РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 15, № 3 2009

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 15 № 3 2009

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 15, № 3. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009. 284 с.

ISSN 0134–4889

СОДЕРЖАНИЕ

Том 15 № 3 2009

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ КРАСОВСКИЙ

(*К восьмидесятипятилетнему юбилею*)

В сентябре 2009 г. исполняется 85 лет Николаю Николаевичу Красовскому, выдающемуся русскому ученому, обогатившему науку фундаментальными достижениями в ряде направлений математики и механики.

Н. Н. Красовский родился 7 сентября 1924 г. в Екатеринбурге. Его отец Николай Арсеньевич, выпускник Казанского университета, был известным в Екатеринбурге врачом. В начале 1920-х гг. он заведовал клиникой внутренних болезней и исполнял обязанности профессора на медицинском факультете Уральского государственного университета. Затем медицинский факультет перевели в Пермь, а Николай Арсеньевич остался в Екатеринбурге. Мать Мария Федоровна, учившаяся в свое время на Бестужевских курсах, работала преподавателем русского языка.

С 1932 по 1941 г. Н. Н. Красовский учился в школе № 1 г. Свердловска. С 1941 по 1943 г. работал электромонтером на заводе имени С. Орджоникидзе. Поступив в 1943 г. в Уральский политехнический институт (УПИ) им. С. М. Кирова, он окончил его в январе 1949 г. со званием инженера по пластической и термической обработке металлов. На втором курсе института начал заниматься научной работой под руководством профессора-алгебраиста С. Н. Черникова, заведовавшего кафедрой высшей математики. Н. Н. Красовский принимал также участие в исследованиях по научной тематике кафедры обработки металлов давлением и обратил внимание на целесообразность подхода к решению задач деформации металлов, основанного на вариационных принципах.

После окончания УПИ Николай Николаевич в течение десяти лет работал на кафедре высшей математики в должности ассистента, доцента, профессора, заведующего кафедрой. В 1959–1970 гг. работал в Уральском государственном университете (УрГУ) им. А.М. Горького, заведуя сначала кафедрой теоретической механики, а затем — организованными по его инициативе кафедрой вычислительной математики и кафедрой прикладной математики. В 1970–1977 гг. Н. Н. Красовский возглавлял Институт математики и механики (ИММ) АН СССР, организованный на базе Свердловского отделения Математического института им. В. А. Стеклова по инициативе академиков И. М. Виноградова и М. В. Келдыша. Позднее Институт вошел в состав Уральского научного центра (затем — Уральского отделения РАН). С тех пор жизнь и научная деятельность Николая Николаевича связаны с Институтом.

Приоритеты научных интересов Н. Н. Красовского лежат в сфере качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости движения, математической теории управления, в том числе теории дифференциальных игр. Он проявляет постоянный интерес и к другим направлениям математики и механики, к новейшим достижениям в этих направлениях, поддерживает их развитие в Уральском регионе.

Широта научных интересов Н. Н. Красовского проявилась еще в молодые годы под влиянием его учителей — Е. А. Барбашина, Н. П. Еругина, И. Г. Малкина, Н. Г. Четаева.

Николай Николаевич успешно продолжил научные традиции и научные исследования в области качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости, восходящие к А. М. Ляпунову.

В статье, посвященной 80-летию со дня рождения Н. Н. Красовского, опубликованной в “Трудах Института математики и механики УрО РАН”, Т. 10, № 2, 2004 г., содержится изложение его научной биографии. Имея в виду это обстоятельство, в настоящей статье мы остановимся на некоторых направлениях и результатах его исследований.

Обращение теорем Ляпунова

Н. Н. Красовским доказано существование функций Ляпунова, удовлетворяющих теоремам Ляпунова об асимптотической устойчивости и неустойчивости. В основе доказательства лежит следующий установленный им фундаментальный результат: для того чтобы в некоторой области фазового пространства, содержащей начало координат, существовала гладкая функция со знакопеременной производной, необходимо и достаточно, чтобы любая подобласть не содержала целых траекторий системы.

Математическая теория управления

Н. Н. Красовский предложил подход к решению задач оптимального программного управления, основанный на идеях и методах функционального анализа. Линейные задачи с функционалами, имеющими смысл нормы в подходящих функциональных пространствах, были сведены им к проблеме моментов, решение которой связано с одной из важнейших теорем функционального анализа — теоремой Хана — Банаха о распространении линейного функционала. Такой подход позволил получить основные соотношения, характеризующие решение подобных задач оптимального управления, и к тому же дополнительно получить информацию о краевых условиях для сопряженной системы принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Теория устойчивости для систем с последействием

Н. Н. Красовский предложил следующий подход к теории устойчивости для систем с последействием. Он показал, что движение таких систем естественно рассматривать как эволюцию историй движения в подходящем функциональном пространстве. Эта эволюция обладает полугрупповыми свойствами, и соответствующий бесконечно малый производящий оператор играет роль обыкновенного дифференциального уравнения в этом функциональном пространстве. В линейном случае такая интерпретация открыла возможность для исследования систем с последействием на базе общей теории полугрупп линейных преобразований и указала путь к развитию теории критических случаев устойчивости по Ляпунову и стабилизации, в том числе оптимальной, движения таких систем.

Применив указанный подход, Н. Н. Красовский распространил второй метод Ляпунова на системы с последействием. При этом оказалось естественным использование в роли функций Ляпунова функционалов Ляпунова — Красовского. Им доказана теорема об асимптотической устойчивости, допускающая обращение, что свидетельствует об универсальности предложенного подхода. Смыкая исследования устойчивости на базе функционалов Ляпунова с исследованиями на базе функций Ляпунова, Николай Николаевич предложил и доказал теорему об асимптотической устойчивости и на базе функций Ляпунова.

Теория оптимальной стабилизации для систем с последействием

Н. Н. Красовским перенесена теория оптимальной стабилизации на системы с последействием. Для линейной задачи стабилизации с квадратичным показателем качества им впервые указан явный вид оптимального значения показателя качества в форме квадратичного функционала от исходной истории процесса, и при том явный вид оптимального управления в форме линейного функционала от текущей истории.

Теория стохастической устойчивости

Н. Н. Красовский предложил подход к построению теории устойчивости по Ляпунову для стохастических систем. Были введены основные определения устойчивости по вероятности и в среднеквадратичном, которые стали общепринятыми. Было введено понятие стохастических функций Ляпунова. На базе этих функций получены условия устойчивости, асимптотической устойчивости и вероятностной стабилизации.

Позиционные дифференциальные игры

Н. Н. Красовским была предложена формализация позиционных дифференциальных игр. Центральным моментом теории явилась следующая альтернатива для основополагающей задачи сближения с целевым множеством — уклонения от этого множества внутри заданного множества в пространстве позиций. Указаны классы стратегий и движений таких, что для названной задачи для всякой исходной позиции верно одно и только одно из двух: либо существует стратегия, которая гарантирует встречу всех движений с целевым множеством внутри заданного множества, либо существует стратегия, которая гарантирует уклонение от некоторой окрестности целевого множества внутри некоторой окрестности заданного множества. На основе этой альтернативы было установлено существование цены и седловой точки для типичных дифференциальных игр. Была предложена схема управления с поводырем, стабилизирующая решения дифференциальных игр.

Принципиальным моментом явилась унификация дифференциальных игр, смыкающая формализацию позиционных дифференциальных игр, на которой базируется альтернатива, с гамильтоновым формализмом, и в том числе с понятием обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби.

Н. Н. Красовский — автор около 300 научных публикаций, в том числе 6 монографий. Он является продолжателем уральской научной школы по теории устойчивости движения и основателем и главой уральской научной школы по математической теории управления. Среди его учеников — инженеры и преподаватели, доктора и кандидаты наук, члены-корреспонденты и академики РАН.

Деятельность Н. Н. Красовского в должности директора Института математики и механики (1970–1977), его авторитет и энергия способствовали утверждению Института как ведущего научного центра в области математики и механики в Уральском регионе, обеспечили качественно новый уровень развития Института. Он инициировал и поддерживал направления прикладных исследований по математике, механике и новой технике. Большое значение Николай Николаевич придавал оснащению Института первоклассной вычислительной техникой, развитию вычислительного дела в Уральском регионе.

Весомый вклад вносит Н. Н. Красовский в математическое образование в Уральском регионе и как крупный организатор, и как умелый лектор. В начале своей педагогической деятельности (1949–1959) он преподает в УПИ. За это время он прочитал большое число курсов. Его лекции отличались глубиной содержания, высоким научным уровнем, ясностью изложения. Хорошо известен факт, когда у студентов “золотого выпуска” 1954 г. на физико-техническом факультете (на этом потоке были собраны самые сильные студенты со всех факультетов УПИ, как только физтех открылся) он прочитал лекции и провел практические занятия по широкому кругу математических дисциплин. Заметим, что в то время программа физтеха в части математических дисциплин не уступала университетской программе матмеха.

В Уральском госуниверситете, где Николай Николаевич работает с 1959 г., им разработано и прочитано большое число спецкурсов, оригинальных по содержанию и включающих новейшие научные достижения, в том числе полученные им самим. Многие выпускники матмеха УрГУ гордятся тем, что они учились у Н. Н. Красовского.

Много времени и сил Николай Николаевич отдает пропаганде достижений фундаментальной науки среди ученых — прикладников, инженеров, медиков. Для них он разработал и прочитал ряд курсов, опубликовал пособия и брошюры, излагающие в доступной форме идеи и новейшие методы в математике, механике и информатике. Символично, что американский Институт инженеров электротехники и электроники (IEEE), присуждая ему премию 2003 г., отметил его “новаторские идеи, которые были восприняты как теоретиками, так и инженерами-практиками”.

В Институте математики и механики Н. Н. Красовский организовал Общественный университет математики и вычислительной техники с факультетами: методы прикладной математики, программирование и алгоритмические языки, методы оптимизации в экономике, математические методы в медицине и биологии, основы информатики. По его инициативе при ИММ был также организован постоянно действующий семинар по вычислительной математике и вычислительной технике для ведущих специалистов ВЦ города и области.

В 1970–80-х гг. на возглавляемой Николаем Николаевичем секции математики и механики Межведомственного совета по координации при Президиуме УНЦ АН СССР регулярно ставились вопросы о состоянии дел с преподаванием математики в вузах Уральского региона, об имеющихся проблемах и о мерах по их разрешению. Обсуждалась работа математических кафедр многих вузов Свердловска, Перми, Челябинска, Ижевска. Принимались рекомендации по кадровому обеспечению кафедр, по открытию новых специальностей и кафедр в вузах, по установлению новых контактов. Большое значение имел обмен опытом работы.

Особенно остро Н. Н. Красовский воспринимает проблемы школьного математического образования в стране и Уральском регионе. Сам он тесно связан со школой с самого начала своей творческой деятельности. Из года в год он постоянно встречается с учениками и учителями, выступает перед ними с лекциями, проводит занятия, участвует в работе школьных олимпиад. Н. Н. Красовский неоднократно посещал уроки математики. В 1980-е гг. он входил в состав Комиссии по школьному образованию при Отделении математики АН СССР, проводил большую работу по оценке действующих в общеобразовательной школе программ и учебников по математике. Он организовал и курирует Очно-заочную школу по математике и информатике для школьников Свердловской области при ИММ УрО РАН.

Николай Николаевич считает, что массовое школьное образование — это основное звено, определяющее уровень науки в стране. По его мнению, очень важно поддерживать в обществе атмосферу уважения к знаниям, уважения к труду и миссии учителя. Занятия математикой способствуют развитию таких ценных для любого вида деятельности способностей, как память, сосредоточенность, прилежание, дисциплина мысли. Учеба понимается как труд, достаточно тяжелый, но неизбежный и благодетельный. По мнению Николая Николаевича, в будущем математика сохранит свое значение как одна из важнейших наук в жизни человека. Появятся новые ветви, усовершенствуются разделы математики, которые будут работать для биологии, медицины и других наук.

Большую тревогу у Н. Н. Красовского вызывают проводимые в последние десятилетия реформы школьного образования, в частности школьного математического образования. Он считает, что большинство аргументов, выдвигаемых в пользу этих реформ, являются далеко не бесспорными, а производимые реформаторами действия могут иметь самые негативные последствия для российского школьного образования. Обнадеживает только то, что не перевелись еще учителя по жизненному призванию и высокому пониманию своей миссии, глубокие знатоки своего предмета и блестящие популяризаторы.

Остановимся подробнее на роли Николая Николаевича в постановке преподавания информатики в школах Свердловской области. Как известно, в марте 1985 г. Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР с 1985/86 уч. г. в средних учебных заведениях страны (школы, ПТУ, техникумы) вводился новый предмет “Основы информатики и вычислительной техники”. При этом полагалось, что из-за отсутствия в школах достаточного числа комплектов вычислительных машин обучение следует начинать в безмашинном варианте. Решением Свердловского облисполкома был образован областной Научно-методический совет по школьной компьютеризации под руководством Н. Н. Красовского, в который вошли представители народного образования, вузов, научных учреждений, промышленных предприятий, учителя школ и учебно-производственных комбинатов.

Первоочередной задачей Совета стало техническое оснащение школ области, с тем чтобы каждый школьник Свердловской области имел хотя бы минимальный доступ к компьютеру, а также экстренная подготовка учителей информатики.

Используя свой авторитет и добрые отношения, Николай Николаевич обращался к директорам промышленных предприятий с просьбой выделить средства для закупки необходимой вычислительной техники. Так были приобретены 8 классов "Роботронов" из ГДР. Благодаря помощи директивных органов удалось приобрести также компьютеры отечественного производства. Часть техники была предоставлена вузами и научными учреждениями — всего 20 кустовых ВЦ для школ. В какой-то мере задача оснащения техникой на тот момент была решена.

Была разработана 72-часовая программа подготовки преподавателей информатики. По этой программе совместно с Облоно, Институтом усовершенствования учителей, Пединститутом, УрГУ и УПИ было подготовлено к новому учебному году около 1100 учителей, причем каждый из них имел возможность поработать за терминалом не менее 12 часов в режиме диалога. В помощь учителю были разработаны и изданы соответствующие методические пособия. В результате этой работы в каждом среднем учебном заведении области был подготовлен по крайней мере один учитель, владеющий начальными навыками общения с ЭВМ.

Весьма любопытно, что для обучения школьников Свердловской области информатике в "машинном" варианте потребовалось специальное разрешение Министерства образования России, поскольку такой вариант упомянутым выше постановлением не предусматривался.

Проделанная под руководством Николая Николаевича работа дала сильный первоначальный импульс дальнейшему выходу школ Екатеринбурга и области на достойный уровень современных информационных технологий.

Когда решался вопрос о месте проведения в 1989 г. Первой Всесоюзной школьной олимпиады по информатике, то был выбран Свердловск, поскольку в нем были обеспечены все необходимые условия.

Авторитет Н. Н. Красовского среди ученых высок. В 1964 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1968 — действительным членом АН СССР. Входил в состав Президиума РАН и бюро Отделения механики и процессов управления АН СССР, является членом Президиума Национального комитета по теоретической и прикладной механике. Входит в редколлегии авторитетных научных изданий.

Научные достижения и преподавательская деятельность Н. Н. Красовского высоко оценены государством (Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий, кавалер орденов Советского Союза и России) и научной общественностью (Большая золотая медаль им. М. В. Ломоносова Российской академии наук, Золотая медаль им. А. М. Ляпунова, Демидовская премия в области физико-математических наук, премия "Триумф", степень доктора Honoris causa Венгерской академии наук, награда Международного общества инженеров электриков и электронщиков (IEEE), премия программы Фонда содействия отечественной науке "Выдающиеся ученые").

Николаю Николаевичу присущи такие человеческие качества, как работоспособность, сильный волевой характер, доброжелательность в общении. Он является настоящим гражданином, которого глубоко волнует судьба России.

Сотрудники Института математики и механики УрО РАН, редакционная коллегия журнала "Труды Института математики и механики УрО РАН", ученики, коллеги и друзья сердечно поздравляют Николая Николаевича с его славным юбилеем и желают ему и его семье доброго здоровья, успехов и благополучия.

В. И. Бердышев, С. В. Емельянов, А. Б. Куржанский, Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Осипов

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ Н. Н. КРАСОВСКОГО

1. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 5. С. 547–554.
2. Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86, № 3. С. 453–456 (совм. с Е.А. Барбашиным).
3. Об устойчивости движения при любых начальных возмущениях: дис. ... канд. физ.–мат. наук. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1953. 120 с.
4. Расчет оптимальной формы заготовки при штамповке деталей типа шестерен // Тр. Урал. политехн. ин-та. Свердловск: Машгиз, 1953. № 45. С. 137–151 (совм. с О.А. Ганаго, И.Я. Тарновским).
5. Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений одной нелинейной системы трех уравнений // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17, вып. 3. С. 339–350.
6. Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17, вып. 6. С. 651–672.
7. Об одной задаче устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 3. С. 401–404.
8. Об устойчивости решений системы второго порядка в критических случаях // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93, № 6. С. 965–967.
9. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 1. С. 95–102.
10. О поведении в целом интегральных кривых системы двух дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 2. С. 142–154.
11. О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 3. С. 345–350 (совм. с Е.А. Барбашиным).
12. Об обращении теорем А.М. Ляпунова и Н.Г. Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 5. С. 513–532.
13. Об устойчивости в целом решения нелинейной системы дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 6. С. 735–737.
14. Достаточные условия устойчивости решений системы нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98, № 6. С. 901–904.
15. Расчет поверхностного натяжения по форме лежащей капли // Журн. физ. химии. 1954. Т. 28, вып. 9. С. 1678–1680 (совм. с О.А. Есиным, Ю.П. Никитиным, С.И. Попелем).
16. К вопросу определения усилий при обработке металлов давлением // Обработка металлов давлением. М.: Металлургиздат, 1954. Вып. 3. С. 5–22 (совм. с А.А. Поздеевым, И.Я. Тарновским).
17. Методика графического расчета поверхностного и межфазного натяжений по форме капли // Тр. Урал. политехн. ин-та. 1954. № 49. С. 76–82 (совм. с О.А. Есиным, Ю.П. Никитиным, С.И. Попелем).
18. Об обращении теоремы К.П. Персидского о равномерной устойчивости // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 3. С. 273–278.
19. Об устойчивости по первому приближению // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 5. С. 516–530.
20. Об условиях обращения теорем А.М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1955. Т. 101, № 1. С. 17–20.
21. Об устойчивости движения в критическом случае одного нулевого корня // Мат. сб. 1955. Т. 37, вып. 1. С. 83–88.
22. К вопросу об обращении теорем второго метода А.М. Ляпунова исследования устойчивости движения // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 3. С. 159–164.
23. К теории второго метода А.М. Ляпунова для исследования устойчивости // Мат. сб. 1956. Т. 40, вып. 1. С. 57–64.
24. К теории второго метода А.М. Ляпунова исследования устойчивости движения // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 3. С. 460–463.
25. Обращение теорем второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 2. С. 255–265.
26. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 315–327.
27. Об асимптотической устойчивости систем с последействием // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 4. С. 513–518.

28. Некоторые вопросы теории устойчивости нелинейных систем: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: Ин-т механики АН СССР, 1957. 344 с.
29. Об устойчивости при больших начальных возмущениях // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 3. С. 309–319.
30. Об одной задаче оптимального регулирования // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 5. С. 670–677.
31. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 6. С. 769–774 (совм. с В.Е. Гермаидзе).
32. К теории оптимального регулирования // Автоматика и телемеханика. 1957. Т. 18, № 1. С. 960–970.
33. О гладком сечении дисперсивной динамической системы // Изв. вузов. Математика. 1957. № 1. С. 167–173.
34. О периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием времени // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 2. С. 252–255.
35. Об устойчивости квазилинейных систем с последействием // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 3. С. 435–438.
36. Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 2. С. 209–229.
37. К достаточным условиям оптимальности // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 3. С. 592–594.
38. К теории оптимального регулирования // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 4. С. 625–639.
39. К теории оптимального регулирования нелинейных систем второго порядка // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126, № 2. С. 267–270.
40. Об оптимальном регулировании в нелинейных системах // Изв. вузов. Математика. 1959. № 5. С. 122–130.
41. К проблеме существования оптимальных траекторий // Изв. вузов. Математика. 1959. № 6. С. 81–87.
42. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с. (Пер. на англ.: Stability of motion. Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay. Stanford (Calif.): Stanford Univ. Press, 1963. 188 p.)
43. Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 1. С. 64–79.
44. О приближенном вычислении оптимального управления прямым методом // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 2. С. 271–276.
45. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5. С. 809–823 (совм. с И.Я. Кацем).
46. Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограничениях на скорость изменения управляющего воздействия // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 3. С. 420–432 (совм. с Э.А. Лидским).
47. Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 4. С. 680–690 (совм. с А.И. Климушевым).
48. О среднеквадратичной оптимальной стабилизации при случайных затухающих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 5. С. 806–817.
49. О выборе параметров оптимальных устойчивых систем // Тр. 1-го Междунар. конгр. ИФАК. Т. 2: Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 482–489.
50. Об одном методе построения оптимальных траекторий // Мат. сб. 1961. Т. 53, вып. 2. С. 195–206.
51. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. I: Постановка задачи. Метод решения // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, № 9. С. 1145–1150 (совм. с Э.А. Лидским).
52. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. II: Уравнения для оптимального управления. Приближенный метод решения // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, № 10. С. 1273–1278 (совм. с Э.А. Лидским).
53. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. III: Оптимальное регулирование в линейных системах. Минимум среднеквадратичной ошибки // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, № 11. С. 1425–1431 (совм. с Э.А. Лидским).

54. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
55. Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 2. С. 218–232.
56. К теории аналитического конструирования регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1962. Т. 23, № 6. С. 713–720 (совм. с А.М. Летовым).
57. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости движения // Тр. 1-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике (Москва, 1960): обзор. докл. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 36–47.
58. Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 244–254.
59. О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 4. С. 641–663.
60. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 6. С. 988–1004 (совм. с Е.А. Гальпериным).
61. Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздываниями времени // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 295–302.
62. Об оптимальном регулировании со случайной нагрузкой // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 3. С. 622–631.
63. Об оптимальном регулировании при запаздывании сигналов обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24, № 8. С. 1021–1036.
64. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15 (совм. с Ю.С. Осиповым).
65. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 1. С. 3–14.
66. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
67. К задаче о стабилизации механической системы // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 5. С. 801–811 (совм. с М.С. Габриеляном).
68. О наблюдении нелинейной управляемой системы в окрестности заданного движения // Автоматика и телемеханика. 1964. Т. 25, № 7. С. 1047–1057 (совм. с Э.Г. Альбрехтом).
69. Об одном свойстве гироскопической стабилизируемости управляемой консервативной механической системы // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1964. № 5. С. 156–164.
70. Optimal processes in systems with time lag // Automat. & Remote Control Theory. London: Butterths; Munich: Oldenbourg, 1964. P. 327–332.
71. Проблема качества устойчивости процессов в системах со случайными параметрами // Тр. Всесоюз. мат. съезда (1961). Т. 2. Л.: Наука, 1964. С. 451–456.
72. Об одной задаче стабилизации // Межвуз. симпоз. по качеств. теории дифференц. уравнений и ее применениям: тез. докл. Самарканд, 1964. С. 35–36.
73. К задаче об успокоении линейной системы при минимальной интенсивности управления // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 218–225.
74. О коррекции движения системы с двумя степенями свободы при одной циклической координате // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 401–407 (совм. с Г.С. Шелементьевым).
75. К задаче об успокоении линейной системы // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 5. С. 828–834 (совм. с В.И. Бондаренко, Ю.М. Филимоновым).
76. О стабилизации нестационарных систем // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 6. С. 1081–1083 (совм. с Н.Г. Булгаковым).
77. О стабилизации динамических систем дополнительными силами // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 5–16.
78. Об одном свойстве линейной устойчивой системы, вполне управляемой по случайному воздействию // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 2. С. 143–152.
79. Об оптимальном управлении при дискретных сигналах обратной связи // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 11. С. 1415–1427.
80. Задача о наблюдении линейной динамической системы и уравнения с запаздыванием аргумента // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 12. С. 1551–1556.
81. О стабилизации систем, в которых помеха зависит от величины управляющего воздействия // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1965. № 2. С. 102–109.
82. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1965. № 4. С. 3–13 (совм. с Ю.М. Репиным, В.Е. Третьяковым).

83. Оптимальное управление в обыкновенных динамических системах // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 3. С. 153–174.
84. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием // Тр. 2-го Междунар. конгр. ИФАК: Оптимальные системы. Статист. методы. Т. 2. М.: Наука, 1965. С. 201–210.
85. Проблемы управляемости, наблюдаемости и стабилизируемости динамических систем // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике (1964): обзор. докл. М.: Наука, 1965. Вып. 1. С. 77–93.
86. К задаче о преследовании в случае линейных однотипных объектов // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 2. С. 209–225.
87. Об управлении объектом с последействием // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 5. С. 938.
88. Об аппроксимации одной задачи об оптимальном управлении в системе с последействием // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, № 3. С. 540–542.
89. К вопросу о наблюдаемости систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 3. С. 298–308 (совм. с А.Б. Куржанским).
90. К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 5. С. 587–599 (совм. с В.Е. Третьяковым).
91. Проблемы стабилизации управляемых движений // И.Г. Малкин. Теория устойчивости движения. Дополнение 4. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
92. К задаче об успокоении линейной системы // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 3. С. 460–467 (совм. с Ю.М. Репиным).
93. К задаче о встрече движений // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 2. С. 285–287 (совм. с В.Е. Третьяковым).
94. К задаче об игровой встрече движений // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 3. С. 535–537.
95. Теория оптимальных управляемых систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1967. № 5. С. 14–27 (совм. с Н.Н. Моисеевым).
96. Евгений Алексеевич Барбашин (к 50-летию со дня рождения) // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2179–2180 (совм. с Н.П. Еругиным).
97. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.
98. О регуляризации одной задачи об игровой встрече движений // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 1. С. 3–14 (совм. с В.Е. Третьяковым)
99. Об игровой встрече движений с ограничениями на импульсы // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 2. С. 177–184.
100. Задача о сближении управляемых объектов // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 4. С. 575–586 (совм. с А.И. Субботиным).
101. К задаче об игровой встрече движений // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 5. С. 793–803.
102. Регуляризация задачи об игровой встрече движений // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 6. С. 972–976.
103. Лекции по теории управления. Вып. 1: Обыкновенное программное управление линейными системами. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1968. 47 с.
104. Лекции по теории управления. Вып. 2: Обобщенное программное управление линейными системами. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1968. 45 с.
105. Регуляризация задачи о встрече движений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 179, № 2. С. 300–303.
106. Об игровой встрече движений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 181, № 5. С. 1062–1064.
107. О дифференциальной игре на сближение // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 6. С. 1287–1289.
108. Об одной особенности игровой встречи движений // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 5. С. 767–778.
109. Оптимальное уклонение в дифференциальной игре // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 12. С. 2159–2165 (совм. с А.И. Субботиным).
110. Теория оптимальных управляемых систем // Механика в СССР за 50 лет. Т. 1: Общая и прикл. механика. М.: Наука, 1968. С. 179–244.
111. Игровые задачи о встрече движений // 3-й Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: аннот. докл. М., 1968. С. 177.
112. Игровая задача о коррекции движения // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 3. С. 386–396.

113. Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 4. С. 698–704 (совм. с А.И. Субботиным).
114. Смешанное управление в дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188. № 4. С. 745–747 (совм. с А.И. Субботиным).
115. Регуляризация одной дифференциальной игры // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 1. С. 3–8.
116. Дифференциальная игра сближения. I: Грубый случай // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 3. С. 407–423.
117. Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
118. Игровые задачи динамики // Всесоюз. конф. по проблемам теор. кибернетики: тез. докл. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1969. С. 52–53 (совм. с А.И. Субботиным).
119. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
120. К теории дифференциальных игр // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 2. С. 197–207.
121. Достаточные условия осуществления встречи в дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 777–784.
122. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 6. С. 1005–1022 (совм. с А.И. Субботиным).
123. Дифференциальная игра наведения // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 4. С. 579–591 (совм. с А.И. Субботиным).
124. Дифференциальная игра сближения. II: Регулярные смешанные стратегии // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 10. С. 1743–1751.
125. Игровые задачи динамики. II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1970. № 1. С. 3–13.
126. О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 3. С. 523–526. (совм. с А.И. Субботиным).
127. К задаче о преследовании // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191, № 2. С. 270–272.
128. О дифференциальной игре сближения // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 2. С. 284–287.
129. Лекции по теории управления. Вып. 3: Общая схема дифференциальной игры. Примеры. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1970. 87 с.
130. Лекции по теории управления. Вып. 4: Основная игровая задача наведения. Поглощение цели. Экстремальная стратегия. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1970. 96 с.
131. Общие проблемы управления // Вестн. АН СССР. 1970. № 8. С. 10–25 (совм. с М.А. Гавриловым, А.М. Летовым, В.С. Пугачевым).
132. О структуре игровых задач динамики // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 1. С. 110–122. (совм. с А.И. Субботиным).
133. Минимаксное поглощение в игре сближения // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 6. С. 945–951.
134. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 2. С. 278–281 (совм. с А.И. Субботиным).
135. Линейные дифференциально-разностные игры // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 4. С. 777–780 (совм. с Ю.С. Осиповым).
136. Программное поглощение в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201, № 2. С. 270–272.
137. Extremal strategies in a differential game // Actes Congr. Intern. Math. (Nice, 1970). Vol. 3. Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 177–181.
138. Аппроксимационные стратегии в дифференциальных играх // Всесоюз. конф. по качеств. теории дифференц. уравнений: тез. докл. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1971. С. 68–69 (совм. с А.И. Субботиным).
139. Седловые точки в позиционных дифференциальных играх // Всесоюз. конф. по проблемам теор. кибернетики: тез. докл. Новосибирск, 1971. С. 37–38 (совм. с А.И. Субботиным).
140. Экстремальное управление в нелинейной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 6. С. 986–1006.
141. К игровой задаче уклонения // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 2. С. 243–248.
142. Экстремальное управление в нелинейной позиционной дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 3. С. 520–523.

143. Минимаксная дифференциальная игра // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 2. С. 277–280 (совм. с А.И. Субботиным, В.Н. Ушаковым).
144. Задача программного управления на максимин // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1972. № 6. С. 35–44 (совм. с В.Д. Батухтиным).
145. О седловой точке позиционной дифференциальной игры // Тр. МИАН СССР им. В.А. Стеклова. 1972. Т. 128. С. 22–33 (совм. с А.И. Субботиным).
146. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх // Междунар. конгр. математиков в Ницце. М.: Наука, 1972. С. 118–124.
147. Аппроксимация в дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 197–204 (совм. с А.И. Субботиным).
148. Дифференциальная игра сближения-уклонения. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18.
149. Дифференциальная игра сближения-уклонения. II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 3. С. 22–42.
150. Экстремальное управление в нелинейной позиционной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 4. С. 55–63 (совм. с В.Д. Батухтиным).
151. Задача управления с неполной информацией // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1973. № 4. С. 5–14 (совм. с Ю.С. Осиповым).
152. Программные конструкции для позиционных дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 6. С. 1287–1290.
153. О нелинейной дифференциальной игре сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212, № 1. С. 29–32 (совм. с В.Д. Батухтиным).
154. Линейные неравенства и некоторые их приложения // Укр. мат. журн. 1973. Т. 25, № 4. С. 465–478 (совм. с И.И. Ереминым).
155. Регуляризация дифференциальных игр преследования // Теория игр: Всесоюз. конф. по теории игр (Ереван, 1968): сб. докл. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1973. С. 206–207.
156. Дифференциальная игра на рассогласование в заданный момент времени // Теория игр: Всесоюз. конф. по теории игр (Ереван, 1968): сб. докл. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1973. С. 208–209.
157. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с. (Пер.на фр.: Jeux Differentiels. M.: Mir, 1977. 446 p.) (совм. с А.И. Субботиным).
158. Регулярная дифференциальная игра // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 3. С. 389–401.
159. Задачи сближения-уклонения в системах с малым параметром при производных // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 5. С. 771–779 (совм. с В.М. Решетовым).
160. К теории дифференциальных игр с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215, № 4. С. 780–783 (совм. с Ю.С. Осиповым).
161. Экстремальное прицеливание в нелинейной игре сближения // Экстремальные стратегии в позицион. дифференц. играх: сб. ст. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1974. С. 26–76 (совм. с В.Д. Батухтиным).
162. Минимаксное прицеливание в дифференциальной игре // Экстремальные стратегии в позиц. дифференц. играх: сб. ст. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1974. С. 121–137.
163. Game-theoretic control and problems of stability // Probl. Contr. & Inform. Theory. 1974. Vol. 3, № 3. P. 171–182.
164. Позиционные дифференциальные игры // Techn. Conf. Optimization Techn. IFIP: Препр. Новосибирск, 1974. № 2. 14 с.
165. Игровое управление и задачи устойчивости // Всесоюз. конф. по оптим. управлению в мех. системах: тез. докл. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1974. С. 36–38.
166. Регулярная дифференциальная игра // 3-я Всесоюз. конф. по теории игр: тез. докл. Одесса, 1974. С. 15–21.
167. Стохастические стратегии в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 5. С. 1023–1026 (совм. с А.И. Субботиным, В.Ф. Россохиным).
168. Экстремальное управление в нелинейной позиционной дифференциальной игре // Дифференц. игры и задачи управления: сб. науч. тр. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1975. Вып. 15. С. 34–63 (совм. с В.Д. Батухтиным).
169. Дифференциальные игры в смешанных стратегиях // Проблемы аналитической механики и теорий устойчивости и управления. М.: Наука, 1975. С. 11–18 (совм. с А.И. Субботиным).

170. Closed–loop differential games // Optimization Techniques: IFIP Technical Conf. (Новосибирск). Heidelberg; New York: Springer, 1975. P. 422–434. (Lect. Notes in Comput. Sci.; Vol. 27B).
171. Optimal control under conditions of conflict or uncertainty // Proc. IFAC 6th World Congress (Boston; Cambridge, Mass.). Pt. 4. Dusseldorf, 1975.
172. Об управлении при неполной информации // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 2. С. 197–206.
173. Игровое управление в дифференциальных эволюционных системах // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 5. С. 1049–1052.
174. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
175. К задаче управления с неполной информацией // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1976. № 2. С. 3–7.
176. Game–theoretic control under incomplete phase–state information // Probl. Control & Inform. Theory. 1976. Vol. 5, № 4. P. 291–302.
177. Петр Иванович Кузнецов (к 40-летию научной деятельности) // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 3. С. 567–570 (совм. с Л.Н. Большевым, В.А. Ильиным и др.).
178. О дифференциальных эволюционных системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 5. С. 774–782.
179. Смешанные стратегии в дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 3. С. 519–522.
180. Игра сближения-уклонения со стохастическим поводырем // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 5. С. 1020–1023.
181. Экстремальные конструкции для дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 6. С. 1260–1262.
182. Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.
183. Control under incomplete information // Information Processing 77: Proc. IFIP Congr. (Toronto, 1977). IFIP Congr. Ser. Vol. 7. Amsterdam: North-Holland, 1977. P. 353–365.
184. On designing differential games. I // Probl. Contr. & Inform. Theory. 1977. Vol. 6, no. 5–6. P. 381–395 (совм. с А.Г. Ченцовым).
185. Позиционное управление эволюционными системами // 2-я Всесоюз. конф. по оптим. управлению в мех. системах / АН СССР. Ин-т пробл. механики. КАИ: тез. докл. Казань, 1977. С. 108. (совм. с Ю.С. Осиповым).
186. О конструировании дифференциальных игр // Материалы Всесоюз. симпоз. по оптим. управлению и дифференц. играм (Тбилиси, 1976). Тбилиси: Мецниереба, 1977. С. 170–174 (совм. с А.Г. Ченцовым).
187. Программные конструкции для позиционного игрового управления // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 1. С. 3–14.
188. К синтезу управления в дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 5. С. 1041–1043.
189. Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. 1978. Т. 107, вып. 4. С. 541–571.
190. On designing differential games. II // Probl. Contr. & Inform. Theory. 1979. Vol. 8, № 1. P. 3–11 (совм. с А.Г. Ченцовым).
191. Differential games: actual problems and their formalization // A link between sci. & appl. automat. contr.: Proc. Trienn. World Congr. IFAC. (Helsinki, 1978). Oxford: Pergamon Press, 1979. Vol. 2. P. 975–982.
192. Вероятностное управление с гарантированным результатом // Probl. Control & Inform. Theory. 1980. Vol. 9, № 3. P. 163–170.
193. Седловая точка стохастической дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 3. С. 534–539 (совм. с В.Е. Третьяковым).
194. Control under incomplete information and differential games // Proc. Intern. Congr. Math. (Хельсинки, 1978). Helsinki: Ollilehto, 1980. Vol. 1. P. 151–163.
195. Game-theoretical optimization of differential systems // Optimization Techniques: Proc. IFIP Conf. (Варшава, 1979). Pt. 1. Berlin: Springer, 1980. P. 37–53. (Lect. Notes Control & Inform. Sci.; Vol. 22).
196. Стохастический программный синтез для детерминированной позиционной дифференциальной игры // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, вып. 4. С. 579–586 (совм. с А.Н. Красовским, В.Е. Третьяковым).

197. Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 1. С. 24–27 (совм. с В.Е. Третьяковым)
198. Валентин Витальевич Румянцев (к 60-летию со дня рождения) // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 8. С. 1522–1525 (совм. с Н.П. Еругиным, Н.Н. Моисеевым).
199. О стохастическом программном синтезе стратегий в дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 6. С. 885–892.
200. Об одной задаче минимаксного управления // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 12. С. 2126–2132.
201. О программном синтезе позиционного управления // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 6. С. 1309–1312 (совм. с В.Е. Третьяковым).
202. Смешанные стратегии в дифференциальной игре // Соврем. проблемы мат. физики и вычисл. математики: сб. ст. Ин-та прикл. механики АН СССР. М.: Наука, 1982. С. 208–216.
203. Control solution with optimal ensured result // Probl. Control & Inform. Theory. 1982. Vol. 11, № 4. P. 271–281 (совм. с В.Е. Третьяковым).
204. Стохастический программный синтез в некоторых задачах управления механическими объектами // Всесоюз. конф. по оптим. управлению в мех. системах: тез. докл. М.: Ин-т прикл. механики АН СССР. 1982. С. 112–113 (совм. с В.Е. Третьяковым).
205. Одна задача оптимального управления на минимум гарантированного результата // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 6–23 (совм. с В.Е. Третьяковым).
206. Стохастический программный синтез одного гарантирующего управления // Control & Inform. Theory. 1983. Vol. 12, no. 2. P. 79–95 (совм. с В.Е. Третьяковым).
207. Стохастический программный синтез в некоторых задачах управления механическими объектами // Всесоюз. конф. по оптим. управлению в мех. системах (Москва, 1982): тез. докл. М.: Ин-т прикл. механики АН СССР, 1983. С. 112–113 (совм. с В.Е. Третьяковым).
208. Задача управления при неполной информации. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1984. 63 с. (совм. с С.И. Тарасовой, В.Е. Третьяковым, Г.И. Шишкиным).
209. Задача об управлении в условиях неполной информации // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48, вып. 4. С. 533–539.
210. Минимаксное управление и стохастический максимин // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 9. С. 1523–1529.
211. Extremal aiming and extremal displacement in a game–theoretical control // Probl. Control & Inform. Theory. 1984. Vol. 13, no. 5. P. 287–302.
212. Математические модели и вычислительный процесс на примере задачи управления // Пром. технология создания и применения програм. средств в организацион. управлении и НИОКР: пленарн. докл. на Всесоюз. семинаре. Свердловск, 1984.
213. Детерминированные стратегии и стохастические программы // Стохаст. оптимизация: тез. докл. Междунар. конф. Киев, 1984. Ч. 1. С. 129–130.
214. Эти неконкретные конкретные задачи // Техника — молодежи. 1984. № 7. С. 9–11.
215. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 516 с.
216. Управление динамической системой. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1985. 199 с. (совм. с А.Н. Красовским, В.Е. Третьяковым).
217. Детерминированная стратегия и стохастические программы // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, вып. 2. С. 179–190.
218. Позиционная дифференциальная игра // Тр. МИАН СССР им. В.А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 159–179.
219. Управление при дефиците информации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 3. С. 536–540.
220. Задача управления с гарантированным результатом. Свердловск: Ср.-Урал. кн. изд-во, 1986. 64 с. (совм. с В.Е. Третьяковым).
221. О синтезе в дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 6. С. 898–902.
222. Control with information deficit // Probl. Control. & Inform. Theory. 1986. Vol. 15, no. 3. P. 1–13 (совм. с С.И. Тарасовой, В.Е. Третьяковым, Г.И. Шишкиным).
223. Стохастический программный синтез оптимального управления для систем с распределенными параметрами // Дифференц. уравнения с частными производными: тр. Междунар. конф. (Новосибирск, 1983). Новосибирск: Наука, 1986. С. 93–102 (совм. с В.Е. Третьяковым).

224. О постановках задач управления // Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: аннот. докл. Ташкент, 1986. С. 382–383.
225. Game-theoretical control problems. New York; etc.: Springer, 1988. 517 c. (совместно с А.И. Субботиным).
226. On the program synthesis of a guaranteed control // Probl. Control. & Inform. Theory. 1988. Vol. 17, no. 6. P. 333–343, P1–P11. (совм. с Т.Н. Решетовой).
227. Задачи повышения точности навигации движущихся объектов // Всесоюз. шк. по проблемам мат. обеспечения и архитектуры бортовых вычисл. систем: тез. докл. Ташкент, 1988. С. 6 (совм. с В.Л. Гасиловым, Ю.С. Осиповым).
228. Юрий Станиславович Богданов (1920–1987) // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 6. С. 1091–1092 (совм. с А.Ф. Андреевым, А.В. Бицадзе и др.).
229. Черников Сергей Николаевич (1912–1987) // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 2. С. 125–126 (совм. с Ю.Л. Ершовым, Ю.А. Митропольским, Д.К. Фаддеевым и др.).
230. Модельные задачи управления // Управление в мех. системах: тез. докл. 7-й Всесоюз. конф. Свердловск, 1990. С. 63.
231. Управление при дефиците информации. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1990. 103 с. (совместно с Т.Н. Решетовой).
232. Управление и стабилизация при недостатке информации // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 148–151.
233. A differential game for the minimax of a positional functional // Adv. in Nonlinear Dynamics and Control: A Report from Russia / Ed. A.B. Kurzhanski. Boston; etc.: Birkhäuser, 1993. P. 41–72. (Progress in Systems and Control Theory; Vol. 17) (совм. с А.Н. Красовским).
234. Школьник и компьютер: Учимся друг у друга. М.: Издательская фирма “Физ.-мат. литература” ВО “Наука”, 1993. 208 с. (совм. с В.В. Прохоровым, Т.Н. Решетовой, Д.А. Серковым и др.).
235. Валентин Константинович Иванов // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, вып. 5. С. 147–152 (совм. с В.В. Васиным, М.М. Лаврентьевым, Ю.С. Осиповым, А.Н. Тихоновым и др.).
236. Предмет логики в средней и высшей школе // Проблемы образования одаренных учащихся: тез. науч.-метод. конф. Екатеринбург: СУНЦ УрГУ, 1994. С. 197–198.
237. Control under lack of information. Boston; etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p. (Systems and Control: Foundat. and Appl.) (совм. с А.Н. Красовским).
238. Математическое моделирование в школе // Изв. Урал. гос. ун-та. Екатеринбург, 1995. № 4. С. 12–24.
239. О некоторых вопросах теории управления // Алгоритм. и числ. анализ некоррект. задач: тез. докл. Всерос. науч. конф., посвящ. памяти В.К. Иванова. Екатеринбург, 1995. С. 79–80.
240. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 885–900 (совм. с Н.Ю. Лукояновым).
241. Моделирование — математика, информатика, логика — в школе // Информатика и образование. 1997. № 2. С. 65–71; № 3. С. 3–7; № 6. С. 5–12; № 7. С. 3–7 (совм. с Т.Н. Решетовой).
242. Николай Павлович Еругин: к 90-летию со дня рождения // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 5. С. 579–582 (совм. с А.Ф. Андреевым, И.В. Гайшуном, В.И. Громаком и др.).
243. In Memory of Andrei I. Subbotin // Dynamic Games and Appl.: Intern. Symp. (8-th; Maastricht, Netherlands): Proc. Vol. 1998. P. xiii–xxii (совм. с Э.Г. Альбрехтом, А.Г. Ченцовым и др.).
244. О некоторых задачах управления со странностями // Алгоритм. анализ некорректных задач: тез. докл. Всерос. науч. конф., посвящ. памяти В.К. Иванова. Екатеринбург, 1998. С. 139.
245. О некоторых задачах управления // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 208–217.
246. Задачи управления и стабилизации динамических систем // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее приложения. 1999. Т. 60: тр. Междунар. конф., посвящ. 90-летию Л.С. Понтрягина (Москва, 1998). Т. 1: Оптимальное управление. С. 24–41. (Пер. на англ.: Problems of control and stabilization in dynamical systems: Pontryagin Conference (Moscow, 1998). Vol. 1: Optimal Control // J. Math. Sci. 2000. Vol. 100, no. 5. P. 2458–2469).
247. Уравнения типа Гамильтона—Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000. Т. 6, № 1–2. С. 110–130. (Пер. на англ.: Equations of Hamilton–Jacobi type in hereditary systems: minimax solutions // Proc. Steklov Inst. Math. 2000. Suppl. 1. P. S136–S153) (совм. с Н.Ю. Лукояновым).
248. Экспериментальная математика в школе: математика, информатика, логика // Материалы Всерос. конф. “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков”. М.: МЦНМО, 2000. С. 25–27 (совм. с Н.Ю. Лукояновым, Т.Н. Решетовой).

249. Математика, информатика и логика в школе: докл. на объед. ученом совете по математике, механике и информатике // Отчет о науч. и науч.-орг. деятельности УрО РАН за 1999 г. Екатеринбург, 2000. Ч. 2. С. 21 (совм. с В.В. Самофаловым).

250. О работах С.Н. Черникова по линейным неравенствам // Инф. бюлл. АМП. 2001. № 9. С. 11–26. (совм. с И.И. Ереминым).

251. Предисловие // Сб. интервью: От архаики управления бизнесом к интернет-экономике. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2001. С. 3–6 (совм. с И.И. Ереминым).

252. Урал обязан Евгению Алексеевичу очень и очень многим (памяти акад. Е.А. Барбашина) // 50 лет радиофаку УГТУ-УПИ. Екатеринбург: РЕАЛ, 2002. С. 99–100.

253. О работах С.Н. Черникова по линейным неравенствам // Алгебра и линейная оптимизация: тр. Междунар. семинара, посвящ. 90-летию со дня рождения С.Н. Черникова. Екатеринбург: УрО РАН, 2002. С. 216–234 (совм. с И.И. Ереминым).

254. Одна школьная задача как элемент обучения экспериментальной математике // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. 3: Математика. Механика. Информатика. 2003. № 2. С. 50–131 (совм. с А.Н. Котельниковой).

255. Размышления о математическом образовании // Изв. Урал. гос. ун-та. Екатеринбург, 2003. № 27. С. 5–13 (Проблемы образования, науки и культуры; вып. 14).

256. О проекте федерального компонента Государственного образовательного стандарта по математике // Модернизация мат. образования: проблемы, мнения, реалии: сб. ст. Екатеринбург: Изд-во Дома учителя, 2003. С. 9–11 (совм. с В.И. Бердышевым, А.Л. Агеевым).

257. Одна задача расшифровки информации // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург, 2004. С. 175–176 (совм. с А.Н. Котельниковой).

258. Отслеживание и лидирование движений симулирующим моделированием // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург, 2004. С. 177–178 (совм. с А.Н. Котельниковой).

259. Судьба одного подхода к изучению наследственных систем // Изв. Урал. гос. ун-та. Екатеринбург, 2004. № 32. С. 12–24 (Проблемы образования, науки и культуры; вып.16) (совм. с А.Н. Котельниковой).

260. Стабилизирующий люфт в задаче об устойчивости процесса управления // Вестн. УГТУ-УПИ. Информ.-мат. технологии в экономике, технике и образовании. 2005. № 9 (61). С. 16–23 (совм. с А.Н. Котельниковой).

261. Минимаксная стабилизация наследственных стохастических систем // Устойчивость и процессы управления: сб. тр. Междунар. конф., посвящ. 75-летию В.И. Зубова. СПб.: С.-Петерб. гос. ун-т, 2005. Т. 1. С. 25.

262. Из воспоминаний об Андрее Измайловиче Субботине // Изв. Урал. гос. ун-та. Екатеринбург, 2005. № 34. С. 35–36. (Проблемы образования, науки и культуры ; вып.17).

263. Одна задача об устойчивом отслеживании движения // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 1. С. 142–156. (Пер. на англ.: One problem on stable tracking of motion // Proc. Steklov Inst. Math. 2006. Suppl. 1. P. S151–S167) (совм. с А.Н. Котельниковой).

264. Юрий Сергеевич Осипов (к 70-летию со дня рождения) // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 1. С. 3–5 (совм. с В.И. Бердышевым, А.Б. Куржанским, Е.Ф. Мищенко).

265. Об одной задаче о стабилизации // Изв. Урал. гос. ун-та. Екатеринбург, 2006. № 46. С. 90–106. (Математика и механика; вып.10) (совм. с А.Н. Котельниковой).

266. О некоторых задачах расшифровки информации // Информ.-мат. технологии в экономике, технике и образовании: сб. материалов обл. науч.-практ. конф. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2006. Ч. 1. С. 38–43 (совм. с А.Н. Котельниковой).

267. К методу функций Ляпунова для задач об устойчивости в системах с последействием // Изв. Ин-та математики и информатики. Ижевск: Удмурт. гос. ун-т, 2006. Вып. 3 (37). С. 73–74 (совм. с А.Н. Котельниковой).

268. Исаак Яковлевич Кац // Устойчивость, управление и моделирование динамических систем: материалы Междунар. науч. семинара, посвящ. 75-летию И.Я. Каца. Екатеринбург: УрГУПС, 2006. № 54 (137). С. 3–4 (совм. с А.Б. Куржанским, Г.А. Тимофеевой).

269. О корректности вероятностной стабилизации // Устойчивость, управление и моделирование динамических систем: материалы Междунар. науч. семинара, посвящ. 75-летию И.Я. Каца. Екатеринбург: УрГУПС, 2006. № 54 (137). С. 12–13 (совм. с А.Н. Котельниковой).

270. Современные проблемы оптимизации и устойчивости неопределенных и стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 3–4 (совм. с А.Б. Куржанским, А.И. Кибзун).
271. О корректности вероятностной стабилизации // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 106–124 (совм. с А.Н. Котельниковой).
272. Очерк научной биографии И.Я. Каца // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 5–15 (совм. с А.Б. Куржанским, П.В. Пакшиным, Г.А. Тимофеевой).
273. О корректности стабилизации к помехам в последействии // Математика. Механика. Информатика: материалы Всерос. науч. конф. (Челябинск, 2006). Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2007. С. 94–103 (совм. с А.Н. Котельниковой, Т.Н. Решетовой).
274. Модели динамических и логических систем в образовательном процессе // Информ.-мат. технологии в экономике, технике и образовании: сб. материалов Междунар. науч. конф. (Екатеринбург, 2006). Екатеринбург, 2007. Вып. 3. С. 33–40 (совм. с А.Н. Котельниковой, Т.Н. Решетовой).
275. Юрий Николаевич Субботин (к 70-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 2. С. 187–190 (совм. с В.В. Арестовым, В.И. Бердышевым, С.М. Никольским, Ю.С. Осиповым, Н.И. Черных и др.).
276. О развитии второго метода Ляпунова в теории устойчивости движения // Междунар. конгресс "Нелинейный динамический анализ — 2007", посвящ. 150-летию акад. А.М. Ляпунова: тез. докл. СПб.: С.-Петерб. гос. ун-т, 2007. С. 14–15.
277. О смешанных стратегиях стабилизации // Междунар. конгресс "Нелинейный динамический анализ-2007", посвящ. 150-летию акад. А.М. Ляпунова: тез. докл. СПб.: С.-Петерб. гос. ун-т, 2007. С. 40 (совм. с А.Н. Котельниковой, Т.Н. Решетовой).
278. Об одной задаче оптимального управления системой с последействием в условиях конфликта // Вестн. Удмурт. ун-та. 2008. Вып. 2. С. 65–70 (Математика. Механика. Компьютер. науки) (совм. с А.Н. Котельниковой).
279. Об исследованиях в Свердловске – Екатеринбурге, инициированных принципом максимума Л.С. Понтрягина // Междунар. конф. "Диф. уравнения и топология", посвящ. 100-летию Л.С. Понтрягина: тез. докл. М.: МИАН, МГУ, 2008. С. 10–11.
280. Об одном регулярном случае задачи о сближении-уклонении в системе с последействием // Междунар. конф. "Диф. уравнения и топология", посвящ. 100-летию Л.С. Понтрягина: тез. докл. М.: МИАН, МГУ, 2008. С. 355 (совм. с А.Н. Котельниковой).
281. К 90-летию со дня рождения Евгения Алексеевича Барбашина (1918–1969) // Междунар. конф. "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация": тез. докл. Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2008. С. 6–8.
282. Об унификации дифференциальной игры // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию В.К. Иванова. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2008. С. 217–218 (совм. с А.Н. Котельниковой).

Том 15 № 3 2009

УДК 519.62

ВИДИМОСТЬ ОБЪЕКТА ДЛЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ С НЕТОЧНО ЗАДАННЫМИ КООРДИНАТАМИ[1]

В. И. Бердышев

Введена характеристика видимости движущегося объекта в случае, когда координаты наблюдателя известны с погрешностью. Доказана дифференцируемость по направлениям этой характеристики, найдена формула дифференцирования в виде экстремальной задачи, и для нее установлена теорема об очистке.

Ключевые слова: навигация, характеристика видимости, дифференцируемость, очистка.

V. I. Berdyshev. Object visibility for an observer with inaccurately given coordinates.

A characteristic is introduced for the visibility of a moving object in the case when the coordinates of the observer are known with an error. The directional differentiability of this characteristic is proved, a differentiation formula is found in the form of an extremal problem, and a refinement theorem is established for this problem.

Keywords: navigation, visibility characteristic, differentiability, refinement.

1. Введение

Настоящая статья посвящена характеристике видимости движущегося объекта для наблюдателя. Она является продолжением работы [1]. Здесь в отличие от [1] рассматривается случай, когда местоположение наблюдателя известно с погрешностью. Объект перемещается в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором зафиксировано телесное замкнутое множество G, препятствующее видимости, например, подграфик функции, определяющей поле высот земного рельефа.

Пусть точки t и f, изображающие движущийся объект и наблюдателя соответственно, видимы одна для другой, т. е. интервал (t,f) не пересекается с множеством G. Пусть местоположение наблюдателя известно с точностью $h>0$, где h — заданное число, т. е. фактически известно лишь, что наблюдатель находится в шаре

$$V_h(f)=\big\{v\in\mathbb{R}^3\colon\ |v-f|\le h\big\},$$

через $|\cdot|$ здесь обозначается евклидова норма. Предположим, что $t\notin V_h(f)$ и шар $V_h(f)$ виден из точки t. Это означает, что для любой точки $v\in\overset{\circ}{V}_h(f)=\{v\colon\ |v-f|<h\}$ отрезок $[t,v]\setminus\overset{\circ}{V}_h(f)$ не пересекается с множеством G.

Для наблюдателя предпочтительна ситуация, когда из любого его возможного положения внутри шара $V_h(f)$ видна не только точка t, но и любая точка шара $V_r(t)$ при некотором $r>0$. Такая ситуация определяется соотношением

$$\Big(\mathrm{conv}\big(V_r(t)\cup V_h(f)\big)\setminus V_h(f)\Big)\cap G=\varnothing,$$

где conv означает выпуклую оболочку множества. Введем обозначение

$$K_r=K_{r,h}=K_{r,h}(t,f)=\mathrm{conv}\big(V_r(t)\cup V_h(f)\big)\setminus V_h(f).$$

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математическая теория управления".

Целью автора является исследование функции

$$r(t) = r_h(t) = r_h(t, f, G) = \sup\{r\colon\ K_{r,h}(t, f) \cap G = \varnothing\} = \min\{r\colon\ K_{r,h}(t, f) \cap G \neq \varnothing\}, \qquad (1.1)$$

характеризующей уровень видимости объекта.

Легко устанавливается неравенство

$$|r_h(t) - r_h(T)| \le |t - T| \quad \text{для любой точки } T \in V_{|f-t|}(t),$$

где h – заданное выше число.

В самом деле, если $|t - T| \le \delta$, то

$$V_{r(t)}(t) \subset V_{r(t)+\delta}(T)$$

и, так как

$$K_{r(t)}(t) \cap G \neq \varnothing,$$

то выполняется соотношение

$$K_{r(t)+\delta}(T) \cap G \neq \varnothing$$

и, значит, $r(T) \le r(t) + \delta$. Аналогично доказывается неравенство $r(t) \le r(T) + \delta$.

2. Дифференцирование функции $r_h(t)$ по направлениям

При выборе направления движения объекта t важно знать производную функции $r(t)$ по направлениям $\widetilde{t}$, $|\widetilde{t}| = 1$,

$$\frac{\partial r}{\partial \widetilde{t}} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{r(t + \lambda\widetilde{t}) - r(t)}{\lambda}.$$

Далее используется

Теорема. (В. Ф. Демьянов [2]). *Пусть $\mathcal{T}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, G — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$, $R(t, g)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая по t на $\mathcal{T} \times G$ функция,*

$$r(t) = \max\{R(t, g)\colon\ g \in G\},$$

$$G(t) = \{g \in G\colon\ R(t, g) = r(t)\}.$$

Функция $r(t)$ имеет в каждой точке $t \in \mathcal{T}$ производную по любому направлению $\widetilde{t}$, $|\widetilde{t}| = 1$, причем

$$\frac{\partial r}{\partial \widetilde{t}} = \max\left\{\frac{\partial R(t, g)}{\partial \widetilde{t}}\colon\ g \in G(t)\right\}.$$

Пусть $g \in V_{|t-f|}(t) \setminus \operatorname{conv}\bigl(V_h(f) \cup t\bigr)$. Введем функцию $R_h(t, g)$ следующим образом:

$$R_h(t, g) = \sup\{r\colon\ g \notin K_{r,h}(t, f)\} = \min\{r\colon\ g \in K_{r,h}(t, f)\}, \qquad (2.1)$$

тогда для функции (1.1) выполняется равенство

$$r_h(t, f, G) = \min\{R_h(t, g)\colon\ g \in G\}.$$

В дальнейшем точка f и число $h \ge 0$ предполагаются фиксированными.

Ради простоты будем предполагать далее, что

$$V_h(f) \cap G = \varnothing.$$

В этом случае можно положить

$$K_{r,h}(t,f) = \operatorname{conv}\bigl(V_r(t) \cup V_h(f)\bigr),$$

поскольку

$$\Bigl(\operatorname{conv}\,[V_r(t) \cup V_h(f)] \setminus V_h(f)\Bigr) \cap G = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{conv}\bigl(V_r(t) \cup V_h(f)\bigr) \cap G = \varnothing.$$

Граница $\operatorname{bd} K_{r,h}$ есть объединение трех поверхностей: конической (цилиндрической при $r = h$) $k_{r,h} = k_{r,h}(t,f)$ и двух сферических $s_r = s_r(t) \subset S_r(t)$, $s_h = s_h(f) \subset S_h(f)$, где $S_r(t) = \{v \in \mathbb{R}^3\colon |t - v| = r\}$ — сфера радиуса r с центром t. Таким образом,

$$k_{r,h} = k_{r,h}(t,f) = \operatorname{bd} K_{r,h} \backslash \bigl\{S_r(t) \cup S_h(f)\bigr\},$$

$$\operatorname{bd} K_{r,h} = s_r(t) \cup k_{r,h}(t,f) \cup s_h(f),$$

при этом $k_{r,h} \neq \varnothing$ лишь тогда, когда $r < |t - f| + h$ или $h < |t - f| + r$.

При $r \neq h$ будем обозначать через $v = v_t$ вершину конуса, частью границы которого является поверхность $k_{r,h}$.

Для числа $R = R_h(t,g)$, определенного в (2.1), возможны следующие случаи расположения точки g на поверхности тела $K_{R,h}$:

(1) $g \in s_R(t) \backslash \operatorname{bd} k_{R,h}$;

(2) $g \in k_{R,h}$ (в этом случае $g \notin \operatorname{bd} k_{R,h}$);

(3) $g \in s_R(t) \cap \operatorname{bd} k_{R,h}$.

В первом случае для всех достаточно близких к t точек T будет выполняться включение

$$g \in s_R(T) \backslash \operatorname{bd} k_{R,h}(T,f) \quad \text{при} \quad R = R_h(T,g).$$

Следовательно, $R_h(T,g) = |T - g|$. В частности, при любом направлении $\widetilde{t}$, $|\widetilde{t}| = 1$, любом достаточно малом $\lambda > 0$ для $t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t}$ будет $R_h(t_\lambda, g) = |t_\lambda - g|$. По теореме косинусов

$$|t_\lambda - g|^2 = R^2 + \lambda^2 + 2\lambda R \cos\xi,$$

где $R = R_h(t,g)$, ξ — угол между векторами $t - g$, $\widetilde{t}$. Отсюда

$$\frac{d}{d\lambda} R_\lambda(t_\lambda, g)\Big|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}|t_\lambda - g| = \cos\xi. \tag{2.2}$$

Во втором случае для всех достаточно близких к t точек T будет выполняться включение

$$g \in k_{R,h}(T,f) \quad \text{при} \quad R = R_h(T,g)$$

и

$$R_h(T,g) = d(T, L_g),$$

где L_g — прямая, содержащая точку g и пересекающаяся с $k_{R,h}$ по отрезку ненулевой длины, а $d(T, L_g)$ — евклидово расстояние от точки T до L_g.

В третьем случае введем плоскость H, ортогональную прямой L_g и содержащую точку t. Возможны два подслучая.

(3 а) Если точка T из окрестности точки t лежит в замкнутом полупространстве, образованном плоскостью H и содержащем f, то

$$R_h(T,g) = |T - g|$$

и для $T = t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t}$ применима формула (2.2).

(3 b) Если же точка T не принадлежит этому полупространству, то

$$R_h(T,g)=d(T,L_g).$$

Рассмотрим случаи (2) и (3 b). Пусть $t_\lambda=t+\lambda\widetilde{t}\ (\lambda\ge 0)$, $R_\lambda=R_h(t_\lambda,g)$ — число, определенное в (2.1), $L_{g,\lambda}$ — прямая, содержащая точку g и пересекающаяся с $k_{R_\lambda,h}$ по отрезку ненулевой длины, т. е. $L_{g,\lambda}$ является образующей прямой конической поверхности $k_{R_\lambda,h}$. Обозначим

$$R=R_0,\quad L_g=L_{g,0},\quad p=p(g)=L_g\cap S_R$$

и введем декартову систему координат с началом в точке $p=p(g)$, осью аппликат, сонаправленной с вектором $t-p$ и осью ординат, которая ортогональна плоскости, содержащей точку t и прямую $L_{g,\lambda}$. Эта плоскость содержит ось аппликат и вращается вокруг нее при изменении λ. Пусть $\widetilde{y}_\lambda$ и $\widetilde{z}$ — проекции вектора $\widetilde{t}$ на оси ординат и аппликат. Для расстояния $R_\lambda=d(t_\lambda,L_{g,\lambda})=R_h(t_\lambda,g)$ имеем

$$R_\lambda^2=(R+\lambda\widetilde{z})^2+(\lambda\widetilde{y}_\lambda)^2,$$

откуда

$$\frac{R_\lambda^2-R^2}{\lambda}=2R\widetilde{z}+\lambda(\widetilde{z}^2+\widetilde{y}_\lambda^2),$$

и так как величина $\widetilde{y}_\lambda$ ограничена, то

$$(R_\lambda)'_{\lambda=0}=\widetilde{z}=\cos\xi, \tag{2.3}$$

где ξ — угол между векторами $t-p(g)$, $\widetilde{t}$.

Пусть $g\in k_{R,h}(t,f)$, тогда $g\in k_{R_\lambda,h}(t_\lambda,f)$. Обозначим $\rho=|t-f|$, $\rho_\lambda=|t_\lambda-f|$ и через t_g, $t_{\lambda g}$ — точки $t_g\in[t,f]$, $t_{\lambda g}\in[t_\lambda,f]$ такие, что отрезок $[t_g,g]$ ортогонален прямой L_g, а $[t_{\lambda g},g]$ ортогонален прямой $L_{g,\lambda}$. При $R\ne h$, $R_\lambda\ne h$ обозначим через v, v_λ вершины конусов, поверхности которых содержат $k_{R,h}$ и $k_{R_\lambda,h}$ соответственно.

Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&|t_{\lambda g}-g|=R_\lambda\frac{|t_{\lambda g}-v_\lambda|}{|t_\lambda-v_\lambda|}, &&|t_g-g|=R\frac{|t_g-v|}{|t-v|}, &&|t_{\lambda g}-t_g|=\lambda\frac{|t_g-f|}{\rho},\\
&\rho|t_{\lambda g}-f|=\rho_\lambda|t_g-f|, &&|f-v|=\frac{\rho h}{R-h}, &&|f-v_\lambda|=\frac{\rho_\lambda h}{R_\lambda-h}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

По теореме косинусов

$$|t_{\lambda g}-g|^2-|t_g-g|^2=|t_{\lambda g}-t_g|^2+2|t_g-g|\,|t_{\lambda g}-t_g|\cos\xi,$$

где ξ — угол между векторами $\widetilde{t}$, t_g-g, т. е. между векторами $\widetilde{t}$, $t-p(g)$. С помощью соотношений (2.4) устанавливаются равенства

$$|t_{\lambda g}-g|-|t_g-g|=R_\lambda\left(\frac{|t_{\lambda g}-v_\lambda|}{|t_\lambda-v_\lambda|}-\frac{|t_g-v|}{|t-v|}\right)+(R_\lambda-R)\frac{|t_g-v|}{|t-v|},$$

$$\begin{aligned}
|t_{\lambda g}-v_\lambda|\,|t-v|-|t_g-v|\,|t_\lambda-v_\lambda|&=(|t_{\lambda g}-f|+|f-v_\lambda|)(\rho+|f-v|)-(|t_g-f|+|f-v|)(\rho_\lambda+|f-v_\lambda|)\\
&=(\rho+|f-v|)|t_{\lambda g}-f|-(\rho_\lambda+|f-v_\lambda|)|t_g-f|+\rho\rho_\lambda h\frac{R-R_\lambda}{(R_\lambda-h)(R-h)}\\
&=\rho\frac{R}{R-h}\,|t_{\lambda g}-f|-\rho_\lambda\frac{R_\lambda}{R_\lambda-h}|t_g-f|-\rho\rho_\lambda h\frac{R_\lambda-R}{(R_\lambda-h)(R-h)}\\
&=h\rho_\lambda(|t_g-f|-\rho)\frac{R_\lambda-R}{(R_\lambda-h)(R-h)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|t_{\lambda g} - g|^2 - |t_g - g|^2 = (|t_{\lambda g} - g| - |t_g - g|)(|t_{\lambda g} - g| + |t_g - g|)\\
&= \left[R_\lambda \frac{h\rho_\lambda(|t_g - f| - \rho)(R_\lambda - R)}{|t_\lambda - v_\lambda||t - v|(R_\lambda - h)(R - h)} + (R_\lambda - R)\frac{|t_g - v|}{|t - v|}\right]\Big(|t_{\lambda g} - g| + |t_g - g|\Big)\\
&= \left[R_\lambda \frac{h\rho_\lambda(|t_g - f| - \rho)}{|t_\lambda - v_\lambda||t - v|(R_\lambda - h)(R - h)} + \frac{|t_g - v|}{|t - v|}\right]\Big(|t_{\lambda g} - g| + |t_g - g|\Big)(R_\lambda - R)\\
&= \lambda^2 \frac{|t_g - t|}{\rho} - 2\lambda|t_g - g|\frac{|t_g - f|}{\rho}\cos\xi.
\end{aligned}
$$

После деления этого равенства на $\lambda > 0$ и перехода к пределу при $\lambda \to +0$ получаем

$$
\left(R\,\frac{h\rho(|t_g - f| - \rho)}{|t - v|^2(R - h)^2} + \frac{|t_g - v|}{|t - v|}\right)\frac{\partial R}{\partial \widetilde{t}} = \frac{|t_g - f|}{\rho}\cos\xi.
$$

Элементарные вычисления показывают, что коэффициент перед $\partial R/\partial\widetilde{t}$ равен $|t_g - f|/\rho$.

Отсюда и из формул (2.2), (2.3) следует непрерывность производной функции $R_h(t,g)$ по направлениям.

Применяя теорему В. Ф. Демьянова, убеждаемся, что справедлива

Теорема 1. *Функция $r(t)$ дифференцируема по любому направлению $\widetilde{t}$, $|\widetilde{t}| = 1$, при этом*

$$
\frac{\partial r(t)}{\partial \widetilde{t}} = \min\left\{\frac{\partial R_h(t,g)}{\partial \widetilde{t}}:\ \ g \in G(t)\right\}, \tag{2.5}
$$

$$
\frac{\partial R_h(t,g)}{\partial \widetilde{t}} = \cos\xi,
$$

где ξ — угол между векторами $t - g$, $\widetilde{t}$, когда $g \in s_{R,h}$, и угол между векторами $t - p(g)$, $\widetilde{t}$, если $g \in k_{R,h}$, а

$$
G(t) = \{g \in G:\ \ R_h(t,g) = r(t)\}.
$$

3. Теорема об очистке

В соответствии с (2.5) задача дифференцирования функции $r(t) = r_h(t)$ сводится к дифференцированию функции $R_h(t,g)$ для всех точек $g \in G(t)$ и поиску минимума производной на множестве точек из $G(t)$. Следующая теорема дает информацию о расположении точек g, в которых этот минимум достигается. Рассмотрим нетривиальный случай, когда векторы $t - f$ и $\widetilde{t}$ неколлинеарны.

Введем в $\mathbb{R}^3$ новую декартову систему координат с началом в точке t, осью аппликат $\{t + \theta(f - t):\ \theta \in \mathbb{R}\}$, плоскостью (Y,Z), параллельной вектору $\widetilde{t}$, осью ординат, сонаправленной с проекцией на нее вектора $\widetilde{t}$. Обозначим через C окружность, являющуюся пересечением сферы $S_r(t)$ с плоскостью, которая ортогональна вектору $\widetilde{t}$ и содержит точку $t + (r\,r'(0))\widetilde{t}$, где $r'(t) = \partial r(t)/\partial\widetilde{t}$. Пусть еще две точки $v^{\pm} \in S_{\mathcal{R}}(t) \cap (X,Y)$ расположены симметрично относительно оси ординат Y и имеют одинаковую ординату

$$
\frac{\rho\,|r - h|\Big[\,|r - h|\cos\gamma - \rho r'(0)\Big]}{\Big(\rho^2 - (r - h)^2\Big)\sin\gamma},
$$

где

$$
\mathcal{R} = \frac{r\,\rho}{\sqrt{\rho^2 - (r - h)^2}}, \quad r = r(t), \quad \rho = |t - f|,
$$

γ — угол между векторами $\widetilde{t}$ и $t-f$, и пусть $L_{v^\pm}$ — прямые, содержащие точки $v^\pm$ и пересекающиеся с $k_{r,h}(t,f)$ по отрезку ненулевой длины.

Имеем

$$r'(t) = \lim_{\lambda\to+0} \frac{r(t_\lambda) - r(t)}{\lambda}.$$

Для любого λ существует точка $g_\lambda \in G$ такая, что $R_h(t_\lambda, g_\lambda) = r(t_\lambda)$. Она удовлетворяет одному из условий:

(1) $g_\lambda \in s_{r_\lambda}(t_\lambda)$, т. е. $r_\lambda = |g_\lambda - t_\lambda|$,

(2) $g_\lambda \in k_{r_\lambda}(t_\lambda)$, т. е. $r_\lambda = d(t_\lambda, L_{g_\lambda})$,

где $r_\lambda = r(t_\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{g_\lambda\}$ такова, что*

$$\lim_{\lambda\to+0} \frac{R_h(t_\lambda, g_\lambda) - r(t)}{\lambda} = r'(t)$$

и $g = \lim\limits_{\lambda\to+0} g_\lambda$. Если последовательность $\{g_\lambda\}$ удовлетворяет условию (1), *то g принадлежит окружности C и*

$$\frac{\partial r(t)}{\partial \widetilde{t}} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{|t_\lambda - g| - r(t)}{\lambda}. \tag{3.1}$$

Если последовательность $\{g_\lambda\}$ удовлетворяет условию (2), то g принадлежит одной из прямых $L_{v^\pm}$ и

$$\frac{\partial r(t)}{\partial \widetilde{t}} = \lim_{\lambda\to+0} \frac{d(t_\lambda, L_g) - r(t)}{\lambda}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Первая часть теоремы установлена в [1, теорема 5]. Докажем вторую часть теоремы. Рассматривается нетривиальный случай, когда векторы $\widetilde{t},\ f-t$ неколлинеарны. Пусть $h<r,\ v=v_t,\ v_\lambda = v_{t_\lambda}$ — вершины конусов, частью границы которых являются поверхности $k_{r,h}$ и $k_{r_\lambda,h}$ соответственно. Будем использовать декартову систему координат, определенную в начале разд. 3. Пересечением конусов

$$\mathcal{K}_r = \Big\{v + \theta\, w\colon\ \ w \in V_h(f),\ \theta>0\Big\} = \Big\{v + \theta\, w\colon\ \ w \in V_r(t),\ \theta>0\Big\},$$

$$\mathcal{K}_{r_\lambda} = \Big\{v_\lambda + \theta\, w\colon\ \ w \in V_h(f),\ \theta>0\Big\} = \Big\{v_\lambda + \theta\, w\colon\ \ w \in V_{r(t_\lambda)}(t_\lambda),\ \theta>0\Big\}$$

с плоскостью (X,Y) являются круг с границей

$$x^2+y^2=\mathcal{R}^2, \quad \mathcal{R} = \frac{r\,\rho}{\sqrt{\rho^2-(r-h)^2}}, \quad r=r(t), \quad \rho=|t-f| \tag{3.3}$$

и эллипс с границей

$$\left(\frac{x}{a_\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y-c_\lambda}{b_\lambda}\right)^2 = 1. \tag{3.4}$$

Пусть γ — угол между векторами $t-f,\ \widetilde{t},\ \beta_\lambda$ — угол между векторами $t-f,\ t_\lambda - f,\ \xi_\lambda$ — угол между вектором $t_\lambda - v_\lambda$ и лучом с вершиной v_λ, касательным к сфере $S_{r_\lambda}(t_\lambda)$, где $t_\lambda = t+\lambda\widetilde{t},\ r_\lambda = r(t_\lambda)$. Вычисления показывают, что большая полуось b_λ эллипса и ордината c_λ его центра c выражаются в виде

$$2b_\lambda = w_1\left(\frac{B_2-w_2}{B_1-w_1} - \frac{A_2-w_2}{A_1-w_1}\right), \qquad 2c_\lambda = w_1\left(\frac{B_2-w_2}{B_1-w_1} + \frac{A_2-w_2}{A_1-w_1}\right),$$

где $\quad w_1=\rho+\dfrac{h\rho_\lambda}{r_\lambda-h}\cos\beta_\lambda, \qquad w_2=-\dfrac{h\rho_\lambda}{r_\lambda-h}\sin\beta_\lambda, \qquad \rho_\lambda=t_\lambda-f,$

$$A_1=r_\lambda\sin(\beta_\lambda+\xi_\lambda)-\lambda\cos\gamma, \qquad A_2=r_\lambda\cos(\beta_\lambda+\xi_\lambda)+\lambda\sin\gamma,$$

$$B_1=r_\lambda\sin(\xi_\lambda-\beta_\lambda)-\lambda\cos\gamma, \qquad B_2=-r_\lambda\cos(\xi_\lambda-\beta_\lambda)+\lambda\sin\gamma.$$

Для определения малой полуоси a_λ эллипса построим круг, являющийся сечением шара $V_{r_\lambda}(t_\lambda)$ плоскостью, содержащей центр эллипса и ортогональной плоскости (Y,Z). Пусть T_λ — центр, а $r_T=r_{T_\lambda}$ — радиус этого круга, тогда

$$a_\lambda=\frac{r_T|c-v_\lambda|}{\sqrt{|T_\lambda-v_\lambda|^2-r_T^2}}.$$

Вычисления дают

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to+0}\frac{c_\lambda}{\lambda}=\frac{r\rho^2\sin\gamma}{(r-h)\big[(r-h)^2-\rho^2\big]},\\
&\lim_{\lambda\to+0}\frac{\mathcal{R}^2-a_\lambda^2}{\lambda}=\rho\frac{\rho(r_\lambda^2)'+2r(r-h)\cos\gamma}{\big[\rho^2-(r-h)^2\big]^2},\\
&b_\lambda^2-a_\lambda^2=O(\lambda^2).
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Для решения y_λ системы уравнений (3.3), (3.4), используя соотношения (3.5), получаем

$$y_*=\lim_{\lambda\to+0}y_\lambda=\frac{\lim\limits_{\lambda\to+0}\dfrac{\mathcal{R}^2-a_\lambda^2}{\lambda}}{2\lim\limits_{\lambda\to+0}\dfrac{c_\lambda}{\lambda}}=\frac{\rho(r-h)\big[(r-h)\cos\gamma-\rho\, r'(0)\big]}{\big[\rho^2-(r-h)^2\big]\sin\gamma}. \tag{3.6}$$

Обозначим $p_\lambda=L_{g_\lambda}\cap(X,Y)$. Точка p_λ лежит на границе конуса $\mathcal{K}_{r_\lambda}$. Поскольку $g_\lambda\notin\mathcal{K}_r$, то p_λ лежит вне внутренности круга $\mathcal{K}_r\cap(X,Y)$. Но $g\overset{def}{=}\lim\limits_{\lambda\to+0}g_\lambda\in\mathcal{K}_r$ и $p\overset{def}{=}\lim\limits_{\lambda\to+0}p_\lambda\in\mathcal{K}_r\cap(X,Y)$. Поскольку центр эллипса (3.4) двигается к t вдоль оси Y при $\lambda\to+0$, то ордината y_λ точки пересечения окружности и эллипса расположена между ординатами $y(p_\lambda),\ y(p)$ точек p_λ и p. Так как $p_\lambda\to p$, то

$$\lim_{\lambda\to+0}y(p_\lambda)=\lim_{\lambda\to+0}y_\lambda$$

и, значит, $y(p)=y_*$. Отметим, что

$$L_p=\left\{(\theta x_*,\theta y_*,(1-\theta)(\rho+h))\colon\ \theta\in\mathbb{R}\right\}.$$

Квадрат расстояния от точки $t_\lambda=(0,\ \lambda\sin\gamma,\ -\lambda\cos\gamma)$ до луча L_p выражается следующим образом:

$$d^2(t_\lambda,p)=\theta^2\Big(x_*^2+y_*^2+(\rho+h)^2-2\theta(\lambda y_*\sin\gamma+\lambda(\rho+h)\cos\gamma+(\rho+h)^2\Big)$$
$$+(\rho+h)^2+2\lambda(\rho+h)\cos\gamma,$$

где

$$\theta=\big[\lambda y_*\sin\gamma+\lambda(\rho+h)\cos\gamma+(\rho+h)^2\big]\big[x_*^2+y_*^2+(\rho+h)^2\big]^{-1}.$$

Элементарные рассуждения с учетом равенства (3.6) показывают, что

$$d^2(t_\lambda,L_p)-r^2=2rr'+o(\lambda),$$

откуда следует (3.2) в случае $h<r$. При $h>r$ рассуждения аналогичны. Доказательство завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В. И.** Два способа характеризации видимости двигающейся точки // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 67—81.
2. **Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

Бердышев Виталий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
директор
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 23.03.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517.972.8

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА С ДВУМЯ УКЛОНЯЮЩИМИСЯ ТОЧКАМИ[1]

Ю. И. Бердышев

Рассматривается задача, в которой преследователь, описываемый нелинейной системой третьего порядка, стремится за кратчайшее время осуществить последовательное сближение с двумя прямолинейно движущимися точками. Последние за счет выбора направлений своих движений стремятся время сближения максимально увеличить.

Ключевые слова: управление, преследователь, убегающие, последовательное сближение.

Yu. I. Berdyshev. On one nonlinear problem of sequential approach of a controlled object to two evading points.

We consider a problem in which a pursuer described by a nonlinear third-order system aims to sequentially approach two points moving along straight lines in a minimal time. The points aim to increase the approach time as much as possible by choosing their directions of motion.

Keywords: control, pursuer, evaders, sequential approach.

1. Введение

Данная статья продолжает исследования автора в области нелинейных задач последовательного управления. Идейной основой этих исследований являются принцип максимума Л.С. Понтрягина [1], общий принцип двойственности, установленный Н. Н. Красовским и сформулированный им в виде проблемы моментов [2, гл. 2], а также результаты его применения А. Б. Куржанским и Ю. С. Осиповым при решении линейных задач управления при стесненных фазовых координатах [3, 4]. Следует отметить, что задачи последовательной оптимизации в игровой постановке рассматривались в работах А. Н. Красовского, Н. Н. Красовского и Н. Ю. Лукоянова [5, 6]; в [7, 8] с использованием упомянутого принципа двойственности установлены некоторые свойства решений линейных задач последовательного управления.

Итак, рассматривается задача, в которой преследователь (нелинейная управляемая система третьего порядка, описывающая простейшую модель движения самолета в горизонтальной плоскости), стремится за кратчайшее время осуществить последовательное сближение с двумя точками, движущимися прямолинейно с постоянными скоростями. Начальные состояния преследователя и убегающих заданы. Временем поимки считается время сближения с последним убегающим. В начальный момент времени убегающие, находящиеся в одной точке, выбирают направления своих движений, однозначно определяемые углами β_1 и β_2. Предполагается, что этот выбор мгновенно становится известным преследователю, который в зависимости от значений β_1 и β_2 определяет очередность сближения с убегающими и свое программное управление, реализующее поочередное сближение за наименьшее время.

Задачей убегающих является определение таких направлений движения, которые при оптимальном поведении преследователя, выбирающего очередность сближения и управление своим движением, позволяют максимально отдалить момент поимки.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00436) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления”.

Решение задачи основано на результатах работ [9–12], при этом настоящая работа является продолжением [13]. Отличительной особенностью этой задачи от рассматриваемой в [13] является возможность преследователя выбирать очередность сближения, что существенно влияет на решение убегающими поставленной задачи. Кроме того, здесь рассматривается не исследованный ранее случай, когда начальные положения убегающих совпадают.

Рассматриваемая нелинейная система третьего порядка использовалась Р. Айзексом [14] при постановке задачи “шофер-убийца”, а также в работах [15–21].

Следует отметить, что задачи не с одним, а с несколькими убегающими рассматривались ранее [22–24], но при этом предполагалось, что преследователь является безинерционным, т. е. описывается системой простых движений.

2. Постановка задачи

Движение объекта (преследователя) в горизонтальной плоскости описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений [14]

$$\dot{x} = \cos\ \theta, \quad \dot{y} = \sin\ \theta, \quad \dot{\theta} = u; \quad |u| \le 1. \tag{2.1}$$

Эта система описывает простейшую модель движения самолета, автомобиля (преследователя) в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью, равной единице. Здесь x, y — координаты преследователя, отождествляемого с точкой на плоскости, θ — угол между вектором скорости преследователя и осью x, u — управляющий параметр, удовлетворяющий указанному ограничению и характеризующий скорость изменения угла θ. Неравенство в (2.1) ограничивает радиус кривизны траектории преследователя на плоскости. А именно, радиус кривизны не может быть меньше единицы. Система (2.1) функционирует на конечном достаточно большом промежутке времени $T_* = [0, t^0]$. В качестве множества допустимых управлений преследователя выберем $\mathbf{U}$ — множество всех измеримых по Борелю функций $U:\ T_* \to\ [-1, 1]$.

На плоскости x, y имеются две точки $W_i(t)$ $(i = 1, 2)$, каждая из которых движется только по соответствующей ей прямой с постоянной скоростью $v < 1$. Эти точки будем называть убегающими или целями. Начальное состояние преследователя и убегающих заданы, а именно, преследователь находится в точке $W_0 = (0, 0)$, а его вектор скорости направлен по оси абсцисс; оба убегающих находятся в одной точке W_{10} с координатами (x_{10}, y_{10}). По соображениям симметрии, без ограничения общности можно считать, что $y_{10} \ge 0$. Предполагается, что имеет место неравенство

$$(a-1)/2v_1 > \gamma_0, \tag{2.2}$$

где

$$\gamma_0 = \begin{cases} \operatorname{arctg}\ \dfrac{y_{10}-1}{x_{10}} + \pi/2, & x_{10} \ne 0, \\ \pi, \quad x_{10} = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$a = \sqrt{x_{10}^2 + (y_{10}-1)^2},$$

т. е. точка W_{10} достаточно далеко расположена от окружности C_1, являющейся траекторией преследователя при $U(t) = 1,\ t \ge 0$. Заметим, что левая часть в неравенстве (2.2) равна времени, необходимому убегающему для преодоления половины расстояния между точками W_{10} и P, где P — точка окружности C_1, ближайшая к W_{10}, а правая часть (2.2) (см. (2.3)) равна времени перемещения преследователя по окружности C_1 из точки W_0 в точку P.

Убегающие в начальный момент времени выбирают направления своих движений, определяемые соответственно углами β_1 и β_2. Этот выбор мгновенно становится известным преследователю. В зависимости от значений β_1 и β_2 преследователь определяет очередность сближения с убегающими и свое программное управление $U \in \mathbf{U}$, реализующее поочередное сближение (поимку) за наименьшее время. Здесь возможны только две очередности $j_1 = \{1, 2\}$

и $j_2 = \{2,1\}$. Их совокупность обозначим через $\mathbf{J}$. Убегающие $W_i(t)$ $(i = 1,2)$ считаются пойманными, если их местоположения в некоторые моменты времени t_i совпадут с местоположением преследователя. Временем поимки обоих убегающих будем считать время T сближения с последним убегающим. Очевидно, время T зависит от очередности $j \in \mathbf{J}$, управления преследователя $U \in \mathbf{U}$ и пары $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{B}$ $(\mathbf{B} = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$: $T = T(j, U, \beta_1, \beta_2)$.

Основная задача состоит в выборе углов β_1 и β_2, при которых

$$\min_{j\in\ \mathbf{J},\ U\in\ \mathbf{U}} T(j, U, \beta_1, \beta_2) \to \sup_{(\beta_1,\beta_2)\in\ \mathbf{B}}. \tag{2.4}$$

Вспомогательная задача состоит в решении задачи (2.4) при условии, что преследователь является безинерционным, т. е. описывается системой простых движений [22–24], причем скорость преследователя равна единице и может иметь произвольное направление.

3. Решение вспомогательной задачи

В случае простых движений оптимальная траектория преследователя состоит из двух отрезков прямых W_0W_1, W_1W_2, где W_1 и W_2 — точки сближения преследователя с убегающими.

В данном разделе введем следующие обозначения: l_0 — прямая, проходящая через точки W_0 и W_{10}; l_1 — прямая, ортогональная прямой l_0 (см. рис. 1) и проходящая через точку W_{10}; β_1 — угол между прямой l_1 и направлением движения первого убегающего; β_2 — угол между прямой l_1 и направлением движения второго убегающего; α — угол между прямой l_0 и осью абсцисс; a, q, r, s, p — длины соответственно отрезков W_0W_{10}, $W_{10}W_1$, W_0W_1, W_1W_2, $W_{10}W_2$; $\gamma = \pi - \beta_1 - \beta_2$.

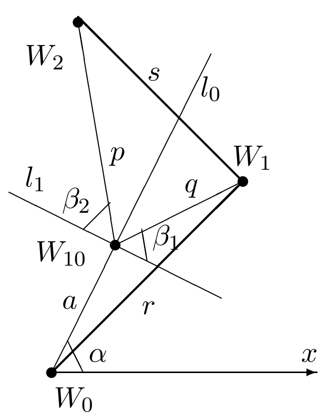


Рис 1.

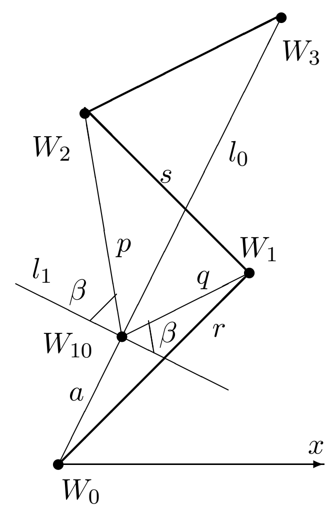


Рис 2.

Имеем

$$r^2 = a^2 + q^2 + 2aq \sin \beta_1. \tag{3.1}$$

Поскольку W_1 — точка сближения, то $q/v = r$. Отсюда с учетом (3.1) получим уравнение

$$kq^2 - 2aq \sin \beta_1 - a^2 = 0 \quad (k = (1 - v^2)/v^2) \tag{3.2}$$

для определения q. Из (3.2) имеем

$$q = a\Big(\sin \beta_1 + \sqrt{\sin^2 \beta_1 + k}\Big)/k. \tag{3.3}$$

Отсюда видно, что с ростом β_1 от нуля до $\pi/2$ величина q монотонно возрастает. Кроме того, имеем

$$s^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos\gamma; \quad (p-s)/v = s, \tag{3.4}$$

следовательно,

$$kp^2 - 2pqn + kq^2 = 0 \quad (n = 1/v^2 - \cos\gamma). \tag{3.5}$$

Из (3.5) получим

$$p = q\Big(n + \sqrt{n^2 - k^2}\,\Big)/k \tag{3.6}$$

(p — путь, пройденный последним убегающим до встречи с преследователем).

Используя соображения симметрии, можно показать, что для увеличения времени своей поимки убегающие должны двигаться в разные стороны от прямой l_0. Без ограничения общности № 1 присвоим убегающему, движущемуся вправо от прямой l_0. При очередности $j_1 = \{1, 2\}$ время поимки T_{12} убегающих определяется формулой $T_{12} = p/v$. Траекторией преследователя является ломаная $W_0W_1W_2$. На рис. 1 она выделена жирными линиями. Предположим, что $\beta_1 \neq \beta_2$ и для определенности $\beta_1 < \beta_2$. Покажем, что в этом случае справедливо неравенство $T_{12} < T_{21}$, где T_{21} — время поимки при очередности $j_2 = \{2, 1\}$. Действительно, путь q_0, пройденный убегающим № 2 при этой очередности, определяется формулой

$$q_0 = a\Big(\sin\beta_2 + \sqrt{\sin^2\beta_2 + k}\,\Big)/k. \tag{3.7}$$

Из (3.3) и (3.7) с учетом неравенства $\beta_1 < \beta_2$ имеем соотношение $q_0 > q$. Пусть p_0 — путь, пройденный убегающим № 1 при этой очередности. Тогда

$$p_0 = q_0\Big(n + \sqrt{n^2 - k^2}\,\Big)/k. \tag{3.8}$$

Из (3.6), (3.8) и неравенства $q_0 > q$ вытекает, что $p_0 > p$. Отсюда с учетом соотношения $T_{21} = p_0/v$ вытекает неравенство $T_{12} < T_{21}$. Поэтому для преследователя оптимальной будет очередность j_1. Если угол β_1 уменьшить, а угол β_2 увеличить на одно и то же достаточно малое положительное число, то время T_{12} уменьшится, а время T_{21} увеличится. Вариацию углов β_1 и β_2 можно производить до тех пор, пока не наступит равенство $T_{12} = T_{21}$. Отсюда следует справедливость следующего утверждения.

Предложение 3.1. *Оптимальные углы β_1, β_2 во вспомогательной задаче должны быть такими, чтобы имело место равенство $T_{12} = T_{21}$.*

Очевидно, при этом оптимальные углы β_1 и β_2 должны быть равными. Далее (до конца раздела) полагаем $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Тогда

$$p = q\Big(m + \sqrt{m^2 - k^2}\,\Big)/k, \tag{3.9}$$

где $m = 1/v^2 + \cos 2\beta$.

Определим угол β, при котором величина p принимает наибольшее значение. Для этого вычислим производную $\dot p$ по углу β. После некоторых преобразований получим

$$\dot p = q(m + \sqrt{m^2 - k^2}\,)\cos\beta\left[\frac{1}{\sqrt{\sin^2\beta + k}} - \frac{4\sin\beta}{\sqrt{m^2 - k^2}}\right]/k. \tag{3.10}$$

Заметим, что при $\beta = \pi/2$ величина $m^2 - k^2$ равна нулю. Поэтому $\beta = \pi/2$ является критической точкой. Кроме того, выражение в квадратной скобке в (3.10) при $\beta = 0$ положительно, а при $\beta = \pi/4$ отрицательно. Следовательно, найдется угол β, при котором это выражение обращается в нуль:

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2\beta + k}} - \frac{4\sin\beta}{\sqrt{m^2 - k^2}} = 0. \tag{3.11}$$

Из (3.11) после некоторых преобразований получим уравнение

$$3\cos^2 2\beta \; - 10/v^2 \cos 2\beta + 3\big(2/v^2 - 1\big) = 0 \tag{3.12}$$

для определения угла β, претендующего на оптимальность. Поскольку дискриминант

$$D = (5/v^2 - 9/5)^2 + (12/5)^2 \tag{3.13}$$

этого квадратного уравнения (относительно $\cos 2\beta$) положителен, то уравнение (3.12) имеет два действительных корня, один из которых (наибольший) отбрасываем, так как он больше единицы. Из (3.12) имеем

$$\beta = 2\arccos\big[1/3\,\big(5/v^2 - \sqrt{D}\,\big)\big], \tag{3.14}$$

где D определяется формулой (3.13). Значение выражения, стоящего в квадратной скобке в (3.14), больше нуля, но меньше 3/5. Можно показать, что углы β_1 и β_2, равные (3.14), являются решением вспомогательной задачи. Заметим, что совершенно иное решение имеет вспомогательная задача в случае, когда очередность сближения не выбирается преследователем, а задается априори. Это решение приведено, например, в [22]. В частном случае, когда в начальный момент времени убегающие находятся в одной точке, это решение определяется следующим замечанием.

З а м е ч а н и е 3.1. При заданной очередности сближения оптимальные направления движения убегающих должны быть следующими: убегающий, подлежащий поимке в первую очередь, должен двигаться по прямой l_0, удаляясь от точки W_0, а другой убегающий должен двигаться по прямой l_0 навстречу преследователю, т. е. $\beta_1 = \pi/2, \quad \beta_2 = -\pi/2$.

Рассмотрен также случай с тремя убегающими, находящимися в начальный момент времени в точке W_{10} и имеющими своей целью за счет выбора направлений своих движений максимально отдалить время своей поимки преследователем. Показано, что и здесь углы β_1, β_2, определяющие направления первого и второго убегающих, должны быть равны между собой, а движение третьего убегающего должно быть направленным по прямой l_0 (см. рис. 2).

При этом угол $\beta = \beta_1 = \beta_2$ определяется уравнением

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2\beta + k}} - \frac{4\sin\beta}{\sqrt{m^2 - k^2}} - \frac{1}{\sqrt{l^2 - k^2}} = 0, \tag{3.15}$$

$l = 1/v^2 - \sin\beta$. Заметим, что корень уравнения (3.15) должен находиться между нулем и корнем уравнения (3.12). На рис. 2 оптимальная траектория преследователя отмечена жирным шрифтом.

4. Решение основной задачи

В данном разделе используем следующие обозначения: C_1 и C_2 — окружности единичного радиуса, касающиеся оси x в начале координат $W_0 = (0, 0)$ и лежащие соответственно выше и ниже этой оси; l_0 — прямая, касающаяся окружности C_1 и проходящая через точку W_{10} (см. рис. 3); W_1 и W_2 — точки встречи преследователя с первым и вторым убегающими; x_1, y_1 и x_2, y_2 — координаты точек W_1 и W_2; $\mathcal{T}$ — траектория преследователя, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности [9,12]; L_{12} и L_{21} — $\mathcal{T}$, обеспечивающие поимку убегающих при очередностях $j_1 = \{1, 2\}$ и $j_2 = \{2, 1\}$; T_{12} и T_{21} — времена движения преследователя соответстенно по L_{12} и L_{21}; α — угол, определенный в начале предыдущего раздела.

Заметим, что C_1 и C_2 являются траекториями системы (2.1) соответственно при $U(t) = 1,\ t \geq 0$ и $U(t) = -1,\ t \geq 0$.

Если убегающие будут двигаться вместе (по одной прямой), то их можно считать одной целью и они будут пойманы одновременно. Вспомогательная задача с одним убегающим полностью исследована в [13], а именно, при условии (2.2) убегающий должен двигаться по прямой l_0, а преследователь по траектории, состоящей из дуги окружности C_1 и отрезка прямой l_0.

Для увеличения времени своей поимки убегающие должны выбирать различные направления движения.

При решении основной задачи используем необходимые условия оптимальности траектории преследователя [9,12]. Их геометрический смысл и результаты применения к системе (2.1) описаны в [13]. Известно [9,13], что $\mathcal{T}$ состоит из дуг окружностей единичного радиуса и отрезков прямых. При этом прямолинейные и криволинейные участки траектории $\mathcal{T}$ чередуются, если точка W_1 достаточно удалена от точек W_0 и W_2.

Покажем, что если точка W_{10}, в которой находятся убегающие в начальный момент времени, находится на достаточном удалении от начала координат, то оптимальные углы β_1, β_2 в основной задаче должны быть такими, чтобы имело место равенство

$$T_{12} = T_{21}. \tag{4.1}$$

Доказательство этого предложения проведем от противного. А именно, предположим, что имеет место неравенство $T_{12} \neq T_{21}$. Для определенности полагаем $T_{12} < T_{21}$. Если за счет варьирования углов β_1, β_2 можно добиться увеличения значения T_{12}, то эти углы не являются оптимальными. Невозможность увеличения величины T_{12} означает, что при этих углах величина T_{12} при очередности $j = \{1,2\}$ принимает максимальное значение.

Если точка W_{10} находится на достаточном удалении от начала координат, то решение основной задачи — углы β_1 и β_2 — будет мало отличаться от решения вспомогательной задачи — соответствующих углов β_1^* и β_2^*. Это связано с тем, что прямолинейные участки траектории преследователя (при углах β_1 и β_2, близких к β_1^* и β_2^*) по длине будут существенно больше криволинейных участков, а сама траектория преследователя будет мало отличаться от ломаной траектории, полученной при решении вспомогательной задачи. Этот факт будет иметь место и в случае, когда очередность $j = \{1,2\}$ задана. Согласно замечанию 3.1 угол $\beta_1^* = \alpha$ и угол $\beta_2^* = \alpha + \pi$. Но при углах β_1, β_2, близких к β_1^*, β_2^*, второй убегающий будет двигаться навстречу преследователю, а первый удаляться от него. Время T_{21} будет много меньше времени T_{12}, что противоречит ранее предположенному неравенству $T_{12} < T_{21}$.

Равенство (4.1), которое оказывается справедливым и при менее жестких ограничениях на местоположение точки W_{10}, положим в основу итерационного алгоритма решения основной задачи. Предварительно опишем метод построения $\mathcal{T}$ при фиксированных углах β_1, β_2 в предположении, что ее прямолинейные и криволинейные участки чередуются. Пусть l_1 и l_2 — траектории убегающих, исходящие из точки W_{10} в направлениях, определяемых этими углами; L_{12} и L_{21} — $\mathcal{T}$, обеспечивающие поимку убегающих, движущихся по прямым l_1 и l_2, соответственно при очередностях $j_1 = \{1,2\}$ и $j_2 = \{2,1\}$. На рис. 3 изображены L_{12} и L_{21}, первая из них проходит через точки W_0, M, N, W_1, Q, W_2, а вторая — через точки W_0, M^*, N^*, W_1, Q^*, W_2^*.

Для определения траектории L_{12} введем в рассмотрение три параметра: q, p, ν (q — путь, пройденный убегающим № 1 до встречи с преследователем; p — путь, пройденный убегающим № 2 до встречи с преследователем; ν — угол, образованный прямой l_1 с радиус-вектором точки W_1, началом которого является центр окружности C_3, содержащей дугу NW_1Q.

Для определения этих параметров составим три уравнения:

$$q/v = \varphi + |MN| + \delta_1, \tag{4.2}$$

$$(p-q)/v = \delta_2 + |QW_2|, \tag{4.3}$$

$$(x_b - x_1)(y_k - y_1) - (x_k - x_1)(y_b - y_1) = 0, \tag{4.4}$$

где

$$x_a = x_{10} - \cos\nu + q\cos\beta_1, \quad y_a = y_{10} - \sin\nu + q\sin\beta_1,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y_{10}-1}{x_{10}}, \quad \delta_1 = 2\arcsin\frac{|NW_1|}{2},$$

$$|MN| = \sqrt{x_a^2 + (y_a - 1)^2}, \quad |QW_2| = \sqrt{(x_2 - x_a)^2 + (y_2 - y_a)^2 - 1},$$

$$|NW_1| = \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2},$$

$$\delta_2 = \beta_2 + \arcsin\frac{1}{W_2A} + \arccos\frac{p^2 + |W_2A|^2 - |W_{10}A|}{2p|W_2A|}, \quad \gamma = \varphi + \delta_1 + \delta_2,$$

$$x_n = x_a + \sin\varphi, \quad y_n = y_a - \cos\varphi,$$

$$x_m = \sin\varphi, \quad y_m = 1 - \cos\varphi,$$

$$x_2 = x_{10} + p\cos\beta_2, \quad y_2 = y_{10} + p\sin\beta_2,$$

$$x_b = x_1 - v\cos\beta_2 + \cos(\varphi + \delta_1), \quad y_b = y_1 - v\sin\beta_2 + \sin(\varphi + \delta_1),$$

$$x_k = \frac{y_m - y_2 + x_2\operatorname{tg}\gamma - x_m\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\varphi}, \quad y_k = y_m + (x_k - x_m)\operatorname{tg}\varphi$$

(φ, δ_1, δ_2 — соответственно длины дуг W_0M, NW_1, W_1Q (см. рис. 3); $A = (x_a, y_a)$ — центр окружности C_3).

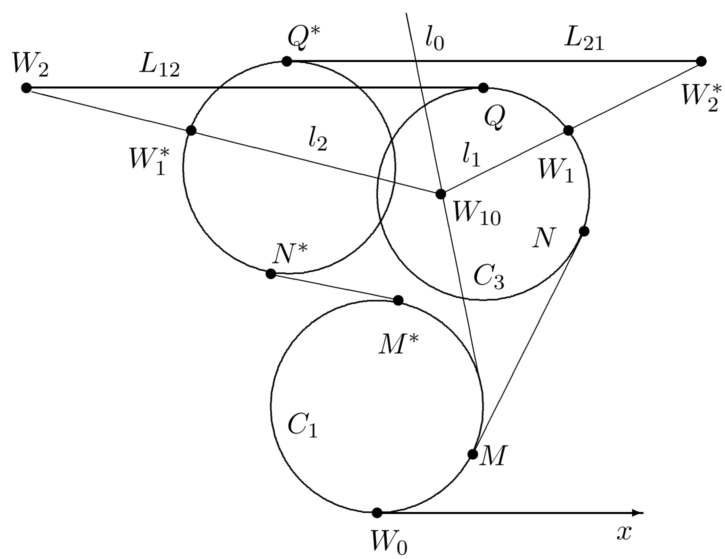


Рис. 3.

Левой и правой частями уравнения (4.2) являются времена движения убегающего № 1 и преследователя до их встречи в точке W_1. Левой и правой частями уравнения (4.3) являются времена движения убегающего № 2 и преследователя до их встречи в точке W_2 с момента встречи преследователя с первым убегающим. Уравнение (4.4) является следствием условия выравнивания [9, 12], при выполнении которого вектор разности скоростей преследователя и первого убегающего в точке W_1 их встречи должен быть ортогональным отрезку, соединяющему точки W_1 и K ($K = (x_k, y_k)$ — точка пересечения прямых, содержащих прямолинейные участки траектории L_{12}). Траектория L_{12}, определяемая соотношениями (4.2)–(4.4), фактически зависит только от двух параметров — β_1, β_2. То же самое можно сказать и о траектории L_{21}, которая определяется уравнениями, аналогичными (4.2)–(4.4).

Этот факт, а также соотношения (4.2)–(4.4) положены в основу итерационного алгоритма решения основной задачи. Суть его состоит в следующем. Для каждого угла β_1 из промежутка $[0, 2\pi]$ определяется угол β_2, при котором имеет место равенство (4.1). Таким образом определяется зависимость момента поимки T, определяемого соотношением $T = T_{12} = T_{21}$, только от одного аргумента — угла β_1, принадлежащего конечному промежутку $[0, 2\pi]$. Затем вычисляется угол β_1, при котором момент поимки достигает наибольшего значения. Для ускорения работы алгоритма начальные приближения углов β_1, β_2 определяются формулами $\beta_1 = \alpha + \beta - \pi/2$, $\beta_2 = \alpha - \beta + \pi/2$ (β — решение вспомогательной задачи (см.(3.14)), α — угол, определенный в начале предыдущего раздела).

5. Заключение

Определено условие, которому должны удовлетворять направления движения двух убегающих (углы β_1, β_2), обеспечивающие максимизацию времени своей поочередной поимки преследователем, действующим оптимальным образом (предполагается, что по выбранным убегающими углам β_1, β_2 преследователь определяет очередность сближения с убегающими и свое программное управление, реализующее это сближение за наименьшее время). Этим условием (см. предложение 3.1, (4.1)) является равенство времен поимки убегающих при двух возможных очередностях. Указанное условие позволяет построить итерационный алгоритм определения искомых углов β_1, β_2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
3. **Куржанский А.Б., Осипов Ю.С.** К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами //Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 2. С. 196–203.
4. **Куржанский А.Б., Осипов Ю.С.** К задаче об управлении при стесненных ограничениях // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 4. С. 705–719.
5. **Krasovskii A.N.,Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Basel: Birkhäuser, 1995. 320 p.
6. **Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.** Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 885–900.
7. **Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация взвешенного критерия в одной задаче управления // Кибернетика. 1986. № 1. С. 59–64.
8. **Морина С.И., Ченцов А.Г.** Задача последовательного сближения при комбинированных ограничениях на выбор управлений / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1987. Деп. в ВИНИТИ 02.09.87, № 6461-В87. 27 с.
9. **Бердышев Ю.И.** Об одной задаче последовательного сближения нелинейной управляемой системы третьего порядка с группой движущихся точек // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 5. С. 742–752.
10. **Бердышев Ю.И.** О задаче последовательного обхода одним нелинейным объектом двух движущихся точек // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11, № 1. С. 43–52.
11. **Бердышев Ю.И.** О построении области достижимости в одной нелинейной задаче // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. Вып. 4. С. 22–26.
12. **Бердышев Ю.И.** Об одной нелинейной задаче последовательного управления с параметром // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. Вып. 3. С. 38–43.
13. **Бердышев Ю.И.** О задаче последовательного обхода одним нелинейным объектом двух движущихся точек // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 43–52.
14. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир. 1967. 497 с.

15. **Dubins L.E.** On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents// Amer. J. Math. 1957. Vol. 79. P. 497–516.
16. **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
17. **Cockayne E.** Plane pursuit with curvature constraints // SIAM J. Appl. Math. 1967. Vol. 15, no. 6. P. 197–220.
18. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. Вып. 3. С. 8–11.
19. **Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В.** Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Управление космическими аппаратами и кораблями. М.: Наука, 1971. С. 410–418.
20. **Pesvaradi T.** Optimal horizontal quidance law for Aircraft in the terminal area // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. Vol. 17, no. 6. P. 763–772.
21. **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 6. С. 985–994.
22. **Чикрий А.А., Калашникова С.Ф.** Преследование управляемым объектом группы убегающих // Кибернетика. 1987. № 4. С. 1–8.
23. **Петросян Л.А., Томский Г.В.** Геометрия простого преследования. Новосибирск: Наука, 1983. 143 с.
24. **Иванов М.Н., Маслов Е.П.** О сравнении двух методов преследования в задаче о поочередной встрече // Автоматика и телемеханика. 1983. № 7. С. 38–43.

Бердышев Юрий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: berd@imm.uran.ru

Поступила 05.02.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517+519

АНАЛИЗ КООРДИНАТНЫХ И ДРУГИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ РЕДУКЦИИ[1]

С. Н. Васильев, Р. И. Козлов, С. А. Ульянов

Рассматриваются вопросы сохранения динамических свойств при переходе от одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к другой, получаемой заменой переменных, а также вопросы сохранения свойств в обратную сторону. На примерах свойств типа устойчивости, притяжения и диссипативности демонстрируются возможности предложенного ранее метода редукции для ответа на эти вопросы. Исследуются аналогичные вопросы для случая, когда вторая система получается путем, характерным для метода сравнения с вектор-функциями Ляпунова. Рассматривается применение одного из полученных критериев диссипативности к анализу нелинейной динамики группы движущихся объектов.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, устойчивость, диссипативность, метод редукции, координатные преобразования, вектор-функции Ляпунова, групповое управление, устойчивость формаций.

S. N. Vassilyev, R. I. Kozlov, S. A. Ul'yanov. Analysis of coordinate and other transformations of models of dynamical systems by the reduction method.

The issues of preserving dynamic properties when passing from a system of differential equations to another system obtained by a change of variables are considered, as well as issues of preserving the properties in the opposite direction. The possibilities of the reduction method, which was proposed earlier, in resolving these questions are demonstrated by the examples of such properties as stability, attraction, and dissipativity. Similar questions are investigated for the case when the second system is obtained by a way characteristic for the comparison method with vector Lyapunov functions. The application of one of the obtained dissipativity criteria to analyzing the nonlinear dynamics of a group of moving objects is considered.

Keywords: differential equations, stability, dissipativity, reduction method, coordinate transformations, vector Lyapunov functions, group control, formation stability.

Введение

Хорошо известно значение метода функций Ляпунова [1] в качественном анализе устойчивости и других динамических свойств систем механической и другой природы. Метод получил широкое распространение в мире с существенными и разнообразными расширениями и приложениями, прежде всего в работах отечественных ученых Н. Г. Четаева, Г. В. Каменкова, И. Г. Малкина, К. П. Персидского, Н. Н. Красовского, В. В. Румянцева, В. М. Матросова и других (см., например, [2–11]). В частности, в фундаментальных работах Николая Николаевича Красовского и его учеников метод функций Ляпунова был распространен на системы с запаздыванием, с постоянно действующими возмущениями, на задачи оптимального управления, динамические игры и на многие другие важные задачи и системы.

Одним из направлений развития метода функций Ляпунова явился метод сравнения В. М. Матросова [12, 13], использующий обобщение понятия функции Ляпунова — функцию сравнения, подчиненную условию мажорирования своих значений вдоль процессов изучаемой динамической системы текущими состояниями соответствующих процессов некоторой другой, более простой по замыслу системы, именуемой системой сравнения. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений правая часть системы сравнения возникает как некоторая мажоранта полной производной по времени функции сравнения (вектор-функции Ляпунова) в

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-1676.2008.1), Программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математическая теория управления" (координатор — академик Н. Н. Красовский) и частично Президиума СО РАН (проект № 45 ИДСТУ СО РАН-ИПМТ ДВО РАН).

силу исходной системы. При некоторых дополнительных условиях, накладываемых на функцию сравнения и формулируемых достаточно алгоритмично по конкретному виду определения изучаемого динамического свойства, гарантируется переносимость этого свойства из системы сравнения в исходную (направление сохранения свойств обратно направлению действия функции сравнения, привлекаемой для преобразования исходной системы в систему сравнения).

Вместе с тем известно, что даже такие преобразования моделей динамики систем, как замена переменных в форме гомеоморфизмов или диффеоморфизмов [10,15,16], могут не сохранять требуемые динамические свойства [1, 14, 15, 17, 18]. В частности, не сохраняется устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, на что указал А. М. Ляпунов в своей фундаментальной работе об устойчивости движения [1].

Здесь речь идет о сохранении свойств либо в направлении действия преобразования, либо в обратную сторону, либо в обе стороны одновременно (в последнем случае говорят о моделях, эквивалентных относительно изучаемого свойства). Например, при решении задач динамики и управления (в аналитической механике, задачах стабилизации программных движений управляемых динамических систем и т. д.) нередко эти модели преобразуются к некоторым эквивалентным по замыслу каноническим видам.

Заметим, что само модельное преобразование возникает и становится известным из более широкого, чем в случае метода сравнения, набора разных соображений о большей предпочтительности преобразованной модели по сравнению с исходной (например, о большей предпочтительности уравнений движения в той или иной канонической форме, полученных из исходной модели в форме уравнений Лагранжа), так что может возникать вопрос не об отыскании преобразования (как в случае метода сравнения), а о корректности уже имеющегося преобразования с точки зрения сохранения (в ту или иную сторону или в обе) интересующих исследователя динамических свойств. С учетом разнообразия используемых моделей и исследуемых динамических свойств требуется иметь аппарат, гарантирующий сохранение свойства в требуемых направлениях.

В [19] такой метод предложен и назван методом редукции. Он содержит в себе не только некоторую технологию получения теорем типа теорем редукции для нелинейного качественного анализа систем, в частности, для динамического анализа ляпуновского типа, но по существу и некоторый довольно общий метод анализа корректности модельных преобразований с точки зрения вышеуказанных вопросов сохранения требуемой динамики. Даже в постановке сохранения свойств из преобразованной модели в исходную метод редукции свободен от ряда ограничений метода сравнения, что, в частности, расширяет классы допустимых моделей исследуемых и вспомогательных систем, а также класс привлекаемых отображений (редукторов), ответственных за переносимость свойств и являющихся “аналогами” функций сравнения или морфизмов. Например, условие мажорирования может быть заменено условием асимптотической эквивалентности исходной и преобразованной модели, условием частичного по времени гомоморфизма траекторий одной динамической системы в другую и др. Метод редукции базируется на решении более общего класса логических уравнений, чем те логические уравнения, на которых по существу базировался метод сравнения в его наиболее развитой форме [20–22], и ряд его алгоритмов реализован на ЭВМ в пакете программ “ВФЛ-РЕДУКТОР” [23–27].

В статье рассматриваются вопросы сохранения динамических свойств при переходе от одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к другой, получаемой заменой переменных, а также вопросы сохранения свойств в обратную сторону. В разд. 1 на примерах свойств типа устойчивости, притяжения и диссипативности демонстрируются возможности метода редукции для получения условий сохранения свойств. В разд. 2 аналогичные вопросы исследуются для случая, когда вторая модель получается путем, характерным для метода сравнения с вектор-функциями Ляпунова (как некоторая мажоранта полной производной), и сохранение обеспечивается от преобразованной модели к исходной. В разд. 3 рассматривается применение одного из полученных критериев диссипативности к анализу нелинейной динамики группы движущихся объектов.

1. Координатные преобразования

Сформулируем рассматриваемую задачу следующим образом. Пусть заданы две системы ОДУ в конечномерных вещественных пространствах:

$$\dot{\mathrm{x}} = F(t, \mathrm{x}), \qquad \mathrm{x} \in X \subseteq R^n \tag{1.1}$$

и

$$\dot{\mathrm{y}} = G(t, \mathrm{y}), \qquad \mathrm{y} \in Y \subseteq R^m, \tag{1.2}$$

где $t \in T = [\tau_0, +\infty)$, $F(t,0) \equiv 0$, $G(t,0) \equiv 0$. Пусть $v : T \times X \to Y$, $\mathrm{y} = v(t,\mathrm{x})$ — замена переменных, преобразующая систему (1.1) в (1.2) и такая, что $v(t,0) \equiv 0$. Рассматривается множество $A = \{\mathrm{x} \in X : \|\mathrm{x}\| < \alpha\}$ $(\alpha > 0)$ и ограничение v_A функции v на множество $T \times A : v_A(t,\mathrm{x}) = v(t,\mathrm{x})|_A$. Для функций $v_A(t,\cdot)$ предполагается существование обратных (однозначных) отображений. Каждая обратная функция для $v_A(t,\cdot)$ обозначается $v_A^{-1}(t,\cdot)\colon\ range\, v_A(t,\cdot) \to A$ (для частичной взаимно-однозначной функции из X в Y). Требуется найти условия, при которых из наличия исследуемого свойства тривиального решения преобразованной системы (1.2) следует наличие этого свойства в исходной системе (1.1), и, наоборот, найти условия, при которых из наличия некоторого свойства в исходной системе следует наличие этого свойства во вспомогательной системе. В силу известного локального характера свойств типа устойчивости при их исследовании достаточно использовать частичные функции $v_A\colon (T \times X) \to Y$.

1.1. Устойчивость

Рассматриваются свойство устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$ системы (1.1)

$$\mathfrak{P}_1 = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathrm{x}_0 \in X : \|\mathrm{x}_0\| < \delta \quad \forall x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0) \quad \forall t \geq t_0 \quad \forall \mathrm{x} = x(t) \quad \|\mathrm{x}\| < \epsilon\Big),$$

где $x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0)$ — решение задачи Коши для системы (1.1) с начальным условием $x(t_0) = \mathrm{x}_0$, и аналогичное свойство тривиального решения $y(t) \equiv 0$ системы (1.2)

$$\mathfrak{P}'_1 = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \epsilon' > 0 \quad \exists \delta' > 0 \quad \forall \mathrm{y}_0 \in Y : \|\mathrm{y}_0\| < \delta' \quad \forall y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0) \quad \forall t \geq t_0 \quad \forall \mathrm{y} = y(t) \quad \|\mathrm{y}\| < \epsilon'\Big).$$

При применении функций v_A и метода редукции вместо $\mathfrak{P}_1$ удобнее использовать эквивалентное определение

$$\tilde{\mathfrak{P}}_1 = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \epsilon \in (0, \alpha) \quad \exists \delta \in (0, \alpha) \quad \forall \mathrm{x}_0 \in A : \|\mathrm{x}_0\| < \delta$$
$$\forall x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0) \quad \forall t \geq t_0 \quad \forall \mathrm{x} = x(t) : \mathrm{x} \in A \quad \|\mathrm{x}\| < \epsilon\Big).$$

Предполагается, что введенная выше функция v_A удовлетворяет в области определения условию преобразуемости решений x в соответствующие решения y

$$\mathfrak{M} = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \mathrm{x}_0 \in A \quad \forall \mathrm{y}_0 \in Y : \mathrm{y}_0 = v_A(t_0, \mathrm{x}_0) \quad \forall x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0) \quad \exists y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0) \quad \forall t \geq t_0$$
$$\forall \mathrm{x} = x(t) : \mathrm{x} \in A \quad \forall \mathrm{y} = y(t) \quad v_A(t, \mathrm{x}) = \mathrm{y}\Big).$$

В соответствии с методом редукции условия переносимости свойства устойчивости тривиального решения из преобразованной системы в исходную, т. е. условия, обеспечивающие выполнимость импликации $\mathfrak{P}'_1 \to \tilde{\mathfrak{P}}_1$, отыскиваются путем решения логического уравнения

$$\mathfrak{P}'_1 \ \&\ \mathfrak{M} \ \&\ \mathfrak{X}_1 \ \to\ \tilde{\mathfrak{P}}_1, \tag{1.3}$$

где $\tilde{\mathfrak{P}}_1$, $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{M}$ — определенные выше известные члены уравнения, а $\mathfrak{X}_1$ — искомая формула. Уравнение (1.3) может быть разрешимо с использованием метода редукции и получением на его основе нетривиальных решений, если известные члены уравнения удовлетворяют некоторым условиям согласованности (см. [19]). Приводить эти условия здесь не будем, заметим лишь, что для $\tilde{\mathfrak{P}}_1$, $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{M}$ они выполняются.

Пользуясь согласованностью (1.3), с помощью метода редукции получим решение $\mathfrak{X}_1$ в виде

$$\begin{gathered}\mathfrak{X}_1 = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \epsilon \in (0,\alpha) \quad \exists \epsilon' > 0 \quad \forall \delta' > 0 \quad \exists \delta \in (0,\alpha) \quad \forall \mathrm{x}_0 \in A : \|\mathrm{x}_0\| < \delta \\ \exists \mathrm{y}_0 \in Y : (\mathrm{y}_0 = v_A(t_0, \mathrm{x}_0) \;\&\; \|\mathrm{y}_0\| < \delta') \quad \forall x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0) \quad \forall y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0) \quad \forall t \geq t_0 \\ \forall \mathrm{x} = x(t) : \mathrm{x} \in A \qquad \exists \mathrm{y} = y(t) \quad (\|\mathrm{y}\| < \epsilon' \;\&\; \mathrm{y} = v_A(t, \mathrm{x}) \;\to\; \|\mathrm{x}\| < \epsilon)\Big).\end{gathered}$$

Действительно, индукцией по структуре формулы $\mathfrak{X}_1$ легко показать, что верно (1.3). Для облегчения проверки условия $\mathfrak{X}_1$, пользуясь процедурами метода, можно расщепить $\mathfrak{X}_1$ на конъюнкцию более сильных условий

$$\mathfrak{D}_1^1 = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \delta' > 0 \quad \exists \delta \in (0,\alpha) \quad \forall \mathrm{x}_0 \in A : \|\mathrm{x}_0\| < \delta \quad \|v_A(t_0, \mathrm{x}_0)\| < \delta'\Big)$$

и

$$\begin{gathered}\mathfrak{D}_1^2 = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \epsilon \in (0,\alpha) \quad \exists \epsilon' > 0 \quad \forall \delta' > 0 \quad \forall \delta \in (0,\alpha) \quad \forall \mathrm{x}_0 \in A : \|\mathrm{x}_0\| < \delta \\ \forall \mathrm{y}_0 \in Y : (\mathrm{y}_0 = v_A(t_0, \mathrm{x}_0) \;\&\; \|\mathrm{y}_0\| < \delta') \quad \forall x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0) \quad \forall y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0) \quad \forall t \geq t_0 \\ \forall \mathrm{x} = x(t) : \mathrm{x} \in A \quad \exists \mathrm{y} = y(t) \;\; (\|\mathrm{y}\| < \epsilon' \;\&\; \mathrm{y} = v_A(t, \mathrm{x}) \;\to\; \|\mathrm{x}\| < \epsilon)\Big),\end{gathered}$$

первое из которых при каждом фиксированном $t_0 \in T$ выражает непрерывность функции $v_A(t_0, \mathrm{x}_0)$ по x_0 в точке $\mathrm{x}_0 = 0$, а второе можно снова расщепить на конъюнкцию более сильных утверждений

$$\mathfrak{D}_1^{21} = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \mathrm{y}_0 \in v_A(t_0, A) \quad \forall y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0) \quad \forall t \geq t_0 \quad t \in \operatorname{dom} y\Big)$$

(условие неограниченной продолжимости вправо части решений системы (1.2)) и

$$\mathfrak{D}_1^{22} \;=\; \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \epsilon' > 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad \forall \mathrm{y} \in Y : \|\mathrm{y}\| < \epsilon' \quad \|v_A^{-1}(t, \mathrm{y})\| < \epsilon\Big)$$

(непрерывность функции $v_A^{-1}(t, \mathrm{y})$ в точке $\mathrm{y} = 0$ равномерно по $t \in T$). Из вида условий $\mathfrak{D}_1^1$, $\mathfrak{D}_1^{22}$ легко усмотреть, что функции v_A, v_A^{-1} могут быть знакопеременными.

Так как формула $\mathfrak{X}_1$ является решением логического уравнения (1.3) и, кроме того, выполнена импликация $\mathfrak{D}_1^1 \& \mathfrak{D}_1^{21} \& \mathfrak{D}_1^{22} \to \mathfrak{X}_1$, то имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (о сохранении устойчивости в направлении, обратном преобразованию). *Пусть* $x(t) \equiv 0$ *и* $y(t) \equiv 0$ *— тривиальные решения систем* (1.1) *и* (1.2)*, связанных соотношением* $\mathfrak{M}$. *Пусть также выполнены условия* $\mathfrak{D}_1^1$, $\mathfrak{D}_1^{21}$, $\mathfrak{D}_1^{22}$. *Тогда из устойчивости решения* $y(t) \equiv 0$ *следует устойчивость решения* $x(t) \equiv 0$.

Получим тем же методом условия сохранения устойчивости в обратном направлении (т. е. теперь в направлении от исходной системы к преобразованной). Для их ослабления воспользуемся следующим соотношением преобразуемости решений

$$\begin{gathered}\tilde{\mathfrak{M}} = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \mathrm{y}_0 \in Y \quad \forall \mathrm{x}_0 \in A : v_A(t_0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0 \quad \forall y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0) \quad \exists x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0) \quad \forall t \geq t_0 \\ \forall \mathrm{y} = y(t) \quad \forall \mathrm{x} = x(t) \quad (\mathrm{x} \in A \to v_A(t, \mathrm{x}) = \mathrm{y})\Big).\end{gathered}$$

Решая логическое уравнение $\mathfrak{P}_1 \;\&\; \tilde{\mathfrak{M}} \;\&\; \mathfrak{X}'_1 \;\to\; \mathfrak{P}'_1$ и выполняя над решением $\mathfrak{X}'_1$ действия, аналогичные сделанным для решения $\mathfrak{X}_1$, получим следующую теорему.

Теорема 2 (о сохранении устойчивости в направлении действия преобразования). *Пусть $x(t) \equiv 0$ и $y(t) \equiv 0$ — тривиальные решения систем* (1.1) *и* (1.2), *связанных условием* $\tilde{\mathfrak{M}}$. *Пусть также выполнены условия*:

(1) *решения системы* (1.1) *неограниченно продолжимы вправо для начальных данных из* $T \times A$;

(2) *для любого* $t \in T$ *функция* $v_A^{-1}(t, \mathrm{y})$ *непрерывна в точке* $\mathrm{y} = 0$;

(3) *функция* $v_A(t, \mathrm{x})$ *непрерывна по* x *в точке* $\mathrm{x} = 0$ *равномерно по* $t \in T$. *Тогда из устойчивости решения* $x(t) \equiv 0$ *следует устойчивость решения* $y(t) \equiv 0$.

Снова функции v_A и v_A^{-1} могут быть знакопеременными.

Следствие 1 (об эквивалентности систем относительно устойчивости). *Из теорем* 1 *и* 2 *следует, что для сохранения устойчивости в обе стороны* ($\mathfrak{P}_1 \leftrightarrow \mathfrak{P}'_1$) *достаточно, чтобы помимо оговоренных условий продолжимости решений и условий* $\mathfrak{M}$, $\tilde{\mathfrak{M}}$ *функции* $v_A(t, \mathrm{x})$ *и* $v_A^{-1}(t, \mathrm{y})$ *были непрерывны в точках* $\mathrm{x} = 0$ *и* $\mathrm{y} = 0$ (*соответственно*) *равномерно по* $t \in T$ (*когда* v_A *не зависит от* t, *достаточно их непрерывности в нуле*).

Из теорем 1 и 2 в качестве частных случаев вытекают некоторые соответствующие результаты из [10, 11, 15, 18].

1.2. Притяжение и асимптотическая устойчивость

Свойство притяжения тривиального решения $x(t) \equiv 0$ исходной системы (1.1) рассмотрим в форме

$$\mathfrak{P}_2 = \Big(\forall t_0 \in T \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \mathrm{x}_0 \in X : \|\mathrm{x}_0\| < \delta \quad \forall \epsilon > 0 \quad \forall x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0) \quad \exists t_1 \geq t_0 \quad \forall t \geq t_1$$
$$\forall \mathrm{x} = x(t) \quad \|\mathrm{x}\| < \epsilon\Big).$$

Аналогично записывается свойство притяжения $\mathfrak{P}'_2$ в системе (1.2).

Применим метод редукции к логическому уравнению

$$\mathfrak{P}'_2 \ \& \ \tilde{\tilde{\mathfrak{M}}} \ \& \ \mathfrak{X}_2 \ \rightarrow \ \mathfrak{P}_2, \tag{1.4}$$

где

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{M}}} = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \mathrm{x}_0 \in X \quad \forall \mathrm{y}_0 \in Y : v(t_0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0 \quad \forall x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0) \quad \exists y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0) \quad \forall t \geq t_0$$
$$\forall \mathrm{x} = x(t) \quad \forall \mathrm{y} = y(t) \quad v(t, \mathrm{x}) = \mathrm{y}\Big),$$

а отображение $v\colon T \times X \to Y$ будем считать и называть обратным (по второму аргументу), т. е. для каждого $t \in T$ функция $v(t, \cdot)$ — взаимно-однозначное отображение $v(t, \cdot)\colon X \to Y$. Функции $v(t, \mathrm{x})$, $v^{-1}(t, \mathrm{y})$ при каждом t могут быть знакопеременными.

Решая уравнение (1.4), получим следующую теорему.

Теорема 3 (притяжение). *Пусть $x(t) \equiv 0$ и $y(t) \equiv 0$ — тривиальные решения систем* (1.1) *и* (1.2). *Пусть эти системы связаны соотношением* $\tilde{\tilde{\mathfrak{M}}}$. *Тогда, если решения системы* (1.2) *неограниченно продолжимы вправо и для любого* $t \in T$ *функция* $v(t, \mathrm{x})$ *непрерывна по* x *в нуле, а функция* $v^{-1}(t, \mathrm{y})$ *непрерывна в нуле равномерно по* $t \in T$ *в пределе, то* $\mathfrak{P}'_2 \to \mathfrak{P}_2$. *Если же системы* (1.1) *и* (1.2) *связаны соотношением* $\tilde{\tilde{\tilde{\mathfrak{M}}}}$, *отличающимся от* $\tilde{\tilde{\mathfrak{M}}}$ *только тем, что пара кванторов* $\forall x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0)$, $\exists y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0)$ *заменена на пару* $\forall y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0)$, $\exists x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0)$, *решения системы* (1.1) *неограниченно продолжимы вправо и для любого* $t \in T$ *функция* $v^{-1}(t, \mathrm{y})$ *непрерывна в нуле, а функция* $v(t, \mathrm{x})$ *непрерывна по* x *в нуле равномерно по* $t \in T$ *в пределе, то* $\mathfrak{P}_2 \to \mathfrak{P}'_2$.

Здесь непрерывность $v(t,\mathrm{x})$ по x при $\mathrm{x}=0$, равномерная по t в пределе, понимается как условие

$$\forall t_0\in T \quad \forall\epsilon'>0 \quad \exists\epsilon>0 \quad \exists t_1\geq t_0 \quad \forall t\geq t_1 \quad \forall\mathrm{x}\in X:\|\mathrm{x}\|<\epsilon \quad \|v(t,\mathrm{x})\|<\epsilon',$$

а непрерывность функции v^{-1} по y в нуле, равномерно по t в пределе, означает

$$\forall t_0\in T \quad \forall\epsilon>0 \quad \exists\epsilon'>0 \quad \exists t_1\geq t_0 \quad \forall t\geq t_1 \quad \forall\mathrm{y}\in Y:\|\mathrm{y}\|<\epsilon' \quad \|v^{-1}(t,\mathrm{y})\|<\epsilon.$$

При рассмотрении асимптотической устойчивости $\mathfrak{P}_3=\mathfrak{P}_1\,\&\,\mathfrak{P}_2$ в силу локальности этого свойства можно воспользоваться частичной функцией v_A.

