

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ**

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**Том 14, № 1**

**2008**

Российская академия наук

Уральское отделение

**ТРУДЫ**  
**ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН**

2008, Том 14, № 1

Январь–Март

Основан в 1992 г.

Выходит 4 раза в год

*Главный редактор*

Ю. С. Осипов

*Зам. гл. редактора:*

В. И. Бердышев, В. В. Кабанов

*Редакционная коллегия:*

Н. В. Величко, Л. П. Власов, М. И. Гусев, А. Р. Данилин, А. Ф. Клейменов,  
А. С. Кондратьев, А. И. Короткий, В. И. Максимов, С. И. Тарасова (*отв. секретарь*)

*Редакционный совет:*

В. В. Васин, И. И. Еремин, А. М. Ильин, Н. Н. Красовский,  
А. А. Махнев, Ю. Н. Субботин, В. Н. Ушаков, А. Г. Ченцов

*Отв. редактор выпуска* А. И. Короткий



Выпуск посвящен 75-летию со дня рождения выдающегося ученого  
и организатора науки, замечательного человека  
академика РАН Анатолия Федоровича Сидорова

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Т. Н. Бронина.</b> Алгоритм построения начальных трехмерных структурированных сеток для областей вращения . . . . .	3
<b>Н. А. Ваганова.</b> Существование решения разностной начально-краевой задачи для линейного уравнения теплопроводности с нелинейным краевым условием . . . . .	11
<b>А. Р. Гарифуллин, С. В. Хабилов.</b> Непрерывное сопряжение специальных неизэнтропических одномерных движений газа . . . . .	22
<b>Г. В. Долголева, А. В. Забродин.</b> Расчетное конструирование микромишеней для осуществления безударного сжатия . . . . .	31
<b>В. И. Исаев, В. П. Шапеев.</b> Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов .	41
<b>А. И. Короткий, Д. А. Ковтунов.</b> О разрешимости стационарных задач естественной тепловой конвекции высоковязкой жидкости . . . . .	61
<b>В. А. Коцеев.</b> Разделители наследственно дугообразно связанных континуумов, допускающих чебышевские системы комплексных непрерывных функций . . . . .	74
<b>К. В. Курмаева, С. С. Титов.</b> Прямая звуковая линия в обратной задаче теории сопла	81
<b>Е. Ф. Леликова.</b> О структуре асимптотики решения эллиптического уравнения второго порядка в окрестности угловой точки . . . . .	98
<b>М. Ф. Прохорова.</b> Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории построения сеток . . . . .	112
<b>Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов.</b> О решении уравнения потенциала . . . . .	130
<b>В. А. Сучков.</b> Пространственные осесимметричные двойные волны . . . . .	146
<b>О. В. Ушакова.</b> Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения .	150
<b>М. Ю. Филимонов.</b> Применение метода специальных рядов для представления решений уравнения Линя — Рейснера — Цяня . . . . .	181
<b>И. В. Целищева, Г. И. Шишкин.</b> Последовательный и параллельный методы декомпозиции области для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии . . . . .	202

УДК 519.6

## АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Т. Н. Бронина

Описывается алгоритм построения начального приближения трехмерных структурированных сеток в областях вращения геометрически сложной формы. Алгоритм позволяет избежать получения около оси вращения вырожденных (не шестигранных) ячеек и ячеек малого объема. Приведены примеры сеток, построенных по предлагаемому алгоритму.

### Введение

В данной работе изложен алгоритм построения начальных трехмерных структурированных сеток в областях вращения, причем предлагаемый алгоритм не сводится к “ротационному алгоритму”, который обычно применяется при построении сетки в области вращения, что приводит к появлению около оси вращения вырожденных (не шестигранных) ячеек и ячеек малого объема. Предлагаемый алгоритм позволяет избежать указанных недостатков. Как правило, построение сетки с хорошими вычислительными характеристиками выполняется в два этапа. На первом этапе строится начальная сетка, которая на втором этапе оптимизируется в соответствии с требуемыми критериями качества. Построение начальной сетки обычно выделяется в отдельную задачу, так как применяемые для генерации сеток вариационные методы и численные методы решения дифференциальных уравнений требуют начального приближения для решения. Обычно в качестве начальной берется сетка, полученная методом линейной интерполяции [1–3], но, как правило, для сложных областей такая сетка имеет самопересекающиеся ячейки и для последующей оптимизации необходимы методы, позволяющие работать с такими сетками. В то же время известно [1, 2, 4], что хорошее начальное приближение позволяет в десятки раз уменьшить число итераций при построении сетки, а иногда оказывает существенное влияние на качество конечной сетки. Заметим, что построение сетки на границах области тоже представляет собой отдельную задачу.

Мы приводим описание алгоритма для построения начальных трехмерных структурированных сеток в областях вращения, который позволяет построить сетку на границе области и гарантирует отсутствие самопересекающихся ячеек. Получаемая сетка сохраняет симметрию области.

### 1. Постановка задачи

В декартовой системе координат  $\{x^1, x^2, x^3\}$  с осями  $\{X^1, X^2, X^3\}$  в полуплоскости  $x^2 = 0$ ,  $x^1 \geq 0$  задана односвязная область  $U$  с границей  $\partial U$ , определяемой как множество

$$\partial U = t_0^0 \cup \bigcup_{j=1}^J \{B^j\},$$

где  $t_0^0$  — начальная точка элемента  $e_1^1$ ,  $B^j = \bigcup_{i=1}^{I^j} \{e_i^j, t_i^j\}$  — объединение, называемое далее блоком, нескольких элементов;  $e_i^j$  — элемент (дуга окружности или эллипса, отрезок прямой

и т.п.),  $e_i^j \neq \emptyset$ ,  $e_1^1 \not\subseteq X^3$ ;  $t_i^j$  — последняя точка элемента  $e_i^j$  и начальная точка элемента  $e_{i+1}^j$  (аналогично, последняя точка блока  $B^j$  является начальной для блока  $B^{j+1}$ );  $t_{I,J}^j = t_0^0$ . Кривую  $\partial U$  будем называть образующей.

Преобразование

$$x^1 = x^1 \cos \alpha, \quad x^2 = x^1 \sin \alpha, \quad x^3 = x^3, \quad 0 \leq \alpha \leq \varphi,$$

где  $(x^1, x^3) \in \bar{U}$ , определяет область вращения  $G$ ; ось координат  $X^3$  — ось вращения.

Задача состоит в построении в области  $G$  структурированной 3D-сетки  $T_{nml} = \{t_{nml}\}$ , не имеющей особенностей на оси вращения и самопересекающихся параметрических поверхностей. Здесь  $t_{nml} = (x_{nml}^1, x_{nml}^2, x_{nml}^3)$ ,  $n = 1, \dots, N$ ;  $m = 1, \dots, M$ ;  $l = 1, \dots, L$ . Под ячейкой сетки в данной работе понимается двенадцатигранник с восемью вершинами  $\{t_{n+im+jl+k}\}$ ,  $i = 0, 1$ ;  $j = 0, 1$ ;  $k = 0, 1$  и плоскими треугольными гранями, т.е. точки на гранях получаем с помощью линейных отображений треугольников, лежащих на гранях единичного куба, в физическую область. Тогда при одном фиксированном индексе (например,  $l$ ) множество  $S_l = \{t_{nml}\}_{n,m}$  определяет параметрическую поверхность, образованную соответствующими треугольными гранями двенадцатигранных ячеек. Аналогично определим параметрические поверхности  $S_m = \{t_{nml}\}_{n,l}$ ,  $S_n = \{t_{nml}\}_{m,l}$ .

На образующей выделены некоторые группы элементов  $G_w$ , называемые далее вставками, причем в подобластях, полученных вращением элементов образующей, соответствующих вставкам  $G_w$ , трехмерная сетка должна иметь наперед заданное количество параметрических линий. Кроме того, в алгоритмах построения сетки должны быть предусмотрены такие приемы, как фиксация координат и соответствующих им параметрических линий на границах заданной области и “сглаживание” места соединения элементов образующей.

## 2. Описание алгоритма

Укажем алгоритм построения начального приближения регулярных трехмерных сеток, основанный на геометрическом подходе к построению сеток с учетом естественной симметрии относительно оси вращения и линий соединения отдельных поверхностей вращения, соответствующих элементам  $e_i^j$ .

Образующие можно классифицировать по тому, существуют ли в множестве  $\partial U$  элементы  $e_i^j \in X^3$ . Будем рассматривать образующие, у которых не больше двух элементов  $e_i^j$  лежат на оси вращения, причем элемент  $e_{I,J}^j \subseteq X^3$ . Если таких элементов больше, тогда образующую разбиваем на подмножества так, чтобы это требование выполнялось для каждого подмножества, и в этом случае сетка рассчитывается отдельно на каждом подмножестве. Будем обозначать область вращения  $G$  через  $G^1$ , если существует единственный элемент  $e_i^j \subseteq X^3$ , и через  $G^2$ , если существует два таких элемента. Если  $X^3 \cap \partial U = \emptyset$ , то предлагаемый алгоритм совпадает с ротационным.

Для построения регулярной сетки  $T_{nml} = \{t_{nml}\} = \{(x_{nml}^1, x_{nml}^2, x_{nml}^3)\}$  ( $n = 1, \dots, N$ ;  $m = 1, \dots, M$ ;  $l = 1, \dots, L$ ) область вращения  $G$  представляется криволинейным шестигранником с 8 вершинами, причем в предлагаемом представлении две (а при угле  $\varphi = \pi$  — четыре) грани криволинейного шестигранника лежат в плоскости задания образующей. Отображение исходной области на шестигранник определяется заданием в определенной последовательности восьми точек (вершин шестигранника), часть из которых принадлежит образующей (точки  $t_i^j$  из множества  $\partial U$ ), часть расположена симметрично относительно оси вращения. При таком определении вершин в криволинейном шестиграннике блок  $B^j$  такой, что  $B^j \not\subseteq X^3$ , описывает ребро криволинейного шестигранника и при повороте на угол  $\varphi$  образует одну из граней криволинейного шестигранника.

Для каждого из типов областей ( $G^1$  или  $G^2$ ) предлагается два способа представления их криволинейным шестигранником. Примеры областей вращения и отображения их на параметрический шестигранник (куб) с множеством вершин  $\Xi = \{\xi_i\}$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) показаны

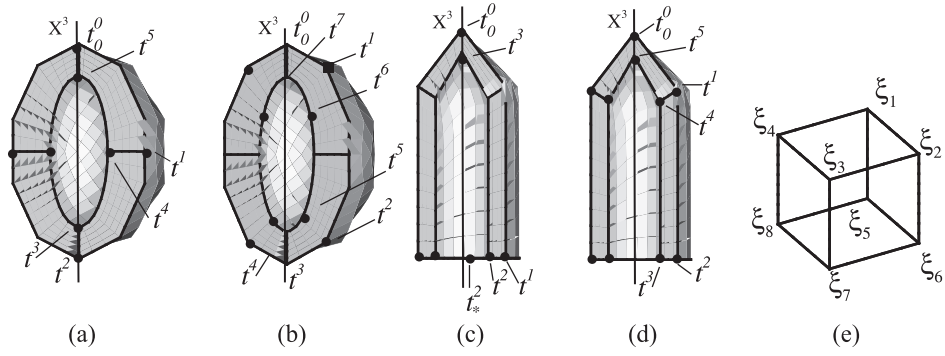


Рис. 1. Соответствие вершин и граней криволинейного шестигранника и параметрического куба.

на рис. 1: на рис. 1(a) и 1(b) для области типа  $G^2$  отображение  $S^\Delta$  сопоставляет вершинам  $t^0, t^1, t^2, -t^1, t^5, t^4, t^3, -t^4$  криволинейного шестигранника соответственно вершины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_8$  куба  $\Xi$ , а отображение  $S^\square$  делает то же самое с вершинами  $-t^1, t^1, t^2, -t^2, -t^6, t^6, t^5, -t^5$ . На рис. 1(c) и 1(d) для области типа  $G^1$   $S^\Delta$  и  $S^\square$  отображают на  $\Xi$  точки  $t^0, t^1, t_*^1, -t^1, t^3, t^2, t_*^2, -t^2$  и  $-t^1, t^1, t^2, -t^2, -t^4, t^4, t^3, -t^3$  соответственно. Через  $-t^j$  обозначена точка, симметричная точке  $t^j$  относительно оси вращения, точка  $t_*^j$  имеет координаты  $x_*^{1j} = x^{1j} \cos \varphi/2, x_*^{2j} = x^{1j} \sin \varphi/2, x_*^{3j} = x^{1j}$ , точка  $t^j$  (индекс  $I^j$  опущен) — последняя точка блока  $B^j$ . Выбрав для области  $G$  желаемый способ отображения ( $S^\Delta$  или  $S^\square$ ) вершин криволинейного шестигранника, определим тем самым структуру сетки. Комбинацию типа сетки и способа расположения вершин криволинейного шестигранника назовем конфигурацией сетки. Так как точки  $t^j \in \bar{U}$  являются последними точками блоков, то количество точек  $t^j$  в отображении позволяет определить количество блоков для каждой конфигурации: для конфигурации  $(G^1, S^\Delta)$  образующая должна иметь четыре блока ( $J = 4$ ), для  $(G^1, S^\square)$  — шесть блоков, для  $(G^2, S^\Delta)$  — шесть блоков, для  $(G^2, S^\square)$  — восемь блоков.

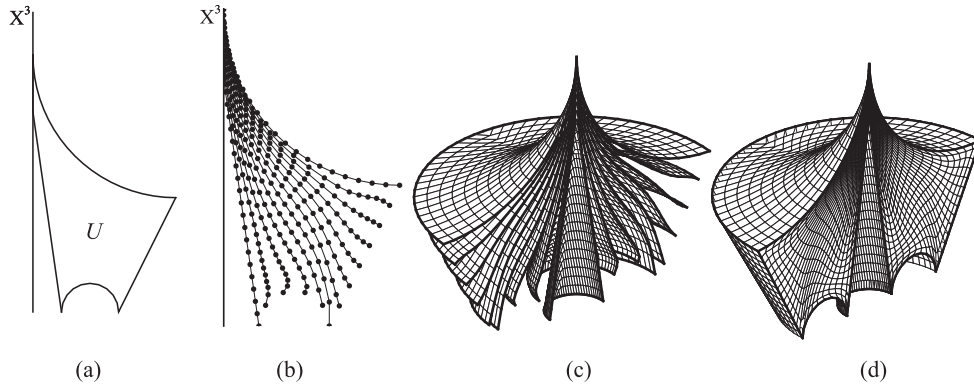


Рис. 2. Этапы построения сетки в области вращения: (a) образующая области вращения, (b) семейство параметрических линий в области  $\bar{U}$  для построения параметрических поверхностей, (c) семейство параметрических поверхностей, (d) сетка на границе поверхности вращения.

Идея предлагаемого алгоритма состоит в том, что сетка составляется из набора  $L$  двумерных сеток, рассчитанных на некоторых поверхностях вращения, чьи образующие  $l_i$  расположены в области  $\bar{U}$ . Фактически в области  $\bar{U}$  рассчитывается двумерная сетка, и параметрические линии одного из семейств параметрических линий двумерной сетки выбираются в качестве образующих для построения поверхностей вращения. Схема построения сетки по этому алгоритму показана на рис. 2. В случае, если сетка рассчитана с применением ротационного алгоритма, ее можно также рассматривать как набор двумерных сеток, рассчитанных на

некоторых поверхностях вращения, но каждая из таких двумерных сеток имеет вырожденные ячейки (рис. 3(с)).

Построение трехмерной сетки состоит из двух этапов: расчет двумерной сетки в области  $U$  и построение двумерных сеток на поверхностях вращения. Поясним некоторые моменты по каждому из этапов.

*Построение параметрической поверхности вращения.* Пусть в области  $U$  построена двумерная сетка  $D_{mk} = \{x_{mk}^1, x_{mk}^3\}$  ( $m = 1, \dots, N$ ;  $k = 1, \dots, L$ ), не имеющая самопересекающихся ячеек. Зафиксировав индекс  $k = k_1$ , получим параметрическую линию  $S_{mk_1} = \{x_{mk_1}^1, x_{mk_1}^3\}$ .

Тогда, применяя преобразование

$$x_{nmk_1}^1 = x_{mk_1}^1 \cos \alpha_{nm}, \quad x_{nmk_1}^2 = x_{mk_1}^1 \sin \alpha_{nm}, \quad x_{nmk_1}^3 = x_{mk_1}^3,$$

получаем сетку на поверхности вращения  $S_{k_1}$ , которая лежит либо на границе области  $G$ , если в качестве образующей линии был выбран блок,  $B^j \subseteq \partial U$  ( $k_1 = 1, k_1 = L$ ) либо внутри области  $G$ . Значение угла  $\alpha_{nm}$  зависит как от номера точки в двумерной сетке, так и от выбранной конфигурации. Например, для конфигурации  $(G^1, S^\Delta)$  значение угла  $\alpha_{nm}$  рассчитывается как

$$\alpha_{nn} = \frac{\varphi}{2}, \quad \alpha_{nm} = \frac{\varphi}{2(m-1)(n-1)}, \quad \alpha_{mn} = \varphi - \alpha_{nm} \quad (n = 2, \dots, N-1, m = n+1, \dots, N).$$

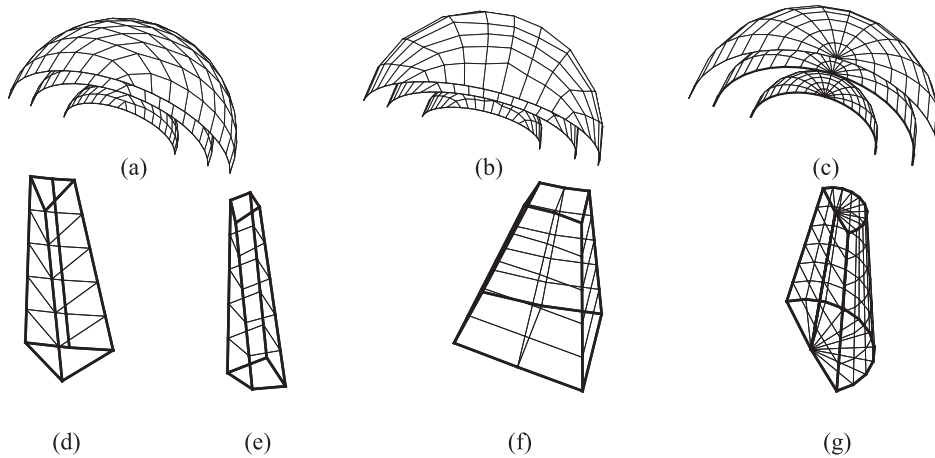


Рис. 3.

Пример расположения параметрических линий на поверхностях вращения для конфигурации  $(G^1, S^\Delta)$  изображен на рис. 3(а), для конфигурации  $(G^2, S^\square)$  — на рис. 3(б). Для сравнения на рис. 3(с) изображены параметрические поверхности в сетке, построенной по ротационному алгоритму. На рис. 3(д)–3(г) изображены ячейки соответствующих сеток, находящиеся около оси вращения; на рис. 3(д) для получения области задан угол  $\varphi = \pi$ , на рис. 3(е) — угол  $\varphi = \pi/2$ .

*Расчет двумерной сетки в области образующей.* Существует много алгоритмов построения оптимальных двумерных сеток (см., например, [5]), и для построения трехмерной сетки по описываемому алгоритму можно использовать любой алгоритм, позволяющий строить невырожденную двумерную сетку. Отметим здесь некоторые моменты, которые, по нашему мнению, позволяют при построении двумерной сетки учесть требования, предъявляемые к трехмерной сетке. Область  $U$  с границей  $\partial U$  представляем криволинейным четырехугольником, вершинами которого являются точки  $t^j$  из набора вершин криволинейного шестигранника.

Задача построения невырожденной сетки разделена на два этапа. На первом этапе построения двумерной сетки строим сетку методом линейной интерполяции (см., например,



рис. 4(a),(c)). Если в сетке получились самопересекающиеся ячейки, применяется алгоритм оптимизации. Для получения сетки без самопересекающихся ячеек мы использовали минимизацию функционала вида

$$F^{ij} = (1 - \varepsilon_1)F_1^{ij} + \varepsilon_1 F_2^{ij}, \quad F_1^{ij} = \sum_{l=1}^4 (S_l - S_0)^2, \quad F_2^{ij} = \sum_{l=5}^6 (S_l - \overline{S_0})^2,$$

$$S_0 = \left( \sum_{l=1}^4 S_l \right) / 4, \quad S_l = \left( \sum_{t=1}^4 S_l^t \right) / 4, \quad \overline{S_0} = \max\{|S_1|, |S_2|\} / 2, \quad 0 \leq \varepsilon_1 \leq 1,$$

где  $S_l (l = 1, \dots, 4)$  — площади четырехугольников в девятиточечном шаблоне двумерной регулярной сетки.

Функционал  $F_1^{ij}$  (сумма квадратов отклонений площадей четырехугольников от их средней площади) контролирует отсутствие самопересекающихся ячеек. Возможность использования функционалов аналогичного вида для построения оптимальных двумерных сеток указана в [8]. Функционал  $F_2^{ij}$ , как показал опыт расчетов, обеспечивает некоторую гладкость параметрических линий сетки. Результат работы алгоритма оптимизации с применением указанных функционалов показан на рис. 4: на рис. 4(a) изображена сетка, у которой некоторые узлы не принадлежат области  $U$ ; на рис. 4(b) — сетка, полученная в результате оптимизации начальной сетки, изображенной на рис. 4(a); на рис. 4(d) представлена оптимальная сетка, в начальном приближении (рис. 4(c)) которой имелись самопересекающиеся ячейки. Сетка на границе области вращения, построенная по образующей с рис. 4(d), изображена на рис. 5(a).

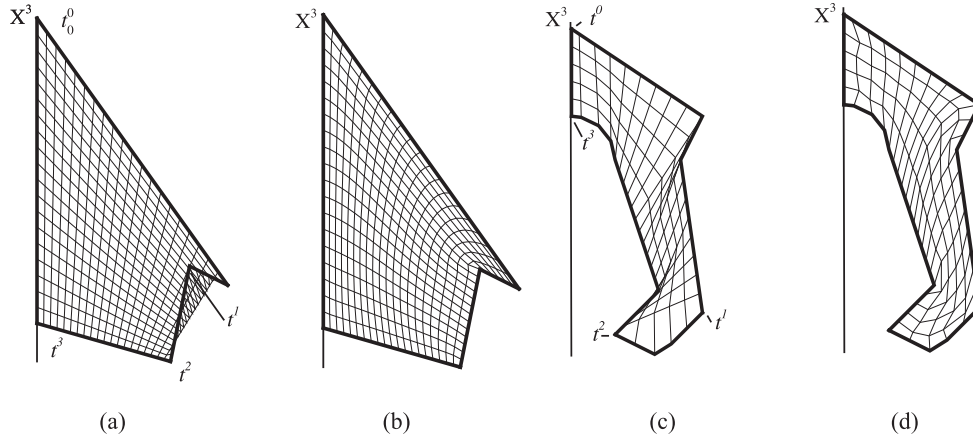


Рис. 4.

Функционалы, аналогичные описанным выше, применялись нами и для оптимизации сеток на поверхностях вращения.

Для управления расстановкой точек на границе (и, как следствие, расположением параметрических линий и поверхностей в трехмерной сетке) вводится множество признаков  $P = \{p_i^j, k_i^j, g_i^j\}$ , где признак  $p_i^j$  определяет, должны принадлежать ( $p_i^j = -1, 1$ ) или нет ( $p_i^j = 0$ ) координаты последней точки данного элемента расчетной сетке. Отрезком назовем совокупность рядом стоящих элементов, точка соединения которых имеет признак  $p_i^j = 0$ . Признак  $p_i^j = 1$  указывает на то, что в отрезке образующей необходимо расставить  $k_i^j$  точек.

Число точек на отрезке при  $p_i^j = -1$  определяется пропорционально отношению длины отрезка к длине блока; признак  $g_i^j$  определяет закон распределения длин между точками на отрезке (равномерность, уменьшенные длины на концах и т.п.). Расстояние между точками на

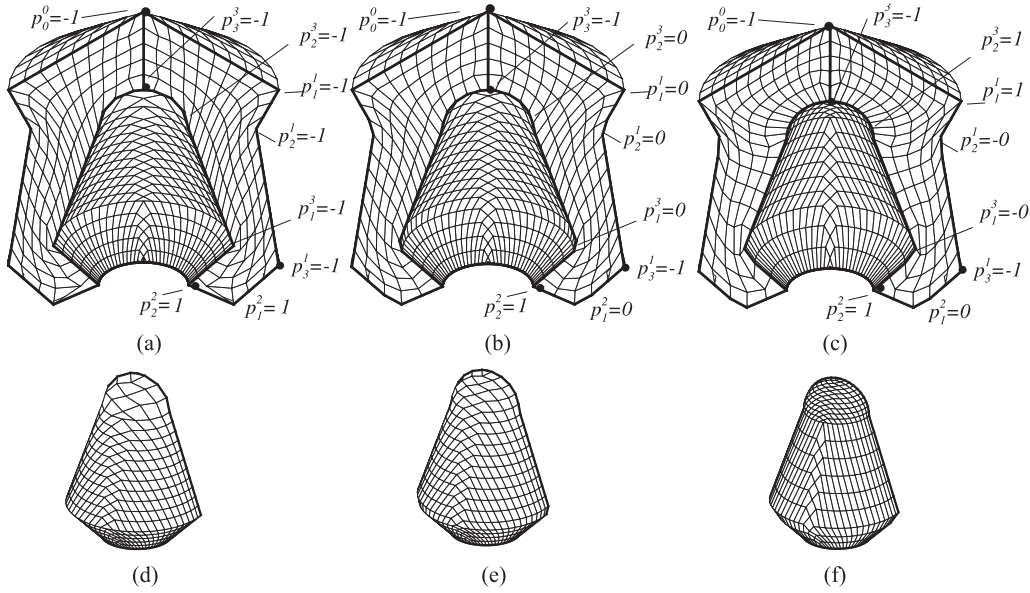


Рис. 5. Использование признаков  $p_i^j$  для управления качеством сетки.

образующей определяется как длина дуги элемента между соседними точками. Для вычисления координат точек на образующей, расположенных друг от друга на расстояниях, определенных параметром  $g_i^j$  из множества  $P$ , для каждого элемента рассчитывается описывающий его сплайн. Замена исходного представления элемента в данном случае возможна, так как в качестве элементов рассматриваются только гладкие кривые. Для расчетов использовались В-сплайны третьего порядка как наиболее удобные в вычислительном плане. Опыт применения таких сплайнов для представления границ областей описан, например, в [5,6]. Особенности применения и вычислительные алгоритмы подробно разобраны в [7]. Задание множества  $P$  значительно расширяет возможности построения невырожденных сеток в случае сложной, существенно негладкой образующей. На рис. 5 изображены сетки на границе области вращения, рассчитанные для конфигурации  $(G^1, G^\Delta)$  с одной и той же образующей, но с различными множествами  $P$ . На рис. 5(a),(d) сетка рассчитана, когда  $p_i^j = -1$  для последних точек всех элементов  $e_i^j$  образующей; на рис. 5(b),(e) — для всех последних точек элементов, кроме последних точек блоков,  $p_i^j = 0$ ; на рис. 5(c),(f) для  $e_1^1$  и  $e_3^3$  задано  $p_i^j = 1$  и  $k_i^j = 10$ .

### 3. Примеры

Приведем примеры сеток, рассчитанных по описанному алгоритму.

**Пример 1.** Расчет сетки в области, “склеенной” из трех областей. На рис. 6 изображена “склейка” трех областей, направляющие которых согласованы по соприкасающимся блокам  $B^j$ . Для всех областей выбрана конфигурация  $(G^2, S^\Delta)$ .

Каждая из трех образующих состоит из шести блоков.

Направляющая задана множеством  $\partial U = t_0^0 \cup \bigcup_{j=1}^5 \{B^j\}$ ,  $B^j = \bigcup_{i=1}^{I_0^j} \{e_i^j, t_i^j\}$ , где для первой области элементы  $e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_4^1, e_5^1, e_6^1$  — отрезки прямой,  $e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_4^2, e_5^2, e_6^2$  — дуги окружностей,  $e_1^3$  — отрезок прямой; для второй области все элементы — дуги окружностей; для третьей области элементы  $e_1^3, e_2^3, e_3^3, e_4^3, e_5^3, e_6^3$  — дуги окружностей,  $e_1^4$  — отрезок прямой,  $e_2^4, e_3^4, e_4^4, e_5^4, e_6^4$  — дуги эллипсов,  $e_1^5$  — отрезок прямой. Для элементов  $e_i^j$  параметр  $g_i^j$  распределения длин между точками на элементе задан как  $\{h/2, h, \dots, h\}$ , для остальных элементов точки расставляют-

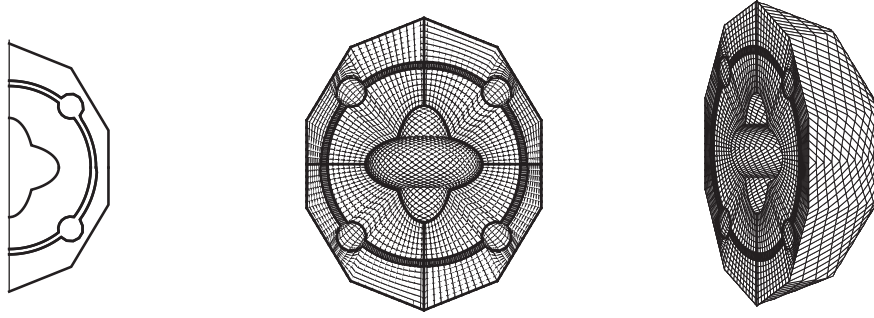


Рис. 6. “Склейка” трех областей вращения.

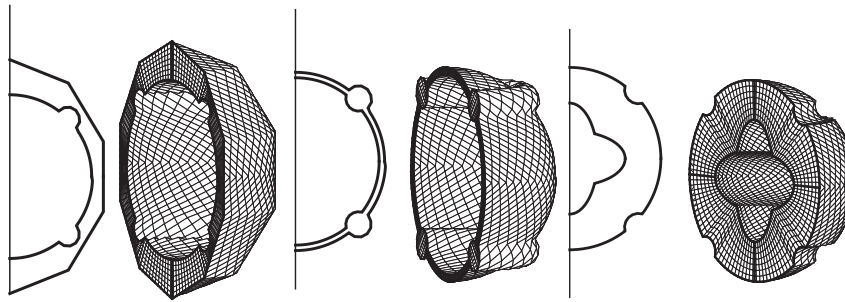


Рис. 7. Образующие и сетки на границах поверхностей вращения, составляющие “склейку”.

ся равномерно по длине дуги. На рис. 7 изображены направляющие и сетки, составляющие “склейку”.

**Пример 2.** Расчет сетки со вставками. Продемонстрируем возможность использования алгоритма для построения сеток с выделенными подблоками (вставками). Для каждой вставки  $G_w$  сетка должна иметь регулярную структуру, т.е. узлы во вставке  $G_w$  должны иметь нумерацию  $T_{w_{ijk}} = \{x_{ijk}^1, x_{ijk}^2, x_{ijk}^3\}, i = 1, \dots, N; j = j_w, \dots, M_w; k = 1, \dots, L$ . Учитывая требование сохранения регулярной нумерации в каждой вставке, для построения сетки выбираем конфигурацию  $(G^1, S^{\square})$ .

Пример сетки со вставками изображен на рис. 8.

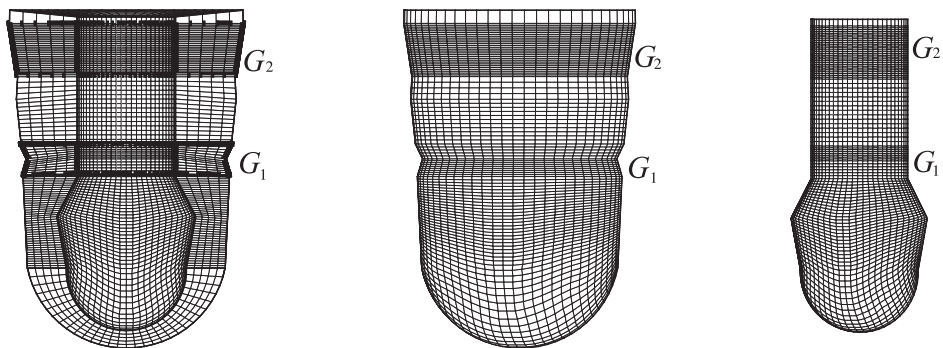


Рис. 8. Пример сетки со вставками.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Годунов С.К.** Численные методы многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1978.
2. **Khairullina O.B., Sidorov A.F. and Ushakova O.V.** Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of grid generation / Ed. by J.F. Thompson, B.K. Soni, and N.P. Weatherill. Boca Ration; London; New York; Washington: CRC Press, 1999. P.36-1–36-25.
3. **Serezhnikova T.I., Sidorov A.F. and Ushakova O.V.** On one method of construction of optimal curvilinear grids and its applications // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1989. Vol. 4, no. 2. P. 137–155.
4. **Глассер А.Г., Лисейкин В.Д., Шокин Ю.И.** Построение разностных сеток с помощью уравнений Бельтрами и диффузии. Новосибирск: Наука, 2006.
5. Handbook of grid generation / Ed. by J.F. Thompson, B.K. Soni, and N.P. Weatherill. Boca Ration; London; New York; Washington: CRC Press, 1999.
6. **Soni B.K., Yang S.** NURBS-based surface grid redistribution and remapping algorithms // Comp. Aided Geom. Design. 1995. No. 12. P. 676–692.
7. **Faux I.D., Pratt M.J.** Computational geometry for design and manufacture. Chichester: Horwood, 1979.
8. **Беликов В.В.** Об одном методе построения расчетных сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. № 4. С. 1262–1266.

Поступила 11.12.2007

УДК 519.633

## СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛИНЕЙНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ<sup>1</sup>

Н.А. Ваганова

Рассматривается задача о распространении тепла в грунте от нагретого и частично теплоизолированного трубопровода. В работе обосновывается возможность построения численного решения линейного уравнения теплопроводности с учетом теплового излучения на поверхности грунта прямым конечно-разностным методом. На основе теоремы о разрешимости системы линейных разностных уравнений методом прогонки доказывается существование и единственность решения разностной задачи с нелинейным граничным условием.

### Введение

Исследование процесса теплопереноса в различных средах важно для многих приложений, в частности для проведения мониторинга повреждений теплоизолированного заглубленного трубопровода. Под воздействием различных факторов теплоизолирующая оболочка трубопровода может разрушиться и начнется теплообмен с окружающей средой (к примеру, температура нефтепродуктов, движущихся по трубопроводу, составляет около  $30^{\circ}\text{C}$ ). Тепловой след от трубопровода может быть зафиксирован на поверхности грунта на фоне естественных тепловых полей и может служить для диагностики состояния теплоизолирующей оболочки.

Одним из методов получения и изучения тепловых полей в различных средах является непосредственное численное моделирование процессов теплопереноса. В ряде работ было показано, что солнечное излучение является существенным фактором, влияющим на формирование теплового поля от подземного источника тепла. Рассмотрение этого поля приводит к необходимости решать начально-краевую задачу в трехмерной области для линейного уравнения теплопроводности, но с нелинейным краевым условием на поверхности грунта, в отличие от [1]. Теоремы существования и единственности решения для некоторых таких моделей рассматривались в работах П. Куитнера [2].

Необходимость изучения именно нелинейной модели возникает при исследовании многих задач. Например, в работе С.С. Титова [3] рассматривалась задача о распределении температуры в тонком кольце, нагреваемом точечным источником (с учетом излучения при сварке), которая описывается параболическим уравнением с нелинейной правой частью. Сравнение решений, построенных в виде специальных тригонометрических рядов для линейной и нелинейной моделей, показало, что линейная теория дает существенно завышенные значения температуры.

При построении алгоритмов расчета нелинейное граничное условие, как правило, аппроксимируется на решении, полученном либо из линейной модели, либо вычисленном на предыдущем шаге итерационного процесса. Например, в работах В.П. Шапеева, А.Н. Черепанова и др. авторов [4, 5] одно из граничных условий для уравнения теплопереноса включает в себя нелинейный радиационный коэффициент теплоотдачи, значение которого аппроксимируется

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00029), молодежного гранта УрО РАН и целевой программы по междисциплинарным проектам между УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

на решении, вычисленном на предыдущей итерации. В настоящее время отсутствуют работы по прямому численному моделированию задач о распространении тепла с нелинейными граничными условиями с помощью неявных разностных схем, приводящих к решению нелинейной задачи.

Таким образом, вопрос о непосредственном решении разностной задачи нахождения теплового поля с нелинейными граничными условиями на поверхности грунта является актуальным. Решение этой задачи позволяет построить алгоритмы и разработать программные средства для моделирования процессов теплопереноса в приповерхностном слое грунта с учетом лучистого теплообмена на его поверхности.

## 1. Моделирование процесса теплопереноса

Рассматривается задача о распространении тепла от нагретого и частично теплоизолированного трубопровода постоянного радиуса, расположенного в грунте (рис. 1).

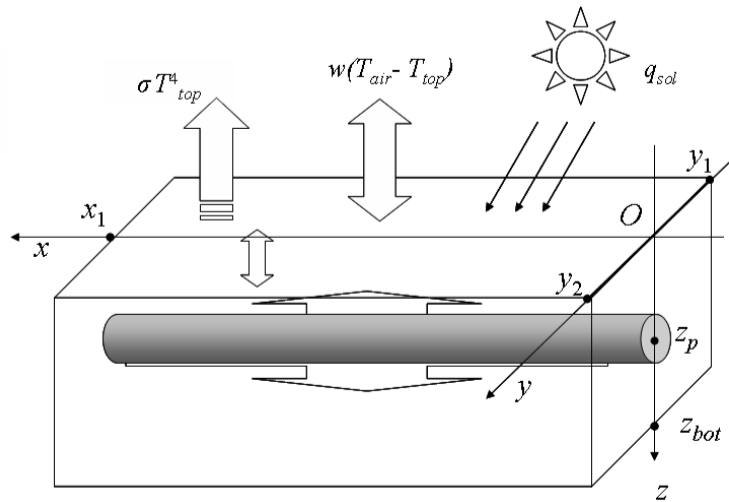


Рис. 1. Схема области с трубопроводом и учитываемыми тепловыми потоками.

Система координат расположена так, что оси  $x$  и  $y$  лежат на поверхности грунта (рис. 1), а ось  $z$  направлена вниз. Расчетная область  $\Omega$  представляет собой прямоугольный параллелепипед, ограниченный плоскостями  $x = 0$ ,  $x = x_1$ ,  $y = y_1 < 0$ ,  $y = y_2 > 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = z_{bot}$ , из которого удалена область, занятая трубопроводом. Поверхность грунта есть плоскость  $z = 0$ . Ось трубопровода  $\{(x, y, z): y = 0, z = z_p > 0\}$  параллельна поверхности грунта. Радиус трубопровода равен  $R_p < z_p$ . Трубопровод заполнен теплоносителем с постоянной температурой  $T_p$ .

Процессы распространения тепла в грунте от заглубленного и нагретого трубопровода описываются линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где  $\lambda = \kappa / (c_\nu \rho)$ ,  $\kappa$  [Вт/(м·К)] — коэффициент теплопроводности,  $c_\nu$  [Дж/(кг·К)] — удельная теплоемкость,  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] — плотность грунта,  $T = T(t, x, y, z)$  [К] — температура в точке  $(x, y, z) \in \Omega$  в момент времени  $t \geq 0$ .

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  во всех точках расчетной области задано линейное по  $z$  распределение температуры

$$T(0, x, y, z) = T_0(z) = T_{air} + z \frac{T_{bot} - T_{air}}{z_{bot}}, \quad 0 \leq z \leq z_{bot}, \quad (2)$$

где  $T_{\text{air}}$  — заданная температура воздуха,  $T_{\text{bot}}$  — заданная температура на дне выделенного параллелепипеда. Рассмотрим следующие условия на границе расчетной области. На боковых стенках выделенного параллелепипеда — условие теплоизоляции

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (3)$$

На нижней грани — условие постоянства температуры

$$T \Big|_{z=z_{\text{bot}}} = T_{\text{bot}}. \quad (4)$$

Условие на поверхности трубопровода имеет вид

$$\text{grad } T = \varepsilon(x, y, z) \left( T_p - T \Big|_{gr} \right) \mathbf{n}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичная нормаль к поверхности трубопровода, направленная внутрь расчетной области  $\Omega$ ,  $\varepsilon(x, y, z)$  — коэффициент теплоизоляции, зависящий от степени поврежденности оболочки трубы. Будем считать, что поток тепла от трубопровода увеличивается в местах повреждения оболочки.

Пусть  $V_{\text{sol}} = (x_{\text{sol}}, y_{\text{sol}}, z_{\text{sol}})$  — вектор направления солнечного света. С учетом направления солнечного потока доля энергии, ушедшая в грунт, может изменяться от точки к точке и составляет  $\gamma_{\text{sol}} q_{\text{sol}} v_{\text{sol}}$  [Вт/м<sup>2</sup>], где  $\gamma_{\text{sol}}$  — доля поглощенной солнечной энергии,  $q_{\text{sol}}$  — мощность солнечного потока,  $v_{\text{sol}}$  — нормализованная проекция вектора солнечного света на поверхность,  $v_{\text{sol}} = z_{\text{sol}} / \sqrt{x_{\text{sol}}^2 + y_{\text{sol}}^2 + z_{\text{sol}}^2}$  на горизонтальных поверхностях. На поверхности грунта выполняется условие равновесия потоков, приносящих и уносящих энергию:

$$\gamma_{\text{sol}} q_{\text{sol}} v_{\text{sol}} + w_{\text{top}} (T_{\text{air}} - T|_{z=0}) = \sigma (T|_{z=0})^4 + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (6)$$

где  $w_{\text{top}}$  — коэффициент теплообмена, зависящий от характера и типа поверхности грунта,  $\sigma$  — постоянная Больцмана,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности грунта.

