, имеем  $\mathbf{a}(i+1) \in K$  и, поскольку  $2 \leq i+1$ , непременно  $\mathbf{a}(i+1) \neq \mathbf{a}(1)$ ; здесь используется инъективность  $\mathbf{a}$ . В итоге  $\mathbf{a}(i+1) \in T$  при  $i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}$ . Как следствие  $\bar{a} \triangleq (\mathbf{a}(i+1))_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}}$  есть отображение  $\overline{1, \mathbf{n}-1}$  в  $T$ . При этом  $\bar{a}(i) = \mathbf{a}(i+1) \ \forall i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}$ . Если  $t \in T$ , то по определению  $T$  имеем для некоторого  $s \in \overline{2, \mathbf{n}}$  равенство  $t = \mathbf{a}(s)$  и как следствие  $\bar{a}(s-1) = t$ , где  $s-1 \in \overline{1, \mathbf{n}-1}$ . Тем самым устанавливается, что  $\bar{a}$  есть сюръекция  $\overline{1, \mathbf{n}-1}$  на  $T$ . Поскольку  $\mathbf{a}$  инъективно, то  $\bar{a} \in (\text{bi})[T]$ .

Напомним теперь, что биекция  $\mathbf{a}$  обладает согласно (3.4) следующим свойством:

$$\mathbf{a}(k) \in \mathbf{I}(\{\mathbf{a}(l) : l \in \overline{k, \mathbf{n}}\}) \quad \forall k \in \overline{1, \mathbf{n}}. \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует при всяком выборе  $r \in \overline{1, \mathbf{n}-1}$ , что  $r+1 \in \overline{2, \mathbf{n}}$  и

$$\bar{a}(r) \in \mathbf{I}(\{\mathbf{a}(l) : l \in \overline{r+1, \mathbf{n}}\}), \quad (3.23)$$

где  $\{\mathbf{a}(l) : l \in \overline{r+1, \mathbf{n}}\} = \{\bar{a}(l) : l \in \overline{r, \mathbf{n}-1}\}$  (учитываем, что: 1) при  $i \in \overline{r, \mathbf{n}-1}$   $\bar{a}(i) = \mathbf{a}(i+1)$ , где  $i+1 \in \overline{r+1, \mathbf{n}}$ , 2) при  $j \in \overline{r+1, \mathbf{n}}$  справедливо  $j-1 \in \overline{r, \mathbf{n}-1}$  и  $\mathbf{a}(j) = \bar{a}(j-1)$ ; тем самым устанавливается равенство двух вышеупомянутых множеств). Как следствие (3.23) преобразуется к виду

$$\bar{a}(r) \in \mathbf{I}(\{\bar{a}(l) : l \in \overline{r, \mathbf{n}-1}\}). \quad (3.24)$$

Поскольку выбор  $r$  был произвольным, установлено (см. (3.4)), что  $\bar{a} \in (\mathbf{I} - \text{bi})[T]$ . Тогда с учетом (3.21) получаем очевидное неравенство

$$v(y_1, T) \leq \min_{(x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}} \in \mathcal{X}[y_1; T; \bar{a}]} \mathfrak{C}_{\bar{a}}^0[T]((x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}}). \quad (3.25)$$

Напомним, что  $(y_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}} : \overline{0, \mathbf{n}} \rightarrow X$ . Тогда  $z_i \triangleq y_{i+1} \in X \ \forall i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}$ . При этом по выбору  $(y_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}$  имеем, в частности, что

$$z_j \in M_{\bar{a}(j)} \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}-1}. \quad (3.26)$$

Кроме того,  $z_0 = y_1$ . Поскольку  $|T| = \mathbf{n} - 1$ , имеем (см. (3.6), (3.26))

$$(z_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}} \in \mathcal{X}[y_1; T; \bar{a}]. \quad (3.27)$$

Из (3.25) и (3.27) вытекает неравенство

$$v(y_1, T) \leq \mathfrak{C}_{\bar{a}}^0[T]((z_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}}). \quad (3.28)$$

При этом согласно (3.9) справедливо равенство

$$\mathfrak{C}_{\bar{a}}^0[T]((z_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}}) = \max_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}} \mathfrak{c}(z_{i-1}, z_i, \{\bar{a}(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}-1}\}). \quad (3.29)$$

Заметим, что при  $i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}$  для индекса  $i-1 \in \overline{0, \mathbf{n}-2}$  имеем равенство  $z_{i-1} = y_i$ , а также  $z_i = y_{i+1}$ ; поэтому

$$\mathfrak{c}(z_{i-1}, z_i, \{\bar{a}(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}-1}\}) = \mathfrak{c}(y_i, y_{i+1}, \{\bar{a}(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}-1}\}), \quad (3.30)$$

где по определению  $\bar{a}$  справедлива система равенств  $\bar{a}(j) = \mathbf{a}(j+1) \ \forall j \in \overline{i, \mathbf{n}-1}$  (мы учитываем, что  $\overline{i, \mathbf{n}-1} \subset \overline{1, \mathbf{n}-1}$  в рассматриваемом сейчас случае). Последняя система равенств приводит к совпадению

$$\{\bar{a}(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}-1}\} = \{\mathbf{a}(j+1) : j \in \overline{i, \mathbf{n}-1}\} = \{\mathbf{a}(s) : s \in \overline{i+1, \mathbf{n}}\}.$$

Теперь с учетом (3.29) и (3.30) получаем, что

$$\mathfrak{C}_a^0[T]((z_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}}) = \max_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}} \mathfrak{c}(y_i, y_{i+1}, \{\mathbf{a}(s) : s \in \overline{i+1, \mathbf{n}}\}).$$

Из (3.20), (3.28) и последнего равенства вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathfrak{c}(x, y, K); v(y, K \setminus \{j\})\}) \\ & \leq \sup(\{\mathfrak{c}(x, y_1, K); \max_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}} \mathfrak{c}(y_i, y_{i+1}, \{\mathbf{a}(s) : s \in \overline{i+1, \mathbf{n}}\})\}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

При этом  $\mathbf{n} = |K|$  и  $\mathbf{a} \in (\text{bi})[K]$ , а тогда имеем равенство  $K = \{\mathbf{a}(s) : s \in \overline{1, \mathbf{n}}\}$  и

$$\mathfrak{c}(x, y_1, K) = \mathfrak{c}(y_0, y_1, \{\mathbf{a}(s) : s \in \overline{1, \mathbf{n}}\}).$$

С учетом последнего равенства получаем цепочку равенств (см. (3.9), (3.19))

$$\begin{aligned} & \sup(\{\mathfrak{c}(x, y_1, K); \max_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}} \mathfrak{c}(y_i, y_{i+1}, \{\mathbf{a}(s) : s \in \overline{i+1, \mathbf{n}}\})\}) \\ & = \sup(\{\mathfrak{c}(y_0, y_1, \{\mathbf{a}(s) : s \in \overline{1, \mathbf{n}}\}); \max_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}} \mathfrak{c}(y_i, y_{i+1}, \{\mathbf{a}(s) : s \in \overline{i+1, \mathbf{n}}\})\}) \\ & = \max_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}} \mathfrak{c}(y_i, y_{i+1}, \{\mathbf{a}(s) : s \in \overline{i+1, \mathbf{n}}\}) = \max_{j \in \overline{1, \mathbf{n}}} \mathfrak{c}(y_{j-1}, y_j, \{\mathbf{a}(s) : s \in \overline{j, \mathbf{n}}\}) \\ & = \mathfrak{C}_a^0[K]((y_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}) = v(x, K). \end{aligned}$$

С учетом (3.31) получаем теперь следующую оценку:

$$\min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathfrak{c}(x, y, K); v(y, K \setminus \{j\})\}) \leq v(x, K). \quad (3.32)$$

Выберем и зафиксируем  $q \in \mathbf{I}(K)$  и  $\mathbf{z} \in M_q$ , для которых

$$\sup(\{\mathfrak{c}(x, \mathbf{z}, K); v(\mathbf{z}, Q)\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathfrak{c}(x, y, K); v(y, K \setminus \{j\})\}), \quad (3.33)$$

где  $Q \triangleq K \setminus \{q\}$ . Поскольку  $\mathbf{n} \geq 2$ , то  $|Q| = \mathbf{n} - 1 \in \overline{1, \mathbf{n}-1}$  и как следствие  $Q \in \mathfrak{N}$ ;  $q \in K$ . Кроме того,  $\mathbf{z} \in X$ , а тогда при всяком выборе  $\alpha \in (\text{bi})[Q]$  определено непустое конечное множество  $\mathcal{X}[\mathbf{z}; Q; \alpha]$ , элементами которого являются кортежи вида (3.6) при условии  $m = \mathbf{n} - 1$ ; в терминах этих кортежей определены (см. (3.8), (3.9)) значения

$$\mathfrak{C}_\alpha^0[Q]((x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}}) = \max_{i \in \overline{1, \mathbf{n}-1}} \mathfrak{c}(x_{i-1}, x_i, \{\alpha(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}-1}\}) \quad \forall (x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}} \in \mathcal{X}[\mathbf{z}; Q; \alpha]. \quad (3.34)$$

Согласно (3.13) имеем для  $\mathbf{z} \in X$  и  $Q \in \mathfrak{N}$  равенство

$$v(\mathbf{z}, Q) = \min_{\alpha \in (\mathbf{I}-\text{bi})[Q]} \min_{(x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}} \in \mathcal{X}[\mathbf{z}; Q; \alpha]} \mathfrak{C}_\alpha^0[Q]((x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}}) \in [0, \infty[.$$

С учетом последнего равенства выберем и зафиксируем маршрут

$$\beta \in (\mathbf{I}-\text{bi})[Q], \quad (3.35)$$

а также трассу (т. е. по сути траекторию)

$$(x_i^*)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}} \in \mathcal{X}[\mathbf{z}; Q; \beta], \quad (3.36)$$

для которых справедливо равенство

$$v(\mathbf{z}, Q) = \mathfrak{C}_\beta^0[Q]((x_i^*)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}-1}}). \quad (3.37)$$

В связи с (3.35) напомним, что  $\beta \in (\text{bi})[Q]$  и, в частности,  $\beta : \overline{1, \mathbf{n} - 1} \rightarrow Q$ , причем согласно (3.4) имеет место система включений

$$\beta(s) \in \mathbf{I}(\{\beta(l) : l \in \overline{s, \mathbf{n} - 1}\}) \quad \forall s \in \overline{1, \mathbf{n} - 1}. \quad (3.38)$$

При этом  $(x_i^*)_{i \in \overline{0, \mathbf{n} - 1}} : \overline{0, \mathbf{n} - 1} \rightarrow X$ . Относительно трассы (3.36) заметим, что

$$(x_0^* = \mathbf{z}) \& (x_j^* \in M_{\beta(j)} \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n} - 1}). \quad (3.39)$$

Согласно (3.9), (3.35) и (3.36) справедливо равенство

$$\mathbf{c}_{\beta}^0[Q]((x_i^*)_{i \in \overline{0, \mathbf{n} - 1}}) = \max_{i \in \overline{1, \mathbf{n} - 1}} \mathbf{c}(x_{i-1}^*, x_i^*, \{\beta(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n} - 1}\}),$$

откуда согласно (3.37) вытекает, что

$$v(\mathbf{z}, Q) = \max_{i \in \overline{1, \mathbf{n} - 1}} \mathbf{c}(x_{i-1}^*, x_i^*, \{\beta(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n} - 1}\}). \quad (3.40)$$

Учитывая, что  $s - 1 \in \overline{1, \mathbf{n} - 1}$  при  $s \in \overline{2, \mathbf{n}}$ , введем отображение  $\rho : \overline{1, \mathbf{n}} \rightarrow K$  по естественному правилу

$$(\rho(1) \triangleq q) \& (\rho(i) \triangleq \beta(i - 1) \quad \forall i \in \overline{2, \mathbf{n}}). \quad (3.41)$$

Напомним, что  $K = \{q\} \cup Q$ . При этом для  $\tilde{k} \in Q$  имеем в силу сюръективности  $\beta$  равенство  $\tilde{k} = \beta(l)$  для некоторого  $l \in \overline{1, \mathbf{n} - 1}$ , а тогда  $l + 1 \in \overline{2, \mathbf{n}}$  реализует согласно (3.41) цепочку равенств:  $\rho(l + 1) = \beta(l) = \tilde{k}$ . Поскольку выбор  $\tilde{k}$  был произвольным, установлено (см. (3.41)), что

$$\forall k \in K \exists j \in \overline{1, \mathbf{n}} : k = \rho(j)$$

(учитываем, что для  $i \in K$  непременно  $i = q$  или  $i \in Q$ ). Тем самым установлено, что  $\rho$  — сюръекция  $\overline{1, \mathbf{n}}$  на  $K$ .

В связи с проверкой инъективности  $\rho$  заметим, что  $q \notin Q$ , а поэтому  $\rho(1) \neq \beta(j) \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n} - 1}$ . Как следствие имеем из (3.41), что  $\rho(1) \neq \rho(i) \quad \forall i \in \overline{2, \mathbf{n}}$ . С учетом инъективности  $\beta$  имеем теперь из (3.41) свойство инъективности  $\rho$ , т. е.  $\forall i_1 \in \overline{1, \mathbf{n}} \forall i_2 \in \overline{1, \mathbf{n}}$

$$(\rho(i_1) = \rho(i_2)) \Rightarrow (i_1 = i_2).$$

Таким образом,  $\rho \in (\text{bi})[K]$ . Выберем теперь произвольно  $t \in \overline{1, \mathbf{n}}$ , после чего рассмотрим индекс  $\rho(t)$  и множество  $\mathbf{I}(\{\rho(j) : j \in \overline{t, \mathbf{n}}\})$ . При  $t = 1$  имеем с учетом сюръективности  $\rho$  цепочку равенств

$$\mathbf{I}(\{\rho(j) : j \in \overline{t, \mathbf{n}}\}) = \mathbf{I}(\{\rho(j) : j \in \overline{1, \mathbf{n}}\}) = \mathbf{I}(K); \quad (3.42)$$

кроме того, по выбору  $q$  получаем согласно (3.41), что  $\rho(t) = \rho(1) = q \in \mathbf{I}(K)$ . Тем самым (см. (3.42)) установлена импликация

$$(t = 1) \Rightarrow (\rho(t) \in \mathbf{I}(\{\rho(j) : j \in \overline{t, \mathbf{n}}\})). \quad (3.43)$$

Пусть  $t \in \overline{2, \mathbf{n}}$ . Тогда  $t - 1 \in \overline{1, \mathbf{n} - 1}$  и согласно (3.38) и (3.41)

$$\rho(t) = \beta(t - 1) \in \mathbf{I}(\{\beta(j) : j \in \overline{t - 1, \mathbf{n} - 1}\}). \quad (3.44)$$

Вместе с тем в рассматриваемом сейчас случае  $\overline{t, \mathbf{n}} \subset \overline{2, \mathbf{n}}$  и согласно (3.41)  $\rho(i) = \beta(i - 1) \quad \forall i \in \overline{t, \mathbf{n}}$ . Поскольку  $\{i - 1 : i \in \overline{t, \mathbf{n}}\} = \overline{t - 1, \mathbf{n} - 1}$ , то справедлива следующая очевидная цепочка равенств:

$$\{\rho(i) : i \in \overline{t, \mathbf{n}}\} = \{\beta(i - 1) : i \in \overline{t, \mathbf{n}}\} = \{\beta(j) : j \in \overline{t - 1, \mathbf{n} - 1}\},$$

и согласно (3.44) реализуется включение

$$\rho(t) \in \mathbf{I}(\{\rho(i) : i \in \overline{t, \mathbf{n}}\}) \quad (3.45)$$

и при  $t \in \overline{2, \mathbf{n}}$ . Следовательно, истинна импликация

$$(t \in \overline{2, \mathbf{n}}) \Rightarrow (\rho(t) \in \mathbf{I}(\{\rho(i) : i \in \overline{t, \mathbf{n}}\})).$$

С учетом (3.43) получаем теперь справедливость (3.45) во всех возможных случаях. Поскольку выбор  $t$  был произвольным, установлено, что  $\rho(k) \in \mathbf{I}(\{\rho(j) : j \in \overline{k, \mathbf{n}}\}) \forall k \in \overline{1, \mathbf{n}}$ . С учетом (3.4) получаем теперь включение  $\rho \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]$ . С учетом (3.13) имеем очевидное неравенство

$$v(x, K) \leq \min_{(x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{X}[x; K; \rho]} \mathfrak{C}_\rho^0[K]((x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}), \quad (3.46)$$

где значения  $\mathfrak{C}_\rho^0((x_i)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}})$  в (3.45) находятся из (3.9). Напомним, что  $\mathfrak{X}[x; K; \rho]$  есть множество всех кортежей (3.6) при  $m = \mathbf{n}$  таких, что  $x_0 = x$  и  $x_j \in M_{\rho(j)}$  при  $j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ . Введем в рассмотрение кортеж

$$(y_i^*)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}} : \overline{0, \mathbf{n}} \longrightarrow X,$$

для которого  $y_0^* \triangleq x$  и  $y_j^* \triangleq x_{j-1}^* \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}$ . Тогда согласно (3.39)

$$(y_1^* = \mathbf{z}) \& (y_j^* \in M_{\beta(j-1)} \quad \forall j \in \overline{2, \mathbf{n}}). \quad (3.47)$$

По выбору  $\mathbf{z}$  имеем включение  $y_1^* \in M_q$  и согласно (3.41)  $y_1^* \in M_{\rho(1)}$ . С другой стороны, из (3.41) и (3.47) вытекает, что  $y_j^* \in M_{\rho(j)} \forall j \in \overline{2, \mathbf{n}}$ . Объединяя два последние свойства, получаем

$$y_j^* \in M_{\rho(j)} \quad \forall j \in \overline{1, \mathbf{n}}.$$

Следовательно,  $(y_i^*)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}} \in \mathcal{X}[x; K; \rho]$ , а тогда согласно (3.46)

$$v(x, K) \leq \mathfrak{C}_\rho^0[K]((y_i^*)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}). \quad (3.48)$$

С другой стороны, из (3.9) вытекает равенство

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\rho^0[K]((y_i^*)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}) &= \max_{i \in \overline{1, \mathbf{n}}} \mathbf{c}(y_{i-1}^*, y_i^*, \{\rho(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}}\}) \\ &= \sup(\{\mathbf{c}(y_0^*, y_1^*, \{\rho(j) : j \in \overline{1, \mathbf{n}}\})\}; \max_{i \in \overline{2, \mathbf{n}}} \mathbf{c}(y_{i-1}^*, y_i^*, \{\rho(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}}\})\}) \\ &= \sup(\{\mathbf{c}(x, \mathbf{z}, K)\}; \max_{i \in \overline{2, \mathbf{n}}} \mathbf{c}(y_{i-1}^*, y_i^*, \{\rho(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}}\})\}); \end{aligned} \quad (3.49)$$

в (3.49) мы учли определение  $(y_i^*)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}$  (см. в частности, (3.47)), а также свойство сюръективности  $\rho$ . Отметим, что при  $i \in \overline{2, \mathbf{n}}$  имеем  $i-1 \in \overline{1, \mathbf{n}-1}$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(y_{i-1}^*, y_i^*, \{\rho(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}}\}) &= \mathbf{c}(x_{i-2}^*, x_{i-1}^*, \{\rho(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}}\}) \\ &= \mathbf{c}(x_{i-2}^*, x_{i-1}^*, \{\beta(j-1) : j \in \overline{i, \mathbf{n}}\}) = \mathbf{c}(x_{i-2}^*, x_{i-1}^*, \{\beta(s) : s \in \overline{i-1, \mathbf{n}-1}\}). \end{aligned}$$

Как следствие с учетом (3.40) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \max_{i \in \overline{2, \mathbf{n}}} \mathbf{c}(y_{i-1}^*, y_i^*, \{\rho(j) : j \in \overline{i, \mathbf{n}}\}) &= \max_{i \in \overline{2, \mathbf{n}}} \mathbf{c}(x_{i-2}^*, x_{i-1}^*, \{\beta(s) : s \in \overline{i-1, \mathbf{n}-1}\}) \\ &= \max_{j \in \overline{1, \mathbf{n}-1}} \mathbf{c}(x_{j-1}^*, x_j^*, \{\beta(s) : s \in \overline{j, \mathbf{n}-1}\}) = v(\mathbf{z}, Q). \end{aligned}$$

С учетом (3.49) реализуется равенство

$$\mathfrak{C}_\rho^0[K]((y_i^*)_{i \in \overline{0, \mathbf{n}}}) = \sup(\{\mathbf{c}(x, \mathbf{z}, K); v(\mathbf{z}, Q)\}),$$

откуда согласно (3.48) получаем оценку

$$v(x, K) \leq \sup(\{\mathbf{c}(x, \mathbf{z}, K); v(\mathbf{z}, Q)\}). \quad (3.50)$$

Из (3.33) и (3.50) получаем неравенство

$$v(x, K) \leq \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, y, K); v(y, K \setminus \{j\})\}),$$

из которого с учетом (3.32) вытекает представление

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathbf{c}(x, y, K); v(y, K \setminus \{j\})\})$$

и в случае  $\mathbf{n} \in \overline{2, N}$ , откуда с учетом (3.18) вытекает равенство (3.17) во всех возможных случаях.  $\square$

Предложение 3.1 определяет уравнение Беллмана, которое естественным образом дополняется посредством (3.14), (3.15).

#### 4. Усеченный вариант построения функции Беллмана

В настоящем разделе, подобно разд. 4 работы [1], предлагается конструкция, доставляющая сужение функции Беллмана (3.16) на п/м  $X \times \mathbf{N}$ ; это сужение требует для своего построения менее трудоемких процедур за счет рационального учета ограничений в виде условий предшествования. Упомянутое сужение оказывается, однако, достаточным [1, 6] для построения оптимального решения. Следовательно, на основе насчитывания усеченного существенным образом массива значений функции Беллмана в рассматриваемой задаче удастся реализовать с меньшими вычислительными затратами оптимальное решение по МДП.

Приводимая ниже конструкция соответствует [1, § 4] и [6, § 4.9]; поэтому ограничимся кратким изложением, ориентируясь на построения [1] и полагая, что

$$\mathfrak{N}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid s = |K|\}.$$

Напомним, что через  $\mathbf{N}$  обозначается семейство всех п/м  $\overline{1, N}$ , т. е.  $\mathbf{N} \triangleq \mathfrak{N} \cup \{\emptyset\}$ . Наконец, пусть  $\mathbf{N}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid s = |K|\} \forall s \in \overline{0, N}$ . Ясно, что  $\mathfrak{N}_s = \mathbf{N}_s$  при  $s \in \overline{1, N}$  и  $\mathbf{N}_0 = \{\emptyset\}$ ; как следствие  $\mathfrak{N}_N = \mathbf{N}_N = \{\overline{1, N}\}$ . Тогда (см. [1, (4.5)])

$$\mathcal{C}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{N}_s \mid \forall j \in \overline{1, n} ((p_j \in K) \Rightarrow (q_j \in K))\} \quad \forall s \in \overline{1, N}; \quad (4.1)$$

основные свойства семейств (4.1) см. в [1, с. 135]. В соответствии с [1, (4.8)] обозначаем через  $\mathbf{M}$  объединение всех множеств  $M_i$ ,  $i \in \overline{1, N} \setminus \{p_i : i \in \overline{1, n}\}$ . Далее, при  $s \in \overline{1, N-1}$  и  $K \in \mathcal{C}_s$  полагаем, что

$$\mathcal{I}_s(K) \triangleq \{i \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{i\} \cup K \in \mathcal{C}_{s+1}\}.$$

В этих терминах конструируются слои пространства позиций

$$D_0 \triangleq \mathbf{M} \times \{\emptyset\} = \mathbf{M} \times \mathbf{N}_0, \quad D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1, N})\}; \quad (4.2)$$

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{C}_s} \left\{ (x, K) : x \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}_s(K)} M_i \right\} \quad \forall s \in \overline{1, N-1}. \quad (4.3)$$

Согласно предложению 4.3 работы [1]  $D_s \neq \emptyset \forall s \in \overline{0, N}$ . Кроме того (см. предложение 4.4 работы [1]),  $\forall s \in \overline{1, N} \forall (x, K) \in D_s \forall k \in \mathbf{I}(K) \forall y \in M_k$

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1}. \quad (4.4)$$

Свойство (4.1) допускает определенную аналогию со свойством стабильности (слабой инвариантности) мостов в теории дифференциальных игр (см. [7, 8]), предложенным Н.Н. Красовским и сыгравшим важную роль в обосновании фундаментальной теоремы об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина.

Следуя [1, (4.13)], введем для всякого  $s \in \overline{0, N}$  отображение  $\mathcal{V}_s : D_s \rightarrow [0, \infty[$ , для которого

$$\mathcal{V}_s(x, K) = v(x, K) \quad \forall (x, K) \in D_s. \quad (4.5)$$

Итак, мы рассматриваем сужения функции Беллмана на слои (4.2), (4.3). В результате получаем кортеж  $(\mathcal{V}_s)_{s \in \overline{0, N}}$  сужений функции Беллмана, т. е. систему функций

$$\mathcal{V}_0 : D_0 \rightarrow [0, \infty[, \mathcal{V}_1 : D_1 \rightarrow [0, \infty[, \dots, \mathcal{V}_N : D_N \rightarrow [0, \infty[.$$

С учетом (4.4) получаем (см. [1, с. 136]), что при  $s \in \overline{1, N}$ ,  $(x, K) \in D_s$ ,  $k \in \mathbf{I}(K)$  и  $y \in M_k$  определено значение  $\mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) \in [0, \infty[$ . Как следствие при  $s \in \overline{1, N}$  и  $(x, K) \in D_s$  определен экстремум

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} \sup(\{c(x, y, K); \mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\})\}) \in [0, \infty[.$$

Более того, из предложения 3.1, (4.4) и (4.5) вытекает свойство  $\forall s \in \overline{1, N} \quad \forall (x, K) \in D_s$

$$\mathcal{V}_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup(\{c(x, y, K); \mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{j\})\}). \quad (4.6)$$

Отметим, что согласно (4.5) функция  $\mathcal{V}_0$ , определенная на  $D_0$ , такова, что (см. (3.15), (4.5))

$$\mathcal{V}_0(x, \emptyset) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{M}. \quad (4.7)$$

Кроме того, из (3.14), (4.2) и (4.6) получаем равенство

$$V = \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}). \quad (4.8)$$

С учетом (4.6), (4.7) нетрудно указать процедуру построения всех функций

$$\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_N. \quad (4.9)$$

В самом деле, функция  $\mathcal{V}_0$  определена в (4.7). Пусть  $m \in \overline{0, N}$  и кортеж функций  $(\mathcal{V}_i)_{i \in \overline{0, m}}$  уже построен. Если  $m = N$ , то процедура построения функций (4.9) завершена. Если же  $m \neq N$ , т. е.  $m \in \overline{0, N-1}$ , то  $\mathcal{V}_{m+1}$  определяется (см. (4.6)) следующим образом: при  $(x, K) \in D_{m+1}$

$$\mathcal{V}_{m+1}(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} \sup(\{c(x, y, K); \mathcal{V}_m(y, K \setminus \{j\})\}). \quad (4.10)$$

После конечного числа шагов, подобных (4.10), все функции (4.9) будут построены. В частности, будет определено значение (2.12), (4.8), т. е. экстремум основной задачи (2.11).

Подчеркнем важное обстоятельство. Хотя функции (4.9) были построены посредством (4.6) в терминах функции (3.16), значения которой на всем множестве  $X \times \mathbf{N}$  нам могут быть неизвестны, при конкретном построении упомянутых функций (4.9) не используется информация обо всех значениях отображения (3.16); точнее, весь массив значений (3.16) не используется, и мы его можем даже (полностью) и не знать. Вместо этого мы используем цепочку построений

$$\mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{V}_{N-1} \rightarrow \mathcal{V}_N,$$

каждое звено которой обслуживается процедурой на основе соотношения (4.6) при надлежащем выборе параметра  $s$ .

Отметим, что рассматриваемая задача на идейном уровне восходит к известной задаче коммивояжера, являющейся трудно решаемой в традиционном смысле для теории сложности (одна из классических NP — полных задач; см. [9]). Поэтому ограничение массива насчитываемых значений функции Беллмана без потери оптимальности (см. следующий раздел) является важным с точки зрения вычислительной реализации моментом.

## 5. Построение оптимального решения

В настоящем разделе излагается конструкция, позволяющая построить решение в виде пары  $(\alpha^0, (x_i^0)_{i \in \overline{0, N}})$ , где  $\alpha^0 \in \mathbb{A}$  и  $(x_i^0)_{i \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}[\alpha^0]$ , для которой

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0}((x_i^0)_{i \in \overline{0, N}}) = V. \quad (5.1)$$

Упомянутую упорядоченную пару естественно рассматривать (см. (2.12)) как оптимальное решение задачи (2.11); при этом, конечно,  $(x_i^0)_{i \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \rightarrow X$  и, кроме того,

$$(x_0 = x^0) \& (x_j^0 \in M_{\alpha^0(j)} \quad \forall j \in \overline{1, N}).$$

Полагаем, что нам известны все функции (4.9), т. е. все функции

$$\mathcal{V}_0 : D_0 \rightarrow [0, \infty[, \mathcal{V}_1 : D_1 \rightarrow [0, \infty[, \dots, \mathcal{V}_N : D_N \rightarrow [0, \infty[. \quad (5.2)$$

В частности, известно значение  $V$ . Информацией о значениях функции (3.16) в точках, не принадлежащих объединению всех множеств  $D_i$ ,  $i \in \overline{0, N}$ , мы, вообще говоря, не располагаем.

Согласно (3.14), (4.2), (4.4) и (4.8) мы в силу (4.5) имеем равенство

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathbf{c}(x^0, y, \overline{1, N}); \mathcal{V}_{N-1}(y, \overline{1, N} \setminus \{j\})\}). \quad (5.3)$$

Полагаем  $\mathbf{x}_0 \triangleq x^0$ . С учетом (5.3) выбираем  $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$  и  $\mathbf{x}_1 \in M_{\mathbf{i}_1}$ , для которых

$$V = \sup(\{\mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1, \overline{1, N}); \mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})\}). \quad (5.4)$$

Тогда, коль скоро  $(x^0, \overline{1, N}) \in D_N$  согласно (4.2), имеем из (4.4) свойство

$$(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \in D_{N-1}. \quad (5.5)$$

Согласно (5.2), (5.5) определено значение  $\mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \in [0, \infty[$ ; это значение соответствует доступной информации, определяемой набором функций (4.9), (5.2). При этом согласно (4.4) и (5.5) имеем (поскольку  $N-1 \in \overline{1, N}$ ), что при всяком выборе  $k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$  и  $y \in M_k$

$$(y, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; k\}) = (y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \setminus \{k\}) \in D_{N-2}.$$

Более того, справедливо равенство

$$\mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})} \min_{y \in M_j} \sup(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, y, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}); \mathcal{V}_{N-2}(y, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; j\})\}). \quad (5.6)$$

Теперь выбираем с учетом (5.6)  $\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$  и  $\mathbf{x}_2 \in M_{\mathbf{i}_2}$  так, что при этом

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) &= \sup(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}); \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\})\}) \\ &= \sup(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}); \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, 2}\})\}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

С учетом (4.4) и (5.5) получаем, что

$$(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, 2}\}) \in D_{N-2}, \quad (5.8)$$

а тогда согласно (5.2), (5.8) определено значение  $\mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, 2}\}) \in [0, \infty[$ , которое использовалось в (5.7). Из (5.4) и (5.7) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} V &= \sup(\{\mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1, \overline{1, N}); \sup(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}); \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, 2}\})\})\}) \\ &= \sup(\{\mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1, \overline{1, N}); \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}); \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, 2}\})\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup(\{\sup(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \overline{1, N}); \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})\}); \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, 2}\})\}) \\
&= \sup(\{\max_{j \in \overline{1, 2}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}); \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, 2}\})\}), \quad (5.9)
\end{aligned}$$

где учтено равенство  $\overline{1, 0} = \emptyset$ . Пусть  $r \in \overline{2, N}$  и уже построены два кортежа

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, r}} : \overline{1, r} \longrightarrow \overline{1, N}, (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, r}} : \overline{0, r} \longrightarrow X, \quad (5.10)$$

для которых выполнены следующие условия:

- (1')  $(\mathbf{x}_0 = x^0) \& (\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j} \quad \forall j \in \overline{1, r})$ ;
- (2')  $\mathbf{i}_j \neq \mathbf{i}_k \quad \forall j \in \overline{1, r} \quad \forall k \in \overline{1, r} \setminus \{j\}$ ;
- (3')  $(\mathbf{x}_k, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1, r}$ ;
- (4')  $\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1, r}$ ;
- (5')  $\mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) = \sup(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}); \mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j}\})\}) \quad \forall j \in \overline{1, r}$ ;
- (6')  $V = \sup(\{\max_{j \in \overline{1, r}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}); \mathcal{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r}\})\})$ .

**З а м е ч а н и е** 5.1. При  $r = 2$  все утверждения (1')–(6') истинны.

В самом деле,  $\mathbf{x}_0 = x^0$  по определению,

$$(\mathbf{x}_1 \in M_{\mathbf{i}_1}) \& (\mathbf{x}_2 \in M_{\mathbf{i}_2})$$

по построению. Следовательно, справедливо (1') (при  $r = 2$ ). Далее, по выбору  $\mathbf{i}_2$  имеем, в частности, свойство  $\mathbf{i}_2 \in \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}$  согласно (3.3), т. е.  $\mathbf{i}_1 \neq \mathbf{i}_2$ . Свойство (2') имеет место. Свойство (3') вытекает из (5.5) и (5.8), поскольку  $\overline{1, r} = \overline{1, 2} = \{1\} \cup \{2\}$ . Свойство (4') непосредственно получается по выбору  $\mathbf{i}_1$  и  $\mathbf{i}_2$ ; при этом учитывается, что  $\overline{1, 0} = \emptyset$ , а потому

$$\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, 0}\} = \overline{1, N}; \quad (5.11)$$

кроме того,  $\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, 1}\} = \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}$ . Свойство (5') также справедливо (при  $r = 2$ ): следует учесть (4.8), (5.4), (5.7) и (5.9); напомним, что  $\mathbf{x}_0 = x^0$ . Наконец, (6') вытекает в рассматриваемом случае из (5.9). Итак, в случае  $r = 2$  мы располагаем парой кортежей  $(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, r}}$  и  $(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, r}}$ , удовлетворяющих (1')–(6').  $\square$

Вернемся к общему случаю (1')–(6'). Возможен один из следующих двух случаев:

$$(r = N) \vee (r \in \overline{2, N-1}). \quad (5.12)$$

Оба случая, упомянутых в (5.12), рассмотрим отдельно.

1) Пусть  $r = N$ . Тогда  $\eta \triangleq (\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, r}} = (\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, N}} \in \mathbb{P}$  согласно (2'). Как следствие имеем систему равенств

$$\{\eta(k) : k \in \overline{j, N}\} = \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{j, N}\} = \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\} = \overline{1, N} \setminus \{\eta(k) : k \in \overline{1, j-1}\} \quad \forall j \in \overline{1, N}. \quad (5.13)$$

С учетом (4') имеем теперь следующие соотношения:

$$\eta(j) = \mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\{\eta(k) : k \in \overline{j, N}\}) \quad \forall j \in \overline{1, N}.$$

Из (3.4) и последнего соотношения вытекает свойство допустимости маршрута  $\eta : \eta \in (\mathbf{I} - \text{bi})[\overline{1, N}]$ ; как следствие (см. (3.5))

$$\eta \in \mathbb{A}. \quad (5.14)$$

Кроме того, кортеж  $(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, r}} = (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, N}}$  согласно (1') является допустимой (при выборе  $\eta$  (5.14)) трассой

$$(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}[\eta], \quad (5.15)$$

поскольку  $\eta(s) = \mathbf{i}_s \ \forall s \in \overline{1, N}$ . Следовательно,  $(\eta, (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, N}})$  есть допустимая пара маршрут-трасса. Отметим, кстати, что  $(\mathbf{x}_N, \emptyset) \in D_0$ . В самом деле, согласно (1') имеем в рассматриваемом случае включение  $\mathbf{x}_N \in M_{\eta(N)}$ , где  $\eta(N) = \mathbf{i}_N \neq p_i \ \forall i \in \overline{1, n}$ . Действительно, если последнее неравенство неверно, т. е.  $\eta(N) = p_l$  для некоторого  $l \in \overline{1, n}$ , то согласно (5.14)

$$\eta^{-1}(\eta(N)) = \eta^{-1}(p_l) < \eta^{-1}(q_l), \quad (5.16)$$

где  $\eta^{-1}(q_l) \in \overline{1, N}$ . Поскольку  $\eta^{-1}(\eta(N)) = N$ , то (5.16) невозможно. Поэтому

$$\eta(N) \in \overline{1, N} \setminus \{p_i : i \in \overline{1, n}\},$$

а тогда  $\mathbf{x}_N \in \mathbf{M}$ , и согласно (4.2) мы имеем требуемое свойство пары  $(\mathbf{x}_N, \emptyset)$ . Как следствие определено  $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_N, \emptyset) = 0$ .

В рассматриваемом сейчас случае согласно (6')

$$\begin{aligned} V &= \sup(\{\max_{j \in \overline{1, N}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}); \mathcal{V}_0(\mathbf{x}_N, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, N}\})\}) \\ &= \sup(\{\max_{j \in \overline{1, N}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{j, N}\}); \mathcal{V}_0(\mathbf{x}_N, \emptyset)\}) \\ &= \max_{j \in \overline{1, N}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \{\eta(k) : k \in \overline{j, N}\}) = \mathfrak{C}_\eta((\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, N}}), \end{aligned} \quad (5.17)$$

где учтены соотношения (2.10), (4.7) и (5.13). Из (5.14), (5.15) и (5.17) получаем, что упорядоченная пара

$$(\eta, (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, N}}), \quad \eta \in \mathbb{A}, \quad (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, N}} \in \mathfrak{X}[\eta]$$

удовлетворяет равенству  $\mathfrak{C}_\eta((\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, N}}) = V$  и, стало быть, является оптимальной парой маршрут-трасса (см. (2.13)). Таким образом, в случае 1) мы уже располагаем оптимальным решением основной задачи (2.11).

2) Пусть  $r \in \overline{2, N-1}$  и, следовательно,  $r+1 \in \overline{3, N}$ . Напомним, что согласно (3')

$$(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \in D_{N-r}. \quad (5.18)$$

Тогда из (4.4) и (5.18) вытекает, что

$$(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{k\}) \in D_{N-(r+1)}, \quad (5.19)$$

если только  $k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\})$  и  $y \in M_k$ ; поэтому для таких  $k$  и  $y$  определено (см. (4.5)) значение

$$\mathcal{V}_{N-(r+1)}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{k\}) \in [0, \infty[.$$

Более того, согласно (4.5) и (5.18) имеем равенство

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \\ &= \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\})} \min_{y \in M_k} \sup(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_r, y, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}); \mathcal{V}_{N-(r+1)}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{k\})\}). \end{aligned}$$

С учетом этого равенства выбираем индекс

$$\mathbf{i}_{r+1} \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \quad (5.20)$$

и точку  $\mathbf{x}_{r+1} \in M_{\mathbf{i}_{r+1}}$  так, что при этом

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \\ &= \sup(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}); \mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r+1}\})\}). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Заметим, что из (5.20), в частности, следует (см. (3.3)), что

$$\mathbf{i}_{r+1} \in \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}. \quad (5.22)$$

Кроме того,  $\mathbf{x}_{r+1} \in X$ . Мы имеем, следовательно, два кортежа

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, r+1}} : \overline{1, r+1} \longrightarrow \overline{1, N}, \quad (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{0, r+1}} : \overline{0, r+1} \longrightarrow X \quad (5.23)$$

(см. (5.10)). Из (1') имеем по выбору  $\mathbf{x}_{r+1}$  свойство

$$(1'') (\mathbf{x}_0 = x^0) \& (\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j} \quad \forall j \in \overline{1, r+1}).$$

Из (2') и (5.22) вытекает очевидное свойство

$$(2'') \mathbf{i}_j \neq \mathbf{i}_k \quad \forall j \in \overline{1, r+1} \quad \forall k \in \overline{1, r+1} \setminus \{j\}.$$

Из (5.19) имеем по выбору  $\mathbf{i}_{r+1}$  (см. (5.20)) и  $\mathbf{x}_{r+1}$ , что

$$(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r+1}\}) \in D_{N-(r+1)},$$

откуда с учетом (3') имеем свойство

$$(3'') (\mathbf{x}_k, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1, r+1}.$$

Из (4') и (5.20) получаем также утверждение

$$(4'') \mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1, r+1}.$$

В свою очередь, из (5') и (5.21) вытекает свойство

$$(5'') \mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) = \sup(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}); \mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j}\})\}) \quad \forall j \in \overline{1, r+1}.$$

Наконец, из (6') и (5.21) вытекает, что

$$V = \sup(\{\max_{j \in \overline{1, r}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}); \sup(\{\mathbf{c}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\});$$

$$\mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r+1}\})\});$$

$$= \sup(\{\max_{j \in \overline{1, r+1}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}); \mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r+1}\})\});$$

последнее означает справедливость свойства

$$(6'') V = \sup(\{\max_{j \in \overline{1, r+1}} \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}); \mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r+1}\})\}).$$

Таким образом, в рассматриваемом сейчас случае 2), т. е. при  $r \in \overline{2, N-1}$ , каждый из кортежей (5.10) продолжен на один шаг до соответствующего кортежа в (5.23) с сохранением всех основных свойств: система условий (1')–(6') преобразуется в систему (1'')–(6''). Тем самым реализуется регулярный шаг процедуры на основе МДП. После конечного числа таких регулярных шагов мы приходим к ситуации, обсуждавшейся в случае 1), т. е. к оптимальному решению основной задачи.

## 6. Вычислительный эксперимент

Приведенный в статье алгоритм решения маршрутной задачи был реализован в виде программы для ПЭВМ на языке программирования C++ (CodeGear C++ Builder 2009), работающей под управлением 32-битной операционной системы Windows XP или Windows Vista. Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления результатов решения (маршрута и трассы) с возможностью увеличения отдельных участков

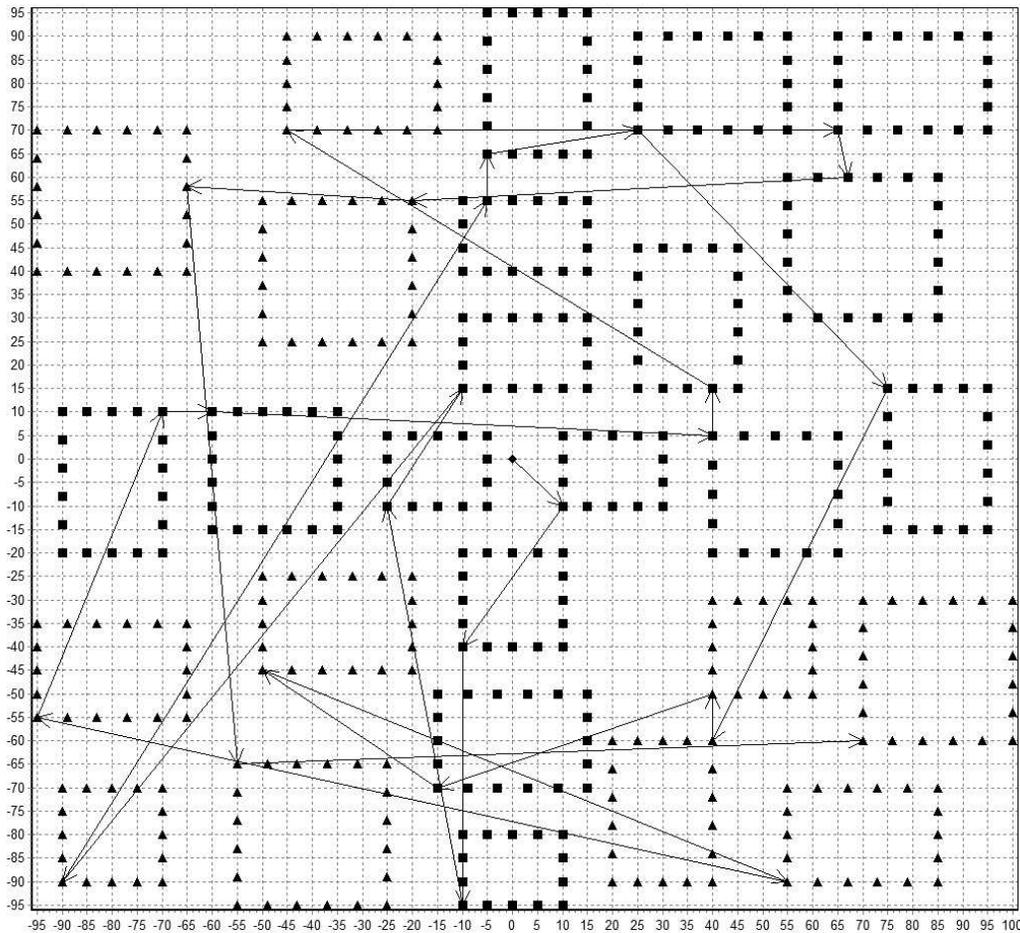
графика и сохранения изображения в графический файл формата bmp. Вычисления проводились на портативном компьютере (Notebook) с процессором Intel Core2Duo T7700 с тактовой частотой 2.4 ГГц и объемом оперативной памяти 3 ГБ с установленной операционной системой Windows Vista Business Sp1.

Для наглядности представления результатов рассматривался пример решения задачи на плоскости, т. е.  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Пусть задано  $N = 27$  конечных множеств, являющихся сетками на прямоугольниках со сторонами, параллельными осям абсцисс и ординат. Для формализации задания множеств введем следующую систему обозначений. Обозначим для каждого  $i$ -го множества,  $i \in \overline{1, N}$ , левую нижнюю вершину прямоугольника через  $O_i$ , количество точек по горизонтали — через  $N_i^x$ , количество точек по вертикали — через  $N_i^y$ , длину горизонтальной стороны — через  $L_i^x$ , а длину вертикальной стороны — через  $L_i^y$ . Построение каждого  $i$ -го множества осуществляется таким образом, что на сторонах, параллельных оси абсцисс откладываются на равных расстояниях друг от друга  $N_i^x$  точек, включая угловые вершины, расстояние между которыми составляет  $L_i^x$ , а на сторонах, параллельных оси ординат, размещаются на равном удалении друг от друга  $N_i^y$  точек, в том числе угловые вершины, расстояние между которыми равно  $L_i^y$ . Будем придерживаться принципа нумерации точек по часовой стрелке, начиная от левой нижней вершины прямоугольника, т. е. от точки  $O_i$  (ее индекс равен 1). Таким образом, каждое  $i$ -е множество  $M_i$ ,  $i \in \overline{1, N}$ , однозначно представляется пятеркой  $(O_i, N_i^x, N_i^y, L_i^x, L_i^y)$ , а мощность множества равна  $2N_i^x + 2(N_i^y - 2) = 2(N_i^x - 2) + 2N_i^y$ .

Пусть (начальная) точка  $x^0$  совпадает с началом координат. Как уже отмечалось в тексте статьи, данный алгоритм подразумевает использование критерия агрегирования затрат типа “максимум”, т. е. решение задачи “на узкие места”.

Итак, пусть множества  $M_i$ ,  $i \in \overline{1, 27}$ , заданы следующими пятерками параметров:

|          |                         |                  |                  |                   |                   |
|----------|-------------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| $M_1$    | $O_1 = (10, -10)$ ,     | $N_1^x = 5$ ,    | $N_1^y = 4$ ,    | $L_1^x = 20$ ,    | $L_1^y = 15$ ;    |
| $M_2$    | $O_2 = (40, -20)$ ,     | $N_2^x = 5$ ,    | $N_2^y = 5$ ,    | $L_2^x = 25$ ,    | $L_2^y = 25$ ;    |
| $M_3$    | $O_3 = (75, -15)$ ,     | $N_3^x = 5$ ,    | $N_3^y = 6$ ,    | $L_3^x = 20$ ,    | $L_3^y = 30$ ;    |
| $M_4$    | $O_4 = (-10, -40)$ ,    | $N_4^x = 5$ ,    | $N_4^y = 5$ ,    | $L_4^x = 20$ ,    | $L_4^y = 20$ ;    |
| $M_5$    | $O_5 = (-15, -70)$ ,    | $N_5^x = 6$ ,    | $N_5^y = 5$ ,    | $L_5^x = 30$ ,    | $L_5^y = 20$ ;    |
| $M_6$    | $O_6 = (-10, -95)$ ,    | $N_6^x = 5$ ,    | $N_6^y = 4$ ,    | $L_6^x = 20$ ,    | $L_6^y = 15$ ;    |
| $M_7$    | $O_7 = (-25, -10)$ ,    | $N_7^x = 5$ ,    | $N_7^y = 4$ ,    | $L_7^x = 20$ ,    | $L_7^y = 15$ ;    |
| $M_8$    | $O_8 = (-60, -15)$ ,    | $N_8^x = 6$ ,    | $N_8^y = 6$ ,    | $L_8^x = 30$ ,    | $L_8^y = 30$ ;    |
| $M_9$    | $O_9 = (-90, -20)$ ,    | $N_9^x = 5$ ,    | $N_9^y = 6$ ,    | $L_9^x = 20$ ,    | $L_9^y = 30$ ;    |
| $M_{10}$ | $O_{10} = (-10, 15)$ ,  | $N_{10}^x = 6$ , | $N_{10}^y = 4$ , | $L_{10}^x = 25$ , | $L_{10}^y = 15$ ; |
| $M_{11}$ | $O_{11} = (-10, 40)$ ,  | $N_{11}^x = 6$ , | $N_{11}^y = 4$ , | $L_{11}^x = 25$ , | $L_{11}^y = 15$ ; |
| $M_{12}$ | $O_{12} = (-5, 65)$ ,   | $N_{12}^x = 5$ , | $N_{12}^y = 6$ , | $L_{12}^x = 20$ , | $L_{12}^y = 30$ ; |
| $M_{13}$ | $O_{13} = (25, 15)$ ,   | $N_{13}^x = 5$ , | $N_{13}^y = 6$ , | $L_{13}^x = 20$ , | $L_{13}^y = 30$ ; |
| $M_{14}$ | $O_{14} = (25, 70)$ ,   | $N_{14}^x = 6$ , | $N_{14}^y = 5$ , | $L_{14}^x = 30$ , | $L_{14}^y = 20$ ; |
| $M_{15}$ | $O_{15} = (65, 70)$ ,   | $N_{15}^x = 6$ , | $N_{15}^y = 5$ , | $L_{15}^x = 30$ , | $L_{15}^y = 20$ ; |
| $M_{16}$ | $O_{16} = (55, 30)$ ,   | $N_{16}^x = 6$ , | $N_{16}^y = 6$ , | $L_{16}^x = 30$ , | $L_{16}^y = 30$ ; |
| $M_{17}$ | $O_{17} = (40, -50)$ ,  | $N_{17}^x = 5$ , | $N_{17}^y = 5$ , | $L_{17}^x = 20$ , | $L_{17}^y = 20$ ; |
| $M_{18}$ | $O_{18} = (20, -90)$ ,  | $N_{18}^x = 5$ , | $N_{18}^y = 6$ , | $L_{18}^x = 20$ , | $L_{18}^y = 30$ ; |
| $M_{19}$ | $O_{19} = (70, -60)$ ,  | $N_{19}^x = 6$ , | $N_{19}^y = 6$ , | $L_{19}^x = 30$ , | $L_{19}^y = 30$ ; |
| $M_{20}$ | $O_{20} = (55, -90)$ ,  | $N_{20}^x = 6$ , | $N_{20}^y = 5$ , | $L_{20}^x = 30$ , | $L_{20}^y = 20$ ; |
| $M_{21}$ | $O_{21} = (-50, -45)$ , | $N_{21}^x = 6$ , | $N_{21}^y = 5$ , | $L_{21}^x = 30$ , | $L_{21}^y = 20$ ; |
| $M_{22}$ | $O_{22} = (-55, -95)$ , | $N_{22}^x = 6$ , | $N_{22}^y = 6$ , | $L_{22}^x = 30$ , | $L_{22}^y = 30$ ; |
| $M_{23}$ | $O_{23} = (-95, -55)$ , | $N_{23}^x = 6$ , | $N_{23}^y = 5$ , | $L_{23}^x = 30$ , | $L_{23}^y = 20$ ; |
| $M_{24}$ | $O_{24} = (-90, -90)$ , | $N_{24}^x = 5$ , | $N_{24}^y = 5$ , | $L_{24}^x = 20$ , | $L_{24}^y = 20$ ; |
| $M_{25}$ | $O_{25} = (-50, 25)$ ,  | $N_{25}^x = 6$ , | $N_{25}^y = 6$ , | $L_{25}^x = 30$ , | $L_{25}^y = 30$ ; |
| $M_{26}$ | $O_{26} = (-95, 40)$ ,  | $N_{26}^x = 6$ , | $N_{26}^y = 6$ , | $L_{26}^x = 30$ , | $L_{26}^y = 30$ ; |
| $M_{27}$ | $O_{27} = (-45, 70)$ ,  | $N_{27}^x = 6$ , | $N_{27}^y = 5$ , | $L_{27}^x = 30$ , | $L_{27}^y = 20$ ; |



Маршрут и трасса обхода множеств.

Пусть функция, количественно описывающая вредное воздействие при проведении регламентных работ, которое мы стремимся минимизировать, имеет следующий вид:

$$c(x', x'', K) = \gamma \rho(x', x'') |K| + T(x'') \sum_{i \in K} h_i,$$

где  $\gamma \in ]0, \infty[$ ,  $\rho(x', x'')$  — евклидово расстояние между точками  $x'$  и  $x''$ , значения  $h_i \in ]0, \infty[$  определены при всех  $i \in \overline{1, N}$ . Функцию  $T$  определим на множестве  $\bigcup_{i=1}^N M_i$  следующим образом:  $\forall i \in \overline{1, N} \quad T_i = L_i^x L_i^y$ , т. е. величина  $T_i$  равна площади прямоугольника, на котором в виде сетки задано вышеупомянутым способом множество  $M_i$ .

Пусть в нашем конкретном случае число  $\gamma$  равно 1.3, а  $h_i$ ,  $i \in \overline{1, 20}$ , имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} h_1 &= 3.6, h_2 = 4.1, h_3 = 5.2, h_4 = 5.5, h_5 = 3.9, h_6 = 4.5, h_7 = 3.8, \\ h_8 &= 3.1, h_9 = 4.2, h_{10} = 4.9, h_{11} = 5.5, h_{12} = 5.8, h_{13} = 4.7, h_{14} = 3.3, \\ h_{15} &= 4.2, h_{16} = 4.8, h_{17} = 3.6, h_{18} = 3.7, h_{19} = 4.1, h_{20} = 3.9, \\ h_{21} &= 3.3, h_{22} = 5.2, h_{23} = 4.3, h_{24} = 4.9, h_{25} = 3.8; h_{26} = 5.4, h_{27} = 4.4. \end{aligned}$$

Зададим  $n = 20$ , следовательно условия предшествования представлены в виде 20 пар  $(p_i, q_i)$ ,  $i \in \overline{1, 20}$ , здесь множество с индексом  $p_i$  должно посещаться раньше множества с индексом  $q_i$ . Итак, пусть вышеупомянутые компоненты адресных пар имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, q_1 = 10; p_2 = 12, q_2 = 2; p_3 = 2, q_3 = 13; p_4 = 13, q_4 = 15; \\ p_5 &= 6, q_5 = 16; p_6 = 15, q_6 = 16; p_7 = 9, q_7 = 27; p_8 = 10, q_8 = 9; \\ p_9 &= 11, q_9 = 19; p_{10} = 20, q_{10} = 19; p_{11} = 25, q_{11} = 26; p_{12} = 21, q_{12} = 20; \end{aligned}$$

$$p_{13} = 24, q_{13} = 22; p_{14} = 14, q_{14} = 16; p_{15} = 8, q_{15} = 2; p_{16} = 1, q_{16} = 9; \\ p_{17} = 14, q_{17} = 26; p_{18} = 2, q_{18} = 27; p_{19} = 3, q_{19} = 19; p_{20} = 18, q_{20} = 17.$$

Были получены следующие результаты:

Наименьшая величина полученного вредного воздействия:  $\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) = 51260$ .

Маршрут и трасса:

$$X^0 = (0, 0) \rightarrow (10, -10) \in M_1 \rightarrow (-10, -40) \in M_4 \rightarrow (-10, -95) \in M_6 \\ \rightarrow (-25, -10) \in M_7 \rightarrow (-10, 15) \in M_{10} \rightarrow (-90, -90) \in M_{24} \\ \rightarrow (-5, 55) \in M_{11} \rightarrow (-5, 65) \in M_{12} \rightarrow (25, 70) \in M_{14} \\ \rightarrow (75, 15) \in M_3 \rightarrow (40, -60) \in M_{18} \rightarrow (40, -50) \in M_{17} \\ \rightarrow (-15, -70) \in M_5 \rightarrow (-50, -45) \in M_{21} \rightarrow (55, -90) \in M_{20} \\ \rightarrow (-95, -55) \in M_{23} \rightarrow (-70, 10) \in M_9 \rightarrow (-60, 10) \in M_8 \\ \rightarrow (40, 5) \in M_2 \rightarrow (40, 15) \in M_{13} \rightarrow (-45, 70) \in M_{27} \\ \rightarrow (65, 70) \in M_{15} \rightarrow (67, 60) \in M_{16} \rightarrow (-20, 55) \in M_{25} \\ \rightarrow (-65, 58) \in M_{26} \rightarrow (-55, -65) \in M_{22} \rightarrow (70, -60) \in M_{19}.$$

Время счета составило 29 мин. 29 сек.