Следствие 2 (асимптотическая устойчивость). *Переносимость асимптотической устойчивости в направлении от* (1.2) *к* (1.1)*, т. е. импликация* $\mathfrak{P}_3'\to\mathfrak{P}_3$*, обеспечивается условиями теоремы* 1*, а условия теоремы* 2 *достаточны для сохранения асимптотической устойчивости в обратную сторону*: $\mathfrak{P}_3\to\mathfrak{P}_3'$; *поэтому для сохранения асимптотической устойчивости в обе стороны* $\mathfrak{P}_3\leftrightarrow\mathfrak{P}_3'$ *достаточно условий следствия* 1.

Из теоремы 3 и следствия 2 в качестве частных случаев вытекают некоторые соответствующие результаты из [11, 18].

1.3. Диссипативность

Рассмотрим два варианта свойства диссипативности (предельной ограниченности в смысле [28, 29]) системы (1.1), а именно:

$$\mathfrak{P}_4=\Big(\forall t_0\in T \quad \exists\epsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall\mathrm{x}_0\in X:\|\mathrm{x}_0\|<\delta \ \ \forall x(\cdot,t_0,\mathrm{x}_0) \quad \exists t_1\geq t_0 \quad \forall t\geq t_1$$
$$\forall\mathrm{x}=x(t,t_0,\mathrm{x}_0) \quad \|\mathrm{x}\|<\epsilon\Big) \text{ — диссипативность;}$$
$$\mathfrak{P}_5=\Big(\forall t_0\in T \quad \exists\epsilon>0 \quad \forall\delta>0 \quad \forall\mathrm{x}_0\in X:\|\mathrm{x}_0\|<\delta \quad \forall x(\cdot,t_0,\mathrm{x}_0) \quad \exists t_1\geq t_0 \quad \forall t\geq t_1$$
$$\forall\mathrm{x}=x(t,t_0,\mathrm{x}_0) \quad \|\mathrm{x}\|<\epsilon\Big) \text{ — глобальную диссипативность.}$$

Если в определениях $\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_5$ квантор $\forall t_0$ поместить после кванторов по переменным ϵ, δ, то получим определения соответствующих свойств диссипативности, равномерной по $t_0\in T$. Обозначим их $\mathfrak{P}_6$, $\mathfrak{P}_7$ соответственно. Аналогичные определения диссипативности для системы (1.2) обозначим $\mathfrak{P}_4'$–$\mathfrak{P}_7'$.

Теорема 4 (диссипативность). *Пусть системы* (1.1) *и* (1.2) *связаны соотношением* $\tilde{\tilde{\mathfrak{M}}}$ (*с обратимой* v)*. Тогда, если решения системы* (1.2) *неограниченно продолжимы вправо, функция* $v(t,\mathrm{x})$ *непрерывна в нуле по второму аргументу для любого* $t\in T$ (*соответственно непрерывна равномерно по* $t\in T$)*, а функция* $v^{-1}(t,\mathrm{y})$ *ограничена в любой окрестности* $\|\mathrm{y}\|<\epsilon'$ *равномерно по* $t\in T$ *в пределе, т. е. верно*

$$\forall t_0\in T \quad \forall\epsilon'>0 \quad \exists\epsilon>0 \quad \exists t_1\geq t_0 \quad \forall t\geq t_1 \quad \forall\mathrm{y}\in Y:\|\mathrm{y}\|<\epsilon' \quad \|v^{-1}(t,\mathrm{y})\|<\epsilon,$$

то имеет место $\mathfrak{P}_4'\to\mathfrak{P}_4$ (*соответственно* $\mathfrak{P}_6'\to\mathfrak{P}_6$)*. Если же системы* (1.1) *и* (1.2) *связаны соотношением* $\tilde{\tilde{\tilde{\mathfrak{M}}}}$ (*см. теорему* 3)*, решения системы* (1.1) *неограниченно продолжимы вправо, функция* $v^{-1}(t,\mathrm{y})$ *непрерывна в нуле для любого* $t\in T$ (*соответственно непрерывна равномерно по* $t\in T$)*, а функция* $v(t,\mathrm{x})$ *ограничена в любой окрестности* $\|\mathrm{x}\|<\epsilon$ *равномерно по* $t\in T$ *в пределе, т. е. верно*

$$\forall t_0\in T \quad \forall\epsilon>0 \quad \exists\epsilon'>0 \quad \exists t_1\geq t_0 \quad \forall t\geq t_1 \quad \forall\mathrm{x}\in X:\|\mathrm{x}\|<\epsilon \quad \|v(t,\mathrm{x})\|<\epsilon',$$

то $\mathfrak{P}_4\to\mathfrak{P}_4'$ (*соответственно* $\mathfrak{P}_6\to\mathfrak{P}_6'$).

Теорема 5 (глобальная диссипативность). *Если системы* (1.1) *и* (1.2) *связаны соотношением* $\tilde{\tilde{\mathfrak{M}}}$, *решения* (1.2) *неограниченно продолжимы вправо и функция* $v(t,\mathrm{x})$ *ограничена для любого* $t\in T$ (*соответственно ограничена равномерно по* $t\in T$) *в каждой окрестности* $\|\mathrm{x}\|<\delta$, *т. е. верно*

$$\forall t\in T \quad \forall\delta>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall\mathrm{x}\in X\colon\ \|\mathrm{x}\|<\delta \quad \|v(t,\mathrm{x})\|<\delta'$$

$$(\textit{соответственно}\ \forall\delta>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall t\in T \quad \forall\mathrm{x}\in X:\|\mathrm{x}\|<\delta \quad \|v(t,\mathrm{x})\|<\delta'),$$

а функция $v^{-1}(t,\mathrm{y})$ *ограничена в любой окрестности* $\|\mathrm{y}\|<\epsilon'$ *равномерно по* $t\in T$ *в пределе, то* $\mathfrak{P}'_5\to\mathfrak{P}_5$ (*соответственно* $\mathfrak{P}'_7\to\mathfrak{P}_7$). *Если же связь систем* (1.1) *и* (1.2) *задается соотношением* $\tilde{\tilde{\tilde{\mathfrak{M}}}}$, *решения системы* (1.1) *неограниченно продолжимы вправо и функция* $v^{-1}(t,\mathrm{y})$ *ограничена для любого* $t\in T$ (*соответственно ограничена равномерно по* $t\in T$) *в каждой окрестности* $\|\mathrm{y}\|<\delta'$, *а функция* $v(t,\mathrm{x})$ *ограничена в любой окрестности* $\|\mathrm{x}\|<\epsilon$ *равномерно по* $t\in T$ *в пределе, то* $\mathfrak{P}_5\to\mathfrak{P}'_5$ (*соответственно* $\mathfrak{P}_7\to\mathfrak{P}'_7$).

З а м е ч а н и е. В случае необратимости преобразования $v(t,\mathrm{x})$ (отображения $v(t,\cdot): X\to Y$ — необязательно взаимно-однозначные) условия, накладываемые в теоремах 3–5 на обратную вектор-функцию v^{-1}, можно заменить условиями на вектор-функцию v. А именно, условие непрерывности функции $v^{-1}(t,\mathrm{y})$ в точке $\mathrm{y}=0$ равномерно по $t\in T$ в пределе можно заменить условием

$$\forall t_0\in T \quad \forall\epsilon>0 \quad \exists\epsilon'>0 \quad \exists t_1\geq t_0 \quad \forall t\geq t_1 \quad \forall\mathrm{y}\in Y:\|\mathrm{y}\|<\epsilon' \quad \forall\mathrm{x}\in X:v(t,\mathrm{x})=\mathrm{y} \quad \|\mathrm{x}\|<\epsilon,$$

условие непрерывности $v^{-1}(t,\mathrm{y})$ при $\mathrm{y}=0$ для любого $t\in T$ — условием

$$\forall t\in T \quad \forall\delta>0 \quad \exists\delta'>0 \quad \forall\mathrm{y}\in Y:\|\mathrm{y}\|<\delta' \quad \exists\mathrm{x}\in X:v(t,\mathrm{x})=\mathrm{y}\ \&\ \|\mathrm{x}\|<\delta$$

(аналогично в случае равномерной по t непрерывности), условие ограниченности функции $v^{-1}(t,\mathrm{y})$ в любой окрестности $\|\mathrm{y}\|<\delta'$ — условием

$$\forall t\in T \quad \forall\delta'>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall\mathrm{y}\in Y:\|\mathrm{y}\|<\delta' \quad \exists\mathrm{x}\in X:v(t,\mathrm{x})=\mathrm{y}\ \&\ \|\mathrm{x}\|<\delta$$

(аналогично в случае равномерной по $t\in T$ ограниченночти $v^{-1}(t,\mathrm{y})$), а условие равномерной по $t\in T$ ограниченности в пределе функции $v^{-1}(t,\mathrm{y})$ в любой окрестности $\|\mathrm{y}\|<\epsilon'$ — условием

$$\forall t_0\in T \quad \forall\epsilon'>0 \quad \exists\epsilon>0 \quad \exists t_1\geq t_0 \quad \forall t\geq t_1 \quad \forall\mathrm{x}\in X:\|v(t,\mathrm{x})\|<\epsilon' \quad \|\mathrm{x}\|<\epsilon.$$

П р и м е р. Пусть системы (1.1) и (1.2) имеют вид уравнений

$$\dot{\mathrm{x}}=\mathrm{x}\cos t/(2+\sin t), \qquad \dot{\mathrm{y}}=-\mathrm{y}/t,$$

а преобразование v имеет вид

$$\mathrm{y}=v(t,\mathrm{x})=\mathrm{x}/(t\,(2+\sin t)).$$

На основании теорем 2, 4 нетрудно видеть, что в направлении этого преобразования сохраняются свойства устойчивости $\mathfrak{P}_1$ и диссипативности $\mathfrak{P}_4$.

2. Теоремы о диссипативности с преобразованиями типа ВФЛ

В качественном анализе динамических систем с использованием векторных функций Ляпунова (ВФЛ) и систем сравнения (СС) для получения условий переносимости динамических свойств из СС в исходную систему, т. е. для синтеза так называемых теорем сравнения, метод редукции может быть также эффективно применен. Для демонстрации возможностей метода применительно к свойствам с определениями, имеющими разветвленную формульную структуру, получим теоремы сравнения для несколько более усиленных вариантов свойств диссипативности (по сравнению с подразд. 1.3). При этом свойства диссипативности будут рассматриваться при постоянно действующих возмущениях (в обобщение определений Т. Йошизава [28, 29]). Заметим, что устойчивость при наличии возмущений, ограниченных в среднем (и других), исследовалась Н.Н. Красовским и В.Е. Гермаидзе [3, 30].

Будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathrm{x}} = F(t, \mathrm{x}, p), \qquad t \in T \equiv [0, +\infty), \qquad \mathrm{x} \in X \subseteq R^n, \qquad p \in \mathcal{P} \tag{2.1}$$

с правой частью F, определенной на $T \times X \times \mathcal{P}$ и имеющей значение в X. Здесь параметр p, вообще говоря, функциональный, интерпретируется как постоянно действующее возмущение или неопределенность; $\mathcal{P}$ — допустимое множество возмущений $p\colon T \times X \to P$. Под решением $x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0, p)$ понимается абсолютно непрерывная на каждом отрезке из промежутка определения $T(x) = [t_0, \tau(x)) \subseteq T_{t_0} = [t_0, \infty)$ функция $x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0, p)\colon T(x) \to X$, удовлетворяющая почти всюду уравнению (2.1) и начальному условию $x(t_0, t_0, \mathrm{x}_0, p) = \mathrm{x}_0$. Предполагается, что при любых допустимых исходных данных $t_0 \in T$, $\mathrm{x}_0 \in X^0$, $p \in \mathcal{P}$, где X^0 — некоторое заданное множество в X, решения существуют.

Также введем в рассмотрение систему сравнения

$$\dot{\mathrm{y}} = G(t, \mathrm{y}, q), \qquad t \in T, \qquad \mathrm{y} \in Y \subseteq R^k, \qquad q \in \mathcal{Q}, \tag{2.2}$$

где $G\colon T \times Y \times \mathcal{Q} \to Y$; $\mathcal{Q}$ — допустимое множество возмущений $q\colon T \times Y \to Q$. Предполагается, что решения СС $y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0, q)\colon T(y) \to Y$, понимаемые как решения В.М. Матросова (так называемые обобщенные решения II рода [12, 20, 22]), существуют на некотором промежутке $T(y) \subseteq T_{t_0}$ при любых исходных данных $t_0 \in T$, $\mathrm{y}_0 \in Y^0$, $q \in \mathcal{Q}$, где Y^0 — заданное множество в Y. Заметим, что если $\mathcal{Q} - singl$ (одноэлементное множество), то систему (2.2) можно рассматривать как невозмущаемую (не содержащую q), т. е. имеющую вид (1.2).

Традиционно в методе ВФЛ в качестве условия связи выступает условие мажорируемости функции $v(t, \mathrm{x})$, определенной на процессах исходной системы, соответствующими процессами СС, которое для дифференциальных систем с возмущениями можно определить следующим образом:

$$\mathfrak{M}_m = \Big(\forall t_0 \in T \quad \forall \mathrm{x}_0 \in X^0 \quad \forall \mathrm{y}_0 \in Y^0 \colon \mathrm{y}_0 = v(t_0, \mathrm{x}_0) \quad \forall p \in \mathcal{P} \quad \forall q \in \mathcal{Q} \colon (p, q) \in r \quad \forall x(\cdot, t_0, \mathrm{x}_0, p)$$
$$\exists y(\cdot, t_0, \mathrm{y}_0, q) \quad \forall t \in T(x) \cap T(y) \quad \forall \mathrm{x} = x(t) \quad \forall \mathrm{y} = y(t) \quad v(t, \mathrm{x}) \leq \mathrm{y}\Big).$$

Здесь r есть некоторое отношение, связывающее возмущения p в исходной системе (2.1) и q — в СС (2.2). В случае СС, не содержащей возмущения q ($\mathcal{Q} - singl$), r считается всегда выполненным. Вообще говоря, условие мажорируемости слабее рассматриваемого ранее условия преобразуемости $\mathfrak{M}$.

Обозначим $R^k_+ \equiv \{\mathrm{y} \in R^k \colon \mathrm{y} > 0\}$, $\overline{R}^k_+ \equiv \{\mathrm{y} \in R^k \colon \mathrm{y} \geq 0\}$, где R^k упорядочено покоординатным отношением частичного порядка.

Пусть на X^0 задана неотрицательная d_0-мерная вещественная функция $\rho_0(\mathrm{x}_0)$, служащая для оценивания начальных состояний системы (2.1); кроме того заданы вектор-функции $\rho(\mathrm{x})\colon X \to \overline{R}^d_+$ и $\rho_f(\mathrm{x})\colon X \to \overline{R}^{d_f}_+$, которые будем называть соответственно оценочными функциями текущих и предельных (финальных) состояний системы (2.1). Аналогично введем оценочные функции $\rho_0'(\mathrm{y}_0)\colon Y^0 \to \overline{R}_+^{d_0'}$, $\rho'(\mathrm{y})\colon Y \to \overline{R}_+^{d'}$, $\rho_f'\colon Y \to \overline{R}_+^{d_f'}$ для системы сравнения (2.2).

Далее считается, что в системе (2.1) решения являются ρ-продолжимыми вправо по t, т. е. если на всем промежутке определения решения функция ρ остается ограниченной, то решение бесконечно продолжимо вправо. Отметим, что в случае, когда множества $\{\mathrm{x} \in X : \rho(\mathrm{x}) \le \Delta\}$ ограничены (по норме), ρ-продолжимость следует из нелокальной продолжимости решений (продолжимости до границы любого компакта, содержащего начальную точку t_0, x_0 как внутреннюю). Аналогично предполагается ρ'-продолжимость решений СС (2.2).

Для системы (2.1) будем рассматривать следующие динамические свойства, которые назовем соответственно равномерной (по всем исходным данным t_0, x_0, p) диссипативностью и глобальной равномерной диссипативностью при возмущениях

$$\mathfrak{P}_8 = \Big(\exists\epsilon\in\overline{R}_+^{d_f} \;\; \exists\delta\in\overline{R}_+^{d_0} \;\; \exists\Delta\in\overline{R}_+^{d} \;\; \exists\tau\ge 0 \;\; \forall t_0\in T \;\; \forall \mathrm{x}_0\in X^0\colon\rho_0(\mathrm{x}_0)\le\delta \;\; \forall p\in\mathcal{P} \;\; \forall x(\cdot,t_0,\mathrm{x}_0,p)$$

$$\big[\forall t\in T_{t_0} \;\; \rho(x(t,t_0,\mathrm{x}_0,p))\le\Delta \;\&\; \forall t\ge t_0+\tau \;\; \rho_f(x(t,t_0,\mathrm{x}_0,p))\le\epsilon\big]\Big),$$

и

$$\mathfrak{P}_9 = \Big(\exists\epsilon\in\overline{R}_+^{d_f} \;\; \forall\delta\in\overline{R}_+^{d_0} \;\; \exists\Delta\in\overline{R}_+^{d} \;\; \exists\tau\ge 0 \;\; \forall t_0\in T \;\; \forall \mathrm{x}_0\in X^0\colon\rho_0(\mathrm{x}_0)\le\delta \;\; \forall p\in\mathcal{P} \;\; \forall x(\cdot,t_0,\mathrm{x}_0,p)$$

$$\big[\forall t\in T_{t_0} \;\; \rho(x(t,t_0,\mathrm{x}_0,p))\le\Delta \;\&\; \forall t\ge t_0+\tau \;\; \rho_f(x(t,t_0,\mathrm{x}_0,p))\le\epsilon\big]\Big).$$

Свойства $\mathfrak{P}_8$ и $\mathfrak{P}_9$ есть соответственно усиления свойств равномерной по t_0 диссипативности $\mathfrak{P}_4$ и глобальной диссипативности $\mathfrak{P}_5$ (с независимостью от t_0 не только ϵ, но и характеристического момента t_1, который теперь представлен суммой $t_0{+}\tau$), "нагруженные" дополнительным условием, которое имеет смысл ограниченности относительно оценки ρ решений $x(t,t_0,\mathrm{x}_0,p)$ с исходными данными $t_0\in T$, $\mathrm{x}_0\in X^0 : \rho_0(\mathrm{x}_0)\le\delta$, $p\in\mathcal{P}$ на всем промежутке их определения. Заметим, что в рассматривавшихся в предыдущем разделе свойствах диссипативности $\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_5$ с $\rho_0(\mathrm{x}) = \rho(\mathrm{x}) = \rho_f(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x}\|$ это дополнительное свойство ограниченности решений тоже будет иметь место, если решения системы (1.1) непрерывны по начальным данным (вправо по t). Аналогичные динамические свойства будем рассматривать в СС, обозначив их определения $\mathfrak{P}_8'$ и $\mathfrak{P}_9'$ соответственно.

Получим теорему сравнения для свойства $\mathfrak{P}_8$. Решая методом редукции логическое уравнение

$$\mathfrak{P}_8' \;\&\; \mathfrak{M}_m \;\&\; \mathfrak{X}_8 \;\to\; \mathfrak{P}_8,$$

найдем

$$\mathfrak{X}_8 = \Big(\forall\epsilon'\in\overline{R}_+^{d_f'} \;\; \exists\epsilon\in\overline{R}_+^{d_f} \;\; \forall\delta'\in\overline{R}_+^{d_0'} \;\; \exists\delta\in\overline{R}_+^{d_0} \;\; \forall\Delta'\in\overline{R}_+^{d'} \;\; \exists\Delta\in\overline{R}_+^{d} \;\; \exists\tau\ge 0 \;\; \forall t_0\in T$$

$$\forall\mathrm{x}_0\in X^0\colon\rho_0(\mathrm{x}_0)\le\delta \;\; \exists\mathrm{y}_0\in Y^0\colon(\rho_0'(\mathrm{y}_0)\le\delta' \;\&\; \mathrm{y}_0=v(t_0,\mathrm{x}_0)) \;\; \forall p\in\mathcal{P}$$

$$\exists q\in\mathcal{Q}\colon(p,q)\in r \;\; \forall x(\cdot,t_0,\mathrm{x}_0,p) \;\; \forall y(\cdot,t_0,\mathrm{y}_0,q)$$

$$\big[\forall t\in T_{t_0} \;\; (\rho'(y(t))\le\Delta' \;\&\; v(t,x(t))\le y(t) \;\to\; \rho(x(t))\le\Delta)$$

$$\&\; \forall t\ge t_0+\tau \;\; (\rho_f'(y(t))\le\epsilon' \;\&\; v(t,x(t))\le y(t) \;\to\; \rho_f(x(t))\le\epsilon)\big]\Big).$$

Расщепляя решение $\mathfrak{X}_8$, получим условия

$$\mathfrak{D}_8^1 = \Big(\forall\delta'\in\overline{R}_+^{d_0'} \;\; \exists\delta\in\overline{R}_+^{d_0} \;\; \forall t_0\in T \;\; \forall\mathrm{x}_0\in X^0\colon\rho_0(\mathrm{x}_0)\le\delta \;\; \rho_0'(v(t_0,\mathrm{x}_0))\le\delta'\Big),$$

$$\mathfrak{D}_8^2 = \Big(\forall p\in\mathcal{P} \;\; \exists q\in\mathcal{Q} \;\; (p,q)\in r\Big),$$

$$\mathfrak{D}_8^3 = \Big(\forall\delta'\in\overline{R}_+^{d_0'} \quad \forall\delta\in\overline{R}_+^{d_0} \quad \forall\Delta'\in\overline{R}_+^{d'} \quad \exists\Delta\in\overline{R}_+^{d} \quad \forall t_0\in T \quad \forall \mathrm{x}_0\in X^0 : \rho_0(\mathrm{x}_0)\le\delta$$

$$\forall \mathrm{y}_0\in Y^0 : (\rho_0'(\mathrm{y}_0)\le\delta' \ \&\ \mathrm{y}_0 = v(t_0,\mathrm{x}_0)) \quad \forall p\in\mathcal{P} \quad \forall q\in\mathcal{Q} : (p,q)\in r$$

$$\forall x(\cdot,t_0,\mathrm{x}_0,p) \quad \forall y(\cdot,t_0,\mathrm{y}_0,q) \quad \forall t\in T_{t_0}$$

$$\big(\rho'(y(t))\le\Delta' \ \&\ v(t,x(t))\le y(t) \ \to\ \rho(x(t))\le\Delta\big)\Big),$$

$$\mathfrak{D}_8^4 = \Big(\forall\epsilon'\in\overline{R}_+^{d_f'} \quad \exists\epsilon\in\overline{R}_+^{d_f} \quad \forall\delta'\in\overline{R}_+^{d_0'} \quad \forall\delta\in\overline{R}_+^{d_0} \quad \exists\tau\ge 0 \quad \forall t_0\in T \quad \forall \mathrm{x}_0\in X^0 : \rho_0(\mathrm{x}_0)\le\delta$$

$$\forall \mathrm{y}_0\in Y^0 : (\rho_0'(\mathrm{y}_0)\le\delta' \ \&\ \mathrm{y}_0 = v(t_0,\mathrm{x}_0)) \quad \forall p\in\mathcal{P} \quad \forall q\in\mathcal{Q} : (p,q)\in r$$

$$\forall x(\cdot,t_0,\mathrm{x}_0,p) \quad \forall y(\cdot,t_0,\mathrm{y}_0,q) \quad \forall t\ge t_0+\tau$$

$$(\rho_f'(y(t))\le\epsilon' \ \&\ v(t,x(t))\le y(t) \ \to\ \rho_f(x(t))\le\epsilon)\Big).$$

Для удобства проверки исключим неизвестные процессы $x(t)$, $y(t)$ из последних двух условий, заменив их более сильными требованиями

$$\mathfrak{D}_8^{3*} = \Big(\forall\Delta'\in\overline{R}_+^{d'} \quad \exists\Delta\in\overline{R}_+^{d} \quad \forall t\in T \quad \forall \mathrm{x}\in X \quad \forall \mathrm{y}\in Y : v(t,\mathrm{x})\le \mathrm{y} \quad \rho'(\mathrm{y})\le\Delta' \to \rho(\mathrm{x})\le\Delta\Big)$$

и

$$\mathfrak{D}_8^{4*} = \Big(\forall\epsilon'\in\overline{R}_+^{d_f'} \quad \exists\epsilon\in\overline{R}_+^{d_f} \quad \exists\tau\ge 0 \quad \forall t\ge\tau \quad \forall \mathrm{x}\in X \quad \forall \mathrm{y}\in Y : v(t,\mathrm{x})\le \mathrm{y} \quad \rho_f'(\mathrm{y})\le\epsilon' \to \rho_f(\mathrm{x})\le\epsilon\Big).$$

В результате получается следующая теорема.

Теорема 6 (теорема сравнения для свойства диссипативности $\mathfrak{P}_8$). *Пусть существует вектор-функция $v(t,\mathrm{x})\colon T\times X\to R^k$, удовлетворяющая условию связи $\mathfrak{M}_m$ и условиям $\mathfrak{D}_8^1$, $\mathfrak{D}_8^2$, $\mathfrak{D}_8^{3*}$, $\mathfrak{D}_8^{4*}$. Тогда $\mathfrak{P}_8'\to\mathfrak{P}_8$.*

Применяя метод редукции к уравнению

$$\mathfrak{P}_9' \ \&\ \mathfrak{M}_m \ \&\ \mathfrak{X}_9 \ \to\ \mathfrak{P}_9,$$

нетрудно показать, что теорема сравнения для свойства $\mathfrak{P}_9$ будет отличаться от теоремы 6 только в части условия $\mathfrak{D}_8^1$.

Теорема 7 (теорема сравнения для свойства глобальной диссипативности $\mathfrak{P}_9$). *Пусть существует вектор-функция $v(t,\mathrm{x})\colon T\times X\to R^k$, удовлетворяющая условию связи $\mathfrak{M}_m$, условиям $\mathfrak{D}_8^2$, $\mathfrak{D}_8^{3*}$, $\mathfrak{D}_8^{4*}$ и*

$$\mathfrak{D}_9^1 = \forall\delta\in\overline{R}_+^{d_0} \quad \exists\delta'\in\overline{R}_+^{d_0'} \quad \forall t_0\in T \quad \forall \mathrm{x}_0\in X^0 : \rho_0(\mathrm{x}_0)\le\delta \quad \rho_0'(v(t_0,\mathrm{x}_0))\le\delta'.$$

Тогда $\mathfrak{P}_9'\to\mathfrak{P}_9$.

В качестве частных случаев из теорем 6, 7 следуют соответствующие результаты из [28,29].

Принимая в теоремах 6, 7 $\rho_0'(\mathrm{y})=\rho'(\mathrm{y})=\rho_f'(\mathrm{y})=\mathrm{y}$, считая в (2.2) G не содержащей q и заменяя $\mathfrak{D}_8^1$, $\mathfrak{D}_9^1$, $\mathfrak{D}_8^{3*}$, $\mathfrak{D}_8^{4*}$ несколько более сильными, но более удобными для проверки достаточными условиями, с использованием результатов по качественной теории квазимонотонных дифференциальных уравнений [22] для обеспечения нужного динамического свойства $\mathfrak{P}_8'$ или $\mathfrak{P}_9'$ в СС мы получаем следующую теорему о свойствах диссипативности, не содержащую в своей формулировке упоминания СС.

Пусть $G(t,\mathrm{y})$ — полунепрерывная сверху, квазимонотонно не убывающая по y функция $T\times\overline{R}_+^k\to R^k$, $G(t,0)\ge 0$; z, M — произвольные точка и множество в $\overline{R}_+^k$.

Обозначим: $\inf M \equiv \underset{j=\overline{1,k}}{col}(\inf \mathrm{y}_j : \mathrm{y} \in M)$;

$$E_t \equiv \Big\{\mathrm{y} \in \overline{R}^k_+ : G(t,\mathrm{y}) < 0\Big\}, \qquad \Omega_t \equiv \Big\{\mathrm{y} \in \overline{R}^k_+ : G(t,\mathrm{y}) = 0\Big\},$$
$$E_\infty \equiv \Big\{\mathrm{y} \in \overline{R}^k_+ : \overline{G}(\mathrm{y}) < 0\Big\}, \qquad \Omega_\infty \equiv \Big\{\mathrm{y} \in \overline{R}^k_+ : \overline{G}(\mathrm{y}) = 0\Big\},$$
$$E^*_{zt} \equiv \Big\{\mathrm{y} \in \overline{R}^k_+ : \mathrm{y} \geq z,\ \sup_{\alpha\in(0,1]} \alpha^{-1}\, G(t, z+\alpha(y-z)) < 0\Big\},$$
$$E^*_{z\infty} \equiv \Big\{\mathrm{y} \in \overline{R}^k_+ : \mathrm{y} \geq z,\ \sup_{\alpha\in(0,1]} \alpha^{-1}\, \overline{G}(z+\alpha(y-z)) < 0\Big\},$$

где $\overline{G}(\mathrm{y}) \equiv \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} G(t,\mathrm{y})$. В силу квазимонотонности $G(t,\mathrm{y})$: $z_t \equiv \inf E_t \in \Omega_t$, $z_\infty \equiv \inf E_\infty \in \Omega_\infty$; если $z = z_t$ ($z = z_\infty$), то $E^*_{zt} \subseteq E_t$ (соответственно $E^*_{z\infty} \subseteq E_\infty$), а для выпуклой по y функции G $E^*_{zt} = E_t$ (соответственно $E^*_{z\infty} = E_\infty$) [22].

Будем писать $\sup M = \infty$, если $\forall \mathrm{y}\in R^k_+\ \ \exists \mathrm{y}'\in M : \mathrm{y}' \geq \mathrm{y}$.

Теорема 8 (теорема о свойствах диссипативности $\mathfrak{P}_8$, $\mathfrak{P}_9$). *Пусть существует абсолютно непрерывная по t, локально липшицева по* x *вектор-функция $v(t,\mathrm{x})\colon T\times X \to \overline{R}^k_+$, удовлетворяющая условиям*

(1) $v(t_0,\mathrm{x}_0) \leq a(\rho_0(\mathrm{x}_0)) \quad \forall t_0\in T \quad \forall \mathrm{x}_0 \in X^0$;

(2) $\rho(\mathrm{x}) \leq b(v(t,\mathrm{x}))$, $\quad \rho_f(\mathrm{x}) \leq b_f(v(t+\tau,\mathrm{x})) \quad \forall t\in T \quad \forall \mathrm{x}\in X$, *где* $a\colon \overline{R}^{d_0}_+ \to \overline{R}^k_+$, $b\colon \overline{R}^k_+ \to \overline{R}^d_+$, $b_f\colon \overline{R}^k_+ \to \overline{R}^{d_f}_+$ *— неубывающие функции,* $a(0)=0$ *и* a *непрерывна в* 0, $\tau \geq 0$;

(3) $v'(t,\mathrm{x},p) \equiv \underline{\lim\limits_{\Delta t\to 0_+}} \dfrac{1}{\Delta\, t}\Big(v\big(t+\Delta t, \mathrm{x}+\Delta t F(t,\mathrm{x},p)\big) - v(t,\mathrm{x})\Big) \leq G(t, v(t,\mathrm{x})) \quad \forall \mathrm{x}\in X \quad \forall p\in\mathcal{P}$ *и почти всех* $t\in T$;

(4) G *не возрастает по* t *и для некоторого* $z_0 \in \Omega_0$ *множество* $E^*_{z_0 0}$ *не пусто. Тогда система* (2.1) *обладает свойством диссипативности* $\mathfrak{P}_8$.

При этом в качестве оценки "предельных состояний" (оценки точности) можно принять любой вектор $\epsilon > b(\sigma)$, *где* $\sigma \in \Omega_\infty$, $\sigma \leq z_0$, $E^*_{\sigma\infty} \supseteq E^*_{z_0 0}$ *(такая точка* σ *при условии* (4) *всегда существует). В качестве оценки допустимых начальных состояний (области диссипативности) можно взять любой вектор* $\delta \in R^{d_0}_+$ *такой, что для некоторого* $\mathrm{y}_0 \geq a(\delta)$ *верхнее решение* $y(t,0,\mathrm{y}_0)$ *уравнения* $\dot{\mathrm{y}} = G(t,\mathrm{y})$ *в какой-то момент времени* $t_1 \geq 0$ *попадает в множество* $E^*_{z_0 t_1}$, *в частности,* $\mathrm{y}_0 \in E^*_{z_0 0}$. *Оценкой процессов с* $\rho_0(t_0,\mathrm{x}_0) \leq \delta$ *на всем промежутке* T_{t_0} *служит вектор* $\Delta = b\Big(\underset{j=\overline{1,k}}{col}\big(\max\limits_{t\in[0,t_1]} y_j(t,0,\mathrm{y}_0)\big)\Big)$.

Если еще $\sup E^*_{z_0 0} = \infty$, *то имеет место свойство* $\mathfrak{P}_9$, *т. е. система* (2.1) *глобально диссипативна* $\big($*требование* $\lim\limits_{r\to 0} a(r) = 0$ *при этом не нужно*$\big)$.

Задавая некоторые дополнительные ограничения на основные параметры ϵ, δ, Δ, характеризующие диссипативность, можно получить другие варианты свойства. Так, при дополнительном условии $\delta \geq \overline{\delta}$ в области действия квантора $\exists\delta$, где $\overline{\delta}$ — заданный вектор в $\overline{R}^{d_0}_+$, получится диссипативность с требуемой оценкой области диссипативности — множества начальных состояний x_0, для которых выполняется требуемое предельное поведение решений. Если же дополнительное условие накладывать на квантор $\exists\epsilon$ в виде $\epsilon \preccurlyeq \overline{\epsilon}$, где $\overline{\epsilon} = \underset{j=\overline{1,d}}{col}\,\overline{\epsilon}_j$, $\overline{\epsilon}_j$ — заданные неотрицательные числа либо ∞, символ $\preccurlyeq$ означает $\epsilon_j \leq \overline{\epsilon}_j$ при $\overline{\epsilon}_j < \infty$, $\epsilon_j < \infty$ при $\overline{\epsilon}_j = \infty$, получается свойство диссипативности с требуемой оценкой предельной области (точности). Возможность эффективного нахождения всех количественных оценок показателей, определяющих диссипативность, очевидно, позволяет применить теорему и для таких вариантов этого свойства.

Для некоторого достаточно широкого класса управляемых систем (с типовыми, полиномиальными, полиномиально ограниченными нелинейностями, с неопределенностями объекта, характеристик исполнительных органов и измерителей, постоянно действующими и другими возмущениями) процедуры анализа свойства диссипативности на основе приведенной теоремы с вычислением всех необходимых количественных оценок (включая построение ВФЛ сублинейного типа и соответствующих систем сравнения) реализованы в программном модуле [26] пакета программ "ВФЛ-РЕДУКТОР".

3. Применение теорем о диссипативности

3.1. Формализация задачи об "устойчивости" формаций

Под формацией понимается совокупность движущихся объектов, каждая пара которых связана отношением "лидер-ведомый" и эти отношения образуют связный граф. Каждый ведомый управляет своим движением на основе измерения (и другой доступной информации) каких-то параметров собственного движения, а также движения своего лидера (лидеров) относительно него, стремясь удовлетворять (с определенной точностью) некоторым соотношениям (между относительными положениями, скоростями и др.), определяющим желаемую конфигурацию всей группировки. Будем считать, что один из объектов не является ведомым ни в одной паре, так что он является лидером всей формации и задает ее движение в целом. Маневры лидера формации, ограниченные некоторыми пределами, являются первопричиной непрерывного нарушения желаемой конфигурации, которое призваны отрабатывать ведомые. Другая причина — начальные отклонения конфигурации формации от желаемой, которые должны быть устранены (уменьшены) в течение некоторого начального промежутка времени.

Ограничиваясь случаями, когда отношения "лидер-ведомый" являются односторонними (лидер в каждой паре не может рассматриваться в ней как ведомый) и управление каждого объекта является автономным, можно дать следующую математическую формализацию желаемого поведения формации с объектами, описываемыми моделями в виде дифференциальных уравнений. В отличие от большинства известных постановок задач "устойчивости" формаций, ориентированных в основном на линейные модели (см., например, [31, 32]), кроме начальных возмущений и возмущений, обусловленных маневрами лидера, с целью большего соответствия реальности будем в нашей формализации учитывать еще параметрические и иные возмущения (в частности, погрешности измерителей и других элементов рассматриваемой распределенной системы управления), а также стремиться охватить возможную неполноту измерений.

Пусть X_i — n_i-мерные пространства состояний x_i объектов, $i = \overline{0, N}$ (индекс "0" соответствует лидеру формации). Рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathrm{x}}_0 = f_0\big(t, \mathrm{x}_0, u_0(t, \mathrm{x}_0)\big), \qquad u_0(\cdot) \in \mathcal{U}_0, \\
&\dot{\mathrm{x}}_i = f_i\Big(t, \mathrm{x}_i, s_{J_i}, u_i(t, \mathrm{z}_i, r_i(s_i, s_{J_i}), p_{ui}), p_i(t, \mathrm{x})\Big), \qquad i = \overline{1, N}.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Здесь $\mathrm{x} \equiv \underset{i=\overline{0,N}}{col}\, \mathrm{x}_i$ — полный вектор состояния системы $\Big(\mathrm{x} \in X = \prod\limits_{i=0}^{N} X_i\Big)$; $s_{J_i} \equiv \underset{j \in J_i}{col}\, s_j$, J_i — множество номеров объектов, являющихся лидерами для i-го объекта (в частности, $J_i = \{j_i\} - singl$, $j_i \in \overline{0, N} \backslash \{i\}$, если объект как ведомый имеет лишь одного лидера; в случае, когда все J_i одноэлементны, граф отношений "лидер-ведомый" имеет структуру дерева), $s_i = s_i(\mathrm{x}_i)$ — совокупность переменных i-го объекта, характеризующих параметры его собственного движения (координаты и углы, задающие пространственное положение, линейные и угловые скорости и др.); $\mathrm{z}_i = \mathrm{z}_i(\mathrm{x}_i)$ — вектор измерения состояния (выхода) i-го объекта; $r_i(s_i, s_{J_i})$ — совокупность измеряемых переменных, определяющих взаимное относительное движение (положение, скорость и др.) i-го объекта как ведомого и его лидеров; u_i — управление, формируемое i-м объектом; $\mathcal{U}_0$ — множество управлений лидера формации, задающее его допустимые маневры; $p_i(t, \mathrm{x}) \in P_i$ — неопределенности i-го объекта и воздействия среды, постоянно действующие на него внешние и иные возмущения; P_i — множество, определяющее допустимые уровни этих неопределенностей и возмущений; $p_{ui} = p_{ui}(t, \mathrm{z}_i, r_i(s_i, s_{J_i})) \in P_{ui}$ — погрешности, нестабильность, неопределенности измерителей, исполнительных органов и других элементов системы управления i-го объекта; P_{ui} — множества, задающие допустимые значения этих неопределенностей и внутренних возмущений i-й управляющей системы.

Предположим, что требуемая конфигурация формации определяется с помощью вектор-функций $q_i(s_i, s_{J_i})$ в виде

$$q_i(s_i, s_{J_i}) = q_i^*(s_i, s_{J_i}), \qquad i = \overline{1, N}, \tag{3.2}$$

где q_*^i заданы. Естественно тогда в качестве оценочной функции предельных состояний, “измеряющей” точность выхода формации на желаемую конфигурацию по истечении какого-то времени переходных процессов, принять

$$\rho_f(\mathrm{x}) = \left| \underset{i=\overline{1,N}}{col} \left(q_i(s_i(\mathrm{x}_i), s_{J_i}(\mathrm{x})) - q_i^*(s_i(\mathrm{x}_i), s_{J_i}(\mathrm{x}))\right) \right|.$$

Чтобы описать начальные отклонения формации, будем считать, что имеется некоторое данное множество начальных конфигураций, заведомо отвечающих требованиям (3.2), и отклонения от него вместе с отклонениями каких-то внутренних переменных состояния объектов от их номинальных значений характеризуются вектор-функцией $\gamma(\mathrm{x}^0, s)$, где x^0 — начальное состояние системы, $s \equiv \underset{i=\overline{1,N}}{col}\, s_i$. Тогда, очевидно, можно взять

$$\rho_0(\mathrm{x}^0) = \left|\gamma(\mathrm{x}^0, s(\mathrm{x}^0))\right|.$$

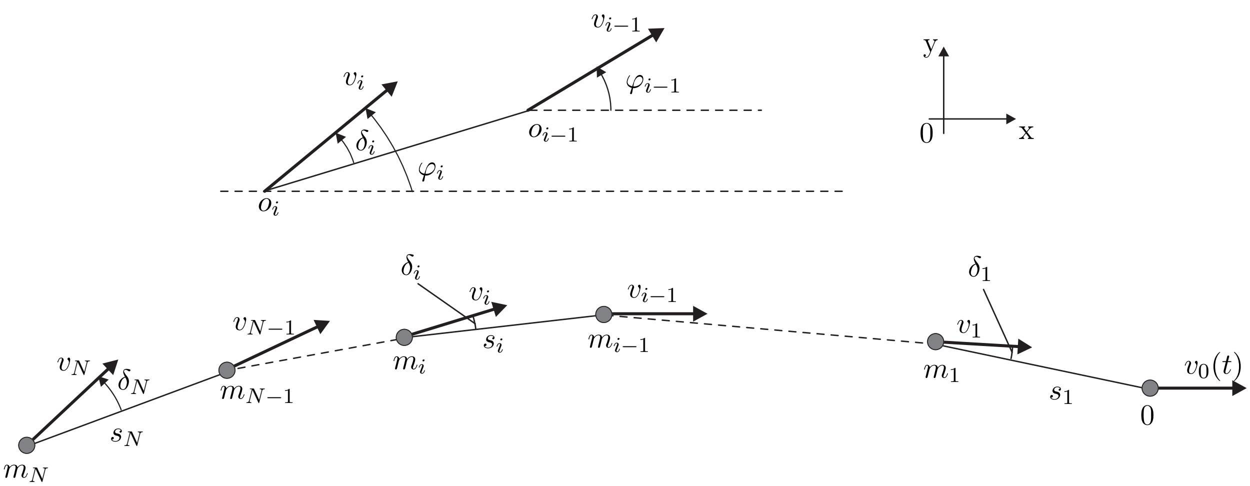
Заметим при этом, что множество X^0 возможных начальных состояний может не совпадать с X, например, из-за наличия некоторых априорных связей между переменными и (или) фиксированных “стандартных” начальных значений каких-то переменных.

Полагая, наконец, $\mathcal{P} = \mathcal{U}_0 \times \prod\limits_{i=1}^{N} (P_i \times P_{ui})$ и задавая подходящую оценочную вектор-функцию текущих состояний $\rho(\mathrm{x})$ для описания допустимой области функционирования системы (возможно, каких-то фазовых ограничений), в итоге получаем формализацию задачи устойчивости формации в виде динамического свойства диссипативности, к которой применима теорема 8. Отметим еще, что с точки зрения формального динамического анализа под формациями можно понимать не только группировки движущихся объектов, но и системы, функционирование которых может иметь иной содержательный смысл, но структура и задачи управления которых имеют вид (3.1), (3.2).

3.2. Пример

Рассмотрим формацию в виде плоской цепочки движущихся друг за другом объектов, каждый из которых, кроме лидера всей цепочки, так управляет своим вектором скорости, чтобы поддержать дистанцию до предыдущего объекта и направление движения на него, не принимая во внимание идущего следом за ним (линейный граф отношений “ведомый-лидер”). Лидер цепочки может совершать ограниченные по скоростям и ускорениям линейные и угловые маневры.

Обозначим x_i, y_i — координаты центра масс o_i i-го объекта в некоторой неподвижной декартовой системе координат, v_i — скорость (абсолютная) центра масс i-го объекта, φ_i — угол между направлением вектора скорости и осью x (курс i-го объекта), ω_i — угловая скорость, δ_i — угол между вектором скорости и направлением на центр масс предыдущего объекта (пеленг), s_i — расстояние между центрами масс объекта и его лидера (дистанция) (см. рис.).



В несколько упрощенной форме (в пренебрежении углом скольжения в уравнениях углового движения) математическую модель рассматриваемой формации можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{x}}_i &= v_i \cos\varphi_i,\\
\dot{\mathrm{y}}_i &= v_i \sin\varphi_i,\\
\dot{\varphi}_i &= \omega_i, \qquad i=\overline{0,N}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{s}_i &= v_{i-1}\cos(\varphi_{i-1}-\varphi_i+\delta_i) - v_i\cos\delta_i,\\
s_i\dot{\delta}_i &= s_i\omega_i + v_i\sin\delta_i - v_{i-1}\sin(\varphi_{i-1}-\varphi_i+\delta_i),\\
m_i\dot{v}_i &= u_i + r_i + p_i,\\
J_i\dot{\omega}_i &= u_i^{\varphi} + r_i^{\varphi} + p_i^{\varphi}; \qquad i=\overline{1,N},
\end{aligned}$$

где m_i — масса, J_i — момент инерции i-го объекта; u_i, u_i^{φ} — линейное и угловое управления (тяга и момент); $r_i = r_i(v_i,\ldots)$, $r_i^{\varphi} = r_i^{\varphi}(\omega_i, v_i,\ldots)$ — силы сопротивления движению; $p_i(\ldots)$, $p_i^{\varphi}(\ldots)$ — силы и моменты, рассматриваемые как возмущения (многоточием обозначена совокупность переменных, включая t, от которых могут зависеть названные величины). В желаемой конфигурации формации $s_i = s_i^*$, $\delta_i = 0$, где s_i^* — заданные значения требуемых дистанций.

Пусть каждый объект может измерять параметры собственного движения — v_i, φ_i, ω_i (при необходимости еще x_i, y_i); измерение относительного движения каждого лидера является неполным — измеряются только s_i, δ_i. Выходы измерителей (с учетом их ошибок, нестабильности и др.) обозначим соответственно $\hat{v}_i$, $\hat{\varphi}_i$, $\hat{\omega}_i$ и т. д., их совокупность — через η_i.

Исходя из измерительных возможностей, управление строится в виде

$$u_i = u_{is} + u_{ip}, \qquad u_i^{\varphi} = u_{is}^{\varphi} + u_{ip}^{\varphi},$$

где $u_{ip} = u_{ip}(t,\eta_i)$, $u_{ip}^{\varphi} = u_{ip}^{\varphi}(t,\eta_i)$ — слагаемые управления (условно их можно назвать “программными”), формируемые с целью преодоления сопротивления и парирования возмущений на основе известной части определяющих их зависимостей так, что

$$|u_{ip} - (r_i + p_i)| \le p_i^0, \qquad |u_{ip}^{\varphi} - (r_i^{\varphi} + p_i^{\varphi})| \le p_i^{\varphi 0} \qquad (p_i^0, p_i^{\varphi 0} - \mathrm{const} \ge 0); \tag{3.3}$$

$$u_{is} = \Phi_i(\sigma_i), \qquad u_{is}^{\varphi} = \Phi_i^{\varphi}(\sigma_i^{\varphi}) \tag{3.4}$$

— составляющие управления, создаваемые именно с целью стабилизации формации; σ_i, σ_i^{φ} — входные сигналы исполнительных органов тяги и вращающего момента. Предполагается, что стабилизирующее управление формируется по принципу обратной связи как ПД-регулятор с использованием наблюдателей первого порядка для получения оценок скоростей. Таким образом,

$$
\begin{gathered}
\sigma_i = k_i\widehat{\triangle s}_i + l_i\hat{z}_i, \qquad \widehat{\triangle s}_i = \Psi_i(\triangle s_i), \qquad \triangle s_i = s_i - s_i^*, \qquad \hat{z}_i = \Psi_i^z(z_i);\\
\sigma_i^\varphi = k_i^\varphi\hat{\delta}_i^\varphi + l_i^\varphi\hat{z}_i^\varphi, \qquad \hat{\delta}_i^\varphi = \Psi_i^\varphi(\delta_i), \qquad \hat{z}_i^\varphi = \Psi_i^{z\varphi}(z_i^\varphi);\\
\dot{z}_i = -a_i(z_i - \widehat{\triangle s}_i), \qquad \dot{z}_i^\varphi = -a_i^\varphi(z_i^\varphi - \hat{\delta}_i).
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

Чтобы задать описания выходных характеристик исполнительных органов и измерителей Φ_i, Φ_i^φ, Ψ_i, Ψ_i^φ, Ψ_i^z, $\Psi_i^{z\varphi}$, введем следующие определения.

Функция $\theta:\ R^1 \to R^1$ называется функцией класса $SN(\xi^0,\overline{\xi},\Delta)$ (где $0 \le \xi^0 < \overline{\xi} \le \infty$, $0 \le \Delta < 1$ — заданные параметры класса), если $-\overline{\theta}(-\xi) \le \theta(\xi) \le \overline{\theta}(\xi)$,

$$
\overline{\theta}(\xi) \overset{\Delta}{=} \max\left\{\xi^0 + \max\left\{(1+\Delta)\xi;\ (1-\Delta)\xi\right\};\ -\overline{\xi}\right\}
$$

(в случае $\overline{\xi} = \infty$ имеем расширенный, а если еще $\xi^0 = 0$, — стандартный сектор теории абсолютной устойчивости). Класс SN, в котором $\Delta = 0$, для краткости будем обозначать $N(\xi^0,\overline{\xi})$; если еще $\overline{\xi} = \infty$, будем писать $N(\xi^0)$.

Считается, что с учетом всех погрешностей, неопределенностей, нелинейностей, нестабильности характеристик квантования, гистерезиса, ограниченности управления или диапазонов измерителей и др. факторов в (3.4), (3.5) $\Phi_i \in SN(\sigma_i^0,\overline{\sigma}_i,\Delta_i)$, $\Phi_i^\varphi \in SN(\sigma_i^{\varphi 0},\overline{\sigma}_i^\varphi,\Delta_i^\varphi)$, $\Psi_i \in N(\triangle s_i^0,\overline{\triangle s_i})$, $\Psi_i^\varphi \in N(\delta_i^0,\overline{\delta}_i)$, $\Psi_i^z \in N(z_i^0)$, $\Psi_i^{z\varphi} \in N(z_i^{\varphi 0})$.

Зададим, наконец, ограничения на маневры лидера формации

$$
|v_0 - v^*| \le v_0^0, \qquad |\omega_0| \le \omega_0^0, \qquad |\dot{v}_0| \le w_0^0, \qquad |\dot{\omega}_0| \le \epsilon_0^0, \tag{3.6}
$$

где $v^* \ge 0$ — заданное значение номинальной скорости цепочки.

Примем в качестве исходной "невозмущенной" конфигурации формации прямолинейно движущуюся со скоростью v^* колонну с заданными дистанциями $s_i = s_i^*$. В силу выбора системы отсчета можно считать, что в невозмущенной формации $\varphi_i = 0$, а значит, и $\delta_i = 0$, $\omega_i = 0$.

Тогда в качестве оценочной функции начальных состояний естественно взять вектор

$$
\rho_0 = col\Big((|v_{00} - v^*|, |\varphi_{00}|, |\omega_{00}|)^T, \underset{i=\overline{1,N}}{col}\big(|s_{i0} - s_i^*|, |v_{i0} - v^*|, |\varphi_{i0}|, |\omega_{i0}|, |\delta_{i0}|\big)^T\Big) \in R^{5N+3}. \tag{3.7}
$$

Множество возможных начальных состояний X^0 представляет подмножество в общем пространстве состояний системы

$$
X = \prod_{i=\overline{0,N}} X_i = R^{9N+3} \qquad (X_0 = R^3,\ X_i = R^9,\ i = \overline{1,N}),
$$

в котором $z_i = 0$, $z_i^\varphi = 0$ и переменные x_i, y_i, s_i связаны N геометрическими соотношениями

$$
s_i^2 = (\mathrm{x}_{i-1} - \mathrm{x}_i)^2 + (\mathrm{y}_{i-1} - \mathrm{y}_i)^2, \qquad i = \overline{1,N}.
$$

Оценочной функцией предельных состояний, очевидно, служит вектор

$$
\rho_f(\mathrm{x}) = \underset{i=\overline{1,N}}{col}(|\triangle s_i|, |\delta_i|)^T; \tag{3.8}
$$

текущие состояния естественно оценивать вектор-функцией

$$
\rho(\mathrm{x}) = \underset{i=\overline{1,N}}{col}\left(|\varphi_i - \varphi_{i-1}|, |\triangle s_i|, |\delta_i|, |v_i - v^*|, |\omega_i|\right).
$$

Кроме названных неопределенностей и возмущений, учтем еще параметрические неопределенности масс и моментов инерции объектов, полагая

$$
m_i = m_i^* + \triangle m_i(\ldots), \qquad J_i = J_i^* + \triangle J_i(...), \qquad i = \overline{1,N},
$$

где m_i^*, J_i^* — известные (номинальные) значения, $\triangle m_i$, $\triangle J_i$ — неопределенности, вообще говоря, переменные во времени, зависящие, возможно, от v_i, ω_i и др. (например, неопределенности несомых грузов, присоединенных масс жидкости в случае подводных объектов), для которых предполагаются ограничения

$$| \triangle m_i(\ldots)| \leq m_i^0, \qquad | \triangle J_i(...)| \leq J_i^0. \tag{3.9}$$

Таким образом, вся совокупность всевозможных допустимых возмущений описывается оценками (3.3), (3.6), (3.9), а также параметрами σ_i^0, Δ_i, $\sigma_i^{\varphi 0}$, Δ_i^{φ}, $\triangle s_i^0$, δ_i^0, z_i^0, $z_i^{\varphi 0}$, задающими погрешности элементов управления системы.

В итоге получается задача исследования свойства диссипативности, состоящая в оценке допустимой области начальных состояний по функции (3.7), оценке предельной области, т. е. точности стабилизации формации по вектору (3.8), либо достижимости требуемой точности при заданном уровне допустимых возмущений и неопределенностей, либо синтеза параметров (например, k_i, l_i, k_i^{φ}, l_i^{φ}, a_i, a_i^{φ} в (3.5)), обеспечивающих нужные или наилучшие оценки и т.д.

С помощью пакета программ "ВФЛ-РЕДУКТОР" в случае, когда дополнительно ограничены углы курса лидера ($|\varphi_0| \leq \varphi_0^0$), были проведены численные расчеты для формации объектов типа подводных роботов, показавшие практическую применимость описанной технологии исследования в задачах устойчивости формаций.

Для системы с параметрами $N = 2$ (3 объекта), $m_1^* = 150$, $m_2^* = 100$, $J_1^* = 130$, $J_2^* = 90$, неопределенностями $m_1^0 = 2$, $m_2^0 = 1$, $J_1^0 = 0.5$, $J_2^0 = 1$, ограничениями на нелинейности и возмущения $p_1^0 = p_2^0 = 1$, $p_1^{\varphi 0} = 1.5$, $p_2^{\varphi 0} = 1$, ограничениями на маневры лидера $v_0^0 = 0.5$, $\omega_0^0 = 0.1$, $w_0^0 = 0.01$, $\epsilon_0^0 = 0.01$, $\varphi_0^0 = 0.2$, погрешностями исполнительных устройств и измерителей $\sigma_1^0 = 0.2$, $\sigma_2^0 = 0.3$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_1^{\varphi} = \Delta_2^{\varphi} = 0.005$, $\triangle s_1^0 = 0.2$, $\triangle s_2^0 = 0.3$, $\delta_1^0 = \delta_2^0 = 0.01$ (перечислены только наиболее существенные параметры) с использованием программного комплекса получились следующие оценки предельных состояний:

$$|\triangle s_1| \leq 1.74, \qquad |\triangle s_2| \leq 1.53, \qquad |\delta_1| \leq 0.056, \qquad |\delta_2| \leq 0.072.$$

Заключение

Известно, что даже такие преобразования моделей динамики систем, как замена переменных в форме гомеоморфизмов или диффеоморфизмов, могут не сохранять требуемые динамические свойства. В статье рассмотрены вопросы применения метода редукции для обеспечения корректности модельных преобразований с точки зрения инвариантности изучаемой динамики, а именно, относительно сохранения динамических свойств либо при переходе от одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к другой, получаемой заменой переменных, либо в обратную сторону. На примерах свойств типа устойчивости, притяжения и диссипативности демонстрируются возможности метода редукции для получения условий сохранения свойств. Аналогичные вопросы исследованы для случая, когда вторая модель получается путем, характерным для метода сравнения с ВФЛ (как некоторая мажоранта полной производной ВФЛ, вычисленной в силу исходной системы), и сохранение обеспечивается от преобразованной модели к исходной. Рассмотрено применение одного из полученных критериев диссипативности к нелинейной задаче об "устойчивости" формаций как задаче сохранения геометрической конфигурации группы движущихся объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. М.: Физматлит, 1935. 320 с.
2. **Четаев Н.Г.** Устойчивость движения. М.: Физматлит, 1965. 208 с.

3. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 212 с.
4. **Красовский Н.Н.** Второй метод Ляпунова в теории устойчивости движения // Тр. Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. М.: АН СССР, 1962.
5. **Румянцев В.В.** Метод функций Ляпунова в теории устойчивости // Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. Общая и прикладная механика: сб. ст. М.: Наука, 1968. С. 7–66.
6. **Зубов В.И.** Методы А.М. Ляпунова и их применение. Л.: ЛГУ, 1957. 239 с.
7. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
8. **Анапольский Л.Ю., Иртегов В.Д., Матросов В.М.** Способы построения функций Ляпунова // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1975. Т. 2. С. 53–112.
9. **Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.** Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 480 с.
10. **Руш Н., Абетс П., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
11. **Michel A.N., Wang K., Hu B.** Qualitative theory of dynamical systems. The role of stability-preserving mappings. New York: Marcel Dekker, 2000. 708 p.
12. **Матросов В.М.** Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 384 с.
13. **Матросов В.М.** Метод сравнения в динамике систем. I,II // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 9. С. 1547–1559; 1975. Т. 11, № 3. С. 403–417.
14. **Чезари Л.** Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 480 с.
15. **Thomas J.** Über die invarianz der stabilität bei einem phasenraum-homöomorphismus // J. Reine Angew. Math. 1964. Bd. 213. P. 147–150.
16. **Арнольд В.И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971. 240 с.
17. **Журавлев В.Ф.** Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
18. **Кавинов А.В., Крищенко А.П.** Устойчивость решений в разных переменных // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1470–1473.
19. **Васильев С.Н.** Метод редукции и качественный анализ динамических систем, I-II // Изв. РАН. 2006. № 1. С. 21–29; № 2. С. 5–17. (Теория и системы управления).
20. Алгоритмы вывода теорем метода векторных функций Ляпунова / В.М. Матросов, С.Н. Васильев, Р.И. Козлов [и др.]. Новосибирск: Наука, 1981. 271 с.
21. **Васильев С.Н.** Метод сравнения в анализе систем. I-IV // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 9. С. 1562–1573; Т. 17, № 11. С. 1545–1554; 1982. Т. 18, № 2. С. 197–205; Т. 18, № 6. С. 938–947.
22. **Козлов Р.И.** Теория систем сравнения в методе векторных функций Ляпунова. Новосибирск: Наука, 2001. 137 с.
23. **Васильев С.Н., Гулямов Ш.Б.** Система автоматического синтеза теорем АСТ: свидетельство об официал. регистрации программы для ЭВМ № 2005610836 от 11.04.2005.
24. **Васильев С.Н., Ульянов С.А.** Программный модуль для анализа логико-динамических моделей автоматного типа: свидетельство об официал. регистрации программы для ЭВМ № 2006610937 от 13.03.2006.
25. **Васильев С.Н., Ульянов С.А.** Программный модуль для построения редуцированных логико-динамических моделей автоматного типа: свидетельство об официал. регистрации программы для ЭВМ № 2006610938 от 13.03.2006.
26. **Козлов Р.И., Ульянов С.А., Хмельнов А.Е.** Программный модуль для качественного исследования непрерывных динамических систем ВФЛ-РЕДУКТОР-Н: свидетельство об официал. регистрации программы для ЭВМ № 2007613832 от 07.09.2007.
27. **Козлов Р.И., Ульянов С.А., Хмельнов А.Е.** Программный модуль для качественного исследования непрерывно-дискретных динамических систем ВФЛ-РЕДУКТОР-НД: свидетельство об официал. регистрации программы для ЭВМ № 2007613833 от 07.09.2007.
28. **Yoshizawa T.** Stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: The Math. Soc. of Japan, 1966. 223 p.
29. **Yoshizawa T.** Lyapunov's function and boundedness of solutions // Funkcial. Ekvac. 1959. No. 2. P. 95–142.
30. **Гермаидзе В.Е., Красовский Н.Н.** Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 6. С. 769–775.

31. **Tanner H.G., Pappas G.J., Kumar V.** Leader-to-formation stability // IEEE Trans. Robot. Automat. 2004. Vol. 20, iss. 3. P. 443–455.
32. **Fax J.A., Murray R.M.** Information flow and cooperative control of vehicle formations // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. Vol. 49, iss. 9. P. 1465–1476.

Поступила 29.04.2009

Васильев Станислав Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик РАН
директор
Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
e-mail: snv@ipu.ru.

Козлов Равиль Измайлович
канд. физ.-мат. наук, доцент
ведущий науч. сотрудник
Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН
e-mail: kozlov@icc.ru.

Ульянов Сергей Александрович
канд. техн. наук
ведущий математик
Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
e-mail: sau@icc.ru.

Том 15 № 3 2009

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Е. И. Поясок

Исследуется задача оптимального управления линейной динамической системой в условиях множественной неопределенности: перевести с гарантией систему на терминальное множество и обеспечить максимум гарантированному значению критерия качества. Вводятся множества начального и текущего препостериорного распределений состояний динамической системы, на базе которых определяется позиционное решение задачи оптимального препостериорного[1] наблюдения с помощью неточных измерений входных и выходных сигналов объекта наблюдения двумя измерительными устройствами. Полученное решение используется при определении позиционного решения задачи оптимального управления в условиях неопределенности. В зависимости от объема используемой информации определяются оптимальные замыкаемая и замкнутая связи по выходу. В работе описывается метод квазиреализации оптимальных связей с помощью оптимальных эстиматоров и регулятора, вырабатывающих управляющие воздействия в режиме реального времени. Результаты иллюстрируются на примерах.

Ключевые слова: множественная неопределенность, препостериорное распределение, ширина множества, оптимальное препостериорное наблюдение, оптимальное управление линейной динамической системой, оптимальные замыкаемая и замкнутая связи, оптимальные эстиматор и регулятор.

R. Gabasov, F. M. Kirillova, E. I. Poyasok. Optimal control of linear systems under uncertainty.

The problem of optimal control of a linear dynamical system under set-membership uncertainty is studied: it is required to steer the system to the terminal set with a guarantee and to maximize the guaranteed value of the quality criterion. The sets of the initial and current preposteriori distributions of the states of the dynamical system are introduced; they are used to determine a positional solution of the problem of optimal preposteriori[2] observation with the help of inaccurate measurements of input and output signals of the observation object by two measuring devices. The obtained solution is used for determining a positional solution of the optimal control problem under uncertainty. Depending on the amount of the information used, optimal closable and closed loops are determined. The method of quasi-implementation of optimal loops by means of optimal estimator and regulator producing real-time control actions is described. The results are illustrated by examples.

Keywords: set-membership uncertainty, preposteriori distribution, width of a set, optimal preposteriori observation, optimal control of a linear dynamical system, optimal closable and closed loops, optimal estimator and regulator.

Введение

Управление динамическими системами осуществляется, как правило, в условиях неопределенности. Однако до середины XX века системы управления проектировались по детерминированным математическим моделям. В современный период теории управления используются модели со стохастической [1–3] и множественной [4–9] неопределенностью.

В данной работе продолжаются исследования [10–13]. Результаты этих работ обобщаются на задачу оптимального управления недетерминированной динамической системой в реальном времени по неточным измерениям ее входных и выходных сигналов.

Структура работы. В разд. 1 дается постановка задачи. Линейная нестационарная недетерминированная модель системы управления оптимизируется в классе дискретных ограниченных управляющих воздействий. Требуется гарантированно перевести систему в заданный

[1]Препостериорный анализ — анализ рассматриваемого, но еще не проведенного процесса наблюдения.

[2]A preposteriori analysis is an analysis of an observation process that is considered but not yet carried out.

момент времени на терминальное множество и получить оптимальное гарантированное значение критерия качества — линейного функционала на терминальных состояниях системы. Для решения поставленной задачи оптимального управления в условиях неопределенности в разд. 2 рассматривается вспомогательная задача оптимального препостериорного наблюдения, в которой вводятся понятие препостериорного распределения и его оценка (характеристика) — ширина в заданном направлении. Проводится препостериорный анализ, учитывающий априорную и текущую информацию о подсистеме наблюдения. Результаты препостериорного анализа иллюстрируются на примере (разд. 3). В разд. 4 для задачи оптимального управления на базе результатов препостериорного наблюдения определяется оптимальная замыкаемая связь по выходу. Раздел содержит метод построения в режиме реального времени оптимальным регулятором квазиреализации оптимальной связи. Статья завершается (разд. 5) примером.

1. Постановка задачи

Пусть $T = [t_*, t^*]$ — промежуток времени; $T_u = \{t_*, t_* + h, ..., t^* - h\}$, $h = (t^* - t_*)/N$ (N — натуральное число); $T_w = \{\theta_i^w \in T_u, i = \overline{1, N_w}\}$, $t_* = \theta_0^w < \theta_1^w < \ldots < \theta_{N_w}^w$, — множество моментов измерения входных сигналов; $T_x = \{\theta_i^x \in T_u, i = \overline{1, N_x}\}$, $t_* = \theta_0^x < \theta_1^x < \ldots < \theta_{N_x}^x$, — множество моментов измерения выходных сигналов; $A(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $A_w(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times r}$, $M(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $M_w(t) \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$, $t \in T$, — кусочно-непрерывные функции; $C_w(t) \in \mathbb{R}^{q_w \times n_z}$, $C_x(t) \in \mathbb{R}^{q_x \times n_x}$, $t \in T$, — непрерывные функции; $h_i \in \mathbb{R}^{n_x}$, $h_i' h_i = 1$, $i \in I = \overline{1, m}$; $m > n_x$; $H \in \mathbb{R}^{m \times n_x}$ — матрица со строками h_i, $i \in I$; $c \in \mathbb{R}^{n_x}$; $g_*, g^* \in \mathbb{R}^m$; $u_*, u^* \in \mathbb{R}^r$; $x_0 \in \mathbb{R}^{n_x}$; $U = \{u \in \mathbb{R}^r : \ u_* \le u \le u^*\}$, $\Xi_w = \{\xi \in \mathbb{R}^{q_w} : \xi_{*w} \le \xi \le \xi_w^*\}$, $\Xi_x = \{\xi \in \mathbb{R}^{q_x} : \xi_{*x} \le \xi \le \xi_x^*\}$ — ограниченные множества; $X^* = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : \ g_{*i} \le h_i' x \le g_i^*, \ i \in I\}$ — ограниченное тело; $u(\underline{t} : \bar{t}) = (u(t), \underline{t} \le t < \bar{t})$.

Функцию $u(\cdot) = u(t_* : t^*)$ будем называть *дискретной* (с периодом квантования h), если $u(t) \equiv u(s)$, $t \in [s, s+h[$, $s \in T_u$.

В классе дискретных управляющих воздействий $u(\cdot)$ рассмотрим задачу оптимального управления

$$c' x(t^*) \to \max; \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + B(t)u + M(t)w(t), \quad t \in T; \quad x(t_*) = x_0; \\ x(t^*) \in X^*; \quad u(t) \in U, \quad t \in T; \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} y_w(\theta^w) = C_w(\theta^w) z(\theta^w) + \xi_w(\theta^w), \quad \xi_w(\theta^w) \in \Xi_w, \quad \theta^w \in T_w; \\ \dot{z} = A_w(t) z + M_w(t) w(t), \quad z(t_*) = z_0, \quad t \in T; \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$y_x(\theta_i^x) = \int\limits_{\theta_{i-1}^x}^{\theta_i^x} C_x(v) x(v) dv + \xi_x(\theta_i^x), \quad \xi_x(\theta_i^x) \in \Xi_x, \quad i = \overline{1, N_x}. \tag{1.4}$$

Здесь (1.1) — критерий качества; (1.2) — математическая модель объекта управления; (1.3) — измерительное устройство для входных сигналов; (1.4) — измерительное устройство для выходных сигналов.

Относительно возмущения $w(t)$, $t \in T$, предположим, что это конечно-параметрическая функция

$$w(t) = L(t) w, \qquad t \in T, \tag{1.5}$$

с заданной кусочно-непрерывной функцией $L(t) \in \mathbb{R}^{n_w \times l}$, $t \in T$, и неизвестным вектором $w \in \mathbb{R}^l$ из ограниченного множества $W = \{w \in \mathbb{R}^l : \omega_* \le w \le \omega^*\}$.

В общих словах задача (1.1)–(1.5) состоит в формировании в режиме реального времени ограниченных дискретных управляющих воздействий $u(t) \in U$, $t \in T$, по неточным и неполным измерениям сигналов измерительных устройств (1.3), (1.4). Эти воздействия должны с гарантией переводить систему (1.2) на терминальное множество X^* и обеспечивать максимум гарантированному значению критерия качества (1.1).

Предварительно решим вспомогательную задачу оптимального наблюдения.

2. Оптимальное препостериорное наблюдение динамических систем

Выделим из системы управления (1.1)–(1.4) *подсистему наблюдения*

$$\dot{x} = A(t)x + M(t)w(t), \quad t \in T; \quad x(t_*) = x_0; \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} y_w(\theta^w) = C_w(\theta^w)z(\theta^w) + \xi_w(\theta^w), \quad \xi_w(\theta^w) \in \Xi_w, \quad \theta^w \in T_w; \\ \dot{z} = A_w(t)z + M_w(t)w(t), \quad z(t_*) = z_0, \quad t \in T; \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$y_x(\theta_i^x) = \int\limits_{\theta_{i-1}^x}^{\theta_i^x} C_x(v)x(v)dv + \xi_x(\theta_i^x), \quad \xi_x(\theta_i^x) \in \Xi_x, \quad i = \overline{1, N_x}. \tag{2.3}$$

Из-за неопределенности вектора w терминальное состояние $x(t^*|w)$ подсистемы наблюдения (2.1), играющее важную роль во многих задачах управления, можно найти лишь с точностью до множества

$$X_{t^*}^o = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n_x} : x = F(t^*, t_*)x_0 + \int\limits_{t_*}^{t^*} F(t^*, t)M(t)L(t)dtw, \, w \in W \right\}, \tag{2.4}$$

где $F(t, \tau) = F(t)F^{-1}(\tau)$; $F(t) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $t \in T$: $\dot{F} = A(t)F$, $F(t_*) = E$. Множество (2.4) назовем *априорным распределением терминального состояния подсистемы наблюдения.*

При определении множества $X_{t^*}^o$ использовалась априорная информация только о математической модели (2.1) объекта наблюдения, но не принималась во внимание априорная информация об измерительных устройствах (2.2), (2.3). Учет априорной информации обо всей *подсистеме наблюдения* (2.1)–(2.3) осуществим до начала процесса наблюдения с помощью препостериорного анализа.

Введем *множество (виртуальных) моментов замыканий* $T_з = T_{зw} \cup T_{зx}$, где $T_{зw} \subseteq T_w$, $T_{зx} \subseteq T_x$. Если $T_{зw} = T_w$ и $T_{зx} = T_x$, то будем говорить о *полном препостериорном анализе*, в противном случае — о *частичном.*

Выбрав произвольные $\tilde{w} \in W$, $\tilde{\xi}_w(\theta^w) \in \Xi_w$, где $\theta^w \in T_{зw}$; $\tilde{\xi}_x(\theta^x) \in \Xi_x$, $\theta^x \in T_{зx}$, просимулируем в подсистеме наблюдения виртуальный переходный процесс $\tilde{x}(t)$, $t \in T$, и по виртуальным сигналам $\tilde{y}(\cdot) = \{\tilde{y}_w(\theta^w),\, \theta^w \in T_{зw};\, \tilde{y}_x(\theta^x),\, \theta^x \in T_{зx}\}$ определим *апостериорное распределение* [10] терминального состояния $X_{t^*}^o(\tilde{y}(\cdot))$ как множество таких и только таких терминальных состояний подсистемы $x \in X_{t^*}^o$, которые вместе с некоторыми вектором $w \in W$ и ошибками измерений $\xi_w(\theta^w) \in \Xi_w$, $\theta^w \in T_{зw}$; $\xi_x(\theta^x) \in \Xi_x$, $\theta^x \in T_{зx}$, могут породить $\tilde{y}(\cdot)$.

В качестве числовой характеристики (*оценки*) множества $X_{t^*}^o(\tilde{y}(\cdot))$ *в заданном направлении* q возьмем величину (*ширину множества*)

$$d(\tilde{y}(\cdot)|q) = \max_{x \in X_{t^*}^o(\tilde{y}(\cdot))} q'x - \min_{x \in X_{t^*}^o(\tilde{y}(\cdot))} q'x = \max_{\bar{x}, \underline{x} \in X_{t^*}^o(\tilde{y}(\cdot))} q'(\bar{x} - \underline{x}).$$

Пусть $\tilde{Y}$ — множество всех возможных виртуальных сигналов $\tilde{y}(\cdot)$. Число

$$d^0(q) = \max d(\tilde{y}(\cdot)|q), \quad \tilde{y}(\cdot) \in \tilde{Y}, \tag{2.5}$$

назовем *максимальной шириной* (*начальной препостериорной оценкой*) множеств $X_{t^*}^o(\tilde{y}(\cdot))$, $\tilde{y}(\cdot) \in \tilde{Y}$, в направлении q.

Вычисление оценки (2.5) называется *начальной задачей оптимального препостериорного наблюдения* (*для направления* q), а ее результат — *начальным препостериорным решением* (*для направления* q).

Пусть Q — конечная совокупность единичных n_x-векторов (направлений), в которой каждая совокупность из n_x векторов линейно независима. Множество

$$\mathcal{X}^o_{t^*} = \{x \in \mathbb{R}^{n_x} :\ -d^0(q)/2 \le q'x \le d^0(q)/2,\ q \in Q\}$$

будем называть *начальным препостериорным распределением* (*по совокупности* Q) в момент времени t^*. При $|Q| \le n_x$ во множество $\mathcal{X}^o_{t^*}$ можно поместить каждое из множеств $X^o_{t^*}(\tilde{y}(\cdot))$, $\tilde{y}(\cdot) \in \tilde{Y}$.

Запишем задачу (2.5) в аналитической форме. Согласно (2.1)–(2.3) имеем

$$\begin{aligned}
&y_w(\theta^w) = C_w(\theta^w)F_w(\theta^w, t_*)z_0 + \int_{t_*}^{\theta^w} C_w(\theta^w)F_w(\theta^w, t)M_w(t)L(t)dtw + \xi_w(\theta^w), \quad \theta^w \in T_{зw};\\
&y_x(\theta^x_i) = \int_{\theta^x_{i-1}}^{\theta^x_i} C_x(v)F(v, t_*)x_0dv + \int_{\theta^x_{i-1}}^{\theta^x_i} C_x(v)\int_{t_*}^{v} F(v,t)M(t)L(t)dtdvw + \xi_x(\theta^x_i), \quad \theta^x_i \in T_{зx};
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\Big(F_w(t,\tau) = F_w(t)F_w^{-1}(\tau); \quad F_w(t) \in \mathbb{R}^{n_z\times n_z}, \quad t \in T :\ \dot{F}_w = A_w(t)F_w, \quad F_w(t_*) = E\Big).$$

Из определения апостериорного распределения терминального состояния следует, что множество $X^o_{t^*}(\tilde{y}(\cdot))$ состоит из всех таких $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases}
x = F(t^*, t_*)x_0 + \displaystyle\int_{t_*}^{t^*} F(t^*, t)M(t)L(t)dtw,\\
\xi_{*w} \le D_w(\theta^w)w - C_w(\theta^w)F_w(\theta^w, t_*)z_0 + \tilde{y}_w(\theta^w) \le \xi^*_w, \quad \theta^w \in T_{зw};\\
\xi_{*x} \le D_x(\theta^x_i)w - \displaystyle\int_{\theta^x_{i-1}}^{\theta^x_i} C_x(v)F(v, t_*)x_0dv + \tilde{y}_x(\theta^x_i) \le \xi^*_x, \quad \theta^x_i \in T_{зx};\\
\omega_* \le w \le \omega^*,
\end{cases}$$

где

$$\begin{aligned}
D_w(\theta^w) &= -\int_{t_*}^{\theta^w} C_w(\theta^w)F_w(\theta^w, t)M_w(t)L(t)dt;\\
D_x(\theta^x_i) &= -\int_{\theta^x_{i-1}}^{\theta^x_i} C_x(v)\int_{t_*}^{v} F(v, t)M(t)L(t)dtdv.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Обозначим

$$q^{x\prime} = q'\int_{t_*}^{t^*} F(t^*, t)M(t)L(t)dt. \tag{2.8}$$

Используя соотношения (2.6), заключаем, что начальная задача оптимального препостериорного наблюдения (2.5) представляет задачу линейного программирования

$$\begin{cases} d^0(q) = \max\limits_{\bar w, \underline{w}, \tilde w, \tilde\xi_w(\cdot), \tilde\xi_x(\cdot)} q^{x\prime}(\bar w - \underline{w}), \\ \xi_{*w} \le D_w(\theta^w)(\bar w - \tilde w) + \tilde\xi_w(\theta^w) \le \xi^*_w, \\ \xi_{*w} \le D_w(\theta^w)(\underline{w} - \tilde w) + \tilde\xi_w(\theta^w) \le \xi^*_w, \quad \theta^w \in T_{\text{з}w}; \\ \xi_{*x} \le D_x(\theta^x)(\bar w - \tilde w) + \tilde\xi_x(\theta^x) \le \xi^*_x, \\ \xi_{*x} \le D_x(\theta^x)(\underline{w} - \tilde w) + \tilde\xi_x(\theta^x) \le \xi^*_x, \quad \theta^x \in T_{\text{з}x}; \\ \omega_* \le \bar w \le \omega^*, \quad \omega_* \le \underline{w} \le \omega^*, \quad \omega_* \le \tilde w \le \omega^*; \\ \xi_{*w} \le \tilde\xi_w(\theta^w) \le \xi^*_w, \quad \theta^w \in T_{\text{з}w}; \quad \xi_{*x} \le \tilde\xi_x(\theta^x) \le \xi^*_x, \quad \theta^x \in T_{\text{з}x}, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $\tilde\xi_w(\cdot) = \{\tilde\xi_w(\theta^w),\, \theta^w \in T_{\text{з}w}\}$, $\tilde\xi_x(\cdot) = \{\tilde\xi_x(\theta^x),\, \theta^x \in T_{\text{з}x}\}$. Поскольку препостериорный анализ проводится до начала процесса наблюдения, то время решения задачи (2.9) несущественно.

Проведем препостериорный анализ для текущего момента $\tau \in T_w \cup T_x$ процесса наблюдения, считая, что наблюдение уже осуществлено на промежутке $T_{+\tau} = [t_*, \tau]$ и по записанным сигналам $y^*_\tau(\cdot) = \{y^*_w(\theta^w),\, \theta^w \in T_w \cap T_{+\tau};\ y^*_x(\theta^x),\, \theta^x \in T_x \cap T_{+\tau}\}$ определено *текущее распределение* $W(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ вектора w, соответствующее *позиции* $(\tau, y^*_\tau(\cdot))$. Оно состоит из таких и только таких $w \in W$, которые способны вместе с некоторыми ошибками измерений $\xi_w(\theta^w) \in \Xi_w$, $\theta^w \in T_w \cap T_{+\tau}$; $\xi_x(\theta^x) \in \Xi_x$, $\theta^x \in T_x \cap T_{+\tau}$, породить $y^*_\tau(\cdot)$.

Выберем произвольные $\tilde w \in W(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $\tilde\xi_w(\theta^w) \in \Xi_w$, $\theta^w \in T_{\text{з}w} \cap T^{-\tau}$; $\tilde\xi_x(\theta^x) \in \Xi_x$, $\theta^x \in T_{\text{з}x} \cap T^{-\tau}$; $T^{-\tau} =]\tau, t*]$, просимулируем в подсистеме наблюдения виртуальный переходный процесс $\tilde x(t),\ t \in T^{-\tau}$; $\tilde x(\tau) = F(\tau, t_*)x_0 + \int_{t_*}^{\tau} F(\tau, t)M(t)L(t)dt\tilde w$. По записанным $y^*_\tau(\cdot)$ и виртуальным $\tilde y^\tau(\cdot) = \{\tilde y_w(\theta^w),\ \theta^w \in T_{\text{з}w} \cap T^{-\tau};\ \tilde y_x(\theta^x),\ \theta^x \in T_{\text{з}x} \cap T^{-\tau}\}$ измерениям определим апостериорное распределение терминального состояния $X^o_{t^*}(\tilde y^\tau(\cdot)|\tau, y^*_\tau(\cdot))$ для позиции $(\tau, y^*_\tau(\cdot))$. Множество $X^o_{t^*}(\tilde y^\tau(\cdot)|\tau, y^*_\tau(\cdot))$ составим из всех терминальных состояний системы (2.1), которые вместе с некоторыми $w \in W$, ошибками измерений $\xi_w(\theta^w) \in \Xi_w$, $\theta^w \in (T_w \cap T_{+\tau}) \cup (T_{\text{з}w} \cap T^{-\tau})$; $\xi_x(\theta^x) \in \Xi_x$, $\theta^x \in (T_x \cap T_{+\tau}) \cup (T_{\text{з}x} \cap T^{-\tau})$, могут породить $y^*_\tau(\cdot)$, $\tilde y^\tau(\cdot)$.

Текущей шириной множества $X^o_{t^*}(\tilde y^\tau(\cdot)|\tau, y^*_\tau(\cdot))$ *в направлении* q назовем число

$$d(\tilde y^\tau(\cdot)|q, (\tau, y^*_\tau(\cdot))) = \max_{x \in X^o_{t^*}(\tilde y^\tau(\cdot)|\tau, y^*_\tau(\cdot))} q'x - \min_{x \in X^o_{t^*}(\tilde y^\tau(\cdot)|\tau, y^*_\tau(\cdot))} q'x = \max_{\bar x, \underline{x} \in X^o_{t^*}(\tilde y^\tau(\cdot)|\tau, y^*_\tau(\cdot))} q'(\bar x - \underline{x}).$$

Пусть $\tilde Y(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ — множество всех возможных виртуальных сигналов $\tilde y^\tau(\cdot)$ для позиции $(\tau, y^*_\tau(\cdot))$.

Число

$$d^0(q|\tau, y^*_\tau(\cdot)) = \max d\big(\tilde y^\tau(\cdot)|q, (\tau, y^*_\tau(\cdot))\big),\ \tilde y^\tau(\cdot) \in \tilde Y(\tau, y^*_\tau(\cdot)), \tag{2.10}$$

будем называть *текущей максимальной шириной* (текущей препостериорной оценкой) множеств $X^o_{t^*}(\tilde y^\tau(\cdot)|\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $\tilde y^\tau(\cdot) \in \tilde Y(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ в направлении q, или *текущим препостериорным решением* задачи оптимального наблюдения (препостериорным решением задачи оптимального наблюдения для текущей позиции).

Множество

$$\mathcal{X}^o_{t^*}(\tau, y^*_\tau(\cdot)) = \big\{x \in \mathbb{R}^{n_x} : -d^0(q|\tau, y^*_\tau(\cdot))/2 \le q'x \le d^0(q|\tau, y^*_\tau(\cdot))/2,\ q \in Q\big\}$$

называется *текущим препостериорным распределением в момент времени* t^*. При $|Q| \le n_x$ во множество $\mathcal{X}^o_{t^*}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ можно поместить каждое из множеств $X^o_{t^*}(\tilde y^\tau(\cdot)|\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $\tilde y^\tau(\cdot) \in \tilde Y(\tau, y^*_\tau(\cdot))$.

По аналогии с начальной задачей (2.5) нетрудно показать, что в аналитической форме задача (2.10) имеет вид

$$
\begin{cases}
d^0(q|\tau, y^*_\tau(\cdot)) = \max\limits_{\bar{w},\underline{w},\tilde{w},\tilde{\xi}^\tau_w(\cdot),\tilde{\xi}^\tau_x(\cdot)} q^{x\prime}(\bar{w}-\underline{w}),\\
\xi_{*w} \le D_w(\theta^w)\bar{w} - C_w(\theta^w)F_w(\theta^w,t_*)z_0 + y^*_w(\theta^w) \le \xi^*_w,\\
\xi_{*w} \le D_w(\theta^w)\underline{w} - C_w(\theta^w)F_w(\theta^w,t_*)z_0 + y^*_w(\theta^w) \le \xi^*_w, \quad \theta^w \in T_w \cap T_{+\tau};\\
\xi_{*x} \le D_x(\theta^x_i)\bar{w} - \int\limits_{\theta^x_{i-1}}^{\theta^x_i} C_x(v)F(v,t_*)x_0 dv + y^*_x(\theta^x_i) \le \xi^*_x,\\
\xi_{*x} \le D_x(\theta^x_i)\underline{w} - \int\limits_{\theta^x_{i-1}}^{\theta^x_i} C_x(v)F(v,t_*)x_0 dv + y^*_x(\theta^x_i) \le \xi^*_x, \quad \theta^x_i \in T_x \cap T_{+\tau};\\
\xi_{*w} \le D_w(\theta^w)(\bar{w}-\tilde{w}) + \tilde{\xi}_w(\theta^w) \le \xi^*_w,\\
\xi_{*w} \le D_w(\theta^w)(\underline{w}-\tilde{w}) + \tilde{\xi}_w(\theta^w) \le \xi^*_w, \quad \theta^w \in T_{\text{з}w} \cap T^{-\tau};\\
\xi_{*x} \le D_x(\theta^x)(\bar{w}-\tilde{w}) + \tilde{\xi}_x(\theta^x) \le \xi^*_x,\\
\xi_{*x} \le D_x(\theta^x)(\underline{w}-\tilde{w}) + \tilde{\xi}_x(\theta^x) \le \xi^*_x, \quad \theta^x \in T_{\text{з}x} \cap T^{-\tau};\\
\omega_* \le \bar{w} \le \omega^*, \quad \omega_* \le \underline{w} \le \omega^*, \quad \omega_* \le \tilde{w} \le \omega^*;\\
\xi_{*w} \le \tilde{\xi}_w(\theta^w) \le \xi^*_w,\ \theta^w \in T_{\text{з}w} \cup T^{-\tau}; \quad \xi_{*x} \le \tilde{\xi}_x(\theta^x) \le \xi^*_x, \quad \theta^x \in T_{\text{з}x} \cup T^{-\tau},
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

где $\tilde{\xi}^\tau_w(\cdot) = \{\tilde{\xi}_w(\theta^w),\ \theta^w \in T_{\text{з}w} \cap T^{-\tau}\}$, $\tilde{\xi}^\tau_x(\cdot) = \{\tilde{\xi}_x(\theta^x),\ \theta^x \in T_{\text{з}x} \cap T^{-\tau}\}$.

При позиционном управлении для формирования текущих управляющих воздействий (с целью получения достаточно полной информации о неопределенности) оценки $d^0(q|\tau, y^*_\tau(\cdot))$ вычисляются для нескольких векторов (направлений) $q \in Q$. Вектор

$$d^0(\tau, y^*_\tau(\cdot)) = (d^0(q|\tau, y^*_\tau(\cdot)),\ q \in Q)$$

назовем *вектором достаточных оценок для позиции* $(\tau, y^*_\tau(\cdot))$.

Пусть Y^*_τ — совокупность всех возможных сигналов $y^*_\tau(\cdot)$ измерительных устройств (2.2), (2.3), которые могут быть записаны к моменту τ.

Функцию

$$d^0(\tau, y^*_\tau(\cdot)), \quad y^*_\tau(\cdot) \in Y^*_\tau, \quad \tau \in T_w \cup T_x, \tag{2.12}$$

будем называть *позиционным решением* задачи оптимального препостериорного наблюдения, ее построение — *синтезом* оптимальной системы препостериорного наблюдения.

Знание позиционного решения (2.12) позволяет для каждой возможной позиции $(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ получать достаточные оценки и на их основе формировать оптимальные управляющие воздействия в системе a) с оптимальной замыкаемой связью по выходу, если в процессе наблюдения используется частичный препостериорный анализ; b) с оптимальной замкнутой связью по выходу, если используется полный препостериорный анализ. В настоящее время такой (классический) метод синтеза оптимальной системы осуществить невозможно, поскольку пока нет методов построения позиционного решения (2.12).

Как видно из предыдущего, позиционное решение (2.12) строится до начала процесса наблюдения для всех возможных позиций, что требует хранения огромного объема информации. В современную эпоху бурного развития вычислительной техники представляется естественным другой способ оптимального наблюдения, при котором функция (2.12) не строится, а необходимые для управления текущие ее значения вычисляются по ходу процесса.

Для описания такого способа наблюдения прежде всего выясним, как используется позиционное решение в конкретном процессе наблюдения. Предположим, что позиционное решение (2.12) построено. Рассмотрим некоторый конкретный процесс наблюдения, в котором реализовались неизвестные w^*, $\xi^*_w(\theta^w)$, $\theta^w \in T_w$; $\xi^*_x(\theta^x)$, $\theta^x \in T_x$. Эта совокупность породит в подсистеме (2.1)–(2.3) переходный процесс $x^*(t)$, $t \in T$, и известные сигналы $y^*_w(\theta^w)$, $\theta^w \in T_w$; $y^*_x(\theta^x)$, $\theta^x \in T_x$. По этим сигналам, зная позиционное решение (2.12), легко найти текущие оценки $d^*(\tau) = d^0(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $\tau \in T_w \cup T_x$. Отсюда следует, что в конкретном процессе наблюдения позиционное решение (2.12) не используется целиком, нужны лишь его значения вдоль отдельной последовательности сигналов $y^*_\tau(\cdot)$, $\tau \in T_w \cup T_x$.

Функцию

$$d^*(\tau), \ \tau \in T_w \cup T_x,$$

назовем *реализацией* позиционного решения в конкретном процессе наблюдения. В силу указанных выше причин осуществить такой способ наблюдения в настоящее время невозможно. Опишем другой способ оптимального наблюдения — *оптимальное наблюдение в режиме реального времени.* Предположим, что для каждого момента $\tau \in T_w \cup T_x$ существует метод вычисления значений $d^0(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ за время $s^o(\tau)$, не превосходящее h.

Назовем функцию

$$d^{**}(t) = \begin{cases} (d^0(q),\, q \in Q), \quad t \in [t_*, \bar{t}_* + s^o(\bar{t}_*)[; \\ d^*(\tau), \quad t \in [\tau + s^o(\tau), \bar{\tau} + s^o(\bar{\tau})[, \quad \tau \in T_w \cup T_x; \\ d^*(\underline{t}^*), \quad t \in [\underline{t}^* + s^o(\underline{t}^*), t^*[, \end{cases}$$

где $\bar{t} = \min\{\tau \in T_w \cup T_x : \tau > t\}$, $\underline{t} = \max\{\tau \in T_w \cup T_x : \tau < t\}$, *квазиреализацией* позиционного решения, а устройство, способное ее строить, — *оптимальным эстиматором* (ОЭ). Другими словами, квазиреализация — это реализация позиционного решения с учетом затрат времени на вычисление ее текущих значений.

Таким образом, проблема синтеза оптимальной системы наблюдения сводится к построению алгоритма работы ОЭ.

Предлагается следующий алгоритм работы ОЭ. Поскольку вычисления по каждому направлению $q \in Q$ можно вести параллельно, то алгоритм работы опишем только для одного ОЭ. До начала процесса наблюдения ОЭ двойственным методом [10] решает задачу (2.9), вычисляя тем самым начальную препостериорную оценку $d^0(q)$ и соответствующую оптимальную опору $K^0_b(q, t_*)$.

Пусть ОЭ проработал на промежутке $T_{+\tau}$, по полученным сигналам $y^*_\tau(\cdot)$ построил оптимальную опору $K^0_b(q, \tau)$ для позиции $(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ и вычислил текущую препостериорную оценку $d^0(q|\tau, y^*_\tau(\cdot))$. В следующий ближайший момент измерений $\bar{\tau}$ становятся известными сигналы a) $y^*_w(\bar{\tau})$, если $\bar{\tau} \in T_w$; b) $y^*_x(\bar{\tau})$, если $\bar{\tau} \in T_x$; c) оба сигнала a), b), если $\bar{\tau} \in T_w \cap T_x$.

ОЭ на промежутке $[\bar{\tau}, \bar{\tau} + s^o(\bar{\tau})[$ решает задачу (2.11) для позиции $(\bar{\tau}, y^*_{\bar{\tau}}(\cdot))$. Эта задача отличается от решенной на предыдущем шаге задачи (2.11) для позиции $(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ тем, что добавляются ограничения

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \xi_{*w} \le D_w(\bar{\tau})\bar{w} - C_w(\bar{\tau})F_w(\bar{\tau}, t_*)z_0 + y^*_w(\bar{\tau}) \le \xi^*_w, \\ \xi_{*w} \le D_w(\bar{\tau})\underline{w} - C_w(\bar{\tau})F_w(\bar{\tau}, t_*)z_0 + y^*_w(\bar{\tau}) \le \xi^*_w; \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} \xi_{*x} \le D_x(\theta^x_i)\bar{w} - \int\limits_{\theta^x_{i-1}}^{\theta^x_i} C_x(v)F(v, t_*)x_0 dv + y^*_x(\theta^x_i) \le \xi^*_x, \\ \xi_{*x} \le D_x(\theta^x_i)\underline{w} - \int\limits_{\theta^x_{i-1}}^{\theta^x_i} C_x(v)F(v, t_*)x_0 dv + y^*_x(\theta^x_i) \le \xi^*_x, \quad \theta^x_i = \bar{\tau}; \end{cases}$$

$$\text{c)}\quad \begin{cases} \xi_{*w} \le D_w(\bar\tau)\bar w - C_w(\bar\tau)F_w(\bar\tau,t_*)z_0 + y_w^*(\bar\tau) \le \xi_w^*, \\ \xi_{*w} \le D_w(\bar\tau)\underline{w} - C_w(\bar\tau)F_w(\bar\tau,t_*)z_0 + y_w^*(\bar\tau) \le \xi_w^*; \\ \xi_{*x} \le D_x(\theta_i^x)\bar w - \int\limits_{\theta_{i-1}^x}^{\theta_i^x} C_x(v)F(v,t_*)x_0 dv + y_x^*(\theta_i^x) \le \xi_x^*, \\ \xi_{*x} \le D_x(\theta_i^x)\underline{w} - \int\limits_{\theta_{i-1}^x}^{\theta_i^x} C_x(v)F(v,t_*)x_0 dv + y_x^*(\theta_i^x) \le \xi_x^*, \quad \theta_i^x = \bar\tau, \end{cases}$$

и удаляются ограничения

$$\begin{cases} \xi_{*w} \le D_w(\bar\tau)(\bar w - \tilde w) + \tilde\xi_w(\bar\tau) \le \xi_w^*, \\ \xi_{*w} \le D_w(\bar\tau)(\underline{w} - \tilde w) + \tilde\xi_w(\bar\tau) \le \xi_w^*; \end{cases} \text{если } \bar\tau \in T_{зw};$$

$$\begin{cases} \xi_{*x} \le D_x(\bar\tau)(\bar w - \tilde w) + \tilde\xi_x(\bar\tau) \le \xi_x^*, \\ \xi_{*x} \le D_x(\bar\tau)(\underline{w} - \tilde w) + \tilde\xi_x(\bar\tau) \le \xi_x^*; \end{cases} \text{если } \bar\tau \in T_{зx}.$$

Новую задачу ОЭ решает двойственным методом, корректируя оптимальную опору $K_b^0(q,\tau)$ задачи, решенной на предыдущем этапе, до построения оптимальной опоры $K_b^0(q,\bar\tau)$. Поскольку эти задачи отличаются между собой незначительно, то с помощью двойственного метода можно быстро скорректировать текущую опору $K_b^0(q,\tau)$.

Замечание 1. В качестве множества возможных значений вектора w можно рассматривать $W = \{w \in \mathbb{R}^l : \ l_{*w} \le L_w w \le l_w^*, \omega_* \le w \le \omega^*\}$, $L_w \in \mathbb{R}^{m_w \times l}$.

Замечание 2. Неопределенным может быть и начальное состояние $x_0 \in X_* = \big\{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x = L_0\nu, \nu \in V = \{\nu \in \mathbb{R}^{n_v} : l_{*\nu} \le L_\nu \nu \le l_\nu^*, \nu_* \le \nu \le \nu^*\}\big\}$, $L_0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_\nu}$, $L_\nu \in \mathbb{R}^{m_x \times n_\nu}$.

3. Пример 1

Математическая модель объекта наблюдения

$$2\ddot x + 5.4x = w(t); \quad x(0) = 0.8, \quad \dot x(0) = -1.0, \quad T = [0,12];$$

измерительные устройства

$$y_w = z + \xi_w(t), \quad |\xi_w(t)| \le \xi_w^*; \quad \dot z + 1.8z = w(t), \quad z(0) = -3.0;$$

$$y_x(\theta_i^x) = \int\limits_{\theta_{i-1}^x}^{\theta_i^x} (x + \dot x)dv + \xi_x(\theta_i^x), \quad |\xi_x(\theta_i^x)| \le \xi_x^*, \quad i = \overline{1, N_x};$$

возмущение

$$w(t) = w_1 \sin(t) + w_2 \sin(3t) + w_3 \sin(5t), \quad t \in T;$$
$$(w_1, w_2, w_3) \in W = \big\{w \in \mathbb{R}^3 : |w_i| \le 1.6, \quad i = \overline{1,3}\big\};$$

$Q = \big(q_{(i)} = (\cos(\pi i/12), \sin(\pi i/12)), \quad i = \{1, 2, \dots, 24\}\big)$.

Цель эксперимента — построение начальных и текущих препостериорных распределений в терминальный момент времени.

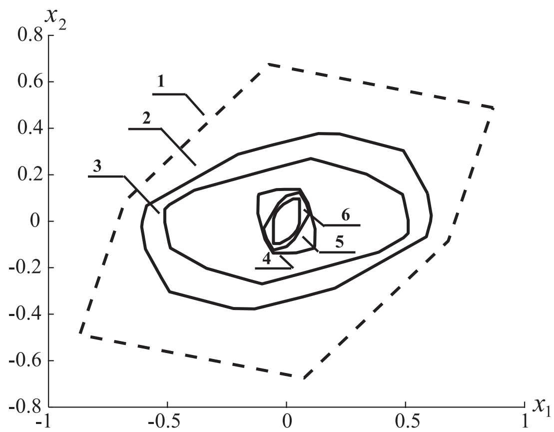


Рис. 3.1.

В первой серии экспериментов полагалось $\xi_w^* = 0.1$, $\xi_x^* = 0.1$, и распределения строились для следующих случаев (рис. 3.1, $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$):

1. $X_{t^*}^0 = \Big\{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x = \displaystyle\int_{t_*}^{t^*} F(t^*, t)M(t)L(t)dtw,\ w \in W\Big\}$;
2. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $T_{зw} = T_{зx} = \{9\}$;
3. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $T_{зw} = T_{зx} = \{6\}$;
4. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $T_{зw} = T_{зx} = \{3, 6, 9\}$;
5. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $T_{зw} = T_{зx} = \{1, 3, 6, 9, 11\}$;
6. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $T_{зw} = T_{зx} = \{1, 2, \dots, 11\}$.

Во второй серии считалось $T_{зw} = T_{зx} = \{3, 6, 9\}$. В первой части серии полагалось $\xi_x^* = 0.1$ и рассмотрены случаи $\big($рис. 3.2(a)$\big)$:

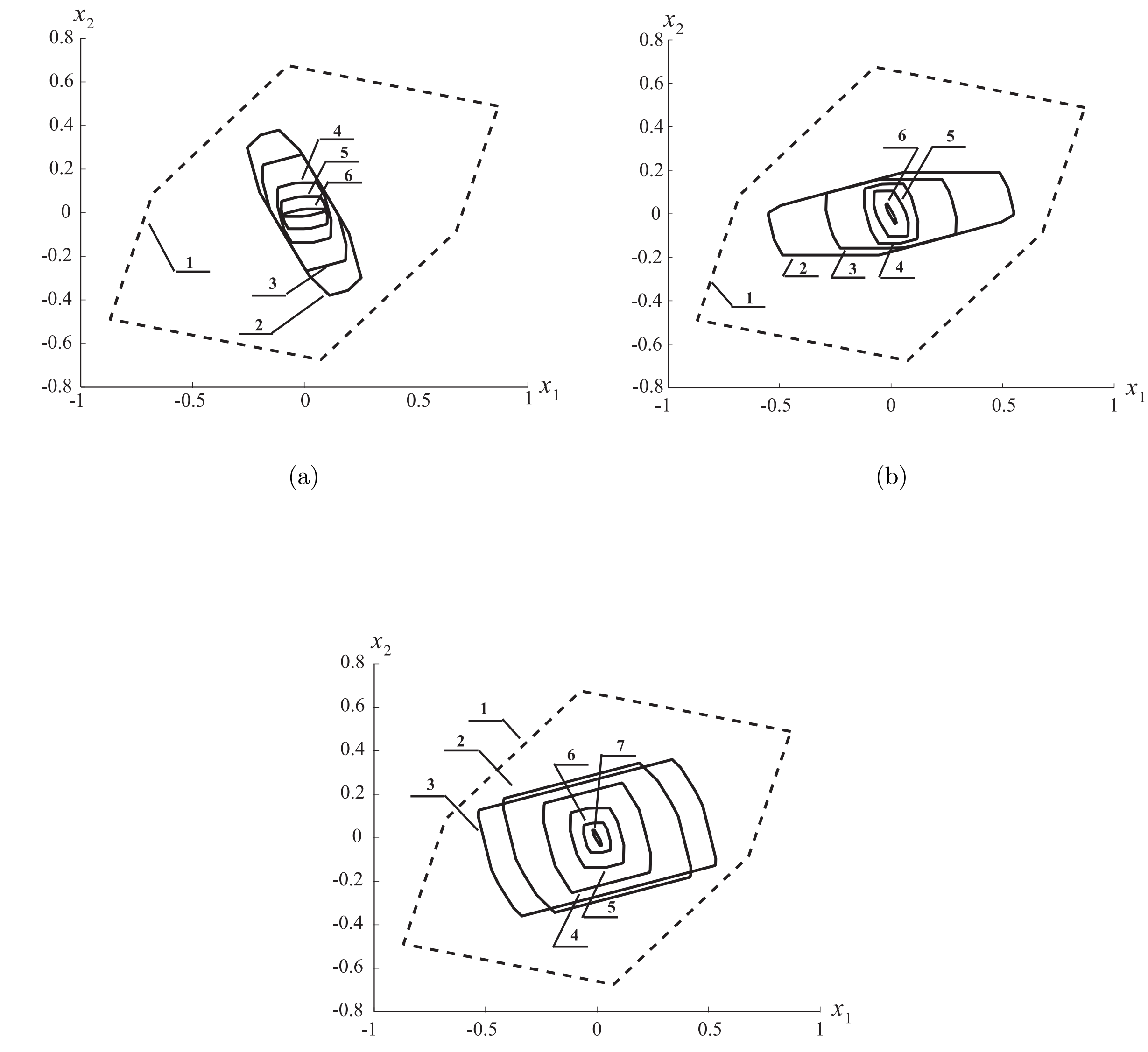
1. $X_{t^*}^0$;
2. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.6$;
3. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.3$;
4. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.1$;
5. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.05$;
6. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.005$.

Во второй части полагалось $\xi_w^* = 0.1$ и были рассмотрены случаи $\big($рис. 3.2(b)$\big)$:

1. $X_{t^*}^0$;
2. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_x^* = 0.6$;
3. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_x^* = 0.3$;
4. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_x^* = 0.1$;
5. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_x^* = 0.05$;
6. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_x^* = 0.005$.

В третьей части рассмотрены случаи $\big($рис. 3.2(c)$\big)$:

1. $X_{t^*}^0$;
2. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.35$, $\xi_x^* = 0.35$;
3. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.3$, $\xi_x^* = 0.5$;
4. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.2$, $\xi_x^* = 0.2$;
5. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.1$, $\xi_x^* = 0.1$;
6. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.05$, $\xi_x^* = 0.05$;
7. $\mathcal{X}_{t^*}^o$, $\xi_w^* = 0.05$, $\xi_x^* = 0.005$.



(a) (b)

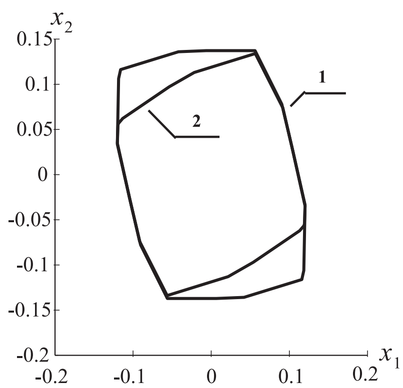
(c)

Рис. 3.2.

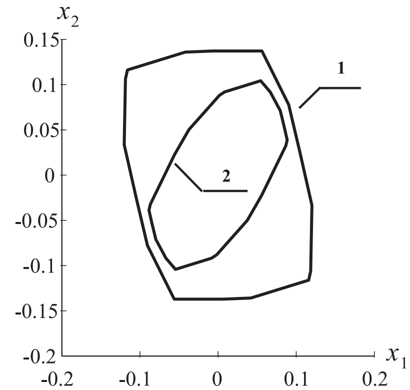
В третьей серии экспериментов были построены текущие препостериорные распределения при $\xi_w^* = 0.1$, $\xi_x^* = 0.1$. При этом значения элементов симуляции имели вид: вектор $w^* = (0.2, -1.0, -1.2)$, ошибки измерений $\xi_w^*(t) = \xi_w^* \cos(3t),\ \xi_x^*(t) = \xi_x^* \sin(5t),\ t \in T$.

На рис. 3.3(a) множества получены с полным препостериорным анализом при $T_w = T_x = T_{зw} = T_{зx} = \{3, 6, 9\}$:
1. $\mathcal{X}_{t^*}^o$;
2. $\mathcal{X}_{t^*}^o(\tau, y_\tau^*(\cdot))$, $\tau = 3$.

На рис. 3.3(b) множества получены с частичным препостериорным анализом при $T_w = T_x = \{1, 2, \ldots, 11\}$, $T_{зw} = T_{зx} = \{3, 6, 9\}$:
1. $\mathcal{X}_{t^*}^o$;
2. $\mathcal{X}_{t^*}^o(\tau, y_\tau^*(\cdot))$, $\tau = 2$.



(a)



(b)

Рис. 3.3.

4. Оптимальная замыкаемая связь по выходу и ее реализация

Для введения в задаче (1.1)–(1.5) нового типа оптимальных связей продолжим препостериорный анализ и для каждого момента замыкания $t_j \in T_з$, $j = \overline{1,p}$, построим множества замыкания $\mathcal{X}^p$, $\mathcal{X}^{p-1}, \ldots, \mathcal{X}^1$.

Начнем с множества $\mathcal{X}^p$. Введем обозначения: $\mathcal{X}^o_{t+0}$ — начальное препостериорное распределение для подсистемы наблюдения в момент времени t, построенное по виртуальным сигналам из промежутка $[t_*, t]$; $\mathcal{X}^o_{t-0}$ — построенное по сигналам из промежутка $[t_*, t[$. Пусть $\mathcal{X}^o_{t_p+0}$, $\mathcal{X}^o_{t^*-0}$ — начальные препостериорные распределения в моменты времени t_p и t^* соответственно. Положим $\mathcal{X}^c_{t_p+0}(z) = z + \mathcal{X}^o_{t_p+0}$. Введем множество Z^p, состоящее из всех таких векторов $z \in \mathbb{R}^{n_x}$, для которых существуют такие доступные управляющие воздействия $u(t_p : t^* | \mathcal{X}^c_{t_p+0}(z))$, что

$$X^c_{t^*}(u(t_p : t^* | \mathcal{X}^c_{t_p+0}(z))) = \left\{ F(t^*, t_p)z + \int\limits_{t_p}^{t^*} F(t^*, s)B(s)u(s|\mathcal{X}^c_{t_p+0}(z))ds + \mathcal{X}^o_{t^*-0} \right\} \subset X^*.$$

Семейство множеств

$$\mathcal{X}^p = \{\mathcal{X}^c_{t_p+0}(z),\ z \in Z^p\}$$

будем называть множеством замыкания системы управления в момент t_p.

Предположим, что определены непустые множества $\mathcal{X}^p$, $\mathcal{X}^{p-1}, \ldots, \mathcal{X}^{j+1}$. По построенным к этому моменту множествам $\mathcal{X}^o_{t_j+0}$, $\mathcal{X}^o_{t_{j+1}-0}$ определим

$$Z^j = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n_x} :\ \exists u(t|\mathcal{X}^c_{t_j+0}(z)) \in U,\ t \in [t_j : t_{j+1}[,\ X^c_{t_{j+1}}(u(t_j : t_{j+1}|\mathcal{X}^c_{t_j+0}(z))) \subset \mathcal{X}^{j+1} \right\},$$

где $$X^c_{t_{j+1}}(u(t_j : t_{j+1}|\mathcal{X}^c_{t_j+0}(z))) = F(t_{j+1}, t_j)z + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} F(t_{j+1}, s)B(s)u(s|\mathcal{X}^c_{t_j+0}(z))ds + \mathcal{X}^o_{t_{j+1}-0}.$$

Положим

$$\mathcal{X}^j = \{\mathcal{X}^c_{t_j+0}(z),\ z \in Z^j\}.$$

Продолжая процесс, построим $\mathcal{X}^j$, $j = \overline{1,p}$. Пусть выполняется включение

$$X^c_{t_1}(u(t_* : t_1|x_0)) = \int\limits_{t_*}^{t_1} F(t_1, s)B(s)u(s|x_0)ds + X^o_{t_1} \subset \mathcal{X}^1.$$

Совокупность $u(\cdot) = \{u(t_* : t_1|x_0);\ u(t_1 : t_2|\mathcal{X}),\ \mathcal{X} \in \mathcal{X}^1; \ldots ; u(t_p : t^*|\mathcal{X}),\ \mathcal{X} \in \mathcal{X}^p\}$ назовем *начальной замыкаемой программой.* С ее помощью можно перевести систему (1.2) на терминальное множество при любых реализациях неопределенности, если проводить измерения в моменты $t \in T_з$.

Выберем число $\beta > \min c'x,\ x \in X^*$, заменим множество X^* на $X^{*\beta} = X^* \cap \{x \in \mathbb{R}^{n_x} : c'x \geq \beta\}$ и, следуя приведенным выше правилам, построим множества $\mathcal{X}^{p\beta}, \mathcal{X}^{p-1\beta}, \ldots, \mathcal{X}^{1\beta}$. Наибольшее β^0, при котором существует начальная замыкаемая программа, равно максимальному гарантированному значению критерия качества задачи (1.1)-(1.5). Совокупность $u^0(\cdot) = \{u^{\beta^0}(t_* : t_1|x_0);\ u^{\beta^0}(t_1 : t_2|\mathcal{X}), \mathcal{X} \in \mathcal{X}^{1\beta^0}; \ldots ; u^{\beta^0}(t_p : t^*|\mathcal{X}), \mathcal{X} \in \mathcal{X}^{p\beta^0}\}$ назовем *оптимальной начальной замыкаемой программой* (*программным препостериорным решением*).

Позиционное препостериорное решение задачи управления введем, следуя классическому правилу, с помощью оптимальных текущих замыкаемых программ. Пусть $\tau \in T_w \cup T_x$ — текущий момент, процесс управления осуществлен на промежутке $T_{-\tau} = [t_*, \tau[$, выработаны управляющие воздействия $u^*_\tau(\cdot) = u^*(t_* : \tau)$ и записаны “очищенные” от $u^*_\tau(\cdot)$ сигналы $y^*_\tau(\cdot)$ (сигналы измерительных устройств объекта наблюдения), известные к моменту τ. Обозначим

$$T^\tau_з = T_з \cap T^{-\tau} = \{t_{k(\tau)}, t_{k(\tau)+1}, \ldots, t_p\}, \quad t_{k(\tau)} = \min\{t \in T_з :\ \tau < t\}; \quad T^\tau_з = \varnothing, \ \ \tau \geq t_p.$$

Заменив априорную информацию $\{t_*, W\}$ на текущую $\{\tau, W(\tau, y^*_\tau(\cdot)\}$, проведем описанный выше препостериорный анализ по выходу на промежутке времени $T^{-\tau}$. В результате получим множества замыкания $\mathcal{X}^p(\tau, y^*_\tau(\cdot)), \mathcal{X}^{p-1}(\tau, y^*_\tau(\cdot)), \ldots, \mathcal{X}^{k(\tau)}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ и определим *оптимальную текущую замыкаемую программу* $u^0(t|\tau, y^*_\tau(\cdot)),\ t \in T^{+\tau} = [\tau, t^*]$, для позиции $(\tau, y^*_\tau(\cdot))$. Заметим, что при $\tau \geq t_p$ оптимальная текущая замыкаемая программа превращается в размыкаемую [13].

Обозначим через $Y_{\theta(\tau)}(\cdot)$, $\tau \in T_u$, множество всех сигналов $y_{\theta(\tau)}(\cdot)$, для которых в позиции $(\theta(\tau), y_{\theta(\tau)}(\cdot))$ существует замыкаемая программа; $\theta(\tau) = \max\{\theta^w \in T_w \cap T_{+\tau};\ \theta^x \in T_x \cap T_{+\tau};\ t_*\}$. Функционал

$$u^0(\tau, y_\tau(\cdot)) = u^0(\tau|\theta(\tau), y_{\theta(\tau)}(\cdot)), \quad y_{\theta(\tau)}(\cdot) \in Y_{\theta(\tau)}(\cdot), \quad \tau \in T_u,$$

называется *оптимальной замыкаемой* (*комбинированной, дискретной*) *связью по выходу* (ОЗСВ) (*позиционным решением* задачи управления в классе замыкаемых связей по выходу). Построение ОЗСВ — *синтез оптимальной системы управления в классе замыкаемых связей по выходу.* Отметим, что если $\tau \geq t_p$, то ОЗСВ становится оптимальной размыкаемой связью по выходу.

При управлении динамическими объектами по классическому принципу замкнутого контура ОЗСВ должна строиться до начала процесса управления, что пока не удается сделать даже для оптимальных обратных связей по состоянию. Поэтому, как и в случае оптимального наблюдения (разд. 2), будем придерживаться принципа *оптимального управления в реальном времени*, при котором ОЗСВ не строится целиком, а в каждом конкретном процессе управления ее текущие значения (*реализация* ОЗСВ) $u^*(\tau) = u^0(\tau, y^*_\tau(\cdot)),\ \tau \in T_u$, формируются *оптимальным регулятором* (ОР) за время $s^c(\tau)$, причем $s^o(\tau) + s^c(\tau) < h$. Функцию

$$u^{**}(t) = \begin{cases} u^*(t_*), & t \in [t_*, t_* + h + s^o(t_* + h) + s^c(t_* + h)[; \\ u^*(\tau), & t \in [\tau + s^o(\tau) + s^c(\tau), \tau + h + s^o(\tau + h) + s^c(\tau + h)[, \tau \in T_u \backslash \{t_*, t^* - h\}; \\ u^*(t^* - h), & t \in [t^* - h + s^o(t^* - h) + s^c(t^* - h), t^*[, \end{cases}$$

построенную с помощью ОС и ОР, будем называть *квазиреализацией* ОЗСВ.

Предлагается следующий алгоритм работы ОР. До старта процесса управления ОР проводит начальный препостериорный анализ и строит множества замыкания $\mathcal{X}^{p\beta}, \mathcal{X}^{p-1\beta}, \ldots, \mathcal{X}^{1\beta}$, где $\beta = \min c'x,\ x \in X^*$.

Опишем метод построения $\mathcal{X}^{p\beta}$ (остальные множества замыкания строятся аналогичным образом). Пусть $\bar{\eta}_{t^*}(q) = \max q'x,\ x \in \mathcal{X}^o_{t^*-0}$, $\underline{\eta}_{t^*}(q) = \min q'x,\ x \in \mathcal{X}^o_{t^*-0}$, — оценки начального препостериорного распределения в направлении q в терминальный момент времени. Тогда $\mathcal{X}^{p\beta} = \mathcal{X}^{o}_{t_p+0} + Z^{p\beta}$, где $Z^{p\beta}$ состоит из всех $z \in \mathbb{R}^{n_x}$, на которых выполняются неравенства

$$\begin{cases} g_{*i} - \underline{\eta}_{t^*}(h_i) \le h_i' F(t^*, t_p) z + h_i' \int\limits_{t_p}^{t^*} F(t^*, s) B(s) u(s) ds \le g_i^* - \bar{\eta}_{t^*}(h_i), \quad i \in I; \\ \beta - \underline{\eta}_{t^*}(c) \le c' F(t^*, t_p) z + c' \int\limits_{t_p}^{t^*} F(t^*, s) B(s) u(s) ds; \\ u(t) \in U, \quad t \in [t_p, t^*]. \end{cases}$$

Отметим, что оценки вычисляются вдоль направлений h_i, $i \in I$; c, так как множество $X^{*\beta}$, по которому строится $\mathcal{X}^{p\beta}$, определяется этими направлениями.

Пусть построены множества $\mathcal{X}^{p\beta}$, $\mathcal{X}^{p-1\beta}, \ldots, \mathcal{X}^{1\beta}$; $H^{1\beta}$ — направления, по которым строится внешняя аппроксимация множества $\mathcal{X}^{1\beta}$; $\gamma^{1\beta} = (\gamma^{1\beta}(q), q \in H^{1\beta})$, $\gamma^{1\beta}(q) = \max q'x$, $x \in \mathcal{X}^{1\beta}$, — оценка множества замыкания в момент t_1 вдоль направления q; $\gamma^0 = (\gamma^0(q), q \in H^{1\beta})$, $\gamma^0(q) = \max q'x$, $x \in X^o_{t_1}$, — оценка априорного распределения $X^o_{t_1}$ состояния подсистемы наблюдения вдоль направления q в момент времени t_1. Начальная замыкаемая программа $u(t)$, $t \in [t_*, t_1[$, является решением задачи (4.1):

$$\begin{cases} \alpha \to \min\limits_{\alpha,\, u(t_*:t_1)}; \\ H^{1\beta} \int\limits_{t_*}^{t_1} F(t_1, s) B(s) u(s) ds - \alpha \le \gamma^{1\beta} - \gamma^0; \\ u(t) \in U, \quad t \in [t_*, t_1[. \end{cases} \tag{4.1}$$

Пошагово увеличивая β и решая задачу (4.1) двойственным методом (итерации начинаются с пустой опоры), ОР строит оптимальную начальную замыкаемую программу $u^0(\cdot)$, вычисляет максимальное значение $\beta^0(t_*) = \beta^0$ критерия качества, оптимальную опору $K^0_b(t_*)$ и формирует множество $S^*_b(\bar{t}_*)$ опорных индексов управляющих воздействий, которые будут "заморожены" в ближайший следующий момент измерений $\bar{t}_*$. В качестве начальных опор при решении задач линейного программирования берутся пустые опоры. Поскольку операции проводятся заранее, то затраты времени несущественны.

На вход объекта управления ОР подает управляющее воздействие $u^*(t) = u^0(t)$, $t \in [t_*, \bar{t}_* + s^o(\bar{t}_*) + s^c(\bar{t}_*)[$, где $s^o(\bar{t}_*)$ и $s^c(\bar{t}_*)$ — время работы ОЭ и ОР соответственно.

Предположим, что ОР проработал на промежутке $T_{-\tau}$, $\tau \in T_w \cup T_x$, $\tau < t_p$, для ближайшего предыдущего момента измерения $\underline{\tau}$ построил оптимальную замыкаемую программу $u^{\underline{\tau}0}(\cdot|\underline{\tau}, y_{\underline{\tau}}(\cdot))$, соответствующие ей множества $K^0_b(\underline{\tau})$, $S^*_b(\tau)$ и вычислил максимальное значение $\beta^0(\underline{\tau})$ критерия качества. ОЭ в момент τ получает новый сигнал от измерительных устройств и для текущей позиции $(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ решает задачу оптимального препостериорного наблюдения. ОР по результатам работы ОЭ строит множества замыкания $\mathcal{X}^{p\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $\mathcal{X}^{p-1\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot)), \ldots$, $\mathcal{X}^{k(\tau)\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ и оптимальную текущую замыкаемую программу $u^{\tau 0}(\cdot|\tau, y^*_\tau(\cdot))$.

Приведем метод построения $\mathcal{X}^{p\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$. Пусть $\bar{\eta}_{t^*}(q|\tau, y^*_\tau(\cdot)) = \max q'x$, $x \in \mathcal{X}^o_{t^*-0}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$; $\underline{\eta}_{t^*}(q|\tau, y^*_\tau(\cdot)) = \min q'x$, $x \in \mathcal{X}^o_{t^*-0}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, — оценки текущего препостериорного распределения в направлении q в терминальный момент времени. Тогда $\mathcal{X}^{p\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot)) = \mathcal{X}^o_{t_p+0}(\tau, y^*_\tau(\cdot)) +$

$Z^{p\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, где $Z^{p\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ состоит из всех $z \in \mathbb{R}^{n_x}$, на которых выполняются неравенства:

$$\begin{cases} g_{*i} - \underline{\eta}_{t^*}(h_i|\tau, y^*_\tau(\cdot)) \le h'_i F(t^*, t_p)z + h'_i \int\limits_{t_p}^{t^*} F(t^*, s)B(s)u(s)ds \le g^*_i - \bar{\eta}_{t^*}(h_i|\tau, y^*_\tau(\cdot)); \\ \beta - \underline{\eta}_{t^*}(c|\tau, y^*_\tau(\cdot)) \le c' F(t^*, t_p)z + c' \int\limits_{t_p}^{t^*} F(t^*, s)B(s)u(s)ds; \\ u(t) \in U, \quad t \in [t_p, t^*]. \end{cases}$$

Пусть построены множества $\mathcal{X}^{p\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $\mathcal{X}^{p-1\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot)), \ldots, \mathcal{X}^{k(\tau)\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$; $H^{k(\tau)\beta}$ — направления, по которым строится внешняя аппроксимация множества $\mathcal{X}^{k(\tau)\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$; $\gamma^{k(\tau)\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot)) = (\gamma^{k(\tau)\beta}(q|\tau, y^*_\tau(\cdot)), q \in H^{k(\tau)\beta})$, $\gamma^{k(\tau)\beta}(q|\tau, y^*_\tau(\cdot)) = \max q'x,\ x \in \mathcal{X}^{k(\tau)\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, — оценка текущего множества замыкания вдоль направления q в момент $t_{k(\tau)}$; $\gamma^0(\tau, y^*_\tau(\cdot)) = (\gamma^0(q|\tau, y^*_\tau(\cdot)),\ q \in H^{k(\tau)\beta})$, $\gamma^0(q|\tau, y^*_\tau(\cdot)) = \max q'x,\ x \in X^o_{t_{k(\tau)}}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, — оценка текущего распределения $X^o_{t_{k(\tau)}}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$ состояния подсистемы наблюдения вдоль направления q в момент времени $t_{k(\tau)}$. Текущая замыкаемая программа $u(t|\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $t \in [\tau, t_{k(\tau)}[$, является решением задачи (4.2):

$$\begin{cases} \alpha \to \min\limits_{\alpha,\, u(\tau:t_{k(\tau)})}; \\ H^{k(\tau)\beta} \int\limits_{\tau}^{t_{k(\tau)}} F(t_{k(\tau)}, s)B(s)u(s)ds - \alpha \\ \qquad \le \gamma^{k(\tau)\beta}(\tau, y^*_\tau(\cdot)) - \gamma^0(\tau, y^*_\tau(\cdot)) - H^{k(\tau)\beta} \int\limits_{t_*}^{\tau} F(t_{k(\tau)}, s)B(s)u^*(s)ds; \\ u(t) \in U, \quad t \in [\tau, t_{k(\tau)}[. \end{cases} \tag{4.2}$$

Алгоритм построения оптимальной текущей замыкаемой программы $u^{\tau 0}(\cdot|\tau, y^*_\tau(\cdot))$ начинается со значения $\beta = \beta^0(\underline{\tau})$ критерия качества и начальной опоры $K^0_b(\underline{\tau})$. Решая задачу (4.2) для $\beta = \beta^0(\tau)$, ОР формирует множество $S^*_b(\overline{\tau})$ и на вход объекта управления подает управляющее воздействие $u^*(t) = u^0(t|\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $t \in [\tau + s^o(\tau) + s^c(\tau), \bar{\tau} + s^o(\bar{\tau}) + s^c(\bar{\tau})[$.

5. Пример 2

Результаты продемонстрируем на следующем примере:

$$\begin{gathered} x(t^*) + \dot{x}(t^*) \to \max; \\ \ddot{x} + 2.7x = 0.5u + 0.5w(t); \quad x(0) = -1.0, \quad \dot{x}(0) = -1.7, \quad T = [0, 12]; \\ (x(12), \dot{x}(12)) \in X^* = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \le 0.5,\ |x_2| \le 0.5\big\}; \\ |u(t)| \le 1.0, \quad t \in T; \\ y_w = z + \xi_w(t), \quad |\xi_w(t)| \le 0.1, \quad t \in T; \quad \dot{z} + 1.8z = w(t), \quad z(0) = -3.0; \\ y_x(t) = \int\limits_{t-3}^{t} (x(t) + \dot{x}(t))ds + \xi_x(t), \quad |\xi_x(t)| \le 0.1, \quad t \in T; \\ w(t) = w_1 + w_2 \sin(t) + w_3 \sin(3t), \quad t \in T; \\ (w_1, w_2, w_3) \in W = \big\{w \in R^3 : |w_1| \le 2.4,\ |w_2| \le 0.8,\ |w_3| \le 0.8\big\}; \\ w^* = (1.0, -0.1, -0.5), \\ \xi^*_w(t) = 0.1\cos(t), \quad \xi^*_x(t) = 0.1\sin(t), \quad t \in T; \\ Q = \big(q_{(i)} = (\cos(\pi i/12),\ \sin(\pi i/12)), \quad i = \{1, 2, \ldots, 24\}\big); \\ h = 1; \quad T_w = T_x = \{3, 6, 9\}; \quad T_з = T_{зw} = T_{зx} = \{6\}. \end{gathered}$$

На рис 5.1 представлены априорное и текущие распределения терминального состояния системы наблюдения:
1. $X^o_{t^*}$;
2. $X^o_{t^*}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $\tau = 3$;
3. $X^o_{t^*}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $\tau = 6$;
4. $X^o_{t^*}(\tau, y^*_\tau(\cdot))$, $\tau = 9$.

A — терминальное состояние подсистемы наблюдения при $w(t) = 0$, $t \in T$.

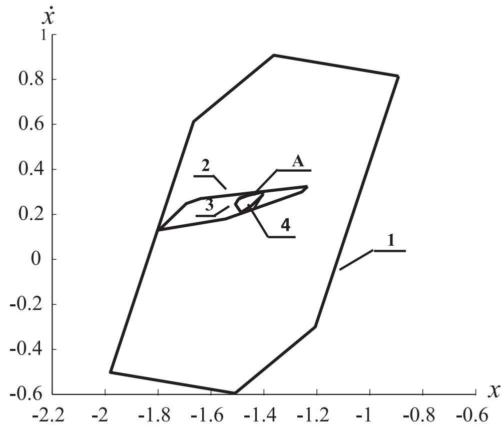


Рис. 5.1.

Рис. 5.2 представляет реализации оптимальной замыкаемой (сплошная линия) и оптимальной размыкаемой [13] (пунктирная линия) связей по выходу в конкретном процессе управления. При этом гарантированное значение критерия качества с использованием оптимальной размыкаемой связи по выходу — $J(u^*(\cdot)) = 0.7028$, а с использованием оптимальной замыкаемой связи по выходу — $J(\tilde{u}^*(\cdot)) = 0.7920$. На реализовавшейся траектории $\tilde{x}(t)$, $t \in T$, соответствующей оптимальной замыкаемой (комбинированной) связи по выходу, значение критерия качества оказалось равным 0.9250; на реализовавшейся траектории $x(t)$, $t \in T$, соответствующей оптимальной размыкаемой двухстадийной (комбинированной) связи по выходу с параметром $\varepsilon = 0.001$, значение критерия качества оказалось равным 0.8358.

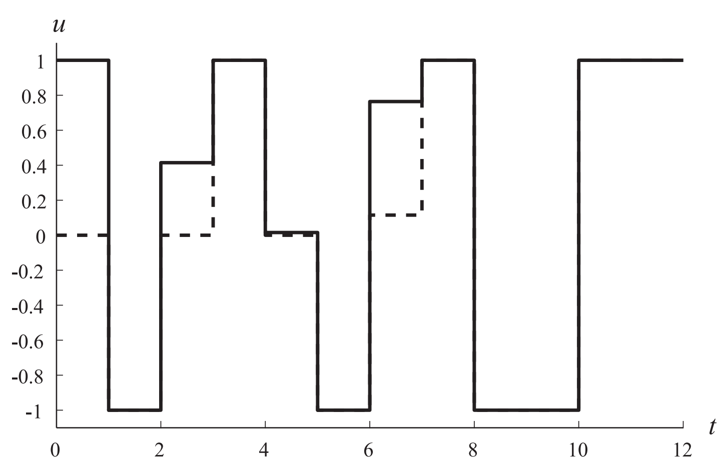


Рис. 5.2.

Фазовые траектории, соответствующие двум типам связей, отображены на рис. 5.3(a), рис. 5.3(b) содержит в увеличенном масштабе фрагменты фазовых траекторий на заключительном этапе управления; $\tilde{X}$, X — апостериорные распределения терминальных состояний системы управления.

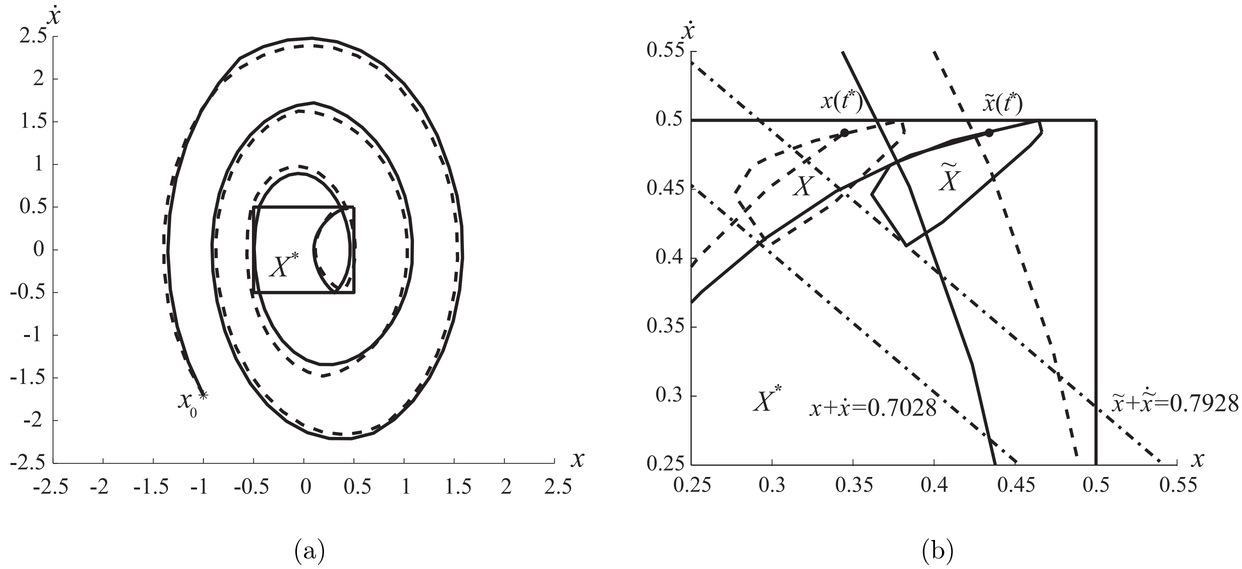


Рис. 5.3.