Это есть нелинейное граничное условие, которое делает краевую задачу нелинейной, в отличие от линейных приближений, использованных ранее [1]. Простая линеаризация этой задачи может дать только качественную картину распределения температуры.

## 2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений

В расчетной области  $\Omega$  (рис. 1) решается начально-краевая задача (1)–(6). Введем шаг по времени  $D_t > 0$ . На каждом временном шаге  $t_j = jD_t$ ,  $j \geq 1$ , решение исходного уравнения сводится к последовательному решению одномерных дифференциальных уравнений, начальные данные для которых берутся с предыдущего шага по времени (см. метод расщепления по пространственным переменным [6]). Эти начально-краевые задачи имеют следующий вид.

Для фиксированных  $(y', z')$  таких, что  $y_1 \leq y' \leq y_2$ ,  $0 \leq z' \leq z_{\text{bot}}$  и  $(y')^2 + (z' - z_p)^2 \geq R_p^2$ , рассматривается

**Задача 1.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t, x, y', z')}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T(t, x, y', z')}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq x_1, & \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \\ \text{нач. усл.:} & \quad T(t_{j-1}, x, y', z') = T'(t_{j-1}, x, y', z'), & 0 \leq x \leq x_1, & \\ \text{гран. усл.:} & \quad \frac{\partial T}{\partial x}(t, 0, y', z') = \frac{\partial T}{\partial x}(t, x_1, y', z') = 0, & t_{j-1} \leq t \leq t_j, & \end{aligned} \quad (7)$$

где  $T'(t_{j-1}, x, y', z') = T_0(z')$  при  $j = 1$ , либо  $T'(t_{j-1}, x, y', z')$  — решение, полученное на предыдущем шаге (см. задачи 3.I–3.III) при  $j > 1$ .

Для фиксированных  $x', z'$  таких, что  $0 \leq x' \leq x_1$ ,  $0 \leq z' \leq z_{\text{bot}}$  и  $|z' - z_p| \geq R_p$ , рассматриваются следующие две задачи:

**Задача 2.I** (подобласти I на рис. 2а).

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t, x', y, z')}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T(t, x', y, z')}{\partial y^2}, & y_1 \leq y \leq y_2, & \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \\ \text{нач. усл.:} \quad T(t_j, x', y, z') &= T(t_{j-1}, x', y, z'), & y_1 \leq y \leq y_2, & \\ \text{гран. усл.:} \quad \frac{\partial T}{\partial y}(t, x', y_1, z') &= \frac{\partial T}{\partial y}(t, x', y_2, z') = 0, & t_j \leq t \leq t_{j+1}. & \end{aligned} \quad (8)$$

**Задача 2.II** (подобласти II на рис. 2а). Пусть  $y_1^* < 0$  ( $y_2^* > 0$ ) — ордината точки пересечения прямой  $x = x'$ ,  $z = z'$  с поверхностью трубопровода, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t, x', y, z')}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T(t, x', y, z')}{\partial y^2}, & y_1 \leq y \leq y_1^* \quad (y_2^* \leq y \leq y_2), & \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \\ \text{нач. усл.:} \quad T(t_j, x', y, z') &= T(t_{j-1}, x', y, z'), & y_1 \leq y \leq y_1^* \quad (y_2^* \leq y \leq y_2), & \\ \text{гран. усл.:} \quad \frac{\partial T}{\partial y}(t, x', y_1, z') &= 0 \quad \left( \frac{\partial T}{\partial y}(t, x', y_2, z') = 0 \right), & & \\ \frac{\partial T}{\partial y}(t, x', y, z') &= \varepsilon(x', y, z') (T_p - T(t, x', y, z')) n_y, & y = y_1^* \quad (y = y_2^*), & \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  — вектор нормали к трубопроводу.

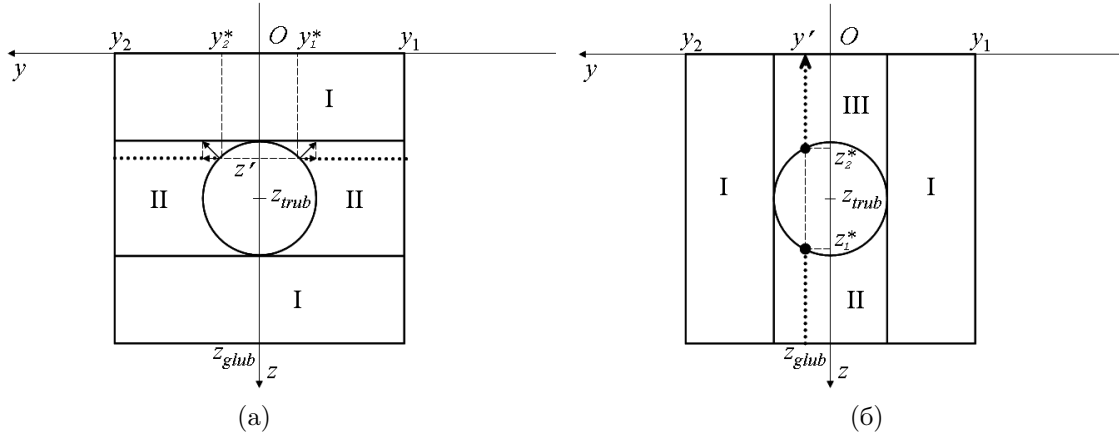


Рис. 2. Подобласти определения одномерных задач в плоскости  $x = x'$ .

Для фиксированных  $x', y'$  таких, что  $0 \leq x' \leq x_1$ ,  $y_1 \leq y' \leq y_2$ , рассматриваются следующие три задачи:

**Задача 3.I** (подобласти I на рис. 2б).

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t, x', y', z)}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T(t, x', y', z)}{\partial z^2}, & 0 \leq z \leq z_{\text{bot}}, & \quad t_{j+1} \leq t \leq t_{j+2}, \\ \text{нач. усл.:} \quad T(t_{j+1}, x', y', z) &= T(t_j, x', y', z), & 0 \leq z \leq z_{\text{bot}}, & \\ \text{гран. усл.:} \quad T(t, x', y', z_{\text{bot}}) &= T_{\text{bot}}, & & \\ \gamma_{\text{sol}} q_{\text{sol}} v_{\text{sol}} + w_{\text{top}} (T_{\text{air}} - T(t, x', y', 0)) &= \sigma T^4(t, x', y', 0) + \kappa \frac{\partial T}{\partial z}(t, x', y', 0), & & \\ t_{j+1} &\leq t \leq t_{j+2}. & & \end{aligned} \quad (10)$$



**Задача 3.II** (подобласть II на рис. 2б). Пусть  $(x', y', z_1^*)$  — нижняя точка пересечения прямой  $x = x', y = y'$  с поверхностью трубопровода, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t, x', y', z)}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T(t, x', y', z)}{\partial z^2}, & z_1^* \leq z \leq z_{\text{bot}}, & t_{j+1} \leq t \leq t_{j+2}, \\ \text{нач. усл.:} & T(t_{j+1}, x', y', z) = T(t_j, x', y', z), & z_1^* \leq z \leq z_{\text{bot}}, & \\ \text{гран. усл.:} & T(t, x', y', z_{\text{bot}}) = T_{\text{bot}}, & & \\ \frac{\partial T}{\partial z}(t, x', y', z_1^*) &= \varepsilon(x', y', z_1^*)(T_p - T(t, x', y', z_1^*))n_z, & t_{j+1} \leq t \leq t_{j+2}, & \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  — вектор нормали к трубопроводу.

**Задача 3.III** (подобласть III на рис. 2б). Пусть  $(x', y', z_2^*)$  — верхняя точка пересечения прямой  $x = x', y = y'$  с поверхностью трубопровода, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t}(t, x', y', z) &= \lambda \frac{\partial^2 T(t, x', y', z)}{\partial z^2}, & 0 \leq z \leq z_2^*, & t_{j+1} \leq t \leq t_{j+2}, \\ \text{нач. усл.:} & T(t_{j+1}, x', y', z) = T(t_j, x', y', z), & 0 \leq z \leq z_2^*, & \\ \text{гран. усл.:} & \frac{\partial T}{\partial z}(t, x', y', z_2^*) = \varepsilon(x', y', z_2^*)(T_p - T(t, x', y', z_2^*))n_z, & & \\ \gamma_{\text{sol}} q_{\text{sol}} v_{\text{sol}} + w_{\text{top}}(T_{\text{air}} - T(t, x', y', 0)) &= \sigma T^4(t, x', y', 0) + \varkappa \frac{\partial T}{\partial z}(t, x', y', 0), & & \\ & t_{j+1} \leq t \leq t_{j+2}. & & \end{aligned} \quad (12)$$

Последовательно решая задачи (7)–(12), при  $j = 3k, k > 0$ , получим приближенное решение исходной задачи (1)–(6).

Разрешимость разностных задач для (7)–(9) исследована, например, в [7]. Подробно рассмотрим задачи (10)–(12), поскольку две из них содержат нелинейное граничное условие. Для расчета распределения температуры по вертикали  $x = x', y = y'$  запишем соответствующие разностные задачи. В некоторый момент времени  $t$  в точке  $(x', y', z_i) \in \Omega$  имеем (индекс при  $T$ , зависящий от  $t$ , для простоты опущен)

$$\frac{\lambda D_t}{D_z^2} T_{i+1} - \left( 2 \frac{\lambda D_t}{D_z^2} + 1 \right) T_i + \frac{\lambda D_t}{D_z^2} T_{i-1} = -T_i',$$

где  $T_i = T(t, x', y', z_i)$ ,  $T_{i-1} = T(t, x', y', z_i - D_z)$ ,  $T_{i+1} = T(t, x', y', z_i + D_z)$ ,  $T_i' = T(t - D_t, x', y', z_i)$ ,  $D_t > 0$ ,  $D_z > 0$  — шаги по  $t$  и по  $z$  соответственно. Для простоты изложения будем предполагать, что разбиения по  $t$  и по  $z$  равномерные, так что для задачи 3.I  $|z_{\text{bot}}| = (N-1)D_z$  и  $z_i = z_{\text{bot}} - iD_z$ , для задачи 3.II  $|z_{\text{bot}} - z_1^*| = (N-1)D_z$  и  $z_i = z_{\text{bot}} - iD_z$ , для задачи 3.III  $|z_2^*| = (N-1)D_z$  и  $z_i = z_2^* - iD_z$ , во всех случаях  $i = 0, \dots, N-1$ . Система разностных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} b_0 T_0 &+ c_0 T_1 & & & & & & = d_0, \\ a_1 T_0 &+ b_1 T_1 &+ c_1 T_2 & & & & & = d_1, \\ \dots & & \dots & & \dots & & & \dots \\ & a_{N-2} T_{N-3} &+ b_{N-2} T_{N-2} &+ c_{N-2} T_{N-1} & & & & = d_{N-2}, \\ & & a_{N-1} T_{N-2} &+ b_{N-1} T_{N-1} & & & & = d_{N-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$a_i = c_i = \frac{\lambda D_t}{D_z^2}, \quad b_i = - \left( 2 \frac{\lambda D_t}{D_z^2} + 1 \right), \quad d_i = -T_i', \quad i = 1, \dots, N-2. \quad (14)$$

Коэффициенты  $b_0$ ,  $c_0$ ,  $d_0$  определяются из граничного условия в точке  $z = z_0$ , а именно: для задач 3.I и 3.II, когда на нижней границе расчетной области задано условие (4), имеем

$$b_0 = 1, \quad c_0 = 0, \quad d_0 = T_{\text{bot}}; \quad (15)$$

для задачи 3.III из граничного условия (5) определяются коэффициенты  $b_0$ ,  $c_0$ ,  $d_0$ :

$$b_0 = 1 + \varepsilon \delta \sin \varphi, \quad c_0 = -1, \quad d_0 = \varepsilon \delta T_p \sin \varphi; \quad (16)$$

кроме того, в случае задачи 3.III

$$a_1 = \frac{2\lambda D_t}{\delta(D_z + \delta)}, \quad b_1 = -\left(2\frac{\lambda D_t}{D_z \delta} + 1\right), \quad c_1 = \frac{2\lambda D_t}{D_z(D_z + \delta)}, \quad d_1 = -T'_1, \quad (17)$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon(x', y', z_2^*), \quad \sin \varphi = \frac{z_p - z_2^*}{R_p}, \quad \delta = z_2^* - z_1.$$

Коэффициенты  $a_{N-1}$ ,  $b_{N-1}$ ,  $d_{N-1}$  находятся из граничного условия в точке  $z = z_{N-1}$ . Для задачи 3.II

$$a_{N-1} = -1, \quad b_{N-1} = 1 + \varepsilon \delta \sin \varphi, \quad d_{N-1} = \varepsilon \delta T_p \sin \varphi, \quad (18)$$

кроме того, в случае этой задачи

$$a_{N-2} = \frac{2\lambda D_t}{D_z(D_z + \delta)}, \quad b_{N-2} = -\left(2\frac{\lambda D_t}{D_z \delta} + 1\right), \quad c_{N-2} = \frac{2\lambda D_t}{\delta(D_z + \delta)}, \quad d_{N-2} = -T'_{N-2}, \quad (19)$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon(x', y', z_1^*), \quad \sin \varphi = \frac{z_1^* - z_p}{R_p}, \quad \delta = z_{N-2} - z_1^*.$$

Для задач 3.I и 3.III запишем в разностном виде граничные условия на поверхности грунта

$$\gamma_{\text{sol}} q_{\text{sol}} v_{\text{sol}} + w_{\text{top}}(T_{\text{air}} - T_{N-1}) = \sigma(T_{N-1})^4 + \varkappa \frac{T_{N-1} - T_{N-2}}{D_z},$$

или

$$-\varkappa T_{N-2} + (\varkappa + w_{\text{top}} D_z) T_{N-1} + \sigma(T_{N-1})^4 D_z = \gamma_{\text{sol}} q_{\text{sol}} v_{\text{sol}} D_z + w_{\text{top}} D_z T_{\text{air}}. \quad (20)$$

Тогда коэффициенты имеют вид

$$a_{N-1} = -\varkappa, \quad b_{N-1} = \varkappa + w_{\text{top}} D_z, \quad d_{N-1} = -\sigma(T_{N-1})^4 D_z + w_{\text{top}} D_z T_{\text{air}} + D_z \gamma_{\text{sol}} q_{\text{sol}} v_{\text{sol}}, \quad (21)$$

коэффициент  $d_{N-1}$  содержит нелинейное слагаемое  $-\sigma(T_{N-1})^4 D_z$ .

### 3. Метод решения систем разностных уравнений с нелинейным условием на границе

Для решения системы линейных уравнений (13) используется метод прогонки. Сначала вычисляются промежуточные коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  (прямой ход прогонки):

$$\alpha_0 = -\frac{c_0}{b_0}, \quad \beta_0 = \frac{d_0}{b_0},$$

$$\alpha_{i+1} = -\frac{c_i}{b_i + \alpha_i a_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{d_i - \alpha_i \beta_i}{b_i + \alpha_i a_i}, \quad i = 0, 1, \dots, N-2. \quad (22)$$

Далее вычисляется вектор решения системы (13) по следующим формулам (обратный ход прогонки):

$$T_{N-1} = \frac{d_{N-1} - a_{N-1} \beta_{N-1}}{b_{N-1} + \alpha_{N-1} a_{N-1}} \quad (\text{для линейного уравнения}),$$

$$T_i = \alpha_{i+1}T_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N - 2, \dots, 1, 0. \quad (23)$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующее вспомогательное утверждение об оценках коэффициентов  $\alpha_i$  (см., например, [7], теорема о разрешимости системы линейных разностных уравнений методом прогонки).

**Утверждение 1.** Пусть для системы разностных уравнений (13) выполнены условия

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|, \quad i = 0, \dots, N - 1,$$

$$\left| \frac{c_0}{b_0} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{a_{N-1}}{b_{N-1}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{c_0}{b_0} \right| + \left| \frac{a_{N-1}}{b_{N-1}} \right| < 2.$$

Тогда знаменатели в (22) отличны от нуля и  $|\alpha_i| \leq 1$ ,  $i = 0, \dots, N - 2$ .

**Утверждение 2.** Для системы разностных уравнений (13) с коэффициентами (14), (15) и (21) для задачи 3.I, или (14) ( $i \leq N - 3$ ), (15), (18) и (19) для задачи 3.II, или (14) ( $i \geq 2$ ), (16), (17) и (21) для задачи 3.III знаменатели в формулах (22) отличны от нуля и  $|\alpha_i| \leq 1$ ,  $i = 0, \dots, N - 2$ .

**Доказательство.** Покажем, что система удовлетворяет достаточным условиям применимости метода прогонки (утверждение 1). Для коэффициентов (14) разностных уравнений (13) при  $i = 1, \dots, N - 2$  имеем оценку  $|b_i| = \left| 2 \frac{\lambda D_t}{D_p^2} + 1 \right| = 2 \left| \frac{\lambda D_t}{D_p^2} \right| + 1 \geq |a_i| + |c_i|$ .

Для  $(N - 1)$ -х коэффициентов (21) на поверхности грунта в случае, если  $w_{\text{top}} > 0$ , т. е. если нет теплоизоляции, получаем

$$\left| \frac{a_{N-1}}{b_{N-1}} \right| = \frac{\varkappa}{\varkappa + w_{\text{top}} D_z} < 1.$$

Для коэффициентов (18) и (19)

$$\left| \frac{a_{N-1}}{b_{N-1}} \right| = \frac{1}{1 + \varepsilon \delta} \leq 1, \quad |a_{N-2}| + |c_{N-2}| = \frac{2D_t}{\delta D_z} \leq |b_{N-2}|.$$

Для коэффициентов (15) и (21) (в задаче 3.I)

$$|c_0| = 0, \quad |c_0| + \left| \frac{a_{N-1}}{b_{N-1}} \right| < 2.$$

Для коэффициентов (15) и (18) (в задаче 3.II)

$$|c_0| = 0, \quad |c_0| + \left| \frac{a_{N-1}}{b_{N-1}} \right| < 2.$$

Для коэффициентов (16), (17) и (21) (в задаче 3.III)

$$\left| \frac{c_0}{b_0} \right| = \frac{1}{1 + \varepsilon \delta} \leq 1, \quad |a_1| + |c_1| = \frac{2D_t}{\delta D_z} \leq |b_1|, \quad |c_0| + \left| \frac{a_{N-1}}{b_{N-1}} \right| < 2.$$

Доказательство заканчивается применением утверждения 1, условия которого выполняются в силу полученных оценок.

Рассмотрим, для неизвестного  $T_{N-1}$ , нелинейное разностное уравнение (20), которое включает в себя нелинейный член четвертого порядка. Уравнение для  $u = T_{N-1}$  после прямого хода прогонки (22) приобретает вид

$$F(u) \equiv f_2 u^4 + f_1 u - f_0 = 0, \quad (24)$$

где

$$f_2 = D_z \sigma > 0, \quad f_1 = b_{N-1} + \alpha_{N-1} a_{N-1}, \quad f_0 = \tilde{d}_{N-1} - a_{N-1} \beta_{N-1},$$

$\tilde{d}_{N-1}$  есть  $d_{N-1}$  без слагаемого  $\sigma(T_{N-1})^4 D_z$ ; см. (21). Поскольку физический смысл задачи предполагает неотрицательное значение температуры, то далее будем искать только неотрицательные решения уравнения (24).

**Теорема 1.** Уравнение (24) имеет единственное решение, принадлежащее промежутку  $[0, +\infty)$ .

**Доказательство.** В постановке задачи коэффициенты  $\varkappa > 0$  и  $w_{\text{top}} > 0$ , кроме того, шаг по пространству  $D_z > 0$ . Далее по построению

$$f_1 = b_{N-1} + \alpha_{N-1} a_{N-1} = \varkappa + w_{\text{top}} D_z - \varkappa \alpha_{N-1}.$$

В силу утверждения 2  $|\alpha_{N-1}| \leq 1$ , тогда  $1 - \alpha_{N-1} \geq 0$ , следовательно,

$$f_1 = \varkappa(1 - \alpha_{N-1}) + w_{\text{top}} D_z > 0.$$

Докажем теперь (по индукции), что коэффициенты  $\beta_i \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Действительно,  $\beta_0 = \frac{d_0}{b_0} \geq 0$ , поскольку для задачи 3.I  $d_0 = T_{\text{bot}} \geq 0$ ,  $b_0 = 1 > 0$ , а для задачи 3.III  $d_0 = \varepsilon \delta T_p \sin \varphi \geq 0$ ,  $b_0 = 1 + \varepsilon \delta \sin \varphi > 0$ . По построению  $b_i, d_i \leq 0$ ,  $a_i \geq 0$ , если  $1 \leq i \leq N-2$ , и в силу утверждения 2,  $|b_i| > |a_i|$ ,  $|\alpha_i| \leq 1$ , тогда  $\beta_{i+1} = \frac{d_i - a_i \beta_i}{b_i + \alpha_i a_i} = \frac{|d_i| + |a_i| \beta_i}{|b_i| - \alpha_i |a_i|} \geq 0$ , поскольку, по предположению индукции,  $\beta_i \geq 0$ .

Отсюда следует, что  $F(0) = -f_0 < 0$ . Действительно,

$$f_0 = \tilde{d}_{N-1} - a_{N-1} \beta_{N-1} = w_{\text{top}} D_z T_{\text{air}} + D_z \gamma_{\text{sol}} q_{\text{sol}} v_{\text{sol}} + \varkappa \beta_{N-1} > 0,$$

поскольку заданная температура воздуха  $T_{\text{air}} > 0$ .

На рис. 3 представлен характерный вид функции  $F(u)$ .

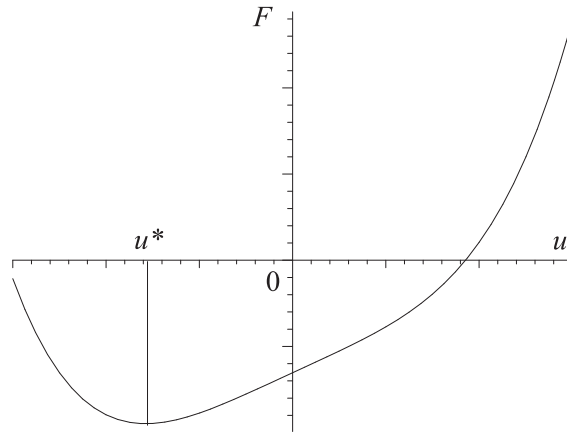


Рис. 3. График функции  $F(u)$ .

Рассмотрим

$$F'(u) = 4f_2 u^3 + f_1, \quad F''(u) = 12f_2 u^2.$$

Уравнение  $F'(u) = 0$  имеет единственное решение  $u^* = -\left(\frac{f_1}{4f_2}\right)^{\frac{1}{3}} < 0$  на всей оси допустимых аргументов  $(-\infty, \infty)$  (рис. 3). Поскольку  $F'(0) = f_1 > 0$ , то  $F'(u) > 0$  при  $u \in [0, +\infty)$  и  $F''(u) = 12f_2 u^2 = 12D_z \sigma u^2 > 0$  при  $u > 0$ . Из этих оценок следует заключение теоремы.

**Утверждение 3.** Неотрицательное решение уравнения (24) может быть получено методом Ньютона:

$$u_0 = 0, \quad u_{k+1} = u_k - \frac{f_2 u_k^4 + f_1 u_k - f_0}{4f_2 u_k^3 + f_1}, \quad k > 0, \quad (25)$$

$$T_{N-1} \rightarrow u_k \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Действительно, оценки для производных функции  $F(u)$ , полученные при доказательстве теоремы 1, удовлетворяют достаточным условиям применимости метода Ньютона (см., например, [8]), что и требовалось.

Таким образом, из (25) получаем значение  $T_{N-1}$ . Далее вычисляется вектор решения системы (13) по формулам обратного хода прогонки (23).

**Теорема 2.** Нелинейная разностная задача (13) с коэффициентами (14), (15) и (21) для задачи 3.I или (14) ( $i \geq 2$ ), (16), (17) и (21) для задачи 3.III имеет единственное решение.

**Доказательство.** Следует непосредственно из утверждений 2, 1 и формул обратного хода прогонки (23) при условии, что  $T_{N-1}$  — решение уравнения (24) на интервале  $[0, +\infty)$ .

**З а м е ч а н и е.** Представленный метод решения может быть использован для расчета распределения температуры в трехмерной области, если поверхность грунта не является плоской; если имеется, например, траншея с вертикальными стенками (см. рис. 4), то нелинейные граничные условия будут присутствовать на одном из концов расчетного отрезка (выделен пунктирными линиями) в случае одномерных линейных уравнений для  $T(t, x, y', z')$  при фиксированных  $y', z'$  и/или  $T(t, x', y, z')$  при фиксированных  $x', z'$ , см. (7)–(9). Для этих уравнений также могут быть записаны конечно-разностные аналоги вида (13), для которых справедливы все представленные утверждения и теоремы, поскольку для граничных условий теплоизоляции (3) на горизонталях ортогональной расчетной сетки мы имеем конечно-разностные соотношения

$$\frac{T_1 - T_0}{D_x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{T_1 - T_0}{D_y} = 0.$$

Тогда для системы (13)

$$b_0 = 1, \quad c_0 = -1, \quad d_0 = 0, \quad \left| \frac{c_0}{b_0} \right| \leq 1.$$

Таким образом, условия утверждения 1 выполнены.

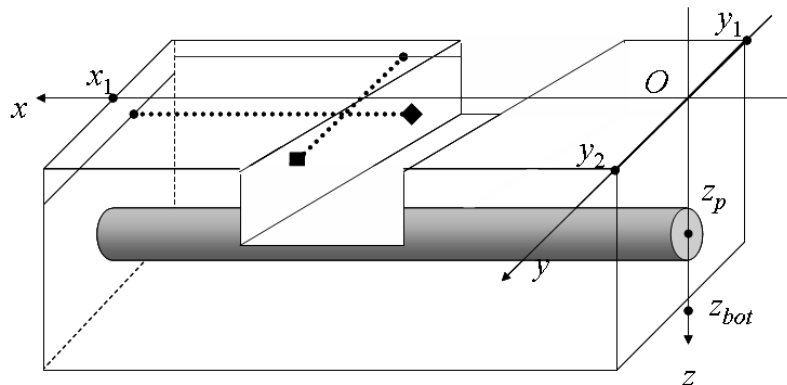


Рис. 4. Схема области с трубопроводом и траншеей.

## 4. Результаты расчетов

На рис. 5 представлен профиль распределения температуры по вертикали (по оси  $z$ ). Расчет проводился (а) для линейной модели и (б) для нелинейной модели, включающей коэффициент излучения. Характеристики среды:  $\rho = 700 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_\nu = 2300 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ ,  $\kappa = 0,1 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ,  $D_t = 3600 \text{ с}$ . Начальные данные — постоянная температура  $T_0=287 \text{ К}$ . Линейная модель дает существенно завышенные значения температуры.

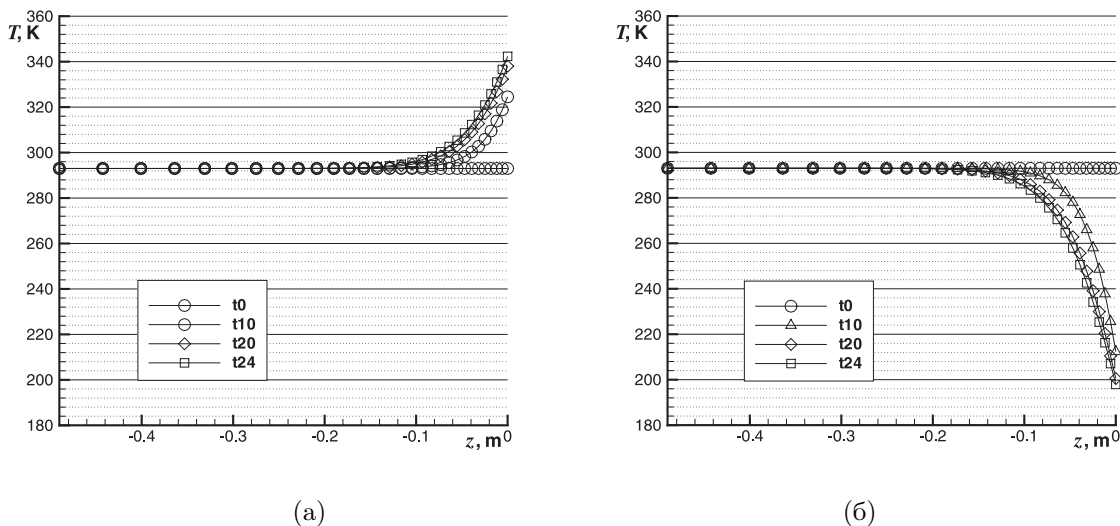


Рис. 5. Распределение температуры по вертикали: (а) — линейная модель, (б) — нелинейная модель.

На основе представленных результатов разработан метод расчета и создан комплекс программ для численного моделирования неоднородных тепловых полей от заглубленного трубопровода в трехмерной области с учетом излучения и неровности на поверхности грунта [9]. На рис. 6 приведены изоповерхности температуры в трехмерной расчетной области и плоские проекции распределения температур.

Параметры расчета: температура воздуха 273 К, температура грунта 273 К, температура в трубе 373 К, плотность грунта  $1300 \text{ кг/м}^3$ , теплопроводность  $1.7 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ , удельная теплоемкость  $850 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , размеры области  $2 \text{ м} \times 2 \text{ м} \times 2 \text{ м}$ , диаметр трубопровода 0.5 м, глубина залегания центра трубопровода 1 м, время расчета 20 суток.

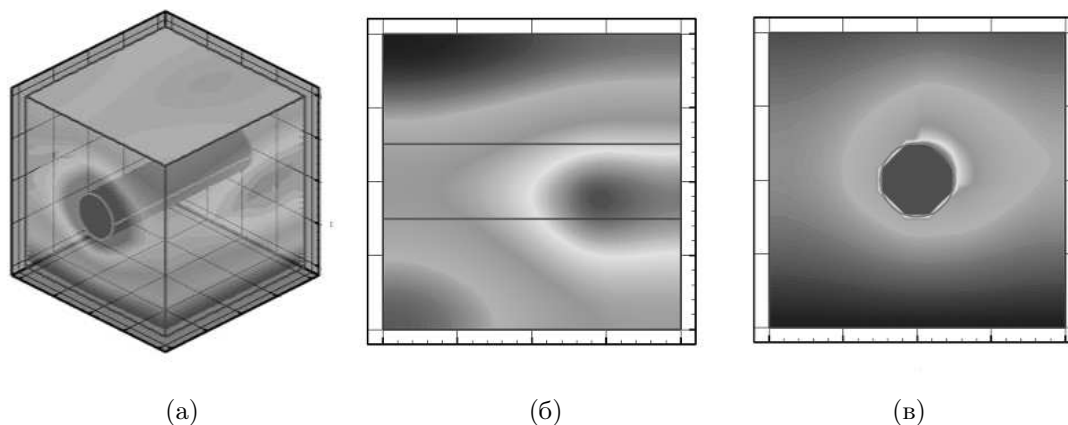


Рис. 6. Изоповерхности температуры: (а) — в трехмерной области, (б) — на поверхности грунта, (в) — на плоскости  $x = 0.6 \text{ м}$ .

На рис. 7 представлены тепловые картины при отсутствии (а) и наличии (б) траншеи на тепловой след от трубопровода ярче проступает на дне траншеи, кроме того, в соответствии с направлением солнечного света и высотой солнца над горизонтом наблюдаются освещенные и затененные участки грунта. Все это существенно усложняет тепловой портрет поверхности грунта.

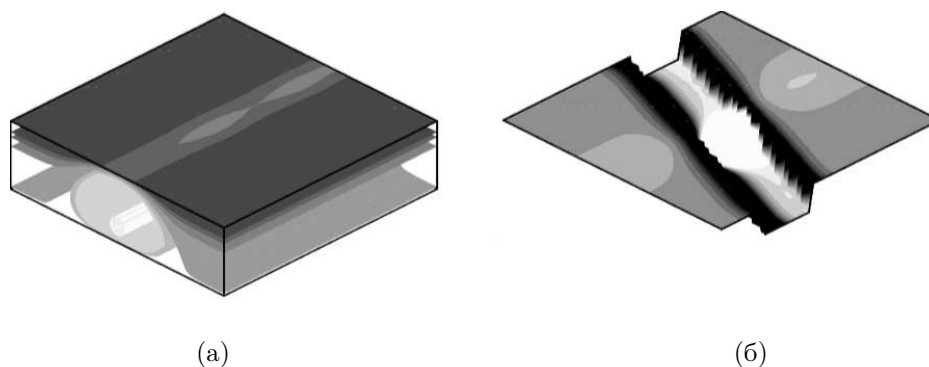


Рис. 7. Распределение температуры в области и на поверхности грунта при частичном повреждении теплоизоляции трубопровода и при наличии траншеи.

### Заключение

В представленной работе доказана разрешимость системы линейных разностных уравнений с одним нелинейным условием четвертой степени на границе, представлен алгоритм вычисления этого решения. Это позволяет получать неявным конечно-разностным методом численные решения линейного уравнения теплопроводности с учетом нелинейного коэффициента лучистого теплообмена, а также неровности на поверхности грунта.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будадин О.Н., Потапов А.И. и др. Тепловой неразрушающий контроль изделий. М.: Наука, 2002.
2. Quitner P. Global existence of solutions of parabolic problems with nonlinear boundary conditions // Singularities and differential equations. Warszawa: Banach center publications, 1996. Vol. 33. P. 309–314.
3. Титов С.С. Решение периодических задач Коши с помощью специальных тригонометрических рядов // Численные методы механики сплошной среды, 1984. Т. 9, № 2. С. 112–124.
4. Черепанов А.Н., Шапеев В.П., Фомин В.М., Семин Л.Г. Численное моделирование теплофизических процессов при лазерно-лучевой сварке с образованием парового канала // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 5. С. 88–96.
5. Шапеев В.П., Черепанов А.Н. Конечно-разностный алгоритм для численного моделирования процессов лазерной сварки металлических пластин // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, № 4. С. 102–117.
6. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
8. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
9. Ваганова Н.А. Моделирование неоднородных тепловых полей от заглубленного источника на дневной поверхности // Математическое и информационное моделирование: Сб. науч. тр. Тюмень: Вектор Бук, 2005. Вып. 7. С. 77–84.

УДК 517.944+533

## НЕПРЕРЫВНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ НЕИЗЭНТРОПИЧЕСКИХ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА<sup>1</sup>

А. Р. Гарифуллин, С. В. Хабиров

Точное частично инвариантное решение уравнений движения сжимаемой жидкости, описывающее коллапс частиц в точку и мгновенный источник из точки в одномерном неизэнтропическом движении, обрезается характеристиками и склеивается в непрерывное решение одномерной подмодели в конечной области. Показана возможность непрерывного периодического неизэнтропического движения сжимаемой жидкости в ограниченной области под действием поршня.

### Введение

Задачей о непрерывном сопряжении газовых движений через характеристику занимались многие авторы [1, разд. 2; 2, библиографический обзор; 3]. Как правило, одно из решений было покоем, что обуславливалось физическим смыслом задачи. При выполнении программы *подмодели* газовой динамики [4] появилось множество новых решений с особенностями: коллапсом или мгновенным источником [5], которые можно трактовать как часть непрерывных движений газа. Статья посвящена частичному обоснованию этой трактовки на примере неизэнтропического движения, аналогично тому, как это было сделано для изэнтропического движения газа [6].

### 1. Постановка задачи о сопряжении сходящегося и расходящегося движений газа

В работе [7] найдено частично инвариантное решение ранга 2 дефекта 2 на 4-мерной подалгебре уравнений движения сжимаемой жидкости с уравнением состояния

$$p = 2\rho^2 + S, \quad (1)$$

где  $S$  — функция энтропии,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление. Решение в декартовых эйлеровых координатах  $(t, \vec{x})$  задается формулами

$$u = 2\frac{x}{t}, \quad \rho = \frac{1}{t^2}, \quad p = \frac{2-x^2}{t^4}, \quad S = -\frac{x^2}{t^4}, \quad a^2 = 4\rho, \quad (2)$$

где  $u$  — скорость,  $a$  — скорость звука.

Решение (2) удовлетворяет уравнениям одномерной подмодели газовой динамики с плоскими волнами с уравнением состояния (1)

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x) + p_x &= 0, \\ \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ p_t + up_x + 4\rho^2 u_x &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проект 05-01-00775а, 05-01-00080а) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5245.2006.1).



Энтропия удовлетворяет уравнению

$$S_t + uS_x = 0.$$

Система (3) допускает операторы переносов  $\partial_t$ ,  $\partial_x$  и растяжений  $t\partial_t + x\partial_x$ ,  $\partial_x + u\partial_u + 2\rho\partial_\rho + 4p\partial_p$ . Решение (2) есть инвариантное решение относительно оператора  $Y = -t\partial_t + u\partial_u + 2\rho\partial_\rho + 4p\partial_p$ .

Характеристики системы (3) и условия на характеристиках таковы [8, гл. 2, разд. 15]:

$$C_0 : \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad D_0(p - 2\rho^2) = 0;$$

$$C_\pm : \quad \frac{dx}{dt} = u \pm 2\sqrt{\rho}, \quad D_\pm p \pm 2\rho^{3/2}D_\pm u = 0.$$

На решении (2) характеристики принимают вид

$C_0 : x = \xi t^2$  — мировые линии частиц;

$C_\pm : x = \mp \text{sign } t + Ct^2$  — звуковые линии (см. рис. 1).

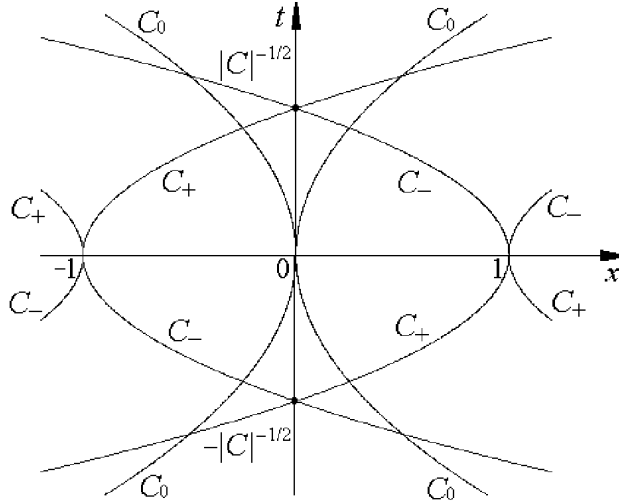


Рис. 1. Характеристики системы (3) на решении (2).

Будем рассматривать симметричные относительно оси  $t$  решения (уравнения допускают инверсию  $t \rightarrow -t$ ,  $x \rightarrow -x$ ).

Рассмотрим два решения системы (3), полученные из (2) переносом по  $t$  на  $\pm|C|^{-1/2}$  (растяжение  $Y$  делает  $|C| = 1$ ).

1.  $t \rightarrow t + 1 \Rightarrow u = 2\frac{x}{t+1}$ ,  $\rho = (t+1)^{-2}$ ,  $p = \frac{2-x^2}{(t+1)^4}$ ,  $S = -\frac{x^2}{(t+1)^4}$ ;

$C_{01} : x = \xi(t+1)^2$  — мировые линии;  $t > 0$ ; характеристика  $C_{+1} : t+1 = (x+1)^{1/2}$  ограничивает область определения 1-го решения.

2.  $t \rightarrow t - 1 \Rightarrow u = 2\frac{x}{t-1}$ ,  $\rho = (t-1)^{-2}$ ,  $p = \frac{2-x^2}{(t-1)^4}$ ,  $S = -\frac{x^2}{(t-1)^4}$ ;

$C_{02} : x = \xi(t-1)^2$  — мировые линии;  $t < 0$ ; характеристика  $C_{-2} : t-1 = -(x+1)^{1/2}$  ограничивает область определения 2-го решения (см. рис. 2).

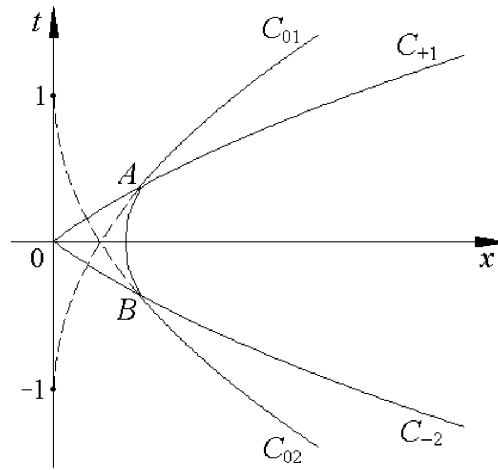


Рис. 2. Сопряжение сходящегося и расходящегося движений газа.

Мировая линия 1-го решения  $C_{01}$  пересекает характеристику  $C_{+1}$  в точке  $A = (\xi(1 - \xi)^{-1}, -1 + (1 - \xi)^{-1/2})$ ; мировая линия 2-го решения  $C_{02}$  пересекает характеристику  $C_{-2}$  в точке  $B = (\xi(1 - \xi)^{-1}, 1 - (1 - \xi)^{-1/2})$ .

В области  $AOB$ , ограниченной характеристиками  $OC_{+1}$  и  $OC_{-2}$ , мы хотим построить решения уравнений (3), непрерывно примыкающие к 1-му и 2-му решениям.

Перейдем к лагранжевым координатам  $\xi = \xi(t, x)$ ,  $\xi_t + u\xi_x = 0$ . Если  $x = x(t, \xi)$  — обратная функция, то  $u = x_t, S = S(\xi)$ ,  $\rho x_\xi = 1$ ,  $p = 2\rho^2 + S(\xi)$  и уравнения (3) перейдут в систему

$$\rho^2 u_\xi + \rho_t = 0, \quad u_t + 4\rho\rho_\xi + S'(\xi) = 0. \quad (4)$$

Точные решения в лагранжевых координатах примут вид:

1.  $u = 2\xi(t + 1)$ ,  $\rho = (t + 1)^{-2}$ ,  $S = -\xi^2$ ;  $x = \xi(t + 1)^2$ ,  $C_{+1} : \xi = 1 - (t + 1)^{-2}$ ;
2.  $u = 2\xi(t - 1)$ ,  $\rho = (t - 1)^{-2}$ ,  $S = -\xi^2$ ;  $x = \xi(t - 1)^2$ ,  $C_{-2} : \xi = 1 - (t - 1)^{-2}$ .