График маршрута и трассы приведен на рисунке.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Экстремальная задача маршрутизации “на узкие места” с ограничениями в виде условий предшествования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, №2. С.129–142.
2. **Сигал И.Х., Иванова А.П.** Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М.: Наука, 2007. 304 с.
3. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
4. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.** Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 2002. 960 с.
5. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
6. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 240 с.
7. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
8. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и трудно решаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.

Сесекин Александр Николаевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
ведущий науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: sesekin@imm.uran.ru

Поступила 30.11.2009

Ченцов Алексей Александрович  
канд. физ.-мат. наук  
гл. программист  
Ин-т математики и механики УрО РАН

Ченцов Александр Георгиевич  
чл.-корр. РАН  
зав. отделом  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

УДК 517.977

**О МНОЖЕСТВЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛОКАЛЬНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПРИ ЭВОЛЮЦИИ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ<sup>1</sup>****А. А. Успенский, П. Д. Лебедев**

Изучается проблема возникновения негладких особенностей при эволюции плоских волновых фронтов в задаче Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка. Техника исследования особенностей опирается на свойства локальных диффеоморфизмов. Вводится обобщение классического понятия производной, совпадающее в частных случаях с производной Шварца. Приводятся результаты моделирования решений негладких динамических задач.

Ключевые слова: уравнение в частных производных первого порядка, минимаксное решение, диффеоморфизм, эйконал, функция оптимального результата, множество симметрии.

A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev. On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront evolution.

We study the problem of the appearance of nonsmooth singularities in the evolution of plane wavefronts in the Dirichlet problem for a first-order partial differential equation. The approach to investigating the singularities is based on the properties of local diffeomorphisms. A generalization of the classical notion of a derivative is introduced, which coincides in particular cases with the Schwarz derivative. The results of modeling solutions of nonsmooth dynamic problems are presented.

Keywords: first-order partial differential equation, minimax solution, diffeomorphism, eikonal, optimal result function, symmetry set.

**Введение**

Классические гладкие решения краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных первого порядка существуют в редких случаях. Проблема построения нелокальной теории для таких уравнений приводит к необходимости введения обобщенных решений. Известны различные подходы [1–5] к определению обобщенных решений уравнений. В данной работе используется концепция минимаксного решения [2], которая базируется на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр [6]. Рассматривается краевая задача Дирихле для уравнения в частных производных гамильтонова типа. Ее минимаксное решение совпадает с функцией оптимального результата для соответствующей задачи быстрогодействия. Поскольку эта функция противоположна по знаку эйконалу — решению основного уравнения геометрической оптики для среды с постоянным коэффициентом преломления, то ее линии уровня интерпретируются как волновые фронты [7, 8]. Исходная постановка задачи Дирихле является достаточно общей в части краевого условия, допускает невыпуклость краевого множества и негладкость его границы. Излагаются элементы численно-аналитического подхода к построению совокупности волновых фронтов, основанного на выделении множества симметрии задачи — множества, на котором минимаксное решение терпит “градиентную катастрофу”. Основной результат исследования состоит в получении необходимых условий существования псевдовершин — особых точек краевого множества, которые определяют структуру множества негладкости минимаксного решения задачи Дирихле. Необходимые условия выписаны в терминах пределов производных локальных диффеоморфизмов, определяемых нелинейным уравнением, связывающим параметры задачи. Работа продолжает исследования [9–17].

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00587-а), программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2640.2008.1), регионального гранта РФФИ/ПСО (проект 07-0196085) и программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

## 1. Задача Дирихле для уравнения Гамильтона — Якоби в плоском случае

Рассматривается краевая задача Дирихле

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left( \nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$  — норма вектора  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ . Краевое условие (1.2) определено на границе  $\Gamma = \partial M$  замкнутого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$ , граница  $\Gamma = \partial M$  которого является непрерывной склейкой дважды гладких кривых без точек самопересечения.

Структура минимаксного решения  $u = u(x, y)$  задачи (1.1), (1.2) известна [13]:

$$u(x, y) = \rho((x, y), M).$$

Здесь  $\rho(\mathbf{x}, M) = \min_{\mathbf{y} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  — евклидово расстояние от точки  $\mathbf{x}$  до множества  $M$ .

Минимаксное решение  $u = u(x, y)$  задачи (1.1), (1.2) является функцией оптимального результата в соответствующей задаче быстрогодействия [2]

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases} \quad (1.3)$$

где управление  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  стеснено ограничением  $\|\nu\| \leq 1$ . Содержательно задача быстрогодействия заключается в приведении движения динамической системы (1.3) на множество  $M$  за наименьшее время за счет надлежащего выбора допустимого управления  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ .

Наряду с минимаксным подходом к определению решения уравнения типа Гамильтона — Якоби, имеющим корни в теории позиционных дифференциальных игр, существуют и другие подходы к определению обобщенного решения уравнения типа Гамильтона — Якоби. Так, С. Н. Кружков, следуя аксиоматике геометрической оптики, ввел [1] главное (фундаментальное) решение задачи Коши — Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала. В соответствии с этой концепцией фундаментальное решение  $u_k = u_k(x, y)$  задачи Коши — Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 1, \quad (1.4)$$

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (1.5)$$

имеет вид  $u_k(x, y) = -\rho((x, y), M)$ . Здесь, как и в (1.2), краевое условие (1.5) определено на границе  $\Gamma = \partial M$  замкнутого множества  $M \subset \mathbb{R}^2$ . Таким образом, фундаментальное решение задачи (1.4), (1.5) отличается от минимаксного решения соответствующей задачи (1.1), (1.2) только лишь знаком.

Уравнение (1.4) изучается в геометрической оптике. Его решение  $u_k = u_k(x, y)$  называется эйконалом. Эйконал — функция, линии уровня которой являются волновыми фронтами. Поскольку карты (совокупности всех) множеств Лебега фундаментального решения задачи (1.4), (1.5) и минимаксного решения соответствующей задачи (1.1), (1.2) совпадают, то линии уровня минимаксного решения исходной задачи (1.1), (1.2) можно также трактовать как волновые фронты и при их построении использовать конструкции геометрической оптики.

Построение волновых фронтов требует отыскания эквидистант кривой  $\Gamma$ , ибо волновой фронт принадлежит соответствующей эквидистанте. Известно [8], что в общем случае достаточно удаленная эквидистанта гладкой кривой теряет дифференциальные свойства, возникают особенности типа “ласточкиного хвоста”, у эквидистанты появляются точки самопересечения.

Объединения таких точек эквидистант образуют многообразия, на которых решение теряет гладкость (происходит “градиентная катастрофа”).

Изучению таких многообразий с точки зрения их конструктивного построения посвящена настоящая работа. При этом используются методы и конструкции классической [18] и современной [19] дифференциальной геометрии.

## 2. Определения, основные понятия

Пусть  $M$  — замкнутое множество в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^2$ , точка  $B = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ . Введем в рассмотрение  $\rho(B, M) = \min_{A \in M} \|B - A\|$  — евклидово расстояние от точки  $B$  до множества  $M$ . Обозначим  $\Omega_M(B)$  множество всех ближайших к  $B$  в евклидовой метрике точек из  $M$ .

Для замкнутого множества  $M$

$$\rho(B, M) = \|B - A\|, \quad A \in \Omega_M(B).$$

**О п р е д е л е н и е 1.** Биссектрисой  $L(M)$  множества  $M$  назовем [11] множество всех точек из его дополнения, которые имеют не менее двух проекций на множество  $M$

$$L(M) = \left\{ B \in \mathbb{R}^m \setminus M : \exists A_1 \in \Omega_M(B), \exists A_2 \in \Omega_M(B), A_1 \neq A_2 \right\}.$$

Биссектриса является частным представителем множеств симметрии [19].

В настоящей работе предлагаются конструктивные подходы к построению биссектрисы. Если  $M$  — невыпуклое множество, его биссектриса является непустым множеством.

Здесь отметим, что с точки зрения теории дифференциальных игр биссектриса  $L(M)$  целевого множества  $M$  для соответствующей задачи управления по быстрдействию — это рассеивающая кривая. Из каждой точки  $B \in L(M)$  выходят не менее двух оптимальных траекторий — отрезки  $[B, A]$ ,  $A \in \Omega_M(B)$  [20, с. 196]. При этом структура биссектрисы как объединения многообразий определяется геометрией границы целевого множества. В плоском случае биссектриса является объединением нуль- и одномерных многообразий, построение которых возможно в ряде простых ситуаций в точном аналитическом виде [11], но в самой общей ситуации требуется разработка численных алгоритмов [12, 13, 17]. Одномерные многообразия (“ветви биссектрисы”), составляющие  $L(M)$ , определяются особыми точками границы множества, названными псевдовершинами. Строгие определения этих особых точек приведены ниже.

Определимся с ограничениями на класс исследуемых функций. Будем рассматривать функции  $y = f(x)$ , определенные на конечном или бесконечном интервале  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Пусть  $\Gamma = \text{gr } f$ ,  $\text{gr } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in X \subseteq \mathbb{R}\}$  — график функции  $y = f(x)$ . Интервал  $O(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \subset X$ , где  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ , будем называть окрестностью точки  $x_0 \in X$ .

С каждой точкой  $(x, y) = (x_0, y_0)$  плоскости свяжем совокупность  $F(x_0, y_0)$  функций  $y = f(x)$ ,  $f(x_0) = y_0$ , каждая из которых удовлетворяет следующим свойствам:

(1) непрерывна в точке  $x_0 \in X$ ,

(2) дважды непрерывно дифференцируема в выколотой окрестности  $O_0(x_0) = O(x_0) \setminus \{x_0\}$  точки  $x = x_0$ ,

(3) если имеет производную первого порядка в точке  $x = x_0$ , то в сколь угодно малой окрестности точки не является линейной функцией.

В зависимости от дифференциальных свойств функций в точке  $x = x_0$  выделим во множестве  $F(x_0, y_0)$  семейства функций

$$F^{(2)}(x_0, y_0) = \{f \in F(x_0, y_0) : \exists f'(x_0), \exists f''(x_0)\},$$

$$F^{(1)}(x_0, y_0) = \{f \in F(x_0, y_0) : \exists f'(x_0), \exists f''_-(x_0), \exists f''_+(x_0), f''_-(x_0) \neq f''_+(x_0)\},$$

$$F^{(0)}(x_0, y_0) = \{f \in F(x_0, y_0) : \exists f'_-(x_0), \exists f'_+(x_0), f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)\}.$$

Здесь

$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ,  $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  — односторонние производные в точке  $x = x_0$  слева и справа соответственно.

Аналогично символами  $f''_-(x_0), f''_+(x_0)$  обозначены односторонние производные второго порядка соответственно слева и справа в точке  $x = x_0$ .

Вообще говоря, здесь допускается, что производные могут и не быть конечными величинами.

Дадим определение псевдовершины графика функции — точки, играющей ключевую роль в приводимых конструкциях. Для этого зафиксируем  $x_0 \in X$  и рассмотрим сужение функции  $y = f(x)$  на достаточно малую окрестность  $O(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \subset X$ ,  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ , этой точки. Полагаем, что  $f \in F(x_0, y_0)$ ,  $f(x_0) = y_0$ . Стало быть, функция  $y = f(x)$  дифференцируема во всех точках этой окрестности, кроме, быть может, самой точки  $x = x_0$ , т.е. функция дифференцируема по крайней мере в выколотой окрестности  $O_0(x_0)$ .

Выберем произвольно  $x_1 \in O_0(x_0)$  и  $x_2 \in O_0(x_0)$  так, что  $x_1 < x_0 < x_2$ . Построенная на касательных симметрическая система уравнений

$$\begin{cases} y_* = f'(x_1)(x_* - x_1) + f(x_1), \\ y_* = f'(x_2)(x_* - x_2) + f(x_2), \end{cases} \quad (2.1)$$

в общем случае невырождена (исключение составляет случай, когда  $x = x_0$  — точка перегиба) и имеет единственное решение  $(x_*, y_*) = (x_*(x_1, x_2), y_*(x_1, x_2))$ , зависящее от двух параметров  $x_1, x_2$ . Невырожденность системы (2.1) обусловлена принадлежностью функции  $y = f(x)$  множеству  $F(x_0, y_0)$ , ибо здесь  $f'(x_1) \neq f'(x_2)$  как в случае, когда  $x = x_0$  — точка негладкости функции  $y = f(x)$ , так и в случае, когда  $x = x_0$  — точка гладкости этой функции, не являющаяся при этом точкой перегиба. Напомним, что в гладком случае функция  $y = f(x)$  в окрестности  $x = x_0$  отлична от линейной функции.

Определим разность квадратов расстояний между указанными точками графика функции и точкой пересечения касательных:

$$G(x_1, x_2) = \rho^2((x_1, f(x_1)), (x_*, y_*)) - \rho^2((x_2, f(x_2)), (x_*, y_*)).$$

На открытом прямоугольнике  $\Pi(x_0) = (x_0 - \delta_1, x_0) \times (x_0, x_0 + \delta_2)$  рассмотрим симметрическое уравнение

$$G(x_1, x_2) = 0. \quad (2.2)$$

На множестве  $\Pi(x_0)$  функция  $G = G(x_1, x_2)$  является композицией дифференцируемых функций. Если она удовлетворяет условиям теоремы о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции, то существует локально определенное гладкое решение  $x_2 = x_2(x_1)$  уравнения (2.2), график которого лежит в прямоугольнике  $\Pi(x_0)$ .

Здесь подчеркнем, что нас интересует далеко не всякое решение уравнения (2.2).

Для последующих построений мы выделяем решения с вполне определенными свойствами.

**О п р е д е л е н и е 2.** Будем говорить, что локальный диффеоморфизм  $x_2 = x_2(x_1)$  непрерывен слева в точке  $x_1 = x_0$  и отображает левую полуокрестность точки  $x_1 = x_0$  в ее правую полуокрестность, если выполняются условия:

- (1)  $x_2((x_0 - \delta_1, x_0)) = (x_0, x_0 + \delta_2)$ ,  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$ ,
- (2)  $\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} x_2(x_1) = x_0$ .

Нетрудно видеть, что односторонняя непрерывность слева диффеоморфизма  $x_2 = x_2(x_1)$  обеспечивается требованием строгой отрицательности его производной.

**О п р е д е л е н и е 3.** Точка  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  называется псевдовершиной кривой  $\Gamma = \text{gr } f$ , если существует определяемый уравнением (2.2) локальный диффеоморфизм  $x_2 = x_2(x_1)$  левой полуокрестности точки  $x_1 = x_0$  в ее правую полуокрестность.

Введем определение ветви и крайней точки биссектрисы.

**О п р е д е л е н и е 4.** Ветвью  $L(x_0, y_0)$  биссектрисы кривой  $\Gamma = \text{gr } f$ , где  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  — псевдовершина  $\Gamma = \text{gr } f$ , будем называть множество точек на плоскости, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} -x + x_1 - f(x_1)(y - f(x_1)) = 0, \\ -x + x_2 - f(x_2)(y - f(x_2)) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

$x_2 = x_2(x_1)$  — непрерывный слева в точке  $x_1 = x_0$  локальный диффеоморфизм левой полуокрестности точки  $x_1 = x_0$  на ее правую полуокрестность, определяемый уравнением (2.2).

Система уравнений (2.3) является сопряженной к системе линейных уравнений (2.1) и определяет точки из  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , которые имеют две ортогональные проекции на кривую  $\Gamma$ , причем проекции отстоят от соответствующей точки проецирования на равном расстоянии.

**О п р е д е л е н и е 5.** Конечный односторонний предел  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} (x, y)$  решений системы (2.3) будем называть крайней точкой биссектрисы. Если означенный предел равен бесконечности или не существует, то будем говорить, что псевдовершина  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  не порождает крайнюю точку биссектрисы.

### 3. Свойства диффеоморфизмов

Выявим некоторые свойства решений уравнения (2.3), которое в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} & 2(f(x_1) - f(x_2))(x_2 - x_1) + (f'(x_2) + f'(x_1))(x_2 - x_1)^2 \\ & - 2f'(x_1)f'(x_2)(x_2 - x_1)(f(x_1) - f(x_2)) - (f'(x_1) + f'(x_2))(f(x_1) - f(x_2))^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для краткости дальнейшего изложения введем обозначения

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 > 0, \\ \Delta f &= f(x_2) - f(x_1), \\ f'_1 &= f'(x_1), f'_2 = f'(x_2). \end{aligned}$$

Уравнение принимает вид

$$-2\Delta f \Delta x + (f'_1 + f'_2) \Delta x^2 + 2f'_1 f'_2 \Delta x \Delta f - (f'_1 + f'_2) \Delta f^2 = 0.$$

Возможны д в е с и т у а ц и и: (1)  $f'_1 + f'_2 = 0$ , (2)  $f'_1 + f'_2 \neq 0$ .

Найдем рассогласование функции  $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$  в точке  $x_1 \in \mathbb{R}$  и соответствующей ей точке  $x_2 = x_2(x_1)$ .

Если реализовалась с и т у а ц и я (1):  $f'_1 + f'_2 = 0$ , то  $\Delta f = 0$ .

Рассмотрим подробно более общую с и т у а ц и ю (2), когда  $f'_1 + f'_2 \neq 0$ . Тогда уравнение допускает представление

$$\Delta f^2 + 2\Delta x \frac{1 - f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2} \Delta f - \Delta x^2 = 0.$$

Следуя геометрической интерпретации производной, примем  $f'_1 = \text{tg } \alpha$ ,  $f'_2 = \text{tg } \beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — углы наклона касательных в соответствующих точках. В угловых величинах уравнение (3.1) имеет вид

$$\Delta f^2 + 2\Delta x \frac{1}{\text{tg}(\alpha + \beta)} \Delta f - \Delta x^2 = 0.$$

После очевидных преобразований получаем  $\Delta f = \Delta x \text{tg } \frac{\alpha + \beta}{2}$ , т. е.

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \text{tg } \frac{\arctg f'(x_1) + \arctg f'(x_2)}{2}. \quad (3.2)$$

Равенство (3.2) свидетельствует о кратности тождественного решения  $x_2 = x_1$  уравнения (3.1). Действительно, функция  $x_2 = x_1$  является решением уравнения с кратностью не меньшей двух, ибо

$$G(x_1, x_2) = (x_2 - x_1)^2 \left\{ -2 \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} + f'(x_1) + f'(x_2) \right. \\ \left. + 2f'(x_1)f'(x_2) \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right. \\ \left. - (f'(x_1) + f'(x_2)) \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right) \right\}.$$

Кроме того, тождественная функция является решением уравнений  $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$  и  $\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$ , выписанных относительно частных производных, поскольку

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = (x_2 - x_1) \left[ 2 \left( 1 + (f'(x_1))^2 \right) \left( \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} - f'(x_2) \right) \right. \\ \left. + (x_2 - x_1)^2 \left\{ f''(x_1) - f''(x_1) \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 2f'(x_2)f''(x_1) \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right\} \right], \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} = (x_2 - x_1) \left[ 2 \left( 1 + (f'(x_2))^2 \right) \left( f'(x_1) - \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right) \right. \\ \left. + (x_2 - x_1)^2 \left\{ f''(x_2) - f''(x_2) \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + 2f'(x_1)f''(x_2) \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right\} \right].$$

Полученные разложения частных производных функции  $G = G(x_1, x_2)$  вдоль локальных решений  $x_2 = x_2(x_1)$  уравнения (3.1) потребуются для анализа спектральных свойств пределов производных этих решений.

#### 4. Теорема о предельных значениях локальных диффеоморфизмов

Всюду ниже запись  $f \sim g$ ,  $x \rightarrow x_0 - 0$  означает, что скалярные функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ , определенные слева от точки  $x = x_0$ , эквивалентны в этой точке, т. е.

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Запись  $f = o(g)$ ,  $x \rightarrow x_0 - 0$  означает, что функция  $y = f(x)$  имеет более высокий порядок малости по отношению к функции  $y = g(x)$  слева от точки  $x = x_0$ , т. е.

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Сформулируем основной результат.

**Теорема.** Если  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  — псевдовершина кривой  $\Gamma = \operatorname{gr} f$ ,  $f \in F(x_0, y_0)$ ,  $x_2 = x_2(x_1)$  — локальный диффеоморфизм, определяемый уравнением  $G(x_1, x_2) = 0$ , причем

$\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = c \leq 0$ ,  $c \neq -\infty$ , то предельное значение производной диффеоморфизма определяется дифференциальными свойствами функции  $y = f(x)$  так, что

$$c = \begin{cases} -1, & \text{если } f \in F^{(2)}(x_0, y_0), f''(x_0) \neq 0, \\ 0, & \text{если } f \in F^{(1)}(x_0, y_0), f'_-(x_0) \text{ и } f'_+(x_0) \text{ конечны, } f''_-(x_0) \neq 0, \\ -\sqrt{\frac{1 + (f'_-(x_0))^2}{1 + (f'_+(x_0))^2}}, & \text{если } f \in F^{(0)}(x_0, y_0) f'_+(x_0) \neq \infty, f'_-(x_0) \neq \infty. \end{cases}$$

**Доказательство.** В силу симметричности левой части уравнения  $G(x_1, x_2) = 0$  тождественная функция  $x_2 = x_1$  является его очевидным тривиальным решением. Допуская, как это сделано в условиях теоремы, существование еще одной скалярной функции  $x_2 = x_2(x_1)$ , удовлетворяющей этому уравнению, мы тем самым лишаем себя возможности применять многие конструкции гладкого анализа. В частности, здесь “не работает” классическая теорема о существовании неявно заданной функции. В этом смысле рассматриваемая задача является нерегулярной — в точку  $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$  стягивается более одной гладкой ветви решения уравнения  $G(x_1, x_2) = 0$ .

Наиболее простой с л у ч а й 1, когда  $f \in F^{(2)}(x_0, y_0)$ , исследован в работе [16].

Пусть реализовался с л у ч а й 2, при котором  $f \in F^{(1)}(x_0, y_0)$ . С необходимостью выполняется (см. [16]) условие трансверсальности ветвей решения уравнения  $G(x_1, x_2) = 0$  в точке  $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$  вырождения каустики

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{dx_2(x_1)}{dx_1} = - \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1))}{\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1))}. \quad (4.1)$$

Найдем асимптотики частных производных  $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2)$  и  $\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2)$  вдоль решения  $(x_1, x_2) = (x_1, x_2(x_1))$ . Для этого представим функцию  $g_1(x_1) = \frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1))$  в виде суммы

$$g_1(x_1) = q_1(x_1) + h_1(x_1),$$

где, опуская аргумент у решения  $x_2 = x_2(x_1)$ ,

$$q_1(x_1) = (x_2 - x_1) \left[ 2(1 + f'(x_1))^2 \left( \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} - f'(x_2) \right) \right],$$

$$h_1(x_1) = (x_2 - x_1)^2 \left[ f''(x_1) - f''(x_1) \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right) + 2f'(x_2)f''(x_1) \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right].$$

Поскольку функция  $x_2 = x_2(x_1)$  непрерывно продолжима в точке  $x_1 = x_0$  [16] и в этой точке существует производная слева  $\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = c \leq 0$ , то функция  $x_2 = x_2(x_1)$  разложима в левой полукрестности этой точки:

$$x_2(x_1) = c(x_1 - x_0) + x_0 + o(x_1 - x_0), \quad (x_0 - x_1) \downarrow 0.$$

Тогда справедливы следующие представления для приращений этой функции:

$$x_2(x_1) - x_1 = (1 - c)(x_0 - x_1) + o(x_0 - x_1), \quad (x_0 - x_1) \downarrow 0, \quad (4.2)$$

$$x_2(x_1) - x_0 = c(x_1 - x_0) + o(x_0 - x_1), \quad (x_0 - x_1) \downarrow 0. \quad (4.3)$$

Очевидно, что

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} = f'(x_0).$$

Поэтому

$$\operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} - f'(x_2) \sim f'(x_0) - f'(x_2), \quad x_1 \rightarrow x_0 - 0.$$

В свою очередь это влечет эквивалентность

$$q_1 \sim \tilde{q}_1, \quad x_1 \rightarrow x_0 - 0,$$

где  $\tilde{q}_1(x_1) = 2 \left(1 + (f'(x_0))^2\right) (f'(x_0) - f'(x_2)) (x_2 - x_1)$ .

Далее, в силу конечности предела

$$\begin{aligned} & \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \left\{ f''(x_1) - f''(x_1) \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right) \right. \\ & \left. + 2f'(x_2)f''(x_1) \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2} \right\} = f''_-(x_0) \left(1 + (f'(x_0))^2\right) = \operatorname{const} \end{aligned}$$

имеет место эквивалентность

$$h_1 \sim \tilde{h}_1, \quad x_1 \rightarrow x_0 - 0,$$

где  $\tilde{h}_1(x_1) = f''_-(x_0) \left(1 + (f'(x_0))^2\right) (x_2 - x_1)^2$ .

Поскольку функция  $\tilde{h}_1(x_1) = o((x_0 - x_1))$ ,  $x_0 - x_1 \rightarrow 0$ , вследствие чего имеет более высокий порядок малости по отношению к функции  $\tilde{q}_1 = \tilde{q}_1(x_1)$ , то ею можно пренебречь.

Получаем

$$g_1(x_1) = \frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1)) \sim \tilde{q}_1(x_1) = 2 \left(1 + (f'(x_0))^2\right) (f'(x_0) - f'(x_2)) (x_2 - x_1) \quad x_1 \rightarrow x_0 - 0.$$

Аналогичными рассуждениями показывается эквивалентность

$$g_2(x_1) = \frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1)) \sim \tilde{q}_2(x_1) = 2 \left(1 + (f'(x_0))^2\right) (f'(x_1) - f'(x_0)) (x_2 - x_1), \quad x_1 \rightarrow x_0 - 0.$$

После чего условие трансверсальности (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} c &= - \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{\tilde{q}_1(x_1)}{\tilde{q}_2(x_1)} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{2(1 + (f'(x_0))^2) (f'(x_2) - f'(x_0)) (x_2 - x_1)}{2(1 + (f'(x_0))^2) (f'(x_1) - f'(x_0)) (x_2 - x_1)} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{(f'(x_2) - f'(x_0)) (x_2 - x_1)}{(f'(x_1) - f'(x_0)) (x_2 - x_1)} = \frac{cf''_+(x_0)}{f''_-(x_0)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойствами пределов, разложениями (4.2), (4.3) локального диффеоморфизма, а также тем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{f'(x_2) - f'(x_0)}{x_2 - x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{f'(x_2) - f'(x_0)}{x_2 - x_0} \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{f'(x_2) - f'(x_0)}{x_2 - x_0} \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \\ &= f''_+(x_0) \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{c(x_1 - x_0) + o(x_1 - x_0)}{(1 - c)(x_0 - x_1) + o(x_1 - x_0)} = f''_+(x_0) \frac{c}{c - 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_2 - x_1} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0} \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} \\
&= \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0} \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1} \\
&= f''_-(x_0) \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{(x_1 - x_0)}{(1-c)(x_0 - x_1) + o(x_1 - x_0)} = f''_-(x_0) \frac{1}{c-1}.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$c = \frac{cf'_+(x_0)}{f''_-(x_0)}.$$

Поскольку по условию односторонние производные второго порядка  $f''_-(x_0)$  и  $f''_+(x_0)$  конечны, причем  $f''_-(x_0) \neq 0$ , то  $c = 0$ .

Пусть теперь реализовался с л у ч а й 3, при котором  $f \in F^{(0)}(x_0, y_0)$ . Опять-таки с необходимостью выполняется условие трансверсальности ветвей решения уравнения  $G(x_1, x_2) = 0$  в точке  $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$ , где  $x = x_0$  — точка, в которой функция  $y = f(x)$  не дифференцируема.

Найдем асимптотики частных производных  $\frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2)$  и  $\frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2)$  вдоль решения  $(x_1, x_2) = (x_1, x_2(x_1))$ . Для этого, как и выше в случае 2, запишем функцию  $g_1(x_1) = \frac{\partial G}{\partial x_1} \times (x_1, x_2(x_1))$  в виде суммы

$$g_1(x_1) = q_1(x_1) + h_1(x_1).$$

Воспользуемся начальным представлением функции  $G = G(x_1, x_2)$  и ее частных производных. Опуская обозначение аргумента у функции  $x_2 = x_2(x_1)$ , положим

$$q_1(x_1) = 2(1 + (f'(x_1))^2) [f'(x_2)(x_1 - x_2) + (f(x_2) - f(x_1))],$$

$$h_1(x_1) = f''(x_1)(x_2 - x_1)^2 - f''(x_1)(f(x_2) - f(x_1))^2 + 2f'(x_2)f''(x_1)(x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{f'(x_2)(x_1 - x_2) + (f(x_2) - f(x_1))}{x_2 - x_1} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \left( \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x_2) \right) \\
&= \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \left( \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1} - f'(x_2) \right) \\
&= \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \left( \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} - f'(x_2) \right) \\
&= f'_+(x_0) \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{c(x_1 - x_0) + o(x_1 - x_0)}{(1-c)(x_0 - x_1)} + f'_-(x_0) \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{x_0 - x_1}{(1-c)(x_0 - x_1)} - f'_+(x_0) \\
&= f'_+(x_0) \frac{c}{c-1} - f'_-(x_0) \frac{1}{c-1} - f'_+(x_0) = \frac{1}{c-1} (f'_+(x_0) - f'_-(x_0)).
\end{aligned}$$

Отсюда следует эквивалентность

$$q_1 = q_1(x_1) \sim \tilde{q}_1(x_1) = 2 \left( 1 + (f'_-(x_0))^2 \right) \frac{1}{c-1} (f'_+(x_0) - f'_-(x_0)) (x_2 - x_1), \quad x_1 \rightarrow x_0 - 0.$$

Нетрудно также убедиться в том, что

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{h_1(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{h_1(x_1)}{x_2 - x_1} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \left[ f''(x_1)(x_2 - x_1) - f''(x_1) \frac{(f(x_2) - f(x_1))^2}{x_2 - x_1} \right. \\ &\quad \left. + 2f'(x_2)f''(x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \right] = f''_-(x_0) \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \\ &= \left( f'_-(x_0) \frac{1}{1 - c} - f'_+(x_0) \frac{c}{c - 1} \right) \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} (f(x_2) - f(x_1)) = 0. \end{aligned}$$

Это означает существование в левой полукрестности точки  $x_1 = x_0$  бесконечно малой функции  $\varepsilon = \varepsilon(x_1)$  такой, что  $h(x_1) = (x_2 - x_1)\varepsilon(x_1)$ . Здесь  $\varepsilon(x_1) \rightarrow 0$  при  $x_1 \rightarrow x_0 - 0$ . Стало быть,  $h_1(x_1) = o(x_0 - x_1)$  при  $x_1 \rightarrow x_0 - 0$ , и этой функцией можно пренебречь.

Получаем, что  $g_1(x_1) = \frac{\partial G}{\partial x_1}(x_1, x_2(x_1))$  эквивалентна слева от точки  $x_1 = x_0$  линейной функции

$$\tilde{q}_1(x_1) = 2(1 + (f'_-(x_0))^2) \frac{1}{c - 1} (f'_+(x_0) - f'_-(x_0)) (x_2 - x_1).$$

Аналогичными рассуждениями показывается, что  $g_2(x_1) = \frac{\partial G}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1))$  эквивалентна слева от точки  $x_1 = x_0$  линейной функции

$$\tilde{q}_2(x_1) = 2(1 + (f'_+(x_0))^2) \frac{c}{c - 1} (f'_-(x_0) - f'_+(x_0)) (x_2 - x_1).$$

В итоге условие трансверсальности (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} c = - \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{\tilde{q}_1(x_1)}{\tilde{q}_2(x_1)} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0 - 0} \frac{2(1 + (f'_-(x_0))^2) \frac{1}{c - 1} (f'_+(x_0) - f'_-(x_0)) (x_2 - x_1)}{2(1 + (f'_+(x_0))^2) \frac{c}{c - 1} (f'_-(x_0) - f'_+(x_0)) (x_2 - x_1)} \\ &= \frac{1 + (f'_-(x_0))^2}{(1 + (f'_+(x_0))^2)c}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$c^2 = \frac{1 + (f'_-(x_0))^2}{1 + (f'_+(x_0))^2}.$$

Стало быть, учитывая ограничение  $c \leq 0$ , имеем

$$c = - \sqrt{\frac{1 + (f'_-(x_0))^2}{1 + (f'_+(x_0))^2}}.$$

Теорема доказана.  $\square$

Результаты теоремы допускают геометрическую интерпретацию. Если псевдовершина  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  является точкой графика дважды дифференцируемой функции  $y = f(x)$ , то в плоскости параметров  $x_1, x_2$  рассматриваемой задачи графики исходного диффеоморфизма  $x_2 = x_2(x_1)$  и обратного ему диффеоморфизма  $x_1 = x_1(x_2)$  склеиваются гладко в точке  $(x_1, x_2) = (x_0, x_0)$ , образуя при этом прямой угол с графиком тождественного решения  $x_2 = x_1$  уравнения  $G(x_1, x_2) = 0$ . Если псевдовершина  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  является точкой графика только один раз дифференцируемой функции  $y = f(x)$ , то в плоскости параметров  $x_1, x_2$  графики диффеоморфизмов  $x_2 = x_2(x_1)$  и  $x_1 = x_1(x_2)$  склеиваются под прямым углом. Если же псевдовершина  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  является точкой негладкости графика рассматриваемой функции, то угол склейки графиков диффеоморфизмов  $x_2 = x_2(x_1)$  и  $x_1 = x_1(x_2)$  определяется величиной  $c = -\sqrt{1 + (f'_-(x_0))^2 / (1 + (f'_+(x_0))^2)}$ , которая есть взятое со знаком минус отношение дифференциалов длин левой и правой дуг графика функции  $y = f(x)$ , стягивающихся в точку  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ .

## 5. Понятие псевдопроизводной

Важно отметить, что возможен предельный переход в равенстве (3.2)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'(x_1) + \operatorname{arctg} f'(x_2)}{2},$$

левая часть которого формально совпадает с дифференциальным отношением. Надо только иметь в виду, что оно рассматривается вдоль диффеоморфизма  $x_2 = x_2(x_1)$ , определенного слева от абсциссы псевдовершины  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2(x_1)) - f(x_1)}{x_2(x_1) - x_1}. \quad (5.1)$$

**О п р е д е л е н и е 6.** Величину  $f'_{\wedge}(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{f(x_2(x_1)) - f(x_1)}{x_2(x_1) - x_1}$ , где  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  — псевдовершина кривой  $\Gamma = \operatorname{gr} f$ ,  $x_2 = x_2(x_1)$  — непрерывный слева в точке  $x = x_0$  локальный диффеоморфизм левой полукрестности точки  $x = x_0$  в ее правую полукрестность, определяемый уравнением  $G(x_1, x_2) = 0$ , будем называть псевдопроизводной функции  $y = f(x)$ , вычисленной в точке  $x = x_0$ .

Нетрудно, располагая равенством (5.1), вычислить псевдопроизводную функции в зависимости от ее дифференциальных свойств в псевдовершине. Если  $f \in F^{(k)}(x_0, y_0)$ ,  $k = 1, 2$ , то

$$f'_{\wedge}(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} f'(x_0)) = f'(x_0). \quad (5.2)$$

Если же  $f \in F^{(0)}(x_0, y_0)$ , то

$$f'_{\wedge}(x_0) = \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} f'_-(x_0) + \operatorname{arctg} f'_+(x_0)}{2}. \quad (5.3)$$

Таким образом, если псевдовершина является точкой гладкости графика исходной функции, то в силу (5.2) псевдопроизводная совпадает с классической производной. Если же псевдовершина не является точкой гладкости графика функции, то в силу формулы (5.3) псевдопроизводная вычисляется через осреднение односторонних производных.

Получим иное представление для псевдопроизводной в негладком случае, полагая, что  $\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = c \leq 0$ ,  $c \neq -\infty$ . Имеет место разложение

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Перейдем к пределу, используя разложения (4.2), (4.3) локального диффеоморфизма  $x_2 = x_2(x_1)$  слева от точки  $x_1 = x_0$ , свойства пределов, определения односторонних производных:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \\ &+ \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = f'_+(x_0) \frac{c}{c-1} - f'_-(x_0) \frac{1}{c-1}. \end{aligned}$$

Тогда псевдопроизводная

$$f'_{\wedge}(x_0) = f'_+(x_0) \frac{c}{c-1} - f'_-(x_0) \frac{1}{c-1}. \quad (5.4)$$

Здесь в силу теоремы о предельных значениях производных локальных диффеоморфизмов  $c = -\sqrt{1 + (f'_-(x_0))^2 / (1 + (f'_+(x_0))^2)}$ . Заметим также, что в формуле (5.4) коэффициенты образуют выпуклую комбинацию

$$\frac{c}{c-1} \geq 0, \quad \frac{-1}{c-1} \geq 0, \quad \frac{c}{c-1} - \frac{1}{c-1} = 1.$$

Таким образом, в негладком случае псевдопроизводная является выпуклой комбинацией односторонних производных, коэффициенты которой определяются предельным значением локального диффеоморфизма.

Просматривается связь понятия псевдопроизводной с другими обобщениями классического понятия производной. Так, если псевдовершина  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  является точкой графика дважды дифференцируемой функции, причем производная второго порядка отлична от нуля и, стало быть, график функции  $y = f(x)$  в окрестности псевдовершины является выпуклой дугой, то в силу теоремы о предельных значениях локальных диффеоморфизмов, а также формулы (5.4)) псевдопроизводная является выпуклой комбинацией односторонних производных с равными весами

$$f'_\wedge(x_0) = \frac{1}{2}f'_+(x_0) + \frac{1}{2}f'_-(x_0). \quad (5.5)$$

В этом случае псевдопроизводная, как уже отмечено выше, совпадает с классической производной, но кроме того она формально идентична производной Шварца [21, 22]. Разложение (5.5) в равновесную выпуклую комбинацию и, как следствие, совпадение с производной Шварца, имеет место также для выпуклой (либо вогнутой) не дифференцируемой в точке  $x = x_0$  функции  $y = f(x)$  в случае четности этой функции относительно точки  $x = x_0$ .

## 6. Пример

**Пример 1.** Разрабатываемый авторами аппарат выявления и обработки особенностей используется для решения по существу негладких задач. В качестве примера рассматривается задача Дирихле (1.1), (1.2) для случая, когда граница  $\Gamma = \partial M$  краевого множества является графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \leq 0, \\ \cos(2x), & 0 < x \leq \pi/2, \\ -\sin(x), & \pi/2 < x \leq 2\pi, \\ 1 - e^{-2x+4\pi}, & x > 2\pi. \end{cases}$$

В рассматриваемом примере биссектриса  $L$  — множество негладкости минимаксного решения, состоит из трех ветвей, каждая из которых определяется соответствующей псевдовершиной границы краевого множества. Псевдовершин три:  $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) \approx (-1.39, 0.14)$ ,  $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = (\pi/2, -1)$ ,  $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) = (2\pi, 0)$ , причем дифференциальные свойства кривой в них различные. В точке  $x = \tilde{x}_1$  функция  $y = f(x)$  дважды дифференцируема, в точке  $x = \tilde{x}_2$  — только один раз дифференцируема, а точка  $x = \tilde{x}_3$  является точкой негладкости этой функции. В силу теоремы разд. 4 предельные значения производных локальных диффеоморфизмов  $\lim_{x_1 \rightarrow x_0-0} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = c \leq 0$  в них равны  $-1, 0, -\sqrt{2/5}$  соответственно.

Характер склейки графиков исходного и обратного диффеоморфизмов в плоскости параметров  $x_1, x_2$  отвечает теореме и представлен на рисунках 1–3. Для соотнесения этих кривых с графиком тривиального решения  $x_2 = x_1$  уравнения  $G(x_1, x_2) = 0$  на рисунки вынесен также график этой тождественной функции — биссектрисы первого и третьего координатных углов в плоскости параметров  $x_1, x_2$ .

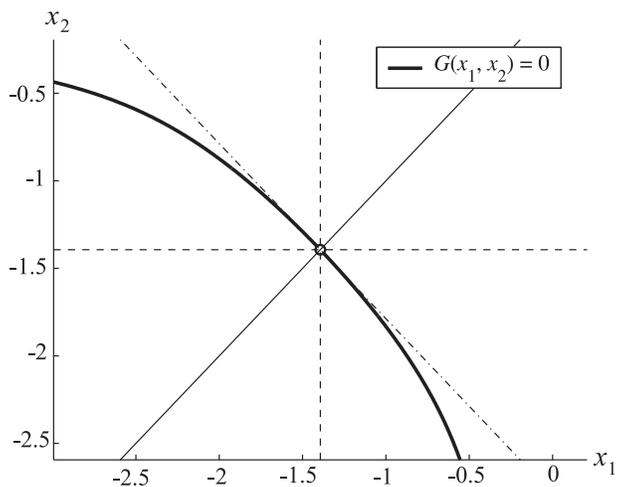


Рис. 1. Гладкая склейка диффеоморфизмов в случае дважды дифференцируемой псевдовершины  $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) \approx (-1.39, 0.14)$ .

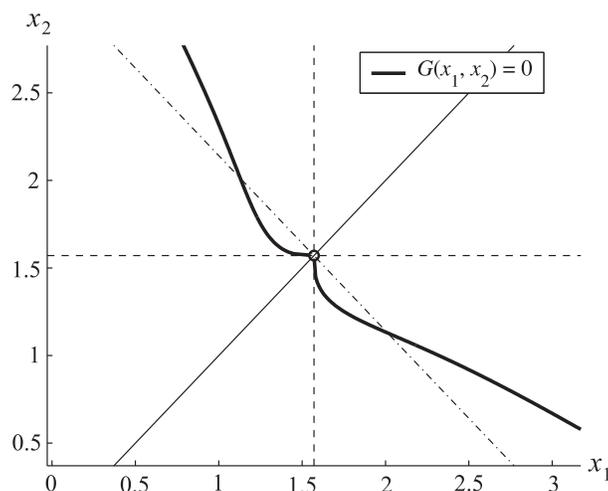


Рис. 2. Ортогональная склейка графиков диффеоморфизмов в случае один раз дифференцируемой псевдовершины  $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) = (\pi/2, -1)$ .

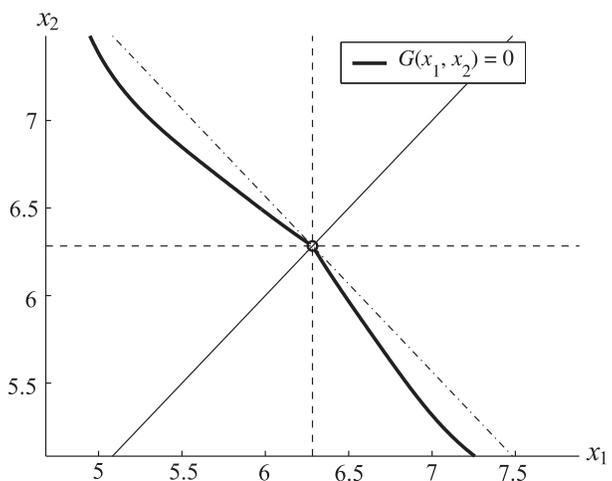


Рис. 3. Негладкая склейка диффеоморфизмов в случае  $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) = (2\pi, 0)$ .

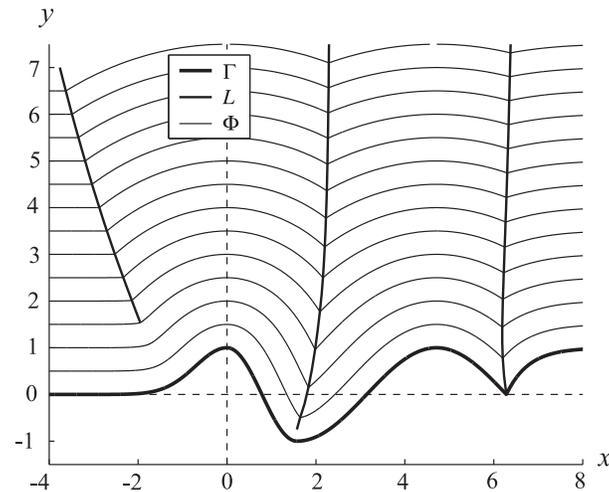


Рис. 4. Биссектриса краевого множества и эволюция волновых фронтов.

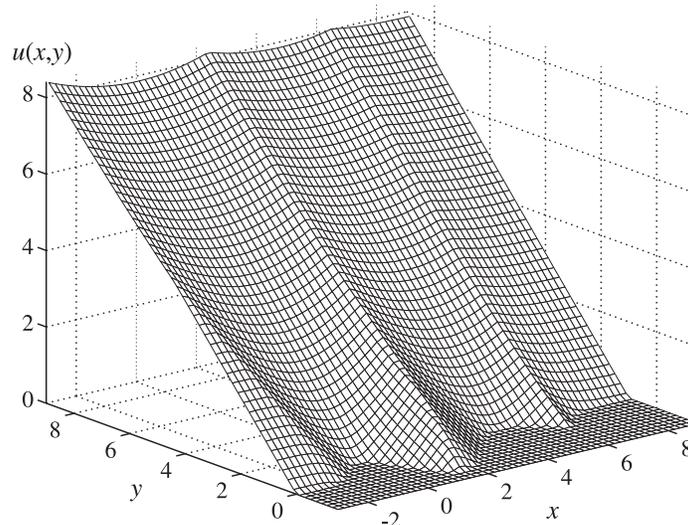


Рис. 5. Минимаксное решение задачи Дирихле.

Карта линий уровня минимаксного решения  $u(x, y) = \rho((x, y), M)$  в виде совокупности волновых фронтов  $\Phi$ , а также биссектриса  $L$  построены численно-аналитическими методами и представлены на рис. 4. График минимаксного решения  $u(x, y)$  приведен на рис. 5.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I // *Мат. сб.* 1974. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
2. **Субботин А.И.** Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 254, № 2. С. 293–297.
3. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
4. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003. 336 с.
5. **Колокольцов В.Н., Маслов В.П.** Задача Коши для однородного уравнения Беллмана // *Докл. АН СССР.* 1987. Т. 296, № 4. С. 796–800.

6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. **Слюсарев Г.Г.** Геометрическая оптика. М.: Изд-во АН СССР, 1946. 332 с.
8. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996. 334 с.
9. **Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Аппроксимационные операторы и конечно-разностные схемы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН. Сер. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
10. **Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.**  $\alpha$ -множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. Деп. в ВИНТИ 02.04.04, № 543-В2004. Екатеринбург, 2004. С. 21.
11. **Успенский А.А.** Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств / Ин-т математики и механики УрО РАН. Деп. в ВИНТИ 07.02.07, № 104-В2007. Екатеринбург, 2007. С. 38.
12. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Исследование геометрии и асимптотики волновых фронтов в некоторых задачах управления // Тр. IX междунар. Четаевской конф. Иркутск, 2007. Т. 5. С. 224–236.
13. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстрогодействия // Прикл. математика и информатика: Тр. факультета ВМиК МГУ М.В. Ломоносова. М.: МАКС Пресс, 2007. № 27. С. 65–79.
14. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. Математика. 2008. № 3. С. 27–37.
15. **Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
16. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрогодействия с круговой индикатрисой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 82–99.
17. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Процедуры вычисления меры невыпуклости плоского множества // Вычисл. математика и мат. физика. 2009. Т. 49, № 3. С. 431–440.
18. **Рашевский П.К.** Курс дифференциальной геометрии. 4-е изд. М.: Едиториал-УРСС, 2003. 432 с.
19. **Брус Дж., Джиблин П.** Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. М.: Мир, 1988. 262 с.
20. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
21. **Бляшке В.** Круг и шар. М.: Наука, 1967. 232 с.
22. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 484 с.

Успенский Александр Александрович  
канд. физ.-мат. наук  
старший науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: uspen@imm.uran.ru

Поступила 17.11.2009

Лебедев Павел Дмитриевич  
канд. физ.-мат. наук  
младший науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: pleb@yandex.ru

УДК 517.977

## ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ИМПУЛЬСНОЙ ВСТРЕЧИ С ЦЕЛЬЮ В ЗАДАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ

В. И. Ухоботов, О. В. Зайцева

Изучается задача импульсной встречи в заданный момент времени с замкнутым множеством. Имеется воздействие со стороны неконтролируемой помехи. На выбор помехи накладываются смешанные ограничения.

Ключевые слова: импульсное управление, помеха, стабильный мост.

V. I. Ukhobotov, O. V. Zaitseva. A linear problem of pulse encounter at a given time under interference.

The problem of pulse encounter with a closed set at a given time is investigated. The system is influenced by an uncontrolled interference. The choice of the interference is subject to mixed constraints.

Keywords: pulse control, interference, stable bridge.

### Введение

Задачи управления механическими системами переменного состава, когда в отдельные моменты времени может отделяться конечное количество реактивной массы, в формализованном виде сводятся к задачам с импульсным управлением [1]. Если на механическую систему действует неконтролируемая помеха, то задача управления может рассматриваться в рамках теории управления гарантированным результатом.

В 1963 г. Н.Н. Красовский предложил [2] метод решения игровых задач преследования, основанный на принципе поглощения областей достижимости игроков. В этой работе рассматривались геометрические, интегральные и импульсные ограничения на выбор управлений. Введено понятие первого момента поглощения и предложено правило экстремального прицеливания для синтеза позиционного управления.

Применение этого метода для задач с импульсным управлением усложнено тем, что области достижимости, зависящие от оставшихся запасов ресурсов, могут меняться скачкообразно [3]. В работе [4] приводится пример импульсной “мягкой” встречи двух точек, когда первый игрок не сможет поддержать требуемого включения областей достижимости. Обсуждается вопрос о возможности применения метода динамического программирования к задачам импульсной встречи. Г.К. Пожарицкий применял этот метод для решения конкретных задач импульсной встречи [5].

В работе [6] доказана теорема об альтернативе для дифференциальных игр с импульсными управлениями в предположении, что целевые координаты вектора состояния меняются непрерывно.

Линейную управляемую систему с фиксированным моментом окончания с помощью линейной замены переменных [7] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоят только управления.

### 1. Постановка задачи

В пространстве  $\mathbb{R}^n$  движение вектора  $z$  происходит по правилу [1]

$$dz = N(t)du + M(t)vdt, \quad u \in \mathbb{R}^l, \quad v \in \mathbb{R}^q, \quad t \leq p.$$

Здесь  $N(t)$  и  $M(t)$  — непрерывные при  $t \leq p$  матрицы соответствующих размерностей,  $p$  — заданное число.

На каждом отрезке  $[t, \tau]$  допустимым программным управлением является функция  $u : [t; \tau] \rightarrow \mathbb{R}^l$  с ограниченной вариацией

$$\int_t^\tau \|du(r)\| = \sup \sum \|u(r_{i+1}) - u(r_i)\|.$$

Здесь  $\|\cdot\|$  — норма в  $\mathbb{R}^l$ , а верхняя грань берется по всем разбиениям точками  $r_i$  отрезка  $[t, \tau]$ .

Программная реализация помехи является измеримой функцией  $v : [t, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^q$ , удовлетворяющей включению

$$v(r) \in V(r), \quad t \leq r \leq \tau. \tag{1.1}$$

Относительно многозначной функции  $V(t) \in \mathbb{R}^q$  делаем следующее предположение.

**Предположение 1.1.** *Многозначная функция  $V(t)$  измерима при  $t \leq p$ ; каждое множество  $V(t)$  является компактом в  $\mathbb{R}^q$ , содержащем нулевой вектор; существует неотрицательная функция  $\varphi(t)$ , интегрируемая на каждом отрезке  $[p_1, p]$ , такая, что  $\|v\|_{(q)} \leq \varphi(t)$  для любого  $v \in V(t)$ .*

Количество ресурсов, потраченное на формирование помехи (1.1), задается интегралом  $\int_t^\tau f(r, v(r)) dr$ .

**Предположение 1.2.** *Неотрицательная функция  $f : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$  является непрерывной и  $f(t, 0) = 0$  для всех  $t \leq p$ .*

Позицией является точка  $(t, z, \mu, \gamma)$ , где  $t < p$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}_+$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ . Здесь посредством  $\mathbb{R}_+$  обозначено множество неотрицательных чисел. Число  $\mu$  характеризует имеющийся запас ресурсов, который можно использовать на формирование управления  $u$ . Число  $\gamma$  характеризует запас ресурсов, который может быть использован при реализации помехи.

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Назовем  $u$ -стратегией правило, стягивающее в соответствие каждой позиции  $(t, z, \mu, \gamma)$  функцию

$$u : [t, p] \rightarrow \mathbb{R}^l, \quad \int_t^p \|du(r)\| \leq \mu. \tag{1.2}$$

Пусть задана начальная позиция  $(t_0, z_0, \mu_0, \gamma_0)$  и выбрана  $u$ -стратегия. Возьмем разбиение

$$\omega : t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{k+1} = p \tag{1.3}$$

с диаметром  $d(\omega) = \max(t_{i+1} - t_i)$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

Построим ломаную с вершинами

$$z^{(\omega)}(t_{i+1}) = z^{(\omega)}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(r)du(r) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} M(r)v_i(r)dr, \tag{1.4}$$

$$\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) = \mu^{(\omega)}(t_i) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|du(r)\|, \quad (1.5)$$

$$\gamma^{(\omega)}(t_{i+1}) = \gamma^{(\omega)}(t_i) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(r, v_i(r)) dr. \quad (1.6)$$

Здесь  $i = \overline{0, k}$ ,  $z^{(\omega)}(t_0) = z_0$ ,  $\mu^{(\omega)}(t_0) = \mu_0$ ,  $\gamma^{(\omega)}(t_0) = \gamma_0$ . Первый интеграл в (1.4) понимается в смысле Римана — Стильбеса. Из (1.2) следует, что  $\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) \geq 0$ . Функция  $v_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}^q$  — любая измеримая реализация помехи, удовлетворяющая включению (1.1) и неравенству

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(r, v_i(r)) dr \leq \gamma^{(\omega)}(t_i).$$

Такие реализации помехи будем называть допустимыми.

Задано замкнутое множество  $L \subset \mathbb{R}^n$ . Цель построения  $u$ -стратегии заключается в выводе точки  $z$  в момент времени  $p$  на множество  $L$ . Наличие импульсного управления может привести к мгновенному изменению точки  $z$ . Это требует специального определения условия попадания точки  $z(p)$  на множество  $L$  [5,8]. С этой целью введем в рассмотрение вектограмму управления

$$U(t) = \{z \in \mathbb{R}^n : z = N(t)u, \|u\| \leq 1\}. \quad (1.7)$$

Множество (1.7) является выпуклым компактом, симметричным относительно начала координат. Из непрерывности матрицы  $N(t)$  следует, что многозначная функция (1.7) непрерывно по Хаусдорфу зависит от  $t$ .

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Из начальной позиции  $(t_0, z_0, \mu_0, \gamma_0)$  можно осуществить встречу в момент времени  $p$  с множеством  $L$ , если для любого числа  $\epsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$  и  $u$ -стратегия такие, что для любого разбиения  $\omega$  (1.3) с диаметром  $d(\omega) < \delta$  и для любой допустимой реализации помехи выполнено включение

$$z^{(\omega)}(p) \in L + \mu^{(\omega)}(p)U(p) + \epsilon S. \quad (1.8)$$

Здесь обозначено  $S = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\|_{(n)} \leq 1\}$ .

**З а м е ч а н и е 1.1.** Из включения (1.8) и из формулы (1.7) следует, что

$$z^{(\omega)}(p) + \mu^{(\omega)}(p)N(p)u \in L + \epsilon S$$

при некотором  $\|u\| \leq 1$ . Следовательно, выбрасывая мгновенно в момент времени  $p$  в направлении вектора  $u$  оставшееся  $\mu^{(\omega)}(p)$  количество ресурсов, получим включение

$$z(p_+) \in L + \epsilon S.$$

## 2. Области достижимости

Зафиксируем числа  $t < \tau \leq p$ . Объединение множеств  $U(r)$  (1.7) при  $t \leq r \leq \tau$  является компактом, симметричным относительно начала координат. Поэтому выпуклая оболочка

$$U_t^\tau = \text{co} \bigcup_{t \leq r \leq \tau} U(r) \quad (2.1)$$

является выпуклым компактом, симметричным относительно начала координат. Положим  $U_t^t = U(t)$ . Тогда множества  $U_t^\tau$  непрерывно по Хаусдорфу зависят от  $t \leq \tau \leq p$ .

Можно показать, что [9]

$$U_t^\tau = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \left( \lambda U_t^s + (1 - \lambda) U_s^\tau \right), \quad t \leq s \leq \tau \leq p, \quad (2.2)$$

а область достижимости импульсного управления равна

$$\left\{ z = \int_t^\tau N(r) du(r) : \int_t^\tau \|du(r)\| = \mu \right\} = \mu U_t^\tau, \quad t < \tau. \quad (2.3)$$

Обозначим

$$f^*(t) = \max f(t, v), \quad v \in V(t). \quad (2.4)$$

Из предположения 1.1 следует, что функция (2.4) интегрируема на любом отрезке  $[p_1, p]$ .

**Лемма 2.1.** *Совокупностью чисел вида*

$$\eta = \int_t^\tau f(r, v(r)) dr,$$

где  $v(r) \in V(r)$  — любая измеримая на отрезке  $[t, \tau]$  функция, является отрезок

$$0 \leq \eta \leq \int_t^\tau f^*(r) dr. \quad (2.5)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из непрерывности функции  $f(t, v)$ , используя лемму А.Ф. Филиппова [10, 11] о выборе измеримой однозначной ветви, получим, что существует измеримая функция  $v_*(t) \in V(t)$  такая, что  $f(t, v_*(t)) = f^*(t)$  при  $t \leq p$ . Отсюда и из условий  $0 \in V(t)$  и  $f(t, 0) = 0$  следует утверждение леммы.