Заключение

В работе рассмотрены задача оптимального препостериорного наблюдения динамических систем и задача оптимального управления динамическими системами в условиях неопределенности с использованием априорной и текущей информации о поведении объекта управления и неопределенности. Предложен способ реализации оптимальной замыкаемой связи по выходу с помощью оптимальных эстиматоров и регулятора. Описан алгоритм работы оптимальных эстиматоров и регулятора, реализующих позиционное решение задачи в режиме реального времени. Полученные результаты могут найти применение при решении других (неэкстремальных) задач управления (в частности, задачи стабилизации динамических систем в условиях неопределенности).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пугачев В.С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. 2-е изд. М.: Физматлит, 1960. 883 с.
2. **Леннинг Дж.Х., Бэттин Р.Г.** Случайные процессы в задачах автоматического управления. М.: ИЛ, 1958. 387 с.
3. **Флеминг У., Ришел Р.** Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 316 с.
4. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
6. **Schweppe F.C.** Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. Vol. 13, iss. 1. P. 22–28.
7. **Witsenhausen H.S.** A minimax control problem for sampled linear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. Vol. 13, iss. 1. P. 5–21.
8. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
9. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
10. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Союзные задачи управления, наблюдения и идентификации // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 9. С. 777–780.
11. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А.** Замыкаемая обратная связь для гарантированной оптимизации неопределенных систем управления // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 2. С. 180–183.

12. **Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 265–286.
13. **Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М.** Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. Т. 10, № 2. С. 35–57.

Поступила 21.02.2009

Габасов Рафаил
д-р физ.-мат. наук, профессор
Белорусский гос. ун-т
e-mail: kirill@nsys.minsk.by

Кириллова Фаина Михайловна
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. НАН Беларуси
главный науч. сотрудник
Ин-т математики НАН Беларуси
e-mail: kirill@nsys.minsk.by

Поясок Елена Ивановна
аспирант
Белорусский гос. ун-т
e-mail: elena_pojasok@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517.97, 62–50

УПРАВЛЕНИЕ САМОЛЕТОМ НА ПОСАДКЕ В УСЛОВИЯХ ВЕТРОВОГО ВОЗМУЩЕНИЯ[1]

С. А. Ганебный, В. С. Пацко, С. Г. Пятко

Результаты теории дифференциальных игр применены для построения адаптивного управления в линейных системах с неизвестным уровнем динамической помехи. Работоспособность метода демонстрируется на задаче посадки самолета при действии ветровой помехи.

Ключевые слова: адаптивное управление, дифференциальные игры, управление самолетом на посадке, ветровое возмущение, численные построения.

S. A. Ganebnyi, V. S. Patsko, S. G. Pyatko. Aircraft landing control under wind disturbances.

Results of differential game theory are applied to construct an adaptive control in linear systems with unknown level of dynamic disturbances. The efficiency of the method is exemplified by a problem of aircraft landing under wind disturbance.

Keywords: adaptive control, differential games, aircraft landing control, wind disturbance, numerical methods.

Введение

Посадка и взлет самолета в условиях ветрового возмущения — естественные примеры [1–6] использования современных методов математической теории управления и теории дифференциальных игр в прикладных задачах. Тем не менее при постановке задач сталкиваемся со следующей трудностью.

Самолет имеет четыре органа управления: силу тяги, руль высоты, руль направления, элероны. Четко оговорены пределы возможных отклонений управляющих органов от номинальных значений. Поэтому при постановке математической задачи управления самолетом можем обоснованно задать ограничение P на векторное управляющее воздействие. Хуже обстоит дело с ограничением на ветровое возмущение. Если оговорить даже не слишком большой уровень возмущения, но рассчитывать на наихудшую помеху, то прогнозируемый результат управления будет неудовлетворительным. В случае реализации слабой ветровой помехи результат получится приемлемым, однако управляющие воздействия будут переключаться с одного предельного положения на другое. Вместе с тем понятно, что с помехой малого уровня можно справиться и при помощи малых отклонений управляющих воздействий от номинала.

Таким образом, имеем дело с процессом управления на конечном промежутке времени, при этом уровень динамической помехи *ограничен, но заранее неизвестен.* Подобные задачи близки к задачам о подавлении управляемой системой внешнего ограниченного возмущения [7–10]. Отличие в том, что в задачах о подавлении, как правило, рассматривается бесконечный промежуток времени и нет ограничения на мгновенные значения полезного управления.

Опираясь на теорию дифференциальных игр, поступим следующим образом. Установим некоторое соответствие между виртуальным уровнем помехи и уровнем отрабатывающего ее управления. Пусть ограничение на помеху характеризуется множеством Q_k, где $k \geq 0$ — числовой параметр. Условимся, что множество Q_k монотонно увеличивается с ростом k. Каждому

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления” и при поддержке РФФИ (проекты 07-01-96085, 09-01-00436).

значению k поставим в соответствие также множество P_k — ограничение на полезное управление. Оно увеличивается с ростом $k \in [0, 1]$ и при $k = 1$ совпадает с ограничением P, которое нельзя нарушать. Примем $P_k = P$ при $k \geq 1$.

Паре Q_k, P_k сопоставим в пространстве t, x (время, фазовый вектор) *стабильную* [11, 12] трубку W_k, в которой управление, выбираемое из множества P_k, может удерживать движение, какой бы ни была помеха со значениями из множества Q_k.

Потребуем монотонное возрастание множеств W_k по k. Геометрический образ: расширяющаяся по k система стабильных трубок, каждая из которых соответствует ограничению P_k на полезное управление и ограничению Q_k на помеху. Измеряя в момент t текущее фазовое состояние $x(t)$, идентифицируем индекс $\overline{k}$ трубки $W_{\overline{k}}$, на границе которой находится в рассматриваемый момент система, и на малом промежутке времени применяем подходящее управление со значением в множестве $P_{\overline{k}}$. Если движение выходит из трубки $W_{\overline{k}}$, это означает, что на данном малом промежутке времени действовала помеха большего уровня, чем $Q_{\overline{k}}$. Тогда на следующем дискрете времени будем выбирать управление из множества $P_{\widetilde{k}}$, связанного с трубкой $W_{\widetilde{k}}$, $\widetilde{k} > \overline{k}$, на границе которой находится система в начальный момент дискрета. Если же движение спускается во внутренность трубки $W_{\overline{k}}$, то на следующем дискрете времени применяем управление, уровень которого соответствует трубке $W_{\widetilde{k}}$, где $\widetilde{k} < \overline{k}$, и т. д.

Можно сказать, что уровень локально используемого управления *подстраивается* (*адаптируется*) под уровень и "качество" действующей помехи. Результат, полученный в конце процесса управления, будет зависеть от того, как сконструирована система $\{W_k\}$ стабильных трубок, каким был максимальный уровень помехи и насколько изощренно она действовала.

Концепция стабильных трубок (стабильных мостов) [11–13] является центральной в рамках теории дифференциальных игр, развиваемой в школе Н. Н. Красовского. В частности, эта концепция лежит в основе способа управления по принципу обратной связи, называемого *методом экстремального прицеливания*, который обеспечивает удержание движения в стабильной трубке. Таким образом, для создания способа управления, функционирующего в условиях, когда уровень динамической помехи заранее неизвестен, можем опираться на хорошо разработанный теоретический материал и соответствующие численные методы, в частности на методы построения *максимальных* стабильных мостов.

Перечислим главные моменты, важные при практической реализации описываемого способа адаптивного управления: наличие численного алгоритма построения стабильных трубок; обеспечение вложенности друг в друга стабильных трубок; конструирование нужной трубки по ходу процесса на основе небольшого числа специальных стабильных трубок, хранящихся в памяти.

Наиболее простыми являются алгоритмы численного построения максимальных стабильных мостов для игровых задач с линейной динамикой и фиксированным моментом окончания [14–20]. Трубки строятся при помощи попятной по времени процедуры перехода от одного t-сечения к другому начиная с момента окончания. При этом если терминальное множество, от которого пятимся, взять выпуклым, то и все t-сечения будут выпуклыми.

Способ построения совокупности вложенных друг в друга стабильных трубок W_k, $k \geq 0$, для задач с линейной динамикой предложен в [21–23]. Он кратко излагается в разд. 1. Вся система $\{W_k\}$ порождается некоторыми двумя трубками, одна из которых входит в систему и соответствует $k = 1$, а другая является вспомогательной и в систему не входит. Произвольная трубка W_k определяется при помощи линейных операций сложения и умножения на скалярный коэффициент указанных двух стабильных трубок, которые только и нужно хранить в памяти. Применение метода экстремального прицеливания для построения адаптивного управления в случае выпуклых сечений $W_k(t)$ является весьма простым.

Основная часть статьи (разд. 2–4) посвящена приложению способа адаптивного управления к задаче посадки самолета в условиях ветрового возмущения. Процесс посадки рассматривается только до момента пролета торца взлетно-посадочной полосы (ВПП). Постановку задачи о посадке с краевыми условиями в момент пролета торца ВПП предложил

В. М. Кейн [1, 24–26]. Краевые условия задаются в виде двух выпуклых множеств. Одно — для вертикального (продольного) канала в координатах *вертикальное отклонение* от номинала, *скорость вертикального отклонения.* Другое — для бокового канала в координатах *боковое отклонение, скорость бокового отклонения.* Каждое из множеств имеет смысл допуска. При попадании в допуск обеспечивается успешное выполнение завершающих этапов посадки (снижение до касания ВПП, пробег по ВПП на главных колесах, пробег на всех колесах).

Номинальное движение до момента пролета торца ВПП происходит по прямолинейной глиссаде снижения, высота в момент пролета равна 15 м. Разумной является линеаризация нелинейной динамики относительно номинального движения. Формирование адаптивного управления производится на основе *вспомогательных задач с линейной динамикой* для вертикального и бокового каналов. Прогнозируемый момент пролета торца ВПП корректируется по ходу процесса. Вырабатываемое управление передается в нелинейную систему динамики самолета, в рамках которой и проводится моделирование возникающего движения.

При тестировании разрабатываемого способа управления используем модель микровзрыва ветра из [27].

Статья существенным образом опирается на работы [6, 26, 28, 29], в которых при исследовании задачи посадки предполагалось заданным ограничение на мгновенные значения ветровой помехи. При этом, чтобы избежать резких переключений управляющих органов с одного крайнего положения на другое, использовались чисто инженерные приемы, не охваченные какой-либо универсальной математической идеей. Именно этот недостаток преодолевается в данной работе.

1. Адаптивное управление

Опишем для линейных систем построение адаптивного управления, которое применим затем к задаче посадки.

Рассмотрим линейную по динамике систему

$$\begin{aligned} &\dot{z} = A(t)z + B(t)u + C(t)v, \\ &z \in \mathbb{R}^m, \quad t \in T, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in \mathbb{R}^q. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u, v — векторные управляющие воздействия первого и второго игроков; P — выпуклое компактное ограничение на управление первого игрока; $T = [t_0, t_f]$ — промежуток процесса управления. Условимся, что множество P содержит нуль пространства $\mathbb{R}^p$. Матричнозначные функции A и C непрерывны по t. Матричнозначная функция B удовлетворяет условию Липшица на промежутке T. Отсутствует какое-либо конкретное ограничение на управление v.

Первый игрок пытается привести n выделенных компонент фазового вектора системы (1.1) в момент t_f на терминальное множество M. Множество M предполагается выпуклым компактом в пространстве указанных n компонент фазового вектора z. Условимся, что множество M содержит некоторую окрестность начала координат этого пространства. Начало координат примем за центр множества M. Перевод n выделенных компонент вектора z как можно ближе к центру множества M соответствует интересам первого игрока.

Перейдем к системе, правая часть которой не содержит фазовый вектор:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = D(t)u + E(t)v, \\ &x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in \mathbb{R}^q. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Переход осуществляется ([11, с. 160], [12, с. 89–91]) при помощи соотношений

$$x(t) = Z_{n,m}(t_f, t)z(t), \quad D(t) = Z_{n,m}(t_f, t)B(t), \quad E(t) = Z_{n,m}(t_f, t)C(t),$$

где $Z_{n,m}(t_f, t)$ — матрица, составленная из n строк фундаментальной матрицы Коши для системы $\dot{z} = A(t)z$, соответствующих тем компонентам вектора z, в пространстве которых определено множество M. Вектор $x(t)$ есть прогноз на момент t_f выделенных компонент вектора z вдоль движения системы (1.1) на промежутке $[t, t_f]$ при управлениях $u = 0, v = 0$.

Первый игрок старается привести фазовый вектор системы (1.2) на множество M в момент окончания t_f.

Приведенные ниже выкладки сделаны для системы (1.2). Построенное в результате адаптивное управление $U(t, x)$ применительно к системе (1.1) записывается в виде $U\big(t, Z_{n,m}(t_f, t)z\big)$.

Пусть символ $S(t) = \big\{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in S\big\}$ означает сечение множества $S \subset T \times \mathbb{R}^n$ в момент $t \in T$. Обозначим через $O(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant \varepsilon\}$ шар радиусом ε в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле.

Стабильные мосты. Рассмотрим на интервале $[t_0, t_f]$ антагонистическую дифференциальную игру с терминальным множеством $\mathcal{M}$ и геометрическими ограничениями $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ на управления игроков:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = D(t)u + E(t)v, \\ &x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T, \quad \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^q. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь матрицы $D(t)$, $E(t)$ те же, что и в системе (1.2). Множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ предполагаются выпуклыми компактами. Они рассматриваются как параметры игры.

Пусть $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — измеримые функции времени со значениями в множествах $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ соответственно. Движение системы (1.3) (и, следовательно, системы (1.2)), выходящее из точки x_* в момент t_* в силу управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, обозначим через $x\big(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)\big)$.

Следуя [11, 12], определим понятия стабильного и максимального стабильного мостов.

Множество $W \subset T \times \mathbb{R}^n$ назовем *стабильным мостом* для системы (1.3) при некоторых фиксированных множествах $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{M}$, если $W(t_f) = \mathcal{M}$ и выполнено следующее свойство стабильности: для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$ и любого управления $v(\cdot)$ второго игрока первый игрок может подобрать свое управление $u(\cdot)$ так, что позиция $\big(t, x(t)\big) = \big(t, x(t; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))\big)$ остается во множестве W в любой момент $t \in (t_*, t_f]$. Максимальное по включению множество $W \subset T \times \mathbb{R}^n$, $W(t_f) = \mathcal{M}$, обладающее свойством стабильности, называется *максимальным стабильным мостом.*

Максимальный стабильный мост является [11, 12] замкнутым множеством. Его t-сечения выпуклы [12, с. 87] в силу линейности системы (1.3) и выпуклости множества $\mathcal{M}$.

Построение системы стабильных мостов. 1°. Выберем множество $Q_{\max} \subset \mathbb{R}^q$, трактуемое как максимальное ограничение на управление второго игрока, которое первый игрок согласен считать "разумным" при приведении системы (1.2) на множество M. Предполагаем, что множество $Q_{\max}$ содержит нуль своего пространства. Обозначим через W_{main} максимальный стабильный мост для системы (1.3), соответствующий параметрам $\mathcal{P} = P$, $\mathcal{Q} = Q_{\max}$, $\mathcal{M} = M$. Назовем его для краткости *главным* мостом.

Дополнительно условимся, что множество $Q_{\max}$ выбрано так, что для некоторого $\varepsilon > 0$ при любом $t \in T$ выполнено вложение

$$O(\varepsilon) \subset W_{\text{main}}(t). \tag{1.4}$$

Число ε считаем зафиксированным.

Таким образом, W_{main} — замкнутая трубка в пространстве $T \times \mathbb{R}^n$, обрывающаяся в момент t_f на множестве M. Любые ее t-сечения $W_{\text{main}}(t)$ являются выпуклыми и содержат нуль пространства $\mathbb{R}^n$ вместе с некоторой окрестностью.

2°. Введем *дополнительную* замкнутую трубку $W_{\text{add}} \subset T \times \mathbb{R}^n$, каждое сечение $W_{\text{add}}(t)$ которой есть множество достижимости системы (1.3) в момент t с начальным множеством $O(\varepsilon)$, взятым в момент t_0. Конструируя трубку W_{add}, предполагаем, что первый игрок отсутствует

($u \equiv 0$), а управление второго игрока стеснено ограничением $Q_{\max}$. Нетрудно видеть, что $W_{\rm add}$ есть максимальный стабильный мост для системы (1.3) при

$$\mathcal{P} = \{0\}, \quad \mathcal{Q} = Q_{\max}, \quad \mathcal{M} = W_{\rm add}(t_f).$$

Для любого $t \in T$ сечение $W_{\rm add}(t)$ является выпуклым и имеет место вложение

$$O(\varepsilon) \subset W_{\rm add}(t). \tag{1.5}$$

3°. Рассмотрим семейство трубок $W_k \subset T \times \mathbb{R}^n$, $k \geqslant 0$, сечения $W_k(t)$ которых определяются соотношениями

$$W_k(t) = \begin{cases} kW_{\rm main}(t), & 0 \leqslant k \leqslant 1, \\ W_{\rm main}(t) + (k-1)W_{\rm add}(t), & k > 1. \end{cases}$$

Множества $W_k(t)$ компактны и выпуклы. Для любых чисел $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant 1 < k_3 < k_4$ в силу соотношений (1.4), (1.5) выполнены строгие вложения

$$W_{k_1}(t) \subset W_{k_2}(t) \subset W_{k_3}(t) \subset W_{k_4}(t).$$

В работах [30, 31] установлены следующие важные свойства. Трубка W_k при $0 \leqslant k \leqslant 1$ является максимальным стабильным мостом для системы (1.3), соответствующим ограничению kP на управление первого игрока, ограничению $kQ_{\max}$ на управление второго игрока и терминальному множеству kM. При $k > 1$ множество W_k есть стабильный мост (но, вообще говоря, не максимальный) для параметров

$$\mathcal{P} = P, \quad \mathcal{Q} = kQ_{\max}, \quad \mathcal{M} = M + (k-1)W_{\rm add}(t_f).$$

Таким образом, имеем расширяющуюся систему стабильных мостов, в которой каждый больший мост соответствует большему ограничению на управление второго игрока. Эта система мостов порождается двумя мостами $W_{\rm main}$ и $W_{\rm add}$ при помощи операций алгебраического суммирования и умножения на неотрицательный числовой параметр.

Управление обратной связи. Построение адаптивного управления $(t, x) \mapsto U(t, x)$ выполняется следующим образом.

Зафиксируем число $\xi > 0$.

Рассмотрим произвольную позицию (t, x). Если $|x| \leq \xi$, полагаем $U(t, x) = 0$. В случае $|x| > \xi$ находим положительное число k^*, определяющее мост W_{k^*}, сечение $W_{k^*}(t)$ которого отстоит от точки x на расстояние ξ. На границе множества $W_{k^*}(t)$ вычисляем точку x^*, ближайшую к x. Имеем $|x^* - x| = \xi$. Задаем вектор $u^* \in P_{k^*}$ из условия экстремума

$$(x^* - x)'D(t)u^* = \max\bigl\{(x^* - x)'D(t)u : u \in P_{k^*}\bigr\}. \tag{1.6}$$

Полагаем $U(t, x) = u^*$.

Таким образом, управление U формируется на основе широко известного в теории дифференциальных игр правила экстремального прицеливания [11–13].

Управление U применяем в *дискретной схеме* [11–13] с шагом Δ по времени. Выбор управляющего воздействия производится в начальный момент очередного дискрета длины Δ, и оно держится постоянным до конца дискрета.

В [23] сформулирована и доказана теорема о гарантии, обеспечиваемой управлением U.

2. Математическая модель динамики самолета

2.1. Основная часть динамики

Движение самолета описывается следующей системой дифференциальных уравнений 12-го порядка [6, 26, 32, 33]:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_g &= V_{xg}, \\
\dot{V}_{xg} &= \big[(p\cos\sigma - qsc_x)\cos\psi\cos\vartheta + (p\sin\sigma + qsc_y)(\sin\psi\sin\gamma - \cos\gamma\cos\psi\sin\vartheta) \\
&\quad + qsc_z(\sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma)\big]/m, \\
\dot{y}_g &= V_{yg}, \\
\dot{V}_{yg} &= \big[(p\cos\sigma - qsc_x)\sin\vartheta + (p\sin\sigma + qsc_y)\cos\vartheta\cos\gamma - qsc_z\cos\vartheta\sin\gamma\big]/m - g, \\
\dot{z}_g &= V_{zg}, \\
\dot{V}_{zg} &= \big[(p\cos\sigma - qsc_x)(-\sin\psi\cos\vartheta) + (p\sin\sigma + qsc_y)(\cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma) \\
&\quad + qsc_z(\cos\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma)\big]/m, \qquad (2.1) \\
\dot{\vartheta} &= \omega_z\cos\gamma + \omega_y\sin\gamma, \\
\dot{\omega}_z &= \big[I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - (I_y - I_x)\omega_x\omega_y + M_z\big]/I_z, \\
\dot{\psi} &= (\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma)/\cos\vartheta, \\
\dot{\omega}_y &= \big[(I_y - I_z)I_{xy}\omega_y\omega_z + (I_z - I_x)I_x\omega_x\omega_z + I_xM_y + I_{xy}M_x + I_{xy}\omega_z(I_x\omega_y - I_{xy}\omega_x)\big]/J, \\
\dot{\gamma} &= \omega_x - (\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma)\operatorname{tg}\vartheta, \\
\dot{\omega}_x &= \big[(I_y - I_z)I_y\omega_y\omega_z + (I_z - I_x)I_{xy}\omega_x\omega_z + I_yM_x + I_{xy}M_y + I_{xy}\omega_z(I_{xy}\omega_y - I_y\omega_x\big]/J.
\end{aligned}
$$

Фазовые переменные: координаты x_g, y_g, z_g центра масс самолета в *земной* системе координат (см. рис. 1); абсолютные скорости V_{xg}, V_{yg}, V_{zg}; углы тангажа, рыскания и крена ϑ, ψ, γ; угловые скорости ω_x, ω_y, ω_z в связанной системе координат. *Связанная* система координат: ось x направлена по строительной оси самолета, ось y лежит в плоскости симметрии и направлена вверх, ось z завершает правую тройку.

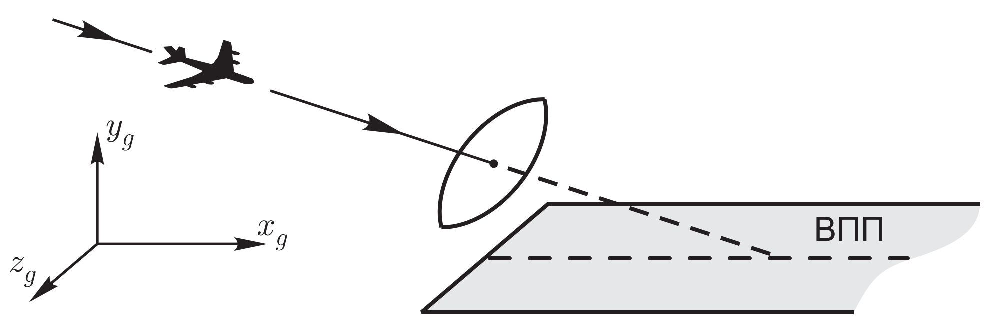


Рис. 1. Посадка самолета.

Скоростной напор q вычисляется по формуле

$$q = \rho\widehat{V}^2/2.$$

Аэродинамические моменты:

$$M_x = qslm_x, \quad M_y = qslm_y, \quad M_z = qsbm_z.$$

Величина J определяется через моменты инерции I_x, I_y, I_{xy}:

$$J = I_xI_y - I_{xy}^2.$$

Остальные переменные и константы объясняются ниже.

Управление самолетом осуществляется за счет силы тяги p, отклонений руля высоты δ_e, руля направления δ_r и элеронов δ_a. Отметим, что от величин δ_e, δ_r, δ_a зависят аэродинамические коэффициенты сил c_x, c_y, c_z и моментов m_x, m_y, m_z. Аэродинамические коэффициенты зависят также от угла атаки α и угла скольжения β, которые вычисляются по формулам [32,33]

$$\alpha = \arcsin\Big\{\big[-\widehat{V}_{xg}(\sin\psi\sin\gamma - \cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma) - \widehat{V}_{yg}\cos\vartheta\cos\gamma$$

$$- \widehat{V}_{zg}(\cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma)\big]/(\widehat{V}\cos\beta)\Big\},$$

$$\beta = \arcsin\Big\{\big[\widehat{V}_{xg}(\sin\psi\cos\gamma + \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma) - \widehat{V}_{yg}\cos\vartheta\sin\gamma$$

$$+ \widehat{V}_{zg}(\cos\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma)\big]/\widehat{V}\Big\}.$$

Компоненты скорости ветра w_{xg}, w_{yg}, w_{zg} влияют на составляющие $\widehat{V}_{xg}$, $\widehat{V}_{yg}$, $\widehat{V}_{zg}$ вектора воздушной скорости:

$$\widehat{V}_{xg} = V_{xg} - w_{xg}, \quad \widehat{V}_{yg} = V_{yg} - w_{yg}, \quad \widehat{V}_{zg} = V_{zg} - w_{zg}.$$

2.2. Числовые характеристики самолета

Будем использовать следующие числовые данные, соответствующие самолету Ту-154:

$$\begin{array}{lll} s = 201 \text{ м}^2, & l = 37.55 \text{ м}, & b = 5.285 \text{ м}, \\ I_x = 2.5\times 10^6 \text{ кг м}^2, & I_y = 7.5\times 10^6 \text{ кг м}^2, & I_z = 6.5\times 10^6 \text{ кг м}^2, \\ I_{xy} = 0.5\times 10^6 \text{ кг м}^2, & m = 75\times 10^3 \text{ кг}, & \sigma = 1.72^\circ. \end{array}$$

Здесь m — масса самолета; s — площадь крыла; l — размах крыла; b — средняя аэродинамическая хорда; I_x, I_y, I_z, I_{xy} — моменты инерции; σ — угол установки двигателей. Константы g и ρ, характеризующие ускорение свободного падения и плотность воздуха, зададим в виде

$$g = 9.81 \text{ м с}^{-2}, \quad \rho = 1.207 \text{ кг м}^{-3}.$$

2.3. Аэродинамические коэффициенты

Используя [6,26,33], приведем формулы для коэффициентов аэродинамических сил и моментов.

Коэффициенты c_x, c_y, c_z аэродинамических сил в системе (2.1) следует брать в связанной системе координат. Они выражаются через коэффициенты $\widetilde{c}_x$, $\widetilde{c}_y$, $\widetilde{c}_z$ в полусвязанной системе соотношениями

$$c_x = \widetilde{c}_x\cos\alpha - \widetilde{c}_y\sin\alpha, \quad c_y = \widetilde{c}_y\cos\alpha + \widetilde{c}_x\sin\alpha, \quad c_z = \widetilde{c}_z.$$

Полусвязанная система: ось x направлена по проекции вектора воздушной скорости на плоскость симметрии самолета, ось z совпадает с аналогичной осью связанной системы, ось y лежит в плоскости симметрии и завершает правую тройку.

Коэффициенты в полусвязанной системе:

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_x &= 0.21 + 0.004\alpha + 0.47\times 10^{-3}\alpha^2, \\ \widetilde{c}_y &= 0.65 + 0.09\alpha + 0.003\delta_e, \\ \widetilde{c}_z &= -0.0115\beta - (0.0034 - 6\times 10^{-5}\alpha)\delta_r. \end{aligned}$$

Здесь и ниже угловые величины берутся в градусах.

Коэффициенты m_x, m_y, m_z аэродинамических моментов определяются следующими выражениями. Для момента относительно оси x (строительная ось самолета):

$$m_x = m_x^\beta \beta + m_x^r \delta_r + m_x^a \delta_a + (l/(2\widehat{V}))(\pi/180)(m_x^x \omega_x + m_x^y \omega_y),$$
$$m_x^\beta = -0.0035 - 0.0001\alpha, \quad m_x^r = -0.0005 + 0.00003\alpha,$$
$$m_x^a = -0.0004, \quad m_x^x = -0.61 + 0.004\alpha, \quad m_x^y = -0.3 - 0.012\alpha.$$

Для момента относительно оси y:

$$m_y = m_y^\beta \beta + m_y^r \delta_r + m_y^a \delta_a + (l/(2\widehat{V}))(\pi/180)(m_y^x \omega_x + m_y^y \omega_y),$$
$$m_y^\beta = -0.004 - 0.00005\alpha, \quad m_y^r = -0.00135 + 0.000015\alpha,$$
$$m_y^a = 0, \quad m_y^x = 0.015\alpha, \quad m_y^y = -0.21 - 0.005\alpha.$$

Для момента относительно оси z:

$$m_z = 0.033 - 0.017\alpha - 0.013\delta_e + 0.047\delta_{st} - 1.29\omega_z/\widehat{V}.$$

Здесь δ_{st} — угол установки стабилизатора руля высоты на хвостовом оперении.

2.4. Динамика исполнительных механизмов

Пусть изменение силы тяги описывается соотношением

$$\dot{p} = -k_p p + \overline{k}_p(\delta_{ps} + \overline{\delta}_p), \tag{2.2}$$

$$k_p = 1 \text{ с}^{-1}, \quad \overline{k}_p = 3538 \text{ Н с}^{-1}\text{град}^{-1}, \quad \overline{\delta}_p = -41.3^\circ,$$
$$47^\circ \le \delta_{ps} \le 112^\circ. \tag{2.3}$$

Здесь δ_{ps} — угол установки ручки управления двигателем. Подставляя крайние значения $\delta_{ps} = 47^\circ$ и $\delta_{ps} = 112^\circ$ в правую часть (2.2), получаем для уравнения $\dot{p} = 0$ стационарные значения $p \approx 2 \times 10^4$ Н и $p \approx 25 \times 10^4$ Н. Если начальное значение p лежит в пределах $[2 \times 10^4,\ 25 \times 10^4]$, то величина p останется в этих пределах и далее.

Динамику сервомеханизмов управляющих рулей опишем следующими простыми уравнениями. Для руля высоты:

$$\dot{\delta}_e = k_e(\delta_{es} - \delta_e), \quad k_e = 4 \text{ с}^{-1}, \tag{2.4}$$
$$|\delta_{es}| \le 10^\circ; \tag{2.5}$$

руля направления:

$$\dot{\delta}_r = k_r(\delta_{rs} - \delta_r), \quad k_r = 4 \text{ с}^{-1}, \tag{2.6}$$
$$|\delta_{rs}| \le 10^\circ; \tag{2.7}$$

элеронов:

$$\dot{\delta}_a = k_a(\delta_{as} - \delta_a), \quad k_a = 4 \text{ с}^{-1}, \tag{2.8}$$
$$|\delta_{as}| \le 10^\circ. \tag{2.9}$$

Значения δ_{es}, δ_{rs}, δ_{as} — командные положения руля высоты, руля направления и элеронов.

2.5. Полная нелинейная система

Добавляя соотношения (2.2), (2.4), (2.6), (2.8) к основной системе (2.1), получаем дифференциальную систему в векторной форме

$$\dot{\xi} = f(\xi, u, w), \quad \xi \in \mathbb{R}^{16}, \tag{2.10}$$

где ξ — фазовый вектор; $u = (\delta_{ps}, \delta_{es}, \delta_{rs}, \delta_{as})'$ и $w = (w_{xg}, w_{yg}, w_{zg})'$ — векторы управления и возмущения. Управляющие переменные (*командные положения*) $\delta_{ps}, \delta_{es}, \delta_{rs}, \delta_{as}$ ограничены сверху и снизу соотношениями (2.3), (2.5), (2.7), (2.9).

3. Линеаризованные системы вертикального и бокового каналов. Формирование адаптивного управления

Для применения изложенного в разд. 1 способа адаптивного управления следует линеаризовать нелинейную динамику самолета относительно номинального движения. Номинальное движение есть движение по прямолинейной глиссаде снижения с постоянной скоростью и без вращений. Для расчета его параметров задаем ожидаемые “средние” значения компонент w_{xg0}, w_{yg0}, w_{zg0} скорости ветра по осям земной системы координат. Угол скольжения β_0 на номинальном движении считаем нулевым. В качестве исходных данных рассматриваем также угол Θ наклона глиссады и номинал $\widehat{V}_0$ воздушной скорости.

Просчитав параметры номинального движения, линеаризуем нелинейную динамику (2.10). Линеаризованная система практически *распадается на две подсистемы* вертикального и бокового каналов. Слабым влиянием подсистем друг на друга пренебрегаем. Разложение линеаризованной системы на две подсистемы является стандартным приемом в авиационной инженерной практике.

Исходные данные для расчета номинального движения и линеаризованных систем возьмем в виде

$$\Theta = 2^\circ 40', \quad \widehat{V}_0 = 72.2 \text{ м/с}, \quad w_{xg0} = -5 \text{ м/с}, \quad w_{yg0} = w_{zg0} = 0.$$

Получаемые номинальные значения:

$$\begin{array}{llll} V_{xg0} = 67.13 \text{ м/с}, & V_{yg0} = -3.13 \text{ м/с}, & \alpha_0 = 5.42^\circ, & \vartheta_0 = 2.94^\circ, \\ p_0 = 124500 \text{ Н}, & \delta_{st} = -1.26^\circ, & \delta_{ps0} = 76.5^\circ. & \end{array}$$

Значения γ_0, ψ_0, ω_{x0}, ω_{y0}, ω_{z0}, δ_{e0}, δ_{r0}, δ_{a0}, δ_{es0}, δ_{rs0}, δ_{as0} равны нулю.

3.1. Случай безынерционной ветровой помехи

Линейная система вертикального канала описывается уравнением

$$\dot{x}^V = A^V x^V + B^V u^V + C^V w^V. \tag{3.1}$$

Здесь

$$x^V = (\Delta x_g, \Delta V_{xg}, \Delta y_g, \Delta V_{yg}, \Delta\vartheta, \Delta\omega_z, \Delta\delta_e, \Delta p/m)',$$
$$u^V = (\Delta\delta_{ps}, \Delta\delta_{es})', \qquad w^V = (\Delta w_{xg}, \Delta w_{yg})'.$$

Приведем числовые значения матриц A^V, B^V, C^V:

$$A^V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0501 & 0 & -0.0973 & -2.6422 & 0 & 0.0628 & 0.9971 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2409 & 0 & -0.6387 & 45.2782 & 0 & 1.4479 & 0.0813 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0003 & 0 & 0.0069 & -0.5008 & -0.5263 & -0.3830 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B^V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}',$$

$$C^V = \begin{bmatrix} 0 & 0.0501 & 0 & -0.2409 & 0 & -0.0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0973 & 0 & 0.6387 & 0 & -0.0069 & 0 & 0 \end{bmatrix}'.$$

Для бокового канала:

$$\dot{x}^L = A^L x^L + B^L u^L + C^L w^L, \tag{3.2}$$

где

$$x^L = (\Delta z_g, \Delta V_{zg}, \Delta\psi, \Delta\omega_y, \Delta\gamma, \Delta\omega_x, \Delta\delta_a, \Delta\delta_r)',$$
$$u^L = (\Delta\delta_{rs}, \Delta\delta_{as})', \qquad w^L = \Delta w_{zg}.$$

Числовые значения матриц A^L, B^L, C^L:

$$A^L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0769 & -5.5553 & 0 & 9.2719 & 0 & -1.4853 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0013 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0129 & -0.9339 & -0.2588 & -0.0883 & -0.0303 & -0.2456 & -0.0460 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0514 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0331 & -2.3865 & -0.9534 & -0.2256 & -1.4592 & -0.2327 & -0.6894 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}',$$

$$C^L = \begin{bmatrix} 0 & 0.0769 & 0 & 0.0129 & 0 & 0.0331 & 0 & 0 \end{bmatrix}'.$$

Ограничения на управляющие воздействия в вертикальном канале примем

$$|\Delta\delta_{ps}| \le 27\frac{\pi}{180} = 27^\circ, \quad |\Delta\delta_{es}| \le 10\frac{\pi}{180} = 10^\circ. \tag{3.3}$$

В боковом канале:

$$|\Delta\delta_{rs}| \le 10\frac{\pi}{180} = 10^\circ, \quad |\Delta\delta_{as}| \le 10\frac{\pi}{180} = 10^\circ. \tag{3.4}$$

Таким образом, для каждого канала выписана линейная динамика (в отклонениях от номинального движения) и указаны ограничения на полезное управление. Конструкции адаптивного управления требуют задать также в каждом канале терминальное множество M и множество $Q_{\max}$ — “разумное” ограничение на ветровую помеху.

В вертикальном канале множество M^V введем на плоскости Δy_g, ΔV_{yg} — вертикальное отклонение (м), скорость вертикального отклонения (м/с) в виде выпуклого шестиугольника с вершинами

$$(-3, 0),\ (-3, 1),\ (0, 1),\ (3, 0),\ (3, -1),\ (0, -1).$$

Ориентацию множества M^V можно пояснить так: отклонение по вертикали в момент пролета торца ВПП компенсируется противоположным по знаку отклонением от номинала вертикальной скорости.

Множество $Q^V_{\max}$ в вертикальном канале определим неравенствами

$$|\Delta w_{xg}| \le 6 \text{ м/с}, \quad |\Delta w_{yg}| \le 4 \text{ м/с}. \tag{3.5}$$

В боковом канале множество M^L возьмем в виде выпуклого шестиугольника с вершинами

$$(-6, 0),\ (-6, 1.5),\ (0, 1.5),\ (6, 0),\ (6, -1.5),\ (0, -1.5)$$

в координатах Δz_g, ΔV_{zg} — боковое отклонение (м), скорость бокового отклонения (м/с).

Множество $Q^L_{\max}$ определим неравенством

$$|\Delta w_{zg}| \le 10 \text{ м/с}. \tag{3.6}$$

Поскольку выпуклое множество M^V задано в пространстве двух координат линейной системы (3.1), то фазовый вектор системы вида (1.2) вертикального канала имеет второй порядок по фазовой переменной. Поэтому сечения $W^V_{\rm main}(t)$, $W^V_{\rm add}(t)$ стабильных трубок $W^V_{\rm main}$, $W^V_{\rm add}$ представляют собой *выпуклые двумерные* множества. Аналогичное свойство справедливо и для сечений $W^L_{\rm main}(t)$, $W^L_{\rm add}(t)$ трубок $W^L_{\rm main}$, $W^L_{\rm add}$ бокового канала. При численном построении стабильных трубок используем алгоритм из работы [34].

Отклонения Δw_{xg}, Δw_{yg}, Δw_{zg} компонент скорости ветра от номинальных значений входят в линейные системы (3.1), (3.2) вертикального и бокового каналов в качестве управляющих воздействий помехи. Для просчета трубок главных мостов $W^V_{\rm main}$, $W^L_{\rm main}$ мы оговорили ограничения (3.5), (3.6) на помеху. Результаты численного построения показывают, что даже при таких не очень “широких” ограничениях на помеху трубки главных мостов быстро вырождаются при их попятном построении от момента окончания (t-сечения становятся пустыми). Причина в том, что мы допустили разрывные (по времени) изменения составляющих скорости ветра.

3.2. Линейные системы для случая инерционной ветровой помехи

Чтобы учесть *инерционность* изменения скорости ветра, добавим к векторному уравнению (3.1) линейной динамики вертикального канала соотношения

$$\begin{aligned} \Delta\dot w_{xg} &= 0.5(\Delta w_{xg} - v_{xg}),\\ \Delta\dot w_{yg} &= 0.5(\Delta w_{yg} - v_{yg}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

и к уравнению (3.2) бокового канала соотношение

$$\Delta\dot w_{zg} = 0.5(\Delta w_{zg} - v_{zg}). \tag{3.8}$$

Таким образом, в рамках расширенной линейной системы (3.1), (3.7) вертикального канала величины Δw_{xg}, Δw_{yg} становятся фазовыми переменными, а управляющими воздействиями помехи будут величины v_{xg}, v_{yg}. Стесним их ограничениями

$$|v_{xg}| \le 6 \text{ м/с}, \quad |v_{yg}| \le 4 \text{ м/с}, \tag{3.9}$$

аналогичными ограничениям (3.5). В расширенной линейной системе (3.2), (3.8) бокового канала величина Δw_{zg} — фазовая переменная, а v_{zg} — воздействие помехи. Ограничение

$$|v_{zg}| \le 10 \text{ м/с}. \tag{3.10}$$

Главный мост $W^V_{\rm main}$ для системы (3.1), (3.7) вертикального канала с ограничениями (3.3) на полезное управление и ограничениями (3.9) на воздействие помехи уже не вырождается. Не вырождается и главный мост $W^L_{\rm main}$ для системы (3.2), (3.8) бокового канала с ограничениями (3.4) на полезное управление и ограничением (3.10) на помеху. На рис. 2 представлены сечения мостов $W^V_{\rm main}$ и $W^L_{\rm main}$ для нескольких моментов обратного времени $\tau = t_f - t$. Для малых значений τ происходит сужение сечений, затем меняется направление вытянутости, при дальнейшем увеличении τ идет рост сечений при малом изменении направления вытянутости.

3.3. Грубое и точное адаптивное управление

На этапе снижения самолета критической является высота 60 м ([1, с. 167], [33, с. 116]). Ниже этой высоты управление самолетом должно быть особенно аккуратным. Время снижения с высоты 60 м до момента пролета торца ВПП составляет примерно 15 с. Поэтому ограничимся просчетом главных мостов $W^V_{\rm main}$ и $W^L_{\rm main}$ на промежутке обратного времени 15 с. Это означает, что при подготовке главных мостов полагаем $t_f - t_0 = 15$ с. Дополнительные мосты $W^V_{\rm add}$

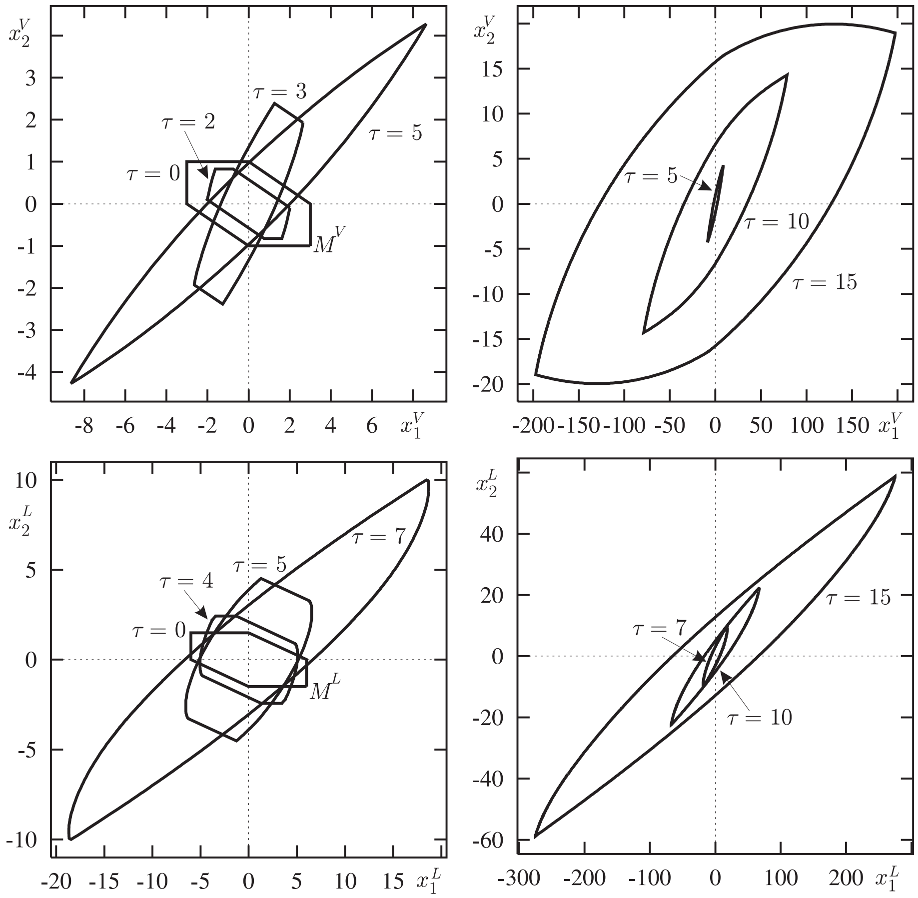


Рис. 2. Несколько сечений главных мостов W^V_{main} вертикального и W^L_{main} бокового каналов.

и W^L_{add} также просчитываются на промежутке длиной 15 с. С этой целью для вертикального (бокового) канала используем построение трубки множества достижимости системы (3.1), (3.7) (соответственно, (3.2), (3.8)) при *нулевом* полезном управлении и ограничениях (3.9) (соответственно, ограничении (3.10)) на воздействие помехи.

Адаптивное управление применяем следующим образом в дискретной схеме управления с шагом Δ. Предполагаем, что t-сечения главного и дополнительного мостов для каждого канала просчитаны заранее на интервале $[t_0, t_f] = [0, 15]$ также с шагом Δ. Пусть $d(t)$ — расстояние по оси x_g до торца ВПП в текущий момент $t \geq t_*$, где t_* — начальный момент моделирования. Тогда $a(t) = d(t)/V_{xg0}$ — прогнозируемое время до пролета торца ВПП. В случае $a(t) > 15$ используем при построении адаптивного управления сечения мостов, соответствующие $\tau = 15$ с. Если $a(t) \leq 15$, используем сечения, соответствующие моменту $\tau = a(t)$. Таким образом, наше управление формируется упрощенно (с отступлением от точного правила адаптивного управления), если $d(t) > 15V_{xg0} \approx 1000$ м. Если $d(t) \leq 15V_{xg0}$, следуем описанной в разд. 1 схеме адаптивного управления.

4. Результаты моделирования

При моделировании в качестве ветровой помехи будем брать возмущение, обусловленное микровзрывом ветра [35]. *Микровзрыв ветра* — природное явление, состоящее в том, что нисходящий поток воздуха ударяется о землю и далее расходится горизонтально с образованием вихрей. При проходе зоны микровзрыва самолет сначала попадает в поток встречного ветра, который в течение достаточно быстрого времени — десятков секунд — меняется на нисходящий, затем на попутный. Встречный поток воздуха увеличивает воздушную скорость и, соответственно, подъемную силу, попутный или нисходящий поток — наоборот. Резкая смена направления ветра со встречного на попутный приводит к резкому падению подъемной силы.

Опишем используемую модель микровзрыва [27]. В пространстве задается тор, рис. 3. Вне тора создается турбулентность, внутри же происходит пропорциональное уменьшение скорости ветра при приближении к основному кольцу тора. Параметры микровзрыва: $\mathcal{V}$ — скорость ветра в центральной точке (эта скорость не является максимальной, у края тора скорость ветра может быть до двух раз больше); h — высота центральной точки; R — радиус основного кольца тора, $R_C = 0.8h$ — радиус кольца тора; $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{z}_0$ — положение центра тора в плоскости земли.

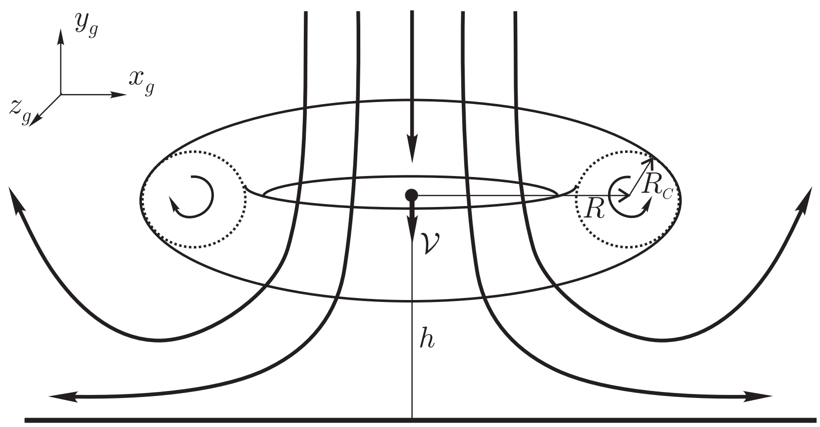


Рис. 3. Модель микровзрыва ветра.

Считаем, что вектор скорости ветра с компонентами w_{xg}, w_{yg}, w_{zg} в точке геометрического положения самолета складывается из номинального вектора скорости (в нашем случае $w_{xg0} = -5$ м/с, $w_{yg0} = w_{zg0} = 0$) и добавки, обусловленной микровзрывом. Значения w_{xg}, w_{yg}, w_{zg} передаются в нелинейную систему (2.10) движения самолета.

Представим результаты моделирования при двух вариантах микровзрыва. Параметры микровзрыва 1: скорость ветра в центральной точке — 10 м/с; радиус основного кольца тора — 1200 м; высота центральной точки — 600 м; расстояние от ВПП по продольной координате (вдоль глиссады) — 4000 м; боковое отклонение от линии глиссады — 500 м. Микровзрыв 2 отличается большей скоростью ветра — 15 м/с — и более близким расположением его центра к ВПП — 2500 м, т. е. второй микровзрыв является более сильным.

Начальное положение самолета находится по оси x_g на расстоянии 8000 м от торца ВПП и отклонено от номинальной позиции на 40 м вверх и на 80 м в сторону.

При формировании управления считаем, что в процессе движения осуществляется *точное измерение* всех фазовых переменных, входящих в описание нелинейной динамики самолета. Шаг Δ дискретной схемы управления равен 0.05 с.

На рис. 4–7 точечной линией обозначены траектории и графики, порожденные микровзрывом 1, сплошной линией — микровзрывом 2.

Вначале предположим, что текущие компоненты скорости ветра *измеряются точно*. Отклонения $\Delta w_{xg}, \Delta w_{yg}$ (Δw_{zg}) используются для просчета фазового состояния линейной системы (3.1), (3.7) вертикального (соответственно, (3.2), (3.8) бокового) канала и тем самым для расчета адаптивного управления в вертикальном (боковом) канале.

На рис. 4 приведены результаты, относящиеся к вертикальному каналу. На рис. 5 представлены результаты для бокового канала. На графиках полезного управления пунктирными линиями обозначены номинальное и максимально допустимые значения. Видно, что реализовавшееся управление не достигает своих крайних допустимых значений. Подчеркнем, что управляющие воздействия представляют собой командные положения (сигналы). Они сглаживаются инерционностью исполнительных механизмов.

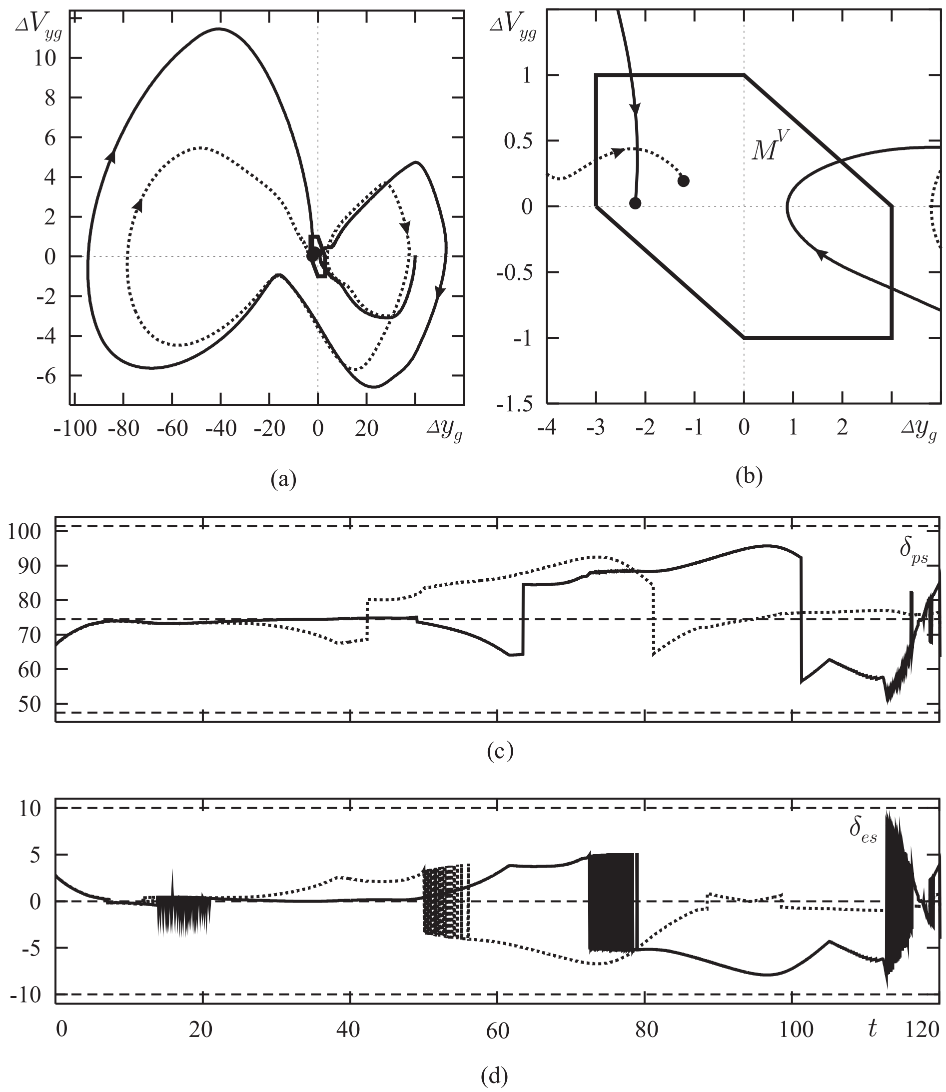


Рис. 4. Моделирование с микровзрывом ветра: (a) — траектории на фазовой плоскости $\Delta y_g \times \Delta V_{yg}$ вертикального канала; (b) — увеличенный фрагмент вблизи терминального множества; (c) — графики командных положений δ_{ps} (град) ручки управления двигателем; (d) — графики командных положений δ_{es} (град) руля высоты. Точечная линия — микровзрыв 1, сплошная — микровзрыв 2.

Графики изменения высоты y_g и бокового отклонения z_g, а также графики компонент w_{xg}, w_{yg}, w_{zg} скорости ветра даны на рис. 6. На графиках ветрового возмущения пунктиром показаны ожидаемые максимальные значения и номинал, на графиках изменения фазовых координат только одна дополнительная линия — номинальная прямая.

Отметим, что скорость ветра на некоторых участках значительно превышала ожидаемые значения. Несмотря на это, в случае слабого микровзрыва управление успешно справилось с возмущением, движения пришли на терминальные множества в обоих каналах. Формально и при сильном микровзрыве терминальные условия выполнены. Обратим, однако, внимание на график изменения высоты. Для сильного микровзрыва он показывает неудовлетворительный результат — примерно за 20 с до момента пролета торца ВПП происходит столкновение с землей. Это объясняется тем, что существенное изменение продольной и вертикальной составляющих скорости ветра произошло на небольшой высоте. Проявился также и недостаток метода: мы не можем напрямую учесть фазовое ограничение по высоте.

Допущение об измерении компонент текущей скорости ветра вряд ли является реалистическим. В связи с этим проведено моделирование, при котором вместо фазовых переменных

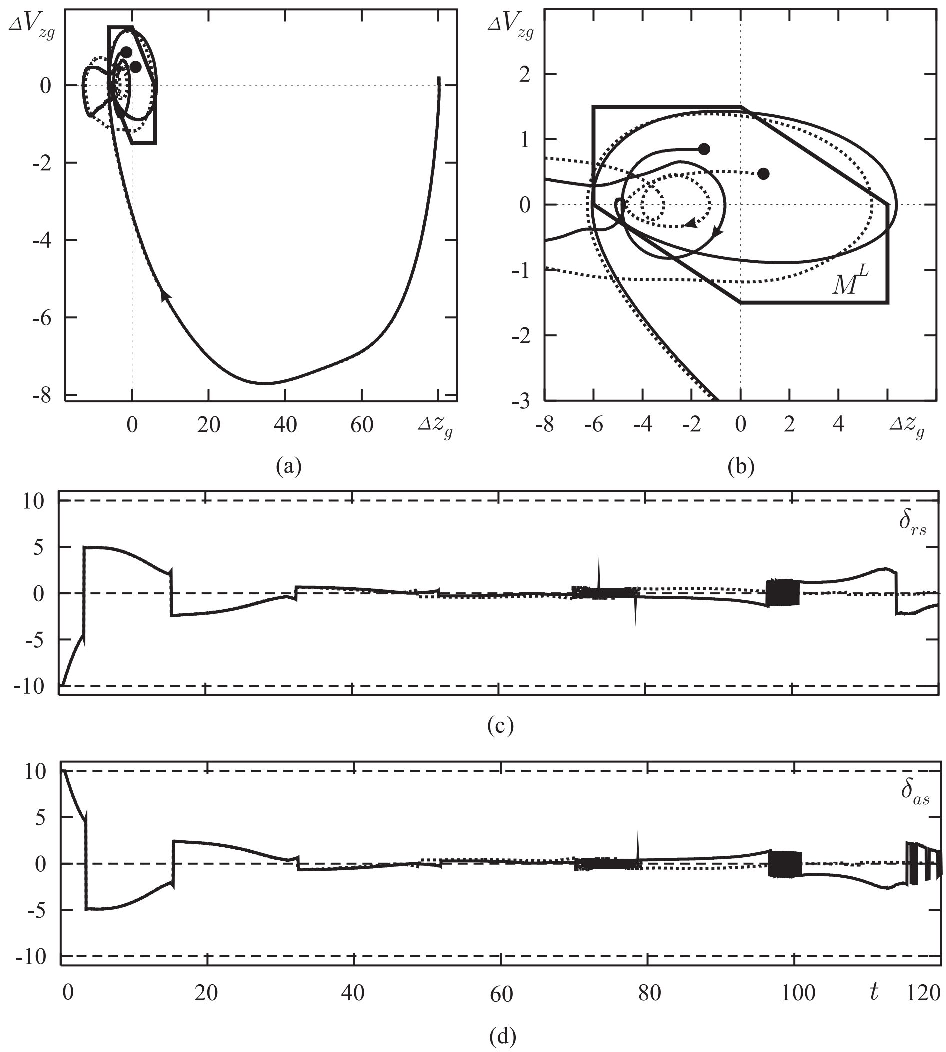


Рис. 5. Моделирование с микровзрывом ветра: (a) — траектории на фазовой плоскости $\Delta z_g \times \Delta V_{zg}$ бокового канала; (b) — увеличенный фрагмент вблизи терминального множества; (c) — графики командных положений δ_{rs} (град) руля направления; (d) — графики командных положений δ_{as} (град) элеронов. Точечная линия — микровзрыв 1, сплошная — микровзрыв 2.

Δw_{xg}, Δw_{yg}, Δw_{zg} линейных систем (3.1), (3.7) и (3.2), (3.8) в схему адаптивного управления подавались *нулевые* значения. Результаты показаны на рис. 7. Для микровзрыва 1 они не хуже, чем в случае измерения скорости ветра. Хорошие результаты получаются по боковому каналу и при микровзрыве 2. Но по вертикальному каналу результаты плохие: большой промах относительно терминального множества M^L в момент пролета торца ВПП, скользящий режим на крайних управляющих воздействиях по силе тяги и рулю высоты при подлете к торцу ВПП.

Заключение

Особенность исследуемого в работе этапа посадки (до момента пролета торца ВПП) состоит в том, что линеаризованная относительно номинального движения система распадается на подсистемы вертикального и бокового каналов. Весьма значительная скорость продольного движения позволяет рассматривать в качестве базовых вспомогательные задачи управления с фиксированным моментом окончания и применять ориентированные на них вычислительные методы теории дифференциальных игр. При этом, задавая в каждом канале краевые условия в момент окончания в виде выпуклых множеств на плоскости только двух наиболее существенных для данного канала фазовых переменных, получаем возможность работать с прогнозируемыми на момент окончания значениями этих переменных, что делает вычислительные процедуры построения управления очень простыми. Рассмотренный в статье способ адаптивного управления подстраивается под текущий уровень ветрового возмущения, сохраняя расчетную гарантию при сильной помехе и плавно уменьшая уровень управляющего воздействия при снижении уровня помехи.

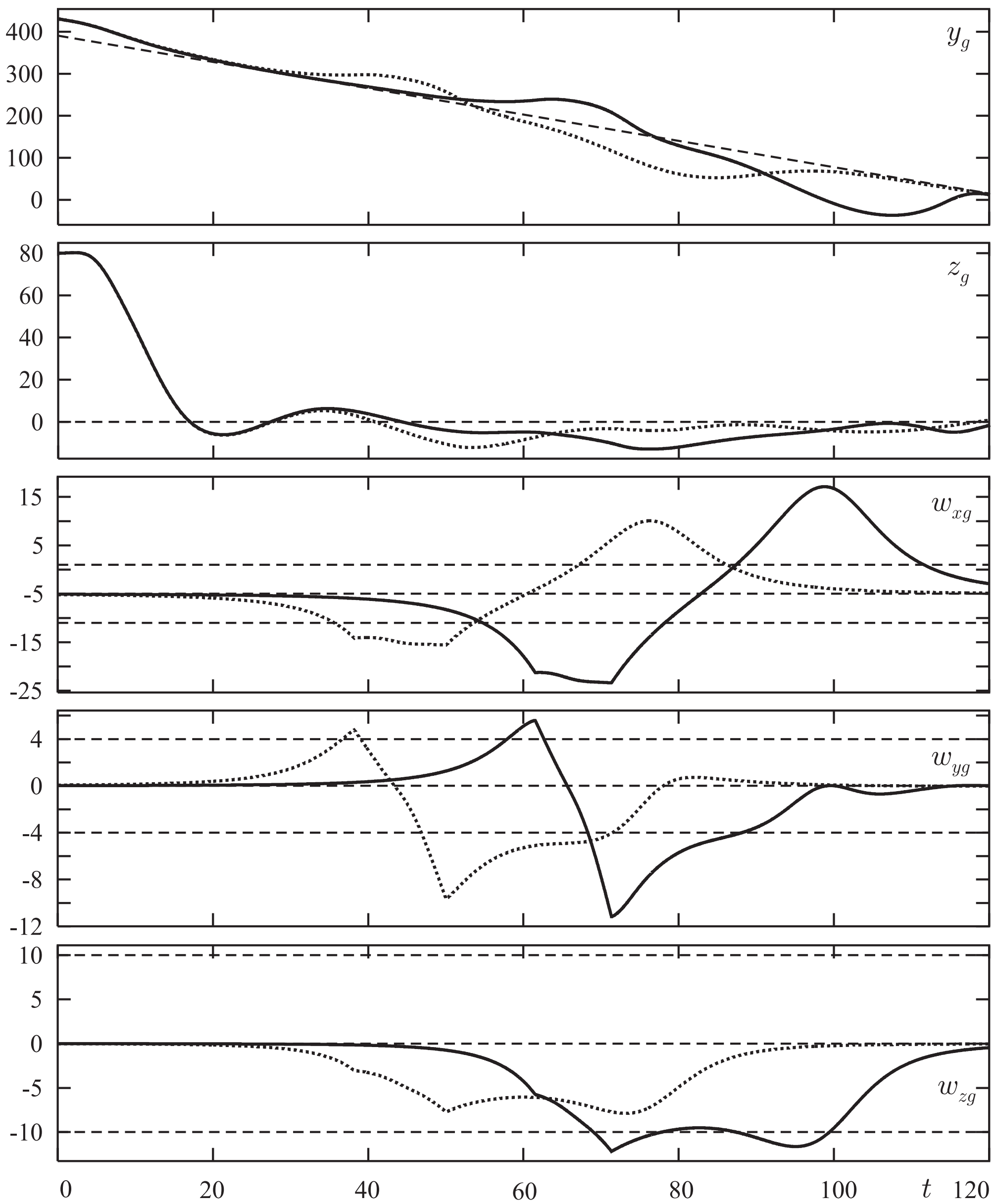


Рис. 6. Графики высоты y_g (м), бокового отклонения z_g (м), продольной w_{xg} (м/с), вертикальной w_{yg} (м/с) и боковой w_{zg} (м/с) компонент скорости ветра. Точечная линия — микровзрыв 1, сплошная — микровзрыв 2.

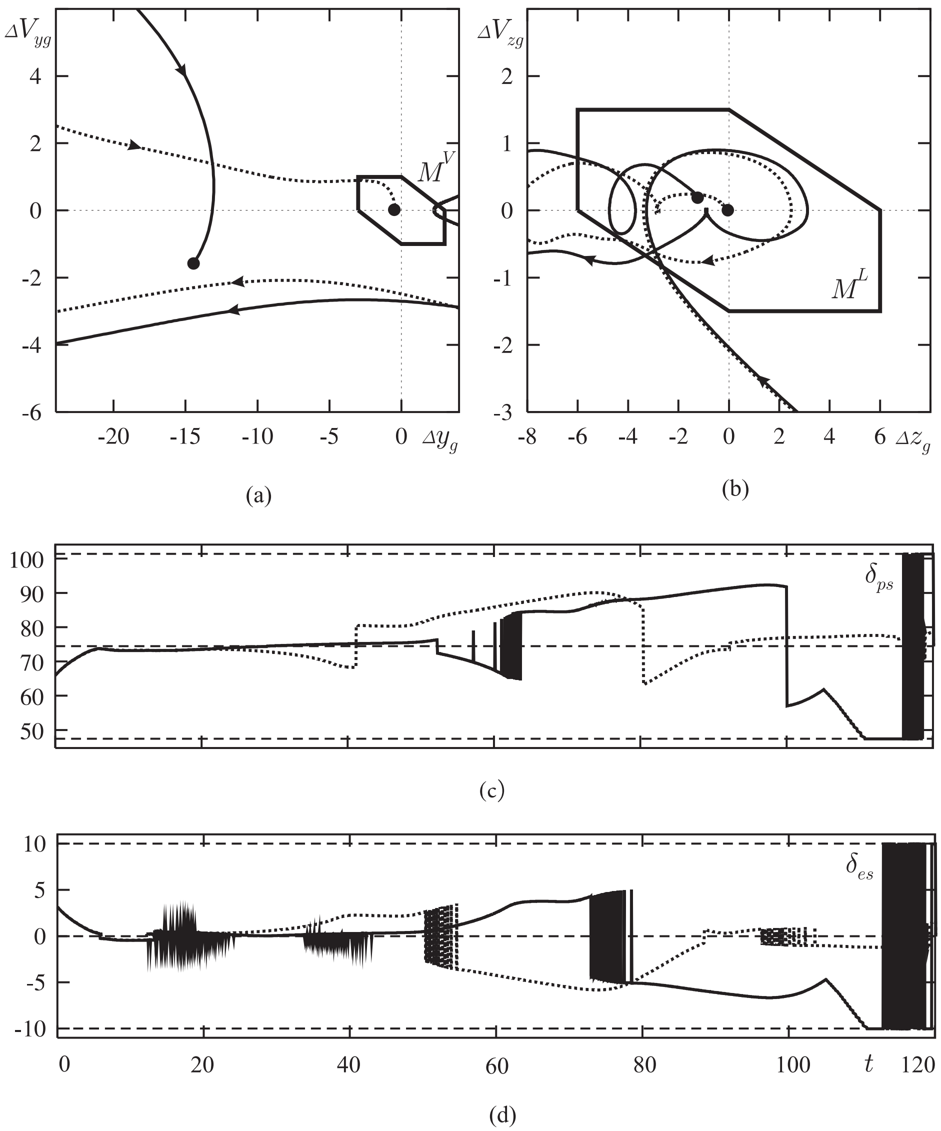


Рис. 7. Результаты моделирования для случая, когда компоненты скорости ветра не измеряются: (a) — фрагменты фазовых траекторий вертикального канала; (b) — фрагменты фазовых траекторий бокового канала; (c), (d) — графики управляющих воздействий вертикального канала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кейн В.М.** Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, 1985. 248 с.
2. **Корнеев В.А., Меликян А.А., Титовский И.Н.** Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 132–139.
3. **Miele A., Wang T., Melvin W.W.** Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // J. Optim. Theory Appl. 1986. Vol. 49, no. 1. P. 1–45.
4. Optimal penetration landing trajectories in the presence of windshear / A. Miele, T. Wang, H. Wang, W.W. Melvin // J. Optim. Theory Appl. 1988. Vol. 57, no. 1. P. 1–40.
5. **Leitmann G., Pandey S.** Aircraft control for flight in an uncertain environment: Take-off in windshear // J. Optim. Theory Appl. 1991. Vol. 70, no. 1. P. 25–55.
6. Control of an aircraft landing in windshear / V.S. Patsko, N.D. Botkin, V.M. Kein, V.L. Turova, M.A. Zarkh // J. Optim. Theory Appl. 1994. Vol. 83, no. 2. P. 237–267.
7. **Dahleh M.A., Pearson J.B.** L^1-optimal compensators for continuous-time systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. Vol. 32, no. 10. P. 889–895.

8. **Барабанов А.Е.** Синтез минимаксных регуляторов. С.-Пб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1996. 224 с.
9. **Поляк Б.Т., Щербаков П.С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
10. **Sokolov V.F.** Suboptimal robust synthesis for MIMO plant under coprime factor perturbations // Systems and Control Letters. 2008. Vol. 57, no. 4. P. 348–355.
11. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
12. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-Theoretical Control Problems. New York., etc.: Springer, 1988. 518 p.
13. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
14. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / под ред. А.И. Субботина, В.С. Пацко. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1984. 295 с.
15. **Зарх М.А., Пацко В.С.** Численное решение дифференциальной игры наведения третьего порядка // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 6. С. 162–169.
16. **Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Приближенное построение множества позиционного поглощения в линейной задаче сближения с выпуклой целью в пространстве $\mathbb{R}^3$ // Управление в динамических системах / под ред. А.И. Субботина, В.Н. Ушакова. Свердловск: Ин-т математики и механики УрО РАН, 1990. С. 93–100.
17. **Боткин Н.Д., Рязанцева Е.А.** Алгоритмы построения множеств разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 2. С. 128–134.
18. **Зарх М.А., Иванов А.Г.** Построение функции цены игры в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 2. С. 140–155.
19. Методы решения дифференциальных игр / Н.Л. Григоренко, Ю.Н. Киселев, Н.В. Лагунова, Д.Б Силин, Н.Г. Тринько // Мат. моделирование. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1993. С. 296–316.
20. Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр / Е.С. Половинкин, Г.Е. Иванов, М.В. Балашов, Р.В. Константинов, А.В. Хорев // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 95–122.
21. **Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С.** Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 753–770.
22. **Ganebny S.A., Kumkov S.S., Patsko V.S.** Feedback control in problems with unknown level of dynamic disturbance // Advances in mechanics: Dynamics and control: proc. of 14th Intern. workshop / Eds. F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin. M.: Nauka, 2008. P. 125–132.
23. **Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С.** Метод экстремального прицеливания в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 4. С. 573–586.
24. Управление боковым движением самолета на посадке в условиях ветрового возмущения: отчет / Н.Д. Боткин, В.М. Кейн, А.И. Красов, В.С. Пацко. Рег. в ВИНИТИ, № 81104592, инв. № 02830078880. Ленинград–Свердловск, 1983.
25. **Кейн В.М., Париков А.Н., Смуров М.Ю.** Об одном способе оптимального управления по методу экстремального прицеливания // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44, вып. 3. С. 434–440.
26. **Боткин Н.Д., Пацко В.С.** Анализ применения методов теории дифференциальных игр для имитации ветровых возмущений: отчет. Рег. в ВИНИТИ, № 01880003467, инв. № 02880044271. Свердловск, 1987. 46 с.
27. **Ivan M.** A ring-vortex downburst model for real-time flight simulation of severe windshear // AIAA Flight Simulation Technologies Conf. St. Louis, Miss. 1985. P. 57–61.
28. **Боткин Н.Д., Пацко В.С., Турова В.Л.** Разработка алгоритмов построения экстремальных ветровых возмущений: отчет. Рег. в ВИНИТИ, № 01880003467, инв. № 02880054701. Свердловск, 1987. 58 с.
29. Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах / Н.Д. Боткин, М.А. Зарх, В.Н. Кейн, В.С. Пацко, В.Л. Турова // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 68–76.
30. Constructing robust control in differential games: application to aircraft control during landing / S.A. Ganebny, S.S. Kumkov, V.S. Patsko, S.G. Pyatko // Annals of the International Society of Dynamic Games. Advances in Dynamic Games and Applications / Eds. S. Jørgensen, M. Quincampoix, T.L. Vincent. Vol. 9. Boston: Birkhäuser, 2007. P. 69–92.

31. Робастное управление в игровых задачах с линейной динамикой: препринт / С.А. Ганебный, С.С. Кумков, В.С. Пацко, С.Г. Пятко. Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 2005. 53 с.
32. **Остославский И.В., Стражева И.В.** Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 499 с.
33. Системы цифрового управления самолетом / под ред. А.Д. Александрова, С.М. Федорова. М.: Машиностроение, 1983. 223 с.
34. **Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.** Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / под ред. А.И. Субботина, В.С. Пацко. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.
35. **Dole C.E.** Flight Theory and Aerodynamics. New York: John Wiley and Sons, 1981. 320 p.

Ганебный Сергей Александрович
канд. физ.-мат. наук
младший науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: ganebny@imm.uran.ru

Поступила 01.05.2009

Пацко Валерий Семенович
канд. физ.-мат. наук
зав. сектором
Ин-т математики и механики Уро РАН
e-mail: patsko@imm.uran.ru

Пятко Сергей Григорьевич
д-р техн. наук
директор
НИИ Аэронавигации

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517.977

О ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ИМПУЛЬСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ[1]

А. Н. Дарьин, И. А. Дигайлова, А. Б. Куржанский

Рассматривается задача *синтеза импульсных управлений* по результатам доступных наблюдений, подверженных помехам. Схема решения строится на основе методов динамического программирования в форме аналогов уравнений гамильтонова формализма, и решение представляет собой последовательность дельта-функций. В качестве информационного состояния системы рассмотрены множества фазовых векторов, совместимые с априорными данными и текущими измерениями. Модели наблюдения рассмотрены либо как непрерывные, с “неопределенными” помехами, для которых статистическое описание отсутствует, либо как стохастические, дискретные, поступающие через коммуникационный канал связи в виде пуассоновского потока, с помехами, равномерно распределенными на заданном множестве. Все результаты получены в рамках операций в конечномерном пространстве. Обсуждаются вычислительные схемы. Приведены примеры численного моделирования.

Ключевые слова: импульсное управление, информационное состояние, нелинейный синтез управлений, пуассоновское распределение, гарантированное оценивание.

A. N. Daryin, I. A. Digailova, A. B. Kurzhanski. On the problem of impulse measurement feedback control.

A problem of *impulse measurement feedback control* is considered with noisy observations. The solution scheme is based on dynamic programming techniques in the form of analogs of Hamiltonian formalism equations, and the solution is a sequence of delta functions. The sets of state vectors compatible with a priori data and current measurements are considered as the information state of the system. Observation models are considered either as continuous with “uncertain” disturbances, for which there is no statistical description, or as stochastic and discrete ones coming from a communication channel in the form of a Poisson flow with disturbances that are distributed uniformly over a given set. All the results are obtained by means of operations in a finite-dimensional space. Computation schemes are discussed. Examples of numerical modeling are presented.

Keywords: impulse control, information state, nonlinear control synthesis, Poisson distribution, guaranteed estimation.

Введение

Задача синтеза управления по доступным измерениям при наличии шумов — одна из центральных в теории управления. Ее изучение восходит к основополагающим статьям Н. Н. Красовского [1, 2], где были предложены как стохастические, так и детерминированные постановки. В данной работе, следующей схеме [3], рассмотрен подход, опирающийся на понятие информационного состояния, элементом которого является “информационное множество” фазовых векторов, совместимых с уравнениями движения, полученными измерениями и ограничениями на неопределенные помехи [4]. В общем случае такой подход предполагает рассмотрение задачи в метрическом пространстве компактных множеств, что требует преодоления определенных аналитических и вычислительных трудностей [5]. В связи со сказанным в настоящей статье приводится задача управления по неполным данным для линейной системы, на примере которой предложено решение, доведенное до вычислительного алгоритма и просчитанных примеров для систем высокого порядка. В приведенной постановке имеется две особенности. Первая из них состоит в том, что при описании информационного состояния в виде множества рассмотрены два вида помех: “неопределенные” — неизвестные, но ограниченные, при заданном ограничении и отсутствии статистического описания и “стохастические”, когда при том

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00589), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4576.2008.1), научной программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект РНП 2.1.1.1714).

же заданном ограничении дополнительно известно, что помеха случайна, с известной плотностью распределения (или с известным ограничением на эту плотность). Отмечено, что при помехах первого вида информационное множество стягивается в точку лишь в случае, когда реализуется "наилучшая" помеха, тогда как во втором случае для каждого неизвестного начального условия системы существует свой конечный промежуток, за который многозначная оценка фазового вектора стягивается в малую окрестность точного состояния с заданной вероятностью. Указаны вычислительные схемы, основанные на эллипсоидальных аппроксимациях для неопределенной помехи и полиэдральных для стохастических. Вторая особенность рассматриваемой постановки состоит в том, что задача синтеза управления здесь рассматривается в классе импульсных воздействий. Приводятся условия, когда решение совокупной задачи управления достигается при помощи конечного числа импульсов. Полученные результаты допускают обобщение на более сложные модели наблюдений.

1. Задача синтеза импульсных управлений

1.1. Система управления

Рассмотрим задачу о синтезе импульсных управлений с критерием минимума обобщенного функционала типа Майера — Больца

$$J(U(\cdot)) = \operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)) \to \inf, \tag{1.1}$$

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dU(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{1.2}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $U(\cdot) \in BV([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)$ — обобщенное управление, $BV([t_0,t_1];\mathbb{R}^m)$ — пространство m-мерных функций с ограниченной вариацией (полагаем, что эти функции непрерывны слева). Напомним, что вариацией функции $U(\cdot)$ на отрезке $[t_0,t_1]$ называется число

$$\operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot) = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{N} \|U(\tau_{k+1}) - U(\tau_k)\| \;\middle|\; N \in \mathbb{N},\ \ t_0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{N+1} \le t_1 \right\}.$$

Здесь и далее в данной статье $\|\cdot\|$ — евклидова норма (но может быть другой конечномерной нормой). Известные матричные функции $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ считаем непрерывными, конечный момент времени t_1 — фиксированным, линейную систему (1.2) — вполне управляемой. Терминальную функцию $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ полагаем замкнутой и выпуклой.

Выбирая $\varphi(x) = I(x \mid \mathscr{M})$, а именно как индикаторную функцию[2] целевого множества $\mathscr{M}$, приходим к поиску управления минимальной вариации, приводящего систему в окрестность $\mathscr{M}$ в момент времени t_1.

Управления строятся на основе доступной информации, доставляемой измерениями

$$y(t) = H(t)x(t) + \xi(t). \tag{1.3}$$

Здесь $\xi(t)$ — помеха, стесненная ограничением $\xi(t) \in \mathscr{Q}(t) \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, где $\mathscr{Q}(t)$ — выпуклый компакт, непрерывный по t.

Заметим, что в рассматриваемой постановке измерения $y(t)$ — разрывные функции, даже если шумы непрерывны. Это связано с разрывной природой импульсных воздействий. Поэтому разобьем уравнение динамики на две части: одну — содержащую неопределенность, другую — содержащую управление.

[2]Под $I(x \mid A)$ будем понимать индикаторную функцию выпуклого множества A (нуль на множестве A и $+\infty$ вне его).

Обозначим через $G(t,\tau)$ фундаментальную матрицу однородной системы, т.е. решение уравнения $\partial G(t,\tau)/\partial t = A(t)G(t,\tau)$, $G(\tau,\tau) = I$.

Представив переменную $x(t)$ как сумму

$$x(t) = G(t,t_1)x_1(t) + G(t,t_1)x_2(t), \tag{1.4}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют системе

$$\dot{x}_1(t) = 0, \tag{1.5}$$

$$dx_2(t) = B(t)dU(t), \quad x_2(t_0) = 0, \tag{1.6}$$

перепишем уравнение измерений (1.3) в следующем виде:

$$y_1(t) = H(t)G(t,t_1)x_1(t) + \xi(t) = y(t) - H(t)G(t,t_1)x_2(t).$$

Заметим, что уравнение для $x_2(t)$ не содержит неопределенности, следовательно, $x_2(t)$ можем считать полностью известной управляющему устройству. С другой стороны, уравнение для $x_1(t)$ не содержит управления, следовательно, траектория $x_1(t)$ непрерывна в случае, если непрерывны шумы $\xi(t)$.

1.2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу синтеза в постановке, предложенной в [3], но теперь в классе импульсных управлений.

Определим вначале *состояние* системы (1.2), (1.3) как тройку $(t, y_{1,t}, x_2)$, где $y_{1,t}$ — история наблюдений $y_1(\tau)$ на промежутке $\tau \in [t_0, t]$.

Задача 1. *Для заданной терминальной функции $\varphi(\cdot)$ построить синтезированное управление вида $U(t, y_{1,t}, x_2)$, минимизирующее функционал $J(U(\cdot))$ при наличии неопределенности $\xi(\cdot)$*

$$\mathscr{J}(U(\cdot)) = \max_{\xi(\cdot)} J(U(\cdot)).$$

Функция цены равна минимальному значению функционала при фиксированном начальном состоянии

$$V(t, y_{1,t}, x_2) = \min \mathscr{J}(U(\cdot)).$$

Подобная постановка требует сохранения всей истории измерений $y_1(t)$. Последнее достигается следующим образом. Согласно [3], будем различать две задачи: задачу *гарантированного оценивания* текущего состояния и задачу *синтеза управления в пространстве таких состояний.*

Пусть измерения поступают на промежутке $[t_0, t_1]$. Тогда под текущим *информационным состоянием* системы будем понимать тройку $\{t, \mathscr{X}_1[t], x_2(t)\}$, где $\mathscr{X}_1[t]$ — *информационное множество* всех фазовых векторов $x_1(t)$, совместимых с моделью системы, с доступными измерениями $y_1(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, $t \le t_1$, и с ограничениями $\mathscr{Q}$ на неизвестные шумы $\xi(\cdot)$.

Множество $\mathscr{X}_1[t]$ — решение задачи гарантированного оценивания [4, 6]. Здесь

$$\mathscr{X}_1[t] = \bigcap_{\tau\in[t_0,t]} H^{-1}(t)\left(y_1^*(\tau) - \mathscr{Q}(\tau)\right)$$

при заданных измерениях $y_1^*(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$.

Информационное множество может быть описано с помощью своей опорной функции. Для него имеется также и эволюционное уравнение.

Опорная функция[3] множества $\mathscr{X}_1[t]$ вычисляется с использованием методов выпуклого анализа (см. [7, 4, 3]). Заметим, что из уравнения измерения при $t = t_0$ следует включение

$$x_1(t_0) \in H^{-1}(t_0)(y_1^*(t_0) - \mathscr{Q}(t_0)) = \mathscr{X}_1^0.$$

Имеем

$$\rho(\ell \mid \mathscr{X}_1[t]) = \inf_{\lambda(\cdot)} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t} \Big(\langle \lambda(\tau), y_1^*(\tau) \rangle + \rho(-\lambda(\tau) \mid \mathscr{Q}(\tau)) \Big) d\tau \mid \psi(t) = \ell \right\}, \tag{1.7}$$

где вектор-строка ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{\psi} = \lambda(t)H(t)$ при $\psi(t_0) = 0$.

Если помехи и, следовательно, наблюдения достаточно гладкие, то $\mathscr{X}_1[t]$ может быть получено как решение *эволюционного уравнения*[4] [8]

$$\lim_{\sigma \to 0+0} \sigma^{-1} h\Big(\mathscr{X}_1[t+\sigma], \mathscr{X}_1[t] \cap H^{-1}(t)(y_1^*(t) - \mathscr{Q}(t)) \Big) = 0. \tag{1.8}$$

З а м е ч а н и е 1. В случае недостаточной гладкости помех множество $\mathscr{X}_1[t]$ является максимальным по включению решением эволюционного уравнения

$$\lim_{\sigma \to 0+0} \sigma^{-1} h_+\Big(\mathscr{X}_1[t+\sigma], \mathscr{X}_1[t] \cap H^{-1}(t)(y_1^*(t) - \mathscr{Q}(t)) \Big) = 0.$$

Таким образом, помимо времени t, информационное состояние включает две составляющие: информационное множество $\mathscr{X}_1[t]$, не зависящее от управления, и вектор $x_2(t)$, которым необходимо управлять так, чтобы сумма $x_2(t) + \mathscr{X}_1[t]$ была приведена в минимальную окрестность целевого множества $\mathscr{M}$, при том что неуправляемая компонента $\mathscr{X}_1[t]$ оценивается по ходу процесса.

Имея информационное состояние вида $\{t, \mathscr{X}_1, x_2\}$ и следуя общей схеме решения задачи *управления по результатам измерений*, далее следовало бы приступить к решению задачи управления в *метрическом пространстве* выпуклых компактов [9, 3]. Подобная ситуация может оказаться неизбежной, особенно для нелинейных систем. Она порождает весьма сложные бесконечномерные задачи. Однако цель данной работы состоит в том, чтобы указать на существование более простого решения, полученного в рамках методов конечномерных пространств. Для этого переформулируем задачу 1.

Задача 2. *Пусть задана позиция (информационное состояние) $\{t, \mathscr{X}_1, x_2\}$, $t \in [t_0, t_1]$. Найти синтезированное импульсное управление вида $U(t, \mathscr{X}_1, x_2)$, минимизирующее функционал*

$$\mathscr{J}(U(\cdot)) = \max_{\xi(\cdot)} \left\{ \operatorname*{Var}_{[t,t_1]} U(\cdot) + \varphi\left(\mathscr{X}_1[t_1] + x_2(t_1+0) \right) \right\}, \qquad \varphi(\mathscr{X}) = \max_{x \in \mathscr{X}} \varphi(x). \tag{1.9}$$

Минимальные значениz функционала (1.9), вычисленные для каждого начального состояния $\{t, \mathscr{X}_1, x_2\}$, образуют функцию цены $\mathscr{V}(t, \mathscr{X}_1, x_2)$.

[3]Опорная функция выпуклого множества A есть $\rho(\ell \mid A) = \max\{\langle \ell, x\rangle \mid x \in A\}$.

[4]Здесь под $h(A,B)$ понимается хаусдорфово расстояние между двумя компактами: $h(A,B) = \max\{h_+(A,B), h_-(A,B)\}$, $h_+(A,B) = \min\{\varepsilon \mid A \subseteq B + \varepsilon\mathscr{B}_1\}$, $h_-(A,B) = h_+(B,A)$.

1.3. Решение задачи 2

Обозначим через $V(t,x;t_1,\varphi(\cdot))$ функцию цены для задачи синтеза импульсного управления (см. [10, 11]) “из заданной точки”, а именно

$$V(t,x) = V(t,x;t_1,\varphi(\cdot)) = \min_{U(\cdot)} \Big\{ \operatorname*{Var}_{[t,t_1]} U(\cdot) + \varphi(x(t_1+0)) \;\Big|\; x(t)=x,\ dx(\tau) = B(\tau)dU(\tau) \Big\}. \quad (1.10)$$

Оценим минимальное значение функционала $\mathscr{V}(t,\mathscr{X}_1,x_2)$ для задачи 2. С этой целью заметим, что информационное множество $\mathscr{X}_1[t_1]$ в конечный момент времени t_1 обязательно будет подмножеством начального информационного множества $\mathscr{X}_1[t]$. Следовательно, если в (1.9) заменить $\mathscr{X}_1[t_1]$ на $\mathscr{X}_1[t]$, то значение $\mathscr{J}(U(\cdot))$ только увеличится, поскольку максимум будет браться по большему множеству. Имеем

$$\mathscr{V}(t,\mathscr{X}_1,x_2) = \min_{U(\cdot)} \mathscr{J}(U(\cdot))$$

$$\leq \min_{U(\cdot)} \left\{ \operatorname*{Var}_{[t_0,t_1]} U(\cdot) + \varphi\left(\mathscr{X}_1 + x_2 + \int_t^{t_1+0} B(\vartheta)dU(\vartheta) \right) \right\} = V(t,x_2;t_1,\boldsymbol{\varphi}(\cdot)),$$

где

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \max_{z\in\mathscr{X}_1} \varphi(x+z). \quad (1.11)$$

В частности, если $\varphi(x) = I(x \mid \mathscr{M})$, то

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = I(x \mid \mathscr{M} \mathbin{\dot{-}} \mathscr{X}_1).$$

Здесь под $\dot{-}$ понимается геометрическая разность (Минковского) двух выпуклых множеств

$$A \mathbin{\dot{-}} B = \{x \mid B + x \subseteq A\}.$$

Функция цены $V(t,x)$ — решение следующего вариационного неравенства типа Гамильтона — Якоби — Беллмана [11]:

$$\min\big\{H_1(t,x,V_t,V_x),\ H_2(t,x,V_t,V_x)\big\} = 0, \quad (1.12)$$

с начальным условием

$$V(t_1,x) = V(t_1,x;t_1,\varphi(\cdot))$$

и гамильтонианами

$$H_1(t,x,V_t,V_x) = V_t, \quad H_2(t,x,V_t,V_x) = \min_{u\in S(0)} \langle V_x, B(t)u\rangle + 1.$$

Здесь $S(0)$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

Согласно (1.12), для любой позиции (t,x) есть две возможности: либо $H_1 = 0$, и можно выбрать управление $dU(t) = 0$, либо $H_1 > 0$. В последнем случае гарантировано, что $H_2 = 0$, и управление имеет скачок в направлении $-B'(t)V_x$. Величина скачка выбирается таким образом, чтобы после него опять стало $H_1 = 0$.

Приведем теперь строгое определение траекторий синтезированной системы. Поскольку управление входит лишь в уравнение (1.6), можем считать многозначную функцию $\mathscr{X}_1[t]$ известной (отметим, что это делается уже после того, как построен синтез управлений).

Введем дополнительное ограничение на управление

$$\left\| \frac{dU}{dt} \right\| \le \mu.$$

Это неравенство следует интерпретировать как ограничение на обобщенную производную функции U, при этом имеется в виду конечномерная норма, использованная в определении вариации $\operatorname{Var} U(\cdot)$ m-мерной функции U. Тогда можно перейти от управления $U(t)$ к его производной $u(t)$, которая уже не будет содержать дельта-функций. Получаем задачу минимизации функционала

$$\mathscr{J}_\mu(u(\cdot)) = \max_{\xi(\cdot)} \left\{ \int\limits_t^{t_1} \|u(\tau)\| \, d\tau + \varphi\left(\mathscr{X}_1[t_1] + x_2(t_1+0)\right) \right\} \tag{1.13}$$

в силу системы $\dot{x}_2(t) = B(t)u(t)$, $x_2(t) = x_2$, при ограничении $\|u(t)\| \le \mu$.

Минимальное значение функционала (1.13) обозначим $\mathscr{V}_\mu(t, \mathscr{X}_1, x_2)$. Рассуждая аналогичным образом, получаем оценку

$$\mathscr{V}_\mu(t, \mathscr{X}_1, x_2) \le V_\mu(t, x_2; t_1, \boldsymbol{\varphi}(\cdot)),$$

где V_μ — функция цены в задаче управления с двойным ограничением [10]:

$$V_\mu(t,x) = V(t,x;t_1,\varphi(\cdot)) = \min_{\|u(\cdot)\| \le \mu} \left\{ \int\limits_t^{t_1} \|u(\tau)\| \, d\tau + \varphi(x(t_1+0)) \;\middle|\; x(t) = x, \quad \dot{x}(\tau) = B(\tau)u(\tau) \right\}.$$

Она является решением уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial t} + \min_{\|u\| \le \mu} \left\{ \left\langle \frac{\partial V_\mu}{\partial x}, B(t)u \right\rangle + \|u\| \right\} = 0 \tag{1.14}$$

с краевым условием $V_\mu(t_1, x) = \varphi(x)$. Кроме того, $V_\mu(t,x) \to V(t,x)$ при $\mu \to \infty$.

Определим стратегию управления $\mathscr{U}_\mu(t, \mathscr{X}_1, x_2)$ как множество минимизаторов в (1.14):

$$\mathscr{U}_\mu(t, \mathscr{X}_1, x_2) = \begin{cases} \{0\}, & \|\zeta\| < 1; \\ [0, -\mu\zeta], & \|\zeta\| = 1; \\ \{-\mu\zeta / \|\zeta\|\}, & \|\zeta\| > 1, \end{cases} \quad \zeta = \zeta(t, \mathscr{X}_1, x_2) = B^T(t) \frac{\partial V_\mu}{\partial x}(t, x_2; t_1, \boldsymbol{\varphi}(\cdot)). \tag{1.15}$$

Стратегия (1.15) удовлетворяет вследствие полунепрерывности сверху функции $\mathscr{U}_\mu$ как по x_2, так и по $\mathscr{X}_1$ модификации теоремы существования и продолжаемости траекторий дифференциального включения [12]

$$\dot{x}_2(t) \in B(t)\mathscr{U}_\mu(t, \mathscr{X}_1[t], x_2(t)), \qquad x_2(t_0) = 0. \tag{1.16}$$

О п р е д е л е н и е. Функция ограниченной вариации $x_2(t)$ является траекторией синтезированной системы, если найдется последовательность траекторий дифференциального включения $x_2(t; \mu_n)$, $\mu_n \to \infty$, слабо* сходящаяся к $x_2(t)$.

1.4. Вычисление функции цены $V(t,x)$

Укажем, каким образом может быть вычислена функция цены $V(t,x)$ [10]. Эта функция представима в виде

$$V(t,x) = \inf_{x_1 \in \mathbb{R}^n} \{\varphi(x_1) + W(t,x;t_1,x_1)\}, \tag{1.17}$$

где $W(t,x;t_1,x_1)$ — минимальная вариация импульсного управления, переводящего систему вида (1.6) из состояния (t,x) в состояние (t_1,x_1). Она может быть найдена по формуле [13]

$$W(t,x;t_1,x_1) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n} \frac{\langle p, x_1 - x\rangle}{\|B^T(\cdot)p\|_{C[t,t_1]}}. \tag{1.18}$$

Введем норму в пространстве $\mathbb{R}^n$ соотношением

$$\|p\|_{[t,t_1]} = \left\|B^T(\cdot)p\right\|_{C[t,t_1]} = \max_{\tau\in[t,t_1]} \left\|B^T(\tau)p\right\| \tag{1.19}$$

(аксиомы нормы выполняются как следствие полной управляемости исходной системы). Тогда можно записать (1.18) в виде

$$W(t,x;t_1,x_1) = \sup_{p\in\mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t,t_1]}}} \langle p, x_1 - x\rangle\,, \tag{1.20}$$

где $\mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t,t_1]}}$ — единичный шар в указанной норме. Имеем из (1.17), (1.20)

$$V(t,x) = \inf_{x_1\in\mathbb{R}^n} \sup_{p\in\mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t,t_1]}}} \{\varphi(x_1) + \langle p, x_1 - x\rangle\}.$$

Применяя здесь теорему о минимаксе [14] для перестановки inf и sup, получаем

$$V(t,x) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n} \left[\langle p, x\rangle - \varphi^*(p) - I\Big(p \mid \mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t,t_1]}}\Big)\right] = \sup\left[\langle p, x\rangle - \varphi^*(p) \;\Big|\; p\in\mathscr{B}_{\|\cdot\|_{[t,t_1]}}\right]. \tag{1.21}$$

Здесь φ^* — сопряженная по Фенхелю для φ [7]. Несложно проверить, что функция (1.21) удовлетворяет вариационному неравенству (1.12).

З а м е ч а н и е 2. Для вычисления (1.21) заменим максимум по $[t,t_1]$ в (1.19) на максимум по конечному числу моментов времени и условие $\left\|B^T(\tau)p\right\| \le 1$ (для каждого из этих моментов) на конечное число линейных неравенств типа $\left\langle \ell_i, B^T(\tau)p\right\rangle \le 1$ (для векторов ℓ_i, $i=\overline{1,N}$, из единичной сферы). Тогда приходим к конечномерной задаче оптимизации с конечным числом линейных ограничений (см. [11]), для решения которой существуют эффективные алгоритмы [15].

Суммируя сказанное, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Верхней оценкой минимального значения функционала* $\mathscr{J}(U(\cdot))$ *в задаче* 2 *является функция цены* $V(t,x)$ *обычной задачи импульсного управления* (1.10) *с терминальным функционалом* (1.11). *В свою очередь, функция цены* $V(t,x)$ *есть решение вариационного неравенства типа ГЯБ* (1.12).

Последнее позволяет построить синтез управлений, если вычислена функция цены $V(t,x)$. При этом число импульсов в реализации синтезированного управления будет зависеть от поведения помехи.

З а м е ч а н и е 3. Описанное решение требует непрерывного пересчета функции цены для задачи импульсного управления по ходу процесса на основе оценки $\mathscr{X}_1$ и значения вектора x_2. Однако можно предложить схему, когда пересчет осуществляется лишь в некоторые моменты времени τ_i, например, когда размер информационного множества $\mathscr{X}_1[t]$ уменьшается по сравнению с предыдущим таким моментом в определенное количество раз. При этом, вычислив функцию цены в момент времени τ_i с терминальным функционалом

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = I\left(x \mid \mathscr{M} \dot{-} \mathscr{X}_1[\tau_i]\right),$$

далее на отрезке $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ будем полагать ее неизменной.

З а м е ч а н и е 4. Известно [13, 16], что если неопределенность в системе отсутствует, то существует оптимальное управление, которое может быть представлено в виде суммы не более чем n импульсов.

Однако в рассматриваемой здесь задаче как множество $\mathscr{X}_1[t]$, так и функционал $\boldsymbol{\varphi}(x)$ изменяются по ходу процесса. Следовательно, необходимое число импульсных воздействий не может быть указано заранее и может превышать n.

Но если воспользоваться схемой предыдущего замечания, т.е. пересчитывать информационное множество лишь в моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_m$, то можно гарантировать существование реализации управления из не более чем из $m \cdot n$ импульсов.

Для завершения решения задачи 2 требуется вычислить терминальную функцию $\boldsymbol{\varphi}(x)$. Последняя является индикаторной функцией выпуклого множества $\mathscr{M} \dot{-} (\mathscr{X}_1[\tau_i] + x_2(\tau_i))$. Следовательно, ему необходимо дать надлежащее описание.

Задание множества в виде выпуклой оболочки набора точек или значениями его опорной функции на некоторой сетке направлений требует чрезвычайно большого объема информации в случае высоких размерностей, при том что соответствующие вычисления несут высокую вычислительную нагрузку. Для преодоления этих трудностей оценим информационное множество внешним множеством простой структуры, а именно эллипсоидом.

1.5. Эллипсоидальные аппроксимации

Эллипсоид [17] $\mathscr{E}(r, R)$ с центром $r \in \mathbb{R}^n$ и матрицей конфигурации $R \geq 0$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — выпуклое множество, опорная функция которого имеет вид

$$\rho(p \mid \mathscr{E}(r, R)) = \langle p, r \rangle + \langle p, Rp \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Собственные векторы матрицы R являются направлениями осей эллипсоида, а соответствующие собственные числа — квадратами длин полуосей. Если матрица R не вырождена, то

$$\mathscr{E}(r, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \left\langle x - r, R^{-1}(x - r) \right\rangle \leq 1\}.$$

Заметим, что для описания одного эллипсоида в n-мерном пространстве требуется порядка $n^2/2$ чисел.

Предположим, что множества $\mathscr{Q}(t)$ и $\mathscr{M}$ — эллипсоиды

$$\mathscr{Q}(t) = \mathscr{E}(q(t), Q(t)), \qquad \mathscr{M} = \mathscr{E}(m, M)$$

с известными параметрами $q(t), m \in \mathbb{R}^n$ и $Q(t), M \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Представим оценку $\mathscr{X}_1[t]$ через ее внешнюю эллипсоидальную аппроксимацию $\mathscr{Y}_+(t) = \mathscr{E}(\eta(t), Y(t))$. Для ее построения перейдем к дискретному аналогу (1.8) и применим формулу построения внешней аппроксимации пересечения двух эллипсоидов (см. [18, 19]). Пример эллипсоида, найденного по этой формуле, приведен на рис. 1.
В результате получаем

$$Y(t + \Delta t) = \alpha Z^{-1},$$
$$\eta(t + \Delta t) = Z^{-1}(\pi W_1 q_1 + (1 - \pi) W_2 q_2),$$

где

$$Z = \pi W_1 + (1 - \pi) W_2,$$
$$W_1 = Y^{-1}(t), \quad W_2 = H^T(t) Q^{-1}(t) H(t),$$
$$q_1 = \eta(t), \quad q_2 = H^{-1}(t)(y(t) - q(t)),$$
$$\alpha = 1 - \pi(1 - \pi) \left\langle q_2 - q_1, W_2 Z^{-1} W_1 (q_2 - q_1) \right\rangle.$$

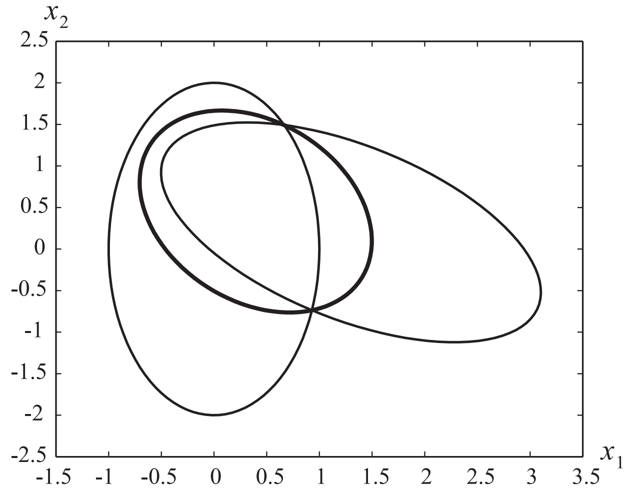


Рис. 1. Эллипсоидальная аппроксимация пересечения двух эллипсоидов.

Параметр π находится численно из уравнения

$$\alpha(\det Z)^2 \operatorname{tr}(Z^{-1}(W_1 - W_2)) - \eta(\det Z)^2 \Big(2 \langle \eta(t + \Delta t), W_1 q_1 - W_2 q_2 \rangle$$

$$+ \langle \eta(t + \Delta t), (W_2 - W_1)\eta(t + \Delta t) \rangle - \langle q_1, W_1 q_1 \rangle + \langle q_2, W_2 q_2 \rangle \Big) = 0.$$

Далее находим внутреннюю эллипсоидальную аппроксимацию множества $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \dot{-} \mathscr{Y}_+(t)$, а именно $\mathscr{M}'_- = \mathscr{E}\,(m', M')$ с параметрами

$$m' = m - \eta(t), \qquad M' = \left(1 - \left(\frac{\langle \ell, M\ell \rangle}{\langle \ell, Y\ell \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \right) M + \left(1 - \left(\frac{\langle \ell, Y\ell \rangle}{\langle \ell, M\ell \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} \right) Y,$$

где ℓ — “хорошее” направление [17].

Наконец, используем эллипсоид $\mathscr{E}\,(m', M')$ в качестве целевого множества для функции цены в задаче синтеза импульсного управления. Для этого выберем в качестве терминальной функции опорную функцию множества $\mathscr{M}'_-$, а именно положим

$$\boldsymbol{\varphi}^*(p) = \left\langle p, m' \right\rangle + \left\langle p, M'p \right\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

2. Синтез управлений при коммуникационных ограничениях

Возвращаясь к системе (1.5), (1.6), при $t \in [t_0, \vartheta]$, положим, что измерения поступают в дискретные моменты времени, согласно уравнению

$$y(\tau_i) = Hx_1(\tau_i) + \xi(\tau_i), \qquad i = \overline{1, k},$$

где $y(\tau_i), x_1(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k \leq \vartheta$ и помехи $\xi(\tau_i)$ для каждого момента времени i равномерно распределены на множестве

$$\mathscr{Q} = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n : |\eta_\ell| \leq \nu, \quad \ell = \overline{1, n} \right\}.$$

Кроме того, моменты поступления измерений τ_i будем считать случайными, распределенными по пуассоновскому закону[5] [20] с заданным параметром λ.

[5]Как правило, для моделирования передачи коммуникационных сигналов в дискретном времени используется именно пуассоновское распределение.

Задача 3. *Найти интервал времени длины* $\vartheta - t_0$ *и управляющую стратегию* $U = U(t, \mathscr{X}_1, x_2)$, *удовлетворяющие условию* $\operatorname*{Var}_{[t_0,\vartheta]} U(\cdot) \le \mu$, *так, чтобы задача синтеза импульсного управления в заданном классе наблюдений при условии*

$$\min_U \|x_1(\vartheta) + x_2(\vartheta)\| \le \gamma \tag{2.1}$$

была разрешима с вероятностью $P^0 \ge 1 - \varepsilon$, *где* γ *и* $\varepsilon > 0$ *заданы заранее.*

Чтобы обеспечить выполнение неравенства (2.1), должно выполняться включение

$$x_2(\vartheta) + \mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq \gamma\mathscr{C}(0),$$

где $\mathscr{C}(0)$ — единичный куб $\mathbb{R}^n$ с центром 0.

Для этого должен существовать такой вектор x_1^*, для которого

$$x_2(\vartheta) = -x_1^*, \qquad \mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq x_1^* + \mathscr{C}(0).$$

Таким образом, задача 3 при заданных γ и ε может быть разбита на две:

Задача 4. *Найти* ϑ, *которое обеспечивает включение* $\mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq \gamma\mathscr{C}(0) + x_1^*$ *для некоторого* x_1^* *с вероятностью* $P^0 \ge 1 - \varepsilon$.

Задача 5. *Обеспечить выполнение условия* $x_2(\vartheta) = -x_1^*$.

При фиксированных x_1^* и ϑ вторая задача может быть решена методом, предложенным в работе [11]. Поэтому остановимся подробнее на задаче 4.

Для неизвестных $x_1(t) = c = \mathrm{const}$ и $\mathscr{Q} = -\mathscr{Q}$ будем иметь

$$c \in \bigcap_{i=1}^{k} H^{-1}(y(t_i) + \mathscr{Q}) = c^* + \mathscr{R}(k, \vartheta), \qquad \mathscr{R}(k, \vartheta) = \bigcap_{i=1}^{k} H^{-1}(\xi^*(t_i) + \mathscr{Q}), \qquad \vartheta > t_k,$$

где $\xi^*(t_i)$ — реализовавшаяся в i-й момент времени помеха наблюдения $\xi(t_i)$, c^* — истинное значение параметра c, $\mathscr{R}(k, \vartheta)$ — ошибка после k измерений.

Дальнейшей целью будет добиться выполнения включения

$$\mathscr{R}(k, \vartheta) \subseteq \gamma\mathscr{C}(0) \tag{2.2}$$

с заданной заранее вероятностью $P_0 > 1 - \epsilon$.

Используя схему статей [21, 22], можно получить решение этой задачи в явном виде. У куба $\mathscr{Q}$ имеется 2^n вершин. Тогда, если помеха $\xi(t_i)$, $i = \overline{1, k}$, “пробежит” по малым окрестностям $\mathscr{D}(v_m, \sigma)$ всех вершин[6] v_m, $m = \overline{1, 2^n}$, то получим

$$\mathscr{R}(k, \vartheta) \subset \mathscr{D}(0, \sigma),$$

и объем $V_{\mathscr{R}}(k, \vartheta)$ множества $\mathscr{R}(k, \vartheta)$ устремится к нулю при малых σ, а именно:

$$V_{\mathscr{R}}(k, \vartheta) \le (2\sigma)^n \to 0.$$

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что тот же вывод остается справедливым, если помеха ξ “пробежит” лишь через окрестности $n+1$ вершин, образующих симплекс: $v_1 = (-\nu, -\nu, \ldots, -\nu)$, $v_2 = (\nu, -\nu, -\nu, \ldots, -\nu)$, $v_3 = (-\nu, \nu, -\nu, \ldots, -\nu)$ и т. д., $v_{n+1} = (-\nu, -\nu, \ldots, -\nu, \nu)$.

[6] Здесь мы рассматриваем n-мерные кубы как окрестности $\mathscr{D}(v_m, \sigma)$ с центром v_m и ребрами длины 2σ.

Для каждой из вершин v_j, $j = \overline{1, n+1}$, вероятность включения $\xi(t_i) \in \mathscr{R}(k, \vartheta) \cap \mathscr{D}(v_j, \sigma)$ после k измерений равна $P(\sigma, k, v_j) = 1 - (1 - \sigma^n \nu^{-n})^k$, а вероятность аналогичных включений для всех вершин симплекса равна

$$P(\sigma, k) = \bigl(1 - (1 - \sigma^n \nu^{-n})^k\bigr)^{n+1}.$$

При фиксированном n видно, что $\lim_{k\to\infty} P(\sigma, k) = 1$ для произвольного $\sigma > 0$.

Следовательно, необходимо выбрать число $\sigma = \sigma^0$ достаточно малым для обеспечения (2.2) и число $k = k^0$, гарантирующее

$$P(\sigma^0, k^0) \geq 1 - \delta. \tag{2.3}$$

Тогда очевидно, что $\mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq x_1^*(\vartheta) + \mathscr{D}(0, \sigma^0)$ для некоторого вектора $x_1^*(\vartheta)$, который может быть определен из формулы[7] (1.2)

$$\rho(\ell \mid \mathscr{X}_1[\tau_k]) = \inf\Biggl\{\sum_{i=1}^{k} \Bigl\langle \ell^{(i)}, y^*(\tau_i)\Bigr\rangle + \rho(-\ell^{(i)} \mid \mathscr{Q}) \Biggm| \ell^{(i)} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1,k}, \quad \sum_{i=1}^{k} \ell^{(i)} = \ell\Biggr\}$$

(дискретного аналога формулы (1.7) для $\rho(\ell \mid \mathscr{X}_1[\vartheta])$).

Однако для того чтобы поступило k^0 измерений, интервал времени должен быть достаточно большим. Из свойств пуассоновского распределения с частотой λ вытекает, что вероятность $P(k, \vartheta - t_0)$ поступления k измерений на интервале $[t_0, \vartheta]$ дается соотношением [20]

$$P(k, \vartheta - t_0) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda(\vartheta - t_0))^j}{j!} \exp(-\lambda(\vartheta - t_0)).$$

Тогда, для любого k будем иметь

$$P(k, \vartheta - t_0) \to 1, \quad \vartheta \to \infty. \tag{2.4}$$

Подводя итог рассуждениям, заметим, что интервал наблюдений $[t_0, \vartheta^0]$, гарантирующий $P^0 \geq 1 - \varepsilon$, определяется из неравенства

$$P^0 = P(k^0, \vartheta - t_0) P(\sigma^0, k^0) \geq P(k^0, \vartheta^0 - t_0)(1 - \delta) \geq 1 - \varepsilon.$$

Это неравенство имеет решение ϑ^0 при $\delta < \varepsilon$ (вследствие (2.4)).

Наконец, при $\delta = \varepsilon/2$ значение ϑ^0 определяется соотношением

$$P(k^0, \vartheta^0 - t_0) \geq 2(1 - \varepsilon)(2 - \varepsilon)^{-1} > 1 - \varepsilon. \tag{2.5}$$

Теорема 2. *Задача* 3 *разрешима на интервале, не меньшем числа $\vartheta^0 - t_0$, определяемого из* (2.5), *при числе k^0 из* (2.3) *и достаточно большом значении ограничения μ на управление U, обеспечивающем разрешимость уравнения $x_2(\vartheta^0) = -x_1^*(\vartheta)$.*

З а м е ч а н и е 6. Рассмотрим систему неравенств

$$\langle e^{(i)}, z\rangle \leq \rho(e^{(i)} \mid \mathscr{X}_1[\tau_k])$$

для всех ортов $\pm e^{(i)}$, $i = \overline{1, n}$. Решение

$$\mathscr{Z}(n, k) \supseteq \mathscr{X}_1[\vartheta], \quad \vartheta \geq \tau_k,$$

этой системы представляет собой прямоугольный параллелепипед с центром $z_1^* = z^*(n, k)$. Он аппроксимирует $\mathscr{X}_1[\tau_k]$ внешним образом и может быть использован вместо информационного множества, так что

$$\mathscr{Z}(n, k) - z^* \supseteq \mathscr{R}(k, \vartheta), \quad \vartheta \geq \tau_k$$

и

$$\mathscr{X}_1[\vartheta] \subseteq z^* + (\mathscr{Z}(n, k) - z^*) \subseteq z^* + \mathscr{D}(0, \sigma^0).$$

[7] Далее в замечании 6 мы укажем как найти $x_1^*(\vartheta)$ из этих соотношений.

3. Примеры

3.1. Синтез импульсных управлений по результатам измерений

Здесь представлены результаты численного моделирования разработанных ранее законов управления для описанной ниже линейной системы.

Задача состоит в отыскании синтеза импульсных управлений по результатам измерений, останавливающего колебания системы

$$\begin{cases} m_1\ddot{w}_1 = k_2(w_2 - w_1) - k_1 w_1, \\ m_i\ddot{w}_i = k_{i+1}(w_{i+1} - w_i) - k_i(w_i - w_{i-1}), \\ m_N\ddot{w}_N = -k_N(w_N - w_{N-1}) + u, \end{cases}$$

описывающей многозвенную колебательную механическую систему или эквивалентную ей электрическую цепь.

Целью управления является перевод системы в окрестность состояния равновесия за данное конечное время.

В численных экспериментах использовались следующие значения параметров: $m_i = 1$, $k_i = 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi N$, $w_i^0 = \dot{w}_i^0 = 5$, $r(t) = 0$, $R(t) = \mathrm{diag}(10^{-4}I, 10^4 I)$ (т. е. смещения w измеряются со сравнительно малой ошибкой $\pm 0{,}01$, тогда как скорости $\dot{w}$ измеряются с большой ошибкой ± 100), $h = 2N$, $\Delta t = 0{,}1$ для эллипсоидального фильтра, $p(t) = 0$, $P(t) = 1$, $m = 0$, $M = I$.

Использовалось наихудшая помеха ($\xi(t) \equiv 0$), приводящая к наибольшему возможному размеру информационного множества.

На рис. 2 показана зависимость диаметра эллипсоидального информационного множества от модельного времени $t - t_0$. Отметим, что этот график одинаков для любого размера цепи N.

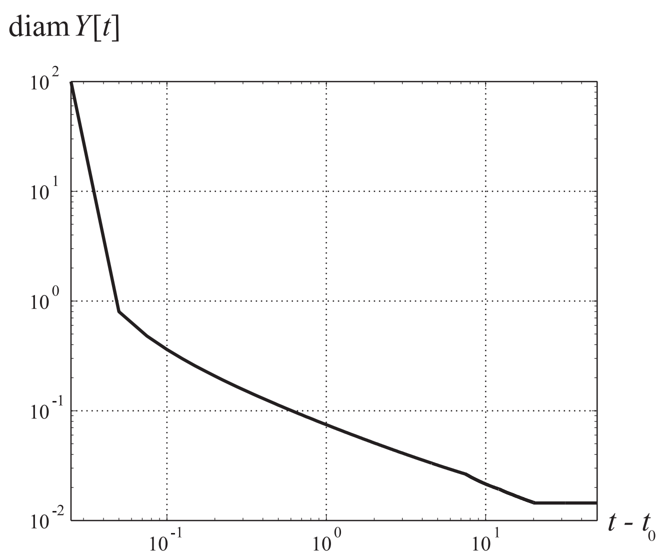


Рис. 2. Диаметр эллипсоидального информационного множества в зависимости от времени $(t - t_0)$.

Рисунок 3 демонстрирует реализовавшееся импульсное управление для $N = 5$. Заметим, что размерность системы в данном случае $n = 2N = 10$, а число отдельных импульсов (оно равно 13) здесь больше, чем n.

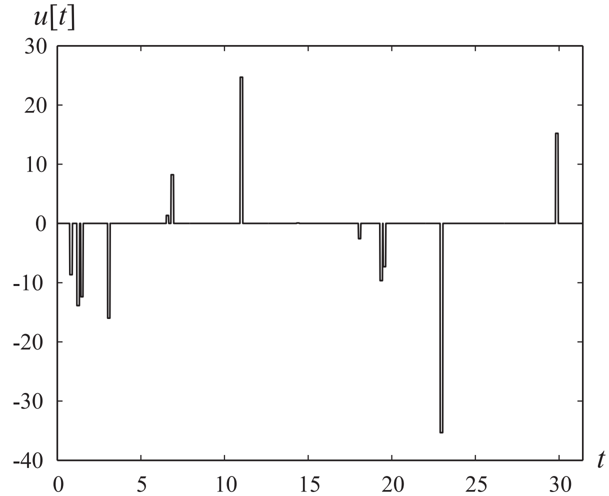


Рис. 3. Аппроксимация реализовавшегося импульсного управления при $N = 5$.

3.2. Управление по результатам измерений при коммуникационных ограничениях

На рис. 4 показано математическое ожидание диаметра информационного множества $\mathscr{R}(k, \vartheta)$ в задаче с коммуникационными ограничениями для различных размерностей n.

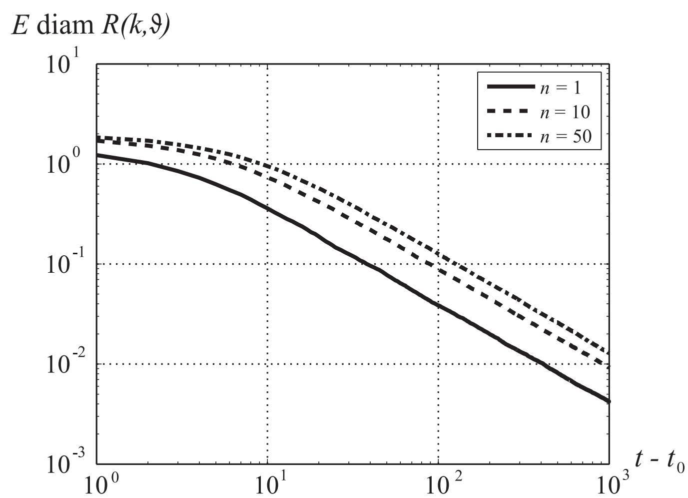


Рис. 4. Диаметр информационного множества для задачи с пуассоновскими моментами измерений в зависимости от прошедшего времени $(\vartheta - t_0)$.

4. Выводы

Рассмотрен *синтез импульсных управлений по результатам измерений* при неопределенности, стесненной геометрическим ограничением. Реализации управлений состоят из суммы δ-функций. Рассмотрены два вида помех: непрерывные, не имеющие статистического описания и дискретные, когда коммуникационные сигналы, содержащие измерения с помехой, поступают в пуассоновские моменты времени. Для обоих случаев указана схема решения и приведены примеры численного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 1. С. 3–14.
2. **Красовский Н.Н.** Теория оптимальных управляемых систем // Механика в СССР за 50 лет. Т. 1: Общая и прикл. механика. М.: Наука, 1968. С. 179–244.
3. **Куржанский А.Б.** О синтезе управлений по результатам наблюдений // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, № 4. С. 547–563.
4. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390 с.
5. **Helton J.W., James M.R.** Extending H^∞ control to nonlinear systems. Philadelphia: SIAM, 1999. 333 p.
6. Bounding approaches to system identification / Eds. M. Milanese, J. Norton, H. Piet-Lahanier, E. Walter. London: Plenum Press, 1996. 565 p.
7. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
8. **Kurzhanski A.B., Filippova T.F.** On the theory of trajectory tubes: a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in Nonlinear Dynamics and Control. Ser. PSCT 17. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 122–188.
9. **James M.R., Baras J.S.** Partially observed differential games, infinite-dimensional Hamilton–Jacobi–Isaacs equations and nonlinear H^∞ control // SIAM J. Control Optim. 1996. Vol. 34, № 4. P. 1342–1364.
10. **Дарьин А.Н., Куржанский А.Б., Селезнёв А.В.** Метод динамического программирования в задаче синтеза импульсных управлений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 11. С. 1491–1500.
11. **Kurzhanski A.B., Daryin A.N.** Dynamic programming for impulse controls // Ann. Reviews in Control. 2008. Vol. 32, no. 2. P. 213–227.
12. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 216 с.
13. **Красовский Н.Н.** Об одной задаче оптимального регулирования // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, № 5. С. 670–677.
14. **Fan Ky**. Minimax theorems // Proc. Nat. Acad. of Sci. USA. 1953. Vol. 39, no. 1. P. 42–47.
15. **Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.** Linear matrix inequalities in system and control theory // Ser. Studies in Applied Math. Vol 15. Philodelphia: SIAM, 1994. 193 p.
16. **Neustadt L.W.** Optimization, a moment problem and nonlinear programming // SIAM J. Control. 1964. Vol. 2, no. 1. P. 33–53.
17. **Kurzhanski A.B., Vályi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Ser. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
18. **Kurzhanskiy A.A., Varaiya P.** Ellipsoidal toolbox. 2005. URL: http://code.google.com/p/ellipsoids.
19. **Ros L., Sabater A., Thomas F.** An ellipsoidal calculus based on propagation and fusion // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 2002. Vol. 32, no. 4. P. 430–442.
20. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. М.: Мир, 1967. 752 р.
21. **Kurzhanski A.B.** Identification: a theory of guaranteed estimates. From data to model / Ed. J.C. Willems. New York: Springer-Verlag, 1989. P. 135–214.
22. **Ustyuzhanin A.M.** On the problem of matrix parameter identification // Problems of Control and Information Theory. 1986. Vol. 15, no. 4. P. 265–273.

Поступила 02.04.2009

Дарьин Александр Николаевич
канд. физ.-мат. наук
ассистент
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: daryin@cs.msu.su

Дигайлова Ирина Анатольевна
канд. физ.-мат. наук
доцент
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: digailova_ira@mail.ru

Куржанский Александр Борисович
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик РАН
зав. кафедрой
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: kurzhans@mail.ru

Том 15 № 3 2009

УДК 519.6

ОТОБРАЖЕНИЯ СЖАТИЯ[1]

И. И. Еремин

Рассматриваются отображения сжатия (равномерного, M-фейеровского и др.) на предмет построения итерационных методов решения систем линейных и выпуклых неравенств, задач линейного и выпуклого программирования, а также матричных игр и аппроксимационных задач оптимизации.

Ключевые слова: линейное и выпуклое программирование, отображения сжатия, фейеровские процессы, множество неподвижных точек, оператор проектирования.

I. I. Eremin. Contraction mapping.

We consider (uniform, M-Fejér, etc.) contraction mappings with the aim of constructing iterative methods for systems of linear and convex inequalities, problems of linear and convex programming, matrix games, and approximation optimization problems.

Keywords: linear and convex programming, contraction mappings, Fejér processes, fixed point set, projection operator.

Введение

В настоящей статье дается характеристика нескольких вариантов операторов сжатия. Классическим примером является принцип сжатых отображений, введенный С. Банахом [1, с. 43–53]. Постулатом этого принципа является свойство

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \le \alpha\, \|x-y\|, \qquad \alpha \in (0,1), \tag{1}$$

$\varphi(\,\cdot\,) \in \{X \to X\}$, X — банахово пространство (для определенности). Из сформулированного постулата следует:

$$\operatorname{Fix}\varphi(x) = \{\bar{x}\} \,\&\, \{\varphi^t(x_0)\}_t \to \bar{x},$$

x_0 — любая начальная точка. Названный принцип Банаха нашел в ретроспективе применения к решению систем линейных уравнений методом итераций, интегральных уравнений, уравнений в частных производных и др. [1].

Оператор $\varphi(\,\cdot\,)$ равномерного сжатия (по Банаху) имеет единственную неподвижную точку $\bar{x}$. Однако такое свойство является обременительным для многих классов задач. К таковым можно отнести системы линейных неравенств, задачи линейного и выпуклого программирования, некорректные задачи оптимизации и т. д. Для таких задач эффективно применим принцип фейеровских отображений [2, гл. II] или M-строгого сжатия (здесь $M \subset X$).

Постулатом такого сжатия является выполнимость соотношений

$$\varphi(y)=y, \qquad \|\varphi(x)-y\| < \|x-y\|, \qquad \forall\, y \in M, \qquad \forall\, x \notin M. \tag{2}$$

Из него, например, следует утверждение:

если $X=\mathbb{R}^n$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывен, то* $\{\varphi^t(x_0)\}_t \to x' \in M$.

Оператор $\varphi(x)$, подчиненный постулату (2), называется M-*фейеровским.* Множество отображений, являющихся M-фейеровскими при фиксированном M, обозначается традиционно $\mathcal{F}_M$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00399) и Программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2081.2008.1).

Конечно, на самом деле как в первом случае (1), так и во втором (2) следствий из постулатов достаточно много. Можно отметить такие следствия:

Пусть $\varphi_j(\,\cdot\,) \in \mathcal{F}_M$, $j = 1, \ldots, m$ *и* $\alpha_j > 0$, $\sum\limits_{(j)} \alpha_j = 1$. *Тогда* $\varphi_\alpha(x) := \sum\limits_{(j)} \alpha_j \varphi_j(x) \in \mathcal{F}_M$.

Если $\varphi_j(x) \in \mathcal{F}_{M_j}$, $j = 1, \ldots, m$, *то* $\varphi_\alpha(x) \in \mathcal{F}_M$, *где* $M := \bigcap\limits_{(j)} M_j \neq \varnothing$.

Или: *если* $\tilde{\varphi}(x) := \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m(x)$, *то* $\tilde{\varphi}(x) \in \mathcal{F}_M$.

Существуют и другие типы сжатий, некоторые из них будут рассмотрены в статье. В целом содержание статьи можно рассматривать как методологический очерк по проблематике сжатий.

Сделаем следующее замечание. Множество M, фигурирующее выше, носит абстрактный характер. В конкретных случаях оно может быть задано как явно, так и неявно. Например, в первом случае может быть представление множества M в форме $\operatorname{conv}\{P_j\}_j$, во втором — в форме $\{x \mid Ax \le b\}$. В качестве неявного задания множества M может быть оптимальное множество разрешимой задачи линейного программирования, т. е.

$$M = \operatorname{Arg}\max\{(c, x) \mid Ax \le b\}.$$

1. Обозначения и некоторые определения

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство;
$\mathbb{R}^n_+$ — неотрицательный ортант пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \ge 0\}$;
$\ldots =: z$ — присвоение символа z тому, что написано слева от символа “=”;
$z := \ldots$ — аналогичное предшествующему;
$\alpha^+ := \max\{\alpha, 0\}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;
$a^+ := [\alpha_1^+, \ldots, \alpha_n^+]^T$, где $a = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^T \in \mathbb{R}^n$;
$\|x\|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$;
$\operatorname{Pr}_M(x)$ — метрическая проекция вектора x на выпуклое замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$;
$\operatorname{Fix}\varphi$ — множество точек неподвижности оператора $\varphi(\,\cdot\,) \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$, т. е. $\operatorname{Fix}\varphi = \{x \mid \varphi(x) = x\}$;
$\arg C$ — оптимальный вектор оптимизационной задачи, помеченной символом C (или ее номером в тексте);
$\operatorname{Arg} C := \cup \arg C$;
$\operatorname{conv} S$ — выпуклая оболочка множества $S \subset \mathbb{R}^n$;
если N — произвольная система линейных неравенств, то под символом $\operatorname{Arg} N$ и $\arg N$ понимаются множество решений этой системы и конкретные ее решения соответственно;
$\varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\ldots\varphi_{i_m}(x)$ — упорядоченная суперпозиция операторов $\{\varphi_i\}_1^m$;
$\operatorname{conv}\{a_j\}_1^m := \{x = \sum_{(j)} \alpha_j a_j : \ \alpha_j \ge 0, \ \sum_{(j)} \alpha_j = 1\}$ — выпуклая оболочка совокупности точек $a_1, \ldots, a_m$;
$\mathcal{F}_M$ — обозначение множества отображений $\varphi(\,\cdot\,) \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ со свойствами (2);
$\overline{\mathcal{F}}_M$ — обозначение множества непрерывных отображений $\varphi(x) \in \mathcal{F}_M$ (при фиксированном M).

Ниже будут отмечены следующие четыре варианта сжимающих отображений:

(1) M-фейеровское сжатие (M-фейеровское отображение).

(2) Слабое M-фейеровское сжатие.

(3) M^*-потенциальное сжатие.

(4) Фейеровское сжатие с нагрузкой нерастяжимости $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le \|x - y\|$.

Постулатами для вариантов (1)–(4) являются:

(a) $\varphi(y) = y, \quad \|\varphi(x) - y\| < \|x - y\| \quad \forall\, y \in M \quad \forall\, x \notin M;$

(b) $\|\varphi(x) - y\| \le \|x - y\|, \quad \forall\, y \in M = \operatorname{Fix}\varphi(\,\cdot\,) \quad \forall\, x;$

(c) $\exists\, M^* \neq \varnothing \Rightarrow \varphi(\,\cdot\,) \in \mathcal{F}_{M^*};$

(d) (a) & $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le \|x - y\| \quad \forall\, x, y.$

2. M-фейеровские сжатия

Любой принцип сжатия делится на формулировку постулата, следствия из постулата и конкретные реализации.

Для оператора $\varphi(\,\cdot\,) \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$, реализующее M-фейеровское сжатие, давно применяется термин — M-фейеровское отображение [2]. *M-фейеровское отображение характеризуется тем, что образ $\varphi(x)$ элемента $x \notin M$ ближе к любой точке $y \in M$, при этом $\varphi(y) = y$,* $\forall\, y \in M$. Здесь M — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$. Простейшим примером M-фейеровского отображения является оператор метрического проектирования на M : $\operatorname{Pr}_M(x)$. Поэтому на M-фейеровское отображение можно смотреть как на некоторое обобщение операции метрического проектирования. В прикладных задачах M-фейеровские отображения конструируются, как из элементарных кирпичиков, из простых проектирований на простые множества: гиперплоскость, полупространство, параллелепипед, неотрицательный ортант, линейное многообразие, задаваемое конечной системой линейных уравнений, и др. Приведем примеры конкретных M-фейеровских отображений.

Пусть
$$M := \{x \mid l_j(x) := (a_j, x) - b_j \le 0,\ j = 1, \dots, m\} \neq \varnothing,$$
т. е. M — множество решений конечной системы линейных неравенств. Положим $\varphi(x) := \sum_{j=1}^m \alpha_j \operatorname{Pr}_{M_j}(x)$, где $\alpha_j > 0$, $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$. *Отображение $\varphi(x)$, синтезированное из элементарных проектирований, является непрерывным M-фейеровским, при этом $\{x_{k+1} = \varphi(x_k)\}_{k=0}^{\infty} \to x' \in M$.*

Приведем другой, более сложный пример. Пусть L — разрешимая задача линейного программирования
$$\max\{(c, x) \mid Ax \le b,\ x \ge 0\} \tag{L}$$
и L^* — двойственная к ней
$$\min\{(b, u) \mid A^T u \ge c,\ u \ge 0\}. \tag{L^*}$$
Положим $M_x := \{x \mid Ax \le b\}$, $M_u := \{u \mid A^T u \ge c\}$. Выделим $\varphi_1(x) \in \mathcal{F}_{M_x}$, $\varphi_2(u) \in \mathcal{F}_{M_u}$ и $\varphi_3(x, u) = \operatorname{Pr}_H(x, u)$, где H — гиперплоскость, задаваемая уравнением $(c, x) - (b, u) = 0$. Запишем итоговый оператор
$$\varphi(\underbrace{x, u}_{z}) := \varphi_3(\varphi_1^+(x),\, \varphi_2^+(u)),$$
для которого справедливо включение $\varphi(z) \in \mathcal{F}_{\widetilde{M}}$, где $\widetilde{M} := \operatorname{Arg} L \times \operatorname{Arg} L^* \quad (= \operatorname{Fix}\varphi(\,\cdot\,))$.