Здесь  $0 < \xi \leq \xi_0 < 1$  — лагранжева координата.

На характеристике  $C_{+1} : \xi = 1 - (t + 1)^{-2}$ , ограничивающей область определения 1-го решения, газодинамические функции равны

$$u = 2\xi(1 - \xi)^{-1/2}, \quad \rho = 1 - \xi, \quad p = 2(1 - \xi)^2 - \xi^2. \quad (5)$$

На характеристике  $C_{-2} : \xi = 1 - (1 - t)^{-2}$ , ограничивающей область определения 2-го решения, газодинамические функции равны

$$u = -2\xi(1 - \xi)^{-1/2}, \quad \rho = 1 - \xi, \quad p = 2(1 - \xi)^2 - \xi^2. \quad (6)$$

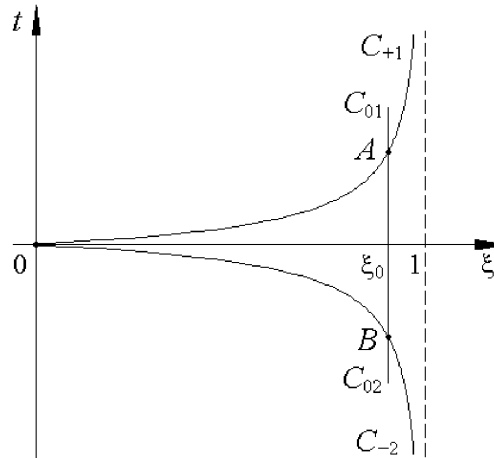


Рис. 3. Область движения газа в лагранжевых переменных.

Прямая  $\xi = \xi_0 < 1$  является мировой линией  $C_{01}$ ,  $C_{02}$  обоих решений, пересекает характеристики  $C_{+1}$  и  $C_{-2}$  в точках  $A(\xi_0, (1 - \xi_0)^{-1/2} - 1)$ ,  $B(\xi_0, 1 - (1 - \xi_0)^{-1/2})$  (см. рис. 3). В области  $AOB$  выполняются уравнения (4) с  $S = -\xi^2$ .

Пространственно подобная задача Гурса с данными на характеристиках (5) и (6) инвариантна относительно инверсии  $t \leftrightarrow -t$ ,  $u \leftrightarrow -u$ , значит,  $u = 0$  при  $t = 0$  и достаточно найти решения в области  $OA\xi_0$  или в области  $OB\xi_0$ .

Замена переменных

$$t = s\delta, \quad \xi = 1 - (1 + \delta)^{-2}, \quad R = \rho(1 + \delta)^2, \quad 2v = u(1 + \delta) \quad (7)$$

приводит задачу к виду

$$v_s + R(\delta R_\delta - 2\delta(1 + \delta)^{-1}R - sR_s) = \delta^2(2 + \delta)(1 + \delta)^{-1}, \quad (8)$$

$$R_s + R^2(\delta v_\delta - \delta(1 + \delta)^{-1}v - sv_s) = 0;$$

$$v = \delta(\delta + 2), \quad R = 1 \quad \text{при} \quad s = 1;$$

$$v = 0 \quad \text{при} \quad s = 0;$$

$$v = -\delta(\delta + 2), \quad R = 1 \quad \text{при} \quad s = -1.$$

## 2. Построение решения задачи Гурса

Разыскиваем решение в виде рядов

$$R = 1 + \sum_{k \geq 1} R_k \delta^k, \quad v = \sum_{k \geq 1} v_k \delta^k, \quad (1 + \delta)^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \delta^k \quad (9)$$

при  $\delta < 1 \Rightarrow \xi < 3/4$ .

Подстановка рядов (9) в равенства (8) и приравнивание к нулю коэффициентов при степенях  $\delta^k$  дает

$$k = 1: \quad v'_1 - sR'_1 + R_1 = 2 = A_1, \quad R'_1 - sv'_1 + v_1 = 0 = B_1, \quad v_1 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0;$$

$$R_1 = 0, \quad v_1 = 2 \quad \text{при} \quad s = 1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2s, \quad R_1 = 0;$$

$$k = 2: \quad v'_2 - sR'_2 + 2R_2 = 0 = A_2, \quad R'_2 - sv'_2 + 2v_2 = 2s = B_2, \quad v_2 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0;$$

$$R_2 = 0, \quad v_2 = 1 \quad \text{при} \quad s = 1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = s, \quad R_2 = \frac{1}{2}(s^2 - 1);$$

$$k = 3: \quad v'_3 - sR'_3 + 3R_3 = 2s^2 - 1 = A_3, \quad R'_3 - sv'_3 + 3v_3 = -s = B_3,$$

$$v_3 = 0 \quad \text{при} \quad s = 0; \quad v_3 = 0 = R_3 \quad \text{при} \quad s = 1 \quad \Rightarrow$$

$$v_3 = \frac{5}{8}s(s^2 - 1), \quad R_3 = \frac{1}{8}(s^2 - 1);$$

$$k > 3: \quad v'_k - sR'_k + kR_k = A_k, \quad R'_k - sv'_k + kv_k = B_k, \quad (10)$$

где

$$A_k = -(-1)^k + 2 \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^{k-j-1} \left( 2R_j + \sum_{i=1}^{j-1} R_i R_{j-i} \right) + \sum_{j=3}^{k-2} R_{k-j} (sR'_j - jR_j) + R_{k-2}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{j=3}^{k-1} (-1)^{k-j-1} v_j + \sum_{j=1}^{k-2} v_j \sum_{j=1}^{k-1-j} (-1)^{k-1-j-i} \left( 2R_i + \sum_{l=1}^{i-1} R_l R_{i-l} \right) \\
&+ \sum_{j=3}^{k-2} \left( 2R_{k-j} + \sum_{i=1}^{k-1-j} R_i R_{k-j-i} \right) (s v'_j - j v_j) + (-1)^k s - s \left( 2R_{k-2} + \sum_{i=2}^{k-4} R_i R_{k-2-i} \right), \quad (12)
\end{aligned}$$

$v_k = 0$  при  $s = 0$ ,  $v_k = R_k = 0$  при  $s = 1$ .

Для получения рекуррентных формул на величины  $A_k$ ,  $B_k$  найдем  $v'_k$ ,  $R'_k$  из линейной системы (10)

$$v'_k = (1 - s^2)^{-1} (A_k + s B_k - k(R_k + s v_k)),$$

$$R'_k = (1 - s^2)^{-1} (B_k + s A_k - k(v_k + s R_k))$$

и подставим в (11), (12):

$$\begin{aligned}
A_k &= -(-1)^k + 2 \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^{k-j-1} \left( 2R_j + \sum_{j=1}^{j-1} R_i R_{j-i} \right) \\
&+ (1 - s^2)^{-1} \sum_{j=3}^{k-2} R_{k-j} (s(s A_j + B_j) - j(s v_j + R_j)) + R_{k-2}, \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{j=3}^{k-1} (-1)^{k-j-1} v_j + \sum_{j=1}^{k-2} v_j \sum_{i=2}^{k-1-j} (-1)^{k-1-j-i} \left( 2R_i + \sum_{l=1}^{i-1} R_l R_{i-l} \right) \\
&+ (1 - s^2)^{-1} \sum_{j=3}^{k-2} \left( 2R_{k-j} + \sum_{i=1}^{k-1-j} R_i R_{k-j-i} \right) (s(s B_j + A_j) - j(s R_j + v_j)) \\
&+ (-1)^k s - s \left( 2R_{k-2} + \sum_{i=2}^{k-4} R_i R_{k-2-i} \right). \quad (14)
\end{aligned}$$

Таким образом, система (10) есть рекуррентная система линейных неоднородных уравнений. Решение однородных уравнений имеет вид

$$v_k = C_{1k}(1 + s)^k + C_{2k}(1 - s)^k; \quad R_k = -C_{1k}(1 + s)^k + C_{2k}(1 - s)^k.$$

Решение неоднородного уравнения с учетом краевых условий при  $s = 0$  принимает вид

$$\begin{aligned}
v_k &= -\frac{1}{2}(1 + s)^k \int_s^1 \frac{A_k - B_k}{(1 + s)^{k+1}} ds + \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \frac{A_k - B_k}{(1 + s)^{k+1}} ds + \int_0^s \frac{A_k + B_k}{(1 - s)^{k+1}} ds \right) (1 - s)^k, \\
R_k &= \frac{1}{2}(1 + s)^k \int_s^1 \frac{A_k - B_k}{(1 + s)^{k+1}} ds + \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \frac{A_k - B_k}{(1 + s)^{k+1}} ds + \int_0^s \frac{A_k + B_k}{(1 - s)^{k+1}} ds \right) (1 - s)^k. \quad (15)
\end{aligned}$$

При  $s = 1$  должно выполняться предельное соотношение

$$\lim_{s \rightarrow 1} (1 - s)^k \int_0^s \frac{A_k(s) + B_k(s)}{(1 - s)^{k+1}} ds = \frac{1}{k} (A_k(1) + B_k(1)) = 0, \quad k \geq 3. \quad (16)$$

При  $j \leq 3$ ,  $v_j$ ,  $R_j$ ,  $A_j$ ,  $B_j$  — многочлены и  $A_3 + s B_3 = s^2 - 1$ ,  $B_3 + s A_3 = 2s(s^2 - 1)$ .

Пусть  $A_j, B_j, j < k$ , — многочлены и  $sA_j + B_j = (1 - s^2)M_j$ ,  $A_j + sB_j = (1 - s^2)N_j$ ,  $j \geq 3$ . Тогда  $A_j = N_j - sM_j$ ,  $B_j = M_j - sN_j$  и из (15) следует, что  $v_k, R_k$  — многочлены:  $v_j = s(1 - s^2)\bar{v}_j$ ,  $3 \leq j < k$ ;  $R_j = (1 - s^2)\bar{R}_j$ ,  $1 \leq j < k$ . Из (13), (14) следует, что  $A_k, B_k$  — многочлены и  $sA_k + B_k = (1 - s^2)M_k$ ,  $A_k + sB_k = (1 - s^2)N_k$ ,  $k \geq 3$ , ( $N_3 = -1$ ,  $M_3 = -2s$ ).

Тогда  $A_k = N_k - sM_k$ ,  $B_k = M_k - sN_k$ ,  $A_k + B_k = (1 - s)(N_k + M_k)$ ,  $A_k - B_k = (1 + s)(N_k - M_k)$  и из (15) следует, что  $v_k, R_k$  — многочлены:  $v_k = s(1 - s^2)\bar{v}_k$ ,  $R_k = (1 - s^2)\bar{R}_k$  и выполняется необходимое условие (16) существования решения пространственно подобной задачи Гурса.

### 3. Доказательство сходимости

Покажем, что ряды (9) абсолютно сходятся в области  $\delta < 1$ ,  $0 < s < 1$ .

Предположим, что  $\alpha_j = \max\{|N_j|, |M_j|\}$  для  $j < k$ . Из представления для решения (15) следуют оценки

$$s|\bar{v}_k| \leq \frac{\alpha_k}{(k-1)2^{k-1}}, \quad |\bar{R}| \leq \frac{\alpha_k}{(k-1)2^{k-1}}. \quad (17)$$

Умножим уравнения (8) на  $(\delta - 1)$ . Подставляя ряды (9) и сравнивая коэффициенты при степенях  $\delta$ , получим новые рекуррентные соотношения для величин  $A_j, B_j, v_j, R_j$ :

$$\begin{aligned} & A_k + A_{k-1} - R_{k-2} + \sum_{j=3}^{k-2} \bar{R}_{k-j} (j(sv_j + R_j) - s(B_j + sA_j)) - R_{k-3} \\ & + \sum_{j=3}^{k-2} \bar{R}_{k-1-j} (j(sv_j + R_j) - s(B_j + sA_j)) = 4R_{k-1} + 2 \sum_{i=2}^{k-3} R_i R_{k-1-i}, \\ & B_k + B_{k-1} + s \left( 2R_{k-2} + \sum_{i=2}^{k-4} R_i R_{k-2-i} \right) + \sum_{j=3}^{k-1} \left( 2\bar{R}_{k-j} + (1 - s^2) \sum_{i=2}^{k-j-2} \bar{R}_i \bar{R}_{k-j-i} \right) \\ & \times (j(sR_j + v_j) - s(A_j + sB_j)) + s \left( 2R_{k-3} + \sum_{i=2}^{k-5} R_i R_{k-3-i} \right) \\ & + \sum_{j=3}^{k-2} \left( 2\bar{R}_{k-1-j} + (1 - s^2) \sum_{i=2}^{k-3-j} \bar{R}_i \bar{R}_{k-1-j-i} \right) (j(sR_j + v_j) - s(A_j + sB_j)) \\ & = v_{k-1} + 2s \left( 2R_{k-2} + \sum_{i=2}^{k-4} R_i R_{k-2-i} \right) + s \left( 2R_{k-3} + \sum_{i=2}^{k-5} R_i R_{k-3-i} \right) \\ & + \sum_{j=3}^{k-3} v_j \left( 2R_{k-1-j} + \sum_{i=2}^{k-3-j} R_i R_{k-1-i-j} \right), \end{aligned}$$

где  $k \geq 4$ . Далее вычислим рекуррентные соотношения для величин  $sA_j + B_j = (1 - s^2)M_j$ ,  $A_j + sB_j = (1 - s^2)N_j$ ,  $\bar{R}_j, s\bar{v}_j$ :

$$\begin{aligned} & M_k + M_{k-1} = 4s\bar{R}_{k-1} + s\bar{v}_{k-1} + 3s\bar{R}_{k-2} + s\bar{R}_{k-3} \\ & - s \sum_{j=3}^{k-2} (\bar{R}_{k-j} + \bar{R}_{k-j-1}) \left( j \left( (s^2 + 2)\bar{v}_j + 3\bar{R}_j \right) - sM_j - 2N_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2s(1-s^2) \sum_{j=3}^{k-3} \bar{v}_j \bar{R}_{k-1-j} + s(1-s^2) \sum_{i=2}^{k-3} \bar{R}_i (2\bar{R}_{k-i-1} + \bar{R}_{k-i-2}) \\
& - s(1-s^2) \sum_{j=3}^{k-2} (j(\bar{R}_j + \bar{v}_j) - N_j) \sum_{i=2}^{k-j-2} \bar{R}_i (\bar{R}_{k-j-i} + \bar{R}_{k-j-i-1}) \\
& + s(1-s^2) \sum_{j=3}^{k-3} \bar{v}_j \sum_{i=2}^{k-3-j} \bar{R}_j \bar{R}_{k-i-j-1}
\end{aligned}$$

и аналогичные соотношения для  $N_k + N_{k-1}$ . Из этих соотношений оценим  $\alpha_k$ , используя неравенства (17):

$$\begin{aligned}
\alpha_k & \leq \alpha_{k-1} \left( 1 + \frac{5}{k-2} 2^{2-k} \right) + 3 \frac{\alpha_{k-2}}{k-3} 2^{3-k} + \frac{\alpha_{k-3}}{k-4} 2^{4-k} \\
& + 2^{4-k} \sum_{j=2}^{k-3} \frac{\alpha_j}{j-1} \left( \frac{2\alpha_{k-j-1}}{k-j-2} + \frac{\alpha_{k-j-2}}{k-j-3} \right) \\
& + 3 \cdot 2^{3-k} \sum_{j=3}^{k-2} \frac{\alpha_j}{j-1} (2j + (j-1)2^{j-1}) \left( \frac{2\alpha_{k-j}}{k-j-1} + \frac{\alpha_{k-j-1}}{k-j-2} \right) \\
& + 2^{4-k} \sum_{j=3}^{k-4} (2j + (j-1)2^{j-1}) \frac{\alpha_j}{j-1} \sum_{i=2}^{k-j-2} \frac{\alpha_i}{i-1} \left( \frac{2\alpha_{k-j-i}}{k-j-i-1} + \frac{\alpha_{k-j-i-1}}{k-j-i-2} \right) \\
& + 2^{4-k} \sum_{j=3}^{k-5} \frac{\alpha_j}{j-1} \sum_{i=2}^{k-j-3} \frac{\alpha_i}{i-1} \frac{\alpha_{k-i-j-1}}{k-i-j-2} \equiv F_k(\alpha_{k-1}, \dots, \alpha_2). \tag{18}
\end{aligned}$$

Здесь можно считать  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ .

По индукции покажем, что  $\alpha_j \leq \alpha 2^{j-1} (j-1)^{-1}$ ,  $j \geq k_0$ , начиная с некоторого номера  $k_0$ . Пусть неравенства справедливы для  $j < k$ . Тогда из (18) следует оценка

$$\begin{aligned}
F_k & \leq \alpha \left[ \frac{2^{k-2}}{k-2} + \frac{5}{(k-2)^2} + \frac{3}{(k-3)^2} + \frac{1}{(k-4)^2} \right] \\
& + \alpha^2 \left[ \frac{1}{(k-4)^2} + \frac{1}{2(k-3)^2} + \sum_{i=3}^{k-3} \frac{4}{(i-1)^2 (k-i-2)^2} + \sum_{i=3}^{k-4} \frac{1}{(i-1)^2 (k-i-3)^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{(k-3)^2} (k-2 + (k-3)2^{k-4}) + 12 \sum_{j=3}^{k-3} \frac{2j + (j-1)2^{j-1}}{(j-1)^2 (k-j-1)^2} \right. \\
& \quad \left. + 3 \sum_{j=3}^{k-4} \frac{2j + (j-1)2^{j-1}}{(j-1)^2 (k-j-2)^2} \right] + \alpha^3 \left[ \sum_{j=3}^{k-5} \frac{1}{(j-1)^2} \sum_{i=2}^{k-3-j} \frac{1}{(i-1)^2 (k-i-j-2)^2} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=3}^{k-4} \frac{2j + (j-1)2^{j-1}}{(j-1)^2} \left( 4 \sum_{i=2}^{k-j-2} \frac{1}{(i-1)^2 (k-j-i-1)^2} + \sum_{i=2}^{k-j-3} \frac{1}{(i-1)^2 (k-j-i-2)^2} \right) \right]. \tag{19}
\end{aligned}$$

Далее оценим все суммы в (19), например,

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l^2(n-l)^2} &= \frac{2}{n^2} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l^2} + \frac{4}{n^3} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l} \\
 &\leq \frac{2}{n^2} \left( 1 + \frac{1}{4} + \int_2^{n-1} \frac{dl}{l^2} \right) + \frac{4}{n^3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \int_2^{n-1} \frac{dl}{l} \right) \leq \frac{4}{n^2}, \\
 \sum_{l=1}^{k-j-3} \frac{1}{l^2(k-j-2-l)^2} &= \int_1^{k-j-3} \frac{dl}{l^2(k-j-2-l)^2} \\
 &= \frac{4 \ln(k-j-3)}{(k-j-2)^3} + \frac{2(k-j-4)}{(k-j-2)^2(k-j-3)} \leq \frac{6}{(k-j-2)^2}, \\
 \sum_{j=3}^{k-4} \frac{2^{j-1}}{(j-1)(k-j-2)^2} &= \int_2^{k-5} \frac{2^l dl}{l(k-s-l)^2} \leq 2^{k-5} \int_2^{k-5} \frac{dl}{l(k-3-l)^2} \\
 &= 2^{k-5} \left( \frac{2 \ln(k-5) - 2 \ln 2}{(k-3)^2} + \frac{1}{(k-3)(k-5)} - \frac{1}{2(k-3)} \right) \leq \frac{2^{k-2}}{k-3}.
 \end{aligned}$$

Суммирование приводит неравенство (19) к виду

$$F_k \leq \alpha \frac{2^{k-2}}{k-2} + \alpha^2 \left( 3 \frac{2^{k-4}}{k-3} + 8 \frac{2^{k-2}}{k-2} \right) + 15\alpha^3 \frac{2^{k-1}}{k-3} + G(k),$$

где  $G(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Значит, начиная с некоторого номера  $k_1$  и для любого достаточно малого  $\varepsilon_1$  получим

$$F_k \leq \frac{2^{k-2}}{k-2} (\alpha + 9\alpha^2 + 30\alpha^3) + \varepsilon_1.$$

Пусть выполнено неравенство

$$\frac{2^{k-2}}{k-2} (\alpha + 9\alpha^2 + 30\alpha^2) + \varepsilon_1 \leq \alpha \frac{2^{k-1}}{k-1}.$$

Тогда найдутся такие  $0 < \lambda < 1$  и  $\varepsilon > 0$ , что начиная с номера  $k_0 > k_1$  выполняется неравенство

$$9\alpha^2 + 30\alpha^3 + \varepsilon \leq \alpha(1 - \lambda).$$

Существует единственный положительный корень  $\alpha$  уравнения  $9\alpha^2 + 30\alpha^2 = \alpha(1 - \lambda) - \varepsilon$ , с которым выполняются неравенства  $\alpha_k \leq \alpha 2^{k-1} (k-1)^{-1}$  при  $k > k_0$ . С помощью доказанной оценки из (17) следуют неравенства  $s|\bar{v}_k| \leq \alpha(k-1)^{-2}$ ;  $|\bar{R}_k| \leq \alpha(k-1)^{-2}$ ,  $k \geq k_0$ . Следовательно, ряды (9) сходятся в области  $0 < \delta < 1$ ,  $0 < s < 1$ .

#### 4. Сопряжение расходящегося и сходящегося движений газа

Рассмотрим решение 1 из разд. 1 для  $t < 0$ , образованное характеристикой  $C_{-1}$ :  $x = 1 - (t+1)^2$ ; решение 2 для  $t > 0$ , образованное характеристикой  $C_{2+}$ :  $x = 1 - (t-1)^2$  (см. рис. 4).

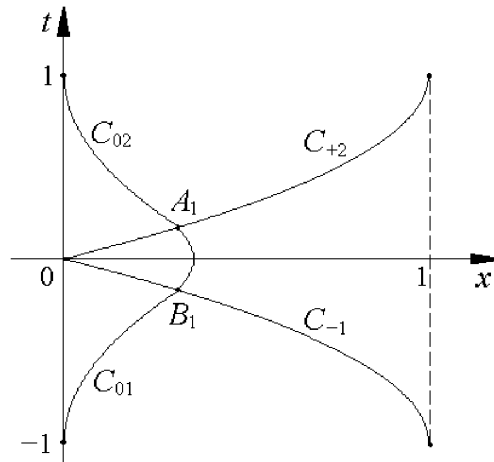


Рис. 4. Сопряжение расходящегося и сходящегося движений газа.

Характеристики  $C_{01}$  и  $C_{-1}$  пересекаются в точке  $B_1(\xi(1+\xi)^{-1}, -1 + (1+\xi)^{-1/2})$ . Характеристики  $C_{02}$  и  $C_{+2}$  пересекаются в точке  $A_1(\xi(1+\xi)^{-1}, 1 - (\xi+1)^{-1/2})$ . В лагранжевых переменных  $t, \xi$  уравнения одномерной газовой динамики имеют вид (4) и решения 1 и 2 записываются так же, как в разд. 1. Характеристика  $C_{-1}$  принимает вид  $\xi = -1 + (1+t)^{-2}$ ,  $t < 0$ ; характеристика  $C_{+2}$  задается уравнением  $\xi = -1 + (1-t)^{-2}$ ,  $t > 0$ . После замены переменных

$$t = s\delta, \quad \xi = -1 + (1 + \delta)^{-2}, \quad R = \rho(1 + \delta)^2, \quad 2v = -u(1 + \delta)$$

получим задачу (8) из разд. 2, решение которой уже построено.

Итак, по построенному решению восстанавливается движение газа в области  $A_1OB_1$ , которое непрерывно переводит расширяющийся газ в сжимающийся под действием поршня, двигающегося по одной из мировых линий построенного решения. Сжимающийся газ можно непрерывно перевести в расширяющийся с помощью решения, построенного в разд. 2, и т.д. Таким образом, обосновано существование периодических неизэнтропических внутренних движений газа под действием специально двигающегося поршня.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров А.Ф. Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
2. Тешуков В.М. Пространственный аналог центрированных волн Римана и Прандтля — Майера // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1982. № 4. С. 98–106.
3. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005.
4. Овсянников Л.В. Программа *подмодели*. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
5. Чупахин А.П. Баракхронные движения газа: общие свойства и подмодели типов (1,2) и (1,1): Препринт № 4–98. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1998.
6. Хабиров С.В. Задача Гурса о непрерывном сопряжении радиальных прямолинейных движений газа // Мат. заметки. 2006. Т. 79, вып. 4. С. 601–606.
7. Гарифуллин А.Р. Общее решение переопределенной подмодели сжимаемой жидкости ранга 2 дефекта 1 // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тр. 36-й регион. молодеж. конф. Екатеринбург, 2005. С. 122–125.
8. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.

Поступила 20.02.2007



УДК 533.6

## РАСЧЕТНОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ МИКРОМИШЕНЕЙ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ<sup>1</sup>

Г. В. Долголева, А. В. Забродин

Использование концепции безударного сжатия открывает перспективный способ построения микромишеней для осуществления термоядерного синтеза. Основой могут служить цилиндрические слоистые системы. Энерговложение осуществляется облучением с открытых торцов пучками ионов по направлению оси на всю длину мишени. Торможение частиц в слое энерговложения вызывает его интенсивный разогрев, приводящий к кумуляции вещества DT-слоя и окружающей его оболочки на ось мишени. В статье рассматриваются однокаскадные и двухкаскадные слоистые системы. Аналитически находятся законы энерговложения с целью осуществления безударного сжатия рабочей DT-области. Аналитические выкладки подтверждаются численными расчетами.

### Введение

Безударное сжатие весьма привлекательно для получения сколь угодно больших плотностей при минимальных затратах энергии благодаря отсутствию ударных волн, т.е. сохранению в процессе сжатия начальной энтропии. Имеется огромное количество публикаций на эту тему [1–14]. Среди них нужно отметить работы А.Ф. Сидорова, в которых теоретически строится неограниченная кумуляция не только в одномерном, но и многомерном случаях [1–4]. Практическая реализация этого принципа наталкивается на технические трудности. Остается неясным, каким образом конструктивно осуществить на наружной границе сжимаемого вещества необходимые закономерности неограниченного наращивания давления (или скорости).

С другой стороны, давно известна идея конструктивного оформления неограниченной кумуляции энергии через схождение слоистой системы оболочек, которая успешно реализована во многих практических работах [15–19]. Среди них прежде всего следует назвать работы Е.И. Забабахина [15, 16].

Основным содержанием настоящей работы является объединение этих идей применительно к разработке термоядерных мишеней.

### 1. Кумуляция энергии в слоистых системах

Слоистые системы — это конструкции из относительно тонких цилиндрических или сферических слоев, вложенных друг в друга. Движение их возникает при мгновенном или распределенном по времени вложении энергии в некоторые из слоев. Назначение слоев состоит в организации кумуляции доли вложенной энергии в геометрический центр системы. Эффективность кумуляции оценивается по величине этой доли энергии.

Простейший вариант слоистой системы приведен на рис. 1. Конструкция состоит из трех слоев (однокаскадная система).

Дальнейшее наращивание конструкции слоистой системы может осуществляться двумя способами.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 05-01-00097, 05-01-00141).

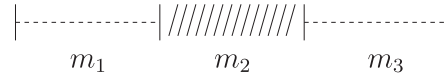


Рис. 1.

Во-первых, при рассмотрении задачи в сферическом или цилиндрическом случаях внутренней полости может быть заполнена веществом малой плотности. Такие конструкции представляют собой типичные примеры термоядерных мишеней для лазерного или тяжелоионного синтеза (см. рис. 2).

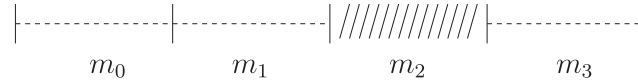


Рис. 2.

Во-вторых, более сложные системы могут строиться из однокаскадных систем, разделенных зазорами. Такова двухкаскадная система (см. рис. 3).

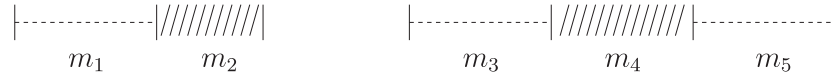


Рис. 3.

При вложении энергии (как правило, во внутренний слой) из законов сохранения массы, импульса и энергии при определенных предположениях находятся средние скорости этих слоев как функции пройденного пути.

Конечной целью исследований является определение величины кумулирующей энергии и выявление ее зависимости от параметров конкретной конструкции системы и способов энерго-вложения. Знание этих закономерностей позволяет исследовать различные системы (и в частности, микромишени) и предварительно отбирать из них наиболее подходящие по выходным параметрам кумуляции. Это существенно уменьшает множество вариантов для последующего детального рассмотрения и окончательного вывода.

### 1.1. Постановка задачи. Приближения, при которых строится решение

Описание эволюции рассматриваемых систем проводится на основе уравнений газодинамики, записанных в переменных  $t$  (время) и  $m$  (масса). Движение происходит от мгновенного или от распределенного по времени энерго-вложения. Математическая постановка базируется на рассмотрении уравнений газодинамики

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial (E + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial (Pu)}{\partial m} = Q \quad (1.1)$$

и уравнения состояния  $P = (\gamma - 1)E/v$ . Здесь  $v = \frac{1}{\rho}$ ,  $u, E, P, Q$  — соответственно удельный объем, скорость, внутренняя удельная энергия, давление, удельная мощность внешнего энерго-вложения (“удельный” — отнесенный к единице массы).

Систему уравнений (1.1) интегрируем по замкнутому контуру в плоскости  $(t, m)$  при следующих предположениях. Полагаем, что “тяжелые” слои с нечетными номерами (см. рис. 1–3) несжимаемы, скорости в каждом из них зависят только от времени  $t$ , что предопределяет малую долю внутренней энергии по отношению к кинетической на значительном временном интервале движения. В слоях с четными номерами (“легких” слоях), где может осуществляться энерго-вложение, необходимо учитывать изменение поля скоростей по пространству.

Предполагаем, что распределение скорости в слоях представимо в виде:

$$u(m, t) = \sum_i u_i(t) g_i(m). \quad (1.2)$$

Такое приближение используется для разделения переменных и, как правило, применяется при построении точных решений в задачах гидродинамики, близких к рассматриваемой [20]. Во многих случаях на начальном этапе движения зависимость от  $m$  можно принять линейной.

## 1.2. Однокаскадная система

Рассматриваем однокаскадную систему (см. рис. 1). Предполагаем, что в слой с массой  $m_2$  производится энерговложение  $E_2(0)$ , мгновенное в начальный момент времени или распределенное по времени. Возможна также комбинация: одно энерговложение распределено по времени, а другое в некоторый момент мгновенное. Проинтегрируем систему уравнений (1.1) по замкнутому контуру  $\Gamma_1$  (см. рис. 4).

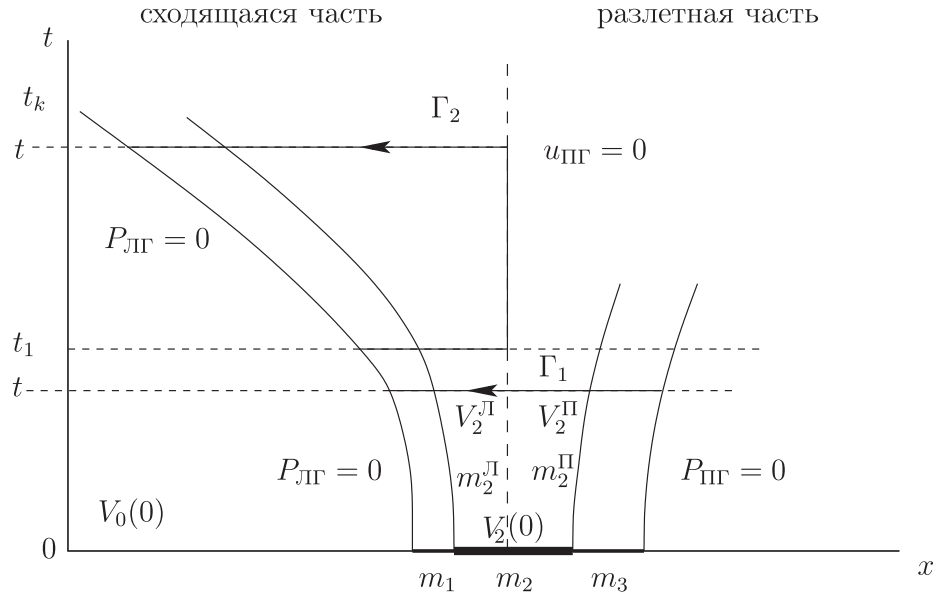


Рис. 4. Диаграммы движения границ слоев (однокаскадная система).

Нижнее основание отвечает начальному моменту времени, верхнее — текущему моменту времени. Левая и правая стороны контура  $\Gamma_1$  проходят соответственно по левой границе слоя 1 и правой — слоя 3.

Конкретизируем (1.2), полагая  $g_i$  линейными функциями ( $g_1(m) = 1 - m/m_2$ ,  $g_2 = 0$ ,  $g_3(m) = m/m_2$ ):

$$u(m, t) = \frac{1}{m_2} [u_1(t)(m_2 - m) + u_3(t)m]. \quad (1.3)$$

Если заданы начальные данные  $u_1(0) = u_3(0) = 0$ , мгновенное энерговложение  $E_2(0)$ , мощность  $Q$  внешнего энерговложения на интервале  $[0, t_0]$ , то можно записать  $u_1(t)$ ,  $u_3(t)$  (решение системы) как функции от  $t$  и  $\gamma$  [11]:

$$u_1^2(t) = \frac{2 \left( E_2(0) + \frac{Qt}{2} \right) m_2 \left( m_3 + \frac{m_2}{2} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{V_2(0)}{V_2(t)} \right)^{\gamma-1} \right]}{(m_1 + m_2 + m_3) \left[ \frac{m_2^2}{12} + \frac{m_2}{3} (m_1 + m_3) + m_1 m_3 \right]},$$

$$u_3^2(t) = \frac{2\left(E_2(0) + \frac{Qt}{2}\right)m_2\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)^2\left[1 - \left(\frac{V_2(0)}{V_2(t)}\right)^{\gamma-1}\right]}{(m_1 + m_2 + m_3)\left[\frac{m_2^2}{12} + \frac{m_2}{3}(m_1 + m_3) + m_1m_3\right]}$$

при  $0 \leq t \leq t_0$ ,

$$u_1^2(t) = \frac{2\left(E_2(0) + \frac{Qt_0}{2}\right)m_2\left(m_3 + \frac{m_2}{2}\right)^2\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{V_2(0)}{V_2(t)}\right)^{\gamma-1} + \left(\frac{V_2(t_0)}{V_2(t)}\right)^{\gamma-1}\right]\right\}}{(m_1 + m_2 + m_3)\left[\frac{m_2^2}{12} + \frac{m_2}{3}(m_1 + m_2) + m_1m_3\right]},$$

$$u_3^2(t) = \frac{2\left(E_2(0) + \frac{Qt_0}{2}\right)m_2\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)^2\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{V_2(0)}{V_2(t)}\right)^{\gamma-1} + \left(\frac{V_2(t_0)}{V_2(t)}\right)^{\gamma-1}\right]\right\}}{(m_1 + m_2 + m_3)\left[\frac{m_2^2}{12} + \frac{m_2}{3}(m_1 + m_2) + m_1m_3\right]}$$

при  $t_0 \leq t$ .

В слое 2 существует неподвижная частица, которая разделяет этот слой на две части: левую с массой  $m_2^{\text{II}}$  и правую с массой  $m_2^{\text{I}}$ :

$$m_2^{\text{II}} = \frac{m_2(m_3 + m_2/2)}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad m_2^{\text{I}} = m_2 - m_2^{\text{II}}. \quad (1.4)$$

Следует отметить, что лагранжева координата частицы не зависит от начальной энергии  $E_2(0)$  и интенсивности энерговложения  $Q$ .

Отсюда можно сделать вывод, что не вся вкладываемая в область 2 энергия работает на кумуляцию, а только ее часть, вкладываемая в область с массой  $m_2^{\text{I}}$ .

Далее, для цилиндрических или сферических случаев рассматриваем сходящуюся к центру подсистему, состоящую из слоя 1 и части слоя 2 с массой  $m_2^{\text{I}}$  (усеченная подсистема, см. рис. 5).

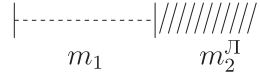


Рис. 5.

Проинтегрируем систему уравнений (1.1) по замкнутому контуру  $\Gamma_2$  (рис. 4): нижнее основание отвечает некоторому моменту времени  $t_1$ , верхнее — текущему моменту. Левая граница проходит соответственно по левой границе слоя 1 (свободная граница  $P_{\text{ЛГ}} = 0$ ), правая — по линии нулевой скорости ( $u_{\text{ПГ}} = 0$ ). Учет цилиндрической или сферической симметрии осуществляется через задание зависимости скорости от массы, и мы предполагаем, что во внутреннем сходящемся слое  $m_k$  эта зависимость аппроксимируется следующим образом:

$$u_k(m, t) = u_k(t) + \left(\frac{m}{m_k}\right)^\alpha (u^* - u_k(t)),$$

где  $\alpha$  — параметр, зависящий от вида геометрии:  $\alpha = 1$  — для плоской геометрии;  $\alpha = 2/3$  — для цилиндрической геометрии;  $\alpha = 1/2$  — для сферической геометрии,  $u^*$  — скорость движения наружной границы этого слоя. Величина  $\alpha$  (для сферического и цилиндрического случаев) выбрана из вычислительных экспериментов.

В итоге находим максимальный отбор энергии сходящейся массой  $m_1$  на момент  $t_f$  прихода слоя 1 на ось:

$$E_{\text{max}} = \frac{2\left(E_2(0) + \frac{Qt_f}{2}\right)m_2^{\text{I}}\left[1 - \left(\frac{V_2^{\text{I}}(0)}{V_2^{\text{I}}(0) + V_0(0)}\right)^{\gamma-1}\right]m_1}{m_1 + m_2^{\text{I}}\beta}$$

при  $0 \leq t_f \leq t_0$ ,

$$E_{\max} = \frac{2\left(E_2(0) + \frac{Qt_f}{2}\right)m_2^{\text{II}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{V_2^{\text{II}}(0)}{V_2^{\text{II}}(0) - V_0(0)} \right)^{\gamma-1} + \left( \frac{V_2^{\text{II}}(t_0)}{V_2^{\text{II}}(0) + V_0(0)} \right)^{\gamma-1} \right] \right\} m_1}{m_1 + m_2^{\text{II}}\beta}$$

при  $t_0 \leq t_f$ , где  $V_0(0)$  — первоначальный объем полости,  $t_0$  — время конца энерговложения,  $\beta = 2\alpha^2(\alpha + 1)^{-1}(2\alpha + 1)^{-1}$ .

Если считать внутренний слой заполненным газом с малой плотностью (см. рис. 2), то энергия, отбираемая этим слоем, равна сумме энергии, отбираемой оболочкой в варианте без газа, и части энергии, приобретенной газом [11]:

$$E_S = E_0 + E_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2^{\text{II}}\beta} \left\{ E_2(0) m_2^{\text{II}} \left[ 1 - \left( \frac{V_2^{\text{II}}(0)}{V_2^{\text{II}}(t)} \right)^{\gamma-1} \right] \right\} + \frac{m_2^{\text{II}}\beta}{m_1 + m_2^{\text{II}}\beta} E_2(0). \quad (1.5)$$

### 1.3. Двухкаскадная система

Следующий этап нашего рассмотрения — построение решения задачи динамики движения двухкаскадной системы (см. рис. 3, 6).

В этом случае мы рассматриваем три этапа. Первый — это движение слоев  $m_3, m_4, m_5$  до подлета к внутреннему каскаду. Предполагается, что при ударе наружного каскада (слои 3,4,5) о внутренний (слои 1,2) в момент  $t = t_1$  (т.е. после закрытия зазора) в слое 2 мгновенно выделяется внутренняя энергия с удельным энерговложением  $E_2(t_1)$ , а далее на определенном временном интервале возможно энерговложение с мощностью  $Q$  (один из этих источников может отсутствовать).

На втором этапе рассматривается движение слоев 1,2,3 и массы  $m_4^{\text{II}}$  части слоя 4 до линии нулевой скорости. Построено решение этой слоистой системы [11]. Здесь отметим очень интересный момент: в слое 2 имеется частица, движущаяся с постоянной скоростью  $u^* = -\frac{J(t_1)}{M}$ , где

$$J^2 = \frac{2E(0)m_4 \left[ 1 - (V_4(0)/V_4(t_1))^{\gamma-1} \right]}{\frac{m_3 + m_4^{\text{II}}/3}{(m_3 + m_4^{\text{II}}/2)^2} + \frac{m_5 + m_4^{\text{II}}/3}{(m_5 + m_4^{\text{II}}/2)^2}}, \quad M = m_1 + m_2 + m_3 + \frac{m_4^{\text{II}}}{2}, \quad m_4^{\text{II}} + m_4^{\text{II}} = m_4.$$

Эта частица делит слой 2 на две части, левая из которых имеет массу

$$m_2^{\text{II}} = m_2 \frac{m_3 + \frac{m_2 + m_4^{\text{II}}}{2}}{m_1 + m_2 + m_3 + \frac{m_4^{\text{II}}}{2}}.$$

Траектория этой частицы в слое 2 определяет подобласть постановки автономной задачи на третьем этапе с момента  $t_2$ , который для цилиндрического и сферического случаев условно принимается за начало заключительной стадии движения. Здесь следует сделать важное замечание о том, что лагранжева координата частицы и ее скорость  $u^*$  не зависят ни от величины энерговклада, ни от его интенсивности в слое 2. Это обстоятельство упрощает анализ определения оптимальных параметров при построении двухкаскадной системы.