При числах  $\eta$ , удовлетворяющих неравенству (2.5), рассмотрим область достижимости по-мехи

$$V_t^\tau(\eta) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z = \int_t^\tau M(r) v(r) dr, \int_t^\tau f(r, v(r)) dr = \eta, \right. \\ \left. \text{измеримая } v(r) \in V(r) \text{ при } t \leq r \leq \tau \right\}. \quad (2.6)$$

**Лемма 2.2.** *Множество (2.6) является выпуклым компактом в  $\mathbb{R}^n$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим многозначную функцию

$$H(t) = \left\{ h = (z, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z = M(t)v, z_{n+1} = f(t, v) : v \in V(t) \right\}.$$

Из непрерывности функции  $f(t, v)$  и из предположения 1.1 следует, что каждое множество  $H(t)$  является компактом; многозначная функция  $H(t)$  измерима; существует неотрицательная функция  $\varphi_1(t)$ , интегрируемая на каждом отрезке  $[p_1, p]$ , такая, что  $\|h\|_{(n+1)} \leq \varphi_1(t)$  для любого  $h \in H(t)$ . Поэтому [11] интеграл  $\int_t^\tau H(r) dr$  является выпуклым компактом. Следовательно, множество

$$V_t^\tau(\eta) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : h = (z, h) \in \int_t^\tau H(r) dr \right\}$$

является выпуклым компактом. Лемма доказана.

Скалярное произведение двух векторов  $\psi$  и  $y$  в  $\mathbb{R}^n$  будем обозначать  $\langle \psi, y \rangle$ . Если  $Y \subset \mathbb{R}^n$  — компакт, то его опорную функцию будем обозначать  $c(\psi; Y) = \max \langle \psi, y \rangle, y \in Y$ .

Обозначим

$$m(t, \psi) = c(\psi; U_t^p). \quad (2.7)$$

Тогда из формул (1.7) и (2.1) получим, что

$$m(t, \psi) = \max_{t \leq r \leq p} \max_{\|u\| \leq 1} \langle \psi, N(r)u \rangle. \quad (2.8)$$

Отметим, что функция  $m(t, \psi)$  убывает с ростом переменной  $t$  и является четной по переменной  $\psi$ , т. е.  $m(t, \psi) = m(t, -\psi)$ .

### 3. Задача уклонения

Рассмотрим случай, когда множество  $L$  является компактом. Предполагаем, что  $m(t, \psi) > 0$  при всех  $t < p$  и  $\psi \in \mathbb{R}^n$ .

Для получения достаточных условий невозможности осуществления встречи применим метод одномерного проектирования [12, 13].

Если для некоторого вектора  $\psi \in \mathbb{R}^n$  выполнено неравенство

$$\langle \psi, z^{(\omega)}(p) \rangle - \mu^{(\omega)}(p) m(p, \psi) - c(\psi; L) > 0, \quad (3.1)$$

то включение (1.8) не выполнено при некотором числе  $\epsilon > 0$ .

Для любого компакта  $Y \subset \mathbb{R}^n$  обозначим

$$c_+(\psi; Y) = 0,5(c(\psi; Y) + c(-\psi; Y)), \quad c_-(\psi; Y) = 0,5(c(\psi; Y) - c(-\psi; Y)). \quad (3.2)$$

Функция  $c_+$  является четной по  $\psi$ , а функция  $c_-$  — нечетной. Далее

$$c_+(\psi; Y) \geq 0; \quad c_+(\psi; Y) + c_-(\psi; Y) = c(\psi; Y). \quad (3.3)$$

Обозначим

$$\alpha(\psi; t, \tau, \eta) = c(\psi; V_t^\tau(\eta)), \quad \alpha_+(\psi; t, \tau, \eta) = c_+(\psi; V_t^\tau(\eta)), \quad \alpha_-(\psi; t, \tau, \eta) = c_-(\psi; V_t^\tau(\eta)). \quad (3.4)$$

**Лемма 3.1.** Пусть для начальной позиции  $(t_0, z_0, \mu_0, \gamma_0)$  существует вектор  $\psi \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$\left| \langle \psi, z_0 \rangle - c_-(\psi; L) + \alpha_-(\psi; t_0, p, \eta) \right| > m(t_0, \psi) \mu_0 + c_+(\psi; L) - \alpha_+(\psi; t_0, p, \eta) \quad (3.5)$$

при некотором числе

$$0 \leq \eta \leq \min \left( \gamma_0; \int_{t_0}^p f^*(r) dr \right).$$

Тогда существует такая допустимая реализация помехи, что из этой начальной позиции невозможно осуществить встречу.

**Доказательство.** Сумма, стоящая под знаком модуля в левой части неравенства (3.5), является нечетной функцией по  $\psi$ . Поэтому на одном из векторов  $\pm\psi$  она отрицательна. Справа в (3.5) стоит четная функция по  $\psi$ . Поэтому, взяв в качестве  $\psi$  один из векторов  $\pm\psi$ , знак модуля в (3.5) можно убрать. Тогда, используя формулы (3.3) и (3.4), получим, что

$$\langle \psi, z_0 \rangle > m(t_0, \psi) \mu_0 + c(\psi; L) - c(\psi; V_{t_0}^p(\eta)). \quad (3.6)$$

Из определения опорной функции и из леммы 2.1 следует, что существует измеримая на отрезке  $[t_0, p]$  помеха  $v(r) \in V(r)$  такая, что

$$\int_{t_0}^p f(r, v(r)) dr = \eta, \quad \int_{t_0}^p \langle \psi, M(r)v(r) \rangle dr = c(\psi; V_{t_0}^p(\eta)). \quad (3.7)$$

Из формул (2.7) и (2.8), применяя теорему о среднем интеграла Римана — Стильбеса [14], получим неравенство

$$\left| \int_t^\tau \langle \psi, N(r)du(r) \rangle \right| \leq m(t, \psi) \int_t^\tau \|du(r)\|. \quad (3.8)$$

Возьмем произвольное разбиение  $\omega$  (1.3) и произвольную  $u$ -стратегию. Тогда из формулы (1.4) и из неравенства (3.8) следует, что

$$\langle \psi, z^{(\omega)}(t_{i+1}) \rangle \geq \langle \psi, z^{(\omega)}(t_i) \rangle - \left( \mu^{(\omega)}(t_i) - \mu^{(\omega)}(t_{i+1}) \right) m(t_i, \psi) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \psi, M(r)v_i(r) \rangle dr.$$

Просуммируем эти неравенства по  $i = \overline{0, k}$ . Тогда, учитывая формулы (3.6) и (3.7), получим, что левая часть требуемого неравенства (3.1) строго больше, чем

$$\sum_{i=0}^k \left( m(t_i, \psi) - m(t_{i+1}, \psi) \right) \mu^{(\omega)}(t_{i+1}).$$

Из монотонности функции  $m(t, \psi)$  следует, что последнее выражение неотрицательно. Лемма доказана.

Зафиксируем вектор  $\psi \in \mathbb{R}^n$  и рассмотрим числа  $t_0 < p$ ,  $\gamma_0 \geq 0$  такие, что непустым является множество чисел

$$t_0 \leq t_* \leq p, \quad \max \left( 0; \gamma_0 - \int_{t_0}^{t_*} f^*(r) dr \right) \leq \gamma_* \leq \gamma_0, \quad (3.9)$$

удовлетворяющих неравенству

$$\alpha_+(\psi; t_*, p, \eta) \geq c_+(\psi; L) \quad \text{при некотором } 0 \leq \eta \leq \min \left( \gamma_*, \int_{t_*}^p f^*(r) dr \right). \quad (3.10)$$

В частности, если  $\alpha_+(\psi; t_0, p, \eta) \geq c_+(\psi; L)$  при некотором

$$0 \leq \eta \leq \min \left( \gamma_0; \int_{t_0}^p f^*(r) dr \right),$$

то сами числа  $t_0$  и  $\gamma_0$  удовлетворяют (3.9) и (3.10).

Зафиксируем числа  $t_*$  и  $\gamma_*$ , удовлетворяющие (3.9) и (3.10). Возьмем произвольное разбиение отрезка  $[t_0, t_*]$

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \tau_{i+1} < \dots < \tau_{s+1} = t_*. \quad (3.11)$$

Из неравенства

$$0 \leq \gamma_0 - \gamma_* \leq \int_{t_0}^{t_*} f^*(r) dr$$

и из леммы 2.1 следует, что существуют числа

$$0 \leq \eta_i \leq \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f^*(r) dr, \quad \sum_{i=0}^s \eta_i = \gamma_0 - \gamma_*. \quad (3.12)$$

На каждом из отрезков  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  при формировании помехи  $v_i(r)$  будет тратиться  $\eta_i$  количество ресурсов. Тогда  $\gamma(\tau_{i+1}) = \gamma(\tau_i) - \eta_i$  и, следовательно,  $\gamma(t_*) = \gamma_0 - (\gamma_0 - \gamma_*) = \gamma_*$ .

Для фиксированного набора чисел  $\tau_i$  (3.11) и  $\eta_i$  (3.12) составим сумму

$$B_i(\psi) = \sum_{j=i}^s \frac{\alpha_+(\psi; \tau_j, \tau_{j+1}, \eta_j)}{m(\tau_j, \psi)}, \quad i = \overline{0, s}. \quad (3.13)$$

Из формул (3.2) и (3.4) видно, что каждая сумма (3.13), составленная для фиксированных наборов чисел (3.11) и (3.12), является четной функцией по  $\psi$ .

Верхнюю грань сумм  $B_0(\psi)$  по всем числам  $t_*$  и  $\gamma_*$ , удовлетворяющим (3.9) и (3.10), и по всем наборам чисел  $\tau_i$  (3.11) и  $\eta_i$  (3.12), обозначим  $B(\psi, t_0, \gamma_0)$ .

**Теорема 3.1.** Пусть числа  $t_0 < p$ ,  $\mu_0 \geq 0$ ,  $\gamma_0 \geq 0$  таковы, что для некоторого вектора  $\psi \in \mathbb{R}^n$  выполнено неравенство

$$\mu_0 < B(\psi, t_0, \gamma_0). \quad (3.14)$$

Тогда для любого  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  существует такая допустимая реализация помехи, что из начальной позиции  $(t_0, z_0, \mu_0, \gamma_0)$  невозможно осуществить встречу.

**Доказательство.** Из неравенства (3.14) следует, что существуют числа  $t_*$  и  $\gamma_*$ , удовлетворяющие (3.9) и (3.10), наборы  $\tau_i$  (3.11) и  $\eta_i$  (3.12) такие, что  $\mu_0 < B_0(\psi)$ .

Возьмем любое разбиение (1.3). Дополним его точками  $\tau_i$  (3.11). Диаметр полученного разбиения  $\omega$  только уменьшится.

При каждом  $i = \overline{0, s}$  рассмотрим сумму

$$A_i(\psi) = \sum_{j=i}^s \alpha_-(\psi; \tau_j, \tau_{j+1}, \eta_j) + \alpha_-(\psi; t_*, p, \eta) - c_-(\psi; L). \quad (3.15)$$

Как следует из формул (3.2) и (3.4), каждая из сумм (3.15), составленная для фиксированных наборов чисел (3.11) и (3.12), является нечетной функцией по  $\psi$ .

Покажем, что существует такая допустимая реализация помехи, что для любой  $u$ -стратегии выполнено неравенство

$$\left| \langle \psi, z^{(\omega)}(\tau_i) \rangle + A_i(\psi) \right| > m(\tau_i, \psi) \left( \mu^{(\omega)}(\tau_i) - B_i(\psi) \right), \quad i = \overline{0, s}. \quad (3.16)$$

Поскольку  $\mu^{(\omega)}(\tau_0) - B_0(\psi) = \mu_0 - B_0(\psi) < 0$ , то при  $i = 0$  неравенство (3.16) выполнено. Пусть оно выполнено при некотором  $0 \leq i < s$ . Покажем, что оно выполнено при  $i + 1$ .

Из нечетности  $A_i(\psi)$  следует, что на одном из векторов  $\psi_0 = \pm \psi$  сумма

$$\langle \psi_0, z^{(\omega)}(\tau_i) \rangle + A_i(\psi_0) \geq 0. \quad (3.17)$$

Из определения опорной функции и из формул (2.6) и (3.4) получим, что существует измеримая на отрезке  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  реализация помехи  $v_i(r) \in V(r)$  такая, что

$$\eta_i = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(r, v_i(r)) dr, \quad \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \langle \psi_0, M(r)v_i(r) \rangle dr = \alpha(\psi_0; \tau_i, \tau_{i+1}, \eta_i).$$

Из формулы (1.4) и из неравенства (3.8) следует, что

$$\left| \left\langle \psi_0, z^{(\omega)}(\tau_{i+1}) \right\rangle \right| \geq \left\langle \psi_0, z^{(\omega)}(\tau_i) \right\rangle - m(\tau_i, \psi_0) \left( \mu^{(\omega)}(\tau_i) - \mu^{(\omega)}(\tau_{i+1}) \right) + \alpha(\psi_0; \tau_i, \tau_{i+1}, \eta_i).$$

Отсюда, используя формулы (3.13) и (3.15), а также неравенства (3.16) и (3.17), получим, что

$$\left\langle \psi_0, z^{(\omega)}(\tau_{i+1}) \right\rangle + A_{i+1}(\psi_0) > m(\tau_i, \psi_0) \left( \mu^{(\omega)}(\tau_{i+1}) - B_{i+1}(\psi_0) \right).$$

Левая часть этого неравенства является нечетной функцией по  $\psi$ , а правая — четной. Отсюда и из того, что  $\psi_0 = \pm\psi$ , следует, что

$$\left| \left\langle \psi, z^{(\omega)}(\tau_{i+1}) \right\rangle + A_{i+1}(\psi) \right| > m(\tau_i, \psi) \left( \mu^{(\omega)}(\tau_{i+1}) - B_{i+1}(\psi) \right).$$

Пусть  $\mu^{(\omega)}(\tau_{i+1}) \geq B_{i+1}(\psi)$ . Тогда из предыдущего неравенства и из условия монотонности  $m(\tau_i, \psi) \geq m(\tau_{i+1}, \psi)$  получим, что неравенство (3.16) выполнено при  $i + 1$ . Если же  $\mu^{(\omega)}(\tau_{i+1}) < B_{i+1}(\psi)$ , то неравенство (3.16) при  $i + 1$  следует из условия  $m(\tau_{i+1}, \psi) > 0$ .

Положим в неравенстве (3.13)  $i = s + 1$  и учтем неравенство (3.10). Получим

$$\left| \left\langle \psi, z^{(\omega)}(t_*) \right\rangle - c_-(\psi; L) + \alpha_-(\psi; t_*, p, \eta) \right| > m(t_*, \psi) \mu^{(\omega)}(t_*) + c_+(\psi; L) - \alpha_+(\psi; t_*, p, \eta).$$

Применяя лемму 3.1, завершаем доказательство теоремы.

Зафиксируем вектор  $\psi \in \mathbb{R}^n$  и рассмотрим те числа  $t_0 < p$  и  $\gamma_0 \geq 0$ , для которых не существует чисел  $t_*$  и  $\gamma_*$ , удовлетворяющих формулам (3.9) и (3.10). В этом случае положим  $B(\psi, t_0, \gamma_0) = 0$ .

Обозначим при  $t < p$  и  $\gamma \geq 0$

$$b(t, \gamma) = \sup_{\psi} B(\psi, t, \gamma). \quad (3.18)$$

**Следствие 3.1.** Пусть  $0 \leq \mu_0 < b(t_0, \gamma_0)$ . Тогда для любого  $z_0 \in \mathbb{R}^n$  существует такая допустимая реализация помехи, что из начальной позиции  $(t_0, z_0, \mu_0, \gamma_0)$  невозможно осуществить встречу.

Можно проверить, что функция (3.18) удовлетворяет следующему условию монотонности:

$$t < \tau \leq p, \quad 0 \leq \eta \leq \min \left( \gamma; \int_t^\tau f^*(r) dr \right) \Rightarrow b(\tau, \gamma - \eta) \leq b(t, \gamma). \quad (3.19)$$

#### 4. Построение $u$ -стратегии, гарантирующей встречу

При построении  $u$ -стратегии используем понятие стабильного моста [7], ведущего в момент времени  $p$  на множество

$$X_L = \left\{ (z, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : z \in L + \mu U(p) \right\}.$$

Определение стабильности сформулируем в терминах оператора программного поглощения [15]. Зафиксируем множество  $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  и два числа  $t < \tau \leq p$ .

**О п р е д е л е н и е 4.1.** Точка  $(z, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  принадлежит множеству  $T_t^\tau(X)$  тогда и только тогда, когда для любой измеримой на отрезке  $[t, \tau]$  помехи  $v(r) \in V(r)$  с расходом ресурсов

$$\int_t^\tau f(r, v(r)) dr \leq \gamma$$

найдется управление  $u : [t, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^l$  с расходом ресурсов

$$\int_t^\tau \|du(r)\| \leq \mu$$

такое, что точка  $(z(\tau), \mu(\tau), \gamma(\tau)) \in X$ .

Сформулируем определение 4.1 в терминах областей достижимости. Точка  $(z, \mu, \gamma) \in T_t^\tau(X)$  тогда и только тогда, когда для любых

$$0 \leq \eta \leq \min\left(\gamma; \int_t^\tau f^*(r)dr\right), \quad v \in V_t^\tau(\eta) \quad (4.1)$$

найдутся число  $0 \leq \nu \leq \mu$  и точка  $u \in U_t^\tau$  такие, что

$$(z + \nu u + v, \mu - \nu, \gamma - \eta) \in X.$$

Семейство множеств  $\Phi(t) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  при  $t \leq p$  называется стабильным мостом, ведущим в момент времени  $p$  на множество  $X_L$ , если

$$\Phi(t) \subset T_t^\tau(\Phi(\tau)), \quad t < \tau \leq p; \quad \Phi(p) \subset X_L. \quad (4.2)$$

Возьмем произвольную функцию  $b(t, \gamma) \geq 0$ , удовлетворяющую условию монотонности (3.19). Будем искать мост  $\Phi(t)$  в виде соотношений

$$z \in (\mu - b(t, \gamma))U_t^p + W(t, \gamma), \quad \mu \geq b(t, \gamma), \quad \gamma \geq 0. \quad (4.3)$$

Можно показать, используя формулу (2.2), что первое включение в (4.2) выполнено, если

$$W(t, \gamma) + V_t^\tau(\eta) \subset (b(t, \gamma) - b(\tau, \gamma - \eta))U_t^p + W(\tau, \gamma - \eta) \quad (4.4)$$

для любых чисел  $\eta$ , удовлетворяющих неравенству в (4.1). Второе включение в (4.2) будет выполнено, если

$$W(p, \gamma) \subset L + b(p, \gamma)U(p) \quad \text{при любых } \gamma \geq 0. \quad (4.5)$$

**Теорема 4.1.** Пусть при  $t \leq p$ ,  $\gamma \geq 0$  задано семейство непустых множеств  $W(t, \gamma) \subset \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющих включениям (4.4) и (4.5). Тогда из начальной позиции  $(t_0, z_0, \mu_0, \gamma_0)$ , удовлетворяющей соотношениям (4.2), возможно осуществить встречу с множеством  $L$  в момент времени  $p$ .

**Доказательство.** Зафиксируем число  $\epsilon > 0$ . Возьмем число  $a > 0$  такое, что

$$ab(t_0, \gamma_0) < \epsilon. \quad (4.6)$$

При

$$t_0 \leq t \leq p, \quad \max\left(0; \gamma_0 - \int_{t_0}^t f^*(r)dr\right) \leq \gamma \leq \gamma_0 \quad (4.7)$$

обозначим

$$W_+(t, \gamma) = W(t, \gamma) + a(b(t_0, \gamma_0) - b(t, \gamma))S. \quad (4.8)$$

Из условия монотонности (3.19) следует, что  $b(t_0, \gamma_0) \geq b(t, \gamma)$  для всех чисел  $t$  и  $\gamma$ , удовлетворяющих неравенствам (4.7).

Для позиции  $(t, z, \mu, \gamma)$ , удовлетворяющей условиям (4.7) и соотношениям (4.3) с заменой в них множества  $W(t, \gamma)$  на  $W_+(t, \gamma)$ , верно разложение

$$z = x + y, \quad x \in (\mu - b(t, \gamma))U_t^p, \quad y \in W_+(t, \gamma). \quad (4.9)$$

Рассмотрим проблему моментов [1]

$$\int_t^p \|du(r)\| \rightarrow \min, \quad x + \int_t^p N(r)du(r) = 0. \quad (4.10)$$

Из второго включения (4.9) и из формулы (2.3) следует, что проблема моментов (4.10) имеет решение  $u^{(\pi)} : [t, p] \rightarrow \mathbb{R}^l$ , причем

$$\int_t^p \|du(r)\| \leq \mu - b(t, \gamma). \quad (4.11)$$

Если для позиции  $(t, z, \mu, \gamma)$  не выполнены неравенства (4.7) и соотношения (4.3) с  $W = W_+$ , то полагаем  $u(r) = 0$  при  $t \leq r \leq p$ .

Из равенства (4.10) и неравенства (4.11) следует, что построенная функция  $u : [t, p] \rightarrow \mathbb{R}^l$  при  $t < \tau \leq p$  удовлетворяет неравенству

$$\mu(\tau) = \mu - \int_t^\tau \|du(r)\| \geq b(t, \gamma) \quad (4.12)$$

и включению

$$x + \int_t^\tau N(r)du(r) \in (\mu(\tau) - b(t, \gamma))U_\tau^p. \quad (4.13)$$

Берем эту функцию в качестве  $u$ -стратегии.

Область достижимости  $U_t^p$  непрерывно по Хаусдорфу зависит от  $t$ . Поэтому на отрезке  $[t_0, p]$  она равномерно непрерывна. Следовательно, для выбранного ранее числа  $a > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что

$$U_t^p \subset U_\tau^p + aS \quad \text{при} \quad t_0 \leq t < \tau \leq t + \delta, \quad \tau \leq p. \quad (4.14)$$

Возьмем разбиение  $\omega$  (1.3) с диаметром  $d(\omega) < \delta$  и применим построенную  $u$ -стратегию. В результате реализации допустимой помехи получим ломаную (1.4)–(1.6). Покажем, что для всех  $i = 0, k + 1$  выполнено неравенство

$$\mu^{(\omega)}(t_i) \geq b(t_i, \gamma^{(\omega)}(t_i)) \quad (4.15)$$

и включение

$$z^{(\omega)}(t_i) \in (\mu^{(\omega)}(t_i) - b(t_i, \gamma^{(\omega)}(t_i)))U_{t_i}^p + W_+(t_i, \gamma^{(\omega)}(t_i)). \quad (4.16)$$

Начальная позиция удовлетворяет соотношениям (4.3). Отсюда и из (4.8) следует, что она удовлетворяет соотношениям (4.15) и (4.16) при  $i = 0$ . Допустим, что соотношения (4.15) и (4.16) выполнены для  $0 < i \leq k$ . Тогда из (4.12) следует, что  $\mu^{(\omega)}(t_{i+1}) \geq b(t_i, \gamma^{(\omega)}(t_i))$ . Отсюда и из условия монотонности (3.19) получим, что неравенство (4.15) выполнено и при  $i + 1$ .

Из формулы (2.6) следует, что для реализовавшейся при  $t_i \leq r \leq t_{i+1}$  допустимой помехи  $v_i(r)$  выполнено включение

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} M(r)v_i(r)dr \in V_{t_i}^{t_{i+1}}(\gamma^{(\omega)}(t_i) - \gamma^{(\omega)}(t_{i+1})).$$

Отсюда, используя формулу (1.4), последнее включение в (4.9) и включение (4.13), получим, что

$$\begin{aligned} z^{(\omega)}(t_{i+1}) &\in \left( \mu^{(\omega)}(t_{i+1}) - b(t_i, \gamma^{(\omega)}(t_i)) \right) U_{t_{i+1}}^p \\ &+ W_+(t_i, \gamma^{(\omega)}(t_i)) + V_{t_i}^{t_{i+1}} \left( \gamma^{(\omega)}(t_i) - \gamma^{(\omega)}(t_{i+1}) \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Включение (4.4) выполнено при  $t = t_i$ ,  $\gamma = \gamma^{(\omega)}(t_i)$ ,  $\tau = t_{i+1}$ ,  $\eta = \gamma^{(\omega)}(t_i) - \gamma^{(\omega)}(t_{i+1})$ . Прибавим к обеим частям включения (4.4) множество  $a(b(t_0, \gamma_0) - b(t_i, \gamma^{(\omega)}(t_i)))S$  и учтем включение (4.14). Получим

$$\begin{aligned} &W_+(t_i, \gamma^{(\omega)}(t_i)) + V_{t_i}^{t_{i+1}} \left( \gamma^{(\omega)}(t_i) - \gamma^{(\omega)}(t_{i+1}) \right) \\ &\subset \left( b(t_i, \gamma^{(\omega)}(t_i)) - b(t_{i+1}, \gamma^{(\omega)}(t_{i+1})) \right) U_{t_{i+1}}^p + W_+(t_{i+1}, \gamma^{(\omega)}(t_{i+1})). \end{aligned}$$

Отсюда и из включения (4.17) следует, что включение (4.16) выполнено при  $i + 1$ .

Положим в (4.15)  $t_{k+1} = p$ . Получим, что  $\mu^{(\omega)}(p) \geq b(p, \gamma^{(\omega)}(p)) \geq 0$ . Из включения (4.5) и из формул (4.8) и (4.16) при  $t_{k+1} = p$  следует, что

$$z^{(\omega)}(p) \in L + \mu^{(\omega)}(p)U(p) + ab(t_0, \gamma_0)S.$$

Отсюда и из неравенства (4.6) получим требуемое включение (1.8). Теорема доказана.

Приведем пример функции  $b(t, \gamma)$ , при которой  $W(t, \gamma) = L$  удовлетворяет включению (4.4). Это включение будет выполнено, если

$$V_t^\tau(\eta) \subset \left( b(t, \gamma) - b(\tau, \gamma - \eta) \right) U_\tau^p$$

для любых чисел  $t < \tau \leq p$  и  $\eta$ , удовлетворяющих неравенству (4.1). С помощью опорных функций (2.7) и (3.4) это включение запишем в виде неравенств

$$b(\tau, \gamma - \eta) + \frac{\alpha(\psi; t, \tau, \eta)}{m(t, \psi)} \leq b(t, \gamma) \quad \text{для любого } \psi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.18)$$

Функция

$$F(t, \psi) = \max_{\psi} \frac{\langle \psi, M(t)v \rangle}{m(t, \psi)} \geq 0 \quad (4.19)$$

является непрерывной [16, лемма 2.3.5] при  $t < p$ ,  $v \in \mathbb{R}^q$ . Возьмем последовательность чисел  $p_k = p - 1/k$  и обозначим

$$\begin{aligned} b_k(t, \gamma) &= \sup_{v(\cdot)} \int_t^{p_k} F(r, v(r)) dr, \\ \int_t^p f(r, v(r)) dr &\leq \min \left( \int_t^p f^*(r) dr; \gamma \right), \quad v(r) \in V(r), \quad t \leq r \leq p. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Из предположения 1.1 следует, что  $b_k(t, \gamma) < +\infty$ . Далее,  $b_{k+1}(t, \gamma) \geq b_k(t, \gamma)$ . Положим

$$b(t, \gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(t, \gamma), \quad t < p; \quad b(p, \gamma) = 0.$$

**Теорема 4.2.** Пусть функция  $b(t, \gamma) < +\infty$  при  $t < p$  и  $\gamma \geq 0$ . Тогда она удовлетворяет неравенствам (3.19) и (4.18).

**Доказательство.** Возьмем числа  $t < \tau < p$ ,  $\gamma \geq 0$  и  $\eta$ , удовлетворяющие неравенству (4.1). Тогда для достаточно больших номеров  $k$  выполнено неравенство  $p_k > \tau$ . Возьмем любое число  $\epsilon > 0$ . Тогда из (4.20) следует, что существует функция  $v_\epsilon(r) \in V(r)$  такая, что

$$b_k(\tau, \gamma - \eta) - \epsilon < \int_{\tau}^{p_k} F(r, v_\epsilon(r)) dr, \quad \int_{\tau}^p f(r, v_\epsilon(r)) dr \leq \min \left( \int_{\tau}^p f^*(r) dr; \gamma - \eta \right). \quad (4.21)$$

Из неравенства (4.1) получим, что

$$\min \left( \int_t^p f^*(r) dr; \gamma \right) - \min \left( \int_{\tau}^p f^*(r) dr; \gamma - \eta \right) \leq \int_t^{\tau} f^*(r) dr. \quad (4.22)$$

Из леммы 2.1 следует, что существует функция  $v^0(r) \in V(r)$  такая, что  $\int_t^{\tau} f(r, v^0(r)) dr$  равен левой части неравенства (4.22). Тогда для функций  $v_0(r) = v^0(r)$  при  $t \leq r < \tau$  и  $v_0(r) = v_\epsilon(r)$  при  $\tau \leq r \leq p$  выполнено второе неравенство в (4.20). Далее,

$$b_k(t, \gamma) \geq \int_t^{p_k} F(r, v_0(r)) dr \geq \int_{\tau}^{p_k} F(r, v_\epsilon(r)) dr \geq b_k(\tau, \gamma - \eta) - \epsilon.$$

Отсюда, переходя к пределу  $\tau$  при  $k \rightarrow \infty$  и учитывая произвольность числа  $\epsilon > 0$ , получим неравенство (3.19).

Докажем неравенство (4.18). Пусть  $t < \tau < p_k$ . Из формулы (3.7) при  $t_0 = t$  и  $p = \tau$  следует, что существует функция  $v_1(r) \in V(r)$  такая, что

$$\alpha(\psi; t, \tau, \eta) = \int_t^{\tau} \langle \psi, M(r)v_1(r) \rangle dr, \quad \int_t^{\tau} f(r, v_1(r)) dr = \eta.$$

Пусть функция  $v_\epsilon(r)$  удовлетворяет (4.21). Тогда

$$b_k(\tau, \gamma - \eta) + \frac{\alpha(\psi; t, \tau, \eta)}{m(t, \psi)} \leq \int_{\tau}^{p_k} F(r, v_\epsilon(r)) dr + \epsilon + \int_t^{\tau} \frac{\langle \psi, M(r)v_1(r) \rangle}{m(t, \psi)} dr. \quad (4.23)$$

Из формулы (4.19) и из неравенства  $m(t, \psi) \geq m(r, \psi)$  при  $t \leq r \leq \tau$  получим, что последний интеграл в правой части неравенства (4.23) не больше, чем  $\int_t^{\tau} F(r, v_1(r)) dr$ . Следовательно, сумма, стоящая в левой части неравенства (4.23), не больше, чем  $\int_t^{p_k} F(r, v_0(r)) dr + \epsilon$ . Здесь  $v_0(r) = v_1(r)$  при  $t \leq r < \tau$  и  $v_0(r) = v_\epsilon(r)$  при  $\tau \leq r \leq p$ . Далее,

$$\int_t^p f(r, v_0(r)) dr \leq \eta + \min \left( \int_{\tau}^p f^*(r) dr; \gamma - \eta \right) = \min \left( \eta + \int_{\tau}^p f^*(r) dr; \gamma \right) \leq \min \left( \int_t^p f^*(r) dr; \gamma \right).$$

Следовательно, левая часть неравенства (4.23) не превосходит  $b_k(t, \gamma) + \epsilon$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  и учитывая произвольность числа  $\epsilon > 0$ , получим требуемое неравенство (4.18).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. **Красовский Н.Н.** Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 244–254.
3. **Красовский Н.Н., Репин Ю.М., Третьяков В.Е.** О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1965. № 4. С. 3–23.
4. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 5. С. 587–599.
5. **Пожарицкий Г.К.** Игровая задача импульсного сближения с противником, ограниченным по энергии // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 4. С. 579–589.
6. **Субботина Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406.
7. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. **Ухоботов В.И.** Линейная дифференциальная игра с ограничениями на импульсы управлений // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 355–362.
9. **Ухоботов В.И.** Гарантированный стабильный мост в линейной игре импульсной встречи с ограничением на энергетику / Челяб. гос. ун-т. Деп. в ВИНТИ 06.05.87, № 3254-B87. 20 с.
10. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вест. МГУ. Сер. Математика, механика. 1959. Вып. 2. С. 25–32.
11. **Hermes H.** The generalized differential equation  $\dot{x} \in R(t, x)$  // Advances Math. 1970. Vol. 4, no. 2. P. 149–169.
12. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейной игре с интегральными ограничениями и однотипные игры // Изв. РАН. Сер. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 192–199.
13. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособ. Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2005. 124 с.
14. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
15. **Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.** О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
16. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.

Ухоботов Виктор Иванович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. кафедрой Челяб. гос. ун-т  
e-mail: ukh@csu.ru

Поступила 12.01.2010

Зайцева Оксана Витальевна  
программист  
Челяб. гос. ун-т  
e-mail: ukh@csu.ru

УДК 517.977

## К ВОПРОСУ О ДЕФЕКТЕ СТАБИЛЬНОСТИ МНОЖЕСТВ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ<sup>1</sup>

В. Н. Ушаков, А. Г. Малёв

В работе исследуется свойство стабильности в игровой задаче о сближении конфликтно управляемой системы с целевым множеством в фиксированный момент окончания. Изучается понятие дефекта стабильности множеств в пространстве позиций игры. Ключевые слова: игровая задача о сближении, управление, конфликтно управляемая система, стабильный мост, гамильтониан.

V. N. Ushakov, A. G. Malev. On the question of the stability defect of sets in an approach game problem.

The stability property is studied in a game problem of the approach of a conflict-controlled system to a target set at a fixed termination time. The notion of the stability defect of sets in the space of game positions is investigated.

Keywords: approach game problem, control, conflict-controlled system, stable bridge, Hamiltonian.

### Введение

В работе рассматривается игровая задача о сближении конфликтно управляемой системы с целью в фиксированный момент времени. В рамках этой задачи исследуется центральное в позиционных дифференциальных играх свойство стабильности, введенное в работах [1–5]. Свойство стабильности выделяет в пространстве позиций игры стабильные мосты, являющиеся несущими элементами разрешающих конструкций. Существующие в настоящее время различные формулировки стабильности эквивалентны, т. е. выделяют одни и те же стабильные мосты. Часто бывает важно, какая из формулировок берется за основу при исследовании игровой задачи о сближении. Эффективной с точки зрения как теории, так и приложений оказалась предложенная в работах [6, 7] формулировка свойства стабильности, основанная на унификации.

Настоящая работа, дополняющая исследования свойства стабильности, основывается на унификационных конструкциях. Работа посвящена некоторому расширению концепции стабильности, связанному с рассмотрением в пространстве позиций игровой задачи о сближении не только множеств, обладающих свойством стабильности, но и других множеств, этим свойством не обладающих. Для такого расширения оказалось удобным использование унификационных определений стабильности, представленных в инфинитезимальной форме [8]. Инфинитезимальная форма выражена здесь в виде производных множеств многозначных отображений. Суть расширения заключается в следующем: для замкнутого множества в пространстве позиций игры вводится неотрицательная функция, заданная на границе множества и оценивающая степень несогласованности множества и динамики конфликтно управляемой системы с точки зрения понятия стабильности. Настоящая работа примыкает к [1–19].

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00587-а), программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2640.2008.1), регионального гранта РФФИ/ПСО (проект 07-0196085) и программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

## 1. Постановка игровой задачи о сближении

Пусть задана конфликтно управляемая система, поведение которой на промежутке времени  $[t_0, \vartheta]$  ( $t_0 < \vartheta < \infty$ ) описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x^0, \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  —  $m$ -мерный фазовый вектор системы,  $u$  — управление первого игрока,  $v$  — управление второго игрока,  $P$  и  $Q$  — компакты в евклидовых пространствах  $\mathbb{R}^p$  и  $\mathbb{R}^q$  соответственно.

Предполагается, что выполнены условия:

**Условие А.** Функция  $f(t, x, u, v)$  определена и непрерывна по совокупности переменных  $(t, x, u, v)$ , и для любой ограниченной замкнутой области  $\mathcal{D} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  существует такая постоянная  $L = L(\mathcal{D}) \in (0, \infty)$ , что

$$\begin{aligned} \|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| &\leq L \|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \\ (t, x^{(i)}, u, v) &\in \mathcal{D} \times P \times Q, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь символ  $\|f\|$  означает норму вектора  $f$  в евклидовом пространстве.

**Условие В.** Существует такая постоянная  $\mu \in (0, \infty)$ , что

$$\begin{aligned} \|f(t, x, u, v)\| &\leq \mu(1 + \|x\|), \\ (t, x, u, v) &\in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q. \end{aligned}$$

В игровой задаче о сближении первому игроку требуется обеспечить попадание на заданный компакт  $M \subset \mathbb{R}^m$  фазового вектора  $x[t]$  системы (1.1) в момент  $\vartheta$  [5]. Решение задачи о сближении требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления первого игрока [5].

Дуальной задачей к сформулированной является задача об уклонении, в которой второму игроку требуется обеспечить уклонение фазового вектора  $x[t]$  системы (1.1) в момент  $\vartheta$  от некоторой  $\varepsilon$ -окрестности  $M_\varepsilon$  компакта  $M$ . Решение задачи об уклонении требуется обеспечить в классе контрпозиционных процедур управления с поведением второго игрока [5].

Из сформулированных выше задач о сближении и об уклонении складывается дифференциальная игра сближения-уклонения в момент  $\vartheta$ . Для этой игры справедлива альтернатива [5]: существует такое замкнутое множество  $W^0 \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ , что для всех исходных позиций  $(t_*, x_*) \in W^0$  разрешима задача о сближении и для всех исходных позиций  $(t_*, x_*) \in ([t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m) \setminus W^0$  разрешима задача об уклонении.

Разрешающая позиционная процедура управления первого игрока для исходных позиций  $(t_*, x_*) \in W^0$  может быть реализована как позиционная процедура управления с поведением, нацеливающая фазовый вектор  $x[t]$  системы (1.1) на поводыря, идущего в множестве  $W^0$ . При этом основная трудность в решении задачи о сближении приходится на выделение  $W^0$  в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ .

Выделение  $W^0$  в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  представляет собой серьезную математическую проблему. Очевидно, что в общем случае эта проблема неразрешима из-за сложности игровой задачи о сближении. Эффективное аналитическое описание  $W^0$  возможно лишь в редких случаях. Методы и алгоритмы приближенного вычисления  $W^0$  разработаны пока лишь для некоторых классов игровых задач о сближении.

Стремясь выделить множество  $W^0$  в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ , используют одно очень важное свойство этого множества:  $W^0$  есть максимальный  $u$ -стабильный мост [5]. Иногда в процессе попыток выделить  $W^0$  выделяют некоторое множество  $W^*$ , относительно которого естественно возникает вопрос о том, насколько сильно оно отличается от  $W^0$ . С этим вопросом тесно связан

вопрос о том, в какой степени для множества  $W^*$  выполняется свойство стабильности ( $u$ -стабильности). Для корректной постановки этого последнего вопроса и ответа на него в разд. 3 настоящей работы приводится определение дефекта стабильности множества  $W^*$ , которое было впервые введено в [19]. В разд. 3 показано, как, используя понятие дефекта стабильности, построить по множеству  $W^*$  более широкое множество  $\mathcal{W}^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ , обладающее свойством стабильности. В предположении о выполнении некоторых не очень ограничительных условий на  $W^*$  мы сможем указать такое множество  $\mathcal{W}^*$ .

## 2. Свойство стабильности множеств

В этом разделе, опираясь на унификационные конструкции, опишем свойство стабильности множеств, содержащихся в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ .

Стабильность некоторого замкнутого множества  $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  означает слабую инвариантность его относительно некоторого семейства дифференциальных включений, связанных с системой (1.1) при помощи некоторого семейства  $\mathcal{L}$  многозначных отображений.

Для описания  $\mathcal{L}$  введем в рассмотрение некоторую функцию (гамильтониан) системы (1.1)

$$H(t, x, l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle,$$

$$(t, x, l) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,$$

где  $\langle l, f \rangle$  — скалярное произведение векторов  $l$  и  $f$  из  $\mathbb{R}^m$ .

Принимая во внимание условие В и определение множества  $W^0$ , заключаем, что в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  можно выделить достаточно большую ограниченную и замкнутую область  $\mathcal{D}$ , которая будет содержать множество  $W^0$  и все движения  $x[t]$ , приходящие в некоторую  $\varepsilon$ -окрестность  $M_\varepsilon$  множества  $M$ .

Однако, считая, что задан некоторый компакт  $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ , мы сталкиваемся с необходимостью уточнить выбор области  $\mathcal{D}$ . Опишем процедуру уточнения.

Итак, пусть  $W^*$  — компакт в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  со свойствами, которые укажем ниже. Сейчас же для выбора области  $\mathcal{D}$  нам важны лишь размеры компакта  $W^*$ .

Введем в рассмотрение числа  $h_1 = h(W^0, [t_0, \vartheta] \times \{\mathbf{0}\})$ ,  $h_2 = h(W^*, [t_0, \vartheta] \times \{\mathbf{0}\})$ ,  $\gamma > \max(h_1, h_2)$ ; здесь  $\mathbf{0}$  — нуль в  $\mathbb{R}^m$ ,  $h(\Phi_*, \Phi^*)$  — хаусдорфово отклонение  $\Phi_*$  от  $\Phi^*$ ,  $\Phi_*$  и  $\Phi^*$  — компакты в  $\mathbb{R}^m$ .

Полагаем  $Z = [t_0, \vartheta] \times B(\mathbf{0}; \gamma)$  — цилиндр в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ , содержащий  $W^0$ ,  $W^*$  и  $(\vartheta, M) = \{(\vartheta, x) : x \in M\}$ ; здесь  $B(\mathbf{0}; \gamma)$  — замкнутый шар в  $\mathbb{R}^m$  с центром в  $\mathbf{0}$  и радиуса  $\gamma$ .

Приведем известное утверждение, которым воспользуемся при выборе области  $\mathcal{D}$ .

**Лемма 1** (Гронуолла — Беллмана [20]). *Пусть скалярные непрерывные функции  $z(t)$  и  $g(t)$  на  $[t_0, \vartheta]$  неотрицательны и удовлетворяют неравенству*

$$z(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t g(s)z(s)ds, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

где  $\alpha(t)$  — неубывающая интегрируемая функция.

Тогда

$$z(t) \leq \alpha(t)e^{\int_{t_0}^t g(s)ds}, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Пусть теперь  $u(s)$ ,  $v(s)$  — допустимые управления первого и второго игроков на  $[t_0, \vartheta]$ , т. е.  $u(s)$ ,  $v(s)$  измеримы по Лебегу на  $[t_0, \vartheta]$  и  $u(s) \in P$ ,  $v(s) \in Q$  при  $s \in [t_0, \vartheta]$ . Тогда решение  $x(t)$ ,

$t \in [t_0, \vartheta]$  начальной задачи (1.1), отвечающее этим управлениям, удовлетворяет равенству

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), u(s), v(s)) ds, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Принимая во внимание условие В, получаем

$$\|x(t)\| \leq \|x^0\| + \int_{t_0}^t \mu(1 + \|x(s)\|) ds, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

и, значит,

$$\|x(t)\| \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t g(s) \|x(s)\| ds, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

где  $\alpha(t) = \|x^0\| + \mu(t - t_0)$ ,  $g(t) = \mu$  при  $t \in [t_0, \vartheta]$ . Согласно лемме Гронуолла — Беллмана получаем

$$\|x(t)\| \leq (\|x^0\| + \mu(t - t_0))e^{\mu(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Погрузим цилиндр  $Z$  в ограниченную замкнутую область  $\mathcal{D} = \{(t, x) : t \in [t_0, \vartheta], x \in B(\mathbf{0}; \gamma(t))\}$ , где  $\gamma(t) = (\gamma + \mu(t - t_0))e^{\mu(t-t_0)}$ .

Область  $\mathcal{D}$  представляет собой интегральную воронку дифференциального включения  $\dot{x} \in U(x)$  с начальным множеством  $\mathcal{D}(t_0) = B(\mathbf{0}; \gamma)$ ; здесь  $U(x) = \{f \in \mathbb{R}^m : \|f\| \leq \mu(1 + \|x\|)\}$ .

Так как при любых  $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  верно  $F(t, x) = \text{co}\{f(t, x, u, v) : u \in P, v \in Q\} \subset U(x)$ , то все решения  $x(t)$  дифференциального включения  $\dot{x} \in F(t, x)$ ,  $(t_*, x(t_*)) \in Z$  удовлетворяют включению  $(t, x(t)) \in \mathcal{D}$  при  $t \in [t_*, \vartheta]$ .

Выберем в качестве  $G = B(\mathbf{0}; r)$  шар в  $\mathbb{R}^m$ , содержащий все множества  $F(t, x)$ ,  $(t, x) \in \mathcal{D}$ .

Полагаем при  $(t, x, l) \in \mathcal{D} \times S$ ,  $S = \{l \in \mathbb{R}^m : \|l\| = 1\}$

$$F_l(t, x) = \Pi_l(t, x) \cap F(t, x),$$

$$\Pi_l(t, x) = \{f \in \mathbb{R}^m : \langle l, f \rangle \leq H(t, x, l)\}.$$

Справедливо включение

$$F_l(t, x) \subset G, \quad (t, x, l) \in \mathcal{D} \times S.$$

Принимая во внимание условие В, выберем  $\gamma > 0$  настолько большим, что не только  $W^*$  и  $(\vartheta, M)$ , но и  $W^0$  содержатся в  $\mathcal{D}$ . Условие В позволяет, не прибегая к непосредственному построению  $W^0$ , найти такое  $\gamma$ .

Определим семейство  $\mathcal{L}$  как совокупность многозначных отображений  $(t, x) \mapsto F_l(t, x)$ ,  $(t, x) \in \mathcal{D}$ , отвечающих векторам  $l \in S$ .

Свойство стабильности выразим при помощи семейства  $\mathcal{L}$ . Для этого полагаем

$X_l(t_*; t_*, x_*)$  — множество достижимости в момент  $t^*$  д. в.  $\dot{x} \in F_l(t, x)$ ,  $x(t_*) = x_*$ ,

$X_l^{-1}(t_*; t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X_l(t_*; t_*, x_*) \cap X^* \neq \emptyset\}$ ,  $X^* \subset \mathbb{R}^m$ .

**О п р е д е л е н и е 2.1.** Оператором стабильного поглощения  $\pi$  в задаче о сближении в момент  $\vartheta$  назовем отображение

$$(t_*; t^*, X^*) \mapsto \pi(t_*; t^*, X^*) = \bigcap_{l \in S} X_l^{-1}(t_*; t^*, X^*) \subset \mathbb{R}^m, \quad (t_*; t^*, X^*) \in \Delta \times 2^{\mathbb{R}^m};$$

здесь  $\Delta = \{(t_*, t^*) : t_0 \leq t_* \leq t^* \leq \vartheta\} \subset [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta]$ .

**О п р е д е л е н и е 2.2.** Замкнутое множество  $W \subset \mathcal{D}$  назовем  $u$ -стабильным мостом в задаче о сближении в момент  $\vartheta$ , если

$$W(\vartheta) \subset M; \quad W(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, W(t^*)), \quad (t_*; t^*) \in \Delta,$$

здесь  $W(t_*) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t_*, x) \in W\}$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ .

Как уже упоминалось, множество  $W^0$  есть максимальный (по включению)  $u$ -стабильный мост [5]. Напомним также инфинитезимальную формулировку свойства стабильности, выраженную в терминах семейства  $\mathcal{L}$  (см. [19, с. 181]). Эту формулировку приведем в виде теоремы.

**Теорема 1.** *Непустое замкнутое множество  $W \subset \mathcal{D}$  является  $u$ -стабильным мостом в задаче о сближении в момент  $\vartheta$  тогда и только тогда, когда*

1.  $W(\vartheta) \subset M$ ;
2.  $\vec{D}W(t, x) \cap F_l(t, x) \neq \emptyset$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $(t, x, l) \in \partial W \times S$ .

Здесь  $\vec{D}W(t, x) = \left\{ d \in \mathbb{R}^m : d = \lim_{k \rightarrow \infty} (t_k - t)^{-1}(w_k - x), \{t_k, w_k\} \text{ — последовательность в } W, t_k \downarrow t \text{ при } k \rightarrow \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} w_k = x \right\}$ .

Заметим, что мост  $W^0$  удовлетворяет равенству  $W^0(\vartheta) = M$ . Кроме того,  $W^0$ , как и любой другой  $u$ -стабильный мост  $W$ , обладает свойством непрерывности: если  $(t_*, t^*) \in \Delta$  и  $W^0(t_*) \neq \emptyset$ , то  $W^0(t^*) \neq \emptyset$ .

Согласно определению моста  $W^0$  справедливо соотношение  $X_l(t^*; t_*, x_*) \cap W^0(t^*) \neq \emptyset$ ,  $(t_*, x_*, l) \in W^0 \times S$ , из которого, учитывая  $X_l(t^*; t_*, x_*) \subset B(x_*; (t^* - t_*)r)$ , получаем

$$B(x_*; (t^* - t_*)r) \cap W^0(t^*) \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in W^0,$$

откуда следует

$$h(W^0(t_*), W^0(t^*)) \leq r(t^* - t_*), \quad (t_*, t^*) \in \Delta. \quad (2.1)$$

Из (2.1) вытекает

$$G \cap \vec{D}W^0(t_*, x_*) \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in W^0, \quad t_* \in [t_0, \vartheta].$$

### 3. Дефект стабильности множеств в пространстве позиций игры

В этом разделе приведем определение *дефекта стабильности* множества  $W^* \subset \mathcal{D}$  (см. [19]).

Предполагаем, что  $W^* \subset \mathcal{D}$  из разд. 2 обладает свойством непрерывности и  $W^*(\vartheta) = M$ . Более того, в усиление свойства непрерывности множества  $W^*$  предполагаем, что выполнено

**Условие С.1.** При некотором  $R \in [r, \infty)$

$$h(W^*(t_*), W^*(t^*)) \leq R(t^* - t_*), \quad (t_*, t^*) \in \Delta.$$

Условие С.1 — аналог условия (2.1), которому удовлетворяет  $W^0$ . Только здесь делается некоторое послабление для константы, входящей в правую часть неравенства: в условии (2.1) эта константа равна  $r$ , здесь же константа  $R \in [r, \infty)$ . Заметим, что ограничение на константу  $R$  не является принципиальным и имеет скорее технический характер.

В дополнение к условию С.1 предполагаем, что выполнено симметричное ему

**Условие С.2.**  $h(W^*(t^*), W^*(t_*)) \leq R(t^* - t_*)$ ,  $(t_*, t^*) \in \Delta$ .

Пару условий С.1, С.2 запишем в виде:

**Условие С.** При некотором  $R \in [r, \infty)$

$$d(W^*(t_*), W^*(t^*)) \leq R(t^* - t_*), \quad (t_*, t^*) \in \Delta.$$

Здесь  $d(W_1, W_2)$  — хаусдорфово расстояние между компактами  $W_1$  и  $W_2$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$ .

**З а м е ч а н и е 3.1.** Условие С означает, что многозначное отображение  $t \mapsto W^*(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , — липшицево с константой Липшица  $R \in [r, \infty)$ . Условие С не является слишком ограничительным для  $W^*$ . Из условия С следует, что множество  $W^*$  удовлетворяет соотношению

$$\vec{D}W^*(t_*, x_*) \cap B(\mathbf{0}; R) \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta].$$

Это условие подобно условию

$$\vec{D}W^0(t_*, x_*) \cap G \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in \partial W^0, \quad t_* \in [t_0, \vartheta],$$

которому удовлетворяет  $W^0$  — максимальный  $u$ -стабильный мост в задаче о сближении.

Сопоставим каждой точке  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ , число

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \sup_{l \in S} \rho(\vec{D}W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)) \geq 0,$$

здесь  $\rho(W_1, W_2) = \inf\{\|w_1 - w_2\| : (w_1, w_2) \in W_1 \times W_2\}$ .

Величину  $\varepsilon(t_*, x_*)$  назовем *дефектом стабильности* множества  $W^*$  в точке  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ .

**З а м е ч а н и е 3.2.** При некоторых не очень ограничительных условиях на динамику системы (2.1)  $\sup$  в выражении для  $\varepsilon(t_*, x_*)$  достигается во всех точках  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ . Одним из таких условий является, например, условие

$$\begin{aligned} H_*(t_*, x_*, l) < H(t_*, x_*, l) < H^*(t_*, x_*, l), \\ (t_*, x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta], \quad l \in S, \end{aligned}$$

здесь  $H_*(t_*, x_*, l) = \min_{g \in F(t_*, x_*)} \langle l, g \rangle$ ,  $H^*(t_*, x_*, l) = \max_{g \in F(t_*, x_*)} \langle l, g \rangle$ .

В дальнейшем нам понадобятся некоторые положения, касающиеся множеств  $F_l(t, x)$ ,  $l \in S$ . В частности, сформулируем и будем предполагать, что выполняется несколько более общее условие, чем то, которое сформулировано в замечании 3.2.

**Условие D.1.** При любых  $(t, x, l) \in \mathcal{D} \times S$  имеет место неравенство

$$H_*(t, x, l) < H(t, x, l) < H^*(t_*, x_*, l).$$

При выполнении условия D.1 многозначное отображение  $(t, x, l) \mapsto F_l(t, x)$  непрерывно (в хаусдорфовой метрике) на компакте  $\mathcal{D} \times S$ . Отсюда следует, что  $(t, x, l) \mapsto F_l(t, x)$  равномерно непрерывно на  $\mathcal{D} \times S$ , и, значит, существует такая функция  $\omega^*(\delta) \downarrow 0$  при  $\delta \downarrow 0$ , при которой справедливо неравенство

$$\begin{aligned} d(F_l(t_*, x_*), F_l(t^*, x^*)) &\leq \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \\ (t_*, x_*), (t^*, x^*) &\in \mathcal{D}, \quad l \in S. \end{aligned}$$

Обозначим  $\omega(\delta) = \delta\omega^*((1+r)\delta)$ ,  $\delta > 0$ , где  $r$  — радиус шара  $G$ , введенного в разд. 2. Функция  $\omega(\delta)$  будет использована нами при доказательстве основного утверждения этой работы — теоремы 1.

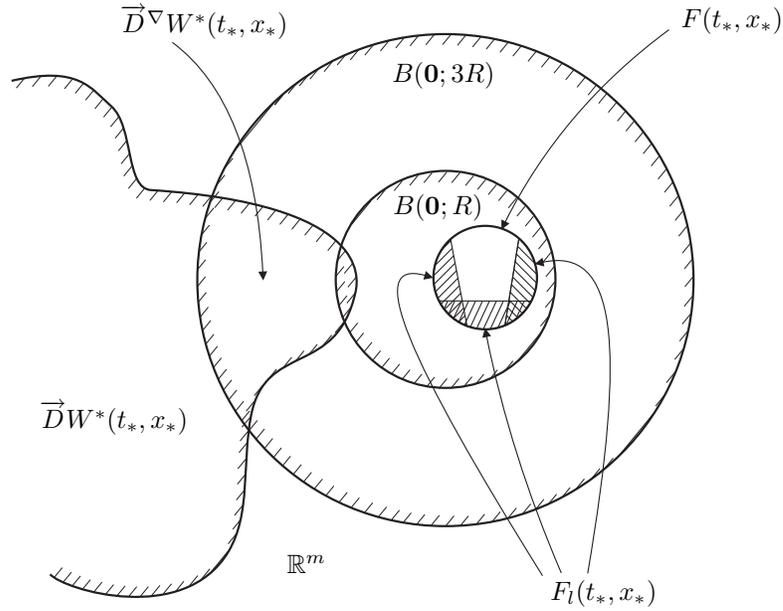


Рис. 1.

Полагаем также, что наряду с условием D.1 выполняется следующее условие, которое также будет использовано при доказательстве теоремы 1.

**Условие D.2.** Существует такое  $\lambda = \lambda(L) \in (0, \infty)$ , что для всех  $l \in S$ ,  $(t, x^{(i)}) \in \mathcal{D}$ ,  $i = 1, 2$ , имеет место неравенство

$$d(F_l(t, x^{(1)}), F_l(t, x^{(2)})) \leq \lambda \|x^{(1)} - x^{(2)}\|.$$

Для дальнейших рассуждений нам удобно, чтобы множество  $\vec{D}W^*(t_*, x_*)$ , входящее в выражение для  $\varepsilon(t_*, x_*)$ , было компактом в  $\mathbb{R}^m$ . В связи с этим подменим  $\vec{D}W^*(t_*, x_*)$  более узким множеством — компактом в  $\mathbb{R}^m$ , сохраняя при этом значение  $\varepsilon(t_*, x_*)$ . А именно, введем в рассмотрение множество (см. рис. 1)

$$\vec{D}^{\nabla}W^*(t_*, x_*) = \vec{D}W^*(t_*, x_*) \cap B(\mathbf{0}; 3R).$$

По определению числа  $R$  имеем  $G \subset B(\mathbf{0}; R)$  и поэтому  $F_l(t_*, x_*) \subset B(\mathbf{0}; R)$  при  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta)$ ,  $l \in S$ . Кроме того, из условия C следует  $\vec{D}W^*(t_*, x_*) \cap B(\mathbf{0}; R) \neq \emptyset$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \rho(\vec{D}^{\nabla}W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)) &= \rho(\vec{D}W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)), \\ (t_*, x_*) &\in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta), \quad l \in S. \end{aligned}$$

Поэтому верно представление

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_*, x_*) &= \sup_{l \in S} \rho(\vec{D}^{\nabla}W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)), \\ (t_*, x_*) &\in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta). \end{aligned}$$

Полагаем при  $t_* \in [t_0, \vartheta)$

$$\varepsilon(t_*) = \sup_{(t_*, x_*) \in \Lambda(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*),$$

где  $\Lambda(t_*) = \partial W^* \cap \Gamma_{t_*}$ ,  $\Gamma_{t_*} = \{(t, x) : t = t_*\}$ .