Оператор $\varphi(x, u)$ является непрерывным, поэтому
$$\{\varphi^t(x_0, u_0)\}_t \to [\tilde{x}, \tilde{u}],$$
где $\tilde{x}$ — оптимальный вектор задачи L, $\tilde{u}$ — оптимальный вектор двойственной задачи L^*.

Методы фейеровского типа, отнесенные к задачам решения систем линейных и выпуклых неравенств, а также задачам линейного и выпуклого программирования, развиты достаточно хорошо. Ниже остановимся кратко на основных свойствах и теоремах, относящихся к теории фейеровских операторов и порождаемых ими процессов, сходящихся к решению той или иной поставленной задачи.

2.1. Исходные понятия и утверждения

Пусть φ — однозначное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и $\operatorname{Fix}\varphi =: M \neq \varnothing$. Здесь $\operatorname{Fix}\varphi$ — множество точек неподвижности отображения φ.

Определение 1. Отображение $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ называется *M-фейеровским*, если для него выполняются соотношения

$$\varphi(y) = y, \qquad \|\varphi(x) - y\| < \|x - y\| \qquad \forall\, y \in M \qquad \forall\, x \notin M.$$

Определение 2. Многозначное отображение $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}\}$ называется *M-фейеровским*, если выполняются соотношения

$$\varphi(y) = y, \quad \|z - y\| < \|x - y\| \quad \forall\, y \in M \quad \forall\, z \in \varphi(x) \quad \forall\, x \notin M.$$

Приведем пример такого отображения.

Пусть $M := \{x \mid f_j(x) \leq 0,\ j = 1, \ldots, m\} \neq \varnothing$, $\{f_j(x)\}_1^m$ — выпуклые функции, $d(x) = \max\limits_{(j)} f_j(x)$, $J(x) := \{j \mid d(x) = f_j(x)\}$. Положим

$$\varphi(x) := \Big\{x - \lambda \frac{d^+(x)}{\|h\|^2}\, h \;\Big|\; h \in \sum_{j \in J(x)} \alpha_j \partial f_j(x),\ \alpha_j \geq 0,\ \sum_{j \in J(x)} \alpha_j = 1\Big\}, \tag{3}$$

$0 < \lambda < 2$, $\partial f_j(x)$ — субдифференциал выпуклой функции $f_j(x)$. Это отображение удовлетворяет определению 2.

Ниже будем использовать понятие замкнутости многозначного отображения $\varphi(\,\cdot\,)$, которое состоит в выполнимости следующей импликации

$$(\{x_k\} \to x',\ \{y_k\} \to y',\ y_k \in \varphi(x_k)) \Longrightarrow y' \in \varphi(x').$$

Класс замкнутых и непрерывных M-фейеровских отображений будем также обозначать $\overline{\mathcal{F}}_M$. Если отображение $\varphi \in \mathcal{F}_M$ однозначно и замкнуто, то оно непрерывно.

Определение 3. Последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *M-фейеровской*, если

$$\{x_k\} \cap M = \varnothing, \quad \|x_{k+1} - y\| < \|x_k - y\| \quad \forall\, y \in M \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots\,.$$

Определение 4. Последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ назовем *почти M-фейеровской*, если

$$\{x_k\} \cap M = \varnothing, \qquad \|x_{k+1} - y\| \leq \|x_k - y\| \qquad \forall\, y \in M \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots\,,$$

причем эта последовательность содержит M-фейеровскую подпоследовательность, т. е. $\exists\, \{x_{j_k}\} \subset \{x_k\}$:

$$\|x_{j_{k+1}} - y\| < \|x_{j_k} - y\| \qquad \forall\, y \in M \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots\,.$$

Примечание к определению 4. Если из почти M-фейеровской последовательности убрать возможные повторения, то останется последовательность, именуемая *слабо M-фейеровской*, что соответствует следующему определению.

Определение 5. Последовательность $\{x_k\}$ называется *слабо M-фейеровской*, если

$$\{x_k\} \cap M = \varnothing, \quad \|x_{k+1} - y\| \leq \|x_k - y\| \quad \forall\, y \in M, \quad x_{k+1} \neq x_k \quad \forall\, k.$$

Заметим, что такие последовательности порождаются слабо M-фейеровскими отображениями φ со следующим их определением:

$$\varphi(y) = y, \qquad \|\varphi(x) - y\| \leq \|x - y\| \qquad \forall\, y \in M \qquad \forall\, x \notin M.$$

Легко проверить свойство: *если* $\varphi(x)$ — *слабо* M*-фейеровское отображение, то* $\varphi_\alpha(x) := \alpha\,\varphi(x) + (1-\alpha)x$ *является* M*-фейеровским при* $\alpha \in (0,1)$.

Перечислим некоторые необходимые для дальнейшего свойства и факты, относящиеся к M-фейеровским отображениям и M-фейеровским последовательностям.

Если $\mathcal{F}_M \neq \varnothing$, *то множество* M *автоматически выпукло и замкнуто.*
Если M *выпукло и телесно, то любая* M*-фейеровская последовательность* $\{x_k\}$ *сходится к некоторому* $x' \in \mathbb{R}^n$.
Если $\varphi \in \mathcal{F}_M$ *и последовательность* $\{x_k\}$ *порождена процессом*

$$\{x_{k+1} \in \varphi(x_k)\}_{k=0}^{\infty}, \tag{4}$$

причем $\{x_k\} \cap M = \varnothing$, *то* $\{x_k\}$ — M*-фейеровская.*
Если $\{x_k\}$ — M*-фейеровская последовательность и некоторая предельная ее точка* x' *принадлежит* M, *то* $\{x_k\} \to x'$.

Утверждение 1. *Если* $\varphi \in \mathcal{F}_M$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывно, то*

$$\{x_{k+1} = \varphi(x_k)\}_{k=0}^{\infty} \to x' \in M.$$

Утверждение 2. *Если* φ — *многозначное фейеровское отображение, то*

$$\{x_{k+1} \in \varphi(x_k)\}_{k=0}^{\infty} \to x' \in M.$$

Поскольку отображение (3) является замкнутым M-фейеровским, то в силу утверждения 2 процесс типа (4) сходится к решению совместной системы выпуклых неравенств $f_j(x) \leq 0$, $j = 1, \ldots, m$.

2.2. Базовые конструкции фейеровских отображений

Как уже отмечалось, оператор $\mathrm{Pr}_M(x)$ метрического проектирования на выпуклое замкнутое множество является непрерывным M-фейеровским. Проектирование на простейшие выпуклые множества осуществляется весьма просто, к таким простым (элементарным) множествам можно отнести гиперплоскость, полупространство, параллелепипед, неотрицательный ортант, шар и др. Если имеется некоторая совокупность простых выпуклых множеств $M_j \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, m$ и соответствующая совокупность операторов проектирования на них $\mathrm{Pr}_{M_j}(x)$, $j = 1, \ldots, m$ (они являются M_j-фейеровскими), то из этих элементарных проектирований можно конструировать (разными способами) более сложные фейеровские отображения относительно множества $M := \bigcap\limits_{j=1}^{m} M_j \neq \varnothing$.

Приведем базовые конструкции такого рода, однако ниже они будут даны с более общих позиций.

Итак, пусть $\varphi_j \in \mathcal{F}_{M_j}$, $j = 1, \ldots, m$ и $M := \bigcap\limits_{j=1}^{m} M_j \neq \varnothing$.

Утверждение 3. *Справедлива импликация*

$$(\varphi_j \in \mathcal{F}_{M_j}, \quad j = 1, \ldots, m) \implies \varphi^{\alpha}(x) := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(x) \in \mathcal{F}_M,$$

здесь $\alpha_j > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$.

Утверждение 4. *Если* $\sigma := (j_1, \dots, j_m)$ *— любое упорядочение индексов* $j = 1, \dots, m$, *то*

$$\varphi^{(\sigma)}(x) := \varphi_{j_1} \varphi_{j_2} \dots \varphi_{j_m}(x) \in \mathcal{F}_M.$$

З а м е ч а н и е 1. Если в этих утверждениях $\{\varphi_j(x)\}_1^m$ непрерывны, то $\varphi^{(\alpha)}(x)$ и $\varphi^{(\sigma)}(x)$ непрерывны; если же они замкнуты, то $\varphi^{\alpha}(x)$ и $\varphi^{(\sigma)}(x)$ также замкнуты. Следовательно, к последним можно применить утверждения 1 и 2 о сходимости процессов, ими порождаемых.

Рассмотрим еще одну конструкцию отображения $\varphi \in \mathcal{F}_M$, получаемого из $\{\varphi_j\}_1^m$. Пусть для множеств M_j заданы функции $d_j(x)$, обладающие свойством $d_j(y) = 0$ для $y \in M_j$ и $d_j(x) > 0$ для $x \notin M_j$. Будем считать эти функции выпуклыми. Введем $d(x) := \max\limits_{(j)} d_j(x)$ и $J(x) := \{j \mid d(x) = d_j(x)\}$ (эта ситуация копирует уже рассмотренные ситуации).

Введем отображение

$$\varphi(x) := \operatorname{conv}\{\varphi_{j_x}(x) \mid j_x \in J(x)\}. \tag{5}$$

Утверждение 5. *Отображение* (5) *является* M*-фейеровским, при этом если* $\{\varphi_j(x)\}_1^m$ *замкнуты, то отображение* $\varphi(x)$ *замкнуто.*

З а м е ч а н и е 2. В утверждениях 3–5 все множества M_j, $j = 1, \dots, m$, могут совпадать, при этом содержательность этих утверждений не утрачивается. Более того, эти частные утверждения подчеркивают в явном виде тот важный факт, что из всякой конечной совокупности M-фейеровских отображений можно строить новые отображения из $\mathcal{F}_M$ способами, зафиксированными в утверждениях 3–5. Из этих утверждений следует, что класс отображений $\mathcal{F}_M$ замкнут относительно выпуклой суммы любой конечной совокупности отображений из $\mathcal{F}_M$ и относительно любой их суперпозиции, т. е. $\mathcal{F}_M$ является своего рода выпуклой алгеброй.

3. Нестрогие сжатия

Нестрогая сжимаемость оператора $\varphi(\,\cdot\,) \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ означает

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le \|x - y\| \quad \forall\, x, y. \tag{6}$$

Если $\operatorname{Fix}\varphi(\,\cdot\,) =: M \ne \varnothing$, то

$$\|\varphi(x) - y\| \le \|x - y\| \quad \forall\, x\ \forall\, y \in M,$$

т. е. $\varphi(x)$ является слабо фейеровским.

Утверждение 6. *Если* $\varphi(\,\cdot\,)$ *— произвольное слабо* M*-фейеровское отображение, то*

$$\varphi_\alpha(x) := \alpha\,\varphi(x) + (1 - \alpha)x \in \mathcal{F}_M, \qquad \alpha \in (0, 1).$$

Хорошо известен факт:
если M *— произвольное выпуклое замкнутое множество из* $\mathbb{R}^n$ *и* $\varphi(x)$ *— оператор проектирования на* M, *т. е.*

$$\varphi(x) := \operatorname{Pr}_M(x),$$

то $\varphi(x)$ *удовлетворяет соотношению* (6).

Зададимся совокупностью выпуклых замкнутых множеств $\{M_j\}_1^m$. Положим $M := \bigcap\limits_{(j)} M_j$. Множество M может быть как пустым, так и отличным от пустого множества.

Утверждение 7. *Если в рассматриваемой ситуации $M = \varnothing$, то оператор*

$$\varphi(x) := \sum_{(j)} \alpha_j \operatorname{Pr}_{M_j}(x)$$

является нерасширяющим, т. е. выполнимо (6). *Если же $M \neq \varnothing$, то $\varphi(x) \in \mathcal{F}_M$.*

Сделаем некоторые уточнения на случай системы линейных неравенств

$$l_j(x) := (a_j, x) - b_j \leq 0, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{7}$$

Будем предполагать $\|a_j\| \neq 0$, $\forall\, j$.

Положим $Q_j := \{x \mid l_j(x) \leq 0\}$. Множества Q_j — это полупространства пространства $\mathbb{R}^n$, пересечение которых называется *выпуклым полиэдральным множеством*, или просто *выпуклым многогранником.*

Проектирование произвольной точки x на многогранник Q_j задается аналитической формулой

$$\operatorname{Pr}_{Q_j}(x) = x - \frac{l_j^+(x)}{\|a_j\|^2}\, a_j, \qquad j = 1, \dots, m.$$

В эти соотношения внесем коэффициенты релаксации $\lambda_j \in (0, 2)$, $\forall\, j$. Положим

$$\varphi_j^{\lambda_j}(x) := \operatorname{Pr}_{Q_j}^{\lambda_j}(x) = x - \lambda_j \frac{l_j^+(x)}{\|a_j\|^2}\, a_j \quad \forall\, j$$

и

$$\tilde{\varphi}(x) := \sum_{(j)} \alpha_j \operatorname{Pr}_{Q_j}^{\lambda_j}(x) \qquad \forall\, j:\ \alpha_j > 0,\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1.$$

В обновленной ситуации (за счет внесения релаксационных коэффициентов $\{\lambda_j\}_1^m$) утверждения 6 и 7 остаются справедливыми.

4. Потенциально фейеровское сжатие

Под этим термином понимается следующая ситуация. Пусть $\varphi(\,\cdot\,) \in \mathcal{F}_M$, при этом $M \neq \varnothing$. Тогда существует достаточно много способов построения оператора $\varphi(x)$ при той или иной конкретизации множества M.

Пусть, например, M задается системой линейных неравенств (7), при этом $M = \varnothing$, т. е. система (7) несовместна. В этом случае говорить о M-фейеровости построенного оператора не приходится. Тем не менее этому оператору можно придать другой смысл, а именно:

$$\exists\, M^* \neq \varnothing:\ \varphi(\,\cdot\,) \in \mathcal{F}_{M^*}. \tag{$*$}$$

Запишем

$$\varphi_\alpha(x) := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Big[x - \lambda \frac{l_j^+(x)}{\|a_j\|^2}\, a_j\Big], \quad \alpha_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1, \quad \lambda \in (0, 2). \tag{8}$$

Это соотношение можно переписать в форме

$$\varphi_\alpha(x) = x - \frac{\lambda}{2}\, \triangledown \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \frac{l_j^{+^2}(x)}{\|a_j\|^2}}_{d_\alpha(x)} = x - \frac{\lambda}{2}\, \triangledown\, d_\alpha(x),$$

где $\bigtriangledown$ — символ градиента. Если $\alpha_j = \|a_j\|^2/\delta$ при $\delta = \sum_{j=1}^{m} \|a_j\|^2$, то

$$\varphi_\alpha(x) = x - \frac{\lambda}{2\,\delta} \bigtriangledown d^*(x), \tag{9}$$

где $d^*(x) := \sum_{j=1}^{m} l_j^{+^2}(x)$.

Из (9) вытекает

$$\operatorname{Fix}\varphi_\alpha(x) = \operatorname{Arg}\min_{(x)} d^*(x) \neq \varnothing.$$

Так как $\varphi_\alpha(x)$ — оператор нестрогого сжатия, то

$$\operatorname{Fix}\varphi_\alpha(x) =: M^* \in \mathcal{F}_{M^*}. \tag{10}$$

З а м е ч а н и е 3 к соотношению (10). В соотношениях (8)–(10) параметры $\{\alpha_j\}_j$ могут выбираться по-разному, в частности, они могут быть зависимыми от x, а именно, можно положить $\alpha_j(x) = l_j^+(x)/\delta(x)$, $\delta(x) = \sum_{j=1}^m l_j^+(x)$.

Сказанное выше можно переписать применительно к конечной системе выпуклых неравенств

$$f_j(x) \leq 0, \qquad j = 1, \ldots, m \tag{11}$$

с множеством решений N. Система (11) может быть как совместной ($N \neq \varnothing$), так и несовместной ($N = \varnothing$).

В предположении дифференцируемости функций $\{f_j(x)\}$ и $N \neq \varnothing$ оператор

$$\varphi_\alpha(x) := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Big[x - \lambda \frac{f_j^+(x)}{\| \bigtriangledown f_j(x)\|^2} \bigtriangledown f_j(x)\Big], \quad \alpha_j > 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1 \tag{12}$$

является непрерывным и N-фейеровским. Отсюда следует

$$\{\varphi_\alpha^k(x_0)\}_k \to \bar{x} \in N.$$

Рассмотрим ситуацию, когда $N = \varnothing$, т. е. система (11) несовместна. При определенных условиях можно получить аналог утверждения $(*)$, а именно:

$$\exists\, N^* \neq \varnothing: \ \varphi_{\alpha^*}(\,\cdot\,) \in \mathcal{F}_{N^*}. \tag{13}$$

В (13) под α^* понимается специальный выбор параметров $\{\alpha_j\}_j$, обеспечивающих соотношения (13).

Перечислим некоторые требования к системе (11) и параметрам $\{\alpha_j\}_j$:

(1) дифференцируемость выпуклых функций $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ и их корректность (корректность понимается в смысле: если при некоторых положительных числах $\{\gamma_j\}_j$ система $f_j(x) \leq \gamma_j$, $j = 1, \ldots, m$, совместна, то множество ее решений является ограниченным);

(2) $\alpha_j = \alpha_j(x) := \| \bigtriangledown f_j(x)\|^2/\delta^*(x)$, $\delta^*(x) := \sum_{(j)} \| \bigtriangledown f_j(x)\|^2$;

(3) свойство нерастяжимости операторов $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, m$, т. е.

$$\|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)\| \leq \|x - y\| \qquad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

В принятых предположениях и обозначениях оператор (12) может быть несколько преобразован, а именно:

$$\varphi^*(x) := \varphi_{\alpha(x)}(x)\,\Big|_{\alpha(x):=[\alpha_1(x),\ldots,\alpha_m(x)]} = x - \frac{\lambda}{2\,\delta^*(x)} \bigtriangledown \underbrace{\sum_{j=1}^{m} f_j^{+^2}(x)}_{d^*(x)}.$$

Положим $N^* := \operatorname{Arg}\min\limits_{(x)} d^*(x)$. Тогда

$$N^*(x) \neq \varnothing, \qquad \varphi^*(\,\cdot\,) \in \mathcal{F}_{N^*},$$

что и соответствует соотношению $(*)$.

5. Фейеровское сжатие с дополнительным требованием

Под названным сжатием понимается выполнимость как сжатия фейеровского, так и нерасширяющего сжатия. Запишем эти требования:

$$\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\| \qquad \forall\, y \in M \qquad \forall\, x \notin M, \tag{14_1}$$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y| \qquad \forall\, x,\, y. \tag{14_2}$$

Соотношения $(14)_1$ и $(14)_2$ не являются обязательно независимыми. Для некоторых $\varphi(\,\cdot\,)$ имеют место как $(14)_1$, так и $(14)_2$. Приведем пример. Пусть M — выпуклое замкнутое множество из $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x) := \operatorname{Pr}_M(x)$. Для данного $\varphi(\,\cdot\,)$ выполняются как $(14)_1$, так и $(14)_2$.

Совокупное использование условий $(14)_1$ и $(14)_2$ позволяет рассматривать суперпозицию M_i-фейеровских операторов в предположении $\bigcap_{(i)} M_i = \varnothing$, а также рассматривать замкнутые циклы для несовместных систем выпуклых неравенств.

П р и м е ч а н и е. Некоторые аналоги приведенных здесь теорем были рассмотрены в книгах [3, 4].

6. Сжимающие отображения с равномерными сжатиями

Пусть $\varphi(\cdot) \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ — оператор, удовлетворяющий *принципу сжатых отображений*, т. е.

$$\|\varphi(v) - \varphi(w)\| \leq \alpha\, \|v - w\|, \qquad \alpha \in (0, 1),$$

v и w — из $\mathbb{R}^n$. Оператор $\varphi(x)$ будем называть оператором *равномерного сжатия*, кратко, РС-оператором. РС-оператор $\varphi(\cdot)$ имеет одну неподвижную точку, пусть это $\tilde{v}$. Оператор $\varphi(v)$ удовлетворяет определению M-фейеровского оператора при $M = \{\tilde{v}\}$:

$$\|\varphi(v) - \varphi(\tilde{v})\| < \|v - \tilde{v}\| \qquad \forall\, v \neq \tilde{v}.$$

Понятно, что $\{\varphi^t(x_0)\}_t \to \tilde{v}$. Можно вопрос о вычислении $\tilde{v} = \operatorname{Fix}\varphi(x)$ расширить до поиска замкнутого цикла $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_m, \tilde{x}_1\}$ применительно к конечной совокупности РС-операторов $\{\varphi_i(\cdot)\}_1^m$.

Характеристическое свойство каждого из $\varphi_i(\cdot)$ состоит в выполнимости соотношения

$$\|\varphi_i(v) - \varphi_i(w)\| \leq \alpha_i\, \|v - w\|, \qquad \alpha_i \in (0, 1),$$

$i = 1, \ldots, m$. Это обеспечивает существование и единственность неподвижной точки $\tilde{v}_i$ $\forall\, i$. Синтез операторов $\{\varphi_i\}_i$ можно представить в виде суперпозиций $\varphi(x) := \varphi_m \varphi_{m-1} \ldots \varphi_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Другим форматом этого представления является

$$Q(\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{x}) := [\varphi_1(x_m), \varphi_2(x_1), \ldots, \varphi_m(x_{m-1})]. \tag{15}$$

Оператор (15) является оператором сжатия при $0 < \beta = \max\limits_{(i)} \alpha_i < 1$.

Поскольку $Q(\cdot)$ — РС-оператор, то $\operatorname{Fix} Q(\cdot)$ состоит из единственной точки $\bar{x} := [\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m]$, реализующей замкнутый цикл, соответствующий упорядоченной последовательности операторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Сам же цикл $\bar{x}$ может отыскиваться в силу итерационного процесса

$$\{Q^t(z_0)\}_t \to \bar{x} \in \operatorname{Fix} Q(\cdot).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
2. **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 228 с.
3. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “ Екатеринбург”, 1999. 312 с.
4. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа (теория и приложения). М.; Ижевск: НИЦ “Регуляр. и хаотич. динамика”, 2005. 199 с.

Еремин Иван Иванович
д-р физ.-мат. наук
академик РАН
главный науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: ermii@imm.uran.ru

Поступила 02.03.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517.518.13

АСИМПТОТИКА ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СИНГУЛЯРНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА[1]

А. М. Ильин, А. А. Ершов

Построена асимптотика некоторых двумерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра. Указан алгоритм построения и приведены два примера.

Ключевые слова: двумерный интеграл, малый параметр, асимптотическое разложение.

A. M. Il'in, A. A. Ershov. Asymptotics of two-dimensional integrals depending singularly on a small parameter.

The asymptotics is constructed for some two-dimensional integrals depending singularly on a small parameter. The construction algorithm is described and two examples are given.

Keywords: two-dimensional integral, small parameter, asymptotic expansion.

1. Введение

Хорошо известна задача нахождения асимптотики интеграла, зависящего от параметра. В качестве примера подобных интегралов можно привести хорошо изученные интегралы вида $\int_0^1 f(x)e^{\lambda S(x)}dx$, где λ — большой положительный параметр [1]. Асимптотика различных интегралов описана в ряде работ (например, [2, 3]). Здесь рассматриваются малоизученные до сих пор интегралы вида $\int \Psi(x,\varepsilon)dx$ от функции, которая регулярно зависит от малого параметра ε всюду, кроме некоторого множества (одной или нескольких точек, многообразий и т.п.). Однако при $\varepsilon = 0$ интеграл расходится, и его асимптотика имеет довольно сложный характер.

В настоящей статье находится асимптотическое разложение сингулярных интегралов вида $\iint\limits_{\omega} \dfrac{dxdy}{\varepsilon^2 + U(x,y)}$, где ω — некоторая окрестность критической точки (0,0), в которой неотрицательная функция $U(x,y)$ и ее частные производные обращаются в нуль. В статье рассмотрен не исследованный ранее случай, когда функция $U(x,y)$ обращается в нуль на n пересекающихся линиях и имеет специальный вид. Случаи, когда $U(x,y)$ равна нулю в точке или на одной линии, более просты для рассмотрения [4, гл. 7, § 30].

2. Построение асимптотики

Рассмотрим интеграл $\displaystyle\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2} \frac{dydx}{\varepsilon^2 + U(x,y)}$, где окрестность $[-\delta_1,\delta_1]\times[-\delta_2,\delta_2]$ достаточно мала, $U(x,y) = \prod_{k=1}^{n}(y-h_k(x))^2 G^2(x,y)$, $G(x,y)$ — гладкая функция, не обращающаяся в нуль, а функции $h_k(x)$ — это достаточно гладкие функции, удовлетворяющие следующим условиям для всех $k = \overline{1,n}$:

(1) $h_k(0) = 0$;

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00260,09-01-00530), Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2215.2008.1) и INTAS 05-7921.

(2) $h_i(x) \neq h_j(x)$ при $x \neq 0$ и $i \neq j$;

(3) $h_i'(0) \neq h_j'(0)$ при $i \neq j$.

Возможный вид нулевых линий функции $U(x,y)$ представлен на рис. 1.

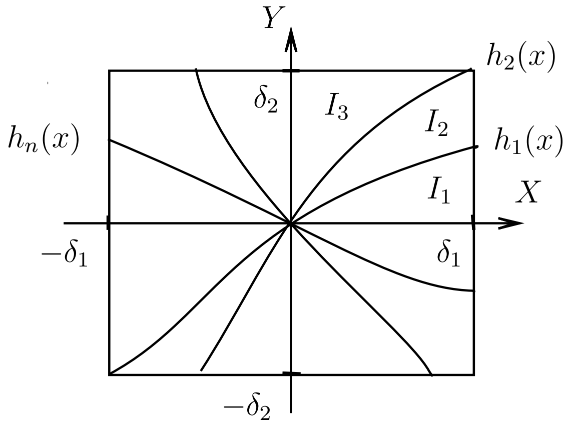


Рис. 1.

Предложенный ниже алгоритм без изменений можно использовать для интегралов вида $\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2}\frac{f(x,y)dydx}{\varepsilon^2+U(x,y)}$, где $f(x,y)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

Идея метода состоит в том, что весь интеграл разбивается на секторы, в каждом из которых выделяются свои особенности. Обозначим интегралы по i-му сектору буквами I_i, а по всему прямоугольнику — буквой I. Тогда для случая, изображенного на рис. 1, можно разбить весь интеграл на следующие слагаемые:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots = \int\limits_0^{\delta_1}\left(\int\limits_0^{h_1(x)}\frac{dy}{\varepsilon^2+\prod\limits_{i=1}^{n}(y-h_i(x))^2G^2(x,y)}\right)dx$$

$$+\int\limits_0^{\delta_1}\left(\int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)}\frac{dy}{\varepsilon^2+\prod\limits_{i=1}^{n}(y-h_i(x))^2G^2(x,y)}\right)dx+\int\limits_0^{\delta_2}\left(\int\limits_0^{h_2^{-1}(y)}\frac{dx}{\varepsilon^2+\prod\limits_{i=1}^{n}(y-h_i(x))^2G^2(x,y)}\right)dy+\ldots.$$

Каждый из этих интегралов можно привести к некоторому стандартному виду. Для этого рассмотрим функции $H_i(x)=h_i(x)/x$. Заметим, что все они гладкие на $[-\delta_1,\delta_1]$.

$$I_1 = \int\limits_0^{\delta_1}dx\int\limits_0^{h_1(x)}\frac{dy}{\varepsilon^2+\prod\limits_{i=1}^{n}(y-h_i(x))^2G^2(x,y)} = [y = h_1(x)z]$$

$$=\int\limits_0^{\delta_1}dx\int\limits_0^{1}\frac{h_1(x)dz}{\varepsilon^2+(z-1)^2h_1^2(x)\prod\limits_{i=2}^{n}(zh_1(x)-h_i(x))^2G^2(x,h_1(x)z)}$$

$$=\int\limits_0^{\delta_1}dx\int\limits_0^{1}\frac{xH_1(x)dz}{\varepsilon^2+(z-1)^2x^{2n}H_1^2(x)\prod\limits_{i=2}^{n}(zH_1(x)-H_i(x))^2G^2(x,h_1(x)z)} = [z = 1-t]$$

$$
= \int_0^{\delta_1} dx \int_0^1 \frac{xH_1(x)dt}{\varepsilon^2 + t^2x^{2n}H_1^2(x)\prod\limits_{i=2}^{n}(H_i(x)-(1-t)H_1(x))^2G^2(x,h_1(x)(1-t))}
$$

$$
= \int_0^{\delta_1} dx \int_0^1 \frac{xH_1(x)dt}{\varepsilon^2 + t^2x^{2n}g_1^2(x,t)},
$$

где $g_1(x,t) = H_1(x)\prod_{i=2}^{n}(H_i(x)-(1-t)H_1(x))G(x,h_1(x)(1-t))$ — гладкая, не обращающаяся в нуль функция от x и t.

Для интегралов по некоторым другим секторам (например, в случае, когда внутренний интеграл берется не от 0 до $h_1(x)$, а от $h_1(x)$ до $h_2(x)$), интеграл I_2 имеет вид

$$
I_2 = \int_0^{\delta_1} dx \int_0^1 \frac{x(H_2(x)-H_1(x))dt}{\varepsilon^2 + t^2(1-t)^2x^{2n}g_2^2(x,t)}.
$$

Подобным образом все интегралы первого типа приводятся к интегралу вида

$$
J = \int_0^{\delta} dx \int_0^1 \frac{xf_i(x,y)dy}{\varepsilon^2 + x^{2n}y^2g_i^2(x,y)},
$$

где f_i, g_i — гладкие, а g_i — не обращающиеся в нуль функции. Проведем еще одно преобразование этих интегралов.

$$
\int_0^{\delta} dx \int_0^1 \frac{xf(x)dy}{\varepsilon^2 + y^2x^{2n}g^2(x,y)} = [\eta = yg(x,y) = F(x,y)] = \int_0^{\delta} dx \int_0^{g(x,1)} \frac{xf(x)d\eta}{F'_y(x,F^{-1}(x,\eta))(\varepsilon^2+\eta^2x^{2n})}
$$

$$
= \int_0^{\delta} dx \int_0^{g(x,1)} \frac{x\Psi_1(x,\eta)d\eta}{\varepsilon^2+\eta^2x^{2n}} = [\eta = g(x,1)t] = \int_0^{\delta} dx \int_0^1 \frac{x\Psi_1(x,g(x,1)t)g(x,1)dt}{\varepsilon^2+x^{2n}g^2(x,1)t^2}
$$

$$
= \int_0^{\delta} dx \int_0^1 \frac{x\Psi_2(x,t)dt}{\varepsilon^2+x^{2n}g^2(x,1)t^2} = [\xi = x\sqrt[2n]{g^2(x,1)}] = \int_0^{\beta} d\xi \int_0^1 \frac{\xi\Psi_3(\xi,t)dt}{\varepsilon^2+\xi^{2n}t^2},
$$

где $\beta = \delta\sqrt[2n]{g^2(\delta,1)}$. После замены $\xi = \theta\delta\sqrt[2n]{g^2(\delta,1)}$ получаем равенство

$$
J = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\theta\varphi(\theta,t)dtd\theta}{\mu^2+\theta^{2n}t^2}, \qquad \text{где } \mu = \frac{\varepsilon}{\delta^n|g(\delta,1)|}. \tag{1}
$$

Так как рассматривается малая окрестность начала координат, то при достаточно малых δ_1 и δ_2 все приведенные замены переменных допустимы и сохраняют гладкость подынтегральных функций.

В интегралах второго типа отрезок интегрирования по t разбивается на два интервала, в каждом из которых монотонная замена переменной приводит интеграл I_2 к сумме интегралов вида (1). При этом функция $\varphi(\theta,t)$ дифференцируема всюду при $0 \le t < 1$ и суммируема.

Теперь для получения асимптотического разложения надо найти асимптотику интегралов вида $\int_0^1\int_0^1 \dfrac{x\varphi(x,y)dydx}{\mu^2+x^{2n}y^2}$, где $\varphi(x,y)$ — достаточно гладкая при $0 \le y < 1$ и суммируемая функция, а μ — малый параметр. Эту асимптотику можно найти методом вычитания особенностей. Для этого представим функцию $\varphi(x,y)$ в виде следующей суммы:

$$\varphi(x,y)=\varphi(x,0)+y\varphi_y(x,0)+\frac{y^2}{2}\psi(x,y)=\varphi(0,0)+x\varphi_x(0,0)+\ldots+x^{2n-1}\varphi_1(x)$$

$$+\,y\big[\varphi_y(0,0)+x\varphi_{xy}(0,0)+\ldots+x^{2n-1}\varphi_2(x)\big]+y^2\big[\psi(0,y)+x\psi_x(0,y)+\ldots+x^{2n-1}\tilde\varphi(x,y)\big], \quad (2)$$

где

$$\psi(x,y)=y^{-2}\big(\varphi(x,y)-\varphi(x,0)-y\varphi_y(x,0)\big),$$

$$\varphi_1(x)=x^{-(2n-1)}\Big(\varphi(x,0)-\varphi(0,0)-x\varphi_x(0,0)-\ldots-\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}\varphi_{x\ldots x}(0,0)\Big) \quad \text{и т. д.}$$

При этом внутренние интегралы в интегралах вида $\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{y^k\widetilde{f}(x)dy}{\mu^2+x^{2n}y^2}$ легко берутся по y, тем самым сводятся к одномерным. Одномерные интегралы можно разложить по малому параметру, используя тот же метод вычитания особенностей, либо применить метод введения дополнительного параметра [4]. Например,

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x^4\varphi_1(x)dxdy}{\mu^2+x^4y^2}=\int_0^1\varphi_1(x)dx\int_0^1\frac{dy}{\frac{\mu^2}{x^4}+y^2}=\int_0^1\varphi_1(x)\frac{x^2}{\mu}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\mu}dx$$

$$=\frac{1}{\mu}\int_0^1 x^2\varphi_1(x)\Big(\frac{\pi}{2}-O\Big(\frac{\mu}{x^2}\Big)\Big)=\frac{\pi}{2\mu}\int_0^1 x^2\varphi_1(x)dx+O(1).$$

Интеграл, соответствующий последнему слагаемому равенства (2), можно разложить следующим способом:

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x^{2n}y^2\tilde\varphi(x,y)dydx}{\varepsilon^2+x^{2n}y^2}=\int_0^1\int_0^1\tilde\varphi(x,y)dydx-\varepsilon^2\int_0^1\int_0^1\frac{\tilde\varphi(x,y)dydx}{\varepsilon^2+x^{2n}y^2},$$

а для последнего слагаемого можно применить те же самые действия, что и для интеграла $\int_0^1\int_0^1\frac{x\varphi(x,y)dydx}{\varepsilon^2+x^{2n}y^2}$.

В наиболее трудном случае

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x^kf(y)dydx}{\varepsilon^2+x^{2n}y^2}=\int_0^1\frac{f(y)}{y^2}\int_0^1\frac{x^kdx}{x^{2n}+\frac{\varepsilon^2}{y^2}}dy.$$

Для значения подынтегральной функции справедливо следующее равенство:

$$\frac{x^{2n}}{x^{2n}+\frac{\varepsilon^2}{y^2}}=x^{k-2}+C_1x^{k-3}+\ldots+C_{k-2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{A_jx+B_j}{x^2+a_jx+b_j}\,.$$

Все слагаемые такой суммы легко интегрируются по x, и тем самым задача сводится к асимптотике одномерного интеграла.

Если таким образом разложить каждое слагаемое, то можно получить бесконечный асимптотический ряд. Более подробно построение асимптотики продемонстрируем на следующих конкретных примерах.

3. Примеры

Рассмотрим пример реализации приведенного в предыдущем пункте алгоритма и пример нахождения асимптотики для более общего случая.

П р и м е р 1. В этом примере рассмотрим разложение интеграла, полностью соответствующего приведенным в начале статьи требованиям:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{dydx}{\varepsilon^2 + (y-x)^2(y-2x)^2}\,.$$

Нулевые линии знаменателя подынтегральной функции при $\varepsilon = 0$ изображены на рис. 2.

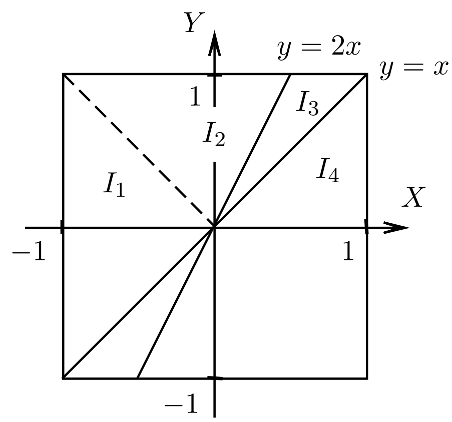


Рис. 2.

Ввиду центральной симметрии подынтегральной функции относительно начала координат достаточно найти асимптотику интеграла по верхней половине квадрата, а затем удвоить ответ. Этот интеграл, в свою очередь, разобьем на четыре интеграла. Таким образом, $I = 2(I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$, где интегралы берутся по следующим областям: $\{-1 \leqslant x \leqslant 0, 0 \leqslant y \leqslant -x\}$, $\{0 \leqslant y \leqslant 1, -y \leqslant x \leqslant y/2\}$, $\{0 \leqslant y \leqslant 1, y/2 \leqslant x \leqslant y\}$ и $\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

$$I_1 = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{-x} \frac{dy}{\varepsilon^2 + (y-x)^2(y-2x)^2} = [y = -xz] = -\int_{-1}^{0} xdx \int_{0}^{1} \frac{dz}{\varepsilon^2 + x^4(1+z)^2(2+z)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{1}{\varepsilon(z+1)(z+2)} \operatorname{arctg} \frac{(1+z)(2+z)}{\varepsilon} dz$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{0}^{1} \frac{1}{(z+1)(z+2)}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{(z+1)(z+2)} + \frac{\varepsilon^3}{3(z+1)^3(z+2)^3} + O(\varepsilon^5)\Big) dz$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon}\bigg(\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{3} - \varepsilon\Big(\frac{2}{3} + \ln\frac{9}{16}\Big) + \frac{1}{3}\varepsilon^3\Big(12\ln 2 - 6\ln 3 - \frac{61}{36}\Big) + O(\varepsilon^5)\bigg). \tag{3}$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{\frac{y}{2}} \frac{dx}{\varepsilon^2 + (y-x)^2(y-2x)^2} = [x = yz]$$

$$= \int_{0}^{1} dy \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{ydz}{\varepsilon^2 + y^4(z-1)^2(1-2z)^2} = \Big[t = (1-z)(1-2z), z = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{1+8t}}{4}, dz = \frac{-dt}{\sqrt{1+8t}}, u = y^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^6 \frac{dt}{\sqrt{1+8t}}\int\limits_0^1 \frac{du}{\varepsilon^2+u^2t^2} = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^6 \frac{1}{t\sqrt{1+8t}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}dt. \qquad (4)$$

$$I_3 = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} \frac{dx}{\varepsilon^2+(y-x)^2(y-2x)^2} = \Big[x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}yt\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ydy\int\limits_0^1 \frac{dt}{\varepsilon^2+\frac{1}{4}y^4t^2(t-1)^2} = \left[\xi = t(1-t), t = \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\xi}, dt = \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1}{4}-\xi}}, \eta = \frac{1}{2}y^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 d\eta\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\xi(\varepsilon^2+\eta^2\xi^2)}})d\xi = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\varepsilon\xi\sqrt{\frac{1}{4}-\xi}}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\varepsilon}d\xi. \qquad (5)$$

$$I_4 = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x \frac{dy}{\varepsilon^2+(y-x)^2(y-2x)^2} = [y = x - tx]$$

$$= \int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^x \frac{dt}{\varepsilon^2+x^4t^2(t+1)^2} = \Big[\xi = t(1+t), t = -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\xi}, dt = \frac{d\xi}{\sqrt{1+4\xi}}, \eta = \frac{1}{2}x^2\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 d\eta\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+4\xi}(\varepsilon^2+\eta^2\xi^2)}d\xi = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 \frac{1}{\varepsilon\xi\sqrt{1+4\xi}}\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\varepsilon}d\xi. \qquad (6)$$

Таким образом, интегралы I_2, I_3 и I_4 приводятся к виду

$$J = \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)}{t}\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}dt, \qquad (7)$$

где $\varphi(t)$ — интегрируемая функция, бесконечно дифференцируемая в окрестности нуля.

Найдем асимптотику интеграла (7), последовательно применяя метод устранения особенностей аналогично тому, как это делается в [4, гл.7,§ 30].

$$J = \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(0)}{t}\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}dt + \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}dt$$

$$= \varphi(0)\Big(\frac{\pi}{2}\ln(\frac{\alpha}{\varepsilon}) + O(\varepsilon)\Big) + \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt + R_1,$$

где $R_1 = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\Big(\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}-\frac{\pi}{2}\Big)dt$, $\quad |R_1| \leqslant M\int\limits_0^\alpha \Big|\Big(\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}-\frac{\pi}{2}\Big)\Big|dt \leqslant M_1\int\limits_0^{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dt + M_2\int\limits_{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}^\alpha \frac{\varepsilon}{t}dt = O(\varepsilon|\ln\varepsilon|)$.

Следовательно, $J = J_1 + o(1)$, где

$$J_1 = \varphi(0)\frac{\pi}{2}\ln\Big(\frac{\alpha}{\varepsilon}\Big) + \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt. \tag{8}$$

Далее можно уточнить асимптотику следующим образом:

$$J = \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(0)}{t}\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}dt + \int\limits_0^\alpha \varphi'(0)\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}dt + \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)}{t}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{t}\Big)dt + R_2,$$

где $R_2 = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)}{t}\Big(\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}-\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{t}\Big)dt$, $|R_2| \leqslant M\displaystyle\int\limits_0^\alpha t\Big|\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}-\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{t}\Big|dt \leqslant$ $M_1\displaystyle\int\limits_0^\varepsilon (t+\varepsilon)dt + M_2\int\limits_\varepsilon^\alpha t\frac{\varepsilon^3}{t^3}dt = O(\varepsilon^2)$.

Так как по формуле (8) уже получено выражение J с точностью до $o(1)$, то теперь достаточно выяснить лишь дополнительные члены порядка $o(1)$.

Следовательно, $J = J_2 + O(\varepsilon^2)$, где

$$J_2 = J_1 + \varphi(0)\frac{\varepsilon}{\alpha} - \varepsilon\varphi'(0)\Big(\ln\frac{\alpha}{\varepsilon}+1\Big) - \varepsilon\int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)}{t^2}dt.$$

Дальнейшее уточнение асимптотики интеграла (7) проводится аналогичным образом:

$$J = \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(0)}{t}\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}dt + \int\limits_0^\alpha \varphi'(0)\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}dt + \int\limits_0^\alpha t\frac{\varphi''(0)}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}dt$$

$$+\int\limits_0^\alpha t^2\frac{\varphi'''(0)}{6}\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}dt + \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)-\dfrac{t^2}{2}\varphi''(0)-\dfrac{t^3}{6}\varphi'''(0)}{t}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{t}+\frac{\varepsilon^3}{3t^3}\Big)dt + R_3,$$

где $R_3 = \displaystyle\int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)-\dfrac{t^2}{2}\varphi''(0)-\dfrac{t^3}{6}\varphi'''(0)}{t}\Big(\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}-\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{t}-\frac{\varepsilon^3}{3t^3}\Big)dt$, $|R_3| \leqslant$ $M\displaystyle\int\limits_0^\alpha t^3\Big|\operatorname{arctg}\frac{t}{\varepsilon}-\frac{\pi}{2}+\frac{\varepsilon}{t}-\frac{\varepsilon^3}{3t^3}\Big|dt \leqslant M_1\int\limits_0^\varepsilon (t^3+\varepsilon^3)dt + M_2\int\limits_\varepsilon^\alpha t^3\frac{\varepsilon^5}{t^5}dt = O(\varepsilon^4)$.

Следовательно,

$$J = J_2 + \varepsilon^2\varphi''(0)\frac{\pi}{8} + \varepsilon^3\Big(-\frac{\varphi(0)}{9\alpha^3}-\frac{\varphi'(0)}{6\alpha^2}-\frac{\varphi''(0)}{6\alpha}+\frac{\varphi'''(0)}{18}\ln\Big(\frac{\alpha}{\varepsilon}\Big)$$

$$+\frac{1}{3}\int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)-\dfrac{t^2}{2}\varphi''(0)-\dfrac{t^3}{6}\varphi'''}{t^4}dt\Big) + O(\varepsilon^4).$$

Таким образом, окончательно выражение для (7) имеет следующий вид:

$$J = \varphi(0)\frac{\pi}{2}\ln\Big(\frac{\alpha}{\varepsilon}\Big) + \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt + \varphi(0)\frac{\varepsilon}{\alpha} - \varepsilon\varphi'(0)\Big(\ln\frac{\alpha}{\varepsilon}+1\Big)$$

$$-\varepsilon\int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)}{t^2}dt+\varepsilon^2\varphi''(0)\frac{\pi}{8}+\varepsilon^3\biggl(-\frac{\varphi(0)}{9\alpha^3}-\frac{\varphi'(0)}{6\alpha^2}-\frac{\varphi''(0)}{6\alpha}+\frac{\varphi'''(0)}{18}\ln\Bigl(\frac{\alpha}{\varepsilon}\Bigr)$$

$$+\frac{1}{3}\int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(t)-\varphi(0)-t\varphi'(0)-\dfrac{t^2}{2}\varphi''(0)-\dfrac{t^3}{6}\varphi'''(0)}{t^4}dt\biggr)+O(\varepsilon^4). \tag{9}$$

Если учесть значения функций $\varphi_k(t)$ и α_k в интегралах J_2, J_3, J_4 $\bigl(\varphi_2(t)=1/(2\sqrt{1+8t})$, $\alpha_2=6$, $\varphi_3(t)=1/\sqrt{1-8t}$, $\alpha_3=1/8$, $\varphi_4(t)=1/(2\sqrt{1+4t})$, $\alpha_4=2\bigr)$, вычислить интегралы в формуле (9) , то из соотношений (3)–(7) следует асимптотическая формула

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dydx}{\varepsilon^2+(y-x)^2(y-2x)^2}=\frac{2\pi}{\varepsilon}\ln\Bigl(\frac{1}{2\varepsilon}\Bigr)+\frac{4}{3}-2\ln\Bigl(\frac{1}{2\varepsilon}\Bigr)+\varepsilon\frac{39\pi}{2}$$

$$+\varepsilon^2\biggl(\frac{140}{3}\ln\Bigl(\frac{1}{\varepsilon}\Bigr)-\frac{166}{3}\ln 3-1136\ln 2-\frac{8071}{243}\biggr)+O(\varepsilon^3).$$

П р и м е р 2. Рассмотрим интеграл $I=\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dydx}{\varepsilon^2+y^2(y-x^2)^2}$.

Этот случай усложняется тем, что в начале координат происходит касание высокого порядка нулевых линий знаменателя при $\varepsilon\to 0$. Однако на примере этого интеграла покажем, что можно построить асимптотическое разложение интеграла и в этом случае.

Чтобы найти асимптотику интеграла, представим его в виде суммы интегралов по секторам.

$$I=2(I_1+I_2+I_3+I_4)=2\biggl(\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}\frac{dy}{\varepsilon^2+y^2(y-x^2)^2}+\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}}\frac{dx}{\varepsilon^2+y^2(y-x^2)^2}$$

$$+\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-x^2}^{0}\frac{dy}{\varepsilon^2+y^2(y-x^2)^2}+\int\limits_{-1}^{0} dy\int\limits_0^{\sqrt{-y}}\frac{dx}{\varepsilon^2+y^2(y-x^2)^2}\biggr).$$

$$I_1=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}\frac{dy}{\varepsilon^2+y^2(y-x^2)^2}=[y=x^2z]=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\frac{x^2dz}{\varepsilon^2+x^8z^2(z-1)^2}$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\frac12}\frac{x^2dz}{\varepsilon^2+x^8z^2(z-1)^2}+\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\frac12}^{1}\frac{x^2dz}{\varepsilon^2+x^8z^2(z-1)^2}=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\frac12}\frac{x^2dz}{\varepsilon^2+x^8z^2(z-1)^2}$$

$$=[z(1-z)=u]=2\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\frac14}\frac{x^2du}{(\varepsilon^2+x^8u^2)\sqrt{1-4u}}\,.$$

$$I_2=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}}\frac{dx}{\varepsilon^2+y^2(y-x^2)^2}=[x=\sqrt{y}z]=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1\frac{\sqrt{y}dz}{\varepsilon^2+y^4(1-z)^2(1+z)^2}=[1-z=t]$$

$$=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1\frac{\sqrt{y}dt}{\varepsilon^2+y^4t^2(2-t)^2}=[\sqrt{y}=\eta]=2\int\limits_0^1 d\eta\int\limits_0^1\frac{\eta^2dt}{\varepsilon^2+\eta^8t^2(2-t)^2}=[t(2-t)=\xi]$$

$$
= \int\limits_0^1 d\eta \int\limits_0^1 \frac{\eta^2 d\xi}{(\varepsilon^2 + \eta^8\xi^2)\sqrt{1-\xi}}\,.
$$

$$
I_3 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x^2}^0 \frac{dy}{\varepsilon^2 + y^2(y-x^2)^2} = [y = -x^2 z] = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2 dz}{\varepsilon^2 + x^8 z^2 (z+1)^2} = [z(z+1) = t]
$$

$$
= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \frac{x^2 dt}{(\varepsilon^2 + x^8 t^2)\sqrt{1+4t}}\,.
$$

Таким образом, интегралы I_1, I_2 и I_3 приводятся к виду $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^\alpha \frac{x^2\varphi(y)dy}{\varepsilon^2 + x^8y^2}$, где $\varphi(y)$ — интегрируемая функция, бесконечно дифференцируемая в нуле.

Функцию $\varphi(y)$ можно представить в виде суммы $\varphi(0) + y\varphi'(0) + y^2\psi(y)$, где $\psi(y) = \bigl(\varphi(y) - \varphi(0) - y\varphi'(0)\bigr)/(y^2)$. Отсюда

$$
\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^\alpha \frac{x^2\varphi(y)dy}{\varepsilon^2 + x^8y^2} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^\alpha \frac{x^2\varphi(0)dy}{\varepsilon^2 + x^8y^2} + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^\alpha \frac{x^2 y\varphi'(0)dy}{\varepsilon^2 + x^8y^2} + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^\alpha \frac{x^2 y^2\psi(y)dy}{\varepsilon^2 + x^8y^2}\,.
$$

Разложим по степеням ε каждое слагаемое.

$$
\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^\alpha \frac{x^2\varphi(0)dy}{\varepsilon^2 + x^8y^2} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^6} \int\limits_0^\alpha \frac{\varphi(0)dy}{\left(\frac{\varepsilon}{x^4}\right)^2 + y^2} = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(0)}{x^2\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{x^4\alpha}{\varepsilon} dx = \Bigl[x = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\alpha}} z\Bigr]
$$

$$
= \frac{\alpha^{\frac14}}{\varepsilon^{\frac54}} \int\limits_0^{\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\varepsilon}}} \frac{\varphi(0)}{z^2} \operatorname{arctg} z^4 dz = \frac{\alpha^{\frac14}\varphi(0)}{\varepsilon^{\frac54}} \left\{ -\frac{\operatorname{arctg} z^4}{z}\Bigg|_{z=\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\varepsilon}}} + 4 \int\limits_0^{\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\varepsilon}}} \frac{z^2}{1+z^8} dz \right\}
$$

$$
= \frac{\alpha^{\frac14}\varphi(0)}{\varepsilon^{\frac54}} \left\{ -\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon^{\frac14}}{\alpha^{\frac14}} + \frac{\varepsilon^{\frac54}}{\alpha^{\frac54}} + 4\int\limits_0^\infty \frac{z^2}{1+z^8} dz - 4\frac{\varepsilon^{\frac54}}{5\alpha^{\frac54}} \right\} + O(\varepsilon)
$$

$$
= \varphi(0) \left\{ \frac{\alpha^{\frac14}}{\varepsilon^{\frac54}} \frac{\pi}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} - \frac{\pi}{2\varepsilon} + \frac{1}{5\alpha} \right\} + O(\varepsilon).
$$

$$
\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^\alpha \frac{x^2 y\varphi'(0)dy}{\varepsilon^2 + x^8y^2} = \frac{\varphi'(0)}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^\alpha \frac{x^2 dy^2}{\varepsilon^2 + x^8y^2} = \frac{\varphi'(0)}{2} \int\limits_0^1 \frac{1}{x^6} \left(\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{x^8} + \alpha^2\right) - \ln\frac{\varepsilon^2}{x^8} \right) dx
$$

$$
= \frac{\varphi'(0)}{2} \int\limits_0^1 \frac{1}{x^6} \ln\left(1 + \frac{\alpha^2 x^8}{\varepsilon^2}\right) dx = \Bigl[x = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{\alpha}} z\Bigr] = \frac{\varphi'(0)}{2} \frac{\alpha^{\frac54}}{\varepsilon^{\frac54}} \int\limits_0^{\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\varepsilon}}} \frac{\ln(1+z^8)}{z^6} dz
$$

$$
= \frac{\varphi'(0)\alpha^{\frac54}}{2\varepsilon^{\frac54}} \int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+z^8)}{z^6} dz + \frac{\varphi'(0)}{5}\ln\varepsilon - \frac{\varphi'(0)}{5}\ln\alpha - \frac{4\varphi'(0)}{25} + O(\varepsilon).
$$

$$
\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^\alpha \frac{x^2 y^2\psi(y)dy}{\varepsilon^2 + x^8y^2} = [x = \sqrt[4]{\varepsilon}\xi] = \frac{1}{\varepsilon^{\frac54}} \left(-\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}}^\infty d\xi \int\limits_0^\alpha \frac{\xi^2 y^2\psi(y)dy}{1+\xi^8y^2} + \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^\alpha \frac{\xi^2 y^2\psi(y)dy}{1+\xi^8y^2} \right)
$$

$$= -\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^6} \int\limits_0^{\alpha} \psi(y)dy + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}} \int\limits_0^{\infty} d\xi \int\limits_0^{\alpha} \frac{\xi^2 y^2 \psi(y)dy}{1+\xi^8 y^2} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^6} \int\limits_0^{\alpha} \Big(\psi(y) - \frac{y^2\psi(y)}{\xi^{-8}+y^2}\Big)dy$$

$$= \Big[\xi = \frac{z}{\sqrt[4]{y}}\Big] = -\frac{1}{5}\int\limits_0^{\alpha} \psi(y)dy + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}} \int\limits_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{1+z^8} \int\limits_0^{\alpha} y^{\frac{5}{4}}\psi(y)dy + O(\varepsilon).$$

Складывая ряды, получим, что

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\alpha} \frac{x^2\varphi(y)dy}{\varepsilon^2+x^8y^2} = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}} \frac{\pi}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\Bigg(\alpha^{\frac{1}{4}}\varphi(0) + \frac{1}{5}\alpha^{\frac{5}{4}}\varphi'(0) + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\alpha} y^{\frac{5}{4}}\psi(y)dy\Bigg)$$

$$-\frac{\pi}{2}\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{\varphi'(0)}{5}\ln\varepsilon - \frac{1}{5}\int\limits_0^{\alpha}\psi(y)dy + \frac{1}{5}\frac{\varphi(0)}{\alpha} - \frac{\varphi'(0)}{5}\ln\alpha - \frac{4}{25}\varphi'(0) + O(\varepsilon). \qquad (10)$$

Если учесть значения функций $\varphi_k(t)$ и α_k в интегралах I_1, I_2, I_3 ($\varphi_1(t) = 2/\sqrt{1-4y}$, $\alpha_1 = 1/4$, $\varphi_2(t) = 1/\sqrt{1-y}$, $\alpha_2 = 1$, $\varphi_3(t) = 1/\sqrt{1+4y}$, $\alpha_4 = 2$), то из соотношения (10) вытекает равенство

$$I_1+I_2+I_3 = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}}\frac{\pi}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{1-4y}}dy + \frac{1}{4}\int\limits_0^{2} y^{-\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+4y}}dy + \frac{1}{4}\int\limits_0^{1} y^{-\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{1-y}}dy\Bigg)$$

$$-\frac{2\pi}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\varepsilon} + 2\ln 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{5}\Bigg(2\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\frac{1}{y^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-4y}} - 1 - 2y\Big)dy + \int\limits_0^{2}\frac{1}{y^2}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+4y}} - 1 + 2y\Big)dy$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_0^{2} y^{-\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{1+4y}}dy\Bigg) - \frac{2\pi}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\varepsilon} + 2\ln 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{5}\left(\frac{11}{2} + 13\ln 2\right) + O(\varepsilon).$$

Отдельно найдем асимптотику I_4.

$$I_4 = 2\int\limits_0^1 du \int\limits_0^1 \frac{u^2 dy}{\varepsilon^2 + u^8(1+t^2)^2} = [u = \sqrt[4]{\varepsilon}x] = \frac{2}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}} dx \int\limits_0^1 \frac{x^2 dt}{1+x^8(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{2}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}}\Bigg(\int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^1 \frac{x^2 dt}{1+x^8(1+t^2)^2} - \int\limits_{\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}}^{\infty} dx \int\limits_0^1 \frac{x^2 dt}{x^8(1+t^2)^2\Big(1+\dfrac{1}{x^8(1+t^2)^2}\Big)}\Bigg)$$

$$= \frac{2}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}}\int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^1 \frac{x^2 dt}{1+x^8(1+t^2)^2} - \frac{2}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}}^{\infty}\frac{dx}{x^6}\int\limits_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{2}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^1 \frac{x^2 dt dx}{1+x^8(1+t^2)^2} - \frac{2}{5}\Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\pi\Big) + O(\varepsilon^2) = [x = (1+t^2)^{-\frac{1}{4}}v]$$

$$= \frac{2}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}}\int\limits_0^1 (1+t^2)^{-\frac{3}{4}}dt \int\limits_0^{\infty}\frac{v^2}{1+v^8}dv - \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\pi + O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}} \frac{\pi}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} \int\limits_0^1 (1+t^2)^{-\frac{3}{4}} dt - \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\pi + O(\varepsilon^2).$$

Складывая интегралы по всем секторам, получаем окончательный ответ:

$$I = 2(I_1+I_2+I_3+I_4) = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}} \frac{\pi}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \left(\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \int\limits_0^2 y^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+4y}} dy \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 (1+t^2)^{-\frac{3}{4}} dt \right) - \frac{4\pi}{\varepsilon} - \ln\frac{1}{\varepsilon} - \frac{6}{5}\ln 2 + \frac{3}{5} + \frac{\pi}{10} + O(\varepsilon).$$

4. Заключение

Продолжая аналогичным образом исследовать интегралы, можно получить бесконечный асимптотический ряд, который, очевидно, будет являться асимптотическим разложением с точностью до любой степени ε. Ясно, что вне окрестности особенности функции построение асимптотики не представляет существенных трудностей. Предложенный метод построения асимптотики пригоден во всех четвертях координатной плоскости, поэтому он позволяет находить асимптотическое разложение интегралов, указанным образом сингулярно зависящих от малого параметра, для достаточно широкого класса подынтегральных функций, имеющих данный вид особенности.

В настоящей статье рассмотрены лишь достаточно простые случаи двумерного сингулярного интеграла. Уже в трехмерном случае возникают значительные трудности в случае, когда знаменатель предельной функции обращается в нуль на пересекающихся многообразиях различной размерности. Интересно было бы получить асимптотику многомерных интегралов рассмотренного здесь вида, когда предельный знаменатель имеет критические точки сложного вида. Классификация критических точек различного типа имеется, например, в [5, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Федорюк М.В.** Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
2. **Риекстыньш Э.Я.** Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974. Т. 1. 392 с.; Т. 2. 464 с.
3. **Риекстыньш Э.Я.** Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1981. Т. 3. 373 с.
4. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 222 с.
5. **Арнольд В.И.** Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983. 80 с.
6. **Брекер Т., Ландер Л.** Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Платон, 1997. 208 с.

Поступила 29.03.2009

Ильин Арлен Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик РАН
Челябинский гос. ун-т
e-mail: iam@csu.ru

Ершов Александр Анатольевич
магистрант
ассистент
Челябинский гос. ун-т
e-mail: ale10919@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517.977.5+519.86

ПОСТРОЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА[1]

А. А. Красовский, А. М. Тарасьев

Рассматривается задача оптимального управления на бесконечном горизонте, возникающая в модели экономического роста с исчерпаемыми энергетическими ресурсами. Проводится анализ гамильтоновой системы в принципе максимума Понтрягина и строятся нелинейные регуляторы для рассматриваемой динамической системы. Приводятся результаты расчета траекторий экономического роста, порожденных нелинейными регуляторами системы и основанных на реальных данных.

Ключевые слова: нелинейные управляемые системы, оптимальная стабилизация, экономическое моделирование.

A. A. Krasovskii, A. M. Taras'ev. Construction of nonlinear regulators in economic growth models.

An infinite horizon optimal control problem is considered which arises in an economic growth model with exhaustible energy resources. The Hamiltonian system in the Pontryagin maximum principle is analyzed and nonlinear regulators are constructed for the dynamical system under consideration. The presented results of synthetic economic growth trajectories generated by nonlinear regulators of the system are based on real data.

Keywords: nonlinear control systems, optimal stabilization, economic modeling.

Введение

Исследование сфокусировано на анализе траекторий, порожденных нелинейными регуляторами экономического роста. Предлагается методология для анализа динамики макроэкономических показателей, основанная на временных рядах реальных данных. Исторические данные анализируются не прямой статистической аппроксимацией, а путем рассмотрения экономического развития как динамического процесса. Исследование базируется на моделях экономического роста, разработанных в работах [1–5]. Отличительной чертой модели является экзогенный рост фактора полезной работы, который показывает влияние энергетических ресурсов на экономический рост. Фактор полезной работы вводится в модель с помощью линейно-экспоненциальной (LINEX) производственной функции [6].

На основании математической формализации модели рассматривается задача оптимального управления. Решение задачи оптимизации инвестиций строится в рамках принципа максимума Л.С. Понтрягина [7]. Оно получено с использованием необходимых и достаточных условий оптимальности для задач с бесконечным горизонтом [8–11]. В рамках теории оптимальной стабилизации [12–15] разрабатывается система нелинейных регуляторов для построения синтезированных траекторий экономического роста. Алгоритм реализован в программном обеспечении. Сравнение модельных траекторий с реальными данными выполнено для макроэкономических показателей по экономике США. Представлены результаты моделирования.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00587а), Российского гуманитарного научного фонда (проект 08-02-00315а), гранта Президента РФ (проект НШ-2640.2008.1), программы Президиума РАН "Математическая теория управления" № 29, Международного института прикладного системного анализа (IIASA).

1. Модель оптимального экономического роста

Модель сфокусирована на анализе динамики роста валового внутреннего продукта (ВВП) страны, который определяется как рыночная стоимость всех товаров и услуг, произведенных в стране в течение года. В модели рассматриваются три фактора, используемых в производстве. Обозначим символами $K(t)$, $L(t)$, $U(t)$ размеры капитала, рабочей силы и полезной работы, соответственно, в момент времени t. Полагаем, что объем выпуска $Y(t)$ задается формулой

$$Y(t) = F\big[K(t), U(t), L(t)\big].$$

Символом $F\big[K(t), U(t), L(t)\big]$ обозначена производственная функция. Так как LINEX производственная функция является однородной по L первой степени однородности, то удобно сделать переход к относительным переменным. Введем обозначения для производственных факторов в количестве на одного рабочего: $y = Y/L$ — ВВП , $k = K/L$ — капитал, $u = U/L$ — полезная работа. Рассмотрим производственную функцию в количестве на одного рабочего

$$y(t) = f(k(t), u(t)) = F\Big[\frac{K(t)}{L(t)}, \frac{U(t)}{L(t)}, 1\Big].$$

Функция $f(k(t))$ определяет производительность труда в зависимости от фондовооруженности. Обозначим через $C(t)$ потребление, $C(t) \geq 0$, через $I(t)$ — инвестиции в капитал, $I(t) \geq 0$, а символом $s(t)$, $0 \leq s(t) \leq 1$, — часть вырабатываемого продукта, которая инвестируется в момент времени t. Получаем тождественное равенство дохода и расходов

$$Y(t) = C(t) + I(t) = \big(1 - s(t)\big)Y(t) + s(t)Y(t).$$

Рассматривается агрегированная замкнутая экономика, в которой выпуск может идти только на потребление и на инвестиции.

1.1. Динамика капитала и рабочей силы

Предполагается, что рост фонда капитала подчинен динамике

$$\dot{K}(t) = s(t)Y(t) - \mu K(t).$$

Здесь $\mu > 0$ есть степень обесценивания капитала. Считается, что численность рабочей силы возрастает экспоненциально

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n$$

с постоянным темпом роста $n > 0$. Тогда динамика роста капитала на одного рабочего описывается уравнением

$$\dot{k}(t) = s(t)y(t) - \lambda k(t),$$

где $\lambda = \mu + n$ есть сумма степени обесценивания капитала μ и степени размывания капитала n вследствие увеличения количества рабочих.

Предполагается, что функция $(k, u) \mapsto f(k, u)$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\frac{\partial f}{\partial k}(k, u) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(k, u) > 0 \quad \text{для} \quad k \in (0, +\infty)\,. \tag{1.1}$$

Здесь $\partial f/\partial k$ есть предельный продукт капитала. Предполагается, что существует выпуклая область $K^0 \subset (0, +\infty)$, в которой матрица Гессе производственной функции $f(k, u)$

$$G(f(k, u)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(k,u)}{\partial k^2} & \dfrac{\partial^2 f(k,u)}{\partial k \partial u} \\ \dfrac{\partial^2 f(k,u)}{\partial k \partial u} & \dfrac{\partial^2 f(k,u)}{\partial u^2} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

отрицательно определена.

Также предполагается, что производственная функция $f(k)$ удовлетворяет “предельным условиям Инады” [1].

1.2. Динамика полезной работы

Предполагается, что вклад полезной работы в экономический рост описывается экзогенной динамикой. На основании анализа трендов реальных данных рост полезной работы на одного рабочего можно описать динамикой

$$\dot{u}(t) = \upsilon u(t)\Big(1 - \frac{u(t)}{\rho}\Big). \tag{1.3}$$

Дифференциальное уравнение (1.3) является уравнением Ферхюльста. Параметр υ определяет постоянный темп роста, а символ ρ обозначает уровень насыщения роста. Решением уравнения (1.3) является логистическая кривая

$$u(t) = \frac{\rho u^0 e^{\upsilon t}}{\rho + u^0(e^{\upsilon t} - 1)},$$

где u^0 есть начальное значение полезной работы на одного рабочего.

2. Моделирование оптимального управления

Представим целевую функцию в модели следующей формулой

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \Big[\ln f(k(t), u(t)) + \ln(1 - s(t))\Big] e^{-\delta t} dt,$$

которая описывает интегральный показатель логарифмического индекса потребления, дисконтированного на бесконечном горизонте. Параметр $\delta > 0$ обозначает постоянный коэффициент дисконтирования.

Отметим, что в теории полезности логарифмическая функция описывает относительный прирост (в нашем случае потребления) за единицу времени. В условиях неопределенности логарифмическая функция задает постоянную относительную нерасположенность к риску [2].

2.1. Задача оптимального управления

Рассматривается задача оптимального управления

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \Big[\ln f(k(t), u(t)) + \ln(1 - s(t))\Big] e^{-\delta t} dt \underset{(k(\cdot), u(\cdot), s(\cdot))}{\longrightarrow} \max \tag{2.1}$$

при следующих условиях:

$$\begin{aligned} &\dot{k}(t) = s(t) f(k(t), u(t)) - \lambda k(t), \quad \dot{u}(t) = \upsilon u(t)\Big(1 - \frac{u(t)}{\rho}\Big), \\ &k(0) = k^0, \quad u(0) = u^0, \quad s \in [0, a], \quad a < 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь параметры δ, $\lambda = n + \mu$, k^0, u^0 суть заданные положительные числа и $s(t)$ — управляющая переменная, измеримая по времени. Параметр $0 < a < 1$ есть положительное число, которое отделяет правую границу параметра управления от единицы.

З а м е ч а н и е. Проблема существования измеримого оптимального управления в задаче с бесконечным горизонтом (2.1), (2.2) рассматривалась и решена в работе [8]. Более общий результат по существованию оптимального допустимого управления в задачах с бесконечным горизонтом получен в работе [9].

Применим принцип максимума Понтрягина для решения задачи (2.1), (2.2). Гамильтониан задачи задается следующим выражением:

$$\tilde{H}(t,s,k,u,\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_2)=\Big[\ln f(k,u)+\ln(1-s)\Big]e^{-\delta t}+\tilde{\psi}_1\left(sf(k,u)-\lambda k\right)+\tilde{\psi}_2 \upsilon u\Big(1-\frac{u}{\rho}\Big),$$

где сопряженные переменные $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$ обозначают теневые цены капитала и полезной работы. Чтобы избавиться от экспоненциального члена, зависящего от времени, введем новые переменные

$$\psi_1=\tilde{\psi}_1 e^{\delta t},\quad \psi_2=\tilde{\psi}_2 e^{\delta t},\quad H(s,k,\psi)=e^{\delta t}\tilde{H}(s,k,t,\psi),$$

и рассмотрим гамильтониан задачи в следующем виде:

$$H(s,k,u,\psi_1,\psi_2)=\ln f(k,u)+\ln(1-s)+\psi_1(sf(k,u)-\lambda k)+\psi_2\upsilon u\Big(1-\frac{u}{\rho}\Big).$$

Запишем необходимое условие максимума для гамильтониана

$$\frac{\partial H}{\partial s}=-\frac{1}{1-s}+\psi_1 f(k,u)=0.$$

Из этого уравнения получаем выражение для оптимального уровня инвестиций

$$s^0=1-\frac{1}{\psi_1 f(k,u)}. \tag{2.3}$$

Для теневых цен запишем сопряженные уравнения

$$\dot{\psi}_1=\delta\psi_1-\frac{\partial H}{\partial k},$$
$$\dot{\psi}_2=\delta\psi_2-\frac{\partial H}{\partial u}.$$

Необходимые условия оптимальности принципа максимума выражаются гамильтоновой системой уравнений

$$\begin{cases}\dot{k}=f(k,u)-\dfrac{1}{\psi_1}-\lambda k,\\ \dot{\psi}_1=\psi_1\Big(\delta+\lambda-\dfrac{\partial f(k,u)}{\partial k}\Big),\\ \dot{u}=\upsilon u\Big(1-\dfrac{u}{\rho}\Big),\\ \dot{\psi}_2=\psi_2\Big(\delta-\upsilon+2\upsilon\dfrac{u}{\rho}\Big)-\psi_1\dfrac{\partial f(k,u)}{\partial u}.\end{cases}$$

Чтобы разрешить особенности системы, введем переменные

$$z_1=\psi_1 k,\quad z_2=\psi_2 u,$$

которые описывают капитальные затраты и затраты на полезную работу. Рассмотрим гамильтонову систему в переменных (k,u,z_1,z_2)

$$\begin{cases}\dot{k}=f(k,u)-\dfrac{k}{z_1}-\lambda k,\\ \dot{z}_1=z_1\Big(\delta-\dfrac{\partial f(k,u)}{\partial k}+\dfrac{f(k,u)}{k}\Big)-1,\\ \dot{u}=\upsilon u\Big(1-\dfrac{u}{\rho}\Big),\\ \dot{z}_2=z_2\Big(\delta+\upsilon\dfrac{u}{\rho}\Big)-u\dfrac{z_1}{k}\dfrac{\partial f(k,u)}{\partial u}.\end{cases} \tag{2.4}$$

Вследствие того, что уровень насыщения полезной работы (1.3) задан, можно вычислить установившееся состояние системы (2.4).

На основании свойств функции $f(k,u)$ можно показать, что установившееся состояние единственно и его координаты вычисляются по формулам

$$\begin{cases} u^* = \rho, \\ \dfrac{\partial f(k^*,u^*)}{\partial k} = \delta + \lambda, \\ \dfrac{1}{z_1^*} = \dfrac{f(k^*,u^*)}{k^*} - \lambda, \\ z_2^* = \dfrac{z_1^* \rho}{k^*(\delta+\upsilon)} \dfrac{\partial f(k^*,u^*)}{\partial u}. \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2. Седловой характер установившегося состояния

Для анализа характеристических свойств гамильтоновой системы линеаризуем ее в окрестности установившегося состояния. Обозначим правые части уравнений (2.4) следующими символами:

$$\begin{cases} F_1(k,u,z_1,z_2) = f(k,u) - \dfrac{k}{z_1} - \lambda k, \\ F_2(k,u,z_1,z_2) = z_1 \left(\delta - \dfrac{\partial f(k,u)}{\partial k} + \dfrac{f(k,u)}{k}\right) - 1, \\ F_3(k,u,z_1,z_2) = \upsilon u \Big(1 - \dfrac{u}{\rho}\Big), \\ F_4(k,u,z_1,z_2) = z_2 \Big(\delta + \upsilon \dfrac{u}{\rho}\Big) - u \dfrac{z_1}{k} \dfrac{\partial f(k,u)}{\partial u}. \end{cases}$$

Линеаризованная система может быть представлена в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{u} \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k - k^* \\ z_1 - z_1^* \\ u - u^* \\ z_2 - z_2^* \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где элементы $a_{ij}, i = 1,\ldots,4, j = 1,\ldots,4$, определяются соотношениями

$$a_{i1} = \frac{\partial F_i(k^*,u^*,z_1^*,z_2^*)}{\partial k}, \quad a_{i2} = \frac{\partial F_i(k^*,u^*,z_1^*,z_2^*)}{\partial z_1^*},$$

$$a_{i3} = \frac{\partial F_i(k^*,u^*,z_1^*,z_2^*)}{\partial u}, \quad a_{i4} = \frac{\partial F_i(k^*,u^*,z_1^*,z_2^*)}{\partial z_2^*}.$$

Лемма 1. *Собственные числа матрицы A являются действительными. Два собственных числа положительные, два — отрицательные. Положительные собственные числа больше параметра дисконтирования δ.*

Доказательство. Составим характеристическое уравнение для собственных значений матрицы A (2.6)

$$(a_{44} - \chi)(a_{33} - \chi)(\chi^2 - (a_{11} + a_{22})\chi + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})) = 0.$$

Получаем следующие соотношения для собственных чисел:

$$\chi_1 = a_{44} = \frac{\partial F_4(k^*,u^*,z_1^*,z_2^*)}{\partial z_2} = \delta + \upsilon > \delta > 0,$$

$$\chi_2 = a_{33} = \frac{\partial F_3(k^*, u^*, z_1^*, z_2^*)}{\partial u} = -\upsilon < 0,$$

$$\chi_3 = \frac{\delta - \sqrt{(\delta)^2 - 4d}}{2} < 0,$$

$$\chi_4 = \frac{\delta + \sqrt{(\delta)^2 - 4d}}{2} > \delta > 0,$$

где

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{k^*}{z_1^*} f''(k^*, u^*, z_1^*, z_2^*) < 0.$$

Заметим, что результаты леммы 2 показывают, что скорости траекторий, которые не сходятся к установившемуся состоянию, больше параметра дисконтирования δ. Это объясняет, почему условие трансверсальности для них не выполняется.

3. Стабилизация системы в установившемся состоянии

В этом разделе рассматривается вопрос о стабилизации системы в установившемся состоянии. Для этого предлагаются несколько алгоритмов управления по принципу обратной связи, которые стабилизируют систему. Выделяются два основных типа таких регуляторов. Первый регулятор связан со значением оптимального управления в установившемся состоянии, поэтому мы будем называть его регулятором установившегося состояния. Второй регулятор основан на аппроксимации оптимальной траектории в направлении собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному числу линеаризованной гамильтоновой системы в окрестности установившегося состояния. Второй регулятор будем называть регулятором гамильтоновой системы.

3.1. Регулятор установившегося состояния

В этом разделе рассматривается возможность стабилизации системы в окрестности установившегося состояния на основе управления, полученного как оптимальное значение управляющего параметра в установившемся состоянии. Характерной чертой такого регулятора являются его сбалансированные пропорции, соответствующие установившемуся состоянию. Такой закон управления является естественным обобщением пропорционального управления компонентами системы, которыми являются в нашей модели значения производственных факторов.

Для того чтобы построить регулятор установившегося состояния, рассмотрим значение оптимального управления (2.3) в этом состоянии

$$s^0(k^*, u^*) = \lambda \frac{k^*}{f(k^*, u^*)}. \tag{3.1}$$

Подставим значение управления (3.1) в динамику системы (2.2)

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \lambda \frac{k^*}{f(k^*, u^*)} f\big(k(t), u(t)\big) - \lambda k(t), \\ \dot{u}(t) &= \upsilon u(t)\Big(1 - \frac{u(t)}{\rho}\Big). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Лемма 2. *Позиция* (k^*, u^*) *является точкой равновесия динамической системы* (3.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При подстановке $k(t) = k^*, u(t) = u^*$ в правую часть системы (3.2) она обнуляется.

Лемма 3. *Регулятор* (3.1) *стабилизирует систему в установившемся состоянии.*

Доказательство. Составим матрицу Якоби динамической системы (3.2)

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda \dfrac{k^*}{f(k^*,u^*)} \dfrac{\partial f(k^*,u^*)}{\partial k} - \lambda & \lambda \dfrac{k^*}{f(k^*,u^*)} \dfrac{\partial f(k^*,u^*)}{\partial u} \\ 0 & \upsilon - 2\upsilon \dfrac{u^*}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы Якоби равны диагональным элементам. Опираясь на свойства производственной функции (1.1), (1.2), можно получить следующие оценки для собственных значений

$$\xi_1 = \lambda \frac{k^*}{f(k^*,u^*)} \frac{\partial f(k^*,u^*)}{\partial k} - \lambda < 0,$$
$$\xi_2 = -\upsilon < 0.$$

3.2. Регулятор гамильтоновой системы

Введем следующие обозначения для собственных векторов, отвечающих отрицательным собственным значениям

$$h^1 = \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \\ h_3^1 \\ h_4^1 \end{pmatrix}, \quad h^2 = \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \\ h_3^2 \\ h_4^2 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Построим плоскость, которая содержит эти векторы. Эта плоскость является пересечением двух гиперплоскостей, принадлежащих ортогональному дополнению. Это означает, что плоскость задается системой двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1^1(k-k^*) + a_2^1(u-u^*) + a_3^1(z_1-z_1^*) + a_4^1(z_2-z_2^*) = 0, \\ a_1^2(k-k^*) + a_2^2(u-u^*) + a_3^2(z_1-z_1^*) + a_4^2(z_2-z_2^*) = 0. \end{cases}$$

Здесь коэффициенты $a_i^1, a_i^2, i = 1,..,4$, являются координатами базисных векторов ортогонального дополнения.

Найдем эти векторы. Каждый из векторов a^1, a^2 должен быть ортогонален к обоим собственным векторам h^1 и h^2 и, значит, удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} a_1^j h_1^1 + a_2^j h_2^1 + a_3^j h_3^1 + a_4^j h_4^1 = 0, \\ a_1^j h_1^2 + a_2^j h_2^2 + a_3^j h_3^2 + a_4^j h_4^2 = 0, \end{cases}$$

где $j = 1,2$.

Без потери общности можно предположить, что определитель первых двух столбцов отличен от нуля

$$\Delta = \begin{vmatrix} h_1^1 & h_2^1 \\ h_1^2 & h_2^2 \end{vmatrix} = h_1^1 h_2^2 - h_1^2 h_2^1 \neq 0.$$

Выберем следующие значения независимых переменных: $a_3^1 = -1, \quad a_4^1 = 0,$. Значения зависимых переменных a_1^1 и a_2^1 определяются уравнениями

$$\begin{cases} a_1^1 h_1^1 + a_2^1 h_2^1 = h_3^1, \\ a_1^1 h_1^2 + a_2^1 h_2^2 = h_3^2. \end{cases}$$

Эти уравнения решаются по формулам Крамера

$$a_1^1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} h_1^1 & h_3^1 \\ h_1^2 & h_3^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(h_1^1 h_3^2 - h_1^2 h_3^1),$$

$$a_2^1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} h_3^1 & h_2^1 \\ h_3^2 & h_2^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(h_3^1 h_2^2 - h_3^2 h_2^1).$$

Аналогично выбираем следующие значения для независимых переменных: $a_3^2 = 0, a_4^2 = -1$. Значения зависимых переменных a_1^2 и a_2^2 определяются уравнениями

$$\begin{cases} a_1^2 h_1^1 + a_2^2 h_2^1 = h_4^1, \\ a_1^2 h_1^2 + a_2^2 h_2^2 = h_4^2. \end{cases}$$

Эти уравнения решаются по формулам Крамера

$$a_1^2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} h_1^1 & h_4^1 \\ h_1^2 & h_4^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(h_1^1 h_4^2 - h_1^2 h_4^1),$$

$$a_2^2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} h_4^1 & h_2^1 \\ h_4^2 & h_2^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}(h_4^1 h_2^2 - h_4^2 h_2^1).$$

В результате получаем базис ортогонального дополнения, который состоит из следующих векторов

$$a^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Плоскость, порожденная собственными векторами h^1, h^2, определяется системой линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1^1(k - k^*) + a_2^1(u - u^*) - (z_1 - z_1^*) = 0, \\ a_1^2(k - k^*) + a_2^2(u - u^*) - (z_2 - z_2^*) = 0. \end{cases}$$

Разрешая эту систему относительно зависимых переменных $z_1 = z_1(k, u)$ и $z_2 = z_2(k, u)$ через независимые переменные k, u, получаем следующие соотношения для конструкций обратной связи:

$$\begin{cases} z_1 = z_1^* + a_1^1(k - k^*) + a_2^1(u - u^*), \\ z_2 = z_2^* + a_1^2(k - k^*) + a_2^2(u - u^*). \end{cases}$$

Подставив выражение для переменной z_1 в выражение для оптимального управления (2.3), получаем управление по принципу обратной связи

$$s = s(k, u) = 1 - \frac{k}{z_1 f(k, u)} = 1 - \frac{k}{(z_1^* + a_1^1(k - k^*) + a_2^1(u - u^*))f(k, u)}. \tag{3.5}$$

Динамика обратной связи описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \left(f(k, u) - \frac{k}{(z_1^* + a_1^1(k - k^*) + a_2^1(u - u^*))}\right) - \lambda k, \\ \dot{u}(t) &= \upsilon u(t)\left(1 - \frac{u(t)}{\rho}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для системы (3.6) можно доказать свойство стабильности. Линеаризуем правую часть динамики (3.6) в окрестности установившегося состояния (k^*, u^*)

$$J_2 = \begin{pmatrix} \delta - \dfrac{1}{z_1^*}(1 + a_1^1 \dfrac{k^*}{z^*}) & \dfrac{\partial f(k^*, u^*)}{\partial u} + \dfrac{k a_2^1}{(z_1^*)^2} \\ 0 & \upsilon - 2\upsilon \dfrac{u^*}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы Якоби совпадают с ее диагональными элементами

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \delta - \frac{1}{z_1^*}\Big(1 + a_1^1 \frac{k^*}{z^*}\Big), \\ \xi_2 &= -\upsilon < 0. \end{aligned}$$

Можно показать, что собственное число ξ_1 имеет строго отрицательное значение.

4. Вычислительный эксперимент

Для построения траекторий роста, порожденных нелинейными регуляторами, выполняется вычислительный эксперимент, основанный на данных по макроэкономическим показателям экономики США.

4.1. Эконометрический анализ

Параметры экзогенного роста полезной работы (1.3) калиброваны с помощью эконометрического анализа по реальным временным рядам в интервале 100 лет (1900–2000). Они идентифицированы на уровне следующих значений: $\upsilon = 0.0402$, $\rho = 13.346$.

В эксперименте используется линейно-экспоненциальная LINEX производственная функция вида

$$f(k, u) = u \exp\Big(-0.166 \frac{u}{k}\Big).$$

Выполнена симуляция модели при следующих значениях параметров: $\delta = 0.22$, $\lambda = 0.22$. Начальные значения фазовых переменных были выбраны на уровне 1950 года: $(k^0, u^0) = (2.087, 5.496)$.

Установившееся состояние гамильтоновой системы (2.5) оценено значениями

$$\begin{pmatrix} k^* \\ u^* \\ z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.997 \\ 13.346 \\ 0.855 \\ 3.12 \end{pmatrix}.$$

Гамильтонова система линеаризована в окрестности установившегося состояния. Собственные числа определяются значениями

$$(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = (0.26, -0.04, -0.8273, 1.047).$$

Для координат собственных векторов (3.3), соответствующих отрицательным собственным числам, получены значения

$$h^1 = \begin{pmatrix} 0.999 \\ 0 \\ 0.013 \\ -0.012 \end{pmatrix}, \quad h^2 = \begin{pmatrix} -0.484 \\ -0.874 \\ 0 \\ 0.028 \end{pmatrix}.$$

По значениям координат собственных векторов вычисляются значения векторов a^1 и a^2 (3.4)

$$a^1 = \begin{pmatrix} -0.006 \\ 0.013 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^2 = \begin{pmatrix} -0.025 \\ -0.012 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

На основании вычисленных значений строится регулятор (3.5) гамильтоновой системы.

4.2. Сравнение с реальными данными

На основании разработанного программного обеспечения выполнен вычислительный эксперимент, реализующий модель на реальных данных. На рис. 1–3 представлены результаты эксперимента. Синтезированные траектории модели, порожденные нелинейными регуляторами, изображены сплошными линиями, а реальные временные ряды — пунктирными линиями. Эксперименты демонстрируют (рис. 1 и 3), что траектории, генерированные нелинейными регуляторами, показывают более высокие уровни для капитала и ВВП в сравнении с реальными данными. На графиках видно, что тренды роста капитала и ВВП в количестве на одного рабочего имеют уровни насыщения, достижимые в ближайшем будущем. В то же время на рис. 2 показано хорошее соответствие тенденции роста для фактора полезной работы. На рис. 4 изображены убывающие тренды значений инвестиционного параметра, порожденных регулятором и указывающих уровень насыщения около 15%.

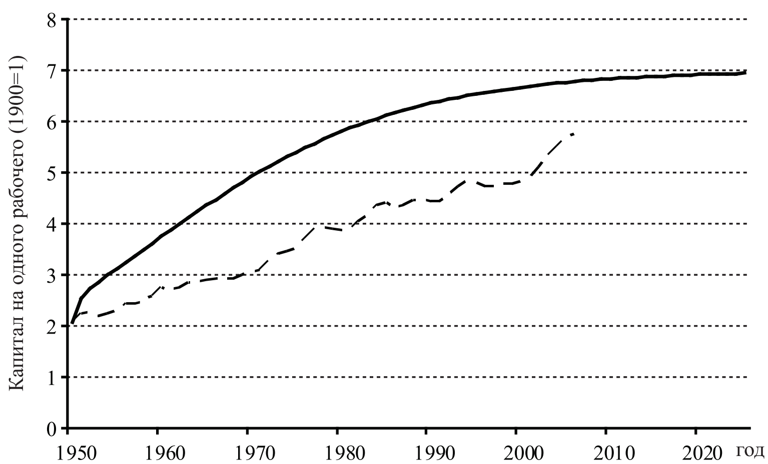


Рис. 1. Траектории капитала.

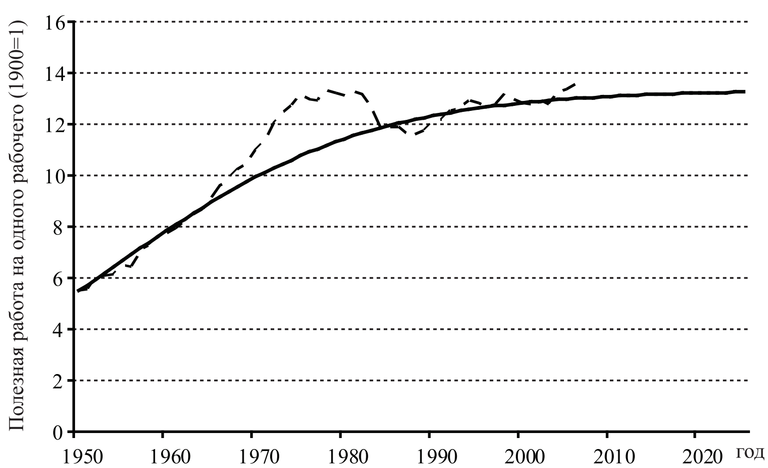


Рис. 2. Траектории полезной работы.

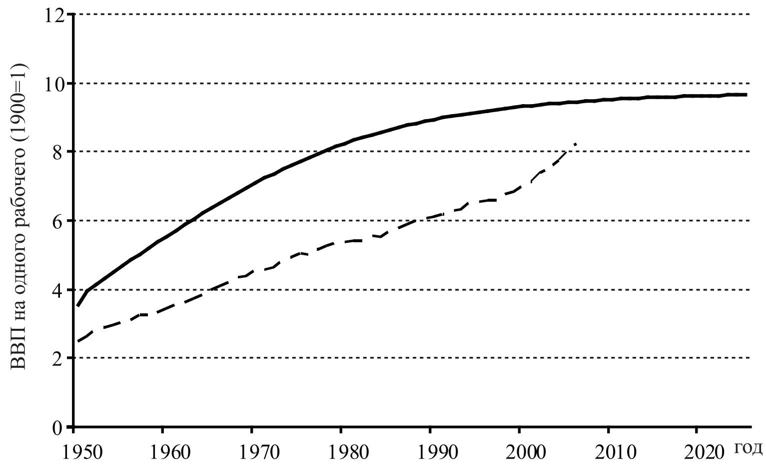


Рис. 3. Траектории ВВП.

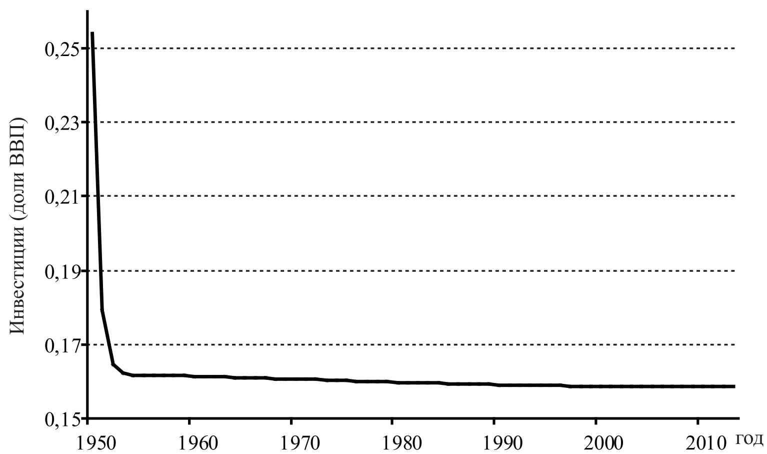


Рис. 4. Инвестиции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-Пресс, 2002. 566 с.
2. **Arrow K.J.** Production and capital: collected papers. Vol. 5. Cambridge, Massachusetts, London: The Belknap Press of Harvard University Press, 1985. 496 p.
3. **Kantorovich L.V., Makarov V.L.** Growth models and their application to long-term planning and forecasting // Long-term planning and forecasting: proc. conf. London: Macmillan Press, 1976.
4. **Shell K.** Applications of Pontryagin's maximum principle to economics // Math. Systems Theory and Economics. 1969. Vol. 1. P. 241–292.
5. **Solow R.M.** Growth theory: an exposition. New York: Oxford University Press, 1970. 224 p.
6. **Ayres R.U., Martinás K.** On the reappraisal of microeconomics: Economic growth and change in a material world. Cheltenham: Edward Elgar Publishing Ltd., 2005. 200 p.
7. Математическая теория оптимальных процессов / Понтрягин Л.С. [и др.] М.: Наука, 1976. 391 с.
8. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 5–271.
9. **Balder E.J.** An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 95. P. 195–213.
10. **Красовский А.А., Тарасьев А.М.** Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 127–145.
11. **Tarasyev A.M., Watanabe C.** Dynamic optimality principles and sensitivity analysis in models of economic growth // Nonlinear Analysis. 2001. Vol. 47, no. 4. P. 2309–2320.

12. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
13. **Летов А.М.** Аналитическое конструирование регуляторов. IV // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, № 4. С. 425–435.
14. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
15. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

Поступила 20.03.2009

Красовский Андрей Андреевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: ak@imm.uran.ru.

Тарасьев Александр Михайлович
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: tam@imm.uran.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517.977.5

ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ПАКЕТЫ ПРОГРАММ И ЗАДАЧИ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

А. В. Кряжимский[1], Ю. С. Осипов

Работа посвящена развитию метода пакетов программ как инструмента исследования задач позиционного управления с неполной информацией. Метод вписывается в тематику теории гарантированного управления и подготовлен рядом конструкций этой теории. В предположении конечности априорно заданного множества начальных состояний управляемой системы устанавливается, что разрешимость задачи о гарантированном наведении в классе пакетов программ (или, что то же, в классе позиционных стратегий) эквивалентна разрешимости той же задачи в классе значительно более простых программных операторов — идеализированных пакетов программ.

Ключевые слова: задача пакетного наведения, идеализированный пакет программ, управляемая система.

A. V. Kryazhimskiy, Yu. S. Osipov. Idealized program packages and problems of positional control with incomplete information.

The paper is devoted to developing the method of program packages as a tool for investigating problems of positional control with incomplete information. The method is embedded in the field of guaranteed control theory and was stipulated by a number of constructions from this theory. Under the assumption that an a priori given set of initial positions of a controlled system is finite, it is established that the solvability of a guaranteed guidance problem in the class of program packages (or, the same, in the class of positional strategies) is equivalent to the solvability of this problem in the class of considerably simpler program operators, namely, in the class of idealized program packages.

Keywords: problem of package guidance, idealized program package, controlled system.

Введение

Настоящая работа нацелена на развитие метода пакетов программ, предложенного в [1] в качестве инструмента для исследования задач позиционного управления с неполной информацией. Метод вписывается в тематику теории гарантированного управления (позиционных дифференциальных игр), разработанную Н. Н. Красовским и его школой [2–9] и подготовлен рядом конструкций этой теории. Во введении работы [1] дано развернутое описание предыстории метода пакетов программ. Вкратце (и в несколько иной интерпретации) приведем основные пункты этого описания.

Задачи позиционного управления с неполной информацией о состояниях управляемой системы, возникающие во многих приложениях, составляют предмет исследования многих специалистов. При изучении отдельных мотивированных приложениями классов задач об управлении с неполной информацией применяются специализированные методы, связанные с конкретными особенностями рассматриваемых постановок (ограничиваясь сылками на работы школы Н. Н. Красовского, отметим, например, [10–12]). В цикле теоретических работ школы Н. Н. Красовского (см. гл. 15 в [3], а также [13–16]) установлены соотношения теоретико-игровой двойственности между задачами об управлении с неполной информацией и дополняющими их “информационными” контрзадачами и даны описания общих конструкций искомых позиционных законов управления. В [17] для теоретической характеризации задач с неполной

[1]Работа этого автора частично поддержана РФФИ (проект 09-01-00624-а).

информацией применяется метод динамического программирования. Достаточно эффективными (правда, в весьма ограниченном диапазоне случаев) оказываются решения, основанные на методах устойчивого динамического обращения (см. [18–21]).

Несмотря на эти и другие продвижения в исследовании задач управления с неполной информацией, долгое время ощущался недостаток универсальных методов, которые могли бы быть использованы для построения решений таких задач. Метод пакетов программ [1] направлен на удовлетворение этого “спроса”. Техника пакетов программ основана на соединении принципа экстремального сдвига Н. Н. Красовского с методом неупреждающих программных операторов [4, 9, 22], проистекающим из известного аксиоматического подхода к дифференциальным играм [23, 24]. Пакет программ есть аналог неупреждающего программного оператора. Он представляет собой семейство неупреждающих программных “ответов” на все гипотетически возможные начальные состояния системы и на все гипотетически возможные реализации помех в канале наблюдения фазовых состояний. Согласно основному результату работы [1] задача о гарантированном управлении с неполной информацией в классе позиционных стратегий разрешима тогда и только тогда, когда она разрешима в классе пакетов программ. Нахождение разрешающего пакета программ — сложная, но все же программная задача; поэтому полученное утверждение об эквивалентности в принципе открывает возможности для аналитического описания условий разрешимости задачи о гарантированном позиционном управлении в условиях неполной информации.

В настоящей работе мы делаем шаг по пути такого анализа. Именно, при условии конечности априорно заданного множества начальных состояний мы устанавливаем, что разрешимость задачи о гарантированном управлении в классе пакетов программ (или, что то же, в классе позиционных стратегий) эквивалентна разрешимости такой же задачи в классе значительно более простых программных операторов — идеализированных пакетов программ. В целях компактности изложения так же, как в [1], мы рассматриваем только один вариант задачи гарантированного управления — задачу наведения, в которой управляемую систему требуется навести на фиксированное целевое множество в фиксированный момент времени.

В разд. 1 мы воспроизводим основные определения из работы [1] и ее основной результат. В разд. 2 мы вводим в рассмотрение идеализированные пакеты программ, обсуждаем связанные с ними постановки задачи о гарантированном управлении, выбираем адекватную постановку и формулируем итоговый результат об эквивалентной разрешимости. Результат базируется на основной лемме, утверждающей, что разрешимость задачи в классе идеализированных пакетов программ достаточна для ее разрешимости в классе исходных пакетов программ. Разд. 3 посвящен доказательству основной леммы. В заключительном разделе мы комментируем полученный результат и намечаем некоторые вопросы для возможного дальнейшего исследования.

1. Задача наведения и пакеты программ

В данном разделе мы воспроизводим основные определения из работы [1] и ее основной результат.

Рассмотрим управляемую динамическую систему, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)); \tag{1.1}$$

здесь t — время, меняющееся на ограниченном отрезке $[t_0, \vartheta]$ ненулевой длины, $x(t)$ — n-мерный вектор состояния системы в момент t, $u(t)$ — значение m-мерного управляющего вектора в этот момент. Функцию $f(\cdot) : [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ считаем непрерывной. Следуя терминологии теории позиционного управления [3], *программным управлением* или, кратко, *программой* (для системы (1.1)) будем называть всякую измеримую по Лебегу функцию $u(\cdot) : [t_0, \vartheta] \mapsto P$; здесь P — заданный компакт в $\mathbb{R}^m$, описывающий *мгновенный ресурс управления*. Множество всех программ будем обозначать символом $\mathcal{U}$. При заданном начальном состоянии

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

системы со всякой программой $u(\cdot)$ связывается определенное на $[t_0, \vartheta]$ решение (Каратеодори) $x(\cdot)$ дифференциального уравнения (1.1) с начальным условием (1.2); такое решение будем называть *движением* (системы (1.1)) из начального состояния x_0 под действием программы $u(\cdot)$.

Формированием программы управления занимается некое лицо, которое будем называть *управляющей стороной*. Предполагаем, что управляющей стороне известно как уравнение (1.1) системы, так и ресурс P управления. Доступная же управляющей стороне информация о состояниях $x(t)$ системы неполна. Именно, до начального момента t_0 движения управляющей стороне известен некоторый компакт $X_0 \subset \mathbb{R}^n$, заведомо содержащий истинное начальное состояние $x(t_0) = x_0$ системы. В течение процесса управления в каждый момент $t \in [t_0, \vartheta]$ управляющей стороне поставляется результат $y(t)$ наблюдения r-мерного *сигнала* $s(x(t))$ о текущем состоянии $x(t)$ системы. Результат наблюдения не вполне точен, т. е. представляется в виде

$$y(t) = s(x(t)) + \xi(t), \tag{1.3}$$

где $\xi(t)$ — *помеха наблюдения*, подчиненная ограничению $|\xi(t)| \leq h$; малый параметр h — характеристика *точности наблюдения*; здесь и далее $|\cdot|$ — норма в конечномерном евклидовом пространстве. *Сигнальная функция* $s(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^r$, которая предполагается непрерывной, и точность наблюдения h управляющей стороне известны.

В первом приближении задача управляющей стороны состоит в формировании такой программы управления, которая гарантирует попадание состояния $x(\vartheta)$ системы в конечный момент времени ϑ на заданное *целевое* множество $M \subset \mathbb{R}^n$. Придерживаясь концепции, принятой в теории позиционного управления [3], мы будем иметь дело со слегка ослабленной, асимптотической, постановкой задачи и требовать гарантии того, что состояние $x(\vartheta)$ системы может быть приведено в сколь угодно малую заранее заданную окрестность целевого множества $x(\vartheta) \in [M]^\varepsilon$ со сколь угодно малым заранее заданным $\varepsilon > 0$. Здесь и далее $[M]^\varepsilon$ — ε-окрестность множества M, т. е. объединение открытых ε-окрестностей всех точек $x \in M$.

Данную задачу управления назовем *задачей наведения* (на целевое множество M в момент ϑ). Задачу наведения будем исследовать при следующих стандартных предположениях:

(A1) для всяких $x_0 \in X_0$ и $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ существует единственное движение $x(\cdot)$ из x_0 под действием $u(\cdot)$; последнее движение часто будем обозначать через $x(\cdot|x_0, u(\cdot))$;

(A2) существует открытое ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $x(t|x_0, u(\cdot)) \in X$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $x_0 \in X_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$;

(A3) на множестве X функция $f(\cdot)$ (см. (1.1)) удовлетворяет условию Липшица по переменной состояния: при некотором $L \geq 0$ имеем $|f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)| \leq L|x_1 - x_2|$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $x_1, x_2 \in X$, $u \in P$.

Следуя подходу теории позиционного управления, рассмотрим позиционную постановку задачи наведения, в которой управляющая сторона формирует программу управления адаптивно, с учетом текущих результатов наблюдения $y(t)$ (1.3). Допустимые механизмы адаптивного формирования программ управления управляющей стороной будем называть позиционными стратегиями. Позиционная стратегия складывается из последовательности моментов $\tau_i \in [t_0, \vartheta]$ корректировки управления и последовательности обратных связей U_i в моменты τ_i. Обратная связь в момент τ_i — это принимаемое управляющей стороной правило по выработке в момент τ_i значения $u(\tau_i)$ управляющего параметра. Выработанное в момент τ_i значение $u(\tau_i)$ управляющая сторона применяет в качестве управления к системе в течение промежутка времени $[\tau_i, \tau_{i+1})$ ($u(t) = u(\tau_i)$ подставляется в (1.1) при всех $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$). Значение $u(\tau_i)$ вырабатывается управляющей стороной в зависимости от сложившихся к моменту τ_i истории наблюдения $y(t)$ (1.3) и истории управления $u(t)$, которые (истории) представляются соответственно функцией $y_{\tau_i}(\cdot): t \mapsto y(t)$, определенной на $[t_0, \tau_i]$, и функцией $u_{\tau_i}(\cdot): t \mapsto u(t)$, определенной на $[t_0, \tau_i)$: $u(\tau_i) = U(y_{\tau_i}(\cdot), u_{\tau_i}(\cdot))$.

Прежде чем привести формальное определение позиционной стратегии, соответствующее данному выше содержательному описанию, введем вспомогательные множества, с помощью которых будем задавать области определения обратных связей. Для всякого $\tau \in (t_0, \vartheta]$ через $\mathcal{U}_\tau$ обозначим множество сужений на $[t_0, \tau)$ всех программ $u(\cdot) \in \mathcal{U}$; элементы множества $\mathcal{U}_\tau$ будем называть *программами до момента* τ. Для формального удобства примем за $\mathcal{U}_{t_0}$ какое-либо одноэлементное подмножество множества P. Через $\mathcal{Y}_\tau$, где $\tau \in (t_0, \vartheta]$, будем обозначать множество всех функций $y(\cdot): [t_0, \tau] \mapsto \mathbb{R}^r$; элементы множества $\mathcal{Y}_\tau$ будем называть *наблюдениями до момента* τ.

Позиционную стратегию (управляющей стороны) определим формально как произвольную конечную последовательность

$$S = (\tau_i, U_i)_{i=0}^{l+1}, \tag{1.4}$$

где $t_0 = \tau_0 < \ldots < \tau_{l+1} = \vartheta$ и при каждом $i = 0, \ldots, l+1$ U_i — отображение произведения $\mathcal{Y}_{\tau_i} \times \mathcal{U}_{\tau_i}$ в ресурсное множество P; каждый момент τ_i, где $i = 0, \ldots, l$, называем *моментом корректировки* (управления), а отображение U_i — *обратной связью* в момент τ_i (соответствующими позиционной стратегии S).

Приведенное выше неформальное описание действия позиционной стратегии ведет к следующему определению. Через Ξ будем далее обозначать множество всех помех наблюдения, т. е. всех функций $\xi(\cdot): [t_0, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^r$, и через Ξ^h, где $h \geq 0$, — множество всех помех наблюдения *точности* h, т. е. всех $\xi(\cdot) \in \Xi$ таких, что $|\xi(t)| \leq h$ $(t \in [t_0, \vartheta])$. *Управляемым процессом* с начальным состоянием $x_0 \in X_0$ под действием позиционной стратегии S (1.4) при помехе наблюдения $\xi(\cdot)$ будем называть тройку $(u(\cdot), x(\cdot), y(\cdot))$ такую, что $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $x(\cdot) = x(\cdot | x_0, u(\cdot))$, $y(t) = s(x(t)) + \xi(t)$ $(t \in [t_0, \vartheta])$ и для каждого $i = 0, \ldots, l$ выполняется

$$u(t) = u(\tau_i) = U_i(y_{\tau_i}(\cdot), u_{\tau_i}(\cdot)) \quad (t \in [\tau_i, \tau_{i+1})),$$

где $u_{\tau_i}(\cdot)$ — сужение $u(\cdot)$ на $[t_0, \tau_i)$ и $y_{\tau_i}(\cdot)$ — сужение $y(\cdot)$ на $[t_0, \tau_i]$; функцию $u(\cdot)$ будем при этом называть *программой*, функцию $x(\cdot)$ — *движением* и функцию $y(\cdot)$ — *наблюдением* в управляемом процессе $(u(\cdot), x(\cdot), y(\cdot))$.

Понятно, что определенный выше управляемый процесс существует и единственен. Множество всех управляемых процессов с начальным состоянием $x_0 \in X_0$ под действием позиционной стратегии S при всевозможных помехах наблюдения $\xi(\cdot)$ размера h $(\xi(\cdot) \in \Xi^h)$ обозначим через $\mathcal{P}(x_0, S, h)$. В управляемых процессах нас будут интересовать в первую очередь компоненты движения. Множество *движений* (системы (1.1) из начального состояния $x_0 \in X_0$ под действием позиционной стратегии S при параметре h точности наблюдения) определим как

$$\mathcal{X}(x_0, S, h) = \{x(\cdot) : (u(\cdot), x(\cdot), y(\cdot)) \in \mathcal{P}(x_0, S, h)\}.$$

Управляющей стороне при известном параметре h точности наблюдения надлежит так выбрать позиционную стратегию S_h, что, каково бы ни было начальное состояние $x_0 \in X_0$, любое движение из множества движений $\mathcal{X}(x_0, S_h, h)$ в момент ϑ приводится в сколь угодно малую наперед заданную окрестность целевого множества M, если только точность наблюдения достаточно высока — параметр h достаточно мал. Таким образом, мы будем иметь дело с семействами $(S_h)_{h>0}$ позиционных стратегий. Формально будем говорить, что семейство $(S_h)_{h>0}$ позиционных стратегий — *наводящее*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $h_0 > 0$ такое, что при всяких $h \in [0, h_0]$ и $x_0 \in X_0$ каждое движение $x(\cdot) \in \mathcal{X}(x_0, S_h, h)$ удовлетворяет условию $x(\vartheta) \in [M]^\varepsilon$. *Задача позиционного наведения* состоит в нахождении наводящего семейства позиционных стратегий.

Следующая интересующая нас постановка задачи наведения связана с абстрактными управляющими процедурами, составляющими основу рассматриваемого здесь подхода, — с пакетами программ. Здесь мы не будем касаться содержательной интерпретации таких процедур (она достаточно подробно описана в [1]) и ограничимся формальными определениями. Пару $(x_0, \xi(\cdot)) \in X_0 \times \Xi$ назовем *совместимой* с тройкой $(\bar{x}_0, \bar{\xi}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \in X_0 \times \Xi \times \mathcal{U}$ до момента $\tau \in [t_0, \vartheta]$, если

$$s(x(t|x_0, \bar{u}(\cdot))) + \xi(t) = s(x(t|\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot))) + \bar{\xi}(t) \tag{1.5}$$

при всех $t \in [t_0, \tau]$. При каждом $h \geq 0$ семейство $(u_{x_0,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0 \in X_0, \xi(\cdot) \in \Xi^h}$ программ будем называть *пакетом программ* точности h, если оно удовлетворяет следующему *условию неупреждаемости*: для всяких $\bar{x}_0 \in X_0$, $\bar{\xi}(\cdot) \in \Xi^h$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и всякой пары $(x_0, \xi(\cdot)) \in X_0 \times \Xi^h$, совместимой с тройкой $(\bar{x}_0, \bar{\xi}(\cdot), u_{\bar{x}_0, \bar{\xi}(\cdot)}(\cdot))$ до момента τ, при всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется $u_{x_0, \xi(\cdot)}(t) = u_{\bar{x}_0, \bar{\xi}(\cdot)}(t)$. Отметим, что тривиальный пример пакета программ произвольной точности h — одноэлементное семейство $(u_{x_0, \xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0 \in X_0, \xi(\cdot) \in \Xi^h}$, где $u_{x_0, \xi(\cdot)}(\cdot)$ суть одна и та же программа $u(\cdot)$ при всех $(x_0, \xi(\cdot)) \in X_0 \times \Xi^h$.

Для пакетов программ рассмотрим задачу, аналогичную задаче позиционного наведения. Пакет программ $(u_{x_0, \xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0 \in X_0, \xi(\cdot) \times \Xi^h}$ точности h назовем *ε-наводящим* ($\varepsilon \geq 0$), если для каждой пары $(\bar{x}_0, \bar{\xi}(\cdot)) \in X_0 \times \Xi^h$ и каждой пары $(x_0, \xi(\cdot)) \in X_0 \times \Xi^h$, совместимой с тройкой $(\bar{x}_0, \bar{\xi}(\cdot), u_{\bar{x}_0, \bar{\xi}(\cdot)})$ до момента ϑ, выполняется $x(\vartheta|x_0, u_{\bar{x}_0, \xi(\cdot)}(\cdot)) \in [M]^\varepsilon$. Скажем, что разрешима *задача пакетного наведения*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется ε-наводящий пакет программ некоторой положительной точности h.

Основной результат работы [1] составляет следующая теорема об эквивалентной разрешимости двух постановок задачи наведения.

Теорема 1.1 [1, теорема 5.2]. *Задача позиционного наведения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача пакетного наведения.*

2. Идеализированные пакеты программ

Задача пакетного наведения, наследуя позиционную постановку, имеет аппроксимационный характер. Такая формулировка задачи, данная в [1], и с содержательной, и с технической стороны ориентирована на обоснование главного результата этой работы — теоремы 1.1 об эквивалентности задач позиционного и пакетного наведения. Данный результат естественным образом подразумевает, что (весьма отвлеченная) задача пакетного наведения может служить инструментом для решения (достаточно реалистической) задачи позиционного наведения. Это тем более понятно ввиду того, что наводящее семейство позиционных стратегий (стратегий экстремального сдвига) явно восстанавливатся по решению задачи пакетного наведения [1, теорема 5.1]. Возникает вопрос о конструировании решения задачи пакетного наведения. При поиске нужных конструкций аналитическими средствами отмеченный выше аппроксимационный характер задачи может стать необязательным, осложняющим фактором.

Аппроксимационный характер задачи пакетного наведения проявляется, во-первых, в том, что пакеты программ оперируют в условиях (малых) помех наблюдения, во-вторых, в том, что наведение управляемой системы с помощью пакетов программ на целевое множество M не предполагается, вообще говоря, точным. Желая освободиться от аппроксимационности в постановке задачи, нам следует уточнить, от какого из двух проявлений аппроксимационности (или же от обоих сразу) мы стремимся отказаться. Во-первых, мы можем положить наблюдения точными, допуская неточности в наведении системы на целевое множество, во-вторых, мы можем, сохранив помехи наблюдения, потребовать точного наведения системы на целевое множество, в-третьих, мы можем принять наблюдения точными и одновременно потребовать точного наведения системы на целевое множество. Самой подходящей видится, конечно, третья опция, элиминирующая сразу оба проявления аппроксимационности. Из первой же и второй опций более предпочтительной представляется первая: освобождение от помех наблюдения кажется более сильной модификацией, нежели требование точности наведения.

Основываясь на этих умозрительных рассуждениях, мы введем в рассмотрение аналоги пакетов программ, оперирующие с нулевыми помехами $\xi(t)$ наблюдения — будем называть их идеализированными пакетами программ — и связанные с ними аппроксимационную идеализированную задачу пакетного наведения и точную идеализированную задачу пакетного наведения. Идеализированные пакеты программ – это, очевидно, семейства программ, параметризуемые только начальными состояниями. При их определении вместо совместимости пар $(x_0, \xi(\cdot)) \in X_0 \times \Xi$ с тройками $(\bar{x}_0, \bar{\xi}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \in X_0 \times \Xi \times \mathcal{U}$ — свойства, предваряющего определение пакетов программ положительной точности (см. (1.5)), мы будем говорить о совместимости начальных состояний $x_0 \in X_0$ с парами $(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) \in X_0 \times \mathcal{U}$.

Дадим точные определения. Начальное состояние $x_0 \in X_0$ назовем *совместимым* с парой $(\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)) \in X_0 \times \mathcal{U}$ до момента $\tau \in [t_0, \vartheta]$, если

$$s(x(t|x_0, \bar{u}(\cdot))) = s(x(t|\bar{x}_0, \bar{u}(\cdot)))$$

при всех $t \in [t_0, \tau]$. Семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ программ будем называть *идеализированным пакетом программ*, если оно удовлетворяет следующему *условию неупреждаемости*: для всяких $\bar{x}_0 \in X_0$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и всякого начального состояния $x_0 \in X_0$, совместимого с парой $(\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot))$ до момента τ, при всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется $u_{x_0}(t) = u_{\bar{x}_0}(t)$.

Идеализированный пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ назовем *ε-наводящим* ($\varepsilon \geq 0$), если для каждого $\bar{x}_0 \in X_0$ и каждого $x_0 \in X_0$, совместимого с парой $(\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0})$ до момента ϑ, выполняется $x(\vartheta|x_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot)) \in [M]^\varepsilon$. Скажем, что разрешима *аппроксимационная идеализированная задача пакетного наведения*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется ε-наводящий идеализированный пакет программ. Скажем, что разрешима *точная идеализированная задача пакетного наведения*, если найдется 0-наводящий идеализированный пакет программ.

С методологической точки зрения важно, что идеализированные пакеты программ устроены проще, чем исходные пакеты программ, и, следовательно, идеализированные задачи пакетного наведения (как аппроксимационная, так и точная) в принципе более доступны для аналитического исследования, чем исходная задача пакетного наведения. В этой связи мы рассмотрим вопрос об эквивалентности с точки зрения разрешимости исходной и каждой из идеализированных задач пакетного наведения.

Начнем с прояснения взаимосвязи между двумя идеализированными задачами пакетного наведения. Ограничимся рассмотрением случая, когда целевое множество M замкнуто (случай, вообще говоря, незамкнутого множества M ведет к большему разнообразию ситуаций, часть из которых обязана как раз незамкнутости множества M и в этом смысле не является показательной с точки зрения интересующего нас сравнения постановок задач).

Ясно, что из разрешимости точной идеализированной задачи пакетного наведения следует разрешимость аппроксимационной задачи пакетного наведения. Обратное, вообще говоря, неверно. Контрпримеры имеют место уже в простейшем случае, когда множество X_0 начальных состяний одноэлементно и, стало быть, идеализированные задачи пакетного наведения, точная и аппроксимационная, равносильны таким же задачам программного наведения. В этом случае точная и аппроксимационная задачи могут быть неэквивалентными (в смысле разрешимости), скажем, тогда, когда множество всех движений системы не замкнуто в $C([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$. Например, для двумерной системы $\dot{x}^{(1)}(t) = u(t)$, $\dot{x}^{(2)}(t) = |x^{(1)}(t)|$ на $[t_0, \vartheta] = [0, 1]$ с двухточечным ресурсом управления $P = \{-1, 1\}$, одноэлементным множеством $X_0 = \{(0, 0)\}$ начальных состояний и целевым множеством $M = X_0$ 0-наводящей программы не существует, а аппроксимационная задача программного наведения разрешима или, что то же, точная идеализированная задача пакетного наведения неразрешима, а аппроксимационная разрешима (см. [1, замечание 1.1])

Менее очевидна ситуация, когда множество всех движений замкнуто в $C([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$. Последнее заведомо имеет место, например, тогда, когда правая часть системы (1.1) аффинна по управляющей переменной (функция $u \mapsto f(t, x, u)$ аффинна при всех $t \in [t_0, \vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$) и ресурс управления P есть выпуклое множество. Оказывается, неравносильность двух идеализированных задач пакетного наведения может иметь место и в этой ситуации. Следует заметить, что в случае такой неравносильности рассматриваемые идеализированные задачи пакетного наведения заведомо не сводимы к задачам программного наведения: множество X_0 неодноэлементно и значение $s(x_0)$ сигнала, наблюдаемое в начальный момент t_0, не позволяет однозначно восстановить порождающее его начальное состояние x_0. Приведем соответствующий пример.

П р и м е р 2.1. На отрезке времени $[t_0, \vartheta] = [0, 1]$ рассмотрим одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t)$$

с ресурсом управления $P = [0, 1]$, двухточечным множеством $X_0 = \{-1, 1\}$ начальных состояний, двухточечным целевым множеством $M = \{-1, 2\}$ и сигнальной функцией $s(x) = |x|$. Заметим, что значение сигнальной функции на каждом из двух начальных состояний равно 1, следовательно, в начальный момент времени результат наблюдения не позволяет определить, какое из этих начальных состояний истинно.

Покажем, что точная идеализированная задача пакетного наведения неразрешима. Предположим, напротив, что она разрешима, т. е. существует 0-наводящий идеализированный пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$. Тогда для каждого $\bar{x}_0 \in X_0$ и каждого $x_0 \in X_0$, совместимого с парой $(\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0})$ до момента 1, выполняется

$$x(1|x_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot)) \in M. \tag{2.1}$$

Пусть $\bar{x}_0 = -1$. Поскольку начальное состояние $x_0 = \bar{x}_0$, очевидно, совместимо с парой $(\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0})$, то $x(1|\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot)) \in M$. Единственная программа $u^0(\cdot)$, переводящая $\bar{x}_0$ на M в момент 1, т. е. такая, что $x(1|\bar{x}_0, u^0(\cdot)) \in M$, есть нулевая программа. Следовательно, $u_{\bar{x}_0}(\cdot) = u^0(\cdot) = 0$. Поэтому $x(t|\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot)) = \bar{x}_0 = -1$ и $s(x(t|\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot))) = 1$ при всех $t \in [0, 1]$. Пусть $x_0 = 1$. При всех $t \in [0, 1]$ имеем $x(t|x_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot)) = x_0 = 1$ и $s(x(t|x_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot))) = 1$. Значит, начальное состояние x_0 совместимо с парой $(\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot))$ до момента 1. Следовательно, имеет место включение (2.1). Но, как замечено выше, $x(1|x_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot)) = 1 \notin M$, т. е. (2.1) не выполняется. Полученное противоречие показывает, что предположение о разрешимости точной идеализированной задачи пакетного наведения неверно. Стало быть, данная задача неразрешима.

Покажем, что аппроксимационная идеализированная задача пакетного наведения разрешима. Для этого возьмем произвольное положительное $\varepsilon < 1$ и построим ε-наводящий идеализированный пакет программ. Начальным состояниям 1 и -1 поставим в соответствие программы $u_1(\cdot)$ и $u_{-1}(\cdot)$ вида

$$u_1(t) \equiv 1, \quad u_{-1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \varepsilon] \\ 0, & t \in (\varepsilon, 1] \end{cases} .$$

Проверим, что двухэлементное семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ есть идеализированный пакет программ. Имеем

$$x(t|1, u_1(\cdot)) = 1 + t, \quad x(t|-1, u_1(\cdot)) = -1 + t \tag{2.2}$$

$$(t \in [0, 1]),$$

при этом $s(x(t|1, u_1(\cdot))) = 1 + t \neq 1 - t = s(x(t|-1, u_1(\cdot)))$ для $t > 0$. Поэтому начальное состояние -1 совместимо с парой $(1, u_1(\cdot))$ только до начального момента 0; в данный момент значения программ $u_1(\cdot)$ и $u_{-1}(\cdot)$ совпадают. Далее,

$$x(t|-1, u_{-1}(\cdot)) = \begin{cases} -1 + t, & t \in [0, \varepsilon] \\ -1 + \varepsilon, & t \in (\varepsilon, 1] \end{cases}, \quad x(t|1, u_{-1}(\cdot)) = \begin{cases} 1 + t, & t \in [0, \varepsilon] \\ 1 + \varepsilon, & t \in (\varepsilon, 1] \end{cases} \tag{2.3}$$

$$(t \in [0, 1]),$$

при этом $s(x(t|-1, u_{-1}(\cdot))) = 1 - t \neq 1 + t = s(x(t|1, u_{-1}(\cdot)))$ для $t \in (0, \varepsilon)$. Поэтому начальное состояние 1 совместимо с парой $(-1, u_{-1}(\cdot))$ только до начального момента 0; в данный момент значения программ $u_{-1}(\cdot)$ и $u_1(\cdot)$ совпадают. Мы показали, что семейство $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ удовлетворяет условию неупреждаемости, присутствующему в определении идеализированного пакета программ. Значит, это семейство является идеализированным пакетом программ. Осталось установить, что данный идеализированный пакет программ ε-наводящий. Рассмотрим пару $(1, u_1(\cdot))$. Выше мы заметили, что начальное состояние -1 совместимо с парой $(1, u_1(\cdot))$ только до начального момента 0. Поэтому единственное начальное состояние, совместимое с парой $(1, u_1(\cdot))$ до момента 1, есть 1. Согласно первому равенству в (2.2) $x(1|1, u_1(\cdot)) = 2 \in [M]^\varepsilon$. Рассмотрим пару $(-1, u_{-1}(\cdot))$. Как отмечено выше, начальное состояние 1 совместимо с парой $(-1, u_{-1}(\cdot))$ только до начального момента 0. Поэтому единственное начальное состояние, совместимое с парой $(-1, u_{-1}(\cdot))$ до момента 1, есть -1. Согласно первому равенству в (2.3) $x(1|-1, u_{-1}(\cdot)) = -1+\varepsilon \in [M]^\varepsilon$. Мы показали, что идеализированный пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ ε-наводящий. Аппроксимационная идеализированная задача пакетного наведения разрешима.

Продолжая анализ, констатируем следующее.

Лемма 2.1. *Пусть разрешима задача пакетного наведения. Тогда разрешима аппроксимационная идеализированная задача пакетного наведения.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из разрешимости задачи пакетного наведения следует, что найдется ε-наводящий пакет программ $(u_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0\in X_0,\,\xi(\cdot)\in\Xi^h}$ некоторой положительной точности h. Для каждого $x_0 \in X_0$ положим $\bar u_{x_0} = u_{x_0,0}$. Из свойства неупреждаемости пакета программ $(u_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0\in X_0,\,\xi(\cdot)\in\Xi^h}$ очевидно следует, что семейство $(\bar u_{x_0})_{x_0\in X_0}$ обладает свойством неупреждаемости, определяющим идеализированный пакет программ, т. е. является идеализированным пакетом программ. Покажем, что данный идеализированный пакет программ ε-наводящий. Возьмем произвольное начальное состояние $\bar x_0 \in X_0$ и произвольный элемент $x_0 \in X_0$, совместимый с парой $(\bar x_0, \bar u_{\bar x_0})$ до момента ϑ, т. е. такой, что $s(x(t|x_0, \bar u_{\bar x_0}(\cdot))) = s(x(t|\bar x_0, \bar u_{\bar x_0}(\cdot)))$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$. Последнее равносильно тому, что пара $(x_0, 0) \in X_0 \times \Xi$ совместима с тройкой $(\bar x_0, 0, \bar u_{x_0}(\cdot)) = (\bar x_0, 0, u_{x_0,0}(\cdot)) \in X_0\times\Xi\times\mathcal{U}$ до момента ϑ. Так как пакет программ $(u_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0\in X_0,\,\xi(\cdot)\in\Xi^h}$ ε-наводящий, то $x(\vartheta|x_0, u_{\bar x_0,0}(\cdot)) \in [M]^\varepsilon$ или $x(\vartheta|x_0, \bar u_{\bar x_0}(\cdot)) \in [M]^\varepsilon$. В силу произвольности выбора элементов $\bar x_0$ и x_0 заключаем, что идеализированный пакет программ $(\bar u_{x_0})_{x_0\in X_0}$ ε-наводящий. Лемма доказана.

Ниже мы ограничимся случаем, когда множество X_0 начальных состояний конечно. Наш следующий шаг — обращение леммы 2.1. Сначала отметим простой факт.

Лемма 2.2. *Пусть $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ — идеализированный пакет программ. Если начальное состояние x_0 совместимо с парой $(\bar x_0, u_{\bar x_0}(\cdot))$ до момента τ, то начальное состояние $\bar x_0$ совместимо с парой $(x_0, u_0(\cdot))$ до момента τ и $u_{x_0}(t) = u_{\bar x_0}(t)$ при всех $t \in [t_0, \tau]$.*

Доказательство. Так как начальное состояние x_0 совместимо с парой $(\bar x_0, u_{\bar x_0}(\cdot))$ до момента $\tau(x_0, \bar x_0)$, то

$$s(x(t|x_0, u_{\bar x_0}(\cdot))) = s(x(t|\bar x_0, u_{\bar x_0}(\cdot))) \quad (t \in [t_0, \tau]). \tag{2.4}$$

Тогда по свойству неупреждаемости рассматриваемого идеализированного пакета программ $u_{x_0}(t) = u_{\bar x_0}(t)$ при всех $t \in [t_0, \tau]$. Следовательно, в (2.4) программу $u_{\bar x_0}(\cdot)$ можно заменить на $u_{x_0}(\cdot)$, значит начальное состояние $\bar x_0$ совместимо с парой $(x_0, u_{x_0}(\cdot))$ до момента τ. Лемма доказана.

Следующая лемма является основной. Ее доказательство, использующее лемму 2.2, приведено в разд. 3.

Лемма 2.3. *Пусть множество X_0 начальных состояний конечно и разрешима аппроксимационная идеализированная задача пакетного наведения. Тогда разрешима задача пакетного наведения.*

Теорема 1.1 и леммы 2.1 и 2.3 позволяют сформулировать наш итоговый результат.

Теорема 2.2. *Пусть множество X_0 начальных состояний конечно. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(*i*) *разрешима задача позиционного наведения,*

(*ii*) *разрешима задача пакетного наведения,*

(*iii*) *разрешима аппроксимационная идеализированная задача пакетного наведения.*

3. Доказательство основной леммы

Данный раздел посвящен доказательству леммы 2.3. Пусть выполнены условия этой леммы: множество X_0 начальных состояний конечно и разрешима аппроксимационная идеализированная задача пакетного наведения. Требуется показать, что разрешима задача пакетного наведения.

Отметим произвольное $\varepsilon > 0$. Из разрешимости аппроксимационной идеализированной задачи пакетного наведения следует, что найдется ε-наводящий идеализированный пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$. Наша задача — указать $h > 0$ и пакет программ $(u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0\in X_0,\,\xi(\cdot)\in\Xi^h}$ точности h, являющийся 2ε-наводящим. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это завершит доказательство леммы.

Введем в рассмотрение множество значений сигнальной функции на всех начальных состояниях

$$Y_0 = \{s(x_0) : x_0 \in X_0\}.$$

Отметим $\beta > 0$ такое, что $|y_{01} - y_{02}| > 2\beta$ для всех не равных друг другу $y_{01}, y_{02} \in Y_0$; в силу конечности Y_0 такое β существует. Ясно, что для любых не равных друг другу $y_{01}, y_{02} \in Y_0$, любых $x_{01} \in s^{-1}(y_{01})$, $x_{02} \in s^{-1}(y_{02})$, любых помех измерения $\xi_1(\cdot), \xi_1(\cdot)$ точности β и любых программ $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ пара $(x_{01},\, \xi_1(\cdot))$ не совместима с тройкой $(x_{02}, \xi_2(\cdot), u_2(\cdot))$ и пара $(x_{02}, \xi_2(\cdot))$ не совместима с тройкой $(x_{01}, \xi_1(\cdot), u_1(\cdot))$ ни до какого момента из отрезка $[t_0, \vartheta]$. Таким образом, полагая $h < \beta$, замечаем, что условие неупреждаемости, которому подчиняется конструируемый пакет программ $(u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0\in X_0,\,\xi(\cdot)\in\Xi^h}$, не накладывает никаких связей между программами $u^*_{x_{01},\,\xi_1(\cdot)}(\cdot)$ и $u^*_{x_{02},\,\xi_2(\cdot)}(\cdot)$ для любых начальных состояний $x_{01} \in s^{-1}(y_{01})$, $x_{02} \in s^{-1}(y_{02})$, где $y_{01} \neq y_{02}$, и любых помех измерения $\xi_1(\cdot)$, $\xi_2(\cdot) \in \Xi^h$. Основываясь на этом наблюдении, будем строить программы $u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot)$ для $x_0 \in s^{-1}(y_0)$ и $\xi(\cdot) \in \Xi^h$ при разных $y_0 \in Y_0$ независимо.

Точнее, чтобы завершить доказательство, нам достаточно для каждого $y_0 \in Y_0$, подобрав достаточно малое $h > 0$, построить сужение желаемого пакета программ $(u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0\in X_0,\,\xi(\cdot)\in\Xi^h}$ на множество $s^{-1}(y_0)\times\Xi^h$ — семейство программ $(u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0\in s^{-1}(y_0),\,\xi(\cdot)\in\Xi^h}$, удовлетворяющее условию неупреждаемости и являющееся, например, 2ε-наводящим. Условие неупреждаемости в данном случае означает, что для всяких $x_{01} \in s^{-1}(y_0)$, $\xi_1(\cdot) \in \Xi^h$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и всякой пары $(x_{02}, \xi_2(\cdot)) \in s^{-1}(y_0) \times \Xi^h$, совместимой с тройкой $(x_{01}, \xi_1(\cdot), u_{x_{01},\,\xi_1(\cdot)}(\cdot))$ до момента τ, при всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется $u_{x_{02},\,\xi_2(\cdot)}(t) = u_{x_{01},\,\xi_1(\cdot)}(t)$. Требование, что указанное семейство программ является 2ε-наводящим, означает, что для каждой пары $(x_{01}, \xi_1(\cdot) \in s^{-1}(y_0) \times \Xi^h$ и каждой пары $(x_0, \xi(\cdot)) \in X_0 \times \Xi^h$, совместимой с тройкой $(x_{01}, \xi_1(\cdot), u_{x_{01},\,\xi_1(\cdot)}(\cdot))$ до момента ϑ, выполняется $x(\vartheta|x_{02}, u_{x_{01},\,\xi_1(\cdot)}(\cdot)) \in [M]^{2\varepsilon}$.