Третий этап состоит (так же, как и в случае однокаскадной системы) в нахождении решения автономной задачи и в определении величины кумулирующей энергии.

Было найдено финальное значение скорости  $u_1$  слоя 1, а следовательно, и величина отобранной им энергии на момент фокусировки  $t_f$  для цилиндрических и сферических систем:

$$(u_1 - u^*)^2 = (u_1(t_2) - u^*)^2 + \frac{2m_2^{\text{II}}}{m_1 + \beta m_2^{\text{II}}} \left[ E_2(t_2) + Q \frac{t - t_2}{2} \right] \left[ 1 - \left( \frac{V_2^{\text{II}}(t_2)}{V_2^{\text{II}}(t)} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (1.6)$$

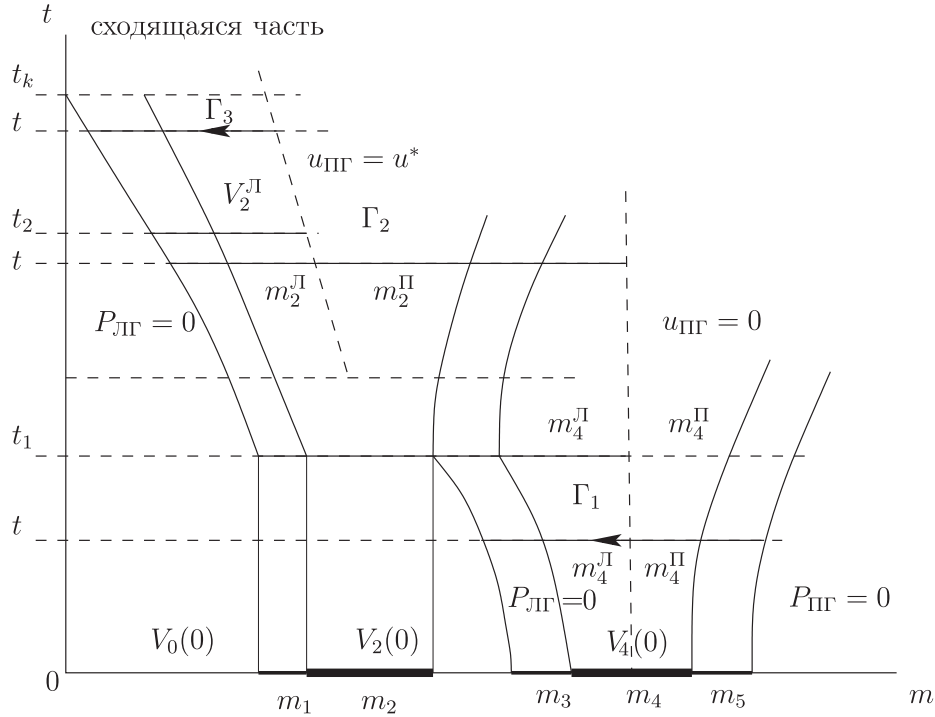


Рис. 6. Диаграммы движения границ слоев (двухкаскадная система).

Проведено сопоставление полученных аналитических построений с численными расчетами для двухкаскадной слоистой системы, которые подтвердили аналитические выводы.

## 2. Обратная задача. Нахождение вида энерговложения при задании скорости или давления на границе

Итак, зная энерговложение в слоистых системах, мы смогли построить решение как функцию времени на всем этапе сжатия слоистой системы и найти финальный отбор энергии сходящейся оболочкой. Естественно, возникает вопрос: нельзя ли решить обратную задачу, т.е. построить закон энерговложения  $Q(t) = \frac{dF}{dt}$  (где  $F(t)$  — полное энерговложение к моменту  $t$ ), реализующий движение в системах (рис. 1 и 3) с заданными значениями давления  $P_l(t)$  и скорости  $u_l(t)$  на левой границе слоя 1 (области с массой  $m_1$ ). Решение этой задачи дает возможность достроить внутренние слои оболочечной конструкции, в центральном слое которой будет реализовано сжатие с граничным условием на поршне  $u_l(t)$ ,  $P_l(t)$ . Для однокаскадной системы такой закон был построен:

$$\begin{aligned}
 F(t) = & \frac{1}{m_2} \left( - \int_0^t P_l u_l dt + \frac{u_l^2}{2} k_1(m) + k_2(m) u_l \int_0^t P_l(t) dt + k_3(m) \left( \int_0^t P_l(t) dt \right)^2 \right) \\
 & - (E_2(0) - F(0)) + \frac{V_2(t) \left( m_3 + \frac{m_2}{2} \right)}{m_2 (\gamma - 1) \left( -M u_l + \int_0^t P_l(t) dt \right)} \left[ (k_2(m) - 1) P_l u_l \right. \\
 & \left. + \frac{du_l}{dt} \left( k_1(m) u_l + k_2(m) \int_0^t P_l(t) dt \right) + 2 P_l k_3(m) \int_0^t P_l(t) dt \right].
 \end{aligned}$$

Здесь

$$k_1(m) = m_1 + \frac{m_2}{3} + \frac{m_1 + \frac{m_2}{2}}{\left(m_3 + \frac{m_2}{2}\right)^2} \left(\frac{m_1 m_2}{3} + m_1 m_3 + \frac{m_2 m_3}{6}\right),$$

$$k_2(m) = -\frac{1}{\left(m_3 + \frac{m_2}{2}\right)^2} \left[\frac{m_2}{3} \left(m_3 + \frac{m_2}{4}\right) + m_1 \left(m_3 + \frac{m_2}{3}\right)\right],$$

$$k_3(m) = \frac{\left(m_3 + \frac{m_2}{3}\right)}{2\left(m_3 + \frac{m_2}{2}\right)^2}.$$

Все коэффициенты зависят только от геометрии рассматриваемой системы.

В дальнейшем будем рассматривать двухкаскадную систему, изменив нумерацию слоев: первый (центральный) – ДТ-слой с массой  $m_1$ , далее  $m_2$  (Au),  $m_3$  (Pb) (внутренний каскад),  $m_4$  (Au),  $m_5$  (Pb),  $m_6$  (Au) (внешний каскад). См. рис. 7 в разд. 4.

Использование двухкаскадной мишени способствует повышению отбора энергии ДТ-слоем и уменьшению величины вкладываемой энергии, необходимой для зажигания мишени, но для ее численного конструирования необходим вывод закона энергосложения, чтобы обеспечить безударное сжатие ДТ-слоя:

$$Q_3 = \frac{dF_3}{dt} = \frac{1-\delta}{m_3} \left\{ -P_l u_l + u_l \frac{du_l}{dt} \left[ m_2 + \frac{m_3}{6}(2+\delta) \right] \right\}$$

$$- \frac{1}{\gamma-1} \cdot \frac{dv_3}{dt} \left\{ -P_l + \frac{du_l}{dt} \left[ m_2 + \frac{m_3}{6}(2+\delta) \right] \right\}$$

$$- \frac{v_3}{\gamma-1} \left\{ -\frac{dP_l}{dt} + \frac{d^2 u_l}{dt^2} \left[ m_2 + \frac{m_3}{6}(2+\delta) \right] \right\} \quad (2.1)$$

для внутреннего каскада и

$$Q_5 = \frac{dF_5}{dt} = \frac{1}{(\gamma-1)m_5} \left\{ -\delta P_l u_l + \delta \left( m_2 + \frac{m_3}{2}(\delta+1) + \delta m_4 + \delta \frac{m_5}{3} \right) u_l \frac{du_l}{dt} \right.$$

$$+ u_6 \frac{du_6}{dt} \left( m_6 + \frac{m_5}{3} \right) + \left( u_6 \frac{du_l}{dt} + u_l \frac{du_6}{dt} \right) \frac{\delta m_5}{6} \left. \right\} \left\{ \gamma - \left( \frac{\int_0^t (u_6 - \delta u_l) dt}{(u_6 - \delta u_l)^2} \right) \left( \frac{du_6}{dt} - \delta \frac{du_l}{dt} \right) \right\}$$

$$+ \frac{\int_0^t (u_6 - \delta u_l) dt}{(\gamma-1)m_5 (u_6 - \delta u_l)} \left\{ -\delta \frac{d}{dt} (u_l P_l) + \left( \left( \frac{du_6}{dt} \right)^2 + u_6 \frac{d^2 u_6}{dt^2} \right) \left( m_6 + \frac{m_5}{3} \right) \right.$$

$$+ \delta \left( m_2 + \frac{m_3}{2}(1+\delta) + \delta m_4 + \delta \frac{m_5}{3} \right) \left( \left( \frac{du_l}{dt} \right)^2 + u_l \frac{d^2 u_l}{dt^2} \right)$$

$$\left. + \left( 2 \frac{du_6}{dt} \frac{du_l}{dt} + u_6 \frac{d^2 u_l}{dt^2} + u_l \frac{d^2 u_6}{dt^2} \right) \frac{\delta m_5}{6} \right\} \quad (2.2)$$

для внешнего каскада. Поскольку число искомых величин  $v_3(t)$ ,  $v_5(t)$ ,  $u_4$ ,  $u_6$ ,  $F_3(t)$ ,  $F_5(t)$ ,  $P_3$  превышает число уравнений (решение неоднозначно), то было сделано дополнительное предположение  $u_4 = \delta u_l$  (скорость, связывающая два каскада: внутренний и внешний).

Выражения (2.1) и (2.2) – это закон энергосложения в слой 3 внутреннего и в слой 5 внешнего каскадов для обеспечения на границе первой области любых заданных давлений  $P_l$  и скоростей  $u_l$ .

### 3. Построение оболочечных конструкций, реализующих режим безударного сжатия

Проведенные выше построения доказывают возможность осуществления безударных режимов сжатия вещества в центральной области слоистой системы при надлежащем подборе энерговложения в один из внешних ее слоев.

Безударное сжатие — это некоторый закон движения, который обеспечивает в определенный момент приход всех характеристик в одну точку и в идеале бесконечную плотность.

Чтобы воспроизвести безударное неограниченное по плотности сжатие, надо реализовать на границе сжимаемого газа согласованные зависимости скорости и давления  $u_l(t)$ ,  $P_l(t)$  [20]:

$$u_l = \frac{2}{\gamma - 1} c_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{c_0}{L_0} t \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \right], \quad P_l = \frac{\rho_0}{\gamma} c_0^2 \left( 1 - \frac{c_0}{L_0} t \right)^{-\frac{2\gamma}{\gamma+1}} = P_0 \left( 1 - \frac{c_0}{L_0} t \right)^{-\frac{2\gamma}{\gamma+1}}.$$

Вычисляя входящие в выражения (2.1) и (2.2) интегралы и производные от заданных  $P_l(t)$  и  $u_l(t)$ , получим конкретный вид энерговложения для осуществления безударного сжатия.

### 4. Результаты расчетов

Расчеты проводились с учетом физических процессов, адекватно описывающих физику плазмы [21, 22].

Геометрия рассматриваемой системы имеет вид

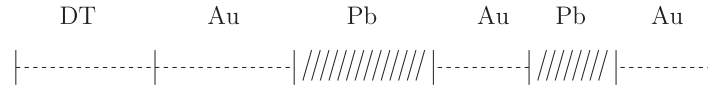


Рис. 7.

Рассматриваемая система единиц: длина — см, время —  $10^{-7}$  сек, масса — г, температура — кэВ, энергия — мДж.

Энерговложение в двухкаскадную систему осуществляем следующим образом. В области с массой  $m_3$  и  $m_5$  вкладывается энергия по формуле  $\frac{dE_i}{dt} = Q_i$ ,  $i = 3, 5$ . Первоначально  $Q_i$  вычисляются по формулам (2.1) и (2.2) соответственно до заданной величины  $Q^*$  (величины обострения). Это момент времени  $t_1$ .  $Q^*$  — это характеристика установки, на которой планируется проводить эксперимент [23].

Далее энерговложение осуществляется только в область с массой  $m_3$  по формуле  $\frac{dE_3}{dt} = Q^*$  до тех пор, пока суммарная вложенная энергия в третью и пятую области не достигнет заданной величины

$$F = \int_0^{t_k} \int_{m_3} \frac{dE_3}{dt} dm dt + \int_0^{t_1} \int_{m_5} \frac{dE_5}{dt} dm dt.$$

Была проведена серия расчетов двухкаскадной системы с различными значениями параметра  $\delta$  в энерговложении (2.1), (2.2). В таблице приведены результаты расчетов двухкаскадной ( $\delta = 0.9$ ) и однокаскадной мишеней с минимальной вкладываемой энергией, при которой они “загораются”. Минимальная вкладываемая энергия, необходимая для зажигания, в однокаскадной мишени  $F=21$  при  $Q^* = 60$ . В двухкаскадной мишени достаточно  $F=9$  при том же значении  $Q^* = 60$ .



Т а б л и ц а  
Сравнение результатов расчетов  
однокаскадной и двухкаскадной систем

$Q^*$	$F$	$E_{DT}$	$\Delta_{DT}$	$K_{DT}$
60	21	373.2	84	17.77
60	9	291	70	32.3

Здесь  $E_{DT}, K_{DT} = \frac{E_{DT}}{F}$ ,  $\Delta_{DT}$  — величина энерговыделения, коэффициент усиления и выгорание (в процентах) DT-слоя соответственно.

Из расчетов видно, что в двухкаскадной мишени (см. строку 2 таблицы) по сравнению с однокаскадной (строка 1 таблицы) снижается “порог” зажигания, т.е. величина вкладываемой в систему энергии для осуществления горения.

### З а к л ю ч е н и е

Получены аналитические выражения для определения величины кумулирующей энергии в слоистой системе оболочек.

Обсуждается, как использовать идею безударного сжатия при конструировании микромишеней.

Показано, как можно преодолеть теоретическую неограниченность энерговложения, возникающую при классических теоретических подходах.

Проведенные расчеты микромишеней подтверждают правильность изложенных подходов.

Аналитические модели, рассмотренные в статье, позволяют на стадии предварительного проектирования оценить работоспособность мишеней, выявить диапазон допустимых параметров и тем самым облегчить последующие расчеты и поиск оптимальных решений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров А.Ф. Об оптимальном безударном сжатии газовых слоев // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313, № 2. С. 283–287.
2. Сидоров А.Ф. Избранные труды. Математика и механика. М.: Физматлит, 2001.
3. Сидоров А.Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном безударном сжатии // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. С. 548–552.
4. Сидоров А.Ф. Безударное сжатие баротропного газа // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55, № 5. С. 769–779.
5. Крайко А.Н. О неограниченной кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 1000–1007.
6. Крайко А.Н. Вариационная задача об одномерном изэнтропическом сжатии идеального газа // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, № 5. С. 35–51.
7. Крайко А.Н., Тилляева Н.И. Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36, № 1. С.120–128.
8. Баутин С.П. Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск: Наука, 2007.
9. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 2. С. 3–23.
10. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Теория режимов с обострением в сжимаемых средах // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 28. С. 3–94.
11. Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия. М.: Физматлит, 2004.
12. Долголева Г.В., Забродин А.В. Разработка термоядерных мишеней на основе реализации концепции безударного сжатия // Аэромеханика и газовая динамика. 2002. № 2. С. 48–54.

13. Долголева Г.В., Забродин А.В., Хайруллина О.Б. Расчетное конструирование микромишеней на основе реализации концепции безударного сжатия // Тр. Ин-та математики и механики Уро РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 41–54.
14. Гао Яоминг. Численное исследование реализации безударного сжатия и термоядерного горения несферической мишени тяжелоионного термоядерного синтеза: Препринт № 66. М.: Ин-т прикл. механики РАН, 2001.
15. Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции // Механика в СССР за 50 лет. М.: Наука, 1970. Т. 2. С. 313–342.
16. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1978.
17. Забабахин И.Е., Симоненко В.А. Сферическая центрированная волна сжатия // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, № 3. С. 573–576.
18. Долголева Г.В., Забродин А.В. Построение решения в задаче движения слоистых оболочек // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1996. № 3. С. 27–34.
19. Долголева Г.В., Забродин А.В. Поэтапное построение решения в задаче схождения слоистой системы оболочек. Определение величины кумулирующей энергии // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1993. № 4. С. 8–14.
20. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
21. Забродин А.В., Прокопов Г.П. Методики численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трехтемпературном приближении // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1998. № 3. С. 3–16.
22. Долголева Г.В. Методика расчета движения двухтемпературного излучающего газа (СНД — спектральная неравновесная диффузия) // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач мат. физики. 1983. № 2(13). С. 29–33.
23. Баско М.М., Имшенник В.С., Кошкарёв Д.Г. и др. Управляемый тяжелоионный синтез и дейтериевые мишени // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1989. № 3. С. 84–97.

Поступила 30.11.2007

УДК 519.63.4::532.51.5

**РАЗВИТИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИЙ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ<sup>1</sup>****В. И. Исаев, В. П. Шапеев**

Предложены и реализованы новые, более общие варианты метода коллокаций и наименьших квадратов (КНК) и ортогональный метод ускорения сходимости итераций решения системы линейных алгебраических уравнений. Применение последнего, выбор хороших значений управляющих параметров, основанный на результатах исследования зависимости от них свойств метода КНК, а также другие улучшения метода КНК, предложенные в данной работе, позволяют за приемлемое время на однопроцессорной ЭВМ численно решать задачи для уравнений Навье-Стокса на таких подробных сетках, как  $1280 \times 1280$ . При этом общее число неизвестных  $\sim 25 \cdot 10^6$ . Результаты численного решения задачи о течении вязкой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой хорошо согласуются с известными результатами других авторов, в том числе полученными с использованием схем повышенного порядка аппроксимации с малой искусственной вязкостью. Это и некоторые другие факты свидетельствуют о том, что новые варианты метода КНК позволяют получать приближенное решение с высокой точностью.

**Введение**

Метод коллокаций и наименьших квадратов (КНК) [1–17] численного решения краевых задач для уравнений математической физики основан на совместном применении метода коллокаций и метода наименьших квадратов (МНК). Метод коллокаций — это проекционный метод решения интегральных и дифференциальных уравнений, в котором приближенное решение определяется из условия удовлетворения уравнению в некоторых заданных точках из области решения задачи. Он прост в реализации и дает хорошие результаты при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), как линейных, так и нелинейных, параболических и эллиптических задач на равномерных сетках. Этот метод интенсивно развивался во многих работах [18–20]. Однако на сетках с сильным локальным измельчением его реализация сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плохо обусловленными матрицами. Поэтому в сочетании с адаптивными нерегулярными сетками он не дает более точного решения, чем в случае использования равномерных сеток.

МНК успешно применялся для улучшения свойств разностных схем решения задач аэрогидродинамики. В уравнениях моделей, используемых для решения задач из этой области, присутствуют конвективные и диффузионные члены. Конвективные члены содержат первые производные по пространственным переменным. В случае использования центральных разностей для их аппроксимации возникают большие нефизические осцилляции в численном решении. Поэтому от схем второго порядка для решения таких задач очень часто отказываются и используют схемы первого порядка, в которых первые производные аппроксимируются противопотоковыми разностями. Для уменьшения пространственных осцилляций в работе [21] предложено использовать переопределенную систему конечно-разностных уравнений с противопотоковыми и центральными разностями, под решением которой понимается сеточная функция, доставляющая минимум сумме квадратов невязок этих уравнений. Такой подход подавления осцилляций численного решения по своему результату похож в некотором отношении на внесение искусственной вязкости в исходный метод. Полученные схемы имеют второй

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 06-01-00080-а).

порядок аппроксимации. В ряде случаев они обладают существенными преимуществами по сравнению со схемами с противопотоковыми или центральными разностями. Таким образом, можно говорить, что МНК действует здесь как регуляризатор.

Однако МНК решения переопределенной СЛАУ имеет один существенный недостаток. Его реализация сводится к решению определенной СЛАУ (совместной системы с числом независимых уравнений равным числу неизвестных), обусловленность которой намного хуже обусловленности исходной системы. Поэтому в предложенных в данной работе вариантах метода КНК вместо МНК используются ортогональные методы линейной алгебры, основанные на  $QR$ -разложении матрицы. Такие методы решения переопределенной СЛАУ были предложены и реализованы в [22]. В случае отсутствия ошибок округления они дают то же решение, что и МНК. Основным достоинством ортогональных методов является то, что при их применении не ухудшается обусловленность СЛАУ.

В формулах метода КНК имеются параметры: координаты точек коллокаций внутри ячеек, координаты точек записи условий согласования численного решения на границе ячеек, весовые множители при отдельных слагаемых в условиях согласования и весовые множители при уравнениях в переопределенной системе. Назовем их *управляющими параметрами*. Впервые более общие варианты метода КНК за счет введения новых управляющих параметров предложены в [16] и используются в данной работе. Кроме того, подход к созданию новых вариантов метода, предложенный в [16], используется здесь в случае аппроксимации давления полиномами 2-го порядка в методе КНК для уравнений Навье — Стокса. В случае, когда метод КНК применяется для решения ОДУ, можно указать выбор хороших значений отдельных параметров при фиксированной системе базисных функций, дающий наименьшую погрешность численного решения [19]. При применении метода КНК к решению задач для уравнений с частными производными проблема выбора управляющих параметров ранее практически не исследовалась. Однако в численных экспериментах можно наблюдать, что за счет выбора значений параметров удается добиться одновременно улучшения обусловленности возникающих при использовании метода задач линейной алгебры, повышения гладкости приближенного решения дифференциальной задачи, уменьшения его погрешности и ускорения сходимости итерационного процесса его построения. Желание использовать хорошие значения управляющих параметров диктует необходимость исследования зависимости от них свойств метода. Такое исследование было проведено в [16]. Результаты исследования новых вариантов метода, предложенных в этой статье, качественно совпадают с опубликованными в [16] и здесь не приводятся.

Целью данной работы является дальнейшее развитие метода КНК. Его возможности расширялись за счет комбинированного использования качественно лучших алгоритмов (по сравнению с примененными в предыдущих реализациях). Среди них прежде всего отметим: новый метод ускорения сходимости итераций решения СЛАУ, ортогональные методы линейной алгебры вместо МНК, использование многосеточных комплексов. Кроме того, параметры метода КНК в данной работе выбирались на основе результатов исследования, приведенных в [16]. Комбинация перечисленных улучшений в реализации расширила возможности метода КНК так, что при его применении к уравнениям Навье — Стокса стало возможным за приемлемое время на однопроцессорной ЭВМ проводить расчеты на значительно более подробных сетках и в более широком диапазоне чисел Рейнольдса. В результате при расчете течения вязкой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой при  $Re = 7500$  на сетке  $1280 \times 1280$  наряду с угловыми вихрями первого ( $BR_1$ ), второго ( $BR_2$ ) и третьего ( $BR_3$ ) порядков малости в данной работе был обнаружен очень слабый вихрь четвертого порядка ( $BR_4$ ) из последовательности Моффата [23, 24]. Чтобы обнаружить такие вихри при численном решении, используемый метод должен обладать очень высокой точностью. При использовании сетки  $1280 \times 1280$  в варианте метода КНК с аппроксимацией давления полиномами второго порядка общее число неизвестных составляет  $\sim 25 \cdot 10^6$ .

Среди публикаций других авторов наиболее близкие к полученным здесь результаты при-

ведены в работе [25], в которой используется схема высокого порядка с очень малой искусственной вязкостью. Эти, а также некоторые другие факты свидетельствуют о том, что метод КНК позволяет строить приближенное решение с высокой точностью.

## 1. Варианты метода КНК для уравнений Навье — Стокса и способы их реализации

### 1.1. Постановка задачи

В прямоугольной двумерной области  $\Omega = [x_1^0, x_1^1] \times [x_2^0, x_2^1]$  рассматривается краевая задача для системы стационарных уравнений Навье — Стокса

$$\begin{cases} u_1 \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_j}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u_j = f_j, & (x_1, x_2) \in \Omega, \quad j = 1, 2, \\ \text{div}(\vec{v}) = 0, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \vec{v}|_{\partial\Omega} = \vec{V}, \quad p(x_1^0, x_2^0) = P_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где функции  $p(x_1, x_2)$ ,  $u_j(x_1, x_2)$ ,  $j = 1, 2$ , — давление и компоненты вектора скорости  $\vec{v}$  соответственно, константа  $\text{Re}$  — число Рейнольдса,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ .

### 1.2. Аппроксимация давления полиномами первого порядка

Расчетная область  $\Omega$  покрывается равномерной сеткой  $\Omega_{h_1 h_2}$  с прямоугольными ячейками размера  $2h_1 \times 2h_2$ . В рассматриваемых здесь вариантах метода приближенное решение отыскивается в виде кусочно-полиномиальной функции на этой сетке. Для удобства реализации метода внутри каждой ячейки вводятся локальные переменные

$$y_1 = \frac{x_1 - x_{1m}}{h_2}, \quad y_2 = \frac{x_2 - x_{2m}}{h_2},$$

где точка  $(x_{1m}, x_{2m})$  — центр  $m$ -й ячейки. Уравнения Навье — Стокса в локальных переменных записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{h_2} u_1 \frac{\partial u_j}{\partial y_1} + \frac{1}{h_2} u_2 \frac{\partial u_j}{\partial y_2} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial p}{\partial y_j} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial y_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial y_2^2} \right) = f_j, & j = 1, 2, \\ \text{div}(\vec{v}) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Внутри одной ячейки сетки локальная координата  $y_1 \in \left[-\frac{h_1}{h_2}, \frac{h_1}{h_2}\right]$ , а  $y_2 \in [-1, 1]$ .

В каждой ячейке приближенное решение ищется в виде линейной комбинации

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{12} a_{j m} \vec{\psi}_j, \quad (1.3)$$

где  $m$  — это номер ячейки. При построении приближенного решения для уравнений Навье — Стокса компоненты вектора скорости в каждой ячейке аппроксимируем полиномами 2-го порядка, а давление — полиномами 1-го порядка. Кроме того, потребуем, чтобы каждый базисный элемент  $\vec{\psi}_j$  тождественно удовлетворял уравнению неразрывности. В этом случае в

базисе остается 12 элементов [9, 14, 16]. Следовательно, получаемое здесь приближенное решение будет тождественно удовлетворять уравнению неразрывности внутри каждой ячейки.

Для определения неизвестных коэффициентов  $a_{jm}$  (1.3) в методе КНК для задачи (1.1) используются коллокации первых двух уравнений системы (1.2), умноженных на  $h_2^2$ , в четырех внутренних точках ячейки, условия согласования на границах между ячейками, краевые условия (для ячеек, примыкающих к границе  $\partial\Omega$ ). Условия согласования записываются в точках с локальными координатами  $\left(\pm \frac{h_1}{h_2}, \pm \zeta\right)$  и  $\left(\pm \zeta \frac{h_1}{h_2}, \pm 1\right)$ , граничные условия — в точках  $\left(\pm \frac{h_1}{h_2}, \pm \xi\right)$  и  $\left(\pm \xi \frac{h_1}{h_2}, \pm 1\right)$ , уравнения коллокаций — в точках  $\left(\pm \omega \frac{h_1}{h_2}, \pm \omega\right)$ . В данной работе  $0 < \xi < 1$ ,  $0 < \omega < 1$ ,  $0 < \zeta < 1$ .

В качестве условий согласования берутся требования непрерывности в точках с локальными координатами  $\left(\pm \frac{h_1}{h_2}, \pm \zeta\right)$  и  $\left(\pm \zeta \frac{h_1}{h_2}, \pm 1\right)$  следующих выражений:

$$\eta_1 U_n + \eta_2 \frac{\partial U_n}{\partial \vec{n}} - \eta_3 p, \quad \eta_1 U_\tau + \eta_2 \frac{\partial U_\tau}{\partial \vec{n}},$$

где  $\vec{n}$  — вектор единичной внешней нормали к границе ячейки,  $U_n$ ,  $U_\tau$  — нормальная и касательная компоненты скорости,  $\eta_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , — положительные управляющие весовые параметры.

Если сторона ячейки примыкает к границе области  $\Omega$ , то на ней в точках  $\left(\pm \frac{h_1}{h_2}, \pm \xi\right)$  и  $\left(\pm \xi \frac{h_1}{h_2}, \pm 1\right)$  записываются краевые условия для компонент скоростей. Соответствующие уравнения при этом выглядят следующим образом:

$$\left(\sum_{j=1}^{12} a_{jm} \vec{\psi}_j\right)_k = \left(\vec{V}\right)_k, \quad k = 1, 2. \quad (1.4)$$

Здесь  $(\vec{\psi}_j)_k$ ,  $(\vec{V})_k$  — это  $k$ -е компоненты векторов  $\vec{\psi}_j$  и  $\vec{V}$ . При записи переопределенной системы для задачи (1.1) каждое из уравнений вида (1.4) умножается на положительный весовой параметр  $\eta_4$ . В одной ячейке сетки, содержащей точку с координатами  $(x_1^0, x_2^0)$ , записывается граничное условие для давления. Весовой множитель для этого уравнения в переопределенной системе в данной работе не вводится. Уравнения коллокаций в задаче (1.1) при записи переопределенной СЛАУ умножаются на положительный весовой параметр  $\eta_5$ .

Для нахождения приближенного решения задачи (1.1) здесь используется метод итераций по подобластям (альтернирующий метод Шварца), в котором каждая ячейка сетки является подобластью. Итерации по подобластям и по нелинейности совмещаются. В данной работе линейризация уравнений (1.1) производится по Ньютону [9, 14, 16].

Таким образом, для уточнения решения задачи в каждой ячейке на итерации по подобласти здесь выписывается переопределенная *локальная СЛАУ* из 24 уравнений с 12 неизвестными. Локальная система для ячейки, содержащей точку  $(x_1^0, x_2^0)$ , будет состоять из 25 уравнений. Для удобства изложения будем использовать для локальных СЛАУ обозначение  $L\vec{u} = \vec{b}$ , где  $L$  — прямоугольная матрица, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных  $a_{jm}$  (1.3) в указанных уравнениях. Здесь компоненты вектора  $\vec{u}$  — неизвестные  $a_{jm}$  (1.3), соответствующие текущей ячейке. Под решением переопределенной системы  $L\vec{u} = \vec{b}$  здесь понимается псевдорешение, получаемое методом наименьших квадратов [7].

**О п р е д е л е н и е 1.** *Глобальной итерацией* назовем однократное последовательное выполнение итераций по всем подобластям из  $\Omega$  (итераций по всем ячейкам сетки).

Остановка итерационного процесса в рассматриваемом здесь варианте метода КНК происходила при выполнении условия

$$\max_{j,m} |a_{jm}^{n+1} - a_{jm}^n| < \varepsilon,$$

где  $a_{jm}^n$  — значение коэффициента  $a_{jm}$  на  $n$ -й глобальной итерации,  $\varepsilon$  — малая константа.

### 1.3. Ортогональные методы решения переопределенной СЛАУ

В предложенных ранее в других работах вариантах метода КНК для решения переопределенной СЛАУ

$$L\vec{u} = \vec{b} \quad (1.5)$$

в каждой ячейке на итерации по подобласти использовался МНК [7,8,10,14]. Для системы (1.5) с матрицей

$$L = \{l_{ij}, 1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2, n_2 < n_1\}$$

реализация классического варианта метода наименьших квадратов сводится к решению определенной системы

$$L^T L\vec{u} = L^T \vec{b}, \quad (1.6)$$

где  $L^T$  — матрица, полученная транспонированием матрицы  $L$ . Уравнения (1.6) получаются из требования того, чтобы псевдорешение системы (1.5) являлось точкой минимума функционала невязки

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^{n_1} ((L\vec{u})_i - b_i)^2,$$

где  $(L\vec{u})_i, b_i$  —  $i$ -е компоненты векторов  $L\vec{u}$  и  $\vec{b}$  соответственно.

В дальнейшем изложении нам потребуются некоторые определения, касающиеся свойств переопределенных систем.

**О п р е д е л е н и е 2.** Числом обусловленности прямоугольной матрицы  $L$  назовем отношение  $\nu(L) = \sigma_{max}/\sigma_{min}$ , где  $\sigma_{max}, \sigma_{min}$  — максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы  $L$  соответственно.

**О п р е д е л е н и е 3.** Чем больше величина  $\nu(L)$ , тем хуже обусловлена СЛАУ  $L\vec{u} = \vec{f}$ .

**З а м е ч а н и е 1.**  $\nu(L) = \nu(QL)$ , где  $Q$  — ортогональная матрица,  $L$  — прямоугольная.

**З а м е ч а н и е 2.**  $\nu(L^T L) = (\nu(L))^2$ . Поэтому применять метод наименьших квадратов в случае плохо обусловленной матрицы  $L$  нежелательно.

В работе [10] использовался вариант МНК, в котором введены два функционала  $\Phi_1, \Phi_2$ . Первый из них состоял только из суммы квадратов невязок уравнений, соответствующих граничным условиям и условиям согласования. Второй — только из суммы квадратов невязок уравнений коллокаций. Определенная система для варианта метода КНК, в котором давление аппроксимировалось полиномами первого порядка, в работе [10] выведена из условий минимума функционалов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , причем минимум  $\Phi_1$  взят по коэффициентам  $a_{jm}, j = 1, \dots, 10$ , при фиксированных  $a_{11m}$  и  $a_{12m}$ , а минимум  $\Phi_2$  — по  $a_{jm}, j = 11, 12$ , при фиксированных  $a_{jm}, j = 1, \dots, 10$ .

Для решения локальной СЛАУ (1.5) в варианте метода КНК с аппроксимацией давления полиномами первого порядка в данной работе используется метод вращений с выбором главного элемента в столбце, обобщенный на случай переопределенной системы [16]. Такой подход был предложен в [22]. Построенное таким образом решение при отсутствии ошибок округления совпадает с тем, что получается методом наименьших квадратов при минимизации одного

функционала, составленного из квадратов невязок всех уравнений системы  $L\vec{u} = \vec{b}$ . После приведения матрицы  $L$  к верхнетреугольному виду преобразованиями вращения, т. е. к такому виду, что элементы  $l_{ij} = 0$  при  $i > j$ , из первых  $n_2$  уравнений системы  $L\vec{u} = \vec{b}$  составляется определенная СЛАУ

$$M\vec{u} = \vec{d}. \quad (1.7)$$

Нетрудно показать важное свойство системы (1.7), состоящее в том, что ее решение совпадает с решением системы (1.5), полученным при помощи МНК.

В результате применения метода наименьших квадратов ухудшается обусловленность задачи линейной алгебры в сравнении с исходной СЛАУ. Преимущество подхода, основанного на применении ортогональных преобразований, заключается в том, что числа обусловленности матриц  $M$  и  $L$  совпадают.

Опишем теперь алгоритм ортогонального метода, который дает то же самое приближенное решение, что и МНК с двумя функционалами невязок при отсутствии ошибок округления. Пусть в первый функционал  $\Phi_1$  входят квадраты невязок первых  $p_1$  уравнений системы (1.5), а во второй функционал  $\Phi_2$  — квадраты невязок оставшихся  $(n_1 - p_1)$  уравнений системы, где  $0 < p_1 < n_1$ . Пусть минимум функционала  $\Phi_1$  взят по переменным  $u_1, \dots, u_{p_2}$  при фиксированных  $u_{p_2+1}, \dots, u_{n_2}$ , а минимум функционала  $\Phi_2$  взят по переменным  $u_{p_2+1}, \dots, u_{n_2}$  при фиксированных  $u_1, \dots, u_{p_2}$ , где  $0 < p_2 < n_2$ . Разобьем систему (1.5) на две подсистемы

$$L_1\vec{u} = \vec{b}_1, \quad (1.8)$$

$$L_2\vec{u} = \vec{b}_2. \quad (1.9)$$

Подсистема (1.8) состоит из первых  $p_1$  уравнений СЛАУ (1.5), подсистема (1.9) — из оставшихся уравнений. В (1.8) временно перенесем в правую часть выражения, зависящие от компонент вектора  $\vec{u}^2 = (u_{p_2+1}, \dots, u_{n_2})$ , а в (1.9) — выражения, зависящие от  $\vec{u}^1 = (u_1, \dots, u_{p_2})$ . В результате будут получены системы

$$L'_1\vec{u}^1 = \vec{b}'_1(\vec{u}^2), \quad (1.10)$$

$$L'_2\vec{u}^2 = \vec{b}'_2(\vec{u}^1), \quad (1.11)$$

где  $L'_1, L'_2$  — матрицы размера  $p_1 \times p_2$  и  $(n_1 - p_1) \times (n_2 - p_2)$  соответственно. Приводим системы (1.10), (1.11) ортогональными преобразованиями [16, 22, 26] к такому виду, чтобы их матрицы стали верхнетреугольными. Вернем в левую часть преобразованных систем (1.10), (1.11) выражения, зависящие от компонент вектора неизвестных  $\vec{u}$ . Составим из первых  $p_2$  уравнений системы, получившейся из (1.10), и из первых  $(n_2 - p_2)$  уравнений системы, получившейся из (1.11), определенную систему. Ее решение будет совпадать с тем, что получается в МНК с использованием двух функционалов невязок  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

Для решения определенных СЛАУ в данной работе также использовался ортогональный метод линейной алгебры (метод вращений) [26].

#### 1.4. Аппроксимация давления полиномами второго порядка

В [10, 14] был предложен и реализован вариант метода КНК решения краевых задач для уравнений Навье — Стокса, в котором давление аппроксимируется полиномами второго порядка. В отличие от варианта метода КНК, указанного в подразд. 1.2, в этом случае в базис добавляются еще 3 элемента, содержащие квадратичные члены для давления.

Условия согласования, граничные условия и уравнения коллокаций записываются здесь так же, как указано в подразд. 1.2. В работе [14] для решения локальных СЛАУ в варианте метода с аппроксимацией давления полиномами второго порядка снова использовался метод КНК с двумя функционалами невязок  $\Phi_1, \Phi_2$ . В первый из них вошли квадраты невязок условий согласования и граничных условий. Во второй — квадраты невязок уравнений коллокаций. Функционал  $\Phi_1$  минимизировался по переменным  $a_{jm}, j = 1, \dots, 10$ , при фиксированных  $a_{jm}$ ,



$j = 11, \dots, 15$ . Функционал  $\Phi_2$  — по переменным  $a_{jm}$ ,  $j = 11, \dots, 15$ , при фиксированных  $a_{jm}$ ,  $j = 1, \dots, 10$ .

В данной работе предпринимались попытки использовать в этом варианте метода КНК для решения переопределенной локальной СЛАУ ортогональный метод линейной алгебры, эквивалентный при отсутствии ошибок округления методу наименьших квадратов с одним функционалом невязок. Однако точность получаемого приближенного решения в численных экспериментах была существенно хуже точности, достигнутой на тех же сетках в работе [14]. Варианты метода КНК при этом отличались только способом решения переопределенных СЛАУ. При использовании ортогонального метода, эквивалентного МНК с функционалами  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ , здесь были получены результаты не хуже, а в некоторых случаях даже лучше по точности, чем в работе [14] на тех же сетках.

При решении краевых задач для уравнений Навье — Стокса методом конечных элементов [27] в случае полиномиальной аппроксимации решения для обеспечения устойчивости метода необходимо, чтобы порядки полиномов для компонент скорости и давления удовлетворяли определенным условиям (LBB-условию [28]). Например, в методе конечных элементов порядок полиномов, аппроксимирующих компоненты скорости, должен быть больше порядка полиномов, аппроксимирующих давление. Результаты данной работы четко свидетельствуют о том, что подобные ограничения имеют место и в вариантах метода КНК с одним функционалом невязки. Судя по результатам численных экспериментов, использование вариантов метода КНК с двумя функционалами невязок [14] позволяет ослабить эти ограничения.

### 1.5. Использование многосеточных комплексов в методе КНК

Все численные эксперименты, результаты которых приведены в данной работе, проводились с использованием одного цикла движения по уровням многосеточного комплекса: от самой грубой сетки к самой мелкой [32]. В [14] показано, что такой подход позволяет существенно сократить время расчета по сравнению со случаем, когда многосеточные комплексы не используются. Счет на последовательности сеток рассматривается в данном пункте на примере варианта метода КНК с аппроксимацией компонент скорости и давления полиномами второго порядка. Для других вариантов метода рассуждения аналогичны приведенным здесь.

Приближенное решение, получаемое в методе КНК, в отличие от, например, разностных методов, является функцией непрерывного аргумента. Область значений последнего совпадает с областью, в которой рассматривается исходная задача. В каждой ячейке сетки компоненты приближенного решения являются полиномами второго порядка. Этим обстоятельством можно воспользоваться в случае, когда требуется перейти от грубой сетки (сетки с меньшим числом ячеек) к мелкой (сетке с большим числом ячеек). Такой переход необходим для того, чтобы использовать приближенное решение, полученное на грубой сетке, в качестве начального приближения решения для счета на мелкой. В численных экспериментах часто используются последовательности вложенных сеток, при мельчении которых каждая ячейка мелкой сетки целиком содержится в некоторой ячейке грубой. Заметим, что в этом случае компоненты приближенного решения, полученного на грубой сетке, в каждой ячейке мелкой сетки также являются полиномами второго порядка. Кроме того, для компонент скоростей этого приближенного решения внутри ячеек мелкой сетки будет тождественно выполнено уравнение неразрывности. Следовательно, для мелкой сетки существуют значения коэффициентов  $a_{jm}$  (1.3) такие, что соответствующее им приближенное решение тождественно совпадает с решением, полученным на грубой сетке. Формулы перехода к мелкой сетке выводятся легко и достаточно просто. Здесь они не приводятся из-за недостатка места. В разностных методах для перехода от более грубой сетки к более мелкой требуется дополнительная вычислительная процедура, например, интерполяция. При этом в приближенное решение вносится погрешность. В методе КНК переход к более мелкой сетке лишен данного недостатка.