Величину  $\varepsilon(t_*)$  назовем *дефектом стабильности* множества  $W^*$  в момент  $t_* \in [t_0, \vartheta)$ . Вместе с тем возникает функция  $\varepsilon(t) \geq 0$  на  $[t_0, \vartheta)$ , которую мы доопределим значением  $\varepsilon(\vartheta) = 0$ . Функция  $\varepsilon(t)$  на  $[t_0, \vartheta]$  представляет собой некоторую характеристику неустойчивости множества  $W^*$ .

**З а м е ч а н и е 3.3.** Выполняется неравенство  $\varepsilon(t_*, x_*) \leq 2R$  при любых  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta)$ , и, значит, неравенство  $\varepsilon(t_*) \leq 2R$  при любых  $t_* \in [t_0, \vartheta)$ .

**З а м е ч а н и е 3.4.** Существует другой подход к определению той же самой функции  $\varepsilon(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta)$ . А именно, сопоставим каждой тройке  $(t_*, x_*, l) \in \partial W^* \times S$  число

$$\varepsilon_l(t_*, x_*) = \rho(\overrightarrow{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)).$$

Полагаем при  $t_* \in [t_0, \vartheta)$

$$\varepsilon_l(t_*) = \sup_{(t_*, x_*) \in \Lambda(t_*)} \varepsilon_l(t_*, x_*). \quad (3.1)$$

Вместе с тем возникает функция  $\varepsilon_l(t) \geq 0$  на  $[t_0, \vartheta)$ , которая представляет некоторую характеристику (слабой) инвариантности множества  $W^*$  относительно дифференциального включения  $\dot{x} = F_l(t, x)$ , отвечающего выбранному  $l \in S$ . Справедливо равенство

$$\varepsilon(t) = \sup_{l \in S} \varepsilon_l(t). \quad (3.2)$$

Представление (3.2) обладает, на наш взгляд, определенными преимуществами перед представлением (3.1). Так, например, если нам в конкретной игровой задаче о сближении удалось показать, что функция  $\varepsilon_l(t)$  при каждом  $t \in [t_0, \vartheta)$  непрерывно зависит от  $l$ , то

$$\varepsilon(t) = \max_{l \in S} \varepsilon_l(t).$$

Если же семейство функций  $\mathcal{K} = \{\varepsilon_l(\cdot) : l \in S\}$  равномерно непрерывно, то, очевидно, функция  $\varepsilon(t)$  будет непрерывной на  $[t_0, \vartheta)$ . При этом входящие в определение равномерно непрерывного семейства  $\mathcal{K}$  числа  $\varepsilon$  и  $\delta$  не изменяются с добавлением в  $\mathcal{K}$  функции  $\varepsilon(t)$ .

Далее, если нам удалось показать для какой-либо игровой задачи о сближении, что функции  $\varepsilon_l(t)$  на  $[t_0, \vartheta)$  липшицевы при каждом  $l \in S$  и при том с одной и той же константой Липшица, то и функция  $\varepsilon(t)$  на  $[t_0, \vartheta)$  будет липшицевой с этой же константой.

Известно, что в ряде игровых задач о сближении семейство  $\mathcal{L} = \{(t, x) \mapsto F_l(t, x) : l \in S\}$  можно сузить до некоторого конечного или счетного семейства  $\mathcal{L}_* = \{(t, x) \mapsto F_l(t, x) : l \in S_*\}$ ,  $S_* \subset S$ , которое выделяет в  $\mathcal{D}$  те же самые  $u$ -стабильные мосты  $W$ , что и семейство  $\mathcal{L}$ . В этих задачах можно вместо функции  $\varepsilon(t)$  из (3.2) ввести другую функцию  $\varepsilon(t)$  (не превосходящую первую) в соответствии с равенством

$$\varepsilon(t) = \sup_{l \in S_*} \varepsilon_l(t), \quad t \in [t_0, \vartheta), \quad (3.3)$$

причем в случае конечного множества  $S_*$  получаем формулу

$$\varepsilon(t) = \max_{l \in S_*} \varepsilon_l(t). \quad (3.4)$$

Если к тому же в этих игровых задачах удалось установить измеримость по Лебегу функций  $\varepsilon_l(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta)$ , отвечающих векторам  $l \in S_*$ , то функция  $\varepsilon(t)$  из (3.3) оказывается также измеримой по Лебегу на  $[t_0, \vartheta)$ . Тем самым мы устанавливаем для  $\varepsilon(t)$  выполнение условия Е.1 (см. ниже) — одного из основных условий в этой работе.

Таким образом, представление (3.2) оказывается полезным при исследовании различных свойств функции  $\varepsilon(t)$ .

Если вдруг оказалось, что  $W^*$  —  $u$ -стабильный мост, то по теореме 1

$$\vec{D}W^*(t_*, x_*) \cap F_l(t_*, x_*) \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta], \quad l \in S,$$

и, следовательно,

$$\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) \cap F_l(t_*, x_*) \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta], \quad l \in S.$$

Значит, верно  $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ ,  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ , откуда следует  $\varepsilon(t) = 0$  на  $[t_0, \vartheta]$ . В свою очередь, из этого равенства следует

$$\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) \cap F_l(t_*, x_*) \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta], \quad l \in S,$$

что определяет  $u$ -стабильность множества  $W^*$ .

Итак, стабильность множества  $W^*$  эквивалентна равенству  $\varepsilon(t) = 0$  на  $[t_0, \vartheta]$ . Значит, можно утверждать, что при условии  $\varepsilon(t) = 0$  на  $[t_0, \vartheta]$  правило экстремального прицеливания на поводыря, идущего по  $W^*$  [5], гарантирует приведение движения  $x[t]$  системы (1.1) на  $M$  в случае  $(t_*, x[t_*]) = (t_*, x_*) \in W^*$ .

Этот факт наводит на мысль о том, что в случае, когда множеству  $W^*$  соответствует малая на  $[t_0, \vartheta]$  функция  $\varepsilon(t)$ , правило экстремального прицеливания на поводыря, идущего по  $W^*$ , гарантирует приведение движения  $x[t]$  системы (1.1) в малую  $\varepsilon$ -окрестность  $M_\varepsilon$  целевого множества  $M$ . Кроме того, интуиция подсказывает, что множество  $W^*$  можно заменить некоторым более широким множеством  $W^*$ , не сильно отличающимся от  $W^*$  и обладающим свойством  $u$ -стабильности.

Для обоснования этих утверждений наложим на  $W^*$  и  $\varepsilon(t)$  дополнительные условия:

**Условие Е.1.** Существует такая функция  $\varphi^*(\delta) \geq 0$  на  $(0, \vartheta - t_0)$  ( $\varphi^*(\delta) \downarrow 0$  при  $\delta \downarrow 0$ ), что

$$\begin{aligned} h(x_* + \delta \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), W^*(t_* + \delta)) &\leq \delta \varphi^*(\delta), \\ (t_*, x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta], \quad \delta \in (0, \vartheta - t_*). \end{aligned}$$

**Условие Е.2.** Функция  $\varepsilon(t)$  измерима на  $[t_0, \vartheta]$  по Лебегу.

**З а м е ч а н и е 3.5.** Условие Е.2 является ослаблением условия Е из работы [19], предполагающего интегрируемость по Риману функции  $\varepsilon(t)$  на  $[t_0, \vartheta]$ .

Введем в рассмотрение множество  $\mathcal{W}^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ :  $\mathcal{W}^*(t) = W^*(t) + B(\mathbf{0}; \varkappa(t))$ ,  $\varkappa(t) = \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , где  $\varkappa(t)$  есть интеграл Лебега.

Сформулируем и докажем основное утверждение этой работы.

**Теорема 1.**  $W^*$  —  $u$ -стабильный мост в задаче о сближении системы (1.1) в момент  $\vartheta$  с целевым множеством  $M_{\varkappa(\vartheta)}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доказательство теоремы проведем методом от противного. Предположим, что для некоторых  $(\tau_*, t^*) \in \Delta$ ,  $(\tau_*, w_*) \in \partial W^*$ ,  $l \in S$ , имеет место (см. рис. 2)

$$\mathcal{W}^*(t^*) \cap X_l(t^*; \tau_*, w_*) = \emptyset. \quad (3.5)$$

Из предположения следует, что  $\tau_* < t^*$ , т. е.  $[\tau_*, t^*]$  — невырожденный отрезок. Положив  $\mathcal{X} = \{(t, x) : t \in [\tau_*, t^*], x \in X_l(t; \tau_*, w_*)\}$ , получаем, что  $\mathcal{W}^* \cap \mathcal{X}$  — непустой компакт в  $[\tau_*, t^*] \times \mathbb{R}^m$ . Множество  $\mathcal{T} = \text{pr}_t(\mathcal{W}^* \cap \mathcal{X})$  — ортогональная проекция множества  $\mathcal{W}^* \cap \mathcal{X}$  на ось  $t$  — также компакт, содержащийся в  $[\tau_*, t^*]$ . Учитывая (3.5), получаем  $t_* = \max_{t \in \mathcal{T}} t < t^*$ .

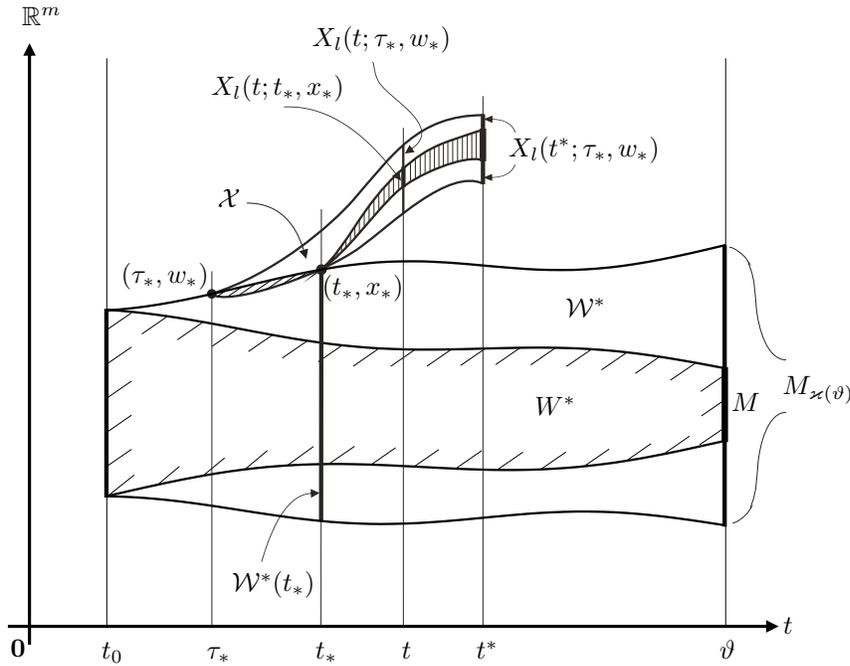


Рис. 2.

Рассмотрим отрезок  $[t_*, t^*]$ . Для него имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^*(t_*) \cap X_l(t_*, \tau_*, w_*) &\neq \emptyset, \\ \mathcal{W}^*(t) \cap X_l(t; \tau_*, w_*) &= \emptyset, \quad t \in (t_*, t^*]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Возьмем произвольную точку  $x_* \in \mathcal{W}^*(t_*) \cap X_l(t_*, \tau_*, w_*)$ . Из (3.6) следует  $(t_*, x_*) \in \partial \mathcal{W}^*$ . Из включения  $x_* \in X_l(t_*, \tau_*, w_*)$  следует  $X_l(t; t_*, x_*) \subset X_l(t; \tau_*, w_*)$  при  $t \in (t_*, t^*]$  и, значит,  $\mathcal{W}^*(t) \cap X_l(t; t_*, x_*) = \emptyset$  при  $t \in (t_*, t^*]$ .

Итак, предположив противное утверждению теоремы, получили, что найдутся такие  $(t_*, t^*) \in \Delta$ ,  $(t_*, x_*) \in \partial \mathcal{W}^*$ ,  $l \in S$ , для которых

$$\mathcal{W}^*(t) \cap X_l(t; t_*, x_*) = \emptyset, \quad t \in (t_*, t^*].$$

Введя функцию  $\rho(t) = \rho(X_l(t; t_*, x_*), \mathcal{W}^*(t))$  на  $[t_*, t^*]$ , получаем

$$\rho(t_*) = \varkappa(t_*), \quad \rho(t) > \varkappa(t) \text{ при } t \in (t_*, t^*].$$

Так как многозначные отображения  $t \mapsto X_l(t) = X_l(t; t_*, x_*)$  и  $t \mapsto \mathcal{W}^*(t)$  липшицевы на  $[t_*, t^*]$  (в хаусдорфовой метрике), то функция  $\rho(t)$  на  $[t_*, t^*]$  является липшицевой функцией. Значит, почти всюду на  $[t_*, t^*]$  существует производная  $\dot{\rho}(t)$  функции  $\rho(t)$ .

Пусть  $\xi_*$  — произвольная точка из  $(t_*, t^*)$ , в которой существует производная  $\dot{\rho}(\xi_*)$ . Рассмотрим множество достижимости  $X_l(\xi_*; t_*, x_*)$  и такую точку  $z_* \in X_l(\xi_*; t_*, x_*)$ , которая удовлетворяет равенству  $\rho(\xi_*) = \rho(z_*, \mathcal{W}^*(\xi_*))$ ; здесь  $\rho(z, W)$  — евклидово расстояние от точки  $z$  до  $W$ .

Пусть  $y_*$  — ближайшая к  $z_*$  точка на  $\mathcal{W}^*(\xi_*)$ . Так как  $\xi_* \in (t_*, t^*)$ ,  $z_* \notin \mathcal{W}^*(\xi_*)$ , то  $y_* \in \partial \mathcal{W}^*(\xi_*)$  (см. рис. 3). Рассмотрим точку  $(\xi_*, y_*) \in \partial \mathcal{W}^*$ . Согласно определению величины  $\varepsilon(\xi_*, y_*)$  имеем

$$\rho(F_l(\xi_*, y_*), \vec{D}^\nabla \mathcal{W}^*(\xi_*, y_*)) \leq \varepsilon(\xi_*, y_*). \quad (3.7)$$

Пусть  $(f, d) \in F_l(\xi_*, y_*) \times \vec{D}^\nabla \mathcal{W}^*(\xi_*, y_*)$  — пара векторов, удовлетворяющих равенству (см. рис. 4)

$$\|f - d\| = \rho(F_l(\xi_*, y_*), \vec{D}^\nabla \mathcal{W}^*(\xi_*, y_*)). \quad (3.8)$$

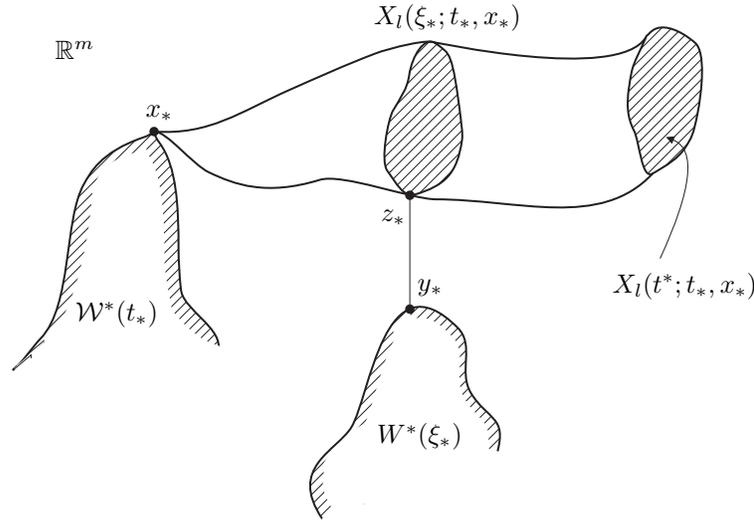


Рис. 3.

Так как  $d \in \vec{D}^\nabla W^*(\xi_*, y_*)$ , то найдутся такие последовательности  $\{\delta_k\}$  ( $\delta_k \downarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ) и  $\{y^*(\xi_* + \delta_k)\}$  ( $y^*(\xi_* + \delta_k) \in W^*(\xi_* + \delta_k)$  при  $k = 1, 2, \dots$ ), которые удовлетворяют равенству

$$y^*(\xi_* + \delta_k) = y_* + \delta_k d + \delta_k \varphi^*(\delta_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

где функция  $\varphi^*(\delta)$  определена в условии Е.1.

Для вектора  $f \in F_l(\xi_*, y_*)$  найдется вектор  $f^* \in F_l(\xi_*, z_*)$  такой, что

$$\|f - f^*\| \leq d(F_l(\xi_*, y_*), F_l(\xi_*, z_*)) \leq \lambda \|y_* - z_*\|, \quad (3.10)$$

где число  $\lambda$  определено в условии D.2.

Последовательность  $\{\delta_k\}$  порождает последовательность  $\{z_* + \delta_k f^*\}$  (см. рис. 5). Для каждой точки  $z_* + \delta_k f^*$  этой последовательности найдется в  $X_l(\xi_* + \delta_k; \xi_*, z_*)$  такая точка  $z(\xi_* + \delta_k)$ , что

$$\|z(\xi_* + \delta_k) - (z_* + \delta_k f^*)\| \leq d(X_l(\xi_* + \delta_k; \xi_*, z_*), z_* + \delta_k F_l(\xi_*, z_*)) \leq \omega(\delta_k). \quad (3.11)$$

Так как  $X_l(\xi_* + \delta_k; \xi_*, z_*) \subset X_l(\xi_* + \delta_k; t_*, x_*)$ , то  $z(\xi_* + \delta_k) \subset X_l(\xi_* + \delta_k; t_*, x_*)$ .

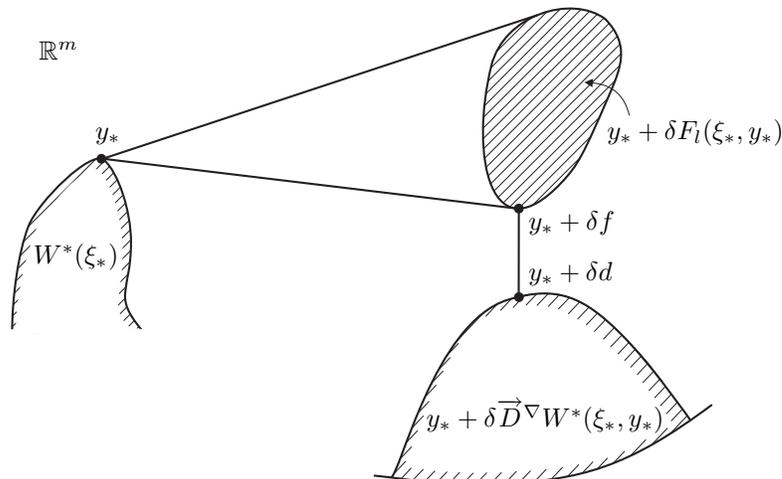


Рис. 4.

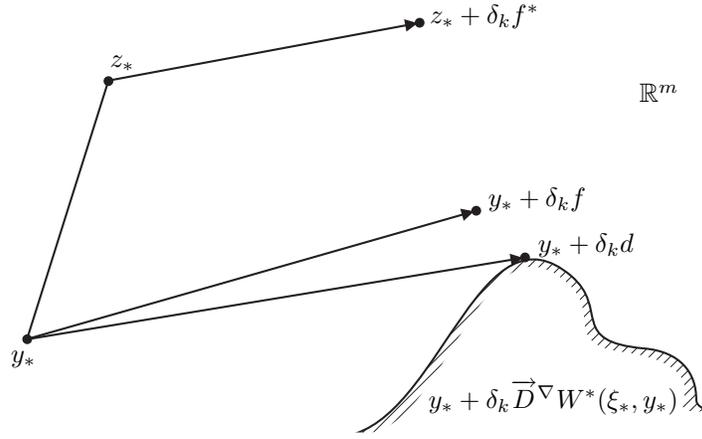


Рис. 5.

Из соотношений (3.7)–(3.11) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|(z_* + \delta_k f^*) - (y_* + \delta_k f)\| &\leq (1 + \delta_k \lambda) \|z_* - y_*\|, \\ \|(y_* + \delta_k f) - (y_* + \delta_k d)\| &\leq \delta_k \varepsilon(\xi_*, y_*) \leq \delta_k \varepsilon(\xi_*), \\ \|(y_* + \delta_k d) - y^*(\xi_* + \delta_k)\| &\leq \delta_k \varphi^*(\delta_k), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Учитывая включения  $z(\xi_* + \delta_k) \subset X_l(\xi_* + \delta_k; t_*, x_*)$ ,  $y^*(\xi_* + \delta_k) \in W^*(\xi_* + \delta_k)$  и неравенства (3.11), (3.12), получаем оценку

$$\begin{aligned} \rho(\xi_* + \delta_k) &\leq \|z(\xi_* + \delta_k) - y^*(\xi_* + \delta_k)\| \\ &\leq \omega(\delta_k) + (1 + \delta_k \lambda) \|z_* - y_*\| + \delta_k \varepsilon(\xi_*) + \delta_k \varphi^*(\delta_k), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из равенства  $\rho(\xi_*) = \|z_* - y_*\|$  и неравенства (3.13) следует

$$\delta_k^{-1} (\rho(\xi_* + \delta_k) - \rho(\xi_*)) \leq \lambda \rho(\xi_*) + \varepsilon(\xi_*) + \delta_k^{-1} \omega(\delta_k) + \varphi^*(\delta_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что для любой точки  $\xi_* \in (t_*, t^*)$ , в которой существует производная  $\dot{\rho}(\xi_*)$ , выполняется оценка

$$\dot{\rho}(\xi_*) \leq \lambda \rho(\xi_*) + \varepsilon(\xi_*). \quad (3.14)$$

Из неравенства (3.14), выполняющегося при почти всех  $\xi_*$  из  $[t_*, t^*]$ , следует неравенство

$$\rho(t) \leq e^{\lambda(t-t_*)} \rho(t_*) + \int_{t_*}^t e^{\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \in [t_*, t^*].$$

Принимая во внимание равенство  $\rho(t_*) = 0$ , получим из последнего неравенства

$$\rho(t) \leq \int_{t_*}^t e^{\lambda(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \in [t_*, t^*].$$

Используя определение функции  $\varkappa(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , имеем

$$\rho(t) \leq \varkappa(t), \quad t \in (t_*, t^*]. \quad (3.15)$$

Неравенство (3.15) противоречит неравенству

$$\rho(t) > \varkappa(t), \quad t \in (t_*, t^*].$$

Следовательно, предположение от противного неверно. Теорема 1 доказана.  $\square$

Так как в соответствии с этой теоремой множество  $W^*$  есть  $u$ -стабильный мост в игровой задаче о сближении системы (1.1) с целевым множеством  $M_{\varkappa(\vartheta)}$ , то существует позиционная процедура управления с поводырем первого игрока, обеспечивающая сближение фазового вектора  $x[t]$  системы (1.1) с множеством  $M_{\varkappa(\vartheta)}$  в момент  $\vartheta$ .

Число  $\varkappa(\vartheta)$  назовем дефектом стабильности множества  $W^*$ .

#### 4. Множества $W^*$ с гладкой границей, удовлетворяющие условиям С, Е.1, Е.2 (пример)

**Пример 1.** Пусть компакт  $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  имеет вид

$$W^* = \{(t, x) \in \mathcal{D} : \varphi(t, x) \leq 0\}, \quad (4.1)$$

где функция  $\varphi(t, x)$  определена и непрерывна вместе с  $\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  на  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$ .

Предполагаем, что

$$\begin{aligned} h(t_*, x_*) &= \text{grad}_x \varphi(t_*, x_*) \neq 0, \\ (t_*, x_*) &\in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta]. \end{aligned}$$

Здесь обозначено  $\partial W^* = \{(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m : \varphi(t_*, x_*) = 0\}$ .

Пусть  $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ . Тогда имеет место представление

$$\varphi(t, x) = \varphi(t_*, x_*) + \langle h(t_*, x_*), x - x_* \rangle + \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} (t - t_*) + \omega_{(t_*, x_*)}(t - t_*, x - x_*), \quad (4.2)$$

где

$$\lim_{(|t-t_*| + \|x-x_*\|) \downarrow 0} (|t-t_*| + \|x-x_*\|)^{-1} \omega_{(t_*, x_*)}(t-t_*, x-x_*) = 0. \quad (4.3)$$

Выберем некоторое  $\varepsilon > 0$  и введем множество  $\mathcal{D}^\varepsilon = \mathcal{D}_\varepsilon \cap ([t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m)$ ; здесь  $\mathcal{D}_\varepsilon$  — замкнутая  $\varepsilon$ -окрестность множества  $\mathcal{D}$  в  $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$ .

Функция  $\omega_{(t_*, x_*)}(t - t_*, x - x_*)$  в (4.2) представима в виде

$$\begin{aligned} \omega_{(t_*, x_*)}(t - t_*, x - x_*) &= (|t - t_*| + \|x - x_*\|) \xi_{(t_*, x_*)}(t - t_*, x - x_*), \\ (t, x) &\in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

где функция  $\xi_{(t_*, x_*)}(t - t_*, x - x_*)$  стеснена равномерной оценкой

$$\max_{\substack{(t_*, x_*), (t, x) \in \mathcal{D}^\varepsilon, \\ |t-t_*| + \|x-x_*\| \leq \rho}} |\xi_{(t_*, x_*)}(t - t_*, x - x_*)| \leq \xi^*(\rho), \quad \rho > 0,$$

в которой функция  $\xi^*(\rho)$  определена на  $(0, \infty)$  и  $\xi^*(\rho) \downarrow 0$  при  $\rho \downarrow 0$ .

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \varphi(t^*, x^*) &\leq \varphi(t_*, x_*) + \langle h(t_*, x_*), x^* - x_* \rangle + \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} (t^* - t_*) \\ &\quad + (|t^* - t_*| + \|x^* - x_*\|) \xi^*(|t^* - t_*| + \|x^* - x_*\|), \\ (t_*, x_*) &\in \mathcal{D}^\varepsilon, \quad (t^*, x^*) \in \mathcal{D}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Используя (4.4), покажем, что  $W^*$  удовлетворяет условию С.

Пусть точка  $(t_*, x_*)$  такова, что  $x_* \in \partial W(t_*)$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ . Пусть также  $r_* \in (0, \infty)$ ,  $R \in (0, \infty)$  и  $\Delta_t$  и  $\Delta_x$  определены соотношениями

$$\max_{(t_*, x_*) \in \partial W^*} \left| \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \right| \leq r_*, \quad h_* < r_*,$$

$$R = \frac{2r_*}{h_*}, \quad \text{где } h_* = \min_{(t_*, x_*) \in \partial W^*} \|h(t_*, x_*)\| > 0,$$

$$\Delta_t = t^* - t_*, \quad \Delta_x = x^* - x_* = -R \|h(t_*, x_*)\|^{-1} h(t_*, x_*) |\Delta_t|;$$

здесь  $(t^*, x^*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ .

Справедлива оценка

$$\varphi(t^*, x^*) \leq -R \|h(t_*, x_*)\| |\Delta_t| + r_* |\Delta_t| + (1 + R) |\Delta_t| \xi^*((1 + R) |\Delta_t|), \quad (4.5)$$

т. е.

$$\varphi(t^*, x^*) \leq \left\{ -r_* + \xi^*((1 + R) |\Delta_t|) (1 + R) \right\} \cdot |\Delta_t|. \quad (4.6)$$

Заметим, что оценки (4.5), (4.6) корректны лишь тогда, когда  $(t^*, x^*) \in D^\varepsilon$  наряду с точкой  $(t_*, x_*) \in \partial W^* \subset D^\varepsilon$ . Поэтому мы считаем, что оценки (4.5), (4.6) рассматриваются при таких  $\Delta_t$ , что  $|\Delta_t| \leq \delta_2$ , где  $\delta_2 = 1/2 \min((\vartheta - t_*), \delta_1)$ ,  $\delta_1 = (h_*/2r_*)\varepsilon$ . При этих  $\Delta_t$  имеем  $|\Delta_t| \leq \varepsilon/2$  и  $|\Delta_x| = \|x^* - x_*\| \leq \varepsilon/2$  и, следовательно,  $(t^*, x^*) \in D^\varepsilon$  наряду с  $(t_*, x_*) \in \partial W^* \subset D^\varepsilon$ .

Выберем  $\delta_* \in (0, \delta_2)$  настолько малым, что

$$\xi^*((1 + R)\delta_*) \leq (1 + R)^{-1} r_*.$$

Учитывая, что  $\xi^*(\rho) \downarrow 0$  при  $\rho \downarrow 0$ , получаем

$$-r_* + \xi^*((1 + R) |\Delta_t|) (1 + R) \leq 0, \quad |\Delta_t| \leq \delta_*. \quad (4.7)$$

Из (4.6), (4.7) следует оценка

$$\varphi(t^*, x^*) \leq 0. \quad (4.8)$$

Оценка (4.8) означает, что  $x^* \in W^*(t^*)$  при  $|\Delta_t| \leq \delta_*$ . Иными словами, для любой точки  $x_* \in \partial W(t_*)$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ , справедливо неравенство

$$\rho(x_*, W^*(t^*)) \leq \|x_* - x^*\| = R |\Delta_t|. \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что

$$h(W^*(t_*), W^*(t^*)) \leq R |t_* - t^*|, \quad |\Delta_t| \leq \delta_*. \quad (4.10)$$

Введя переобозначение  $t_* \longleftrightarrow t^*$ , неравенство (4.10) запишем в виде

$$h(W^*(t^*), W^*(t_*)) \leq R |t^* - t_*|, \quad |\Delta_t| \leq \delta_*. \quad (4.11)$$

Из (4.10), (4.11) следует условие С

$$d(W^*(t_*), W^*(t^*)) \leq R(t^* - t_*), \quad (t_*, t^*) \in \Delta.$$

Покажем далее, что  $W^*$  удовлетворяет условию Е.1, более изошренному, чем условие С.

Для этого рассмотрим производное множество  $\overrightarrow{DW}^*(t_*, x_*)$  многозначного отображения  $t \mapsto W^*(t)$  в точке  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ . Оно представимо в виде

$$\overrightarrow{DW}^*(t_*, x_*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^m : \langle h(t_*, x_*), d \rangle + \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \leq 0 \right\},$$

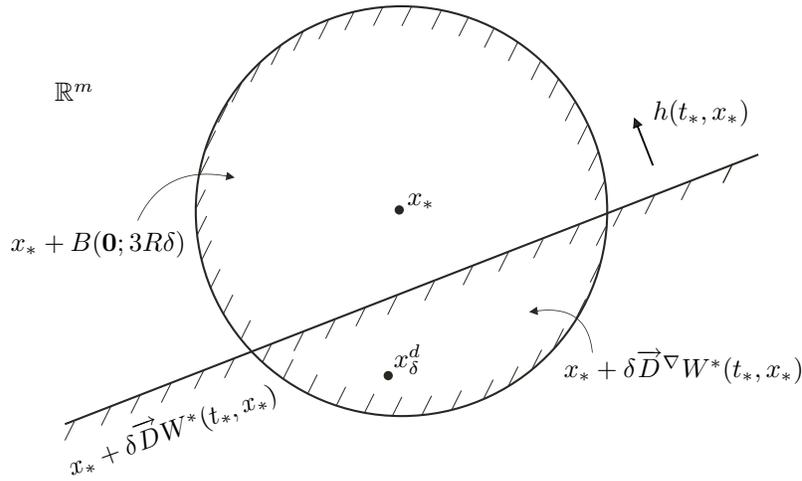


Рис. 6.

т. е. является полупространством в  $\mathbb{R}^m$ .

Рассмотрим также компакт  $\overline{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) = \overline{D}W^*(t_*, x_*) \cap B(\mathbf{0}; 3R)$ . Множество  $x_* + \delta \overline{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$ ,  $\delta > 0$ , из условия Е.1 имеет вид (см. рис. 6)

$$x_* + \delta \overline{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) = \left\{ x_\delta^d = x_* + \delta d : \langle h(t_*, x_*), x_\delta^d - x_* \rangle + \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \delta \leq 0, (x_\delta^d - x_*) \in B(\mathbf{0}; 3R\delta) \right\}.$$

Пусть  $\delta > 0$  и  $d \in \overline{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$ , что влечет за собой включение  $x_\delta^d = x_* + \delta d \in x_* + \delta \overline{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$ .

Наряду с точкой  $x_\delta^d$  рассмотрим точку  $x_{\gamma(\delta)} = x_\delta^d - \gamma(\delta)s$ ,  $s = \|h(t_*, x_*)\|^{-1}h(t_*, x_*)$ ,  $\gamma(\delta)$  — некоторое число из  $(0, \infty)$ . Зависимость  $\gamma$  от  $\delta$  уточним позже, т. е. укажем функцию  $\gamma(\delta) > 0$  при  $\delta > 0$ .

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \varphi(t_* + \delta, x_{\gamma(\delta)}) &= \varphi(t_* + \delta, x_\delta^d) + \langle h(t_* + \delta, x_\delta^d), x_{\gamma(\delta)} - x_\delta^d \rangle + \omega_{(t_* + \delta, x_\delta^d)}(0, x_{\gamma(\delta)} - x_\delta^d) \\ &= \varphi(t_*, x_*) + \langle h(t_*, x_*), x_\delta^d - x_* \rangle + \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \delta + \omega_{(t_*, x_*)}(\delta, x_\delta^d - x_*) \\ &\quad + \langle h(t_* + \delta, x_\delta^d), x_{\gamma(\delta)} - x_\delta^d \rangle + \omega_{(t_* + \delta, x_\delta^d)}(0, x_{\gamma(\delta)} - x_\delta^d). \end{aligned}$$

Так как  $\varphi(t_*, x_*) = 0$ ,  $\langle h(t_*, x_*), d \rangle + \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \leq 0$ , то

$$\begin{aligned} \varphi(t_* + \delta, x_{\gamma(\delta)}) &\leq -\gamma(\delta) \|h(t_*, x_*)\| - \gamma(\delta) \langle h(t_* + \delta, x_\delta^d) - h(t_*, x_*), s \rangle \\ &\quad + \omega_{(t_*, x_*)}(\delta, \delta d) + \omega_{(t_* + \delta, x_\delta^d)}(0, -\gamma(\delta)s). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для второго слагаемого в правой части неравенства (4.12) справедлива оценка

$$-\gamma(\delta) \langle h(t_* + \delta, x_\delta^d) - h(t_*, x_*), s \rangle \leq \gamma(\delta) \left\| h(t_* + \delta, x_\delta^d) - h(t_*, x_*) \right\|.$$

Положив  $\delta_0 = \min \{(\vartheta - t_*), (1 + 3R)^{-1}\varepsilon\}$ , получаем, что при  $\delta \in (0, \delta_0)$  выполняется  $(t_* + \delta, x_\delta^d) \in \mathcal{D}^\varepsilon$  и, значит,

$$\left\| h(t_* + \delta, x_\delta^d) - h(t_*, x_*) \right\| \leq \chi((1 + 3R)\delta), \quad \delta \in (0, \delta_0).$$

Здесь обозначено

$$\chi(\rho) = \max \left\{ \|h(t_*, x_*) - h(t^*, x^*)\| : (t_*, x_*), (t^*, x^*) \in \mathcal{D}^\varepsilon, |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leq \rho \right\}, \quad \rho > 0.$$

Отсюда вытекает оценка

$$-\gamma(\delta) \cdot \langle h(t_* + \delta, x_\delta^d) - h(t_*, x_*), s \rangle \leq \gamma(\delta)\chi((1 + 3R)\delta), \quad \delta \in (0, \delta_0). \quad (4.13)$$

Для двух последних слагаемых в правой части неравенства (4.12) справедливы при  $\delta \in (0, \delta_0)$  оценки

$$\omega_{(t_*, x_*)}(\delta, \delta d) \leq (1 + \|d\|)\delta\xi^*((1 + \|d\|)\delta) \leq (1 + 3R)\delta\xi^*((1 + 3R)\delta), \quad (4.14)$$

$$\omega_{(t_* + \delta, x_\delta^d)}(0, -\gamma(\delta)s) \leq \gamma(\delta)\xi^*(\gamma(\delta)). \quad (4.15)$$

Из (4.12), учитывая (4.13)–(4.15), получаем при  $\delta \in (0, \delta_0)$  оценку

$$\begin{aligned} \varphi(t_* + \delta, x_{\gamma(\delta)}) &\leq -\gamma(\delta)\|h(t_*, x_*)\| + \gamma(\delta)\chi((1 + 3R)\delta) + (1 + 3R)\delta\xi^*((1 + 3R)\delta) \\ &+ \gamma(\delta)\xi^*(\gamma(\delta)) \leq \gamma(\delta)\left(-h_* + \chi((1 + 3R)\delta)\right) + \gamma(\delta)\xi^*(\gamma(\delta)) + (1 + 3R)\delta\xi^*((1 + 3R)\delta). \end{aligned}$$

Пусть  $\delta^0 \in (0, \delta_0)$  таково, что  $\chi((1 + 3R)\delta) \leq h_*/2$  при  $\delta \in (0, \delta^0)$ . Для таких  $\delta$  справедливо неравенство

$$\varphi(t_* + \delta, x_{\gamma(\delta)}) \leq \gamma(\delta)\left(-\frac{h_*}{2} + \xi^*(\gamma(\delta))\right) + (1 + 3R)\delta\xi^*((1 + 3R)\delta). \quad (4.16)$$

Неравенство (4.16) запишем в виде

$$\varphi(t_* + \delta, x_{\gamma(\delta)}) \leq \gamma(\delta)\left(-\frac{h_*}{4} + \xi^*(\gamma(\delta))\right) + \left(-\gamma(\delta)\frac{h_*}{4} + (1 + 3R)\delta\xi^*((1 + 3R)\delta)\right), \quad \delta \in (0, \delta^0). \quad (4.17)$$

Положив  $\gamma(\delta) = (4/h_*)(1 + 3R)\delta\xi^*((1 + 3R)\delta)$ ,  $\delta \in (0, \delta^0)$ , видим, что второе слагаемое в правой части неравенства (4.17) обращается в нуль. Следовательно, при такой функции  $\gamma(\delta)$  и при  $\delta \in (0, \delta^0)$  справедлива оценка

$$\varphi(t_* + \delta, x_{\gamma(\delta)}) \leq \gamma(\delta)\left(-\frac{h_*}{4} + \xi^*(\gamma(\delta))\right).$$

Поскольку  $\gamma(\delta) \downarrow 0$  при  $\delta \downarrow 0$  и  $\xi^*(\rho) \downarrow 0$  при  $\rho \downarrow 0$ , то при достаточно малом  $\delta^1 \in (0, \delta^0)$  верно

$$-\frac{h_*}{4} + \xi^*(\gamma(\delta)) \leq 0, \quad \delta \in (0, \delta^1].$$

Значит, при  $\delta \in (0, \delta^1]$  верно

$$\varphi(t_* + \delta, x_{\gamma(\delta)}) \leq 0.$$

Отсюда следует, что в качестве “части” функции  $\varphi^*(\delta)$  в условии Е.1, отвечающей полуинтервалу  $(0, \delta^1]$ , можно взять функцию

$$\varphi^*(\delta) = \frac{\gamma(\delta)}{\delta} = \frac{4}{h_*}(1 + 3R)\xi^*((1 + 3R)\delta). \quad (4.18)$$

Относительно  $\delta^1$  есть две возможности: 1.  $\delta^1 \geq \vartheta - t_0$ , 2.  $\delta^1 < \vartheta - t_0$ .

В случае, когда реализовалась возможность 1, задаем функцию  $\varphi^*(\delta)$  на  $(0, \vartheta - t_0]$  в виде (4.18). Тогда для любой точки  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ , определена функция  $\varphi^*(\delta)$  на  $(0, \vartheta - t_*]$ , удовлетворяющая условию Е.1.

В случае, когда реализовалась возможность 2, функцию  $\varphi^*(\delta)$  в условии Е.1 зададим на  $(0, \delta^1]$  равенством (4.18). Затем доопределим функцию  $\varphi^*(\delta)$  на  $(\delta^1, \vartheta - t_0]$ .

Для этого рассмотрим произвольную точку  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$  и  $\delta \in (\delta^1, \vartheta - t_*)$ . Оценим сверху величину  $\delta^{-1}h(x_* + \delta\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), W^*(t_* + \delta))$ .

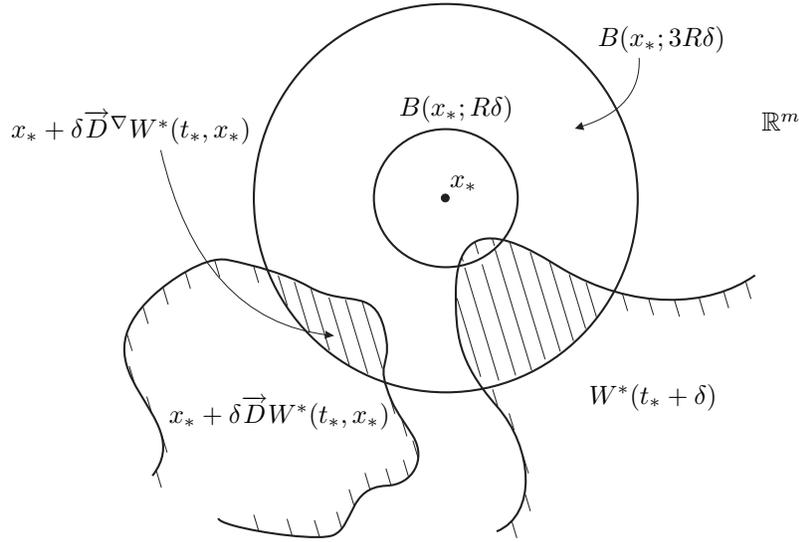


Рис. 7.

Из условия С следует соотношение (см. рис. 7)

$$W^*(t_* + \delta) \cap B(x_*, \delta R) \neq \emptyset, \quad \delta \in (0, \vartheta - t_*].$$

Кроме того, выполняется включение

$$x_* + \delta \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) \subset B(x_*, 3R\delta), \quad \delta \in (0, \vartheta - t_*].$$

Из этих двух соотношений вытекает

$$h(x_* + \delta \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), W^*(t_* + \delta)) \leq 4R\delta, \quad \delta \in (0, \vartheta - t_*].$$

Значит, при  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$  и  $\delta \in (\delta^1, \vartheta - t_*]$  верно неравенство

$$\delta^{-1} h(x_* + \delta \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), W^*(t_* + \delta)) \leq 4R.$$

Введя на промежутке  $(\delta^1, \vartheta - t_*]$  функцию

$$\varphi^*(\delta) = \varphi^*(\delta^1) + 4R + (\delta - \delta^1), \quad (4.19)$$

получаем при  $\delta \in (\delta^1, \vartheta - t_*]$  оценку

$$\delta^{-1} h(x_* + \delta \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), W^*(t_* + \delta)) \leq \varphi^*(\delta).$$

Функция  $\varphi^*(\delta)$  на  $(\delta^1, \vartheta - t_*]$  монотонно убывает с убыванием  $\delta$ , и, кроме того, верно неравенство

$$\varphi^*(\delta^1) < \varphi^*(\delta), \quad \delta \in (\delta^1, \vartheta - t_*]. \quad (4.20)$$

Следовательно, мы имеем на  $(0, \vartheta - t_*]$  функцию  $\varphi^*(\delta)$ , определяемую равенствами (4.18), (4.19), монотонно убывающую с убыванием  $\delta$  и удовлетворяющую соотношению  $\varphi^*(\delta) \downarrow 0$  при  $\delta \downarrow 0$ .

Распространим функцию  $\varphi^*(\delta)$  с полуинтервала  $(0, \vartheta - t_*]$  на полуинтервал  $(0, \vartheta - t_0]$  в соответствии с формулой (4.20). Тогда получим функцию  $\varphi^*(\delta)$ ,  $\delta \in (0, \vartheta - t_0]$ , монотонно убывающую с убыванием  $\delta$ , удовлетворяющую соотношению  $\varphi^*(\delta) \downarrow 0$  при  $\delta \downarrow 0$ . Функция  $\varphi^*(\delta)$  удовлетворяет условию Е.1.

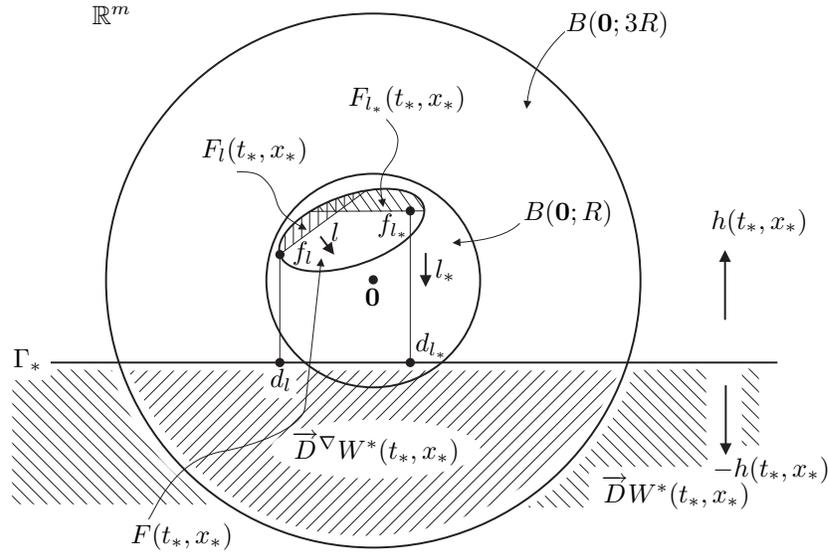


Рис. 8.

Докажем выполнение в рассматриваемом примере условия Е.2. Для этого вычислим в примере функцию  $\varepsilon(t_*, x_*)$ ,  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta)$ .

Обратимся снова к формуле

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \sup_{l \in S} \rho(\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)).$$

Для каждой точки  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta)$  возможны два случая:

1.  $\varepsilon(t_*, x_*) > 0$ ,    2.  $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ .

Допустим, что реализовался случай 1. Возьмем произвольное множество  $F_l(t_*, x_*)$ ,  $l \in S$ . Из определения числа  $R$  (см. с. 5) следует  $F_l(t_*, x_*) \subset B(\mathbf{0}; R)$ . Пусть  $(f_l, d_l)$  — та пара точек из  $F_l(t_*, x_*)$ ,  $\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$ , на которой реализуется величина  $\rho(\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*))$ :

$$\|f_l - d_l\| = \rho(\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)).$$

Пусть при этом множество  $F_l(t_*, x_*)$  таково, что  $\|f_l - d_l\| > 0$ . Заметим, что  $\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$  есть сегментарное множество в  $\mathbb{R}^m$  — пересечение замкнутого полупространства  $\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^m : \langle h(t_*, x_*), d \rangle \leq -\frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \right\}$  с шаром  $B(\mathbf{0}; 3R)$  в  $\mathbb{R}^m$ .

Обозначим через  $\Gamma_* = \left\{ d \in \mathbb{R}^m : \langle h(t_*, x_*), d \rangle = -\frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} \right\}$  гиперплоскость в  $\mathbb{R}^m$ , представляющую собой  $\partial \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$ .

Поскольку  $f_l \in B(\mathbf{0}; R)$  и  $f_l \notin \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$ , то  $B(\mathbf{0}; R) \setminus \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) \neq \emptyset$ . Также выполняется  $B(\mathbf{0}; R) \cap \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) \neq \emptyset$ . Следовательно,  $B(\mathbf{0}; R) \cap \Gamma_* \neq \emptyset$  (см. рис. 8).

Учитывая геометрию взаимного расположения множеств  $B(\mathbf{0}; R)$ ,  $B(\mathbf{0}; 3R)$  и  $\Gamma_*$ , получаем, что для любой точки  $g \in B(\mathbf{0}; R) \setminus \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$  ближайшей на  $\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$  будет такая точка  $g_* \in \Gamma_*$ , для которой вектор  $(g_* - g)$  нормален к гиперплоскости  $\Gamma_*$  (см. рис. 9).

В частности, точка  $f_l \in F_l(t_*, x_*) \subset B(\mathbf{0}; R) \setminus \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$  и ближайшая к ней на  $\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*)$  точка  $d_l$  порождают вектор  $(d_l - f_l)$ , нормальный к  $\Gamma_*$  (см. рис. 10).

Принимая во внимание этот факт, а также неравенство  $h_{F_{l_*}(t_*, x_*)}(l_*) \leq h_{F_l(t_*, x_*)}(l_*)$ , получаем, что величина

$$\sup_{l \in S} \|f_l - d_l\| = \sup_{l \in S} \rho(\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*))$$

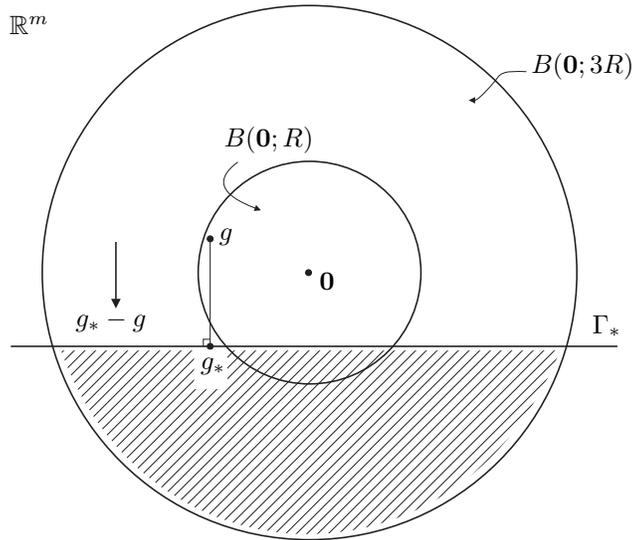


Рис. 9.

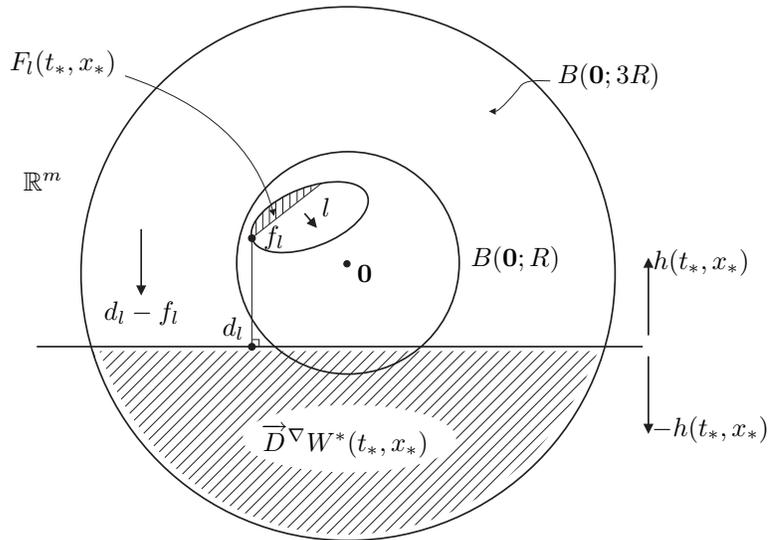


Рис. 10.

достигается на векторе  $l_* = -\|h(t_*, x_*)\|^{-1} h(t_*, x_*) \in S$  (см. рис. 11).

По определению точки  $f_{i_*}$  имеем  $H(t_*, x_*, l_*) = \langle l_*, f_{i_*} \rangle$  и, значит, в рассматриваемом случае 1

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_*, x_*) &= \langle l_*, d_{i_*} \rangle - \langle l_*, f_{i_*} \rangle = \|h(t_*, x_*)\|^{-1} \left( \langle -h(t_*, x_*), d_{i_*} \rangle - H(t_*, x_*, -h(t_*, x_*)) \right) \\ &= \|h(t_*, x_*)\|^{-1} \left( \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} - H(t_*, x_*, -h(t_*, x_*)) \right). \end{aligned}$$

Полагая  $H_*(t_*, x_*, l) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle l, f(t_*, x_*, u, v) \rangle$ , получаем в случае 1 выражение для дефекта стабильности множества  $W^*$  в точке  $(t_*, x_*)$

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \|h(t_*, x_*)\|^{-1} \left( \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} + H_*(t_*, x_*, h(t_*, x_*)) \right) > 0.$$

Рассмотрим теперь с л у ч а й 2 ( $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ ).

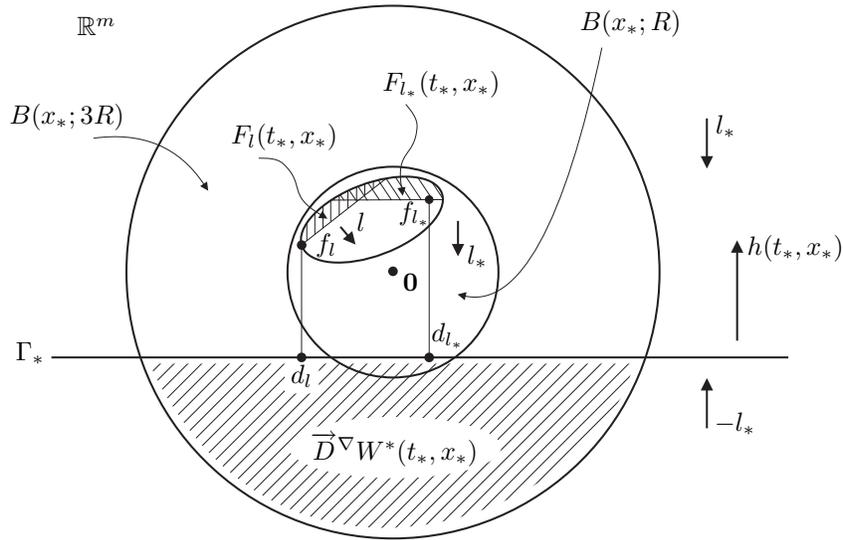


Рис. 11.

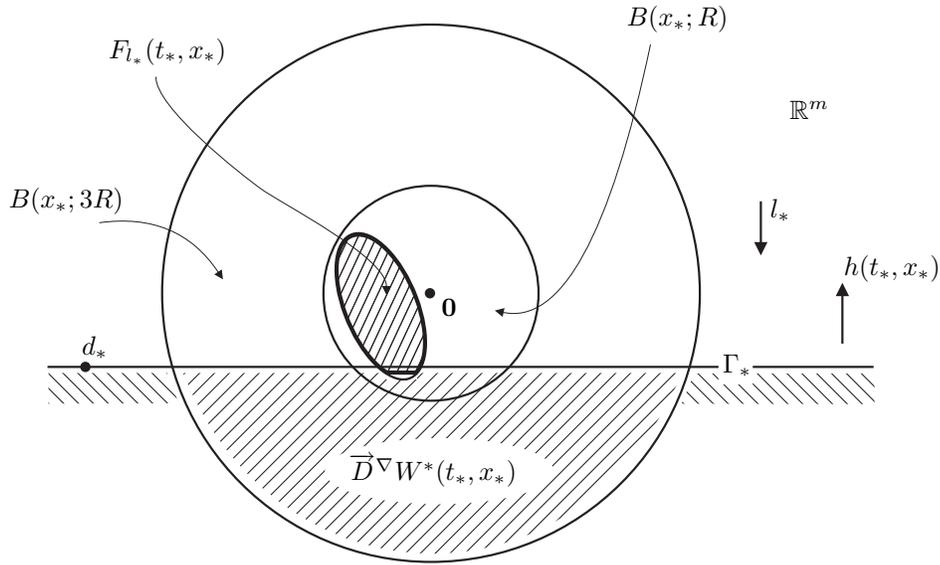


Рис. 12.

Покажем, что в рассматриваемом примере  $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$  тогда и только тогда, когда

$$\|h(t_*, x_*)\|^{-1} \left( \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} + H_*(t_*, x_*, h(t_*, x_*)) \right) \leq 0.$$

Действительно, пусть  $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ . Это означает, что  $F_l(t_*, x_*) \cap \vec{D}W^*(t_*, x_*) \neq \emptyset$ ,  $l \in S$ . В частности, справедливо  $F_{l_*}(t_*, x_*) \cap \vec{D}W^*(t_*, x_*) \neq \emptyset$  (см. рис. 12).

Обозначив через  $d_*$  произвольную точку гиперплоскости  $\Gamma_*$ , получаем неравенство

$$\langle l_*, d_* \rangle \leq h_{F_{l_*}(t_*, x_*)}(l_*) = H(t_*, x_*, l_*), \tag{4.21}$$

т. е.

$$\|h(t_*, x_*)\|^{-1} \left( \langle -h(t_*, x_*), d_* \rangle - H(t_*, x_*, -h(t_*, x_*)) \right) \leq 0. \tag{4.22}$$

Поскольку  $d_* \in \Gamma_*$ , то  $\langle -h(t_*, x_*), d_* \rangle = \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t}$ , и тогда (4.22) трансформируется в

неравенство

$$\|h(t_*, x_*)\|^{-1} \left( \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} + H_*(t_*, x_*, h(t_*, x_*)) \right) \leq 0. \quad (4.23)$$

Мы показали, что из  $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$  следует (4.23).

Допустим теперь, что выполняется (4.23). Из (4.23), как нетрудно убедиться, следует неравенство (4.21). Учитывая, что

$$H(t_*, x_*, l_*) = h_{F_{l_*}(t_*, x_*)}(l_*) \leq h_{F_{l_*}(t_*, x_*)}(l_*), \quad l \in S,$$

получаем неравенство  $\langle l_*, d_* \rangle \leq h_{F_{l_*}(t_*, x_*)}(l_*)$ ,  $l \in S$ .