Приступим к реализации этого плана. Зафиксируем какое-либо $y_0 \in Y_0$. Пусть дано начальное состояние $\bar{x}_0 \in s^{-1}(y_0)$. Для каждого $x_0 \in s^{-1}(y_0)$ обозначим через $\tau(x_0, \bar{x}_0)$ максимальный из всех моментов $\tau \in [t_0, \vartheta]$ таких, что начальное состояние x_0 совместимо с парой $(\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot))$ до τ. Используя лемму 2.2, легко получить

$$\tau(x_0, \bar{x}_0) = \tau(\bar{x}_0, x_0). \tag{3.1}$$

Пусть
$$T(\bar{x}_0) = \{\tau(x_0, \bar{x}_0) < \vartheta : x_0 \in s^{-1}(y_0)\};\tag{3.2}$$
также положим
$$C(\bar{x}_0, \tau) = \{x_0 \in s^{-1}(y_0) : \tau(x_0, \bar{x}_0) = \tau\} \quad (\tau \in [t_0, \vartheta]).\tag{3.3}$$

Зафиксируем элемент $\hat{x}_0 \in s^{-1}(y_0)$. Предположим, что множество $T(\hat{x}_0)$ пусто. Тогда каждое начальное состояние $x_0 \in s^{-1}(y_0)$ совместимо с парой $(\hat{x}_0, u_{\hat{x}_0}(\cdot))$ до момента ϑ. Применяя лемму 2.2, получаем, что для любого начального состояния $x_0 \in s^{-1}(y_0)$ верно $u_{x_0}(\cdot) = u_{\hat{x}_0}(\cdot)$. Для каждого $x_0 \in s^{-1}(y_0)$ и каждого $\xi(\cdot) \in \Xi^h$, где $h > 0$, примем $u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot) = u_{\hat{x}_0}(\cdot)$. Одноэлементное семейство $(u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0 \in s^{-1}(y_0),\,\xi(\cdot)\in\Xi^h}$ с очевидностью удовлетворяет условию неупреждаемости. Поскольку идеализированный пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in X_0}$ является ε-наводящим, семейство $(u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0 \in s^{-1}(y_0),\,\xi(\cdot)\in\Xi^h}$ является 2ε-наводящим. Искомое семейство программ сконструировано.

Далее предполагаем, что множество $T(\hat{x}_0)$ непусто. Конструирование искомого семейства программ предварим двумя построениями.

Первое построение таково. Возьмем какие-либо $x_0, \bar{x}_0 \in s^{-1}(y_0)$. Для произвольного $\eta > \tau(x_0, \bar{x}_0)$ (не превосходящего ϑ) начальное состояние x_0 не является совместимым с парой $(\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot))$ до η. Поэтому
$$\max_{t\in(\tau,\eta]} |s(x(t|x_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot))) - s(x(t|\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot)))| > 0 \quad (\eta \in (\tau, \vartheta] = (\tau(x_0, \bar{x}_0), \vartheta]).$$
Из последнего соотношения ввиду конечности множеств $s^{-1}(y_0)$, $T(\bar{x}_0)$, $C(\bar{x}_0, \tau)$, где $\bar{x}_0 \in s^{-1}(y_0)$, $\tau \in T(\bar{x}_0)$, заключаем, что существует положительная функция $\sigma(\cdot)$ положительного аргумента такая, что $\sigma(\nu) \to 0$ при $\nu \to 0$ и
$$\max_{t\in(\tau(x_0,\bar{x}_0),\tau(x_0,\bar{x}_0)+\nu]} |s(x(t|x_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot))) - s(x(t|\bar{x}_0, u_{\bar{x}_0}(\cdot)))| > \sigma(\nu)\tag{3.4}$$
$$(\nu \in (0, \vartheta - \tau(x_0, \bar{x}_0)], \quad x_0 \in C(\bar{x}_0, \tau(x_0, \bar{x}_0)), \quad \bar{x}_0 \in s^{-1}(y_0)).$$
Первое построение закончено.

Второе построение связано с представлением множества $s^{-1}(y_0)$ начальных состояний в виде совокупности “ветвей дерева”. Построение осуществляем по шагам. На нулевом шаге фиксируем “ствол дерева” — начальное состояние $\hat{x}_0$.

На первом шаге производим следующие операции. Для каждого $\tau_1 \in T(\hat{x}_0)$ задаем множество
$$X_{\tau_1} \subset C(\hat{x}_0, \tau_1)\tag{3.5}$$
со следующими свойствами: во-первых, для любых различных $x_1, x_1' \in X_{\tau_1}$ имеем $\tau(x_1, x_1') = \tau_1$ (свойство “отделимости”), во-вторых, для каждого $x_0 \in C(\hat{x}_0, \tau_1)$ найдется элемент $x_1 \in X_{\tau_1}$ такой, что $\tau(x_0, x_1) > \tau_1 \in T(\hat{x}_0)$ (свойство “максимальности”). Множество X_{τ_1} можно построить, например, следующим образом. Выбираем какой-либо элемент $x_{11} \in C(\hat{x}_0, \tau_1)$ и заносим его в множество X_{τ_1}. Если $\tau(x_0, x_{11}) > \tau_1$ для всех $x_0 \in C(\hat{x}_0, \tau_1)$, то принимаем $X_{\tau_1} = \{x_{11}\}$. Если найдется элемент $x_{12} \in C(\hat{x}_0, \tau_1)$ такой, что $\tau(x_{12}, x_{11}) = \tau_1$ (случай $\tau(x_{12}, x_{11}) < \tau_1$, очевидно, невозможен), то этот элемент также заносим в множество X_{τ_1} (при этом, очевидно, $x_{12} \neq x_{11}$). Если для каждого $x_0 \in C(\hat{x}_0, \tau_1)$ имеем либо $\tau(x_0, x_{11}) > \tau_1$, либо $\tau(x_0, x_{12}) > \tau_1$, то принимаем $X_{\tau_1} = \{x_{11}, x_{12}\}$. В противном случае по описанной выше схеме добавляем в X_{τ_1} новый элемент из множества $C(\hat{x}_0, \tau_1)$. За конечное число добавлений строим полное множество X_{τ_1}. Каждый элемент $x_1 \in X_{\tau_1}$, где $\tau_1 \in T(\hat{x}_0)$, называем ветвью (дерева) порядка 1 с историей τ_1. Данное название мотивировано тем, что движение $x(\cdot|x_1, u_{x_1}(\cdot))$, исходящее из начального состояния x_1, идет вдоль “стволового” движения $x(\cdot|\hat{x}_0, u_{\hat{x}_0}(\cdot))$ до момента τ_1, а далее отклоняется от него — развивается в “самостоятельную ветвь”. Множество
$$D_1 = \{((\tau_1), x_1) : (\tau_1) \in T(\hat{x}_0),\ x_1 \in X_{\tau_1}\}\tag{3.6}$$

называем поддеревом порядка 1; здесь мы пишем (τ_1) вместо τ_1, трактуя τ_1 как одноэлементную последовательность; такая трактовка обусловлена соображениями формальной унификации приведенного обозначения с обозначениями, вводимыми в последующих абзацах. Для каждой пары $((\tau_1), x_1) \in D_1$ задаем множество

$$T_{\tau_1}(x_1) = T(x_1) \setminus [t_0, \tau_1].$$

Если множество $T_{\tau_1}(x_1)$ непусто, то пару $((\tau_1), x_1)$ называем продолжимой и относим к множеству D_1^+; последнее называем продолжимой компонентой поддерева D_1. Если множество $T_{\tau_1}(x_1)$ пусто, то пару $((\tau_1), x_1)$ называем непродолжимой и относим к множеству D_1^-; последнее называем непродолжимой компонентой поддерева D_1. Таким образом, поддерево D_1 есть объединение своих продолжимой и непродолжимой компонент, D_1^+ и D_1^-, которые, очевидно, не пересекаются. Если множество D_1^+ пусто, то первый шаг объявляем последним и поддерево D_1 порядка 1, совпадающее со своей непродолжимой компонентой D_1^-, называем деревом. Если множество D_1^+ непусто, переходим ко второму шагу.

На шаге i, где $i > 1$, исходная ситуация такова. Для каждого $j \in \{1, \ldots, i\}$ построено множество D_j пар вида $((\tau_1, \ldots, \tau_j), x_j)$, где $(\tau_1, \ldots, \tau_j)$ — строго возрастающая последовательность из полуотрезка $[t_0, \vartheta)$, которую называем историей длины j, и x_j — элемент из $s^{-1}(y_0)$, который называем ветвью порядка j с историей $(\tau_1, \ldots, \tau_j)$.

Для каждого $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ и каждой пары $((\tau_1, \ldots, \tau_j), x_j) \in D_j$ определено множество

$$T_{\tau_1,\ldots,\tau_j}(x_j) = T(x_j) \setminus [t_0, \tau_j]. \tag{3.7}$$

Если множество $T_{\tau_1,\ldots,\tau_j}(x_j)$ непусто, то пара $((\tau_1, \ldots, \tau_j), x_j)$ называется продолжимой и относится к множеству D_j^+; последнее называется продолжимой компонентой поддерева D_j. Если множество $T_{\tau_1,\ldots,\tau_j}(x_j)$ пусто, то пара $((\tau_1, \ldots, \tau_j), x_j)$ называется непродолжимой и относится к множеству D_j^-; последнее называется непродолжимой компонентой поддерева D_j. Таким образом, поддерево D_j есть объединение своих продолжимой и непродолжимой компонент, D_j^+ и D_j^-, которые, очевидно, не пересекаются.

Для каждого $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ продолжимая компонента D_j^+ поддерева порядка j непуста, и для каждой пары $((\tau_1, \ldots, \tau_j), x_j) \in D_j^+$ и каждого $\tau_{j+1} \in T_{\tau_1,\ldots,\tau_j}(x_j)$ построено множество

$$X_{\tau_1,\ldots,\tau_{j+1}}(x_j) \subset C(x_j, \tau_{j+1}) \tag{3.8}$$

со следующими свойствами: во-первых, для любых различных $x_{j+1}, x'_{j+1} \in X_{\tau_1,\ldots,\tau_{j+1}}(x_j)$ имеем $\tau(x_j, x'_j) = \tau_{j+1}$ (свойство “отделимости”), во-вторых, для каждого $x_0 \in C(x_j, \tau_{j+1})$ найдется элемент $x_{j+1} \in X_{\tau_1,\ldots,\tau_{j+1}}(x_j)$ такой, что $\tau(x_0, x_{j+1}) > \tau_{j+1}$ (свойство “максимальности”).

Наконец, для каждого $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ выполняется

$$\begin{aligned} D_{j+1} = \{((\tau_1, \ldots, \tau_{j+1}), x_{j+1}) \quad : \quad & ((\tau_1, \ldots, \tau_j), x_j) \in D_j^+, \\ & \tau_{j+1} \in T_{\tau_1,\ldots,\tau_j}(x_j),\ x_{j+1} \in X_{\tau_1,\ldots,\tau_{j+1}}(x_j)\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Основываясь на этой информации, реализуем следующий алгоритм. Для каждой пары $((\tau_1, \ldots, \tau_i), x_i) \in D_i$ формируем множество

$$T_{\tau_1,\ldots,\tau_i}(x_i) = T(x_i) \setminus [t_0, \tau_i].$$

Если множество $T_{\tau_1,\ldots,\tau_i}(x_i)$ непусто, то пару $((\tau_1, \ldots, \tau_i), x_i)$ называем продолжимой и относим к множеству D_i^+, которое называем продолжимой компонентой поддерева D_i. Если множество $T_{\tau_1,\ldots,\tau_i}(x_i)$ пусто, то пару $((\tau_1, \ldots, \tau_i), x_i)$ называем непродолжимой и относим к множеству D_i^-, которое называем непродолжимой компонентой поддерева D_i. Таким образом, поддерево D_i представляем в виде объединения непересекающихся множеств D_i^+ и D_i^-.

Если продолжимая компонента D_i^+ поддерева D_i пуста, то шаг i объявляем последним и объединение $\cup_{j=1}^{i} D_j$ поддеревьев всех порядков $j \le i$ называем деревом.

Пусть продолжимая компонента D_i^+ поддерева D_i непуста. Тогда для каждой пары $((\tau_1, \ldots, \tau_i), x_i) \in D_i^+$ и каждого $\tau_{i+1} \in T_{\tau_1,\ldots,\tau_i}(x_i)$ строим множество

$$X_{\tau_1,\ldots,\tau_{i+1}}(x_i) \subset C(x_i, \tau_{i+1})$$

со свойствами "отделимости" и "максимальности": во-первых, для любых различных x_{i+1}, $x'_{i+1} \in X_{\tau_1,\ldots,\tau_{i+1}}(x_i)$ имеем $\tau(x_{i+1}, x'_{i+1}) = \tau_{i+1}$, во-вторых, для каждого $x_0 \in C(x_i, \tau_{i+1})$ найдется элемент $x_{i+1} \in X_{\tau_1,\ldots,\tau_{i+1}}(x_i)$ такой, что $\tau(x_0, x_{i+1}) > \tau_{i+1}$. Множество $X_{\tau_1,\ldots,\tau_{i+1}}(x_i)$ можно построить по схеме, обозаченной выше при описании первого шага. Наконец, задаем поддерево порядка $i+1$ как множество

$$\begin{aligned} D_{i+1} = \{((\tau_1, \ldots, \tau_{i+1}), x_{i+1}) \ : \ & ((\tau_1, \ldots, \tau_i), x_i) \in D_i^+, \\ & \tau_{i+1} \in T_{\tau_1,\ldots,\tau_i}(x_i),\ x_{i+1} \in X_{\tau_1,\ldots,\tau_{i+1}}(x_i)\}. \end{aligned}$$

Построенные объекты вместе с исходной информацией на шаге i доставляют исходные данные для шага $i+1$.

Из приведенного построения видно, что история $(\tau_1, \ldots, \tau_i)$ любой длины i есть строго возрастающая последовательность из множества $\cup_{\bar{x}_0 \in s^{-1}(y_0)} T(x_0)$. Поскольку последнее множество конечно (см. (3.2)), то множество всех историй конечно. Так как на каждом шаге i описанной выше процедуры длина историй $(\tau_1, \ldots, \tau_i)$ из соответствующего поддерева D_i увеличивается на единицу, то количество шагов i, для которых продолжимая компонента D_i^+ поддерева D_i непуста, конечно. Пусть i_* — номер шага, для которого продолжимая компонента $D_{i_*}^+$ поддерева D_{i_*} оказывается пустой. Данный шаг является последним, и множество

$$D^- = \cup_{j=1}^{i_*} D_j$$

является деревом.

Для каждого $j \in \{1, \ldots, i_*\}$ введем в рассмотрение множество всех ветвей порядка j

$$Z_j = \{x_j : ((\tau_1, \ldots, \tau_j), x_j) \in D_j\}. \tag{3.10}$$

Введем также множество всех ветвей дерева, включая "ствол"

$$Z = \{\hat{x}_0\} \cup \left[\cup_{j=1}^{i_*} Z_j\right]. \tag{3.11}$$

Покажем, что Z представляет все множество $s^{-1}(y_0)$ в следующем смысле: для каждого $x_0 \in s^{-1}(y_0)$ выполняется $\tau(x_0, \bar{x}_0) = \vartheta$ при некотором $\bar{x}_0 \in Z$ или, что то же,

$$s^{-1}(y_0) = \cup_{\bar{x}_0 \in Z} C(\bar{x}_0, \vartheta). \tag{3.12}$$

Предположим, что (3.12) неверно. Тогда найдется элемент $x_0 \in s^{-1}(y_0)$ такой, что $\tau(x_0, \bar{x}_0) < \vartheta$ при всяком $\bar{x}_0 \in Z$. Тогда, в частности, $\tau_1 = \tau(x_0, \hat{x}_0) < \vartheta$. Значит, $\tau_1 \in T(\hat{x}_0)$ (см. (3.2)), и, согласно (3.3), $x_0 \in C(\hat{x}_0, \tau_1)$. Вследствие свойства "максимальности" множества X_{τ_1} (см. (3.5)) для некоторого элемента $x_1 \in X_{\tau_1}$ или, что то же, для пары $((\tau_1), x_1) \in D_1$ (см. (3.6)) имеем $\tau_2 = \tau(x_0, x_1) > \tau_1$. Как видно из (3.6) и (3.10), $x_1 \in Z_1 \subset Z$. Следовательно, по предположению, $\tau_2 < \vartheta$. Используя принцип индукции, предположим, что для некоторого $j \in \{1, \ldots, i_* - 1\}$ найдется элемент $((\tau_1, \ldots, \tau_j), x_j) \in D_j$ такой, что $\tau_{j+1} = \tau(x_0, x_j) > \tau_j$. Так как $\tau_{j+1} < \vartheta$, то $\tau_{j+1} \in T_{\tau_1 \ldots \tau_j}(x_j)$ (см. (3.2), (3.7)). Стало быть, $((\tau_1, \ldots, \tau_j), x_j) \in D_j^+$, $x_0 \in C(x_j, \tau_j)$ (см. (3.3)) и определено множество $X_{\tau_1 \ldots \tau_{j+1}}(x_j)$ (см. (3.8)). По свойству "максимальности" множества $X_{\tau_1 \ldots \tau_{j+1}}(x_j)$ для некоторого $x_{j+1} \in X_{\tau_1 \ldots \tau_{j+1}}(x_j)$ или, что то же, для элемента $((\tau_1, \ldots, \tau_{j+1}), x_{j+1}) \in D_{j+1}$ (см. (3.9)) имеем $\tau_{j+2} = \tau(x_0, x_{j+1}) > \tau_{j+1}$. Таким образом, свойство, указанное в предположении индукции, верно для каждого шага i, включая последний шаг i_*. Стало быть, найдется элемент $((\tau_1, \ldots, \tau_{i_*}), x_{i_*}) \in D_{i_*}$ такой, что $\tau_{i_*+1} = \tau(x_0, x_{i_*}) > \tau_{i_*}$. Так как $\tau_{i_*+1} < \vartheta$, то $\tau_{i_*+1} \in T_{\tau_1 \ldots \tau_{i_*+1}}(x_{i_*})$, и, значит, $((\tau_1, \ldots, \tau_{i_*+1}), x_{i_*}) \in D_{i_*}^+$.

Однако множество $D^+_{i_*}$ пусто. Полученное противоречие показывает справедливость равенства (3.12).

Перейдем к определению нужного 2ε-наводящего семейства программ $(u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0\in s^{-1}(y_0),\,\xi(\cdot)\in\Xi^h}$. Данное семейство построим в виде семейства $(u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0\in s^{-1}(y_0)}$ программ, параметризованного лишь начальными состояниями $x_0 \in s^{-1}(y_0)$, т. е. копирующего структуру идеализированного пакета программ:

$$(u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0\in s^{-1}(y_0),\,\xi(\cdot)\in\Xi^h} = (u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0\in s^{-1}(y_0)}. \tag{3.13}$$

Семейство $(u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0\in s^{-1}(y_0)}$ зададим с помощью малой вариации подсемейства $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0\in s^{-1}(y_0)}$ исходного идеализированного пакета программ. Цель вариации при ослаблении свойства ε-наведения до свойства 2ε-наведения ужесточить свойство неупреждаемости, характерное для идеализированных пакетов программ, до аналогичного свойства, характерного для исходных, неидеализированных, пакетов программ.

Программу $u_{\hat{x}_0}(\cdot)$, соответствующую "стволу" $\hat{x}_0$, а также всем начальным состояниям $x_0 \in C(\hat{x}_0,\vartheta)$, мы не варьируем, полагая

$$u^*_{\hat{x}_0}(\cdot) = u_{\hat{x}_0}(\cdot), \tag{3.14}$$

$$u^*_{x_0}(\cdot) = u^*_{\hat{x}_0}(\cdot) \quad (x_0 \in C(\hat{x}_0,\vartheta)). \tag{3.15}$$

Для каждой ветви x_1 порядка 1 с историей (τ_1) соответствующую ей, а также всем $x_0 \in C(x_1,\vartheta)$ программу $u_{x_1}(\cdot)$ из идеализированного пакета варьируем на полуинтервале малой положительной длины ν_1, примыкающем к точке τ_1 справа; на данном полуинтервале проварьированной программе придаем значения "стволовой" программы $u_{\hat{x}_0}(\cdot)$; замечая, что

$$u_{x_1}(t) = u_{\hat{x}_0}(t) \quad (t \in [t_0,\tau_1]), \tag{3.16}$$

примем

$$u^*_{x_1}(t) = \begin{cases} u_{\hat{x}_0}(t), & t \in [t_0,\tau_1+\nu_1) \\ u_{x_1}(t), & t \in [\tau_1+\nu_1,\vartheta] \end{cases} \tag{3.17}$$

и положим

$$u^*_{x_0} = u^*_{x_1}(\cdot) \quad (x_0 \in C(x_1,\vartheta)). \tag{3.18}$$

Вариации программ, соответствующих ветвям высших порядков, зададим индуктивно. Пусть для некоторого $j \in \{1,\ldots,i_*-1\}$ и каждой ветви $x_j \in Z_j$ (см. (3.10)) определена программа $u^*_{x_j}(\cdot)$, и при этом

$$u^*_{x_0}(\cdot) = u^*_{x_j}(\cdot) \quad (x_0 \in C(x_j,\vartheta)). \tag{3.19}$$

Для каждой ветви $x_{j+1} \in Z_{j+1}$ находим пару $((\tau_1,\ldots,\tau_j),x_j) \in D^+_j$ и момент $\tau_{j+1} \in T_{\tau_1,\ldots,\tau_j}(x_j)$, которые порождает ветвь x_{j+1} в том смысле, что $x_{j+1} \in X_{\tau_1,\ldots,\tau_{j+1}}(x_j)$ (см. (3.9)) и полагаем

$$u^*_{x_{j+1}}(t) = \begin{cases} u^*_{x_j}(t), & t \in [t_0,\tau_{j+1}+\nu_{j+1}) \\ u_{x_{j+1}}(t), & t \in [\tau_{j+1}+\nu_{j+1},\vartheta) \end{cases}, \tag{3.20}$$

$$u^*_{x_0}(\cdot) = u^*_{x_{j+1}}(\cdot) \quad (x_0 \in C(x_{j+1},\vartheta)); \tag{3.21}$$

здесь ν_{j+1} — малое положительное число. Заметим, что данное определение является ужесточением следующего ограничения на программы исходного идеализированного пакета, которое обусловлено свойством неупреждаемости:

$$u_{x_{j+1}}(t) = u_{x_j}(t) \quad (t \in [t_0,\tau_{j+1}]), \quad u_{x_0}(\cdot) = u_{x_{j+1}}(\cdot) \quad (x_0 \in C(x_{j+1},\vartheta)). \tag{3.22}$$

Ввиду (3.12) программы $u^*_{x_0}(\cdot)$ построены для всех $x_0 \in s^{-1}(y_0)$. Для обеспечения корректности приведенного выше определения предполагаем, что

$$\nu_j < \bar{\nu} \quad (j = 1,\ldots,i_*), \tag{3.23}$$

где $\bar{\nu}$ столь мало, что

$$\tau_j + \bar{\nu} < \tau_{j+1}, \quad \tau_{j+1} + \bar{\nu} < \vartheta$$
$$(((\tau_1, \ldots, \tau_{j+1}), x_{j+1}) \in D_{j+1}, \quad j \in \{1, \ldots, i_* - 1\}).$$

Кроме того, в дальнейшем будем использовать следующее предположение:

$$\bar{\nu} < \min\{|\tau - \tau'| : \tau,\ \tau' \in T(x_0),\ \tau \neq \tau'\} \quad (x_0 \in s^{-1}(y_0)). \tag{3.24}$$

Ниже мы введем дополнительные ограничения на выбор значений ν_j $(j = 1, \ldots, i_*)$.

Согласно (3.16)–(3.18) для каждой ветви $x_1 \in Z_1$ и каждого $x_0 \in C(x_1, \vartheta)$ значения проварьированных программ $u^*_{x_1}(\cdot)$ и $u^*_{x_0}(\cdot)$ могут отличаться от значений программы $u_{x_1}(\cdot) = u_{x_0}(\cdot)$ лишь на полуинтервале длины ν_1. Принимая это за базу индукции и используя (3.19)–(3.22), легко получаем, что для каждого $j = \{1, \ldots, i_*\}$, каждой ветви $x_j \in Z_j$ и каждого $x_0 \in C(x_j, \vartheta)$ значения проварьированных программ $u^*_{x_j}(\cdot)$ и $u^*_{x_0}(\cdot)$ могут отличаться от значений программы $u_{x_j}(\cdot) = u_{x_0}(\cdot)$ лишь на объединении j полуинтервалов, имеющих длины $\nu_1, \ldots, \nu_j$.

Предполагая, что $i_*\bar{\nu}$ (см. (3.23)) достаточно мало, заключаем, что

$$|x(\vartheta|x_0, u^*_{x_0}(\cdot)) - x(\vartheta|x_0, u_{x_0}(\cdot))| < \varepsilon$$

для всех $x_0 \in s^{-1}(y_0)$. Отсюда и из того, что идеализированный пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является ε-наводящим, заключаем, что семейство $(u^*_{x_0,\,\xi(\cdot)}(\cdot))_{x_0 \in s^{-1}(y_0),\, \xi(\cdot) \in \Xi^h} = (u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in s^{-1}(y_0)}$ (см. (3.13)) является 2ε-наводящим.

Для завершения доказательства леммы осталось показать, что семейство $(u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in s^{-1}(y_0)}$ удовлетворяет свойству неупреждаемости при достаточно малом параметре h точности наблюдения: для всяких $\bar{x}_0 \in X_0$, $\bar{\xi}(\cdot) \in \Xi^h$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и всякой пары $(x_0, \xi(\cdot)) \in X_0 \times \Xi^h$, совместимой с тройкой $(\bar{x}_0, \bar{\xi}(\cdot), u^*_{\bar{x}_0}(\cdot))$ до момента τ, при всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется $u^*_{x_0}(t) = u^*_{\bar{x}_0}(t)$. Приступим к обоснованию этого свойства.

Для каждых $\bar{x}_0, x_0 \in s^{-1}(y_0)$ обозначим

$$\tau^h(x_0, \bar{x}_0) = \max\Big\{\tau \in [t_0, \vartheta] : \max_{t \in [t_0, \tau]} |s(x(t|x_0, u^*_{\bar{x}_0}(\cdot))) - s(x(t|\bar{x}_0, u^*_{\bar{x}_0}(\cdot)))| \le 2h\Big\}. \tag{3.25}$$

Ясно, что если пара $(x_0, \xi(\cdot)) \in s^{-1}(y_0) \times \Xi^h$ совместима с тройкой $(\bar{x}_0, \bar{\xi}(\cdot), u^*_{\bar{x}_0}(\cdot)) \in s^{-1}(y_0) \times \Xi^h \times \mathcal{U}$ до момента $\tau \in [t_0, \vartheta]$, то $\tau \le \tau^h(x_0, \bar{x}_0)$. Поэтому вместо неупреждаемости семейства $(u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in s^{-1}(y_0)}$ будем устанавливать следующее формально более сильное свойство: для всяких $\bar{x}^*_0, x^*_0 \in s^{-1}(y_0)$ выполняется

$$u^*_{x^*_0}(t) = u^*_{\bar{x}^*_0}(t) \quad (t \in [t_0, \tau^h(x^*_0, \bar{x}^*_0)]). \tag{3.26}$$

Уточним значения $\nu_1, \ldots, \nu_{i_*}$ и верхнее ограничение на параметр h точности наблюдения. Для любой программы $\bar{u}(\cdot)$ и любого $\nu > 0$ обозначим через $V_\nu(\bar{u}(\cdot))$ множество всех программ $u(\cdot)$, значения которых отличаются от значений программы $\bar{u}(\cdot)$ не более, чем на объединении i_* полуинтервалов, имеющих длины не более, чем ν. Пусть $\gamma(\cdot)$ — положительная функция положительного аргумента такая, что $\gamma(\nu) \to 0$ при $\nu \to 0$ и для любых $x_0 \in s^{-1}(y_0)$, $\nu > 0$ и любых программ $\bar{u}(\cdot)$ и $u(\cdot) \in V_\nu(\bar{u}(\cdot))$ выполняется

$$|s(x(t|x_0, u(\cdot))) - s(x(t|x_0, \bar{u}(\cdot)))| \le \gamma(\nu) \quad (t \in [t_0, \vartheta]);$$

существование такой функции очевидно. Выше мы уже отметили, что семейство $(u^*_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in s^{-1}(y_0)}$ определено таким образом (см. (3.14)–(3.21)), что $u^*_{x_0}(\cdot) \in V_{\nu_1 + \ldots + \nu_j}(u_{x_0}(\cdot))$ при всех $x_0 \in Z_j$. Поэтому

$$|s(x(t|x^*_0, u^*_{x_0}(\cdot))) - s(x(t|x^*_0, u_{x_0}(\cdot)))| \le \gamma(\nu_1 + \ldots + \nu_j) \tag{3.27}$$
$$(t \in [t_0, \vartheta], \quad x^*_0 \in s^{-1}(y_0), \quad x_0 \in Z_j, \quad j = 1, \ldots, i_*).$$

Обратимся к введенной ранее функции $\sigma(\cdot)$, участвующей в оценках (3.4). С ее помощью, отталкиваясь от значения ν_{i_*}, зададим последовательно значения $\nu_{i_*-1}, \nu_{i_*-2}, \ldots, \nu_1$ таким образом, что

$$\gamma(\nu_1 + \ldots + \nu_{j-1}) < \frac{\sigma(\nu_j)}{4} \quad (j = i_*, \ldots, 2). \tag{3.28}$$

Наконец, примем, что

$$h < \min_{j=1,\ldots,i_*} \frac{\sigma(\nu_j)}{4}. \tag{3.29}$$

Возьмем произвольные $\bar{x}_0^*, x_0^* \in s^{-1}(y_0)$. В соответствии с (3.12)

$$\bar{x}_0^* \in C(\bar{x}_0, \vartheta), \quad x_0^* \in C(x_0, \vartheta) \tag{3.30}$$

для некоторых $\bar{x}_0, x_0 \in Z$. По определению множества Z (см. (3.11)) для элемента $\bar{x}_0$ имеем либо $\bar{x}_0 = \hat{x}_0$, либо $\bar{x}_0 = \bar{x}_{\bar{q}}$, где $\bar{x}_{\bar{q}} \in Z_{\bar{q}}$ при некотором $\bar{q} \in \{1, \ldots, i_*\}$; последнее согласно (3.10) означает, что $\bar{x}_{\bar{q}}$ есть вторая компонента некоторой пары из поддерева порядка $\bar{q}$: для некоторой истории $(\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_{\bar{q}})$ длины $\bar{q}$ выполняется

$$((\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_{\bar{q}}), \bar{x}_{\bar{q}}) \in D_{\bar{q}}. \tag{3.31}$$

Аналогично, для элемента x_0 имеем либо $x_0 = \hat{x}_0$, либо $x_0 = x_q$, где $x_q \in Z_q$ при некотором $q \in \{1, \ldots, i_*\}$, т. е. x_q есть вторая компонента некоторой пары из поддерева порядка q: для некоторой истории $(\tau_1, \ldots, \tau_q)$ длины q выполняется

$$((\tau_1, \ldots, \tau_q), x_q) \in D_q. \tag{3.32}$$

Заметим, что из (3.30) согласно (3.15) и (3.19) имеем

$$u^*_{\bar{x}_0^*}(\cdot) = u^*_{\bar{x}_0}(\cdot), \quad u^*_{x_0^*}(\cdot) = u^*_{x_0}(\cdot). \tag{3.33}$$

Допустим, что $\bar{x}_0 = x_0 = \hat{x}_0$. Тогда согласно (3.30) и (3.15) $u^*_{x_0^*}(t) = u^*_{\bar{x}_0^*}(t) = u^*_{\hat{x}_0}(t)$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$, и свойство (3.26) имеет место.

Допустим, что $\bar{x}_0 = \hat{x}_0$ и $x_0 = x_q$ при выполнении (3.32) для некоторых $q \in \{1, \ldots, i_*\}$ и истории $(\tau_1, \ldots, \tau_q)$ длины q. По построению поддеревьев (см. (3.9)) и ввиду (3.32) существуют ветви $x_1, \ldots, x_{q-1}$ порядков $1, \ldots, q-1$ соответственно такие, что

$$\tau_{j+1} \in T_{\tau_1,\ldots,\tau_j}(x_j), \quad x_{j+1} \in X_{\tau_1,\ldots,\tau_{j+1}}(x_j) \quad (j = 1, \ldots, q-1). \tag{3.34}$$

Рассмотрим момент τ_1 и элемент x_1. С учетом (3.32), (3.6) и (3.5) имеем $x_1 \in X_{\tau_1} \subset C(\hat{x}_0, \tau_1) = C(\bar{x}_0, \tau_1)$, при этом по определению множества X_{τ_1} верно

$$\tau_1 = \tau(x_1, \hat{x}_0) = \tau(x_0, \bar{x}_0) = \tau(x_0^*, \bar{x}_0^*);$$

последнее равенство обусловлено включениями (3.30). Отсюда, применяя неравенство (3.4), заключаем, что найдется момент

$$t_1 \in (\tau_1, \tau_1 + \nu_1) \tag{3.35}$$

такой, что

$$|s(x(t_1|x_0^*, u_{\bar{x}_0}(\cdot))) - s(x(t_1|\bar{x}_0^*, u_{\bar{x}_0}(\cdot)))| > \sigma(\nu_1).$$

Из $\bar{x}_0 = \hat{x}_0$ и (3.14) имеем

$$u_{\bar{x}_0}(\cdot) = u_{\hat{x}_0}(\cdot) = u^*_{\hat{x}_0}(\cdot) = u^*_{\bar{x}_0}(\cdot), \tag{3.36}$$

поэтому последнее неравенство равносильно неравенству

$$|s(x(t_1|x_0^*, u^*_{\bar{x}_0}(\cdot))) - s(x(t_1|\bar{x}_0^*, u^*_{\bar{x}_0}(\cdot)))| > \sigma(\nu_1),$$

которое в свою очередь вследствие (3.33) можно записать в виде

$$|s(x(t_1|x_0^*, u_{\bar{x}_0^*}^*(\cdot))) - s(x(t_1|\bar{x}_0^*, u_{\bar{x}_0^*}^*(\cdot)))| > \sigma(\nu_1).$$

Отсюда и из оценки (3.29) имеем

$$|s(x(t_1|x_0^*, u_{\bar{x}_0^*}^*(\cdot))) - s(x(t_1|\bar{x}_0^*, u_{\bar{x}_0^*}^*(\cdot)))| > 2h.$$

Следовательно, в соответствии с обозначением (3.25)

$$t_1 > \tau^h(x_0^*, \bar{x}_0^*). \tag{3.37}$$

Пользуясь (3.34) и применяя формулу (3.20) для значений программ $u_{x_{j+1}}^*(\cdot)$ последовательно при $j = q-1, \ldots, 1$, получаем, что $u_{x_0}^*(t) = u_{x_q}^*(t) = u_{x_1}^*(t)$ при $t \in [t_0, \tau_2 + \nu_2)$. В последнее равенство подставляем представление (3.17) для $u_{x_1}^*(\cdot)$ и приходим к равенствам

$$u_{x_0}^*(t) = u_{\hat{x}_0}(t) = u_{\bar{x}_0}(t) \quad (t \in [t_0, \tau_1 + \nu_1)).$$

Поскольку $u_{x_0}^*(\cdot) = u_{x_0^*}^*(\cdot)$ (см. (3.33)) и $u_{\bar{x}_0}(\cdot) = u_{\bar{x}_0^*}^*(\cdot)$ (см. (3.36)), то

$$u_{x_0^*}^*(t) = u_{\bar{x}_0^*}^*(t) \quad (t \in [t_0, \tau_1 + \nu_1)).$$

Отсюда, принимая во внимание (3.35) и (3.37), получаем, что

$$u_{x_0^*}^*(t) = u_{\bar{x}_0^*}^*(t) \quad (t \in [t_0, \tau^h(x_0^*, \bar{x}_0^*)]).$$

Свойство (3.26) установлено.

Для случая, когда $x_0 = \hat{x}_0$ и $\bar{x}_0 = x_{\bar{q}}$ при выполнении (3.31) для некоторых $\bar{q} \in \{1, \ldots, i_*\}$ и истории $(\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_q)$ длины $\bar{q}$, доказательство свойства (3.26) опустим — оно аналогично приведенному выше.

Рассмотрим последнюю из возможных ситуаций: $\bar{x}_0 = x_{\bar{q}}$ и $x_0 = x_q$ при выполнении (3.31) и (3.32) для некоторых $\bar{q}, q \in \{1, \ldots, i_*\}$ и историй $(\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_q)$ и $(\tau_1, \ldots, \tau_q)$ с длинами $\bar{q}$ и q соответственно. По построению поддеревьев (см. (3.9)) и ввиду (3.31) и (3.32) существуют ветви $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\bar{q}-1}$ порядков $1, \ldots, \bar{q}-1$ соответственно и ветви $x_1, \ldots, x_{q-1}$ порядков $1, \ldots, q-1$ соответственно такие, что

$$\bar{\tau}_{j+1} \in T_{\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_j}(\bar{x}_j), \quad \bar{x}_{j+1} \in X_{\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_{j+1}}(\bar{x}_j) \quad (j = 1, \ldots, \bar{q}-1), \tag{3.38}$$

$$\tau_{j+1} \in T_{\tau_1, \ldots, \tau_j}(x_j), \quad x_{j+1} \in X_{\tau_1, \ldots, \tau_{j+1}}(x_j) \quad (j = 1, \ldots, q-1). \tag{3.39}$$

Возможны следующие случаи:

$$\bar{\tau}_1 \neq \tau_1;$$

$$\bar{\tau}_1 = \tau_1, \quad \bar{x}_1 \neq x_1;$$

$$\bar{\tau}_j = \tau_j, \quad \bar{x}_j = x_j \quad (j = 1, \ldots, r), \quad r \le \min\{\bar{q}, q\} - 1, \quad \bar{\tau}_{r+1} \neq \tau_{r+1}; \tag{3.40}$$

$$\bar{\tau}_j = \tau_j, \quad \bar{x}_j = x_j \quad (j = 1, \ldots, r), \quad r \le \min\{\bar{q}, q\} - 1, \quad \bar{\tau}_{r+1} = \tau_{r+1}, \quad \bar{x}_{r+1} \neq x_{r+1};$$

$$\bar{\tau}_j = \tau_j, \quad \bar{x}_j = x_j \quad (j = 1, \ldots, r), \quad r = \min\{\bar{q}, q\}, \quad \bar{q} \neq q;$$

$$\bar{\tau}_j = \tau_j, \quad \bar{x}_j = x_j \quad (j = 1, \ldots, r), \quad r = \bar{q} = q.$$

Экономя объем статьи, мы не будем рассматривать все эти случаи — доказательства свойства (3.26) для всех из них аналогичны. Приведем доказательство свойства (3.26) лишь для наиболее сложного случая (3.40).

Пусть имеет место случай (3.40). Ограничимся рассмотрением ситуации, когда $\bar{\tau}_{r+1} < \tau_{r+1}$ (ситуация противоположного неравенства анализируется аналогично). Заметим, что согласно (3.38), (3.39)

$$\bar{\tau}_{r+1}, \tau_{r+1} \in T_{\bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_j}(\bar{x}_j) = T_{\tau_1, \ldots, \tau_j}(x_j),$$

поэтому ввиду (3.24) и (3.23)

$$\tau_{r+1} > \bar{\tau}_{r+1} + \bar{\nu} > \bar{\tau}_{r+1} + \nu_{r+1}. \tag{3.41}$$

По (3.38) и (3.39) с учетом (3.40) имеем

$$\bar{x}_{r+1} \in X_{\bar{\tau}_1,\ldots,\bar{\tau}_{r+1}}(\bar{x}_r) = X_{\tau_1,\ldots,\tau_r,\bar{\tau}_{r+1}}(x_r) \subset C(x_r, \bar{\tau}_{r+1}),$$

$$x_{r+1} \in X_{\tau_1,\ldots,\tau_r,\tau_{r+1}}(x_r) \subset C(x_r, \tau_{r+1}).$$

Привлекая определение (3.3) множеств, записанных справа, получаем, что

$$\tau(\bar{x}_{r+1}, x_r) = \bar{\tau}_{r+1}, \quad \tau(x_{r+1}, x_r) = \tau_{r+1}.$$

Отсюда и из неравенства $\bar{\tau}_{r+1} < \tau_{r+1}$ следует, что

$$\tau(x_{r+1}, \bar{x}_{r+1}) = \bar{\tau}_{r+1}. \tag{3.42}$$

Опять обращаясь к (3.38) и (3.39) и учитывая (3.40), заключаем, что

$$\tau(\bar{x}_{j+1}, \bar{x}_j) = \bar{\tau}_{j+1} \quad (j = \bar{q}-1, \ldots, r), \quad \tau(x_{j+1}, x_j) = \tau_{j+1} \quad (j = q-1, \ldots, r).$$

Поэтому

$$\tau(\bar{x}_{\bar{q}}, \bar{x}_{r+1}) = \bar{\tau}_{r+1}, \quad \tau(x_q, x_{r+1}) = \tau_{r+1}.$$

Отсюда и из (3.42) следует, что

$$\tau(x_q, \bar{x}_{\bar{q}}) = \bar{\tau}_{r+1}.$$

Так как

$$\tau(x_q, \bar{x}_{\bar{q}}) = \tau(x_0, \bar{x}_0) = \tau(x_0^*, \bar{x}_0^*)$$

(последнее равенство обусловлено (3.30)), то

$$\tau(x_0^*, \bar{x}_0^*) = \bar{\tau}_{r+1}.$$

Отсюда, применяя неравенство (3.4), заключаем, что найдется момент

$$t_{r+1} \in (\bar{\tau}_{r+1}, \bar{\tau}_{r+1} + \nu_{r+1}) \subset (\bar{\tau}_{r+1}, \tau_{r+1}) \tag{3.43}$$

(последнее вложение обосновано неравенствами (3.41)) такой, что

$$|s(x(t_{r+1}|x_0^*, u_{\bar{x}_0}(\cdot))) - s(x(t_{r+1}|\bar{x}_0^*, u_{\bar{x}_0}(\cdot)))| > \sigma(\nu_{r+1}). \tag{3.44}$$

На основании (3.30) и (3.21) и в силу того, что $\bar{x}_r = x_r$ (см. (3.40)), заключаем, что

$$u_{\bar{x}_0}(t) = u_{\bar{x}_{\bar{q}}}(t) = u_{\bar{x}_r}(t) = u_{x_r}(t) \quad (t \in [t_0, \tau_{r+1}]).$$

Поэтому с учетом (3.43) перепишем (3.44) как

$$|s(x(t_{r+1}|x_0^*, u_{x_r}(\cdot))) - s(x(t_{r+1}|\bar{x}_0^*, u_{x_r}(\cdot)))| > \sigma(\nu_{r+1}). \tag{3.45}$$

Используя (3.27), замечаем, что

$$|s(x(t_{r+1}|x_0^*, u_{x_r}^*(\cdot))) - s(x(t|x_0^*, u_{x_r}(\cdot)))| \le \gamma(\nu_1 + \ldots + \nu_r),$$

$$|s(x(t_{r+1}|\bar{x}_0^*, u_{x_r}^*(\cdot))) - s(x(t|\bar{x}_0^*, u_{x_r}(\cdot)))| \le \gamma(\nu_1 + \ldots + \nu_r).$$

Отсюда и из (3.45) получаем, что

$$|s(x(t_{r+1}|x_0^*, u_{x_r}^*(\cdot))) - s(x(t_{r+1}|\bar{x}_0^*, u_{x_r}^*(\cdot)))| > \sigma(\nu_{r+1}) - 2\gamma(\nu_1 + \ldots + \nu_r) > \frac{\sigma(\nu_{r+1})}{2}; \tag{3.46}$$

последнее неравенство следует из оценок (3.28). Обращаясь к (3.30), (3.21) и (3.20), видим, что

$$u^*_{\bar{x}_0}(t) = u^*_{\bar{x}_{\bar{q}}}(t) = u^*_{\bar{x}_r}(t) = u^*_{x_r}(t) \qquad (t \in [t_0, \bar{\tau}_{r+1} + \nu_{r+1})), \tag{3.47}$$

$$u^*_{x_0}(t) = u^*_{x_q}(t) = u^*_{x_r}(t) \qquad (t \in [t_0, \bar{\tau}_{r+1} + \nu_{r+1})). \tag{3.48}$$

Подставляя (3.47) в (3.46), получаем

$$|s(x(t_{r+1}|x^*_0, u^*_{\bar{x}_0}(\cdot))) - s(x(t_{r+1}|\bar{x}^*_0, u^*_{\bar{x}_0}(\cdot)))| > \frac{\sigma(\nu_{r+1})}{2}.$$

Из этой оценки с учетом оценки (3.29) (см. также (3.25)) заключаем, что

$$t_{r+1} > \tau^h(x^*_0, \bar{x}^*_0).$$

Поэтому вследствие (3.47) и (3.48) имеем

$$u^*_{x^*_0}(t) = u^*_{\bar{x}^*_0}(t) \quad (t \in [t_0, \tau^h(x^*_0, \bar{x}^*_0)]).$$

Свойство (3.26) установлено.

Доказательство леммы 2.3 закончено.

Заключение

В настоящей работе реализуется часть плана по развитию метода пакетов программ, намеченного в заключительном разделе статьи [1]. Мы несколько продвинулись в выявлении конструктивных условий разрешимости задачи пакетного наведения (или, что то же, задачи позиционного наведения) при неполной информации. Продвижение заключается в том, что в постановке задачи мы перешли от пакетов программ к идеализированным пакетам программ. Данный переход означает существенное упрощение задачи: идеализированные пакеты программ устроены значительно проще, чем исходные пакеты программ. Суть упрощения заключается в том, что идеализированные пакеты программ реагируют лишь на конечномерные начальные состояния управляемой системы (представляют собой функции “начальное состояние — программа”), в то время как исходные пакеты программ реагируют как на конечномерные входы — начальные состояния, так и на бесконечномерные входы — неопределенные помехи наблюдения. Упрощенный характер идеализированных пакетов программ позволяет создать определенную базу для аналитических исследований по выявлению конструктивных условий разрешимости задачи пакетного наведения, по крайней мере, для некоторых классов управляемых систем.

Отметим, что итоговая теорема 2.2 об эквивалентной разрешимости доказана нами при весьма ограничительном предположении о конечности множества X_0 начальных состояний системы. Возникает вопрос: остается ли теорема справедливой при отказе от этого предположения? В случае отрицательного ответа на этот вопрос (подтвержденного контрпримером) в общей ситуации правомерно поставить следующий вопрос о выделении классов задач, для которых теорема 2.2 верна без предположения о конечности множества X_0. Изучение этих вопросов могло бы составить следующий шаг в развитии метода пакетов программ “вглубь”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

5. **Krasovskii A.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New-York: Springer Verlag, 1988. 517 p.
6. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Boston: Birkhäuser, 1995. 322 p.
7. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
8. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first-order PDEs. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
9. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
10. **Кряжимский А.В., Филиппов С.Д.** Об игровой задаче наведения для двух точек на плоскости в условиях неполной информации // Задачи управления при неполной информации. Вып. 19. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1976. С. 62–77.
11. **Пак В.Е.** Задача наведения с неполной информацией // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. 1976. №4. С. 29–36.
12. **Батухтин В.Д.** Об одной игровой задаче наведения с неполной информацией // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 44, № 4. С. 579–591.
13. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** Задача управления с неполной информацией // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. 1973. № 4. С. 5–14.
14. **Кряжимский А.В.** Дифференциальная игра сближения в условиях неполной информации о системе// Укр. мат. журнал. 1975. Т. 27, № 4. С. 521–526.
15. **Кряжимский А.В.** Альтернатива в линейной игре наведения-уклонения с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 4. С. 773–776.
16. **Крекнин А.А., Субботин А.И.** Игровая задача преследования в условиях неполной фазовой информации о преследуемой системе // Дифф. системы управления. Вып. 26. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1979. С. 21–33.
17. **Куржанский А.Б.** О синтезе управлений по результатам наблюдений // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, № 4. С. 547–563.
18. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii F.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
19. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
20. **Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S.** On positional calculation of Ω-normal controls in dynamical systems // Probl. Contr. Inform. Theory. 1984. Vol. 13, no. 6. C. 425–436.
21. **Fagnani F., Maksimov V., Pandolfi L.** A recursive deconvolution approach to disturbance reduction // IEEE Trans. Automat. Control. 2004. Vol. 49, no. 6. P. 907–921.
22. **Ченцов А.Г.** Метод программных итераций в абстрактных задачах управления // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, № 4. С. 573–585.
23. **Roxin E.** Axiomatic approach in differential games // J. Opt. Theory Appl. 1969. Vol. 3. P. 153–163.
24. **Ryll-Nardzewski C.** A theory of purcuit and evasion // Advances in Game Theory. Ann. of Math. Stud. Vol. 52. Princeton: Univ. Press, 1964. P. 113–126.

Поступила 6.07.2009

Кряжимский Аркадий Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик РАН
гл. науч. сотрудник
Математический ин-т им. В.А. Стеклова
e-mail: kryazhim@mi.ras.ru

Осипов Юрий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик РАН
Президент РАН

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517.977

ОБ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ГАРАНТИРОВАННОГО РЕЗУЛЬТАТА В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Н. Ю. Лукоянов

Для задач управления в условиях помех динамическими системами, описываемыми дифференциальными уравнениями с сосредоточенными и распределенными запаздываниями времени, при условии липшицевости исходных данных обоснована соответствующая липшицевость функционала оптимального гарантированного результата и получены неравенства для его производных по направлениям.

Ключевые слова: оптимальное управление, дифференциальные игры, системы с запаздыванием.

N. Yu. Lukoyanov. On optimality conditions for the guaranteed result in control problems for time-delay systems.

For control problems under disturbance of dynamical systems described by differential equations with discrete and distributed time delays and with initial data satisfying the Lipschitz property, the corresponding Lipschitzness of the optimal guaranteed result functional is established and inequalities for its directional derivatives are obtained.

Keywords: optimal control, differential games, time-delay systems.

Введение

В математической теории управления движением динамических систем, особенно в задачах об управлении по принципу обратной связи, важную роль играет понятие функции цены. В задачах оптимального управления [1, 2] это величина оптимального результата. В теории дифференциальных игр [3–5], имеющей дело с задачами управления в условиях неконтролируемых помех или конфликта, это величина оптимального гарантированного результата. Для управляемых объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, известны различные условия, определяющие функцию цены (см., например, [5–8]), и в том числе неравенства [6] для производных этой функции по направлениям. Настоящая статья посвящена обобщению этих неравенств для управляемых объектов, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями. Рассматривается задача управления на конечном промежутке в условиях помех. Предполагается, что правые части уравнений движения, а также отображения, участвующие в записи показателя качества, удовлетворяют относительно непрерывных историй движения условиям Липшица, характерным для систем с сосредоточенными и распределенными запаздываниями времени. Постановка задачи проводится в рамках теоретико-игрового подхода [5, 9] в сочетании с функциональной трактовкой систем с запаздыванием [10, 11]. При выводе искомых функционально-дифференциальных неравенств, определяющих величину оптимального гарантированного результата, используются конструкции унификации дифференциальных игр [12] в свете теории обобщенных решений уравнений типа Гамильтона — Якоби [8, 13, 14]. При обосновании применяются стратегии управления [15], определяемые экстремальным сдвигом в направлении коинвариантных градиентов [16] вспомогательных функционалов Ляпунова [10]. Статья уточняет результаты из [17, 18] для задач с липшицевыми исходными данными, дополняя и обосновывая результаты, авансированные в [19].

[1]Работа выполнена в рамках программы президиума РАН “Математическая теория управления”, а также при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00313) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2640.2008.1).

1. Постановка задачи

Пусть зафиксированы моменты времени $t_* < t_0 < T$. Через C обозначим множество непрерывных n-мерных функций $x(\cdot) = \big\{x(\tau) \in \mathbb{R}^n, t_* \le \tau \le T\big\}$, определенных на отрезке $[t_*, T]$. Рассмотрим динамическую систему, описываемую функционально-дифференциальным уравнением

$$\dot{y}(\tau) = f\big(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)\big), \quad t \le \tau < T, \tag{1.1}$$
$$y(\tau) \in \mathbb{R}^n, \quad u(\tau) \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v(\tau) \in Q \subset \mathbb{R}^q$$

с начальным условием

$$y(\tau) = x(\tau) \text{ при } t_* \le \tau \le t. \tag{1.2}$$

Здесь τ — переменное время , $y(\tau)$ и $\dot{y}(\tau) = \mathrm{d}y(\tau)/\mathrm{d}\tau$ — значение фазового вектора и скорость его изменения в текущий момент времени τ, $u(\tau)$ — текущее воздействие управления, $v(\tau)$ — воздействие неконтролируемой помехи, P и Q — известные компакты соответствующих конечномерных пространств, t и T — начальный и терминальный моменты времени. Предполагается, что $t_0 \le t < T$. Начальная история движения определяется на отрезке $[t_*, t]$ начальной функцией $x(\cdot) \in C$. Допустимы измеримые по Борелю реализации управления $u(\cdot) = \big\{u(\tau) \in P, t \le \tau < T\big\}$ и помехи $v(\cdot) = \big\{v(\tau) \in Q, t \le \tau < T\big\}$. Соответственно символ $y(\cdot)$ обозначает реализацию движения. Именно, имеет место включение $y(\cdot) \in C$, и при этом функция $y(\cdot)$ удовлетворяет начальному условию (1.2), является абсолютно непрерывной на отрезке $[t, T]$ и почти всюду удовлетворяет уравнению (1.1) вместе с $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. Тройку $\big\{y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\big\}$ называем реализацией процесса управления.

Пусть качество процесса управления оценивается показателем

$$\gamma = \gamma\big(y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\big) = \sigma\big(y(\cdot)\big) - \int\limits_t^T h\big(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)\big)\mathrm{d}\tau. \tag{1.3}$$

Цель управления — доставить показателю (1.3) как можно меньшее значение. Действия помехи непредсказуемы и, вообще говоря, могут быть самыми неблагоприятными, т.е. направленными на максимизацию этого показателя.

Полагаем, что при любых фиксированных $u \in P$ и $v \in Q$ отображения

$$\begin{aligned} [t_0, T] \times C \ni \big(\tau, y(\cdot)\big) \quad &\mapsto \quad f = f\big(\tau, y(\cdot), u, v\big) \in \mathbb{R}^n, \\ [t_0, T] \times C \ni \big(\tau, y(\cdot)\big) \quad &\mapsto \quad h = h\big(\tau, y(\cdot), u, v\big) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

являются *неупреждающими.* Это означает, что для любого $\tau \in [t_0, T]$ и всех $y(\cdot) \in C$, $z(\cdot) \in C$ таких, что $z(\xi) = y(\xi)$ при $\xi \in [t_*, \tau]$, имеют место равенства

$$\begin{aligned} f\big(\tau, z(\cdot), u, v\big) \quad &= \quad f\big(\tau, y(\cdot), u, v\big), \\ h\big(\tau, z(\cdot), u, v\big) \quad &= \quad h\big(\tau, y(\cdot), u, v\big). \end{aligned}$$

Указанное свойство неупреждаемости определяет рассматриваемую динамическую систему как систему с запаздыванием по состоянию.

Кроме того, полагаем выполненными следующие условия:

(A1) Отображения $f : [t_0, T] \times C \times P \times Q \mapsto \mathbb{R}^n$, $h : [t_0, T] \times C \times P \times Q \mapsto \mathbb{R}$ и $\sigma : C \mapsto \mathbb{R}$ непрерывны.

(A2) Существует такая константа $c > 0$, что для всех $\tau \in [t_0, T]$, $y(\cdot) \in C$, $u \in P$ и $v \in Q$ справедлива оценка

$$\big\|f\big(\tau, y(\cdot), u, v\big)\big\| + \big|h\big(\tau, y(\cdot), u, v\big)\big| \le \Big(1 + \max_{t_* \le \xi \le \tau} \|y(\xi)\|\Big)c.$$

(A3) Существуют сосредоточенные запаздывания

$$\vartheta_j \in (0, t_0 - t_*], \quad j = 1, \ldots, J,$$

и моменты времени

$$t_k \in [t_0, T], \quad t_{k-1} < t_k, \quad k = 1, \ldots, K, \quad t_K = T,$$

такие, что для всякого компакта $D \subset C$ можно подобрать такую константу $\lambda = \lambda(D) > 1$, для которой при всех $\tau \in [t_0, T]$, $y(\cdot) \in D$ и $z(\cdot) \in D$ будут справедливы следующие условия Липшица:

$$\begin{gathered} \big\| f\big(\tau, y(\cdot), u, v\big) - f\big(\tau, z(\cdot), u, v\big) \big\| + \big| h\big(\tau, y(\cdot), u, v\big) - h\big(\tau, z(\cdot), u, v\big) \big| \\ \leq \left(\|y(\tau) - z(\tau)\| + \sum_{j=1}^{J} \|y(\tau - \vartheta_j) - z(\tau - \vartheta_j)\| + \sqrt{\int_{t_*}^{\tau} \|y(\xi) - z(\xi)\|^2 \mathrm{d}\xi} \right) \lambda, \end{gathered}$$

$$\big| \sigma\big(y(\cdot)\big) - \sigma\big(z(\cdot)\big) \big| \leq \left(\sum_{k=0}^{K} \|y(t_k) - z(t_k)\| + \sqrt{\int_{t_*}^{T} \|y(\tau) - z(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau} \right) \lambda.$$

Здесь и всюду ниже символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора.

В частности, указанные условия обеспечивают существование и единственность реализации движения $y(\cdot)$ системы (1.1), (1.2) для всякой начальной позиции $\big(t, x(\cdot)\big) \in [t_0, T) \times C$ и любых допустимых реализаций управления $u(\cdot)$ и помехи $v(\cdot)$.

Стратегию управления отождествляем с произвольным *неупреждающим* отображением

$$[t, T) \times C \ni \big(\tau, y(\cdot)\big) \mapsto U = U\big(\tau, y(\cdot)\big) \in P.$$

Процесс управления на базе стратегии U осуществляется в дискретной по времени схеме. Выбирается разбиение отрезка времени $[t, T]$:

$$\Delta = \big\{\tau_i : \tau_1 = t,\ \tau_{i+1} > \tau_i,\ i = 1, \ldots, I,\ \tau_{I+1} = T\big\},$$

и последовательно по шагам этого разбиения в цепи обратной связи формируется реализация управления

$$u(\tau) = U\big(\tau_i, y(\cdot)\big), \quad \tau_i \leq \tau < \tau_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, I. \tag{1.4}$$

Пусть $S^u\big(t, x(\cdot), U, \Delta\big)$ — множество всех возможных реализаций процесса управления, отвечающих заданной начальной позиции $\big(t, x(\cdot)\big) \in [t_0, T) \times C$, выбранной стратегии управления U и разбиению Δ. Согласно вышеизложенному это множество состоит из таких троек $\big\{y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\big\}$, что $v(\cdot)$ — измеримая по Борелю функция из $[t, T)$ в Q, $u(\cdot)$ — кусочно-постоянная функция вида (1.4), а функция $y(\cdot) \in C$ удовлетворяет начальному условию (1.2), абсолютно непрерывна на $[t, T]$ и вместе с $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ при почти всех $\tau \in [t, T]$ удовлетворяет уравнению (1.1). Оптимальный гарантированный результат φ управления определяется следующим образом:

$$\varphi = \varphi\big(t, x(\cdot)\big) = \inf_{U, \Delta}\ \sup \Big\{ \gamma\big(y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\big) \;\big|\; \big\{y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\big\} \in S^u\big(t, x(\cdot), U, \Delta\big) \Big\}. \tag{1.5}$$

Величина (1.5) определена для всех $\big(t, x(\cdot)\big) \in [t_0, T) \times C$. При $t = T$ естественно положить

$$\varphi\big(T, x(\cdot)\big) = \sigma\big(x(\cdot)\big), \quad x(\cdot) \in C. \tag{1.6}$$

Цель настоящей работы состоит в исследовании инфинитезимальных соотношений, которые вместе с условием (1.6) однозначно определяют функционал оптимального гарантированного результата

$$[t_0, T] \times C \ni \big(t, x(\cdot)\big) \mapsto \varphi = \varphi\big(t, x(\cdot)\big) \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

который, следуя терминологии теории дифференциальных игр, будем называть *функционалом цены*. Отметим, что по своему определению этот функционал является неупреждающим.

2. Предварительные результаты

Пусть $\big(t, x(\cdot)\big) \in [t_0, T] \times C$. Через $Y\big(t, x(\cdot)\big)$ обозначим множество таких функций $y(\cdot) \in C$, значения которых совпадают со значениями функции $x(\cdot)$ на отрезке $[t_*, t]$, и при этом в случае $t < T$ эти функции являются абсолютно непрерывными на $[t, T]$, удовлетворяя при почти всех $\tau \in [t, T]$ следующему неравенству:

$$\|\dot{y}(\tau)\| \leq \Big(1 + \max_{t_* \leq \xi \leq \tau} \|y(\xi)\|\Big) c.$$

В силу условия (A2) для любой возможной реализации $\big\{y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\big\}$ процесса управления (1.1)–(1.3) справедливо включение $y(\cdot) \in Y\big(t, x(\cdot)\big)$. Пусть далее D_* — некоторый компакт из C и $x(\cdot) \in D_*$. Положим

$$Y_0 = Y_0(D_*) = \Big\{y(\cdot) \in Y\big(t, x(\cdot)\big) \;\Big|\; \big(t, x(\cdot)\big) \in [t_0, T] \times D_*\Big\}. \tag{2.1}$$

Множество Y_0 компактно в C. Опираясь на условие (A3), возьмем $\lambda = \lambda(Y_0) > 1$ и рассмотрим при $0 < \varepsilon < \mathrm{e}^{(J+3)\lambda(t_* - T)}$ следующий неупреждающий функционал Ляпунова ν_ε на $[t_0, T] \times C$:

$$\nu_\varepsilon = \nu_\varepsilon\big(\tau, y(\cdot)\big) = \frac{\mathrm{e}^{(J+3)\lambda(t_* - \tau)}}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^4 + 2\lambda \sum_{j=1}^{J} \int_{\tau - \vartheta_j}^{\tau} \|y(\xi)\|^2 \mathrm{d}\xi + \|y(\tau)\|^2}$$

$$+ \frac{\mathrm{e}^{(J+3)\lambda(t_* - \tau)} - \varepsilon}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^4 + 2\lambda \int_{t_*}^{\tau} \|y(\xi)\|^2 \mathrm{d}\xi + \|y(\tau)\|^2}\,, \quad \big(\tau, y(\cdot)\big) \in [t_0, T] \times C.$$

Можно непосредственно проверить, что при условиях (A1)–(A3) такой функционал (с точностью до обозначений) удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к вспомогательному функционалу ν_ε в работах [15] и [18]. Таким образом, указанный функционал можно использовать в рассматриваемой задаче для построения стратегий экстремального прицеливания в направлении коинвариантных градиентов. С одной стороны, определим экстремальную стратегию управления $U^{\mathrm{e}}_\varepsilon$:

$$\begin{gathered} U^{\mathrm{e}}_\varepsilon = U^{\mathrm{e}}_\varepsilon\big(\tau, y(\cdot)\big) \in \arg\min_{u \in P} \Big\{ \max_{v \in Q} \Big[\big\langle s^u,\ f\big(\tau, y(\cdot), u, v\big)\big\rangle - h\big(\tau, y(\cdot), u, v\big)\Big]\Big\}, \\ s^u = \nabla \nu_\varepsilon\big(\tau, y(\cdot) - z^u(\cdot)\big), \\ z^u(\cdot) \in \arg\min_{z(\cdot) \in Y_0} \big[\varphi\big(\tau, z(\cdot)\big) + \nu_\varepsilon\big(\tau, y(\cdot) - z(\cdot)\big)\big], \end{gathered} \tag{2.2}$$

а с другой — экстремальную контрстратегию помехи $V^{\mathrm{e}}_\varepsilon$:

$$V^{\mathrm{e}}_\varepsilon = V^{\mathrm{e}}_\varepsilon\big(\tau, y(\cdot), u\big) \in \arg\max_{v \in Q} \Big\{ \big\langle s_v,\ f\big(\tau, y(\cdot), u, v\big)\big\rangle - h\big(\tau, y(\cdot), u, v\big)\Big\},$$

$$s_v = \nabla \nu_\varepsilon\big(\tau, z_v(\cdot) - y(\cdot)\big),$$

$$z_v(\cdot) \in \arg\max_{z(\cdot) \in Y_0} \big[\varphi\big(\tau, z(\cdot)\big) - \nu_\varepsilon\big(\tau, z(\cdot) - y(\cdot)\big)\big].$$

Здесь φ — функционал цены (1.7), символ $\nabla \nu_\varepsilon$ обозначает коинвариантный градиент функционала ν_ε (см. [15, 16], а также [19]), угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означают скалярное произведение векторов. При определении контрстратегии $V^{\mathrm{e}}_\varepsilon\big(\tau, y(\cdot), u\big)$, опираясь на известные теоремы об измеримом выборе (см., например, [20]), полагаем, что для фиксированных $\big(\tau, y(\cdot)\big) \in [t_0, T] \times C$ отображение $P \ni u \mapsto V^{\mathrm{e}}_\varepsilon\big(\tau, y(\cdot), u\big) \in Q$ измеримо по Борелю.

Следующие утверждения, устанавливающие оптимальность и, соответственно, контроптимальность указанных стратегий, доказываются при помощи рассуждений, аналогичных приведенным в [15] при доказательстве теоремы 1.

Утверждение 1. *Для любого числа $\zeta > 0$ найдутся число $\varepsilon > 0$ и разбиение Δ отрезка времени $[t,T]$ такие, что для всякой начальной функции $x(\cdot) \in D_*$ при любой реализации $\bigl\{y(\cdot),u(\cdot),v(\cdot)\bigr\} \in S^u\bigl(t,x(\cdot),U^{\mathrm{e}}_{\varepsilon},\Delta\bigr)$ рассматриваемого процесса управления будет выполняться неравенство*

$$\gamma\bigl(y(\cdot),u(\cdot),v(\cdot)\bigr) \le \varphi\bigl(t,x(\cdot)\bigr) + \zeta. \tag{2.3}$$

Утверждение 2. *Для всякого числа $\zeta > 0$ существуют такие число $\varepsilon > 0$ и разбиение Δ отрезка времени $[t,T]$, что для любой начальной функции $x(\cdot) \in D_*$ будет справедливо неравенство*

$$\gamma\bigl(y(\cdot),u(\cdot),v(\cdot)\bigr) \ge \varphi\bigl(t,x(\cdot)\bigr) - \zeta, \tag{2.4}$$

какова бы ни случилась реализация $\bigl\{y(\cdot),u(\cdot),v(\cdot)\bigr\} \in S_v\bigl(t,x(\cdot),V^{\mathrm{e}}_{\varepsilon},\Delta\bigr)$.

В формулировке утверждения 2 через $S_v\bigl(t,x(\cdot),V^{\mathrm{e}}_{\varepsilon},\Delta\bigr)$ обозначено множество, состоящее из всех таких троек $\bigl\{y(\cdot),u(\cdot),v(\cdot)\bigr\}$, в которых $u(\cdot)$ — измеримая по Борелю функция, действующая из $[t,T)$ в P, $v(\cdot)$ — кусочно-программная функция вида

$$v(\tau) = V^{\mathrm{e}}_{\varepsilon}\bigl(\tau_i, y(\cdot), u(\tau)\bigr), \quad \tau_i \le \tau < \tau_{i+1}, \quad i = 1,\ldots,I,$$

а функция $y(\cdot) \in C$ удовлетворяет начальному условию (1.2), абсолютно непрерывна на отрезке $[t,T]$ и почти всюду на этом отрезке удовлетворяет вместе с $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ уравнению (1.1).

Пусть $\psi : [t_0,T] \times C \mapsto \mathbb{R}$ — неупреждающий функционал, $\bigl(t,x(\cdot)\bigr) \in [t_0,T) \times C$, L — выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$, $[L]^{\alpha}$ — замкнутая α-окрестность L в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_{\alpha} = \Omega_{\alpha}\bigl(t,x(\cdot),L\bigr)$ — множество таких функций $y(\cdot) \in C$, которые совпадают с $x(\cdot)$ на $[t_*,t]$, абсолютно непрерывны на $[t,T]$ и при почти всех $\tau \in [t,T)$ удовлетворяют включению $\dot y(\tau) \in [L]^{\alpha}$. Обозначим

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^-\bigl\{\psi\bigl(t,x(\cdot)\bigr)\,\big|\,L\bigr\} &= \lim_{\alpha\downarrow 0}\ \inf_{y(\cdot)\in\Omega_{\alpha}}\ \liminf_{\delta\downarrow 0}\ \bigl[\psi\bigl(t+\delta,y(\cdot)\bigr) - \psi\bigl(t,x(\cdot)\bigr)\bigr]\,\delta^{-1},\\
\mathrm{d}^+\bigl\{\psi\bigl(t,x(\cdot)\bigr)\,\big|\,L\bigr\} &= \lim_{\alpha\downarrow 0}\ \sup_{y(\cdot)\in\Omega_{\alpha}}\ \limsup_{\delta\downarrow 0}\ \bigl[\psi\bigl(t+\delta,y(\cdot)\bigr) - \psi\bigl(t,x(\cdot)\bigr)\bigr]\,\delta^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Величины $\mathrm{d}^-\bigl\{\psi\bigl(t,x(\cdot)\bigr)\,\big|\,L\bigr\}$ и $\mathrm{d}^+\bigl\{\psi\bigl(t,x(\cdot)\bigr)\,\big|\,L\bigr\}$ представляют собой соответственно нижнюю и верхнюю правые полупроизводные функционала ψ по многозначному направлению $L \subset \mathbb{R}^n$ (см. [17]). Отметим, что эти величины могут принимать несобственные значения $\pm\infty$.

Определим замкнутый шар

$$B\bigl(t,x(\cdot)\bigr) = \Bigl\{l \in \mathbb{R}^n :\ \|l\| \le \Bigl(1 + \max_{t_*\le\tau\le t}\|x(\tau)\|\Bigr)\,c\Bigr\}, \tag{2.6}$$

где c — константа, используемая в условии (A2). Согласно [18] имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *При условиях* (A1)–(A3) *функционал цены φ* (1.7) *является единственным неупреждающим непрерывным функционалом, который удовлетворяет равенству* (1.6) *и паре следующих дифференциальных неравенств:*

$$\mathrm{d}^-\bigl\{\varphi\bigl(t,x(\cdot)\bigr) - \bigl\langle s,x(t)\bigr\rangle\,\big|\,B\bigl(t,x(\cdot)\bigr)\bigr\} + H\bigl(t,x(\cdot),s\bigr) \ \le\ 0, \tag{2.7}$$

$$\mathrm{d}^+\bigl\{\varphi\bigl(t,x(\cdot)\bigr) - \bigl\langle s,x(t)\bigr\rangle\,\big|\,B\bigl(t,x(\cdot)\bigr)\bigr\} + H\bigl(t,x(\cdot),s\bigr) \ \ge\ 0, \tag{2.8}$$

$$\bigl(t,x(\cdot)\bigr) \in [t_0,T) \times C, \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

где величина

$$H\bigl(t,x(\cdot),s\bigr) = \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\Bigl[\bigl\langle s, f\bigl(t,x(\cdot),u,v\bigr)\bigr\rangle - h\bigl(t,x(\cdot),u,v\bigr)\Bigr] \tag{2.9}$$

представляет гамильтониан системы (1.1)–(1.3).

Ниже будет показано, что в силу условия (A3) в рассматриваемой задаче функционал цены φ обладает определенными свойствами липшицевости, благодаря которым в неравенствах (2.7) и (2.8) можно перейти от полупроизводных по многозначному направлению $B\big(t,x(\cdot)\big)$ к полупроизводным по конечномерным направлениям $l \in B\big(t,x(\cdot)\big)$, получив тем самым непосредственное обобщение на случай систем с запаздыванием известных неравенств [6,8], определяющих функцию цены в задачах управления системами без запаздывания.

3. Свойство липшицевости функционала цены

Обозначим

$$\mathcal{K}(t) = \max\Big\{k = 0,1,\ldots,K \,\Big|\, t_k \le t\Big\}, \quad t \in [t_0,T],$$

где $t_0, t_1, \ldots, t_K$ — моменты времени из условия (A3).

Теорема 2. *Для всякого компактного подмножества $D_* \subset C$ найдется такая константа $\lambda_* = \lambda_*(D_*) > 0$, что при любых $t \in [t_0,T]$, $x(\cdot) \in D_*$ и $w(\cdot) \in D_*$ для функционала цены φ (1.7) будет выполняться следующая оценка*:

$$\Big|\varphi\big(t,x(\cdot)\big) - \varphi\big(t,w(\cdot)\big)\Big|^2 \le \left(\sum_{k=0}^{\mathcal{K}(t)} \|x(t_k)-w(t_k)\|^2 + \|x(t)-w(t)\|^2 + \int\limits_{t_*}^{t} \|x(\tau)-w(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau\right)\lambda_*^2. \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем компакт $D_* \subset C$. Пусть $t \in [t_0,T]$, $x(\cdot) \in D_*$ и $w(\cdot) \in D_*$. Если $t = T$, то оценка (3.1) вытекает из условия (A3) и равенства (1.6). Полагая далее $t < T$, рассмотрим “удвоенную” систему (1.1)

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot y(\tau) & = & f\big(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)\big) \\ \dot z(\tau) & = & f\big(\tau, z(\cdot), u(\tau), v(\tau)\big), \end{array}\right. \quad t \le \tau < T, \quad (3.2)$$

при начальных условиях

$$y(\tau) = x(\tau), \quad z(\tau) = w(\tau) \ \text{ при } t_* \le \tau \le t. \quad (3.3)$$

Каковы бы ни были допустимые реализации $u(\cdot)$ управления и $v(\cdot)$ помехи, в силу условия (A2) для соответствующих реализаций $y(\cdot)$, $z(\cdot)$ движения системы (3.2), (3.3) будут выполняться включения $y(\cdot) \in Y_0$, $z(\cdot) \in Y_0$, где компакт $Y_0 \subset C$ определяется по компакту D_* согласно равенству (2.1). В соответствии с условием (A3) возьмем $\lambda = \lambda(Y_0) > 1$ и рассмотрим следующий функционал Ляпунова:

$$\begin{aligned} \mu\big(\tau, y(\cdot)\big) \ = \ & \mathrm{e}^{2(JK+K+1)(t_*-\tau)\lambda}\Bigg[\sum_{k=0}^{\mathcal{K}(\tau)} \|y(t_k)\|^2 + \big(K - \mathcal{K}(\tau)\big)\|y(\tau)\|^2 \\ & + K\lambda \sum_{j=1}^{J} \int\limits_{\tau-\vartheta_j}^{\tau} \|y(\xi)\|^2 \mathrm{d}\xi + K\lambda \int\limits_{t_*}^{\tau} \|y(\xi)\|^2 \mathrm{d}\xi\Bigg]. \end{aligned}$$

Вычисляя полную производную этого функционала вдоль движения системы (3.2), (3.3), после соответствующих преобразований получаем, что при почти всех $\tau \in [t,T]$, независимо от реализаций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, имеет место оценка

$$\begin{aligned} \dot\mu\big(\tau, y(\cdot) - z(\cdot)\big) \le -\mathrm{e}^{2(JK+K+1)(t_*-\tau)\lambda} K\lambda \Bigg[& \sum_{j=1}^{J}\Big(\|y(\tau)-z(\tau)\| - \|y(\tau-\vartheta_j) - z(\tau-\vartheta_j)\|\Big)^2 \\ & + \left(\|y(\tau)-z(\tau)\| - \sqrt{\int\limits_{t_*}^{\tau} \|y(\xi)-z(\xi)\|\mathrm{d}\xi}\right)^2\Bigg] \le 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что при любых допустимых реализациях $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ справедливы соотношения

$$\mu\big(t, x(\cdot) - w(\cdot)\big) = \mu\big(t, y(\cdot) - z(\cdot)\big) \geq \mu\big(T, y(\cdot) - z(\cdot)\big). \tag{3.4}$$

Теперь возьмем произвольно число $\zeta > 0$, по этому числу, опираясь на утверждения 1,2, определим подходящие значения $\varepsilon_u > 0$, $\varepsilon_v > 0$ и разбиения

$$\begin{aligned} \Delta^u &= \big\{\tau^u_{i_u} : \tau^u_1 = t,\ \tau^u_{i_u+1} > \tau^u_{i_u},\ i_u = 1, \ldots, I_u,\ \tau^u_{I_u+1} = T\big\}, \\ \Delta^v &= \big\{\tau^v_{i_v} : \tau^v_1 = t,\ \tau^v_{i_v+1} > \tau^v_{i_v},\ i_v = 1, \ldots, I_v,\ \tau^v_{I_v+1} = T\big\}, \end{aligned}$$

после чего положим, что в системе (3.2) реализации $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ формируются следующим образом:

$$\begin{aligned} u(\tau) &= U^{\mathrm{e}}_{\varepsilon_u}\big(\tau^u_{i_u}, y(\cdot)\big),\ \tau^u_{i_u} \leq \tau < \tau^u_{i_u+1},\ i_u = 1, \ldots, I_u, \\ v(\tau) &= V^{\mathrm{e}}_{\varepsilon_v}\big(\tau^v_{i_v}, z(\cdot), u(\tau)\big),\ \tau^v_{i_v} \leq \tau < \tau^v_{i_v+1},\ i_v = 1, \ldots, I_v. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с утверждением 1 для рассматриваемого движения системы (3.2), (3.3) наряду с соотношением (3.4) будет выполняться неравенство

$$\gamma\big(y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\big) \leq \varphi\big(t, x(\cdot)\big) + \zeta, \tag{3.5}$$

а по утверждению 2 — неравенство

$$\gamma\big(z(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\big) \geq \varphi\big(t, w(\cdot)\big) - \zeta. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6), используя равенство (1.3), условие (A3) и известное неравенство Коши — Буняковского, выводим

$$\varphi\big(t, w(\cdot)\big) - \varphi\big(t, x(\cdot)\big) \leq 2\zeta + \lambda_1 \sqrt{\sum_{k=0}^{K} \|y(t_k) - z(t_k)\|^2 + \int_{t_*}^{T} \|y(\tau) - z(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau},$$

где

$$\lambda_1 = \Big(1 + T - t_* + (J+1)\sqrt{T - t_*}\Big)\lambda\sqrt{K+1}.$$

Отсюда, принимая во внимание вид функционала μ, получаем неравенство

$$\varphi\big(t, w(\cdot)\big) - \varphi\big(t, x(\cdot)\big) \leq 2\zeta + \lambda_2 \sqrt{\mu\big(T, y(\cdot) - z(\cdot)\big)}, \tag{3.7}$$

где

$$\lambda_2 = \lambda_1\, \mathrm{e}^{(JK+K+1)(T-t_*)\lambda}.$$

Из соотношений (3.4) и (3.7), если учесть, что число $\zeta > 0$ было взято произвольно, вытекает справедливость неравенства

$$\varphi\big(t, w(\cdot)\big) - \varphi\big(t, x(\cdot)\big) \leq \lambda_2 \sqrt{\mu\big(t, x(\cdot) - w(\cdot)\big)}. \tag{3.8}$$

Меняя функции $x(\cdot)$ и $w(\cdot)$ местами в начальных условиях (3.3), приходим также к неравенству

$$\varphi\big(t, x(\cdot)\big) - \varphi\big(t, w(\cdot)\big) \leq \lambda_2 \sqrt{\mu\big(t, x(\cdot) - w(\cdot)\big)}. \tag{3.9}$$

Сопоставляя полученные неравенства (3.8) и (3.9), заключаем, что постулируемая в теореме оценка (3.1) имеет место, если взять

$$\lambda_* = \lambda_2 \sqrt{(J+1)K\lambda}.$$

Доказательство завершено.

4. Неравенства для производных по направлению

Рассмотрим нижнюю $\partial^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\}$ и верхнюю $\partial^+\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\}$ правые полупроизводные неупреждающего функционала $\psi : [t_0,T]\times C\mapsto\mathbb{R}$ в точке $(t,x(\cdot))\in[t_0,T)\times C$ по конечномерному направлению $l\in\mathbb{R}^n$ (см. [18]):

$$\begin{aligned}\partial^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\} &= \liminf_{\delta\downarrow 0}\,\big[\psi\big(t+\delta,y_l(\cdot)\big)-\psi\big(t,x(\cdot)\big)\big]\delta^{-1}\ ,\\ \partial^+\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\} &= \limsup_{\delta\downarrow 0}\big[\psi\big(t+\delta,y_l(\cdot)\big)-\psi\big(t,x(\cdot)\big)\big]\delta^{-1}\ .\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь функция $y_l(\cdot)$ определяется согласно равенству

$$y_l(\tau)=\begin{cases}x(\tau) & \text{при } \tau\in[t_*,t],\\ x(t)+(\tau-t)l & \text{при } \tau\in(t,T].\end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть неупреждающий функционал $\psi:[t_0,T]\times C\mapsto\mathbb{R}$ удовлетворяет условию локальной липшицевости, аналогичному* (3.1)*. Тогда для всякого выпуклого компакта $L\subset\mathbb{R}^n$ справедливы равенства*

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,L\} &= \min_{l\in L}\,\partial^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\},\\ \mathrm{d}^+\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,L\} &= \max_{l\in L}\,\partial^+\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при условиях леммы отображение $L\ni l\mapsto\partial^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\}\in[-\infty,+\infty]$ по крайней мере полунепрерывно снизу, а отображение $L\ni l\mapsto\partial^+\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\}\in[-\infty,+\infty]$ — сверху. Поэтому минимум и максимум в (4.2) действительно достигаются.

Проверим далее справедливость первого из равенств (4.2). Для любых $\alpha>0$, $l\in L$ имеем $y_l(\cdot)\in\Omega_\alpha$. Поэтому в согласии с определениями (2.5) и (4.1) величин $\mathrm{d}^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,L\}$ и $\partial^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\}$ справедливо следующее неравенство:

$$\mathrm{d}^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,L\}\le\min_{l\in L}\ \partial^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\}.\tag{4.3}$$

С другой стороны, из (2.5) следует, что существуют такие последовательности $\alpha_m\downarrow 0$, $\delta_m\downarrow 0$ и $y^{(m)}(\cdot)\in\Omega_{\alpha_m}$, $m=1,2,\ldots$, для которых выполняется равенство

$$\mathrm{d}^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,L\}=\lim_{m\to\infty}\Big[\psi\big(t+\delta_m,y^{(m)}(\cdot)\big)-\psi\big(t,x(\cdot)\big)\Big]\delta_m^{-1}.\tag{4.4}$$

Обозначим $l_m=\big[y^{(m)}(t+\delta_m)-x(t)\big]\delta_m^{-1}$. Так как $\dot y^{(m)}(\tau)\in[L]^{\alpha_m}$ при почти всех $\tau\in[t,t+\delta_m]$, то по теореме о среднем значении вектор-функции [21, с. 51] имеем $l_m\in[L]^{\alpha_m}\subset[L]^{\alpha_1}$. Следовательно, не ограничивая общности рассуждений, можно положить, что $l_m\to l_*\in L$ при $m\to\infty$. Теперь, используя условие (3.1) для $\varphi=\psi$, $D_*=\Omega_{\alpha_1}$ и, соответственно, $\lambda_*=\lambda_*(\Omega_{\alpha_1})$, для достаточно больших значений m, при которых $\mathcal{K}(t)=\mathcal{K}(t+\delta_m)$, выводим оценку

$$\psi\big(t+\delta_m,y^{(m)}(\cdot)\big)\ge\psi\big(t+\delta_m,y_{l_*}(\cdot)\big)-\frac{\lambda_*}{\sqrt3}\Big(2\big(\Lambda+\alpha_m\big)\sqrt{\delta_m}+\|l_m-l_*\|\sqrt{3+\delta_m}\Big)\delta_m,\tag{4.5}$$

где $\Lambda=\max\limits_{l\in L}\|l\|$. Из соотношений (4.4) и (4.5), учитывая определение (4.1) величины $\partial^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\}$, получаем

$$\mathrm{d}^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,L\}\ge\partial^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l_*\}\ge\min_{l\in L}\ \partial^-\{\psi(t,x(\cdot))\,|\,l\}.\tag{4.6}$$

Сопоставляя неравенства (4.3) и (4.6) заключаем, что имеет место первое из равенств (4.2). Справедливость второго из этих равенств проверяется аналогичным образом с понятными изменениями. Лемма доказана.

Следующая теорема вытекает из теоремы 1, если учесть теорему 2 и воспользоваться леммой 1 для $\psi(t,x(\cdot))=\varphi(t,x(\cdot))-\langle s,x(t)\rangle$.

Теорема 3. *При предположениях* (A1)–(A3) *неупреждающий функционал* $\varphi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$ *является функционалом* (1.7) *цены в задаче управления* (1.1)–(1.3) *тогда и только тогда, когда он является непрерывным, удовлетворяет условию* (1.6) *и следующим дифференциальным неравенствам:*

$$\min_{l \in B\left(t, x(\cdot)\right)} \left[\partial^{-}\left\{\varphi\big(t, x(\cdot)\big) \big| l\right\} - \langle s, l\rangle\right] + H\big(t, x(\cdot), s\big) \quad \leq \quad 0, \tag{4.7}$$

$$\max_{l \in B\left(t, x(\cdot)\right)} \left[\partial^{+}\left\{\varphi\big(t, x(\cdot)\big) \big| l\right\} - \langle s, l\rangle\right] + H\big(t, x(\cdot), s\big) \quad \geq \quad 0, \tag{4.8}$$

$$t \in [t_0, T), \quad x(\cdot) \in C, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Неравенства (4.7) и (4.8) представляют собой прямое обобщение на случай систем с запаздыванием дифференциальных неравенств, известных (см. [6, 8]) для функции цены в задачах управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Согласно теории позиционных дифференциальных игр (см. [5, 6, 9, 12]) эти неравенства в инфинитезимальной и унифицированной форме выражают соответственно свойство u-стабильности и свойство v-стабильности функционала цены. В терминологии теории обобщенных решений уравнений с частными производными первого порядка (см. [8, 13, 22]) они характеризуют функционал цены как минимаксное [8] решение следующего уравнения типа Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными (см., например, [14]):

$$\partial_t \varphi\big(t, x(\cdot)\big) + H\Big(t, x(\cdot), \nabla\varphi\big(t, x(\cdot)\big)\Big) = 0, \quad t \in [t_0, T), \ x(\cdot) \in C.$$

Отметим, что для коинвариантно-гладких неупреждающих функционалов φ неравенства (4.7), (4.8) эквивалентны (см. [18]) указанному уравнению. Заметим еще, что свойства стабильности функционала цены могут быть выражены (см., например, [8]) в терминах слабой инвариантности его подграфика и надграфика относительно движений системы (1.1)–(1.3). Таким образом, развиваемые здесь конструкции имеют также определенную связь с теорией выживаемости (см. [23–25]).

5. Пример

Пусть $t_* = -\vartheta$, где $\vartheta > 0$, $t_0 = 0$ и $T > 0$. Рассмотрим частный случай задачи управления (1.1)–(1.3):

$$\dot{y}(\tau) = g\big(\tau, y(\cdot)\big) + u(\tau) + v(\tau), \quad 0 \leq t \leq \tau < T,$$

$$y(\tau) \in \mathbb{R}^n, \quad u(\tau) \in \mathbb{R}^n : \ \|u(\tau)\| \leq 1, \quad v(\tau) \in \mathbb{R}^n : \ \|v(\tau)\| \leq 1, \tag{5.1}$$

$$y(\tau) = x(\tau) \ \text{ при } \tau \in [-\vartheta, t], \quad t \in [0, T), \quad x(\cdot) \in C;$$

$$\gamma = \sigma\big(y(\cdot)\big) - \frac{1}{2}\int\limits_t^T \Big(\|v(\tau)\|^2 - \|u(\tau)\|^2\Big) \mathrm{d}\tau. \tag{5.2}$$

Здесь отображение $[0, T] \times C \ni \big(\tau, y(\cdot)\big) \mapsto g = g\big(\tau, y(\cdot)\big) \in \mathbb{R}^n$ является неупреждающим. Кроме того, полагаем, что отображения g и σ обладают всеми должными свойствами для того, чтобы в задаче (5.1), (5.2) выполнялись условия (A1)–(A3).

Согласно равенству (2.9) вычислим гамильтониан системы (5.1), (5.2)

$$H\big(t, x(\cdot), s\big) = \big\langle s, g\big(t, x(\cdot)\big)\big\rangle. \tag{5.3}$$

Через $z\big(\,\cdot\,|t,x(\cdot)\big)$ обозначим решение функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{z}(\tau) = g\big(\tau, z(\cdot)\big), \quad t \le \tau < T, \tag{5.4}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$z(\tau) = x(\tau) \ \text{ при } \tau \in [-\vartheta, t]. \tag{5.5}$$

Функционал цены в задаче (5.1), (5.2) определяется равенством

$$\varphi\big(t, x(\cdot)\big) = \sigma\Big(z\big(\,\cdot\,|t, x(\cdot)\big)\Big). \tag{5.6}$$

В рассматриваемом достаточно простом частном случае в этом можно убедиться различными способами, в том числе опираясь на теорему 3. В соответствии с определением полупроизводных (4.1), если учесть соотношения (5.4), (5.5), имеем

$$\partial^-\Big\{\sigma\Big(z\big(\,\cdot\,|t,x(\cdot)\big)\Big)\,\big|\,g\big(t,x(\cdot)\big)\Big\} \le 0, \quad \partial^+\Big\{\sigma\Big(z\big(\,\cdot\,|t,x(\cdot)\big)\Big)\,\big|\,g\big(t,x(\cdot)\big)\Big\} \ge 0.$$

Кроме того, в согласии с определением (2.6) множества $B\big(t, x(\cdot)\big)$ всегда будет справедливо включение $g\big(t,x(\cdot)\big) \in B\big(t,x(\cdot)\big)$. Поэтому очевидно, что функционал (5.6) удовлетворяет дифференциальным неравенствам (4.7) и (4.8) с гамильтонианом (5.3).

Пусть далее

$$g\big(\tau, y(\cdot)\big) = A(\tau)y(\tau) + A_\vartheta(\tau)y(\tau-\vartheta) + \int\limits_{-\vartheta}^{\tau} G(\tau,\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Через $\Psi(\tau,t)$ обозначим $n\times n$-матрицу-функцию, удовлетворяющую следующим соотношениям:

$$\begin{array}{rcl} \Psi(\tau,t) & = & 0 \ \text{ при } t > \tau, \\ \Psi(\tau,\tau) & — & \text{матрица тождественного преобразования}, \\ \dfrac{\mathrm{d}\Psi(\tau,t)}{\mathrm{d}t} & = & -\Psi(\tau,t)A(t) - \Psi(\tau,t+\vartheta)A_\vartheta(t+\vartheta) - \displaystyle\int\limits_{t}^{\tau} \Psi(\tau,\xi)G(\xi,t)\mathrm{d}\xi \ \text{ при } t < \tau. \end{array}$$

Тогда

$$z\big(\tau|t,x(\cdot)\big) = \Psi(\tau,t)x(t) + \int\limits_{t}^{t+\vartheta} \Psi(\tau,\xi)A_\vartheta(\xi)x(\xi-\vartheta)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{-\vartheta}^{t}\int\limits_{t}^{\tau} \Psi(\tau,\xi)G(\xi,\eta)x(\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

Пусть, например, $\sigma\big(y(\cdot)\big) = \|y(T)\|^2$ и, соответственно,

$$\varphi\big(t,x(\cdot)\big) = \big\|z\big(T|t,x(\cdot)\big)\big\|^2. \tag{5.7}$$

Функционал (5.7) является коинвариантно-гладким, его коинвариантная производная по t и коинвариантный градиент определяются равенствами

$$\begin{array}{rcl} \partial_t\varphi\big(t,x(\cdot)\big) & = & -2\big\langle z\big(T|t,x(\cdot)\big),\, \Psi(T,t)g\big(t,x(\cdot)\big)\big\rangle, \\ \nabla\varphi\big(t,x(\cdot)\big) & = & 2\Psi^\top(T,t)z\big(T|t,x(\cdot)\big), \end{array}$$

где символ $\Psi^\top$ означает транспонирование матрицы Ψ. Видно, что этот функционал является классическим решением следующего уравнения типа Гамильтона — Якоби:

$$\partial_t\varphi\big(t,x(\cdot)\big) + \Big\langle \nabla\varphi\big(t,x(\cdot)\big),\, g\big(t,x(\cdot)\big)\Big\rangle = 0. \tag{5.8}$$

Согласно [15] в этом случае оптимальную стратегию управления можно построить непосредственно, при помощи экстремального прицеливания в направлении коинвариантного градиента функционала цены φ:

$$U^0\big(\tau, y(\cdot)\big) = \begin{cases} -\nabla\varphi\big(\tau, y(\cdot)\big), & \text{если } \big\|\nabla\varphi\big(\tau, y(\cdot)\big)\big\| \le 1, \\ -\dfrac{\nabla\varphi\big(\tau, y(\cdot)\big)}{\big\|\nabla\varphi\big(\tau, y(\cdot)\big)\big\|} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С другой стороны, рассмотрим случай, когда $\sigma\big(y(\cdot)\big) = \|y(T)\|$ и, следовательно,

$$\varphi\big(t, x(\cdot)\big) = \big\|z\big(T|t, x(\cdot)\big)\big\|. \tag{5.9}$$

Функционал (5.9) не является коинвариантно-дифференцируемым в точках $\big(t, x(\cdot)\big)$, в которых $z\big(T|t, x(\cdot)\big) = 0$, и поэтому может трактоваться только лишь как обобщенное решение уравнения (5.8). В этом случае для построения оптимальной стратегии управления используем соотношения (2.2). При этом в качестве вспомогательного функционала Ляпунова здесь удобно взять функционал

$$\nu_\varepsilon\big(\tau, y(\cdot)\big) = \frac{1}{2\varepsilon}\big\|z\big(T|\tau, y(\cdot)\big)\big\|^2.$$

После соответствующих вычислений получаем

$$s^u = \begin{cases} \Psi^\top(T,\tau) z\big(T|\tau, y(\cdot)\big)/\big\|z\big(T|\tau, y(\cdot)\big)\big\|, & \text{если } \big\|z\big(T|\tau, y(\cdot)\big)\big\| \ge \varepsilon, \\ \Psi^\top(T,\tau) z\big(T|\tau, y(\cdot)\big)/\varepsilon & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$U^{\mathrm{e}}_\varepsilon\big(\tau, y(\cdot)\big) = \begin{cases} -s^u, & \text{если } \|s^u\| \le 1, \\ -s^u/\|s^u\| & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.] М.: Наука, 1961. 392 с.
2. **Беллман Р., Калаба Р.** Динамическое программирование и современная теория управления. М.: Наука, 1969. 118 с.
3. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
4. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. **Субботин А.И.** Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 293–297.
7. **Lions P.L., Souganidis P.E.** Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Isaacs's equations // SIAM J. Contr. Optim. 1985. Vol. 23, no. 4. P. 566–583.
8. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first–order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
9. **Осипов Ю.С.** Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
10. **Красовский Н.Н.** О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 315–327.
11. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
12. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
13. **Wolenski P.R.** Hamilton–Jacobi theory for hereditary control problems // Nonlinear Anal. 1994. Vol. 22, no. 7. P. 875–894.
14. **Lukoyanov N.Yu.** Functional Hamilton–Jacobi type equations in *ci*-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Func. Anal. and Appl. 2003. Vol. 8, no 3. P. 365–397.

15. **Лукоянов Н.Ю.** Стратегии прицеливания в направлении инвариантных градиентов// Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 4. С. 629–643.
16. **Kim A.V.** Functional differential equations. Application of i-smooth calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999. 165 p.
17. **Лукоянов Н.Ю.** О свойствах функционала цены дифференциальной игры с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 3. С. 375–384.
18. **Лукоянов Н.Ю.** Дифференциальные неравенства для негладкого функционала цены в задачах управления системами с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Т. 12, № 2. Екатеринбург, 2006. С. 108–118.
19. **Lukoyanov N.** On dynamical optimization of conflict hereditary systems // Proc. of the 17-th IFAC world congress. 2008. Vol. 17, part 1. P. 11357–11362 / URL: http://www.ifac-papersonline.net. Identifier: 10.3182/20080706-S-KR-1001.2270.
20. **Аркин В.И., Левин В.Л.** Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, вып. 3(165). С. 21–77.
21. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
22. **Crandall M.G., Lions P.-L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
23. **Куржанский А.Б.** Об аналитическом описании пучка выживающих траекторий дифференциальной системы // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 5. С. 1047–1050.
24. **Haddad G.** Monotone trajectories of differential inclusions and functional differential inclusions with memory // Israel J. Math. 1981. Vol. 39. P. 83–100.
25. **Aubin J.P.** Viability theory. Boston: Birkhäuser, 1991. 544 p.

Лукоянов Николай Юрьевич
Поступила 4.03.2009
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: nyul@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517.977

О РЕКОНСТРУКЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО ЭКСТРЕМАЛЬНОГО СДВИГА[1]

В. И. Максимов

Рассматривается задача устойчивого динамического восстановления неизвестных характеристик в распределенной системе, описываемой парой дифференциальных уравнений. Цель работы состоит в построении алгоритма решения этой задачи. Предлагаемый алгоритм основан на теории динамического обращения Ю. С. Осипова и методе экстремального сдвига Н. Н. Красовского.

Ключевые слова: распределенные системы, экстремальный сдвиг, реконструкция.

V. I. Maksimov. On reconstruction of unknown characteristics of a distributed system using a regularized extremal shift.

The problem of stable dynamical reconstruction of unknown characteristics in a distributed system described by a pair of differential equations is considered. The aim of the paper is to construct a solution algorithm for this problem. The proposed algorithm is based on Yu. S. Osipov's theory of dynamic inversion and N. N. Krasovskii's extremal shift method.

Keywords: distributed systems, extremal shift, reconstruction.

Введение

Рассматривается задача устойчивого динамического восстановления неизвестных характеристик нелинейной параболической системы, описывающей процесс отвердевания вещества. Содержание рассматриваемой задачи таково. Имеется система, состоящая из двух параболических дифференциальных уравнений. Ее решение зависит от меняющегося во времени распределенного управления — входа. Заранее управление и решение системы не заданы, но известно множество, ограничивающее допустимую реализацию входа. В процессе движения наблюдается часть фазового состояния системы. Наблюдения, вообще говоря, неточны. Требуется построить алгоритм приближенного восстановления неизмеряемой части фазового состояния, а также входа, обладающий свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближения входа вырабатываются "в реальном времени", свойство устойчивости — что приближение сколь угодно точно при достаточной точности наблюдения.

Обсуждаемая задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем с распределенными параметрами и в более общем контексте вкладывается в проблематику теории некорректных задач [1, 2]. Представляемая в данной работе методика идейно следует теории устойчивого динамического обращения, развитой в [3–12]. Последняя основана на соединении методов теории некорректных задач [1, 2] и теории позиционного управления [13]. Суть этой теории состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления некоторой вспомогательной динамической системой — моделью; такой алгоритм, выходом которого служит, в частности, реализация управления в модели, по своему определению является динамическим. Управление в модели адаптируется к результатам текущих

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00008), программы Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики", Урало-Сибирского проекта и Программы поддержки ведущих научных школ России.

наблюдений таким образом, что его реализация во времени подпадает под условия какого-либо принципа регуляризации; тем самым обеспечивается устойчивость алгоритма. Предлагаемый ниже алгоритм управления моделью основан на модифицированном принципе сглаживающего функционала, трактуемого как подходящий функционал типа Ляпунова. Управление в модели строится на основе подходящей модификации принципа экстремального сдвига Н.Н. Красовского таким образом, чтобы обеспечить малую скорость возрастания этого функционала.

1. Постановка задачи. Метод решения

Рассмотрим систему, моделирующую процесс отвердевания вещества, описываемую так называемыми уравнениями фазового поля. Переменными состояния системы являются параметр упорядочения φ (называемый также фазовой функцией) и температура вещества ψ. В отличие от классической задачи Стефана, которая моделирует процесс отвердевания вещества с четкой границей раздела твердой и жидкой подобластей, уравнения фазового поля применимы для расплывчатых, нечетких областей. Фазы вещества определяются посредством параметра упорядочения φ. Подбирая соответствующие коэффициенты, можем считать, что область $\{\eta \in \Omega \mid \varphi(\eta) = 1\}$ является жидкой областью, а область $\{\eta \in \Omega \mid \varphi(\eta) = -1\}$ — твердой. Область раздела описывается точками $\eta \in \Omega$, где параметр упорядочения принимает значения из интервала $(-1, 1)$. Итак, будем рассматривать систему (введенную в работе [14]):

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi + l\frac{\partial}{\partial t}\varphi = k\Delta_L\psi + u \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \vartheta], \quad \vartheta = \text{const} < +\infty, \tag{1.1}$$

$$\tau\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \xi^2\Delta_L\varphi + g(\varphi) + \psi \tag{1.2}$$

с граничными

$$\frac{\partial}{\partial n}\psi = \frac{\partial}{\partial n}\varphi = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, \vartheta], \tag{1.3}$$

и начальными условиями

$$\psi = \psi_0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{1.4}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ_L — оператор Лапласа, функция $g(z)$ является производной так называемого потенциала $G(z)$. Следуя [14], будем считать, что $g(z) = az + bz^2 - cz^3$.

Система (1.1)–(1.4) исследовалась многими авторами. Достаточно подробный анализ соответствующих результатов приведен в статье [15]. Поэтому на этом вопросе мы останавливаться не будем. Отметим лишь, что мы укажем процедуру восстановления величин ψ и u по результатам неточных измерений φ. В дальнейшем для простоты выкладок будем считать $k = \xi = \tau = c = 1$. Таким образом, вместо уравнений (1.1), (1.2) будем рассматривать уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi + l\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \Delta_L\psi + u \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \vartheta], \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \Delta_L\varphi + g(\varphi) + \psi. \tag{1.6}$$

В дальнейшем считаем выполненными следующие условия:

(A1) область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, имеет границу класса C^2;

(A2) коэффициенты a и b являются элементами пространства $L_\infty([0, \vartheta] \times \Omega)$, $\operatorname{vrai\,sup} c(t, \eta) > 0$ при $(t, \eta) \in [0, \vartheta] \times \Omega$;

(A3) начальные функции ψ_0 и φ_0 таковы, что

$$u_0, \varphi_0 \in W^2_\infty(\Omega), \quad \frac{\partial}{\partial n}\psi_0 = \frac{\partial}{\partial n}\varphi_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Введем обозначения: $Q = \Omega \times (0, \vartheta)$,

$$W_p^{2,1}(Q) = \left\{ u \mid u, \frac{\partial u}{\partial \eta_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \partial \eta_j}, \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(Q) \right\} \quad \text{при} \quad p \in [1, \infty)$$

— стандартное соболевское пространство с нормой

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} = \left(\int\limits_\Omega |u|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial \eta_i} \right|^p + \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right|^p + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^p \, d\eta dt \right)^{1/p},$$

$(\cdot, \cdot)_H$ и $|\cdot|_H$ — скалярное произведение и норма в $H = L^2(\Omega)$, соответственно.

Содержательно суть рассматриваемой задачи состоит в следующем. На систему (1.5), (1.6), (1.3), (1.4) (в дальнейшем эту систему обозначим символом S) действует ненаблюдаемое управление $u = u(\cdot)$. Диапазон допустимых управлений достаточно велик и описан заранее. Будем предполагать, что множество допустимых управлений имеет следующий вид:

$$P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; H) : u(t) \in P \quad \text{при п. в.} \quad t \in T = [0, \vartheta]\},$$

где $P \subset H$ — заданное выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. В дискретные достаточно частые моменты времени $\tau_i \in \Delta_L = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ ($\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$) приближенно измеряется часть фазового состояния системы $\{\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)\}$. Результаты измерений — функции $\xi_i(\eta)$, $\eta \in \Omega$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi(\tau_i) - \xi_i|_H \le h. \tag{1.7}$$

Требуется указать алгоритм, позволяющий синхронно с развитием процесса осуществлять приближенное восстановление неизвестной координаты $\psi(\cdot)$, а также неизвестного входа $u = u(\cdot)$. Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям $\varphi(\tau_i)$ в "реальном времени" восстанавливает неизмеряемую компоненту $\psi(\cdot)$ фазового состояния и управление $u(\cdot)$. Так как их точное восстановление невозможно (в частности, из-за неточности измерений $\varphi(\tau_i)$), то необходимо построить алгоритм, который формирует некоторые их приближения $v^h(\cdot)$ и $u^h(\cdot)$. Именно такие, что равномерное отклонение $v^h(\cdot)$ от $\psi(\cdot)$, определяемое как

$$|v^h(\cdot) - \psi(\cdot)|_{C(T;H)} = \sup_{0 \le t \le \vartheta} |v^h(t) - \psi(t)|_H,$$

и среднеквадратичное отклонение $u^h(\cdot)$ от $u(\cdot)$, определяемое в виде

$$|u(\cdot) - u^h(\cdot)|_{L_2(T;H)} = \left(\int\limits_0^\vartheta |u(t) - u^h(t)|_H^2 \, dt \right)^{1/2},$$

малы при достаточной малости измерительной погрешности h.

Опишем схему алгоритма решения рассматриваемой задачи, предлагаемого в настоящей работе. При заданном $h \in (0, 1)$ на отрезке времени $T = [0, \vartheta]$ фиксируются точки

$$\tau_i = \tau_{h,i}, \quad i = 0, 1, \ldots, m = m_h, \quad \tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = \vartheta. \tag{1.8}$$

При этом для простоты полагается $\tau_i - \tau_{i-1} = \delta = \delta(h)$. Таким образом, при каждом h на T выбирается равномерная сетка $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}$ с шагом $\delta = \delta(h)$ (см. (1.8)). Затем вводится управляемая система Σ вида

$$\mathcal{F}(w_t^h(t), w^h(t), \xi_i, p_i^h, u_i^h) = 0, \tag{1.9}$$

$$\tau_i < t \le \tau_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \quad w^h(0) = w_0^h,$$

называемая моделью. Здесь символ $w^h(t) = \{w_1^h(t), w_2^h(t), w_3^h(t)\} \in H \times H \times H$ означает состояние модели в момент t; p_i^h и u_i^h — управляющие воздействия в модели, вырабатываемые в моменты τ_i по закону обратной связи [13]:

$$p_i^h = \mathcal{V}(\tau_i, w_1^h(\tau_i), \xi_i), \tag{1.10}$$

$$u_i^h = \mathcal{U}(\tau_i, w_2^h(\tau_i), w_3^h(\tau_i), \xi_i, p_i^h). \tag{1.11}$$

Функции $\mathcal{V}(\cdot)$, $\mathcal{U}(\cdot)$ — правила формирования управлений — называются стратегиями управления моделью. Модель функционирует синхронно с системой S. В ходе ее функционирования формируются кусочно-постоянные управления $p^h(\cdot)$ и $u^h(\cdot)$,

$$p^h(t) = p_i^h, \quad u^h(t) = u_i^h, \quad \tau_i < t \le \tau_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.12}$$

а также траектория $w^h(\cdot) = \{w_1^h(\cdot), w_2^h(\cdot), w_3^h(\cdot)\}$ модели. При этом за приближения восстанавливаемых функций $\psi(\cdot)$ и $u(\cdot)$ выбираются функции $v^h(\cdot) = w_2^h(\cdot)$ и $u^h(\cdot)$.

2. Реконструкция неизвестной координаты

В настоящем разделе мы опишем алгоритм динамического восстановления (в среднеквадратичном) неизвестной координаты $\psi(\cdot)$. Приводимые здесь конструкции понадобятся в следующем разделе.

Пусть фиксированы $x_0 = \{\varphi_0, \psi_0\}$ — начальное состояние и $u(\cdot) \in L_2(T; H)$ — управление. Решением системы S — $x(\cdot; 0, x_0, u(\cdot)) = \{\psi(\cdot; 0, x_0, u(\cdot)), \varphi(\cdot; 0, x_0, u(\cdot))\}$ — будем называть единственную функцию

$$x(\cdot) = x(\cdot; 0, x_0, u(\cdot)) \in V_T^{(1)} = V_1 \times V_1, \quad V_1 = W_2^{2,1}(Q),$$

удовлетворяющую соотношениям (1.5), (1.6), (1.3), (1.4). В силу соответствующей теоремы вложения [16], не нарушая общности, можно считать, что пространство $V_T^{(1)}$ вложено в пространство $C(T; X)$, где $X = H \times H$. Поэтому фазовым состоянием S в момент t является элемент $x(t) = \{\varphi(t), \psi(t)\} \in X$. Как известно (см. [17, с. 25, предложение 5]), при наших условиях для любого $u(\cdot) \in L_2(T; H)$ существует единственное решение S. Символом X_T обозначим пучок всех решений S:

$$X_T = \{x(\cdot; 0, x_0, u(\cdot)) : u(\cdot) \in P(\cdot)\} \subset V_T^{(1)},$$

а символами Φ_T и Ψ_T — проекции пучка X_T на пространство V_1 координат φ и ψ соответственно.

Имеет место

Лемма 1 [17]. *Равномерно по всем $x(\cdot) = \{\psi(\cdot), \varphi(\cdot)\} \in X_T$ верна оценка*

$$\sup_{t \in T} \int\limits_{\Omega} \Big\{\psi^2(t,\eta) + |\nabla\psi(t,\eta)|^2 + |\nabla\varphi(t,\eta)|^2 + \varphi^2(t,\eta)\Big\}\, d\eta + \int\limits_0^{\vartheta}\!\!\int\limits_{\Omega} \Big\{\psi_t^2(t,\eta) + (\Delta_L\psi(t,\eta))^2$$

$$+ \varphi_t^2(t,\eta) + (\Delta_L\varphi(t,\eta))^2\Big\}\, d\eta\, dt \le d_* = C\mu(\varphi_0, \psi_0).$$

Здесь постоянная C зависит от $|a|_{L_\infty(Q)}$, $|b|_{L_\infty(Q)}$, ϑ, l, $\mu(\varphi_0, \psi_0) = |\varphi_0|_{W_\infty^2(\Omega)} + |\psi_0|_{W_\infty^2(\Omega)} + d(P)$, $d(P) = \sup\{|u|_H : u \in P\}$; символ $\nabla\varphi$ означает градиент функции φ, а символ $|\nabla\varphi|$ — евклидову норму вектора $\nabla\varphi$.

Для восстановления $\psi(\cdot)$ нам понадобится нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial w_1^h(t,\eta)}{\partial t} = \Delta_L w_1^h(t,\eta) + p^h(t,\eta) + g(w_1^h(t,\eta)) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,\vartheta] \tag{2.1}$$

с граничным

$$\frac{\partial w_1^h}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,\vartheta]$$

и начальным

$$w_1^h(0) = \varphi_0 \in W_\infty^2(\Omega)$$

условиями. Это — вспомогательная система, роль управления (подлежащего формированию) в которой играет функция $p^h(\cdot)$. Модель представляет, по сути, некоторую мысленную конструкцию, которая помогает формировать нужное приближение $\psi(\cdot)$. При этом процесс синхронного управления системой S и моделью (2.1) происходит по ходу реализации фактического движения $\{\psi(t), \varphi(t)\}$, $t \in T$. Вопрос о существовании и единственности решения уравнения (2.1) обсуждался в работе [17], где была установлена

Лемма 2. *Для любого* $p^h(\cdot) \in P_1(\cdot)$ *существует единственное решение уравнения* (2.1) $w_1^h(\cdot) = w_1^h(\cdot; 0, \varphi_0, p^h(\cdot)) \in V_1$, *которое удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{t\in T} \int\limits_\Omega \Big\{ (w_1^h(t,\eta))^2 + |\nabla w_1^h(t,\eta)|^2 \Big\}\, d\eta + \int\limits_0^\vartheta \int\limits_\Omega \Big\{ (w_{1\,t}^h(t,\eta))^2 + (\Delta_L w_1^h(t,\eta))^2 \Big\}\, d\eta\, dt$$
$$\le d_1 = C_1 \mu_1(\varphi_0). \tag{2.2}$$

Здесь постоянная C_1 *зависит от тех же величин, что и постоянная* C *из леммы* 1, $\mu_1(\varphi_0) = |\varphi_0|_{W_\infty^2(\Omega)} + d(P)$, d — *произвольное число, большее* $\sup_{t\in T}\{|\psi(t; 0, x_0, u(\cdot))|_H : u(\cdot) \in P(\cdot)\}$,

$$P_1(\cdot) = \big\{ u(\cdot) \in L_2(T; H) : |u(t)|_H \le d \ \textit{при п. в.}\ t \in T \big\}.$$

Итак, перейдем к описанию алгоритма восстановления $\psi(\cdot)$. Фиксируем семейство разбиений Δ_h, $h \in (0,1)$ отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m, \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad m = m_h, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \delta = \delta(h) = Ch, \quad C = \text{const} > 0.$$

Затем организуем процесс синхронного управления моделью (2.1) и реальной системой S по принципу обратной связи таким образом, чтобы при достаточно малых h функция $p^h(t)$ приближала (в среднеквадратичном) неизвестную компоненту $\psi(t)$. Работу алгоритма разобьем на $m-1$, $m = m_h$, однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются следующие операции. Сначала вычисляются величины

$$p_i^h = p^h(\xi_i, w_1^h(\tau_i)) = \arg\min\{l_*(h, u, s_i) : u \in P_1\}, \tag{2.3}$$

$$l_*(\alpha, u, s_i) = \exp(-2B\tau_i)(s_i, u)_H + h^{2/3+\varepsilon}|u|_H^2, \quad s_i = w_1^h(\tau_i) - \xi_i,$$

где $\varepsilon \in (0, 1/6)$, $P_1 = \{u \in H : |u|_H \le d\}$, $B = \operatorname*{vrai\,max}_{(t,\eta)\in T\times\Omega}\{a(t,\eta) + b^2(t,\eta)\} < +\infty$. Затем (при $t \in \delta_i$) на вход модели подается управление вида

$$p^h(t,\eta) = p_i^h(\eta), \quad \eta \in \Omega, \quad i \in [0 : m_h - 1].$$

В результате под действием этого управления модель переходит из состояния $w_1^h(\tau_i)$ в состояние $w_1^h(\tau_{i+1}) = w_1^h(\tau_{i+1}; \tau_i, w_1^h(\tau_i), p_i^h)$. На следующем, $(i+1)$-м, шаге аналогичные действия повторяются. Работа алгоритма заканчивается в момент $t = \vartheta$.

Тот факт, что построенное согласно описанному алгоритму управление $p^h(\cdot)$ может служить среднеквадратичным “приближением” координаты $\psi(\cdot)$, следует из приведенной ниже теоремы 1. Заметим, что если в (2.3) положить $B = 0$ и $h = 0$, то мы получим “классический” вариант принципа экстремального сдвига для параболических уравнений.

Пусть $\Xi(\varphi(\cdot), h)$ — совокупность всех “измерений”, совместимых с $\varphi(\cdot) \in \Phi_T$, т. е. $\Xi(\varphi(\cdot), v)$ есть множество всех кусочно-постоянных функций $\xi^h(\cdot)$, $\xi^h(t) = \xi_i^h$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m_h - 1]$, со свойствами (1.7); символ W_1^h означает пучок всех решений уравнения (2.1), т. е.

$$W_1^h = \{w_1^h(\cdot; 0, \varphi_0, p^h(\cdot)) : p^h(\cdot) \in P_1(\cdot)\}.$$

Справедлива

Теорема 1. *Имеет место сходимость*

$$p^h(\cdot) \to \psi(\cdot) \quad \textit{в} \quad L_2(T; H) \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

Теорема 1 является прямым следствием доказанной ниже леммы 3.

Лемма 3. *Каковы бы ни были $h \in (0,1)$, $\xi^h(\cdot) \in \Xi(\varphi(\cdot), h)$, $x(\cdot) = \{\psi(\cdot), \varphi(\cdot)\} \in X_T$, верны неравенства*

$$|p^h(\cdot) - \psi(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} \le K\nu(h), \tag{2.4}$$

$$|\varphi(t) - w_1^h(t)|_H^2 + \int_0^t \int_\Omega |\nabla(\varphi(\tau, \eta) - w_1^h(\tau, \eta))|^2 \, d\eta \, d\tau \le K_0(h + \delta(h) + h^{2/3+\varepsilon}), \quad t \in T. \tag{2.5}$$

Здесь постоянные K и K_0 зависят от X_T и не зависят от h, $\xi^h(\cdot)$, $x(\cdot)$;

$$\nu(h) = (h + \delta(h) + h^{2/3+\varepsilon})^{1/2} + (h + \delta(h))h^{-2/3-\varepsilon}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $h \in (0,1)$, $\xi^h(\cdot) \in \Xi(\varphi(\cdot), h)$, $x(\cdot) \in X_T$, $w_1^h(\cdot) \in W_1^h$. Введем функционал типа Ляпунова

$$\varepsilon_h(t) = 0.5\exp(-2Bt)|\mu^h(t)|_H^2 + \int_0^t \exp(-2B\tau)|\nabla\mu^h(\tau)|_H^2 \, d\tau + h^{2/3+\varepsilon} \int_0^t \left\{|p^h(\tau)|_H^2 - |\psi(\tau)|_H^2\right\} d\tau,$$

где

$$\mu^h(t) = w_1^h(t) - \varphi(t), \quad t \in T.$$

Нетрудно видеть, что функция $\mu^h(t)$ является решением нелинейного уравнения

$$\frac{\partial \mu^h(t,\eta)}{\partial t} - \Delta_L \mu^h(t,\eta) = D^h(t,\eta)\mu^h(t,\eta) + p^h(t,\eta) - \psi(t,\eta) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \vartheta] \tag{2.6}$$

с начальным

$$\mu^h(0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega$$

и граничным

$$\frac{\partial \mu^h}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, \vartheta]$$

условиями. Здесь

$$D^h(t,\eta) = a(t,\eta) + b(t,\eta)\big(w_1^h(t,h) + \varphi(t,\eta)\big) - \Big(\big(w_1^h(t,\eta)\big)^2 + w_1^h(t,\eta)\varphi(t,\eta) + \varphi^2(t,\eta)\Big).$$

Умножив правую и левую части (2.6) на величину $\exp(-2Bt)\mu^h(t,\eta)$, будем иметь

$$\exp(-2Bt)(\mu_t^h(t), \mu^h(t))_H + \exp(-2Bt) \int_\Omega |\nabla\mu^h(t,\eta)|^2 \, d\eta$$

$$+ h^{2/3+\varepsilon}\{|p^h(t)|_H^2 - |\psi(t)|_H^2\} = \exp(-2Bt)\Big\{(E(t,\varphi(\cdot),w_1^h(\cdot)),\mu^h(t))_H$$

$$+ (p^h(t)-\psi(t),\mu^h(t))_H\Big\} + h^{2/3+\varepsilon}\{|p^h(t)|_H^2 - |\psi(t)|_H^2\} \quad \text{при п. в.} \quad t\in T, \tag{2.7}$$

где

$$(E(t,\varphi(\cdot),w_1^h(\cdot)))(\eta) = D^h(t,\eta)\mu^h(t,\eta), \quad (t,\eta)\in T\times\Omega.$$

Заметим, что равномерно по всем i, $t\in\delta_i$ верны соотношения

$$|\exp(-2Bt) - \exp(-B\tau_i)| \le k_0(t-\tau_i). \tag{2.8}$$

В силу лемм 1, 2 и неравенств (1.7), (2.8) имеют место оценки

$$\exp(-2Bt)(p^h(t)-\psi(t),\mu^h(t))_H$$

$$\le \exp(-2B\tau_i)(p^h(t)-\psi(t),s_i)_H + k_0\rho_i(t;h) \quad \text{при п. в.} \quad t\in\delta_i. \tag{2.9}$$

Здесь

$$\rho_i(t;h) = h + \int\limits_{\tau_i}^{t} \big\{1 + |w_{1\tau}^h(\tau)|_H + |\varphi_\tau(\tau)|_H\big\}\,d\tau.$$

Кроме того, для любых v_1, $v_2\in\mathbb{R}$ верно неравенство

$$\operatorname*{vrai\,max}_{(t,\eta)\in T\times\Omega}\big\{a(t,\eta)+b(t,\eta)(v_1+v_2)-(v_1^2+v_1v_2+v_2^2)\big\}\le B.$$

Поэтому

$$|(E(t,\varphi(\cdot),w_1^h(\cdot)),\mu^h(t))_H| \le B|\mu^h(t)|_H^2, \quad t\in T. \tag{2.10}$$

Заметим, что при всех t_1, $t_2\in T$, $t_1\le t_2$,

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\exp(-2B\tau)(\mu^h(\tau),\mu_\tau^h(\tau))_H\,d\tau = 0.5\exp(-2Bt)|\mu^h(t)|_H^2\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$+ B\int\limits_{t_1}^{t_2}\exp(-2B\tau)|\mu^h(\tau)|_H^2\,d\tau. \tag{2.11}$$

Проинтегрируем равенство (2.7) и воспользуемся оценками (2.9)–(2.11). Будем иметь при $t\in\delta_i$

$$0.5\exp(-2Bt)|\mu^h(t)|_H^2 + \int\limits_{\tau_i}^{t}\int\limits_{\Omega}\exp(-2B\tau)|\nabla\mu^h(\tau,\eta)|_H^2\,d\eta\,d\tau$$

$$+ B\int\limits_{\tau_i}^{t}\exp(-2B\tau)|\mu^h(\tau)|_H^2\,d\tau + h^{2/3+\varepsilon}\int\limits_{\tau_i}^{t}\big\{|p^h(\tau)|_H^2 - |\psi(\tau)|_H^2\big\}\,d\tau$$

$$\le B\int\limits_{\tau_i}^{t}\exp(-2B\tau)|\mu^h(\tau)|_H^2\,d\tau + h^{2/3+\varepsilon}\int\limits_{\tau_i}^{t}\big\{|p^h(\tau)|_H^2 - |\psi(\tau)|_H^2\big\}\,d\tau$$

$$+ \exp(-2B\tau_i)\int\limits_{\tau_i}^{t}(p_i^h-\psi(\tau),s_i)_H\,d\tau + k_1\rho_i(t;h) + 0.5\exp(-2B\tau_i)|\mu^h(\tau_i)|_H^2,\ k_1 = k_0\delta. \tag{2.12}$$

Учитывая (2.3), выводим

$$\exp(-2B\tau_i)(p_i^h - \psi(t), s_i) + h^{2/3+\varepsilon}\big\{|p_i^h|^2 - |\psi(t)|_H^2\big\} \le 0, \quad t \in \delta_i. \tag{2.13}$$

В таком случае при $t \in \delta_i$ из (2.12), (2.13) получаем

$$0.5\exp(-2Bt)|\mu^h(t)|_H^2 + \int_{\tau_i}^{t} \bigg(\exp(-2B\tau) \int_{\Omega} |\nabla \mu^h(\tau, \eta)|^2\, d\eta \bigg)\, d\tau$$

$$+ h^{2/3+\varepsilon} \int_{\tau_i}^{t} \big\{|p^h(\tau)|_H^2 - |\psi(\tau)|_H^2\big\}\, d\tau \le k_1\rho_i(t;h) + 0.5\exp(-2B\tau_i)|\mu^h(\tau_i)|_H^2,$$

т. е.

$$\varepsilon(t) \le \varepsilon(\tau_i) + k_1\rho_i(t;h), \quad t \in \delta_i.$$

Отсюда выводим

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(0) + k_2\bigg(h + \delta\int_0^t \{1 + |w_{1\tau}^h(\tau)|_H + |\varphi_\tau(\tau)|_H\}\, d\tau\bigg) \le \varepsilon_h(0) + k_3(h+\delta), \quad t \in T. \tag{2.14}$$

Однако $\varepsilon_h(0) = 0$. Из лемм 1, 2, ограниченности множества P и неравенства (2.14) вытекает (2.5). Проверим (2.4). Умножив правую и левую части (2.6) на $\psi(t)$ будем иметь

$$(\mu_t^h(t), \psi(t))_H + \int_{\Omega} \nabla\mu^h(t,\eta)\nabla\psi(t,\eta)\, d\eta = (E(t, \varphi(\cdot), w_1^h(\cdot)), \psi(t))_H$$

$$+ (p^h(t) - \psi(t), \psi(t))_H \quad \text{при п. в.} \quad t \in T. \tag{2.15}$$

Из (2.14) следует неравенство

$$|p^h(\cdot)|_{L_2(T;H)}^2 \le |\psi(\cdot)|_{L_2(T;H)}^2 + k_3(h+\delta)h^{-2/3-\varepsilon}. \tag{2.16}$$

Далее, проинтегрировав (2.15), после несложных преобразований получаем оценку

$$\bigg|\int_0^{\vartheta} (p^h(t) - \psi(t), \psi(t))_H\, dt\bigg| \le k_4\int_0^{\vartheta} |\mu^h(t)|_H\, dt + \bigg(\int_0^{\vartheta}\Big(\int_{\Omega} |\nabla\mu^h(t,\eta)|^2\, d\eta \int_{\Omega} |\nabla\psi(t,\eta)|^2\, d\eta\Big)\, dt\bigg)^{1/2}$$

$$+ \Big|(\mu^h(t), \psi(t))_H\Big|_0^{\vartheta}\Big| + \bigg|\int_0^{\vartheta} (\mu^h(t), \psi_t(t))_H\, dt\bigg| \le k_5\Big(h + \delta + h^{2/3+\varepsilon}\Big)^{1/2}, \tag{2.17}$$

равномерную по $h \in (0,1)$, $\xi^h(\cdot) \in \Xi(\varphi(\cdot), h)$, $x(\cdot) = \{\psi(\cdot), \varphi(\cdot)\} \in X_T$. Таким образом, в силу (2.16), (2.17) имеем

$$|\psi(\cdot) - p^h(\cdot)|_{L_2(T;H)}^2 \le 2|\psi(\cdot)|_{L_2(T;H)}^2 - 2\int_0^{\vartheta} (p^h(t), \psi(t))_H\, dt \; + k_3(h+\delta)h^{-2/3-\varepsilon}$$

$$\le 2k_5\Big(h + \delta + h^{2/3+\varepsilon}\Big)^{1/2} + k_3(h+\delta)h^{-2/3-\varepsilon} \le K\nu(h).$$

Лемма доказана.

Итак, нами указан алгоритм восстановления неизвестной координаты $\psi(\cdot)$ и установлены оценки его скорости сходимости вида (2.4).

3. Реконструкция пары $\{\psi(\cdot), u(\cdot)\}$

Перейдем к решению задачи восстановления $\psi(\cdot)$ и $u(\cdot)$. В соответствии с описанной в разд. 1 схемой мы должны определить модель и закон управления ею (см. (1.9)–(1.12)). В качестве модели возьмем систему уравнений (1.9), именно систему вида

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1^h(t,\eta)}{\partial t} = \Delta_L w_1^h(t,\eta) + g(w_1^h(t,\eta)) + p^h(t,\eta) \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,\vartheta],\\
&\frac{\partial w_2^h(t,\eta)}{\partial t} + l\frac{\partial w_3^h(t,\eta)}{\partial t} = \Delta_L w_2^h(t,\eta) + u^h(t,\eta),\\
&\frac{\partial w_3^h(t,\eta)}{\partial t} = \Delta_L w_3^h(t,\eta) + g(w_3^h(t,\eta)) + w_2^h(t,\eta)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

с граничными

$$\frac{\partial}{\partial n} w_1^h = \frac{\partial}{\partial n} w_2^h = \frac{\partial}{\partial n} w_3^h = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,\vartheta] \tag{3.2}$$

и начальными

$$w_2^h(0) = \psi_0, \quad w_1^h(0) = w_3^h(0) = \varphi_0 \quad \text{в} \quad \Omega \tag{3.3}$$

условиями. Здесь роль управлений, подлежащих формированию, играют функции $p^h(\cdot)$ и $u^h(\cdot)$.

Решением (3.1)–(3.3), порождаемым начальным состоянием $w^h(0) = \{w_1^h(0), w_2^h(0), w_3^h(0)\}$, $w_j^h(0) \in W_\infty^2(\Omega)$, $j \in [1:3]$, и парой управлений $\{u^h(\cdot), p^h(\cdot)\} \in P(\cdot)\times P_1(\cdot)$, является функция $w(\cdot;0,w^h(0),u^h(\cdot),p^h(\cdot)) = \big\{w_1^h(\cdot;0,w^h(0),u^h(\cdot),p^h(\cdot)), w_2^h(\cdot;0,w^h(0),u^h(\cdot),p^h(\cdot)), w_3^h(\cdot;0,w^h(0),u^h(\cdot),p^h(\cdot))\big\} \in V_1\times V_1\times V_1$. Символом W^h обозначим пучок всех решений уравнения (3.1)–(3.3), т. е.

$$W^h = \big\{w^h(\cdot;0,w_0^h,u(\cdot),p(\cdot)) : u(\cdot)\in P(\cdot),\ p(\cdot)\in P_1(\cdot)\big\}.$$

Алгоритм восстановления пары $\{\psi(\cdot), u(\cdot)\}$ аналогичен описанному в предыдущем разделе. Сначала фиксируем $\alpha(h) = h^{2/3+\varepsilon}$, $\beta(h) = h^{1/6-\varepsilon}$, $\varepsilon\in(0,1/6)$, а также семейство разбиений Δ_h, $h\in(0,1)$ отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m, \quad \tau_i = \tau_{h,i}, \quad m = m_h, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \delta = Ch, \quad C = \text{const} > 0. \tag{3.4}$$

Затем организуем процесс синхронного управления моделью (3.1)–(3.3) и реальной системой S по принципу обратной связи таким образом, чтобы при достаточно малых h функция $u^h(\cdot)$ приближала (в среднеквадратичном) неизвестный вход $u(\cdot)$, а функция $w_2^h(\cdot)$ (в равномерной метрике) — компоненту $\psi(\cdot)$. Работу алгоритма разобьем на $m-1$, $m = m_h$, однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, выполняются следующие операции. Сначала вычисляются величины p_i^h и u_i^h по формулам

$$p_i^h = p^h(\xi_i, w_1^h(\tau_i)) = \arg\min\big\{l_*(\alpha,u,s_i) : u\in P_1\big\}, \tag{3.5}$$

$$u_i^h = u^h\big(\xi_i, w_2^h(\tau_i), w_3^h(\tau_i), p_i^h\big) = u_i^{h(1)} + u_i^{h(2)}. \tag{3.6}$$

Здесь l_* и s_i определены в (2.3),

$$u_i^{h(1)} = \arg\min\{L(\beta,u,z_i^h) : u\in P\}, \tag{3.7}$$

$$u_i^{h(2)} = -c_*(w_3^h(\tau_i) - \xi_i), \tag{3.8}$$

$$L(\beta,u,z_i^h) = (z_i^h, u)_H + \beta|u|_H^2,$$

$$z_i^h = w_2^h(\tau_i) - p_i^h + l(w_3^h(\tau_i) - \xi_i), \quad c_* = 0.25l\max\{B,l\}.$$

Затем полагается

$$p^h(t) = p_i^h, \quad u^h(t) = u_i^h, \quad t \in \delta_i. \tag{3.9}$$

После этого (при $t \in \delta_i$) на вход модели подаются управления вида (3.9). В результате под действием этого управления модель переходит из состояния $w^h(\tau_i)$ в состояние $w^h(\tau_{i+1}) = w^h(\tau_{i+1}; \tau_i, w^h(\tau_i), u_i^h, p_i^h)$. На следующем, $(i+1)$-м, шаге аналогичные действия повторяются. Работа алгоритма заканчивается в момент $t = \vartheta$.