## 2. Ускорение сходимости итерационного процесса

Построение приближенного решения краевых задач для уравнений Навье — Стокса, имеющего необходимую точность, часто связано с большими затратами ресурсов ЭВМ. Во многих численных методах, как и в вариантах метода КНК, предложенных здесь и в других работах, для нахождения приближенного решения используются итерационные процессы. Если итерации сходятся медленно, то это сужает возможности применения метода на практике, так как из-за очень большого времени расчета вычисления на подробных сетках становятся недоступными. В настоящее время существуют различные подходы, позволяющие добиться ускорения сходимости итераций [29–34]. Так, например, в [32, 34] рассматриваются многосеточные методы. В статье Й. Саада [29] изложены алгоритмы, в которых используются подпространства Крылова. В [30, 31] описан многошаговый метод наименьших квадратов ускорения сходимости итерационного процесса  $\vec{x}_n$  ( $n=0, 1, \dots$ ) решения СЛАУ

$$A\vec{x} = \vec{b}. \quad (2.1)$$

Здесь векторы  $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^p$ ,  $A$  — матрица размера  $p \times p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . В этом методе через каждые  $k$  шагов к текущему приближению  $\vec{x}_n$  добавляется поправка, являющаяся линейной комбинацией  $k$  векторов  $\vec{r}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i$ ,  $i = (n-k), \dots, (n-1)$ ,  $k < n$ . Поправка ищется из условия минимума функционала, составленного из квадратов невязок уравнений системы, эквивалентной исходной (2.1). В [30, 31] метод ускорения реализован для  $k \leq 2$ . Для  $k > 2$  в [30, 31] работающий алгоритм метода отсутствует. Дело в том, что СЛАУ, из которой определяется поправка для  $\vec{x}_n$  в случае сходимости итераций, начиная с некоторого  $n$ , получается либо плохо обусловленной, либо вырожденной из-за стремления  $\vec{r}_n$  к  $\vec{0}$  с ростом  $n$ . В данной работе указан работающий способ реализации этого метода для произвольного  $k$ .

Применение ускорения сходимости в методе КНК позволило существенно уменьшить время, необходимое для проведения расчетов. В некоторых случаях итерационный процесс из расходящегося становился сходящимся после использования метода ускорения [30]. В [30, 31] показано, что метод позволяет добиться хорошего ускорения в случаях СЛАУ с самосопряженными и несамосопряженными матрицами.

Несмотря на то что уравнения Навье — Стокса существенно нелинейные, в случае, когда  $n$  достаточно велико, итерационный процесс метода КНК близок к итерационному процессу решения задачи с “замороженной” матрицей. Следовательно, в случае итерационного решения нелинейных задач можно при небольших  $k$  использовать алгоритм ускорения сходимости итерационного процесса решения СЛАУ.

### 2.1. Описание метода ускорения

Пусть задано некоторое начальное приближение  $\vec{x}_0$ . Итерационная последовательность строится следующим образом:

$$\vec{x}_{n+1} = T\vec{x}_n + \vec{f}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

Здесь  $T$  — матрица размера  $p \times p$ . Предположим, что итерационный процесс сходится. Тогда векторы  $\vec{x}_n$  стремятся при  $n \rightarrow \infty$  к решению  $\vec{x}$  системы

$$\vec{x} = T\vec{x} + \vec{f},$$

которая получена из СЛАУ (2.1) невырожденным преобразованием. Невязкой  $n$ -й итерации назовем вектор  $\vec{r}_n = T\vec{x}_n + \vec{f} - \vec{x}_n = \vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n$ , погрешностью — вектор

$$\vec{y}_n = \vec{x} - \vec{x}_n = \vec{x} - \vec{x}_{n+1} + \vec{r}_n = \vec{y}_{n+1} + \vec{r}_n. \quad (2.3)$$

Невязки и погрешности удовлетворяют соотношениям

$$\vec{r}_{n+1} = T\vec{r}_n, \quad \vec{y}_{n+1} = T\vec{y}_n. \quad (2.4)$$

Из равенств (2.3) и (2.4) можно получить систему уравнений

$$(I - T)\vec{y}_n = \vec{r}_n, \quad (2.5)$$

связывающую компоненты векторов  $\vec{y}_n$  и  $\vec{r}_n$ , где  $I$  — это единичная матрица размера  $p \times p$ . Умножив уравнение (2.5) на  $T^{-1}$  слева и заменив вектор  $T^{-1}\vec{r}_n$  на  $\vec{r}_{n-1}$ , получим

$$(T^{-1} - I)\vec{y}_n = \vec{r}_{n-1}. \quad (2.6)$$

В многошаговом методе наименьших квадратов ускорения сходимости, предложенном в [30,31], через каждые  $k$  итераций к текущему приближению  $\vec{x}_n$  добавляется поправка

$$\vec{y}_n^* = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \vec{r}_{n-k+i}. \quad (2.7)$$

Уточненный таким образом вектор  $\vec{x}_n$  используется далее для выполнения следующих  $k$  итераций. Коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, (k-1)$ , ищутся в [30,31] из условия минимума квадрата нормы невязки уравнения (2.6), возникающей при подстановке в него приближенного вектора погрешности  $\vec{y}_n^*$  вместо  $\vec{y}_n$ , т. е. из условия

$$\left\| (T^{-1} - I)\vec{y}_n^* - \vec{r}_{n-1} \right\|_2^2 \rightarrow \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}}. \quad (2.8)$$

Вторая норма вектора  $\vec{v} = \{v_i, i = 1, \dots, m\}$  определяется здесь равенством  $\|\vec{v}\|_2^2 = \sum_{i=1}^m v_i^2$ .

Задача о нахождении минимума (2.8) эквивалентна решению переопределенной СЛАУ

$$(T^{-1} - I)\vec{y}_n^* = \vec{r}_{n-1}, \quad (2.9)$$

в которой неизвестными являются коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, (k-1)$ . Система (2.9) может быть записана в виде

$$\alpha_1 (\vec{r}_{n-k+1} - \vec{r}_{n-k}) + \dots + \alpha_{k-1} (\vec{r}_{n-1} - \vec{r}_{n-2}) = -\vec{r}_{n-1}. \quad (2.10)$$

Для решения СЛАУ (2.10) в данной работе, в отличие от [30,31], предложено использовать ортогональный метод, эквивалентный МНК [16]. Поэтому предложенный и реализованный здесь алгоритм назовем *ортогональным методом ускорения сходимости*. При больших  $n$  в случае сходящегося итерационного процесса элементы матрицы системы (2.10) малы, так как нормы  $\|\vec{r}_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Здесь  $\|\vec{v}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} |v_i|$ . Чтобы избежать арифметических операций с числами, близкими к машинному нулю, проводилась нормировка столбцов матрицы при помощи замены переменных

$$\alpha'_i = \alpha_i \left\| \vec{r}_{n-k+i} - \vec{r}_{n-k+(i-1)} \right\|_\infty, \quad i = 1, \dots, (k-1).$$

При этом нормы столбцов матрицы становятся равными 1. Однако такой прием не решает все проблемы, возникающие при наличии среди векторов

$$\vec{z}_i = (\vec{r}_{n-k+i} - \vec{r}_{n-k+(i-1)}), \quad i = 1, \dots, (k-1),$$

близких к линейно зависимым. В этом случае система (2.10) будет плохо обусловлена или вырождена.

**О п р е д е л е н и е 4.** *Близкими к линейно зависимым* называем такие векторы  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q$  ( $\|\vec{v}_j\|_\infty = 1, j = 1, \dots, (k-1)$ ), для которых

$$\exists l(1 \leq l \leq q) \quad \forall i \neq l(1 \leq i \leq q) \quad \exists k_i \quad \max_{1 \leq i \leq q, i \neq l} |k_i| \neq 0 : \quad \left\| \vec{v}_l - \sum_{1 \leq i \leq q, i \neq l} k_i \vec{v}_i \right\|_\infty \leq \varepsilon_1,$$

где *параметр зависимости*  $\varepsilon_1$  — фиксированная малая величина.

**О п р е д е л е н и е 5.** Систему (2.10) называем *вырожденной*, если из нее нельзя выделить или получить с помощью линейной комбинации уравнений невырожденную подсистему размера  $(k-1)$ .

В данной работе  $\varepsilon_1 = 10^{-15}$ . Для представления вещественных чисел использовался тип long double (C++). В качестве критерия отсутствия в матрице СЛАУ (2.10) близких к линейно зависимым столбцов здесь использовалось условие на модули ведущих элементов ортогонального исключения [16]. Все они должны быть больше  $\varepsilon_1$ .

Рассмотрим случай, когда указанный критерий не выполняется. Пусть на некотором этапе решения переопределенной СЛАУ (2.10) при проведении ортогонального исключения в  $j$ -м столбце ее матрицы, где  $1 < j \leq (k-1)$ , модуль ведущего элемента стал меньше  $\varepsilon_1$ . Из этого следует, что невязки  $\{\vec{z}_i, i = 1, \dots, j\}$  близки к линейно зависимым. Несложно показать, что тогда вектор  $\vec{z}_{i_1}$ , где  $j \leq i_1 \leq (k-1)$ , и векторы  $\{\vec{z}_i, i = 1, \dots, (j-1)\}$  близки к линейно зависимым с параметром зависимости, равным  $C\varepsilon_1$ , где константа  $C$  зависит от нормы матрицы  $T$  и от  $k$ . В этом случае система (2.10) будет плохо обусловлена или вырождена. Чтобы получить работающий алгоритм, необходимо уменьшить число используемых невязок. Иначе поправки будут находиться со значительными погрешностями и ускорение сходимости за счет прибавления векторов  $\vec{y}_n^*$  ухудшится. Полагая в (2.10)  $\alpha_i = 0, i = j, \dots, k-1$ , получим переопределенную систему для нахождения  $\alpha_i, i = 1, \dots, j-1$ , обусловленность которой лучше обусловленности системы (2.10). Заметим, при решении этой СЛАУ можно воспользоваться результатами ортогонального исключения в системе (2.10), уже проведенного до  $(j-1)$ -го этапа. Таким образом, к вектору  $\vec{x}_n$  добавляется поправка

$$\vec{y}_n^{**} = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \vec{r}_{n-k+i},$$

т. е. вместо  $(k-1)$  векторов для определения поправки (2.7) используются только первые  $(j-1)$  невязок.

В методе ускорения вместо (2.2) можно использовать последовательность  $\vec{\chi}_n = \vec{x}_{n,s}, n = 1, 2, \dots$ , которая составлена из вычисленных по формуле (2.2) векторов  $\vec{x}_n$ , взятых через каждые  $s$  шагов. Матрица оператора перехода от приближения  $\vec{\chi}_n$  к  $\vec{\chi}_{n+1}$  здесь равна  $T^s$ . Как показали численные эксперименты, этот прием при  $1 \leq s \leq s_0$  позволяет добиться дополнительного ускорения сходимости. Наличие верхнего предела  $s_0$  прежде всего обусловлено нелинейностью решаемой краевой задачи.

## 2.2. Исследование свойств метода ускорения

Предложенный здесь вариант алгоритма ускорения сходимости был использован в методе КНК решения краевой задачи для стационарных уравнений Навье — Стокса в двумерной прямоугольной области [10, 16]. Эксперименты проводились с несколькими решениями при различных числах Рейнольдса  $Re$ . На рис. 1, 2 изображены графики, полученные для одного тестового решения при  $Re = 100$ . Результаты, аналогичные приведенным здесь, имели место во всех остальных экспериментах.

На рис. 1 изображен график зависимости от номера итерации  $n$  величины логарифма псевдопогрешности  $\delta_n = \|\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n\|_\infty$ , где  $\vec{x}_n$  —  $n$ -е приближение для вектора неизвестных, который составлен из коэффициентов  $a_{jm}$  (1.3) всех ячеек используемой сетки. Кривая, име-

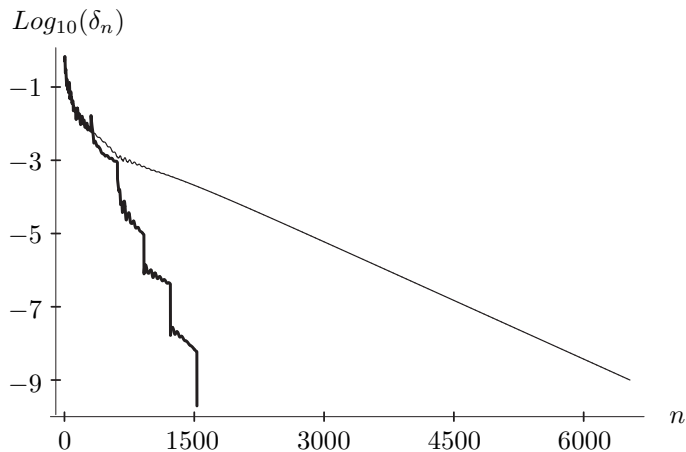


Рис. 1. Зависимость псевдопогрешности от номера итерации ( $s = 5$ ,  $k = 50$ ).

ющая на рис. 1 большую толщину, соответствует случаю, когда используется метод ускорения сходимости. Другая кривая — случаю, когда он не применяется. Видно, что использование ускорения позволило сократить в данном эксперименте число итераций, необходимых для получения приближенного решения, более чем в четыре раза. Также видно, что, как это было сказано ранее в начале п. 2, итерационный процесс в методе КНК, начиная с некоторого  $n$ , близок к итерационному процессу решения задачи с “замороженной” матрицей, о чем свидетельствует то, что график для случая, когда ускорение не производится, в логарифмическом масштабе мало отличается от прямой. Поэтому здесь оправдано применение методов ускорения сходимости итераций решения СЛАУ. Каждая “ступенька” на графике в случае использования метода ускорения, соответствует однократному прибавлению поправки (2.7). Видно, что при этом величина псевдопогрешности  $\delta_n$  существенно уменьшается.

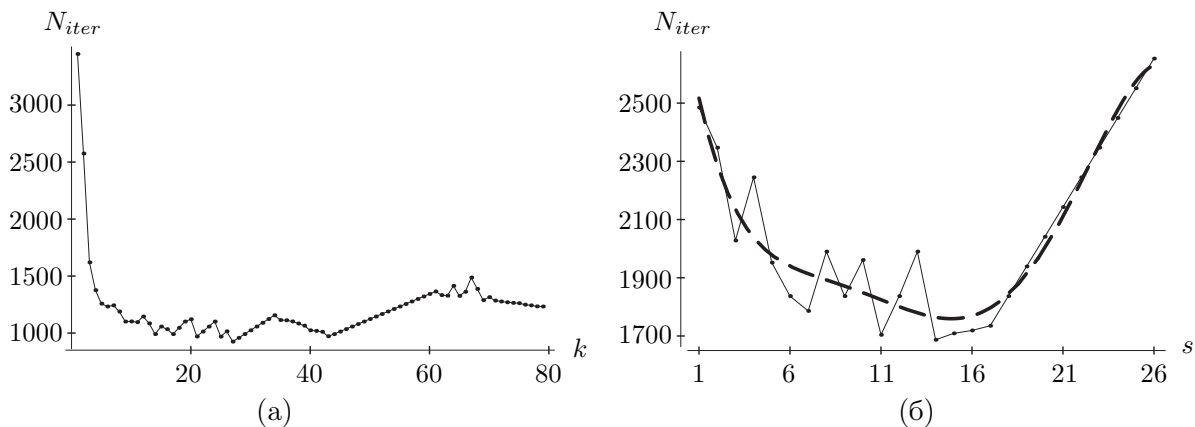


Рис. 2. Зависимость числа итераций: (а) от параметра  $k$  при  $s = 10$ ; (б) от параметра  $s$  при  $k = 50$ .

На рис. 2 (а) приведен график зависимости от параметра  $k$  количества итераций  $N_{iter}$ , потребовавшихся для получения приближенного решения. Видно, что с увеличением числа невязок до 20 растет эффективность метода ускорения. Если значение параметра  $k > 20$ , то она практически не улучшается по сравнению со случаем  $k = 20$ , оставаясь примерно на одном и том же уровне. Об аналогичном результате авторам данной работы устно сообщил автор работы [35]. Таким образом, поскольку в более ранних вариантах метода ускорения

сходимости [30, 31] при вычислении поправки (2.7) использовалось не более двух невязок, предложенный здесь вариант позволяет добиться большего по сравнению с ними ускорения.

На рис. 2 (б) изображен график зависимости числа итераций от параметра  $s$ . Пунктирная линия — это усредненная кривая, полученная методом наименьших квадратов. Видно, что увеличение параметра  $s$  может привести к дополнительному уменьшению числа итераций. Из графика также видно, что нельзя использовать большие  $s$ . Причина этого, как было сказано ранее, прежде всего заключается в нелинейности задачи (1.1).

### 3. Задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой

При исследовании свойств численных методов для уравнений Навье — Стокса в качестве тестового решения часто используется решение задачи о течении в каверне с движущейся верхней крышкой. Оно обладает особенностями в правом и левом верхних углах каверны: в них горизонтальная компонента скорости терпит разрыв. В этом решении присутствуют вихри различной интенсивности. Их количество, конфигурация и свойства существенно зависят от числа Рейнольдса. Класс течений, возникающих в каверне при различных значениях  $Re$ , достаточно широк и разнообразен для того, чтобы исследовать на нем свойства и возможности численных методов для уравнений Навье — Стокса. В настоящее время опубликовано большое количество работ, посвященных численному решению этой задачи [10, 24, 25, 35–45]. В данной работе задача о течении в каверне играет вспомогательную роль и используется только для демонстрации возможностей метода КНК. Краткие обзоры по решению этой задачи различными численными методами приведены в сравнительно недавних публикациях [41, 44, 45].

Ввиду того, что численное решение краевых задач для уравнений Навье — Стокса предъявляет высокие требования к численным методам [34, 44, 46, 47], для построения работающих алгоритмов часто используются различные искусственные приемы: искусственная сжимаемость, искусственная вязкость, метод фиктивных областей, экстраполяция решения при реализации краевых условий и т.д. Оценка их вклада в погрешность численного решения является трудной задачей. На точность приближенного решения, кроме того, оказывают существенное влияние порядок аппроксимации уравнений в численном методе, подробность используемой сетки, разрядность арифметики вещественных чисел в ЭВМ. Одним из достоинств метода КНК является то, что в нем не используются перечисленные искусственные приемы.

Во многих работах, посвященных численному решению задачи о течении в каверне, приводятся профили скорости. При сравнении высокоточных решений графики, полученные в отдельных работах, визуально не отличаются. Поэтому здесь приводятся только таблицы, по которым можно более полно судить о достигнутой точности.

Выбор значений управляющих параметров метода производился на основе результатов исследования, проведенного в [16]. В работе [16] также подробнее, чем здесь, изложены отдельные свойства метода.

#### 3.1. Численные расчеты

В данной работе проведены численные эксперименты с решением задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной каверне с движущейся верхней крышкой при различных числах Рейнольдса. Результаты расчетов, приведенные в данной работе для  $Re \leq 1000$ , получены с применением варианта метода КНК с аппроксимацией давления полиномами второго порядка. При построении приближенного решения для  $Re > 1000$  использовался вариант метода КНК с аппроксимацией давления полиномами первого порядка.

На рис. 3 и 4 изображены картины линий тока и их детализированные фрагменты при  $Re = 400$  и  $Re = 7500$  соответственно. Знаком «+» здесь обозначаются центры вихрей. В работе [36] для вихрей в каверне предложены обозначения: BR<sub>1</sub> (bottom right eddy) (в данной

работе его центр обозначен буквой «*b*»), BL<sub>1</sub> (bottom left) («*c*»), TL<sub>1</sub> (top left) («*d*»), BR<sub>2</sub> («*e*»), BR<sub>3</sub> («*f*»), BR<sub>4</sub> («*g*»). В табл. 1 и 2 приведены координаты центров ( $x_{1c}, x_{2c}$ ) этих вихрей и значения функции тока  $\psi(x_{1c}, x_{2c})$ .

В табл. 3 и 4 приведены характерные значения компонент скорости  $u_{1\min}$ ,  $u_{2\min}$ ,  $u_{2\max}$ , полученные для  $Re = 1$ ,  $Re = 100$ ,  $Re = 400$ ,  $Re = 1000$ ,  $Re = 3200$ ,  $Re = 5000$ ,  $Re = 7500$ . Величины  $u_{2\min}$  и  $u_{2\max}$  — это соответственно минимум и максимум компоненты  $u_2$  на горизонтальной средней линии каверны. Величина  $u_{1\min}$  определяется как минимум на вертикальной средней линии компоненты скорости  $u_1$ .

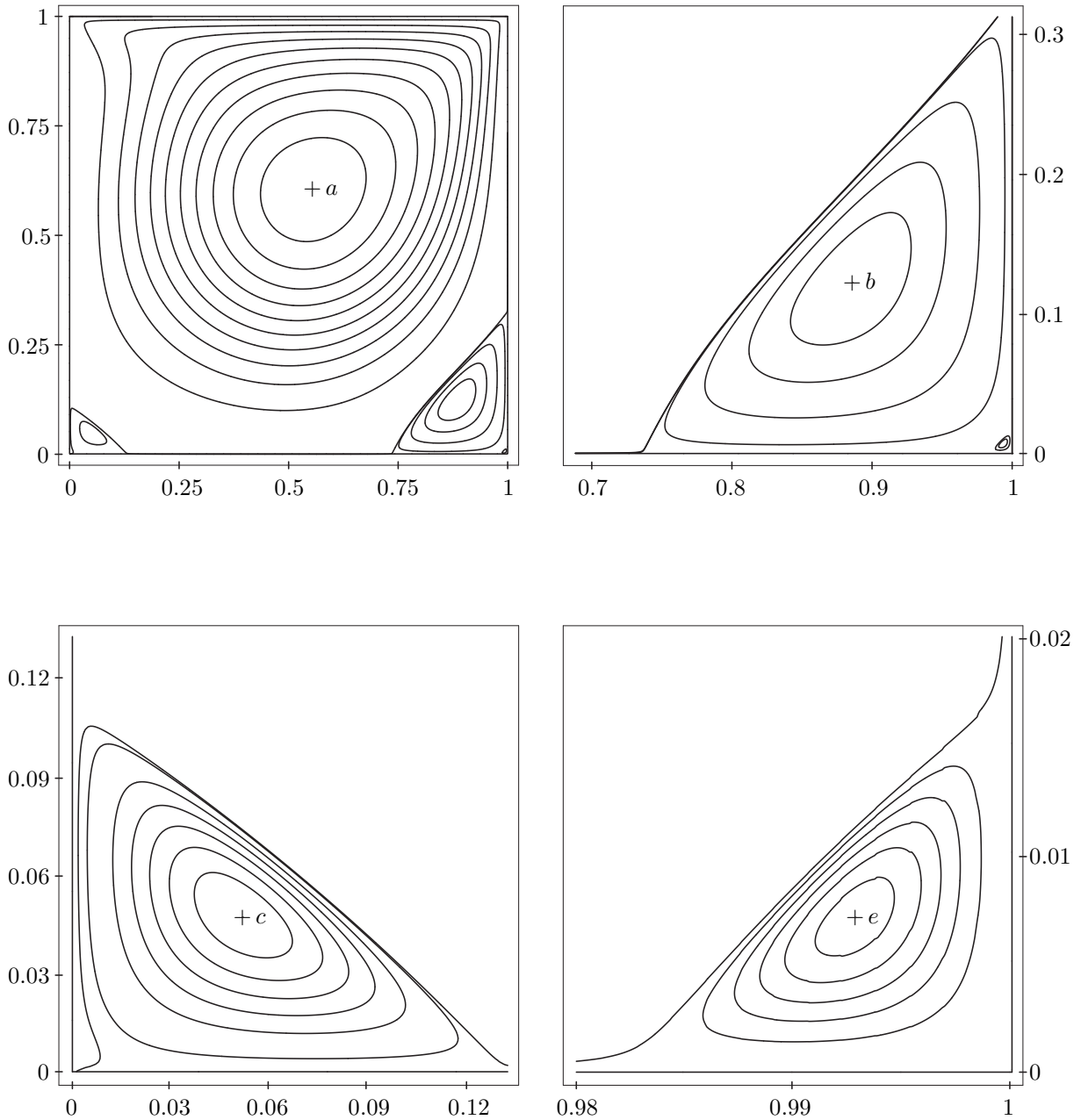


Рис. 3. Картина линий тока течения в каверне при  $Re = 400$  и ее детализированные фрагменты.

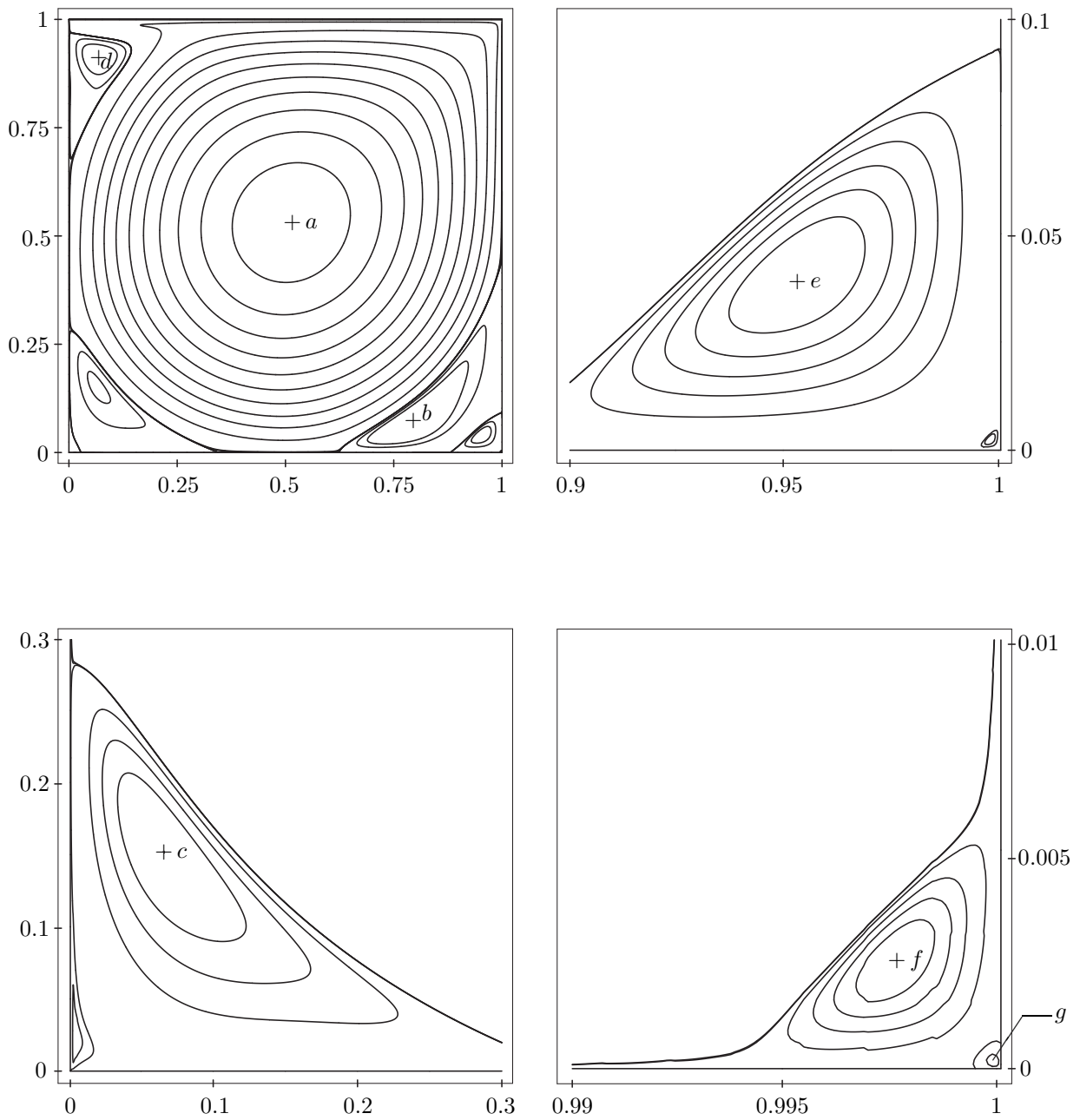


Рис. 4. Картина линий тока течения в каверне при  $Re = 7500$  и ее детализированные фрагменты.



Т а б л и ц а 1

Численные характеристики вихрей в каверне при  $Re = 400$ 

	$a$	$b$	$c$	$e$
Работа [36], сетка $257 \times 257$				
$x_{1c}$	0.5547	0.8906	0.0508	0.9922
$x_{2c}$	0.6055	0.1250	0.0469	0.0078
$\psi_c$	-0.113909	$6.42352 \cdot 10^{-4}$	$1.41951 \cdot 10^{-5}$	$-1.86595 \cdot 10^{-8}$
Эта работа, сетка $640 \times 640$				
$x_{1c}$	0.5539	0.8852	0.0516	0.9929
$x_{2c}$	0.6055	0.1219	0.0469	0.0072
$\psi_c$	-0.1141	$6.462 \cdot 10^{-4}$	$1.445 \cdot 10^{-5}$	$-1.146 \cdot 10^{-8}$

В табл. 3 и 4 также указаны значения координаты  $x_{2\min}$  точки на вертикальной средней линии, в которой компонента скорости  $u_1$  принимает наименьшее значение. В данной работе из-за ограниченности места представлены только некоторые наиболее интересные полученные результаты. Для сравнения в табл. 1–4 также приводятся доступные авторам в данный момент результаты других исследователей.

### 3.2. Обсуждение результатов

При численном решении задачи о течении в каверне из-за влияния численной вязкости, а также в результате использования искусственных приемов, улучшающих устойчивость методов, происходит сглаживание профилей скорости. Это приводит к тому, что значения экстремумов  $u_{1\min}$ ,  $u_{2\min}$ ,  $u_{2\max}$  уменьшаются по модулю. В работах [25, 35] опубликованы результаты расчетов, полученных с применением разностных схем высокого порядка аппроксимации. Численная вязкость в этих схемах очень мала. В работе [40] использовался проекционный метод высокой точности с заменой особенностей решения в верхних углах каверны на их асимптотические представления. Расчеты выполнены на сетке Гаусса — Лобатто, адаптирующейся к границе области. Эти дополнительные приемы, несомненно, повысили в [40] точность приближенного решения задачи о течении в каверне. Заметим, что в данной работе с целью проверки возможностей собственно метода КНК все численные результаты получены без привлечения таких приемов. Сравнив значения экстремумов  $u_{1\min}$ ,  $u_{2\min}$ ,  $u_{2\max}$ , приведенных в табл. 3, можно убедиться, что величины, полученные в [25, 35, 40], являются среди них одними из наибольших по модулю. Это, а также некоторые другие факты свидетельствуют о том, что в [25, 35, 40] приведены одни из наиболее точных результатов среди известных авторам на данный момент. К сожалению, по каким-то причинам ни в одном обзоре, сделанном зарубежными авторами, публикация [25] не упоминается. Численные результаты с хорошей точностью по задаче о течении в каверне при больших  $Re$  ( $Re \leq 21000$ ) на подробных сетках приведены в [44]. В работе [24] расчеты по этой задаче проведены высокоточным спектральным методом (см. табл. 2).

Среди приведенных в табл. 3 характерные величины, полученные в данной работе и в [14] для  $Re = 1$ ,  $Re = 400$ ,  $Re = 1000$ , являются наибольшими по модулю. Для их вычисления здесь и в [14] были использованы варианты метода КНК с аппроксимацией давления полиномами второго порядка. При  $Re > 1000$  использование этого варианта метода вызывает сложности. Они связаны с тем, что, как сказано в подразд. 1.4, для этого варианта метода имеет место ограничение на порядки полиномов, аппроксимирующих компоненты скорости и давление [28].

Т а б л и ц а 2

Численные характеристики вихрей в каверне при  $Re = 7500$ 

Работа [36], сетка $257 \times 257$			
	$a$	$b$	$c$
$x_{1c}$	0.5117	0.7813	0.0645
$x_{2c}$	0.5322	0.0625	0.1504
$\psi_c$	-0.119976	$3.28484 \cdot 10^{-3}$	$1.46709 \cdot 10^{-3}$
	$d$	$e$	$f$
$x_{1c}$	0.0664	0.9492	0.9961
$x_{2c}$	0.9141	0.0430	0.0039
$\psi_c$	$2.04620 \cdot 10^{-3}$	$-3.28148 \cdot 10^{-5}$	$1.58111 \cdot 10^{-9}$
Работа [44], сетка $601 \times 601$			
	$a$	$b$	$c$
$x_{1c}$	0.5133	0.7900	0.0650
$x_{2c}$	0.5317	0.0650	0.1517
$\psi_c$	-0.120924	$3.2102 \cdot 10^{-3}$	$1.5171 \cdot 10^{-3}$
	$d$	$e$	$f$
$x_{1c}$	0.0667	0.9517	0.9967
$x_{2c}$	0.9133	0.0417	0.0033
$\psi_c$	$2.1119 \cdot 10^{-3}$	$-3.0998 \cdot 10^{-5}$	$1.4409 \cdot 10^{-9}$
Работа [24], сетка $32 \times 32$			
	$a$	$b$	$c$
$x_{1c}$	0.5132184	0.7900250	0.06416178
$x_{2c}$	0.5320950	0.06483485	0.1525889
$\psi_c$	-0.1223803	$3.226968 \cdot 10^{-3}$	$1.536466 \cdot 10^{-3}$
	$d$	$e$	$f$
$x_{1c}$	0.06685477	0.9517405	0.9973421
$x_{2c}$	0.9116328	0.04218909	0.002657867
$\psi_c$	$2.134407 \cdot 10^{-3}$	$-3.279011 \cdot 10^{-5}$	$8.899567 \cdot 10^{-10}$
Эта работа, сетка $640 \times 640$			
	$a$	$b$	$c$
$x_{1c}$	0.5136	0.7916	0.0649
$x_{2c}$	0.5322	0.0656	0.1520
$\psi_c$	-0.11821	$3.1390 \cdot 10^{-3}$	$1.4938 \cdot 10^{-3}$
	$d$	$e$	$f$
$x_{1c}$	0.0664	0.9533	0.9976
$x_{2c}$	0.9120	0.0402	0.0026
$\psi_c$	$2.0036 \cdot 10^{-3}$	$-2.6334 \cdot 10^{-5}$	$1.0066 \cdot 10^{-6}$

Т а б л и ц а 3

## Характерные значения компонент скорости течения в каверне

Метод	Сетка	$u_{1 \min}$	$x_{2 \min}$	$u_{2 \min}$	$u_{2 \max}$
Re = 1					
Работа [14]	80 × 80	-0.20777	0.5390625	-0.18483	0.18408
Эта работа	160 × 160	-0.20699	0.53678	-0.18438	0.18364
Эта работа	320 × 320	-0.20742	0.53594	-0.18456	0.18390
Эта работа	640 × 640	-0.20755	0.53594	-0.18476	0.18394
Re = 100					
Работа [38]	128 × 128	-0.2106	—	-0.2521	0.1786
Работа [36]	129 × 129	-0.21090	0.4531	-0.24533	0.17527
Работа [25]	160 × 160	-0.2140423	0.458089	—	—
Работа [40]	96 × 96	-0.2140424	0.4581	-0.2538030	0.1795728
Работа [35]	40 × 40	-0.2203	—	-0.2614	0.1846
Работа [14]	160 × 160	-0.21412	0.4609375	-0.25391	0.17968
Эта работа	160 × 160	-0.21415	0.45853	-0.25395	0.17971
Эта работа	320 × 320	-0.21413	0.45781	-0.25393	0.17968
Эта работа	640 × 640	-0.21412	0.45781	-0.25393	0.17968
Re = 400					
Работа [36]	129 × 129	-0.32726	0.2813	-0.44993	0.30203
Работа [39]	64 × 64	-0.32368	—	-0.44862	0.29925
Работа [39]	128 × 128	-0.32751	—	-0.45274	0.30271
Работа [37]	49 × 49	-0.2960	—	-0.4051	0.2662
Работа [14]	80 × 80	-0.32947	0.28125	-0.45466	0.30464
Эта работа	160 × 160	-0.32919	0.28013	-0.45458	0.30439
Эта работа	320 × 320	-0.32905	0.27969	-0.45443	0.30423
Эта работа	640 × 640	-0.32903	0.27969	-0.45439	0.30421
Re = 1000					
Работа [38]	256 × 256	-0.3764	—	-0.5208	0.3665
Работа [36]	129 × 129	-0.38289	0.1719	-0.51550	0.37095
Работа [39]	64 × 64	-0.37436	—	-0.51015	0.36364
Работа [39]	128 × 128	-0.38511	—	-0.52280	0.37369
Работа [37]	129 × 129	-0.3689	—	-0.5037	0.3553
Работа [25]	160 × 160	-0.388569	0.171698	—	—
Работа [40]	160 × 160	-0.3885698	0.1717	-0.5270771	0.3769447
Работа [44]	601 × 601	-0.3869	0.18	-0.5263	0.3756
Работа [14]	160 × 160	-0.38907	0.171875	-0.52692	0.37745
Эта работа	320 × 320	-0.38898	0.17188	-0.52744	0.37758
Эта работа	640 × 640	-0.38899	0.17148	-0.52747	0.37738
Эта работа	1280 × 1280	-0.38893	0.17171	-0.52744	0.37737

## Характерные значения компонент скорости течения в каверне

Метод	Сетка	$u_{1 \min}$	$x_{2 \min}$	$u_{2 \min}$	$u_{2 \max}$
Re = 3200					
Работа [36]	129 × 129	-0.41933	0.1016	-0.54053	0.42768
Эта работа	320 × 320	-0.42851	0.09219	-0.56081	0.42240
Эта работа	640 × 640	-0.42978	0.09219	-0.56225	0.42432
Эта работа	1280 × 1280	-0.43006	0.09221	-0.56282	0.42443
Re = 5000					
Работа [36]	129 × 129	-0.43643	0.0703	-0.55408	0.43648
Работа [44]	601 × 601	-0.4419	0.08	-0.5700	0.4426
Работа [25]	160 × 160	-0.44731	0.074305	—	—
Эта работа	320 × 320	-0.43789	0.07344	-0.56560	0.43456
Эта работа	640 × 640	-0.44077	0.07306	-0.56912	0.43718
Эта работа	1280 × 1280	-0.44127	0.07326	-0.56982	0.43789
Re = 7500					
Работа [36]	129 × 129	-0.43590	0.0625	-0.55216	0.44030
Работа [44]	601 × 601	-0.4491	0.06	-0.5550	0.4495
Эта работа	320 × 320	-0.44553	0.06172	-0.56900	0.44707
Эта работа	640 × 640	-0.44728	0.06094	-0.57274	0.44785
Эта работа	1280 × 1280	-0.44876	0.06036	-0.57455	0.44970

В данной работе указанное ограничение удалось ослабить. Однако при больших Re использование метода КНК с аппроксимацией одновременно давления и компонент скорости полиномами второго порядка не дало хороших результатов. Поэтому при  $Re > 1000$  характерные значения компонент скорости вычислялись с применением варианта метода КНК, описанного в подразд. 1.2. В [16] показано, что повышение порядка аппроксимации для давления в методе КНК существенно улучшает точность. Результаты данной работы, приведенные для  $Re > 1000$ , видимо, уступают по точности результатам работы [44]. Тем не менее в данной работе при расчете течения при  $Re = 7500$  был обнаружен вихрь  $BR_4$  из последовательности Моффата [23, 24]. Этот результат, скорее всего, носит качественный характер, однако он свидетельствует о хороших возможностях метода КНК для численного моделирования течений вязкой жидкости.

Косвенные признаки при наблюдении сходимости решения позволяют сделать вывод, что в данной работе возможности предложенных вариантов метода КНК при проведении расчетов повышенной точности на однопроцессорной ЭВМ с использованной здесь разрядностью арифметики вещественных чисел почти исчерпаны.

#### 4. Заключение

В данной работе предложены и реализованы новые, более общие варианты метода КНК. Хотя формулы этого метода несколько сложнее, в сравнении с разностными схемами низкого порядка точности он имеет ряд существенных достоинств. Выбор управляющих параметров позволяет существенно влиять на обусловленность задач линейной алгебры, возникающих при его реализации, получать приближенное решение с той или иной точностью. В методе КНК относительно просто реализуются варианты на адаптивных сетках [14], на многосеточных комплексах, в области с криволинейной границей [13]. Он хорошо распараллеливается. Кроме того, метод КНК может быть применен для решения уравнений математической физики разного типа. Возможности метода расширены здесь за счет применения многосеточных комплексов,

использования нового метода ускорения сходимости итераций решения СЛАУ, применения ортогональных алгоритмов линейной алгебры вместо МНК. Использование результатов работы [16] при выборе управляющих параметров в сочетании с другими улучшениями метода, предложенными в данной работе, позволили с высокой точностью провести расчеты задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в каверне с движущейся верхней крышкой.