Это неравенство означает  $F_{l_*}(t_*, x_*) \cap \overrightarrow{DW^*}(t_*, x_*) \neq \emptyset$ ,  $l \in S$ , т. е.  $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ . Показано, что из (4.23) следует равенство  $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ .

Вместе с тем эквивалентность  $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$  и (4.23) установлена.

Приведенные рассуждения показывают, что в рассматриваемом примере дефект  $\varepsilon(t_*, x_*)$  стабильности множества  $W^*$  в точке  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ , определяется равенствами

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_*, x_*) &= \max\{0, k(t_*, x_*)\}, \\ k(t_*, x_*) &= \|h(t_*, x_*)\|^{-1} \left( \frac{\partial \varphi(t_*, x_*)}{\partial t} + H_*(t_*, x_*, h(t_*, x_*)) \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Из (4.24) следует, что при  $t_* \in [t_0, \vartheta]$  справедливо представление

$$\begin{aligned} \varepsilon(t_*) &= \max_{(t_*, x_*) \in \Lambda(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*) = \max\{0, \zeta(t_*)\}, \\ \zeta(t_*) &= \max_{(t_*, x_*) \in \Lambda(t_*)} k(t_*, x_*). \end{aligned} \quad (4.25)$$

В силу условий, наложенных на функцию  $\varphi(t_*, x_*)$ , получаем, что функция  $k(t_*, x_*)$  непрерывна на  $\partial W^*$ . Кроме того, множество  $\Lambda(t_*)$  непрерывно зависит в хаусдорфовой метрике от  $t_*$  на  $[t_0, \vartheta]$ . Поэтому функция  $\zeta(t)$  и вместе с ней функция  $\varepsilon(t)$  непрерывны на  $[t_0, \vartheta]$ . Отсюда следует, что функция  $\varepsilon(t)$  измерима на  $[t_0, \vartheta]$ . Вместе с тем доказано выполнение условия E.2.

В связи с приведенными рассуждениями уместно ввести в теорию стабильных множеств еще одно понятие, дополняющее понятие дефекта стабильности. Это важное, на наш взгляд, понятие представляет собой числовую характеристику тех точек  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$ , в которых есть стабильность, т. е. в которых  $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ .

**О п р е д е л е н и е 4.1.** Пусть точка  $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta]$  такова, что  $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ . Величину  $k(t_*, x_*)$  (4.24) назовем *индексом стабильности* в точке  $(t_*, x_*)$ .

В заключение отметим, что в работе изучено понятие дефекта стабильности множества  $W^*$  в пространстве позиций, которое стеснено определенными условиями. Приведен пример множества с гладкой границей, удовлетворяющего этим условиям. В примере выведена формула для локального дефекта множества  $W^*$ . На основе этой формулы может быть вычислен дефект самого множества, в большинстве случаев приближенно. Также введено важное, на наш взгляд, понятие индекса стабильности в тех точках границы множества  $W^*$ , в которых имеет место локальная стабильность. Эти два понятия — дефект стабильности и индекс стабильности — дополняют друг друга.

## 5. Пример вычисления дефекта стабильности множества $W^*$ с гладкой границей

Пусть конфликтно управляемая система имеет вид

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\alpha \sin x_1 \end{pmatrix} + u + v, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (5.1)$$

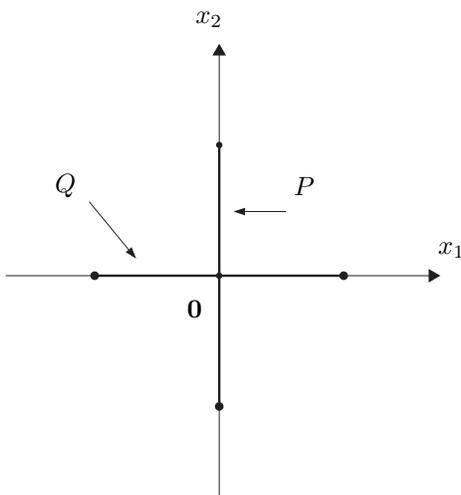


Рис. 13.

$x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $u = (u_1, u_2)^T \in P$ ,  $v = (v_1, v_2)^T \in Q$  на промежутке  $[t_0, \vartheta] = [0, 2\pi]$ , где символ  $(\ )^T$  означает операцию транспонирования.

Здесь  $P = \{u \in \mathbb{R}^2 : u_1 = 0, u_2 \in [-1, 1]\}$ ,  $Q = \{v \in \mathbb{R}^2 : v_1 \in [-1, 1], v_2 = 0\}$  (см. рис. 13). Система (5.1) удовлетворяет, как нетрудно видеть, условиям А и В, наложенным на систему (1.1) общего вида в разд. 1.

Считаем, что наряду с системой (5.1) задан компакт  $M = B(\mathbf{0}; 2) \subset \mathbb{R}^2$ .

Для системы (5.1) рассматривается игровая задача о сближении с  $M$  в момент  $\vartheta$  в традиционной постановке, стоящая перед первым игроком, владеющим выбором управления  $u$ .

Рассмотрим множество  $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$ , которое определяется соотношением (4.1), где функция  $\varphi(t, x)$  имеет вид

$$\varphi(t, x) = (\|x\|^2 - 3)(1 + \beta \sin(\vartheta - t)) - 1, \quad 0 < \beta < 1. \quad (5.2)$$

Заданный компакт  $W^*$  представляет собой цилиндр (см. рис. 14)

$$W^* = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^3 : t \in [t_0, \vartheta], \|x\| \leq \sqrt{3 + (1 + \beta \sin(\vartheta - t))^{-1}} = r_{W^*}(t) \right\}.$$

Наша цель состоит в том, чтобы вычислить в этой задаче дефект  $\varepsilon(t)$  стабильности множества  $W^*$  на  $[t_0, \vartheta]$ , а также число  $\varkappa(\vartheta)$ .

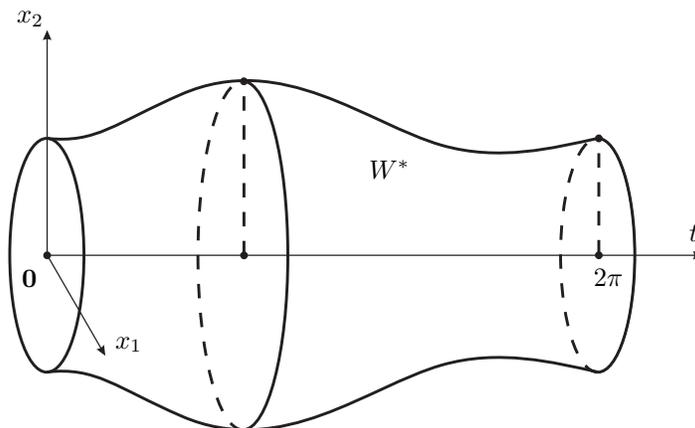


Рис. 14.

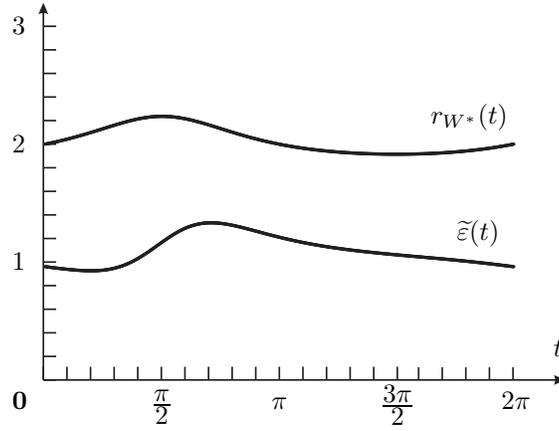


Рис. 15.

Нетрудно показать, что для рассматриваемого примера выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 H_*(t, x, l) &= l_1 x_2 - \alpha l_2 \sin x_1 + |l_1| - |l_2|, \\
 \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} &= \beta(3 - \|x\|^2) \cos(\vartheta - t), \\
 h(t, x) &= 2(1 + \beta \sin(\vartheta - t))x, \\
 t &\in [t_0, \vartheta), \quad (t, x) \in W^*, \quad l \in S, \\
 \lambda(L) &= L = 1.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

В соответствии с (4.24), (5.3) дефект стабильности множества  $W^*$  в точке  $(t, x) \in \partial W^*$ ,  $t \in [t_0, \vartheta)$  определяется равенством

$$\varepsilon(t, x) = \max \left\{ 0, r_{W^*}(t)^{-1} \left( -\frac{\beta \cos(\vartheta - t)}{2(1 + \beta \sin(\vartheta - t))} + x_1 x_2 - \alpha x_2 \sin x_1 + |x_1| - |x_2| \right) \right\}. \tag{5.4}$$

Зафиксируем  $t \in [t_0, \vartheta)$ . Граница  $\partial W^*(t)$  сечения множества  $W^*$  (здесь  $(t, \partial W^*(t)) = \Lambda(t)$ ) представляет собой  $S(\mathbf{0}; r_{W^*}(t))$  — сферу в пространстве  $\mathbb{R}^2$  с центром в нуле и радиусом  $r_{W^*}(t)$ . Поэтому в момент  $t$  точки  $x$  из  $\partial W^*(t)$  можно задать параметрически в виде  $x(\rho) = (x_1(\rho), x_2(\rho))$  при помощи формул

$$\begin{cases} x_1(\rho) = r_{W^*}(t) \cos \rho, \\ x_2(\rho) = r_{W^*}(t) \sin \rho, \end{cases} \quad \rho \in [0, 2\pi]. \tag{5.5}$$

В соответствии с формулами (4.25), (5.4), (5.5) вычислим функцию  $\varepsilon(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta)$  приближенно

$$\tilde{\varepsilon}(t_i) = \max_{x(\rho_j) \in \partial W^*(t_i)} \varepsilon(t_i, x(\rho_j)), \quad t_i \in \Gamma.$$

Здесь  $t_i$  — момент конечного разбиения  $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = \vartheta\}$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$ ,  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i = 0.01$  — диаметр разбиения  $\Gamma$ ,  $x(\rho_j)$ ,  $j = \overline{1, J}$  — точки из некоторой конечной  $\varepsilon$ -сети  $\{x(\rho_j): x(\rho_j) \in \partial W^*(t_i)\}$ ,  $\rho_{j+1} - \rho_j = 0.0001$ .

Дефект стабильности  $\varkappa(\vartheta)$  вычисляется нами приближенно как сумма Дарбу

$$\tilde{\varkappa}(\vartheta) = \sum_{i=0}^{N-1} e^{\vartheta - t_i} \tilde{\varepsilon}(t_i) \Delta_i, \quad t_i \in \Gamma.$$

В качестве примера были произведены расчеты требуемых величин при значении параметров  $\alpha = 0.5$  и  $\beta = 0.5$  (см. рис. 15). При таких значениях параметров величина  $\tilde{\varkappa}(\vartheta) \approx 548.75$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Смешанное управление в дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 4. С. 745–747.
3. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 190, № 3. С. 523–526.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
7. **Красовский Н.Н.** Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.
8. **Guseinov H.G., Subbotin A.I., and Ushakov V.N.** Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Problems Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, no. 6. P. 405–419.
9. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
10. **Kurzhanski A.V., Varaiya P.** Dynamic optimization for reachability problems // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 108, no. 2. P. 227–251.
11. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 1. С. 3–13.
12. **Ченцов А.Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99, № 3. С. 394–420.
13. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
14. **Субботин А.И., Субботина Н.Н.** Функция оптимального результата в задаче управления // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 2. С. 294–299.
15. **Ухоботов В.И.** Аналитическая схема построения стабильных мостов для операторов программного поглощения с инвариантными семействами множеств // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2005. № 2 (32). С. 23–34.
16. **Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.** Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр: сб. ст. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.
17. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.** О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения. Деп. в ВИНТИ, № 2454-83. Свердловск, 1983. 61 с.
18. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 216–222.
19. **Ушаков В.Н., Латушкин Я.А.** Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. Т. 12, № 2. С. 178–194.
20. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

Ушаков Владимир Николаевич  
чл.-корр. РАН  
зав. отделом  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Поступила 20.11.2009

Малёв Алексей Георгиевич  
аспирант  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: MalevAG@mail.ru

УДК 517.977

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ ОЦЕНОК МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>

Т. Ф. Филиппова

Рассматривается задача оценивания трубок траекторий нелинейной управляемой динамической системы с неопределенностью по начальным данным. Предполагается, что динамическая система имеет специальную структуру, в которой нелинейные члены квадратичны по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями. Найдены дифференциальные уравнения, описывающие динамику эллипсоидальных оценок множеств достижимости изучаемой нелинейной управляемой системы. Для оценивания множеств достижимости нелинейного дифференциального включения, соответствующего управляемой системе, используются результаты теории эллипсоидального оценивания и теории эволюционных уравнений для многозначных состояний динамических систем в условиях неопределенности.

Ключевые слова: множество достижимости, траекторные трубки, многозначные оценки, дифференциальные включения, эллипсоидальное оценивание, управляемые системы, динамические системы.

T. F. Filippova. Differential equations of ellipsoidal estimates for reachable sets of a nonlinear dynamical control system.

The problem of estimating trajectory tubes of a nonlinear control system with uncertainty in initial data is considered. It is assumed that the dynamical system has a special structure, in which nonlinear terms are quadratic in phase coordinates and the values of the uncertain initial states and admissible controls are subject to ellipsoidal constraints. Differential equations are found that describe the dynamics of the ellipsoidal estimates of reachable sets of the nonlinear dynamical system under consideration. To estimate reachable sets of the nonlinear differential inclusion corresponding to the control system, we use results from the theory of ellipsoidal estimation and the theory of evolution equations for multivalued states of dynamical systems under uncertainty.

Keywords: reachable set, trajectory tubes, set-valued estimates, differential inclusions, ellipsoidal estimation, control systems, dynamical systems.

### Введение

Данная работа посвящена решению задачи оценивания множества достижимости динамической управляемой системы, т. е. оцениванию множества тех состояний фазового пространства, куда фазовая точка может быть переведена из начального состояния (или множества начальных состояний) за заданное время при помощи допустимых управлений. Задачи оценивания являются одной из фундаментальных проблем в теории управления [3, 4], теории дифференциальных игр [3, 15], поскольку они связаны с исследованием сложных реальных систем различной природы (механических, экономических, экологических и др.), в описании которых присутствует неопределенность. Подчеркивая важность построения множеств достижимости (или информационных множеств [4]) динамических систем, отметим, что их форма и структура в большинстве случаев оказывается довольно сложной. В этих случаях представляют интерес их приближения областями определенной канонической формы. В качестве таких областей наиболее естественными являются эллипсоиды, параллелепипеды, многогранники и некоторые другие; использование таких канонических объектов довольно распространено в теории систем и задачах гарантированного оценивания. Построение различных операций над

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 09-01-00223-а, 09-01-90431-Укр-ф-а) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 29 “Математическая теория управления”.

ними формирует предмет так называемого многозначного анализа [8], которому в последнее время уделяется пристальное внимание. В зависимости от выбора типа аппроксимирующих множеств различают метод эллипсоидов, интервальный и полиэдральный подходы и другие методы. Каждый из отмеченных подходов имеет свои преимущества и недостатки, и выбор определенного метода оценивания зависит от конкретной ситуации.

Отметим, что в последние годы разработана полная теория построения оценок (внешних и внутренних) множеств достижимости линейных управляемых систем, основанная на технике эллипсоидального исчисления [4, 7, 16]. В рамках этого подхода основная задача состоит в нахождении эллипсоида (или семейства эллипсоидов) в фазовом пространстве, оценивающего сверху или снизу по отношению к операции включения множеств искомую область достижимости. Подчеркнем, что использование эллипсоидов в качестве аппроксимирующих множеств является удобным и оправданным, на наш взгляд, способом гарантированного оценивания, чему способствует ряд их неоспоримых преимуществ. Так, например, с помощью эллипсоидов можно получать хорошие оценки произвольных выпуклых множеств; квадратичное описание позволяет легко решать на них задачи оптимизации; класс эллипсоидов инвариантен по отношению к линейным преобразованиям; основные операции — сложения и пересечения — в классе эллипсоидов не вызывают трудностей и даются простыми решениями выпуклых задач оптимизации. Если предполагается, что векторы ошибок и внешних возмущений в динамической системе удовлетворяют квадратичным ограничениям, то применение метода эллипсоидов для аппроксимации областей достижимости представляется естественным и наиболее эффективным.

В работах [13, 14] техника эллипсоидального исчисления была использована для решения задач оценивания трубок траекторий некоторых нелинейных управляемых динамических систем с неопределенностью по начальным данным. При этом предполагалось, что динамическая система имеет специальную структуру, в которой нелинейные члены являются квадратичными по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями.

Отметим также, что в работах [6, 11, 12] рассматривались схемы построения многозначных оценок множеств достижимости управляемых импульсных систем, основанные на идеях и методах эллипсоидального исчисления. В этом случае ограничение на управляющие импульсные функции задавалось в виде специального обобщенного “эллипсоида” в пространстве функций ограниченной вариации.

В данной работе техника эллипсоидального исчисления развивается для трубок траекторий нелинейных управляемых динамических систем с неопределенностью по начальным данным. Для оценивания множеств достижимости нелинейного дифференциального включения, соответствующего рассматриваемой управляемой системе, используются результаты теории эллипсоидального оценивания и теории эволюционных уравнений многозначных состояний динамических систем в условиях неопределенности [13, 14]. Найдены дифференциальные уравнения, описывающие динамику эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной управляемой системы с неопределенностью по начальным данным.

## 1. Постановка задачи

Введем предварительно следующие обозначения. Пусть  $\mathbb{R}^n$  обозначает  $n$ -мерное евклидово пространство,  $\text{comp } \mathbb{R}^n$  — множество всех компактных подмножеств из  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{conv } \mathbb{R}^n$  — множество всех компактных выпуклых подмножеств из  $\mathbb{R}^n$ . Символ  $(x, y)$  обозначает скалярное произведение векторов  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , символ  $\|x\| = (x, x)^{1/2}$  — евклидова норма вектора  $x$ ,  $'$  — знак транспонирования,  $\mathcal{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ , символ  $E(y, Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : (Y^{-1}(x - y), (x - y)) \leq 1\}$  обозначает эллипсоид в  $\mathbb{R}^n$  с центром  $y$  и симметрической положительно определенной  $n \times n$ -матрицей  $Y$ ,  $\text{Tr}(Y)$  — след (сумма диагональных элементов)  $n \times n$ -матрицы  $Y$ ,  $I$  — единичная  $n \times n$ -матрица.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t))d + u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 \in \text{comp } \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Здесь  $A$  — постоянная  $n \times n$ -матрица; вектор  $d \in \mathbb{R}^n$ , управление  $u(t)$  — измеримая по Лебегу функция, стесненная геометрическим ограничением

$$u(t) \in U, \quad U \in \text{comp } \mathbb{R}^n.$$

Будем предполагать, что нелинейная функция  $f(x)$  в (1.1) является положительно определенной квадратичной формой

$$f(x) = x'Bx, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.3)$$

где  $B$  — симметрическая положительно определенная  $n \times n$ -матрица.

Обозначим символом  $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$  решение системы (1.1) на промежутке  $[t_0, T]$  для допустимых начального состояния  $x_0 \in X_0$  и управления  $u(\cdot)$ . Будем предполагать также, что все решения  $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$  определены на всем промежутке  $[t_0, T]$  для любых  $x_0$  и  $u(\cdot)$  (условия, при которых данное требование выполняется, аналогичны условиям работы [14]).

Обозначим символом  $\mathcal{U}$  класс допустимых измеримых управлений  $u(\cdot)$ . Трубку траекторий [17] системы (1.1) из начального состояния  $\{t_0, X_0\}$  обозначим символом

$$X(\cdot) = X(\cdot; t_0, X_0) = \bigcup \{x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)) \mid x_0 \in X_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}\}.$$

Отметим, что сечение  $X(t) = X(t; t_0, X_0)$  трубки траекторий  $X(\cdot)$  в момент времени  $t \in [t_0, T]$  совпадает со множеством достижимости системы (1.1) в момент  $t$  из начального состояния  $\{t_0, X_0\}$ .

В данной работе рассмотрены схемы построения оценок трубок траекторий  $X(\cdot)$  и множеств достижимости  $X(t)$  системы (1.1)–(1.3), основанные на идеях и методах эллипсоидального исчисления. Найдены дифференциальные уравнения, описывающие динамику эллипсоидальных оценок множеств достижимости изучаемой нелинейной управляемой системы.

## 2. Эллипсоидальные оценки множеств достижимости нелинейной системы: конечно-разностные схемы оценивания

Предположим дополнительно, что в (1.1)–(1.3) множества  $U$  и  $X_0$  являются эллипсоидами вида  $U = E(\hat{a}, \hat{Q})$  и  $X_0 = E(a, k^2 B^{-1})$ , где число  $k \neq 0$ , векторы  $a, \hat{a} \in \mathbb{R}^n$ , матрица  $B$  определена в (1.3), симметрическая матрица  $\hat{Q}$  является положительно определенной.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in Ax + f(x)d + E(\hat{a}, \hat{Q}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 = E(a, k^2 B^{-1}), \quad (2.2)$$

эквивалентное [5] управляемой системе (1.1)–(1.3) при указанных дополнительных предположениях о структуре данных, при этом множества достижимости  $X(t)$  систем (1.1)–(1.3) и (2.1), (2.2) совпадают.

## 2.1. Алгоритм внешнего оценивания множеств достижимости дифференциального включения

В работах [13, 14] были предложены алгоритмы, позволяющие найти внешние (по включению множеств) эллипсоидальные оценки множеств  $X(t)$  системы (2.1), (2.2). Указанные алгоритмы основывались на следующей теореме, вытекающей из результатов теории эволюционных уравнений типа уравнений интегральной воронки [9, 10, 18–21] для системы (2.1), (2.2).

**Теорема 1** [14]. Для всех  $\sigma > 0$  справедлива внешняя оценка множества достижимости  $X(t_0 + \sigma) = X(t_0 + \sigma; t_0, X_0)$  включения (2.1), (2.2)

$$X(t_0 + \sigma) \subseteq E(a^+(\sigma), Q^+(\sigma)) + o(\sigma)\mathcal{B}(0, 1), \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1}o(\sigma) = 0. \quad (2.3)$$

Здесь параметры эллипсоида  $E(a^+(\sigma), Q^+(\sigma))$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} a^+(\sigma) &= a(\sigma) + \sigma \hat{a}, \\ Q^+(\sigma) &= (p^{-1} + 1)Q(\sigma) + (p + 1)\sigma^2 \hat{Q}, \end{aligned}$$

где  $p$  — единственное положительное решение уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p + \lambda_i} = \frac{n}{p(p + 1)},$$

а  $\lambda_i \geq 0$  — корни уравнения  $|Q(\sigma) - \lambda \sigma^2 \hat{Q}| = 0$  и

$$\begin{aligned} a(\sigma) &= a + \sigma(Aa + a'Ba \cdot d + k^2d), \\ Q(\sigma) &= k^2(I + \sigma R)B^{-1}(I + \sigma R)', \quad R = A + 2da'B. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Приведем один из алгоритмов внешнего оценивания множеств достижимости  $X(t)$ , использующий в построении внешней многозначной оценки включение (2.3).

**А л г о р и т м 1** [14]. Рассмотрим разбиение  $\{[t_i, t_{i+1}]\}$  заданного отрезка  $[t_0, T]$ , где  $t_i = t_0 + ih$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $h = (T - t_0)/m$ ,  $t_m = T$ .

- Для заданного начального эллипсоида  $X_0 = E(a, k_0^2 B^{-1})$  ( $k_0 \neq 0$ ) построим эллипсоид  $X_1 = E(a_1, Q_1)$  по теореме 1 для  $a_1 = a^+(\sigma)$ ,  $Q_1 = Q^+(\sigma)$ ,  $\sigma = h$ .

- Найдем наименьшее  $k_1 > 0$  такое, что

$$E(a_1, Q_1) \subseteq \tilde{X}_1 = E(a_1, k_1^2 B^{-1}),$$

(число  $k_1^2$  совпадает с максимальным собственным значением матрицы  $B^{1/2}Q_1B^{1/2}$ ).

- Рассмотрим динамическую систему на следующем промежутке  $[t_1, t_2]$  с эллипсоидом  $E(a_1, k_1^2 B^{-1})$ , взятым в качестве начального множества в момент  $t_1$ .

- Следующие шаги повторяют итерации 1–3.

В результате итерационной процедуры мы приходим к внешней эллипсоидальной оценке  $E(a^+(T), Q^+(T))$  множества достижимости  $X(T)$  (с большей точностью при  $m \rightarrow \infty$ ).

## 2.2. Алгоритм внутреннего оценивания множеств достижимости дифференциального включения

Рассмотрим алгоритм построения внутренней оценки множеств достижимости  $X(t)$  системы (2.1), (2.2). Предварительно аналогично предыдущему случаю построения внешней оценки приведем следующую теорему.

**Теорема 2** [13]. *Для всех  $\sigma > 0$  справедлива внутренняя оценка множества достижимости  $X(t_0 + \sigma) = X(t_0 + \sigma; t_0, X_0)$  включения (2.1), (2.2)*

$$E(a^-(\sigma), Q^-(\sigma)) \subseteq X(t_0 + \sigma) + o(\sigma)\mathcal{B}(0, 1), \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1}o(\sigma) = 0. \quad (2.5)$$

Здесь параметры эллипсоида  $E(a^-(\sigma), Q^-(\sigma))$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} a^-(\sigma) &= a(\sigma) + \sigma \hat{a}, \\ Q^-(\sigma) &= Q(\sigma) + \sigma^2 \hat{Q} + 2\sigma Q(\sigma)^{1/2} (Q(\sigma)^{-1/2} \hat{Q} Q(\sigma)^{-1/2})^{1/2} Q(\sigma)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

а величины  $a(\sigma)$ ,  $Q(\sigma)$  определены в (2.4).

Приведем один из алгоритмов внутреннего оценивания множеств достижимости  $X(t)$ , использующий в построении внутренней многозначной оценки включение (2.5).

**А л г о р и т м 2** [13]. Рассмотрим разбиение  $[t_i, t_{i+1}]$  заданного отрезка  $[t_0, T]$ , где  $t_i = t_0 + ih$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $h = (T - t_0)/m$ ,  $t_m = T$ . Для получения внутренней оценки повторяем последовательно следующие шаги.

- Пусть  $X_0 = E(a, k_0^2 B^{-1})$ ,  $k_0 \neq 0$ . Найдем  $X_1 = E(a_1, Q_1)$  по теореме 2 для  $a_1 = a^-(\sigma)$ ,  $Q_1 = Q^-(\sigma)$ ,  $\sigma = h$ .

- Найдем наибольшее  $k_1 > 0$  такое, что

$$\tilde{X}_1 = E(a_1, k_1^2 B^{-1}) \subseteq E(a_1, Q_1),$$

(число  $k_1^2$  совпадает с минимальным собственным значением матрицы  $B^{1/2} Q_1 B^{1/2}$ ).

- Рассмотрим систему на следующем промежутке времени  $[t_1, t_2]$ , при этом эллипсоид  $E(a_1, k_1^2 B^{-1})$  с параметрами  $a_1$  и  $k_1$ , полученными выше, возьмем в качестве начального множества  $X_0$  в начальный момент  $t_1$  для системы (2.1), (2.2) на промежутке  $[t_1, t_2]$ .

- Следующие шаги повторяют итерации 1–3.

В результате итерационной процедуры мы приходим к внутренней эллипсоидальной оценке  $E(a^-(T), Q^-(T))$  множества достижимости  $X(T)$  (с большей точностью при  $m \rightarrow \infty$ ).

## 3. Результаты математического моделирования: примеры построения эллипсоидальных оценок

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие приведенные выше алгоритмы построения внутренних и внешних эллипсоидальных оценок множеств достижимости системы (2.1), (2.2).

**П р и м е р 1.** Рассмотрим дифференциальное включение вида (2.1)

$$\dot{x} \in Ax + f(x)d + r\mathcal{B}(0, 1), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq t \leq T = 0.22, \quad r = 0.01,$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0 \in X_0 = \mathcal{B}(0, 1) = E(0, I),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad f(x) = f(x_1, x_2) = 0.25x_1^2 + x_2^2, \quad d = (0, 0.3).$$

На рис. 1 изображены множество достижимости  $X(t; 0, X_0)$  и его внешние эллипсоидальные оценки  $E(a^+(t), Q^+(t))$ , полученные в соответствии с алгоритмом 1 (представлено четыре итерации алгоритма при шаге  $h = 0.055$ ).

**Пример 2.** Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in Ax + f(x)d + rE(0, I), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq t \leq T = 0.07, \quad r = 0.01,$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0 \in X_0 = \mathcal{B}(0, 1) = E(0, I),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -0.1 & 5 \\ 5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad f(x) = f(x_1, x_2) = 49x_1^2 + 256x_2^2, \quad d = (0, 0.5).$$

На рис. 2 изображены множество достижимости  $X(t; 0, X_0)$  и его внутренние эллипсоидальные оценки  $E(a^-(t), Q^-(t))$ , полученные в соответствии с алгоритмом 2 (представлено две итерации алгоритма при шаге  $h = 0.035$ ).

**Пример 3.** Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in Ax + f(x)d + E(0, I), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq t \leq T = 0.3,$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0 \in X_0 = \mathcal{B}(0, 1) = E(0, I),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad d = (1, 0).$$

На рис. 3 изображены множество достижимости  $X(T; 0, X_0)$  и его внешняя и внутренняя эллипсоидальные оценки  $E(a^+(T), Q^+(T))$  и  $E(a^-(T), Q^-(T))$ , полученные в результате двенадцати итераций алгоритмов 1 и 2 при шаге  $h = 0, 025$ .

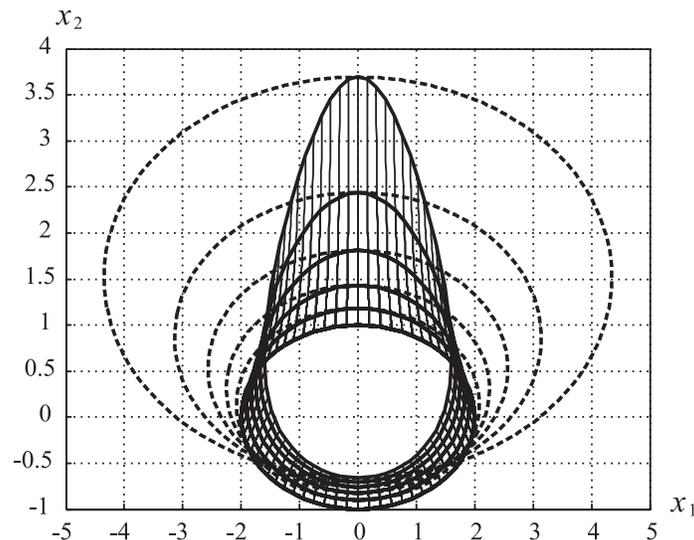


Рис. 1. Внешние эллипсоидальные оценки  $E(a^+(t), Q^+(t))$  множеств достижимости  $X(t) = X(t; 0, X_0)$  для моментов  $t = t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ,  $t_4 = T = 0.22$ .

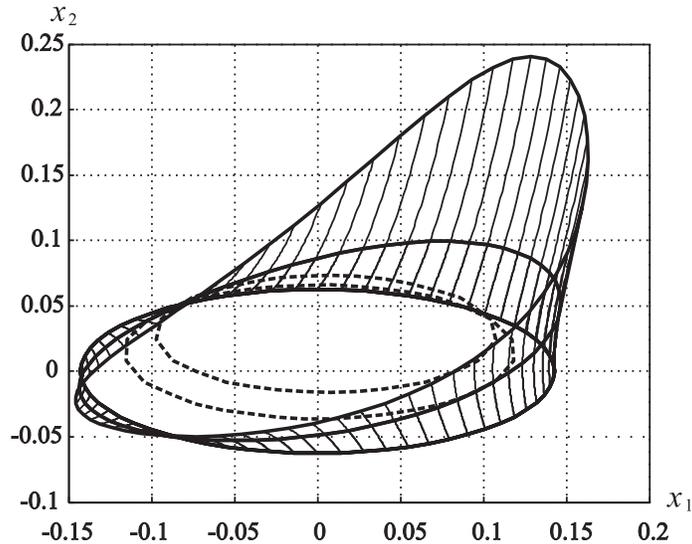


Рис. 2. Внутренние эллипсоидальные оценки  $E(a^-(t), Q^-(t))$  множеств достижимости  $X(t) = X(t; 0, X_0)$  для моментов  $t = t_i, i = 0, 1, 2, t_2 = T = 0.07$ .

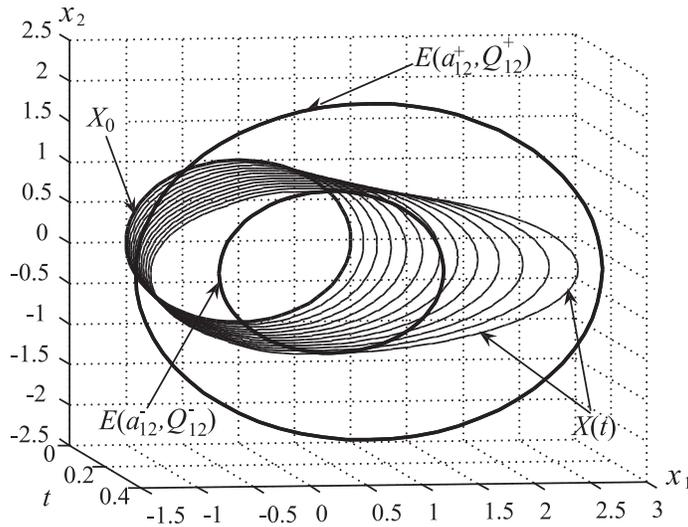


Рис. 3. Эллипсоидальные оценки  $E(a^+(T), Q^+(T))$  и  $E(a^-(T), Q^-(T))$  множества достижимости  $X(T) = X(T; 0, X_0)$  дифференциального включения;  $T = 0, 3$ .

#### 4. Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейного дифференциального включения

Предположим далее, что начальное множество  $X_0$  динамической системы (1.1) и множество  $U$ , задающее ограничение на измеримые управления  $u(t)$  в системе (1.1), являются эллипсоидами

$$X_0 = E(a_0, Q_0), \quad U = E(\hat{a}, \hat{Q}). \tag{4.1}$$

Здесь  $a_0, \hat{a} \in \mathbb{R}^n$  — векторы центров эллипсоидов  $X_0$  и  $U$ ,  $n \times n$ -матрицы  $Q_0, \hat{Q}$  — симметрические и положительно определенные.

Найдем положительные числа  $k_0^-$  и  $k_0^+$  такие, что справедливы включения

$$E(a_0, (k_0^-)^2 B^{-1}) \subseteq E(a_0, Q_0) \subseteq E(a_0, (k_0^+)^2 B^{-1}), \tag{4.2}$$

при этом число  $k_0^-$  должно быть наибольшим из возможных, а  $k_0^+$  — наименьшим из возможных чисел, для которых верны включения (4.2).

**Лемма 1.** *Верны равенства*

$$(k_0^+)^2 = \max_{l \in \{l \in \mathbb{R}^n : \|l\|=1\}} l' B^{1/2} Q_0 B^{1/2} l, \quad (4.3)$$

$$(k_0^-)^2 = \min_{l \in \{l \in \mathbb{R}^n : \|l\|=1\}} l' B^{1/2} Q_0 B^{1/2} l. \quad (4.4)$$

Доказательство леммы вытекает непосредственно из определения чисел  $k_0^-$  и  $k_0^+$ , включений (4.2) и свойств опорных функций эллипсоидов [16].

Следующая теорема является непрерывным аналогом дискретной схемы внешнего эллипсоидального оценивания множеств достижимости  $X(t)$  системы (1.1), (1.2) (при условии (4.1)), представленной в алгоритме 1.

**Теорема 3.** *Справедливо включение*

$$X(t; t_0, X_0) \subseteq E(a^+(t), r^+(t)B^{-1}),$$

где функции  $a^+(t)$ ,  $r^+(t)$  являются решениями следующей нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da^+(t)}{dt} = Aa^+(t) + a^{+'}(t)Ba^+(t)d + r^+(t)d + \hat{a},$$

$$\frac{dr^+(t)}{dt} = \max_{\|l\|=1} \left\{ l' (2r^+(t)\tilde{B}_+(t) + q_+^{-1}(t)B^{1/2}\hat{Q}B^{1/2})l \right\} + q_+(t)r^+(t),$$

$$q_+(t) = \{(nr^+(t))^{-1} \text{Tr}(B\hat{Q})\}^{1/2}, \quad \tilde{B}_+(t) = B^{1/2}(A + 2da^{+'}(t)B)B^{-1/2}$$

с начальными условиями

$$a^+(t_0) = a_0, \quad r^+(t_0) = (k_0^+)^2.$$

Доказательство теоремы проводится по схеме [7, с. 123–127] с изменениями в соответствии с теоремой 1 в подсчете параметров оценивающих эллипсоидов, вызванными более сложной нелинейной структурой правых частей дифференциального включения (2.1). Отметим, что теорема 1 дает описание одного шага соответствующей дискретной схемы построения внешней аппроксимации множества достижимости. Для вычисления производных параметров оценивающего внешнего эллипсоида рассматриваем предельный случай ( $\sigma \rightarrow 0$ ). Производную радиуса  $r^+(t)$  вычисляем по правилам дифференцирования функции максимума [1, 2], на основании формулы

$$r^+(t + \sigma) = \max_{l \in \{l \in \mathbb{R}^n : \|l\|=1\}} l' B^{1/2} Q_+(t + \sigma) B^{1/2} l, \quad (4.5)$$

аналогичной равенству (4.3) леммы 1. Заметим, что матрица  $Q_+(t + \sigma)$  в (4.5) совпадает с матрицей  $Q_1 = Q_+(\sigma)$  алгоритма 1.

Следующая теорема является непрерывным аналогом дискретной схемы внутреннего эллипсоидального оценивания множеств достижимости  $X(t)$  системы (1.1), (1.2) (при условии (4.1)), представленной в алгоритме 2.

**Теорема 4.** *Справедливо включение*

$$E(a^-(t), r^-(t)B^{-1}) \subseteq X(t; t_0, X_0),$$

где функции  $a^-(t)$ ,  $r^-(t)$  являются решениями следующей нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{da^-(t)}{dt} = Aa^-(t) + a^{-'}(t)Ba^-(t)d + r^-(t)d + \hat{a},$$

$$\frac{dr^-(t)}{dt} = \min_{\|l\|=1} \left\{ l' (r^-(t)(\tilde{B}_-(t) + \tilde{B}'_-(t)) + 2(r^-(t))^{1/2}(B^{1/2}\hat{Q}B^{1/2})^{1/2})l \right\},$$

$$\tilde{B}_-(t) = B^{1/2}(A + 2da^{-'}(t)B)B^{-1/2}$$

с начальными условиями

$$a^-(t_0) = a_0, \quad r^-(t_0) = (k_0^-)^2.$$

Доказательство теоремы также следует схеме [7, с. 123–127] с изменениями в соответствии с теоремой 2 в подсчете параметров оценивающих внутренних эллипсоидов. Производную радиуса  $r^-(t)$  вычисляем по правилам дифференцирования функции минимума [1, 2] на основании формулы

$$r^-(t + \sigma) = \min_{l \in \{l \in \mathbb{R}^n: \|l\|=1\}} l' B^{1/2} Q_-(t + \sigma) B^{1/2} l, \quad (4.6)$$

аналогичной равенству (4.4) леммы 1. Заметим, что матрица  $Q_-(t + \sigma)$  в (4.6) совпадает с матрицей  $Q_1 = Q_-(\sigma)$  алгоритма 2.

З а м е ч а н и е. Отметим, что дифференциальные уравнения центров эллипсоидов, оценивающих множества достижимости линейной управляемой системы изнутри и снаружи, совпадают [7, 16]. В случае рассматриваемой нелинейной системы это не так, соответствующие дифференциальные уравнения существенно сложнее, при этом дифференциальные уравнения для центров  $a^+(t)$  ( $a^-(t)$ ) и коэффициентов подобия  $r^+(t)$  ( $r^-(t)$ ) оценивающих эллипсоидов взаимосвязаны.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
2. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 431 с.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
6. Филиппова Т.Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 262–269.
7. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.
8. Aubin J.P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston: Birkhauser, 1990. 461 p.
9. Dontchev A.L., Farkhi E.M. Error estimates for discretized differential inclusions // Computing. 1989. Vol. 41, no. 4. P. 349–358.
10. Dontchev A.L., Lempio F. Difference methods for differential inclusions: a survey // SIAM Rev. 1992. Vol. 34, no. 2. P. 263–294.
11. Filippova T.F. Sensitivity problems for impulsive differential inclusions // Proc. of the 6th WSEAS International conference on applied mathematics. Corfu Island, 2004. P. 1–6.
12. Filippova T.F. Set-valued solutions to impulsive differential inclusions // Math. Comput. Model. Dyn. Syst. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 149–158.
13. Filippova T.F. State estimation in control problems under uncertainty and nonlinearity // Proc. of the 6th Vienna International conference on mathematical modelling (MATHMOD-2009). Vienna, 2009. P. 1–7.
14. Filippova T.F., Berezina E.V. On state estimation approaches for uncertain dynamical systems with quadratic nonlinearity: theory and computer simulations // Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 2008. Vol. 4818. P. 326–333.
15. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Positional differential games. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
16. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
17. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in nonlinear dynamics and control: a report from Russia / ed. A.B. Kurzhanski. Boston etc.: Birkhäuser, 1993. Vol. 17. P. 122–188. (Progress in Systems and Control Theory. Vol. 17.)

18. **Panasyuk A.I.** Equations of attainable set dynamics. Part 1: Integral funnel equations // J. Optimiz. Theory Appl. 1990. Vol. 62, no. 2. P. 349–366.
19. **Veliov V.M.** Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions // Systems and Control Letters. 1989. Vol. 13, no. 3. P. 263–269.
20. **Veliov V.** Second-order discrete approximation to linear differential inclusions // SIAM J. Numer. Anal. 1992. Vol. 29, no. 2. P. 439–451.
21. **Wolenski P.R.** The exponential formula for the reachable set of a Lipschitz differential inclusion // SIAM J. Contr. and Optimiz. 1990. Vol. 28, no. 5. P. 1148–1161.

Филиппова Татьяна Федоровна  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
ведущий науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: ftf@imm.uran.ru

Поступила 28.12.2009

УДК 517.911

## О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ С АДДИТИВНО ВХОДЯЩИМИ ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ<sup>1</sup>

И. А. Финогенко

Исследуются вопросы существования и зависимости от параметра дифференциальных включений с обобщенными функциями в правой части, входящими в виде слагаемых. В качестве приложения рассматривается задача полной управляемости механической системы с использованием разрывных позиционных и импульсных управлений.

Ключевые слова: дифференциальное включение, обобщенная функция, разрывная система, импульсное управление.

I. A. Finogenko. On differential inclusions with additive generalized functions.

Questions of the existence and parameter dependence of differential inclusions with generalized functions entering the right-hand side as additive terms are investigated. The problem of the complete controllability of a mechanical system with the use of discontinuous positional and pulse controls is considered as an application.

Keywords: differential inclusion, generalized function, discontinuous system, pulse control.

### 1. Введение

Дифференциальные уравнения с функциями, удовлетворяющими условиям Каратеодори, и обобщенными функциями, входящими в виде слагаемых в правую часть уравнений, исследовались ранее (см., например, [1, § 2]). В данной работе рассматривается дифференциальное включение

$$Dx \in \tilde{F}(t, x) + p(t), \quad (1.1)$$

где  $\tilde{F} : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  — многозначное отображение,  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$  — векторная обобщенная функция, представляющая собой производную в смысле теории обобщенных функций некоторой обычной измеримой и ограниченной на каждом конечном интервале функции  $w(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t))$ , т. е.  $Dw_i(t) = p_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Под обобщенной функцией здесь понимается любой линейный непрерывный функционал (распределение Л. Шварца) на пространстве (основных) бесконечно дифференцируемых финитных функций. Функция  $w(t)$  порождает регулярное распределение, представимое в интегральном виде. Обобщенная функция  $p(t)$  может быть сингулярной, например, дельта-функцией Дирака. Обобщенные производные понимаются в обычном смысле (см. [2]) К задаче вида (1.1) приводят, например, дифференциальные уравнения

$$Dx = f(t, x) + p(t) \quad (1.2)$$

с кусочно-непрерывной по совокупности переменных векторной функцией  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , если под множеством  $\tilde{F}(t, x)$  понимать выпуклую оболочку всех предельных значений функции  $f(t, x)$  в точке  $(t, x)$  (доопределение в смысле А.Ф. Филиппова [1, § 4]).

Системы управления вида

$$Dx = F(t, x, u_1(t, x), \dots, u_m(t, x)) + p(t) \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (интеграционный проект СО РАН — УрО РАН № 85).

с непрерывной функцией  $F = (F_1, \dots, F_n)$  и с кусочно-непрерывными функциями  $u_i(t, x)$ , терпящими разрыв на многообразиях  $S_i = \{(t, x) : \phi_i(t, x) = 0\}$ , также приводят к включению (1.1). В этом случае под множеством  $\tilde{F}(t, x)$  понимается выпуклая оболочка множества  $F(t, x, U_1(t, x), \dots, U_m(t, x))$ , где  $U_i(t, x)$  — отрезки с концами  $u_i^+ = u_i^+(t, x)$ ,  $u_i^- = u_i^-(t, x)$  для  $(t, x) \in S_i$ ;  $u_i^+$ ,  $u_i^-$  — предельные значения функций  $u_i(t, x)$  с обеих сторон поверхности  $S_i$ . Вне поверхности  $S_i$  отрезок  $U_i(t, x)$  состоит из одной точки  $u_i(t, x)$  (доопределение в смысле М.А. Айзермана, Е.С. Пятницкого [3]).

Решения разрывных систем, интегральные кривые которых принадлежат пересечению поверхностей разрыва правых частей уравнений, называются скользящими режимами. Перевод системы на устойчивые скользящие режимы позволяет решать ряд задач теории управления, таких, как задача слежения (движение по наперед заданной траектории) или задача полной управляемости (перевод системы из одного состояния в другое за конечное время). Если функции  $\phi_i(t, x)$ , задающие поверхности  $S_i$ , кусочно-непрерывны по переменной  $t$ , то скользящий режим будет возможным только для разрывных решений и тогда функция  $p(t)$  из правой части должна содержать импульсные составляющие.

В данной работе исследуются некоторые общие свойства решений дифференциальных включений (1.1). Для механических систем управления исследуется задача полной управляемости с кусочно-постоянными обобщенными скоростями.

Некоторые из представленных в работе результатов анонсированы в статье [4].

## 2. Дифференциальные включения с обобщенными функциями в правой части

### 2.1. Существование решений

Всюду в дальнейшем предполагается, что значениями многозначного отображения  $\tilde{F}(t, x)$  являются непустые компактные подмножества из пространства  $\mathbb{R}^n$  с евклидовой нормой  $\|\cdot\|$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Решением задачи (1.1) называется измеримая функция  $x(t)$ , для которой существует измеримая функция  $v(t)$ , удовлетворяющая для всех  $t$  включению  $v(t) \in \tilde{F}(t, x(t))$ , такая, что

$$Dx(t) = v(t) + p(t). \quad (2.1)$$

В дальнейшем под  $w(t) = (w_1(t), \dots, w_n(t))$  понимается упомянутая во введении измеримая, ограниченная на конечных интервалах функция, представляющая собой обобщенную первообразную функции  $p(t)$ . Введем в рассмотрение многозначную функцию  $F_w(t, y) = \tilde{F}(t, y + w(t))$  и дифференциальное включение

$$\dot{y} \in F_w(t, y). \quad (2.2)$$

Под *решением включения* (2.2) на промежутке  $J = (\alpha, \omega)$  будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке  $[a, b] \subset J$  функцию  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  такую, что для почти всех  $t \in J$  выполняется включение  $\dot{y}(t) \in F(t, y(t))$ .

**Лемма 1.** Пусть для любой обобщенной первообразной  $w(t)$  функции  $p(t)$  существует решение  $y(t)$  включения (2.2), определенное на всей числовой прямой. Тогда функция

$$x(t) = y(t) + w(t) \quad (2.3)$$

является решением включения (1.1) с измеримой функцией  $v(t) = \dot{y}(t)$  для почти всех  $t$ .

Обратно: если  $x(t)$  — решение включения (1.1), то оно представимо в виде (2.3) для некоторой обобщенной первообразной  $w(t)$  функции  $p(t)$  и некоторого решения  $y(t)$  включения (2.2).

**Доказательство.** Сделаем замену переменных  $y = x - w(t)$  и перейдем от (1.1) к обыкновенному дифференциальному включению (не обобщенному) (2.2). По предположению леммы оно имеет решение  $y(t)$ . Тогда дифференцируя в обобщенном смысле равенство  $x(t) = y(t) + w(t)$  и учитывая то, что обобщенная производная абсолютно непрерывной функции  $y(t)$  совпадает с ее обычной производной  $\dot{y}(t)$  почти всюду, получаем равенство (2.1) с функцией  $v(t) = \dot{y}(t)$  почти всюду.

Обратно, пусть  $x(t)$  — решение включения (1.1). Тогда функция  $x(t)$  измерима, существует измеримая функция  $v(t)$  такая, что  $v(t) \in \tilde{F}(t, x(t))$  и справедливо равенство (2.1). Интегрируя это равенство в обобщенном смысле и учитывая то, что любая обобщенная первообразная определяется с точностью до постоянного слагаемого, получаем равенство  $x(t) = y(t) + w(t) + C$ , где  $y(t)$  — некоторая первообразная функции  $v(t)$ . Обозначим  $w_1(t) = w(t) + C$ . Тогда обобщенная производная функции  $w_1(t)$  совпадает с  $p(t)$  и  $y(t)$  — решение дифференциального включения (2.2) с функцией  $F_{w_1}(t, y) = \tilde{F}(t, x + w_1(t))$  в правой части.

Лемма доказана.  $\square$

Метод исследования дифференциального включения (1.1) в данной работе основывается на переходе к дифференциальному включению (2.2). Поэтому, учитывая лемму 1, в дальнейшем полагаем, что решение задачи (1.1) записывается в виде (2.3).

Для получения условий существования решения задачи (1.1) необходимо в зависимости от свойств многозначной функции  $\tilde{F}(t, x)$  для любой измеримой и ограниченной на каждом конечном интервале функции  $w(t)$  выявить свойства многозначной функции  $F_w(t, y)$ , которые обеспечивали бы существование решений включения (2.2).

Будем полагать, что числовая прямая  $\mathbb{R}^1$  снабжена мерой Лебега  $\mu$ . В определениях измеримости (по переменной  $t \in \mathbb{R}^1$ ), непрерывности, полунепрерывности сверху, полунепрерывности снизу многозначных отображений с компактными значениями в метрических пространствах мы следуем [5].

Пусть  $I = [a, b]$  — произвольный отрезок числовой прямой. Многозначное отображение  $\tilde{F}(t, x)$  называется *суперпозиционно селектурируемым*, если для любой измеримой функции  $z : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  существует измеримый селектор  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  многозначной функции  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , т. е.  $\nu(t) \in \Phi(t)$  для всех  $t \in I$ , где  $\Phi(t) = \tilde{F}(t, z(t))$ . Многозначное отображение обладает *слабым свойством Скорца — Драгони (свойством Скорца — Драгони)*, если для любого  $\epsilon > 0$  и любого компактного множества  $K \subset \mathbb{R}^n$  существует замкнутое множество  $I_\epsilon \subset I$ ,  $\mu(I \setminus I_\epsilon) < \epsilon$  такое, что сужение  $\tilde{F}(t, x)$  на  $I_\epsilon \times K$  полунепрерывно снизу (непрерывно). Скажем, что многозначное отображение  $\tilde{F}(t, x)$  *типа Каратеодори*, если оно измеримо по  $t$  при любом фиксированном  $x$  и непрерывно по  $x$  при почти каждом фиксированном  $t$ .

Отметим, что если  $\tilde{F}(t, x)$  — многозначное отображение типа Каратеодори, то оно обладает свойством Скорца — Драгони, а многозначное отображение  $\text{ext co}\tilde{F} : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  обладает слабым свойством Скорца — Драгони, где через  $\text{ext co}\tilde{F}(t, x)$  для каждого фиксированного  $(t, x)$  обозначается множество всех крайних точек множества  $\tilde{F}(t, x)$  (см. [6]).

Для многозначного отображения  $\tilde{F}(t, x)$  рассмотрим следующие условия:

A1. Для почти всех  $t$  многозначное отображение  $x \rightarrow \tilde{F}(t, x)$  полунепрерывно сверху и для любого фиксированного  $x$  существует измеримый селектор многозначного отображения  $t \rightarrow \tilde{F}(t, x)$ ;

A2. Многозначное отображение  $\tilde{F}(t, x)$  типа Каратеодори;

A3. Многозначное отображение  $\tilde{F}(t, x)$  обладает слабым свойством Скорца — Драгони;

A4. Многозначное отображение  $\tilde{F}(t, x)$  удовлетворяет условию роста вида

$$\|v\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|)$$

для всех  $v \in \tilde{F}(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  и почти всех  $t$  с суммируемой по Лебегу на конечных промежутках функцией  $\alpha(t)$ .

**Утверждение 1.** Для любой измеримой ограниченной на конечных интервалах функции  $w(t)$  многозначное отображение  $F_w(t, y) = \tilde{F}(t, y + w(t))$  наследует каждое из свойств A1–A4 многозначного отображения  $\tilde{F}(t, x)$ .

**Доказательство.** Очевидно, что все свойства зависимости многозначного отображения  $\tilde{F}(t, x)$  относительно переменной  $x$  (непрерывность, полунепрерывность сверху и снизу) наследуются многозначным отображением  $F_w(t, y)$  относительно переменной  $y$  при фиксированном  $t$ .

Пусть выполняется свойство A1. Тогда из [5, теорема 1.5.22] вытекает, что многозначное отображение  $\tilde{F}(t, x)$  обладает свойством суперпозиционной селектируемости. Относительно переменной  $t$  (при фиксированном  $y$ ) многозначное отображение  $F_w(t, y)$  является суперпозицией измеримой функции  $x(t) = y + w(t)$  и многозначного отображения  $\tilde{F}(t, x)$ . Следовательно, для любого фиксированного  $y$  многозначное отображение  $t \rightarrow F_w(t, y)$  имеет измеримый селектор.

Если выполняется свойство A2, то измеримость многозначного отображения  $t \rightarrow F_w(t, y)$  вытекает из [5, теорема 1.5.18]. Таким образом, отображение  $F_w(t, y)$  — типа Каратеодори.

Пусть выполняется свойство A3. Для любого  $\epsilon > 0$  и компакта  $K \subset \mathbb{R}^n$  замкнутое множество  $I_\epsilon \subset I$ ,  $\mu(I \setminus I_\epsilon) < \epsilon$ , выберем так, чтобы сужение отображения  $\tilde{F}(t, x)$  на множество  $I_\epsilon \times K$  было полунепрерывно снизу, а сужение функции  $w(t)$  на множество  $I_\epsilon$  было непрерывно. Так как отображение  $(t, y) \rightarrow (t, y + w(t))$  непрерывно на множестве  $I_\epsilon \times K$ , полунепрерывность снизу сужения многозначного отображения  $F_w(t, y)$  на множество  $I_\epsilon \times K$  вытекает из [5, теорема 1.3.11].

Если для отображения  $\tilde{F}(t, x)$  выполняется условие A4, то оно будет выполняться и для многозначного отображения  $F_w(t, y)$  с суммируемой по Лебегу на конечных интервалах функцией  $\alpha_1(t) = \alpha(t)(1 + \|w(t)\|)$ .

Утверждение доказано. □

**Теорема 1.** Пусть для многозначного отображения  $\tilde{F}(t, x)$  выполняются условие A4 и либо условия A2, A3, либо при дополнительном предположении выпуклости множества для любых  $(t, x)$  условие A1. Тогда для любого отрезка  $I = [a, b]$  существует определенное на  $I$  решение дифференциального включения (2.2), которое может быть продолжено на всю числовую ось.

Утверждение теоремы вытекает из соответствующих теорем существования решений дифференциальных включений с выпуклой (см. [5, теорема 3.2.6]) и невыпуклой правой частью [6, теорема 4.1]. Следует лишь учесть, что условия в статье [6], налагаемые на правые части включений в терминах меры некомпактности, всегда выполняются в конечномерных пространствах, и отображение  $F_w(t, y)$  типа Каратеодори обладает слабым свойством Скорца — Драгоны.

Учитывая лемму 1, заключаем, что в рамках предположений теоремы 1 существует решение включения (1.1).

## 2.2. Правосторонняя единственность решений

При выполнении условий теоремы 1 дифференциальное включение (2.2) имеет решение при любом начальном условии  $y(t_0) = a$ . Тогда из представления решения задачи (1.1) в виде (2.3) вытекает, что для любой фиксированной обобщенной первообразной  $w(t)$  функции  $p(t)$  дифференциальное включение (1.1) имеет решение с начальным условием

$$x(t) - w(t)|_{t=t_0} = a. \quad (2.4)$$

Как указано в [1, с. 17], такое начальное условие не имеет однозначно определенного смысла, если функция  $w(t)$  разрывна в точке  $t = t_0$ .

Для случая, когда функция  $w(t)$  имеет в точке  $t_0$  конечный предел  $\lim_{t \rightarrow t_0-0} w(t) = w(t_0 - 0)$ , можно, например, начальное условие для задачи (1.1) задать в виде  $x(t_0 - 0) = w(t_0 - 0) + a$ . Это

наиболее содержательное условие для уравнений с дельта-функциями Дирака в правой части, и точка  $t_0$  может рассматриваться как точка приложения к системе импульсного воздействия.