Таким образом (см. (3.5)–(3.9)), стратегии управления моделью $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ (см. (1.10), (1.11)) имеют вид

$$\mathcal{V}(\tau_i, w_1^h(\tau_i), \xi_i) = \arg\min\big\{l_*(\alpha, u, s_i) : u \in P_1\big\},$$

$$\mathcal{U}(\tau_i, w_2^h(\tau_i), w_3^h(\tau_i), \xi_i, p_i^h) = \arg\min\big\{L(\beta, u, z_i^h) : u \in P\big\} - c_*(w_3^h(\tau_i) - \xi_i).$$

Теорема 2. *Имеют место сходимости*

$$u^{h(1)}(\cdot) \to u(\cdot) \quad \textit{в} \quad L_2(T; H), \quad w_2^h(\cdot) \to \psi(\cdot) \quad \textit{в} \quad C(T; H) \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

Здесь

$$u^{h(1)}(t) = u_i^{h(1)} \quad \text{при} \quad t \in \delta_i, \quad i \in [0 : m_h - 1]. \tag{3.10}$$

Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов. Сначала установим вспомогательные утверждения.

Лемма 4. *Равномерно по всем* $w^h(\cdot) = \big\{w_1^h(\cdot), w_2^h(\cdot), w_3^h(\cdot)\big\} \in W^h$ *имеет место оценка*

$$\sup_{t \in T} \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} \big\{(w_j^h(t,\eta))^2 + |\nabla w_j^h(t,\eta)|^2\big\}\, d\eta$$

$$+ \int\limits_0^{\vartheta}\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} \big\{(w_{jt}^h(t,\eta))^2 + (\Delta_L w_j^h(t,\eta))^2\big\}\, d\eta\, dt \le d_* = C_2 \mu(\varphi_0, \psi_0).$$

Здесь постоянная C_2 зависит от тех же величин, что и постоянная C в лемме 1. Доказательство этой леммы аналогично доказательству лемм 1 и 2.

Введем функционал Ляпунова

$$L(t, \pi^h(\cdot), \nu^h(\cdot), u^h(\cdot)) = \Lambda^0(t, x(\cdot), w^h(\cdot)) + \beta(h) \int\limits_0^t \big\{|u^{h(1)}(\tau)|_H^2 - |u(\tau)|_H^2\big\}\, d\tau,$$

где $g^h(t) = \pi^h(t) + l\nu^h(t)$,

$$\Lambda^0(t, x(\cdot), w^h(\cdot)) = |g^h(t)|_H^2 + 0.25 l^2 |\nu^h(t)|_H^2,$$

$$\pi^h(t) = w_2^h(t) - \psi(t), \quad \nu^h(t) = w_3^h(t) - \varphi(t).$$

Лемма 5. *Каковы бы ни были* $h \in (0,1)$, $\xi^h(\cdot) \in \Xi(\varphi(\cdot), h)$, $x(\cdot) = \{\psi(\cdot), \varphi(\cdot)\} \in X_T$, *справедливы неравенства*

$$|u^{h(1)}(\cdot)|_{L_2(T;H)}^2 \le |u(\cdot)|_{L_2(T;H)}^2 + K_* \nu^{1/2}(h) \beta^{-1}(h),$$

$$\Lambda^0(t, x(\cdot), w^h(\cdot)) \le K^* \{\nu^{1/2}(h) + \beta(h)\}, \ t \in T.$$

Здесь постоянные K_* и K^* зависят от X_T и не зависят от h, $\xi^h(\cdot)$, $x(\cdot)$, $u(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится по схеме доказательства леммы 3. Фиксируем $h \in (0,1)$, $\xi^h(\cdot) \in \Xi(\varphi(\cdot),h)$, $x(\cdot) \in X_T$, $w^h(\cdot) \in W^h$. Тогда функции $\pi^h(t)$ и $\nu^h(t)$ являются решениями системы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \pi^h(t,\eta)}{\partial t} + l\frac{\partial \nu^h(t,\eta)}{\partial t} = \Delta_L \pi^h(t,\eta) + u^h(t,\eta) - u(t,\eta) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,\vartheta], \\ &\frac{\partial \nu^h(t,\eta)}{\partial t} = \Delta_L \nu^h(t,\eta) + R^h(t,\eta)\nu^h(t,\eta) + \pi^h(t,\eta) \end{aligned} \tag{3.11}$$

с начальным

$$\pi^h(0) = \nu^h(0) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega$$

и граничным

$$\frac{\partial \pi^h}{\partial n} = \frac{\partial \nu^h}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,\vartheta]$$

условиями. Здесь

$$R^h(t,\eta) = a(t,\eta) + b(t,\eta)\big(w_3^h(t,\eta) + \varphi(t,\eta)\big) - \Big((w_3^h(t,\eta))^2 + w_3^h(t,\eta)\varphi(t,\eta) + \varphi^2(t,\eta)\Big).$$

Оценим изменение функционала Ляпунова. Для этого, умножив скалярно первое уравнение (3.11) на $g^h(t)$, а второе — на $\nu^h(t)$, будем иметь

$$(\nu^h(t), \nu_t^h(t))_H + \int\limits_\Omega |\nabla \nu^h(t,\eta)|^2\, d\eta \le (\pi^h(t), \nu^h(t))_H + B|\nu^h(t)|_H^2, \quad t \in T, \tag{3.12}$$

$$(g^h(t), g_t^h(t))_H + \int\limits_\Omega \Big\{|\nabla \pi^h(t,\eta)|^2 + l\nabla\pi^h(t,\eta)\nabla\nu^h(t,\eta)\Big\}\, d\eta = (g^h(t), u^h(t) - u(t))_H.$$

Заметим, что справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega l\big(\nabla\pi^h(t,\eta), \nabla\nu^h(t,\eta)\big)\, d\eta \ge -\int\limits_\Omega \Big\{|\nabla\pi^h(t,\eta)|^2 + 0.25l^2|\nabla\nu^h(t,\eta)|^2\Big\}\, d\eta. \tag{3.13}$$

Умножим первое неравенство в (3.12) на $0.25l^2$ и сложим со вторым. Учитывая (3.13), получаем

$$\begin{aligned} (g^h(t), g_t^h(t))_H + 0.25l^2(\nu^h(t), \nu_t^h(t))_H &\le (g^h(t), u^h(t) - u(t))_H \\ &+ 0.25l^2(\pi^h(t), \nu^h(t))_H + 0.25Bl^2|\nu^h(t)|_H^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

В силу правила определения $u_i^{h(2)}$ (см. (3.8)) при п.в. $t \in \delta_i$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} (g^h(t), u_i^{h(2)})_H &= -c_*(g^h(t), w_3^h(\tau_i) - \xi_i) \le -c_*(g^h(t), \nu^h(t))_H + L(t;\tau_i) \\ &= -c_*(\pi^h(t), \nu^h(t))_H - c_* l|\nu^h(t)|_H^2 + L(t;\tau_i), \end{aligned}$$

где

$$L(t;\tau_i) = c_*|g^h(t)|_H\bigg(h + \int\limits_{\tau_i}^t \{|w_{3\tau}^h(\tau)|_H + |\varphi_\tau(\tau)|_H\}\, d\tau\bigg).$$

По определению числа c_* имеем

$$c_* = 0.25l\max\{B, l\}.$$

Поэтому

$$0.25l^2(\pi^h(t),\nu^h(t))_H+0.25Bl^2|\nu^h(t)|_H^2-c_*(\pi^h(t),\nu^h(t))_H-c_*l|\nu^h(t)|_H^2\le L(t;\tau_i).$$

В таком случае при п.в. $t\in\delta_i$ из соотношений (3.14) вытекает

$$\big(g^h(t),g_t^h(t)\big)_H+0.25l^2\big(\nu^h(t),\nu_t^h(t)\big)_H+\le\big(g^h(t),u_i^{h(1)}-u(t)\big)_H+L(t;\tau_i). \tag{3.15}$$

Нетрудно видеть, что верна оценка

$$|g^h(t)-z_i^h|_H\le\int\limits_{\tau_i}^{t}\Big\{|w_{2\tau}^h(\tau)|_H+l|w_{3\tau}^h(\tau)|_H+l|\varphi_\tau(\tau)|_H\Big\}\,d\tau \tag{3.16}$$

$$+|p_i^h-\psi(t)|_H+l|\varphi(\tau_i)-\xi_i|_H.$$

В силу (1.7), равномерной ограниченности $\{u_i^{h(1)}\}$, лемм 3 и 4, из оценки (3.16) выводим оценку

$$\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}M(t;\tau_i)\,dt\le k_1(h+\delta)+\int\limits_0^{\vartheta}|p^h(\tau)-\psi(\tau)|_H\,d\tau\le k_2\nu^{1/2}(h), \tag{3.17}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}L(t;\tau_i)\,dt\le k_3(h+\delta), \tag{3.18}$$

где

$$M(t;\tau_i)=|g^h(t)-z_i^h|_H\big\{|u_i^{h(1)}|_H+|u_*(t)|_H\big\}.$$

Далее из (3.15) получаем при $t\in\delta_i$

$$(g^h(t),g_t^h(t))_H+0.25l^2(\nu^h(t),\nu_t^h(t))_H+0.5\beta(h)\big\{|u^{h(1)}(t)|_H^2-|u(t)|_H^2\big\}\le(z_i^h,u^{h(1)}-u(t))_H$$

$$+M(t;\tau_i)+L(t;\tau_i)+0.5\beta(h)\big\{|u^{h(1)}(t)|_H^2-|u(t)|_H^2\big\}. \tag{3.19}$$

Учитывая правило выбора управления $u^{h(1)}(t)$ (см. (3.7), (3.9)), из (3.19) выводим

$$(g^h(t),g_t^h(t))_H+0.25l^2(\nu^h(t),\nu_t^h(t))_H$$

$$+0.5\beta(h)\big\{|u^{h(1)}(t)|_H^2-|u(t)|_H^2\big\}\le M(t;\tau_i)+L(t;\tau_i),\quad t\in\delta_i. \tag{3.20}$$

В свою очередь, воспользовавшись (3.20), (3.17), (3.18), будем иметь

$$L(t,\pi^h(\cdot),\nu^h(\cdot),u^h(\cdot))\le\sum_{i=0}^{m-1}\big\{M(\tau_{i+1};\tau_i)+L(\tau_{i+1};\tau_i)\big\}\le k_4\nu^{1/2}(h).$$

Из этого неравенства и следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Введем функционал

$$\Lambda_h(x(\cdot),w^h(\cdot))=\max_{t\in T}\Lambda^0(t,x(\cdot),w^h(\cdot)).$$

Имеет место

Лемма 6. *Для любых выхода $x(\cdot)=\{\varphi(\cdot),\psi(\cdot)\}\in X_T$, управления $u^{h(1)}(\cdot)$, определяемого по правилу (3.7), (3.10), “измерения” $\xi^h(\cdot)\in\Xi(x(\cdot),h)$ и последовательности чисел $\{h_k\}$, $h_k\to0$ при $k\to\infty$, таких, что*

$$\Lambda_{h_k}(x(\cdot),w^{h_k}(\cdot))\to0, \tag{3.21}$$

$$u^{h_k(1)}(\cdot)\to u^0(\cdot)\quad\text{слабо в}\quad L_2(T;H)\quad\text{при}\quad k\to\infty, \tag{3.22}$$

справедливо равенство

$$u^0(\cdot)=u(\cdot).$$

Доказательство. Предполагая противное, заключаем: найдутся выход $x(\cdot) \in X_T$, управление $u^{h(1)}(\cdot)$, "измерение" $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$ и последовательность чисел $\{h_k\}$, $h_k \to 0$ при $k \to \infty$, такие, что имеют место сходимости (3.21), (3.22), однако,

$$u^0(\cdot) \neq u_*(\cdot).$$

Следовательно, можно указать число $t_* \in (0, \vartheta]$, для которого

$$|w_2(t_*) - \psi(t_*)|_H > 0. \tag{3.23}$$

Здесь $w_2(\cdot) = w_2(\cdot; \psi_0, u^0(\cdot))$ — решение параболического уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w_2(t,\eta)}{\partial t} = \Delta_L w_2(t,\eta) - l\frac{\partial \varphi(t,\eta)}{\partial t} + u^0(t,\eta) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,\vartheta],\\
&\frac{\partial w_2}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad (0,\vartheta] \times \partial\Omega,\\
&w_2(0) = \psi_0 \quad \text{в} \quad \Omega.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$|w_2(t_*) - \psi(t_*)|_H^2 \le 2|w_2(t_*) - w_2^{h_k}(t_*)|_H^2 + 2|w_2^{h_k}(t_*) - \psi(t_*)|_H^2 \le \lambda_{1,k} + \lambda_{2,k}, \tag{3.24}$$

где

$$\lambda_{1,k} = 2\int\limits_0^{t_*} \big(w_2(t) - w_2^{h_k}(t), u^0(t) - u^{h_k}(t)\big)_H\, dt,$$

$$\lambda_{2,k} = 2\int\limits_0^{t_*} \big(w_2^{h_k}(t) - \psi(t), u^{h_k}(t) - u(t)\big)_H\, dt.$$

В силу леммы 5 имеет место сходимость

$$w_3^{h_k}(\cdot) \to \varphi(\cdot) \quad \text{в} \quad C(T;H) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому

$$\sup_{t\in T} |u^{h_k(2)}(t)|_H \to 0 \quad \text{в} \quad C(T;H) \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{3.25}$$

$$u^{h_k(2)}(t) = u_i^{h_k(2)}, \quad t \in [\tau_{h_k,i}, \tau_{h_k,i+1}), \quad i \in [0 : m_{h_k} - 1].$$

Здесь $u_i^{h_k(2)}$ определяется по формуле (3.8). Воспользовавшись условием (3.22) и сходимостью (3.25), получаем

$$u^{h_k}(\cdot) \to u^0(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;H) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{1,k} = 0. \tag{3.26}$$

В свою очередь, из (3.21) выводим

$$\sup_{t\in T} |w_2^{h_k}(t) - \psi(t)|_H \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

В таком случае

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{2,k} = 0. \tag{3.27}$$

Объединив (3.24), (3.26), (3.27), будем иметь

$$|w_2(t_*) - \psi(t_*)|_H = 0. \tag{3.28}$$

Однако соотношение (3.28) противоречит неравенству (3.23). Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 проводится по стандартной схеме (см., например, [3]). Предполагая противное, заключаем, что найдутся семейства $(u^{h_k(1)}(\cdot))_{k=0}^{\infty}$, $(\xi^{h_k}(\cdot))_{k=0}^{\infty} \in \Xi(\varphi(\cdot), h_k)$ ($h_k \to 0$ при $k \to \infty$) и отвечающие им траектории модели $w^{h_k}(\cdot)$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} |u^{h_k(1)}(\cdot) - u(\cdot)|_{L_2(T;H)} > 0. \tag{3.29}$$

Ввиду слабой компактности множества $P(\cdot) \subset L_2(T;H)$ можно считать (не нарушая общности)

$$u^{h_k(1)}(\cdot) \to \overline{u}(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;H) \quad \text{при} \quad k \to \infty, \quad \overline{u}(\cdot) \in P(\cdot). \tag{3.30}$$

В силу леммы 5 имеет место сходимость (3.21). Кроме того,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |u^{h_k(1)}(\cdot)|_{L_2(T;H)} \le |u(\cdot)|_{L_2(T;H)}. \tag{3.31}$$

Учитывая (3.30) и лемму 6, заключаем

$$\overline{u}(\cdot) = u(\cdot).$$

Таким образом,

$$u^{h_k(1)}(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;H) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.32}$$

Отсюда в силу известного свойства слабого предела имеем

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} |u^{h_k(1)}(\cdot)|_{L_2(T;H)} \ge |u(\cdot)|_{L_2(T;H)}. \tag{3.33}$$

Из (3.31), (3.33) выводим

$$\lim_{k\to\infty} |u^{h_k(1)}(\cdot)|_{L_2(T;H)} = |u(\cdot)|_{L_2(T;H)}. \tag{3.34}$$

В свою очередь, из (3.32), (3.34) получаем

$$u^{h_k(1)}(\cdot) \to u(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T;H) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.35}$$

Однако (3.35) противоречит (3.29). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.
2. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
3. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
4. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solution. London: Gordon and Breach, 1995. 673 p.
5. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 2000. 306 с.
6. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Метод экстремального сдвига Н.Н. Красовского и задачи граничного управления // Автоматики и телемеханика. 2009. Т. 4. С. 18–30.
7. **Осипов Ю.С., Короткий А.И.** Динамическое моделирование параметров в гиперболических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1991. № 2. С. 154–164.

8. **Короткий А.И.** Восстановление управлений и параметров динамических систем при неполной информации // Изв. высш. учеб. заведений. Сер. Математика. 1998. № 11 (438). С. 109–120.
9. **Розенберг В.Л.** Задача динамического восстановления функции источника в параболическом уравнении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1995. Т. 3. С. 183–202.
10. **Цепелев И.А.** Динамическое восстановление множества параметров в краевой задаче Гурса — Дарбу // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1995. Т. 5. С. 319–328.
11. **Blizorukova M.** Positional modeling in a system with time delay // Analysis and optimization of differential systems / Ed. by V.Barbu et. Boston, MA: Kluwer Acad. Publishers, 2003. P. 49–55.
12. **Васильева Е.В., Максимов В.И.** О динамической реконструкции управления в дифференциальном уравнении с памятью // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 6. С. 803–814.
13. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 451 с.
14. **Caginalp G.** An analysis of a phase field model of a free boundary // Arch. Rat. Mech. Analysis. 1986. Vol. 92. P. 205–245.
15. **Heinkenschloss M., Tröltzsch F.** Analysis of the Lagrange-SQP-Newton method for the control of a phase field equation // Control and Cybernetics. 1999. Vol. 28, no. 2. P. 177–211.
16. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 452 с.
17. **Hoffman K.-H., Jiang L.S.** Optimal control problem of a phase field model for solidification // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1992. Vol. 13, no. 1–2. P. 11–27.

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 18.02.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517.911/517.93

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМ Е. А. БАРБАШИНА И Н. Н. КРАСОВСКОГО ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НА УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ[1]

Е. А. Панасенко, Е. Л. Тонков

Известные теоремы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского (1952) об асимптотической устойчивости и устойчивости в целом положения равновесия автономной системы дифференциальных уравнений распространены на неавтономные дифференциальные включения с замкнутозначными (но необязательно компактнозначными) правыми частями, где в качестве положения равновесия выступает слабо инвариантное (относительно решений включения) множество. Эти утверждения формулируются в терминах метрики Хаусдорфа — Бебутова, динамической системы сдвигов, сопутствующей правой части дифференциального включения, и отвечающего включению слабо инвариантного множества.

Ключевые слова: теория устойчивости, функции Ляпунова, дифференциальные включения, управляемые системы, инвариантные множества.

E.A. Panasenko, E.L. Tonkov. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems.

The known theorems by E.A. Barbashin and N.N. Krasovskii (1952) about the asymptotic and global stability of an equilibrium state for an autonomous system of differential equations are extended to nonautonomous differential inclusions with closed-valued (but not necessarily compact-valued) right-hand sides, where the equilibrium state is a weakly invariant (with respect to the solutions of the inclusion) set. The statements are formulated in terms of the Hausdorff–Bebutov metric, the dynamical system of translations corresponding to the right-hand side of the differential inclusion, and the weakly invariant set corresponding to the inclusion.

Keywords: stability theory, Lyapunov functions, differential inclusions, controlled systems, invariant sets.

Введение

В 1952 г. Е. А. Барбашин и Н. Н. Красовский показали [1] (см. также [2, с. 19]), что в условиях теоремы А. М. Ляпунова (так называемой второй теоремы Ляпунова [3]) об асимптотической устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.1}$$

требование отрицательной определенности производной $\dot{V}_f$ функции Ляпунова V можно ослабить до требования $\dot{V}_f \leqslant 0$ при дополнительном условии, что множество $\dot{V}_f(x) = 0$ не содержит целых траекторий системы (0.1), кроме положения равновесия $x = 0$. Аналогичные утверждения с ослабленным условием на производную $\dot{V}_f$ в силу системы (0.1) были получены Барбашиным и Красовским и для проверки свойства устойчивости в целом и неустойчивости нулевого решения системы (0.1).

Эти утверждения в силу своей эффективности вызвали поток исследований, посвященных проверке асимптотической устойчивости конкретных систем (в основном механических и биологических), а также исследований, связанных с многочисленными обобщениями теорем Барбашина и Красовского на нестационарные системы, системы уравнений с последействием и др. В рамках отмеченной тематики в работе [4] теоремы об асимптотической устойчивости и устойчивости в целом получены для нестационарного дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \tag{0.2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00305, 06-01-00258, 09-01-97503), программы “Развитие научного потенциала ВШ” (проект 2.1.1/1131) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 29 “Математическая теория управления”.

с компактными образами правой части $F(t,x)$ и заданным множеством $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{1+n}$, инвариантным относительно потока, порожденного дифференциальным включением (0.2) и играющим роль положения равновесия включения (0.2). Эти результаты дополняют соответствующие утверждения работы [5].

Здесь мы продолжаем исследования, начатые в работе [4], и распространяем теоремы Барбашина и Красовского на нестационарные включения (0.2) без предположения компактности образов правой части $F(t,x)$ (требуется лишь их замкнутость), а в отношении множества $\mathcal{M}$ предполагаем только слабую инвариантность относительно потока, отвечающего включению (0.2). Эти утверждения формулируются в терминах метрики Хаусдорфа — Бебутова, динамической системы сдвигов [6, гл. 6], сопутствующей правой части дифференциального включения (0.2), и слабо инвариантного множества $\mathcal{M}$, отвечающего включению (0.2).

Предполагается, что полученные результаты в дальнейшем могут найти применение при исследовании свойств множеств достижимости управляемых систем и введенных Н. Н. Красовским стабильных мостов [7, 8], играющих важную роль в теории дифференциальных игр с нефиксированным временем окончания игры.

1. Основные обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство[2] размерности n со скалярным произведением $\langle x, y\rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $\varrho(x, M) \doteq \min\limits_{y\in M} |x-y|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества M в $\mathbb{R}^n$. Если r — положительное число, то через $O_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$ обозначим замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в нуле. Далее, если M — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{cl} M$ (или $\overline{M}$) — замыкание, $\operatorname{fr} M$ — граница, $\operatorname{int} M$ — внутренность, $\operatorname{co} M$ — выпуклая оболочка множества M относительно пространства $\mathbb{R}^n$.

Пространство непустых *компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$ обозначим $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Определим в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ метрику Хаусдорфа

$$\operatorname{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}, \tag{1.1}$$

где $d(A, B) \doteq \max\limits_{a\in A} \varrho(a, B)$ — *полуотклонение* множества A от множества B. Подпространство в $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из *выпуклых* компактных подмножеств, обозначим через $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, пространство всех непустых *замкнутых* (необязательно ограниченных) подмножеств в $\mathbb{R}^n$ — через $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, а подпространство в $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из *выпуклых* замкнутых подмножеств — через $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Каждое из пространств $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ является полным [10, § 14] в метрике (1.1). Ниже будет показано, что и в пространстве $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ можно определить метрику, относительно которой $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ будут полными метрическими пространствами.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{1.2}$$

где $F\colon \mathbb{R}^{1+n} \to \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$. Под *решением включения* (1.2) *на интервале* $J \subset \mathbb{R}$ будем понимать решение Каратеодори, а именно, *всякую абсолютно непрерывную функцию* $\varphi\colon J \to \mathbb{R}^n$ *такую, что включение* $\dot{\varphi}(t) \in F\big(t, \varphi(t)\big)$ *выполнено при почти всех* $t \in J$. Далее, функцию $t \to \varphi(t)$, удовлетворяющую условию $\varphi(t_0) = x_0$, будем называть *локальным решением* включения (1.2), если найдется такая окрестность J точки t_0, что φ является решением включения (1.2) на J.

Пусть задано множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}$ сечение

$$M(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in \mathcal{M}\}$$

[2]Т. е. евклидово пространство с фиксированным ортонормированным базисом [9].

множества $\mathcal{M}$ непусто. Построим замкнутую окрестность $\mathcal{M}^r \doteq \overline{\mathcal{M}} + O_r$ множества $\mathcal{M}$ в пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$ и внешнюю r-окрестность $\mathcal{N}^r_+ \doteq \mathcal{M}^r \setminus \overline{\mathcal{M}}$ границы $\operatorname{fr}\mathcal{M}$ множества $\mathcal{M}$. Очевидно, что $\mathcal{M}^r \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^{1+n})$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ множество $M^r(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : (t,x) \in \mathcal{M}^r\}$ замкнуто.

Всюду в этой статье мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1. Найдется такое $r > 0$, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathcal{M}^r$ существует локальное решение $\varphi(t)$ включения (1.2), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Кроме того, если $\varphi\colon [t_0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ — решение дифференциального включения (1.2), то всегда предполагается, что полуинтервал $[t_0, \tau)$, где $\tau = \tau(t_0, \varphi)$, является правым максимальным полуинтервалом существования решения $t \to \varphi(t)$.

2. Пространства $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и дифференциальные включения

Напомним, что пространство $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ состоит из непустых замкнутых подмножеств, расположенных в $\mathbb{R}^n$, а $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ — подпространство в $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из выпуклых подмножеств. Введем в $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ метрику Хаусдорфа — Бебутова [11]. С этой целью для каждого F из $\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ построим множество $m(F) \doteq \bigl\{ f_0 \in F : |f_0| = \min\limits_{f \in F} |f| \bigr\}$ и множество $m^r(F)$ точек, отстоящих от $m(F)$ не более, чем на расстояние r. Для $F, G \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ и любого $r > 0$ определим множества $F_r = F \bigcap m^r(F)$, $G_r = G \bigcap m^r(G)$, полуотклонения $d_r(F,G) \doteq d(F_r, G_r)$, $d_r(G,F) \doteq d(G_r, F_r)$, метрику Хаусдорфа $\operatorname{dist}_r(F,G) \doteq \max\{d_r(F,G), d_r(G,F)\}$, полуотклонения Хаусдорфа — Бебутова

$$D(F,G) = \sup_{r>0} \min\Bigl\{ d_r(F,G),\ r^{-1} \Bigr\}, \quad D(G,F) = \sup_{r>0} \min\Bigl\{ d_r(G,F),\ r^{-1} \Bigr\} \tag{2.1}$$

и метрику Хаусдорфа — Бебутова

$$\operatorname{Dist}(F,G) = \max\bigl\{ D(F,G),\ D(G,F) \bigr\}. \tag{2.2}$$

Можно показать, что расстояние (2.2) удовлетворяет всем аксиомам метрики. Далее, из определения (2.1) и соотношений $d_r(\{0\}, F) = r_0 = |f_0|$, $f_0 \in m(F)$, $d_r(F, \{0\}) \leqslant r + r_0$ следует, что $D(\{0\}, F) = r_0$ и $D(F, \{0\}) \leqslant \beta$, где $\beta = (r_0 + \sqrt{r_0^2 + 4})/2$, для всех $F \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $|F| \doteq \operatorname{Dist}(F, \{0\}) \leqslant \beta$ и

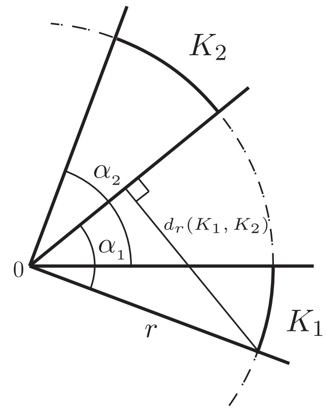
$$\operatorname{Dist}(F,G) \leqslant \frac{1}{2} \Bigl(|f_0| + |g_0| + \sqrt{|f_0|^2 + 4} + \sqrt{|g_0|^2 + 4} \Bigr) \quad \text{для всех} \quad F, G \in \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n).$$

Отметим еще, что если $|F| \leqslant r$ и $f \in F$, то это отнюдь не означает, что $|f| \leqslant r$, и последнее неравенство будет выполнено только в том случае, если $f \in F \bigcap O_r$.

П р и м е р 1. Пусть K_1 и K_2 — два замкнутых конуса в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Найдем $\operatorname{Dist}(K_1, K_2)$. Напомним, что если точка x принадлежит некоторому конусу, то и весь луч $l \doteq \{\lambda x : \lambda \geqslant 0\}$ содержится в этом конусе. Пусть $\alpha_1 \doteq \max\limits_{l_1 \subset K_1} \min\limits_{l_2 \subset K_2} \measuredangle(l_1, l_2)$ и $\alpha_2 \doteq \max\limits_{l_2 \subset K_2} \min\limits_{l_1 \subset K_1} \measuredangle(l_1, l_2)$ (см. рис.). Предположим сначала, что $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/2)$, и вычислим $D(K_1, K_2)$, для чего воспользуемся формулой (2.1). Очевидно, что $r_0 = 0$. Выберем некоторое $r > 0$. Тогда

$$d_r(K_1, K_2) = \max_{x \in K_1 \bigcap O_r} \varrho(x, K_2 \bigcap O_r) = r \sin \alpha_1.$$

Далее, из уравнения $r \sin \alpha_1 = r^{-1}$ получаем $r = (\sin \alpha_1)^{-\frac{1}{2}}$ и, следовательно, $D(K_1, K_2) = \sqrt{\sin \alpha_1}$. Аналогично находим $D(K_2, K_1) = \sqrt{\sin \alpha_2}$. Таким образом, $\operatorname{Dist}(K_1, K_2) = \sqrt{\sin \alpha}$, где $\alpha \doteq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Если $\alpha_1 \in [\pi/2, \pi]$ или $\alpha_2 \in [\pi/2, \pi]$, то, как нетрудно проверить, $D(K_1, K_2) = 1$ или $D(K_2, K_1) = 1$ соответственно. Т. е. в этом случае $\operatorname{Dist}(K_1, K_2) = 1$.



Полуотклонение от $K_1 \bigcap O_r$ до $K_2 \bigcap O_r$.

Для дальнейшего важно, что сходимость последовательности $\{F_i\}$, где $F_i \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$, к $F \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ в метрике (2.2) эквивалентна сходимости, равномерной на компактах.

Лемма 1 (основное свойство метрики Dist). $\mathrm{Dist}(F_i, F) \to 0$ *в том и только в том случае, если для любого* $\varepsilon > 0$ *и достаточно большого* r *найдется такой номер* i_0, *что при всех* $i \geqslant i_0$ *выполнено неравенство* $\mathrm{dist}_r(F_i, F) \leqslant \varepsilon$.

Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 14.1 в монографии [10], несложно проверить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Каждое из пространств* $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ *и* $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *является полным в метрике* (2.2).

Пусть $F(t,x)$ — функция переменных $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ со значениями в $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$. F называется *полунепрерывной сверху в точке* (t_0, x_0), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $(t,x) \in O_\varepsilon(t_0, x_0)$ полуотклонение $D(F(t,x), F(t_0,x_0))$ не превосходит ε. Далее, функция $F\colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ F называется *полунепрерывной снизу в точке* (t_0, x_0), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $D(F(t_0,x_0), F(t,x)) \leqslant \varepsilon$ для всех $(t,x) \in O_\varepsilon(t_0,x_0)$.

Из леммы 1 следует, что F полунепрерывна сверху (или снизу) в точке (t_0, x_0) в том и только в том случае, если для любого достаточно большого r функция $(t,x) \to F(t,x) \bigcap O_r$ со значениями в $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^{1+n})$ полунепрерывна сверху (соответственно снизу) в точке (t_0,x_0) в смысле полуотклонения по Хаусдорфу $d_r(F(t,x), F(t_0,x_0))$ (соответственно $d_r(F(t_0,x_0), F(t,x))$).

Если F полунепрерывна сверху (или снизу) в каждой точке (t_0,x_0) открытого множества $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$, то она называется *полунепрерывной сверху* (соответственно *снизу*) *на множестве* G. Функция $(t,x) \to \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$, одновременно полунепрерывная сверху и снизу на множестве G, называется *непрерывной* на G. Поэтому в силу основного свойства метрики Dist функция $(t,x) \to F(t,x)$ непрерывна в точке (t_0,x_0), если для любого достаточно большого r функция $(t,x) \to F(t,x) \bigcap O_r$ непрерывна в точке (t_0,x_0) в смысле метрики Хаусдорфа dist.

Учитывая сказанное, мы теперь можем переформулировать классические теоремы существования [12, гл. 2, § 1], [13, гл. 2, § 6, 7] решения задачи Коши для включения (1.2) с правой частью $(t,x) \to F(t,x)$, принимающей значения в $\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. *Если функция* $(t,x) \to F(t,x) \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна снизу или имеет выпуклые образы и полунепрерывна сверху, то для каждой точки* (t_0,x_0) *существует локальное решение включения* (1.2), *удовлетворяющее начальному условию* $x(t_0) = x_0$.

Далее, если для каждой начальной точки (t_0,x_0) *включение* (1.2) *имеет локальное решение и найдется такая локально интегрируемая по Лебегу функция* $a\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$, *что для всех* (t,x) *выполнено неравенство*

$$r_0(t,x) \leqslant a(t)(1 + |x|), \tag{2.3}$$

где $r_0(t,x)$ — *расстояние от нуля в* $\mathbb{R}^n$ *до множества* $F(t,x)$, *то существует решение* $\varphi(t)$ *включения* (1.2) *с начальным условием* $\varphi(t_0) = x_0$, *определенное при всех* $t \geqslant t_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $\varphi(t)$ — локальное решение включения $\dot{x} \in S(t,x) \doteq F(t,x) \bigcap O_{r(t,x)}$, где $r(t,x) = r_0(t,x) + \sqrt{r_0^2(t,x)+4}$. Тогда из неравенства (2.3) следует неравенство $r(t,x) \leqslant a_1(t)(1+|x|)$ для некоторой локально интегрируемой по Лебегу функции $a_1(t)$. С учетом этого неравенства в малой окрестности точки t_0 получим следующие неравенства $d|\varphi(t)|/dt \leqslant |\dot{\varphi}(t)| \leqslant r(t,\varphi(t)) \leqslant a_1(t)(1+|\varphi(t)|)$, и поэтому $|\varphi(t)| \leqslant z(t)$, где $z(t)$ — определенное при всех t решение задачи $\dot{z} = a_1(t)(1+z)$, $z(t_0) = |\varphi(t_0)|$.

3. Равномерная устойчивость по Ляпунову

Пусть задано множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}$ сечение

$$M(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \colon (t,x) \in \mathcal{M}\}$$

множества $\mathcal{M}$ непусто (замкнутость и ограниченность $\mathcal{M}$ не предполагается). Пусть, кроме того, задано дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x), \tag{3.1}$$

где $F : \mathbb{R}^{1+n} \to \operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию 1 (см. разд. 1).

О п р е д е л е н и е 1. Множество $\mathcal{M}$ будем называть *равномерно* (по начальному моменту времени t_0) *устойчивым* по Ляпунову *относительно включения* (3.1), если для некоторого $r > 0$ и любого $\varepsilon \in (0,r)$ найдется такое $\delta \in (0,\varepsilon)$, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ и любого решения $t \to \varphi(t)$ включения (3.1) из условия $(t_0,\varphi(t_0)) \in \mathcal{N}_+^{\delta}$ следует, что $(t,\varphi(t)) \in \mathcal{M}^{\varepsilon}$, $t \in [t_0,\tau)$.

П р и м е р 2. Покажем, что множество $\mathcal{M} \doteq \{(t,x) \in \mathbb{R}^3 \colon t \in \mathbb{R},\, x_1 \geqslant \operatorname{arctg} x_2,\, x_2 \geqslant 0\}$ равномерно устойчиво относительно дифференциального включения, отвечающего управляемой системе на плоскости

$$\dot{x}_1 = 1,\ \dot{x}_2 = u(1+x_2^2), \quad u \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Действительно, пусть точка $x \in P_1 \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = \operatorname{arctg} x_2,\, x_2 \geqslant 0\}$. Тогда вектор $p = p(x)$, ортогональный P_1 и направленный наружу от множества $M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geqslant \operatorname{arctg} x_2,\, x_2 \geqslant 0\}$, имеет координаты $p = \big(-(\cos^2 x_1)^{-1}, 1\big)$, и поэтому скалярное произведение $\langle p,v\rangle$ вектора p и вектора скорости $v = v(x) = \big(1, u(1+x_2^2)\big)$ управляемой системы (3.2) в точке x удовлетворяет (при $0 \leqslant x_1 < \pi/2$) неравенству $\langle p,v\rangle = -(\cos^2 x_1)^{-1} + u(1+\operatorname{tg}^2 x_1) = (u-1)(\cos^2 x_1)^{-1} \leqslant 0$. Следовательно, всякая траектория управляемой системы (3.2), начинающаяся на множестве P_1, с возрастанием времени не покидает M. Среди таких траекторий есть траектории, отвечающие решениям с конечным временем существования (например, $x(t) = (t, \operatorname{tg} t)$ при $u \equiv 1$).

Аналогичные рассуждения, как несложно проверить, остаются верными и относительно второй границы $P_2 \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geqslant 0,\ x_2 = 0\}$ множества M. Кроме того, так как вектор скорости v системы (3.2) в точке $0 \in \operatorname{fr} M$ имеет координаты $(1,u)$, то в силу условия $u \in [0,1]$ любая траектория системы (3.2), начинающаяся в нуле, тоже не покидает M.

Все вышесказанное будет справедливо и для множества $\mathcal{M}^{\varepsilon}$ при всех близких к нулю положительных ε. Следовательно, любая траектория, берущая начало в ε-окрестности множества $\mathcal{M}$, эту окрестность не покидает, т. е. множество $\mathcal{M}$ устойчиво по Ляпунову. Далее, в силу стационарности дифференциального включения, отвечающего системе (3.2), такая устойчивость равномерна относительно начального момента времени t_0, и, следовательно, дифференциальное включение, порожденное системой (3.2), устойчиво в смысле определения 1.

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{1+n}$. Напомним, что мы пользуемся следующими обозначениями:

$$\mathcal{M}^r \doteq \overline{\mathcal{M}} + O_r, \quad \mathcal{N}_+^r \doteq \mathcal{M}^r \setminus \overline{\mathcal{M}},$$

где r — заданное положительное число.

О п р е д е л е н и е 2. Непрерывную функцию $V: \mathcal{M}^r \to \mathbb{R}$ будем называть *функцией Ляпунова* (на множестве $\mathcal{M}^r$), если $V(t,x)=0$ при $(t,x)\in\overline{\mathcal{M}}$ и $V(t,x)>0$ при $(t,x)\in\mathcal{N}_+^r$.

Отметим, что предположение о равенстве нулю функции V на множестве $\mathcal{M}$ не уменьшает общности дальнейших рассуждений.

О п р е д е л е н и е 3. Функцию Ляпунова $V: \mathcal{M}^r \to \mathbb{R}$ назовем *определенно положительной* (на множестве $\mathcal{M}^r$), если для всякого $\varepsilon\in(0,r)$ найдется такое $\delta>0$, что $V(t,x)\geqslant\delta$ при всех $(t,x)\in\operatorname{fr}\mathcal{M}^\varepsilon$.

Пусть, далее, функция $(t,x)\to V(t,x)$ локально липшицева. Тогда для любого вектора $h=(\tau,q)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ и всякой точки $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ существует конечный предел

$$V^o(t,x;h)\doteq\limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(t,x,+0)}\frac{V(\vartheta+\varepsilon\tau,y+\varepsilon q)-V(\vartheta,y)}{\varepsilon},$$

называемый *обобщенной производной* (*или производной Ф. Кларка* [14]) *функции* V *по направлению вектора* h *в точке* (t,x).

Напомним [14], что для каждой точки (t,x) функция $h\to V^o(t,x;h)$ *локально липшицева, положительно однородна и субаддитивна.* Далее, через $V^o(t,x;q)$ будем обозначать производную функции V в точке (t,x) по направлению вектора $h=(1,q),\ q\in\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Пусть существуют локально липшицева определенно положительная функция Ляпунова* $V:\mathcal{M}^r\to\mathbb{R}$ *и непрерывная функция* $w:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *такие, что*

(1) *для любого* $q\in F(t,x)$ *и всех* $(t,x)\in\operatorname{cl}\mathcal{N}_+^r$ *имеет место неравенство*

$$V^o(t,x;q)\leqslant w(t,V(t,x)); \tag{3.3}$$

(2) $w(t,0)\equiv0$, *уравнение*

$$\dot z=w(t,z) \tag{3.4}$$

обладает свойством единственности решения задачи Коши, и тривиальное решение уравнения (3.4) *равномерно устойчиво по Ляпунову* (*в классическом смысле*).

Тогда множество $\mathcal{M}$ *равномерно устойчиво по Ляпунову относительно включения* (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta\in(0,\varepsilon)$, что всякое решение $\varphi\colon[t_0,\tau)\to\mathbb{R}^n$ включения (3.1), для которого $(t_0,\varphi(t_0))\in\mathcal{N}_+^\delta$, удовлетворяет включению $(t,\varphi(t))\in\operatorname{int}\mathcal{M}^\varepsilon$ при всех $t\in[t_0,\tau)$. Выберем $\varepsilon>0$ и обозначим

$$\alpha=\alpha(\varepsilon)=\inf_{(t,x)}\{V(t,x)\colon\ (t,x)\in\operatorname{fr}\mathcal{M}^\varepsilon\}.$$

Из условия определенной положительности функции V следует, что $\alpha>0$. Далее, так как положение равновесия уравнения (3.4) равномерно устойчиво по Ляпунову, то по найденному α можно указать такое $\delta_0\in(0,\alpha)$, что для любого решения $t\to z(t)$ уравнения (3.4) и любого начального момента времени t_0 из неравенства $|z(t_0)|<\delta_0$ следует, что $|z(t)|<\alpha$ для любого $t\geqslant t_0$. В силу непрерывности функции V можно найти такое $\delta=\delta(\delta_0)\in(0,\varepsilon)$, что $V(t_0,x)<\delta_0$ для всех таких x, что $(t_0,x)\in\mathcal{N}_+^\delta$.

Предположим теперь, что решение $\varphi(t)$ включения (3.1) таково, что $(t_0,\varphi(t_0))\in\mathcal{N}_+^\delta$, и на интервале (t_0,τ) существования решения $\varphi(t)$ найдется такой момент времени t^*, что выполнено включение $(t^*,\varphi(t^*))\in\operatorname{fr}\mathcal{M}^\varepsilon$. Обозначим $v(t)\doteq V(t,\varphi(t))$. Тогда $\dot v(t)=V^o(t,\varphi(t),\dot\varphi(t))$ при почти всех $t\in[t_0,\tau)$, и из условия (3.3) следует неравенство $\dot v(t)\leqslant w(t,v(t))$. Из этого неравенства в силу теоремы С. А. Чаплыгина [15] следует неравенство $v(t)\leqslant z(t)$, где $z(t)$ есть решение уравнения (3.4), удовлетворяющее условию $z(t_0)=v(t_0)$. Поскольку $v(t_0)=V(t_0,\varphi(t_0))<\delta_0$, получаем противоречивые неравенства $\alpha \leqslant v(t^*) \leqslant z(t^*) < \alpha$. Таким образом, решение включения (3.1), выходящее при $t = t_0$ из множества $\mathcal{N}^{\delta}_{+}$, остается внутри множества $\mathcal{M}^{\varepsilon}$ при всех t из интервала существования решения $\varphi(t)$. $\square$

Опираясь на доказательство теоремы 2, нетрудно показать, что имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть для любого $t \in \mathbb{R}$ сечение $M(t)$ множества $\mathcal{M}$ компактно. Тогда в условиях теоремы 2 для заданного $r > 0$ найдется такое $r_0 \in (0, r)$, что для любого t_0 всякое решение $t \to \varphi(t)$ включения (3.1), удовлетворяющее условию $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}^{r_0}_{+}$, бесконечно продолжаемо вправо и при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворяет включению $(t, \varphi(t)) \in \operatorname{int} \mathcal{M}^r$.*

Определение 4. Множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ называется *положительно инвариантным* (относительно включения (3.1)), если для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in \mathcal{M}$ каждое решение $\varphi\colon [t_0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ включения (3.1) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ удовлетворяет при всех $t \in [t_0, \tau)$ включению $(t, \varphi(t)) \in \mathcal{M}$.

Следствие 2. *Если множество $\mathcal{M}$ равномерно устойчиво по Ляпунову относительно включения (3.1), то замыкание $\overline{\mathcal{M}}$ множества $\mathcal{M}$ положительно инвариантно.*

Доказательство. Пусть решение $t \to \varphi(t)$ включения (3.1), начинающееся в $\overline{M}(t_0)$, в некоторый момент t_1 достигает границы множества $M(t_1)$, т. е. $\varphi(t_1) \in \operatorname{fr} M(t_1)$. Пусть, далее, найдется такой момент времени $t_2 > t_1$, для которого $\varphi(t_2) \notin \overline{M}(t_2)$. Это означает, что $\varrho\big(\varphi(t_2), \overline{M}(t_2)\big) = \alpha > 0$. Фиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Тогда в силу равномерной устойчивости множества $\mathcal{M}$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из соотношения $0 = \varrho\big(\varphi(t_1), \overline{M}(t_1)\big) < \delta$ при всех $t \in [t_1, t_2]$ следует неравенство $\varrho\big(\varphi(t), \overline{M}(t)\big) < \varepsilon$, которое противоречит неравенствам $\alpha = \varrho\big(\varphi(t_2), \overline{M}(t_2)\big) < \varepsilon < \alpha$. $\square$

Пример 3. Применим теорему 2 для проверки устойчивости множества

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M, \quad \text{где} \quad M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2\colon\ x_1 \geqslant \operatorname{arctg} x_2,\ x_2 \geqslant 0\},$$

относительно решений включения, отвечающего управляемой системе (3.2). С этой целью разобьем пространство $\mathbb{R}^2$ на четыре множества: M,

$$G_1 = \{x\colon\ x_2 < 0,\ x_2 < x_1\},\ G_2 = \{x\colon\ x_1 \leqslant x_2 \leqslant -x_1\},\ G_3 = \{x\colon\ x_2 > -x_1,\ \operatorname{arctg} x_2 > x_1\}$$

и построим функцию

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in M, \\ -\sqrt{2}x_2, & \text{если} \quad x \in G_1, \\ -\sqrt{2}x_1, & \text{если} \quad x \in G_2, \\ r(x_1, x_2), & \text{если} \quad x \in G_3. \end{cases}$$

Здесь $r(x)$ — расстояние от точки $x \in G_3$ до кривой $x_1 = \operatorname{arctg} x_2$. Непосредственно проверяется, что $V(x)$ определенно положительна, локально липшицева и

$$V^o(x; q) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in M, \\ -\sqrt{2}u(1 + x_2^2), & \text{если} \quad x \in G_1, \\ -\sqrt{2}, & \text{если} \quad x \in G_2, \\ \dfrac{\partial r(x)}{\partial x_1} + u\dfrac{\partial r(x)}{\partial x_2}(1 + x_2^2), & \text{если} \quad x \in G_3, \end{cases}$$

где $q = q(u) = (1, u(1 + x_2^2))$. Из равенства $\dfrac{\partial r(x)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial r(x)}{\partial x_2}(1 + x_2^2) = 0$ и неравенства $\dfrac{\partial r(x)}{\partial x_1} < 0$ следует, что $\dfrac{\partial r(x)}{\partial x_1} + u\dfrac{\partial r(x)}{\partial x_2}(1 + x_2^2) \leqslant 0$, и поэтому $V^o(x; q) \leqslant 0$ при всех $u \in [0, 1]$.

4. Слабая равномерная устойчивость

О п р е д е л е н и е 5. Множество $\mathcal{M}$ будем называть *слабо равномерно устойчивым относительно включения*

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{4.1}$$

если для некоторого $r > 0$ и любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется решение $\varphi\colon [t_0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ включения (4.1), для которого из условия $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}_+^\delta$ при всех $t \in [t_0, \tau)$ следует включение $(t, \varphi(t)) \in \mathcal{M}^\varepsilon$.

П р и м е р 4. Рассмотрим множество

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M, \quad \text{где} \quad M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2\colon x_1 \geqslant \operatorname{arctg} x_2,\, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\},$$

и дифференциальное включение, отвечающее управляемой системе (3.2). Среди решений этого дифференциального включения есть решения, начинающиеся в M и покидающие его через верхнюю границу $P \doteq \big\{(x_1, \operatorname{tg} x_1),\ 0 \leqslant x_1 \leqslant \pi/4\big\} \bigcup \{(x_1, 1),\, x_1 > \pi/4\}$, но есть решение $x(t) = (t, 1)$ (отвечающее управлению $u = 0$), которое остается в M при всех $t \geqslant \pi/4$. Через нижнюю границу решения включения из множества $\mathcal{M}$ не уходят. Повторяя рассуждения примера 2, нетрудно понять, что $\mathcal{M}$ слабо равномерно устойчиво в смысле определения 5.

Если множество $\mathcal{M}$ равномерно устойчиво по Ляпунову относительно включения (4.1), то оно и слабо равномерно устойчиво; обратное, очевидно, неверно (пример 4). С точки зрения задач управления и дифференциальных игр свойство слабой равномерной устойчивости и рассматриваемое ниже свойство слабой равномерной асимптотической устойчивости представляют наибольший интерес.

Теорема 3. *Пусть существуют локально липшицева определенно положительная функция Ляпунова $V\colon \mathcal{M}^r \to \mathbb{R}$ и непрерывная функция $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такие, что*:

(1) $w(t, 0) \equiv 0$, *уравнение $\dot{z} = w(t, z)$ обладает свойством единственности решения задачи Коши, и его тривиальное решение равномерно устойчиво по Ляпунову*;

(2) *множество*

$$Q(t, x) \doteq \big\{q \in F(t, x) : V^o(t, x; q) \leqslant w(t, V(t, x))\big\}$$

непусто при всех $(t, x) \in \mathcal{M}^r$, и для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathcal{M}^r$ включение

$$\dot{x} \in Q(t, x) \tag{4.2}$$

имеет локальное решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Тогда множество $\mathcal{M}$ слабо равномерно устойчиво относительно включения (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу задания множества $Q(t, x)$ любое решение включения (4.2) является решением включения (4.1). Далее, для функции Q выполнены все условия теоремы 2, следовательно, множество $\mathcal{M}$ равномерно устойчиво по Ляпунову относительно включения (4.2), а это означает слабую равномерную устойчивость множества $\mathcal{M}$ относительно включения (4.1). $\square$

О п р е д е л е н и е 6. Множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{1+n}$ называется *слабо положительно инвариантным* относительно дифференциального включения (4.1), если для любой точки (t_0, x_0) множества $\mathcal{M}$ найдется решение $\varphi : [t_0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ включения (4.1) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, \tau)$ включению $(t, \varphi(t)) \in \mathcal{M}$.

Следствие 3. *Если множество $\mathcal{M}$ слабо равномерно устойчиво относительно включения* (4.1), *то замыкание $\overline{\mathcal{M}}$ множества $\mathcal{M}$ слабо положительно инвариантно.*

Доказательство. В силу следствия 2, множество $\overline{\mathcal{M}}$ положительно инвариантно относительно включения (4.2), а следовательно, оно слабо положительно инвариантно относительно включения (4.1). $\square$

Пример 5. Вернемся к примеру 4. Для того, чтобы убедиться в слабой равномерной устойчивости множества $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M$, где $M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon\ x_1 \geqslant \operatorname{arctg} x_2,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$, относительно решений включения, отвечающего системе (3.2), воспользуемся теоремой 3. Выберем в качестве $V(x)$ расстояние от точки $x \notin M$ до множества M, и пусть $w(t,z) \equiv 0$. Тогда $V(x) = x_2 - 1$ при $x \in G \doteq \{x \colon\ x_1 > \pi/4,\ x_2 > 1\}$, и поэтому $V^o(x;q) = u(1 + x_2^2)$ при $x \in G$. Следовательно, $V^o(x;q) \leqslant 0$ только при $u = 0$. В этом случае $q = q_0 = (1,0)$, включение (4.2) превращается в систему уравнений $\dot{x}_1 = 1$, $\dot{x}_2 = 0$, и легко проверяется, что $V^o(x;q_0) \leqslant 0$ при всех $x \notin M$. Поэтому все условия теоремы 3 выполнены.

В связи с теоремой 3 возникает вопрос о существовании локальных решений включения (4.2). Частичный ответ на этот вопрос дает приведенная ниже теорема.

Теорема 4. *Если функция $(t,x) \to F(t,x)$ имеет замкнутые выпуклые образы и полунепрерывна сверху, то при всех $(t_0,x_0) \in \mathcal{M}^r$ существует локальное решение включения* (4.2), *удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.*

Доказательство. Достаточно доказать (см. разд. 2), что при всех $(t,x) \in \mathcal{M}^r$ множество $Q(t,x)$ выпукло, замкнуто, и функция $(t,x) \to Q(t,x)$ полунепрерывна сверху при почти всех $(t,x) \in \mathcal{M}^r$. В силу свойств субаддитивности и положительной однородности производной Кларка получаем, что при всех $(t,x) \in \mathcal{M}^r$ для любых $q_1, q_2 \in Q(t,x)$ и $\lambda \in [0,1]$ из включения $q_\lambda \in F(t,x)$, где $q_\lambda = \lambda q_1 + (1-\lambda) q_2$, следует неравенсто

$$V^o(t,x;q_\lambda) \leqslant \lambda V^o(t,x;q_1) + (1-\lambda) V^o(t,x;q_2) \leqslant w(t,V(t,x)),$$

т. е. $Q(t,x)$ выпукло. Далее, функция $q \to V^o(t,x;q)$ непрерывна, следовательно, при фиксированных (t,x) для любой последовательности $\{q_i\}$, $q_i \in Q(t,x)$, такой, что $q_i \to q_0$, имеет место неравенство $V^o(t,x;q_0) = \lim\limits_{i\to\infty} V^o(t,x;q_i) \leqslant w(t,V(t,x))$, которое означает, что $q_0 \in Q(t,x)$.

Поскольку функция V локально липшицева, то она дифференцируема почти всюду на $\mathcal{M}^r$, и в каждой точке дифференцируемости (t,x) для любого $q \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$V^o(t,x;q) = \dot{V}(t,x;q) \doteq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V(t+\varepsilon, x+\varepsilon q) - V(t,x)}{\varepsilon}. \tag{4.3}$$

Покажем, что функция $(t,x) \to Q(t,x)$ полунепрерывна сверху в каждой точке дифференцируемости (t_0,x_0) функции V. Для этого проверим (см. разд. 2), что начиная с некоторого $a_0 > 0$ при каждом $a \geqslant a_0$ функция $(t,x) \to Q_a(t,x)$, где $Q_a(t,x) = Q(t,x) \bigcap O_a$, полунепрерывна сверху в точке (t_0,x_0) в смысле полуотклонения по Хаусдорфу $d(Q_a(t,x), Q_a(t_0,x_0))$.

Выберем последовательность $\{(t_i,x_i)\}$ точек дифференцируемости функции V, которая сходится к (t_0,x_0), и рассмотрим последовательность точек $\{q_i\}$ таких, что $q_i \in Q_a(t_i,x_i)$ и $V^o(t_i,x_i;q_i) = w(t_i,V(t_i,x_i))$. В силу замкнутости множества $Q_a(t_i,x_i)$ при каждом i такая последовательность существует. Можно считать, что последовательность $\{q_i\}$ имеет предел. Обозначим его q_0. Согласно теореме Куратовского, достаточно доказать, что $q_0 \in Q_a(t_0,x_0)$. Прежде всего, с учетом полунепрерывности сверху функции F из включений $q_i \in F_a(t_i,x_i)$ следует включение $q_0 \in F_a(t_0,x_0)$. Далее, из равенства $V^o(t_i,x_i;q_i) = w(t_i,V(t_i,x_i))$ в силу непрерывности функций V и w получаем, что $\lim\limits_{i\to\infty} w(t_i,V(t_i,x_i)) = w(t_0,V(t_0,x_0))$. С другой стороны, из соотношения (4.3) следуют равенства

$$\lim_{i\to\infty} V^o(t_i,x_i;q_i) = \lim_{i\to\infty} \dot{V}(t_i,x_i;q_i) = \lim_{i\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V(t_i+\varepsilon, x_i+\varepsilon q_i) - V(t_i,x_i)}{\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V(t_0+\varepsilon, x_0+\varepsilon q_0) - V(t_0,x_0)}{\varepsilon} = V^o(t_0,x_0;q_0).$$

Таким образом, $V^o(t_0,x_0;q_0) = w(t_0,V(t_0,x_0))$ и, следовательно, $q_0 \in Q_a(t_0,x_0)$. $\square$

5. Динамическая система сдвигов

По функции $(t,x)\to F(t,x)\in\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ построим семейство $\operatorname{orb}(F)\doteq\{F_\tau\colon\,\tau\geqslant 0\}$ функций $F_\tau(t,x)\doteq F(t+\tau,x)$ и замыкание $\overline{\operatorname{orb}}(F)$ семейства $\operatorname{orb}(F)$ в метрике Бебутова

$$\rho_B(F^1,F^2)=\sup_{r>0}\min\Big\{\max_{(t,x)\in O_r}\operatorname{Dist}(F^1(t,x),F^2(t,x)),\,r^{-1}\Big\},\tag{5.1}$$

где O_r — замкнутый шар радиуса r в $\mathbb{R}^{1+n}$ с центром в нуле. В силу определения (5.1) включение $\widehat F\in\overline{\operatorname{orb}}(F)$ имеет место в том и только в том случае, если найдется такая последовательность $\{t_i\}$, $t_i\geqslant 0$, что каждому $\varepsilon>0$, любому $\vartheta>0$ и любому $K\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ отвечает номер i_0, начиная с которого $\operatorname{Dist}(F_{t_i}(t,x),\widehat F(t,x))\leqslant\varepsilon$ при всех $t\in[-\vartheta,\vartheta]$, $x\in K$.

В терминах теории динамических систем [6,16] множество $\Sigma\doteq\overline{\operatorname{orb}}(F)$ называется *фазовым пространством* динамической системы сдвигов (Σ,h^τ), а $\operatorname{orb}(F)$ — *положительной полутраекторией движения* $h^\tau\colon\Sigma\to\Sigma$, определенного равенством $h^\tau\widehat F\doteq\widehat F_\tau$.

Динамическую систему сдвигов мы можем построить и для функции

$$(t,x)\to H(t,x)\doteq(F(t,x),M(t))\in\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)\times\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n),$$

где функция $t\to M(t)\in\operatorname{clos}(\mathbb{R}^n)$ задает множество $\mathcal{M}=\big\{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+n}\colon\,x\in M(t)\big\}$. В этом случае метрика $\rho_B(H^1,H^2)$ определяется равенством (5.1), где

$$\operatorname{Dist}\big(H^1(t,x),H^2(t,x)\big)=\operatorname{Dist}\big(F^1(t,x),F^2(t,x)\big)+\operatorname{Dist}\big(M^1(t),M^2(t)\big),$$

а полупоток h^τ — равенством $h^\tau\widehat H=(\widehat F_\tau,\widehat{M_\tau})$, где $\widehat H\in\overline{\operatorname{orb}}(H)$. Несложно проверить (см. [11], [6, с. 533]), что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Если функция $t\to H(t,x)$ непрерывна при каждом x, а функция $x\to F(t,x)$ полунепрерывна сверху при каждом t, то фазовое пространство $\overline{\operatorname{orb}}(H)$ динамической системы $(\overline{\operatorname{orb}}(H),h^\tau)$ является полным метрическим пространством.*

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями $\widehat M{}^\delta_+(0)$, $\widehat N{}^\delta_+(0)\doteq\widehat M{}^\delta_+(0)\setminus\widehat M(0)$, $\widehat{\mathcal{M}}^\varepsilon$, $\widehat{\mathcal{N}}^\delta_+$ и др., смысл которых понятен из контекста.

В терминах динамической системы сдвигов, определения равномерной устойчивости и слабой равномерной устойчивости множества $\mathcal{M}$ принимают следующий вид.

Определение 7. Множество $\mathcal{M}$ называется *равномерно устойчивым* по Ляпунову *относительно включения* (4.1), если для каждой пары $\widehat H=(\widehat F,\widehat M)\in\overline{\operatorname{orb}}(H)$, некоторого $r>0$ и любого $\varepsilon\in(0,r)$ найдется такое $\delta\in(0,\varepsilon)$, что для всякой точки $x_0\in\widehat N{}^\delta_+(0)$ и любого решения $t\to\varphi(t,x_0)$ задачи

$$\dot x\in\widehat F(t,x),\quad x(0)=x_0,\tag{5.2}$$

при всех $t\in[0,\tau)$ имеет место включение $(t,\varphi(t,x_0))\in\widehat{\mathcal{M}}^\varepsilon$.

Если в этом определении слова “любого решения $t\to\varphi(t,x_0)$ задачи (5.2)” заменить на слова “найдется решение $t\to\varphi(t,x_0)$ задачи (5.2)”, то указанное свойство будет называться *слабой равномерной устойчивостью множества* $\mathcal{M}$ относительно включения (4.1).

Следствием этих рассуждений является простое утверждение, вытекающее из теоремы 3.

Следствие 4. *Если в условиях теоремы* 3 $w(t,z)=a(t)z$, *где функция $a(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и* $\displaystyle\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t\widehat a(s)ds\leqslant 0$ *для всех $\widehat a\in\overline{\operatorname{orb}}(a)$, то множество $\mathcal{M}$ слабо равномерно устойчиво относительно включения* (4.1).

Напомним, что функция $H(t,x) = (F(t,x), M(t))$ переменных (t,x) называется *равномерно непрерывной по t равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$*, если для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $K \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $|\tau| \leqslant \delta$, всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $x \in K$ выполнено неравенство $\mathrm{Dist}(H_\tau(t,x), H(t,x)) \leqslant \varepsilon$. Далее, функцию $(t,x) \to H(t,x)$ будем называть *ограниченной* по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ при каждом x, если выполнено неравенство $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} p(t,x) < \infty$, где $p(t,x) = |H(t,x)| \doteq \mathrm{Dist}(H(t,x), \{0\})$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $t \to M(t)$ имеет компактные образы (поэтому можно считать, что $H(t,x) \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n))$ и ограничена на $\mathbb{R}$ (т. е. $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |M(t)| < \infty$, где $|M| = \mathrm{dist}(M, \{0\})$). Обозначим теперь $p_0(t,x)$ расстояние от нуля до множества $F(t,x) \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$. Тогда в силу определения метрики Dist выполнено неравенство $|F(t,x)| \leqslant p(t,x) \doteq (p_0(t,x) + \sqrt{p_0^2(t,x)+4})/2$, и ограниченность $F(t,x)$ по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ эквивалентна ограниченности на $\mathbb{R}$ функции $t \to p_0(t,x)$ при каждом x.

Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 1 работы [11].

Лемма 4. *Если функция $(t,x) \to H(t,x) \doteq (F(t,x), M(t)) \in \mathrm{clos}(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна по t равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$ и при каждом x ограничена по t на числовой прямой $\mathbb{R}$, то замыкание $\overline{\mathrm{orb}}(H)$ траектории $\mathrm{orb}(H)$ компактно.*

6. Слабая асимптотическая устойчивость

Определение 8. Множество $\mathcal{M} \doteq \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} : x \in M(t)\}$ назовем *слабо асимптотически устойчивым* относительно включения

$$\dot{x} \in F(t,x), \tag{6.1}$$

если оно слабо устойчиво в смысле определения 5 и для некоторого $r > 0$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется такое решение $\varphi\colon [t_0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ включения (6.1), что $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}_+^r$ и

$$\lim_{t\to\tau-0} \varrho(\varphi(t), M(t)) = 0. \tag{6.2}$$

Далее, множество $\mathcal{M}$ назовем *равномерно асимптотически устойчивым* относительно включения (6.1), если оно равномерно устойчиво в смысле определения 1, и для некоторого $r > 0$, любого $t_0 \in \mathbb{R}$ и каждого решения $\varphi\colon [t_0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ включения (6.1), удовлетворяющего условию $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}_+^r$, имеет место равенство (6.2).

В терминах динамической системы сдвигов это определение приобретает следующий вид.

Определение 9. Пусть $H(t,x) = (F(t,x), M(t))$. Множество $\mathcal{M}$ называется *слабо асимптотически устойчивым* относительно включения (6.1), если оно слабо устойчиво, и для некоторого $r > 0$ и каждого $\widehat{H} \in \overline{\mathrm{orb}}(H)$ найдется решение $\varphi\colon [0,\tau) \to \mathbb{R}^n$ включения

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x) \tag{6.3}$$

такое, что $(0, \varphi(0)) \in \widehat{\mathcal{N}}_+^r$ и

$$\lim_{t\to\tau-0} \varrho(\varphi(t), \widehat{M}(t)) = 0. \tag{6.4}$$

Далее, множество $\mathcal{M}$ называется *равномерно асимптотически устойчивым* относительно включения (6.1), если оно равномерно устойчиво, и для некоторого $r > 0$, каждого $\widehat{H} \in \overline{\mathrm{orb}}(H)$ и всякого решения $\varphi\colon [0,\tau) \to \mathbb{R}^n$ включения (6.3), удовлетворяющего условию $(0, \varphi(0)) \in \widehat{\mathcal{N}}_+^r$, следует равенство (6.4).

Теорема 5. *Пусть функция $(t,x)\to F(t,x)$ со значениями в* $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху и* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|F(t,x)|<\infty$ *при каждом x, а функция $t\to M(t)\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна и* $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|M(t)|<\infty$. *Предположим далее, что существуют число $r>0$ и ограниченная и равномерно непрерывная по t равномерно относительно (x,z) на компактах в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ функция $(t,x,z)\to W(t,x,z)\doteq(V(t,x),w(t,z))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ такие, что*

(1) *функция $V:\ \mathcal{M}^r\to\mathbb{R}$ является локально липшицевой определенно положительной функцией Ляпунова*;

(2) *множество $Q(t,x)$, определенное равенством*

$$Q(t,x)=\{q\in F(t,x)\colon\ V^o(t,x;q)\leqslant w(t,V(t,x))\},\tag{6.5}$$

непусто при всех $(t,x)\in\mathcal{M}^r$, и функция

$$(t,x)\to S(t,x)\doteq Q(t,x)\bigcap O_p,\quad \textit{где}\quad p=\sup_{(t,x)\in\mathcal{M}^r}|Q(t,x)|,$$

равномерно непрерывна по t равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$;

(3) $w(t,0)\equiv 0$, *уравнение*

$$\dot z=w(t,z)\tag{6.6}$$

обладает свойством единственности решения задачи Коши, и тривиальное решение уравнения (6.6) *равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Тогда множество $\mathcal{M}$ слабо асимптотически устойчиво относительно включения (6.1).

Перед формулировкой следующего утверждения, распространяющего теорему Барбашина и Красовского на дифференциальные включения (6.1), введем ряд новых обозначений и определений. По заданной функции Ляпунова $V\colon\mathcal{M}^r\to\mathbb{R}$ построим множество

$$\mathcal{Q}(t,x)=\{q\in F(t,x)\colon\ V^o(t,x;q)\leqslant 0\}\tag{6.7}$$

и в предположении, что множество (6.7) непусто при всех $(t,x)\in\mathcal{M}^r$, построим вспомогательное дифференциальное включение

$$\dot x\in\mathcal{S}(t,x)\doteq\mathcal{Q}(t,x)\bigcap O_p,\quad p=\sup_{(t,x)\in\mathcal{M}^r}|\mathcal{Q}(t,x)|.$$

Далее, по функции $(t,x)\to H(t,x)=(\mathcal{S}(t,x),M(t),V(t,x))$ построим динамическую систему сдвигов $(\overline{\operatorname{orb}}(H),h^\tau)$ и для каждого $\alpha\geqslant 0$ и любого $\widehat H\in\overline{\operatorname{orb}}(H)$ введем в рассмотрение *поверхность уровня* $L_\alpha(\widehat V)$ функции $\widehat V$:

$$L_\alpha(\widehat V)\doteq\{(t,x)\in\widehat{\mathcal{N}}^r_+:\widehat V(t,x)=\alpha\}.\tag{6.8}$$

О п р е д е л е н и е 10. Будем говорить [1], что множество (6.8) *не содержит положительных полутраекторий* включения

$$\dot x\in\widehat{\mathcal{S}}(t,x),\tag{6.9}$$

если для любой начальной точки $x_0\in\widehat N^r_+(0)$ и каждого решения $\varphi(t)$ включения (6.9), удовлетворяющего условию $\varphi(0)=x_0$, найдется момент времени $t_1>0$ такой, что $\big(t_1,\varphi(t_1)\big)\notin L_\alpha(\widehat V)$.

Т. е., $L_\alpha(\widehat V)$ не содержит положительных полутраекторий включения (6.9), если всякое решение, начинающееся в $L_\alpha(\widehat V)$, покидает $L_\alpha(\widehat V)$ за конечное время.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция Ляпунова $V(t,x)$, участвующая в формулировке следующей теоремы, *локально липшицева по x равномерно относительно t на* $\mathbb{R}$, т. е. найдется такая не зависящая от t константа ℓ, что для любой пары точек $(t,x_1),(t,x_2)\in\mathcal{N}^r_+$ выполнено неравенство $|V(t,x_1)-V(t,x_2)|\leqslant\ell|x_1-x_2|$.

Теорема 6. *Пусть функция* $t \to M(t) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ *ограничена и равномерно непрерывна на* $\mathbb{R}$. *Пусть далее, существует такое число* $r > 0$, *что функция* $F : \mathcal{M}^r \to \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху и* $\sup\limits_{(t,x)\in\mathcal{M}^r} |F(t,x)| < \infty$. *Если существует ограниченная по* t *равномерно относительно* x, *локально липшицева по* x *равномерно относительно* t *функция Ляпунова* $V : \mathcal{M}^r \to \mathbb{R}$ *такая, что при всех* $(t,x) \in \mathcal{M}^r$ *множество* (6.7) *непусто и для любого* $\alpha \in (0,r)$ *и всех* $\widehat{H} \in \overline{\mathrm{orb}}(H)$, *где* $H = (\mathcal{S}, M, V)$, *множество* (6.8) *не содержит положительных полутраекторий включения* (6.9), *то множество* $\mathcal{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно включения* (6.1).

7. Доказательство теорем 5 и 6

По функции $(t,x) \to Q(t,x)$, определенной равенством (6.5), построим включение

$$\dot{x} \in Q(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{M}^r, \quad r > 0, \tag{7.1}$$

а по включению (7.1) — включение

$$\dot{x} \in S(t,x) \doteq Q(t,x) \bigcap O_p, \quad p = \sup_{(t,x)\in\mathcal{M}^r} \mathrm{Dist}(Q(t,x), \{0\}), \tag{7.2}$$

которое будет играть основную роль в наших дальнейших рассуждениях. Из доказательства теоремы 4 следует, что если функция $(t,x) \to F(t,x)$ имеет замкнутые выпуклые образы и полунепрерывна сверху при всех $(t,x) \in \mathcal{M}^r$, то множество $Q(t,x)$ выпукло, замкнуто и функция $(t,x) \to Q(t,x)$ полунепрерывна сверху при почти всех $(t,x) \in \mathcal{M}^r$. Если же функция $(t,x) \to F(t,x)$ ограничена по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ при каждом x, то и $Q(t,x)$ ограничена по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ при каждом x, и поэтому в силу определения метрики Dist $p < \infty$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда*:

1. *Если множество* $\mathcal{M}$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно включения* (7.2), *то* $\mathcal{M}$ *слабо асимптотически устойчиво относительно включения* (6.1).

2. *Правая часть дифференциального включения* (7.2) *имеет компактные выпуклые образы и полунепрерывна сверху при почти всех* $(t,x) \in \mathcal{M}^r$. *Кроме того, функция* $(t,x) \to S(t,x)$ *ограничена по* t *на числовой прямой* $\mathbb{R}$ *при каждом* x.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 5. Первое утверждение леммы очевидно, поскольку всякое решение включения (7.2) одновременно является и решением включения (6.1).

Докажем второе утверждение леммы. Компактность и выпуклость $S(t,x)$ тоже очевидны. Ограниченность $S(t,x)$ по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ следует из аналогичного свойства $F(t,x)$.

Покажем, что функция $(t,x) \to S(t,x)$ полунепрерывна сверху. Действительно, пусть последовательность $\{(t_i,x_i)\}$ сходится к точке (t_0,x_0), а последовательность $\{g_i\}$ такова, что $g_i \in S(t_i,x_i)$ и g_i сходится к g_0. Из полунепрерывности сверху функции $(t,x) \to Q(t,x)$ следует, что $g_0 \in Q(t_0,x_0)$, а так как $|g_i| \leqslant p$ при всех i, то $|g_0| \leqslant p$, и поэтому $g_0 \in S(t_0,x_0)$. □

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда множество* $\mathcal{M}$ *равномерно устойчиво относительно включения* (7.2). *Далее, если* $\varphi(t)$ *— ограниченное на полуоси* $[0,\infty)$ *решение включения* (7.2), *то пространство* $\overline{\mathrm{orb}}(S,\varphi) \doteq \mathrm{cl}\{(S,\varphi)_\tau : \tau \geqslant 0\}$ *компактно и для всякой пары* $(\widehat{S},\widehat{\varphi}) \in \overline{\mathrm{orb}}(S,\varphi)$ *функция* $t \to \widehat{\varphi}(t)$ *является решением включения*

$$\dot{x} \in \widehat{S}(t,x). \tag{7.3}$$

Доказательство леммы 6. Равномерная устойчивость множества $\mathcal{M}$ относительно включения (7.2) следует из теоремы 2, а компактность множества $\overline{\mathrm{orb}}(S,\varphi)$ — из леммы 4.

Покажем, что функция $t \to \widehat{\varphi}(t)$ абсолютно непрерывна. Отметим, что в силу равномерной ограниченности на $\mathbb{R}$ последовательности $\{|S_{t_i}(t,\varphi_{t_i}(t))|\}$ последовательность $\{\dot{\varphi}_{t_i}(t)\}$ равномерно ограничена при почти всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому найдется подпоследовательность (обозначим ее $\{\dot{\varphi}_{t_i}(t)\}$), которая слабо сходится к локально интегрируемой по Лебегу функции. Перейдя теперь в равенстве $\dfrac{\varphi_{t_i}(t+\varepsilon)-\varphi_{t_i}(t)}{\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_t^{t+\varepsilon} \dot{\varphi}_{t_i}(s)\,ds$ в каждой точке Лебега t к пределу сначала при $i \to \infty$, а затем при $\varepsilon \to 0$, получим требуемое.

Докажем, что функция $t \to \widehat{\varphi}(t)$ является решением включения (7.3). Действительно, для всякой последовательности $\{t_i\}$ имеет место включение $\dot{\varphi}_{t_i}(t) \in S_{t_i}(t,\varphi_{t_i}(t))$ и, следовательно,

$$\langle \xi, \varphi_{t_i}(t+\varepsilon)-\varphi_{t_i}(t)\rangle \leqslant \int\limits_t^{t+\varepsilon} c(\xi, S_{t_i}(s,\varphi_{t_i}(s))\,ds, \tag{7.4}$$

где $c(\xi,S)$ — значение опорной функции [10, с. 121] множества S на векторе $\xi \in \mathbb{R}^n$. Поэтому, если $\mathrm{dist}(S_{t_i}(t,x),\widehat{S}(t,x)) + |\varphi_{t_i}(t)-\widehat{\varphi}(t)| \to 0$ равномерно на компактах $[-\vartheta,\vartheta]\times K$, $K \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, то, поделив неравенство (7.4) на ε и перейдя к пределу сначала при $i \to \infty$, а затем при $\varepsilon \to 0$, получим для всякого $\xi \in \mathbb{R}^n$ неравенство $\langle \xi, \dot{\widehat{\varphi}}(t)\rangle \leqslant c(\xi,\widehat{S}(t,\widehat{\varphi}(t))$, из которого следует (при почти всех $t \geqslant 0$) включение $\dot{\widehat{\varphi}}(t) \in \widehat{S}(t,\widehat{\varphi}(t))$. □

Доказательство теоремы 5. Как уже отмечалось, множество $\mathcal{M}$ равномерно устойчиво относительно включения (7.2). Далее, в силу предположения компактности множества $M(t)$ при каждом t и следствия 1 для любого t_0 и достаточно близких к $M(t_0)$ точек x_0 всякое решение включения (7.2) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ бесконечно продолжаемо вправо.

Пусть $\varphi(t)$ — решение включения (7.2), начинающееся в точке $(t_0,x_0) \in \mathcal{N}^r_+$ и определенное при всех $t \geqslant t_0$. Тогда функция $v(t) = V(t,\varphi(t))$ определена на полуоси $[t_0,\infty)$ и при всех $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству $v(t) \leqslant z(t)$, где $z(t)$ — решение уравнения (6.6) с начальным условием $z(t_0) = v(t_0)$. Далее, если x_0 близко к $M(t_0)$, то $z(t_0)$ близко к нулю, поэтому $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Покажем, что $\varrho(\varphi(t),M(t)) \to 0$ при $t \to \infty$. Если это неверно, то найдутся константа $\delta > 0$ и последовательность $\{t_i\}$ такие, что $t_i \to \infty$ и $\varrho(\varphi(t_i),M(t_i)) \geqslant \delta$. Построим функцию $H = \{S(t,x), M(t), V(t,x), w(t,z), \varphi(t), z(t)\}$ переменных (t,x,z), где $z(t)$ — указанное в доказательстве решение уравнения (6.6), и фазовое пространство $\overline{\mathrm{orb}}(H)$ динамической системы сдвигов. Выделим далее из последовательности $\{t_i\}$ такую подпоследовательность (обозначим ее снова $\{t_i\}$), что последовательность $\{H_{t_i}\}$ имеет предел. Обозначим его $\widehat{H}$. Тогда в силу леммы 9 работы [4] и выбора последовательности $\{t_i\}$ получим неравенство $\varrho(\widehat{\varphi}(0),\widehat{M}(0)) \geqslant \delta$, и поэтому $\widehat{V}(0,\widehat{\varphi}(0)) > 0$. Но $\widehat{v}(0) = 0$, что противоречит равенству $\widehat{v}(0) = \widehat{V}(0,\widehat{\varphi}(0))$. □

Доказательство теоремы 6. Обозначим $H = (\mathcal{S}(t,x), M(t), V(t,x))$, $(t,x) \in \mathcal{M}^r$ и предположим, что для каждого $\alpha \in (0,r)$ и всех $\widehat{H} \in \overline{\mathrm{orb}}(H)$ множество $L_\alpha(\widehat{V})$, определенное равенством (6.8), не содержит положительных полутраекторий включения (6.9). Пусть $\varphi(t)$ — такое решение включения (7.2), что $(t,\varphi(t)) \in \mathcal{M}^r$ при всех $t \geqslant 0$. Покажем тогда, что $\varrho(\varphi(t),M(t)) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, из неравенств $v(t) = V(t,\varphi(t)) \geqslant 0$ и $\dot{v}(t) \leqslant 0$ следует, что функция $t \to v(t)$ монотонно убывает и ограничена снизу нулем. Поэтому существует неотрицательный предел $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \alpha$. Кроме того, для всякой последовательности $\{t_i\}$ такой, что $t_i \to \infty$, при каждом фиксированном t предел $\lim\limits_{t_i\to\infty} v(t+t_i)$ тоже равен α.

Покажем, что $\alpha = 0$. Допустим, что это неверно и $\alpha > 0$. Построим последовательность $\{t_i\}$ такую, что $t_i \to \infty$, и последовательность H_{t_i}, сходящуюся к некоторой функции $\widehat{H} \in \overline{\mathrm{orb}}(H)$. Из последовательности $\{t_i\}$ выделим такую подпоследовательность (обозначим ее снова $\{t_i\}$), что последовательность $\{\varphi_{t_i}(t)\}$ имеет (равномерный на отрезках) предел $\widehat{\varphi}(t)$. Тогда в силу леммы 6 функция $t \to \widehat{\varphi}(t)$ является решением включения (6.9) и $(t, \widehat{\varphi}(t)) \in \widehat{\mathcal{N}}^r_+$ при всех $t \geqslant 0$. Далее, из неравенства $|V_{t_i}(t, \varphi_{t_i}(t)) - V_{t_i}(t, \widehat{\varphi}(t))| \leqslant \ell |\varphi_{t_i}(t) - \widehat{\varphi}(t)|$ следует, что

$$\lim_{i\to\infty} \big(V_{t_i}(t, \varphi_{t_i}(t)) - V_{t_i}(t, \widehat{\varphi}(t))\big) = 0.$$

Поэтому из равенства $v_{t_i}(t) = V_{t_i}(t, \widehat{\varphi}(t)) + V_{t_i}(t, \varphi_{t_i}(t)) - V_{t_i}(t, \widehat{\varphi}(t))$ и ранее сказанного получаем при каждом t равенство $\alpha = \lim\limits_{i\to\infty} v_{t_i}(t) = \widehat{V}(t, \widehat{\varphi}(t))$, которое означает, что решение $\widehat{\varphi}(t)$ включения (6.9) целиком содержится в множестве $L_\alpha(\widehat{V})$. Следовательно, $\alpha = 0$, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} V(t, \varphi(t)) = 0$. Дальнейшие рассуждения повторяют конец доказательства теоремы 5. $\square$

8. Слабая устойчивость в целом

О п р е д е л е н и е 11. Множество $\mathfrak{M} \doteq \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \colon x \in M(t)\}$ назовем *слабо устойчивым в целом* относительно включения

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \tag{8.1}$$

если оно слабо устойчиво в смысле определения 5, и для любой точки (t_0, x_0) найдется определенное при всех $t \geqslant t_0$ решение $\varphi(t)$ включения (8.1) такое, что $\varphi(t_0) = x_0$ и

$$\lim_{t\to\infty} \varrho(\varphi(t), M(t)) = 0. \tag{8.2}$$

Далее, множество $\mathfrak{M}$ назовем *равномерно устойчивым в целом* относительно включения (8.1), если оно равномерно устойчиво в смысле определения 1, *каждое* решение включения (8.1) определено при всех $t \geqslant t_0$, и имеет место равенство (8.2).

В терминах динамической системы сдвигов это определение приобретает следующий вид.

О п р е д е л е н и е 12. Пусть $H(t,x) = (F(t,x), M(t))$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *слабо устойчивым в целом* относительно включения (8.1), если оно слабо устойчиво и для любой точки x_0 и каждого $\widehat{H} \in \overline{\operatorname{orb}}(H)$ найдется определенное при всех $t \geqslant 0$ решение $\varphi(t)$ включения

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t,x) \tag{8.3}$$

такое, что $\varphi(0) = x_0$ и

$$\lim_{t\to\infty} \varrho(\varphi(t), \widehat{M}(t)) = 0. \tag{8.4}$$

Далее, множество $\mathfrak{M}$ называется *равномерно устойчивым в целом* относительно включения (8.1), если оно равномерно устойчиво и для каждого $\widehat{H} \in \overline{\operatorname{orb}}(H)$ всякое решение $\varphi(t)$ включения (8.3) определено при всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяет условию (8.4).

О п р е д е л е н и е 13. Функция $V\colon \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно большой* (относительно множества $\mathfrak{M}$), если для любого $R > 0$ найдется такое $r > 0$, что для всех $(t,x) \notin \mathfrak{M}^r$ выполнено неравенство $V(t,x) \geqslant R$.

Теорема 7. *Пусть функция $t \to M(t) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция $(t,x) \to F(t,x)$ со значениями в $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху и ограничена по t на $\mathbb{R}$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть, далее, существует ограниченная по t при каждом x, локально липшицева по x равномерно относительно t бесконечно большая функция Ляпунова $V(t,x)$ такая, что при всех (t,x) множество $\mathfrak{Q}(t,x) = \{q \in F(t,x)\colon V^o(t,x;q) \leqslant 0\}$ непусто. Предположим, что для каждой точки (t_0,x_0) включение*

$$\dot{x} \in \mathfrak{S}(t,x) \doteq \mathfrak{Q}(t,x) \bigcap O_{p(t,x)}, \quad p(t,x) = |\mathfrak{Q}(t,x)|, \tag{8.5}$$

имеет локальное решение, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$, *и для любого* $\alpha > 0$ *и всех* $\widehat{H} \in \overline{\mathrm{orb}}(H)$, *где* $H = (\mathcal{S}, M, V)$, *множество* $L_\alpha(\widehat{V}) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \colon \widehat{V}(t,x) = \alpha\}$ *не содержит положительных полутраекторий включения* (8.5).

Тогда множество $\mathcal{M}$ *слабо устойчиво в целом относительно включения* (8.1).

П р и м е р 6. Пусть $M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geqslant \operatorname{arctg} x_2,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$. Покажем, что множество $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M$ слабо устойчиво в целом относительно системы

$$\dot{x}_1 = 1,\ \dot{x}_2 = u(1 + x_2^2), \quad u \in [-\delta, 1], \tag{8.6}$$

где $\delta > 0$. Воспользуемся теоремой 7. Для этого, проинтегрировав первое уравнение системы (8.6), перейдем от системы (8.6) к уравнению $\dot{y} = u(1+y^2)$. Тогда множество $\mathcal{M}$ запишется в виде $\mathcal{M} = \{(t,y) \colon t \geqslant \operatorname{arctg} y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Пусть $V(t,y)$ — расстояние от точки (t,y) до множества $\mathcal{M}$. Тогда функция $V(t,y)$ — определенно положительная, бесконечно большая, дифференцируемая в каждой точке $(t,y) \notin \operatorname{fr} \mathcal{M}$, и $\dot{V}(t,y;q) = V_t(t,y) + uV_y(t,y)(1+y^2)$. Далее, из определения $V(t,y)$ следует, что при каждом $\alpha > 0$ для любой точки $(t,y) \in L_\alpha = \{(t,y) \colon V(t,y) = \alpha\}$, $V_t(t,y) \leqslant 0$, причем $V_t(t,y) = 0$ только при $(t,y) \in l_1 \bigcup l_2$, где $l_1 \doteq \{(t,y) \colon t \geqslant 0,\ y = -\alpha\}$, $l_2 \doteq \{(t,y) \colon t \geqslant \pi/4,\ y = 1 + \alpha\}$. Кроме того, $V_y(t,y) < 0$ при $(t,y) \in l_1$ и $V_y(t,y) > 0$ при $(t,y) \in l_2$. Следовательно, если $(t,y) \in L_\alpha$ и $(t,y) \notin l_1 \bigcup l_2$, то $\dot{V}(t,y;q) < 0$ при $u = 0$, если $(t,y) \in l_1$, то $\dot{V}(t,y;q) < 0$ при всех $u \in (0,1]$ и если $(t,y) \in l_2$, то $\dot{V}(t,y;q) < 0$ при всех $u \in [-\delta, 0)$. Таким образом, все условия теоремы 7 выполнены.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7. Пусть $\varphi \colon [t_0, \tau)$ — решение включения (8.5), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда в силу условий теоремы функция $v(t) = V(t, \varphi(t))$ монотонно убывает, и поэтому $\lim\limits_{t \to \tau - 0} v(t) < \infty$. Так как функция V бесконечно большая, то $\varlimsup\limits_{t \to \tau - 0} |\varphi(t)| < \infty$. Следовательно, решение $\varphi(t)$ определено при всех $t \geqslant t_0$.

Покажем, что для некоторого r и всех $t \geqslant t_0$ имеет место включение $(t, \varphi(t)) \in \mathcal{M}^r$. Действительно, если это неверно, то найдутся такие последовательности $\{t_i\}$, $\{r_i\}$, что $t_i \to \infty$, $r_i \to \infty$ и $(t_i, \varphi(t_i)) \notin \mathcal{M}^{r_i}$. Следовательно, $|\varphi(t_i)| \to \infty$ и $V(t_i, \varphi(t_i)) \to \infty$, что противоречит условию $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) < \infty$. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 6. $\square$

Выражаем благодарность Владимиру Николаевичу Ушакову за полезные беседы, относящиеся к затронутой в этой статье тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.** Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86, № 6. С. 146–152.
2. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
3. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. М.: ГИТТЛ, 1950. 471 с.
4. **Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.** Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2008. Т. 262. С. 202–221.
5. **Roxin E.** Stability in general control systems // J. Differ. Equat. 1965. Vol. 1, no. 2. P. 115–150.
6. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
7. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
8. **Ушаков В.Н.** Процедуры построения стабильных мостов в дифференциальных играх: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Свердловск: Ин-т математики и механики УрО АН СССР, 1991. 308 с.
9. **Аносов Д.В.** Лекции по линейной алгебре. М.: Регуляр. и хаотич. динамика, 1999. 105 с.
10. **Лейхтвейс К.** Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
11. **Бебутов М.В.** О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюл. мех.-мат. факультета МГУ. 1941. № 5. С. 1–52.

12. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
13. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
14. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
15. **Чаплыгин С.А.** Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Бюл. Экпериментального ин-та путей сообщения. 1919. Вып. 1в. С. 1–16.
16. Динамические системы-1 / Д.В. Аносов. [и др.] // Итоги науки и техники. Т. 1. М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. 244 с. (Современ. проблемы математики. Фундаментальные направления.)

Панасенко Елена Александровна
канд. физ.-мат. наук
доцент каф. алгебры и геометрии
Тамбовский гос. ун-т им. Г.Р. Державина
e-mail: panlena_t@mail.ru.

Поступила 28.02.2009

Тонков Евгений Леонидович
д-р физ.-мат. наук
зав. каф. дифференциальных уравнений
Удмуртский гос. ун-т
e-mail: eltonkov@udm.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 519.857

О СТРУКТУРЕ ЛОКАЛЬНО ЛИПШИЦЕВЫХ МИНИМАКСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ — БЕЛЛМАНА В ТЕРМИНАХ КЛАССИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК[1]

Н. Н. Субботина, Е. А. Колпакова

В работе получены необходимые и достаточные условия минимаксного решения в задаче Коши для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана как условия выживаемости классических характеристик в графике этого решения. С помощью этого свойства для одномерного закона сохранения получена репрезентативная формула в терминах классических характеристик. Представлена оценка численного интегрирования характеристической системы, и определены погрешности численных реализаций репрезентативных формул для закона сохранения и его потенциала — минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана, минимакные/вязкостные решения, законы сохранения, энтропийные решения, метод характеристик.

N. N. Subbotina, E. A. Kolpakova. On the structure of locally Lipschitz minimax solutions of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation in terms of classical characteristics.

Necessary and sufficient conditions for the minimax solution to the Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation are obtained as viability conditions for classical characteristics inside the graph of the minimax solution. Using this property, a representative formula for a one-dimensional conservation law in terms of classical characteristics is derived. An estimate of the numerical integration of the characteristic system is presented and errors of numerical realizations of representative formulas are determined for the conservation law and its potential equal to the minimax solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation.

Keywords: Hamilton–Jacobi–Bellman equations, minimax/viscosity solutions, conservation laws, entropy solutions, method of characteristics.

Введение

Как известно [1], непрерывное минимаксное решение уравнения Гамильтона — Якоби определяется с помощью выживающих в графике этого решения обобщенных характеристик — решений характеристических дифференциальных включений. Классическое дифференцируемое решение согласно методу Коши [2] имеет график, в котором выживают непересекающиеся классические характеристики — решения характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе показано, что если классические характеристики уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана [3] существуют, то они также выживают в графике минимаксного решения, и допустимо их пересечение.

Выделен частный случай уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана, когда фазовая переменная одномерна, а гамильтониан зависит только от сопряженной переменной и вогнут. Подобные уравнения возникают в задачах оптимального управления с простыми движениями. Минимаксное решение краевой задачи Коши для этого уравнения описывает негладкую функцию цены [4,5]. Отметим, что в рамках подхода Н. Н. Красовского к конструированию разрывных законов управления по принципу обратной связи [6], функция цены является основой соответствующих оптимальных конструкций. В выделенном случае уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана можно также рассматривать как уравнение потенциала для некоторого одномерного закона сохранения [7, 8]. В данной работе определена структура разрывного

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00410), гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-2640.2008.1) и молодежного гранта Президиума УрО РАН.

(с разрывами первого рода) энтропийного решения [9, 10] квазилинейного уравнения закона сохранения и его потенциала—локально липшицевого минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — в терминах классических характеристик. Показана связь между структурами этих решений.

Представленное описание минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана в терминах классических характеристик лежит в основе численного метода построения оптимального результата в задаче управления с терминальной функцией платы [12]. В данной работе получена оценка предлагаемого численного метода, см. также [13].

1. Необходимые и достаточные условия представления минимаксных решений с помощью классических характеристик

1.1. Минимаксные/вязкостные решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Гамильтона — Якоби [1]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, D_x V) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

с краевым условием

$$V(T, x) = \sigma(x). \tag{1.2}$$

Здесь $D_x V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = s \in \mathbb{R}^n$.

Предполагаем, что гамильтониан $H(t, x, s)$ и краевая функция $\sigma(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

(A1) функция $s \to H(t, x, s)$ вогнута;

(A2) существуют $\frac{\partial H}{\partial x_i}, \frac{\partial H}{\partial s_j}, i, j = 1, \ldots, n$, которые непрерывны по совокупности аргументов, удовлетворяют условию Липшица по x, s с константой $L > 0$ и условиям подлинейного роста с константой $\rho > 0$:

$$||D_s H(t, x, s)|| \leq \rho(1 + ||x||) \quad \forall s \in \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

$$||D_x H(t, x, s)|| \leq \rho(1 + ||s||) \quad \forall s \in \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \in \Pi_T;$$

(A3) функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируемая, а ее градиент $D_x \sigma(x)$ — локально липшицевая функция.

В рамках этих предположений классическое дифференцируемое решение $V(t, x)$ задачи (1.1), (1.2) существует, как правило, только локально в окрестности краевого многообразия, но выполняются условия теоремы существования и единственности глобального обобщенного (минимаксного/вязкостного) решения задачи (1.1), (1.2) [1,14]. Напомним одно из эквивалентных определений минимаксного/вязкостного решения.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $V(t, x)$ называется минимаксным/вязкостным решением задачи (1.1), (1.2), если она удовлетворяет краевому условию (1.2) и неравенствам

$$a + H(t, x, s) \geq 0 \quad \forall\ (a, s) \in D^+V(t, x) \neq \varnothing, \quad (t, x) \in \Pi_T, \tag{1.3}$$

$$a + H(t, x, s) \leq 0 \quad \forall\ (a, s) \in D^-V(t, x) \neq \varnothing, \quad (t, x) \in \Pi_T, \tag{1.4}$$

здесь $D^+V(t, x)$ — супердифференциал функции $V(t, x)$, $D^-V(t, x)$ — субдифференциал функции $V(t, x)$.

Напомним определение суб- и супердифференциалов, следуя негладкому анализу [15].

О п р е д е л е н и е 2. Субдифференциалом $D^-V(t,x)$, соответственно, супердифференциалом $D^+V(t,x)$ функции $V(t,x)$ в точке $(t,x)\in\Pi_T$ называются множества

$$D^-V(t,x)=\Big\{(\alpha,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n:\ \liminf_{\Delta t\to 0,||\Delta x||\to 0}\frac{V(t+\Delta t,x+\Delta x)-V(t,x)-\langle(\alpha,s),(\Delta t,\Delta x)\rangle}{|\Delta t|+||\Delta x||}\geq 0\Big\},$$

$$D^+V(t,x)=\Big\{(\alpha,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n:\ \limsup_{\Delta t\to 0,||\Delta x||\to 0}\frac{V(t+\Delta t,x+\Delta x)-V(t,x)-\langle(\alpha,s),(\Delta t,\Delta x)\rangle}{|\Delta t|+||\Delta x||}\leq 0\Big\}.$$

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что в точках дифференцируемости функции $V(t,x)$ справедливо

$$D^+V=D^-V=\{DV\}=\Big\{\frac{\partial V}{\partial t},D_xV\Big\}.$$

Введем в рассмотрение обобщенный дифференциал Кларка $\partial_C V(t,x)$ в предположении, что функция $V(t,x)$ локально липшицева.

О п р е д е л е н и е 3 [11]. Обобщенным дифференциалом Кларка $\partial_C V(t,x)$ называется множество

$$\partial_C V(t,x)=\mathrm{co}\Big\{h=(a,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n: h=\lim_{t_k\to t,x_k\to x,k\to\infty}DV(t_k,x_k)\Big\},\qquad(1.5)$$

здесь (t_k,x_k) — точки дифференцируемости функции $V(t,x)$, символ co$A$ обозначает выпуклую оболочку множества A.

З а м е ч а н и е 2 [11]. Если функция $V(t,x)$ локально липшицева, то справедливы соотношения

$$D^+V(t,x)\neq\varnothing\ \Rightarrow\ D^+\tilde V(t,x)=\partial_C\tilde V(t,x),$$
$$D^-V(t,x)\neq\varnothing\ \Rightarrow\ D^-\tilde V(t,x)=\partial_C\tilde V(t,x).$$

1.2. Классические характеристики и их свойства

Рассмотрим характеристическую систему для задачи (1.1), (1.2)

$$\dot x=D_sH(t,x,s),$$
$$\dot s=-D_xH(t,x,s),\qquad(1.6)$$
$$\dot z=\langle\dot x,s\rangle-H=\langle D_sH(t,x,s),s\rangle-H(t,x,s)=g(t,x,s)$$

с краевым условием

$$x(T,\xi)=\xi,\ \ s(T,\xi)=D_x\sigma(\xi),\ \ z(T,\xi)=\sigma(\xi).\qquad(1.7)$$

Здесь $\xi\in\mathbb{R}^n$ — параметр, $D_sH=\Big(\frac{\partial H}{\partial s_1},\ldots,\frac{\partial H}{\partial s_n}\Big)$, $D_xH=\Big(\frac{\partial H}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial H}{\partial x_n}\Big)$.

Из предположений (A1), (A3) следует, что выполняются условия теоремы существования, единственности и продолжимости на отрезке $[0,T]$ для характеристик — решений системы (1.6) с краевым условием (1.7) при $t=T$.

Выберем компактную область D_0, $D_0\subset[0,T]\times\mathbb{R}^n$. Составим множество

$$\Psi(D_0)=\{\xi\in\mathbb{R}^n|\ \exists\ (t_0,x_0)\in D_0: x(t_0,\xi)=x_0\}.$$

Следуя работе [12], докажем следующее утверждение:

Лемма 1. *Существует такая константа $K(D_0)>0$, что справедливы оценки*

$$||x(\tau,\xi)||\leq K(D_0),\quad ||s(\tau,\xi)||\leq K(D_0)$$

$$\forall\xi\in\Psi(D_0),\quad \tau\in[t_0^*,T],\quad t_0^*=\min\{t\in[0,T]|\ \exists x\in\mathbb{R}^n:\ (t,x)\in D_0\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим совокупность характеристик $x(\cdot,\xi):\xi\in\Psi(D_0)$ символом $X(D_0)$. Согласно условию (A2) выполнено неравенство

$$||\dot{x}(\tau,\xi)|| = ||D_sH(t,x(\tau,\xi),s)|| \leq \rho(1+||x(\tau,\xi)||)$$

при всех $x(\cdot,\xi)\in X(D_0),\ t_0^*\leq t_0\leq\tau\leq T$, где $t_0^*=\min\{t_0:(t_0,x_0)\in D_0\}$.

Используя это неравенство и лемму Гронуолла, приходим к оценке

$$||x(\tau,\xi)|| \leq e^{\rho(t-t_0)}-1+||x_0||e^{\rho(t-t_0)} \leq K_1(D_0)$$

при всех $x(\tau,\xi)\in X(D_0)$, $t_0^*\leq t_0\leq\tau\leq T$. Выберем $K_1(D_0)=\max\limits_{(t_0,x_0)\in D_0}(1+||x_0||e^{\rho T})$.

В частности, получим оценку для краевых условий $s(T,\xi)$ при $\xi\in\Psi(D_0)$

$$\max_{\xi\in\Psi(D_0)}||s(T,\xi)|| \leq \max_{||\xi||\leq K_1(D_0)}||D_x\sigma(\xi)|| = K_2(D_0).$$

Рассмотрим трубку

$$D_0^*=[t_0^*,T]\times\{x:||x||\leq 3K_1(D_0)\}.$$

Тогда из условия (A2) имеем неравенство

$$||\dot{s}(\tau,\xi)|| = ||D_xH(t,x,s(\tau,\xi))|| \leq \rho(1+||s(\tau,\xi)||)$$

при всех $\xi\in\Psi(D_0)$, $t_0^*\leq t_0\leq\tau\leq T$, для всех $(t,x)\in D_0^*$.

Применяя лемму Гронуолла, можно получить следующую оценку:

$$||s(\tau,\xi)|| \leq (e^{\rho(\tau-t_0)}-1)+||s(T,\xi)||e^{\rho(\tau-t_0)} \leq K_3(D_0)$$

при всех $\xi\in\Psi(D_0)$, $t_0^*\leq t_0\leq\tau\leq T$, где

$$K_3(D_0)=(1+K_2(D_0))e^{\rho T}.$$

Определим константу

$$K(D_0)=\max\{K_1(D_0),K_3(D_0)\}.$$

Лемма 2. *Функции $H(t,x,s)$ и $g(t,x,s)$ в (1.6) локально липшицевы по (x,s) с константами Липшица L_H и L_g и обладают условиями подлинейного роста по (x,s) соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x_1,s_1),(x_2,s_2)\in G$, где G — компактное множество. Тогда существует такая константа $d>0$, что выполнено $||x_i||\leq d,\ ||s_i||\leq d,\ i=1,2$. Применяя формулу конечных приращений покоординатно, получим

$$|H(t,x_1,s_1)-H(t,x_2,s_2)| \leq (2n)^2\max_{(x,s)\in G}\Big(||D_sH(t,x,s)||,||D_xH(t,x,s)||\Big)$$

$$\times\big(||x_1-x_2||+||s_1-s_2||\big) \leq \max_{(x,s)\in G}\rho\big(1+||x||+||s||\big)(2n)^2\big(||x_1-x_2||+||s_1-s_2||\big).$$

В качестве константы Липшица выберем $L_H=\rho(1+2d)(2n)^2$.

$$|g(t,x_1,s_1)-g(t,x_2,s_2)| = \Big|D_sH(t,x_1,s_1)s_1-H(t,x_1,s_1)-D_sH(t,x_2,s_2)s_2+H(t,x_2,s_2)\Big|$$

$$\leq ||D_sH(t,x_1,s_1)||\cdot||s_1-s_2||+||D_sH(t,x_1,s_1)-D_sH(t,x_2,s_2)||\cdot||s_2||+L_H(||x_1-x_2||+||s_1-s_2||)$$

$$\leq \rho(1+||x_1||)||s_1-s_2||+L(||s_1-s_2||+||x_1-x_2||)d+L_H(||x_1-x_2||+||s_1-s_2||).$$

В качестве константы Липшица L_g примем величину

$$L_g=(4n^2+1)(1+2d)\rho+Ld.$$

Покажем подлинейный рост функции $H(t,x,s)$. Справедливы следующие неравенства для $t\in[t_0,T]$, $(x,s)\in G$, $(0,0)\in G$:

$$|H(t,x,s)-H(t,0,0)+H(t,0,0)|\le L_H(||x||+||s||)+|H(t,0,0)|$$

$$\le \max\{L_H,|H(t,0,0)|\}(1+||x||+||s||).$$

Подлинейный рост по переменным (x,s) для функции $g(t,x,s)$ доказывается аналогично:

$$|g(t,x,s)-g(t,0,0)+g(t,0,0)|\le L_g(||x||+||s||)+|g(t,0,0)|$$

$$\le \max\{L_g,|g(t,0,0)|\}(1+||x||+||s||).$$

1.3. Структура минимаксного решения

Сконструируем функцию $\tilde V(t,x)$, используя решения $x(t,\xi),z(t,\xi)$ характеристической системы (1.6), (1.7), следующим образом:

$$\forall (t,x)\in\Pi_T \qquad \exists\xi\in\mathbb{R}^n:\quad x(t,\xi)=x,\quad z(t,\xi)=\tilde V(t,x);$$

$$z(\tau,\xi)=\tilde V(\tau,x(\tau,\xi))\quad \forall\tau\in[t,T]. \tag{1.8}$$

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что построенная таким образом функция $\tilde V(t,x)$, вообще говоря, негладкая, так как ее конструкция не исключает ситуаций, когда в точку $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n$ приходит несколько характеристик $x(t,\xi)=x,\ z(t,\xi)=\tilde V(t,x)$.

Определим для $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n$ множества $\partial\tilde V_x^+=\{s\in\mathbb{R}^n:(\alpha,s)\in\partial\tilde V^+\}$. Введем условия:

(A4) функция $\tilde V(t,x)$ локально липшицева и супердифференцируема, т. е. для всех $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n$ справедливо $D^+\tilde V(t,x)\ne\varnothing$;

(A5) сопряженные переменные характеристической системы $s(t,\xi)$ удовлетворяют условию

$$\forall (t,x)\in\Pi_T \qquad \exists\ \xi\in\mathbb{R}^n:\ x=x(t,\xi),\quad z(\tau,\xi)=\tilde V(\tau,x(\tau,\xi)),$$

$$s(\tau,\xi)\in D_x^+\tilde V(\tau,x(\tau,\xi))\quad\forall\tau\in[t,T].$$

З а м е ч а н и е 4. В силу условия (A4) по теореме Радемахера липшицева функция $\tilde V(t,x)$ почти всюду в Π_T дифференцируема. Следовательно, согласно замечаниям 1, 2 почти всюду в Π_T справедливо

$$\partial_C\tilde V(t,x)=\{D\tilde V(t,x)\}.$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема о необходимых и достаточных условиях представления минимаксного решения.

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $\tilde V(t,x)$ *вида* (1.8) *совпадала в* Π_T *с единственным минимаксным/вязкостным решением* $V(t,x)$ *задачи* (1.1), (1.2)*, необходимо и достаточно, чтобы при всех* $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n$ *выполнялись условия* (A4), (A5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.*

Предположения (A1), (A3) обеспечивают существование и единственность минимаксного решения $V(t,x)$ задачи (1.1), (1.2) [1].

Выберем компактную область $D_0\subset\Pi_T$, определим константы $K(D_0)>0,K_1(D_0)>0$ из леммы 2.

Рассмотрим множества D_1, P^* вида

$$D_1=D_1(D_0)=[t_0^*,T]\times\{x:||x||\le 3K_1(D_0)\},$$

$$P^* = P^*(D_0) = \{p \in \mathbb{R}^n : ||p|| \le K(D_0)\},$$

где $t_0^* = \min\{t_0 : (t_0, x_0) \in D_0\}$.

Рассмотрим вспомогательную задачу управления с динамикой вида

$$\dot{x}(\tau) = D_s H(t, x(\tau), s(\tau)), \quad \tau \in [t_0, T], \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in \Pi_T, \tag{1.9}$$

где $s(\cdot)$ — элементы множества S_{D_0} всех измеримых функций $s(\cdot)\colon\ [0,T] \to P^*(D_0)$.

Введем функционал платы

$$I_{(t_0,x_0)}(s(\cdot)) = \sigma(x(T)) - \int\limits_{t_0}^{T} \big\langle s(\tau), D_p H(\tau, x(\tau), s(\tau))\big\rangle - H(\tau, x(\tau), s(\tau)) d\tau, \tag{1.10}$$

где $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, s(\cdot))$ — траектория системы (1.6), стартующая из точки (t_0, x_0) под управлением $s(\cdot) \in S_{D_0}$. Требуется минимизировать функционал платы (1.10) на множестве допустимых управлений S_{D_0}.

Рассмотрим оптимальный результат в задаче (1.9), (1.10)

$$V^*(t_0, x_0) = \inf_{s(\cdot) \in S_{D_0}} I_{(t_0,x_0)}(s(\cdot)).$$

Введем функцию цены

$$(t_0, x_0) \to V^*(t_0, x_0)\colon\ \Pi_T \to \mathbb{R}.$$

Покажем, что в области $D_0 \ni (t_0, x_0)$ выполняется равенство

$$V^*(t_0, x_0) = \tilde{V}(t_0, x_0).$$

Следуя работе [12], покажем, что в области $D_1 \times P^* \ni (t, x, s)$ гамильтониан задачи (1.1), (1.2) совпадает с гамильтонианом $\tilde{H}(t, x, s)$ задачи (1.9), (1.10)

$$\tilde{H}(t, x, s) = \min_{p \in P^*(t_*, x_*)} \Big[\langle s, D_p H(t, x, p)\rangle - \langle p, D_p H(t, x, p)\rangle + H(t, x, p)\Big]. \tag{1.11}$$

В самом деле, преобразуем выражение, стоящее в (1.11) под знаком минимума, и получим выражение

$$\Big(\langle s, D_p H(t, x, p)\rangle - \langle p, D_p H(t, x, p)\rangle - (H(t, x, s) - H(t, x, p))\Big) + H(t, x, s).$$

В силу вогнутости гамильтониана $H(t, x, p)$ по p имеем

$$H(t, x, s) - H(t, x, p) \le \langle s - p, D_p H(t, x, p)\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\langle s, D_p H(t, x, p)\rangle - \langle p, D_p H(t, x, p)\rangle + H(t, x, p) - H(t, x, s) \ge 0.$$

Поэтому, если $s \in P^*(D_0)$, то минимум в (1.11) достигается на элементе $p = s$ и справедливо равенство

$$\tilde{H}(t, x, s) = \langle s, D_s H(t, x, s)\rangle - \langle s, D_s H(t, x, s)\rangle + H(t, x, s) = H(t, x, s).$$

Известно, что при всех $(t, x) \in \Pi_T$ функция $V^*(t, x)$ является единственным минимаксным решением задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с гамильтонианом $\tilde{H}(t, x, s)$.

Как доказано, гамильтонианы $H(t, x, s)$ и $\tilde{H}(t, x, s)$ совпадают в области D_1. Для точки $(t_0, x_0) \in D_0$ оптимальная траектория $x(\cdot; t_0, x_0, s(\cdot))$ задачи (1.9) не выходит из области D_1.

В силу необходимых и достаточных условий оптимальности [12] существует $\xi \in \mathbb{R}^n$ такое, что для решений $x(\cdot,\xi), s(\cdot,\xi), z(\cdot,\xi)$ характеристической системы

$$\dot{x} = D_s\tilde{H}(t,x,s), \quad \dot{s} = D_x\tilde{H}(t,x,s), \quad \dot{z} = \langle s, D_s\tilde{H}(t,x,s)\rangle - \tilde{H}(t,x,s)$$

при $t \in [t_0, T]$ выполняются условия

$$x(t,\xi) = x(t;t_0,x_0,s(\cdot)), \quad z(t,\xi) = V^*(t,x(t,\xi)), \quad s(t,\xi) \in D_x^+V^*(t,x(t,\xi)),$$

следовательно,

$$V^*(t,x) = \tilde{V}(t,x) \quad \forall\ (t,x) \in D_0.$$

Кроме того, в работе [12] показано, что для минимаксного решения $V(t,x)$ задачи (1.1), (1.2) в области $D_1 \subset \Pi_T$, $D_1 \supset D_0$ выполнено

$$V(t,x) = V^*(t,x).$$

Так как область D_0 и точка $(t_0,x_0) \in D_0 \subset D_1$ выбирались произвольно, то минимаксное решение $V(t,x)$ удовлетворяет равенству $V(t,x) = \tilde{V}(t,x)$ всюду в полосе Π_T.

Достаточность.

Пусть (t,x) — точка дифференцируемости $\tilde{V}(t,x)$ (1.8), и характеристики $\tilde{x}(\cdot,\xi), \tilde{s}(\cdot,\xi), \tilde{z}(\cdot,\xi)$ удовлетворяют в этой точке условиям A4, A5. Производная функции $\tilde{V}(\cdot,\cdot)$ в точке (t,x) в направлении $(1, D_sH(t,x,s)) = (1,f)$ имеет вид

$$\partial\tilde{V}_{1,f}(t,x) = \langle D\tilde{V}(t,x),(1,f)\rangle = \frac{\partial\tilde{V}(t,x)}{\partial t} + \langle D_x\tilde{V}(t,x), D_sH(t,x,s)\rangle$$

$$= \frac{d\tilde{V}(t,x(t,\xi))}{dt} = \dot{z}(t,\xi) = \langle D_x\tilde{V}(t,x), D_sH(t,x,s)\rangle - H(t,x,s).$$

Отсюда

$$\frac{\partial\tilde{V}(t,x)}{\partial t} = -H(t,x,D_x\tilde{V}(t,x)). \tag{1.12}$$

Пусть (t,x) — точка недифференцируемости функции $\tilde{V}(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим все последовательности $\{h_k = (-H(t_k,x_k,s_k),\ s_k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\quad s_k = D_x\tilde{V}(t_k,x_k)$, для точек (t_k,x_k), в которых $\tilde{V}(t,x)$ дифференцируема и $t_k \to t,\ x_k \to x$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим множество $\partial\tilde{V}(t,x) = \{h = \lim\limits_{t_k\to t, x_k\to x, k\to\infty} h_k\}$. Из условия (A2), определения $\partial_C\tilde{V}(t,x)$ и замечания 2 вытекает, что

$$\partial\tilde{V}(t,x) \subset \partial_C\tilde{V}(t,x) = D^+\tilde{V}(t,x).$$

По теореме Каратеодори [16] любой элемент (a,s) выпуклого замкнутого множества $\partial_C\tilde{V}(t,x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (1.5) представим в виде линейной комбинации

$$a = \sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i a_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i s_i, \quad \sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0,$$

здесь $a_i = -H(t,x,s_i)$, $(a_i,s_i) \in \partial\tilde{V}(t,x)$.

Проверим выполнение неравенства (1.3) из определения 1 для произвольного элемента $(a,s) \in \partial_C\tilde{V}(t,x)$. Получаем

$$-\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i H(t,x,s_i) + H\Big(t,x,\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i s_i\Big) \geq -\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i H(t,x,s_i) + \sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i H(t,x,s_i) = 0.$$

Неравенство справедливо в силу вогнутости функции $H(t,x,s)$ по s.

Теперь проверим неравенство (1.4) из определения 1. Так как функция $\tilde V(t,x)$ супердифференцируема, то ее субдифференциал $D^-\tilde V(t,x)$ пуст в точках недифференцируемости. В точках дифференцируемости функции $\tilde V(t,x)$ в силу замечания 1 и условия (1.12) справедливы равенства

$$D^-\tilde V(t,x) = D\tilde V(t,x) = \big\{(-H(t,x,D_x\tilde V(t,x)), D_x\tilde V(t,x))\big\} = \{(a,s)\}$$

и выполняется неравенство (1.4), так как

$$a + H(t,x,s) = -H(t,x,s) + H(t,x,s) = 0.$$

Итак, функция $\tilde V(t,x)$ удовлетворяет определению 1 и совпадает с $V(t,x)$ — единственным минимаксным решением задачи (1.1), (1.2) всюду в полосе Π_T.

2. Связь обобщенного решения уравнения Гамильтона — Якоби и одномерного закона сохранения

Выделим частный случай задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби, а именно

$$u_t + H(u_x) = 0, \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

$$u(T,x) = \sigma(x), \tag{2.2}$$

здесь функция $H(s)$ — вогнутая, дважды непрерывно дифференцируемая, липшицева по s с константой Липшица $L > 0$. Пусть функция $\sigma(x)$ удовлетворяет условию (A3).

При этих предположениях существует и единственно непрерывное минимаксное решение $u(t,x)$ задачи (2.1), (2.2).

Как было показано ранее, минимаксное решение можно построить с помощью классических характеристик. Составим характеристическую систему для задачи (2.1), (2.2)

$$\dot x = D_sH(s), \quad \dot s = 0, \quad \dot z = D_sH(s)s - H(s) \tag{2.3}$$

с краевым условием $x(T) = \xi,\ s(T) = D_x\sigma(\xi),\ z(T) = \sigma(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}$.

Решением этой характеристической системы являются функции

$$\begin{gathered} x(t,\xi) = D_sH(s_0)(t-T) + \xi, \\ s(t,\xi) = s_0 = D_x\sigma(\xi), \\ z(t,\xi) = (D_sH(s_0)s_0 - H(s_0))(t-T) + \sigma(\xi). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Согласно [12] минимаксное решение имеет представление

$$u(t,x) = \min_{\xi}\{z(t,\xi)\colon\ x(t,\xi) = x\}, \tag{2.5}$$

а его супердифференциал $D^+u(t,x)$ непуст при всех $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}$ и имеет вид

$$D^+u(t,x) = \mathrm{co}\Big\{\big(-H(t,x,s(t,\xi)), s(t,\xi)\big) : \quad x(t,\xi) = x, \quad z(t,\xi) = u(t,x)\Big\}. \tag{2.6}$$

Минимаксное решение $u(t,x)$ (2.5) является функцией локально липшицевой, а значит, дифференцируемой почти всюду. Пусть $\xi_i,\ \xi_j,\ \xi_i \neq \xi_j$ — такие краевые условия, что удовлетворяющие им характеристики $x(\cdot,\xi)$ пересекаются в точке (t,x) для соответствующих компонент $z(\cdot,\xi)$

характеристической системы. В силу (2.5), (2.6) множество сингулярности функции $u(t,x)$, т. е. множество, на котором она недифференцируема, описывается соотношением

$$\Gamma = \Big\{(t,x): \quad \exists\ \xi_i \neq \xi_j, \quad x = x(t,\xi_i) = x(t,\xi_j), \quad u(t,x) = z(t,\xi_i) = z(t,\xi_j)\Big\},$$

причем для соответствующих сопряженных переменных характеристической системы справедливо

$$s(t,\xi_i) = s_i \neq s_j = s(t,\xi_j) \quad \forall\ (t,x) \in \Gamma.$$

Это неравенство вытекает из единственности решения характеристической системы, ибо в противном случае из $s_i = s_j$ вытекает $s(\tau,\xi_i) = s(\tau,\xi_j)$, $x(\tau,\xi_i) = x(\tau,\xi_j)$, $z(\tau,\xi_i) = z(\tau,\xi_j)$ $\forall \tau \in [t,T]$. В частности $\xi_i = x(T,\xi_i) = x(T,\xi_j) = \xi_j$, что противоречит условию $\xi_i \neq \xi_j$.

Опишем сечение Γ_t множества сингулярности Γ в момент t, т. е. $\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R} | (t,x) \in \Gamma\}$.

$$x \in \Gamma_t \Rightarrow\ x = D_sH(s_i)(t-T) + \xi_i = D_sH(s_j)(t-T) + \xi_j, \quad s_i \neq s_j.$$

Отсюда

$$D_sH(s_i)(t-T) = x - \xi_i, \quad D_sH(s_j)(t-T) = x - \xi_j.$$

Подставим эти выражения в решения z (2.4) и получим

$$u(t,x) = (x-\xi_i)s_i - H(s_i)(t-T) + \sigma(\xi_i) = (x-\xi_j)s_j - H(s_j)(t-T) + \sigma(\xi_j).$$

Выразим x:

$$x(s_i - s_j) + (t-T)(H(s_j) - H(s_i)) = \sigma(\xi_j) - \sigma(\xi_i) + \xi_i s_i - \xi_j s_j$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{(t-T)(H(s_i) - H(s_j))}{s_i - s_j} + \frac{\sigma(\xi_j) - \sigma(\xi_i) + \xi_i s_i - \xi_j s_j}{s_i - s_j}.$$

Определим соотношения, которым удовлетворяют s_i, s_j. Введем обозначения ξ_-, ξ_+ для краевых условий $x(T,\xi_\pm) = \xi_\pm$, которые удовлетворяют соотношению $x(\tau,\xi_-) < x(\tau,\xi_+)$ $\forall \tau \in (t,T]$. Заметим, что $\xi_+ > \xi_-$. Обозначим $s_+ = s_i = D_x\sigma(\xi_+), s_- = s_j = D_x\sigma(\xi_-)$. Запишем условие пересечения характеристик $x(\cdot,\xi_\pm)$ (2.3) в точке (t,x)

$$x = D_sH(s_+)(t-T) + \xi_+ = D_sH(s_-)(t-T) + \xi_-.$$

Преобразуем это выражение

$$(D_sH(s_+) - D_sH(s_-))(t-T) = \xi_- - \xi_+ < 0,$$

отсюда $D_sH(s_+) - D_sH(s_-) > 0$. В силу вогнутости функции $H(s)$ ее производная $D_sH(s)$ не возрастает. Поэтому справедливы соотношения

$$s_i \neq s_j\ \Rightarrow\ s_i = s_+ < s_j = s_-. \tag{2.7}$$

С помощью замены переменной $\tau = T - t$ от краевой задачи (2.2) можно перейти к начальной задаче Коши

$$v(0,x) = \sigma(x) \tag{2.8}$$

для уравнения Гамильтона — Якоби

$$v_\tau - H(v_x) = 0, \quad \tau \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.9}$$

Минимаксное/вязкостное решение $v(\tau,x)$ начальной задачи Коши (2.8), (2.9) и $u(t,x)$ — минимаксное решение задачи (2.1), (2.2) связаны соотношением

$$v(\tau,x) = u(t,x), \quad \tau = T - t.$$

Нетрудно видеть, что

$$u_x = v_x, \quad v_\tau(\tau, x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} = H(v_x).$$

Из супердифференцируемости минимаксного решения $u(t,x)$ следует, что функция $v(\tau,x)$ супердифференцируема. На множестве Γ функция $u(t,x) = v(\tau,x)$ недифференцируема. Заметим, что для $\tau = T - t$ из выражения

$$x = \frac{-\tau(H(s_i) - H(s_j))}{s_i - s_j} + \frac{\sigma(\xi_j) - \sigma(\xi_i) + \xi_i s_i - \xi_j s_j}{s_i - s_j} \in \Gamma_\tau, \qquad s_i = s_+, \quad s_j = s_-,$$

следует, что для сингулярного множества Γ справедливо соотношение

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{(-H(s_+)) - (-H(s_-))}{s_+ - s_-}. \tag{2.10}$$

3. Энтропийные решения законов сохранения

В данном разделе применим результаты предыдущего раздела для построения одномерного закона сохранения — энтропийного решения квазилинейного гиперболического уравнения.

3.1. Репрезентативная формула энтропийного решения

Рассмотрим начальную задачу Коши для квазилинейного гиперболического уравнения

$$w_\tau - (H(w))_x = 0, \tag{3.1}$$

$$w(0,x) = D_x\sigma(x). \tag{3.2}$$

Решение этой задачи будем строить в полосе $\Pi_T = [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \Pi_T$.

О п р е д е л е н и е 4 [17]. Слабым решением по Соболеву уравнения (3.1) в Π_T называется функция $w(\tau,x)$, удовлетворяющая в любой ограниченной области $\Omega \subset \Pi_T$ равенству

$$\int\limits_\Omega w\varphi_\tau - H(w)\varphi_x d\tau dx = 0, \quad \forall\varphi(\tau,x) \in C_0^\infty(\Omega),$$

где $\varphi(\tau,x) \in C_0^\infty(\Omega)$ — тестовая функция, бесконечно дифференцируемая, с компактным носителем в Ω.

Отметим, что в качестве слабых решений могут выступать и кусочно-гладкие функции, область определения которых состоит из конечного числа подобластей, внутри которых функция дифференцируема, а на границах терпит разрывы первого рода. В точках гладкости слабые решения удовлетворяют уравнению (3.1), а на линии разрыва $x(\tau)$, необходимо удовлетворяют условию Ранкина — Гюгонио:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{-H(w_-) - (-H(w_+))}{w_- - w_+}, \tag{3.3}$$

где $w_- = \lim\limits_{x \to x(\tau)-0} w(\tau,x)$, $w_+ = \lim\limits_{x \to x(\tau)+0} w(\tau,x)$.

Предположим дополнительно, что сингулярное множество $\Gamma = \{(\tau, x(\tau)) : \quad \tau \in [0,T]\}$ единственного минимаксного решения задачи (2.9), (2.8) $v(\tau,x)$ состоит из конечного числа линий $x(\tau)$ (2.10).

При каждом $(\tau,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ определим множество $D_x^+ v(\tau,x) \subset \mathbb{R}$

$$D_x^+ v(\tau,x) = \mathrm{co}\Big\{s(T-\tau,\xi) : \quad x(T-\tau,\xi) = x, \quad z(T-\tau,\xi) = v(\tau,x)\Big\},$$

где $v(\tau, x)$ — единственное минимаксное решение задачи (2.9), (2.8), $v(\tau, x) = u(t, x)$, $\tau = T - t$, $u(t, x)$ определяется выражением (2.5).

Рассмотрим функцию $(\tau, x) \to w(\tau, x)$: $[0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$(\tau, x) \to w(\tau, x) \in D_x^+ v(\tau, x). \tag{3.4}$$

Отметим, что почти всюду в полосе Π_T выполняется равенство

$$w(\tau, x) = v_x(\tau, x) = u_x(T - \tau, x).$$

Множество точек разрыва функции $w(\tau, x)$ совпадает с множеством Γ сингулярности функции $v(\tau, x) = u(T - \tau, x)$. Согласно условию (2.10) для множества сингулярности $\Gamma = \{(\tau, x(\tau)) : \tau \in [0, T]\}$ всякая линия разрыва $x(\tau)$ удовлетворяет условию Ранкина — Гюгонио.

Покажем, что функция $w(\tau, x)$ (3.4) является слабым решением уравнения (3.1). Пусть $\Omega \subset \Pi_T = [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Справедливы соотношения

$$\int\limits_{\Omega} w\varphi_\tau - H(w)\varphi_x d\tau dx = \int\limits_{\Omega} u_x\varphi_\tau - H(u_x)\varphi_x d\tau dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x(\tau)} u_x(T, x)\varphi(T, x) - u_x(0, x)\varphi(0, x)dx + \int\limits_{x(t)}^{\infty} u_x(T, x)\varphi(T, x)$$

$$- u_x(0, x)\varphi(0, x)dx - \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{x(\tau)} u_{x\tau}(\tau, x)\varphi(\tau, x)dxd\tau - \int\limits_0^T \int\limits_{x(\tau)}^{\infty} u_{x\tau}(\tau, x)\varphi(\tau, x)dxd\tau$$

$$- \int\limits_0^T u_\tau(\tau, \infty)\varphi(\tau, \infty) - u_\tau(\tau, -\infty)\varphi(\tau, -\infty)d\tau + \int\limits_0^T \int\limits_{-\infty}^{x(\tau)} u_{\tau x}(\tau, x)\varphi(\tau, x)dxd\tau$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{x(\tau)}^{\infty} u_{\tau x}(\tau, x)\varphi(\tau, x)dxd\tau = 0.$$

Напомним определение энтропийного решения [9] задачи Коши (3.2) для уравнения (3.1).

О п р е д е л е н и е 5. Энтропийным решением задачи (3.2), (3.1) называется функция $w(\tau, x)$, которая удовлетворяет условиям

- $\forall \varphi(\tau, x) \in C_0^\infty, \quad \varphi(\tau, x) \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\Pi_T} |w - k|\varphi_\tau + \operatorname{sign}(w - k)(-H(w) + H(k))\varphi_x dxd\tau \geq 0;$$

- $\forall [a, b] \quad \lim\limits_{\tau \to +0} \int\limits_a^b (w(\tau, x) - \nabla\sigma(x))dx = 0.$

Известно [9, 10], что энтропийное решение является слабым решением по Соболеву, и в задаче (3.1), (3.2) энтропийное решение единственно в классе кусочно-гладких функций, допускающих конечное число линий разрыва первого рода.

Покажем, что функция $w(\tau, x)$ (3.4) является энтропийным решением задачи (3.1), (3.2). Для этого достаточно проверить выполнение условия допустимости скачка функции $w(\tau, x)$ на линии разрыва $x(\tau)$ (см. [7, 9, 10]). Для выпуклой функции $-H(s)$ это условие имеет вид

$$(k - w_+)\cos(\nu\tau) - (H(k) - H(w_+))\cos(\nu x) \leq 0 \quad \forall k \in (w_+, w_-), \quad w_+ < w_-, \tag{3.5}$$

здесь ν — нормаль к линии разрыва $x(\tau)$ (3.3), удовлетворяющей условию Ранкина — Гюгонио. Условие (3.5), очевидно, выполняется на линии разрыва Γ в силу соотношений (2.7), (2.10) и равенств

$$w_+ = s_+ = s(T, \xi_+(\tau, x)), \quad w_- = s_- = s(T, \xi_-(\tau, x)).$$

Используя представление минимаксного решения $u(t,x)$ (2.5) и его супердифференциала $D^+u(t,x)$ (2.6) в терминах характеристик (2.4), получаем следующее описание структуры энтропийного решения $w(\tau,x)$ задачи (3.1), (3.2).

Теорема 2. *Энтропийное решение одномерного закона сохранения* (3.1), (3.2) *имеет при всех* $(\tau,x) \in \Pi_T \setminus \Gamma$ *следующее представление*:

$$w(\tau,x) = s(T-\tau,\xi): \quad x(T-\tau,\xi) = x, \quad z(T-\tau,\xi) = u(T-\tau,x),$$

где $u(t,x)$ *— минимаксное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби* (1.1), (1.2), $x(\cdot,\xi), s(\cdot,\xi), z(\cdot,\xi)$ *— классические характеристики* (2.3), *если множество сингулярности* Γ *минимаксного решения состоит из конечного числа линий* (2.10).

3.2. Пример

Рассмотрим пример, иллюстрирующий результаты предыдущего раздела.

Пусть закон сохранения $w(\tau,x)$, $\tau \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, описывается как решение задачи

$$w_\tau + (\sqrt{1+w^2})_x = 0, \quad w(0,x) = -x.$$

Для $w(\tau,x)$ выпишем задачу о потенциале $u(t,x)$

$$u_t - (\sqrt{1+u_x^2}) = 0, \quad u(2,x) = -\frac{x^2}{2}, \quad t \in [0,2].$$

В задаче о потенциале имеем характеристическую систему

$$\dot{x} = -\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}, \quad \dot{s} = 0, \quad \dot{z} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

с краевым условием

$$x(T) = \xi, \quad s(T) = -\xi, \quad z(T) = -\frac{\xi^2}{2}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Решениями этой системы являются функции

$$x(t,\xi) = \frac{\xi(t-2)}{\sqrt{1+\xi^2}} + \xi, \quad s(t,\xi) = -\xi, \quad z(t,\xi) = \frac{t-2}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{\xi^2}{2}.$$

Согласно теореме 2 искомый закон сохранения — единственное энтропийное решение $w(\tau,x)$ — имеет вид

$$w(\tau,x) = -\xi(\tau,x) \text{ при всех } (\tau,x) \not\ni \Gamma,$$

где

$$\xi(\tau,x) = \arg\min\Big\{\frac{-\tau}{\sqrt{1+\xi^2}} - \frac{\xi^2}{2}: \ \xi - \frac{\tau\xi}{1+\xi^2} = x\Big\},$$

$$\Gamma = \big\{(\tau,x): \quad \tau > 1, \quad x = 0\big\},$$

$$w(\tau,x) \in \Big[-\sqrt{\tau^2-1}, \sqrt{\tau^2-1}\ \Big], \quad (\tau,x) \in \Gamma.$$

Рисунки 1–3 иллюстрируют этапы построения энтропийного решения в рассматриваемом примере.