Применение адаптивных сеток, арифметики вещественных чисел большей разрядности, распараллеливание вычислений, а также повышение порядка аппроксимации, несомненно, расширяют возможности приведенных здесь вариантов метода КНК.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carey G.G., Cheung Y.K., Lau S.L.** Mixed operator problems using least squares finite element collocation // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1980. Vol. 22. P. 121–130.
2. **Mizusawa T., Kajita T.** Application of point least squares method with B-splines in solid mechanics problems // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1982. Vol. 18, no. 6. P. 897–907.
3. **Burgess G., Mahajerin E.** Rotational fluid flow using a least squares collocation technique // *Comput. Fluids.* 1984. Vol. 12. P. 311–317.
4. **Dong S.B., Lopez A.E.** Natural vibrations of a clamped circular plate with rectilinear orthotropy by least-squares collocation // *Int. J. Solids Struct.* 1985. Vol. 21. P. 515–526.
5. **Jiang B.-N., Carey G.F.** Adaptive refinement for least-squares finite elements with element-by-element conjugate gradient solution // *Int. J. Numer. Meth. Engineering.* 1987. Vol. 24. P. 569–580.
6. **Bentley L.R., Pinder G.F., Herrera I.** Solution of the advective-dispersive transport equation using a least squares collocation, Eulerian-Lagrangian method // *Numer. Methods Partial Differ. Equations.* 1989. Vol. 5, no. 3. P. 227–240.
7. **Сёмин Л.Г., Слепцов А.Г., Шапеев В.П.** Метод коллокаций — наименьших квадратов для уравнений Стокса // *Вычисл. технологии.* 1996. Т. 1, № 2. С. 90–98.
8. **Karamyshev V., Kovenya V., Sleptsov A.** Adaptive methods for Navier – Stokes equations // *Comput. fluid dynamics. Proc. of the Third ECCOMAS conference on computational fluid dynamics.* 1996. Vol. 1. P. 301–307.
9. **Сёмин Л.Г., Шапеев В.П.** Коллокационно-сеточный метод решения краевых задач для уравнений Навье — Стокса // *Математические проблемы механики сплошных сред: Тез. докл. сиб. школы-семинара.* Новосибирск, 1997. С. 125–126.
10. **Сёмин Л.Г., Шапеев В.П.** Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье — Стокса // *Вычисл. технологии.* 1998. Т. 3, № 3. С. 72–84.
11. **Bochev P., Cai Z., Manteuffel T.A., McCormick S.F.** Analysis of velocity-flux first-order system least-squares principles for the Navier-Stokes equations. Part I // *SIAM J. Numer. Anal.* 1998. Vol. 35, no. 3. P. 990–1009.
12. **Semin L.G., Shapeev V.P.** Collocation-grid method for solving boundary problems for Navier – Stokes equations // *Proc. of the international conference on the methods of aerophysical research. Part 2.* Novosibirsk, 1998. P. 186–191.
13. **Беляев В.В., Шапеев В.П.** Метод коллокаций и наименьших квадратов на адаптивных сетках в области с криволинейной границей // *Вычисл. технологии.* 2000. Т. 5, № 4. С. 12–21.
14. **Shapeev V.P., Semin L.G., Belyaev V.V.** The collocation and least squares method for numerical solution of Navier – Stokes equations // *Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 2.* 2003. P. S115–S137.
15. **Semin L.G.** Collocation and least squares method for 2D heat conductivity equation // *Вычисл. технологии.* 2006. Т. 11, № 1. С. 18–25.
16. **Исаев В.И., Шапеев В.П., Еремин С.А.** Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье — Стокса // *Вычисл. технологии.* 2007. Т. 12, № 3. С. 53–70.
17. **Issaev V.I., Shapeev V.P.** Investigation of the collocation and least squares method for solving boundary value problems for Navier–Stokes equations // *Proc. of the international conference on the methods of aerophysical research (ICMAR2007): Part 3.* Novosibirsk, 2007. P. 147–152.
18. **Russell R.D., Shampine L.F.** A collocation method for boundary value problems // *Numer. Math.* 1972. Vol. 19. P. 1–28.
19. **Boor C. de, Swartz B.** Collocation at Gaussian points // *SIAM J. Numer. Anal.* 1973. Vol. 10, no. 4. P. 582–606.

20. **Ascher U., Christiansen J., Russel R.D.** A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems // *Math. Comp.* 1979. Vol. 33. P. 659–679.
21. **Слепцов А.Г., Летова Е.Ю., Саломатов К.Г., Шмыков И.В.** Переопределенные системы конечно-разностных уравнений для задач типа диффузии-конвекции // *Вычисл. технологии.* 1993. Т. 2, № 5. С. 192–201.
22. **Шапеев А.В.** О двух алгоритмах численных методов линейной алгебры // *Студент и научно-технический прогресс: Тез. докл. междунар. науч. студ. конф.* Новосибирск, 2000. С. 16.
23. **Moffat H.K.** Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *J. Fluid Mech.* 1964. No. 18. P. 1–18.
24. **Barragy E., Carey G.F.** Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements // *Computers & Fluids.* 1997. Vol. 26, no. 5. P. 453–468.
25. **Гаранжа В.А., Коньшин В.Н.** Численные алгоритмы для течений вязкой жидкости, основанные на консервативных компактных схемах высокого порядка аппроксимации // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1999. Т. 39, № 8. С. 1378–1392.
26. **Беклемишев Д.В.** Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.
27. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
28. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
29. **Saad Y.** Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems // *Mathematics of computation.* 1981. Vol. 37, no. 155. P. 105–126.
30. **Слепцов А.Г.** Об ускорении сходимости линейных итераций // *Моделирование в механике.* Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 3. С. 132–147.
31. **Слепцов А.Г.** Об ускорении сходимости линейных итераций 2 // *Моделирование в механике.* Новосибирск, 1989. Т. 3(20), № 5. С. 132–147.
32. **Федоренко Р.П.** Введение в вычислительную физику. М.: МФТИ, 1994.
33. **Karamyshev V.B., Kovenya V.M., Sleptsov A.G., Cherny S.G.** Variational method of accelerating linear iterations and its applications // *Computers & Fluids.* 1996. Vol. 25, no. 5. P. 467–484.
34. **Ольшанский М.А.** Равномерные по параметру многосеточные и итерационные методы // *Дис. ... докт. физ.-мат. наук.* М., 2006.
35. **Шапеев А.В.** Разностная схема четвертого порядка для уравнений Навье — Стокса на пятиточечном шаблоне // *Динамика сплошной среды.* Новосибирск, 2000. Вып. 116. С. 119–122.
36. **Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T.** High-Re solutions for incompressible flow using the Navier – Stokes equations and a multigrid method // *J. Comput. Phys.* 1982. No. 48. P. 387–411.
37. **Chen C.J., Chen H.J.** Finite analytic numerical method for unsteady two-dimensional Navier – Stokes equations // *J. Comput. Physics.* 1984. Vol. 53, no. 2. P. 209–226.
38. **Bruneau C.H., Jouron C.** An efficient scheme for solving steady incompressible Navier – Stokes equations // *J. Comput. Physics.* 1990. Vol. 89, no. 2. P. 389–413.
39. **Deng G.B., Piquet J., Queutey P., Visonneau M.** A new fully coupled solution of the Navier – Stokes equations // *Int. J. for Numer. Methods in Fluids.* 1994. Vol. 19, no. 7. P. 605–639.
40. **Botella O., Peyret R.** Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // *Computers & Fluids.* 1998. Vol. 27, no. 4. P. 421–433.
41. **Shankar P.N., Deshpande M.D.** Fluid mechanics in the driven cavity // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2000. No. 32. P. 93–136.
42. **Sahin M., Owens R.G.** A novel fully implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity problem. Part I: High Reynolds number flow calculations // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2003. No. 42. P. 57–77.
43. **Wu Y., Liao S.** Solving high Reynolds-number viscous flows by the general BEM and domain decomposition method // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2005. No. 47. P. 185–199.
44. **Erturk E., Corke T.C., Gokcol C.** Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 2005. No. 48. P. 747–774.
45. **Cheng M., Hung K.C.** Vortex structure of steady flow in a rectangular cavity // *Computers & Fluids.* 2006. No. 35. P. 1046–1062.
46. **Chetverushkin B.N.** Introductory word and plenary talk // *V International congress on mathematical modelling.* Dubna, 2002.
47. **Толстых А.И.** Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.

УДК 517.95

**О РАЗРЕШИМОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВЕННОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ВЫСОКОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ<sup>1</sup>****А. И. Короткий, Д. А. Ковтунов**

В работе проводится исследование стационарных задач естественной тепловой конвекции в приближении Буссинеска с нерегулярными граничными данными. Доказаны теоремы существования и единственности слабого решения таких задач. Исследована гладкость слабого решения в зависимости от гладкости исходных данных и гладкости границы области, в которой рассматривается задача.

**Введение**

В работе проводится исследование стационарных задач естественной тепловой конвекции неоднородной несжимаемой высоковязкой жидкости в приближении Буссинеска. Соответствующая краевая задача тепловой конвекции представляет собой систему уравнений с частными производными вместе с краевыми условиями для искомых функций. Система уравнений рассматривается в некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , и включает в себя уравнение Стокса вместе с уравнением несжимаемости для определения стационарного поля скоростей, а также стационарное уравнение теплового баланса для определения температуры. На границе  $\Gamma = \partial\Omega$  области  $\Omega$  для искомого поля скоростей задается краевое условие прилипания, а для искомой температуры задается смешанное неоднородное краевое условие, в котором на части границы задан тепловой поток, а на оставшейся части границы задана температура. Граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  может иметь различную гладкость. В частности, она может быть кусочно-гладкой, а сама область может быть выпуклой или невыпуклой. Особенность исследуемой здесь краевой задачи тепловой конвекции состоит в том, что она рассматривается в областях с нерегулярной границей и нерегулярными граничными данными на этой границе. Это обстоятельство существенно усложняет исследование задачи, поскольку граничные данные в этих условиях, вообще говоря, не могут быть продолжены внутрь области регулярным образом, и краевая задача не может быть сведена классическим способом к краевой задаче с однородными граничными условиями. Это приводит к необходимости ослабления понятия решения краевой задачи. В работе вводится понятие слабого решения краевой задачи тепловой конвекции, доказываются теоремы существования и единственности такого решения. Для доказательства слабой разрешимости предварительно выводятся априорные оценки для возможного решения, с помощью которых показывается, что некоторый специальным образом сконструированный оператор является сжимающим. Неподвижная точка этого оператора дает “температурную” составляющую решения краевой задачи, “скоростная” составляющая находится из уравнения Стокса. Затем исследуется гладкость слабого решения в зависимости от гладкости границы области и гладкости исходных данных на этой границе. В этой части работы, в зависимости от гладкости упомянутых данных, доказана разрешимость краевой задачи в пространствах Соболева первого и второго порядков. Поскольку область  $\Omega$ , в которой рассматривается задача, может иметь нерегулярную негладкую границу  $\Gamma$ , то компонента “скорости” решения по своим

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00029) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН по направлению “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”.

свойствам гладкости может несколько отставать от компоненты “температуры”. Эти факты отражены отдельно в последнем разделе, чтобы не загромождать основные утверждения работы деталями, связанными с теми или иными свойствами гладкости границы  $\Gamma$ .

Данная работа связана с исследованием граничных обратных задач [1, 2], в которых для процессов, описываемых моделями высоковязкой несжимаемой жидкости, требуется восстановить некоторый неизвестный тепловой граничный режим по какой-либо дополнительной информации о процессе. Такие обратные задачи часто возникают на практике, например, в геофизике и технике, когда прямые измерения искомым величин невозможны на определенной части границы объекта, но известна некоторая дополнительная информация об объекте на другой части его границы. По этой дополнительной информации и должна осуществляться идентификация искомым величин.

Рассматриваемые в работе задачи интенсивно изучаются в последнее время, они представляют как научный, так и прикладной интерес. Близкие по постановке задачи с регулярными граничными данными рассматривались в работах [3–6] (см. также библиографию в них).

## 1. Постановка задачи

В некоторой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , с границей  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  рассматривается движение высоковязкой несжимаемой теплопроводной жидкости, находящейся в поле силы тяжести под воздействием некоторого внешнего теплового режима. Математическая модель установившегося движения такой жидкости представлена следующей безразмерной краевой задачей в приближении Буссинеска [7]:

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - \text{Ra} T \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$\Delta T = \mathbf{u} \nabla T, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0, \quad (1.4)$$

$$T|_{\Gamma_D} = v, \quad \partial T / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = w, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ;  $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}), \dots, u_n(\mathbf{x}))$  — вектор скорости движения жидкости;  $p = p(\mathbf{x})$  — давление;  $T = T(\mathbf{x})$  — температура;  $v = v(\mathbf{x})$  и  $w = w(\mathbf{x})$  — заданные температурные режимы на  $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  соответственно;  $\text{Ra}$  — число Рэлея;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к  $\Gamma$ ;  $\mathbf{e}_n$  — орт оси  $x_n$ . Далее в качестве  $\Omega$  будут рассматриваться ограниченные области, принадлежащие одному из следующих классов.

*Класс  $C^2$*  [8, с. 67; 9, с. 31].

*Класс*, который мы обозначим через  $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ ; он включает области, удовлетворяющие следующим трем условиям из [9]: условию 1 [9, с. 212] (условие строгой липшицевости), условию 2 [9, с. 212] (условие равномерной ограниченности собственных чисел соответствующей квадратичной формы) и условию  $\mathfrak{R}$  [9, с. 222] (условие сильной разрешимости задачи Пуассона с гладкими правыми частями и смешанными однородными граничными условиями, которые в данном случае соответствуют условиям (1.5)).

В [8, 9, 17] описаны различные подклассы областей, содержащиеся в классах  $C^2$  или  $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ .

Требуется исследовать вопрос о разрешимости краевой задачи (1.1)–(1.5) в некотором слабом смысле, определив принадлежность искомым функций подходящим функциональным пространствам, а также наложив соответствующие условия на исходные данные задачи. Далее по тексту будут использоваться пространства Лебега  $L_m(\Omega)$  и пространства Соболева  $W_m^l(\Omega)$ ,  $m \geq 1$ ,  $l \geq 1$  [8–11], а также их векторные аналоги  $\mathbf{L}_m(\Omega)$  и  $\mathbf{W}_m^l(\Omega)$  соответственно, нормы в которых определяются обычным образом [9, с. 467]. Кроме того, будут использоваться пространства [12, с. 41]

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \mathbf{u}|_{\Gamma} = 0, \text{div } \mathbf{u} = 0\},$$



$$G_1(\Omega) = \{g \in W_2^1(\Omega) : g|_{\Gamma_D} = 0\},$$

$$G_2(\Omega) = \{g \in W_2^2(\Omega) : g|_{\Gamma_D} = 0, \partial g / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0\}.$$

В  $G_1(\Omega)$  и  $G_2(\Omega)$  будут использоваться нормы пространств  $W_2^1(\Omega)$  и  $W_2^2(\Omega)$  соответственно или эквивалентные им нормы. Мера части  $\Gamma_D$  границы  $\Gamma$  считается положительной.

## 2. Определение слабого решения задачи

Для заданных функций  $v \in L_2(\Gamma_D)$  и  $w \in L_2(\Gamma_N)$  под слабым решением краевой задачи (1.1)–(1.5) будем понимать пару функций  $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ , которые удовлетворяют тождествам

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} T \mathbf{e}_n \mathbf{f} dx, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (2.1)$$

$$\int_{\Omega} (\Delta g + \mathbf{u} \nabla g) T dx = \int_{\Gamma_D} v \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_N} w g d\Gamma, \quad \forall g \in G_2(\Omega). \quad (2.2)$$

Классическое решение краевой задачи (1.1)–(1.5) является и ее слабым решением, так как тождество (2.1) является следствием равенства (1.1) (оно определяется аналогично тождеству [12, с. 45–46] для обобщенного решения краевой задачи Стокса (1.1), (1.2), (1.4)), а тождество (2.2) является следствием равенства (1.3) (и получается умножением последнего на функцию  $g \in G_2(\Omega)$  и интегрированием результата по  $\Omega$  с применением второй формулы Грина [13, с. 171] и формулы интегрирования по частям [11, с. 75], а также с учетом граничных значений функций  $\mathbf{u}$ ,  $T$ ,  $g$  и условия несжимаемости (1.2)).

## 3. Вспомогательная задача

Для перехода от исходной краевой задачи (1.1)–(1.5) к соответствующей краевой задаче с однородными граничными условиями рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу для уравнения Лапласа:

$$\Delta y = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$y|_{\Gamma_D} = v, \quad \partial y / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = w. \quad (3.2)$$

Слабым решением краевой задачи (3.1), (3.2) назовем функцию  $y \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} y \Delta \psi dx = \int_{\Gamma_D} v \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Gamma_N} w \psi d\Gamma, \quad \forall \psi \in G_2(\Omega), \quad (3.3)$$

которое получается умножением уравнения (3.1) на функцию  $\psi \in G_2(\Omega)$  и интегрированием результата по  $\Omega$  с применением второй формулы Грина, а также с учетом граничных значений функций  $y$  и  $\psi$ .

**Теорема 1.** *Слабое решение краевой задачи (3.1), (3.2) существует и единственно.*

**Доказательство.** Проведем доказательство методом транспонирования [14, с. 78–80], следуя схеме рассуждений из [15]. Возьмем произвольный элемент  $h \in L_2(\Omega)$ . Пусть  $\psi \in G_1(\Omega)$  будет единственным обобщенным решением сопряженной к (3.1), (3.2) краевой задачи

$$\Delta \psi = h, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.4)$$

$$\psi|_{\Gamma_D} = 0, \quad \partial\psi/\partial\mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0, \quad (3.5)$$

удовлетворяющим тождеству

$$\int_{\Omega} \nabla\psi \nabla\phi \, dx = - \int_{\Omega} h \phi \, dx, \quad \forall \phi \in G_1(\Omega). \quad (3.6)$$

Существование и единственность такого решения следуют из теоремы Лакса — Мильграма [16, с. 386], причем при  $\phi = \psi$  из тождества (3.6) вытекает оценка

$$\|\nabla\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \|h\|_{L_2(\Omega)}, \quad (3.7)$$

где  $c_1$  — константа из неравенства Пуанкаре — Фридрихса [11, с. 116]

$$\|g\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall g \in G_1(\Omega). \quad (3.8)$$

Везде в оценках под  $c_i$  будем понимать положительные константы, не зависящие от оцениваемых величин. Справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть область  $\Omega$  принадлежит классу  $C^2$  или  $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{X}$ , а  $\psi \in G_1(\Omega)$  является обобщенным решением краевой задачи (3.4), (3.5) при каком-нибудь  $h \in L_2(\Omega)$ . Тогда  $\psi \in G_2(\Omega)$ .

*Доказательство.* Для областей класса  $C^2$  доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 4 из [17, гл. 4, § 2]. Для областей класса  $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{X}$  лемма доказывается аналогично теореме 7.1 [11, гл. 2, § 7] с учетом того, что для оператора Лапласа в таких областях справедливо неравенство

$$\|g\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c_2 \|\Delta g\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall g \in G_2(\Omega) \quad (3.9)$$

(второе основное неравенство [9, гл. 3, § 8; 11, гл. 2, § 6]). □

Итак, согласно доказанной лемме,  $\psi \in G_2(\Omega)$ . Тогда  $\psi$  удовлетворяет тождеству

$$\int_{\Omega} \Delta\psi \phi \, dx = \int_{\Omega} h \phi \, dx, \quad \forall \phi \in L_2(\Omega),$$

из которого при  $\phi = \Delta\psi$  следует оценка

$$\|\Delta\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq \|h\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.10)$$

Теперь рассмотрим отображение, которое переводит произвольный элемент  $h \in L_2(\Omega)$  в единственное решение  $\psi \in G_2(\Omega)$  задачи (3.6). В силу оценок (3.7), (3.8) и того, что уравнение (3.6) линейно, данное отображение линейно и непрерывно. На базе такого отображения определим линейный функционал

$$l(h) = \int_{\Gamma_D} v \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_N} w \psi \, d\Gamma. \quad (3.11)$$

Докажем его ограниченность. Из (3.11) следует, что

$$|l(h)| \leq \|v\|_{L_2(\Gamma_D)} \left\| \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right\|_{L_2(\Gamma)} + \|w\|_{L_2(\Gamma_N)} \|\psi\|_{L_2(\Gamma)}. \quad (3.12)$$

Для функции  $g \in G_2(\Omega)$  справедливы соотношения

$$\|\nabla g\|_{L_2(\Omega)}^2 = - \int_{\Omega} g \Delta g \, dx \leq \|g\|_{L_2(\Omega)} \|\Delta g\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \|\Delta g\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)},$$

которые дают неравенство

$$\|\nabla g\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \|\Delta g\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall g \in G_2(\Omega). \quad (3.13)$$

Кроме того, в областях рассматриваемых классов справедливы неравенства [9, с. 79, с. 215]

$$\int_{\Gamma} g^2 d\Gamma \leq \int_{\Omega} (\varepsilon_1 |\nabla g|^2 + c_{\varepsilon_1} g^2) dx, \quad \forall g \in W_2^1(\Omega), \quad \varepsilon_1 > 0,$$

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right)^2 d\Gamma \leq \int_{\Omega} \left(\varepsilon_2 \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + c_{\varepsilon_2} |\nabla g|^2\right) dx, \quad \forall g \in W_2^2(\Omega), \quad \varepsilon_2 > 0,$$

из которых с учетом (3.8), (3.9), (3.13) следуют оценки

$$\|g\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_3 \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall g \in G_1(\Omega), \quad (3.14)$$

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_4 \|\Delta g\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall g \in G_2(\Omega). \quad (3.15)$$

Таким образом, из неравенств (3.8), (3.10), (3.12), (3.14), (3.15) следует ограниченность функционала  $l(h)$

$$|l(h)| \leq (c_4 \|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1 c_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_N)}) \|h\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.16)$$

Итак, равенство (3.11) определяет линейный непрерывный функционал, действующий в  $L_2(\Omega)$ . Записывая тождество (3.3) в виде

$$(y, h) = l(h), \quad \forall h \in L_2(\Omega), \quad (3.17)$$

закключаем, что, согласно теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала, существует единственный элемент  $y \in L_2(\Omega)$  такой, что выполняется (3.17) и для него справедлива оценка

$$\|y\|_{L_2(\Omega)} \leq c_4 \|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1 c_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_N)}, \quad (3.18)$$

которая при  $h = y$  вытекает из (3.16), (3.17). Теорема доказана.  $\square$

#### 4. Переход к однородной задаче

От краевой задачи (1.1)–(1.5) перейдем к рассмотрению соответствующей краевой задачи с однородными граничными условиями для  $T$ . Для этого введем замену  $\tilde{T} = T - \Phi$ , где  $\Phi$  — решение краевой задачи (3.1), (3.2). Тогда однородная задача, соответствующая краевой задаче (1.1)–(1.5), запишется в следующем виде:

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla p - \text{Ra} (\tilde{T} + \Phi) \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.2)$$

$$\Delta \tilde{T} = \mathbf{u} (\nabla \tilde{T} + \nabla \Phi), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0, \quad (4.4)$$

$$\tilde{T}|_{\Gamma_D} = 0, \quad \partial \tilde{T} / \partial \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0. \quad (4.5)$$

Вопрос о разрешимости краевой задачи (1.1)–(1.5) сводится к вопросу о разрешимости краевой задачи (4.1)–(4.5). Под решением этой задачи будем понимать ее обобщенное решение.

## 5. Определение обобщенного решения однородной задачи

Под обобщенным решением однородной краевой задачи (4.1)–(4.5) будем понимать пару функций  $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$ , которые удовлетворяют тождествам

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} (\tilde{T} + \Phi) \mathbf{e}_2 \mathbf{f} dx, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (5.1)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla g + \mathbf{u} g) \nabla \tilde{T} dx = \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla g \Phi dx, \quad \forall g \in G_1(\Omega), \quad (5.2)$$

где  $\Phi$  — слабое решение краевой задачи (3.1), (3.2).

Тождество (5.1) выводится аналогично тождеству (2.1). Тождество (5.2) получается умножением уравнения (4.3) на функцию  $g \in G_1(\Omega)$  и интегрированием результата по  $\Omega$  с применением первой формулы Грина [13, с. 171] и формулы интегрирования по частям с учетом граничных значений функций  $\mathbf{u}$ ,  $\tilde{T}$ ,  $g$  и условия несжимаемости (1.2).

## 6. Априорные оценки обобщенного решения однородной задачи

Получим некоторые априорные оценки обобщенного решения  $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$  краевой задачи (4.1)–(4.5). Подставим  $\mathbf{f} = \mathbf{u}$  в тождество (5.1). Тогда

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \text{Ra} \int_{\Omega} (\tilde{T} + \Phi) \mathbf{e}_2 \mathbf{u} dx \leq \text{Ra} \|\tilde{T} + \Phi\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \text{Ra} \|\tilde{T} + \Phi\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Сокращая полученное неравенство на  $\|\nabla \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}$ , получим

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \text{Ra} \|\tilde{T} + \Phi\|_{L_2(\Omega)}. \quad (6.1)$$

Подставим  $g = \tilde{T}$  в тождество (5.2), дополнительно считая, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \tilde{T} + \mathbf{u} \tilde{T}) \nabla \tilde{T} dx &= \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \mathbf{u} \tilde{T} \nabla \tilde{T} dx = \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \tilde{T} \Phi dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \Phi dx \leq n \int_{\Omega} |\mathbf{u}| |\nabla \tilde{T}| |\Phi| dx \leq n \|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Сокращая полученное неравенство на  $\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)}$ , получим

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq n \|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}. \quad (6.2)$$

**Лемма 2.** Для обобщенного решения  $\mathbf{u}$  задачи Стокса (4.1), (4.2), (4.4), удовлетворяющего тождеству (5.1), при  $\tilde{T} + \Phi \in L_2(\Omega)$  имеет место включение  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$  и справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq c_5 \text{Ra} \|\tilde{T} + \Phi\|_{L_2(\Omega)}. \quad (6.3)$$

**Доказательство.** При  $n = 3$  для ограниченных областей класса  $C^2$  включение  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$  и неравенство (6.3) следуют из теоремы 2 [12, гл. 3, § 5] и теорем вложения [11, гл. 1, § 8]. При  $n = 3$  для ограниченных областей класса  $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{X}$  включение  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$  и неравенство (6.3) следуют из оценки (6.1) и теоремы 3.1 [18]. При  $n = 2$  результаты леммы можно получить аналогичным образом с учетом особенностей теории потенциалов при  $n = 2$  [19].  $\square$

Из неравенств (3.8) и (6.3) вытекает неравенство

$$\|\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_5 \text{Ra} (c_1 \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}). \quad (6.4)$$

Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие на входные данные исходной задачи

$$n c_1 c_5 \text{Ra} (c_4 \|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1 c_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_N)}) < 1. \quad (6.5)$$

Тогда из неравенства (3.18) следует, что

$$n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)} < 1. \quad (6.6)$$

Из неравенств (6.2) и (6.4) выразим  $\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)}$ :

$$\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{n c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}^2}{1 - n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}. \quad (6.7)$$

Из неравенств (6.4) и (6.7) получим

$$\|\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \frac{c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}. \quad (6.8)$$

Итак, установлено, что если функции  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega)$  и  $\tilde{T} \in G_1(\Omega)$  удовлетворяют тождествам (5.1), (5.2), то имеет место включение  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_\infty(\Omega)$  и при выполнении неравенства (6.5) или (6.6) выполняются неравенства (6.7), (6.8).

## 7. Единственность обобщенного решения однородной задачи

Предположим, что краевая задача (4.1)–(4.5) имеет два обобщенных решения  $(\mathbf{u}_1, \tilde{T}_1)$  и  $(\mathbf{u}_2, \tilde{T}_2)$ , удовлетворяющих тождествам (5.1), (5.2). Тогда разность таких решений  $(\mathbf{u}_*, \tilde{T}_*)$ , где  $\mathbf{u}_* = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ ,  $\tilde{T}_* = \tilde{T}_1 - \tilde{T}_2$ , будет удовлетворять следующим тождествам:

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}_*}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} \tilde{T}_* \mathbf{e}_2 \mathbf{f} dx, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (7.1)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla g + \mathbf{u}_1 g) \nabla \tilde{T}_* dx = \int_{\Omega} \mathbf{u}_* \nabla g (\Phi - \tilde{T}_2) dx, \quad \forall g \in G_1(\Omega). \quad (7.2)$$

Неравенства, аналогичные (6.2) и (6.4), можно получить из тождеств (7.1) и (7.2) для  $(\mathbf{u}_*, \tilde{T}_*)$

$$\|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)} \leq n \|\mathbf{u}_*\|_{L_\infty(\Omega)} (\|\tilde{T}_2\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}), \quad (7.3)$$

$$\|\mathbf{u}_*\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_1 c_5 \text{Ra} \|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)}. \quad (7.4)$$

Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие на входные данные исходной задачи:

$$2 n c_1 c_5 \text{Ra} (c_4 \|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1 c_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_N)}) < 1. \quad (7.5)$$

Тогда из неравенства (3.18) следует, что

$$2 n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)} < 1. \quad (7.6)$$

Из неравенств (7.3) и (7.4), учитывая неравенства (3.8) и (6.7), справедливые для  $\tilde{T}_2$ , получим

$$\|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)} \frac{1 - 2 n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}} \leq 0, \quad (7.7)$$

откуда следует, что  $\|\nabla \tilde{T}_*\|_{L_2(\Omega)} = 0$ . Учитывая, что  $\tilde{T}_*|_{\Gamma_D} = 0$ , заключаем, что  $\tilde{T}_* = 0$  для почти всех  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Тогда из тождества (7.1) при  $\mathbf{f} = \mathbf{u}_*$  следует, что  $\|\nabla \mathbf{u}_*\|_{L_2(\Omega)} = 0$ . Воспользовавшись условием  $\mathbf{u}_*|_{\Gamma} = 0$ , получаем, что  $\mathbf{u}_* = 0$  для почти всех  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Отсюда следует единственность решения.

Итак, при выполнении неравенства (7.5) или (7.6) краевая задача (4.1)–(4.5) может иметь не более одного обобщенного решения  $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$ .

## 8. Доказательство существования обобщенного решения однородной задачи

Докажем существование обобщенного решения  $(\mathbf{u}, \tilde{T})$  краевой задачи (4.1)–(4.5) в пространстве  $\mathbf{H}(\Omega) \times G_1^*(\Omega)$ , где

$$G_1^*(\Omega) = \{g \in G_1(\Omega) : \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)} \leq n c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}^2 / (1 - n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)})\}.$$

При этом считаем выполненным условие (6.5) или (6.6).

Множество  $\mathbf{H}(\Omega) \times G_1^*(\Omega)$  является замкнутым подмножеством в банаховом пространстве  $\mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$  и поэтому является полным метрическим пространством с естественным расстоянием, индуцированным нормой пространства  $\mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$ .

Введем оператор

$$A : G_1^*(\Omega) \ni \eta \rightarrow A\eta = \zeta \in G_1^*(\Omega),$$

действующий следующим образом. Сначала по элементу  $\eta \in G_1^*(\Omega)$  определяется элемент  $\xi \in \mathbf{H}(\Omega)$ , удовлетворяющий равенству

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} dx = \text{Ra} \int_{\Omega} (\eta + \Phi) \mathbf{e}_2 \mathbf{f} dx, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{H}(\Omega). \quad (8.1)$$

Затем по элементу  $\xi$  определяется элемент  $\zeta \in G_1^*(\Omega)$ , удовлетворяющий равенству

$$\int_{\Omega} (\nabla g + \xi g) \nabla \zeta dx = \int_{\Omega} \xi \nabla g \Phi dx, \quad \forall g \in G_1(\Omega). \quad (8.2)$$

Покажем, что оператор  $A$  определен корректно. Действительно, по заданному элементу  $\eta \in G_1^*(\Omega)$  из равенства (8.1) однозначно определяется [11, с. 254] элемент  $\xi \in \mathbf{H}(\Omega)$ , так как  $\eta + \Phi \in L_2(\Omega)$ , причем для него справедлива оценка

$$\|\xi\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq c_5 \text{Ra} (c_1 \|\nabla \eta\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}). \quad (8.3)$$

Если элемент  $\xi$  задан, то однозначная разрешимость задачи (8.2) в  $G_1(\Omega)$  следует из теоремы Лакса — Мильграма [16, с. 386]. Действительно, правая часть тождества (8.2) определяет линейную форму на  $G_1(\Omega)$

$$L(g) = \int_{\Omega} \xi \nabla g \Phi dx,$$

а левая часть определяет билинейную форму

$$B(\zeta, g) = \int_{\Omega} (\nabla g + \xi g) \nabla \zeta dx,$$

причем она коэрцитивна и ограничена на  $G_1(\Omega) \times G_1(\Omega)$ ,

$$B(g, g) = \int_{\Omega} (\nabla g + \boldsymbol{\xi} g) \nabla g \, dx = \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

$$|B(\zeta, g)| \leq (1 + n c_1 \|\boldsymbol{\xi}\|_{L_{\infty}(\Omega)}) \|\nabla g\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \zeta\|_{L_2(\Omega)}.$$

При этом для  $\zeta$  справедлива оценка (аналогичная оценке (6.2)):

$$\|\nabla \zeta\|_{L_2(\Omega)} \leq n \|\boldsymbol{\xi}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}. \quad (8.4)$$

При помощи оценок (8.3) и (8.4) нетрудно убедиться, что оператор  $A$  на самом деле действует в  $G_1^*(\Omega)$ . Покажем теперь, что оператор  $A$  является сжимающим. Имеем

$$\begin{aligned} \|\nabla A\eta_1 - \nabla A\eta_2\|_{L_2(\Omega)} &= \|\nabla \zeta_1 - \nabla \zeta_2\|_{L_2(\Omega)} \leq n \|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\|_{L_{\infty}(\Omega)} (\|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}) \\ &\leq n c_1 c_5 \text{Ra} (\|\zeta_2\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}) \|\nabla \eta_1 - \nabla \eta_2\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq n c_1 c_5 \text{Ra} \left( \frac{n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}^2}{1 - n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \right) \|\nabla \eta_1 - \nabla \eta_2\|_{L_2(\Omega)} = q \|\nabla \eta_1 - \nabla \eta_2\|_{L_2(\Omega)}, \\ q &= \frac{n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}. \end{aligned}$$

Если выполнено неравенство (7.5) или (7.6), то  $0 < q < 1$  и оператор  $A$  является сжимающим. Тогда, согласно теореме Банаха о неподвижной точке [20, с. 88], существуют единственный элемент  $\tilde{T} \in G_1^*(\Omega)$  и соответствующий ему элемент  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\Omega)$  такие, что  $A\tilde{T} = \tilde{T}$ , причем пара  $(\mathbf{u}, \tilde{T})$  доставляет обобщенное решение краевой задаче (4.1)–(4.5). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**Теорема 2.** *Если исходные данные краевой задачи (1.1)–(1.5) таковы, что  $v \in L_2(\Gamma_D)$ ,  $w \in L_2(\Gamma_N)$  и выполняется неравенство (7.5) или (7.6), то ее слабое решение  $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ , удовлетворяющее тождествам (2.1), (2.2), существует и единственно. Кроме того,  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$ , а компонента  $T$  слабого решения может быть представлена в виде суммы  $T = \tilde{T} + \Phi$ , состоящей из компоненты  $\tilde{T} \in G_1(\Omega)$  обобщенного решения  $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_1(\Omega)$  краевой задачи (4.1)–(4.5) с однородными граничными условиями для  $T$  и слабого решения  $\Phi \in L_2(\Omega)$  вспомогательной задачи (3.1), (3.2) с неоднородными граничными условиями. Для слабого решения и его составляющих справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)} &\leq c_4 \|v\|_{L_2(\Gamma_D)} + c_1 c_3 \|w\|_{L_2(\Gamma_N)}, \\ \|\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} &\leq c_1 \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)}, \\ \|T\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}, \\ \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{n c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}^2}{1 - n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}, \\ \|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} &\leq n \|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}, \\ \|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)} &\leq \frac{c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

С вычислительной точки зрения важно, что сжимающий оператор обеспечивает сходимость соответствующих последовательных приближений к неподвижной точке со скоростью геометрической прогрессии:

$$T_{k+1} = A T_k, \quad \|T_k - \tilde{T}\|_{G_1(\Omega)} \leq \frac{q^k}{1 - q} \|T_1 - T_0\|_{G_1(\Omega)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $T_0$  — произвольное начальное приближение из  $G_1^*(\Omega)$ .

### 9. Свойства гладкости слабого решения при гладких исходных данных

Краевую задачу (3.1), (3.2) с помощью замены искомой функции  $\tilde{y} = y - \theta$  можно преобразовать к следующей краевой задаче:

$$\Delta \tilde{y} = -\Delta \theta, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9.1)$$

$$\tilde{y}|_{\Gamma_D} = v - \theta|_{\Gamma_D}, \quad \partial \tilde{y} / \partial n|_{\Gamma_N} = w - \partial \theta / \partial n|_{\Gamma_N}. \quad (9.2)$$

Исследуем сначала гладкость слабого решения краевой задачи (3.1), (3.2), когда  $w \in L_2(\Gamma_N)$  и  $\theta \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\theta|_{\Gamma_D} = v$ .

Под решением краевой задачи (9.1), (9.2) теперь будем понимать ее обобщенное решение. Обобщенным решением краевой задачи (9.1), (9.2) назовем функцию  $\tilde{y} \in G_1(\Omega)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{y} \nabla g \, dx = - \int_{\Omega} \nabla \theta \nabla g \, dx + \int_{\Gamma_N} w g \, d\Gamma, \quad \forall g \in G_1(\Omega). \quad (9.3)$$

Ясно, что обобщенное решение задачи (9.1), (9.2) является решением задачи (3.1), (3.2) в слабом смысле и, наоборот, достаточно гладкое слабое решение задачи (3.1), (3.2) является обобщенным решением задачи (9.1), (9.2).

Существование и единственность обобщенного решения краевой задачи (9.1), (9.2) доказываются с помощью теоремы Лакса — Мильграма, причем при  $g = \tilde{y}$  из (9.3) и вложения  $W_2^1(\Omega)$  в  $L_2(\Gamma_N)$  [11, с. 85] вытекает следующая оценка:

$$\|\nabla \tilde{y}\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\nabla \theta\|_{L_2(\Omega)} + c_6 \|w\|_{L_2(\Gamma_N)},$$

откуда, возвращаясь к функции  $y$ , получаем, что  $y \in W_2^1(\Omega)$ ,  $y|_{\Gamma_D} = v$  и

$$\|\nabla y\|_{L_2(\Omega)} \leq 2 \|\nabla \theta\|_{L_2(\Omega)} + c_6 \|w\|_{L_2(\Gamma_N)}.$$

Таким образом, в краевой задаче (4.1)–(4.5) можно считать  $\Phi \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\Phi|_{\Gamma_D} = v$ . Из теоремы 2 следует, что  $\tilde{T} \in G_1(\Omega)$ , поэтому  $\tilde{T} + \Phi = T \in W_2^1(\Omega)$ . Тогда из леммы 1 и единственности обобщенного решения краевой задачи (4.1)–(4.5) вытекает, что  $\tilde{T} \in G_2(\Omega)$ .

Под решением краевой задачи (4.1)–(4.5) теперь будем понимать ее сильное решение. Сильным решением краевой задачи (4.1)–(4.5) назовем пару функций  $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_2(\Omega)$ , которые удовлетворяют тождеству (5.1) и тождеству

$$\int_{\Omega} \Delta \tilde{T} g \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{u} (\nabla \tilde{T} + \nabla \Phi) g \, dx, \quad \forall g \in L_2(\Omega). \quad (9.4)$$

При  $g = \Delta \tilde{T}$  из (9.4) получается оценка

$$\|\Delta \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} \leq n \|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)} (\|\nabla \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla \Phi\|_{L_2(\Omega)}),$$

из которой с учетом (3.13), (6.8) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|\Delta \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{n \|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|\nabla \Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - n c_1 \|\mathbf{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)}}, \\ \|\Delta \tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{n c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - 2 n c_1 c_5 \text{Ra} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}. \end{aligned}$$



**Теорема 3.** Если исходные данные краевой задачи (1.1)–(1.5) таковы, что  $w \in L_2(\Gamma_N)$ ,  $\theta \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\theta|_{\Gamma_D} = v$  и выполняется неравенство (7.5) или (7.6), то ее слабое решение  $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ , удовлетворяющее тождествам (2.1), (2.2), существует, единственно и обладает дополнительной гладкостью:  $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{L}_\infty(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$ . Кроме того, компонента  $T$  слабого решения может быть представлена в виде суммы  $T = \tilde{T} + \Phi$ , состоящей из компоненты  $\tilde{T} \in G_2(\Omega)$  сильного решения  $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_2(\Omega)$  краевой задачи (4.1)–(4.5) с однородными граничными условиями и обобщенного решения  $\Phi \in W_2^1(\Omega)$  вспомогательной задачи (3.1), (3.2) с неоднородными граничными условиями. Для слабого решения и его составляющих справедливы оценки (8.5), а также оценки

$$\begin{aligned} \|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)} &\leq 2\|\nabla\theta\|_{L_2(\Omega)} + c_6\|w\|_{L_2(\Gamma_N)}, \\ \|\nabla T\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|\nabla\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}, \\ \|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{nc_5\text{Ra}\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - 2nc_1c_5\text{Ra}\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}}, \\ \|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{n\|\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}}{1 - nc_1\|\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega)}}, \\ \|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} &\leq n\|\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega)}(\|\nabla\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla\Phi\|_{L_2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Исследуем теперь гладкость слабого решения краевой задачи (3.1), (3.2), когда  $\theta \in W_2^2(\Omega)$ ,  $\theta|_{\Gamma_D} = v$ ,  $\partial\theta/\partial\mathbf{n}|_{\Gamma_N} = w$ .

Под решением краевой задачи (9.1), (9.2) теперь будем понимать ее сильное решение. Сильным решением краевой задачи (9.1), (9.2) назовем функцию  $\tilde{y} \in G_2(\Omega)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \Delta\tilde{y} g dx = - \int_{\Omega} \Delta\theta g dx, \quad \forall g \in L_2(\Omega). \quad (9.6)$$

Как уже говорилось выше, в силу того что  $\Delta\theta \in L_2(\Omega)$ , краевая задача (9.1), (9.2) однозначно разрешима в  $G_2(\Omega)$ .

Ясно, что сильное решение задачи (9.1), (9.2) является обобщенным решением этой задачи и является слабым решением задачи (3.1), (3.2) и, наоборот, достаточно гладкое слабое решение задачи (3.1), (3.2) или достаточно гладкое обобщенное решение задачи (9.1), (9.2) являются сильным решением задачи (9.1), (9.2).

Из тождества (9.6) при  $g = \Delta\tilde{y}$  получается следующая оценка:

$$\|\Delta\tilde{y}\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\Delta\theta\|_{L_2(\Omega)},$$

откуда, возвращаясь к функции  $y$ , можно получить

$$\|\Delta y\|_{L_2(\Omega)} \leq 2\|\Delta\theta\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, в краевой задаче (4.1)–(4.5) можно считать  $\Phi \in W_2^2(\Omega)$ ,  $\Phi|_{\Gamma_D} = v$ ,  $\partial\Phi/\partial\mathbf{n}|_{\Gamma_N} = w$ .