Для обыкновенных дифференциальных включений двусторонней единственности решений с одними и теми же начальными условиями, как правило, нет, но может иметь место правосторонняя единственность, когда любые два решения совпадают при  $t \geq t_0$ , если они совпадают при  $t = t_0$  (см. [1, с. 82]).

Рассмотрим неравенство

$$\langle A(t, x - w(t))(x' - x), v' - v \rangle \leq l(t) \|x' - x\|^2, \quad (2.5)$$

выполненное для любых  $x', x$  при почти всех  $t$  из рассматриваемой области и для всех  $v \in \tilde{F}(t, x)$ ,  $v' \in \tilde{F}(t, x')$  с ограниченной и измеримой на конечных промежутках функцией  $l(t)$ . Здесь  $A(t, z)$  — симметричная, положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матрица,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — символ скалярного произведения.

Из неравенства (2.5) вытекает, что для многозначного отображения  $F_w(t, y) = \tilde{F}(t, y + w(t))$  из правой части (2.2) будет выполняться условие

$$\langle A(t, y)(y' - y), v' - v \rangle \leq l(t) \|y' - y\|^2 \quad (2.6)$$

для любых  $y, y', v' \in F_w(t, y')$ ,  $v \in F_w(t, y)$  при почти всех  $t$ .

Условие (2.6) обеспечивает свойство правосторонней единственности решения  $y(t)$  включения (2.2) для любых начальных данных  $(t_0, y_0)$ . Это устанавливается дословным повторением доказательства теоремы 1 из [7]. Тогда для любой фиксированной кусочно-непрерывной справа функции  $w(t)$ , для которой выполняется неравенство (2.5), и начального условия  $x(t_0 - 0) = w(t_0 - 0) + a$  решение  $x(t) = y(t) + w(t)$  включения (1.1) справа от точки  $t_0$  определено однозначно.

**З а м е ч а н и е 1.** Неравенство вида (2.6) представляет собой некоторое обобщение правостороннего условия Липшица и переходит в него при условии, что  $A(t, z) \equiv E$  — единичная матрица. Это условие используется для доказательства правосторонней единственности решений дифференциальных включений и дифференциальных уравнений с разрывной правой частью (см. [1]). Неравенства вида (2.6) полезны для доказательства правосторонней единственности решений дифференциальных включений с симметричной и положительно определенной матрицей при производной, что характерно для механических систем, представленных уравнениями Лагранжа второго рода с различными разрывными характеристиками.

### 2.3. Зависимость решений от параметра

При моделировании реальных физических процессов важной проблемой является возможность перехода от системы дифференциальных уравнений с обычными “дельтаобразными” функциями  $p_\epsilon(t)$  в правых частях к уравнениям с дельта-функциями при  $\epsilon \rightarrow +0$ .

Рассмотрим однопараметрическое семейство задач

$$Dx \in \tilde{F}(t, x, \lambda) + p(t, \lambda), \quad (2.7)$$

где  $p(t, \lambda) = (p_1(t, \lambda), \dots, p_n(t, \lambda))$  — обобщенная или обычная векторная функция. Функции  $p_i(t, \lambda)$  представляют собой при любом фиксированном  $\lambda$  обобщенные, вообще говоря, производные от измеримых и ограниченных на каждом конечном интервале функций  $t \rightarrow w_i(t, \lambda)$ , из которых сформируем также векторную функцию  $w(t, \lambda) = (w_1(t, \lambda), \dots, w_n(t, \lambda))$ . Предполагается, что параметр  $\lambda$  принимает значения в некотором компактном метрическом пространстве  $\Lambda$ . Для каждого фиксированного  $\lambda$  решение включения (2.7) понимается в смысле определения 1 из подразд. 2.1 данной статьи. Тогда в соответствии с леммой 1 оно представимо в виде

$$x(t) = y(t) + w(t, \lambda), \quad (2.8)$$

где  $y(t)$  — некоторое решение дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \tilde{F}(t, y(t) + w(t, \lambda), \lambda) \quad (2.9)$$

и  $w(t, \lambda)$  — некоторая обобщенная первообразная (при фиксированном  $\lambda$ ) функции  $p(t, \lambda)$ .

Относительно многозначного отображения  $\tilde{F} : \mathbb{R}^{1+n} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  сделаем следующие предположения:

A'1. Значениями  $\tilde{F}(t, x, \lambda)$  являются выпуклые компактные множества;

A'2. Для каждого  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$  многозначное отображение  $t \rightarrow \tilde{F}(t, x, \lambda)$  измеримо и для почти всех  $t$  многозначное отображение  $(x, \lambda) \rightarrow \tilde{F}(t, x, \lambda)$  полунепрерывно сверху;

A'3. Многозначное отображение  $\tilde{F}(t, x, \lambda)$  удовлетворяет условию роста

$$\|v\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|) \quad (2.10)$$

для всех  $v \in \tilde{F}(t, x, \lambda)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \Lambda$  и почти всех  $t$  с суммируемой по Лебегу на конечных промежутках функцией  $\alpha(t)$ .

**Теорема 2.** Пусть многозначное отображение  $\tilde{F}(t, x, \lambda)$  обладает свойствами A'1–A'3, функция  $\lambda \rightarrow w(t, \lambda)$  является непрерывной при любом  $t$ , функция  $t \rightarrow w(t, \lambda)$  (обобщенная первообразная функции  $t \rightarrow p(t, \lambda)$ ) является измеримой при любом  $\lambda \in \Lambda$ , и на каждом конечном интервале для некоторой константы  $m_0$  и для всех  $\lambda \in \Lambda$  выполняется неравенство  $\|w(t, \lambda)\| \leq m_0$ . Тогда:

1. Для любого фиксированного  $\lambda$  существует решение включения (2.7), которое имеет вид (2.8).

2. Для любой последовательности  $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$  функция  $x(t)$ , являющаяся пределом сходящейся при каждом  $t$  последовательности решений  $x_k(t)$  вида (2.8) с  $\lambda = \lambda_k$ , является решением вида (2.8) с  $\lambda = \lambda_0$  в правой части.

**Доказательство.** Из условий теоремы вытекает, что для любого фиксированного  $\lambda \in \Lambda$  для включения (2.7) выполнены условия A1, A4 теоремы 1, откуда следует существование решения в виде (2.8).

Пусть  $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$  и соответствующая последовательность решений  $x_k(t)$  включения (2.7) сходится к функции  $x(t)$  при любом  $t$ . Из непрерывности функции  $w(t, \lambda)$  по  $\lambda$  в точке  $\lambda_0$  получаем  $w(t, \lambda_k) \rightarrow w(t, \lambda_0)$ . Тогда  $y(t) = x_k(t) - w(t, \lambda_k) \rightarrow y(t) = x(t) - w(t, \lambda_0)$  при любом  $t$  и

$$\dot{y}_k(t) \in \tilde{F}(t, y_k(t) + w(t, \lambda_k), \lambda_k)$$

почти всюду на любом конечном отрезке. Из условия A'2 следует, что для почти каждого  $t$  и любого  $\epsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что для всех  $k \geq N$  выполняется

$$\tilde{F}(t, y_k(t) + w(t, \lambda_k), \lambda_k) \subset \tilde{F}^\epsilon(t, y(t) + w(t, \lambda_0), \lambda_0),$$

где  $\tilde{F}^\epsilon$  означает  $\epsilon$ -окрестность множества  $\tilde{F}$ . Следовательно,

$$\dot{y}_k(t) \in \tilde{F}^\epsilon(t, y(t) + w(t, \lambda_0), \lambda_0) \quad (2.11)$$

для любого  $k \geq N$ .

Отметим, что функции  $y_k(t)$  абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке  $[a, b]$ , а производные  $\dot{y}_k(t)$  интегрально ограничены на каждом таком отрезке, т. е.  $\|\dot{y}_k(t)\| \leq \alpha_1(t)$  для всех  $k \geq 1$  и почти всех  $t \in [a, b]$ , где  $\alpha_1(t)$  — некоторая интегрируемая по Лебегу на каждом конечном отрезке функция. Последнее вытекает из условия A'3. Тогда в соответствии с леммой 1.3 из [8] получаем, что функция  $y(t)$  на отрезке  $[a, b]$  абсолютно непрерывна и выполняется включение

$$\dot{y}(t) \in \overline{\text{co}} \{\cup \dot{y}_k(t); k \geq n\} \quad (2.12)$$

для почти всех  $t \in [a, b]$  и любых  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\overline{\phantom{x}}$  означает выпуклую замкнутую оболочку множества. Из (2.11), (2.12) и произвольности  $\epsilon > 0$  получаем

$$\dot{y}(t) \in \tilde{F}(t, y(t) + w(t, \lambda_0), \lambda_0),$$

т. е.  $y(t)$  — решение включения (2.9). Тогда  $x(t) = y(t) + w(t, \lambda_0)$  — решение включения (2.7).

Теорема доказана.  $\square$

Для любых чисел  $\epsilon > 0$  и  $\tau$  и вектора  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  введем параметр  $\lambda = (\epsilon, \tau, \nu)$  и обозначим  $p^\delta(t, \lambda) = \nu \delta_\epsilon(t - \tau)$ , где скалярные функции  $\delta_\epsilon(t)$  измеримы (в частности, непрерывны или кусочно-постоянны), равны нулю вне интервала  $(-\epsilon, \epsilon)$  и их интегралы по этому интервалу равны 1. Такие функции будем называть *дельтообразными*.

**Следствие 1.** Пусть многозначное отображение  $\tilde{F}(t, x, \lambda)$  обладает свойствами  $A'1$ – $A'3$ . Тогда для любой последовательности  $\lambda_k = (\epsilon^k, \tau^k, \nu^k) \rightarrow \lambda_0 = (0, \tau^0, \nu^0)$  предел сходящейся последовательности решений  $x_k(t)$  включения (2.7) с  $p^\delta(t, \lambda_k)$  в правой части (это будут решения в обычном смысле) является обобщенным решением дифференциального включения (2.7) с дельта-функцией  $p^\delta(t, \lambda_0) = \nu^0 \delta(t - \tau^0)$  в правой части.

**Доказательство.** Следствие вытекает из теоремы 1 следующим образом. Обозначим  $w^\eta(t, \lambda) = \nu \eta_\epsilon(t - \tau)$ , где  $\eta_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\epsilon(s) ds$ . Пусть  $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$  и соответствующая последовательность  $x_k(t)$  решений включения (2.7) сходится к функции  $x(t)$ . Очевидно, что  $w^\eta(t, \lambda_k) \rightarrow w^\eta(t, \lambda_0) = \nu^0 \eta(t - \tau^0)$  всюду за исключением точки  $t = \tau^0$ , где  $\eta(t)$  — функция Хевисайда, не определенная, вообще говоря, в точке  $t = 0$ . Но из ограниченной последовательности  $w^\eta(\tau^0, \lambda_k)$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, за которую, чтобы не вводить новых обозначений, примем саму эту последовательность. Функцию  $w^\eta(t, \lambda_0)$  доопределим в точке  $t = \tau^0$  значением предела данной подпоследовательности. Далее введем в рассмотрение компактное пространство параметров  $\Lambda = \{\cup \lambda_k : k \geq 0\}$ . Тогда в соответствии с теоремой 2 функция  $x(t)$  является решением включения (2.7) с функцией  $p^\delta(t, \lambda_0)$  в правой части, которая является обобщенной производной функции  $w^\eta(t, \lambda_0) = \nu^0 \eta(t - \tau^0)$ , т. е.  $p^\delta(t, \lambda_0) = \nu^0 \delta(t - \tau^0)$ .

Следствие доказано.  $\square$

Как видно из приведенных выше рассуждений, следствие 1 можно распространить на сумму функций вида  $p^\delta(t, \epsilon, \tau, \nu) = \nu \delta_\epsilon(t - \tau)$ , и оно устанавливает свойство корректности обобщенного дифференциального включения

$$Dx \in \tilde{F}(t, x) + \sum_{i=0}^N \nu^i \delta(t - \tau_i) \tag{2.13}$$

в том смысле, что предельный переход к импульсным входным воздействиям сохраняет структуру решений независимо от выбора аппроксимирующей последовательности дельтообразных функций: от них требуются лишь равенство нулю вне интервала  $(-\epsilon_k, \epsilon_k)$  и равенство 1 их интегралов по этому интервалу. Решения включения (2.13) будут определяться в соответствии с формулой (2.3) и иметь вид

$$x(t) = y(t) + \sum_{i=0}^N \nu^i \eta(t - \tau_i),$$

где  $\eta(t)$  — функция Хевисайда.

В том случае, когда вектор  $\nu$  зависит от переменной  $x$ , предельный переход на дельтообразных функциях  $\delta_\epsilon$  для уравнения

$$Dx = f(t, x) + \nu(x) p^\delta(t) \tag{2.14}$$

с непрерывными функциями  $f(t, x)$ ,  $\nu(x)$  и одномерной дельта-функцией  $p^\delta(t) = \delta(t)$  сохраняет структуру решений, хотя понятие решения требует уточнения: величина скачка определяется при помощи некоторой вспомогательной системы уравнений (см. [9, с. 24; 1, § 3, теорема 3], а также пример [1, с. 34]). Если же  $\nu(x) = \{\nu_{ij}(x)\}$  — матрица размерности  $n \times N$  и  $p(t) = (\delta(t - \tau_1), \dots, \delta(t - \tau_N))$  — векторная дельта-функция, то свойство корректности для уравнения (2.14) выполняется в том случае, когда матрица  $\nu(x)$  удовлетворяет условию Фробениуса (см., например, [9, с. 28]). Это условие очевидно выполняется для постоянной матрицы  $\nu$  с векторами-столбцами  $\nu^i = (\nu_1^i, \dots, \nu_n^i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Таким образом, дифференциальные включения, в правые части которых обобщенные функции входят в виде коэффициентов к обычным функциям, зависящим от  $x$ , требуют иных методов исследования и в данной работе не рассматриваются.

### 3. Задача полной управляемости механических систем с кусочно-постоянными обобщенными скоростями

Движение механической системы представлено уравнениями Лагранжа второго рода. В развернутой векторной форме они имеют вид

$$A(t, q)\ddot{q} = g(t, q, \dot{q}) + Q^A(t, q, \dot{q}) + u, \quad (3.1)$$

где используются обычные обозначения  $q = (q^1, \dots, q^n)$ ,  $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ ,  $\ddot{q} = (\ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^n)$  для обобщенных состояний, скоростей и ускорений. Векторные непрерывно дифференцируемые функции  $g = (g_1, \dots, g_n)$  и  $Q^A = (Q_1^A, \dots, Q_n^A)$  описывают силы, действующие на систему,  $A(t, q) = [a_{ij}(t, q)]_1^n$  — положительно определенная, симметричная матрица квадратичной формы обобщенных скоростей в выражении кинетической энергии системы с непрерывно дифференцируемыми функциями  $a_{ij}(t, q)$ . Векторная функция  $u = (u_1, \dots, u_n)$  задает управляющие силы с ограничениями

$$|u_i| \leq H_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $H_i \geq 0$ .

Ставится следующая задача: для любых двух точек  $2n$ -мерного пространства найти управление, которое переводит систему (3.1) из точки  $(q_0, \dot{q}_0)$  в точку  $(q_1, \dot{q}_1)$  за конечное время  $T$ .

Поступаем следующим образом. Положим

$$\nu^i = (q_1^i - q_0^i)/T, \quad i = 1, \dots, n$$

и обозначим  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ . Очевидно, что движение по закону  $\dot{q}(t) = \nu$ ,  $q(t) = q_0 + (t - t_0)\nu$  переведет систему из обобщенного состояния  $q_0$  в момент времени  $t = t_0$  в обобщенное состояние  $q_1$  в момент времени  $t = t_1$  за промежуток времени  $T = t_1 - t_0$ . Таким образом, задача состоит в том, чтобы обобщенные скорости из положений  $\dot{q}_0^i = \dot{q}^i(t_0 - 0)$  в момент времени  $t = t_0$  переместились в положения  $\dot{q}^i(t_0) = \nu^i$  и оставались там на промежутке  $t \in [t_0, t_1)$ , а затем в момент времени  $t = t_1$  из положений  $\dot{q}^i(t_1 - 0) = \nu^i$  переместились в положения  $\dot{q}^i(t_1) = \dot{q}_1^i$ .

Выберем разрывные позиционные управления  $u_i$  в виде

$$u_i = -H_i \operatorname{sign}(\dot{q}^i - \nu_i), \quad (3.2)$$

обозначим

$$w(t) = (\nu - \dot{q}_0)\eta(t - t_0) + (\dot{q}_1 - \nu)\eta(t - t_1),$$

где  $\eta(t)$  — непрерывная справа функция Хевисайда, и введем в рассмотрение множество

$$\tilde{S} = \{(t, q, \dot{q}) : \dot{q}(t) = \dot{q}_0 + w(t)\}, \quad (3.3)$$

которое будем называть целевым.

В общем случае для системы (3.1) задача о стабилизации целевого множества вида

$$S = \{(t, q, \dot{q}) : \dot{q} = f(t, q)\}$$

решена для разрывных управлений

$$u_i = -H_i \operatorname{sign}(\dot{q}^i - f_i(t, q)), \quad i = 1, \dots, n$$

на основе принципа декомпозиции, предложенного Е.С. Пятницким в работах [10] и развитого в дальнейшем в [11]. Функции  $f_i(t, q)$  предполагались непрерывно дифференцируемыми. Здесь множество (3.3) задано кусочно-непрерывной по переменной  $t$  функцией  $f(t, q) = \dot{q}_0 + w(t)$ . Движение системы по этому множеству (режим декомпозиции) возможно только добавлением в систему дополнительных импульсных обобщенных сил. Роль разрывного позиционного управления (3.2) (обычной функции) сводится при этом к стабилизации целевого множества системы между моментами приложения импульсов  $t = t_0$  и  $t = t_1$ , которые обеспечивают скачки обобщенных скоростей, заранее определенные функцией  $w(t)$ . Отметим, что режим декомпозиции (движение по множеству (3.3)) является скользящим режимом для системы (3.1) с разрывными управлениями (3.2).

На промежутке  $[t_0, t_1]$  движение по множеству (3.3) имеет вид  $\dot{q} = \nu$ . Условия, обеспечивающие это движение, имеют вид (см. [12])

$$|g_i + Q_i^A|_{\dot{q}=\nu} < H_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

Движение реализуется на эквивалентных управлениях (см. [13])

$$u_i^{eq} = -g_i(t, q, \nu) - Q_i^A(t, q, \nu),$$

которые в данной ситуации определяются из уравнений (3.1) при условиях  $\ddot{q} = 0$ ,  $\dot{q} = \nu$ .

Обозначим

$$p(t) = (\nu - \dot{q}_0)\delta(t - t_0) + (\dot{q}_1 - \nu)\delta(t - t_1),$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака, и рассмотрим дифференциальное включение

$$D\dot{q} \in A^{-1}(g + Q^A + U) + p(t), \quad (3.5)$$

где  $U = (U_1, \dots, U_n)$ ,  $U_i = [-H_i, H_i]$ , если  $\dot{q}^i - \dot{q}_0^i - w_i(t) = 0$ , и  $U_i = -H_i \operatorname{sign}(\dot{q}^i - \dot{q}_0^i - w_i(t))$ , если  $\dot{q}^i - \dot{q}_0^i - w_i(t) \neq 0$ . Введем новую переменную  $\chi = \dot{q} - w(t)$  и запишем (3.5) в виде дифференциального включения

$$\begin{cases} A(t, q)\dot{\chi} \in g(t, q, \chi + w(t)) + Q^A(t, q, \chi + w(t)) + U(t, q, \chi + w(t)), \\ \dot{q} = \chi + w(t). \end{cases} \quad (3.6)$$

Включение (3.6) имеет единственное справа решение  $(\chi(t), q(t))$  с начальными условиями  $\chi(t_0) = \dot{q}_0$ ,  $q(t_0) = q_0$ . Ему соответствует решение  $\dot{q}(t) = \chi(t) + w(t)$ ,  $q = q(t)$  дифференциального включения (3.5) с начальными условиями  $\dot{q}(t_0 - 0) = \dot{q}_0 + w(t_0 - 0)$ ,  $q(t_0) = q_0$ . Из неравенств (3.4) вытекает, что на промежутке  $[t_0, t_1]$  решение  $\chi(t) \equiv \dot{q}_0$ . Тогда на этом промежутке  $\dot{q}(t) \equiv \nu$  и  $\dot{q}(t_1) = \dot{q}_1$ .

Таким образом, сформулированная выше задача управляемости реализуется на управлениях

$$u_i = u_i^{eq} + \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}(t, q) \left[ (\nu^i - \dot{q}_0^i) \delta(t - t_0) + (\dot{q}_1^i - \nu^i) \delta(t - t_1) \right]. \quad (3.7)$$

Если коэффициенты матрицы  $A(t, q)$  равномерно ограничены вместе со своими частными производными, а кинетическая энергия не включает в себя других функций кроме квадратичной формы обобщенных скоростей, то функция  $g(t, q, \dot{q})$  является бесконечно малой функцией переменных  $\dot{q}$  в точке  $\dot{q} = 0$  равномерно относительно переменных  $(t, q)$ . Тогда неравенства (3.4) будут выполняться для малых обобщенных скоростей  $\dot{q}(t) = \nu$ , если дополнительно функция  $Q(t, q, \dot{q})$  непрерывна в точке  $\dot{q} = 0$  равномерно относительно переменных  $(t, q)$  в рассматриваемой области и выполняются неравенства

$$\sup |Q_i^A(t, q, 0)| < H_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

Из соотношения  $\nu = (\dot{q}_1 - \dot{q}_0)/T$  видно, что решение задачи возможно с произвольно малыми значениями  $\dot{q}^i = \nu^i$ , если рассматривать большие промежутки времени  $T$ . Таким образом, неравенства (3.8) обеспечат решение задачи полной управляемости системы с использованием достаточно малых кусочно-постоянных скоростей. Неравенства (3.8) обеспечат также устойчивое движение между моментами приложения к системе импульсивных воздействий и стабилизацию системы в конечном состоянии  $q_1$  при  $\dot{q}_1 = 0$ .

В заключение отметим, что использование дельта-функций для описания импульсных обобщенных управлений в механической системе носит достаточно формальный характер. Оно удобно при переходах к дельтообразным функциям или для описания динамики систем при помощи вспомогательной задачи (3.6) с непрерывными решениями. Импульсные составляющие в управлении (3.7) задают время приложения и меру ударной силы, характеризующей приращение количества движения системы. Физические закономерности и аналитическая динамика систем твердых тел при наличии ударов достаточно полно представлены в книге [14].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.
3. **Айзерман М.А., Пятницкий Е.С.** Основы теории разрывных систем. I, II // Автоматика и телемеханика. 1974. № 7. С. 33–47; № 8. С. 39–61.
4. **Финогенко И.А.** Импульсные управления в системах со скользящими режимами // Докл. РАН. 2009. Т. 426, № 6. С. 744–746.
5. **Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.** Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005. 215 с.
6. **Толстоногов А.А., Финогенко И.А.** О решениях дифференциальных включений с полунепрерывной снизу невыпуклой правой частью в банаховом пространстве // Мат. сб. 1984. Т. 125 (167), № 2(10). С. 199–230.
7. **Финогенко И.А.** Об условии правой липшицевости для дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 5. С. 1068–1075.
8. **Толстоногов А.А.** О структуре множества решений дифференциальных включений в банаховом пространстве // Мат. сб. 1982. Т. 118(160). С. 3–18.
9. **Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.** Оптимальное импульсное управление. М.: Физматлит, 2003. 255 с.
10. **Пятницкий Е.С.** Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции. I, II // Автоматика и телемеханика. 1989. № 1. С. 87–98; № 2. С. 57–71.
11. **Матюхин В.И.** Универсальные законы управления механическими системами. М.: МАКС Пресс, 2001. 249 с.

12. **Финогенко И.А.** О правосторонних решениях одного класса разрывных систем. I, II // Автоматика и телемеханика. 2001. № 9. С. 149–158; № 11. С. 5–108.
13. **Уткин В.И.** Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 267 с.
14. **Иванов А.П.** Динамика систем с механическими соударениями. М.: Наука, 1997. 336 с.

Финогенко Иван Анатольевич

Поступила 25.12.2009

д-р физ.-мат. наук

зав. лабораторией

Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН

e-mail: fin@icc.ru

## ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЛЕММЕ

Ю. А. Шашкин

Изучаются  $n$ -мерные кубические псевдомногообразия и их клеточные отображения. В частности, пусть имеются дискретный  $n$ -куб и все его  $(n - 1)$ -грани. Тогда существуют одна или две, или четыре грани куба, каждая из которых отображается на одну грань.

Ключевые слова:  $n$ -мерный дискретный куб, клеточное отображение, расстояние по Хеммингу.

Yu. A. Shashkin. On one combinatorial lemma.

We study  $n$ -dimensional cubical pseudomanifolds and their cellular mappings. In particular, consider a discrete  $n$ -cube and all of its  $(n - 1)$ -faces. Then, there exists either one or two or four faces of the cube each of which is mapped to one face.

Keywords:  $n$ -dimensional discrete cube, cellular mapping, Hamming distance.

В статье доказана следующая комбинаторная лемма для дискретного куба.

**Лемма 1.** Пусть  $C^n = \{0, 1\}^n$  — дискретный  $n$ -мерный куб,  $C^{n-1}$  — фиксированная  $(n - 1)$ -грань куба и  $f: C^n \rightarrow C^{n-1}$  — отображение, не увеличивающее расстояние (в смысле Хемминга) между каждой парой вершин куба. Предположим, что сужение  $f|_{C^{n-1}}$  является тождественным отображением. Тогда существуют одна или две, или четыре  $(n - 1)$ -грани куба  $C^n$ , каждая из которых отображается на  $C^{n-1}$ .

В работе [1] эта лемма была использована для изучения кубических (или, что то же самое, не увеличивающих расстояния) отображений между кубическими псевдомногообразиями. Она была доказана в [1] перебором вариантов только для  $n = 3$  и  $n = 4$ . В этой статье мы различаем два случая в доказательстве леммы. Если  $(n - 1)$ -грань, антиподальная грани  $C^{n-1}$ , отображается в  $C^{n-1}$ , то доказательство проводится полностью только для размерности  $n = 5$ . Во всех остальных случаях никаких ограничений на размерность не дается.

*Обозначения.* Символ  $C^n$  обозначает дискретный куб размерности  $n$  (короче,  $n$ -куб). Точки этого куба мы называем также его вершинами. Каждая вершина куба имеет  $n$  координат  $(x_1, \dots, x_n)$ , каждая из которых равна 0 или 1. Если заданы  $m$  различных целых чисел  $i_1, \dots, i_m$  между 1 и  $n$  (в нестрогом смысле) и даны  $m$  чисел  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ , каждое из которых равно 0 или 1, то множество

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in C^n: x_{i_j} = \varepsilon_j, \quad 1 \leq j \leq m\}$$

является  $(n - m)$ -гранью куба  $C^n$ . Для каждой  $m$ -грани ( $1 \leq m \leq n - 1$ ) мы различаем свободные (в числе  $m$ ) и фиксированные (в числе  $n - m$ ) координаты. Свободные координаты обозначаются звездочками. Таким образом, символ  $(0 * \dots * 1)$  будет обозначать  $(n - 2)$ -грань с фиксированными координатами  $x_1 = 0$ ,  $x_n = 1$  и свободными координатами  $x_2, \dots, x_{n-1}$ . Заметим, что многоточие между двумя звездочками означает тоже звездочки. Аналогично многоточие между двумя нулями или двумя единицами означает нули или единицы соответственно. Например, символ

$$\underbrace{(1 \dots 1)}_i \underbrace{(0 \dots 0)}_{n-i-1} 1)$$

обозначает вершину куба  $C^n$  с координатами  $x_1 = x_2 = \dots = x_i = x_n = 1$ ,  $x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = x_{n-1} = 0$ ; символ

$$(1\ 0\ \underbrace{1\dots 1}_{n-5}\ * \ * \ 0)$$

обозначает 2-грань куба с фиксированными координатами  $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-3} = 1$ ,  $x_2 = x_n = 0$  и свободными координатами  $x_{n-2}$ ,  $x_{n-1}$ .

Расстояние по Хеммингу (или просто расстояние) между двумя вершинами куба  $C^n$  равно по определению числу их различных координат. Пусть  $F_1^m$  и  $F_2^m$  — две грани равной размерности и с теми же самыми свободными координатами. Расстояние по Хеммингу между  $F_1^m$  и  $F_2^m$  есть число их различных фиксированных координат. Две вершины (или  $m$ -грани), расстояние между которыми равно 1, называются соседними (или соседями).

Всюду в дальнейшем в качестве  $(n-1)$ -грани куба  $C^{n-1}$ , о которой идет речь в лемме, мы понимаем его “нижнюю” грань  $(*\dots* 0)$ . Пусть  $f$  — отображение, описанное в лемме. Отметим следующие его свойства 1–5.

1. Правило отображения соседей (ОС-правило). Если  $a$  и  $b$  — соседние вершины куба  $C^n$ , то  $f(a)$  и  $f(b)$  являются соседями или совпадают. Мы используем это правило в следующей форме: если  $a_1, \dots, a_m$  — соседи вершины  $b$ , то образ  $f(b)$  является общим соседом образов  $f(a_1), \dots, f(a_m)$ .

2. Каждая вершина куба  $C^n$  и ее образ имеют не больше двух различных координат.

Свойства 1 и 2 легко проверяются, причем второе следует из первого.

3. Если  $a$  — вершина “верхней”  $(n-1)$ -грани  $(*\dots* 1)$  и  $f(a) \in (*\dots* 1)$ , то  $f(a) = a$ . Множество всех таких неподвижных точек образует грань. Доказательство см. ниже.

4. В частности, каждое отображение верхней грани  $(*\dots* 1)$  в себя является тождественным. Этот вариант отображения куба  $C^n$  дает нам единственный случай, когда имеется только одна  $(n-1)$ -грань, которая отображается на  $(*\dots* 0)$ , а именно, сама нижняя грань.

5. Образ каждой  $m$ -грани  $(1 \leq m \leq n-1)$  содержится в некоторой  $m$ -грани. Доказательство см. ниже.

**Доказательство.** Докажем, что множество всех неподвижных точек является  $(n-1)$ -гранью. Пусть  $a$  и  $b$  — неподвижные точки с расстоянием  $m$  между ними:  $\rho(a, b) = m$ . Пусть  $F^m$  — наименьшая грань, содержащая эти точки. Грань  $F^m$  можно описать так. Точки  $a$  и  $b$  имеют  $m$  различных координат и  $n-m$  одинаковых. Без ограничения общности можно считать

$$a = (\underbrace{0\dots 0}_m \beta_{m+1} \dots \beta_{n-1} 1), \quad b = (\underbrace{1\dots 1}_m \beta_{m+1} \dots \beta_{n-1} 1).$$

Тогда грань  $F^m = (*\dots* \beta_{m+1} \dots \beta_{n-1} 1)$ . Пусть  $c$  — точка грани  $F^m$  на расстоянии 1 от вершины  $a$  и пусть, например,  $c = (1 \underbrace{0\dots 0}_{m-1} \beta_{m+1} \dots \beta_{n-1} 1)$ . Тогда  $\rho(c, b) = m-1$ . Если точка  $c$  не

является неподвижной, то она переходит в вершину нижней  $(n-1)$ -грани, соседнюю с точкой  $a$ , т. е. мы имеем  $f(c) = (\underbrace{0\dots 0}_m \beta_{m+1} \dots \beta_{n-1} 0)$ . Значит,  $\rho[f(c), f(b)] = \rho[f(c), b] = m+1$ , что

невозможно. Итак, все точки грани  $F^m$ , удаленные от вершины  $a$  на расстояние 1, неподвижны. Переходя затем к точкам с расстоянием 2, 3 и т. д., убеждаемся, что грань  $F^m$  неподвижна. Если кроме этой грани имеется еще какая-то неподвижная точка  $d$ , то указанный процесс можно применить к этой точке и любой точке грани  $F^m$ . В результате снова получается неподвижная грань. Утверждение доказано.

Аналогично проверяется, что множество всех почти неподвижных точек в верхней грани (об этом понятии см. ниже) тоже образует грань.

Аналогично проверяется, что множество всех почти неподвижных точек в верхней грани (об этом понятии см. ниже) тоже образует грань.

Докажем, что образ каждой  $m$ -грани, например  $F_1^m$ , содержится в некоторой  $m$ -грани. Пусть  $a$  и  $b$  — такие вершины грани  $F_1^m$ , что  $\rho[a, b] = m$ , и пусть сначала  $\rho[f(a), f(b)] = m$ .

Обозначим через  $F_2^m$  наименьшую грань, содержащую точки  $f(a)$  и  $f(b)$ . Мы можем записать эти точки и эту грань следующим образом:

$$f(a) = (\underbrace{0 \dots 0}_m \beta_{m+1} \dots \beta_n),$$

$$f(b) = (\underbrace{1 \dots 1}_m \beta_{m+1} \dots \beta_n),$$

$$F_2^m = (\underbrace{* \dots *}_m \beta_{m+1} \dots \beta_n).$$

Пусть  $c$  — такая вершина грани  $F_1^m$ , что  $\rho(a, c) = k$ ,  $\rho(c, b) = m + k$ ,  $k > 0$ . Тогда  $\rho[f(a), f(c)] \leq k$ , т. е. вершины  $f(a)$  и  $f(c)$  имеют  $i$  различных координат ( $i \leq k$ ). Если  $f(c)$  не содержится в грани  $F_2^m$ , то среди этих различных координат непременно будет хотя бы одна с номером  $> m$ . Пусть, например,

$$f(c) = (\underbrace{1 \dots 1}_{i-1} \underbrace{0 \dots 0}_{m-i+1} \gamma_{m+1} \beta_{m+2} \dots \beta_n),$$

где  $\gamma_{m+1} = 1$ , если  $\beta_{m+1} = 0$ , и  $\gamma_{m+1} = 0$ , если  $\beta_{m+1} = 1$ . Тогда  $\rho[f(c), f(b)] = m - i + 2 \geq m - k + 2$ . С другой стороны, так как  $\rho(c, b) = m - k$ , то  $\rho[f(c), f(b)] \leq m - k$ , что невозможно. Итак, образ грани  $F_1^m$  содержится в  $F_2^m$ .

Если  $\rho[f(a), f(b)] = m - 1$ , то можно аналогичным образом доказать, что образ грани  $F_1^m$  содержится в некоторой  $(m - 1)$ -гранни. С другой стороны, этот образ не может содержаться в  $(m - 2)$ -гранни, каково бы ни было нерастягивающее отображение  $f$ .

Прежде чем доказывать лемму, дадим такое определение. Некоторую  $(n - 2)$ -грань в верхней  $(n - 1)$ -гранни (или саму верхнюю грань) назовем отмеченной, если она отображается на свою антиподальную (относительно куба  $C^n$ ) грань в нижней грани. Пусть, например,  $(n - 2)$ -грань  $(1 * \dots * 1)$  отмечена. Так как  $(n - 2)$ -грань  $(1 * \dots * 0)$  отображается на себя тождественно, то мы заключаем, что  $(1 * \dots *)$  отображается на  $(* \dots * 0)$ . Таким образом, имея отмеченную  $(n - 2)$ -грань, мы получаем  $(n - 1)$ -грань, которая отображается на нижнюю грань. Поэтому в доказательстве леммы достаточно проверить наличие отмеченной грани.

Для доказательства леммы следует рассмотреть два случая, когда верхняя грань  $(* \dots * 1)$  отображается: 1) в одну из “боковых”  $(n - 1)$ -граней вида  $(x_i = 0)$  или  $(x_i = 1)$ ,  $1 \leq i \leq n, 2)$  в нижнюю грань  $(* \dots * 0)$ .

Предположим сначала, что  $f$  отображает верхнюю грань  $(* \dots * 1)$  в одну из боковых граней. Так как образ верхней грани не содержится в нижней, то существует неподвижная точка (или в более общем случае неподвижная  $m$ -грань,  $0 \leq m \leq n - 2$ ). Пусть сначала это будет точка, например, вершина  $(0 \dots 0 1)$ . Антиподом неподвижной точки в верхней грани является вершина  $(1 \dots 1)$ . Если мы определим образ антипода, то можно будет найти образ всей верхней грани и указать отмеченную  $(n - 2)$ -грань в  $(* \dots * 1)$ . Отображение  $f$  изменяет самое большее две координаты у каждой точки. Так как вершина  $(1 \dots 1)$  переходит в нижнюю грань, ее последняя координата изменяется. Предположим, что

$$(1 \dots 1) \rightarrow (1 \dots 1 0),$$

т. е. что все остальные ее координаты сохраняют свои значения. (Стрелка  $\rightarrow$  обозначает отображение  $f$ ). Сравнивая это с отображением неподвижной точки

$$(0 \dots 0 1) \rightarrow (0 \dots 0 1),$$

видим, что расстояние двумя прообразами равно  $n - 1$ , а между образами равно  $n$ , что невозможно. Значит, антипод  $(1 \dots 1)$  переходит в одну из следующих вершин

$$(0 1 \dots 1 0), (1 0 1 \dots 1 0), \dots, (1 \dots 1 0 1 0), (1 \dots 1 0 0)$$

или, для определенности, в первую из них:

$$(1 \dots 1) \rightarrow (0 \ 1 \dots 1 \ 0).$$

Отсюда следует, что верхняя грань  $(* \dots * 1)$  переходит в боковую грань, содержащую вершины  $(0 \dots 0 \ 1)$  и  $(0 \ 1 \dots 1 \ 0)$ , т. е. в грань  $(0 \ * \dots *)$ .

Покажем, что все вершины  $(n - 2)$ -грани  $(1 \ * \dots * 1)$  отображаются так же, как точка  $(1 \dots 1)$ , т. е. сохраняют все свои координаты, кроме первой и последней:

$$(1 \ * \dots * 1) \rightarrow (0 \ * \dots * 0).$$

Доказательство проводится индукцией по расстоянию между вершиной из грани  $(1 \ * \dots * 1)$  и неподвижной вершиной  $(0 \dots 0 \ 1)$ . Вершина  $(1 \ 0 \dots 0 \ 1)$  является единственной точкой в грани  $(1 \ * \dots * 1)$ , соседней с неподвижной точкой  $(0 \dots 0 \ 1)$ . Образ этой вершины является соседом точки  $(0 \dots 0 \ 1)$ , и, так как этот образ лежит в нижней  $(n - 1)$ -грани, мы имеем

$$(1 \ 0 \dots 0 \ 1) \rightarrow (0 \dots 0).$$

Пусть  $c$  — вершина грани  $(1 \ * \dots * 1)$ , удаленная от  $(0 \dots 0 \ 1)$  на расстояние  $i$ ,  $1 \leq i \leq n - 2$ . Среди координат точки  $c$  имеется  $i + 1$  единиц и  $n - i - 1$  нулей. Мы рассмотрим только одну такую вершину и для простоты запишем ее так:

$$c = (\underbrace{1 \dots 1}_i \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i-1} \ 1).$$

Докажем, что

$$c = (\underbrace{1 \dots 1}_i \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i-1} \ 1) \rightarrow (0 \ \underbrace{1 \dots 1}_{i-1} \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i}). \quad (1)$$

Для этого выпишем отображения двух соседей точки  $c$

$$(\underbrace{1 \dots 1}_{i-1} \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i} \ 1) \rightarrow (0 \ \underbrace{1 \dots 1}_{i-2} \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i+1}) = (0 \ \underbrace{1 \dots 1}_{i-2} \ 0 \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i}) \quad (2)$$

(это предположение индукции) и

$$(\underbrace{1 \dots 1}_i \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i}) \rightarrow (\underbrace{1 \dots 1}_i \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i}) = (1 \ \underbrace{1 \dots 1}_{i-2} \ 1 \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i}). \quad (3)$$

Согласно ОС-правилу образ вершины  $c$  должен быть одним из общих соседей образов (2) и (3), т. е. одной из вершин

$$(\underbrace{1 \dots 1}_{i-1} \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i+1}) \quad \text{и} \quad (0 \ \underbrace{1 \dots 1}_{i-1} \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i}).$$

Если бы мы имели

$$c \rightarrow (\underbrace{1 \dots 1}_{i-1} \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i+1}) = (1 \ \underbrace{1 \dots 1}_{i-2} \ \underbrace{0 \dots 0}_{n-i} \ 0),$$

то, сравнивая это с отображением антипода

$$(1 \dots 1) \rightarrow (0 \ 1 \dots 1 \ 0) = (0 \ \underbrace{1 \dots 1}_{i-2} \ \underbrace{1 \dots 1}_{n-i} \ 0),$$

получили бы противоречие: расстояние между прообразами равно  $n - i - 1$ , а между образами равно  $n - i + 1$ , и тем самым (1) доказано. Это значит, что  $(1 \ * \dots * 1) \rightarrow (0 \ * \dots * 0)$ , т. е.  $(n - 2)$ -грань типа  $(1 \ * \dots * 1)$  отмечена. Других отмеченных граней в верхней грани нет. Действительно, грань  $(0 \ * \dots * 1)$  не может быть отмеченной, так как она содержит

неподвижную точку. Все остальные  $(n-2)$ -грani в  $(*\dots*1)$  имеют общую точку с гранью  $(1*\dots*1)$  и поэтому не могут быть отмеченными. Таким образом, мы имеем две  $(n-1)$ -грani, каждая из которых отображается на нижнюю без вырождения.

Пусть теперь вместо неподвижной точки имеется некоторая неподвижная  $m$ -грань в верхней грани, например, 2-грань

$$\underbrace{(0\dots 0)}_{n-3} * * 1).$$

Ее антиподальной гранью в  $(*\dots*1)$  является 2-грань

$$\underbrace{(1\dots 1)}_{n-3} * * 1).$$

Как и раньше, мы проверяем, что эта антиподальная грань переходит в одну из следующих 2-граней

$$(0 \underbrace{1\dots 1}_{n-4} * * 0), (1 0 \underbrace{1\dots 1}_{n-5} * * 0), \dots, (\underbrace{1\dots 1}_{n-4} 0 * * 0)$$

таким образом, что обе звездочки сохраняют свои значения. Пусть для определенности

$$\underbrace{(1\dots 1)}_{n-3} * * 1) \rightarrow (0 \underbrace{1\dots 1}_{n-4} * * 0).$$

Тогда верхняя грань  $(*\dots*1)$  переходит в  $(n-1)$ -грань, содержащую две 2-грani

$$\underbrace{(0\dots 0)}_{n-3} * * 1) \quad \text{и} \quad (0 \underbrace{1\dots 1}_{n-4} * * 0),$$

т. е. в грань  $(0 * \dots *)$ . Кроме того, грань  $(n-2)$  опять отмечена.

Переходим к случаю, когда образ верхней грани содержится в нижней. Сначала предположим, что существует почти неподвижная (п. н.) точка. Точка из верхней грани называется почти неподвижной, если она изменяет при отображении только одну последнюю координату. Некоторая  $m$ -грань из верхней грани называется почти неподвижной, если все ее вершины почти неподвижны.

Пусть  $(0\dots 0 1)$  — единственная п. н. вершина в верхней грани, следовательно,  $(0\dots 0 1) \rightarrow (0\dots 0)$ . Тогда по аналогии с предыдущим случаем мы заключаем, что антипод п. н. точки в верхней грани, вершина  $(1\dots 1)$ , может переходить в одну из следующих вершин:

$$(0 1\dots 1 0), (1 0 1\dots 1 0), \dots, (1\dots 1 0 1 0), (1\dots 1 0 0).$$

Если предположить, что

$$(1\dots 1) \rightarrow (0 1\dots 1 0),$$

то  $(n-2)$ -грань  $(1 * \dots * 1)$  снова оказывается отмеченной. Если вместо п. н. точки имеется п. н. грань, рассуждения аналогичны.

Предположим теперь, что верхняя грань отображается в нижнюю и что при этом не имеется п. н. точек и граней (или, по крайней мере, мы не предполагаем заранее о их существовании). Мы рассмотрим случай 5-куба. Рассуждения будет удобнее проводить с помощью рисунков. Рисунок 1 показывает стандартную систему числовых отметок для вершин нижней 4-грani. На этом рисунке верхний (а) и нижний (б) 3-кубы представляют 3-грani  $(** * 1 0)$  и  $(** * 0 0)$  соответственно.

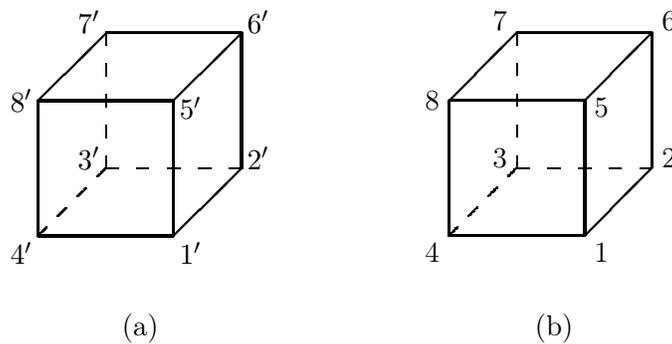


Рис. 1.

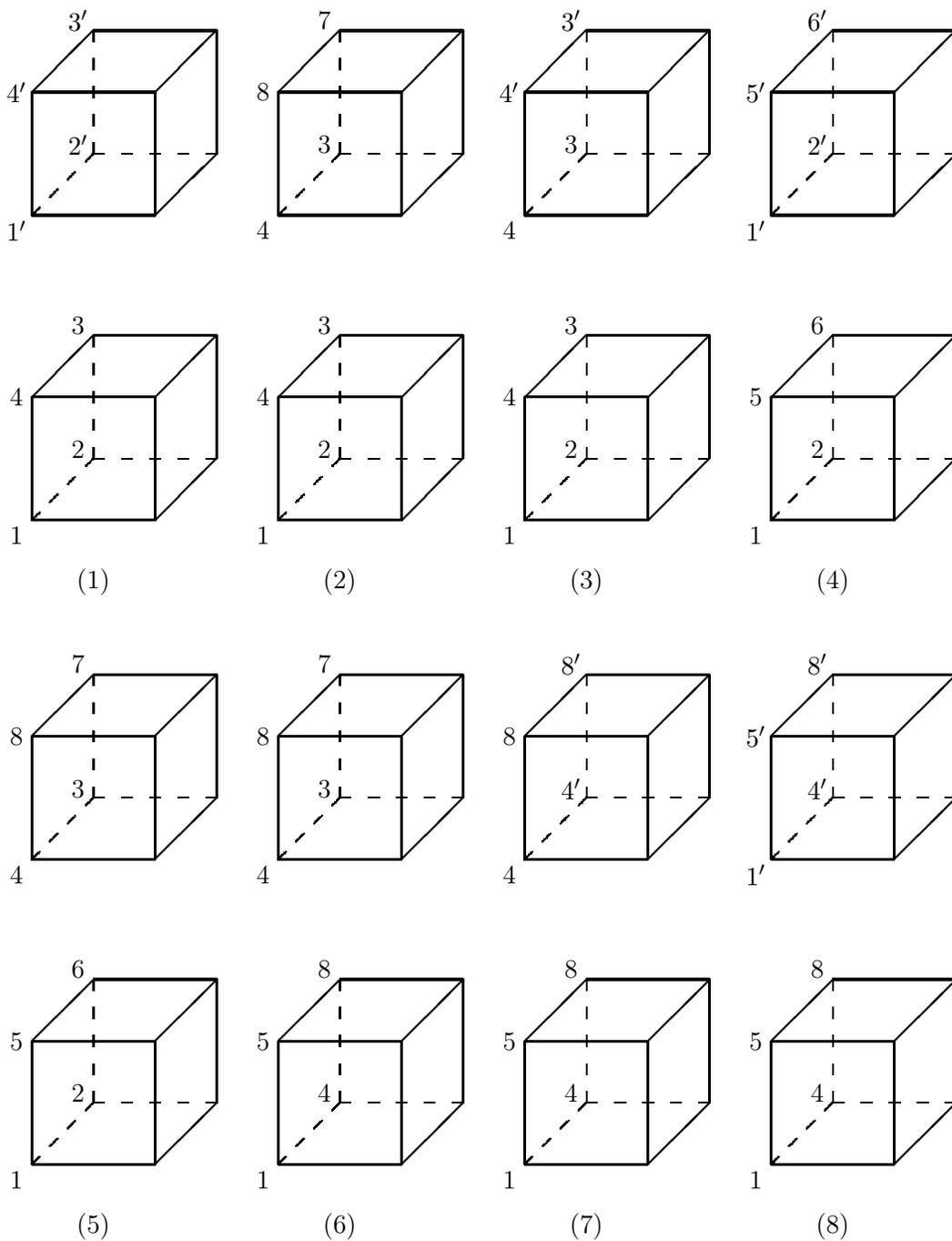


Рис. 2 (а).

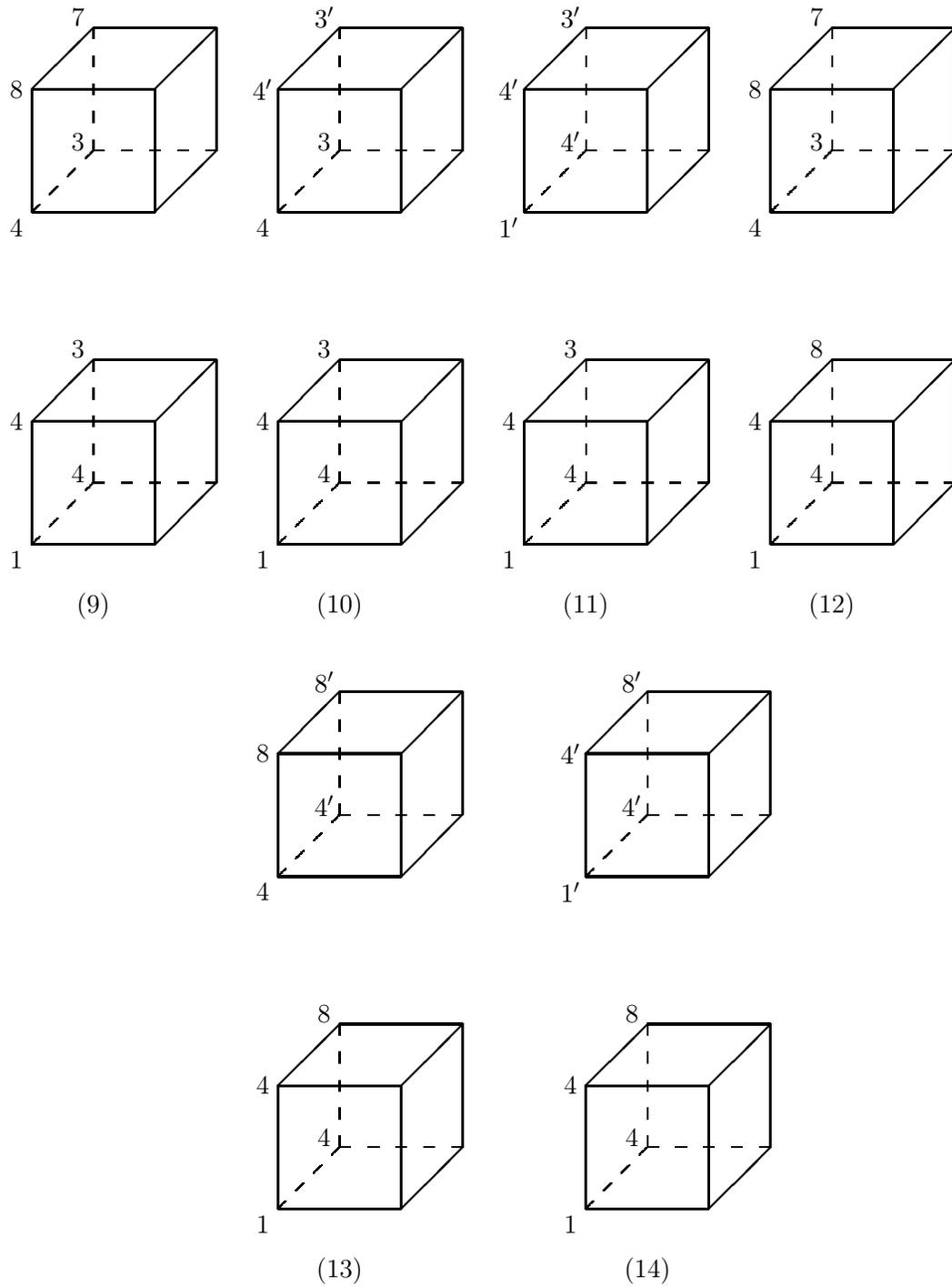


Рис. 2 (b).

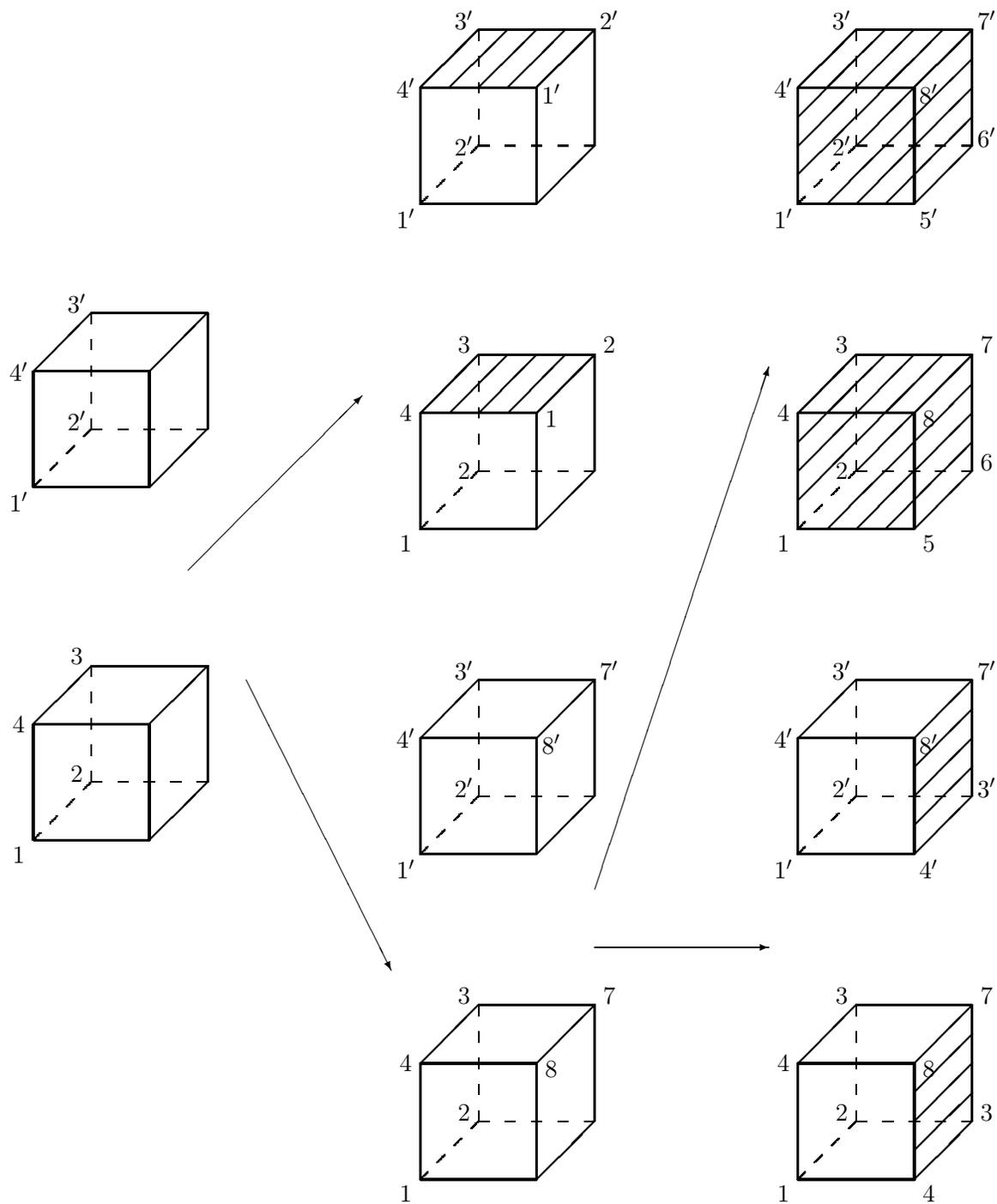


Рис. 3.