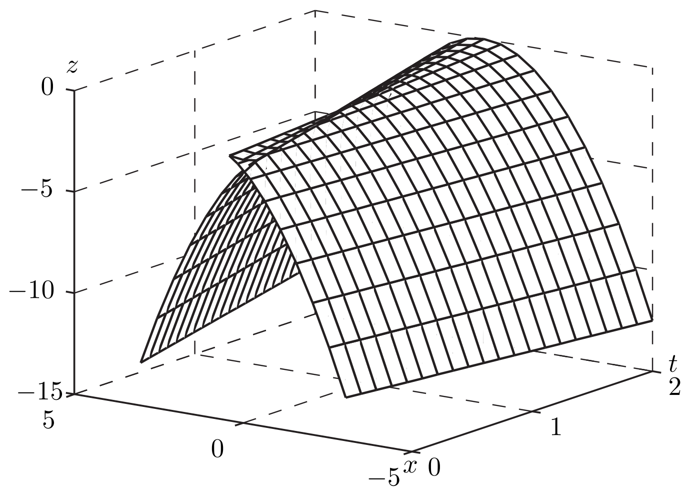


Рис. 1. Поверхность $\{(t,x,z): \quad t\in[0,2], \quad x=x(t,\xi), \quad z=z(t,\xi), \quad \xi\in[-5,5]\}$.

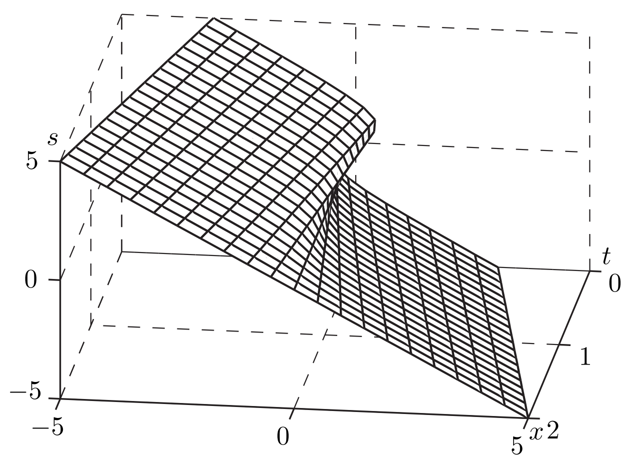


Рис. 2. Поверхность $\{(t,x,s): \quad t\in[0,2], \quad x=x(t,\xi), \quad s=s(t,\xi), \quad \xi\in[-5,5]\}$.

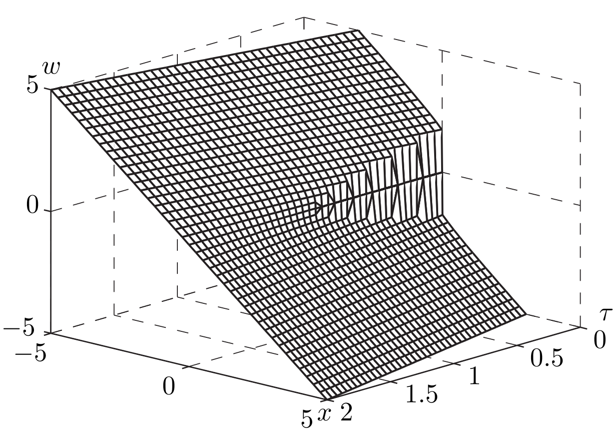


Рис. 3. Энтропийное решение закона сохранения $w(\tau,x)$.

В заключение представим алгоритм построения законов сохранения.

1. От начальной задачи для закона сохранения $w_\tau - H(w)_x = 0,\ w(0,x) = D_x\sigma(x)$, переходим к задаче о потенциале вида $u_t + H(u_x) = 0,\ u(T,x) = \sigma(x)$.

2. Составим характеристическую систему для задачи потенциала.

3. Выпишем множество сингулярности Γ для задачи потенциала.

4. Энтропийное решение $w(\tau, x)$ закона сохранения вне множества сингулярности Γ для задачи потенциала совпадает с сопряженной переменной $s(t,\xi)$ характеристической системы (2.3) такой, что $t = T - \tau,\ x(t,\xi) = x,\ z(t,\xi) = u(t, x(t,\xi))$.

4. Применение классических характеристик для оценки оптимального результата в задачах управления

Известным приложением теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби с выпуклым или вогнутым по импульсной переменной гамильтонианом является теория оптимального управления. Функция цены, которая начальному состоянию управляемой системы ставит в соответствие оптимальный результат в классе допустимых управлений, совпадает с единственным минимаксным/вязкостным решением краевой задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана.

В настоящем разделе структура минимаксного решения, описанная выше в терминах классических характеристик уравнения Беллмана, используется для построения и оценки [13] численной аппроксимации оптимального результата в следующей задаче управления.

Динамика управляемой системы имеет вид

$$\dot{x} = f(t,x) + g(u), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.1}$$

где $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$. На управление $u \in \mathbb{R}^k$ наложено геометрическое ограничение

$$u \in U \subset \mathbb{R}^k,$$

где U — компакт. Задано начальное состояние $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Допустимые управления выбираются из множества $\tilde{U}$ всех измеримых функций $u(\cdot)\colon\ [0,T] \to U$.

Качество допустимого управления $u(\cdot) \in \tilde{U}$ оценивается с помощью терминального функционала платы

$$I(t_0, x_0) = h(x(T; t_0, x_0, u(\cdot))) \to \inf_{u(\cdot)\in\tilde{U}}, \tag{4.2}$$

где $h(\cdot)$ — целевая функция, $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))\colon\ [t_0,T] \to \mathbb{R}^n$ — траектория системы (4.1), стартующая из начального положения (t_0, x_0) и порожденная допустимым управлением $u(\cdot)$. Требуется минимизировать функционал (4.2) на множестве допустимых управлений.

Задача решается при следующих предположениях:

(B1) функции $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x_i}, \dfrac{\partial h(x)}{\partial x_i}$, $g(u)$ определены, непрерывны и ограничены константой $M >\ 0$ для $x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T],\ u \in U$;

(B2) для любого направления $s \in \mathbb{R}^n,\ ||s|| \neq 0$, множество

$$\arg \min_{g=g(u):u\in U} \langle s, g\rangle = \{g^0(s)\}$$

состоит из единственного элемента.

Рассмотрим функцию цены $(t_0, x_0) \to Val(t_0, x_0)$:

$$Val(t_0, x_0) = \inf_{u(\cdot)\in\tilde{U}} I(t_0, x_0, u(\cdot)). \tag{4.3}$$

Как известно [1], функция цены (4.3) является единственным минимаксным решением задачи Коши

$$Val(T, x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для уравнения Беллмана

$$\frac{\partial Val(t,x)}{\partial t} + H(t, x, D_x Val(t,x)) = 0,$$

где гамильтониан $H(t,x,s)$ при

$$s = D_x Val(t,x) = \Big(\frac{\partial Val(t,x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Val(t,x)}{\partial x_n}\Big)$$

имеет вид

$$H(t,x,s) = \langle s, f(t,x)\rangle + \min_{u\in U}\langle s, g(u)\rangle = \langle s, f(t,x) + g^0(s)\rangle.$$

Зафиксируем $(t_0,x_0) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$ и построим оптимальный результат $Val(t_0,x_0)$ численно, опираясь на представление (2.5)

$$Val(t_0,x_0) = \min_{\xi}\{h(\xi) : x(t_0,\xi) = x_0\}$$

минимаксного решения через классические характеристики (1.6)–(1.7). Для данной задачи характеристическая система имеет вид

$$\dot{x} = f(t,x) + g^0(s), \quad \dot{s} = -\Big(\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\Big)^T s, \quad \dot{z} = 0 \tag{4.4}$$

с краевым условием $x(T,\xi) = \xi,\ s(T,\xi) = D_x h(\xi),\ z(T,\xi) = h(\xi)$.

Рассмотрим разбиение временного отрезка $\{t_i = t_0 + i\Delta t,\ i = 1,\dots,N\} \in [t_0, T = t_N]$. Интегрируем характеристическую систему в обратном времени численно с помощью метода Эйлера. Оценим результат численной реализации репрезентативной формулы для оптимального результата $Val(t_0,x_0)$, предполагая, что интегрируемая характеристика $x(\cdot,\xi)$ совпадает с оптимальной траекторией $x^0(\cdot;t_0,x_0,u^0(\cdot))$ системы (4.1).

Обозначим через $F(t,x,s)$ правые части характеристической системы (4.4), пусть $\Delta y_i = ||\Delta x|| + ||\Delta s||$ — разность между решением $x(t,\xi), s(t,\xi)$ характеристической системы и численным решением $x_\Delta(t), s_\Delta(t)$ на интервале $[t_i,t_{i+1}], i = 0,\dots,N-1$. Функция $w(\cdot)$ — это модуль непрерывности правых частей характеристической системы по s, параметр ξ — допустимая погрешность подсчета величины $g^0(s)$ в условии (B2).

Выберем шаг разбиения по времени Δt таким образом, чтобы он удовлетворял условиям

$$w(L_1\Delta t) + \xi < 1, \qquad w(\Delta t) < 1, \tag{4.5}$$

здесь $L_1 = nM(M_1 + M_2) > 0$, n — размерность фазового пространства;

$$M_1 = \max\{x : t + ||x|| : (t,x) \in D_1(t_0,x_0)\},$$

$$M_2 = \max\{s : s \in P^*(t_0,x_0)\}.$$

Множества $D_1(t_0,x_0)$ и $P^*(t_0,x_0)$ для начального одноточечного множества $D_0 = \{(t_0,x_0)\}$ определены в теореме 1. Пусть $(t_i,x_i,s_i) = (t_i, x_\Delta(t_i), s_\Delta(t_i))$ — точка на численном решении характеристической системы. Оценим в прямом времени результаты численной аппроксимации решения характеристической системы.

На первом шаге $t \in [t_0,t_1]$

$$\Delta y_1 \le \int\limits_{t_0}^{t_1} ||F(t_0,x_0,s_0) - F(t,x(t),s(t))||dt \le \Delta t(w(L_1\Delta t) + \xi).$$

На втором шаге $t \in [t_1,t_2]$

$$\Delta y_2 \le \int\limits_{t_1}^{t_2} ||F(t_0,x_0,s_0) - F(t_1,x_1,s_1)||dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} ||F(t_1,x_1,s_1) - F(t,x(t),s(t))||dt \le \Delta y_1 + \Delta t w(\Delta y_1).$$

На третьем шаге $t \in [t_2, t_3]$

$$\Delta y_3 \le \int\limits_{t_2}^{t_3} ||F(t_1, x_1, s_1) - F(t_2, x_2, s_2)||dt + \int\limits_{t_2}^{t_3} ||F(t_2, x_2, s_2) - F(t, x(t), s(t))||dt \le \Delta y_1 + \Delta t w(\Delta y_2).$$

На i-м шаге $t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\Delta y_i \le \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} ||F(t_{i-2}, x_{i-2}, s_{i-2}) - F(t_{i-1}, x_{i-1}, s_{i-1})||dt + ||F(t_{i-1}, x_{i-1}, s_{i-1}) - F(t, x(t), s(t))||dt$$

$$\le \Delta y_1 + \Delta t w(\Delta y_{i-1}).$$

Используя свойство полуаддитивности модуля непрерывности $w(\cdot)$ и неравенства (4.5), получаем оценку

$$\Delta y_N \le \Delta y_1 + \Delta t\Big(w(\Delta y_1) + w(\Delta t w(\Delta y_1)) + \ldots + w\Big(\Delta t w(\Delta t w(\ldots \Delta t w(\Delta y_1)) \ldots)\Big)\Big)$$

$$\le \Delta y_1 + \Delta t\big(w(\Delta y_1) + N w(\Delta t)\big) = \Delta t\big(w(L_1 \Delta t) + \xi\big) + \Delta t w(\Delta y_1) + T w(\Delta t)$$

$$= \Delta t\big(w(L_1 \Delta t) + \xi\big) + (\Delta t + T) w(\Delta t).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если в задаче* (4.1), (4.2) *выполнены условия* (B1), (B2), *то оценка численного интегрирования характеристической системы* (4.4) *имеет вид*

$$\Delta y_i \le \Delta y_N \le \Delta t(w(L_1 \Delta t) + \xi) + (\Delta t + T) w(\Delta t).$$

Оценка оптимального результата $\Delta Val(t_0, x_0) = \{|Val(t_0, x_0) - h(x_\Delta(T))| : x_\Delta(t_0) = x_0\}$ *для ломаной Эйлера* $x_\Delta(\cdot)$, *аппроксимирующей оптимальную траекторию* $x^0(\cdot; t_0, x_0, u^0(\cdot)) = x(\cdot, \xi)$ *системы* (4.1), *имеет вид*

$$\Delta Val(t_0, x_0) \le M \Delta y_N,$$

где

$$M = \max\big\{|D_x h(x)| : (T, x) \in D_1(t_0, x_0)\big\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
2. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 832 с.
3. **Беллман Р.** Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960. 400 с.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1961. 392 с.
5. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. С. 476.
6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. **Олейник О.А.** О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95, № 3. С. 451–454.
8. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** О разрывных решениях квазилинейного уравнения первого порядка // Докл. АН СССР. 1954. Т. 99, № 1. С. 27–30.
9. **Кружков С.Н.** Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 2. С. 228–255.

10. **Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А.** Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка: обобщенные решения, ударные волны, центрированные волны разрежения. М.: Изд-во МГУ, 1994. 96 с.
11. **Clarke F.N.** Optimization and nonsmooth analysis. New York: Wiley, 1983. 293 с.
12. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton-Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern Mathematics and its Applications. 2004. Vol. 20. P. 2955–3091.
13. **Колпакова Е.А.** Оценки численной аппроксимации оптимального результата для одного класса сингулярно возмущенных задач оптимального управления // Проблемы теоретической и прикладной математики: тр. 39-й Всерос. молодеж. конф. 2008. С. 265–269.
14. **Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L.** Some properties of viscosity solutions of Hamilton — Jacobi Equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 282. P. 487–502.
15. **Rockafellar R.T., Wets R.J-B.** Variational Analysis. New York: Springer, 1998. 734 p.
16. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и интегральными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
17. **Соболев С.Л.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 444 с.

Поступила 29.10.2008

Субботина Нина Николаевна
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: subb@uran.ru

Колпакова Екатерина Алексеевна
аспирантка
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: eakolpakova@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 517.977

О СОВПАДЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ СТАБИЛЬНЫХ МОСТОВ В ДВУХ ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ О СБЛИЖЕНИИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

В. Н. Ушаков, Х. Г. Гусейнов, Я. А. Латушкин, П. Д. Лебедев

Изучаются две игровые задачи о сближении с компактным целевым множеством на конечном промежутке времени. Исследуется вопрос о совпадении решений этих задач.

Ключевые слова: игровая задача о сближении, стабильный мост, гамильтониан.

V. N. Ushakov, Kh. G. Guseinov, Ya. A Latushkin, P. D. Lebedev. On the coincidence of maximal stable bridges in two approach game problems for stationary control systems.

Two game pursuit problems with compact target set at the finite time interval are studied. The criteria of its equivalence is researched.

Keywords: game pursuit problem, stable bridge, Hamiltonian.

Введение

Рассматривается конфликтно-управляемая система, поведение которой на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ описывается векторным дифференциальным уравнением.

Изучаются и сравниваются две игровые задачи о сближении системы с терминальным множеством M в фазовом пространстве [1, 2]. В первой из них первому игроку требуется обеспечить с помощью позиционного управления попадание фазового вектора системы на M в конечный момент времени ϑ. Во второй задаче требуется обеспечить с помощью позиционного управления попадание фазового вектора системы на M не позже момента ϑ.

При том подходе, который предложен в [1, 2], центральными элементами разрешающей конструкции в обеих задачах являются множества позиционного поглощения — максимальные u-стабильные мосты. В настоящей работе приводятся критерии совпадения максимальных u-стабильных мостов в случае стационарной конфликтно-управляемой системы. Обоснование этих критериев базируется на использовании конструкций и результатов из работ [3, 4, 18–26].

Основной целью работы является демонстрация полезности применения инфинитезимальных определений стабильности при исследовании задач теории дифференциальных игр.

Настоящая работа примыкает к исследованиям [1–26].

1. Постановка задач о сближении

Пусть задана конфликтно-управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 < \vartheta < \infty)$ описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x_0, \quad u \in P, \quad v \in Q. \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00587-а), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2640.2008.1), регионального гранта РФФИ/ПСО (проект 07-0196085) и программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, P и Q — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагается, что выполнены условия:

Условие A. Функция $f(t,x,u,v)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (t,x,u,v), и для любой ограниченной замкнутой области $D \subset [t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ существует постоянная $L = L(D) \in (0,\infty)$ такая, что

$$\begin{gathered}\left\|f\left(t,x^{(1)},u,v\right) - f\left(t,x^{(2)},u,v\right)\right\| \leqslant L\left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|,\\ \left(t,x^{(i)},u,v\right)\in D\times P\times Q, \quad i=1,2.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь символ $\|f\|$ означает норму вектора f в евклидовом пространстве.

Условие B. Существует такая постоянная $\mu \in (0,\infty)$, что

$$\begin{gathered}\|f(t,x,u,v)\| \leqslant \mu(1+\|x\|),\\ (t,x,u,v)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\times P\times Q.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Считаем, что область D выбрана настолько большой в полосе $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ пространства $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^m$, что все множества из рассматриваемых ниже в разд. 2–4 конструкций содержатся в D, в том числе, и множество $[t_0,\vartheta]\times M$. Кроме того, считаем, что область D — цилиндрическая, т. е. $D = [t_0,\vartheta]\times D^*$, где D^* — ограниченная замкнутая область в $\mathbb{R}^m$.

Свойство цилиндричности области D будет использовано в разд. 2 при рассмотрении конструкций, базирующихся на “обратном” времени.

Предполагается также, что задано компактное множество M в фазовом пространстве $\mathbb{R}^m$.

Сформулируем последовательно обе задачи о сближении в паре с дуальными к ним задачами об уклонении.

В задаче о сближении в момент ϑ, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание на M фазового вектора $x[t]$ системы (1.1) в момент ϑ. Решение задачи требуется обеспечить в классе позиционных стратегий $U(t,x)$ или в классе позиционных процедур управления первого игрока с поводырем [1,2]. В задаче об уклонении в момент ϑ, стоящей перед вторым игроком, требуется обеспечить уклонение фазового вектора $x[t]$ в момент ϑ от M (точнее, от окрестности множества M). Решение задачи требуется обеспечить в классе контрпозиционных стратегий $V(t,x,u)$ второго игрока или в классе контрпозиционных процедур управления второго игрока с поводырем [1,2].

В задаче о сближении на $[t_0,\vartheta]$, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание на M фазового вектора $x[t]$ системы (1.1) не позже момента ϑ. Решение задачи требуется обеспечить в классе позиционных стратегий $U(t,x)$ или в классе позиционных процедур управления с поводырем первого игрока [1,2]. В задаче об уклонении на $[t_0,\vartheta]$, стоящей перед вторым игроком, требуется обеспечить уклонение фазового вектора $x[t]$ на $[t_0,\vartheta]$ от M (точнее, от окрестности множества M). Решение задачи требуется обеспечить в классе контрпозиционных процедур управления с поводырем второго игрока [1,2].

Из сформулированных выше задач о сближении и задач об уклонении складываются дифференциальные игры сближения-уклонения в момент ϑ и на промежутке $[t_0,\vartheta]$.

В этой работе мы будем рассматривать только задачи о сближении.

2. Оператор стабильного поглощения и стабильные мосты в задаче о сближении в момент ϑ

Обозначим символом $W^{\square}$ множество позиционного поглощения в задаче о сближении в момент ϑ; $W^{\square}$ представляет собой совокупность всех исходных позиций (t_*,x_*), для каждой из которых существует позиционная стратегия $U(t,x)$ первого игрока, обеспечивающая при любых допустимых помехах $v(t)$ второго игрока выполнение включения $x[\vartheta]\in M$.

Важную роль в выделении множества $W^{\square} \subset D$ играет свойство стабильности [2], которым обладает $W^{\square}$. Стабильность множества $W^{\square}$ означает слабую инвариантность $W^{\square}$ относительно некоторого семейства дифференциальных включений, связанных с (1.1) и рассматриваемых на $[t_0, \vartheta]$.

Введем в рассмотрение функцию (гамильтониан) системы (1.1):

$$H(t,x,l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, f(t,x,u,v) \rangle,$$
$$(t,x,l) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,$$

где $\langle l, f \rangle$ — скалярное произведение векторов l и f из $\mathbb{R}^m$.

Пусть $[t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^m \mapsto G(t,x) \subset \mathbb{R}^m$ — непрерывное в хаусдорфовой метрике многозначное отображение; $G(t,x)$ — выпуклые компакты в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющие включению

$$F(t,x) \subset G(t,x), \quad (t,x) \in [t_0,\vartheta] \times D^*$$

и условию

$$\sup_{f \in G(t,x)} \|f\| \leqslant \mu(1 + \|x\|),$$

где $F(t,x) = \operatorname{co}\{f(t,x,u,v) : u \in P, v \in Q\}$; $\operatorname{co} A$ — выпуклая оболочка множества $A \subset \mathbb{R}^m$.

Пусть также заданы некоторое множество $\Psi = \{\psi\}$ и семейство $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ отображений

$$F_\psi : (t,x) \mapsto F_\psi(t,x) \subset \mathbb{R}^m, \quad (t,x,\psi) \in [t_0,\vartheta] \times D^* \times \Psi,$$

удовлетворяющие условиям

Условие А.1. Для любых $(t,x,\psi) \in [t_0,\vartheta] \times D^* \times \Psi$ множество $F_\psi(t,x)$ выпукло, замкнуто в $\mathbb{R}^m$ и $F_\psi(t,x) \subset G(t,x)$.

Условие А.2. Для любых $(t,x,l) \in [t_0,\vartheta] \times D^* \times S$ выполняется

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t,x)}(l) = H(t,x,l).$$

Условие А.3. Существует такая скалярная функция $\omega^*(\delta)$, ($\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$d\left(F_\psi(t_*,x_*), F_\psi(t^*,x^*)\right) \leqslant \omega^*\left(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|\right)$$

для (t_*,x_*) и (t^*,x^*) из $[t_0,\vartheta] \times D^*$, $\psi \in \Psi$.

Здесь $h_F(l) = \sup\limits_{f \in F} \langle l, f \rangle$ — опорная функция множества $F \subset \mathbb{R}^m$;

$$d\left(F^{(1)}, F^{(2)}\right) = \max\left\{ \sup_{f^{(1)} \in F^{(1)}} \inf_{f^{(2)} \in F^{(2)}} \left\|f^{(1)} - f^{(2)}\right\|, \sup_{f^{(2)} \in F^{(2)}} \inf_{f^{(1)} \in F^{(1)}} \left\|f^{(1)} - f^{(2)}\right\| \right\}$$

является хаусдорфовым расстоянием между $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ из $\mathbb{R}^m$.

Приведем определение оператора стабильного поглощения в задаче о сближении с M в момент ϑ.

Пусть $t_0 \leqslant t_* \leqslant t^* \leqslant \vartheta$. Введем обозначения: $X_\psi(t^*; t_*, x_*)$ — множество достижимости, отвечающее моменту t^* и с начальным значением $x[t_*] = x_*$, т. е. множество всех $x^* \in \mathbb{R}^m$, в которые приходят в момент t^* всевозможные решения $x[\cdot] = (x[t] : t_* \leqslant t \leqslant t^*)$ дифференциального включения

$$\begin{gathered} \dot{x} \in F_\psi(t,x), \quad x[t_*] = x_*, \quad \psi \in \Psi; \\ X_\psi^{-1}(t_*; t^*, H^*) = \left\{x^* \in \mathbb{R}^m : H^* \cap X_\psi(t^*; t_*, x_*) \neq \varnothing\right\}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

здесь $H^* \subset \mathbb{R}^m$.

О п р е д е л е н и е 2.1 [21]. Оператором стабильного поглощения π в задаче о сближении с M в момент ϑ назовем отображение $\pi : \Xi \times 2^{\mathbb{R}^m} \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением

$$\pi(t_*; t^*, H^*) = \bigcap_{\psi \in \Psi} X_\psi^{-1}(t_*; t^*, H^*);$$

здесь $\Xi = \{(t_*, t^*) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta] : t_* \leqslant t^*\}$.

О п р е д е л е н и е 2.2 [21]. Замкнутое множество $W \subset D$ назовем *u-стабильным мостом в задаче о сближении с M в момент ϑ*, если

$$\begin{aligned} W(\vartheta) &\subset M, \\ W(t_*) &\subset \pi\left(t_*; t^*, W(t^*)\right), \quad (t_*, t^*) \in \Xi. \end{aligned}$$

Здесь $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in W\}, \quad t \in [t_0, \vartheta]$.

Наряду с дифференциальными включениями (2.1), участвующими в определении u-стабильного моста W и отвечающими “прямому” времени t, будем рассматривать дифференциальные включения

$$\dot{z}(\tau) \in \Phi_\psi(\tau, z(\tau)), \quad z[\tau^*] = z^*, \quad \psi \in \Psi, \tag{2.2}$$

отвечающие “обратному” времени $\tau \in [t_0, \vartheta]$, где

$$\Phi_\psi(\tau, z) = -F_\psi(t, z), \quad \tau = t_0 + \vartheta - t, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Полагаем при этом $\tau^* = t_0 + \vartheta - t^*$, $\tau_* = t_0 + \vartheta - t_*$.

Соответственно “обратному” времени введем в рассмотрение $Z_\psi(\tau_*; \tau^*, z^*)$ — множество достижимости дифференциального включения (2.2), отвечающее моменту τ_* и с начальным значением $z[\tau^*] = z^*$. Полагаем также

$$Z_\psi(\tau_*; \tau^*, H^*) = \bigcup_{z^* \in H^*} Z_\psi(\tau_*; \tau^*, z^*), \quad H^* \subset \mathbb{R}^m.$$

Справедливо равенство

$$\pi(t_*; t^*, H^*) = \bigcap_{\psi \in \Psi} X_\psi^{-1}(t_*; t^*, H^*) = \bigcap_{\psi \in \Psi} Z_\psi(\tau_*; \tau^*, H^*). \tag{2.3}$$

Учитывая введенное здесь “обратное” время τ, множество $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, рассматриваемое ранее в пространстве позиций (t, x), будем обозначать в терминах “обратного” времени τ символом $\mathcal{W} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ и трактовать как множество в пространстве позиций (τ, z). При этом временны́е сечения множеств W и $\mathcal{W}$ в пространствах позиций (t, x) и (τ, z) связаны равенством

$$W(t) = \mathcal{W}(\tau), \quad t + \tau = t_0 + \vartheta,$$

так что $W(t_0) = \mathcal{W}(\vartheta)$ и $W(\vartheta) = \mathcal{W}(t_0)$.

Принимая во внимание (2.3), запишем определение u-стабильного моста в задаче о сближении с M в момент ϑ в терминах множеств достижимости $Z_\psi(\tau_*; \tau^*, H^*)$, $H^* \subset \mathbb{R}^m$, отвечающих “обратному” времени τ.

О п р е д е л е н и е 2.3 [19]. Оператором стабильного поглощения π в задаче о сближении M в момент ϑ назовем отображение $\pi : \Xi \times 2^{\mathbb{R}^m} \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением

$$\pi(\tau_*; \tau^*, H^*) = \bigcap_{\psi \in \Psi} Z_\psi(\tau_*; \tau^*, H^*);$$

здесь $(\tau^*, \tau_*) \in \Xi$, $H^* \subset \mathbb{R}^m$.

З а м е ч а н и е. Для избежания лишних обозначений мы сохранили в новом определении то же самое обозначение π для оператора стабильного поглощения.

О п р е д е л е н и е 2.4. Замкнутое множество $\mathcal{W} \subset D$ назовем u-стабильным мостом в задаче о сближении с M в момент ϑ, если

$$\mathcal{W}(t_0) \subset M;$$

$$\mathcal{W}(\tau_*) \subset \pi\left(\tau_*; \tau^*, \mathcal{W}(\tau^*)\right), \quad (\tau^*, \tau_*) \in \Xi,$$

Здесь $\mathcal{W}(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^m : (\tau, z) \in \mathcal{W}\}$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$.

Из определения 2.4 следует, что максимальный u-стабильный мост $\mathcal{W}^{\square} \subset D$ в задаче о сближении с M в момент ϑ есть максимальное замкнутое множество из D, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}^{\square}(t_0) = M, \\ &\mathcal{W}^{\square}(\tau_*) \subset \pi(\tau_*; \tau^*, \mathcal{W}^{\square}(\tau^*)), \quad (\tau^*, \tau_*) \in \Xi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В соотношениях (2.4), характеризующих u-стабильный мост $\mathcal{W}^{\square}$, участвуют наряду с начальным моментом t_0 пары моментов $(\tau^*, \tau_*) \in \Xi$.

Представляется важным перейти от этих соотношений к характеризации моста $\mathcal{W}^{\square}$ при помощи инфинитезимальных соотношений, в которых пары $(\tau^*, \tau_*) \in \Xi$ подменены моментами $\tau^* \in [t_0, \vartheta)$, т. е. как бы слиты в один момент τ^*, а пары сечений $\big(\mathcal{W}^{\square}(\tau^*), \mathcal{W}^{\square}(\tau_*)\big)$ подменены точками (τ^*, z^*), содержащимися в $\mathcal{W}$.

В связи с этим приведем известное определение конингентного конуса (конуса Булигана) и производного множества.

Итак, пусть Ω — непустое множество в $\mathbb{R}^N$ и $x \in \Omega$.

О п р е д е л е н и е 2.5 [25, с. 396]. Множество

$$T_\Omega(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\alpha>0} \bigcup_{h\in(0,\alpha]} \left(\frac{1}{h}(\Omega - x) + \varepsilon B^N\right)$$

называется контингентным конусом к Ω в точке x. Здесь $B^N = \left\{b \in \mathbb{R}^N : \|b\| \leqslant 1\right\}$, $\|b\|$ — евклидова норма вектора $b \in \mathbb{R}^N$.

Пусть $\mathcal{W}$ — непустое множество в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, $w^* = (\tau^*, z^*) \in \mathcal{W}$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$.

О п р е д е л е н и е 2.6 [20]. Множество

$$\overrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W}(w^*) = \left\{d \in \mathbb{R}^m : (1, d) \in T_{\mathcal{W}}(w^*)\right\}.$$

будем называть производным множеством отображения $\tau \mapsto \mathcal{W}(\tau)$, $\tau \in [\tau^*, \vartheta]$ в точке $w^* \in \mathcal{W}$.

Можно дать другое, эквивалентное, определение производного множества $\overrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W}(w^*)$ [20]:

$$\overrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W}(w^*) = \Bigg\{d \in \mathbb{R}^m : \text{ существет последовательность } \{(\tau_k, w_k)\}_{k=1}^{\infty} \text{ такая, что}$$

$$(\tau_k, w_k) \in \mathcal{W}, \tau_k \downarrow \tau^* \text{ при } k \to \infty, \quad d = \lim_{k\to\infty} \frac{w_k - z^*}{\tau_k - \tau^*}\Bigg\}.$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение, относящееся к u-стабильным мостам W.

Теорема 1. *Если замкнутое множество $\mathcal{W} \subset D$ является u-стабильным мостом в задаче о сближении с M в момент ϑ, то необходимо, чтобы*

$$\overrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W}(\tau^*, z^*) \subset \bigcap_{\psi\in\Psi} \left(T_{\mathcal{W}(\tau^*)}(z^*) + \Phi_\psi(\tau^*, z^*)\right), \tag{2.5}$$

$$\tau^* \in [t_0, \vartheta), \quad (\tau^*, z^*) \in \mathcal{W}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для момента $\tau^* \in [t_0, \vartheta)$ и произвольного $\psi \in \Psi$ полагаем

$$H_\psi^{\tau^*} = \{(\tau, z) : z \in Z_\psi(\tau; \tau^*, \mathcal{W}(\tau^*)\}.$$

Множество $H_\psi^{\tau^*}$ — интегральная воронка дифференциального включения $dz/d\tau \in \Phi_\psi(\tau, z)$, $\tau^* \in [t_0, \vartheta]$ с начальным множеством $H_\psi^{\tau^*}(\tau^*) = \mathcal{W}(\tau^*)$.

Пусть наряду с $\tau^* \in [t_0, \vartheta)$ и $\psi \in \Psi$ выбрана произвольная точка $z^* \in H_\psi^{\tau^*}(\tau^*)$.

Дифференциальное включение (2.5), которое здесь приводим, основано на равенстве

$$\overrightarrow{\mathcal{D}} H_\psi^{\tau^*}(w^*) = T_{H_\psi^{\tau^*}(\tau^*)}(z^*) + \Phi_\psi(w^*). \tag{2.6}$$

Докажем это равенство. Сначала покажем включение

$$T_{H_\psi^{\tau^*}(\tau^*)}(z^*) + \Phi_\psi(w^*) \subset \overrightarrow{\mathcal{D}} H_\psi^{\tau^*}(w^*). \tag{2.7}$$

Для доказательства выберем произвольные $h \in T_{H_\psi^{\tau^*}(\tau^*)}(z^*)$, $f^* \in \Phi_\psi(w^*)$.

Так как $h \in T_{H_\psi^{\tau^*}(\tau^*)}(z^*)$, то найдутся последовательности $\{\Delta_k\}(\Delta_k > 0, k = 1, 2, \ldots,\ \Delta_k \downarrow 0$ при $k \to \infty)$ и $\{z^k\}(z^k \in H_\psi^{\tau^*}(\tau^*), k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющие равенству

$$z^k = z^* + \Delta_k h + o(\Delta_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{o(\Delta_k)}{\Delta_k} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим произвольную точку z^k $(z^k \in \{z^k\})$ и множество $\Phi_\psi(\tau^*, z^k)$, отвечающее этой точке. Выберем вектор f_ψ^k — ближайший к f^* в множестве $\Phi_\psi(\tau^*, z^k)$.

Справедлива следующая оценка разности между f_ψ^k и f^*:

$$\begin{aligned} \|f_\psi^k - f^*\| = \rho\big(f^*, \Phi_\psi(\tau^*, z^k)\big) \leqslant h\big(\Phi_\psi(\tau^*, z^*), \Phi_\psi(\tau^*, z^k)\big) \leqslant d\big(\Phi_\psi(\tau^*, z^*), \Phi_\psi(\tau^*, z^k)\big) \\ \leqslant \omega^*(\|z^k - z^*\|) = \omega^*(\|\Delta_k h + o(\Delta_k)\|), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{2.9}$$

здесь функция $\omega^*(\delta), \delta > 0$ определена на с. 221; $\rho(f^*, \Phi) = \min\limits_{f\in\Phi} \|f^* - f\|$.

Введем последовательность $\tau^k = \tau^* + \Delta_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ для которой выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} \tau^k = \tau^*$.

Рассмотрим в множестве $\widetilde{Z}_\psi(\tau^k; \tau^*, z^k) = z^k + \Delta_k \Phi_\psi(\tau^*, z^k)$ точку $z^k + \Delta_k f_\psi^k$, отвечающую вектору f_ψ^k. Пусть $z^k(\tau^k)$ — ближайшая точка в $Z_\psi(\tau^k; \tau^*, z^k)$ к точке $z^k + \Delta_k f_\psi^k$.

Справедлива оценка

$$\|z^k(\tau^k) - (z^k + \Delta_k f_\psi^k)\| \leqslant d\big(Z_\psi(\tau^k; \tau^*, z^k), \widetilde{Z}_\psi(\tau^k; \tau^*, z^k)\big).$$

В силу условия A.3 выполняется неравенство

$$d\big(Z_\psi(\tau^k; \tau^*, z^k), \widetilde{Z}_\psi(\tau^k; \tau^*, z^k)\big) \leqslant \Delta_k \omega^*\big((1 + K)\Delta_k\big).$$

Из последних двух неравенств следует

$$\|z^k(\tau^k) - (z^k + \Delta_k f_\psi^k)\| \leqslant \Delta_k \omega^*\big((1 + K)\Delta_k\big), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.10}$$

Учитывая (2.8)–(2.10), оценим расстояние между векторами $\dfrac{z^k(\tau^k) - z^*}{\Delta_k}$ и $h + f^*$. Имеем

$$\Big\| \frac{z^k(\tau^k) - z^*}{\Delta_k} - (h + f^*) \Big\| = \Delta_k^{-1} \|z^k(\tau^k) - z^* - \Delta_k h - \Delta_k f^*\|$$

$$= \Delta_k^{-1}\|(z^k(\tau^k) - z^k - \Delta_k f_\psi^k) + (z^k - z^* - \Delta_k h) + \Delta_k(f_\psi^k - f^*)\|$$

$$\leqslant \Delta_k^{-1}\big(\|z^k(\tau^k) - z^k - \Delta_k f_\psi^k\| + \|z^k - z^* - \Delta_k h\| + \Delta_k\|f_\psi^k - f^*\|$$

$$\leqslant \omega^*\big((1+K)\Delta_k\big) + \Big\|\frac{o(\Delta_k)}{\Delta_k}\Big\| + \omega^*(\|\Delta_k h + o(\Delta_k)\|), \quad k = 1,2,\dots .$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \omega^*\big((1+K)\Delta_k\big) = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\Big\|\dfrac{o(\Delta_k)}{\Delta_k}\Big\| = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \omega^*(\|\Delta_k h + o(\Delta_k)\|) = 0$, то величина

$$æ(\Delta_k) = \omega^*\big((1+K)\Delta_k\big) + \Big\|\frac{o(\Delta_k)}{\Delta_k}\Big\| + \omega^*(\|\Delta_k h + o(\Delta_k)\|)$$

удовлетворяет предельному соотношению $\lim\limits_{k\to\infty} æ(\Delta_k) = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\Big\|\dfrac{z^k(\tau^k) - z^*}{\Delta_k} - (h + f^*)\Big\| = 0$ и, значит,

$$h + f^* = \lim_{k\to\infty}\frac{z^k(\tau^k) - z^*}{\Delta_k}, \quad \big(\tau^k, z^k(\tau^k)\big) \in H_\psi^{\tau^*}, \quad k = 1,2,\dots .$$

Тем самым доказано включение $h + f^* \in \overrightarrow{\mathcal{D}} H_\psi^{\tau^*}(w^*)$ и, вместе с тем, включение (2.7).

Докажем теперь включение

$$\overrightarrow{\mathcal{D}} H_\psi^{\tau^*}(w^*) \subset T_{H_\psi^{\tau^*}(\tau^*)}(z^*) + \Phi_\psi(w^*). \tag{2.11}$$

Выберем произвольный вектор $f^* \in \overrightarrow{\mathcal{D}} H_\psi^{\tau^*}(w^*)$. Согласно определению f^*, существуют последовательности $\{\tau^k :\ \tau^k \in [t_0, \vartheta],\ k = 1,2,\dots, \lim\limits_{k\to\infty}\tau^k = \tau^*\}$, $\{w^k : w^k \in H_\psi^{\tau^*}(\tau^k),\ k = 1,2,\dots\}$, удовлетворяющую равенству

$$f^* = \lim_{k\to\infty}\frac{w^k - z^*}{\tau^k - \tau^*}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует равенство

$$\Delta_k f^* = w^k - z^* + h(\Delta_k), \tag{2.13}$$

где $\Delta_k = \tau^k - \tau^* > 0$, $k = 1,2,\dots,$ $\lim\limits_{k\to\infty}\Delta_k^{-1}h(\Delta_k) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$.

Следовательно, выполняются соотношения

$$z^* + \Delta_k f^* = w^k + h(\Delta_k), \tag{2.14}$$

где $w^k \in H_\psi^{\tau^*}(\tau^k)$, $k = 1,2,\dots$.

Так как $w^k \in H_\psi^{\tau^*}(\tau^k)$, $k = 1,2,\dots,$ то для выбранного $\psi \in \Psi$ найдется точка $z^k \in H_\psi^{\tau^*}(\tau^k)$, такая что $w^k \in Z_\psi(\tau^k; \tau^*, z^k)$, $k = 1,2,\dots$.

Учитывая условие A.3, имеем

$$d\big(Z_\psi(\tau^k;\tau^*,z^k), \widetilde{Z}_\psi(\tau^k;\tau^*,z^k)\big) \leqslant \Delta_k\omega^*\big((1+K)\Delta_k\big) = \omega(\Delta_k), \quad k = 1,2,\dots . \tag{2.15}$$

Следовательно, для точки w^k найдется вектор $f_\psi^k \in \Phi_\psi(\tau^*, z^k)$, $k = 1,2,\dots,$ удовлетворяющий равенству

$$w^k = z^k + \Delta_k f_\psi^k + \omega(\Delta_k)b_k, \quad b_k \in B_1(\mathbf{0}).$$

Из этого равенства вытекает

$$z^k = w^k - \Delta_k f_\psi^k - \omega(\Delta_k)b_k, \quad k = 1,2,\dots, .$$

Векторы f_ψ^k, $k=1,2,\dots$, стеснены неравенствами $\|f_\psi^k\|\leqslant K$, $k=1,2,\dots$, и, значит, последовательность $\{f_\psi^k\}$ ограничена. Последовательность $\{b_k\}$ также ограничена. Значит, из $\{f_\psi^k\}$ и $\{b_k\}$ можно выделить сходящиеся подпоследовательности. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что сами последовательности $\{f_\psi^k\}$ и $\{b_k\}$ сходятся. Полагаем $f_\psi^*=\lim\limits_{k\to\infty} f_\psi^k$, $b^*=\lim\limits_{k\to\infty} b_k$. Учитывая соотношения $w^*=(\tau^*,z^*)=\lim\limits_{k\to\infty}(\tau^*,z^k)$, $f_\psi^*=\lim\limits_{k\to\infty} f_\psi^k$, $f_\psi^k\in\Phi_\psi(\tau^*,z^k)$ при $k=1,2,\dots$, а также полунепрерывность сверху отображения $(\tau,z)\mapsto\Phi_\psi(\tau,z)$, $(\tau,z)\in D$ (см. условие A.3), получаем $f_\psi^*\in\Phi_\psi(\tau^*,z^*)$.

Тогда, как нетрудно видеть, сходится не только последовательность $\{z^k\}$, но и последовательность $\Bigl\{\dfrac{z^k-z^*}{\Delta_k}\Bigr\}$. При этом справедливы равенства

$$\lim_{k\to\infty}\frac{z^k-z^*}{\Delta_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{w^k-z^*}{\Delta_k}-\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta_k f_\psi^*}{\Delta_k}-\lim_{k\to\infty}\frac{\omega(\Delta_k)b_k}{\Delta_k}=f^*-f_\psi^*=h\in\mathbb{R}^m.$$

Равенство $h=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{z^k-z^*}{\Delta_k}$, $z^k\in H_\psi^{\tau^*}(\tau^*)$, $k=1,2,\dots$, означает, что $h\in T_{H_\psi^{\tau^*}(\tau^*)}(z^*)$. Таким образом, справедливо представление $f^*=h+f_\psi^*$, где $h\in T_{H_\psi^{\tau^*}(\tau^*)}(z^*)$, $f_\psi^*\in\Phi_\psi(w^*)$.

Вместе с тем доказано включение (2.11). Включения (2.7),(2.11) доставляют равенство (2.6).

Обозначим $\mathcal{W}^{\tau^*}=\bigl([\tau^*,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\bigr)\cap\mathcal{W}$ — сужение множества $\mathcal{W}$ на множество $[\tau^*,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$.

Тогда для $\mathcal{W}$ — u-стабильного моста в задаче о сближении с M в момент ϑ имеем

$$\mathcal{W}^{\tau^*}\subset\bigcap_{\psi\in\Psi}H_\psi^{\tau^*},\ \mathcal{W}^{\tau^*}(\tau^*)=H_\psi^{\tau^*}(\tau^*),\quad \psi\in\Psi. \tag{2.16}$$

Отсюда для любых $\tau^*\in[t_0,\vartheta)$, $w^*=(\tau^*,z^*)\in\mathcal{W}$

$$\overrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W}^{\tau^*}(w^*)\subset\overrightarrow{\mathcal{D}}\Biggl(\bigcap_{\psi\in\Psi}H_\psi^{\tau^*}\Biggr)(w^*)\subset\bigcap_{\psi\in\Psi}\overrightarrow{\mathcal{D}}H_\psi^{\tau^*}(w^*), \tag{2.17}$$

т. е.

$$\overrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W}(w^*)\subset\bigcap_{\psi\in\Psi}\bigl(T_{\mathcal{W}(\tau^*)}(z^*)+\Phi_\psi(w^*)\bigr),\quad w^*\in\mathcal{W},\quad \tau^*\in[t_0,\vartheta). \tag{2.18}$$

Теорема 1 доказана. □

Подобно производному множеству $\overrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W}(\tau^*,z^*)$, отвечающему направлению возрастания "обратного" времени, можно ввести производное множество $\overleftarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W}(\tau^*,z^*)$, отвечающее направлению убывания времени τ.

Производные множества $\overrightarrow{D}W(t^*,x^*)$ и $\overleftarrow{D}W(t^*,x^*)$ для u-стабильного моста W, записанного в переменных t,x, рассматривались ранее в работах [18–20].

Для одного и того же u-стабильного моста справедливы равенства для точек $(t^*,x^*)\in W$ $\bigl((\tau^*,z^*)=(t_0+\vartheta-t^*,x^*)\in W\bigr)$:

$$\overleftarrow{D}W(t^*,x^*)=\overrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W}(\tau^*,z^*),\quad \overrightarrow{D}W(t^*,x^*)=\overleftarrow{\mathcal{D}}\mathcal{W}(\tau^*,z^*).$$

Тогда, учитывая первое равенство, запишем теорему 1 в такой форме, в какой она была сформулирована в работах [18, 19].

Теорема 2. *Если замкнутое множество $W\subset D$ является u-стабильным мостом в задаче о сближении с M в момент ϑ, то необходимо, чтобы*

$$\begin{gathered}\overleftarrow{D}W(t^*,x^*)\subset\bigcap_{\psi\in\Psi}\bigl(T_{W(t^*)}(x^*)-F_\psi(t^*,x^*)\bigr),\\ (t^*,x^*)\in W,\quad t\in(t_0,\vartheta].\end{gathered} \tag{2.19}$$

3. Оператор стабильного поглощения и стабильные мосты в задаче о сближении к моменту ϑ

Эта задача была сформулирована в разд. 1 как задача о сближении с M не позже момента ϑ. Так же как и в задаче о сближении с M в момент ϑ, в этой задаче существует максимальный u-стабильный мост, который обозначим символом W^O. Максимальный u-стабильный мост $W^O \subset D$ является множеством позиционного поглощения в задаче о сближении с M к моменту ϑ, т. е. состоит из всех тех позиций $(t_*, x_*) \in D$, из которых эта задача разрешима.

Приведем определение оператора стабильного поглощения в задаче о сближении с M к моменту ϑ (см. [22, 23]).

Полагаем, что M — то же самое, что и в задаче о сближении в момент ϑ. Пусть $(t_*, t^*) \in \Xi$, $H \subset \mathbb{R}^m$.

Введем обозначение

$$M_t(H) = \begin{cases} M, & t \in [t_*, t^*), \\ M \cup H, & t = t^*. \end{cases}$$

Определение 3.1. Оператором стабильного поглощения χ в задаче о сближении с M к моменту ϑ назовем отображение $\chi : \Xi \times 2^{\mathbb{R}^m} \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением

$$\chi(t_*; t^*, H) = \bigcap_{\psi \in \Psi} \bigcup_{t \in [t_*, t^*]} X_\psi^{-1}\left(t_*; t, M_t(H)\right).$$

Определение 3.2. Замкнутое множество $W \subset D$ назовем u-стабильным мостом в задаче о сближении с M к моменту ϑ, если

$$\begin{aligned} W(\vartheta) &\subset M; \\ W(t_*) &\subset \chi\left(t_*; t^*, W(t^*)\right), \quad (t_*, t^*) \in \Xi. \end{aligned}$$

Можно показать, что оператор χ определен корректно, а именно, что семейства $\left\{F_\psi : D \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}\right\}$, отвечающие различным множествам Ψ и удовлетворяющие условиям A.1–A.3, эквивалентны в том смысле, что соответствующие операторы χ выделяют одни и те же u-стабильные мосты W в D.

Точно так же, как в задаче о сближении с M в момент ϑ, можно записать определения оператора стабильного поглощения и u-стабильного моста в терминах “обратного” времени τ.

Определение 3.3. Оператором стабильного поглощения χ в задаче о сближении с M к моменту ϑ назовем отображение $\chi : \Xi \times 2^{\mathbb{R}^m} \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное соотношением

$$\chi(\tau_*; \tau^*, H) = \bigcap_{\psi \in \Psi} \bigcup_{\tau \in [\tau^*, \tau_*]} Z_\psi\left(\tau_*; \tau, M_\tau(H)\right);$$

здесь $(\tau^*, \tau_*) \in \Xi$, $H \subset \mathbb{R}^m$.

Определение 3.4. Замкнутое множество $\mathcal{W} \subset D$ назовем u-стабильным мостом в задаче о сближении с M к моменту ϑ, если

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}(t_0) \subset M; \\ &\mathcal{W}(\tau_*) \subset \chi\big(\tau_*; \tau^*, \mathcal{W}(\tau^*)\big), \quad (\tau^*, \tau_*) \in \Xi. \end{aligned}$$

Однако ниже, в разд. 4, мы вернемся к конструкциям стабильных мостов, записанным в терминах “прямого” времени t. Именно последнюю форму теоремы 1 мы используем ниже при изучении условий, при которых максимальные u-стабильные мосты $W^\square$ и W^O совпадают.

4. Критерии совпадения максимальных u-стабильных мостов для стационарных управляемых систем

В этом разделе предполагаем, что конфликтно-управляемая система (1.1) стационарна, т. е. правая часть системы (1.1) имеет вид $f(x,u,v)$ при $(t,x,u,v) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$.

Очевидно, что в общем случае конфликтно-управляемой системы (1.1) справедливо включение $W^{\square} \subset W^{O}$, но, вообще говоря, не равенство $W^{\square} = W^{O}$. То же самое утверждение имеет место и для стационарных систем

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,v), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in P, \quad v \in Q. \tag{4.1}$$

Особый интерес представляет выявление условий, при которых имеет место равенство $W^{\square} = W^{O}$.

Для этого введем в рассмотрение множество $W^M = [t_0,\vartheta] \times M \subset D$.

Теорема 3. *Для того чтобы в двух задачах о сближении с M, сформулированных для системы* (4.1)*, выполнялось равенство $W^{\square} = W^{O}$, необходимо и достаточно, чтобы замкнутое множество $W^M \subset D$ было u-стабильным мостом в задаче о сближении системы* (4.1) *с M в момент ϑ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W^{\square} = W^{O}$.

Тогда множество W^M, удовлетворяющее включению $W^M \subset W^O$, удовлетворяет и включению $W^M \subset W^{\square}$.

Кроме того, согласно теореме 1, для всех $(t^*,x^*) \in W^{\square}$, $t^* \in (t_0,\vartheta]$ верно

$$\overleftarrow{D} W^{\square}(t^*,x^*) \subset \bigcap_{\psi \in \Psi} \big(T_{W^{\square}(t^*)}(x^*) - F_\psi(x^*)\big),$$

где введено обозначение $F_\psi(x^*) = F_\psi(t^*,x^*)$ для стационарной управляемой системы (4.1).

В частности, имеет место

$$\overleftarrow{D} W^{\square}(\vartheta,x^*) \subset \bigcap_{\psi \in \Psi} \big(T_{W^{\square}(\vartheta)}(x^*) - F_\psi(x^*)\big), \quad (\vartheta,x^*) \in W^{\square},$$

т. е.

$$\overleftarrow{D} W^{\square}(\vartheta,x^*) \subset \bigcap_{\psi \in \Psi} \left(T_M(x^*) - F_\psi(x^*)\right), \quad (\vartheta,x^*) \in W^{\square}, \tag{4.2}$$

так как $W^{\square}(\vartheta) = M$.

Учитывая соотношения $W^{\square}(\vartheta) = W^{O}(\vartheta) = M$ и $W^M \subset W^{\square}$, получаем для всех $(\vartheta,x^*) \in W^{\square}$ (тогда $x^* \in W^{\square}(\vartheta) = M$) включение

$$\overleftarrow{D} W^M(\vartheta,x^*) \subset \overleftarrow{D} W^{\square}(\vartheta,x^*). \tag{4.3}$$

Поскольку $W^M = [t_0,\vartheta] \times M$ — цилиндр в $\mathbb{R}^{m+1}$ с основанием M в $\mathbb{R}^m$, то для любой точки $(\vartheta,x^*) \in W^M$ верно $h = (-1,\mathbf{0}) \in T_{W^M}(\vartheta,x^*)$, где $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$.

Действительно, все точки (t_*,x^*), $t_* \in [t_0,\vartheta]$, удовлетворяют включению $(t_*,x^*) \in W^M$, из чего и следует $h \in T_{W^M}(\vartheta,x^*)$.

Из включения $h \in T_{W^M}(\vartheta,x^*)$, $x^* \in W^{\square}(\vartheta)$ следует

$$\mathbf{0} \in \overleftarrow{D} W^M(\vartheta,x^*), \quad x^* \in W^{\square}(\vartheta) = M. \tag{4.4}$$

Учитывая включения (4.2)–(4.4), получаем

$$\mathbf{0} \in \bigcap_{\psi \in \Psi} \left(T_M(x^*) - F_\psi(x^*)\right), \quad x^* \in M. \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует

$$\mathbf{0} \in T_M(x^*) - F_\psi(x^*), \quad x^* \in M, \quad \psi \in \Psi. \tag{4.6}$$

Это значит, что для любых $x^* \in M$, $\psi \in \Psi$

$$T_M(x^*) \cap F_\psi(x^*) \neq \varnothing. \tag{4.7}$$

Поскольку, как уже упоминалось, W^M — цилиндр в $\mathbb{R}^{m+1}$ с основанием M в $\mathbb{R}^m$, то $T_M(x^*) = \overrightarrow{D}W^M(t^*, x^*)$ для любых $(t^*, x^*) \in W^M$, $t^* \in [t_0, \vartheta)$.

Учитывая это равенство, из (4.7) получаем для любых $(t^*, x^*) \in W^M$, $t^* \in [t_0, \vartheta)$

$$\overrightarrow{D}W^M(t^*, x^*) \cap F_\psi(x^*) \neq \varnothing, \quad \psi \in \Psi. \tag{4.8}$$

Тогда по теореме об инфинитезимальных условиях u-стабильности (см. [19, с. 273]) получаем, что W^M — u-стабильный мост в задаче о сближении с M в момент ϑ. Необходимость доказана.

Покажем, что u-стабильность множества W^M в задаче о сближении с M в момент ϑ есть и достаточное условие совпадения мостов $W^\square$ и W^O.

Как уже отмечалось, справедливо включение $W^\square \subset W^O$. Покажем, что $W^\square = W^O$. Для этого достаточно показать, что W^O является u-стабильным мостом в задаче о сближении с M в момент ϑ, если W^M — u-стабильный мост в этой задаче.

Итак, пусть W^M — u-стабильный мост в задаче о сближении с M в момент ϑ.

Пусть $(t^*, x^*) \in W^O$, $[t^*, t^{**}] \subset [t_0, \vartheta]$, $\psi \in \Psi$.

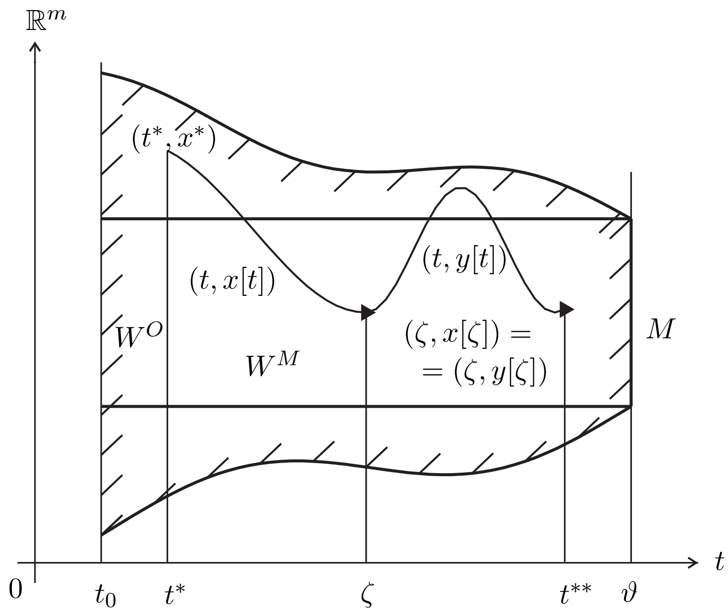


Рис. 1.

Так как $(t^*, x^*) \in W^O$ и W^O — u-стабильный мост в задаче о сближении с M к моменту ϑ, то или существует решение $x[t]$ на $[t^*, t^{**}]$ дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_\psi(x), \quad x[t^*] = x^*, \tag{4.9}$$

удовлетворяющее включению $(t^{**}, x[t^{**}]) \in W^O$, или существуют решение $x[t]$ на $[t^*, t^{**}]$ этого включения и момент $\zeta \in [t^*, t^{**}]$, такие что $(\zeta, x[\zeta]) \in W^M$.

Допустим, что реализовался второй вариант: существуют решение $x[t]$ на $[t^*, t^{**}]$ дифференциального включения (4.9) и момент $\zeta \in [t^*, t^{**}]$, такие что $(\zeta, x[\zeta]) \in W^M$ (см. рис. 1).

Так как W^M — u-стабильный мост в задаче о сближении с M в момент ϑ, то существует решение $y[t]$ на $[\zeta, t^{**}]$ дифференциального включения

$$\dot{y} \in F_\psi(y), \quad y[\zeta] = x[\zeta], \tag{4.10}$$

такое что $(t^{**}, y[t^{**}]) \in W^M \subset W^O$.

В итоге в случае, когда реализовался второй вариант, получаем, что для любых $(t^*, x^*) \in W^O$, $[t^*, t^{**}] \subset [t_0, \vartheta]$, $\psi \in \Psi$ найдется решение

$$z[t] = \begin{cases} x[t], & t \in [t^*, \zeta], \\ y[t], & t \in [\zeta, t^{**}], \end{cases}$$

дифференциального включения

$$\dot{z} \in F_\psi(z), \ z[t^*] = x^* \in W^O(t^*), \tag{4.11}$$

удовлетворяющее включению $z[t^{**}] \in W^O(t^{**})$.

Итак, из включения $(t^*, x^*) \in W^O$ и $[t^*, t^{**}] \subset [t_0, \vartheta]$ следует, что в любом случае (и в первом, и во втором вариантах) при любом $\psi \in \Psi$ существует решение $z = z[t]$, $t \in [t^*, t^{**}]$, дифференциального включения (4.11), удовлетворяющее включению $(t^{**}, z[t^{**}]) \in W^O$.

Вместе с тем показано, что W^O есть u-стабильный мост в задаче о сближении с M в момент ϑ и, значит, $W^O \subset W^\Box$.

Из включений $W^\Box \subset W^O$ и $W^O \subset W^\Box$ следует $W^\Box = W^O$.

Достаточность доказана. Теорема 3 доказана. $\Box$

Сформулируем и докажем еще один критерий совпадения u-стабильных мостов в упомянутых выше задачах о сближении.

Определение 4.1. Будем говорить, что максимальный u-стабильный мост $W^\Box$ в задаче о сближении с M в момент ϑ является монотонным, если для любых двух моментов t_*, t^*, $(t_*, t^*) \in \Xi$ верно

$$W^\Box(t_*) \supset W^\Box(t^*). \tag{4.12}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Для того чтобы в двух задачах сближении с M, сформулированных для системы (4.1), выполнялось равенство $W^\Box = W^O$, необходимо и достаточно, чтобы мост $W^\Box$ был монотонным.*

Доказательство. Пусть $W^\Box = W^O$. Тогда мост $W^\Box$ монотонен, поскольку в случае системы (4.1) монотонен мост W^O. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть мост $W^\Box$ монотонен. Из монотонности моста $W^\Box$ следует, что для всех $(t^*, x^*) \in W^\Box$, $t^* \in (t_0, \vartheta]$ имеет место

$$\mathbf{0} \in \overleftarrow{D} W^\Box(t^*, x^*). \tag{4.13}$$

Кроме того, согласно теореме 1, для всех $(t^*, x^*) \in W^\Box$, $t^* \in (t_0, \vartheta]$ верно

$$\overleftarrow{D} W^\Box(t^*, x^*) \subset \bigcap_{\psi \in \Psi} \big(T_{W^\Box(t^*)}(x^*) - F_\psi(x^*)\big). \tag{4.14}$$

Из (4.13), (4.14) следует

$$\mathbf{0} \in \bigcap_{\psi \in \Psi} \big(T_{W^\Box(t^*)}(x^*) - F_\psi(x^*)\big) \tag{4.15}$$

для всех $(t^*, x^*) \in W^\Box$, $t^* \in (t_0, \vartheta]$.

В частности, для всех $(\vartheta, x^*) \in W^{\square}$ верно

$$\mathbf{0} \in \bigcap_{\psi \in \Psi} \big(T_{W^{\square}(\vartheta)}(x^*) - F_\psi(x^*)\big), \tag{4.16}$$

т. е. для всех $x^* \in M$ верно

$$T_M(x^*) \cap F_\psi(x^*) \neq \varnothing, \quad \psi \in \Psi. \tag{4.17}$$

Соотношение (4.17) означает, что множество W^M есть u-стабильный мост в задаче о сближении с M в момент ϑ.

Тогда, согласно теореме 3, выполняется равенство $W^{\square} = W^O$. Достаточность доказана.

Теорема 4 доказана. $\square$

Приведем еще два критерия совпадения максимальных u-стабильных мостов в упомянутых выше задачах о сближении. Заметим, что первый критерий (теорема 5) носит топологический характер. Он связывает ситуацию совпадения максимальных u-стабильных мостов $W^{\square}$ и W^O с взаимным расположением цилиндрического множества W^M и моста $W^{\square}$. Второй критерий (теорема 6) выражен в терминах инфинитезимальных конструкций "обратного" времени и имеет прозрачный геометрический смысл. Он указывает, какими свойствами должны обладать контингентные конусы $T_M(x^*), x^* \in \partial M$ и вектограммы $\Phi_\psi(x^*)$ дифференциальных включений $dx/d\tau \in \Phi_\psi(x^*),\ \psi \in \Psi$.

Теорема 5 является утверждением, аналогичным лемме 5.3.1, доказанной ранее в монографии [11, с. 229].

Теорема 5. *Для того, чтобы в двух задачах о сближении, сформулированных для системы* (4.1), *выполнялось равенство* $W^{\square} = W^O$, *необходимо и достаточно, чтобы* $W^M \subset W^{\square}$.

Доказательство. Пусть $W^M \subset W^{\square}$.

Покажем, что $W^O \subset W^{\square}$. Для этого выберем произвольные $(t^*, x^*) \in W^O$, $[t^*, t^{**}] \subset [t_0, \vartheta]$, $\psi \in \Psi$.

Так как $(t^*, x^*) \in W^O$ — u-стабильному мосту в задаче о сближении с M к моменту ϑ, то

$$X_\psi(t^{**}; t^*, x^*) \cap W^O \neq \varnothing \tag{4.18}$$

или

$$X_\psi(t^{**}; t^*, x^*) \cap W^O = \varnothing; \tag{4.19}$$

и при этом существует момент $\xi \in [t^*, t^{**})$, такой что $X_\psi(\xi; t^*, x^*) \cap M \neq \varnothing$.

Здесь напомним, что $X_\psi(t; t^*, x^*), t \in [t^*, t^{**}]$ — множество достижимости в момент t дифференциального включения $\dot{x} \in F_\psi(x),\ x[t^*] = x^*$.

Покажем, что предположение о выполнении соотношения (4.19) приводит к противоречию. В самом деле, предположим что выполняется (4.19) и при этом существует момент $\xi \in [t^*, t^{**})$, такой что $X_\psi(\xi; t^*, x^*) \cap M \neq \varnothing$.

Определим момент $\widehat{\xi} = \sup\{\xi \in [t^*, t^{**}) : X_\psi(\xi; t^*, x^*) \cap M \neq \varnothing\}$. Из свойств отображения $t \mapsto X_\psi(t; t^*, x^*)$, $t \in [t^*, t^{**}]$ и замкнутости множества M следует соотношение $X_\psi(\widehat{\xi}; t^*, x^*) \cap M \neq \varnothing$, т. е. $\widehat{\xi} = \max\{\xi \in [t^*, t^{**}) : X_\psi(\xi; t^*, x^*) \cap M \neq \varnothing\}$.

Пусть $\widehat{x}$ — некоторая точка из $X_\psi(\widehat{\xi}; t^*, x^*) \cap M$. Поскольку $(\widehat{\xi}, \widehat{x}) \in W^M \subset W^{\square}$, то $X_\psi(t^{**}; \widehat{\xi}, \widehat{x}) \cap W^{\square}(t^{**}) \neq \varnothing$. Отсюда и из включения $W^{\square} \subset W^O$ следует

$$X_\psi(t^{**}; \widehat{\xi}, \widehat{x}) \cap W^O(t^{**}) \neq \varnothing. \tag{4.20}$$

Из (4.20) и включения $X_\psi(t^{**}; \widehat{\xi}, \widehat{x}) \subset X_\psi(t^{**}; t^*, x^*)$ следует $X_\psi(t^{**}; t^*, x^*) \cap W^O(t^{**}) \neq 0$, что противоречит предположению о выполнении (4.19). Тем самым показано, что это предположение приводит к противоречию. Значит, для любых $(t^*, x^*) \in W^O$, $[t^*, t^{**}] \subset [t_0, \vartheta], \psi \in \Psi$ выполняется (4.18), откуда следует $W^O \subset W^{\square}$. Учитывая также включение $W^{\square} \subset W^O$, получаем $W^{\square} = W^O$. Доказана достаточность включения $W^M \subset W^{\square}$.

Доказательство необходимости включения $W^M \subset W^{\square}$ очевидно. Теорема доказана. $\square$

Теорема 6. *Для того чтобы в двух задачах о сближении, сформулированных для системы* (4.1), *выполнялось равенство* $W^{\square} = W^{O}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{aligned} &T_M(x^*) \subset T_M(x^*) + \Phi_\psi(x^*),\\ &x^* \in \partial M, \quad \psi \in \Psi. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Доказательство. Пусть $W^{\square} = W^{O}$. Тогда для любых $x^* \in \partial M, \psi \in \Psi$ выполняются включения

$$\overleftarrow{D}W^{\square}(\vartheta, x^*) \subset \bigcap_{\psi\in\Psi} \big(T_{W^{\square}(\vartheta)}(x^*) + \Phi_\psi(x^*)\big),$$

$$T_M(x^*) \subset \overleftarrow{D}W^{\square}(\vartheta, x^*) = \overleftarrow{D}W^{O}(\vartheta, x^*).$$

Отсюда следует, что для любых $x^* \in \partial M, \psi \in \Psi$ выполняется

$$T_M(x^*) \subset \bigcap_{\psi\in\Psi} \big(T_{W^{\square}(\vartheta)}(x^*) + \Phi_\psi(x^*)\big)$$

и, значит, имеет место (4.21). Необходимость доказана.

Докажем достаточность соотношения (4.21). Пусть оно выполняется. Тогда, поскольку $\mathbf{0} \in T_M(x^*)$, то

$$\begin{aligned} &\mathbf{0} \in T_M(x^*) + \Phi_\psi(x^*),\\ &x^* \in \partial M, \quad \psi \in \Psi. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} &T_M(x^*) \cap F_\psi(x^*) \neq \varnothing,\\ &x^* \in \partial M, \quad \psi \in \Psi. \end{aligned} \tag{4.23}$$

и, значит, множество W^M есть u-стабильный мост в задаче о сближении с M в момент ϑ. Следовательно, согласно теореме 3, выполняется равенство $W^{\square} = W^{O}$.

5. Аналитические критерии совпадения максимальных u-стабильных мостов для стационарных управляемых систем

В разд. 4 приведена теорема 3, согласно которой необходимые и достаточные условия совпадения $W^{\square}$ и W^{O} имеют вид

$$\mathbf{B.1} \left\| \begin{aligned} &T_M(x_*) \cap F_\psi(x_*) \neq \varnothing,\\ &x_* \in \partial M, \quad \psi \in \Psi. \end{aligned} \right. \tag{5.1}$$

B.1 является в то же время необходимым и достаточным условием u-стабильности множества W^M в задаче о сближении с M в момент ϑ стационарной системы (4.1).

При этом условие

$$T_M(x_*) \cap F_\psi(x_*) \neq \varnothing, \quad \psi \in \Psi \tag{5.2}$$

есть условие локальной u-стабильности множества W^M в точке $(t_*, x_*) \in \partial W^M$, где t_* — любой момент из $[t_0, \vartheta)$.

В дальнейшем будем называть (5.2) условием локальной u-стабильности множества M в точке $x_* \in \partial M$.

Семейство $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ удовлетворяет, согласно определению, условиям A.1–A.3 из разд. 2. В разд. 2 в терминах этого семейства представлена достаточно общая схема u-стабильности. Приведем один пример семейства $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$, состоящего из бесконечного числа отображений $(t, x) \mapsto F_\psi(t, x), \psi \in \Psi$. Это — унификационное семейство $\{F_l : l \in S\}$, введенное в работах [3, 4]. Оно определено для систем вида (1.1), не обязательно стационарных.

Опишем подробнее $\{F_l : l \in S\}$.

Пусть G — замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ радиуса $r < \infty$ с центром в $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$, такой что

$$\max_{(t,x,u,v)\in D\times P\times Q} \|f\,(t,x,u,v)\| < r.$$

Введем в рассмотрение множества в $\mathbb{R}^m$

$$\Pi_l\,(t,x) = \bigl\{f \in \mathbb{R}^m : \langle l, f\rangle \;\leqslant\; H\,(t,x,l)\bigr\},$$

$$F_l\,(t,x) = G \cap \Pi_l\,(t,x)\,, \quad (t,x,l) \in D \times S.$$

Можно показать, что семейство $\{F_l : l \in S\}$ отображений $(t,x) \mapsto F_l(t,x),\ l \in S$, определенных на D, удовлетворяет условиям A.1–A.3.

В случае когда управляемая система (4.1) является стационарной, т. е. имеет вид (1.1), для множеств $\Pi_l\,(t,x)$, $F_l(t,x)$, $(t,x,l) \in D \times S$ введем обозначения $\Pi_l\,(x)$, $F_l\,(x)$.

В терминах семейства $\{F_l : l \in S\}$ необходимые и достаточные условия совпадения $W^{\square}$ и W^{O} примут вид

$$\mathbf{B.2}\;\left\|\;\begin{array}{l} T_M(x_*) \cap F_l(x_*) \neq \varnothing, \\ x_* \in \partial M, \quad l \in S. \end{array}\right. \tag{5.3}$$

Доказано [20], что условие B.2 эквивалентно условию

$$\mathbf{B.3}\;\left\|\;\begin{array}{l} K_M(x_*) \cap \Pi_l(x_*) \neq \varnothing, \\ x_* \in \partial M, \quad l \in S, \end{array}\right. \tag{5.4}$$

где $K_M(x_*) = \operatorname{co} T_M\,(x_*)$ — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^m$.

Соотношения (5.4) наиболее просты по структуре входящих в них множеств: со стороны целевого множества M в них участвует выпуклый замкнутый конус $K_M(x_*)$, и со стороны конфликтно-управляемой системы (4.1) — замкнутые полупространства $\Pi_l(x_*),\ l \in S$.

Пусть x_* — некоторая точка из ∂M.

Относительно $K_M(x_*)$ представляются две возможности:

$$1)\ K_M\,(x_*) \neq \mathbb{R}^m;$$

$$2)\ K_M\,(x_*) = \mathbb{R}^m.$$

Пусть реализовалась возможность 1) Конус $K_M(x_*)$ содержится в этом случае в некотором полупространстве $\Pi = \ \{f \in \mathbb{R}^m :\ \langle l_*, f\rangle \geqslant 0\} \quad (l_* \in \mathbb{R}^m, l_* \neq \mathbf{0})$. Введем в рассмотрение сопряженный к $K_M(x_*)$ конус $K_M^{+}(x_*) = \{l \in \mathbb{R}^m :\ \langle l, f\rangle \geqslant 0$ для любого $f \in K_M(x_*)\}$, который в рассматриваемом случае невырожден, т. е. $K_M^{+}(x_*) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Обратимся к условию B.3. Ясно, что $K_M(x_*) \cap \Pi_l(x_*) \neq \varnothing$ при $l \in \mathbb{R}^m \setminus K_M^{+}(x_*)$. Следовательно, соотношение $K_M(x_*) \cap \Pi_l(x_*) \neq \varnothing,\ l \in S$ эквивалентно соотношению

$$K_M\,(x_*) \cap \Pi_l\,(x_*) \neq \varnothing, \quad l \in L_M\,(x_*)\,, \tag{5.5}$$

где $L_M\,(x_*) = S \cap K_M^{+}(x_*) \neq \varnothing$.

Соотношение (5.5) записывается в эквивалентной форме

$$\mathbf{0} \in \Pi_l\,(x_*)\,, \quad l \in L_M\,(x_*)\,. \tag{5.6}$$

В свою очередь, соотношение (5.6) можно записать в форме

$$\min_{l\in L_M(x_*)} H\,(x_*, l) \;\geqslant 0. \tag{5.7}$$

Это есть локальное условие u-стабильности множества M в точке $x_* \in \partial M$ в случае, когда реализовалась возможность 1).

Пусть реализовалась возможность 2), т. е. точка $x_* \in \partial M$ удовлетворяет равенству $K_M(x_*) = \mathbb{R}^m$. В этом случае выполняется

$$K_M(x_*) \cap \Pi_l(x_*) \neq \varnothing, \quad l \in S, \tag{5.8}$$

т. е. выполняется локальное условие u-стабильности множества M в точке $x_* \in \partial M$.

Таким образом, выполнение (5.7) во всех точках $x_* \in \partial M\,(L_M(x_*) \neq \varnothing)$ и (5.8) во всех остальных точках $x_* \in \partial M$ означает выполнение условий u-стабильности множества W^M.

Значит, в случае стационарной системы (4.1) для совпадения $W^{\square}$ и W^O необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{B.4}\ \left\| \begin{array}{l} \min\limits_{l \in L_M(x_*)} H(x_*, l) \;\geqslant 0 \\ \text{для всех } x_* \in \partial M, \text{ таких что } L_M(x_*) \neq \varnothing. \end{array} \right. \tag{5.9}$$

З а м е ч а н и е. Для любого компактного множества $M \subset \mathbb{R}^m$ существуют точки $x_* \in \partial M$, для которых $L_M(x_*) \neq \varnothing$.

Приведем некоторые достаточные условия локальной u-стабильности множества M в точке $x_* \in \partial M$.

Справедливо следующее утверждение

Лемма 1. *Пусть $x_* \in \partial M$, $L_M(x_*) \neq \varnothing$ и $L^0_M(x_*)$ – множество всех $l^0 \in L_M(x_*)$, определяющих крайние направления конуса $K^+_M(x_*)$. Пусть также*

$$\min_{l^0 \in L^0_M(x_*)} H\left(x_*, l^0\right) \;\geqslant 0 \tag{5.10}$$

и функция $l \mapsto H(x_*, l)$ вогнута на конусе $L_M(x_*)$.

Тогда в точке x_* выполняется неравенство (5.9) .

З а м е ч а н и е. В лемме 1 утверждается, что неравенство (5.10) совместно с условием вогнутости функции $l \mapsto H(x_*, l)$ на конусе $K^+_M(x_*)$ влечет локальную u-стабильность множества M в точке x_*. Если же эти условия выполняются во всех точках $x_* \in \partial M$, в которых $L^0_M(x_*) \neq \varnothing$, то W^M есть u-стабильный мост в задаче о сближении с M в момент ϑ. Стало быть, при этих условиях $W^{\square}$ совпадает с W^O.

Далее рассмотрим ситуации, в которых может находиться точка $x_* \in \partial M$.

Ситуация I. Пусть для заданной точки $x_* \in \partial M$ существует ε-окрестность $U^m_\varepsilon(x_*) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_*\| < \varepsilon\}, \varepsilon > 0$, такая что

$$\begin{aligned} M \cap U^m_\varepsilon(x_*) &\subset \left\{x \in \mathbb{R}^m : \max_{i \in I} \varphi_i(x) \leqslant 0\right\}, \\ \partial M \cap U^m_\varepsilon(x_*) &= \left\{x \in \mathbb{R}^m : \max_{i \in I} \varphi_i(x) = 0\right\} \cap U^m_\varepsilon(x_*), \end{aligned} \tag{5.11}$$

где $\varphi_i(x)$, $i \in I$ — конечный набор непрерывно-дифференцируемых функций, заданных на $U^m_\varepsilon(x_*)$.

Обозначим $I(x_*) = \{i \in I : \varphi_i(x_*) = 0\}$.

Относительно набора $\varphi_i(x)$, $\quad i \in I(x_*)$ предполагаем, что $h_i(x_*) = -\partial\varphi_i(x_*)/\partial x \neq \mathbf{0}$, $i \in I(x_*)$ и $\mathbf{0} \notin \mathrm{co}\{h_i(x_*) : i \in I(x_*)\}$. Тогда конус $K_M(x_*) = T_M(x_*)$ невырожден, т. е. $K_M(x_*) \neq \{\mathbf{0}\}$ и, значит, $L_M(x_*) \neq \varnothing$. Справедливо равенство $K^+_M(x_*) = \mathrm{co}\{h_i(x_*) : i \in I(x_*)\}$.

Рассмотрим все те векторы $h_i(x_*) : i \in I(x_*)$, которые порождают крайние направления конуса $K^+_M(x_*)$. Пусть это — векторы $h_j(x_*) : j \in J(x_*) \subset I(x_*)$. Не нарушая общности рассуждений, считаем что $J(x_*)$ — некоторый начальный отрезок натурального ряда, т. е. $J(x_*) = \{1, 2, \ldots, j_0\}$.

Справедливо равенство $K_M(x_*) = \{f \in \mathbb{R}^m : \langle f, h_j(x_*)\rangle \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, j_0\}$.

Стремясь к соблюдению условий леммы 1 в рассматриваемом случае, предполагаем, что в точке $x_* \in \partial M$ выполняется условие

$$\mathbf{B}\ \left\Vert \begin{array}{l} 1)\ H(x_*, h_j(x_*)) \geqslant 0\ ,\ j \in J(x_*), \\ 2)\ \text{Функция } h \mapsto H(x_*, h) \text{ вогнута на } K_M^+(x_*) = \operatorname{con}\operatorname{co}\{h_j(x_*) : j \in J(x_*)\}\,. \end{array} \right.$$

Тогда, выполняются условия леммы 1, и, согласно этой лемме, в точке $x_* \in \partial M$ выполняется условие (5.9) локальной u-стабильности множества M в точке x_*.

Предположим теперь, что набор функций $\varphi_i(x)$, $i \in I(x_*)$ удовлетворяет условиям $h_i(x_*) = -\partial\varphi_i(x_*)/\partial x \neq \mathbf{0}$, $i \in I(x_*)$ и $\mathbf{0} \in \operatorname{int}\operatorname{co}\{h_i(x_*) : i \in I(x_*)\}$. Тогда конус $K_M(x_*) = T_M(x_*)$ вырожден и, значит, $K_M^+(x_*) = \mathbb{R}^m$.

Стремясь соблюсти условие леммы 1 в рассматриваемом случае, предполагаем, что в точке x_* выполняется условие

$$\mathbf{C}\ \left\Vert \begin{array}{l} 1)\ \text{Существует конечный набор } \left\{h_j \in K_M^+(x_*)\,, j \in J\right\}, \\ \quad \operatorname{co}\{h_j : j \in J\} = K_M^+(x_*)\,, \text{ такой что } H(x_*, h_j) \geqslant 0; \\ 2)\ \text{Функция } h \mapsto H(x_*, h) \text{ вогнута на } K_M^+(x_*)\,. \end{array} \right.$$

Тогда, согласно лемме 1, в точке $x_* \in \partial M$ выполняется условие (5.9) локальной u-стабильности множества M в точке x_*.

Следует отметить, что очень часто в задачах оптимального управления и теории дифференциальных игр целевое множество M описывается при помощи конечного набора непрерывно дифференцируемых функций $\varphi_i(x)$, $i \in I$, при этом граничные точки $x_* \in \partial M$ находятся в ситуации I.

Приведем простой пример, иллюстрирующий наличие точек $x_* \in \partial M$, находящихся в ситуации I.

П р и м е р 1. Пусть задана билинейная конфликтно-управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, v) = B(x)u + C(x)v, \tag{5.12}$$

где

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор системы;

$u \in P,\ v \in Q$ — управления 1 и 2 игроков;

$P = Q = \{(x_1, x_2) : -1 \leqslant x_1 \leqslant 1, x_2 = 0\}$ — ограничения на управление;

$$B(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C(x) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

целевое множество M — квадрат $\{(x_1, x_2) : \varphi_1(x) \leqslant 0, \varphi_2(x) \leqslant 0,\ \varphi_3(x) \leqslant 0, \varphi_4(x) \leqslant 0\}$, где $\varphi_1(x) = x_1 - 1$, $\varphi_2(x) = -x_1 - 1, \varphi_3(x) = x_2 - 1, \varphi_4(x) = -x_2 - 1$.

Обозначим вершины квадрата $\Upsilon_1 = (1, 1), \Upsilon_2 = (-1, 1), \Upsilon_3 = (-1, -1),\ \Upsilon_4 = (1, -1)$.

Для этой системы гамильтониан имеет вид $H(x, l) = |\langle l, x\rangle| - |\langle l, (x_2, -x_1)\rangle|$.

Нетрудно видеть, что в этом примере любая точка $x_* \in \partial M$ описывается локально при помощи набора функций $\varphi_i(x)$, $i \in I = \overline{1, 4}$. Покажем, что в любой точке $x_* \in \partial M$ выполняется условие B локальной u-стабильности множества M.

В этом случае локальное описание множества M в некоторой окрестности $U_\varepsilon^m(x_*)$ точек $x_* \in \partial M$ имеет вид 5.11, где $\varphi(x) = \max\limits_{i \in I} \varphi_i(x)$.

Рассмотрим точки $x_* \in \partial M$, не совпадающие с вершинами квадрата M, например точку $x_* = (x_{*1}, x_{*2})$, лежащую внутри стороны стороны $[\Upsilon_1, \Upsilon_2]$. Для этой точки x_* имеем $I(x_*) = \{3\}$, $h_3(x_*) = -\partial\varphi_3(x_*)/\partial x = (0, -1)$. Очевидно, что $\mathbf{0} \notin \operatorname{co}\{h_3(x_*)\}$. Нетрудно видеть, что

$$K_M(x_*) = \left\{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}^1, x_2 \leqslant 0\right\},$$

$$K_M^+(x_*) = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \leqslant 0\},$$
$$L_M(x_*) = \{(0, -1)\}.$$
$$\min_{l \in L_M(x_*)} H(x_*, l) \; = H(x_*, (0,-1)) = |\langle (x_{*1}, x_{*2}), (0,-1)\rangle| \\ - |\langle (x_{*2}, -x_{*1}), (0,-1)\rangle| = |x_{*2}| - |x_{*1}| = 1 - |x_{*1}| > 0.$$

Аналогичное неравенство выполняется и для всех других точек $x_* \in \partial M$, не являющихся вершинами квадрата M.

Рассмотрим точку $x_* \in \partial M$, совпадающую с одной из вершин квадрата M, например, с Υ_1.

Для нее имеем $I(x_*) = \{1, 3\}$, $h_1(x_*) = -\partial\varphi_1(x_*)/\partial x = (-1, 0)$, $h_3(x_*) = -\partial\varphi_3(x_*)/\partial x = (0, -1)$. Очевидно, что $\mathbf{0} \notin \operatorname{co}\{h_1(x_*), h_3(x_*)\}$. Нетрудно видеть, что

$$K_M(x_*) = \{(x_1, x_2) : x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 0\},$$

$$K_M^+(x_*) = \{(x_1, x_2) : x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 0\},$$

$$L_M(x_*) = K_M^+(x_*) \cap S,$$

где $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

Нетрудно видеть, что гамильтониан $H(\Upsilon_1, l)$ вогнут на конусе $K_M^+(\Upsilon_1)$.

Аналогично гамильтонианы $H(\Upsilon_i, l)$, $i = \overline{2,4}$ вогнуты на конусах $K_M^+(\Upsilon_i)$, $i = \overline{2,4}$.

Следовательно, в данном примере для всех $x_* \in \partial M$ выполняются условия леммы 1 и, значит, $W^{\square} = W^{O}$.

Можно было бы, не проверяя условия вогнутости гамильтониана $H(\Upsilon_i, l)$, $i = \overline{1,4}$ на конусах $K_M^+(\Upsilon_i)$, $i = \overline{1,4}$, провести оценку значения гамильтониана на этих конусах, что и осуществлено ниже, например, для точки $x_* = \Upsilon_1$.

Функция

$$\min_{l \in L_M(x_*)} H(x_*, l) \; = H((1,1), l) = |\langle (1,1), (l_1, l_2)\rangle| - |\langle (1,-1), (l_1, l_2)\rangle| = |l_1 + l_2| - |l_1 - l_2|.$$

Возможны два случая: $l_1 > l_2$ и $l_1 \leqslant l_2$.

В первом случае имеем

$$\min_{l \in L_M(x_*)} H(x_*, l) = |l_1 + l_2| - |l_1 - l_2| = -l_1 - l_2 - l_1 + l_2 = -2l_1 \geqslant 0.$$

Во втором случае имеем

$$\min_{l \in L_M(x_*)} H(x_*, l) \; = |l_1 + l_2| - |l_1 - l_2| = -l_1 - l_2 + l_1 - l_2 = -2l_2 \geqslant 0.$$

В итоге получаем $\min\limits_{l \in L_M(x_*)} H(x_*, l) \geqslant 0$. Следовательно, в вершине Υ_1 выполняется условие локальной u-стабильности множества M. Аналогично это условие выполняется в остальных вершинах квадрата M.

Сечения стабильного моста W^{O} (и, соответственно, совпадающего с ним моста $W^{\square}$) представлены на рис. 2.

П р и м е р 2. Пусть задана билинейная конфликтно-управляемая система (5.12) с целевым множеством M — треугольником с вершинами $\Upsilon_1 = (0, 1)$, $\Upsilon_2 = (-\sqrt{3}/2, -0.5)$, $\Upsilon_3 = (\sqrt{3}/2, -0.5)$.

Покажем, что существуют точки $x_* \in \partial M$, в которых не выполняется условие В локальной u-стабильности множества M. Пусть $x_* = \Upsilon_1$. Тогда

$$K_M(x_*) = \left\{(x_1, x_2) : x_2 \leqslant -\sqrt{3(x_1^2 + x_2^2)}/2\right\},$$

$$K_M^+(x_*) = \left\{(x_1, x_2) : x_2 \leqslant -\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}/2\right\},$$

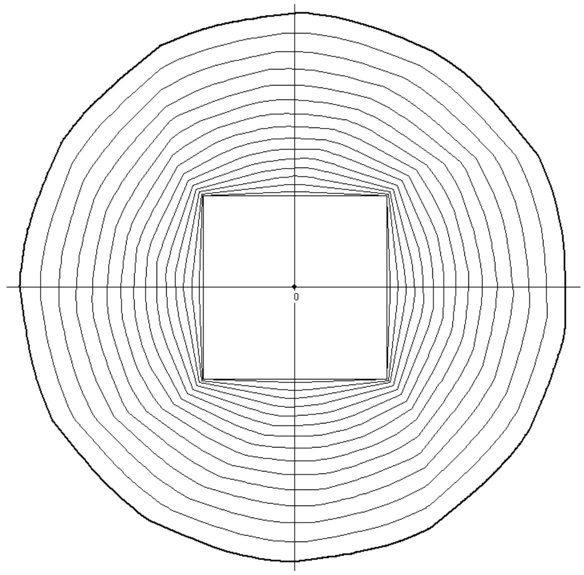


Рис. 2.

$$L_M(x_*) = \big\{(x_1, x_2) : x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t, \quad t \in [-\pi/6, -5\pi/6]\big\}.$$

Таким образом,

$$\min_{l \in L_M(x_*)} H(x_*, l) = H\Big((0,1), \big(\sqrt{3}/2, 1/2\big)\Big) = |1/2| - \big|\sqrt{3}/2\big| = \big(1-\sqrt{3}\big)/2 < 0.$$

Следовательно, в вершине Υ_1 не выполняется условие локальной u-стабильности множества M. Поэтому $W^O \neq W^\square$.

Сечения стабильных мостов в задачах к моменту W^O и в момент $W^\square$ показаны на рис. 3 и 4 соответственно.

Ситуация II. Пусть для точки $x_* \in \partial M$ существует ε-окрестность $U^m_\varepsilon(x_*)$ $(\varepsilon > 0)$, такая что пересечение

$$\begin{aligned} M \ \cap \ U^m_\varepsilon(x_*) &\subset \{x \in \mathbb{R}^m : \varphi(x) \leqslant 0\}, \\ \partial M \ \cap \ U^m_\varepsilon(x_*) &= \{x \in \mathbb{R}^m : \varphi(x) = 0\} \cap U^m_\varepsilon(x_*), \end{aligned} \tag{5.13}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция, определенная на $U^m_\varepsilon(x_*)$.

Предположим, что функция $\varphi(x)$ дифференцируема по Адамару (см. например, [26, с. 20]) в x_*: для любого вектора $g \in \mathbb{R}^m, g \neq \mathbf{0}$ существует конечный предел $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0, g' \to g} \dfrac{1}{\alpha}(\varphi(x+\gamma g') - \varphi(x))$.

Введем в рассмотрение множества в $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} T_0(x_*) &= \{g \in \mathbb{R}^m : \varphi'(x_*, g) < 0\}, \\ T^0(x_*) &= \{g \in \mathbb{R}^m : \varphi'(x_*, g) \leqslant 0\}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

где $\varphi'(x_*, g)$ — производная Дини в точке x_* по направлению g. Так как производная $\varphi'(x_*, g)$ является непрерывной функцией направления g, то $T_0(x_*)$ открыто, а $T^0(x_*)$ замкнуто. Из положительной однородности по g функции $\varphi'(x_*, g)$ следует, что $T_0(x_*)$ и $T^0(x_*)$ являются конусами в $\mathbb{R}^m$.

Справедливы включения

$$T_0(x_*) \subset T_M(x_*) \subset T^0(x_*). \tag{5.15}$$

Следуя работе [26, с. 38], будем говорить, что в точке x_* выполнено *условие регулярности*, если

$$\operatorname{cl} T_0(x_*) = T^0(x_*). \tag{5.16}$$

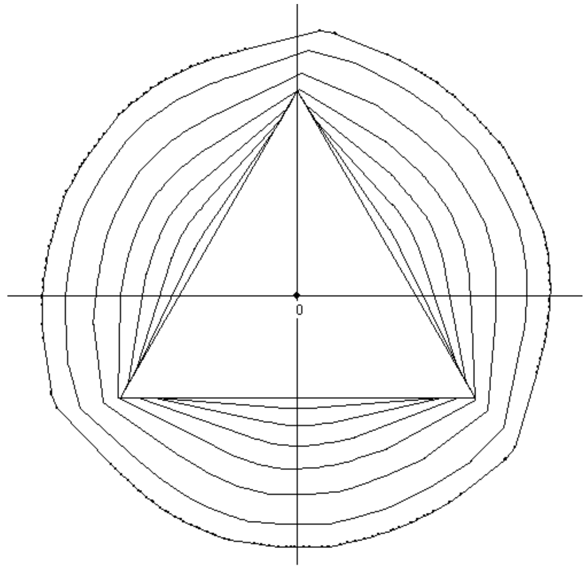


Рис. 3.

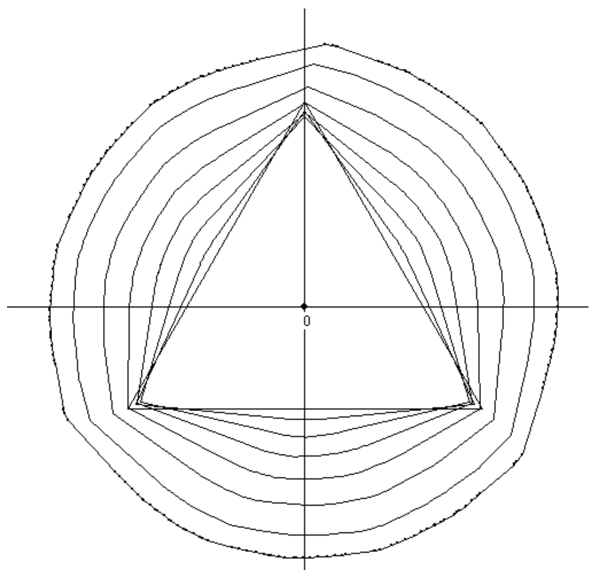


Рис. 4.

Учитывая (5.15), получаем, что если в точке $x_* \in \partial M$ выполнено условие регулярности, то

$$T_M\left(x_*\right) = T^0\left(x_*\right). \tag{5.17}$$

Рассмотрим теперь функцию $\varphi(x, \alpha)$, определенную на $U_\varepsilon^m\left(x_*\right) \times \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — компактное множество в $\mathbb{R}^r$.

Пусть $\varphi(x)$ представима в виде

$$\varphi(x) = \max_{\alpha \in \mathcal{A}} \varphi(x, \alpha). \tag{5.18}$$

Справедливо утверждение, которое, по сути, повторяет утверждение из [26, с. 39–40].

Теорема 7. *Пусть имеет место локальное представление* (5.13), (5.18) *множества* M *в окрестности точки* $x_* \in \partial M$*, где* $\varphi(x, \alpha)$ *— непрерывная вместе со своей частной производной* $\dfrac{\partial \varphi(x, \alpha)}{\partial x}$*, причем* $\dfrac{\partial \varphi(x, \alpha)}{\partial x}$ *ограничена на* $U_\varepsilon^m(x_*) \times \mathcal{A}$*. Полагаем* $\mathcal{A}(x_*) = \{\alpha \in \mathcal{A} : \varphi(x_*) = \varphi(x_*, \alpha)\}$*.*

Тогда, если существует такой вектор $l \in \mathbb{R}^m$, *что* $\left\langle \dfrac{\partial\varphi(x_*,\alpha)}{\partial x}, l \right\rangle < 0$ *при всех* $\alpha \in \mathcal{A}(x_*)$, *то*

$$T_M\,(x_*) = \left\{ g \in \mathbb{R}^m : \max_{\alpha\in\mathcal{A}(x_*)} \left\langle \frac{\partial\varphi(x_*,\alpha)}{\partial x}, g \right\rangle \leqslant 0 \right\}. \tag{5.19}$$

З а м е ч а н и е. Из условий теоремы 1 следует выполнение условия регулярности, и значит равенства (5.17). При этом производная $\varphi'(x_*, g)$ представима в виде

$$\varphi'(x_*, g) = \max_{\alpha\in\mathcal{A}(x_*)} \left\langle \frac{\partial\varphi(x_*,\alpha)}{\partial x}, g \right\rangle.$$

Введем обозначения $h_\alpha(x_*) = -\dfrac{\partial\varphi(x_*,\alpha)}{\partial x}$, $\Pi_{h_\alpha(x_*)} = \{g \in \mathbb{R}^m : \langle h_\alpha(x_*), g\rangle \geqslant 0\}$.
Согласно лемме 1, имеем

$$T_M\,(x_*) = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}(x_*)} \Pi_{h_\alpha(x_*)}. \tag{5.20}$$

Относительно набора $h_\alpha(x_*)$, $\alpha \in \mathcal{A}\,(x_*)$ выполняется соотношение $\mathbf{0} \notin \mathrm{co}\{h_\alpha(x_*) : \alpha \in \mathcal{A}\,(x_*)\}$ и, значит, в множестве со $\{h_\alpha(x_*) : \alpha \in \mathcal{A}\,(x_*)\}$ существуют точки $h_\beta(x_*)$, порождающие крайние направления конуса $T_M^+\,(x_*)$. Выделим в множестве со $\{h_\alpha(x_*) : \alpha \in \mathcal{A}\,(x_*)\}$ множество $\{h_\beta(x_*) : \beta \in \mathcal{B}\,(x_*)\}$ $(\mathcal{B}\,(x_*) \subset \mathcal{A}\,(x_*))$ всех точек, порождающих крайние направления конуса $T_M^+\,(x_*)$. Тогда конус $T_M\,(x_*)$ представим в виде

$$T_M\,(x_*) = \bigcap_{\beta\in\mathcal{B}(x_*)} \Pi_{h_\beta(x_*)}. \tag{5.21}$$

Пусть теперь $H\,(x_*, h_\beta\,(x_*)) \geqslant 0, \beta \in \mathcal{B}\,(x_*)$ и функция $h \mapsto H\,(x_*, h)$ вогнута на $T_M^+\,(x_*)$. Тогда $\min\limits_{l\in T_M^+(x_*)} H\,(x_*, l) \geqslant 0$ и, следовательно,

$$\min_{l\in L_M(x_*)} H\,(x_*, l) \geqslant 0. \tag{5.22}$$

$\square$

Вместе с тем справедливо следующее утверждение

Лемма 2. *Пусть точка* $x_* \in \partial M$, *находящаяся в ситуации* II, *удовлетворяет соотношению* (5.19), *неравенству* $H\,(x_*, h_\beta\,(x_*)) \geqslant 0, \beta \in \mathcal{B}\,(x_*)$ *и условию вогнутости функции* $h \mapsto H\,(x_*, h)$ *на конусе* $T_M^+\,(x_*)$. *Тогда выполняется условие локальной и-стабильности множества* M *в точке* $x_* \in \partial M$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
4. **Красовский Н.Н.** Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.
5. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
6. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. I // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1281.
7. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
8. **Куржанский А.Б.** Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Тр. Математического ин-та им. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 234–248.

9. **Куржанский А.Б.** О синтезе управлений по результатам измерений // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 4. С. 547–563.
10. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством. // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 1. С. 3–13.
11. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
12. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p. (System & Control: Foundation & Appl.)
13. **Ченцов А.Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99, № 3. С. 394–420.
14. **Пшеничный Б.Н.** Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 84, № 2. С. 285–287.
15. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Математического ин-та им. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194–252.
16. **Никольский М.С.** Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116, № 1. С. 136–144.
17. **Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.** Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференц. игр: сб. ст. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.
18. **Ушаков В.Н.** К вопросу стабильности в дифференциальных играх // Позиционное управление с гарантированным результатом: сб. науч. тр. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 101–109.
19. **Ушаков В.Н.** Процедуры построения стабильных мостов в дифференциальных играх: дис. д-ра физ.-мат. наук: Свердловск: Ин-т математики и механики УрО АН СССР, 1991. 308 с.
20. **Guseinov H.G., Subbotin A.I., and Ushakov V.N.** Derivatives for multivalued mappings with applications to game–theoretical problems of control // Problems Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, no. 6. P. 405–419.
21. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления/ / Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 216–222.
22. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.** О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения. Деп. в ВИНИТИ, № 2454–83. Свердловск, 1983. 61 с.
23. **Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** О приближенном построении решений в игровых задачах управления // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, №. 3. С. 413–421.
24. **Панасюк А.П.** Уравнения динамики множеств достижимости в задачах оптимизации и управления в условиях неопределенности // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, вып. 4. С. 596–604.
25. **Обен Ж.-П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 512 с.
26. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.

Поступила 8.12.2008

Ушаков Владимир Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Гусейнов Халик Гаракиши
д-р физ.-мат. наук
исследователь
Университет Анадолу
e-mail: kguseynov@anadolu.edu.tr

Латушкин Ярослав Александрович
канд. физ.-мат. наук, ст. математик
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: yarlat@mail.ru

Лебедев Павел Дмитриевич
аспирант
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: pleb@yandex.ru

Том 15 № 3 2009

УДК 519.6

К ВОПРОСУ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТУ ОГРАНИЧЕНИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА[1]

А. Г. Ченцов

Рассматривается абстрактная задача управления с ограничениями интегрального характера. Установлены условия эквивалентности различных вариантов ограничений асимптотического характера, соответствующих ослаблению традиционных ограничений на выбор управлений. В основе предлагаемого подхода находится конструкция расширения в классе векторных конечно-аддитивных (к.-а.) мер. В течение длительного времени автор имел замечательную возможность обсуждать свои результаты в упомянутом (весьма нетрадиционном) направлении с Н.Н. Красовским; эти обсуждения и поддержка Н.Н. Красовским данного направления сыграли важную роль в его становлении и развитии.

Ключевые слова: конечно-аддитивная мера, множество притяжения, направленность.

A. G. Chentsov. On the result equivalence of constraints of asymptotic nature.

An abstract control problem with constraints of integral nature is considered. Conditions are established for the equivalence of different variants of asymptotic constraints corresponding to weakening the traditional constraints on the choice of the controls. The proposed approach is based on an extension construction in the class of finitely additive measures. For a long time, the author has had the wonderful opportunity to discuss his results concerning the mentioned (rather nontraditional) approach with N. N. Krasovskii; these discussions and the support of this approach by N. N. Krasovskii played an important role in its formation and development.

Keywords: finitely additive measure, attraction set, net.

1. Введение

Исследуемая ниже абстрактная задача имеет своим прототипом следующую содержательную задачу о построении и изучении свойств области достижимости (ОД) системы

$$\dot{x}(t) = B(t)u(t) + v(t) \tag{1.1}$$

на конечном отрезке времени $I_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$, $t_0 < \vartheta_0$ (здесь и ниже $\triangleq$ — равенство по определению) в n-мерном фазовом пространстве; начальное состояние системы предполагается заданным: $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Управление $u = u(\cdot)$ действует на полуинтервале $\mathbf{I} \triangleq [t_0, \vartheta_0[$ и предполагается сейчас для простоты кусочно-постоянной (к.-п.) и непрерывной справа (н.спр.) функцией со значениями в r-мерном арифметическом пространстве; полагаем, кроме того, функцию u неотрицательной покомпонентно. Пусть U, $U \neq \varnothing$, — некоторое множество функций u вышеупомянутого типа; его элементы рассматриваем в качестве возможных управлений: допускаем в (1.1) использование любых управлений $u \in U$. Полагаем, что все компоненты $(n \times r)$-матриціанта $B = B(\cdot)$ в (1.1) допускают равномерное приближение к.-п. и н. спр. вещественнозначными (в/з) функциями на $\mathbf{I}$. Функцию $v = v(\cdot)$ полагаем сейчас для простоты определенной и непрерывной на I_0. В связи с (1.1) заметим, что в рассматриваемом случае задачи управления с фиксированным моментом окончания ϑ_0 система (1.1) может возникать в результате выполнения неособого линейного преобразования [1, с. 160]. Ограничимся сейчас обсуждением задачи об исследовании свойств ОД системы (1.1) на содержательном уровне.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00436, 08-08-00981) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математическая теория управления".

Каждой управляющей программе $u \in U$ отвечает единственная траектория φ_u системы (1.1):

$$\varphi_u(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} B(\tau)u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau \ \ \forall t \in I_0.$$

Рассматриваем терминальное состояние $\varphi_u(\vartheta_0)$ при условии, что $u \in U$ стеснено ограничением

$$\left(\int\limits_{t_0}^{\vartheta_0} S_\gamma(\tau)u(\tau)d\tau\right)_{\gamma\in\Gamma} \in Y. \tag{1.2}$$

Здесь Γ и Y — непустые множества, первое из которых играет роль индексного, а второе состоит из m-вектор-функций на Γ, т. е. является подмножеством (п/м) множества всех функций, действующих из Γ в m-мерное арифметическое пространство; при каждом $\gamma \in \Gamma \quad S_\gamma = S_\gamma(\cdot)$ есть $(m \times r)$-матрицант на $\mathbf{I}$, все компоненты которого допускают равномерное приближение к.-п. и н. спр. в/з функциями на $\mathbf{I}$. В виде (1.2) можно, в частности, представить условие: управление должно быть таким, чтобы в некоторой (линейной) модели оно воспроизводило траектории из заданного множества; (1.2) — обобщенное моментное ограничение. Оно порождает множество U_d, $U_d \subset U$, допустимых управлений; тогда $G_d \triangleq \{\varphi_u(\vartheta_0) : \ u \in U_d\}$ есть ОД в момент ϑ_0.

Ниже рассматривается абстрактный аналог задачи об исследовании поведения ОД при различных вариантах ослабления (1.2) (условно можно говорить о полном и частичном ослаблении (1.2)). Указать какую-либо конкретную "степень" ослабления (1.2) нередко бывает затруднительным, в то время как сам тип ослабления условий понятен. В этой связи уместна асимптотическая версия ограничений: вместо Y используем непустое семейство множеств, каждое их которых содержит Y. Получающаяся серия условий связывается обычно с Y естественным предположением: пересечение всех множеств упомянутого семейства совпадает с Y. Можно изменять тип ослабления (1.2), используя другие серии ослабленных версий (1.2), что фактически отвечает идее введения различных ограничений асимптотического характера. Каждому такому "асимптотическому" ограничению отвечает свой аналог ОД G_d в виде совокупности элементов притяжения (ЭП) в $\mathbb{R}^n$; сама же совокупность рассматривается как множество притяжения (МП). В этих построениях используем, однако, несеквенциальные (вообще говоря) аналоги приближенных управлений Дж. Варги (см. [2, гл. III]). Сравнение МП для различных ограничений асимптотического характера представляет не только теоретический, но и определенный практический интерес. Действительно, можно рассматривать более и менее полные варианты ослабления (1.2); при совпадении соответствующих МП можно говорить об асимптотической нечувствительности (грубости) задачи при ослаблении части ограничений.

В абстрактных версиях упомянутой задачи сохраняем предположение о покомпонентной неотрицательности управлений, что обеспечивает некоторые полезные свойства конструкции при возможном отсутствии условия ресурсной ограниченности. Применительно к (1.1) это предположение означает фактически, что используются нереверсируемые двигатели, ориентация которых определяется в каждый момент времени матрицей $B(t)$, а изменение воздействия на систему связано с перераспределением энергоресурсов между r каналами управления.

В связи с конструкциями импульсного управления, имеющими прямое отношение к исследуемой задаче, отметим общий подход Н.Н. Красовского [3], связанный с применением аппарата обобщенных функций; этот подход послужил основой многих исследований в теории управления. В задачах теории дифференциальных игр конструкции расширений и релаксаций широко использовались в работах Н.Н. Красовского, А.И. Суботина и их учеников. В [2, гл. III, IV] были введены фактически экстремальные задачи с ограничениями асимптотического характера, для которых рассматривались точные, обобщенные и приближенные управления; последние были секвенциальными (имеются в виду задачи управления с геометрическими ограничениями, систематическое изучение которых было начато Л.С. Понтрягиным). Ограничение приближенных решений классом последовательностей (см. [2]) приводит, вообще говоря, к потере некоторых (а иногда всех) ЭП; см. пример в [4]. В связи с возможностью применения несеквенциальных вариантов (асимптотических) решений отметим замечания в [5,6]. В настоящей работе используем направленности и (в меньшей степени) фильтры; см. [7–10]. Основу предлагаемого исследования составляет конструкция расширения в классе векторных к.-а. мер: см. [11–14] и др. В свою очередь эти конструкции были подготовлены в [15,16] и в других работах, посвященных скалярным к.-а. мерам и их применениям при построении расширений (в этой связи отметим также исследование [17], касающееся общих вопросов к.-а. теории меры, имеющих отношение к проблеме построения расширений).

2. Общие сведения

Кванторы и связки используем только для замены соответствующих словесных выражений; def заменяет фразу “по определению”. Как обычно, $\varnothing$ — пустое множество. Для всякого объекта x через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее x. Если x и y — два объекта, то $\{x;y\} \stackrel{\triangle}{=} \{x\} \cup \{y\}$ — неупорядоченная пара этих объектов (двоеточие). Поскольку множества — объекты, традиционным образом вводим упорядоченную пару произвольных объектов u и v : $(u,v) \stackrel{\triangle}{=} \{\{u\};\{u;v\}\}$. Если z — упорядоченная пара каких-либо объектов x и y, т. е. $z = (x,y)$, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем компоненты $z: \quad (\mathrm{pr}_1(z) = x)\ \&\ (\mathrm{pr}_2(z) = y)$. Семейством называем множество, все элементы которого суть множества. Принимаем аксиому выбора. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X; $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$.

Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B. Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \stackrel{\triangle}{=} \{f(x):\ x \in C\}$, а $(f|C) \in B^C$ есть def сужение f на $C: \quad (f|C)(x) \stackrel{\triangle}{=} f(x) \quad \forall x \in C$. Полагаем для любых множеств $A,\ B$, функции $f \in B^A$ и семейства $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$, что

$$f^{-1}[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{f^{-1}(B):\ B \in \mathcal{B}\}; \tag{2.1}$$

при этом $f^{-1}[\mathcal{B}] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$. Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство, а B — множество, то $\mathcal{A}|_B \stackrel{\triangle}{=} \{A \cap B:\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$. Используем индексную форму записи функций (принятую в [2]): если A и B — непустые множества и $b_a \in B \quad \forall a \in A$, то $(b_a)_{a \in A}$ есть def такое отображение $f \in B^A$, что $f(\alpha) = b_\alpha \quad \forall \alpha \in A$. При обозначении значений функции двух переменных используем традиционное правило экономии скобок: если $X,\ Y$ и Z — множества, $f \in Z^{X \times Y},\ x \in X,\ y \in Y$ и $t \stackrel{\triangle}{=} (x,y)$, то $f(x,y) \stackrel{\triangle}{=} f(t)$. Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathcal{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\}$; если $k \in \mathcal{N}$, то $\overline{1,k} \stackrel{\triangle}{=} \{i \in \mathcal{N} \mid i \le k\}$. В целях исключения двусмысленности в традиционных обозначениях полагаем в дальнейшем, что элементы $\mathcal{N}$ не являются множествами. С учетом этого для всяких множества T и числа $k \in \mathcal{N}$ полагаем $T^k \stackrel{\triangle}{=} T^{\overline{1,k}}$ (по смыслу $T^k = T \times \ldots \times T$, k раз). Элементы T^k (кортежи длины k) являются, строго говоря, отображениями из $\overline{1,k}$ в T, часто записываемыми в индексной форме. Линейные операции, умножение и порядок в пространствах в/з функций далее определяются поточечно.

Элементы топологии. Если (X,t) — топологическое пространство (ТП) и $A \in \mathcal{P}(X)$, то:

(1) $\mathrm{cl}(A,t) \in \mathcal{P}(X)$ есть def замыкание [18] A в ТП (X,t);

(2) $t|_A$ — топология A, индуцированная из (X,t) (при $\theta \stackrel{\triangle}{=} t|_A \quad (A,\theta)$ — подпространство (X,t));

(3) $\mathbb{N}_t^0[A] \stackrel{\triangle}{=} \{G \in t \mid A \subset G\}$, тогда $\mathbb{N}_t[A] \stackrel{\triangle}{=} \{T \in \mathcal{P}(X) \mid \exists G \in \mathbb{N}_t^0[A]:\ G \subset T\}$ (семейство всех окрестностей [19, гл. I] A в (X,t)). Если (X,t) — ТП и $x \in X$, то $N_t^0(x) \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{N}_t^0[\{x\}]$ и

$N_t(x) \triangleq \mathbb{N}_t[\{x\}]$; введены семейства окрестностей точек в ТП. Если (X,t) — ТП, то через $\mathcal{F}_t$ (через $(t-\mathrm{comp})[X]$) обозначаем семейство всех замкнутых (компактных [18]) в (X,t) п/м X. Для любых двух ТП (X,τ_1) и (Y,τ_2) пусть $C(X,\tau_1,Y,\tau_2) \triangleq \{f \in Y^X \mid f^{-1}[\tau_2] \subset \tau_1\}$; тогда $C_{\mathrm{cl}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \triangleq \{f \in C(X,\tau_1,Y,\tau_2) \mid f^1(F) \in \mathcal{F}_{\tau_2} \;\; \forall F \in \mathcal{F}_{\tau_1}\}$ (множество замкнутых отображений) и

$$C_{\mathbf{ap}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \triangleq \{f \in C_{\mathrm{cl}}(X,\tau_1,Y,\tau_2) \mid f^{-1}[\{\{y\}:\; y \in Y\}] \subset (\tau_1 - \mathrm{comp})[X]\} \tag{2.2}$$

(множество почти совершенных [18] отображений). Если (X,τ_1) — хаусдорфово ТП, то (2.2) — множество всех совершенных [18, с. 277, 287] отображений из (X,τ_1) в (Y,τ_2).

Условимся об обозначениях для тихоновской степени ТП (тихоновское произведение экземпляров одного и того же ТП): если P — непустое множество (индексов), а $(\mathbf{T},\mathbf{t})$, $\mathbf{T} \neq \varnothing$, — ТП, то через $\otimes^P(\mathbf{t})$ обозначаем [14, с. 269] топологию множества $\mathbf{T}^P$, соответствующую тихоновской степени ТП $(\mathbf{T},\mathbf{t})$ с индексным множеством P; если $P = \overline{1,k}$, где $k \in \mathcal{N}$, то полагаем $\otimes^k[\mathbf{t}] \triangleq \otimes^P(\mathbf{t}) = \otimes^{\overline{1,k}}(\mathbf{t})$, получая в виде $(\mathbf{T}^k, \otimes^k[\mathbf{t}])$ конечную степень ТП $(\mathbf{T},\mathbf{t})$. Через $\tau_{\mathbb{R}}$ (через τ_∂) обозначаем обычную (дискретную [18]) топологию $\mathbb{R}$. Если $k \in \mathcal{N}$, то через $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)}$ обозначаем обычную (нормируемую) топологию покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^k$: $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} \triangleq \otimes^k[\tau_{\mathbb{R}}]$; эта топология порождается, в частности, нормой $\|\cdot\|_k \triangleq (\|x\|_k)_{x \in \mathbb{R}^k}$, для которой

$$\|(x_j)_{j \in \overline{1,k}}\|_k \triangleq \max_{j \in \overline{1,k}} |x_j| \;\; \forall (x_j)_{j \in \overline{1,k}} \in \mathbb{R}^k.$$

Фильтры и направленности. Если X — множество, то через $\beta[X]$ (через $\beta_0[X]$) обозначаем множество всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$ ($\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X))$) таких, что

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}\; \forall B_2 \in \mathcal{B}\; \exists B_3 \in \mathcal{B}:\; B_3 \subset B_1 \cap B_2. \tag{2.3}$$

Семейства со свойством (2.3) направлены двойственно по отношению к вложению. Семейства $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$ — базы фильтров [19, с. 81] множества X. Соответственно

$$\mathfrak{F}[X] \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(X)) \mid \; (A \cap B \in \mathcal{F} \;\; \forall A \in \mathcal{F}\; \forall B \in \mathcal{F}) \;\&\; (\{G \in \mathcal{P}(X) \mid F \subset G\} \subset \mathcal{F} \;\; \forall F \in \mathcal{F})\}$$

есть семейство всех фильтров [19, гл. I] множества X. Если $\mathcal{B} \in \beta_0[X]$, то $\{L \in \mathcal{P}(X) \mid \exists B \in \mathcal{B}:\;\; B \subset L\} \in \mathcal{F}[X]$ есть фильтр, порожденный базой $\mathcal{B}$. Из общих определений [19, гл. I] вытекает, в частности, следующее: если (X,t) — ТП, $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[X]$ и $x \in X$, то сходимость $\mathcal{F}$ к x в (X,t), обозначаемая через $\mathcal{F} \overset{t}{\Longrightarrow} x$, отождествляется со свойством $N_t(x) \subset \mathcal{F}$. Используем также $\overset{t}{\Longrightarrow}$ для обозначения более общей сходимости баз фильтров, понимая эту сходимость в смысле [19, гл. I] (т. е. как сходимость фильтра, порожденного соответствующей базой). Отметим, что в ТП (X,t) $\;N_t(x) \in \mathfrak{F}[X]\; \forall x \in X$. Направленность в множестве X определяем как триплет $(D,\preceq,l)$, где $(D,\preceq)$ — непустое направленное множество (НМ) [20, гл. 2] и $l \in X^D$. Направленности $(D,\preceq,l)$ в X сопоставляем фильтр

$$(X - \mathrm{ass})[D;\preceq;l] \triangleq \{V \in \mathcal{P}(X) \mid \exists d \in D\; \forall \delta \in D\;\; ((d \preceq \delta) \Longrightarrow (l(\delta) \in V))\} \in \mathfrak{F}[X], \tag{2.4}$$

ассоциированный с $(D,\preceq,l)$; если t — топология множества X и $x \in X$, то

$$((D,\preceq,l) \overset{t}{\longrightarrow} x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} ((X - \mathrm{ass})[D;\preceq;l] \overset{t}{\Longrightarrow} x) \tag{2.5}$$

(введена сходимость направленностей). Всякая последовательность порождает направленность при использовании $\mathcal{N}$ с обычной упорядоченностью в качестве НМ.

Множества притяжения. Если E — непустое множество, $(X, \mathbf{t})$ — ТП, $l \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то через $(\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; l; \mathcal{E}]$ обозначаем множество всех $x \in X$, для каждого из которых существует направленность $(D, \preceq, g)$ в множестве E со следующими свойствами:

$$(\mathcal{E} \subset (E - \mathrm{ass})[D; \preceq; g]) \ \&\ ((D, \preceq, l \circ g) \xrightarrow{\mathbf{t}} x); \tag{2.6}$$

рассматриваем $(\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; l; \mathcal{E}]$ как МП в $(X, \mathbf{t})$. Для всяких множества E и семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ через $\mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех фильтров $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, для каждого из которых $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Кроме того, если A и B — множества, $f \in B^A$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$, то $f^1[\mathcal{A}] \triangleq \{f^1(U) : \ U \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$. Тогда [8, § 4] при всяком выборе непустого множества E, ТП $(X, \mathbf{t})$, $\mathbf{l} \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$(\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; \mathbf{l}; \mathcal{E}] = \{x \in X \mid \exists \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0[E|\mathcal{E}] : \ \mathbf{l}^1[\mathcal{F}] \stackrel{\mathbf{t}}{\Longrightarrow} x\}. \tag{2.7}$$

Более подробные сведения о представлении МП в терминах сходимости образов фильтров и ультрафильтров см. в [8–10]. Вернемся к (2.7); если в условиях, определяющих (2.7), $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то [15, с. 39, 40]

$$(\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; l; \mathcal{E}] = \bigcap_{U \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{l}^1(U), \mathbf{t}). \tag{2.8}$$

Заметим, что на самом деле (2.8) фактически может применяться и в общем случае $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, как показано в [9, с. 53]: исходное семейство $\mathcal{E}$ следует заменить семейством всех конечных пересечений множеств из $\mathcal{E}$; такая замена не влияет на МП. Отметим здесь же важное замечание 3.1 в [9, с. 53]. Наконец, если $\mathcal{E} \in \beta[E]$ имеет счетную базу (см. [11, (3.3.17)]), а $(X, \mathbf{t})$ есть ТП с первой аксиомой счетности (в частности, — метризуемое ТП), то МП (2.7) допускает исчерпывающую секвенциальную реализацию (см. [8], [11, с. 38]). Отметим, что в наиболее интересном случае $\mathcal{E} \in \beta_0[E]$ (2.8) есть [19, гл. I] множество всех точек прикосновения образа базы фильтра, т. е. объект, широко используемый в общей топологии (см. [10, с. 222]). Отметим одно простое свойство МП. Будем рассматривать МП на значениях оператора и на значениях его сужения, учитывая, что для всяких множеств E_1 и $E_2 \in \mathcal{P}'(E_1)$

$$\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_2)) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_1)) \tag{2.9}$$

и, как следствие, $\beta[E_2] \subset \beta[E_1]$. Теперь (см. (2.9)) корректны следующие определения: если E_1 — непустое множество, $(X, \mathbf{t})$ — ТП, $l \in X^{E_1}$, $E_2 \in \mathcal{P}'(E_1)$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_2))$, то

$$((\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; l; \mathcal{E}] \in \mathcal{P}(X)) \ \&\ ((\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; (l|E_2); \mathcal{E}] \in \mathcal{P}(X)).$$

Предложение 2.1. *Если E_1 — непустое множество, $(X, \mathbf{t})$ — ТП, $l \in X^{E_1}$, $E_2 \in \mathcal{P}'(E_1)$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_2))$, то $(\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; l; \mathcal{E}] = (\mathbf{as})[X; \mathbf{t}; (l|E_2); \mathcal{E}]$.*

Доказательство является практически очевидным и опущено в данном изложении.

3. Конечно-аддитивные меры

Фиксируем далее полуалгебру [22] $\mathcal{L}$ п/м непустого множества I произвольной природы, получая в виде $(I, \mathcal{L})$ абстрактное измеримое пространство (ИП) с полуалгеброй множеств. Через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех в/з неотрицательных к.-а. мер на $\mathcal{L}$ (здесь и ниже используем обозначения [11–16]), $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ — конус в $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$. Пусть $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ — множество всех в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$; $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ — линейное подпространство $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$, порожденное конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$.

Через $B_0(I, \mathcal{L})$ обозначаем линейную оболочку множества всех индикаторов [22, с. 56] множеств из $\mathcal{L}$. Линейное пространство $\mathbb{B}(I)$ всех ограниченных в/з функций на I оснащаем sup-нормой $\|\cdot\|$ (см. [23, с. 261]); $B_0(I, \mathcal{L}) \subset \mathbb{B}(I)$. Замыкание $B_0(I, \mathcal{L})$ в $\mathbb{B}(I)$ с топологией sup-нормы обозначаем [23, гл. IV] через $B(I,\mathcal{L})$. Индуцируя в $B(I,\mathcal{L})$ норму из банахова пространства $(\mathbb{B}(I),\|\cdot\|)$, получаем снова банахово пространство, причем топологическое сопряженное последнего, обозначаемое через $B^*(I,\mathcal{L})$ и нормируемое традиционно (см. [23, с. 72]), изометрически изоморфно $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме-вариации, а сам изометрический изоморфизм $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(I,\mathcal{L})$ определяется уже простейшей схемой интегрирования [15, гл. 3] (используемой в дальнейшем без дополнительных пояснений) и имеет вид

$$\mu \longmapsto \left(\int\limits_I f d\mu\right)_{f\in B(I,\mathcal{L})} : \ \mathbf{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow B^*(I,\mathcal{L}).$$

Двойственности $(B(I,\mathcal{L}),\mathbf{A}(\mathcal{L}))$ соответствует естественная $*$-слабая топология $\tau_*(\mathcal{L})$ (см. [11, с. 41], [15, с. 70]) множества $\mathbf{A}(\mathcal{L})$;

$$(\mathbf{A}(\mathcal{L}),\tau_*(\mathcal{L})) \tag{3.1}$$

есть локально выпуклый σ-компакт, а теорема Алаоглу определяет условия компактности в (3.1). Топологии

$$\tau_\otimes(\mathcal{L}) \triangleq \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}})|_{\mathbf{A}(\mathcal{L})}, \quad \tau_0(\mathcal{L}) \triangleq \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\partial)|_{\mathbf{A}(\mathcal{L})}$$

множества $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ связаны с (3.1) и между собой вложениями $\tau_\otimes(\mathcal{L})\subset\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_\otimes(\mathcal{L})\subset\tau_0(\mathcal{L})$; топологии $\tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$, вообще говоря, несравнимы (см. [15, § 4.4]). Однако для топологий

$$\tau_*^+(\mathcal{L}) \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]},\ \tau_\otimes^+(\mathcal{L}) \triangleq \tau_\otimes(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]},\ \tau_0^+(\mathcal{L}) \triangleq \tau_0(\mathcal{L})|_{(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]}$$

конуса $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ имеем уже следующие полезные свойства (см. [15, с. 81]):

$$\tau_*^+(\mathcal{L}) = \tau_\otimes^+(\mathcal{L}) \subset \tau_0^+(\mathcal{L}). \tag{3.2}$$

Через $B_0^+(I,\mathcal{L})$ (через $B^+(I,\mathcal{L})$) обозначаем множество всех неотрицательных функций из $B_0(I,\mathcal{L})$ (из $B(I,\mathcal{L})$). Используем вектор-функции на I и векторные к.-а. меры; определяем их соответственно в виде кортежей в/з функций на I и скалярных к.-а. мер на $\mathcal{L}$, получая всякий раз функции на конечном множестве индексов. В дальнейшем фиксируем $r\in\mathcal{N}$ и полагаем

$$((\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}] \triangleq (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]^r)\ \&\ (B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}] \triangleq B_0^+(I,\mathcal{L})^r)\ \&\ (B_r^+[I;\mathcal{L}] \triangleq B^+(I,\mathcal{L})^r). \tag{3.3}$$

В силу (3.3) имеем для $\mu\in(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]$ и $j\in\overline{1,r}$ свойство: $\mu(j)\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. Аналогично для $f\in B_r^+[I;\mathcal{L}]$ и $j\in\overline{1,r}$ непременно $f(j)\in B^+(I,\mathcal{L})$. Отметим очевидное вложение

$$B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}] \subset B_r^+[I;\mathcal{L}]. \tag{3.4}$$

В силу (3.2) имеем также следующее свойство сравнимости топологий множества $(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]$:

$$\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})] = \otimes^r[\tau_\otimes^+(\mathcal{L})] \subset \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]. \tag{3.5}$$

В силу (3.5) для наших целей существенны следующие два ТП:

$$((\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}],\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]),\ ((\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}],\otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]).$$

Свойство слабой абсолютной непрерывности. Рассмотрим сначала скалярные к.-а. меры, следуя [13, § 3]. Если $\mu\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то

$$(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\mu] \triangleq \{\nu\in(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \mid \forall L\in\mathcal{L}\ \ ((\mu(L)=0)\Longrightarrow(\nu(L)=0))\}; \tag{3.6}$$

свойство, определяющее (3.6), именуем слабой абсолютной μ-непрерывностью, что согласуется с [24]. Через $\mathbb{D}$ обозначаем множество всех семейств $\mathcal{K}\in\mathrm{Fin}(\mathcal{L})$ таких, что

$$\Big(I=\bigcup_{L\in\mathcal{K}} L\Big)\ \&\ (\forall A\in\mathcal{K}\ \forall B\in\mathcal{K}\ \ ((A\cap B\neq\varnothing)\Longrightarrow(A=B)));$$

$\mathbb{D}$ — множество всех конечных $\mathcal{L}$-разбиений I. Оснащаем $\mathbb{D}$ направлением $\prec$, определяемым свойством вписанности: если $\mathcal{A} \in \mathbb{D}$ и $\mathcal{B} \in \mathbb{D}$, то

$$(\mathcal{A} \prec \mathcal{B}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall B \in \mathcal{B}\ \exists A \in \mathcal{A}:\ B \subset A);$$

(см. [18, с. 196]; см. также [13, с. 217]). Итак, $(\mathbb{D}, \prec)$ есть непустое НМ.

Если $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то через $\mathcal{L}^0_\mu$ обозначаем семейство всех $L \in \mathcal{L}$ таких, что $\mu(L) \neq 0$. При $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \mu]$ полагаем, что $\theta^+_\mu[\nu] \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ определяется [13, с.217] условиями

$$(\theta^+_\mu[\nu](L) \triangleq \frac{\nu(L)}{\mu(L)}\ \ \forall L \in \mathcal{L}^0_\mu)\ \&\ (\theta^+_\mu[\nu](\Lambda) \triangleq 0\ \ \forall \Lambda \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^0_\mu); \tag{3.7}$$

в терминах (3.7) определяем для каждого $\mathcal{K} \in \mathbb{D}$ в/з функцию $\Theta^+_\mu[\nu; \mathcal{K}] \in B^+_0(I, \mathcal{L})$, полагая

$$\Theta^+_\mu[\nu; \mathcal{K}](x) \triangleq \theta^+_\mu[\nu](M)\ \ \forall M \in \mathcal{K}\ \forall x \in M. \tag{3.8}$$

Из [11, (3.6.16)] вытекает, что $\forall \mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]\ \forall \nu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \mu]\ \forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}$

$$\int\limits_I \Theta^+_\mu[\nu; \mathcal{K}] d\mu = \nu(I). \tag{3.9}$$

Если $\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$ и $f \in B(I, \mathcal{L})$, то через $f * \mu$ обозначаем [15, с.69] неопределенный μ-интеграл f, т. е. μ-интеграл f как функцию множеств; $f * \mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$. Нам потребуется использовать при $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu \in (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \mu]$ отображения

$$\mathcal{K} \longmapsto \Theta^+_\mu[\nu; \mathcal{K}]:\ \mathbb{D} \longrightarrow B^+_0(I, \mathcal{L}),\ \ \mathcal{K} \longmapsto \Theta^+_\mu[\nu; \mathcal{K}] * \mu:\ \mathbb{D} \longrightarrow (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \mu],$$

обозначаемые, соответственно, через $\Theta^+_\mu[\nu; \cdot]$ и $\Theta^+_\mu[\nu; \cdot] * \mu$; направленность $(\mathbb{D}, \prec, \Theta^+_\mu[\nu; \cdot] * \mu)$ обладает [11, с. 50] свойствами

$$((\mathbb{D}, \prec, \Theta^+_\mu[\nu; \cdot] * \mu) \xrightarrow{\tau_*(\mathcal{L})} \nu)\ \&\ ((\mathbb{D}, \prec, \Theta^+_\mu[\nu; \cdot] * \mu) \xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})} \nu). \tag{3.10}$$

В связи с (3.10) напомним важные для дальнейшего свойства плотности [15, гл. 4]:

$$\begin{aligned}(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \mu] &= \mathrm{cl}(\{f * \mu:\ f \in B^+_0(I, \mathcal{L})\}, \tau_*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\{f * \mu:\ f \in B^+_0(I, \mathcal{L})\}, \tau_0(\mathcal{L})) \\ &= \mathrm{cl}(\{f * \mu:\ f \in B^+(I, \mathcal{L})\}, \tau_*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\{f * \mu:\ f \in B^+(I, \mathcal{L})\}, \tau_0(\mathcal{L}))\ \ \forall \mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}].\end{aligned} \tag{3.11}$$

Топологии $\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})]$, $\otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]$ множества $(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]$ в силу (3.5) сравнимы:

$$\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})] \subset \otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]; \tag{3.12}$$

заметим, что в терминах топологий (3.12) реализуются векторные аналоги (3.11) (см., например, [13, (4.6)]). Следуя [14, (2.4)], введем неупорядоченную пару топологий:

$$\mathbb{N}^+_r(\mathcal{L}) \triangleq \{\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})]; \otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]\}. \tag{3.13}$$

В качестве векторного аналога (3.6) используем далее множество-степень

$$(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}; \mu] \triangleq (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \mu]^r\ \ \forall \mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]. \tag{3.14}$$

Разумеется, элементами множеств (3.14) являются мерозначные отображения на $\overline{1, r}$, т. е. кортежи длины r, составленные из к.-а. мер — элементов (3.6). Через $\mathbb{I}$ обозначаем отображение

$$(\mu, (f_j)_{j \in \overline{1, r}}) \longmapsto (f_j * \mu)_{j \in \overline{1, r}}:\ (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B^+_r[I; \mathcal{L}] \longrightarrow (\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]. \tag{3.15}$$

Итак, $\mathbb{I}(\mu, f) = (f(j) * \mu)_{j\in\overline{1,r}}$ при $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $f \in B_r^+[I;\mathcal{L}]$. Если $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то оператор

$$\mathbb{I}(\mu, \cdot) \overset{\triangle}{=} (\mathbb{I}(\mu, f))_{f\in B_r^+[I;\mathcal{L}]} \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\mu]^{B_r^+[I;\mathcal{L}]}$$

действует, следовательно, как $(f_j)_{j\in\overline{1,r}} \longmapsto (f_j * \mu)_{j\in\overline{1,r}} : \ B_r^+[I;\mathcal{L}] \longrightarrow (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\mu]$. Условимся также о соглашении: если $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то

$$\mathbb{I}_\mu \overset{\triangle}{=} (\mathbb{I}(\mu, \cdot)|B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}])$$

в согласии с [13, с. 218]; при этом, конечно, $\mathbb{I}_\mu : \ B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}] \longrightarrow (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\mu]$. Отметим, что при всяком выборе $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}], \ \nu \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\mu]$ и $\mathcal{K} \in \mathbb{D}$

$$\tilde{\Theta}_{\mu,r}^+[\nu;\mathcal{K}] \overset{\triangle}{=} (\Theta_\mu^+[\nu(j);\mathcal{K}])_{j\in\overline{1,r}} \in B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}].$$

Как обычно, полагаем при всяком выборе $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\mu]$, что $\tilde{\Theta}_{\mu,r}^+[\nu;\cdot]$ есть оператор $\mathcal{K} \longmapsto \tilde{\Theta}_{\mu,r}^+[\nu;\mathcal{K}] : \ \mathbb{D} \longrightarrow B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}]$; в согласии с [14, с.271] полагаем, кроме того, что

$$\mathbb{J}_\mu[\nu] \overset{\triangle}{=} \mathbb{I}_\mu \circ \tilde{\Theta}_{\mu,r}^+[\nu;\cdot], \tag{3.16}$$

получая оператор $\mathcal{K} \longmapsto (\Theta_\mu^+[\nu(j);\mathcal{K}] * \mu)_{j\in\overline{1,r}} : \ \mathbb{D} \longrightarrow (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\mu]$. Векторным аналогом (3.10) является свойство

$$(\mathbb{D}, \prec, \mathbb{J}_\mu[\nu]) \xrightarrow{\tau} \nu \ \ \forall \mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \ \forall \nu \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\mu] \ \forall \tau \in \mathbb{N}_r^+(\mathcal{L}). \tag{3.17}$$

Отметим также следующее свойство [14, (2.9)]: если $(D, \preceq, p)$ — направленность в $(add)_+[\mathcal{L}], \ q \in \prod\limits_{d\in D} (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};p(d)], \ \mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $\nu \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]$, то

$$(((D, \preceq, p) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu) \ \& \ ((D, \preceq, q) \overset{\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]}{\longrightarrow} \nu)) \Longrightarrow (\nu \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\mu]). \tag{3.18}$$

4. Интегральные ограничения и их релаксации

В настоящем разделе рассматривается абстрактный аналог ограничения (1.2) и предлагаются два, в некотором смысле полярных, варианта ослабления исходной системы ограничений.