**Теорема 4.** Если исходные данные краевой задачи (1.1)–(1.5) таковы, что  $\theta \in W_2^2(\Omega)$ ,  $\theta|_{\Gamma_D} = v$ ,  $\partial\theta/\partial\mathbf{n}|_{\Gamma_N} = w$  и выполняется неравенство (7.5) или (7.6), то ее слабое решение  $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{H}(\Omega) \times L_2(\Omega)$ , удовлетворяющее тождествам (2.1), (2.2), существует, единственно и обладает дополнительной гладкостью:  $(\mathbf{u}, T) \in \mathbf{L}_\infty(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$ . Кроме того, компонента  $T$  слабого решения может быть представлена в виде суммы  $T = \tilde{T} + \Phi$ , состоящей из компоненты  $\tilde{T} \in G_2(\Omega)$  сильного решения  $(\mathbf{u}, \tilde{T}) \in \mathbf{H}(\Omega) \times G_2(\Omega)$  краевой задачи (4.1)–(4.5)

с однородными граничными условиями и сильного решения  $\Phi \in W_2^2(\Omega)$  вспомогательной задачи (3.1), (3.2) с неоднородными граничными условиями. Для слабого решения и его составляющих справедливы оценки (8.5), (9.5), а также оценки

$$\begin{aligned}\|\Delta\Phi\|_{L_2(\Omega)} &\leq 2\|\Delta\theta\|_{L_2(\Omega)}, \\ \|\Delta T\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|\Delta\tilde{T}\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\Phi\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

## 10. Замечание о гладкости компоненты $\mathbf{u}$ в теоремах 2–4

В теоремах 2–4 отражена в основном зависимость гладкости компоненты  $T$  решения  $(\mathbf{u}, T)$  задачи (1.1)–(1.5) от гладкости исходных данных. С повышением гладкости компоненты  $T$  повышается и гладкость компоненты  $\mathbf{u}$ . Однако здесь нет прямой пропорциональной зависимости, поскольку на свойства гладкости компоненты  $\mathbf{u}$  сильное влияние оказывает регулярность границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ . Отметим некоторые результаты в этом направлении.

Из результатов [12, гл. 3, § 5] следует, что для областей класса  $C^2$  компонента  $\mathbf{u}$  решения  $(\mathbf{u}, T)$  обладает большей дополнительной гладкостью, чем указано в теоремах 2–4. Именно, когда  $T \in W_2^l(\Omega)$ ,  $l = 0, 1, 2$ , то  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^{l+2}(\Omega)$ . Поэтому для областей этого класса можно дополнительно считать, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$  в теореме 2,  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^3(\Omega)$  в теореме 3,  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^4(\Omega)$  в теореме 4.

Из результатов [18] следует, что для областей класса  $\mathfrak{L}\mathfrak{M}\mathfrak{A}$  компоненту  $\mathbf{u}$  решения  $(\mathbf{u}, T)$  в теоремах 2–4 можно считать обладающей дополнительной гладкостью:  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^{3/2}(\Omega)$ . Однако если область этого класса является выпуклым многоугольником (при  $n = 2$ ) или выпуклым многогранником (при  $n = 3$ ), то в теоремах 2–4 можно считать, что  $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$  [21, 22].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби : Тр. междунар. семинара. 2005. Екатеринбург: УрГУ, 2006. Т. 2. С. 82–91.
2. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 88–97.
3. **Алексеев Г.В.** Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнения тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.
4. **Алексеев Г.В., Смышляев А.Б., Терешко Д.А.** Разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса при смешанных краевых условиях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 1. С. 66–80.
5. **Алексеев Г.В.** Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
6. **Алексеев Г.В.** Разрешимость краевой задачи для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 9, № 1. С. 13–27.
7. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. New York: Dover Publications, 1981.
8. **Adams R.A.** Sobolev spaces. New York: Acad. Press, 1975.
9. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
10. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
11. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
12. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 1961.
13. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
14. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

15. **Lukaszewicz G., Rojas-Medar M., Santos M.** Stationary micropolar fluid flows with boundary data in  $L^2$  // J. Math. Anal. Appl. 2002. Vol. 271, no. 1. P. 91–107.
16. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985.
17. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
18. **Brown R.M., Shen Z.** Estimates for the Stokes operator in Lipschitz domains // Indiana Univ. Math. J. 1995. Vol. 44, no. 4. P. 1183–1206.
19. **Brown R.M., Perry P.A., Shen Z.** On the dimension of the attractor for the non-homogenous Navier–Stokes equations in non-smooth domains // Indiana Univ. Math. J. 2000. Vol. 49, no. 1. P. 81–112.
20. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
21. **Kellogg R.B., Osborn J.E.** A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon // J. Func. Anal. 1976. Vol. 21, no. 4. P. 397–431.
22. **Dauge M.** Stationary Stokes and Navier–Stokes systems on two- or three-dimensional domains with corners. Part I: Linearized equations // SIAM J. Math. Anal. 1989. Vol. 20, no. 1. P. 74–97.

Поступила 16.11.2007

УДК 517.982.256

**РАЗДЕЛИТЕЛИ НАСЛЕДСТВЕННО ДУГООБРАЗНО СВЯЗНЫХ  
КОНТИНУУМОВ, ДОПУСКАЮЩИХ ЧЕБЫШЕВСКИЕ СИСТЕМЫ  
КОМПЛЕКСНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ<sup>1</sup>**

**В. А. Кощев**

Строится разложение наследственно дугообразно связного континуума, не содержащего открытых дуг и  $\theta$ -кривых, на два подконтинуума со связным пересечением, один из которых имеет в качестве разделителя дугу или простую замкнутую кривую. Результаты имеют отношение к задаче, называемой гипотезой Овердека.

В работе продолжают исследования, начатые в [1] и относящиеся к задаче, известной как гипотеза Овердека [2], касающейся существования систем комплексных непрерывных функций с условием Хаара.

Дугообразно связный континуум, всякий подконтинуум которого также дугообразно связан, называем *наследственно дугообразно связным* [1].

*Дугой*, как обычно, называем гомеоморфный образ отрезка  $[0, 1]$  вещественной оси. Дугу  $\gamma$  с концами  $a, b$  обозначаем через  $\gamma = [a, b]_\gamma = h([0, 1])$ ,  $h(0) = a$ ,  $h(1) = b$ , где  $h$  — гомеоморфизм. Дуга упорядочивается (ориентируется) по правилу:  $c < d \Leftrightarrow h^{-1}(c) < h^{-1}(d)$  ( $c, d \in [a, b]_\gamma$ ). Множества  $\gamma \setminus \{a, b\}$ ,  $\gamma \setminus \{a\}$ ,  $\gamma \setminus \{b\}$  обозначаем через  $(a, b)_\gamma$ ,  $(a, b]_\gamma$ ,  $[a, b)_\gamma$  соответственно и, допуская вольность речи, также иногда называем *дугой* там, где это не может вызвать недопониманий. Порядок, в котором записаны концы дуги, указывает на ее ориентацию. Поддуга дуги  $\gamma$  с концами  $c, d \in [a, b]_\gamma$ ,  $c < d$ , может быть обозначена  $[c, d]_\gamma$ . Гомеоморфный образ единичной окружности  $|z| = 1$  комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  называется *простой замкнутой кривой*. Область  $D$  в комплексном одномерном проективном пространстве  $\mathbb{C}P^1$ , граница  $\text{Fr } D$  которой представляет собой простую замкнутую кривую, называется *диском* или *открытым диском*, а ее замыкание — *замкнутым диском*.

Пусть заданы множество  $A \subset \mathbb{C}P^1$  и дуга  $\gamma = [a, b]_\gamma \subset A$ . Поскольку на дуге определено направление от  $a$  к  $b$ , то имеют смысл выражения “слева от дуги”, “справа от дуги”, “левая (правая) сторона дуги” и т.п. Дугу  $\gamma$  назовем открытой слева (справа) в  $A \subset \mathbb{C}P^1$ , если существует диск  $D \subset \mathbb{C}P^1$ ,  $A \cap D = \emptyset$ ,  $\gamma \subset \text{Fr } D$ , примыкающий к  $\gamma$  с левой стороны (с правой). Интуитивно очевидные понятия стороны ориентированной дуги или простой замкнутой кривой из  $\mathbb{C}P^1$  обоснованы в [1] с использованием известных теорем о продолжении гомеоморфизмов и изотопий. Для дуги  $\gamma = [a, b]_\gamma \subset A \subset \mathbb{C}P^1$ , открытой и слева, и справа, множество  $(a, b)_\gamma$  открыто в  $A$ . В этом случае  $\gamma$  называется открытой дугой множества  $A$ .

Пусть  $\gamma = [a, b]_\gamma \subset \mathbb{C}P^1$ ,  $c \in (a, b)_\gamma$ . В [1] введены в рассмотрение окрестности точки  $c$ , названные правильными по отношению к дуге  $\gamma$  и образующие базис окрестностей в этой точке. Такая окрестность характеризуется тем, что она представляет собой открытый диск  $D \ni c$ , граница которого имеет с  $\gamma$  две и только две общие точки, и  $D \setminus \gamma$  является объединением двух связных компонент, также являющихся дисками. Будем говорить, что последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}P^1 \setminus \gamma$  сходится к  $c$  слева (с левой стороны) по отношению к дуге  $\gamma$ , если для любой правильной по отношению к  $\gamma$  окрестности  $G$  точки  $c$  найдется номер  $N \in \mathbb{N}$  такой, что

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00320) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-1071.2008.1).

для всех  $n \geq N$   $x_n$  лежит в компоненте  $G \setminus \gamma$ , примыкающей к  $\gamma$  слева. Аналогичным образом определяются понятия правосторонней и двусторонней сходимости последовательности к неконцевой точке дуги.

Метрику в  $\mathbb{C}P^1$  обозначим через  $d(\cdot, \cdot)$ .

Основным инструментом при изучении компактов, допускающих чебышевские системы комплексных непрерывных функций, являются уплотнения в  $\mathbb{C}P^1$ , т.е. непрерывные взаимно однозначные отображения, порождаемые конечными наборами точек компакта  $Q$  и определенные на дополнениях к этим наборам. Если система состоит из  $n > 2$  функций, заданных на  $Q$ , то потребуется набор

$$T = R \cup P = (q_1, q_2; p_1, \dots, p_{n-2})$$

из  $n$  попарно различных точек компакта  $Q$  для задания уплотнения

$$\xi(T; \cdot) : Q \setminus T \rightarrow \mathbb{C}P^1.$$

Меняя наборы, мы получим уплотнения с разными областями определения. Если рассмотреть некоторое семейство таких уплотнений и множество, на котором все отображения этого семейства определены, то имеет место непрерывная зависимость отображений от  $T$ . Свойства и соответствующие формулы этих отображений можно найти в [1]. Формализация интуитивно понятного выражения “непрерывно перевести набор точек  $T_0$  в набор  $T_1$ ”, использовавшегося в [3], в работе [1] осуществляется через понятие изотопии набора точек (определяющего уплотнение) как изотопии частично упорядоченного конечного подмножества компакта  $Q$ .

Топологическое пространство  $X$  называется неразложимым, если оно связно и не допускает представления в виде объединения двух замкнутых связных множеств, отличных от  $X$  [5, § 48, V]. Как известно, дугообразно связный метрический континуум разложим [5, § 48, VI, теор. 7].

**Лемма 1.** *Наследственно дугообразно связный метрический континуум  $Q$ , не содержащий открытых дуг и  $\theta$ -кривых, допускает разложение на два не совпадающих с  $Q$  подконтинуума, пересечение которых связно.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Континуум  $Q$  разложим. Пусть  $U \cup V = Q$  — произвольное его разложение. Если  $U \cap V$  несвязно и является объединением конечного числа связных компонент, то, добавляя к  $U$  конечное число дуг из  $V$ , соединяющих компоненты, получим требуемое разложение, так как  $Q$  не содержит открытых дуг.

Пусть число связных компонент  $U \cap V$  бесконечно. Разбиение  $U \cap V$  на связные компоненты полунепрерывно сверху [5, § 47, VI, теор. 1]. Рассмотрим полунепрерывное сверху разбиение  $Q$  на связные компоненты  $U \cap V$  и отдельные точки дополнения  $Q \setminus (U \cap V)$ . Пространство  $Q'$  такого разбиения является метрическим континуумом [5, § 43, IV, теор. 1], проекция  $P : Q \rightarrow Q'$  непрерывна и монотонна [5, § 46, I, теор. 9], т.е. прообраз каждого связного множества связен. Положим  $A = P(U)$ ,  $B = P(V)$ ,  $X = A \cap B$ . Элементы множества  $X$  являются связными компонентами  $A \cap B$ . Заметим, что  $\dim X = 0$  (см. [5, § 46, V, теор. 3; § 47, II, теор. 2]). Пространство  $Q'$  наследственно дугообразно связно. В самом деле, пусть  $K'$  — континуум из  $Q'$ ,  $a', b' \in K'$ ,  $a \in P^{-1}(a')$ ,  $b \in P^{-1}(b')$ . В континууме  $P^{-1}(K')$  существует дуга  $\gamma = [a, b]_\gamma$ . Тогда  $P(\gamma) \subset K'$  и множество  $P(\gamma)$  содержит дугу, соединяющую  $a'$  и  $b'$  (см. [5, § 50, II, теор. 1, 2; I, теор. 2]). Заметим, что  $Q'$ , так же, как и  $Q$ , не содержит открытых дуг и  $\theta$ -кривых.

Рассмотрим произвольное разложение континуума  $B = B_1 \cup B_2$ . Предположим вначале, что  $B_1 \cap B_2$  связно. Если  $B_1 \cap B_2 \cap A \neq \emptyset$ , положим  $A' = A \cup B_1$ ,  $B' = A \cup B_2$  и покажем, что  $Q' = A' \cup B'$  является разложением  $Q'$ . Заметим, что  $A' \setminus B' = B_1 \setminus (A \cup B_2) = (B_1 \setminus B_2) \setminus A = (B_1 \setminus B_2) \setminus (A \cap B) \neq \emptyset$ , так как  $\dim A \cap B = 0$ . По тем же соображениям  $B' \setminus A' \neq \emptyset$ . Так как  $B_1 \cap A \neq \emptyset \neq B_2 \cap A$ , то  $A', B'$  связны и  $A' \cap B' = A \cup (B_1 \cap B_2)$  также связно в силу предположения  $B_1 \cap B_2 \cap A \neq \emptyset$ . Пусть  $B_1 \cap B_2 \cap A = \emptyset$ . Если  $B_1 \cap A = \emptyset$ , положим  $A' =$

$A \cup B_2$ ,  $B' = B_1$ . Очевидно,  $B_2 \cap A \neq \emptyset$ , поэтому  $A'$  — континуум,  $A' \cap (B_1 \setminus B_2) = \emptyset$ , т.е.  $A' \neq Q'$ ,  $B' \setminus A' = B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset$ . Если  $B_2 \cap A = \emptyset$ , полагаем  $A' = A \cup B_1$ ,  $B' = B_2$  и рассуждаем аналогичным образом. Пусть  $B_1 \cap A \neq \emptyset \neq B_2 \cap A$  в предположении, что  $B_1 \cap B_2 \cap A = \emptyset$ . Положим  $A' = A \cup B_1$ ,  $B' = A \cup B_2$ . Нетрудно проверить, что  $A' \neq Q' \neq B'$ ,  $A' \setminus B' \neq \emptyset \neq B' \setminus A'$ , учитывая равенство  $\dim(A \cap B) = 0$ . Множество  $A' \cap B' = A \cup (B_1 \cap B_2)$  состоит из двух связных компонент. Пусть  $u \in A \cap B_1$ ,  $v \in B_1 \cap B_2$ ,  $\gamma = [u, v]_\gamma \subset B_1$ . Так как  $Q'$  не содержит открытых дуг, то, полагая  $A'' = A' = A \cup B_1$ ,  $B'' = B' \cup \gamma = A \cup B_2 \cup \gamma$ , получим разложение  $Q' = A'' \cup B''$ , у которого  $A'' \cap B'' = A \cup (B_1 \cap B_2) \cup \gamma$  связно.

Перейдем к рассмотрению случая, когда  $B_1 \cap B_2$  несвязно. Пусть  $y_1, y_2$  лежат в разных компонентах  $B_1 \cap B_2$ ,  $z_1 \in B_1 \setminus B_2$ ,  $z_1 \notin A$ ,  $z_2 \in B_2 \setminus B_1$ ,  $z_2 \notin A$ . Если найдутся две различные точки  $w_1, w_2 \in B_1 \cap B_2 \cap A$ , то можно провести дуги

$$l_1 = [w_1, z_1]_{l_1} \subset B_1, \quad m_1 = [w_2, z_1]_{m_1} \subset B_1, \quad l_2 = [w_1, z_2]_{l_2} \subset B_2,$$

$$m_2 = [w_2, z_2]_{m_2} \subset B_2, \quad \delta = [w_1, w_2]_\delta \subset A,$$

объединение которых  $l_1 \cup m_1 \cup l_2 \cup m_2 \cup \delta \subset Q'$  содержит  $\theta$ -кривую. Таким образом, можно считать, что  $B_1 \cap B_2 \cap A$  содержит не более одной точки. Пусть  $B_1 \cap B_2 \cap A = x \in X = A \cap B$ . Одно из двух множеств  $B_1 \cap A \subset X$  или  $B_2 \cap A \subset X$  содержит бесконечно много точек. Можно предположить, не ограничивая общности доказательства, что таковым является  $B_2 \cap A$ . Тогда найдется точка  $x' \in B_2 \cap A$ ,  $x' \neq x$ . Рассмотрим дуги

$$l_1 = [x, y_1]_{l_1} \subset B_1, \quad m_1 = [x, y_2]_{m_1} \subset B_1, \quad l_2 = [x', y_1]_{l_2} \subset B_2,$$

$$m_2 = [x', y_2]_{m_2} \subset B_2, \quad \delta = [x, x']_\delta \subset A.$$

Их объединение  $l_1 \cup m_1 \cup l_2 \cup m_2 \cup \delta$  содержит  $\theta$ -кривую. Если окажется, что  $x = y_1$  или  $x = y_2$ , то одна из дуг  $l_1$  или  $l_2$  вырождается в точку и может быть опущена. Пусть  $B_1 \cap B_2 \cap A = \emptyset$  и  $B_1 \cap A \neq \emptyset \neq B_2 \cap A$ . Если  $w_1 \in B_1 \cap A$ , то  $w_1 \in B_1 \setminus B_2$ . Аналогичным образом,  $w_2 \in B_2 \cap A$  влечет за собой, что  $w_2 \in B_2 \setminus B_1$ . Соединяя  $w_1$  с  $y_1$  и  $y_2$  дугами из  $B_1$ ,  $w_2$  с  $y_1$  и  $y_2$  дугами из  $B_2$ , получим объединение дуг, которое вместе с дугой из  $A$  с концами  $w_1, w_2$  содержит  $\theta$ -кривую. Остается случай, когда одно из множеств  $B_1 \cap A$  или  $B_2 \cap A$  пусто. Пусть, например,  $B_1 \cap A = \emptyset$ . Полагая  $A' = A \cup B_2$ ,  $B' = B = B_1 \cup B_2$ , получим  $Q' = A' \cup B'$ ,  $B' \setminus A' = B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset$ ,  $A' \setminus B' = A \setminus B \neq \emptyset$ ,  $A' \cap B' = B_2$  связно, т.е.  $Q' = A' \cup B'$  является искомым разложением.

Итак, доказано, что существует разложение  $Q' = A' \cup B'$ , для которого  $A' \cap B'$  связно. Принимая во внимание монотонность проекции  $P : Q \rightarrow Q'$ , получаем разложение

$$Q = (P^{-1}(A')) \cup (P^{-1}(B')),$$

у которого

$$(P^{-1}(A')) \cap (P^{-1}(B')) = P^{-1}(A' \cap B')$$

связно.

Пусть  $A \subset \mathbb{C}P^1$  и  $\omega$  — простая замкнутая кривая из  $A$ . Скажем, что  $A$  существенно разделяется простой замкнутой кривой  $\omega$ , если обе связные компоненты  $\mathbb{C}P^1 \setminus \omega$  пересекают множество  $A$ .

Пусть далее  $\gamma = [a, b]_\gamma$  — дуга из  $A \subset \mathbb{C}P^1$ . Будем говорить, что дуга  $\gamma$  существенно разделяет множество  $A$ , если существует дуга  $\Gamma = [a, b]_\Gamma$  такая, что  $(a, b)_\Gamma \subset \mathbb{C}P^1 \setminus A$ , и обе связные компоненты  $\mathbb{C}P^1 \setminus (\gamma \cup \Gamma)$  пересекают множество  $A$ .

**Теорема 1.** Пусть  $Q$  — одномерный наследственно дугообразно связный метрический континуум, не содержащий открытых дуг и  $\theta$ -кривых и допускающий чебышевскую систему комплексных непрерывных функций порядка  $n > 2$ . Тогда для любого разложения  $Q = A \cup B$

на два не совпадающих с  $Q$  подконтинуума  $A, B$ , пересечение которых связно, и для любого набора точек  $T \subset B \setminus A$ , определяющего уплотнение

$$\xi(T; \cdot) : Q \setminus T \rightarrow \mathbb{C}P^1,$$

найдутся континуумы  $A', B'$ ,  $A \subseteq A' \subset Q$ ,  $T \cap A' = \emptyset$ ,  $B \subseteq B' \subset Q$ ,  $B' \neq Q$ , пересечение  $A' \cap B'$  которых также связно и  $\xi(T; A')$  существенно разделяется простой замкнутой кривой или дугой из  $\xi(T; A')$  с концами в  $\xi(T; A' \setminus B')$ .

**Доказательство.** Пусть континуумы  $A, B$  и набор точек  $T \subset B \setminus A$  удовлетворяют условиям теоремы. Уплотнение  $\xi(T; \cdot)$ , рассматриваемое на  $A$ , является вложением  $A$  в  $\mathbb{C}P^1$ . Если  $\mathbb{C}P^1 \setminus \xi(T; A)$  состоит из конечного числа связных компонент, являющихся дисками, то в  $\xi(T; A \setminus B)$ , а следовательно, и в  $Q$ , найдется открытая дуга, что противоречит условию. Пусть множество компонент  $\mathbb{C}P^1 \setminus \xi(T; A)$  бесконечно и все эти компоненты являются дисками. Тогда найдется дуга  $\gamma = [a, b]_\gamma$ ,  $a \in A \cap B$ ,  $(a, b)_\gamma \subset B \setminus (A \cup T)$ , которая уплотняется отображением  $\xi(T; \cdot)$  в один из дисков  $\mathbb{C}P^1 \setminus \xi(T; A)$ . Граница этого диска будет существенно разделять  $\xi(T; A') = \xi(T; A \cup \gamma)$ . Континуумы  $A' = A \cup \gamma$ ,  $B' = B$  будут искомыми.

В дальнейшем для упрощения записи символы уплотнения  $\xi(T; \cdot)$  будем опускать, т.е. считаем  $A$  вложенным в  $\mathbb{C}P^1$ .

Рассмотрим случай, когда в  $\mathbb{C}P^1 \setminus A$  имеются по крайней мере две компоненты, каждая из которых не является диском. Пусть это будут компоненты  $G$  и  $H$ ,  $g \in G$ ,  $h \in H$ . Множество  $\text{Fr } G$  разделяет точки  $g, h$  [4, § 6, V, теор. 6] и содержит неприводимый разделитель  $C$  [5, § 49, V, теор. 3], который является простой замкнутой кривой [1, лемма 1]. Пусть  $D, D'$  — два диска, на которые  $C$  разделяет  $\mathbb{C}P^1$ ,  $g \in D$ . Очевидно,  $G \subset D$ ,  $G \neq D$ , т.е.  $\emptyset \neq D \cap \text{Fr } G \subset D \cap A$ . Ясно также, что  $H \cap D = \emptyset$ , следовательно,  $H \subset D'$ ,  $H \neq D'$ , поэтому

$$\emptyset \neq D' \cap \text{Fr } H \subset A \cap D'.$$

Таким образом,  $C$  разделяет  $A$ .

Остается случай, когда в  $\mathbb{C}P^1 \setminus A$  имеется только одна компонента  $G$ , не являющаяся диском. Если  $A \not\subset \overline{G}$ , то множество  $\text{Fr } G$  содержит простую замкнутую кривую, разделяющую  $A$ . Итак, либо  $\mathbb{C}P^1 \setminus A$  связно и совпадает с  $G$ , либо  $\mathbb{C}P^1 \setminus \overline{G} \neq \emptyset$  и является объединением дисков из  $\mathbb{C}P^1 \setminus A$ . Обе эти возможности рассматриваются одновременно.

По условию  $\dim Q = 1$ , поэтому  $\text{Fr } G = A$ . Пусть  $\{c'_n\}_{n=1}^\infty \subset A \setminus B$  — счетное плотное в  $A \setminus B$  множество. Как известно, множество точек из  $\text{Fr } G$ , достижимых дугой из области  $G$ , плотно в  $\text{Fr } G$ . Пусть для  $n \in \mathbb{N}$   $c_n \in A \setminus B$ ,  $c_n$  достижима дугой из  $G$ ,  $d(c'_n, c_n) < 1/n$  и  $c_n \neq c_m$  при  $n \neq m$ . Очевидно, последовательность  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  плотна в  $A \setminus B$ . Положим  $a_1 = c_1$ ,  $b_1 = c_2$ . Существуют дуга  $\gamma_1 = [a_1, b_1]_{\gamma_1} \subset A$  и дуга  $\Gamma_1 = [a_1, b_1]_{\Gamma_1}$ ,  $(a_1, b_1)_{\Gamma_1} \subset G$ . Простая замкнутая кривая  $\gamma_1 \cup \Gamma_1$  разделяет  $\mathbb{C}P^1$  на два диска  $\Omega_1$  и  $\Omega'_1$ . Если

$$A \cap \Omega_1 \neq \emptyset \neq A \cap \Omega'_1,$$

то дуга  $\gamma_1$  разделяет  $A$ . Пусть одно из пересечений пусто. Выберем обозначения так, что  $A \cap \Omega'_1 = \emptyset$ . Тогда  $A \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ , иначе найдется открытая поддуга дуги  $\gamma_1$ , лежащая в  $A \setminus B$ .

Пусть  $c_{n_2}$  — первая точка последовательности  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ , которая не принадлежит  $\gamma_1$ . Такая точка непременно найдется, так как в  $A \setminus B$  нет открытых дуг. Положим  $c_{n_0} = c_1$ ,  $c_{n_1} = c_2$ . Существует дуга  $\gamma'_2 = [c_{n_2}, a_1]_{\gamma'_2} \subset A$ . Если  $\gamma_1 \cup \gamma'_2$  не является дугой, то найдется такая точка  $\tau_1 \in (a_1, b_1)_{\gamma_1} \cap \gamma'_2$ , что  $[c_{n_2}, \tau_1]_{\gamma'_2} \cap \gamma_1 = \emptyset$ . Так как  $A \cap \Omega'_1 = \emptyset$ , то  $[c_{n_2}, \tau_1]_{\gamma'_2} \subset \Omega_1$ . Нетрудно понять, что дуга

$$[a_1, \tau_1]_{\gamma_1} \cup [\tau_1, c_{n_2}]_{\gamma'_2}$$

не является открытой ни слева, ни справа и, следовательно, разделяет  $A$ , ибо в противном случае найдется открытая поддуга этой дуги, лежащая в  $A \setminus B$ . Рассмотрим случай, когда

$\gamma_1 \cup \gamma'_2$  является дугой. Если  $b_1 \notin \gamma'_2$ , то полагаем  $a_2 = c_{n_2}$ ,  $b_2 = b_1$ , в противном случае полагаем  $a_2 = a_1$ ,  $b_2 = c_{n_2}$ . В любом случае существует дуга  $\Gamma_2 = [a_2, b_2]_{\Gamma_2}$ ,  $(a_2, b_2)_{\Gamma_2} \subset G$ . Дугу  $\gamma_1 \cup \gamma'_2$  обозначим  $\gamma_2 = [a_2, b_2]_{\gamma_2}$ . Простая замкнутая кривая  $\gamma_2 \cup \Gamma_2$  разделяет  $\mathbb{C}P^1$  на два диска  $\Omega_2, \Omega'_2$ . Если

$$A \cap \Omega_2 \neq \emptyset \neq A \cap \Omega'_2,$$

то  $\gamma_2$  разделяет  $A$  и утверждение доказано. В противном случае находим первую из точек последовательности  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ , не принадлежащую  $\gamma_2 \supset \gamma_1$ , обозначаем ее  $c_{n_3}$  и описанным уже способом строим дугу  $\gamma_3$  или завершаем доказательство. Продолжая таким образом, мы приходим к тому, что либо на одном из шагов появится разделяющая  $A$  дуга с концами из  $A \setminus B$ , достижимыми из  $G$ , и утверждение будет доказано, либо будет построена последовательность вложенных дуг  $\gamma_1 \subset \gamma_2 \subset \dots \subset \gamma_n \subset \dots$ . Очевидно,  $\text{cl} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n \right) \supset A \setminus B$ .

Возможны три случая. В процессе построения последовательности  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$  лишь конечное число дуг присоединялось к концевой точке (обозначенной буквой  $a$  с соответствующим индексом) дуги, построенной на предыдущем шаге. Этот случай обозначим символом “ $\rightarrow$ ”. Второй случай отличается от описанного заменой буквы  $a$  на букву  $b$ . Этот случай легко сводится к предыдущему заменой обозначений и рассматриваться не будет. Остается случай, который естественно обозначить символом “ $\leftrightarrow$ ” (когда последовательность  $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$  “растет в обоих направлениях”). Как нетрудно понять, в этом случае числовая прямая  $\mathbb{R}$  уплотняется на  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ . В случае “ $\rightarrow$ ” на объединение дуг  $\gamma_n$  уплотняется полупрямая  $\mathbb{R}_+$ .

Рассмотрим случай, обозначенный символом “ $\rightarrow$ ”. Пусть  $\eta$  — уплотнение  $\mathbb{R}_+$  на  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ . Не ограничивая общности доказательства, можно считать, что  $\eta(0) = c_1$ .

Пусть  $A \setminus B$  связно. В силу леммы 1 существует разложение  $A \setminus B = A_1 \cup B_1$ ,  $A_1 \cap B_1$  связно. Последовательность  $\lambda = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  плотна в  $A_1 \cup B_1$  и  $\lambda \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ . Пусть  $m_1 = \min\{n : c_n \in A_1 \setminus B_1\}$ ,  $\gamma_{s_1}$  — дуга с наименьшим номером, содержащая точку  $c_{m_1}$ ;  $m_2 = \min\{n > m_1 : c_n \in B_1 \setminus A_1, c_n \notin \gamma_{s_1}\}$ ,  $\gamma_{s_2}$  — дуга с наименьшим номером, содержащая  $c_{m_2}$ ;  $m_3 = \min\{n > m_2 : c_n \in A_1 \setminus B_1, c_n \notin \gamma_{s_2}\}$ ,  $\gamma_{s_3}$  — дуга с наименьшим номером, содержащая  $c_{m_3}$ . Поддугу дуги  $\gamma_{s_3}$  с концами  $c_{m_1}, c_{m_3}$  обозначим  $\beta = [c_{m_1}, c_{m_3}]_{\beta}$ . Очевидно,  $c_{m_2} \in \beta$  и

$$[c_{m_1}, c_{m_2}]_{\beta} \cap A_1 \cap B_1 \neq \emptyset \neq [c_{m_2}, c_{m_3}]_{\beta} \cap A_1 \cap B_1.$$

Пусть

$$u \in [c_{m_1}, c_{m_2}]_{\beta} \cap A_1 \cap B_1, \quad v \in [c_{m_2}, c_{m_3}]_{\beta} \cap A_1 \cap B_1.$$

Существует дуга  $\mu = [u, v]_{\mu} \subset A_1 \cap B_1$ . Объединение дуг  $\beta \cup \mu$  содержит простую замкнутую кривую  $\omega \ni c_{m_2}$ . Дуга  $\beta$  открыта слева или справа, поскольку  $\beta \subset \gamma_{s_3} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ , поэтому  $\mu$  примыкает к  $\beta$  соответственно справа или слева. Так как  $c_{m_2} \in \beta \cap (A \setminus B)$ , то, как нетрудно понять, простая замкнутая кривая  $\omega$  разделяет  $A$ .

Обратимся к случаю с символом “ $\rightarrow$ ” в предположении, что  $A \setminus B$  несвязно. Пусть  $A \setminus B = M \cup N$  и

$$(\text{cl}_{A \setminus B} M) \cap N = \emptyset = M \cap (\text{cl}_{A \setminus B} N),$$

где нижний индекс обозначает множество, относительно которого берется замыкание. Последовательность  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  плотна в  $M \cup N$ . Рассуждая, как и в предыдущем случае, построим дугу  $\beta = [c_{m_1}, c_{m_3}]_{\beta} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ , для которой  $c_{m_1} \in M$ ,  $c_{m_2} \in \beta \cap N$ ,  $c_{m_3} \in M$ . Очевидно,

$$[c_{m_1}, c_{m_2}]_{\beta} \cap A \cap B \neq \emptyset \neq [c_{m_2}, c_{m_3}]_{\beta} \cap A \cap B.$$

Пусть

$$u \in [c_{m_1}, c_{m_2}]_{\beta} \cap A \cap B, \quad v \in [c_{m_2}, c_{m_3}]_{\beta} \cap A \cap B.$$



В силу связности  $A \cap B$  существует дуга  $\mu = [u, v]_\mu \subset A \cap B$ . Объединение  $\beta \cup \mu$  содержит простую замкнутую кривую  $\omega \ni c_{m_2}$ . Как и в предыдущем случае, нетрудно понять, что  $\omega$  разделяет  $A$ .

Рассмотрим случай “ $\leftrightarrow$ ” в предположении, что  $A \setminus B$  связно. По лемме 1 существует разложение  $\overline{A \setminus B} = A_1 \cup B_1$  со связным пересечением  $A_1 \cap B_1$ . Пусть  $\eta$  — уплотнение  $\mathbb{R}$  на  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ . Не ограничивая общности доказательства, будем предполагать, что  $\eta(0) = c_1$ ,  $\eta(1) = c_2$ . Нетрудно понять, что либо существует дуга из  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ , аналогичная дуге  $\beta$ , построенной при рассмотрении случая “ $\rightarrow$ ” ( $A \setminus B$  связно), и тогда рассуждаем, как ранее, либо найдется число  $t \in \mathbb{R}$  такое, что либо

$$(A_1 \setminus B_1) \cap \eta([t, +\infty)) = \emptyset = (B_1 \setminus A_1) \cap \eta((-\infty, t]),$$

либо

$$(A_1 \setminus B_1) \cap \eta((-\infty, t]) = \emptyset = (B_1 \setminus A_1) \cap \eta([t, +\infty)).$$

Второй случай сводится к первому сменой обозначений, поэтому рассмотрим лишь первый. Имеем

$$\overline{A_1 \setminus B_1} \subset \text{cl} \eta((-\infty, t]) \subset A.$$

Так как компакт  $Q$  связан, то хотя бы одно из множеств

$$A_1 \cap B = A_1 \cap (A \cap B), \quad B_1 \cap B = B_1 \cap (A \cap B)$$

непусто. Пусть, например,  $B_1 \cap B \neq \emptyset$ . Полагая  $B' = B \cup B_1$  и рассматривая разложение  $Q = A \cup B'$ , для которого  $A \cap B' = (A \cap B) \cup B_1$  связно, сводим рассматриваемый случай к уже изученному с символом “ $\rightarrow$ ”.

Остается случай, обозначенный символом “ $\leftrightarrow$ ”, при несвязном  $A \setminus B$ . Пусть  $A \setminus B = M \cup N$  и

$$(\text{cl}_{A \setminus B} M) \cap N = \emptyset = M \cap (\text{cl}_{A \setminus B} N).$$

Последовательность  $\lambda = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  плотна в  $M \cup N$ . Если существует дуга  $\beta \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n$  с концами из  $M \cap \lambda$  (или  $N \cap \lambda$ ) такая, что  $\beta \cap N \neq \emptyset$  (соответственно,  $\beta \cap M \neq \emptyset$ ), то  $\beta \cap A \cap B$  содержит, по крайней мере, две различные точки. Соединив их дугой  $\mu \subset A \cap B$ , получим множество  $\beta \cup \mu$ , содержащее простую замкнутую кривую, разделяющую  $A$ .

Если такой дуги  $\beta$  не существует, тогда найдется число  $t \in \mathbb{R}$  такое, что либо

$$M \cap \eta([t, +\infty)) = \emptyset = N \cap \eta((-\infty, t]),$$

либо

$$M \cap \eta((-\infty, t]) = \emptyset = N \cap \eta([t, +\infty)).$$

Вторая пара равенств получается из первой перестановкой  $M$  и  $N$ , поэтому рассмотрим лишь первую возможность. Заметим, что  $\eta(t) \in A \cap B$ ,  $M \subset \text{cl} \eta((-\infty, t]) = Y$ ,  $Y$  связно и  $Y \cap A \cap B \neq \emptyset$ . Рассмотрим разложение  $Q = A \cup (B \cup Y)$ . Так как  $Y \cap N = \emptyset$ , то  $B \cup Y \neq Q$ ,  $A \cap (B \cup Y) = Y \cup (A \cap B)$  связно. Полагая  $A' = A$ ,  $B' = B \cup Y$ , сводим изучаемый случай к уже рассмотренному для разложения  $Q = A' \cup B'$  (обозначенному символом “ $\rightarrow$ ”). Теорема доказана.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Koshcheev V.A.** Two theorems concerning Overdeck's Conjecture about systems of complex-valued functions with the Haar condition // Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 1. 2004. P. 137–146.
2. **Overdeck J.M.** On the nonexistence of complex Haar systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77, № 5. P. 737–740.
3. **Schoenberg I.J., Yang C.T.** On the unicity of solutions of problems of best approximation // Ann. Mat. Pura Appl. 1961. V. 54. P. 1–12.
4. **Куратовский К.** Топология. М.: Мир, 1966. Т. 1.
5. **Куратовский К.** Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.

Поступила 15.07.2007

УДК 533.6.011.51, 533.6.011.35

**ПРЯМАЯ ЗВУКОВАЯ ЛИНИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ СОПЛА<sup>1</sup>****К. В. Курмаева, С. С. Титов**

Рассмотрена проблема Л.В. Овсянникова о прямой звуковой линии в обратной задаче теории сопла. Предложено доказательство того, что линия звукового перехода в трансзвуковом осесимметричном течении является прямой при условии уплощения в центре течения. Оно основано на применении методов исследования звуковой линии, развитых Л.В. Овсянниковым для плоского уравнения Кармана. При этом в данной работе аналитичность решения не предполагается, и приведенное в статье доказательство того, что трансзвуковая поверхность является плоскостью, дано для классического решения (в классах конечной гладкости), соответствующего непрерывному течению. Обоснование наличия особенности на прямой звуковой линии на конечном расстоянии от оси симметрии при условии отличия от нуля скорости ускорения в центре течения осуществлено путем получения решения уравнения типа Овсянникова — Похожаева, общее решение которого в плоском случае выражается через эллиптические функции. Таким образом, для трансзвукового приближения полностью обобщен на случай осевой симметрии классический результат Л.В. Овсянникова о том, что в трансзвуковом стационарном непрерывном течении через точку уплощения проходит звуковая линия, которая является прямой и на которой имеется особенность на конечном расстоянии от центральной линии течения.

**Введение**

Применение метода характеристических рядов [1–3] к обратной задаче теории сопла является классическим для уравнения потенциала скорости  $\Phi$  стационарного движения идеального газа (см. также [4–12]). С этим уравнением и его трансзвуковыми аналогами [13–15] связана задача о наличии прямолинейной звуковой линии с особенностью на конечном расстоянии от центральной линии течения (в плоском случае, при расчете крыльев летательного аппарата, это сечение плоскости симметрии, а в осесимметричных течениях это линия оси сопла).

Практический интерес к соплам с прямой звуковой линией связан с профилированием сопел аэродинамических труб и реактивных двигателей. Сверхзвуковую часть в этом случае можно профилировать независимо от дозвуковой, поскольку прямолинейная звуковая линия является одновременно характеристикой и первого, и второго семейств. Задать а priori контур сопла, обеспечивающий прямолинейную звуковую линию, довольно сложно. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в минимальном сечении контур сопла и все линии тока имели нулевые первые, вторые и третьи производные. С другой стороны, в рамках обратной задачи рассчитать сопла Лавала с прямолинейной линией перехода достаточно просто. В случае плоских и осесимметричных течений для этого необходимо задать на оси симметрии распределение скорости, имеющее равную нулю первую производную в звуковой точке [6, с. 150]. Проблема Л.В. Овсянникова [9] заключается в том, будет ли этого и достаточно.

Как известно, создание стабильного сверхзвукового течения стало возможным с изобретением сопла Лавала, которое и сейчас используется в реактивных двигателях. Поскольку в начальный период двигатели были малой мощности, то для получения хорошей тяги делали сопла удлиненной формы. В соплах такого вида естественным образом возникает задача о прямолинейной линии перехода. Первоначально эта линия понималась инженерами как точка перехода через скорость звука вдоль длинного узкого сопла. Кроме того, считалось, что

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00217), программы фундаментальных исследований Президиума РАН и интеграционного проекта УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

эффективность сопла будет выше, если в самом узком его сужении поток будет наиболее однородным. Сопла получались длинные, плавной, как говорили раньше, обтекаемой формы, совершенно не похожие на современные сопла — сверхкороткие с изощренными формами, в которых реализуются хитроумные конфигурации течения, позволяющие создавать мощную тягу и уверенное управление расчетными режимами работы. Выбор путей развития советской и российской ракетной техники был связан с решением ряда газодинамических задач, в том числе задачи об исчерпывающем исследовании сопел с прямой звуковой линией с тем, чтобы полностью изучить заложенный в этой конфигурации ресурс, а затем при необходимости перейти к другим, возможно, более совершенным видам сопел. С математической точки зрения это проблема адекватности механической модели, а с технической — проблема однозначной определенности режимов работы реактивных двигателей.