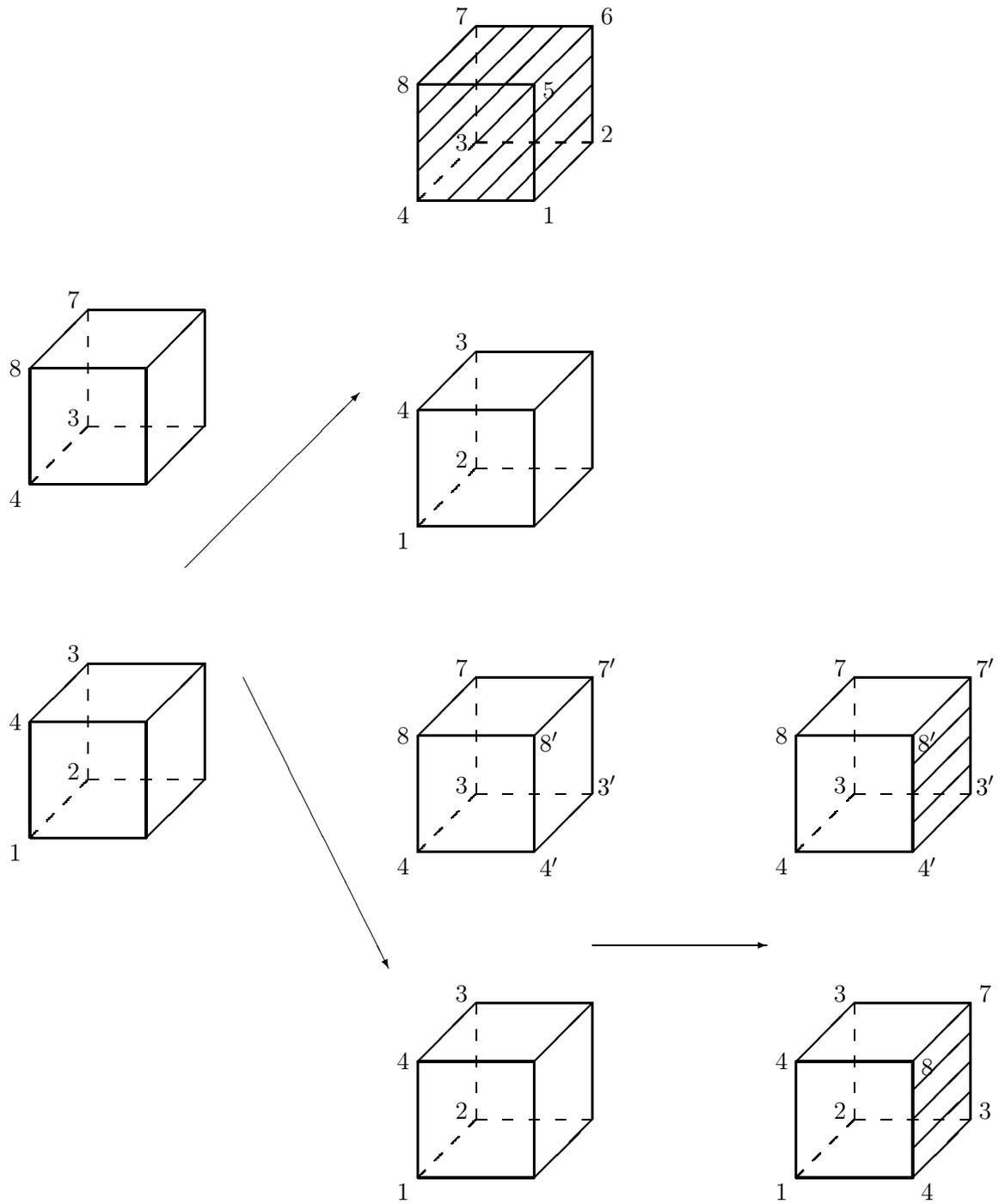


Рис. 4.

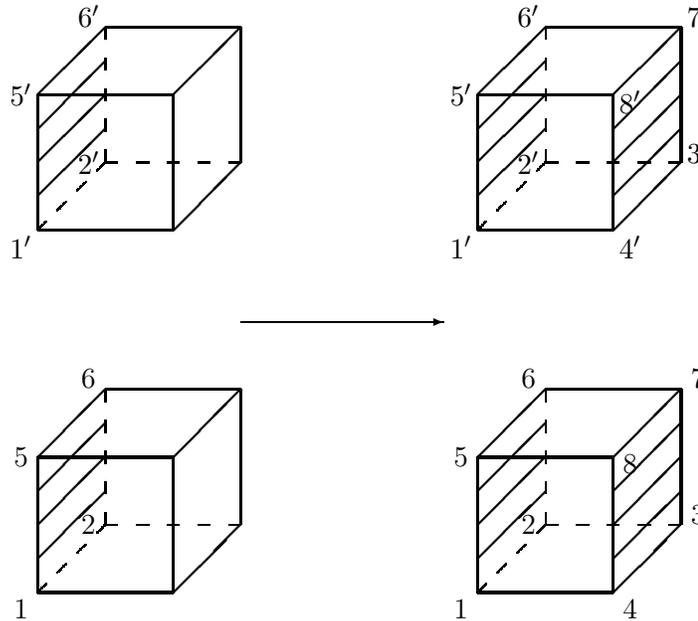


Рис. 5.

В дальнейшем достаточно рисовать только верхнюю 4-грань. Отметки ее вершин указывают на их образы при отображении: вершина из верхней грани и ее образ в нижней грани должны иметь одну и ту же отметку.

Начнем с того, что укажем образ одной какой-нибудь вершины верхней грани. Пусть, например,  $(0\ 0\ 0\ 0\ 1) \rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 0)$ . Тогда, используя ОС-правило, можно проверить, что имеется 14 вариантов отображения 3-грань  $(0\ *\ * \ * \ 1)$  (см. рис. 2а и рис. 2б, (1)–(14)). Дадим пояснения к некоторым из этих вариантов.

Рассмотрим вариант (1) на рис. 3. Здесь сразу же видно, что все вершины 2-грань  $(0\ * \ 1\ * \ 1)$  изменяют свою третью координату по правилу  $1 \rightarrow 0$  (рис. 3, первый столбец слева). Применяя ОС-правило, видим, что существуют две версии отображения 2-грань  $(1\ * \ 1\ * \ 1)$  (второй столбец). Если определить отображение в соответствии с первой версией (верх второго столбца), то все вершины грани  $(1\ * \ 1\ * \ 1)$  также изменяют свою третью координату по правилу  $1 \rightarrow 0$ , и поэтому 3-грань  $(\ * \ * \ 1\ * \ 1)$  будет отмеченной (отмеченные грани показаны на рисунках штриховкой). Важно отметить, что эта грань будет единственной отмеченной при *любом* способе отображения 2-грань  $(1\ * \ 0\ * \ 1)$ . Поэтому последнее отображение нас не интересует. Если рассмотреть вторую версию отображения грани  $(1\ * \ 1\ * \ 1)$  (низ второго столбца), то следует определить отображение 2-грань  $(1\ * \ 0\ * \ 1)$ . И снова имеется два его варианта (третий столбец). В первом из них отмеченной является вся верхняя 4-грань, во втором отмечена 3-грань  $(1\ * \ * \ * \ 1)$  и только она.

Варианты (5) и (8) ничем существенно не отличаются от варианта (1). Общее у них то, что 3-грань  $(0\ * \ * \ * \ 1)$  не вырождается. Поэтому во всех трех вариантах имеется версия отображения, когда вся 4-грань отмечена.

Рассмотрим вариант (2) на рис. 4. Здесь все вершины 2-грань  $(0\ * \ * \ 1\ 1)$  изменяют при отображении свою четвертую координату по правилу  $1 \rightarrow 0$ . В связи с этим мы сначала определяем отображение 2-грань  $(1\ * \ * \ 1\ 1)$ . Имеются две версии этого отображения (второй столбец). Третий столбец содержит только один вариант: так как 3-грань  $(0\ * \ * \ * \ 1)$  вырождается, то верхняя 4-грань не может быть отмеченной.

Варианты (3), (6), (7), (9)–(14) ничем существенно не отличаются от варианта (2). Поэтому мы их не рассматриваем.

В варианте (4) на рис. 5 3-грань  $(0 * * * 1)$  с самого начала отмечена. Имеется несколько версий отображения 3-грани  $(1 * * * 1)$ . Во всех этих версиях, за исключением одной, грань  $(0 * * * 1)$  будет единственной отмеченной. Исключительный случай, когда грань  $(1 * * * 1)$  и, следовательно, вся 4-грань отмечена. Таким образом, в этом случае имеются четыре 4-грани, каждая из которых отображается без вырождения на нижнюю грань  $(* * * * 1)$ ,  $(0 * * * * *)$ ,  $(1 * * * * *)$ ,  $(* * * * 0)$ .

Очевидно, что верны следующие два утверждения для каждой размерности:

(а) имеются в точности четыре  $(n - 1)$ -грани, каждая из которых отображается на нижнюю грань без вырождения;

(б) в верхней грани имеются две взаимно антиподальные отмеченные  $(n - 2)$ -грани.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shashkin Yu.A.** Local degrees of cubical mappings // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. Suppl. 2. P. S208-S216.

Шашкин Юрий Алексеевич

канд. физ.-мат. наук

гл. программист

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: sha@imm.uran.ru

Поступила 17.06.2009

УДК 519.624

**УЛУЧШЕННАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ  
РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ  
РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ<sup>1</sup>****Г. И. Шишкин, Л. П. Шишкина**

Рассматривается задача Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии. Для этой задачи разрабатывается новый подход для построения разностных схем, сходящихся равномерно относительно возмущающего параметра  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$ . Этот подход основан на декомпозиции сеточного решения на регулярную и сингулярную компоненты, являющиеся решениями сеточных подзадач на равномерных сетках. С использованием техники асимптотических конструкций строится схема метода декомпозиции решения, сходящаяся  $\varepsilon$ -равномерно в равномерной норме со скоростью  $\mathcal{O}(N^{-2} \ln^2 N)$ , где  $N + 1$  — число узлов используемых сеток; при фиксированных значениях параметра схема сходится со скоростью  $\mathcal{O}(N^{-2})$ . С использованием техники Ричардсона строится улучшенная схема метода декомпозиции решения, сходящаяся  $\varepsilon$ -равномерно в равномерной норме со скоростью  $\mathcal{O}(N^{-4} \ln^4 N)$ .

Ключевые слова: сингулярно возмущенная краевая задача, обыкновенное дифференциальное уравнение реакции-диффузии, декомпозиция сеточного решения, техника асимптотических конструкций, разностная схема метода декомпозиции решения, равномерные сетки,  $\varepsilon$ -равномерная сходимость, техника Ричардсона, улучшенная схема метода декомпозиции решения.

G.I. Shishkin, L.P. Shishkina. Improved difference scheme of the solution decomposition method for a singularly perturbed reaction–diffusion equation.

A Dirichlet problem is considered for a singularly perturbed ordinary differential reaction–diffusion equation. For this problem, a new approach is developed in order to construct difference schemes convergent uniformly with respect to the perturbation parameter  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$ . The approach is based on the decomposition of a discrete solution into regular and singular components, which are solutions of discrete subproblems on uniform grids. Using the asymptotic construction technique, a difference scheme of the solution decomposition method is constructed that converges  $\varepsilon$ -uniformly in the maximum norm at the rate  $\mathcal{O}(N^{-2} \ln^2 N)$ , where  $N + 1$  is the number of nodes in the grids used; for fixed values of the parameter  $\varepsilon$ , the scheme converges at the rate  $\mathcal{O}(N^{-2})$ . Using the Richardson technique, an improved scheme of the solution decomposition method is constructed, which converges  $\varepsilon$ -uniformly in the maximum norm at the rate  $\mathcal{O}(N^{-4} \ln^4 N)$ .

Keywords: singularly perturbed boundary value problem, ordinary differential reaction–diffusion equation, decomposition of a discrete solution, asymptotic construction technique, difference scheme of the solution decomposition method, uniform grids,  $\varepsilon$ -uniform convergence, Richardson technique, improved scheme of the solution decomposition method.

**1. Введение**

В настоящее время для сингулярно возмущенных краевых задач достаточно хорошо разработаны методы построения  $\varepsilon$ -равномерно сходящихся разностных схем на сетках, сгущающихся в окрестности пограничного слоя; см., например, [1–6] в случае уравнений в частных производных. Методы, использующие кусочно-равномерные сетки, сгущающиеся в пограничных слоях, получили достаточно широкое распространение ввиду их простоты и удобства в применении (см., например, [2–6] и библиографию там же). К недостаткам этих численных методов на априорно адаптирующихся сетках относится необходимость решать сеточные уравнения на сетках, шаг которых резко изменяется в окрестности пограничного слоя. Такие схемы на существенно неравномерных сетках не позволяют применять высокоэффективные вычислительные методы, разработанные для решения сеточных уравнений в случае регулярных краевых задач (см,

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00726).

например, [7, 8]), а также вызывают затруднения при построении схем повышенного порядка точности (см, например, [9, 10]).

Отметим, что методы подгонки (описание см. [11–13], а также [3, гл. 4; 4, гл. 2; 5, ч. I, гл. 4] и библиографию там же) имеют преимущество в простоте используемых равномерных сеток, однако коэффициенты сеточных уравнений в этих методах зависят от явного вида главного члена сингулярной компоненты решения. По этой причине методы подгонки имеют ограниченную область применимости при построении  $\varepsilon$ -равномерно сходящихся численных методов, в частности, для задач с параболическим начальным либо пограничным слоями (см. [14, 15], а также [2, гл. II, § 1; 4, гл. 6; 6, гл. 1, 9] и библиографию там же).

Сетки, используемые в методах подгонки и сгущающихся сеток, остаются неизменными в процессе решения задачи. Другой альтернативный подход в построении численных методов для сингулярно возмущенных краевых задач, разрабатываемых, например, в [16–19] и [6, гл. 14], приводит к методам на последовательно *апостериорно* адаптирующихся сетках, подстраивающихся в процессе решения задачи в зависимости от получающегося численного решения. В этом подходе используются классические аппроксимации краевой задачи; уточнение решения проводится на более густой сетке на той подобласти, где ошибки решения оказываются недопустимо большими. Подобласть, в которой требуется *локальное* уточнение решения, определяется на основе индикатора — функционала от решения сеточной задачи (например, градиента решения). В этих методах сеточные задачи на подобластях, где проводится апостериорное уточнение решения, решаются на равномерных сетках. В статье [20] и монографии [6, гл. 11, 14], рассмотрены схемы, в которых подобласти, где следует уточнять решения, назначаются до вычислений, т. е. *априорно*. К недостаткам этих методов на *априорно* и *апостериорно* адаптирующихся сетках относится зависимость, хотя и слабая, ошибки численного решения от величины параметра  $\varepsilon$ ; схемы на адаптирующихся локально-равномерных сетках (а именно, сетках, равномерных на подобластях, где уточняется решение) *не являются  $\varepsilon$ -равномерно сходящимися*.

Схемы повышенного порядка точности, разрабатываемые для регулярных краевых задач (см., например, [21, 22]), не сходятся  $\varepsilon$ -равномерно для сингулярно возмущенных задач; сходимость имеет место лишь при условии, что шаг сетки поперек слоя много меньше возмущающего параметра  $\varepsilon$ .

В последнее время для сингулярно возмущенных задач на основе схем на кусочно-равномерных сетках с использованием техники Ричардсона построены схемы повышенного порядка точности (см., например, [23–25], а также [6, гл. 10] и библиографию там же). Однако использование неравномерных сеток вызывает затруднения при построении схем высокого порядка точности. Так, метод Ричардсона в случае параболического уравнения реакции-диффузии не позволяет строить схемы с порядком точности по  $x$  выше третьего (см. [9]), а в случае эллиптического уравнения конвекции-диффузии — с порядком точности выше второго (см. [10]).

В настоящей работе для сингулярно возмущенных задач предлагается *новый подход* к построению специальных схем на основе техники асимптотических конструкций — *метод декомпозиции сеточного решения*, использующий *классические аппроксимации задач* для регулярной и сингулярной компонент решения на *равномерных сетках*. В отличие от известных подходов к построению  $\varepsilon$ -равномерно сходящихся разностных схем — *метода подгонки* (приводящего к схемам Ильина, Аллена — Саусвелла) и *метода специальных сеток, сгущающихся в погранслое* (использующего классические схемы на сетках Бахвалова и/или Шишкина), в *новом подходе* сеточные подзадачи решаются на *равномерных сетках*, причем *коэффициенты сеточных уравнений не зависят от явного вида сингулярной компоненты* решения. Настоящий подход разрабатывается для модельной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии. На основе метода декомпозиции решения с использованием *техники Ричардсона* строится разностная схема, сходящаяся  $\varepsilon$ -равномерно с *четвертым порядком точности с точностью до логарифмического множителя*.

*О содержании работы.* Постановка краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии и цель исследования приводятся в разд. 2. Стандартные разностные схемы на равномерной и кусочно-равномерной сетках приводятся в разд. 3. В разд. 4 описывается метод экстраполяции Ричардсона, используемый для повышения точности решений стандартной разностной схемы на равномерной сетке. В разд. 5 строится разностная схема метода декомпозиции решения. В этом подходе предлагается декомпозиция сеточного решения на регулярную и сингулярную компоненты, рассматриваемые на равномерных сетках. Схема метода декомпозиции решения сходится  $\varepsilon$ -равномерно со скоростью  $\mathcal{O}(N^{-2} \ln^2 N)$  такой же, как стандартная схема на кусочно-равномерной сетке. Здесь  $N+1$  — число узлов используемых сеток; заметим, что число узлов сеток, на которых рассматриваются сеточные аппроксимации регулярной и сингулярных компонент в окрестности левой и правой границ области, одинаково. Схема Ричардсона метода декомпозиции решения, сходящаяся  $\varepsilon$ -равномерно со скоростью  $\mathcal{O}(N^{-4} \ln^4 N)$ , строится в разд. 6. “Стандартные” априорные оценки, используемые в построениях, рассматриваются в разд. 7.

## 2. Постановка задачи. Цель работы

На множестве  $\bar{D}$

$$\bar{D} = D \cup \Gamma, \quad D = (0, d) \quad (2.1)$$

рассмотрим задачу Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии

$$L u(x) = f(x), \quad x \in D, \quad u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.2)$$

Здесь  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  — левая и правая части границы  $\Gamma$ ;

$$L \equiv \varepsilon^2 a(x) \frac{d^2}{dx^2} - c(x), \quad x \in D,$$

функции  $a(x)$ ,  $c(x)$ ,  $f(x)$  предполагаются достаточно гладкими на  $\bar{D}$ , причем<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} a_0 \leq a(x) \leq a^0, \quad c_0 \leq c(x) \leq c^0, \quad x \in \bar{D}; \quad a_0, c_0 > 0; \\ |f(x)| \leq M, \quad x \in \bar{D}; \quad |\varphi(x)| \leq M, \quad x \in \Gamma; \end{aligned} \quad (2.3)$$

параметр  $\varepsilon$  принимает произвольные значения из полуинтервала  $(0, 1]$ .

При малых значениях параметра  $\varepsilon$  в окрестности множества  $\Gamma$  появляется пограничный слой.

Решения сингулярно возмущенных краевых задач характеризуются многомасштабностью (при малых значениях  $\varepsilon$ ), что приводит к затруднениям при их анализе и численном решении. В таких задачах для уравнений в частных производных хорошо известна техника метода асимптотических конструкций получения априорных оценок решения задачи на основе *метода декомпозиции решения* на регулярную и сингулярную компоненты (см., например, [2, гл. 1, § 3; 3, гл. 12; 6, гл. 3, 6] и библиографию там же). В случае достаточно сложной сингулярной компоненты эта компонента также подвергается декомпозиции. Каждая компонента решения является решением соответствующей “канонической” краевой задачи, имеющей не более одного типа особенности решения, что позволяет получать достаточно эффективные априорные оценки компонент решения. В случае исследуемой задачи подобная техника асимптотических конструкций при подходящей *декомпозиции сеточного решения* на регулярную и сингулярную компоненты позволяет для каждой сеточной компоненты построить соответствующую

<sup>2</sup> Через  $M$  (через  $m$ ) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от величины параметра  $\varepsilon$ . В случае сеточных задач эти постоянные не зависят и от шаблонов разностных схем.

“каноническую” разностную схему на равномерной сетке, а также при подходящих условиях повысить порядок скорости сходимости сеточных решений.

Заметим, что подход, использующий метод асимптотических конструкций на основе *декомпозиции области* и *асимптотики решения по параметру  $\varepsilon$* , применялся в [24, 26, 27] и [6, гл. 10] при построении  $\varepsilon$ -равномерно сходящихся схем повышенного порядка точности. В этом методе применялись кусочно-равномерные сетки.

Наша цель — для краевой задачи (2.2), (2.1) на основе техники метода декомпозиции решения задачи на регулярную и сингулярную компоненты построить  $\varepsilon$ -равномерно сходящуюся (в равномерной норме) разностную схему, использующую сеточные аппроксимации компонент на соответствующих равномерных сетках. На основе этой схемы метода декомпозиции решения задачи и техники экстраполяции Ричардсона построить схему повышенного порядка точности — схему, сходящуюся  $\varepsilon$ -равномерно в равномерной норме с четвертым порядком точности (с точностью до логарифмического множителя).

### 3. Разностная схема на равномерной и кусочно-равномерной сетках для задачи (2.2), (2.1)

Рассмотрим разностную схему, строящуюся на основе классической аппроксимации задачи (2.2), (2.1) на равномерной и кусочно-равномерной сетках.

**3.1.** Приведем разностную схему на равномерной сетке. На множестве  $\bar{D}$  введем сетку

$$\bar{D}_h = \bar{\omega}, \quad (3.1)$$

где  $\bar{\omega}$  — произвольная, вообще говоря, неравномерная сетка на  $\bar{D}$ . Пусть  $h^i = x^{i+1} - x^i$ ,  $x^i, x^{i+1} \in \bar{\omega}$ ,  $h = \max_i h^i$ . Предполагаем выполненным условие  $h \leq MN^{-1}$ , где  $N + 1$  — число узлов сетки  $\bar{\omega}$ .

Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем разностной схемой [22]

$$\Lambda z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \quad z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \quad (3.2)$$

Здесь  $D_h = D \cap \bar{D}_h$ ,  $\Gamma_h = \Gamma \cap \bar{D}_h$ ,

$$\Lambda \equiv \varepsilon^2 a(x) \delta_{\bar{x}\bar{x}} - c(x), \quad x \in D_h,$$

$\delta_{\bar{x}\bar{x}} z(x)$  — центральная разностная производная второго порядка на неравномерной сетке,

$$\delta_{\bar{x}\bar{x}} z(x) = 2(h^i + h^{i-1})^{-1}[\delta_x z(x) - \delta_{\bar{x}} z(x)], \quad x = x^i \in D_h;$$

$\delta_x z(x)$  и  $\delta_{\bar{x}} z(x)$  — разностные (вперед и назад) производные первого порядка.

Схема (3.2), (3.1) монотонна [22]  $\varepsilon$ -равномерно. Справедлив следующий вариант теоремы сравнения.

**Теорема 1.** Пусть для функций  $z^1(x), z^2(x)$ ,  $x \in \bar{D}_h$  выполняется условие

$$\Lambda z^1(x) < \Lambda z^2(x), \quad x \in D_h, \quad z^1(x) > z^2(x), \quad x \in \Gamma_h.$$

Тогда  $z^1(x) > z^2(x)$ ,  $x \in \bar{D}_h$ .

В случае равномерных сеток

$$\bar{D}_h = \bar{D}_h^u \equiv \bar{\omega} \quad (3.3)$$

с использованием принципа максимума получаем оценку

$$|u(x) - z(x)| \leq M (\varepsilon + N^{-1})^{-2} N^{-2}, \quad x \in \bar{D}_h. \quad (3.4)$$

Схема (3.2), (3.3) сходится при условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon), \quad N = N_{(3.1)}. \quad (3.5)$$

**3.2.** Построим разностную схему на кусочно-равномерной сетке, сходящуюся  $\varepsilon$ -равномерно (см., например, [2, гл. 1, § 1; 3, гл. 6]). На множестве  $\bar{D}$  введем сетку

$$\bar{D}_h = \bar{D}_h^* \equiv \bar{\omega}^*, \quad (3.6a)$$

где  $\bar{\omega}^*$  — кусочно-равномерная сетка, строящаяся следующим образом. Отрезок  $[0, d]$  разбивается на три отрезка  $[0, \sigma]$ ,  $[\sigma, d - \sigma]$ ,  $[d - \sigma, d]$ , шаги сетки на этих отрезках постоянны и на отрезках  $[0, \sigma]$ ,  $[d - \sigma, d]$  и  $[\sigma, d - \sigma]$  равны  $h^{(1)} = 4\sigma N^{-1}$  и  $h^{(2)} = 2(d - 2\sigma)N^{-1}$  соответственно. Параметр  $\sigma$  определяется соотношением

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, N, l) = \min [4^{-1} d, l m^{-1} \varepsilon \ln N], \quad (3.6b)$$

где  $m$  — произвольное число из интервала  $(0, m_0)$ ,  $m_0 = m_{(7.9)}$ ; здесь  $l = 2$ . Сетка  $\bar{D}_h^*$  построена.

Для решений разностной схемы (3.2), (3.6) получается оценка

$$|u(x) - z(x)| \leq M N^{-2} \min^2 [\varepsilon^{-1}, \ln N], \quad x \in \bar{D}_h, \quad (3.7)$$

а также  $\varepsilon$ -равномерная оценка

$$|u(x) - z(x)| \leq M N^{-2} \ln^2 N, \quad x \in \bar{D}_h. \quad (3.8)$$

Оценки (3.7) и (3.8) неулучшаемы по вхождению величин  $N, \varepsilon$  и  $N$  соответственно; схема (3.2), (3.6) сходится  $\varepsilon$ -равномерно со вторым порядком, с точностью до логарифмического сомножителя; при фиксированных значениях  $\varepsilon$  схема сходится со вторым порядком.

**Теорема 2.** Пусть для решения  $u(x)$  задачи (2.2), (2.1) выполняются оценки теоремы 10, где  $K = 4$  и  $n = 0$ . Тогда разностная схема (3.2), (3.3) сходится при условии (3.5); схема (3.2), (3.6) сходится  $\varepsilon$ -равномерно. Для решений разностных схем (3.2), (3.3) и (3.2), (3.6) справедливы оценки (3.4) и (3.7), (3.8) соответственно.

#### 4. Экстраполяция Ричардсона на основе классической схемы (3.2), (3.3)

Опишем метод экстраполяции Ричардсона, используемый для повышения точности решений разностной схемы (3.2) на равномерной сетке (3.3).

**4.1.** На множестве  $\bar{D}$  строим равномерные сетки

$$\bar{D}_h^i = \bar{\omega}^i, \quad i = 1, 2. \quad (4.1a)$$

Здесь  $\bar{D}_h^2$  есть  $\bar{D}_{h(3.3)}$ ,  $\bar{D}_h^1$  — “прореженная” сетка. Шаг  $h^1$  сетки  $\bar{\omega}^1$  (на отрезке  $\bar{D}$ ) в  $k$  раз больше, чем шаг  $h^2$  сетки  $\bar{\omega}^2$ ;  $k^{-1}N + 1$  — число узлов сетки  $\bar{\omega}^1$ ; имеем  $h^2 = dN^{-1}$ ,  $h^1 = kdN^{-1}$ . Пусть

$$\bar{D}_h^0 = \bar{D}_h^1 \cap \bar{D}_h^2. \quad (4.1b)$$

При  $k$  целом ( $k \geq 2$ )  $\bar{D}_h^0 = \bar{D}_h^1$ , а при  $k$  нецелом  $\bar{D}_h^0 \neq \bar{D}_h^1$ .

Пусть  $z^i(x)$ ,  $x \in \bar{D}_h^i$ ,  $i = 1, 2$  — решения разностных схем<sup>3</sup>

$$\Lambda_{(3.2)} z^i(x) = f(x), \quad x \in D_h^i, \quad (4.2a)$$

$$z^i(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h^i, \quad i = 1, 2.$$

<sup>3</sup> Запись  $L_{(j.k)} (\bar{G}_{(j.k)}, M_{(j.k)})$  означает, что этот оператор (область, постоянная) введен в формуле  $(j.k)$ .

Полагаем

$$z^0(x) = \gamma_1 z^1(x) + \gamma_2 z^2(x), \quad x \in \overline{D}_h^0, \quad (4.26)$$

где  $\gamma_i = \gamma_i(k)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\gamma_1 = -(k^2 - 1)^{-1}$ ,  $\gamma_2 = 1 - \gamma_1 = k^2 (k^2 - 1)^{-1}$ .

Разностная схема (4.2), (4.1) построена на основе схемы (3.2), (3.3) с использованием метода экстраполяции Ричардсона на двух вложенных сетках. Назовем эту схему схемой Ричардсона (4.2), (4.1). Функцию  $z_{(4.2)}^0(x)$ ,  $x \in \overline{D}_h^0$  назовем решением схемы Ричардсона (4.2), (4.1); функции  $z_{(4.2)}^1(x)$ ,  $x \in \overline{D}_h^1$  и  $z_{(4.2)}^2(x)$ ,  $x \in \overline{D}_h^2$  назовем компонентами, порождающими решение схемы (4.2), (4.1).

**4.2.** Для обоснования сходимости схемы (4.2), (4.1) (здесь применяется техника, подобная использованной в [23, 25, 28, 29]) удобно рассмотреть разложения функций  $z^i(x)$ ,  $x \in \overline{D}_h^i$ ,  $i = 1, 2$  по величине  $N^{-1}$

$$z^i(x) = u(x) + k^{2(2-i)} N^{-2} u_1(x) + v^i(x), \quad x \in \overline{D}_h^i, \quad i = 1, 2, \quad (4.3)$$

где  $v^i(x)$  — остаточный член, а функция  $u_1(x)$  — решение задачи

$$L_{(2.2)} u_1(x) = -12^{-1} d^2 \varepsilon^2 a(x) \frac{d^4}{dx^4} u(x), \quad x \in D, \quad u_1(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (4.4)$$

Здесь  $u(x) = u_{(2.2, 2.1)}(x)$ ,  $x \in \overline{D}$ .

Компонента  $u_1(x)$  является достаточно гладкой на  $\overline{D}$ . Для функции  $u_{1(4.4)}(x)$ ,  $x \in \overline{D}$  справедлива оценка

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} u_1(x) \right| \leq M \varepsilon^{-2-k}, \quad x \in \overline{D}. \quad (4.5)$$

Применив оператор  $\Lambda_{(3.2)}$  к разложению (4.3), принимая во внимание оценки (3.7), (3.8) для решения  $u(x)$  и (4.5) для компоненты  $u_1(x)$ , находим оценку функции  $v^i(x)$

$$|v^i(x)| \leq M \varepsilon^{-4} N^{-4}, \quad x \in \overline{D}_h^i, \quad i = 1, 2. \quad (4.6)$$

С учетом разложения (4.3) и оценки (4.6) находим оценку решения схемы Ричардсона

$$|u(x) - z^0(x)| \leq M \varepsilon^{-4} N^{-4}, \quad x \in \overline{D}_h^0. \quad (4.7)$$

Схема Ричардсона (4.2), (4.1) сходится к решению  $u(x)$  краевой задачи при условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon) \quad N = N_{(4.1)}. \quad (4.8)$$

**Теорема 3.** Пусть для решения краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется оценка (7.2), где  $K = 6$ . Тогда решение  $z^0(x)$  схемы Ричардсона (4.2), (4.1) сходится к решению  $u(x)$  краевой задачи при условии (4.8); для сеточного решения выполняется оценка (4.7).

**З а м е ч а н и е 1.** Подобно технике построения разностных схем повышенного порядка точности для регулярных краевых задач, рассмотренной в [22], можно построить разностную схему повышенного порядка точности для сингулярно возмущенной задачи (2.2), (2.1). Такая разностная схема, как и схема Ричардсона (4.2), (4.1), сходится лишь при условии (4.8) со скоростью сходимости  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-4} N^{-4})$ .

## 5. Схема метода асимптотических конструкций для задачи (2.2), (2.1)

С использованием декомпозиции решения дифференциальной задачи (2.2), (2.1) построим  $\varepsilon$ -равномерно сходящуюся разностную схему метода декомпозиции сеточного решения, в котором сеточные регулярная и сингулярная компоненты решения вычисляются на равномерных сетках.

**5.1.** Рассмотрим декомпозицию решения дифференциальной задачи (2.2), (2.1), несколько отличную от приведенной в разд. 7.

Решение краевой задачи представим в виде суммы регулярной и сингулярной компонент решения

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \bar{D}. \quad (5.1a)$$

Функция  $U(x)$  представляется в виде суммы функций

$$U(x) = U_0(x) + v_U(x), \quad x \in \bar{D}. \quad (5.1b)$$

Здесь  $U_0(x)$  — главный член “разложения” регулярной компоненты,  $v_U^0(x)$  — остаточный член.

Функции  $U_0(x)$ ,  $v_U^0(x)$  в (5.1б) — решения задач

$$L_{(5.2)}U_0(x) = f(x), \quad x \in \bar{D}; \quad (5.2a)$$

$$L_{(2.2)}v_U(x) = -\varepsilon^2 a(x) \frac{d^2}{dx^2} U_0(x), \quad x \in D, \quad v_U(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (5.2b)$$

Здесь  $L_{(5.2)}$  есть оператор  $L_{(2.2)}$  при  $\varepsilon = 0$ :

$$L_{(5.2)} \equiv -c(x), \quad x \in \bar{D}.$$

Функция  $V(x)$ ,  $x \in \bar{D}$  — решение задачи

$$L_{(2.2)}V(x) = 0, \quad x \in D, \quad V(x) = \varphi_V(x), \quad x \in \Gamma, \quad (5.3a)$$

где

$$\varphi_V(x) = \varphi(x) - U(x), \quad x \in \Gamma, \quad U(x) = U_{(5.1)}(x), \quad x \in \bar{D}.$$

Функцию  $V(x)$  представим в виде суммы функций

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (5.1c)$$

где функции  $V_1(x)$  и  $V_2(x)$  — решения задач

$$\left. \begin{aligned} L_{(2.2)}V_j(x) &= 0, & x \in D, \\ V_j(x) &= \varphi_V(x), & x \in \Gamma_j, \\ V_j(x) &= 0, & x \in \Gamma \setminus \Gamma_j, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (5.3b)$$

Таким образом, для решения задачи (2.2), (2.1) получено представление (5.1), компоненты которого являются решениями задач (5.2а), (5.2б), (5.3а) и (5.3б).

Пусть для данных краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется условие теоремы 10 при  $l_0 = 4$ ,  $n = 0$ . Тогда для компонент из представлений (5.1а,с) получаются оценки

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{d^k}{dx^k} U(x) \right| &\leq M [1 + \varepsilon^{2-k}] \\ \left| \frac{d^k}{dx^k} V_1(x) \right| &\leq M \varepsilon^{-k} \exp(-m \varepsilon^{-1} x) \\ \left| \frac{d^k}{dx^k} V_2(x) \right| &\leq M \varepsilon^{-k} \exp(-m \varepsilon^{-1} (d - x)) \end{aligned} \right\}, \quad x \in \bar{D}, \quad k \leq K, \quad (5.4)$$

где  $m$  — произвольное число из интервала  $(0, m_0)$ ,  $m_0 = \min_{\overline{D}}^{1/2} [a^{-1}(x)c(x)]$ ;  $K = 4$ .

Для компонент из (5.16) имеем оценки

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{d^k}{dx^k} U_0(x) \right| &\leq M, & k &\leq K + 2 \\ \left| \frac{d^k}{dx^k} v_U(x) \right| &\leq M \varepsilon^{2-k}, & k &\leq K \end{aligned} \right\}, \quad x \in \overline{D}. \quad (5.5)$$

**Теорема 4.** Пусть для данной краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется условие теоремы 10 при  $l_0 = 4$ ,  $n = 0$ . Тогда для компонент из представлений (5.1а, с) и (5.16) справедливы оценки (5.4) и (5.5) соответственно, где  $K = 4$ .

**5.2.** При построении схемы улучшенного порядка точности (в разд. 6) нам потребуются оценки производных решения задачи и его компонент более высокого порядка точности по сравнению с оценками теоремы 4. Приведем такие оценки.

Решение краевой задачи представим в виде суммы регулярной и сингулярной компонент решения (5.1а); сингулярную компоненту — в виде суммы (5.1с), а регулярную — в виде суммы с большим числом членов, чем в (5.16):

$$U(x) = U_0(x) + \varepsilon^2 U_1(x) + v_U(x), \quad x \in \overline{D}. \quad (5.6)$$

Функции  $U_0(x)$ ,  $U_1(x)$  и  $v_U^0(x)$  в (5.6) — решения следующих задач:

$$L_{(5.2)} U_0(x) = f(x), \quad x \in \overline{D}; \quad (5.7а)$$

$$L_{(5.2)} U_1(x) = -a(x) \frac{d^2}{dx^2} U_0(x), \quad x \in \overline{D}; \quad (5.7б)$$

$$L_{(2.2)} v_U(x) = -\varepsilon^4 a(x) \frac{d^2}{dx^2} U_1(x), \quad x \in D, \quad v_U(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (5.7в)$$

Функции  $V(x)$ ,  $V_i(x)$ ,  $x \in \overline{D}$  — решения задач (5.3а) и (5.3б), где

$$\varphi_V(x) = \varphi(x) - U(x), \quad x \in \Gamma, \quad U(x) = U_{(5.6)}(x), \quad x \in \overline{D}.$$

Будем предполагать, что для данной краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется условие теоремы 10 при  $l_0 = 6$ ,  $n = 1$ . Тогда для компонент из представления (5.1а,с) получаются оценки, подобные оценкам (5.4), (5.5)

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{d^k}{dx^k} U(x) \right| &\leq M [1 + \varepsilon^{4-k}] \\ \left| \frac{d^k}{dx^k} V_1(x) \right| &\leq M \varepsilon^{-k} \exp(-m \varepsilon^{-1} x) \\ \left| \frac{d^k}{dx^k} V_2(x) \right| &\leq M \varepsilon^{-k} \exp(-m \varepsilon^{-1} (d - x)) \end{aligned} \right\}, \quad x \in \overline{D}, \quad k \leq K, \quad (5.8)$$

а для компонент из (5.6) — оценки

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{d^k}{dx^k} U_0(x) \right| &\leq M, & k &\leq K + 2 \\ \left| \frac{d^k}{dx^k} U_1(x) \right| &\leq M, & k &\leq K \\ \left| \frac{d^k}{dx^k} v_U(x) \right| &\leq M \varepsilon^{4-k}, & k &\leq K, \end{aligned} \right\}, \quad x \in \overline{D}, \quad (5.9)$$

где  $m = m_{(5.4)}$ ,  $K = 6$ .

**Теорема 5.** Пусть для данных краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется условие теоремы 10 при  $l_0 = 6$ ,  $n = 1$ . Тогда для компонент из представлений (5.1а,с) и (5.6) справедливы оценки (5.8) и (5.9) соответственно, где  $K = 6$ .

**5.3.** Построим разностную схему для краевой задачи (2.2), (2.1), аппроксимируя задачи (5.2), (5.3б).

При не слишком малых значениях параметра  $\varepsilon$ , а именно, при условии

$$\varepsilon \geq \varepsilon_0(N), \quad \varepsilon_0(N) = m l^{-1} d \ln^{-1} N, \quad (5.10)$$

где  $m = m_{(5.4)}$ ,  $l = 2$ , задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем стандартной разностной схемой (3.2) на равномерной сетке (3.3);  $N = N_{(3.3)}$ .

При достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ , а именно, при условии

$$\varepsilon < \varepsilon_0(N) \quad (5.11)$$

задачи для компонент из представления (5.1б) и функции  $U(x)$  аппроксимируем схемами на равномерной сетке (3.3), а задачи для сингулярных компонент  $V_j(x)$  из (5.3б) — схемами на равномерных сетках, строящихся на подобластях  $\overline{D}_j^\sigma$  из  $\overline{D}$ , примыкающих к границам  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2$ , где

$$\overline{D}_j^\sigma = D_j^\sigma \cup \Gamma_j^\sigma, \quad j = 1, 2, \quad (5.12a)$$

где  $D_1^\sigma = (0, \sigma)$ ,  $D_2^\sigma = (d - \sigma, d)$ ,

$$\sigma = \sigma(\varepsilon, N, l) = \min [d, m^{-1} l \varepsilon \ln N]; \quad (5.12б)$$

здесь  $m = m_{(5.10)}$ ,  $l = l_{(5.10)}$ ,  $N = N_{(5.10)}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_{(5.11)}$ .

**5.3.1.** Рассмотрим построение разностной схемы при условии (5.11). Дифференциальные задачи (5.2), (2.1) аппроксимируем следующими сеточными задачами на сетке (3.3):

$$\Lambda_{(5.13)} z_{U_0}(x) = f(x), \quad x \in \overline{D}_h; \quad (5.13)$$

$$\Lambda_{(3.2)} z_{v_U}(x) = -\varepsilon^2 a(x) \delta_{x\bar{x}} z_{U_0}(x), \quad x \in D_h, \quad z_{v_U}(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h. \quad (5.14)$$

Здесь  $D_h = D \cap \overline{D}_h$ ,  $\Gamma_h = \Gamma \cap \overline{D}_h$ ,

$$\Lambda_{(5.13)} \equiv -c(x), \quad x \in \overline{D}_h.$$

Полагаем

$$z_U(x) = z_{U_0}(x) + z_{v_U}(x), \quad x \in \overline{D}_h. \quad (5.15)$$

Через  $\bar{z}_U(x)$ ,  $x \in \overline{D}$ , обозначим интерполянт — линейный интерполянт, строящийся по значениям  $z_U(x)$  в узлах сетки  $\overline{D}_h$  на элементарных разбиениях множества  $\overline{D}$ , порождаемых сеткой  $\overline{D}_h$ .

Функцию  $z_U(x)$ ,  $x \in \overline{D}_h$ , а также ее интерполянт  $\bar{z}_U(x)$ ,  $x \in \overline{D}$ , назовем решениями (сеточным и континуальным) разностной схемы  $\{(5.13), (5.14), (3.3); (5.11)\}$ , аппроксимирующей дифференциальные задачи (5.2), (2.1) при условии (5.11).

Построим аппроксимацию задачи (5.3), (2.1). На множестве  $\overline{D}_{j(5.12)}^\sigma$  введем равномерную сетку

$$\overline{D}_{jh}^\sigma = \overline{D}_{jh}^{\sigma u} \equiv \overline{w}_j^\sigma, \quad j = 1, 2, \quad (5.16)$$

где  $\bar{\omega}_j^\sigma$  — сетка на  $\bar{D}_j^\sigma$  (5.12) с шагом  $h^\sigma = \sigma N^{-1}$ ,  $N + 1$  — число узлов сетки  $\bar{\omega}_j^\sigma$ ,  $N = N_{(5.10)}$ ;  $\bar{D}_{jh}^\sigma = D_{jh}^\sigma \cup \Gamma_{jh}^\sigma$ . На сетке  $\bar{D}_{jh}^\sigma$  решаем сеточную задачу

$$\Lambda_{(3.2)} z_{V_j}(x) = 0, \quad x \in D_{jh}^\sigma, \quad (5.17)$$

$$z_{V_j}(x) = \begin{cases} \varphi(x) - z_U(x), & x \in \Gamma_{jh}^\sigma \cap \Gamma \\ 0, & x \in \Gamma_{jh}^\sigma \setminus \Gamma \end{cases}, \quad x \in \Gamma_{jh}^\sigma, \quad j = 1, 2.$$

По функции  $z_{V_j}(x)$ ,  $x \in \bar{D}_{jh}^\sigma$  построим интерполянт  $\bar{z}_{V_j}(x)$ ,  $x \in \bar{D}_j^\sigma$ . Функции  $z_{V_j}(x)$  и  $\bar{z}_{V_j}(x)$  вне множества  $\bar{D}_j^\sigma$  считаем равными нулю. Полагаем

$$\bar{z}_V(x) = \bar{z}_{V_1}(x) + \bar{z}_{V_2}(x), \quad x \in \bar{D}.$$

Функцию  $\bar{z}_V(x)$ ,  $x \in \bar{D}^\sigma$  назовем решением разностной схемы  $\{(5.17), (5.16); (5.11)\}$ , аппроксимирующей дифференциальную задачу (5.3а), (2.1) при условии (5.11).

Функцию

$$\bar{z}_u(x) = \bar{z}_U(x) + \bar{z}_V(x), \quad x \in \bar{D}, \quad \text{при условии (5.11)} \quad (5.18a)$$

назовем решением разностной схемы  $\{(5.13), (5.14), (3.3); (5.17), (5.16)\}; (5.11)\}$ , аппроксимирующей дифференциальную задачу (2.2), (2.1) при условии (5.11).

**5.3.2.** В случае условия (5.10) решаем разностную схему (3.2), (3.3); интерполянт

$$\bar{z}_u(x), \quad x \in \bar{D}, \quad \text{при условии (5.10)}, \quad (5.18б)$$

строющийся по решению схемы (3.2), (3.3), назовем решением разностной схемы  $\{(3.2), (3.3); (5.10)\}$ , аппроксимирующей дифференциальную задачу (2.2), (2.1) при условии (5.10).

Таким образом построенная функция  $\bar{z}_{u(5.18a,b)}(x)$ ,  $x \in \bar{D}$ , аппроксимирует решение задачи (2.2), (2.1). Эту функцию, как и сеточные функции  $z_{U_0}(x)$ ,  $z_{v_U}(x)$ ,  $x \in \bar{D}_h$  и  $z_{V_i}(x)$ ,  $x \in \bar{D}_{ih}^\sigma$ ,  $i = 1, 2$ , назовем (соответственно континуальным и сеточным) решениями разностной схемы  $\{(3.2), (3.3)\}; \{(5.13), (5.14), (3.3); (5.17), (5.16)\}$  или короче — *схемами метода декомпозиции решения*.

Схема метода декомпозиции решения монотонна  $\varepsilon$ -равномерно. Справедлив следующий вариант теоремы сравнения.

**Теорема 6.** Пусть выполняется условие (5.11), и пусть для функций  $z_{U_0}^k(x)$ ,  $z_{v_U}^k(x)$ ,  $x \in \bar{D}_h$  и  $z_{V_j}^k(x)$ ,  $x \in \bar{D}_{jh}^\sigma$ ,  $j = 1, 2$ , при  $k = 1, 2$  выполняются условия

$$\begin{aligned} \Lambda_{(5.13)} z_{U_0}^1(x) &< \Lambda_{(5.13)} z_{U_0}^2(x), & x &\in \bar{D}_h; \\ \Lambda_{(3.2)} z_{v_U}^1(x) &< \Lambda_{(3.2)} z_{v_U}^2(x), & x &\in D_h, & z_{v_U}^1(x) &> z_{v_U}^2(x), & x &\in \Gamma_h; \\ \Lambda_{(3.2)} z_{V_j}^1(x) &< \Lambda_{(3.2)} z_{V_j}^2(x), & x &\in D_{jh}^\sigma, & z_{V_j}^1(x) &> z_{V_j}^2(x), & x &\in \Gamma_{jh}^\sigma, & j &= 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда

$$z_{U_0}^1(x) > z_{U_0}^2(x), \quad z_{v_U}^1(x) > z_{v_U}^2(x), \quad x \in \bar{D}_h; \quad z_{V_j}^1(x) > z_{V_j}^2(x), \quad x \in \bar{D}_{jh}^\sigma, \quad j = 1, 2.$$

**5.4.** Оценим  $u(x) - \bar{z}_u(x)$ ,  $x \in \bar{D}$ , предполагая выполненным условие теоремы 4, обеспечивающее включения  $U(x), V(x) \in C^4(\bar{D})$ , и  $U_0(x), v_U \in C^4(\bar{D})$ , где  $U_0(x), v_U(x)$  — компоненты из разложения (5.16), а также оценки (5.4), (5.5).

С учетом априорных оценок компонент  $U_0(x)$ ,  $v_U(x)$  и  $V_i(x)$  находим оценки для  $U_0(x) - \bar{z}_{U_0}(x)$ ,  $v_U(x) - \bar{z}_{v_U}(x)$  и  $V_j(x) - \bar{z}_{V_j}(x)$ . Из этих оценок получаем оценку  $u(x) - \bar{z}_{u(5.18a)}(x)$  при условии (5.11).

Оценивая  $u(x) - \bar{z}_u(x)$  при условии (5.10), используем оценку (3.4), где  $\varepsilon > \varepsilon_0(N)$ .

Для решения разностной схемы метода декомпозиции решения получается оценка

$$|u(x) - \bar{z}_u(x)| \leq M N^{-2} \min^2 [\varepsilon^{-1}, \ln N], \quad x \in \bar{D}, \quad (5.19)$$

а также  $\varepsilon$ -равномерная оценка

$$|u(x) - \bar{z}_u(x)| \leq M N^{-2} \ln^2 N, \quad x \in \bar{D}. \quad (5.20)$$

**Теорема 7.** Пусть для компонент решения краевой задачи (2.2), (2.1) из представления (5.1) выполняются оценки теоремы 4. Тогда решение схемы метода декомпозиции решения сходится  $\varepsilon$ -равномерно со скоростью  $\mathcal{O}(N^{-2} \ln^2 N)$ . Для решения разностной схемы справедливы оценки (5.19), (5.20).

**З а м е ч а н и е 2.** Оценки (5.19), (5.20) в случае схемы метода декомпозиции решения такие же, как оценки (3.7), (3.8) для схемы (3.2) на кусочно-равномерной сетке (3.6).

## 6. Экстраполяция Ричардсона для схемы метода асимптотических конструкций

Построим схему метода экстраполяции Ричардсона, используемого для повышения точности решений схемы метода асимптотических конструкций.

При построении схемы повышенной точности задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем стандартной разностной схемой (3.2), (3.3) в случае условия

$$\varepsilon \geq \varepsilon_0(N), \quad \varepsilon_0(N) = m l^{-1} d \ln^{-1} N, \quad (6.1)$$

где  $m = m_{(5.4)}$ ,  $l = 4$ , а в случае условия

$$\varepsilon < \varepsilon_0(N), \quad \varepsilon_0(N) = \varepsilon_{0(6.1)}(N) \quad (6.2)$$

применяем сеточные конструкции, подобные конструкциям  $\{(5.13), (5.14), (3.3); (5.17), (5.16)\}$ . Здесь вместо представления (5.16) для регулярной компоненты  $U(x)$  рассматриваем представление (5.6). Далее, для повышения точности схемы метода асимптотических конструкций применим технику Ричардсона.

**6.1.** Пусть выполняется условие (6.2). Используя экстраполяцию Ричардсона на вложенных сетках, построим сеточную аппроксимацию компоненты  $U(x)$ .

На множестве  $\bar{D}$  строим вложенные сетки

$$\bar{D}_h^i = \bar{D}_{h(4.1)}^i = \bar{\omega}^i, \quad i = 1, 2; \quad \bar{D}_h^0 = \bar{D}_{h(4.1)}^0. \quad (6.3)$$

При аппроксимации задач (5.7а) и (5.7б) нам потребуется расширение задачи (5.7а) на множество  $\bar{G}^e$

$$\bar{G}^e = \bar{D}^e \times [0, T], \quad \bar{D}^e = [-h^1, d + h^1], \quad (6.4)$$

где  $h^1$  — шаг “прореженной” сетки  $\bar{\omega}_{(6.3)}^1$ ;  $D^e$  есть  $h^1$ -окрестность множества  $\bar{D}$ . Данные задачи (2.2), (2.1) продолжим на множество  $\bar{D}^e$  с сохранением их гладкости и условий (2.3); для продолженных функций  $a(x), \dots, f(x)$ ,  $x \in \bar{D}$ , используем обозначения  $a^e(x), \dots, f^e(x)$ ,  $x \in \bar{D}^e$ .

На множестве  $\bar{D}^e$  строим вложенные сетки

$$\bar{D}_h^{ei} = \bar{D}_{h(6.5)}^{ei} = \bar{\omega}^{ei}, \quad i = 1, 2; \quad \bar{D}_h^{e0} = \bar{D}_h^{e1} \cap \bar{D}_h^{e2}, \quad (6.5)$$

где  $\bar{\omega}^{e i}$  — равномерные сетки, являющиеся расширениями сеток  $\bar{\omega}_{(6.3)}^i$ ;  $\bar{\omega}^{e i} \cap \bar{D} = \bar{\omega}_{(6.3)}^i$ ,  $i = 1, 2$ .

Задачи (5.7а), (2.1) и (5.7б), (5.7в), (2.1) аппроксимируем разностными схемами на сетках  $\bar{D}_h^{e i}$  и  $\bar{D}_h^i$  соответственно

$$\Lambda_{(6.6)}^e z_{U_0}^{e i}(x) = f^e(x), \quad x \in \bar{D}_h^{e i}; \quad (6.6)$$

$$\Lambda_{(5.13)} z_{U_1}^i(x) = -a(x) \delta_{x\bar{x}} z_{U_0}^{e i}(x), \quad x \in \bar{D}_h^i; \quad (6.7)$$

$$\Lambda_{(3.2)} z_{v_U}^i(x) = -\varepsilon^4 a(x) \delta_{x\bar{x}} z_{U_1}^i(x), \quad x \in D_h^i, \quad z_{v_U}^i(x) = 0, \quad x \in \Gamma_h^i, \quad i = 1, 2. \quad (6.8)$$

В случае задачи на сетке  $\bar{D}_h^e$  оператор  $\Lambda_{(6.6)}^e$  определяется соотношением

$$\Lambda_{(6.6)}^e \equiv -c^e(x), \quad x \in \bar{D}_h^e.$$

Полагаем

$$z_U^i(x) = z_{U_0}^{e i}(x) + \varepsilon^2 z_{U_1}^i(x) + z_{v_U}^i(x), \quad x \in \bar{D}_h^i, \quad i = 1, 2. \quad (6.9)$$

На множестве  $\bar{D}_h^0$  определим функцию  $z_U^0(x)$

$$z_U^0(x) = \gamma_1 z_U^1(x) + \gamma_2 z_U^2(x), \quad x \in \bar{D}_h^0, \quad (6.10)$$

где  $\gamma_i = \gamma_i(4.2)(k)$ .

Функция  $z_U^0(x)$ ,  $x \in \bar{D}_h^0$ , есть сеточная аппроксимация функции  $U(x)$ , построенная с использованием техники Ричардсона.

По функции  $z_U^0(x)$ ,  $x \in \bar{D}_h^0$ , строим ее интерполянт

$$\bar{z}_U^0(x), \quad x \in \bar{D}. \quad (6.11)$$

Функция  $\bar{z}_U^0(x)$ ,  $x \in \bar{D}$  есть континуальная аппроксимация функции  $U(x)$ , построенная с использованием техники Ричардсона.

**6.2.** При условии (6.2), используя технику Ричардсона, построим сеточную аппроксимацию сингулярной компоненты  $V(x)$ .

На  $\bar{D}$  введем множества  $\bar{D}_j^\sigma$

$$\bar{D}_j^\sigma = \bar{D}_j^{\sigma(5.12)} = D_j^\sigma \cup \Gamma_j^\sigma, \quad \sigma = \sigma_{(5.12)}(\varepsilon, N, l) \quad \text{для } l = 4, \quad j = 1, 2, \quad (6.12)$$

где  $N = N_{(5.10)}$ . На множествах  $\bar{D}_j^\sigma$  строим вложенные сетки (подобно сеткам  $\bar{D}_h^{(6.3)}$ ,  $\bar{D}_h^{(6.3)}$ )

$$\bar{D}_{jh}^{\sigma i} = \bar{D}_{jh}^{\sigma i(6.13)} = \bar{\omega}_j^{\sigma i}, \quad i = 1, 2; \quad \bar{D}_{jh}^{\sigma 0} = \bar{D}_{jh}^{\sigma 0(6.13)} = \bar{D}_{jh}^{\sigma 1} \cap \bar{D}_{jh}^{\sigma 2}, \quad j = 1, 2, \quad (6.13)$$

где  $N_{(6.12)} + 1$  — число узлов “основных” сеток  $\bar{D}_{jh}^{\sigma 2}$ ,  $j = 1, 2$ ;  $\bar{D}_{jh}^{\sigma 1}$ ,  $j = 1, 2$ , — “прореженные” сетки. Задачу (5.3б), (2.1) аппроксимируем разностной схемой

$$\Lambda_{(3.2)} z_{V_j}^i(x) = 0, \quad x \in D_{jh}^{\sigma i}, \quad (6.14)$$

$$z_{V_j}^i(x) = \begin{cases} \varphi(x) - z_U^i(x), & x \in \Gamma_{jh}^{\sigma i} \cap \Gamma \\ 0, & x \in \Gamma_{jh}^{\sigma i} \setminus \Gamma \end{cases}, \quad x \in \Gamma_{jh}^{\sigma i}, \quad i, j = 1, 2.$$

На множестве  $\bar{D}_{jh}^{\sigma 0}$  определим функцию  $z_{V_j}^0(x)$

$$z_{V_j}^0(x) = \gamma_1 z_{V_j}^1(x) + \gamma_2 z_{V_j}^2(x), \quad x \in \bar{D}_{jh}^{\sigma 0}, \quad j = 1, 2, \quad (6.15)$$

где  $\gamma_i = \gamma_{i(4.2)}$ ,  $i = 1, 2$ . Функция  $z_{V_j}^0(x)$ ,  $x \in \overline{D}_{jh}^{\sigma_0}$ , есть сеточная аппроксимация функции  $V_j(x)$ , построенная с использованием техники Ричардсона. Построим ее интерполянт

$$\overline{z}_{V_j}^0(x), \quad x \in \overline{D}_j^{\sigma_0}, \quad j = 1, 2; \quad (6.16)$$

вне множества  $\overline{D}_j^{\sigma_0}$  функции  $z_{V_j}^0(x)$  и  $\overline{z}_{V_j}^0(x)$  полагаем равными нулю. Определим функцию  $\overline{z}_V^0(x)$  на  $\overline{D}$  соотношением

$$\overline{z}_V^0(x) = \overline{z}_{V_1}^0(x) + \overline{z}_{V_2}^0(x), \quad x \in \overline{D}.$$

Функцию

$$\overline{z}_u(x) = \overline{z}_U^0(x) + \overline{z}_V^0(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \text{при условии} \quad (6.2) \quad (6.17a)$$

назовем решением разностной схемы  $\{(6.6)–(6.8), (6.3), (6.5)\}, \{(6.14), (6.13)\}; (6.2)\}$  — схемы Ричардсона, аппроксимирующей дифференциальную задачу (2.2), (2.1) при условии (6.2).

**6.3.** В случае условия (6.1) решаем разностную схему Ричардсона (4.2), (4.1); интерполянт

$$\overline{z}_u(x), \quad x \in \overline{D}, \quad \text{при условии} \quad (6.1), \quad (6.17b)$$

строящийся по решению схемы (4.2), (4.1), назовем решением разностной схемы  $\{(4.2), (4.1); (6.1)\}$ , аппроксимирующей дифференциальную задачу (2.2), (2.1) при условии (6.1).