Фиксируем $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$ и полагаем, что $\mathfrak{M} \overset{\triangle}{=} \mathbb{R}^{\overline{1,\mathbf{n}}\times\overline{1,r}}$ (множество всех $(\mathbf{n} \times r)$-матриц). Пусть, кроме того, Γ — непустое множество индексов, $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и

$$S : \ \Gamma \longrightarrow \mathfrak{M}^I; \tag{4.1}$$

итак, S — отображение Γ в пространство матрицантов на I. Если $\gamma \in \Gamma, \ i \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $j \in \overline{1,r}$, то

$$S_{i,j}[\gamma] \overset{\triangle}{=} (S(\gamma)(t)(i,j))_{t\in I} \in \mathbb{R}^I \tag{4.2}$$

есть компонента матрицанта $S(\gamma)$ (см. (4.1)), отвечающая индексам $i, \ j$. Пусть

$$S_{i,j}[\gamma] \in B(I,\mathcal{L}) \ \ \forall \gamma \in \Gamma \ \forall i \in \overline{1,\mathbf{n}} \ \forall j \in \overline{1,r}. \tag{4.3}$$

Пусть $\mathbf{X} \overset{\triangle}{=} \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$. Как уже отмечалось, $\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})}$ — топология покоординатной сходимости множества $\mathbf{X}$, а $\otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})})$ — топология поточечной сходимости $\mathbf{X}^\Gamma$;

$$(\mathbf{X}^\Gamma, \otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})})) \tag{4.4}$$

есть тихоновская степень $\mathbf{n}$-мерного арифметического пространства в топологии покоординатной сходимости. Фиксируем множество $\mathbf{Y} \in \mathcal{P}(\mathbf{X}^\Gamma)$, замкнутое в ТП (4.4): $\mathbf{Y} \in \mathcal{F}_{\mathbf{t}}$ при $\mathbf{t} = \otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})})$. Действие (ступенчатых) вектор-функций на S (4.1) характеризуется оператором

$$\mathfrak{S}: \ B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}] \longrightarrow \mathbf{X}^\Gamma \tag{4.5}$$

по следующему правилу: если $(f_j)_{j\in\overline{1,r}} \in B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}]$, то $\mathfrak{S}((f_j)_{j\in\overline{1,r}})$ есть def отображение ($\mathbf{n}$-вектор-функция)

$$\gamma \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{r}\int\limits_I S_{i,j}[\gamma] f_j d\eta\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}} : \ \Gamma \longrightarrow \mathbf{X}. \tag{4.6}$$

Действуя в духе [13, 14], рассматриваем далее возмущения условия

$$\mathfrak{S}(f) \in \mathbf{Y} \tag{4.7}$$

на выбор $f \in \ B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}]$ (позднее будут введены и другие ограничения на выбор f). Рассмотрим также следующее расширение оператора (4.5): пусть

$$\mathcal{S}: \ (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[I;\mathcal{L}] \longrightarrow \mathbf{X}^\Gamma$$

определяется правилом: если $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и $f \in B_r^+[I;\mathcal{L}]$, то $\mathcal{S}(\mu, f)$ есть def отображение

$$\gamma \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{r}\int\limits_I S_{i,j}[\gamma] f(j) d\mu\right)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}} : \ \Gamma \longrightarrow \mathbf{X}.$$

Заметим, что (4.7) можно рассматривать в виде следующего ограничения:

$$\mu = \eta, \ \ \mathcal{S}(\mu, f) \in \mathbf{Y}$$

на выбор упорядоченной пары $(\mu, f) \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}]$. Один из вариантов возмущения (4.7), рассматриваемого в упомянутой интерпретации, назовем условно тихоновским. В этом случае новые ограничения накладываются на выбор аргумента $\mathcal{S}$: если $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$, $K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то

$$\Omega(\mathcal{K}, K, \varepsilon) \overset{\triangle}{=} \Big\{(\mu, f) \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[I;\mathcal{L}] \mid$$

$$((\mu|\mathcal{K}) \ \ = (\eta|\mathcal{K})) \ \& \ (\exists y \in Y: \ \|\mathcal{S}(\mu, f)(\gamma) - y(\gamma)\|_{\mathbf{n}} < \varepsilon \ \ \forall \gamma \in K)\Big\} \tag{4.8}$$

есть множество допустимых элементов для варианта ослабления условий, определяемого триплетом $(\mathcal{K}, K, \varepsilon)$. Тогда ограничения асимптотического характера определяются семейством

$$\mathbf{\Gamma}^* \overset{\triangle}{=} \{\Omega(\mathcal{K}, K, \varepsilon): \ (\mathcal{K}, K, \varepsilon) \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}) \times \mathrm{Fin}(\Gamma)\times]0,\infty[\} \in \beta[(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[I;\mathcal{L}]]. \tag{4.9}$$

В (4.8), (4.9) мы расширяем само понятие управления: в качестве такового выступает пара $(\mu, f) \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[I;\mathcal{L}]$, которую исследователь вправе выбрать по своему усмотрению. Данный вариант возмущения представляется весьма "глубоким", и мы рассматриваем альтернативный вариант, фиксируя множество

$$\Gamma_0 \in \mathcal{P}(\Gamma), \tag{4.10}$$

обладающее следующим свойством ступенчатозначности:

$$S_{i,j}[\gamma] \in B_0(I,\mathcal{L}) \ \ \forall \gamma \in \Gamma_0 \ \forall i \in \overline{1,\mathbf{n}} \ \forall j \in \overline{1,r}. \tag{4.11}$$

В терминах Γ_0 конструируется топология $\mathbf{X}^\Gamma$, мажорирующая, как будет показано, топологию $\otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})})$ (тихоновский вариант возмущения ограничений ориентирован на $\otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})})$).

Если $g \in \mathbf{X}^\Gamma,\ K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то полагаем, что

$$\mathbf{B}(g,K,\varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{h \in \mathbf{X}^\Gamma \mid (g(\gamma) = h(\gamma)\ \ \forall \gamma \in K \cap \Gamma_0)\ \&\ (\|g(\gamma) - h(\gamma)\|_{\mathbf{n}} < \varepsilon\ \ \forall \gamma \in K \setminus \Gamma_0)\}. \tag{4.12}$$

Если $g \in \mathbf{X}^\Gamma$ фиксировано, то через $\mathcal{B}[g]$ обозначаем семейство всех множеств $\mathbf{B}(g,K,\varepsilon)$, $(K,\varepsilon) \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\times]0,\infty[$. Пусть $\mathfrak{B}$ есть def объединение всех семейств $\mathcal{B}[g],\ g \in \mathbf{X}^\Gamma$. Легко видеть, что $\mathfrak{B}$ — база топологии множества $\mathbf{X}^\Gamma$ (см. [20, с. 73]); эта (единственная) топология $\mathbf{X}^\Gamma$ имеет вид

$$\mathcal{T} \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ \bigcup_{B \in \alpha} B :\ \alpha \in \mathcal{P}(\mathfrak{B}) \Big\} = \big\{ G \in \mathcal{P}(\mathbf{X}^\Gamma) \mid \forall g \in G\ \exists B \in \mathfrak{B} :\ (g \in B)\ \&\ (B \subset G) \big\} \tag{4.13}$$

(см. также [25, с. 53]). Если $g \in \mathbf{X}^\Gamma$, то $\mathcal{B}[g]$ есть локальная база (фундаментальная система окрестностей) ТП

$$(\mathbf{X}^\Gamma, \mathcal{T}) \tag{4.14}$$

в точке g. Отметим,что структуру ТП (4.13), (4.14) можно прояснить с помощью построений, подобных [26, с.351] (имеется в виду построение соответствующего гомеоморфа). Полагаем, что

$$\Omega_0(T) \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{S}^{-1}(T)\ \ \forall T \in \mathbb{N}_{\mathcal{T}}[\mathbf{Y}]. \tag{4.15}$$

Тогда, как легко проверить с учетом определения (4.5), (4.6), а также (4.15),

$$\mathbf{\Gamma}_0^* \stackrel{\triangle}{=} \{\Omega_0(T) :\ T \in \mathbb{N}_{\mathcal{T}}[\mathbf{Y}]\} \in \beta[B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}]]. \tag{4.16}$$

Из (2.1), (4.15) и (4.16) получаем следующее равенство:

$$\mathbf{\Gamma}_0^* = \mathfrak{S}^{-1}[\mathbb{N}_{\mathcal{T}}[\mathbf{Y}]]. \tag{4.17}$$

Итак, введены два варианта возмущения (4.7); эти способы формализованы в (4.9) и в (4.16), (4.17) соответственно. Сейчас, однако, мы несколько ужесточим само невозмущенное условие (4.7) (в связи с релаксацией ограничений, подобных (4.7), см. [11–14, 26]). Всюду в дальнейшем $\mathbb{R}_+^r \stackrel{\triangle}{=} \{(x_j)_{j \in \overline{1,r}} \in \mathbb{R}^r \mid 0 \le x_j\ \ \forall j \in \overline{1,r}\}$; топология $\tau_{\mathbb{R}}^{(r)} = \otimes^r[\tau_{\mathbb{R}}]$ порождена, в частности, нормой $\|\cdot\|_r$. Фиксируем $\mathbf{F} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}_+^r)$; пусть

$$\mathbf{F} \in \mathcal{F}_{\tau_{\mathbb{R}}^{(r)}} \setminus \{\varnothing\}. \tag{4.18}$$

Итак, $\mathbf{F}$ — непустое замкнутое п/м $\mathbb{R}_+^r$. Рассмотрим множество

$$\Xi \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ (\mu, f) \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[I;\mathcal{L}] \mid \Big(\int_I f(j) d\mu \Big)_{j \in \overline{1,r}} \in \mathbf{F} \Big\}, \tag{4.19}$$

для которого введем след семейства (4.9), полагая (см. разд. 2)

$$\mathbf{\Gamma}_\Xi^* \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{\Gamma}^*|_\Xi = \{H \cap \Xi :\ H \in \mathbf{\Gamma}^*\}; \tag{4.20}$$

ясно, что $\mathbf{\Gamma}_\Xi^* \in \beta[\Xi]$. Кроме того, полагаем, что множество

$$\Xi_\eta^0 \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ f \in B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}] \mid \Big(\int_I f(j) d\eta \Big)_{j \in \overline{1,r}} \in \mathbf{F} \Big\} \tag{4.21}$$

оснащается следующим семейством (используется след $\mathbf{\Gamma}_0^*$ (4.16) на множество (4.21)):

$$\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^0 \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{\Gamma}_0^*|_{\Xi_\eta^0} = \{\Omega_0(T) \cap \Xi_\eta^0 : \ T \in \mathbb{N}_{\mathcal{T}}[\mathbf{Y}]\} \in \beta[\Xi_\eta^0]. \tag{4.22}$$

Отметим, что из (4.19)–(4.22) следуют, в частности, включения $\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^* \in \beta[(add)_+[\mathcal{L}] \times B_r^+[I;\mathcal{L}]]$ и $\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^0 \in \beta[B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}]]$. Пусть

$$\Sigma \stackrel{\triangle}{=} \{(\mu_j)_{j\in\overline{1,r}} \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L};\eta] \mid (\mu_j(I))_{j\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F}\}. \tag{4.23}$$

С учетом определения $*$-слабой топологии и (4.23) получаем свойство замкнутости:

$$\Sigma \in \mathcal{F}_{\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]}. \tag{4.24}$$

Кроме того, из (3.17) и (4.21) имеем следующее вложение:

$$\Sigma \subset \mathrm{cl}(\mathbb{I}_\eta^1(\Xi_\eta^0), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]) \tag{4.25}$$

(напомним, что при $S \in \mathcal{P}(B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}])$ множество $\mathbb{I}_\eta^1(S)$ есть образ S при действии $\mathbb{I}_\eta$, т. е. $\mathbb{I}_\eta^1(S) = \{\mathbb{I}_\eta(f) : \ f \in S\}$). Отметим сейчас практически очевидную импликацию:

$$(\mathbf{F} \in (\tau_{\mathbb{R}}^{(r)} - \mathrm{comp})[\mathbb{R}^r]) \Longrightarrow (\Sigma \in (\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})] - \mathrm{comp})[(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]]). \tag{4.26}$$

Отметим, что с семействами (4.20) и (4.22) естественным образом связывается ограничение (4.7) на выбор $f \in \Xi_\eta^0$. У нас появляется фактически новое “обязательное” условие, связанное с множеством $\mathbf{F}$. В конкретизации, рассматриваемой в разд. 1, элементы $\mathbf{F}$ можно интерпретировать как допустимые режимы расходования энергоресурсов в каналах управления.

Всюду в дальнейшем полагаем к.-а. меру η ненулевой: постулируем, что $\exists L \in \mathcal{L} : \ \eta(L) \neq 0$. Как следствие, $\Xi_\eta^0 \neq \varnothing$. Поскольку $\mathbb{I}_\eta^1(\Xi_\eta^0) \subset \Sigma$, имеем свойство $\Sigma \neq \varnothing$, дополняющее (4.25).

Вернемся к оснащениям $\mathbf{X}^\Gamma$, полагая при $u \in \mathbf{X}^\Gamma, \ K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$

$$\mathbf{B}_{pw}(u,K,\varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{v \in \mathbf{X}^\Gamma \mid \|u(\gamma) - v(\gamma)\|_{\mathbf{n}} < \varepsilon \ \ \forall \gamma \in K\}. \tag{4.27}$$

Если $u \in \mathbf{X}^\Gamma$, то через $\mathcal{B}_{pw}[u]$ обозначаем семейство всех множеств $\mathbf{B}_{pw}(u,K,\varepsilon), \ (K,\varepsilon) \in \mathrm{Fin}(\Gamma)\times]0,\infty[$. Пусть, кроме того, $\mathfrak{B}_{pw}$ есть def объединение всех семейств $\mathcal{B}_{pw}[g], \ g \in \mathbf{X}^\Gamma$. Тогда с учетом известных [18–20] свойств топологии поточечной сходимости получаем, что $\mathfrak{B}_{pw}$ — база топологии $\otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})})$. При всяком выборе $h \in \mathbf{X}^\Gamma$ семейство $\mathcal{B}_{pw}[h]$ — локальная база ТП (4.4) в точке h (фундаментальная система окрестностей). При этом (см. (4.12), (4.27))

$$\otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})}) \subset \mathcal{T} \tag{4.28}$$

(топология $\mathcal{T}$ сильнее). В (4.27) определены канонические в смысле (4.4) окрестности точек; введем подобные окрестности и для множества $\mathbf{Y}$. Если $K \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{pw}[K;\varepsilon] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{y\in\mathbf{Y}} \mathbf{B}_{pw}(y,K,\varepsilon) \in \mathbb{N}^0_{\otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}^{(\mathbf{n})})}[\mathbf{Y}], \tag{4.29}$$

причем, как легко видеть, справедливы равенства (см. (4.19))

$$\Omega(\mathcal{K},K,\varepsilon) \cap \Xi = \{(\mu,f) \in \Xi \mid (\mu|\mathcal{K}) = (\eta|\mathcal{K})\} \cap \mathcal{S}^{-1}(\tilde{\mathbf{Y}}_{pw}[K;\varepsilon]) \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}). \tag{4.30}$$

Отметим с учетом (4.28) и (4.29), что $\tilde{\mathbf{Y}}_{pw}[K;\varepsilon] \in \mathbb{N}_{\mathcal{T}}^0[\mathbf{Y}] \ \ \forall K \in \mathrm{Fin}(\Gamma) \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[$. Как следствие, получаем с учетом (4.15), (4.22) и (4.30), что $\forall T_1 \in \mathbf{\Gamma}_{\Xi}^* \ \exists T_2 \in \mathbf{\Gamma}_{\Xi}^0 :$

$$\{\eta\} \times T_2 \subset T_1. \tag{4.31}$$

Из (4.31) вытекает, что справедливо свойство: $\forall T_1 \in \mathbf{\Gamma}^*_\Xi\ \exists T_2 \in \mathbf{\Gamma}^0_\Xi$:

$$\mathrm{cl}(\mathbb{I}^1_\eta(T_2), \tau) \subset \mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(T_1), \tau) \ \ \forall \tau \in \mathbb{N}^+_r(\mathcal{L}). \tag{4.32}$$

В свою очередь, из (2.8) и (4.32) имеем (см. (4.20), (4.22)) вложения

$$(\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]; \tau; \mathbb{I}_\eta; \mathbf{\Gamma}^0_\Xi] \subset (\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]; \tau; \mathbb{I}; \mathbf{\Gamma}^*_\Xi] \ \ \forall \tau \in \mathbb{N}^+_r(\mathcal{L}). \tag{4.33}$$

Кроме того, из (2.8) и (3.12) получаем очевидные вложения:

$$(\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]; \otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]; \mathbb{I}_\eta; \mathbf{\Gamma}^0_\Xi] \subset (\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]; \otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})]; \mathbb{I}_\eta; \mathbf{\Gamma}^0_\Xi], \tag{4.34}$$

$$(\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]; \otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]; \mathbb{I}; \mathbf{\Gamma}^*_\Xi] \subset (\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]; \otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})]; \mathbb{I}; \mathbf{\Gamma}^*_\Xi]. \tag{4.35}$$

Всюду в дальнейшем полагаем в связи с построением обобщенной задачи, что оператор

$$\tilde{\mathcal{S}} : \ \Sigma \longrightarrow \mathbf{X}^\Gamma \tag{4.36}$$

определяется правилом: если $\mu \in \Sigma$, то $\tilde{\mathcal{S}}(\mu)$ есть def отображение

$$\gamma \longmapsto \Bigl(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j}[\gamma] d\mu(j) \Bigr)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} : \ \Gamma \longrightarrow \mathbf{X}. \tag{4.37}$$

В терминах оператора (4.36), (4.37) определяем множество

$$\Theta \overset{\triangle}{=} \tilde{\mathcal{S}}^{-1}(\mathbf{Y}). \tag{4.38}$$

Предложение 4.1. *Справедлива следующая система равенств*:

$$\Theta = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]; \otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})]; \mathbb{I}_\eta; \mathbf{\Gamma}^0_\Xi] = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}]; \otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})]; \mathbb{I}; \mathbf{\Gamma}^*_\Xi]. \tag{4.39}$$

Доказательство. Пусть μ_* — произвольный элемент последнего в (4.39) множества. С учетом определений разд. 2 (см. (2.6)) подберем направленность $(\mathcal{D}, \sqsubseteq, \rho)$ в множестве $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B^+_r[I; \mathcal{L}]$, для которой

$$(\mathbf{\Gamma}^*_\Xi \subset (((\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B^+_r[I; \mathcal{L}]) - \mathrm{ass})[\mathcal{D}; \sqsubseteq; \rho]) \ \& \ \Bigl((\mathcal{D}, \sqsubseteq, \mathbb{I} \circ \rho) \overset{\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})]}{\longrightarrow} \mu_* \Bigr). \tag{4.40}$$

Через ρ_1 и ρ_2 обозначаем компоненты ρ; иными словами,

$$\rho_1 \overset{\triangle}{=} (\mathrm{pr}_1(\rho(d)))_{d \in \mathcal{D}} \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]^{\mathcal{D}}, \ \ \rho_2 \overset{\triangle}{=} (\mathrm{pr}_2(\rho(d)))_{d \in \mathcal{D}} \in B^+_r[I; \mathcal{L}]^{\mathcal{D}}.$$

В этих обозначениях $(\mathbb{I} \circ \rho)(d) = (\rho_2(d)(j) * \rho_1(d))_{j \in \overline{1,r}} \ \ \forall d \in \mathcal{D}$. Последнее означает, конечно, что $\mathbb{I} \circ \rho \in \prod_{d \in \mathcal{D}} (\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}; \rho_1(d)]$. Из (4.9), (4.20) и (4.40) легко следует (см. (4.8)), что

$$(\mathcal{D}, \sqsubseteq, \rho_1) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \eta \tag{4.41}$$

(см. определение $\tau_0(\mathcal{L})$ в разд. 3). Из (3.18), (4.40) и (4.41) получаем свойство

$$\mu_* \in (\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}; \eta]. \tag{4.42}$$

В свою очередь, из (4.20) и (4.40) вытекает, по свойствам $*$-слабой топологии (см. (3.1), (3.2)), что $(\mu_*(j)(I))_{j \in \overline{1,r}} \in \mathbf{F}$. С учетом (4.23) и (4.42) получаем включение $\mu_* \in \Sigma$. Через w_* обозначим отображение

$$\gamma \longmapsto \Bigl(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j}[\gamma] d\mu_*(j) \Bigr)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} : \ \Gamma \longrightarrow \mathbf{X}. \tag{4.43}$$

Тогда $w_* \in \mathbf{Y}$. В самом деле, допустим противное: $w_* \notin \mathbf{Y}$. Поскольку $\mathbf{X}^\Gamma \setminus \mathbf{Y}$ открыто в ТП (4.4), то для некоторого множества $B_* \in \mathcal{B}_{pw}[w_*]$ имеет место вложение $B_* \subset \mathbf{X}^\Gamma \setminus \mathbf{Y}$. В свою очередь, $B_* = \mathbf{B}_{pw}(w_*, K_*, \varepsilon_*)$ при некоторых $K_* \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon_* \in]0, \infty[$. Введем $\varepsilon^* \triangleq \dfrac{\varepsilon_*}{2} \in]0, \infty[$ и рассмотрим следующее множество:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{pw}[K_*; \varepsilon^*] = \bigcup_{y \in \mathbf{Y}} \mathbf{B}_{pw}(y, K_*, \varepsilon^*),$$

для которого очевидным образом справедливо свойство

$$\mathbf{B}_{pw}(w_*, K_*, \varepsilon^*) \cap \tilde{\mathbf{Y}}_{pw}[K_*; \varepsilon^*] = \varnothing. \tag{4.44}$$

С учетом (4.40) подберем $d_* \in \mathcal{D}$ такое, что $\forall \delta \in \mathcal{D}$

$$(d_* \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow (\rho(\delta) \in \Omega(\mathcal{K}_*, K_*, \varepsilon^*) \cap \Xi); \tag{4.45}$$

см. (4.9), (4.20). С другой стороны, из (4.40) имеем для некоторого $d^* \in \mathcal{D}$ (по свойствам $*$-слабой топологии), что $\forall \delta \in \mathcal{D}$

$$(d^* \sqsubseteq \delta) \Longrightarrow \left(\left\| \Big(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j}[\gamma] d(\mathbb{I} \circ \rho)(\delta)(j) \Big)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} - \tilde{\mathcal{S}}(\mu_*)(\gamma) \right\|_{\mathbf{n}} < \varepsilon^* \ \ \forall \gamma \in K_* \right).$$

Используя аксиомы НМ, подберем $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ такое, что $(d_* \sqsubseteq \mathbf{d})$ & $(d^* \sqsubseteq \mathbf{d})$; получаем включение $\rho(\mathbf{d}) \in \Omega(\mathcal{K}_*, K_*, \varepsilon^*) \cap \Xi$ и, кроме того (см. (4.37), (4.43)), неравенства

$$\left\| \Big(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j}[\gamma] d(\mathbb{I} \circ \rho)(\mathbf{d})(j) \Big)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} - w_*(\gamma) \right\|_{\mathbf{n}} < \varepsilon^* \ \ \forall \gamma \in K_*. \tag{4.46}$$

С учетом (4.30), определения $\mathcal{S}$ и свойств неопределенного интеграла [15, с. 69] получаем из (4.45) включение

$$(\mathcal{S} \circ \rho)(\mathbf{d}) \in \tilde{\mathbf{Y}}_{pw}[K_*; \varepsilon^*]. \tag{4.47}$$

Из (4.27) и (4.46) получаем также, что отображение z_*, определяемое как

$$\gamma \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j}[\gamma] d(\mathbb{I} \circ \rho)(\mathbf{d})(j) \right)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} : \ \Gamma \longrightarrow \mathbf{X},$$

содержится в $\mathbf{B}_{pw}(w_*, K_*, \varepsilon^*)$, т. е. $z_* \in \mathbf{B}_{pw}(w_*, K_*, \varepsilon^*)$. Однако из представлений [15, с. 69] легко извлекается свойство: при $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} z_*(\gamma) &= \left(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j}[\gamma] d(\mathbb{I} \circ \rho)(\mathbf{d})(j) \right)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} = \left(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j}[\gamma] d\mathbb{I}(\rho(\mathbf{d}))(j) \right)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j}[\gamma] d(\rho_2(\mathbf{d})(j) * \rho_1(\mathbf{d})) \right)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} = \left(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j}[\gamma] \rho_2(\mathbf{d})(j) d\rho_1(\mathbf{d}) \right)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} \\ &= \mathcal{S}(\rho(\mathbf{d}))(\gamma) = (\mathcal{S} \circ \rho)(\mathbf{d})(\gamma). \end{aligned}$$

Следовательно, $z_* = (\mathcal{S} \circ \rho)(\mathbf{d})$. В итоге $(\mathcal{S} \circ \rho)(\mathbf{d}) \in \mathbf{B}_{pw}(w_*, K_*, \varepsilon^*)$, откуда в силу (4.47) имеем противоречие с (4.44), которое доказывает включение

$$w_* \in \mathbf{Y}. \tag{4.48}$$

По определению $\tilde{\mathcal{S}}$ (см. (4.36), (4.37)) имеем из (4.43) равенство $w_* = \tilde{\mathcal{S}}(\mu_*)$, откуда в силу (4.38) и (4.48) следует включение $\mu_* \in \Theta$, чем завершается обоснование вложения

$$(\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]; \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]; \mathbb{I}; \mathbf{\Gamma}_\Xi^*] \subset \Theta. \tag{4.49}$$

Выберем произвольно $\mu^* \in \Theta$. Тогда $\mu^* \in \Sigma$ и, в частности (см. (4.23)), $\mu^* \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta]$; следовательно (см. (3.14)), $\mu^* : \overline{1,r} \longrightarrow (\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$. Отметим, что в силу (4.23) $(\mu^*(j)(I))_{j \in \overline{1,r}} \in \mathbf{F}$. Напомним, что (см. (3.8))

$$\Theta_\eta^+[\mu^*(j); \mathcal{K}] \in B_0^+(I, \mathcal{L}) \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathbb{D} \, \forall j \in \overline{1,r}.$$

Кроме того, $\tilde{\Theta}_{\eta,r}^+[\mu^*; \mathcal{K}] = (\Theta_\eta^+[\mu^*(j); \mathcal{K}])_{j \in \overline{1,r}} \in B_{0,r}^+[I; \mathcal{L}] \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}$. Наконец (см. (3.16)), $\mathbb{J}_\eta[\mu^*] = \mathbb{I}_\eta \circ \tilde{\Theta}_{\eta,r}^+[\mu^*; \cdot]$ есть оператор $\mathcal{K} \longmapsto (\Theta_\eta^+[\mu^*(j); \mathcal{K}] * \eta)_{j \in \overline{1,r}} : \ \mathbb{D} \longrightarrow (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}; \eta]$. Из (4.37), (4.38) вытекает по выбору μ^*, что отображение $\tilde{\mathcal{S}}(\mu^*) : \ \Gamma \longrightarrow \mathbf{X}$ определяется условием:

$$\tilde{\mathcal{S}}(\mu^*)(\gamma) = \Bigl(\sum_{j=1}^{r} \int_I S_{i,j}[\gamma] d\mu^*(j) \Bigr)_{i \in \overline{1,\mathbf{n}}} \ \ \forall \gamma \in \Gamma; \tag{4.50}$$

кроме того, справедливо следующее включение:

$$\tilde{\mathcal{S}}(\mu^*) \in \mathbf{Y}. \tag{4.51}$$

В (4.50), (4.51) имеем представление μ^* как допустимого обобщенного элемента (ОЭ). Отметим, что (см. (3.13), (3.17))

$$(\mathbb{D}, \prec, \mathbb{J}_\eta[\mu^*]) \overset{\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]}{\longrightarrow} \mu^*, \tag{4.52}$$

$$(\mathbb{D}, \prec, \mathbb{J}_\eta[\mu^*]) \overset{\otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]}{\longrightarrow} \mu^*. \tag{4.53}$$

Условимся о следующем обозначении: если $j \in \overline{1,r}$, то полагаем, что $\mathbb{J}_\eta[\mu^*](\cdot)(j)$ есть def отображение $\mathcal{K} \longmapsto \mathbb{J}_\eta[\mu^*](\mathcal{K})(j) : \ \mathbb{D} \longrightarrow (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. Тогда из определения $\mathbb{J}_\eta[\mu^*]$ легко следует, что справедлива следующая система равенств: $\mathbb{J}_\eta[\mu^*](\cdot)(j) = \Theta_\eta^+[\mu^*(j); \cdot] * \eta \ \ \forall j \in \overline{1,r}$. При этом согласно (3.10) имеем (см. также (4.52), (4.53)) при $j \in \overline{1,r}$ следующие свойства сходимости:

$$(\mathbb{D}, \prec, \mathbb{J}_\eta[\mu^*](\cdot)(j)) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu^*(j), \tag{4.54}$$

$$(\mathbb{D}, \prec, \mathbb{J}_\eta[\mu^*](\cdot)(j)) \overset{\tau_0(\mathcal{L})}{\longrightarrow} \mu^*(j). \tag{4.55}$$

С учетом (4.3) и (4.54) получаем свойство: $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\ \forall K \in \mathrm{Fin}(\Gamma) \ \exists \mathcal{K}' \in \mathbb{D} \ \forall \mathcal{K}'' \in \mathbb{D}$

$$(\mathcal{K}' \prec \mathcal{K}'') \Longrightarrow (\|\mathfrak{S}(\tilde{\Theta}_{\eta,r}^+[\mu^*; \mathcal{K}''])(\gamma) - \tilde{\mathcal{S}}(\mu^*)(\gamma)\|_{\mathbf{n}} < \varepsilon \ \ \forall \gamma \in K). \tag{4.56}$$

В свою очередь, из (4.11) и (4.55) вытекает, что $\forall K \in \mathrm{Fin}(\Gamma) \ \exists \mathcal{K}' \in \mathbb{D} \ \forall \mathcal{K}'' \in \mathbb{D}$

$$(\mathcal{K}' \prec \mathcal{K}'') \Longrightarrow (\mathfrak{S}(\tilde{\Theta}_{\eta,r}^+[\mu^*; \mathcal{K}''])(\gamma) = \tilde{\mathcal{S}}(\mu^*)(\gamma) \ \ \forall \gamma \in K \cap \Gamma_0). \tag{4.57}$$

Заметим, что (4.56) является достаточно простым следствием (4.52), а (4.57) вытекает (по сути дела) из (4.53) с учетом определения $\tau_0(\mathcal{L})$ и (4.11).

Выберем произвольно $\Lambda \in \mathbf{\Gamma}_\Xi^0$, после чего подберем (см. (4.22)) $\mathbb{T} \in \mathbb{N}_{\mathcal{T}}[\mathbf{Y}]$ такое, что $\Lambda = \Omega_0(\mathbb{T}) \cap \Xi_\eta^0$. С учетом (4.51) имеем свойство: $\mathbb{T} \in N_{\mathcal{T}}(\tilde{\mathcal{S}}(\mu^*))$. По свойствам $\mathcal{T}$ имеем для некоторых $\hat{K} \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\hat{\varepsilon} \in]0, \infty[$ вложение $\mathbf{B}(\tilde{\mathcal{S}}(\mu^*), \hat{K}, \hat{\varepsilon}) \subset \mathbb{T}$ (свойство локальной базы ТП). Как следствие, с учетом (4.1), (4.56) и (4.57) имеем с некоторого момента включение $\tilde{\Theta}_{\eta,r}^+[\mu^*; \mathcal{K}] \in \Lambda$. Точнее, $\exists \mathcal{K}_1 \in \mathbb{D} \ \forall \mathcal{K}_2 \in \mathbb{D}$

$$(\mathcal{K}_1 \prec \mathcal{K}_2) \Longrightarrow (\tilde{\Theta}_{\eta,r}^+[\mu^*; \mathcal{K}_2] \in \Lambda). \tag{4.58}$$

При обосновании (4.58) учитываем также (4.21) и свойство [11, (3.6.16)]. Коль скоро выбор Λ был произвольным, из (4.58) следует, что $\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{0} \subset (B_{0,r}^{+}[I;\mathcal{L}] - \mathrm{ass})[\mathbb{D};\prec;\widetilde{\Theta}_{\eta,r}^{+}[\mu^*;\cdot]]$, откуда с учетом (3.16) и (4.53) вытекает включение $\mu^* \in (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_0^{+}(\mathcal{L})];\mathbb{I}_\eta;\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{0}]$. Тем самым завершено обоснование вложения

$$\Theta \subset (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_0^{+}(\mathcal{L})];\mathbb{I}_\eta;\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{0}]. \tag{4.59}$$

Поскольку (см. (4.33)–(4.35)) $(\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_0^{+}(\mathcal{L})];\mathbb{I}_\eta;\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{0}] \subset (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_*^{+}(\mathcal{L})];\mathbb{I};\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{*}]$, имеем из (4.49) и (4.59) требуемую цепочку равенств (4.39). $\square$

Из (4.33)–(4.35) и предложения 4.1 вытекает следующая цепочка равенств:

$$\Theta = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_0^{+}(\mathcal{L})];\mathbb{I}_\eta;\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{0}] = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_*^{+}(\mathcal{L})];\mathbb{I};\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{*}]$$

$$= (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_*^{+}(\mathcal{L})];\mathbb{I}_\eta;\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{0}] = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_0^{+}(\mathcal{L})];\mathbb{I};\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{*}]. \tag{4.60}$$

Напомним, наконец, что $\Xi_\eta^0 \in \mathcal{P}'(B_{0,r}^{+}[I;\mathcal{L}])$ и $\Xi \in \mathcal{P}'((\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B_r^{+}[I;\mathcal{L}])$. С учетом (4.60) и предложения 2.1 имеем следующее положение:

Теорема 4.1. *Множество Θ является МП в пространстве обобщенных элементов, универсальным в следующем смысле*:

$$\Theta = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_0^{+}(\mathcal{L})];(\mathbb{I}_\eta|\Xi_\eta^0);\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{0}] = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_*^{+}(\mathcal{L})];(\mathbb{I}|\Xi);\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{*}]$$

$$= (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_*^{+}(\mathcal{L})];(\mathbb{I}_\eta|\Xi_\eta^0);\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{0}] = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau_0^{+}(\mathcal{L})];(\mathbb{I}|\Xi);\mathbf{\Gamma}_{\Xi}^{*}]. \tag{4.61}$$

Теорема 4.1 устанавливает факт асимптотической эквивалентности весьма различных (более того, полярных) вариантов ослабления ограничения (4.7). Сейчас уместно коснуться вопроса о возможном "сокращении" пространства, в котором без потери качества реализуются МП, используемые в теореме 4.1. Пусть

$$\mathbb{M} \triangleq \{\mu \in (\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}] \mid (\mu(j)(I))_{j\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F}\}. \tag{4.62}$$

Напомним, что $\{\eta\} \times \Xi_\eta^0 \subset \Xi$, тогда $\mathbb{I}^1(\Xi) \in \mathcal{P}'((\mathrm{add})_r^{+}[\mathcal{L}])$, так как $\Xi_\eta^0 \neq \varnothing$.

Предложение 4.2. *Справедлива следующая цепочка равенств*:

$$\mathbb{M} = \mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(\Xi),\otimes^r[\tau_0^{+}(\mathcal{L})]) = \mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(\Xi),\otimes^r[\tau_*^{+}(\mathcal{L})]). \tag{4.63}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определений разд. 3 вытекает, что (см. [15, с. 69])

$$(\mathbb{I}(\mu,f)(j)(I))_{j\in\overline{1,r}} = \left(\int\limits_I f(j)d\mu\right)_{j\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F} \quad \forall (\mu,f) \in \Xi.$$

Из последнего соотношения имеем с учетом определения $\mathbb{I}$ разд. 3 свойство $\mathbb{I}(\mu,f) \in \mathbb{M}\ \forall (\mu,f) \in \Xi$. Это означает, что

$$\mathbb{I}^1(\Xi) \subset \mathbb{M}. \tag{4.64}$$

Выберем произвольно $\nu \in \mathbb{M}$. Тогда $\nu:\ \overline{1,r} \longrightarrow (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и, как легко видеть,

$$\lambda \triangleq \sum_{j=1}^{r} \nu(j) \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]. \tag{4.65}$$

В силу (3.6) и (4.65) справедливо следующее свойство:

$$\nu(j) \in (\mathrm{add})^{+}[\mathcal{L};\lambda]\ \ \forall j \in \overline{1,r}. \tag{4.66}$$

С учетом (4.66) и определений разд. 3 конструируем $\Theta^+_\lambda[\nu(j);\cdot] \in B^+_0(I,\mathcal{L})^{\mathbb{D}}\ \ \forall j \in \overline{1,r}$. Согласно (3.9), (4.65) и (4.66) имеем систему равенств

$$\left(\int\limits_I \Theta^+_\lambda[\nu(j);\mathcal{K}]d\lambda\right)_{j\in\overline{1,r}} = (\nu(j)(I))_{j\in\overline{1,r}} \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}.$$

По выбору ν имеем теперь (см. определение $\mathbb{M}$), что

$$\left(\int\limits_I \Theta^+_\lambda[\nu(j);\mathcal{K}]d\lambda\right)_{j\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F} \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}. \tag{4.67}$$

Напомним, что (см. разд. 3) справедливы следующие представления:

$$\tilde{\Theta}^+_{\lambda,r}[\nu;\mathcal{K}] = (\Theta^+_\lambda[\nu(j);\mathcal{K}])_{j\in\overline{1,r}} \in B^+_{0,r}[I;\mathcal{L}] \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}.$$

В частности, из (3.4) имеем включения $\tilde{\Theta}^+_{\lambda,r}[\nu;\mathcal{K}] \in B^+_r[I;\mathcal{L}]\ \ \forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}$. Разумеется, при $\mathcal{K} \in \mathbb{D}$ и $j \in \overline{1,r}$ имеем $\tilde{\Theta}^+_{\lambda,r}[\nu;\mathcal{K}](j) = \Theta^+_\lambda[\nu(j);\mathcal{K}]$. Поэтому из (4.67) получаем систему включений

$$\left(\int\limits_I \tilde{\Theta}^+_{\lambda,r}[\nu;\mathcal{K}](j)d\lambda\right)_{j\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F} \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}.$$

С учетом (4.19) и (4.65) получаем: $(\lambda, \tilde{\Theta}^+_{\lambda,r}[\nu;\mathcal{K}]) \in \Xi\ \ \forall \mathcal{K} \in \mathbb{D}$. Поэтому

$$(\mathbb{D}, \prec, (\mathbb{I}(\lambda, \tilde{\Theta}^+_{\lambda,r}[\nu;\mathcal{K}]))_{\mathcal{K}\in\mathbb{D}}) = (\mathbb{D}, \prec, \mathbb{I}_\lambda \circ \tilde{\Theta}^+_{\lambda,r}[\nu;\cdot]) = (\mathbb{D}, \prec, \mathbb{J}_\lambda[\nu]), \tag{4.68}$$

где учтено (3.16), есть направленность в $\mathbb{I}^1(\Xi)$. При этом согласно (4.66) справедливо включение $\nu \in (\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L};\lambda]$. Поэтому $(\mathbb{D}, \prec, \mathbb{J}_\lambda[\nu]) \xrightarrow{\tau} \nu\ \ \forall \tau \in \mathbb{N}^+_r(\mathcal{L})$. Коль скоро (4.68) — направленность в $\mathbb{I}^1(\Xi)$, получаем [25, с. 37] включения $\nu \in \mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(\Xi), \tau)\ \ \forall \tau \in \mathbb{N}^+_r(\mathcal{L})$. Поскольку выбор ν был произвольным, установлено, что

$$\mathbb{M} \subset \mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(\Xi), \tau)\ \ \forall \tau \in \mathbb{N}^+_r(\mathcal{L}). \tag{4.69}$$

Выберем произвольно $\zeta \in \mathrm{cl}(\mathbb{M}, \otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})])$. Тогда для некоторой направленности $(\mathcal{D}, \preceq, \varphi)$ в $\mathbb{M}$ имеем $(\mathcal{D}, \preceq, \varphi) \xrightarrow{\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})]} \zeta$. Как следствие (см. (3.2)) имеем [11, с. 35] следующие свойства сходимости:

$$(\mathcal{D}, \preceq, (\varphi(\delta)(j))_{\delta\in\mathcal{D}}) \xrightarrow{\tau^+_\otimes(\mathcal{L})} \zeta(j)\ \ \forall j \in \overline{1,r}. \tag{4.70}$$

При этом для $j \in \overline{1,r}$ отображение $\varphi(\cdot)(j) = (\varphi(\delta)(j))_{\delta\in\mathcal{D}}$ переводит $\mathcal{D}$ в $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, $\zeta(j) \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. Учтем [25, (2.3.9)]. По определению $\tau^+_\otimes(\mathcal{L})$ имеем из (4.70) свойства

$$(\mathcal{D}, \preceq, \varphi(\cdot)(j)) \xrightarrow{\tau_\otimes(\mathcal{L})} \zeta(j)\ \ \forall j \in \overline{1,r};$$

как следствие, имеем по определению $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ [11, с. 44] следующие положения

$$(\mathcal{D}, \preceq, \varphi(\cdot)(j)) \xrightarrow{\otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\mathbb{R})} \zeta(j)\ \ \forall j \in \overline{1,r}.$$

В частности, $(\mathcal{D}, \preceq, (\varphi(\delta)(j)(I))_{\delta\in\mathcal{D}}) \xrightarrow{\tau_\mathbb{R}} \zeta(j)(I)\ \ \forall j \in \overline{1,r}$.Как следствие,получаем сходимость:

$$(\mathcal{D}, \preceq, ((\varphi(\delta)(j)(I))_{j\in\overline{1,r}})_{\delta\in\mathcal{D}}) \xrightarrow{\tau^{(r)}_\mathbb{R}} (\zeta(j)(I))_{j\in\overline{1,r}}. \tag{4.71}$$

При этом $\varphi(\delta) \in \mathbb{M}\ \ \forall \delta \in \mathcal{D}$. Поэтому при $\delta \in \mathcal{D}\quad \varphi(\delta):\ \overline{1,r} \longrightarrow (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ и, как следствие, $\varphi(\delta)(j)(I) \in [0,\infty[\ \ \forall j \in \overline{1,r}$. При этом $(\varphi(\delta)(j)(I))_{j\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F}\ \ \forall \delta \in \mathcal{D}$. В силу (4.18) и (4.71)

$$(\zeta(j)(I))_{j\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F}. \tag{4.72}$$

Итак, $\zeta \in (\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]$ (см. (3.3)) обладает свойством (4.72). Это означает, что $\zeta \in \mathbb{M}$, чем завершается обоснование вложения $\mathrm{cl}(\mathbb{M}, \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) \subset \mathbb{M}$. По свойствам оператора замыкания (см. [18, 19]) имеем теперь $\mathbb{M} = \mathrm{cl}(\mathbb{M}, \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]) \in \mathcal{F}_{\otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]}$. С учетом (3.12)

$$\mathbb{M} \in \mathcal{F}_{\otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]}. \tag{4.73}$$

Из (3.13), (4.64) и (4.73) вытекают следующие вложения $\mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(\Xi), \tau) \subset \mathbb{M}\quad \forall \tau \in \mathbb{N}_r^+(\mathcal{L})$. С учетом (4.69) имеем требуемые равенства $\mathbb{M} = \mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(\Xi), \tau)\ \ \forall \tau \in \mathbb{N}_r^+(\mathcal{L})$. □

Предложение 4.3. *Справедливо вложение* $\mathbb{I}_\eta^1(\Xi_\eta^0) \subset \mathbb{I}^1(\Xi)$.

Доказательство. Пусть $\mu_0 \in \mathbb{I}_\eta^1(\Xi_\eta^0)$, а $f_0 \in \Xi_\eta^0$ обладает свойством $\mu_0 = \mathbb{I}_\eta(f_0)$. Тогда $(\eta, f_0) \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B_{0,r}^+[I;\mathcal{L}]$, причем

$$\left(\int\limits_I f_0(j)d\eta\right)_{j\in\overline{1,r}} \in \mathbf{F}.$$

В силу (4.19) $(\eta, f_0) \in \Xi$, тогда $\mathbb{I}(\eta, f_0) \in \mathbb{I}^1(\Xi)$. С учетом определений разд. 3 имеем $\mu_0 = \mathbb{I}_\eta(f_0) = \mathbb{I}(\eta,\cdot)(f_0) = \mathbb{I}(\eta, f_0) \in \mathbb{I}^1(\Xi)$, чем завершается обоснование вложения $\mathbb{I}_\eta^1(\Xi_\eta^0) \subset \mathbb{I}^1(\Xi)$. □

Из предложений 4.2 и 4.3 следует вложение $\mathbb{I}_\eta^1(\Xi_\eta^0) \subset \mathbb{M}$; при этом $\mathbb{M} \in \mathcal{P}'((\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}])$. Пусть

$$(\hat{\tau}_r^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})]|_{\mathbb{M}})\ \&\ (\hat{\tau}_r^0(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]|_{\mathbb{M}}); \tag{4.74}$$

получаем две топологии множества $\mathbb{M}$, для которых (см. (3.12))

$$\hat{\tau}_r^*(\mathcal{L}) \subset \hat{\tau}_r^0(\mathcal{L}). \tag{4.75}$$

Итак (см. (4.74), (4.75)), введена пара сравнимых замкнутых (см. предложение 4.2) подпространств $(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]$ в оснащениях, используемых в (3.5). Отметим также, что в силу предложений 4.2, 4.3 $(\mathbb{I}|\Xi) \in \mathbb{M}^\Xi$ и $(\mathbb{I}_\eta|\Xi_\eta^0) \in \mathbb{M}^{\Xi_\eta^0}$.

Теорема 4.2. *Множество* Θ (*“универсальное” МП в пространстве ОЭ*) *допускает следующее представление*:

$$\Theta = (\mathbf{as})[\mathbb{M}; \hat{\tau}_r^0(\mathcal{L}); (\mathbb{I}_\eta|\Xi_\eta^0); \mathbf{\Gamma}_\Xi^0] = (\mathbf{as})[\mathbb{M}; \hat{\tau}_r^*(\mathcal{L}); (\mathbb{I}|\Xi); \mathbf{\Gamma}_\Xi^*]$$

$$= (\mathbf{as})[\mathbb{M}; \hat{\tau}_r^*(\mathcal{L}); (\mathbb{I}_\eta|\Xi_\eta^0); \mathbf{\Gamma}_\Xi^0] = (\mathbf{as})[\mathbb{M}; \hat{\tau}_r^0(\mathcal{L}); (\mathbb{I}|\Xi); \mathbf{\Gamma}_\Xi^*].$$

Доказательство. Напомним, что $\mathbf{\Gamma}_\Xi^* \in \beta[\Xi]$ и $\mathbf{\Gamma}_\Xi^0 \in \beta[\Xi_\eta^0]$; поэтому для представления нужных МП можно использовать (2.8). При этом в силу предложения 4.2 имеем [25, с.37]

$$(\mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(T), \hat{\tau}_r^*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(T), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})])\ \ \forall T \in \mathcal{P}(\Xi))\ \&\ (\mathrm{cl}(\mathbb{I}_\eta^1(H), \hat{\tau}_r^0(\mathcal{L}))$$

$$= \mathrm{cl}(\mathbb{I}_\eta^1(H), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})])\ \ \forall H \in \mathcal{P}(\Xi_\eta^0))\ \&\ (\mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(T), \hat{\tau}_r^0(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\mathbb{I}^1(T), \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})])$$

$$\forall T \in \mathcal{P}(\Xi))\ \&\ (\mathrm{cl}(\mathbb{I}_\eta^1(H), \hat{\tau}_r^*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\mathbb{I}_\eta^1(H), \otimes^r[\tau_*^+(\mathcal{L})])\ \ \forall H \in \mathcal{P}(\Xi_\eta^0)).$$

Отметим здесь же, что образы п/м Ξ (п/м Ξ_η^0) при действии операторов $\mathbb{I}$ и $(\mathbb{I}|\Xi)$ (операторов $\mathbb{I}_\eta$ и $(\mathbb{I}_\eta|\Xi_\eta^0)$) совпадают. С учетом (2.8) получаем совпадения:

$$(\mathbf{as})[\mathbb{M}; \hat{\tau}_r^0(\mathcal{L}); (\mathbb{I}_\eta|\Xi_\eta^0); \mathbf{\Gamma}_\Xi^0] = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})_r^+[\mathcal{L}]; \otimes^r[\tau_0^+(\mathcal{L})]; (\mathbb{I}_\eta|\Xi_\eta^0); \mathbf{\Gamma}_\Xi^0],$$

$$(\mathbf{as})[\mathbb{M};\hat{\tau}^*_r(\mathcal{L});(\mathbb{I}|\Xi);\mathbf{\Gamma}^*_\Xi] = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})];(\mathbb{I}|\Xi);\mathbf{\Gamma}^*_\Xi],$$
$$(\mathbf{as})[\mathbb{M};\hat{\tau}^*_r(\mathcal{L});(\mathbb{I}_\eta|\Xi^0_\eta);\mathbf{\Gamma}^0_\Xi] = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau^+_*(\mathcal{L})];(\mathbb{I}_\eta|\Xi^0_\eta);\mathbf{\Gamma}^0_\Xi],$$
$$(\mathbf{as})[\mathbb{M};\hat{\tau}^0_r(\mathcal{L});(\mathbb{I}|\Xi);\mathbf{\Gamma}^*_\Xi] = (\mathbf{as})[(\mathrm{add})^+_r[\mathcal{L}];\otimes^r[\tau^+_0(\mathcal{L})];(\mathbb{I}|\Xi);\mathbf{\Gamma}^*_\Xi].$$

С учетом теоремы 4.1 получаем требуемую цепочку равенств для МП в $\mathbb{M}$. □

5. Асимптотическая достижимость и условия эквивалентности по результату

Совсем кратко коснемся вопроса о достижимости элементов ТП при ограничениях асимптотического характера, формализуемых посредством семейств $\mathbf{\Gamma}^*_\Xi$, $\mathbf{\Gamma}^0_\Xi$. Фиксируем ТП $(\mathbb{X},\mathcal{I})$, $\mathbb{X}\neq\varnothing$, а также отображение

$$W:\ \Xi\longrightarrow\mathbb{X}, \tag{5.1}$$

именуемое целевым. Оно определено на пространстве “расширенных” управлений, используемых в (4.8), (4.9), (4.30). С учетом положений разд. 4 определен также оператор

$$W_\eta \overset{\triangle}{=} (W(\eta,f))_{f\in\Xi^0_\eta}\in\mathbb{X}^{\Xi^0_\eta}. \tag{5.2}$$

Рассматриваемая конструкция соответствует в идейном отношении [14, § 4]. Исследуются МП

$$((\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};W;\mathbf{\Gamma}^*_\Xi]\in\mathcal{P}(\mathbb{X}))\ \&\ ((\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};W_\eta;\mathbf{\Gamma}^0_\Xi]\in\mathcal{P}(\mathbb{X})). \tag{5.3}$$

Предложение 5.1. $(\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};W_\eta;\mathbf{\Gamma}^0_\Xi]\subset(\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};W;\mathbf{\Gamma}^*_\Xi]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T\in\mathbf{\Gamma}^*_\Xi$. С учетом (4.31) подберем $\tilde{T}\in\mathbf{\Gamma}^0_\Xi$, для которого $\{\eta\}\times\tilde{T}\subset T$. Тогда $\tilde{T}\subset\Xi^0_\eta$, а потому (см. (5.2))

$$W^1_\eta(\tilde{T}) = \{W_\eta(f):\ f\in\tilde{T}\} = \{W(\eta,f):\ f\in\tilde{T}\} = W^1(\{\eta\}\times\tilde{T})\subset W^1(T).$$

С учетом (2.8) $(\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};W_\eta;\mathbf{\Gamma}^0_\Xi]\subset\mathrm{cl}(W^1(T),\mathcal{I})$. Поскольку выбор T был произвольным, имеем из (2.8) требуемое утверждение. □

Всюду в дальнейшем полагаем, что для некоторого оператора

$$w:\ \mathbb{M}\longrightarrow\mathbb{X} \tag{5.4}$$

имеет место (см. предложение 4.2) следующее представление отображения W (5.1):

$$W(\mu,f) = w((f(j)*\mu)_{j\in\overline{1,r}})\ \ \forall(\mu,f)\in\Xi. \tag{5.5}$$

Иными словами, $W = w\circ(\mathbb{I}|\Xi)$. С учетом предложений 4.2, 4.3 имеем, в частности, что при $f\in\Xi^0_\eta$ определено значение $W(\eta,f) = w(\mathbb{I}_\eta(f))$. Тогда (см. (5.2)) $W_\eta = w\circ(\mathbb{I}_\eta|\Xi^0_\eta)\in\mathbb{X}^{\Xi^0_\eta}$. Заметим с учетом (4.75), что справедливо следующее вложение:

$$C(\mathbb{M},\hat{\tau}^*_r(\mathcal{L}),\mathbb{X},\mathcal{I})\subset C(\mathbb{M},\hat{\tau}^0_r(\mathcal{L}),\mathbb{X},\mathcal{I}). \tag{5.6}$$

Предложение 5.2. *Если* $w\in C(\mathbb{M},\hat{\tau}^0_r(\mathcal{L}),\mathbb{X},\mathcal{I})$, *то* $w^1(\Theta)\subset(\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};W_\eta;\mathbf{\Gamma}^0_\Xi]\subset(\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};W;\mathbf{\Gamma}^*_\Xi]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 5.1 доказательства требует только первое вложение. С учетом предложения 3.3.1 [25] имеем вложение $w^1((\mathbf{as})[\mathbb{M};\hat{\tau}^0_r(\mathcal{L});(\mathbb{I}_\eta|\Xi^0_\eta);\mathbf{\Gamma}^0_\Xi])\subset(\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};w\circ(\mathbb{I}_\eta|\Xi^0_\eta);\mathbf{\Gamma}^0_\Xi] = (\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};W_\eta;\mathbf{\Gamma}^0_\Xi]$. Из теоремы 4.2 получаем требуемое вложение. □

Из (5.6) и предложения 5.2 вытекает очевидная импликация

$$(w\in C(\mathbb{M},\hat{\tau}^*_r(\mathcal{L}),\mathbb{X},\mathcal{I}))\Longrightarrow(w^1(\Theta)\subset(\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};W_\eta;\mathbf{\Gamma}^0_\Xi]\subset(\mathbf{as})[\mathbb{X};\mathcal{I};W;\mathbf{\Gamma}^*_\Xi]). \tag{5.7}$$

Теорема 5.1. *Если* $w \in C_{\mathbf{ap}}(\mathbb{M}, \hat{\tau}_r^*(\mathcal{L}), \mathbb{X}, \mathcal{I})$, *то справедлива цепочка равенств*

$$w^1(\Theta) = (\mathbf{as})[\mathbb{X}; \mathcal{I}; W_\eta; \mathbf{\Gamma}_\Xi^0] = (\mathbf{as})[\mathbb{X}; \mathcal{I}; W; \mathbf{\Gamma}_\Xi^*].$$

Доказательство получаем непосредственной комбинацией теоремы 4.2, (5.7) и предложения 3.3.1 [25], поскольку в условиях настоящей теоремы

$$(\mathbf{as})[\mathbb{X}; \mathcal{I}; W; \mathbf{\Gamma}_\Xi^*] = (\mathbf{as})[\mathbb{X}; \mathcal{I}; w \circ (\mathbb{I}|\Xi); \mathbf{\Gamma}_\Xi^*] = w^1(((\mathbf{as})[\mathbb{M}; \hat{\tau}_r^*(\mathcal{L}); (\mathbb{I}|\Xi); \mathbf{\Gamma}_\Xi^*]) = w^1(\Theta).$$

6. Применение к задаче об асимптотическом поведении областей достижимости

Вернемся к проблеме, обозначенной в разд. 1, уточняя по ходу дела элементы содержательной постановки задачи. Всюду в дальнейшем $I = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ соответствует разд. 1, т. е. $I = [t_0, \vartheta_0[$, где $t_0 < \vartheta_0$. Пусть полуалгебра $\mathcal{L}$ п/м I удовлетворяет условиям: (1) $[a, b[\in \mathcal{L}\ \ \forall a \in I\ \forall b \in I_0$; (2) $\mathcal{L}$ содержится в σ-алгебре борелевских п/м I (топология I индуцируется из $(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$). Полагаем далее, что η — след меры Бореля — Лебега на полуалгебру $\mathcal{L}$, а множество U разд. 1 совпадает с Ξ_η^0. Итак, в данной конкретизации управления $u \in U$ — суть $\mathcal{L}$-ступенчатые r-вектор-функции, удовлетворяющие $\mathbf{F}$-ограничению на выбор закона расходования энергоресурсов. Имеем также Y-ограничение (1.2), которое конкретизирует (4.7) при $\mathbf{n} = m$ и $Y = \mathbf{Y}$. Свойство замкнутости Y предполагаем выполненным в согласии с условиями разд. 4. Будем, однако, говорить об условии (4.7) на выбор $u \in U$, что позволяет использовать асимптотические версии ограничений разд. 4. В отношении W и w естественно принять соглашения, отвечающие задаче разд. 1, связанной с построением ОД в n-мерном фазовом пространстве системы (1.1), где $n \in \mathcal{N}$. Полагаем здесь $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{I} = \tau_\mathbb{R}^{(n)}$. Отображение W_η разд. 5 следует трактовать сейчас (в естественных для разд. 1 обозначениях) как правило, сопоставляющее управлению $u \in U$ вектор

$$x_0 + \int\limits_I B(t)u(t)\eta(dt) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta_0} v(t)dt \in \mathbb{R}^n. \tag{6.1}$$

Тогда (см. разд. 1) $W_\eta(u) = \varphi_u(\vartheta_0)$. Последнее слагаемое выражения в левой части (6.1) обозначаем через V; этот вектор фиксируем и каким-либо возмущениям не подвергаем. Используя символику разд. 3–5, полагаем при $(\mu, f) \in \Xi$, что

$$W(\mu, f) \stackrel{\triangle}{=} \Big(x_0(i) + \sum_{j=1}^r \int\limits_I B_{i,j} f(j) d\mu + V(i)\Big)_{i \in \overline{1,n}}; \tag{6.2}$$

в (6.2) следуем обозначениям разд. 4, 5, однако их перевод на язык, подобный (6.1), не составляет труда. Появление в (6.2) меры μ, отличной от η, можно связать, в частности, с заменой меры Бореля — Лебега конечной взвесью (линейной комбинацией) мер Дирака, что приводит к реализации чисто импульсных воздействий. При этом, однако, $\mathbf{F}$-ограничение на выбор (μ, f) должно соблюдаться; полагаем его обязательным и связываем, как уже отмечалось, с режимами расходования энергоресурсов в каналах управления. Отображение w на непустом множестве $\mathbb{M}$ определяем здесь следующим правилом:

$$w(\mu) \stackrel{\triangle}{=} \Big(x_0(i) + \sum_{j=1}^r \int\limits_I B_{i,j} d\mu_j + V(i)\Big)_{i \in \overline{1,n}}; \tag{6.3}$$

это отображение w $*$-слабо непрерывно: $w \in C(\mathbb{M}, \hat{\tau}_r^*(\mathcal{L}), \mathbb{X}, \mathcal{I})$, где $(\mathbb{X}, \mathcal{I}) = (\mathbb{R}^n, \tau_\mathbb{R}^{(n)})$. По смыслу $\mathbb{M}$ — множество обобщенных управлений (ОУ). Из (6.2), (6.3) следует [15, с. 69], что справедливо (5.5). Отметим, что (6.3) можно рассматривать как терминальное состояние исходной системы, порожденное соответствующим ОУ. С этой целью введем, при $\mu \in \mathbb{M}$, обобщенную траекторию $\tilde{\varphi}_\mu$ как отображение из I в $\mathbb{R}^n$, для которого

$$\tilde{\varphi}_\mu(t) \triangleq (x_0(i) + \sum_{j=1}^{r} \int\limits_{[t_0,t[} B_{i,j} d\mu_j + \int\limits_{t_0}^{t} v_i(\xi) d\xi)_{i \in \overline{1,n}}, \tag{6.4}$$

где $v_1 = v_1(\cdot), \ldots, v_n = v_n(\cdot)$ — суть компоненты $v = v(\cdot)$; тогда $w(\mu) = \tilde{\varphi}_\mu(\vartheta_0)$ и построение $w^1(\Theta)$ можно (см. (6.3), (6.4)) трактовать как построение ОД системы в классе ОУ при интегральных ограничениях (в связи с такой интерпретацией см. [27]).

Отметим, что вышеупомянутая $*$-слабая непрерывность w обеспечивает оценку МП посредством упомянутой ОД в классе ОУ, подобную предложению 5.2. Представление же искомых МП в виде этой ОД использует, как отмечалось в теореме 5.1, совершенность w; см. (2.2). В связи с условиями, достаточными для совершенности w см. [11, гл. 4] (см., например, теорему 4.5.1 в [11]). Кроме того, в связи с возможностью применения традиционных компактифицируемых версий расширения см. (4.26) и построения, подобные [11, (4.3.19)], теореме 4.3.4 в [11] и [26, § 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
3. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
4. **Ченцов А.Г.** Конструирование операций предельного перехода с использованием ультрафильтров измеримых пространств // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 208–222.
5. **Даффин Р.Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959. С. 263–267.
6. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
7. **Chentsov A.G.** Finitely Additive Measures and Extensions of Abstract Control Problems // J. Math. Sci. 2006. Vol. 133, no. 2. P. 1045–1206.
8. **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна — Чеха // Современная математика и ее приложения / Ин-т кибернетики АН Грузии. 2005. Т. 26. С. 119–150.
9. **Ченцов А.Г.** Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах управления // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби: тр. Междунар. семинара. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2006. Т. 1. С. 48–60.
10. **Ченцов А.Г.** Несеквенциальные приближенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 1. С. 216–241.
11. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publishers, 1997. 322 p.
12. **Chentsov A.G.** Finitely Additive Measures and Extension Constructions // Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena. 2001. Vol. 49. P. 531–545.
13. **Ченцов А.Г.** Асимптотически достижимые элементы и их обобщенное представление // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1995. Т. 3. С. 211–244.
14. **Ченцов А.Г.** Векторные конечно-аддитивные меры и вопросы регуляризации задачи о построении множеств асимптотической достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1996. Т. 4. С. 266–295.
15. **Chentsov A.G.** Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. New York, London, and Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. 244 p.
16. **Ченцов А.Г.** К вопросу о корректном расширении одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, вып. 5(305). С. 223–242.

17. **Жданок А.И.** Гамма-компактификация измеримых пространств // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 587–605.
18. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
19. **Бурбаки Н.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
20. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
21. **Федорчук В.В., Филиппов В.В.** Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 332 с.
22. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
23. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.
24. **Bhaskara Rao K.P.S., Bhaskara Rao M.** Theory of charges. A study of finitely additive measures. New York: Acad. Press, 1983. 253 p.
25. **Chentsov A.G. and Morina S.I.** Extensions and Relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publishers, 2002. 408 c.
26. **Ченцов А.Г.** Универсальная асимптотическая реализация интегральных ограничений и конструкции расширения в классе конечно-аддитивных мер// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1998. Т. 5. С. 328–356.
27. **Ченцов А.Г.** К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер // Изв. вузов. Математика. 2002. № 2. С. 58–80.

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук
чл.-корр. РАН
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 2.10.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

УДК 518.9

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. А. Чикрий, И. И. Матичин

Работа посвящена изучению игровых задач сближения для линейных конфликтно управляемых процессов с дробными производными произвольного порядка. При этом рассматриваются классические дробные производные Римана — Лиувилля, регуляризованные производные Джрбашяна — Нерсесяна или Капуто и секвенциальные производные Миллера — Росса. При фиксированных управлениях игроков устанавливаются представления решений в виде аналогов формулы Коши с использованием обобщенных матричных функций Миттаг — Леффлера. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время. Результаты иллюстрируются на модельных примерах игровых задач с простой матрицей и разделенными движениями дробного порядка π и e.

Ключевые слова: дробная производная, игровая задача, многозначное отображение, условие Понтрягина, функция Миттаг — Леффлера.

A. A. Chikrii, I. I. Matichin. Game problems for fractional-order linear systems.

The paper is concerned with studying approach game problems for linear conflict-controlled processes with fractional derivatives of arbitrary order. Namely, the classical Riemann–Liouville fractional derivatives, Dzhrbashyan–Nersesyan or Caputo regularized derivatives, and Miller–Ross sequential derivatives are considered. Under fixed controls of the players, solutions are presented in the form of analogs of the Cauchy formula with the use of generalized matrix Mittag–Leffler functions. The investigation is based on the method of resolving functions, which allows one to obtain sufficient conditions for the termination of the approach problem in some guaranteed time. The results are exemplified by model game problems with a simple matrix and separated motions of fractional order π and e.

Keywords: fractional derivative, game problem, set-valued map, Pontryagin condition, Mittag–Leffler function.

Введение

С известной долей субъективизма методы исследования динамических игр сближения можно условно разделить на два типа. Первый из них соответствует конструкциям, для которых характерна попытка построить оптимальные стратегии игроков. Это методики, связанные с альтернативами Н. Н. Красовского [1, 2], попятные процедуры Л. С. Понтрягина — Б. Н. Пшеничного [3, 4] и идеология Р. Айзекса [5], касающаяся основного уравнения теории дифференциальных игр — уравнения типа Гамильтона — Якоби и нахождения его вязкостных решений [6]. Каждый из этих подходов так или иначе связан с динамическим программированием. Второй тип — это методы, обеспечивающие гарантированный результат. В этом случае вопрос об оптимальности не выносится на передний план. Важнейшим обстоятельством являются достижение цели и выполнение задачи при тех или иных реальных условиях. Удовлетворяют вышеперечисленным требованиям, прежде всего, правило экстремального прицеливания Н. Н. Красовского [7, 8], первый прямой метод Л. С. Понтрягина [3, 9] и метод разрешающих функций [10]. Отметим отдельно, что в линейном случае условия завершения игры, скажем, за время первого поглощения, при описании множеств используют аппарат опорных функций, в то время как метод разрешающих функций базируется на функционалах Минковского, точнее на обратных к ним отображениях. Эти методы являются теоретическим обоснованием хорошо известных проектировщикам ракетной и космической техники методов погонной кривой Л. Эйлера и параллельного сближения.

Поскольку объектом исследования являются линейные конфликтно управляемые процессы с дробными производными, то, по-видимому, следует заранее отметить некоторые отличительные моменты по сравнению с уравнениями целого порядка. Так, если уравнение с дробной производной Римана — Лиувилля, то вместо обычных данных Коши в начальный момент времени $t = 0$ следует задавать интеграл подходящего дробного порядка. Это связано с тем, что решение такого уравнения имеет особенность в нуле и только такие начальные условия естественны в рассматриваемом случае. Однако по физическим соображениям желательно иметь обычную задачу Коши для уравнений с дробными производными [11]. Поэтому М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян [12] и М. Капуто [13] предложили вместо производных Римана — Лиувилля рассматривать их регуляризованные значения, а в качестве начальных данных использовать обычные условия Коши.

Иные обстоятельства привели к рассмотрению секвенциальных дробных производных Миллера — Росса [14]. Стремление понизить порядок дифференциальных уравнений с помощью увеличения их числа натыкается на подчас неприятный факт некоммутативности производных Римана — Лиувилля и Капуто и отсутствия полугруппового свойства у упомянутых производных. Секвенциальные дробные производные являются в этом смысле удобным объектом.

Разумеется, для исследования конфликтно управляемых процессов с дробными производными может быть применен любой из перечисленных методов. В данной работе выбран метод разрешающих функций. Суть метода состоит в построении по известным параметрам процесса некоторых числовых функций, характеризующих интегрально ход конфликтно управляемого процесса, т. е. степень близости траектории к терминальному множеству, и играющих ключевую роль при решении конкретных задач. Выбор управлений осуществляется на основе теорем измеримого выбора типа Филиппова — Кастена [15]. Поскольку разрешающие функции являются опорными к определяющим многозначным отображениям, то аппарат выпуклого анализа позволяет их строить в аналитическом виде для достаточно широкого класса конфликтно управляемых процессов дробного порядка. Использование асимптотических представлений для функций Миттаг — Леффлера, участвующих в определении фундаментальных матриц систем, позволяет сделать заключение о возможности окончания игры за конечное гарантированное время. К рассматриваемому кругу вопросов примыкают работы [16–28].

1. Дробные производные Римана — Лиувилля, Капуто и Миллера — Росса

Обозначим $\mathbb{R}^m$ m-мерное вещественное евклидово пространство и $\mathbb{R}_+$ — положительную вещественную полуось. Пусть $n-1 < \rho < n$, $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел), а $f(t)$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$, — некоторая n раз непрерывно дифференцируемая функция. Дробная производная Римана — Лиувилля порядка ρ ($n-1 < \rho < n$, $n \in \mathbb{N}$) вводится следующим образом [29]:

$$D^\rho f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\rho)}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n \int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\rho-n+1}} d\tau, \tag{1.1}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, удовлетворяющая уравнению $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Справедлива формула

$$D^\rho f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\rho}}{\Gamma(k-\rho+1)} f^{(k)}(0) + \frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \int\limits_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\rho-n+1}} d\tau. \tag{1.2}$$

Таким образом, производная в смысле Римана — Лиувилля может быть представлена в виде суммы сингулярных членов

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\rho}}{\Gamma(k-\rho+1)} f^{(k)}(0) \tag{1.3}$$

и интеграла

$$\frac{1}{\Gamma(n-\rho)}\int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\rho-n+1}}d\tau.$$

Последний носит название дробной производной в смысле Капуто или регуляризованной дробной производной. Присутствие слагаемых (1.3) приводит к тому, что дробные производные Римана — Лиувилля имеют особенность в нуле и в задаче Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка в смысле Римана — Лиувилля (при описании динамических систем) необходимо задавать начальные условия специального вида, не имеющие четкой физической интерпретации.

Этих недостатков дробной производной Римана — Лиувилля лишена регуляризованная производная порядка ρ $(n-1<\rho<n,\ n\in\mathbb{N})$

$$D^{(\rho)}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\rho)}\int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\rho+1-n}}d\tau = D^{\rho}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\rho}}{\Gamma(k-\rho+1)}f^{(k)}(0), \tag{1.4}$$

которая была, по-видимому, впервые введена Капуто в работе [13], а также независимо от него Джрбашяном и Нерсесяном в работе [12].

Как производные Римана — Лиувилля, так и производные Капуто не обладают ни полугрупповым свойством, ни тем более свойством коммутативности, т. е.

$$\mathbf{D}^{\rho+\sigma}f(t)\neq\mathbf{D}^{\rho}\,\mathbf{D}^{\sigma}f(t),\quad \mathbf{D}^{\rho}\,\mathbf{D}^{\sigma}f(t)\neq\mathbf{D}^{\sigma}\,\mathbf{D}^{\rho}f(t),$$

где $\mathbf{D}^{\rho}$ обозначает оператор дробного дифференцирования порядка ρ по Риману — Лиувиллю или Капуто. В связи с этим Миллером и Россом [14] были введены так называемые секвенциальные производные, определяемые следующим образом:

$$\mathcal{D}^{\rho}f(t)=\mathbf{D}^{\rho_1}\,\mathbf{D}^{\rho_2}\ldots\mathbf{D}^{\rho_m}f(t), \tag{1.5}$$

где $\rho=(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)$ — мультииндекс, а функция $f(t)$ предполагается достаточное число раз непрерывно дифференцируемой. Вообще говоря, в качестве оператора $\mathbf{D}^{\rho}$, лежащего в основе секвенциальной производной Миллера — Росса, можно использовать оператор дробного дифференцирования по Риману — Лиувиллю, Капуто или любую другую его разновидность. В частности, для целых ρ_i это может быть оператор обычного дифференцирования $\left(\frac{d}{dt}\right)^{\rho_i}$. Использование секвенциальных производных Миллера — Росса позволяет, в частности, понижать порядок дифференциальных уравнений.

Выберем некоторое ν, $n-1<\nu<n$, $n\in\mathbb{N}$. Остановимся подробнее на случае, когда $\rho=(j,\nu-n+1,n-1-j)$, $j=0,\ldots,n-1$. Введем обозначения

$$\mathcal{D}_j^{\nu}f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}D^{\nu-n+1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j}f(t),\quad \mathcal{D}_j^{(\nu)}f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}D^{(\nu-n+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1-j}f(t),$$

где $j=0,1,\ldots,n-1$.

Следующая лемма устанавливает связь секвенциальных производных специального вида $\mathcal{D}_j^{\nu}f(t)$, $\mathcal{D}_j^{(\nu)}f(t)$ с классическими производными Римана — Лиувилля и Капуто, а также друг с другом.

Лемма 1. *Пусть $n-1<\nu<n$, $n\in\mathbb{N}$, а функция $f(t)$ имеет абсолютно непрерывные*

производные до порядка $(n-1)$ включительно. Тогда справедливы равенства

$$\mathcal{D}_0^{(\nu)} f(t) = D^{(\nu)} f(t) = D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

$$\mathcal{D}_1^{(\nu)} f(t) = \mathcal{D}_0^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \frac{t^{n-1-\nu}}{\Gamma(n-\nu)} f^{(n-1)}(0) = D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

. . . .

$$\mathcal{D}_j^{(\nu)} f(t) = \mathcal{D}_{j-1}^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=n-j}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = D^\nu f(t) - \sum_{k=0}^{n-1-j} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0),$$

. . . .

$$\mathcal{D}_{n-1}^{(\nu)} f(t) = \mathcal{D}_{n-2}^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = D^\nu f(t) - \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} f(0),$$

$$\mathcal{D}_{n-1}^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} f^{(k)}(0) = D^\nu f(t).$$

Доказательство приведенных фактов и многих последующих можно найти в [30].

Учитывая равенства $\mathcal{D}_j^{(\nu)} f(t) = \mathcal{D}_{j-1}^\nu f(t)$ и положив $\mathcal{D}_n^{(\nu)} f(t) = D^\nu f(t)$, можно ввести общее обозначение

$$\mathfrak{D}_j^\nu f(t) = \mathcal{D}_j^{(\nu)} f(t) = \mathcal{D}_{j-1}^\nu f(t),$$

где $n-1<\nu<n$, $j=0,\dots,n$. Ясно, что $\mathfrak{D}_0^\nu f(t) = D^{(\nu)} f(t)$ и $\mathfrak{D}_n^\nu f(t) = D^\nu f(t)$.

2. Системы дробного порядка

В работе [31] была определена обобщенная матричная функция Миттаг — Леффлера:

$$E_\eta(B;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(k\eta^{-1}+\mu)}, \tag{2.1}$$

где $\eta>0$, $\mu\in\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), а B — произвольная квадратная матрица порядка m. Обобщенная матричная функция Миттаг — Леффлера играет важную роль при изучении линейных систем дробного порядка.

Пусть $g(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$, — измеримая ограниченная функция.

Рассмотрим динамическую систему, эволюция которой описывается уравнением

$$D^\rho z = Az + g, \quad n-1<\rho<n, \tag{2.2}$$

с начальными условиями

$$D^{\rho-k} z(t)\big|_{t=0} = z_k^0, \quad k=1,\dots,n. \tag{2.3}$$

Траектория системы (2.2), (2.3) имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=1}^{n} t^{\rho-k} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho;\rho-k+1) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(A(t-\tau)^\rho;\rho) g(\tau)\,d\tau. \tag{2.4}$$

Рассмотрим теперь динамическую систему дробного порядка в смысле Капуто, описываемую уравнением

$$D^{(\rho)} z = Az + g, \quad n-1<\rho<n, \tag{2.5}$$

с начальными условиями

$$z^{(k)}(0) = z_k^0, \quad k = 0, \dots, n-1. \tag{2.6}$$

Траектория системы (2.5), (2.6) имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; k+1) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(A(t-\tau)^\rho; \rho) g(\tau) d\tau. \tag{2.7}$$

Перейдем теперь к рассмотрению систем, описываемых с помощью секвенциальных производных специального вида $\mathfrak{D}_j^\rho$. Рассмотрим динамическую систему, эволюция которой задана уравнением

$$\mathfrak{D}_j^\rho z = Az + g, \quad n-1 < \rho < n, \quad j \in \{0, 1, \dots, n\} \tag{2.8}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{j-k-1}^{\rho-k-1} z(t)\big|_{t=0} &= \tilde{z}_k^0, \quad k = 0, \dots, j-1, \\ z^{(l)}(0) &= z_l^0, \quad l = 0, \dots, n-j-1. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Траектория системы (2.8), (2.9) имеет вид

$$\begin{aligned} z(t) = \sum_{l=0}^{n-j-1} t^l E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; l+1) z_l^0 + \sum_{k=0}^{j-1} t^{\rho-k-1} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho - k) \tilde{z}_k^0 \\ + \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(A(t-\tau)^\rho; \rho) g(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. Постановка задачи

В этом разделе дается постановка задачи сближения с терминальным множеством для конфликтно управляемых процессов, динамика которых описывается при помощи дробных производных Римана — Лиувилля, Капуто и Миллера — Росса.

Рассмотрим конфликтно управляемый процесс, эволюция которого описывается следующей системой дробного порядка:

$$\mathbf{D}^\rho z = Az + \varphi(u, v), \quad n-1 < \rho < n. \tag{3.1}$$

Здесь, как и ранее, $\mathbf{D}^\rho$ обозначает оператор дробного дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля, Капуто или Миллера — Росса. В дальнейшем будет ясно из контекста, какой из операторов подразумевается. Фазовый вектор z принадлежит $\mathbb{R}^m$, A — квадратная матрица порядка m, блок управления определяется непрерывной по совокупности переменных функцией $\varphi(u, v)$, $\varphi\colon U \times V \to \mathbb{R}^m$, где u и v, $u \in U$, $v \in V$, — это управляющие параметры соответственно первого и второго игрока, а множества допустимых управлений U и V принадлежат множеству $K(\mathbb{R}^m)$ непустых компактов пространства $\mathbb{R}^m$.

Если $\mathbf{D}^\rho$ — это оператор дробного дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля, т. е. $\mathbf{D}^\rho = D^\rho$, то начальные условия процесса (3.1) задаются в виде (2.3). В таком случае обозначим $z^0 = (z_{11}^0, \dots, z_{n1}^0)$. Если же производная в (3.1) понимается в смысле Капуто, $\mathbf{D}^\rho = D^{(\rho)}$, начальные условия имеют вид (2.6) и $z^0 = (z_{02}^0, \dots, z_{n-1\,2}^0)$. Для секвенциальных производных специального вида $\mathbf{D}^\rho = \mathfrak{D}_j^\rho$ начальные условия задаются равенствами (2.9) и $z^0 = (\tilde{z}_0^0, \dots, \tilde{z}_{j-1}^0, z_0^0, \dots, z_{n-j-1}^0)$.

Наряду с динамикой процесса (3.1) и начальными условиями задано цилиндрическое терминальное множество

$$M^* = M_0 + M, \tag{3.2}$$

где M_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$, $M \in K(L)$, а $L = M_0^\perp$ — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^m$.

При выбранных управлениях первого и второго игроков в виде измеримых по Лебегу функций $u(t)$ и $v(t)$ со значениями соответственно из областей U и V задача Коши для процесса (3.1) с соответствующими начальными условиями имеет единственное непрерывное решение [14,29].

Рассмотрим следующую игровую ситуацию. Первый игрок стремится привести траекторию процесса (3.1) на множество (3.2), а второй — максимально оттянуть момент попадания траектории на терминальное множество. Приняв сторону первого игрока, будем полагать, что управление второго игрока представляет собой произвольную измеримую функцию $v(t)$ со значениями из V, а первый игрок в каждый момент времени t, $t \geq 0$, формирует свое управление на основании информации о z^0 и $v(t)$:

$$u(t) = u(z^0, v(t)), \quad u(t) \in U. \tag{3.3}$$

Таким образом, $u(t)$ является контруправлением по Красовскому [2], предписываемым стробоскопическими стратегиями Хайека [32].

При решении сформулированной игровой задачи мы используем метод разрешающих функций [10, 31]. Обычно этот метод позволяет реализовать процесс преследования в классе квазистратегий. Однако в данной статье использование результатов из [33] дает возможность получить достаточные условия завершения преследования в указанном методе с помощью контруправлений.

4. Метод разрешающих функций

Обозначим Π оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^m$ на L. Положим $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : \ u \in U\}$ и рассмотрим многозначные отображения

$$W(t, v) = \Pi t^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho)\varphi(U, v), \quad W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v),$$

определенные на множествах $\mathbb{R}_+ \times V$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно. Условие

$$W(t) \neq \varnothing, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.1}$$

обычно называют условием Понтрягина. Оно отражает определенный тип преимущества по ресурсам управления первого игрока над вторым. В случае, когда условие (4.1) не имеет места, т. е. для некоторых $t \in \mathbb{R}_+$, $W(t) = \varnothing$, мы будем использовать модифицированное условие Понтрягина. Суть его состоит в том, что соотношение между ресурсами управления игроков изменяется в пользу первого игрока, а именно, в те моменты, когда $W(t) = \varnothing$, ресурсы управления выравниваются, а затраченный на это ресурс впоследствии вычитается из терминального множества. Формально процедура представляется следующим образом. Вводятся измеримая ограниченная по t матричная функция $C(t)$ и многозначные отображения

$$W^*(t, v) = \Pi t^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho)\varphi(U, C(t)v), \quad W^*(t) = \bigcap_{v \in V} W^*(t, v),$$

$$M(t) = M \overset{*}{-} \int\limits_0^t \tau^{\rho-1} \Pi E_{\frac{1}{\rho}}(A\tau^\rho; \rho)\varphi^*(\tau, U, V) d\tau,$$

где $\varphi^*(t, u, v) = \varphi(u, v) - \varphi(u, C(t)v)$, а $X \overset{*}{-} Y = \{z : \ z + Y \subset X\} = \bigcap_{y \in Y}(X - y)$ является операцией геометрического вычитания множеств по Минковскому [3]. Под интегралом от многозначного отображения понимается интеграл Аумана, т. е. объединение интегралов от всевозможных измеримых селекторов данного многозначного отображения [34]. В дальнейшем будем говорить, что выполнено модифицированное условие Понтрягина, если существует такая измеримая ограниченная матричная функция $C(t)$, что

$$W^*(t) \neq \varnothing \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.2}$$

$$M(t) \neq \varnothing \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.3}$$

Таким образом, условие Понтрягина (4.1) заменено на пару условий (4.2), (4.3). Легко видеть, что при $C(t) = I$, где I — единичная матрица, условие (4.3) выполнено автоматически, а условие (4.2) совпадает с условием (4.1), поскольку в этом случае $W^*(t) \equiv W(t)$. Отсюда следует, что модифицированное условие Понтрягина (4.2), (4.3) является, вообще говоря, менее ограничительным предположением, нежели условие Понтрягина (4.1).

В силу свойств параметров процесса (3.1) многозначное отображение $\varphi(U, C(t)v)$, $v \in V$, является непрерывным в метрике Хаусдорфа. Таким образом, учитывая аналитические свойства обобщенной матричной функции Миттаг — Леффлера, многозначное отображение $W^*(t,v)$ является измеримым по t, $t \in \mathbb{R}_+$, и замкнутозначным по v, $v \in V$. Отсюда следует [15], что многозначное отображение $W^*(t)$ также измеримо по t и замкнутозначно. Обозначим $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда очевидно

$$W^*(t,v)\colon \mathbb{R}_+ \times V \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m), \quad W^*(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m).$$

В таком случае говорят, что измеримые по t многозначные отображения $W^*(t,v)$, $W^*(t)$ являются нормальными [34].

Из условия (4.2) и теоремы об измеримом выборе [15] следует, что существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma(\cdot)$ такой, что $\gamma(t) \in W^*(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Обозначим Γ множество всех таких селекторов.

Обозначим также $h(t,z^0)$ решение однородной системы (3.1) при $\varphi(u,v) \equiv 0$. Таким образом, если $\mathbf{D}^\rho$ обозначает оператор дробного дифференцирования по Риману — Лиувиллю ($\mathbf{D}^\rho = D^\rho$), то с учетом определений [11]

$$h(t,z^0) = \sum_{k=1}^{n} t^{\rho-k} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho-k+1) z_k^0,$$

где

$$z_k^0 = D^{\rho-k} z(t)\big|_{t=0}, \quad k = 1,\dots,n.$$

Для регуляризованной дробной производной Капуто ($\mathbf{D}^\rho = D^{(\rho)}$) мы получаем

$$h(t,z^0) = \sum_{k=0}^{n-1} t^{k} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; k+1) z_k^0,$$

где

$$z_k^0 = z^{(k)}(0), \quad k = 0,\dots,n-1.$$

В случае секвенциальных производных $\mathbf{D}^\rho = \mathfrak{D}_j^\rho$ мы имеем

$$h(t,z^0) = \sum_{l=0}^{n-j-1} t^{l} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; l+1) z_l^0 + \sum_{k=0}^{j-1} t^{\rho-k-1} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho-k) \tilde{z}_k^0,$$

где

$$\tilde{z}_k^0 = \mathfrak{D}_{j-k-1}^{\rho-k-1} z(t)\big|_{t=0}, \quad k = 0,\dots,j-1,$$

$$z_l^0 = z^{(l)}(0), \quad l = 0,\dots,n-j-1.$$

Введем функцию

$$\xi(t) = \Pi h(t, z^0) + \int\limits_0^t \gamma(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4.4}$$

где $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ — некоторый фиксированный селектор. В силу сделанных преположений селектор $\gamma(\cdot)$ является суммируемым.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v) = \big\{\alpha \geq 0\colon\ [W^*(t-\tau, v) - \gamma(t-\tau)] \cap \alpha[M(t) - \xi(t)] \neq \varnothing\big\}, \tag{4.5}$$

заданное на $\Delta \times V$, где $\Delta = \{(t,\tau):\ 0 \leq \tau \leq t < \infty\}$, и изучим его опорную функцию в направлении $+1$

$$\alpha(t,\tau,v) = \sup\{\alpha\colon\ \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\}, \quad (t,\tau) \in \Delta, \quad v \in V.$$

Эта функция называется разрешающей функцией [10].

Учитывая модифицированное условие Понтрягина (4.2), (4.3), свойства параметров конфликтно управляемого процесса (3.1), а также теоремы о характеризации и обратном образе, можно показать, что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ является $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-измеримым [15] по τ, v, $\tau \in [0,t]$, $v \in V$, а разрешающая функция $\alpha(t,\tau,v)$ является $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$-измеримой по τ, v в силу теоремы об опорной функции [15] при $\xi(t) \notin M(t)$.

Следует отметить, что при $\xi(t) \in M(t)$ мы имеем $\mathfrak{A}(t,\tau,v) = [0,\infty)$ и, следовательно, $\alpha(t,\tau,v) = +\infty$ для всех $\tau \in [0,t]$, $v \in V$.

Обозначим

$$\mathfrak{T} = \left\{t \in \mathbb{R}_+\colon\ \int\limits_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t,\tau,v) d\tau \geq 1\right\}. \tag{4.6}$$

Если для некоторого $t > 0$ $\xi(t) \notin M(t)$, мы будем предполагать, что функция $\inf\limits_{v \in V} \alpha(t,\tau,v)$ измерима по τ, $\tau \in [0,t]$. Если $\xi(t) \in M(t)$, то $\alpha(t,\tau,v) = +\infty$ для $\tau \in [0,t]$, и в этом случае естественно положить значение интеграла в (4.6) равным $+\infty$. Тогда неравенство в (4.6) выполнено автоматически. В случае, когда неравенство в фигурных скобках в (4.6) не выполняется при всех $t > 0$, полагаем $\mathfrak{T} = \varnothing$. Пусть $T \in \mathfrak{T} \neq \varnothing$.

Предположение 1. *Многозначное отображение $\mathfrak{A}(T,\tau,v)$ выпуклозначно при всех $\tau \in [0,T]$, $v \in V$.*

Теорема 1. *Пусть для игровой задачи* (3.1), (3.2) *существует ограниченная измеримая матричная функция $C(t)$ такая, что выполнены условия* (4.2), (4.3), *и пусть множество M выпукло. Если существует конечное число T, $T \in \mathfrak{T} \neq \varnothing$, такое, что выполнено предположение* 1, *то траектория процесса* (3.1) *может быть выведена на множество* (3.2) *из начального положения z^0 в момент T с помощью контруправления* (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\tau)$, $v : [0,T] \to V$, — произвольная измеримая функция. Рассмотрим вначале случай $\xi(T) \notin M(T)$. Обозначим $\alpha(T) = \int_0^T \inf\limits_{v \in V} \alpha(T,\tau,v) d\tau$ и положим

$$\alpha^*(T,\tau) = \frac{1}{\alpha(T)} \inf_{v \in V} \alpha(T,\tau,v).$$

Поскольку $\alpha(T) \geq 1$, согласно (4.6) и в силу предположения 1 функция $\alpha^*(T,\tau)$, $\alpha^*(T,\tau) \leq \alpha(T,\tau,v)$, $\tau \in [0,T]$, $v \in V$, является измеримым селектором для каждого из многозначных отображений $\mathfrak{A}(T,\tau,v)$, $v \in V$, т. е. $\alpha^*(T,\tau) \in \mathfrak{A}(T,\tau,v)$, $\tau \in [0,T]$, $v \in V$. Рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau,v) = \Big\{ u \in U\colon \Pi(T-\tau)^{\rho-1}E_{\frac{1}{\rho}}(A(T-\tau)^{\rho};\rho)\varphi(u,C(T-\tau)v) - \gamma(T-\tau) \in \alpha^*(T,\tau)[M(T)-\xi(T)] \Big\}. \tag{4.7}$$

Поскольку в силу сделанных предположений функция $\alpha^*(T,\tau)$ измерима, $M(T) \in K(\mathbb{R}^m)$, так как $M \in K(\mathbb{R}^m)$, а вектор $\xi(T)$ ограничен, следовательно отображение $\alpha^*(T,\tau)[M(T)-\xi(T)]$ измеримо по τ. Кроме того, левая часть включения в (4.7) является $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-измеримой по (τ,v) и непрерывной по u. Поэтому [34] отображение $U(\tau,v)$ является $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-измеримым. Следовательно, согласно теореме об измеримом выборе в нем существует $\mathcal{L}\times\mathcal{B}$-измеримый селектор $u(\tau,v)$, который в свою очередь является суперпозиционно измеримой функцией. Положим управление первого игрока равным $u(\tau) = u(\tau,v(\tau))$, $\tau \in [0,T]$.

В случае $\xi(T) \in M(T)$ сформируем управление первого игрока следующим образом. Положим в (4.7) $\alpha^*(T,\tau) \equiv 0$ и обозначим $U_0(\tau,v)$ многозначное отображение, полученное таким образом из $U(\tau,v)$. Выберем управление первого игрока в виде $u_0(\tau) = u_0(\tau,v(\tau))$, $\tau \in [0,T]$, где $u_0(\tau,v)$ — это измеримый селектор отображения $U_0(\tau,v)$.

Покажем, что в каждом из рассмотренных выше случаев траектория процесса (3.1) будет выведена на терминальное множество в момент T.

Имеет место формула

$$\Pi z(T) = \Pi h(t,z^0) + \int_0^T (T-\tau)^{\rho-1}\Pi E_{\frac{1}{\rho}}(A(T-\tau)^{\rho};\rho)\varphi(u(\tau),v(\tau))d\tau. \tag{4.8}$$

Рассмотрим случай $\xi(T) \notin M(T)$. Учитывая вид множеств $U(\tau,v)$, $U_0(\tau,v)$ и закон управления первого игрока, из (4.8) мы получаем следующее включение

$$\Pi z(T) \in \xi(T)\left[1 - \int_0^T \alpha^*(T,\tau)d\tau\right] + \int_0^T \alpha^*(T,\tau)M(T)d\tau + \int_0^T (T-\tau)^{\rho-1}\Pi E_{\frac{1}{\rho}}(A(T-\tau)^{\rho};\rho)\varphi^*(T-\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau.$$

Так как $M(T)$ — выпуклый компакт в силу $M \in \operatorname{co} K(\mathbb{R}^m)$, а $\alpha^*(T,\tau)$ — неотрицательная функция и $\int_0^T \alpha^*(T,\tau)d\tau = 1$, то $\int_0^T \alpha^*(T,\tau)M(T)d\tau = M(T)$; следовательно,

$$\Pi z(T) \in M(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\rho-1}\Pi E_{\frac{1}{\rho}}(A(T-\tau)^{\rho};\rho)\varphi^*(T-\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau.$$

Откуда с учетом вида множества $M(T)$ из определения операции геометрического вычитания следует включение $\Pi z(T) \in M$.

Пусть теперь $\xi(T) \in M(T)$. Тогда из равенства (4.8) с учетом определения множества $U_0(\tau,v)$ получим

$$\Pi z(T) = \xi(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\rho-1}\Pi E_{\frac{1}{\rho}}(A(T-\tau)^{\rho};\rho)\varphi^*(T-\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau$$
$$\in M(T) + \int_0^T (T-\tau)^{\rho-1}\Pi E_{\frac{1}{\rho}}(A(T-\tau)^{\rho};\rho)\varphi^*(T-\tau,u(\tau),v(\tau))d\tau.$$

Отсюда вытекает включение $\Pi z(T) \in M$ or $z(T) \in M^*$.

5. Случай разделенной динамики

Рассмотрим случай, когда эволюция состояния каждого игрока описывается независимыми уравнениями с дробными производными. В частности, введенные и рассмотренные значительно ранее Н. Красовским [2, 7] однотипные объекты, для которых схемы различных методов позволяют провести вычисления почти до конца, укладываются в предлагаемую ниже схему.

Пусть динамика первого игрока, которого мы будем называть *преследователем*, описывается уравнением

$$\mathbf{D}^{\rho} x = Ax + u, \quad x \in \mathbb{R}^{m_1}, \quad n_1 - 1 < \rho < n_1. \tag{5.1}$$

Динамика второго игрока, которого мы назовем *убегающим*, задается уравнением

$$\mathbf{D}^{\sigma} y = By + v, \quad y \in \mathbb{R}^{m_2}, \quad n_2 - 1 < \sigma < n_2. \tag{5.2}$$

Здесь A и B — квадратные матрицы порядка m_1 и m_2, соответственно, $U \in K(\mathbb{R}^{m_1})$, $V \in K(\mathbb{R}^{m_2})$. Отметим, что система (5.1), (5.2) не является частным случаем процесса (3.1), так как числа ρ и σ произвольны. Предполагается, что начальные условия для систем (5.1), (5.2) заданы в виде, соответствующем операторам $\mathbf{D}^{\rho}$, $\mathbf{D}^{\sigma}$, и определяются векторами начальных состояний x^0, y^0 преследователя и убегающего соответственно.

Терминальное множество задается ε-расстоянием по первым s ($s \le \min(m_1, m_2)$) компонентам векторов x и y, т. е. игра считается законченной, как только

$$\|x - y\|_s \le \varepsilon. \tag{5.3}$$

Здесь ε — фиксированное число, $0 \le \varepsilon < \infty$.

Введем ортопроекторы $\Pi_1 : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^s$, $\Pi_2 : \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^s$, выделяющие у векторов x и y первые s координат. Тогда неравенство (5.3) можно переписать в виде

$$\|\Pi_1 x - \Pi_2 y\| \le \varepsilon. \tag{5.4}$$

Ситуацию, когда выполнено неравенство (5.3), (5.4), назовем поимкой.

В силу (2.4)–(2.10) траектории систем (5.1), (5.2) имеют вид

$$x(t) = h_x(x^0, t) + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(A(t-\tau)^{\rho}; \rho) u(\tau) d\tau,$$

$$y(t) = h_y(y^0, t) + \int\limits_0^t (t-\tau)^{\sigma-1} E_{\frac{1}{\sigma}}(B(t-\tau)^{\sigma}; \sigma) v(\tau) d\tau,$$

где $h_x(x^0, t)$ и $h_y(y^0, t)$ — общие решения однородных систем $\mathbf{D}^{\rho} x = Ax$, $\mathbf{D}^{\sigma} y = By$ соответственно с начальными условиями x^0, y^0.

Следуя схеме метода разрешающих функций, рассмотрим многозначные отображения

$$W_1(t, v) = t^{\rho-1} \Pi_1 E_{\frac{1}{\rho}}(At^{\rho}; \rho) U - t^{\sigma-1} \Pi_2 E_{\frac{1}{\sigma}}(Bt^{\sigma}; \sigma) C_1(t) v;$$
$$W_1(t) = t^{\rho-1} \Pi_1 E_{\frac{1}{\rho}}(At^{\rho}; \rho) U \overset{*}{-} t^{\sigma-1} \Pi_2 E_{\frac{1}{\sigma}}(Bt^{\sigma}; \sigma) C_1(t) V. \tag{5.5}$$

Здесь $C_1(t)$ — матричная функция для выравнивания ресурсов управления. Наряду с многозначным отображением $W_1(t)$ модифицированное условие Понтрягина включает отображение

$$M_1(t) = \varepsilon S \overset{*}{-} \int\limits_0^t \tau^{\sigma-1} \Pi_2 E_{\frac{1}{\sigma}}(B\tau^{\sigma}; \sigma)(C_1(\tau) - I) V d\tau, \tag{5.6}$$

где S — замкнутый шар с центром в нуле единичного радиуса.

Будем говорить, что выполнено модифицированное условие Понтрягина, если с некоторой измеримой ограниченной матричной функцией $C_1(t)$ многозначные отображения, определяемые формулами (5.5), (5.6), непусты для всех $t \geq 0$.

Выбрав в $W_1(t)$ некоторый измеримый селектор $\gamma_1(t)$ ($\gamma_1(t) \in W_1(t)$ $\forall t \geq 0$), положим

$$\xi_1(t) = \Pi_1 h_x(x^0, t) - \Pi_2 h_y(y^0, t) + \int_0^t \gamma_1(\tau) d\tau.$$

Как и ранее, введем многозначное отображение

$$\mathfrak{A}_1(t, \tau, v) = \Big\{ \alpha \geq 0 : [W_1(t-\tau) - \gamma_1(t-\tau)] \cap \alpha[M_1(t) - \xi(t)] \neq \varnothing \Big\},\ \mathfrak{A}_1 \colon \Delta \times V \to 2^{\mathbb{R}_+}, \quad (5.7)$$

и его опорную функцию в направлении $+1$ (разрешающая функция)

$$\alpha_1(t, \tau, v) = \sup\{\alpha :\ \alpha \in \mathfrak{A}_1\}, \quad \alpha_1 : \Delta \times V \to \mathbb{R}_+. \quad (5.8)$$

С помощью разрешающей функции определим множество

$$\mathfrak{T}_1 = \Big\{ t \geq 0 : \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha_1(t, \tau, v) d\tau \geq 1 \Big\}. \quad (5.9)$$

Пусть $T \in \mathfrak{T}_1 \neq \varnothing$.

Предположение 2. *Отображение $\mathfrak{A}_1(T, \tau, v)$ выпуклозначно для всех $\tau \in [0, T]$, $v \in V$.*

Теорема 2. *Пусть для игровой задачи* (5.1)–(5.4) *с разделенной динамикой игроков существует ограниченная измеримая матричная функция $C_1(t)$, $t \geq 0$, такая, что многозначные отображения $W_1(t)$ и $M_1(t)$ имеют непустые значения для всех $t \geq 0$. Если существует конечное число T, $T \in \mathfrak{T}_1 \neq \varnothing$, такое, что выполнено предположение* 2, *тогда поимка в игре* (5.1)–(5.4) *происходит в момент T.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 с учетом специфики задачи (5.1)–(5.4).

6. Игра с простой матрицей

Перейдем к исследованию частных случаев и примеров. Рассмотрим конфликтно управляемый процесс типа (3.1), (3.2) частного вида

$$D^\rho z = \lambda z + u - v, \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad u \in aS, \quad v \in S, \quad a > 1, \quad (6.1)$$

где λ — действительное число, $n-1 < \rho < n$, с начальными условиями (2.3) и терминальным множеством $M^* = \varepsilon S$, $\varepsilon \geq 0$. Очевидно, что здесь $A = \lambda I$, $\varphi(u, v) = u - v$, $U = aS$, $V = S$, $M_0 = \{0\}$, а $M = \varepsilon S$. Поэтому $L = M_0^\perp = \mathbb{R}^m$, а ортопроектор Π является оператором тождественного преобразования. Учитывая, что для матрицы $A = \lambda I$ справедливо равенство

$$E_\eta(A; \mu) = E_\eta(\lambda; \mu) I,$$

где $E_\eta(\lambda; \mu)$ — обобщенная скалярная функция Миттаг — Леффлера [29], решение задачи Коши для системы (6.1) имеет вид

$$z(t) = \sum_{k=1}^{n} t^{\rho-k} E_{\frac{1}{\rho}}(At^\rho; \rho - k + 1) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda(t-\tau)^\rho; \rho)(u(\tau) - v(\tau)) d\tau.$$

Следуя схеме метода разрешающих функций, проверим условие Понтрягина (4.1) для процесса (6.1). Тогда

$$W(t,v)=t^{\rho-1}E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho};\rho)(aS-v),\quad W(t)=\left|t^{\rho-1}E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho};\rho)\right|(a-1)S$$

и условие Понтрягина выполнено автоматически. Учитывая, что значения многозначного отображения $W(t)$ представляют собой шары с центром в нуле переменного радиуса, положим $\gamma(t)\equiv 0$. Тогда

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{n}t^{\rho-k}E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho};\rho-k+1)z_k^0.$$

Так как условие Понтрягина выполнено, можно положить $C(t)\equiv I$. Разрешающая функция имеет вид $\alpha(t,\tau,v)=\{\alpha\geq 0:\ (t-\tau)^{\rho-1}E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda(t-\tau)^{\rho};\rho)(aS-v)\cap\alpha[\varepsilon S-\xi(t)]\neq\varnothing\}$, и ее можно найти в явном виде как наибольший положительный корень квадратного уравнения относительно α

$$\|\omega_2(t-\tau)-\alpha\xi(t)\|=\omega_1(t-\tau)+\alpha\varepsilon,$$

где $\omega_1(t)=at^{\rho-1}E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho};\rho)$, $\omega_2(t)=t^{\rho-1}E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho};\rho)$. Решая это уравнение, получим

$$\alpha(t,\tau,v)=\frac{\omega_2(t-\tau)\,(\xi(t),v)}{\|\xi(t)\|^2-\varepsilon^2}$$

$$+\frac{\sqrt{[\omega_2(t-\tau)\,(\xi(t),v)-\varepsilon]^2+\left(\|\xi(t)\|^2-\varepsilon^2\right)\left[\omega_1^2(t-\tau)-\|\omega_2(t-\tau)v\|^2\right]}}{\|\xi(t)\|^2-\varepsilon^2}.$$

Откуда

$$\min_{\|v\|\leq 1}\alpha\,(t,\tau,v)=\frac{(a-1)\,|\omega_2(t-\tau)|}{\|\xi(t)\|-\varepsilon}.$$

Тогда в силу соотношения (4.6) время окончания игры определяется как наименьший положительный корень уравнения

$$\int\limits_0^t(a-1)(t-\tau)^{\rho-1}\left|E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda(t-\tau)^{\rho};\rho\right)\right|d\tau=\left\|\sum_{k=1}^{n}t^{\rho-k}E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho};\rho-k+1)z_k^0\right\|-\varepsilon. \tag{6.2}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^t(a-1)\tau^{\rho-1}E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda\tau^{\rho};\rho\right)d\tau=(a-1)t^{\rho}E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\rho+1\right),$$

при $\lambda>0$ получим уравнение

$$t^{\rho}E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\rho+1\right)=\frac{\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}t^{\rho-k}E_{\frac{1}{\rho}}(\lambda t^{\rho};\rho-k+1)z_k^0\right\|-\varepsilon}{a-1}$$

для определения момента окончания игры (6.1).

Естественно предположить, что $\xi(t)$ при $t=0$ не принадлежит шару εS. В противном случае игра уже закончена, еще не начавшись. Последнее предположение влечет за собой условие $\left\|z_k^0\right\|\neq 0$. Таким образом, при $t=0$ левая часть равенства (6.2) равна 0, а правая стремится к $+\infty$ при $t\to 0$, при $t>0$ обе части непрерывны по t. Исследуем скорость роста при $t\to\infty$ левой и правой части уравнения (6.2). Для этого воспользуемся асимптотическими представлениями функций Миттаг — Леффлера [35]. При $\rho < 2$, любом μ и $\lambda > 0$ имеем при любом натуральном p

$$E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\mu\right) = \frac{1}{\rho}\left(\lambda t^{\rho}\right)^{\frac{1-\mu}{\rho}} e^{(\lambda t^{\rho})^{\frac{1}{\rho}}} - \sum_{k=1}^{p} \frac{(\lambda t^{\rho})^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho)} + O\left((t^{\rho})^{-1-p}\right). \tag{6.3}$$

Используя это представление, получим

$$\begin{aligned} t^{\rho} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\rho+1\right) &= \frac{1}{\rho}\lambda^{-1} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \ldots \\ t^{\rho-i} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\rho+1-i\right) &= \frac{1}{\rho}\lambda^{\frac{1}{\rho}(i-\rho)} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \ldots . \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\rho} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\rho+1\right)}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{k} t^{\rho-i} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};1+\rho-i\right) z_i^0 \right\| - \varepsilon} = \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda^{i/\rho} z_i^0 \right\|^{-1}.$$

Таким образом, корень уравнения (6.2) существует, если

$$a - 1 > \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda^{i/\rho} z_i^0 \right\|. \tag{6.4}$$

Рассмотрим случай $\lambda < 0$, $\rho < 2$, μ любое. Тогда [35] при любом натуральном p

$$E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\mu\right) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{\lambda^{-k} t^{-k\rho}}{\Gamma(\mu - k\rho)} + O\big(t^{-(1+p)\rho}\big). \tag{6.5}$$

Используя это асимптотическое представление, получим

$$\begin{aligned} t^{\rho} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\rho+1\right) &= -\lambda^{-1} - \frac{\lambda^{-2} t^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} - \ldots \\ t^{\rho-i} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\rho+1-i\right) &= -\frac{\lambda^{-2} t^{-\rho-i}}{\Gamma(1-\rho-i)} - \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\rho} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\rho+1\right) = -\lambda^{-1},$$

а

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| \sum_{i=1}^{k} t^{\rho-i} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};1+\rho-i\right) z_i^0 \right\| = 0.$$

Так как интеграл от модуля функции больше или равен модулю от интеграла, то отсюда следует, что уравнение (6.2) имеет конечный положительный корень при любых начальных условиях.

Вопрос о разрешимости уравнения (6.2) при $\rho \geq 2$ является более сложным, что вполне естественно. В этом случае асимптотические формулы (6.3), (6.5) заменяются представлением [35] при любом натуральном p

$$\begin{aligned} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^{\rho};\mu\right) &= \frac{1}{\rho}\left(\lambda t^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}(1-\mu)} \sum_{n:|\arg\lambda + 2\pi n| \leq \frac{\pi\rho}{2}} e^{\frac{2\pi i n(1-\mu)}{\rho}} \exp\left(\lambda^{\frac{1}{\rho}} t \cdot e^{\frac{2\pi i n}{\rho}}\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{p} \left(\lambda t^{\rho}\right)^{-k} / \Gamma\left(\mu - k\rho\right) + O\big[\left(|\lambda|\, t^{\rho}\right)^{-p-1}\big]. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$. Это представление является ключевым при исследовании вопроса о разрешимости уравнения (6.2) для $\rho \geq 2$.

Пусть $\lambda > 0$, а $\rho \in [2, 4)$. Тогда $\arg \lambda = 0$ и в формуле (6.6) в суммировании участвует лишь член, соответствующий $n = 0$. Следовательно, при достаточно больших t

$$E_{\frac{1}{\rho}}\big(\lambda t^\rho; \mu\big) = \frac{1}{\rho}\big(\lambda^{\frac{1}{\rho}} t\big)^{1-\mu} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \ldots,$$

откуда

$$E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^\rho; \rho + 1\right) = \frac{1}{\rho\lambda} t^{-\rho} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \ldots$$

и

$$t^\rho E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^\rho; \rho + 1\right) = \frac{1}{\rho\lambda} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \ldots .$$

Аналогично

$$t^{\rho - j} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^\rho; 1 + \rho - j\right) = \frac{1}{\rho\lambda} \lambda^{j/\rho} e^{\lambda^{\frac{1}{\rho}} t} + \ldots .$$

Тогда с учетом полученных асимптотик имеем

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^\rho E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^\rho; \rho + 1\right)}{\left\| \sum\limits_{j=1}^{k} t^{\rho - j} E_{\frac{1}{\rho}}\left(\lambda t^\rho; 1 + \rho - j\right) z_j^0 \right\| - \varepsilon} = \left\| \sum_{j=1}^{k} \lambda^{j/\rho} z_j^0 \right\|^{-1}.$$

Таким образом, положительный конечный корень уравнения (6.2) существует, если выполнено неравенство (6.4).

Анализ уравнения (6.2) на предмет существования конечного положительного корня при $\lambda > 0$ и $\rho \geq 4$ проводится аналогично на основании формулы (6.6). Однако уже при $\rho \in [4, 8)$ суммирование в (6.6) производится при $n = 0, 1, -1$, и выкладки становятся существенно более громоздкими.

И в заключение рассмотрим случай $\lambda = 0$. Тогда уравнение (6.2) приобретает вид

$$\frac{t^\rho}{\Gamma(\rho + 1)} = \frac{\left\| \sum\limits_{i=1}^{k} \{t^{\rho - i}/\Gamma(\rho + 1 - i)\} z_i^0 \right\| - \varepsilon}{a - 1}. \tag{6.7}$$

При $t = 0$ левая часть уравнения равна 0, а правая $+\infty$, если $z_k^0 \neq 0$. Но при $t \to \infty$ левая часть растет быстрее, чем правая, и, следовательно, положительный корень уравнения (6.7) существует при любых начальных условиях с одной лишь оговоркой $z_k^0 \neq 0$.

7. Пример с разделенной динамикой

Рассмотрим пример динамической игры преследования-убегания дробного порядка. Пусть динамика преследователя описывается уравнением

$$\mathbf{D}^\pi x = u, \quad \|u\| \leq 1, \tag{7.1}$$

где $\pi = 3{,}14159\ldots$ — отношение длины окружности к ее диаметру.

Динамика убегающего задается уравнением:

$$\mathbf{D}^e y = v, \quad \|v\| \leq 1, \tag{7.2}$$

где $e = 2{,}71828\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

Здесь, как и ранее, $\mathbf{D}^\rho$ обозначает оператор дробного дифференцирования порядка ρ в смысле Римана — Лиувилля, Капуто или Миллера — Росса. Фазовые векторы x и y определяют текущую позицию в $\mathbb{R}^m$ преследователя и убегающего соответственно. Предполагается, что $x = x(t)$ является трижды, а $y = y(t)$ — дважды абсолютно непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}_+$ функцией времени t, т. е. $x(t) \in AC^3(\mathbb{R}_+)$, $y(t) \in AC^2(\mathbb{R}_+)$. Управляющие векторы $u = u(t)$, $v = v(t)$, $u, v \in \mathbb{R}^m$ являются измеримыми функциями времени t.

Поскольку A и B представляют собой $m \times m$ нуль-матрицы, то $E_{\frac{1}{\pi}}(At^\pi; \pi) = \dfrac{1}{\Gamma(\pi)} I$ и $E_{\frac{1}{e}}(Bt^e; e) = \dfrac{1}{\Gamma(e)} I$.

Если дифференцирование понимается в смысле Римана — Лиувилля, т. е. $\mathbf{D}^\rho = D^\rho$, начальные условия для (7.1), (7.2) имеют вид

$$D^{\pi-1}x(t)\big|_{t=0} = x_{11}^0, \quad D^{\pi-2}x(t)\big|_{t=0} = x_{21}^0, \quad D^{\pi-3}x(t)\big|_{t=0} = x_{31}^0, \quad D^{\pi-4}x(t)\big|_{t=0} = x_{41}^0$$

и

$$D^{e-1}y(t)\big|_{t=0} = y_{11}^0, \quad D^{e-2}y(t)\big|_{t=0} = y_{21}^0, \quad D^{e-3}y(t)\big|_{t=0} = y_{31}^0$$

соответственно. В этом случае мы будем обозначать

$$x^0 = (x_{11}^0, x_{21}^0, x_{31}^0, x_{41}^0), \quad y^0 = (y_{11}^0, y_{21}^0, y_{31}^0),$$
$$h_x(x^0, t) = \frac{t^{\pi-1}}{\Gamma(\pi)} x_{11}^0 + \frac{t^{\pi-2}}{\Gamma(\pi-1)} x_{21}^0 + \frac{t^{\pi-3}}{\Gamma(\pi-2)} x_{31}^0 + \frac{t^{\pi-4}}{\Gamma(\pi-3)} x_{41}^0,$$
$$h_y(y^0, t) = \frac{t^{e-1}}{\Gamma(e)} y_{11}^0 + \frac{t^{e-2}}{\Gamma(e-1)} y_{21}^0 + \frac{t^{e-3}}{\Gamma(e-2)} y_{31}^0.$$

Пусть теперь $\mathbf{D}^\rho$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто, т. е. $\mathbf{D}^\rho = D^{(\rho)}$. В таком случае, начальные условия для (7.1), (7.2) могут быть записаны в виде

$$x(0) = x_{02}^0, \ \dot{x}(0) = x_{12}^0, \ \ddot{x}(0) = x_{22}^0, \ \dddot{x}(0) = x_{32}^0$$

и

$$y(0) = y_{02}^0, \ \dot{y}(0) = y_{12}^0, \ \ddot{y}(0) = y_{22}^0$$

соответственно. Обозначим

$$x^0 = (x_{02}^0, x_{12}^0, x_{22}^0, x_{32}^0), \quad y^0 = (y_{02}^0, y_{12}^0, y_{22}^0),$$
$$h_x(x^0, t) = x_{02}^0 + t x_{12}^0 + \frac{t^2}{2} x_{22}^0 + \frac{t^3}{6} x_{32}^0, \quad h_y(y^0, t) = y_{02}^0 + t y_{12}^0 + \frac{t^2}{2} y_{22}^0.$$

Наконец, если $\mathbf{D}^\pi = \mathfrak{D}_i^\pi$ для некоторого i, $i = 1, 2, 3$, и $\mathbf{D}^e = \mathfrak{D}_j^e$, $j = 1, 2$, начальные условия для (7.1), (7.2) принимают вид

$$x^0 = (\tilde{x}_0^0, \ldots, \tilde{x}_{i-1}^0, x_0^0, \ldots, x_{3-i}^0), \quad y^0 = (\tilde{y}_0^0, \ldots, \tilde{y}_{j-1}^0, y_0^0, \ldots, y_{2-j}^0),$$
$$h_x(x^0, t) = \sum_{l=0}^{3-i} \frac{t^l}{l!} x_l^0 + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{t^{\pi-k-1}}{\Gamma(\pi-k)} \tilde{x}_k^0, \quad h_y(y^0, t) = \sum_{s=0}^{2-j} \frac{t^s}{s!} y_s^0 + \sum_{r=0}^{j-1} \frac{t^{e-r-1}}{\Gamma(e-r)} \tilde{y}_r^0.$$

Цель преследователя состоит в том, чтобы добиться выполнения неравенства

$$\|x(T) - y(T)\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{7.3}$$

для некоторого конечного момента времени T. Цель убегающего — избежать выполнения неравенства (7.3) или, если это невозможно, максимально отдалить момент T.

Использование описанного в разд. 5 метода разрешающих функций для разделенной динамики позволяет получить достаточные условия разрешимости сформулированной задачи сближения.

Модифицированное условие Понтрягина выполнено, если

$$\varepsilon \geq \left| \frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{\pi}{\pi-e}}}{\Gamma(\pi+1)} - \frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{e}{\pi-e}}}{\Gamma(e+1)} \right| = \frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{e}{\pi-e}}}{\Gamma(e+1)} - \frac{(\Gamma(\pi)/\Gamma(e))^{\frac{\pi}{\pi-e}}}{\Gamma(\pi+1)}.$$

Обозначим

$$\xi_1(t) = \Pi_1 h_x(x^0, t) - \Pi_2 h_y(y^0, t).$$

Тогда уравнение для нахождения времени окончания игры имеет вид

$$\frac{t^\pi}{\Gamma(\pi+1)} - \frac{t^e}{\Gamma(e+1)} + \varepsilon = \|\xi_1(t)\|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды: в 3 т. М.: Наука, 1988. Т. 2: Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры. 576 с.
4. **Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.** Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 264 с.
5. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
6. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
7. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
8. **Пшеничный Б.Н.** Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика. 1968. № 1. С. 65–78.
9. **Никольский М.С.** Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. М.: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
10. **Chikrii A.A.** Conflict-controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 424 p.
11. **Podlubny I.** Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. 368 p.
12. **Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.** Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Армянской ССР. 1968. Т. 3, вып. 1. С. 3–29.
13. **Caputo M.** Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967. Vol. 13. P. 529–539.
14. **Miller K.S., Ross B.** An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: Wiley & Sons, 1993. 384 p.
15. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
16. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Boston: Birkhäuser, 1994. 319 p.
17. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon & Breach, 1995. 625 p.
18. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
19. **Melikyan A.A.** Generalized characteristics of first order PDEs. Applications in optimal control and differential games. Boston: Birkhäuser, 1998. 332 p.
20. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
21. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Токманцев Т.Б.** Стабильные мосты в дифференциальных играх на конечном промежутке времени // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. Т. 10, № 2. С. 155–177.
22. **Kumkov S.I., Patsko V.S.** Control of informational sets in a pursuit problem // Annals of the international society of dynamic games. Vol. 3. New trends in dynamic games and applications. Boston: Birkhauser, 1995, P. 191–206.
23. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 198 с.

24. **Батухтин В.Д.** Об одной игровой задаче наведения с неполной информацией // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44, № 4. С. 595–601.
25. **Третьяков В.Е.** К теории стохастических игр // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 5. С. 1049–1053.
26. **Кривонос Ю.Г., Матичин И.И., Чикрий А.А.** Динамические игры с разрывными траекториями. Киев: Наук. думка, 2005. 220 с.
27. **Chikrii A.A.** Game dynamic problems for systems with fractional derivatives // Pareto optimality, game theory and equilibria. Vol. 17. New York: Springer, 2008. P. 349–387.
28. **Chikrii A.A.** Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems // J. Optim. Methods Software. 2008. Vol. 23, no. 1. P. 39–72.
29. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
30. **Chikriy A.A., Matichin I.I.** Presentation of solutions of linear systems with fractional derivatives in the sense of Riemann–Liouville, Caputo and Miller–Ross // J. Autom. Inform. Sci. 2008. Vol. 40, no. 6. P. 1–11.
31. **Чикрий А.А., Эйдельман С.Д.** Обобщенные матричные функции Миттаг — Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка // Кибернетика и систем. анализ. 2000. № 3. С. 3–32.
32. **Hajek O.** Pursuit games // Mathematics in science and engineering. Vol. 120. New York: Acad. Press, 1975. 266 p.
33. **Чикрий А.А., Раппопорт И.С., Чикрий К.А.** Многозначные отображения и их селекторы в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и систем. анализ. 2007. № 5. С. 129–144.
34. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
35. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Поступила 25.02.2009

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. НАН Украины
зав. отд.
Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины
e-mail: chikrii@gmail.com

Матичин Иван Иванович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины
e-mail: matychyn@gmail.com

Том 15 № 3 2009

К ИСТОРИИ УРАЛЬСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО НЕКОРРЕКТНЫМ ЗАДАЧАМ

В. В. Васин

В минувшем году математическая общественность отметила 100-летие со дня рождения выдающегося российского математика члена-корреспондента АН СССР, лауреата Ленинской премии, создателя уральской научной школы по некорректно поставленным задачам Валентина Константиновича Иванова. Этому событию была посвящена международная конференция "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", которую провели на Урале Институт математики и механики УрО РАН и Уральский государственный университет им. А. М. Горького при финансовой поддержке РФФИ, Уральского отделения РАН, Югорского научно-исследовательского института информационных технологий (г. Ханты-Мансийск) и банка "Северная Казна". Международные конференции по некорректно поставленным задачам, посвященные памяти В. К. Иванова, проводятся раз в три года, начиная с 1995 г., на базе отдыха "Трубник", которая расположена на границе Европы и Азии на живописном берегу реки Чусовой.

Коснемся истории возникновения этих конференций.

Валентин Константинович ушел из жизни 30 октября 1992 г. Это были самые трудные годы начавшейся в России перестройки. Катастрофическое падение жизненного уровня населения, резкое сокращение финансирования научно-исследовательских и учебных учреждений оказали негативное влияние на все стороны жизни, в том числе на научную деятельность в стране. 7 октября 1993 г. не стало А. Н. Тихонова. Уход из жизни двух выдающихся математиков, стоявших у истоков создания теории некорректно поставленных задач, неблагоприятная и нестабильная ситуация в стране привели к тому, что после знаменитой международной конференции, проходившей в Москве 19–22 августа 1991 г. и совпавшей с известными трагическими событиями в стране, конференции по некорректным задачам в течение нескольких лет практически перестали проводиться. Следует сказать, что организация прежних конференций по этой проблематике были, главным образом, делом московских и новосибирских математиков — представителей двух ведущих научных школ под руководством академиков А. Н. Тихонова и М. М. Лаврентьева.

В силу сложившейся ситуации и учитывая настроения и пожелания научной общественности, уральские математики вынуждены были взять на себя ответственность по проведению Всероссийской конференции по некорректным задачам на Урале в этих непростых экономических условиях в стране. Эта конференция состоялась в конце февраля 1995 г. и была посвящена памяти В. К. Иванова. Так как в это время уже начал функционировать Российский фонд фундаментальных исследований, удалось получить пусть и очень скромную, но очень нужную финансовую поддержку.

Проведение конференций в этот период было весьма тяжелой (некорректно поставленной!) задачей. О специфических условиях, в которых проходила конференция, говорит хотя бы такой курьезный факт. Коллеги из Душанбе, приехавшие с большими трудностями в Екатеринбург, из-за полного безденежья привезли несколько ящиков зелени и фруктов из собственного сада, чтобы оплатить расходы по участию в конференции.

Справедливости ради следует отметить, что во второй половине 1990-х гг. всероссийские конференции по некорректным задачам вновь стали регулярно проводиться в Москве (бессменный организатор д-р физ.-мат. наук А. М. Денисов) и в Новосибирске благодаря усилиям М. М. Лаврентьева и его учеников.

Конференция, которая проходила на Урале в 1998 г., была посвящена 90-летию со дня рождения Валентина Константиновича Иванова. Хотя она носила статус всероссийской, в ней неизменно участвовали ученые из стран ближнего зарубежья: Таджикистана, Узбекистана, Азербайджана, Эстонии, Белоруссии и Украины.

С каждой новой конференцией научная тематика расширялась. Начиная с 2001 г., в качестве самостоятельных появились секции по математическому программированию и оптимальному управлению. Это было связано, с одной стороны, с тем, что методы некорректных задач проникали в новые области, а с другой стороны, организаторы целенаправленно приглашали ученых, работающих в различных областях, поскольку это полезно для расширения кругозора участников конференции, особенно молодых.

В сентябре 2008 г. состоялась 5-я Уральская конференция по некорректным задачам, которая была приурочена к 100-летию со дня рождения Валентина Константиновича.

Более 130 ученых из 20 городов России и зарубежья (Китая, Польши, Турции, Украины) обсудили современные достижения по теории регуляризации и методам аппроксимации решений некорректно поставленных задач, возникающих в теоретических исследованиях и при математическом моделировании проблем геофизики, механики, экономики и управления. Программа конференции включала пленарные доклады обзорного характера и секционные доклады по следующим направлениям: теоретические основы и общие методы регуляризации и аппроксимации; математическое моделирование и алгоритмический анализ обратных задач естествознания; дифференциально-операторные уравнения и задачи оптимального управления; теория и методы математического программирования и негладкой оптимизации.

Многие пленарные доклады были посвящены развитию идей В. К. Иванова, которые питают и вдохновляют его многочисленных учеников и последователей в России и за рубежом. Однако творческий диапазон ученого был настолько широк, что тематика конференции не охватывала в полной мере все научные направления, которые он успешно развивал. Ему принадлежит решение ряда важнейших задач алгебры и теории чисел, функционального анализа и теории функций комплексного переменного, математической физики и теории обобщенных функций, обратной задачи потенциала и общей теории некорректных задач.

В первый день конференции состоялось общее заседание, посвященное памяти В. К. Иванова. Его ученики и коллеги выступили с воспоминаниями о ярком жизненном и творческом пути этого Человека и Учителя.

Из богатого научного наследия, которое оставил В. К. Иванов, наибольшую известность получили его пионерские работы в области некорректных задач. Вместе с А. Н. Тихоновым и М. М. Лаврентьевым В. К. Иванов является общепризнанным основоположником теории некорректно поставленных задач — теории, существенно преобразившей облик современного естествознания. За цикл работ по теории некорректных задач В. К. Иванову и А. Н. Тихонову в 1966 г. была присуждена Ленинская премия.

Теория обобщенных функций — еще одно направление исследований, которым В. К. Иванов занимался в течение всей своей творческой жизни. За два года до выхода известной монографии Л. Шварца в 1948 г. вышла знаковая работа В. К. Иванова, где была предложена конструкция квазифункций, которые, как оказалось впоследствии, совпадали с обобщенными функциями (распределениями) Л. Шварца. Большой цикл работ был посвящен проблеме умножения обобщенных функций, где ему удалось получить ряд принципиальных результатов.

Многие выступавшие отмечали неповторимый стиль, характерный для работ Валентина Константиновича: тщательность в исполнении замысла, ясность и лаконичность изложения материала, простота и отточенность формулировок.

В. К. Иванова глубоко волновали не только актуальные проблемы математики, но и философские аспекты взаимоотношений теоретических и прикладных исследований. По его мнению, в науке необходим синтез теории и прикладных исследований. Практика оплодотворяет теорию, дает толчок для ее развития и подсказывает проблематику. Он образно сравнивал чистую математику с Антеем, который, будучи оторван от земли, теряет жизненную силу.

Дар ученого успешно сочетался у Валентина Константиновича с талантом педагога. За время работы в Уральском государственном университете он прочитал практически все математические курсы, в которых всегда касался интересных моментов истории математических идей и методов, их значимости для других областей и приложений. Его лекции отличались необычайной эмоциональностью, элегантностью и цельностью, увлекали слушателей и производили глубокое впечатление.

Под руководством В. К. Иванова на кафедре математического анализа в течение многих лет работал научный семинар, где постоянно выступали начинающие молодые математики и маститые ученые из вузов и научно-исследовательских институтов Свердловска (ныне Екатеринбург) и многих других городов СССР. Все они неизменно отмечали атмосферу доброжелательности и заинтересованного обсуждения, царившую на этом семинаре, и удивительную эрудицию Валентина Константиновича.

Несмотря на мягкость и изумительную скромность, Иванов всегда проявлял принципиальность и твердость, когда дело касалось его убеждений. Валентин Константинович был человеком широких интересов и незаурядных способностей: он с увлечением занимался изучением языков, хорошо знал немецкий, английский, французский и итальянский языки, имел глубокие познания в истории, живописи и литературе.

Глубина и богатство научных идей, энциклопедичность, интеллигентность, исключительная щедрость и доброжелательность сделали его для многих Учителем.

Васин Владимир Васильевич
председатель оргкомитета конференции
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Поступила 29.07.09

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале “Труды Института математики и механики УрО РАН” публикуются оригинальные работы теоретического характера по современным разделам математики и механики.

“Труды Института математики и механики УрО РАН” являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы, математические утверждения должны быть обоснованы. В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В “Труды Института математики и механики” не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла “Трудов Института математики и механики”).

Для решения вопроса о целесообразности публикации в “Трудах Института математики и механики” редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей.

В издательстве МАИК “НАУКА/Интерпериодика” выходит перевод журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН” как Приложение к Трудам Математического института им. В.А. Стеклова (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Supplement).

Автор представляет в редакцию два бумажных экземпляра и электронный вариант статьи.

К статье должны быть приложены:

• Сопроводительное письмо от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.

• Лист с индексами статьи по Универсальной десятичной классификации (УДК), английское название статьи, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках.

• Лист со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. В настоящее время также не взимается плата за публикацию рукописей и других авторов.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институтом математики и механики Уральского отделения РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте ИММ УрО РАН.

Присланные в журнал рукописи статей не возвращаются.

Правила оформления рукописей:

• Текст статьи должен быть набран в LATEX2e в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.

• Представляемая в “Труды Института математики и механики УРО РАН” статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации (5-10 строк), ключевых слов на русском и английском языках. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул.

• Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту, либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы.

• Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

• Файлы со статьей — tex-источник и ps (или pdf) вариант статьи — высылаются на адрес trudy@imm.uran.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 3 2009

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
Технический редактор Н. Н. Моргунова

Фото на с. 4 С. Г. Новикова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 20.08.09. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. $35,5$. Уч.-изд. л. 30,5. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д. 17, офис 226