Таким образом построенная функция  $\overline{z}_{u(6.17a,b)}(x)$ ,  $x \in \overline{D}$ , аппроксимирует решение задачи (2.2), (2.1). Эту функцию, как и сеточные функции  $z_{U_0}^e(x)$ ,  $x \in \overline{D}_h^e$ ,  $z_{U_1}^0(x)$ ,  $z_{v_U}^0(x)$ ,  $x \in \overline{D}_h^0$ , и  $z_{V_j}^0(x)$ ,  $x \in \overline{D}_{jh}^{\sigma_0}$ ,  $j = 1, 2$ , назовем (соответственно континуальным и сеточным) решениями разностной схемы Ричардсона  $\{(4.2), (4.1)\}; \{(6.6)–(6.8), (6.3), (6.5)\}, \{(6.14), (6.13)\}$ , или короче — *схемы Ричардсона метода декомпозиции решения*.

Для сеточных компонент схемы метода декомпозиции решения, рассматриваемых на вложенных сетках, справедлива теорема сравнения, подобная теореме 6.

**Теорема 8.** Пусть выполняется условие (6.2), и пусть для функций  $z_{U_0}^{k,e}(x)$ ,  $x \in \overline{D}_h^e$ ,  $z_{U_1}^k(x)$ ,  $z_{v_U}^k(x)$ ,  $x \in \overline{D}_h$ , и  $z_{V_j}^k(x)$ ,  $x \in \overline{D}_{jh}^{\sigma}$ ,  $j = 1, 2$  выполняются условия

$$\begin{aligned} \Lambda_{(6.6)}^e z_{U_0}^{1,e}(x) &< \Lambda_{(6.6)}^e z_{U_0}^{2,e}(x), & x \in \overline{D}_h^e; \\ \Lambda_{(5.13)} z_{U_1}^1(x) &< \Lambda_{(5.13)} z_{U_1}^2(x), & x \in \overline{D}_h; \\ \Lambda_{(3.2)} z_{v_U}^1(x) &< \Lambda_{(3.2)} z_{v_U}^2(x), & x \in D_h, \quad z_{v_U}^1(x) > z_{v_U}^2(x), & x \in \Gamma_h; \\ \Lambda_{(3.2)} z_{V_j}^1(x) &< \Lambda_{(3.2)} z_{V_j}^2(x), & x \in D_{jh}^{\sigma}, \quad z_{V_j}^1(x) > z_{V_j}^2(x), & x \in \Gamma_{jh}^{\sigma}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_{U_0}^{1,e}(x) &> z_{U_0}^{2,e}(x), & x \in \overline{D}_h^e; \\ z_{U_1}^1(x) &> z_{U_1}^2(x), \quad z_{v_U}^1(x) &> z_{v_U}^2(x), & x \in \overline{D}_h; \\ z_{V_j}^1(x) &> z_{V_j}^2(x), & x \in \overline{D}_{jh}^{\sigma}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

**6.4.** Оценим  $u(x) - \overline{z}_u(x)$ ,  $x \in \overline{D}$ , предполагая выполненным условие теоремы 5, обеспечивающее включения  $U, V \in C^6(\overline{D})$ ,  $U_0 \in C^8(\overline{D})$ ,  $U_1, v_U \in C^6(\overline{D})$ , где  $U_0(x)$ ,  $U_1(x)$ ,  $v_U(x)$  — компоненты из разложения (5.6), а также оценки (5.8), (5.9).

При условии (6.2) с учетом априорных оценок компонент  $U_0(x)$ ,  $U_1(x)$ ,  $v_U(x)$  и  $V_j(x)$  (теорема 5), подобно выводу оценки (4.7), с использованием теоремы сравнения 8 находим оценки

для  $U_0(x) - z_{U_0}^0(x)$ ,  $U_1(x) - z_{U_1}^0(x)$ ,  $v_U(x) - z_{v_U}^0(x)$  и  $V_j(x) - z_{V_j}^{\sigma_0}(x)$ . Из этих оценок получаем оценку  $u(x) - \bar{z}_u^{(6.17a)}(x)$ .

Оценивая  $u(x) - \bar{z}_u^{(6.17b)}(x)$  при условии (6.1), используем оценку (4.7), где  $\varepsilon > \varepsilon_0(N)$ .

Для решения разностной схемы Рундсона метода декомпозиции решения получается оценка

$$|u(x) - \bar{z}_u(x)| \leq M N^{-4} \min^4[\varepsilon^{-1}, \ln N], \quad x \in \bar{D}, \quad (6.18)$$

а также  $\varepsilon$ -равномерная оценка

$$|u(x) - \bar{z}_u(x)| \leq M N^{-4} \ln^4 N, \quad x \in \bar{D}. \quad (6.19)$$

**Теорема 9.** Пусть для компонент решения краевой задачи (2.2), (2.1) из представлений (5.1а,с), (5.6) выполняются оценки теоремы 5. Тогда решение схемы Рундсона метода декомпозиции решения сходится  $\varepsilon$ -равномерно со скоростью  $\mathcal{O}(N^{-4} \ln^4 N)$ . Для решения разностной схемы справедливы оценки (6.18), (6.19).

## 7. Априорные оценки решений и производных

Приведем априорные оценки решений и производных для краевой задачи (2.2), (2.1); вывод оценок подобен выводу оценок в [2, 6].

**7.1.** Применяя технику мажорантных функций (см., например, [30]), находим оценку

$$|u(x)| \leq M, \quad x \in \bar{D}. \quad (7.1)$$

При достаточно гладких данных задачи, обеспечивающих включение  $u \in C^K(\bar{D})$ ,  $K > 0$ , выполняется оценка (см., например, [2, гл. I, § 3; 6, гл. 2])

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right| \leq M \varepsilon^{-k}, \quad k \leq K, \quad x \in \bar{D}. \quad (7.2)$$

Однако такая оценка производных решения задачи не позволяет установить  $\varepsilon$ -равномерную сходимость строящихся схем.

**7.2.** Нам потребуются оценки производных решения, строящиеся на основе декомпозиции решения на регулярную и сингулярную части. Решение задачи представим в виде суммы функций

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (7.3a)$$

где  $U(x)$  и  $V(x)$  — регулярная и сингулярная компоненты решения. Функция  $U(x)$ ,  $x \in \bar{D}$ , есть сужение на  $\bar{D}$  функции  $U^e(x)$ ,  $x \in D^e$ ,  $U(x) = U^e(x)$ ,  $x \in \bar{D}$ . Функция  $U^e(x)$ ,  $x \in D^e$ , — ограниченное решение задачи на прямой

$$L^e U^e(x) = f^e(x), \quad x \in D^e. \quad (7.4)$$

Здесь

$$D^e = (-\infty, \infty)$$

— прямая, являющаяся продолжением  $\bar{D}$  за стороны  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ ; данные задачи (7.4) являются гладкими продолжениями данных задачи (2.2), (2.1), сохраняющими на  $D^e$  свойства (2.3). Функцию  $f^e(x)$ ,  $x \in D^e$ , вне  $m_1$ -окрестности множества  $\bar{D}$  считаем равной нулю, причем оператор  $L^e$  определяем соотношением

$$L^e \equiv \varepsilon^2 a^0 \frac{d^2}{dx^2} - c_0,$$

где  $a^0, c_0$  — постоянные из условия (2.3). Функция  $V(x), x \in \bar{D}$ , — решение задачи

$$L_{(2.2)} V(x) = 0, \quad x \in D, \quad V(x) = \varphi(x) - U(x), \quad x \in \Gamma. \quad (7.5)$$

Функцию  $U(x)$  представим в виде разложения

$$U(x) = U_0(x) + \varepsilon^2 U_1(x) + \dots + \varepsilon^{2n} U_n(x) + v_U(x), \quad x \in \bar{D}. \quad (7.3b)$$

Эта сумма соответствует сужению на множество  $\bar{D}$  следующего представления функции  $U^e(x)$ :

$$U^e(x) = U_0^e(x) + \varepsilon^2 U_1^e(x) + \dots + \varepsilon^{2n} U_n^e(x) + v_U^e(x), \quad x \in D^e, \quad (7.6a)$$

— разложения решения задачи (7.4). Здесь  $U_i^e(x), i = 0, 1, \dots, n$ , — текущие члены разложения,  $v_U^e(x)$  — остаточный член;

$$U(x) = U^e(x), \dots, U_i(x) = U_i^e(x), \dots, v_U(x) = v_U^e(x), \quad x \in \bar{D}.$$

Функции  $U_0^e(x)$  и  $U_i^e(x), i = 1, \dots, n$ , в (7.6a) — решения задач

$$L_{(7.6)}^e U_0^e(x) = f^e(x), \quad x \in D^e; \quad (7.6б)$$

$$L_{(7.6)}^e U_i^e(x) = -a^e(x) \frac{d^2}{dx^2} U_{i-1}^e(x), \quad x \in D^e, \quad i = 1, \dots, n; \quad (7.6в)$$

функция  $v_U^e(x)$  — решение задачи

$$L_{(2.2)}^e v_U^e(x) = -\varepsilon^{2n+2} a^e(x) \frac{d^2}{dx^2} U_n^e(x), \quad x \in D^e. \quad (7.6г)$$

Здесь  $L_{(7.6)}^e$  есть оператор  $L_{(7.4)}^e$  при  $\varepsilon = 0$

$$L_{(7.6)}^e \equiv -c^e(x), \quad x \in D^e,$$

функция  $a^e(x)$  есть коэффициент при производной  $d^2/dx^2$  в операторе  $L_{(7.4)}^e$ ;  $a^e(x)$  есть продолжение  $a(x)$  на  $D^e$  с сохранением свойств (2.3).

**7.3.** Оценим компоненты  $U(x)$  и  $V(x)$  из представления (7.3). Считаем, что данные задачи (2.2), (2.1) являются достаточно гладкими, обеспечивающими гладкость  $u(x)$  — решения задачи (2.2), (2.1) и его компонент из декомпозиции (7.3).

Будем предполагать выполненным условие

$$a, c, f \in C^{l_1}(\bar{D}), \quad l_1 = l + \alpha, \quad l = l_0 + 2n, \quad (7.7)$$

где  $n = n_{(7.6)} \geq 0, l_0 > 0$  — четное число,  $\alpha \in (0, 1)$ .

В силу этого условия имеем включения

$$u, U \in C^{l^1}(\bar{D}), \quad U_i \in C^{l^2}(\bar{D}), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (7.8)$$

где  $l^1 = l_0 + \alpha, l^2 = l - 2i, l = l_0 + 2n, n \geq 0, \alpha > 0$ . В этом случае  $V \in C^{l^1}(\bar{D})$ .

Для  $U(x)$  и  $V(x)$  получаются оценки

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} U(x) \right| \leq M [1 + \varepsilon^{2n+2-k}], \quad (7.9a)$$

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} V(x) \right| \leq M \varepsilon^{-k} [\exp(-m \varepsilon^{-1} x) + \exp(-m \varepsilon^{-1} (d - x))], \quad (7.9б)$$

$$x \in \bar{D}, \quad k \leq K,$$

где  $m$  — произвольное число из интервала  $(0, m_0)$ ,  $m_0 = \min_{\bar{D}}^{1/2} [a^{-1}(x) c(x)]$ ;  $K = l_0$ .

Для функции  $u(x)$  справедлива оценка (7.2), где  $K = l_0$ .

**Теорема 10.** Пусть для данных краевой задачи (2.2), (2.1) выполняются условия  $a, c \in C^{l_1}(\bar{D}), f \in C^{l_1}(\bar{D}), \varphi \in C^{l_1}(\bar{D}), l_1 = l + \alpha, l = l_0 + 2n, l_0 = l_{0(7.7)} > 0, n = n_{(7.6)} \geq 0$ , а также условие (7.7). Тогда для решения краевой задачи и его компонент из представления (7.3) справедливы оценки (7.1), (7.2), (7.9), где  $K = l_0$ .

## 8. Выводы

1. Для задачи Дирихле для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения реакции-диффузии разработан новый подход к построению  $\varepsilon$ -равномерно сходящихся разностных схем — *метод декомпозиции сеточного решения*, относящийся к *методу асимптотических конструкций*. В отличие от  $\varepsilon$ -равномерно сходящихся разностных схем *метода подгонки* и схем *метода сгущающихся в погранслое сеток*, здесь сеточные подзадачи решаются на *равномерных сетках*, причем *коэффициенты* сеточных уравнений *не зависят от явного вида сингулярной компоненты* решения.

2. Для краевой задачи построена *разностная схема метода декомпозиции сеточного решения*, сходящаяся  $\varepsilon$ -равномерно со скоростью  $\mathcal{O}(N^{-2} \ln^2 N)$ .

3. На основе схемы метода декомпозиции решения с использованием экстраполяции Ричардсона построена *улучшенная разностная схема метода декомпозиции решения*, сходящаяся  $\varepsilon$ -равномерно со скоростью  $\mathcal{O}(N^{-4} \ln^4 N)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов Н.С.** К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.
2. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. 233 с.
3. **Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Singapore: World Scientific, 1996. 166 p.
4. Robust computational techniques for boundary layers / P.A. Farrell, A.F. Hegarty, J.J.H. Miller, E. O’Riordan, G.I. Shishkin. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000. 254 p.
5. **Roos Н.-G., Stynes M., Tobiska L.** Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion reaction and flow problems. 2 ed. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 604 p. (Springer series in computational mathematics; Vol. 24.)
6. **Shishkin G.I., Shishkina L.P.** Difference methods for singular perturbation problems. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2009. 408 p. (Chapman & Hall/CRC monographs and surveys in pure and applied mathematics; Vol. 140.)
7. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
8. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
9. **Шишкин Г.И.** Схема Ричардсона для сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции-диффузии с разрывным начальным условием // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 8. С. 1416–1436.
10. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Схема Ричардсона повышенного порядка точности для семилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции-диффузии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 3. С. 458–478.
11. **Ильин А.М.** Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6, вып. 2. С. 237–248.
12. **Allen D.N., Southwell R.V.** Relaxation methods applied to determine the motion, in two dimensions, of viscous fluid past a fixed cylinder // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1955. Vol. 8, no. 2. P. 129–145.
13. **Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.** Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983. 200 с.
14. **Шишкин Г.И.** Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с параболическим слоем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 7. С. 963–977.
15. **Shishkin G.I.** Grid approximations of parabolic equations with a small parameter multiplying the space and time derivatives. Reaction-diffusion equations // Mathematica Balkanica. New Series. 1998. Vol. 12, № 1&2. P. 179–214.
16. **Шишкин Г.И.** Апостериорно адаптируемые (по градиенту решения) сетки в аппроксимации сингулярно возмущенных уравнений конвекции-диффузии // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 1-2. С. 72–87.

17. **Шишкин Г.И.** Аппроксимация сингулярно возмущенных уравнений реакции-диффузии на адаптивных сетках // Мат. моделирование. 2001. Т. 13, № 3. С. 103–118.
18. **Shishkin G.I., Shishkina L.P., Hemker P.W.** A class of singularly perturbed convection-diffusion problems with a moving interior layer. An a posteriori adaptive mesh technique // Comput. Meth. Appl. Math. 2004. Vol. 4, no. 1. P. 105–127.
19. **Шишкин Г.И.** Использование решений на вложенных сетках при аппроксимации сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии на адаптирующихся сетках // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 9. С. 1617–1637.
20. **Shishkin G.I.** A finite difference scheme on a priori adapted meshes for a singularly perturbed parabolic convection-diffusion equation // Numer. Mathematics: Theory, Meth. and Appl. 2008. Vol. 1, no. 2. P. 214–234.
21. **Марчук Г.И., Шайдуров В.В.** Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
22. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
23. **Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Метод Рундсона высокого порядка точности для квазилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 7. С. 980–989.
24. **Shishkin G.I.** Robust novel high-order accurate numerical methods for singularly perturbed convection-diffusion problems // Math. Modelling and Analysis. 2005. Vol. 10, no. 4. P. 393–412.
25. **Шишкин Г.И.** Метод Рундсона повышения точности решений сингулярно возмущенных эллиптических уравнений с конвекцией // Изв. вузов. Сер. мат. 2006. № 2. С. 57–71.
26. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации с улучшенной скоростью сходимости для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений в областях с характеристическими границами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 5, № 1. С. 71–92.
27. **Шишкин Г.И.** Сеточная аппроксимация с улучшенной скоростью сходимости для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 1. С. 184–202.
28. **Хемкер П.В., Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.** Декомпозиция метода Рундсона высокого порядка точности для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 328–336.
29. **Shishkina L.P.** The Richardson method of high-order accuracy in  $t$  for a semilinear singularly perturbed parabolic reaction-diffusion equation on a strip // Proc. of the Internat. conf. on comput. math. (ICSM'2004). Part 2. Novosibirsk: ICM&MG Publisher, 2004. P. 927–931.
30. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

Шишкин Григорий Иванович  
д-р физ.-мат. наук  
ведущий науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: Grigorii@shishkin.ural.ru

Поступила 19.11.2009

Шишкина Лидия Павловна  
ведущий математик  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: lida@convex.ru

УДК 62.50

## ON DIFFERENT TYPES OF STABILITY OF LINEAR POLYTOPIC SYSTEMS

V. Dzhafarov, T. Büyükköroğlu, Ö. Esen

Different types of stability of linear uncertain systems are considered. Stability conditions in terms of nonsingularity are obtained. Numerical examples of using the Bernstein expansion of the determinant function are given.

Keywords: linear systems, stability, Bernstein expansion.

## 1. Introduction

Let  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ) be the set of real (complex)  $n$ -vectors, and let  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ( $\mathbb{C}^{n \times n}$ ) be the set of  $n \times n$  real (complex) matrices. Denote by  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  the identity matrix.

Let a dynamical system be given by

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ u &= Kx, \end{aligned} \quad (1.1)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$  is a state vector,  $u \in \mathbb{R}^m$  is a control vector,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , and  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . The closed-loop system takes the form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c(K)x, \\ A_c(K) &= A + BK. \end{aligned} \quad (1.2)$$

It is known that, if the pair  $\{A, B\}$  is completely controllable [1], there exists a matrix  $K$  such that  $\lambda_i[A_c]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) can be placed arbitrarily in the complex plane [2], where  $\lambda_i[A_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) are the eigenvalues of  $A_i$ .

In the case of the system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \\ u &= Ky \end{aligned} \quad (1.3)$$

(output measurement and static feedback), the closed-loop system becomes

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c(K)x, \\ A_c(K) &= A + BKC. \end{aligned} \quad (1.4)$$

If the triple  $\{A, B, C\}$  is completely controllable and observable,  $\lambda_i[A_c]$  can be placed arbitrarily in the complex plane [2, 3].

Thus, in all the cases, we have the system

$$\dot{x} = A(k)x, \quad k \in \mathbb{R}^{mn}, \quad (1.5)$$

(we assume that the matrix is a single vector  $k$ ).

The objective is to choose a gain vector  $k$  such that the system defined by (1.5) has certain transient properties.

(a) Asymptotic (Hurwitz) stability:

$$\operatorname{Re} \lambda_i[A] < 0. \tag{1.6}$$

(b) Relative (sector) stability:

$$\lambda_i[A] \in S = \{(x, y) : hx < y < -hx, x < 0\}. \tag{1.7}$$

Here,  $h > 0$  measures the minimal damping ratio of the system.

(c) Bounded frequency:

$$\lambda_i[A] \in S = \{(x, y) : |y| < \omega_0, \omega_0 > 0\}, \tag{1.8}$$

where  $\omega_0$  measures the maximal damping frequency of the system.

In many control problems, state equation (1.1) has uncertainties. Consider the case in which the matrices  $A$  and  $B$  take values in a matrix polytope:

$$(A, B) \in \left\{ \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i B_i \right) : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}. \tag{1.9}$$

Such polytopic models may result from the convex interpolation of the set of models  $(A_i, B_i)$  identified at different operating points. They also arise in connection with affine parameter-dependent models

$$\dot{x} = A(q)x + B(q)u, \tag{1.10}$$

where  $q$  is a vector of real uncertain parameters ranging in some intervals,  $A(q)$  and  $B(q)$  are affine matrix-valued functions of  $q$ , and  $u \in \mathbb{R}^m$  is a control vector.

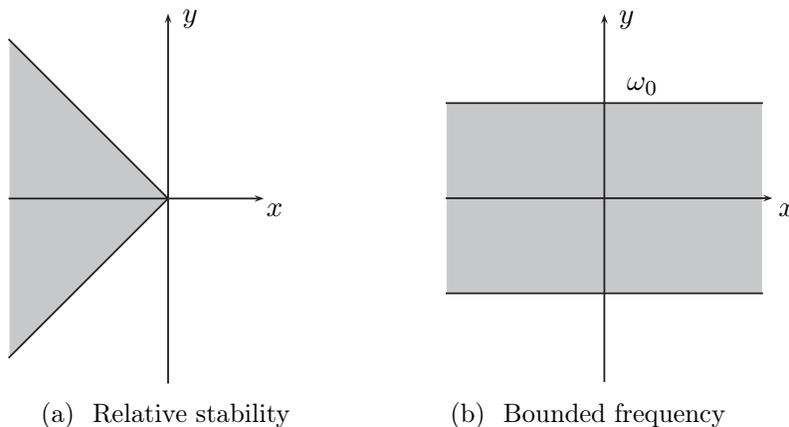
Taking into account the above applications, we will consider the following problem.

**Problem.** Given an open stability region  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  in the complex plane and an  $n \times n$  real matrix polytope

$$\mathcal{P} = \operatorname{conv}\{C_1, C_2, \dots, C_k\}, \tag{1.11}$$

find a condition under which all eigenvalues of  $\mathcal{P}$  belong to  $\mathcal{D}$ . Here, “conv” denotes the convex hull.

In the case of asymptotic stability, i.e., when  $\mathcal{D}$  is the left half-plane, this problem is considered in [4].



Figure

## 2. Stability of the damping system

Consider polytope (1.11) with the stability region  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  defined as in Fig. (a):

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : hx < y < -hx, x < 0\}. \quad (2.1)$$

Here,  $h > 0$  measures the minimal damping ratio of the system.

**Theorem 2.1.** *Let polytope (1.11) be given, and let  $C_1$  be  $\mathcal{D}$ -stable (see (2.1)). Then, the following conditions are equivalent:*

- i) the family  $\mathcal{P}$  (1.11) is  $\mathcal{D}$ -stable;*
- ii) the extended polytope*

$$\tilde{\mathcal{P}} = \text{conv}\{C_1, \dots, C_k, (1 - hj)I\} \quad (2.2)$$

*is nonsingular, where  $j^2 = -1$ .*

**Proof.** *i)  $\Rightarrow$  ii)* Consider the upper boundary of  $\mathcal{D}$

$$\{(x, y) : y = -hx, x < 0\}. \quad (2.3)$$

Since the polytope is  $\mathcal{D}$ -stable, it has no eigenvalues on this boundary:

$$\det[C - (x - hxj)I] \neq 0 \quad (2.4)$$

for all  $C \in \mathcal{P}$  and  $x < 0$ . Let  $x = -\frac{\lambda}{1 - \lambda}$ , where  $\lambda \in [0, 1)$ . From (2.4), it follows that

$$\det[(1 - \lambda)C + \lambda(1 - hj)I] \neq 0. \quad (2.5)$$

This relation is also true for  $\lambda = 1$ . On the other hand, it can be easily shown that

$$\{(1 - \lambda)C + \lambda(1 - hj)I : \lambda \in [0, 1]\} = \text{conv}\{C_1, C_2, \dots, C_k, (1 - hj)I\}. \quad (2.6)$$

From (2.5), (2.6), it follows that  $\tilde{\mathcal{P}}$  is nonsingular.

*ii)  $\Rightarrow$  i)* Assume that  $\tilde{\mathcal{P}}$  is nonsingular. Then, by (2.5) and (2.6), the family  $\mathcal{P}$  has no eigenvalues on the upper boundary of the region  $\mathcal{D}$  (2.1) (i.e., on the line  $y = -hx$  ( $x < 0$ )). Since the polytope  $\mathcal{P}$  consists of real matrices, it follows that it has no eigenvalues on the lower boundary either.

On the other hand, the family  $\mathcal{P}$  has a  $\mathcal{D}$ -stable member  $C_1$ . Then, by continuity, all eigenvalues of  $\mathcal{P}$  lie in the region  $\mathcal{D}$ , i.e., the family  $\mathcal{P}$  is  $\mathcal{D}$ -stable.

## 3. Systems with bounded frequency

Consider polytope (1.11) and the stability region shown in Fig. (b)

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : |y| < \omega_0\}. \quad (3.1)$$

**Theorem 3.1.** *Let polytope (1.11) be given, and let  $C_1$  be  $\mathcal{D}$ -stable (see (3.1)). Then, the following conditions are equivalent:*

- i) the family  $\mathcal{P}$  (1.11) is  $\mathcal{D}$ -stable;*
- ii) the polytopes*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_1 &= \text{conv}\{C_1 - \omega_0 j I, \dots, C_k - \omega_0 j I, I\}, \\ \tilde{\mathcal{P}}_2 &= \text{conv}\{C_1 - \omega_0 j I, \dots, C_k - \omega_0 j I, -I\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

*are nonsingular.*

**Proof.** *i*)  $\Rightarrow$  *ii*) The upper boundary of  $\mathcal{D}$  is the set

$$\{x + \omega_0 j : x \in \mathbb{R}\}. \tag{3.3}$$

Since the polytope  $\mathcal{P}$  is  $\mathcal{D}$ -stable, it has no eigenvalues on this boundary; i.e., for all  $C \in \mathcal{P}$ ,

$$\det [C - (x + \omega_0 j)I] \neq 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{3.4}$$

Let  $x \in (-\infty, 0]$  and  $x = -\frac{\lambda}{1-\lambda}$ , where  $\lambda \in [0, 1)$ . Then, it follows from (3.4) that

$$\det [(1-\lambda)(C - \omega_0 jI) + \lambda I] \neq 0. \tag{3.5}$$

Relation (3.5) is also true for  $\lambda = 1$ . It can be easily shown that

$$\{(1-\lambda)(C - \omega_0 jI) + \lambda I : \lambda \in [0, 1]\} = \text{conv}\{C_1 - \omega_0 jI, \dots, C_k - \omega_0 jI, I\}. \tag{3.6}$$

Then, it follows from (3.5), (3.6) that the family  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  is nonsingular.

Analogously, for  $x \in (0, \infty)$ , (3.4) implies that  $\tilde{\mathcal{P}}_2$  is nonsingular.

*ii*)  $\Rightarrow$  *i*) Assume that  $\tilde{\mathcal{P}}_1$  and  $\tilde{\mathcal{P}}_2$  are nonsingular. Then, by (3.5), (3.6), the family  $\mathcal{P}$  has no eigenvalues on the upper boundary of the region  $\mathcal{D}$  (3.1) (i.e., on the line  $y = \omega_0$ ). Since the polytope  $\mathcal{P}$  consists of real matrices, it follows that it has no eigenvalues on the lower boundary either.

On the other hand, the family  $\mathcal{P}$  has a  $\mathcal{D}$ -stable member  $C_1$ . Then, by continuity, all eigenvalues of  $\mathcal{P}$  lie in the region  $\mathcal{D}$ ; i.e., the family  $\mathcal{P}$  is  $\mathcal{D}$ -stable.

Theorems 2.1 and 3.1 show that in the cases of a damping system and a system with bounded frequencies, their stability is equivalent to the nonsingularity of the polytopes  $\tilde{\mathcal{P}}$  and  $\tilde{\mathcal{P}}_1, \tilde{\mathcal{P}}_2$ . In the following section, we will investigate these nonsingularity problems by using the Bernstein expansion of the determinant function.

### 4. Bernstein expansion

Let an  $m$ -variate polynomial  $p(x)$  be defined as

$$p(x) = \sum_{L \leq N} a_L x^L. \tag{4.1}$$

Here,  $L = (i_1, i_2, \dots, i_m)$  is an  $m$ -tuple of nonnegative integers,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $x^L = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_m^{i_m}$ ,  $N = (n_1, \dots, n_m)$ , and

$$L \leq N \Leftrightarrow 0 \leq i_k \leq n_k \quad (k = 1, 2, \dots, m). \tag{4.2}$$

The  $i$ th univariate Bernstein polynomial of degree  $d$  is defined as

$$b_{d,i}(x) = \binom{d}{i} x^i (1-x)^{d-i}, \quad 0 \leq i \leq d. \tag{4.3}$$

The  $N$ th multivariate Bernstein polynomial of degree  $N$  is defined by

$$B_{N,L}(x) = b_{n_1,i_1}(x_1) \dots b_{n_m,i_m}(x_m). \tag{4.4}$$

The transformation of a polynomial from its power form (4.1) into its Bernstein form results in

$$p(x) = \sum_{L \leq N} p_L(U) B_{N,L}(x), \tag{4.5}$$

where the Bernstein coefficients  $p_L(U)$  of  $p$  over the  $m$ -dimensional unit box  $U = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$  are given by

$$p_L(U) = \sum_{J \leq L} \frac{\binom{L}{J}}{\binom{N}{J}} a_J \quad (L \leq N). \quad (4.6)$$

Here,  $\binom{N}{L}$  is defined as the product  $\binom{n_1}{i_1} \cdots \binom{n_m}{i_m}$ .

Define

$$\begin{aligned} \underline{m} &= \min \{p(x) : x \in U\}, & \overline{m} &= \max \{p(x) : x \in U\}, \\ \alpha &:= \min \{p_L(U) : L \leq N\}, & \beta &= \max \{p_L(U) : L \leq N\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

**Theorem 4.1** [5]. *The inequalities*

$$\alpha \leq \underline{m} \leq \overline{m} \leq \beta \quad (4.8)$$

are satisfied.

Theorem 4.1 gives the bounds for the range of multivariate polynomial (4.1) over the unit box  $U$ . In order to obtain the Bernstein coefficients and bounds over an arbitrary box  $D$ , the box  $D$  should be affinely mapped onto  $U$ . As a result, a new polynomial is obtained and its Bernstein coefficients are the Bernstein coefficients of the initial polynomial  $p(x)$  (4.1) over  $D$ .

In order to obtain convergent bounds for the range of polynomial (4.1) over the box  $U$ , the box  $U$  should be divided into two boxes. If the division is continued and one calculates the minimal and maximal Bernstein coefficients in each subdivision step, the calculated bounds converge to the exact bounds (provided that the diameter of the subboxes tends to zero). Note that by the sweep procedure the explicit transformation of the subboxes generated by sweeps back to  $U$  is avoided.

By Theorem 4.1, if  $\alpha > 0$ , then the polynomial  $p(x)$  (4.1) is positive on  $U$  and, if  $\beta < 0$ , then  $p(x)$  is negative on  $U$ . If  $\alpha \leq 0$  and  $\beta \geq 0$ , then, by bisection in the chosen coordinate direction, the box  $U$  is divided into two boxes and the new Bernstein coefficients for the new boxes can be calculated easily by using the Bernstein coefficients  $p_L(U)$  (see [5, 6]). The new box on which the inequality  $\alpha > 0$  or  $\beta < 0$  is satisfied should be eliminated, since our polynomial has constant sign in this box. The box on which the inequality  $\alpha > 0$  or  $\beta < 0$  is not satisfied should be divided into two new boxes.

Let  $M_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ( $i = 1, 2, \dots, k+1$ ) be given and define the polytope (real convex hull)

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \text{conv}\{M_1, M_2, \dots, M_{k+1}\} \\ &= \left\{ \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_{k+1} M_{k+1} : \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ \lambda_1 M_1 + \cdots + \lambda_k M_k + (1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_k) M_{k+1} : \lambda_1 \in [0, 1], \dots, \lambda_k \in [0, 1], \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Define

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) : \lambda_1 \in [0, 1], \dots, \lambda_k \in [0, 1], \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \leq 1\} \quad (4.9)$$

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \det(M_R^2 + M_I^2), \quad (4.10)$$

where  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda$ ,  $M \in \mathcal{M}$ ,  $M = M_R + jM_I$  ( $M_R, M_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ).

**Theorem 4.2.** *The family  $\mathcal{M}$  is nonsingular if and only if for all  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda$*

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_k) > 0. \quad (4.11)$$

**Proof.** The matrix  $M = M_R + jM_I$  is nonsingular if and only if  $\det(M_R + jM_I) \neq 0$ . This condition in turn is equivalent to the condition

$$\det(M_R^2 + M_I^2) > 0. \tag{4.12}$$

The function  $F(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  (4.10) is a multivariate polynomial, and the set  $\Lambda$  (4.9) is not a box. Nevertheless, the above algorithm can be easily adapted to this problem. Indeed, we eliminate a subbox  $D = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_k, \beta_k]$  if the array of Bernstein coefficients has constant sign. Now, for our problem, if the inequality  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq 1$  is satisfied, the subbox  $D$  will be automatically eliminated since this subbox remains outside the set  $\Lambda$ .

Thus, we suggest the following elimination algorithm for (4.11):

- Extend the set  $\Lambda$  to the set  $U = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ .
- Divide  $U$  into two subboxes  $[0, 1/2] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$  and  $[1/2, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$  and calculate the Bernstein coefficients of  $F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  on both subboxes. If the minimal Bernstein coefficient (the number  $\alpha$  in (4.7)) is positive, then eliminate the corresponding subbox. If  $\alpha \leq 0$  and  $\beta \geq 0$  (see (4.7)) on a subbox, then divide this subbox into new subboxes.
- A subbox  $D = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_k, \beta_k]$  for which  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq 1$  should be eliminated as well, since this subbox remains outside the set  $\Lambda$ .

If all subboxes are eliminated in this process, then  $F(\lambda_1, \dots, \lambda_k) > 0$  on  $\Lambda$  and the family is stable. If there exists a subbox  $D$  such that the maximal Bernstein coefficient  $\beta < 0$  (see (4.7)), then the inequality  $F(\lambda_1, \dots, \lambda_k) > 0$  is not satisfied on  $\Lambda$  and this implies that the family is unstable.

### 5. Examples

**Example 5.1.** Let the stability region  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  be given by  $\mathcal{D} = \{(x, y) : x < y < -x, x < 0\}$ , and let  $\mathcal{P} = \text{conv}\{C_1, C_2, C_3\}$ , where

$$C_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Here,  $C_1$  is  $\mathcal{D}$ -stable.

$$\tilde{\mathcal{P}} = \left\{ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)(1 - j)I : \sum_{i=1}^3 \lambda_i \leq 1, \lambda_i \in [0, 1], i = 1, 2, 3 \right\}.$$

For all  $C \in \tilde{\mathcal{P}}$ ,  $C = C_R + jC_I$ , where

$$C_R = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)I$$

$$= \begin{pmatrix} -3\lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 + 1 & \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & -4\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + 1 & \lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & -2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 & -2\lambda_1 - 4\lambda_2 - 6\lambda_3 + 1 \end{pmatrix},$$

$$C_I = -(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)I$$

$$= \begin{pmatrix} -1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

The function (4.10) is a sextic polynomial:

$$\begin{aligned}
 F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \det(C_R^2 + C_I^2) \\
 &= 932\lambda_1^6 + 5612\lambda_1^5\lambda_2 + 6776\lambda_1^5\lambda_3 + \dots + 2122\lambda_3^6 - 2376\lambda_1^5 - 12036\lambda_1^4\lambda_2 \\
 &\quad - 14820\lambda_1^4\lambda_3 + \dots - 60138\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3 - 36228\lambda_1^3\lambda_3^2 - 24976\lambda_1^2\lambda_3^2 \\
 &\quad - 91944\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3 + \dots + 804\lambda_3^2 - 96\lambda_1 - 96\lambda_2 - 120\lambda_3 + 8.
 \end{aligned}$$

In the table below, we give the first steps of the elimination.

| Subboxes                                   | Minimal Bernstein coefficients | Maximal Bernstein coefficients                |            |
|--|--------------------------------|---|------------|
| $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$       | -15517/40                      | 434320  |            |
| $[0, 1/2] \times [0, 1] \times [0, 1]$     | -9959/30                       | 133225  |            |
| $[1/2, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$     | -569/16                        | 434320  |            |
| $[0, 1/2] \times [0, 1/2] \times [0, 1]$   | -7232483/28800                 | 405025/16                                     |            |
| $[0, 1/2] \times [1/2, 1] \times [0, 1]$   | 5/32                           | 133225  | Eliminated |
| $[1/2, 1] \times [0, 1/2] \times [0, 1]$   | -569/16                        | 3812513/32                                    |            |
| $[1/2, 1] \times [1/2, 1] \times [0, 1]$   | Eliminated                     | since $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 1$ |            |
| $[0, 1/2] \times [0, 1/2] \times [0, 1/2]$ | -377057/28800                  | 37705/16                                      |            |
| $[0, 1/2] \times [0, 1/2] \times [1/2, 1]$ | -124169/7200                   | 405025/16                                     |            |
| $[1/2, 1] \times [0, 1/2] \times [0, 1/2]$ | 5/16                           | 1286685/64                                    | Eliminated |
| $[1/2, 1] \times [0, 1/2] \times [1/2, 1]$ | Eliminated                     | since $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 1$ |            |
| $\vdots$                                   | $\vdots$                       | $\vdots$                                      |            |

The Bernstein expansion algorithm described above reports after 19 sweeps in 3.291 s that  $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) > 0$  on  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda$ .

By Theorem 2.1, the family  $\mathcal{P}$  is  $\mathcal{D}$ -stable (see (2.1)).

**Example 5.2.** Consider the stability region  $\mathcal{D} = \{(x, y) : |y| < 3\}$  and  $\mathcal{P} = \text{conv}\{C_1, C_2, C_3\}$ , where

$$C_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1\},$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_1 = \left\{ \lambda_1(C_1 - 3jI) + \lambda_2(C_2 - 3jI) + \lambda_3(C_3 - 3jI) - (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)I : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda \right\},$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_2 = \left\{ \lambda_1(C_1 - 3jI) + \lambda_2(C_2 - 3jI) + \lambda_3(C_3 - 3jI) + (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)I : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda \right\}.$$

For all  $C \in \tilde{\mathcal{P}}_1$ ,  $C = C_R + jC_I$ , where

$$\begin{aligned}
 C_R &= \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 - (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)I \\
 &= \begin{pmatrix} 8\lambda_1 - \lambda_2 + 6\lambda_3 - 1 & 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_2 + 4\lambda_3 & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 1 & 3\lambda_1 - \lambda_2 + 6\lambda_3 \\ -5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & -3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 & -3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$C_I = -3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)I$$

$$= \begin{pmatrix} -3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & -3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & -3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \det(C_R^2 + C_I^2) \\ &= 7477\lambda_1^6 + 63186\lambda_1^5\lambda_2 - 10624\lambda_1^5\lambda_3 + \dots + 4082\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3^3 - 1939\lambda_1^2\lambda_3^4 \\ &\quad - 1188\lambda_1\lambda_2^5 + 30750\lambda_1\lambda_2^4\lambda_3 + \dots + 3508\lambda_3^6 - 2856\lambda_1^5 - 17382\lambda_1^4\lambda_2 \\ &\quad - 2580\lambda_1^4\lambda_3 + \dots + 46\lambda_2^2 - 26\lambda_2\lambda_3 + 117\lambda_3^2 - 14\lambda_1 + 2\lambda_2 - 16\lambda_3 + 1. \end{aligned}$$

After 24 sweeps in 4.524 s, we have  $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) > 0$ . For all  $C \in \tilde{\mathcal{P}}_2$ ,  $C = C_R + jC_I$ , where

$$C_R = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)I,$$

$$C_I = -3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)I.$$

$$\begin{aligned} C_R &= \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 + (1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)I \\ &= \begin{pmatrix} 6\lambda_1 - 3\lambda_2 + 4\lambda_3 + 1 & 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_2 + 4\lambda_3 & -2\lambda_3 + 1 & 3\lambda_1 - \lambda_2 + 6\lambda_3 \\ -5\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & -3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 & -5\lambda_1 - 4\lambda_2 + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_I &= -3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)I \\ &= \begin{pmatrix} -3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & -3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & -3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \det(C_R^2 + C_I^2) \\ &= 3825\lambda_1^6 + 24198\lambda_1^5\lambda_2 + 3792\lambda_1^5\lambda_3 + \dots + 30614\lambda_1^3\lambda_2^2 - 3176\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3 \\ &\quad - 37160\lambda_1^3\lambda_3^2 + 5768\lambda_1^2\lambda_2^3 + \dots - 1426\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + 3123\lambda_1^2\lambda_3^2 + 2546\lambda_1\lambda_2^3 \\ &\quad + 4686\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + \dots - 46\lambda_2\lambda_3 + 17\lambda_3^2 + 2\lambda_1 - 14\lambda_2 + 4\lambda_3 + 1. \end{aligned}$$

After 29 sweeps in 5.024 s, we have  $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) > 0$ .

By Theorem 3.1, the family  $\mathcal{P}$  is  $\mathcal{D}$ -stable (see (3.1)).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Krasovskii N.N.** Control Theory of Motion. Moscow: Nauka, 1968. 475 P.
2. **Wonham W.M.** Linear multivariable control: a geometric approach. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1979. 326 p.
3. **Luenberger D.G.** Observers for multivariable systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. Vol. AC-11. P. 190–197.
4. **Dzhafarov V., Büyükköroğlu T.** On nonsingularity of a polytope of matrices // Linear Algebra and Its Appl. 2008. Vol. 429, no. 5-6. P. 1174–1183.

5. **Garloff J.** The Bernstein algorithm // Interval Computations. 1993. Vol. 2. P. 154–168.
6. **Zettler M., Garloff J.** Robustness analysis of polynomials with polynomial parameter dependency using Bernstein expansion // IEEE Trans. Automatic. Control. 1998. Vol. 43, no. 3. P. 425–431.

Vakif Dzhafarov

Received March 05, 2009

Professor

Anadolu University

Eskisehir 26470, Turkey

e-mail: vcaferov@anadolu.edu.tr

Taner Büyükköroğlu

Asist. Prof.

Anadolu University

Eskisehir 26470, Turkey

e-mail: tbuyukkoroglu@anadolu.edu.tr

Özlem Esen

Asist. Prof.

Anadolu University

Eskisehir 26470, Turkey

e-mail: oavul@anadolu.edu.tr

## О МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ “АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ” (APSCT’2009)

В. Н. Ушаков

21–26 сентября 2009 года в г. Екатеринбурге была проведена международная конференция “Актуальные проблемы теории устойчивости и управления” (APSCT’2009), посвященная уральской научной школе по теории устойчивости и управления. Конференция была организована Институтом математики и механики УрО РАН совместно с Уральским государственным университетом им. А.М. Горького. Конференция проходила в рамках и при поддержке программы президиума РАН “Математическая теория управления”. Координатор программы — академик Н.Н. Красовский, основатель и глава уральской научной школы по теории управления. Конференция была также поддержана грантом РФФИ и президиумом Уральского отделения РАН. Председатель международного программного комитета конференции — президент РАН академик Ю.С. Осипов. Сопредседатель — академик РАН А.Б. Куржанский; сопредседатели организационного комитета — члены-корреспонденты РАН В.И. Бердышев и В.Е. Третьяков.

В конференции приняли участие более 100 ученых из 10 городов России, а также из США, Австрии, Болгарии, Германии, Италии, Израиля, Турции, Польши, Беларуси, Молдовы, Украины. В конференции участвовали выдающиеся отечественные ученые: академики С.Н. Васильев, С.В. Емельянов, И.И. Еремин, А.М. Ильин, Н.Н. Красовский, А.Б. Куржанский, А.В. Кряжимский, а также члены-корреспонденты РАН С.М. Асеев, В.И. Бердышев, В.В. Васин, А.А. Толстоногов, В.Е. Третьяков, В.Н. Ушаков, А.Г. Ченцов. В конференции приняли участие известные зарубежные ученые: профессора Т. Бартон (США), М. Фальконе (Италия), Г. Фейхтингер (Австрия), В. Велиов (Болгария), К. Малановский (Польша), Ф.М. Кириллова (Беларусь), А.А. Чикрий (Украина).

Тематика международной конференции “Актуальные проблемы теории устойчивости и управления” (APSCT’2009) связана с основными научными направлениями исследования динамических систем, которые активно развиваются уральской научной школой по математической теории управления: с теорией устойчивости и стабилизации движения, теорией управления и оценивания для динамических систем в условиях неопределенности, дифференциальными играми, управлением распределенными системами, обобщенными решениями уравнений Гамильтона — Якоби, а также с различными приложениями указанных направлений. Все эти направления современной математики составляют важную область науки и практики, привлекающую внимание теоретиков и прикладников и активно развивающуюся с середины XX века.

Уральская научная школа по математической теории управления является одним из признанных лидеров в этой области. Основатель школы академик Н.Н. Красовский получил фундаментальные результаты в названных выше направлениях математики и механики. В середине XX века Н.Н. Красовский успешно продолжил научные традиции и исследования в области качественной теории устойчивости, восходящие к А.М. Ляпунову. Он внес значительный вклад в современную математическую теорию управления, будучи фактически одним из ее создателей. Им была создана также охватывающая широкий круг современных задач динамики теория позиционных дифференциальных игр. Во многом тематика конференции была

определена исходя из научных интересов и приоритетов Н.Н. Красовского и его ближайших учеников.

Мировое признание получили результаты научной школы по математической теории оптимального управления, созданной в середине XX века выдающимся русским математиком академиком Л.С. Понтрягиным (Математический институт РАН, МГУ). Работы Л.С. Понтрягина и его ближайших сотрудников, академиков Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко и профессора В.Г. Болтянского во многом определили развитие современной теории оптимальных процессов управления. Тематика принципа максимума Л.С. Понтрягина, альтернированного интеграла Л.С. Понтрягина присутствовала во многих докладах конференции.

Широко известны результаты исследований обратных задач динамики и распределенных систем, ведущихся в научной школе академика Ю.С. Осипова (Математический институт РАН, МГУ, ИММ УрО РАН), и результаты по оптимальному управлению, оцениванию и идентификации в динамических системах, полученные в научной школе академика А.Б. Куржанского (МГУ, ИММ УрО РАН). Эти школы и их научная тематика были весомо представлены на конференции.

Одной из ведущих научных тем конференции также была теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби. В частности, в тематике ряда докладов была представлена теория минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби, созданная в конце XX века академиком А.И. Субботиным. Эта теория вкупе с предложенной М. Крэндаллом (США) и П.-Л. Лионсом (Франция) теорией вязкостных решений является магистральной в современной тематике обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка.

Одним из мировых лидеров исследования проблем динамики механических систем является Институт проблем механики РАН во главе с академиком Ф.Л. Черноушко. В ряде докладов конференции были достаточно полно отражены некоторые аспекты исследований института. Заслуженным признанием у специалистов в области динамических систем пользуются работы академика С.Н. Васильева, директора Института проблем управления РАН. Интерес вызывают его исследования, относящиеся к качественной теории гибридных и дискретно-событийных систем. На конференции была представлена остающаяся по-прежнему актуальной тематика обратных связей в теории систем. Академик С.В. Емельянов (МГУ) — один из наиболее авторитетных специалистов в этой области.

Участвовавший в конференции профессор В.Ф. Демьянов (Санкт-Петербургский государственный университет) является создателем новых эффективных конструкций в негладком и выпуклом анализе, широко применяемых при решении различных задач оптимизации, в том числе задач теории управления и дифференциальных игр. Широкую известность и международное признание получили работы по дифференциальным играм профессора Л.А. Петросяна и его учеников (Санкт-Петербургский государственный университет). Ведут активные исследования в области математической теории устойчивости и математической теории управления ученые Иркутска, Ижевска, Челябинска. Здесь прежде всего упомянем исследования члена-корреспондента РАН А.А. Толстоногова и профессоров В.А. Дыхты, Р.И. Козлова, И.А. Финогенко (ИДСТУ СО РАН, Иркутск), профессоров Е.Л. Тонкова, Н.Н. Петрова, С.Н. Поповой (Удмуртский государственный университет, Ижевск), профессора В.И. Ухоботова (Челябинский государственный университет, Челябинск), принявших участие в конференции. Сотрудники ИММ УрО РАН и упомянутые выше ученые поддерживают плодотворные научные контакты многие годы. На конференции представилась еще одна хорошая возможность скоординировать направления и тематику совместных исследований.

Отметим, что для дальнейшего развития математической теории устойчивости и математической теории управления проведение конференции оказалось крайне важным и своевременным. На конференции было сделано 10 пленарных докладов, в которых был дан анализ состояния представленных направлений, и очерчены перспективы их дальнейшего развития.

Кратко охарактеризуем содержание пленарных докладов. Доклад академиков Ю.С. Осипова и А.В. Кряжмского “Задачи позиционного управления с неполной информацией и метод программных пакетов” (Президиум РАН, Москва; Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия) посвящен задаче о гарантирующем позиционном управлении динамической системой в условиях неполной информации. Предложен подход к решению такой задачи в классе так называемых пакетов программ и проведен анализ ее разрешимости. Доклад академика А.Б. Куржанского “О задачах управления групповым движением” (МГУ, Москва) был посвящен новым классам задач математической теории процессов управления — задачам управления групповым движением. В докладе приведены решения задач целевого управления групповым движением, синтезированного по результатам доступных наблюдений текущего состояния совокупной системы в условиях неопределенных помех. Предложенные решения опираются на методы динамического программирования при фазовых ограничениях. В докладе академика Н.Н. Красовского и А.Н. Котельниковой “О дифференциальной игре на перехват” обсуждались аспекты формализации позиционной дифференциальной игры в приложении к игре на перехват объекта, стремящегося к заданной цели. Установлен функциональный характер цены игры как функции от текущей истории процесса. На базе подходящей краевой задачи для параболического уравнения с исчезающим диффузионным членом развит и обоснован метод минимаксного и максиминного управлений в схеме обратной связи со стохастическим поводьрем. В докладе профессора Т.А. Бартона и Д.П. Двиггинса (Северо-западный исследовательский институт, Порт-Анджелес, США) “Perturbed kernels of integral equations” (“Возмущенные ядра интегральных уравнений”) отмечено, что многие прикладные задачи моделируются интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями с выпуклыми ядрами, что это трудные задачи и для них существуют функционалы ляпуновского типа, просто и полно описывающие поведение решений. Однако для реальных задач трудно проверить математически строгие условия выпуклости. Поэтому возникает проблема: возможно ли добавить к ядру некоторое возмущение достаточной величины и общности, чтобы можно было доказать, что возмущенная задача имеет то же самое фундаментальное решение, что и невозмущенная? В докладе дан положительный ответ на этот вопрос, что обуславливает правомерность исследований, сфокусированных только на невозмущенных уравнениях. Анализ основан на построении функционалов Ляпунова для интегральных уравнений. Доклад профессора К. Малановского (Институт системных исследований Польской академии наук, Варшава) “Stability and sensitivity analysis for optimal control problems” (“Анализ устойчивости и чувствительности в задачах оптимального управления”) был посвящен анализу устойчивости и чувствительности для задач оптимального управления. Были рассмотрены параметризованные задачи оптимального управления и изучены локальные свойства решений, рассматриваемых как функции параметра. Основная трудность при этом связана с присутствием ограничений типа неравенств и состоит в негладкости задачи. В докладе были представлены краткий обзор методологии, используемой в анализе устойчивости и чувствительности для абстрактных оптимизационных задач с коническими ограничениями, и применения к задачам оптимального управления для систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с управлениями и фазовыми ограничениями. В докладе академика Ф.Л. Черноусько и Н.Н. Болотника (Институт проблем механики РАН, Москва) “Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел” рассмотрен новый класс мобильных роботов, способных передвигаться в сопротивляющихся средах без специальных движителей (колес, ног, гусениц). Эти роботы состоят из корпуса, взаимодействующего с внешней средой, и подвижно соединенных с ним внутренних тел. В докладе описаны периодические режимы движения внутренних тел относительно корпуса и соответствующие движения корпуса с периодически изменяющейся скоростью. Рассматриваются задачи об оптимальном управлении, в которых целью является максимизация средней скорости движения системы как целого. Для ряда конкретных прикладных задач найдены такие оптимальные управления. Доклад академика С.В. Емельянова (МГУ, Москва) “Обратная связь: перспективы развития” был по-

священ обсуждению различных типов нелинейной обратной связи, в том числе нового типа нелинейной обратной связи — координатно-операторной связи. В докладе дано осмысление общего механизма синтеза законов управления при дефиците информации, намечены перспективы развития современной теории обратной связи. Доклад академика С.Н. Васильева (Институт проблем управления РАН, Москва) “Преобразование моделей в динамике систем и их свойства” был посвящен задачам теории устойчивости и управления движением. В докладе рассматривались модельные преобразования динамических систем двух видов: 1) координатные и некоторые другие преобразования типа траекторных морфизмов; 2) преобразования, введенные в развитие аппарата функции Ляпунова. В докладе развита качественная теория гибридных и дискретно-событийных систем, интенсивно изучаемых в последнее время. Развита метод редукции с привлечением идеи метода синтеза целевой логической выводимости первопорядковых формул. В докладе профессора В.Ф. Демьянова и Г.Ш. Тамасяна (Санкт-Петербургский государственный университет) “Негладкие задачи вариационного исчисления” описывалось развитие прямых методов решения задач вариационного исчисления и оптимального управления. Представленные в докладе методы основаны на сведении с помощью теории точных штрафных функций исходной задачи минимизации интегрального функционала при наличии ограничений к задаче безусловной минимизации некоторого функционала, являющегося существенно негладким. Новые методы оказались достаточно эффективными при решении ряда задач. Таково краткое описание пленарных докладов конференции.

В рамках работы 6 секций конференции (1. Проблемы устойчивости и стабилизации; 2. Задачи управления и оценивания для динамических систем в условиях неопределенности; 3. Дифференциальные игры; 4. Управление распределенными системами; 5. Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби; 6. Численные методы теории управления и приложения) было сделано 100 секционных докладов.

Анализ работы конференции подтвердил актуальность ее тематики как в России, так и за рубежом. Важным ее итогом стало дальнейшее развитие и укрепление сложившихся научных контактов и связей ведущих специалистов России и других стран. Существенным достижением конференции явились установление новых научных контактов и знакомство с новыми задачами математической теории устойчивости и математической теории управления. Крайне важным и полезным оказался обмен информацией о новых прикладных задачах в этой области. Проведение конференции дало возможность оценить современное состояние теоретических исследований в упомянутых областях математики, познакомиться с новыми практическими приложениями в этих областях и наметить перспективы развития и сотрудничества.

Ушаков Владимир Николаевич  
зам. председателя оргкомитета конференции  
чл.-корр. РАН  
зав. отделом  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Поступила 2.02.2010

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |     |
|--|-----|
| <b>Ю. В. Авербух.</b> Инфинитезимальная характеристика позиционного равновесия по Нэшу в дифференциальной игре .....                                       | 3   |
| <b>Б. И. Ананьев.</b> Оптимальные каналы связи с шумом в задачах оценивания и коррекции движения .....   | 15  |
| <b>А. В. Арутюнов.</b> К теоремам о неявной функции в аномальных точках .....  | 30  |
| <b>А. С. Банников, Н. Н. Петров.</b> К нестационарной задаче группового преследования .....  | 40  |
| <b>Н. В. Величко.</b> Отображения прямой Зоргенфрея .....  | 52  |
| <b>И. В. Гайшун.</b> О нулевой динамике одного класса распределенных дискретных систем .....   | 57  |
| <b>А. Р. Данилин, О. О. Коврижных.</b> Асимптотика оптимального времени в сингулярно возмущенной линейной задаче быстрогодействия .....                    | 63  |
| <b>А. И. Короткий, Д. А. Ковтунов.</b> Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию .....                                     | 76  |
| <b>А. В. Лекомцев, В. Г. Пименов.</b> Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием .....         | 102 |
| <b>Г. А. Леонов, Н. В. Кузнецов, Е. В. Кудряшова.</b> Прямой метод вычисления ляпуновских величин двумерных динамических систем .....                      | 119 |
| <b>Е. Г. Пыткеев, М. Ю. Хачай.</b> Сигма-компактность метрических булевых алгебр и равномерная сходимость частот к вероятностям .....                      | 127 |
| <b>Д. А. Серков.</b> О некоторых свойствах задачи управления при программной помехе в формализации на основе критерия минимаксного риска (сожаления) ..... | 140 |
| <b>А. Н. Сесекин, А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов.</b> Об одной задаче маршрутизации “на узкие места” .....   | 152 |
| <b>А. А. Успенский, П. Д. Лебедев.</b> О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов .....                       | 171 |
| <b>В. И. Ухоботов, О. В. Зайцева.</b> Линейная задача импульсной встречи с целью в заданный момент времени при наличии помехи .....                        | 186 |
| <b>В. Н. Ушаков, А. Г. Малёв.</b> К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении .....   | 199 |
| <b>Т. Ф. Филиппова.</b> Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы .....          | 223 |

---

|  |     |
|--|-----|
| <b>И. А. Финогенко.</b> О дифференциальных включениях с аддитивно входящими обобщенными функциями .....  | 233 |
| <b>Ю. А. Шашкин.</b> Об одной комбинаторной лемме.....   | 244 |
| <b>Г. И. Шишкин, Л. П. Шишкина.</b> Улучшенная разностная схема метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии ..... | 255 |
| <b>V. Dzhafarov, T. Büyükköroğlu, Ö. Esen.</b> On different types of stability of linear polytopic systems .....   | 272 |
| <b>В. Н. Ушаков.</b> О международной конференции “Актуальные проблемы теории устойчивости и управления” .....  | 281 |

**ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН**

**Том 16**

**№ 1**

**2010**

Учредитель  
Учреждение Российской академии наук  
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;  
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения  
в связи с переименованием учредителя.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Е. Е. Понизовкина  
Технический редактор Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

---

Подписано в печать 05.03.10. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 36. Уч.-изд. л. 31. Тираж 200 экз.

---

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16  
Институт математики и механики УрО РАН  
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”  
тел. (343) 375-34-58  
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии  
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”  
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226