И хотя в наше время такие сопла не играют заметной роли в стандартных технических приложениях, это явилось следствием трудоемких исследований и расчетов. Возможны и другие области применения таких сопел, в настоящее время они могут быть использованы не в тяговых реактивных двигателях, а например, в аэродинамических трубах.

Данная задача оказалась непростой и не поддавалась решению несколько десятилетий. Исследованием задачи о прямой звуковой линии занимались многие ученые. Свои работы посвятили этому, например, О.И. Кацкова, А.Н. Крайко, О.С. Рыжов, У.Г. Пирумов, Ф.И. Франкль, Ю.Д. Шмыглевский, G.H. Görtler, D. Gilbarg, M. Shiffman, Л.В. Овсянников [6–8, 16, 17]. При этом их подходы к решению задачи о прямолинейной звуковой линии различны. История и библиография вопроса отражена в [25, 26]. Ближе всего к решению задачи в аналитической постановке подошел О.С. Рыжов. В его работе [8] рассмотрена проблема плоской звуковой поверхности  $x = 0$ , где течение изначально задается в трехмерной окрестности начала координат в аналитическом виде

$$\Phi = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} a_{l,2m,2n} x^l y^{2m} z^{2n}.$$

Далее, на плоскости  $x = 0$  накладываются определенные условия (условия всестороннего сжатия или расширения потока), для того чтобы звуковой поверхностью служила плоскость  $x = 0$ . Это обобщение теорем Ф.И. Франкля, Гёртлера на случай пространственных течений. Отметим к тому же, что подход О.С. Рыжова является чисто аналитическим и не может быть перенесен на классические решения в классах конечной гладкости. В отличие от Ф.И. Франкля, Гёртлера, У.Г. Пирумова, О.С. Рыжова Л.В. Овсянников рассматривает задачу о прямой звуковой линии в другом виде, а именно, решает характеристическую задачу Коши, поставленную на оси симметрии или на плоскости симметрии сопла и получает достаточные условия того, что линия перехода будет прямой. В случае плоских и осесимметричных течений для этого необходимо задать на оси симметрии распределение скорости, имеющей равную нулю первую производную в звуковой точке.

В итоге можно сказать, что решение задачи о прямолинейной звуковой линии по Гёртлеру, Ф.И. Франклю, У.Г. Пирумову, О.С. Рыжову заключается в задании условий непосредственно на самой плоскости (прямой)  $x = 0$ , а затем в доказательстве, что эта плоскость (прямая) действительно будет плоскостью (прямой) перехода через скорость звука; по Л.В. Овсянникову — в задании условий на оси симметрии  $r = 0$ , а затем в доказательстве, что плоскость (прямая) перехода через скорость звука будет прямой. Мы доказываем теорему о прямой звуковой линии не в постановке О.С. Рыжова, У.Г. Пирумова, Ф.И. Франкля, Гёртлера, а в постановке Л.В. Овсянникова.

В работе [9] Л.В. Овсянниковым дано решение проблемы прямолинейной линии перехода в плоском случае, причем не только для аналитического, но и для произвольного классического решения. Метод и полное изложение решения проблемы приведены для плоского трансзвукового уравнения Кáрманна. На необходимость решения этой проблемы для сопла (случай осевой симметрии) Л.В. Овсянников неоднократно указывал, в том числе на конференциях и семина-

рах. В работе [25] предложено решение данной проблемы в аналитическом осесимметричном случае, в котором исследуется, какие аналитические данные Коши приводят к тому, что звуковая линия будет прямой и будет иметь на ней особенность на конечном расстоянии от оси симметрии. Этот результат является непосредственным обобщением теоремы Л.В. Овсянникова с плоского случая на осесимметрический и получается применением той же методики, но с модификациями, которые потребовал переход от плоского случая к осесимметрическому. Наше доказательство того, что звуковая линия является прямой, вытекает из задания на оси симметрии распределения скорости, имеющей равную нулю первую производную в звуковой точке. Методика решения в аналитическом осесимметричном случае была развита в [11, 12, 23], а основой изложенного ниже переноса результата на произвольное классическое решение (нужное число раз непрерывно дифференцируемое) является обобщение лемм Овсянникова на случай осевой симметрии.

Исследование звуковой линии проведено в три этапа. Первоначально [24] изучались особенности аналитических решений уравнения Овсянникова — Похожаева

$$\Delta u = 18(\gamma + 1)u^2, \quad (0.1)$$

где  $\Phi(r, z) = u(r)z^3$ . Известно, что общее решение (0.1) в плоском случае выражается через эллиптические функции [9]. Далее исследовалось трансзвуковое уравнение Кармана

$$\Delta \varphi = \varphi_{rr} + \frac{\nu}{r} \varphi_r = (\gamma + 1) \varphi_z \varphi_{zz}, \quad (0.2)$$

в плоском и осесимметрическом случае [10, 13, 15]; здесь  $\varphi$  — малое возмущение потенциала звукового течения,  $\Delta$  — оператор Лапласа по поперечным координатам  $x, y$ ,  $\gamma$  — показатель адиабаты газа,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — поперечная координата (расстояние от плоскости или от оси симметрии сопла),  $z$  — продольная координата,  $\nu$  — параметр симметрии, для плоской симметрии  $\nu = 0$ , для осевой симметрии  $\nu = 1$ . Известно [9], что в трансзвуковом приближении прямая звуковая линия плоскопараллельного течения газа обязательно имеет особенность на конечном расстоянии от плоскости симметрии потока. Отметим, что в случае осевой симметрии рассуждения значительно усложняются, поскольку в уравнениях возникает особенность, и поэтому они перестают быть уравнениями типа Ковалевской [35]. Так, групповые свойства уравнения Кармана с осевой симметрией существенно отличаются от групповых свойств плоского уравнения Кармана [23]. В связи с этим не существует [23] регулярного преобразования, приводящего уравнение (0.2) с  $\nu = 1$  к уравнению с  $\nu = 0$ , и многие рассуждения, применимые в плоском случае, теряют свою силу в осесимметрическом. Наконец, для полного завершения проблему требуется решить не в классе аналитических функций, а для классических решений — в классах функций конечной гладкости (нужное число раз дифференцируемых).

Задачу перенесения результатов о прямой звуковой линии на случай осевой симметрии можно разделить на две подзадачи:

1. Будет ли прямой звуковая линия при условии уплощения в центре течения на оси сопла.
2. Обязательно ли на прямой звуковой линии имеется особенность на конечном расстоянии от оси симметрии, и существуют ли течения без особенностей?

Рассмотрим решение поставленных задач для осесимметричных течений, описываемых классическими решениями в классах конечной гладкости.

## 1. Трансзвуковое приближение в осесимметрической задаче о прямой звуковой линии

Сходство структуры уравнений околосзвукового приближения и полного потенциала скорости газа исторически определило очередность изучения соответствующих газодинамических вопросов. Методика была разработана при исследовании уравнения Кармана [13]

$$\Delta \varphi = (\gamma + 1) \varphi_z \varphi_{zz} \quad (1.1)$$

в плоском и осесимметрическом случаях [2, 10, 14, 15], где  $\varphi$  — малое возмущение потенциала звукового течения,  $\Delta$  — оператор Лапласа по поперечным координатам  $x, y$ , а затем была применена к уравнению потенциала.

Изложим трансзвуковое приближение в осесимметрической задаче о прямой звуковой линии. Этот результат в трансзвуковом приближении имеет и самостоятельную ценность: данная модель оказывается пригодной для описания свойств звуковой линии.

Трансзвуковое уравнение Кармана (0.2) запишем в безразмерном виде, опустив множитель  $\gamma + 1$ , для симметрического случая

$$\Phi_{rr} + \frac{\nu}{r}\Phi_r = \Phi_z\Phi_{zz}, \quad (1.2)$$

где  $\Phi = \Phi(r, z)$ ,  $r$  — поперечная координата,  $z$  — продольная координата,  $\nu$  — параметр симметрии, для плоской  $\nu = 0$ , для осевой  $\nu = 1$ .

Исследуем осесимметрические течения. В предположении, что потенциал на оси симметрии при  $r = 0$  является аналитической функцией от  $z$  в окрестности точки  $z = 0$ , эта задача равносильна обратной задаче трансзвукового сопла (с заданием скорости газа на оси сопла).

Аналитичность решения  $\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z)r^{2n}$  последней доказана в [2] (см. также [9, 23]).

Для исследования данного вопроса и в неаналитическом случае будем использовать условия реализации прямой звуковой линии, сформулированные Л.В. Овсянниковым [9]. Приведем формулировку этих утверждений в предположении аналитичности решения, названных в [25] первой и второй леммами Овсянникова.

**Лемма 1.** Пусть дана система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для вектор-функции  $\vec{g} = \vec{g}(y)$

$$\frac{d}{dy}\vec{g} = H\vec{g}, \quad (1.3)$$

где  $H = H(y)$  — матрица, непрерывно зависящая от  $y$  в окрестности точки  $y = 0$ . Тогда задача Коши для этой системы с нулевыми начальными данными  $\vec{g}(0) = \vec{0}$  имеет единственное решение, а именно, тождественный нуль.

**Лемма 2.** Зададим в окрестности центра течения  $O$  вектор-функцию  $\vec{g} = \vec{g}(x, y) = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_{xx}, \Phi_{yx}, \Phi_{yxx})$ . Поскольку при каждом фиксированном  $x$  вектор  $\vec{g}$  как функция от  $y$  удовлетворяет системе вида (1.3) линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, где  $x$  входит как параметр, а матрица  $H$  имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Phi_{xxx} & 0 & \Phi_{xx} & 0 & 0 \\ \Phi_{xxxx} & 0 & 3\Phi_{xxx} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

причем в центре течения  $\vec{g}(0, 0) = \vec{0}$ , то единственным решением системы (1.3) является тождественный нуль  $\vec{g}(0, y) = \vec{0}$ , и точка  $O$  принадлежит прямой звуковой линии  $x = 0$ .

Как известно [10, 14], в приближении Кармана звуковая линия определяется уравнением

$$\Phi_z = 0, \quad (1.5)$$

которое будем использовать в дальнейших рассуждениях.

Систему координат  $(r, z)$  выберем так, что начало координат совпадает с центром течения  $O$  [9] и ось  $z$  направлена по вектору скорости  $\Phi_z$ . Аналогично [9] рассмотрим вектор-функцию  $\vec{g} = \vec{g}(r, z)$  с пятью компонентами

$$\vec{g} = (\Phi_z, \Phi_r, \Phi_{zz}, \Phi_{rz}, \Phi_{rzz}), \quad (1.6)$$

и покажем, что для любого четырежды непрерывно дифференцируемого решения уравнения (1.2) при каждом фиксированном  $z$  вектор  $\vec{g}$  как функция величины  $r$  удовлетворяет системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial r} \vec{g} = H \vec{g}, \quad (1.7)$$

где  $H$  — матрица  $5 \times 5$  с элементами, непрерывно зависящими от  $r$  в выколотой окрестности точки  $O$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{r} & \Phi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Phi_{zzz} & 0 & \Phi_{zz} & -\frac{\nu}{r} & 0 \\ \Phi_{zzzz} & 0 & 3\Phi_{zzz} & 0 & -\frac{\nu}{r} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Поскольку  $O$  — центр течения, то  $\vec{g}(0,0) = \vec{0}$  [9]. Для системы (1.7) поставим обобщенную задачу Коши с нулевыми начальными данными, т. е.  $\vec{g}|_{r=0} = \vec{0}$ , и решим систему (1.7) при значении  $z = 0$  как параметра.

Для обоснования представления (1.7) подставим выражения (1.6), (1.8) в (1.7)

$$\begin{pmatrix} \Phi_{zr} \\ \Phi_{rr} \\ \Phi_{zzr} \\ \Phi_{rrz} \\ \Phi_{rrzz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{r} & \Phi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Phi_{zzz} & 0 & \Phi_{zz} & -\frac{\nu}{r} & 0 \\ \Phi_{zzzz} & 0 & 3\Phi_{zzz} & 0 & -\frac{\nu}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_z \\ \Phi_r \\ \Phi_{zz} \\ \Phi_{rz} \\ \Phi_{rzz} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Перемножим матрицы, стоящие в правой части равенства, получим

$$\begin{cases} \Phi_{zr} = \Phi_{zr}, \\ \Phi_{rr} = -\frac{\nu}{r}\Phi_r + \Phi_z\Phi_{zz}, \\ \Phi_{zzr} = \Phi_{zzr}, \\ \Phi_{rrz} = \Phi_z\Phi_{zzz} + \Phi_{zz}\Phi_{zz} - \frac{\nu}{r}\Phi_{rz}, \\ \Phi_{rrzz} = \Phi_z\Phi_{zzzz} + 3\Phi_{zz}\Phi_{zzz} - \frac{\nu}{r}\Phi_{rzz}. \end{cases} \quad (1.10)$$

В силу уравнения (1.2) данная система выполняется, следовательно, представление (1.7) обосновано. Представим матрицу  $H$  в виде

$$H = H_0 - \frac{\nu}{r}H_\nu, \quad (1.11)$$

где обозначено

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Phi_{zzz} & 0 & \Phi_{zz} & 0 & 0 \\ \Phi_{zzzz} & 0 & 3\Phi_{zzz} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Эту матрицу условимся называть матрицей плоского случая ( $\nu = 0$ ). Матрицу

$$H_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

назовем матрицей учета симметрии (в частности, для осесимметрического случая имеем параметр симметрии  $\nu = 1$ ).

Для обобщения второй леммы Овсянникова, учитывая (1.11), запишем (1.7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \vec{g} = \left[ H_0 - \frac{\nu}{r} H_\nu \right] \vec{g}. \quad (1.14)$$

Домножим обе части представления (1.14) на  $r$ , получим

$$r \vec{g}_r = G(r) \vec{g}, \quad (1.15)$$

где  $G(r)$  — матричная функция, непрерывно зависящая от переменной  $r$

$$G(r) = rH_0 - \nu H_\nu. \quad (1.16)$$

Докажем, что начальные условия — нулевые. По [9], а также учитывая, что при  $z = 0$ ,  $r = 0$  справедливы равенства

$$\begin{cases} \Phi_z = 0 & \text{уравнение звуковой линии,} \\ \Phi_r = 0 & \text{условие осевой симметрии,} \\ \Phi_{zz} = 0 & \text{условие уплощения звуковой линии,} \\ \Phi_{rz} = 0 & \text{условие осевой симметрии,} \\ \Phi_{rzz} = 0 & \text{условие осевой симметрии,} \end{cases}$$

для (1.7) имеем нулевые начальные данные

$$\vec{g}(0) = \left( \begin{array}{c} \Phi_z \\ \Phi_r \\ \Phi_{zz} \\ \Phi_{rz} \\ \Phi_{rzz} \end{array} \right) \Bigg|_{r=0, z=0} = \vec{0}. \quad (1.17)$$

В [25] для уравнения Кармана доказана

**Теорема 1.** Пусть в окрестности центра течения  $O$  на оси симметрии потенциал течения  $\Phi = \Phi(0, z)$  — аналитическая функция. Поскольку аналитическая вектор-функция  $\vec{g} = \vec{g}(r, z) = (\Phi_z, \Phi_r, \Phi_{zz}, \Phi_{rz}, \Phi_{rzz})$  удовлетворяет системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7), где  $H$  определяется равенствами (1.11)–(1.13), а в центре течения  $\vec{g}(0, 0) = \vec{0}$ , то единственным решением уравнения (1.7) является тождественный нуль  $\vec{g}(r, 0) = \vec{0}$ , и точка  $O$  принадлежит прямой звуковой линии  $z = 0$  (при  $0 \leq r < r^*$ ) как в плоском, так и в осесимметрическом случае.

При исследовании свойств звуковой линии в [25] была рассмотрена “слабая” форма утверждений Л.В. Овсянникова [9]: для преодоления сложностей, возникших при рассмотрении данного вопроса, была использована аналитичность решения  $\Phi$  по степеням  $r$  в окрестности оси симметрии [2, 23], а не непрерывная дифференцируемость решений уравнения. При этом существенно использовалась специфика задачи, в том числе тот факт, что матрица  $H$ , указанная в [25] при исследовании формы звуковой линии, линейна по искомой функции  $\Phi$  и ее частным производным. Этого оказалось достаточно в аналитическом случае для получения результата — звуковая линия в приближении Кармана (и для плоской, и для осевой симметрии) является прямой.

Теперь докажем эту теорему для случая классических решений, не предполагаемых, вообще говоря, аналитическими.



## 2. Прямолинейность трансзвуковой линии в неаналитическом случае осевой симметрии

Очевидно, справедливость утверждения о единственности нулевого решения с нулевыми начальными данными равносильна невырожденности матрицанта при стремлении переменной  $r$  к нулю, если все решения ограничены при  $r \rightarrow +0$ . Согласно равенству Якоби, определитель матрицанта есть экспонента интеграла от следа матрицы системы. Для уравнения Кармана след этой матрицы равен  $-\frac{3\nu}{r}$ , и интеграл от него при  $\nu > 0$  отнюдь не стремится к  $-\infty$  (что необходимо для стремления определителя матрицанта к нулю), а наоборот, при вещественном  $r > 0$  ( $r \rightarrow +0$ ) стремится к бесконечности.

Если бы определитель матрицанта был бы ограничен и сверху, то единственность вытекала бы непосредственно из отсутствия неограниченных решений.

Исходя из этих наводящих соображений для исследования пространства ограниченных при  $r \rightarrow +0$  решений воспользуемся спецификой уравнения Кармана и вещественностью переменной  $r$ .

Заметим, что матрица системы имеет блочную структуру, причем в силу краевого условия симметрии на оси ограниченное при  $r \rightarrow +0$  решение имеет нулевые вторую, четвертую и пятую компоненты при стремлении  $r$  к нулю. Перепишем решаемую систему уравнений (1.7) в явном виде

$$\begin{cases} g'_1 = g_4 \\ g'_2 = -\frac{\nu}{r}g_2 + ag_3 \\ g'_3 = g_5 \\ g'_4 = -\frac{\nu}{r}g_4 + cg_1 + bg_3 \\ g'_5 = -\frac{\nu}{r}g_5 + dg_1 + 3cg_3, \end{cases} \quad (2.1)$$

где обозначено  $a = \Phi_z$ ,  $b = \Phi_{zz}$ ,  $c = \Phi_{zzz}$ ,  $d = \Phi_{zzzz}$ .

Преобразуем ее второе, четвертое и пятое уравнение при  $\nu = 1$  к виду

$$(rg_2)_r = rag_3, \quad (rg_4)_r = r(CG_1 + BG_3), \quad (rg_5)_r = r(DG_1 + 3CG_3).$$

Отсюда ввиду ограниченности функций  $u(r) = g_1(r)$ ,  $v(r) = g_3(r)$  получаем выражения, не содержащие произвольных констант (аналогично [10]), а именно:

$$g_2(r) = \frac{1}{r} \int_0^r sa(s)v(s)ds,$$

$$g_4(r) = \frac{1}{r} \int_0^r s[c(s)u(s) + b(s)v(s)]ds,$$

$$g_5(r) = \frac{1}{r} \int_0^r s[d(s)u(s) + 3c(s)v(s)]ds$$

из-за того, что эти интегралы стремятся к нулю при  $r \rightarrow +0$ . Обозначив  $u(r) = g_1(r)$ ,  $v(r) = g_3(r)$  и интегрируя далее, получим для функций  $u(r)$ ,  $v(r)$  уравнения

$$u(t) = C + \int_0^t \frac{1}{r} \int_0^r s[c(s)u(s) + b(s)v(s)]dsdr, \quad (2.2)$$

$$v(t) = D + \int_0^t \frac{1}{r} \int_0^r s[d(s)u(s) + 3c(s)v(s)]dsdr, \quad (2.3)$$

причем если вектор  $\vec{g}$  обращается в нуль при  $r \rightarrow +0$ , то произвольные константы зануляются:  $C = 0$ ,  $D = 0$ . Задача единственности свелась к отсутствию нетривиального (ненулевого) решения этой системы с нулевыми начальными данными  $C = 0$ ,  $D = 0$  в предположении ограниченности решения.

Итак, пусть на некотором сегменте  $r \in [0, r_0]$ ,  $r_0 > 0$ , функции  $u(r)$ ,  $v(r)$  ограничены, так что  $|u(r)| \leq U$ ,  $|v(r)| \leq V$ ,  $U > 0$ ,  $V > 0$ . При этом коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  уравнения также ограничены ввиду ограниченности потенциала  $\Phi$ . Пусть  $|a| \leq A$ ,  $|b| \leq B$ ,  $|c| \leq C$ ,  $|d| \leq D$  при  $r \in [0, r_0]$ , где  $A, B, C, D$  — некоторые положительные константы. Справедлива

**Лемма 3.** Для любого  $n \leq 0$  при  $r \in [0, r_0]$  имеются оценки

$$|u(r)| \leq U_n s^{2n} / [n!2^n]^2, \quad |v(r)| \leq V_n s^{2n} / [n!2^n]^2, \quad (2.4)$$

где  $U_n, V_n$  — компоненты вектора

$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & B \\ D & 3C \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

**Доказательство.** Доказательство будем проводить методом математической индукции. При  $n = 0$  оценки (2.4) совпадают с предположением об ограниченности функций  $u(r)$ ,  $v(r)$  — база индукции. Для выполнения шага индукции подставим оценки (2.4) в правые части соотношений (2.2), (2.3) и, оценивая модуль интеграла как интеграл от модуля, получим

$$|u(t)| \leq \int_0^t \frac{1}{r} \int_0^r s [CU_n s^{2n} / [n!2^n]^2 + BV_n s^{2n} / [n!2^n]^2] ds dr,$$

$$|v(t)| \leq \int_0^t \frac{1}{r} \int_0^r s [DU_n s^{2n} / [n!2^n]^2 + 3CV_n s^{2n} / [n!2^n]^2] ds dr,$$

откуда приходим, вычисляя интегралы, поскольку

$$\int_0^t \frac{1}{r} \int_0^r s [s^{2n}] ds dr = \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)^2},$$

к оценкам (2.4) и соотношению (2.5) с заменой  $n$  на  $n+1$ , что и требовалось.

Из доказанной леммы 3 вытекает, что, поскольку  $U_n$  и  $V_n$  растут не более чем в геометрической прогрессии, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n r^{2n} / [n!2^n]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n r^{2n} / [n!2^n]^2 = 0$$

при любом фиксированном  $r \in [0, r_0]$ , и поэтому единственным решением системы является тождественный нуль

$$u(r) \equiv v(r) \equiv 0.$$

Итак, доказано, что не существует нетривиального (ненулевого) решения системы (1.7) вида (1.11)–(1.13) с нулевыми начальными данными.

Следовательно, для данного трансзвукового приближения справедливы леммы Овсянникова, и поэтому заключение о прямолинейности трансзвуковой линии останется справедливым для произвольного классического (четырежды непрерывно дифференцируемого) решения уравнения Кармана. Действительно, в вещественном случае  $r \in (0, r_*)$ ,  $r_* > 0$ , и линейная система дифференциальных уравнений имеет непрерывную матрицу для всех достаточно малых  $r > 0$ , причем  $Hg \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +0$ , если  $\Phi$  — четырежды непрерывно дифференцируемая функция, и из удовлетворения нулевых начальных данных следует ограниченность решения.

Отсюда делаем вывод, что доказана

**Теорема 2.** *Для любого четырехжды непрерывно дифференцируемого решения осесимметрического уравнения Кармана звуковая линия будет прямой при условии ее уплощения в центре течения.*

### 3. Наличие особенностей на прямой звуковой линии

Для исследования наличия особенностей на прямой звуковой линии в приближении Кармана продифференцируем (1.2) по  $z$ , получим

$$\Phi_{rrz} + \frac{\nu}{r}\Phi_{rz} = \Phi_{zz}\Phi_{zz} + \Phi_z\Phi_{zzz}. \quad (3.1)$$

Поскольку на прямой  $z = 0$ , являющейся, как показано выше, звуковой линией, выполняется тождественно равенство  $\Phi_z = 0$  для любого  $r \geq 0$ , то уравнение (3.1) превращается в тождество  $\Phi_{zz}^2 = 0$ , откуда  $\Phi_{zz} = 0$  для любого  $r \geq 0$  при  $z = 0$ .

Продифференцировав (3.1) по  $z$ , получим

$$\Phi_{rrzz} + \frac{\nu}{r}\Phi_{rzz} = 3\Phi_{zz}\Phi_{zzz} + \Phi_z\Phi_{zzzz} \quad (3.2)$$

и, еще раз дифференцируя (3.2) по  $z$ , получим

$$\Phi_{rrzzz} + \frac{\nu}{r}\Phi_{rzzz} = 3\Phi_{zzz}\Phi_{zzz} + 4\Phi_{zz}\Phi_{zzzz} + \Phi_z\Phi_{zzzzz}. \quad (3.3)$$

Используя тождества  $\Phi_z = \Phi_{zz} = 0$  на прямой  $z = 0$ , приходим к уравнению Овсянникова — Похожаева

$$\phi_{rr} + \frac{\nu}{r}\phi_r = 3\phi^2$$

для функции  $\phi(r) = \Phi_{zzz}|_{z=0}$ . В [24] доказано наличие особенностей на конечном расстоянии  $r^*$  от оси симметрии для нетривиального (ненулевого) решения уравнения Овсянникова — Похожаева в плоском и осесимметрическом случае и показано, что  $\phi(r)$  не только имеет особенность, но и обращается в бесконечность в этой точке  $r = r^*$ . Нетривиальность решения означает, что скорость ускорения течения на прямой звуковой линии не обращается в нуль:  $\Phi_{zzz} \neq 0$ . Итак, доказана

**Теорема 3.** *Если потенциал  $\Phi$  является пятикратно дифференцируемой функцией и скорость ускорения течения  $\Phi_{zzz} \neq 0$  в его центре, то в трансзвуковом приближении Кармана на прямой звуковой линии  $z = 0$  на конечном расстоянии от оси симметрии течения существует особая точка, соответствующая обращению функции  $\Phi$  в бесконечность.*

#### 3.1. Построение аналитических решений без особенностей

Доказанная теорема определяет ограничение на радиус сопла, в котором течение не будет иметь особенности.

В [9] высказано утверждение о возможности отсутствия особых точек на прямой звуковой линии в случае равенства нулю скорости ускорения течения на ней, т. е.  $\Phi_{zzz}|_{z=0} = 0$ . Возможны две трактовки данного утверждения о решении  $\Phi(r, z)$ ; оформим их в виде двух гипотез:

**Гипотеза 1.** Решение имеет радиус сходимости, стремящийся в бесконечность  $r_* \rightarrow +\infty$  при стремлении продольной переменной к нулевому значению ( $z \rightarrow 0$ ), что на практике означает возможность построения сопел сколь угодно большого радиуса за счет, может быть, соответствующего уменьшения длины сопла;

**Гипотеза 2.** Решение  $\Phi$  является аналитическим для любых значений продольной переменной  $z$ , взятых из некоторой окрестности  $z = 0$ , без ограничения на радиальную переменную  $r$ , т. е. на всей прямой звуковой линии. В этом случае не будет ограничений на толщину

сопла (при некоторой данной его длине), обеспечивающих трансзвуковое течение без особенностей.

В частной беседе С.В. Хабилов высказал гипотезу о невозможности второго варианта, а также мнение о маловероятности реализации первого варианта трактовки.

Для исследования этого вопроса положим, что скорость ускорения газа в центре течения обращается в нуль, т. е.

$$\Phi_{zzz}|_{z=0, r=0} = 0. \quad (3.4)$$

В [29, 30] построены автомодельные решения без особенностей на прямой звуковой линии. Приведем обоснование их существования.

Для построения нужного течения рассмотрим решение уравнения в виде ряда

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(z) r^n \quad (3.5)$$

в силу аналитичности решения обратной задачи трансзвукового сопла. На основании (3.4) в качестве нулевого коэффициента, который характеризует распределение скорости газа на оси симметрии, положим

$$\Phi_0(z) = z^4$$

В силу условия осевой симметрии  $\Phi_r = 0$  первый коэффициент ряда (3.5) будет нулем

$$\Phi_1(z) = 0. \quad (3.6)$$

В [29] сделаны соответствующие подстановки и получено уравнение

$$4tV_{tt} + 4V_t = (4V + tV_t)(12V + 8tV_t + t^2V_{tt}) \quad (3.7)$$

для автомодельного решения в виде

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n t^n, \quad (3.8)$$

где  $t = zr^2$  — автомодельная переменная.

Нулевой коэффициент ряда (3.8) положим

$$V_0 = A = 1.$$

Уравнение (3.7) при  $t = 0$  содержит особенность, поэтому оно не является уравнением типа Коши, и, следовательно, нельзя утверждать существование его аналитического решения. Сходимость этого ряда в окрестности точки  $t = 0$  докажем ниже.

В [30] этот подход обобщен, построено целое семейство автомодельных решений без особенностей для трансзвукового уравнения. В ряде (3.5) нулевым коэффициентом, характеризующим распределение скорости газа на оси симметрии, положим

$$\Phi_0(z) = Az^s. \quad (3.9)$$

Параметр  $s$  определим как степень заторможенности течения газа. Исследование аналитического решения уравнения Кармана в окрестности  $z = 0$  показало, что первые три коэффициента ряда для  $\Phi(z)$  — нули. В физическом смысле это можно трактовать как равенство нулю скорости ускорения газа в центре течения и выполнение условия уплощения звуковой линии в центре течения, что влечет за собой прямолинейность звуковой линии перехода. Механически это означает более плавный переход от дозвуковой к сверхзвуковой области. Если же занулить большее количество коэффициентов ряда, то мы еще более затормаживаем поток газа с целью получения еще более плавного перехода из дозвуковой зоны течения в сверхзвуковую.

Возникает вопрос, можно ли это сделать без появления особенностей на плоскости звукового перехода. Для всякой ли степени  $s$  это возможно? Далее исследуем вопрос в общем виде.

Без ограничения общности положим

$$A = 1. \quad (3.10)$$

В силу осевой симметрии  $\Phi_r = 0$  первый коэффициент ряда (3.5) будет нулем (3.6).

Вычислим коэффициенты ряда (3.5) при условии задания нулевого коэффициента в виде (3.9), (3.10), используя рекуррентное соотношение на коэффициенты. Применяя метод математической индукции, устанавливаем, что

$$\Phi_n(z) = 0 \text{ при любом нечетном номере } n. \quad (3.11)$$

Исследуя коэффициенты с четными номерами  $n$ , получаем, что ряд можно записать в виде

$$\Phi(r, z) = z^s + c_1 z^{2s-3} r^2 + c_2 z^{3s-6} r^4 + \dots, \quad (3.12)$$

где  $c_1, c_2, \dots$  — коэффициенты при степенях  $z$ . Учитывая, что  $z^{s-3} r^2 = t$ , параметр  $\nu = 1$  в осесимметрическом случае, получим искомое уравнение

$$4tV_{tt} + 4V_t = [sV + (s-3)tV_t] [s(s-1)V + (s-3)(3s-4)tV_t + (s-3)^2 t^2 V_{tt}]. \quad (3.13)$$

После подстановки ряда (3.8) в (3.13), получим систему уравнений для коэффициентов ряда при неотрицательных степенях  $t^n$

$$\begin{aligned} & 4n(n-1)V_n + 4nV_n \\ &= \sum_{k+l=n-1} [s + (s-3)k] V_k [s(s-1) + (s-3)(3s-4)l + (s-3)^2 l(l-1)] V_l, \\ 4n^2 V_n &= \sum_{k+l=n-1} [s + (s-3)k] V_k [s(s-1) + (s-3)(2s-1)l + (s-3)^2 l^2] V_l. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Отсюда, выделяя старший коэффициент ряда (3.8), получим

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{4n^2} \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ k \neq 0, l \neq 0}} [s + (s-3)k] V_k [s(s-1) + (s-3)(2s-1)l + (s-3)^2 l^2] V_l \\ &+ \frac{1}{4n^2} s V_0 [(3s+3) + (s^2 + s - 12)n + (s-3)^2 n^2] V_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Запишем соответствующее мажорирующее выражение для (3.15)

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \frac{1}{4n(n-1)} \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ k \neq 0, l \neq 0}} (2s-3)k \Psi_k [(2s^2 - 7s + 9)l^2 + (s-3)(2s-1)l] \Psi_l \\ &+ \frac{1}{4n(n-1)} s \Psi_0 [(s^2 - 3s + 12)n^2 + (s^2 + s - 12)n] \Psi_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Очевидно, что при  $n \geq 2$  выполняется

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)},$$

при  $n \geq 1$  выполняется

$$(3s+3) + (s^2 + s - 12)n + (s-3)^2 n^2 \leq (s^2 - 3s + 12)n^2 + (s^2 + s - 12)n,$$

при  $k \geq 1$  выполняется

$$s + (s - 3) \leq (2s - 3)k,$$

при  $l \geq 1$  выполняется

$$s(s - 1) + (s - 3)(2s - 1)l + (s - 3)^2 l^2 \leq (2s^2 - 7s + 9)l^2 + (s - 3)(2s - 1)l.$$

Рассмотрим производящую функцию

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n t^n, \text{ причем } \Psi_0(z) = A > 0, \quad \Psi_1(z) = V_1 = s(s - 1)A^2 > 0. \quad (3.17)$$

Поскольку для любого  $n$  справедливо  $\Psi_n \geq 0$ , то (3.17) является мажорантой нуля. Применяя метод математической индукции, из (3.15), (3.16) и (3.17) получаем, что

$$V_n \leq \Psi_n.$$

По (3.16) функция (3.17) является решением уравнения

$$\begin{aligned} 4t^2 \Psi_{tt} &= (2s - 3)t \Psi_t \left[ (2s^2 - 7s + 9)t^2 \Psi_{tt} + (2s^2 - 7s + 9)t \Psi_t + (s - 3)(2s - 1)t \Psi_t \right] \\ &+ 4tA[(s^2 - 3s + 12)t^2 \Psi_{tt} + (s^2 - 3s + 12)t \Psi_t + (s^2 + s - 12)t \Psi_t]. \end{aligned}$$

Преобразовав последнее выражение, сократив на  $t^2$ , получим

$$\begin{aligned} 4\Psi_{tt} &= \left\{ (2s - 3)\Psi_t \left[ (2s^2 - 7s + 9)t \Psi_{tt} + (4s^2 - 14s + 12)\Psi_t \right] \right. \\ &\left. + 4A[(s^2 - 3s + 12)t \Psi_{tt} + (2s^2 - 2s)\Psi_t] \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Из (3.18) следует, что по теореме Коши функция (3.17) аналитична в окрестности точки  $t = 0$ . А так как ее коэффициенты  $\Psi_n$  мажорируют коэффициенты  $V_n$ , то и ряд (3.8) также сходится в той же окрестности. Заключаем, что в трансзвуковом приближении в случае осевой симметрии при условии равенства нулю скорости ускорения течения в его центре нами найдено автомодельное решение, аналитичное при  $|t| < t_*$ . Учитывая, что автомодельная переменная определена как  $t = z^{s-3}r^2$ , получим, что исходный ряд (3.5) будет аналитичен в области, ограниченной кривыми

$$|z| < \left( \frac{t_*}{r^2} \right)^{\frac{1}{s-3}},$$

включая и линию перехода через скорость звука  $z = 0$  при любом  $r$ . Данное обстоятельство позволяет для любой степени заторможенности потока  $s \geq 4$ , т. е. для сколь угодно плавного перехода из дозвуковой области в сверхзвуковую, построить сколь угодно широкое сопло (за счет, быть может, уменьшения его длины), внутри которого течение не будет содержать особенностей на прямой звуковой линии. Таким образом, найдено решение трансзвукового уравнения, которое реализует первое предположение, указанное в начале этого раздела, — гипотезу 1, а именно, доказано следующее

**Утверждение 1.** В случае равенства нулю скорости ускорения течения на прямой звуковой линии, т. е.  $\Phi_{zzz}|_{z=0} = 0$ , существуют решения без особенностей в том смысле, что радиус сходимости стремится в бесконечность  $r_* \rightarrow +\infty$  при стремлении продольной переменной к нулевому значению ( $z \rightarrow 0$ ).

#### 4. Примыкание особенности к прямой звуковой линии

Второе предположение по решению уравнения Кармана, которое аналитично для любых значений радиальной  $r$  и малой продольной  $z$  переменных, означает, что такое решение представляет собой при любом достаточно малом  $z$  целую функцию [34] по степеням  $r$ :

$$\Phi(r, z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z)r + \Phi_2(z)r^2 + \dots + \dots + \Phi_N(z)r^N + \dots \quad (4.1)$$

Радиус сходимости ряда (4.1) предполагается бесконечным ( $r_* = \infty$ ) для любых значений  $z$ , удовлетворяющих неравенству  $|z| < z_*$ , для некоторого  $z_* > 0$ . Пусть нулевой коэффициент ряда (4.1)

$$\Phi_0(z) = a_4 z^4 + a_5 z^5 + \dots, \quad (4.2)$$

является сходящимся рядом при малых значениях  $|z| < z_*$  в окрестности точки  $z = 0$ . Тогда область сходимости ряда включает полосу, заключенную между прямыми  $z = \pm z_*$ .

Важным классом решений является класс решений в виде многочленов по степеням одной переменной [31–33]. Покажем невозможность этого в случае, когда  $\Phi(r, z)$  — многочлен от  $r$ :

$$\Phi(r, z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z)r + \Phi_2(z)r^2 + \dots + \dots + \Phi_N(z)r^N. \quad (4.3)$$

Поскольку решение есть многочлен по степеням  $r$ , коэффициенты  $\Phi_i(z)$  могут быть не равны нулю для  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , а для коэффициентов с номерами  $n$ , удовлетворяющих неравенству  $n > N$ , где  $N$  — наибольшая степень  $r$ , входящая в (4.3), справедливо

$$\Phi_n(z) = 0 \quad \text{при любых } n > N. \quad (4.4)$$

Положим  $n = 2N + 2 > N$ , тогда имеем  $k = l = N$ ,

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{[n(n-1) + \nu n]} \dot{\Phi}_N(z) \ddot{\Phi}_N(z).$$

Откуда заключаем, что  $\Phi_n(z) \neq 0$  для значения  $n > N$  — получается противоречие. Итак, предположение, что существует решение в виде целой функции (4.3), оказалось неверным.

Другой важный для газодинамических приложений [32] класс течений описывается решениями, в которых скорость газа на оси сопла представляет собой абсолютно монотонную функцию. Рассмотрим случай, когда решение уравнения Кармана представляет собой целую функцию, записанную в виде (4.1), в предположении, что в выражении (4.2) коэффициенты  $a_4, a_5, \dots$ , являются неотрицательными числами. В силу этого  $\Phi_0(z)$  можно рассматривать как мажоранту, т. е. скорость газа на оси сопла — аналитическая абсолютно монотонная функция.

Допустим, что существует аналитическая функция  $\Phi_0(z)$  в виде (4.2), удовлетворяющая вышеуказанным требованиям. Тогда, используя рекуррентное соотношение между  $\Phi_1(z)$ ,  $\Phi_2(z)$ ,  $\Phi_3(z)$ ,  $\Phi_4(z)$ ,  $\dots$ , можно найти все коэффициенты целой функции (4.1). В силу условия осевой симметрии  $\Phi_r = 0$  заключаем, что первый коэффициент ряда (3.5) будет нулевой функцией, и аналогично вышеизложенному получим, что коэффициенты с нечетными номерами будут тождественными нулями. Подстановка найденных значений четных коэффициентов при фиксированном  $z = z_0$  при условии  $|z_0| < z_*$  приводит ряд (4.1) к числовому ряду вида

$$\Phi(z_0, r) = \Phi_0(z_0) + \Phi_2(z_0)r^2 + \Phi_4(z_0)r^4 + \dots, \quad (4.5)$$

радиус сходимости которого по  $r$  равен бесконечности, т. е.  $r_* = \infty$ .

Итак, предположим, что  $\Phi_k(z) \gg 0$  является мажорирующей нуль функцией, записанной в общем виде

$$\Phi_k(z) = a_{k_4} z^4 + a_{k_5} z^5 + \dots, \quad (4.6)$$

где  $a_{k_4}, a_{k_5}, \dots$  — неотрицательные числа.

Продифференцировав выражение (4.6) по переменной  $z$ , получим

$$\dot{\Phi}_k(z) = 4a_{k_4}z^3 + 5a_{k_5}z^4 + \dots \gg 0,$$

также мажорирующую нуль функцию; оценив ее как

$$4a_{k_4}z^3 + 5a_{k_5}z^4 + \dots \geq \frac{1}{z} (a_{k_4}z^4 + a_{k_5}z^5 + \dots),$$

запишем

$$\dot{\Phi}_k(z) \gg \Phi_k(z)/z. \quad (4.7)$$

Аналогично для мажорирующей функции  $\Phi_k(z) \gg 0$  имеем

$$\ddot{\Phi}_k(z) \gg \Phi_k(z)/z^2. \quad (4.8)$$

Положим  $z$  такое, что  $|z| < z_*$ , и перепишем

$$n(n-1)\Phi_n(z) + \nu n\Phi_n(z) = \sum_{k+l=n-2} \dot{\Phi}_k(z)\ddot{\Phi}_l(z).$$

Отсюда, выразив  $\Phi_n(z)$ , получим

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{[n(n-1) + \nu n]} \sum_{k+l=n-2} \dot{\Phi}_k(z)\ddot{\Phi}_l(z). \quad (4.9)$$

Оценивая выражение (4.9) при помощи (4.7), (4.8) снизу, получим

$$\Phi_n(z) \gg \frac{1}{[n(n-1) + \nu n]z^3} \sum_{k+l=n-2} \Phi_k(z)\Phi_l(z). \quad (4.10)$$

Для любого  $|z| < z_*$  определим  $\Psi_n(z)$  следующей рекурсией:

$$\begin{cases} \Phi_0(z) = \Psi_0(z), \\ \Phi_1(z) = \Psi_1(z) = 0, \\ \Psi_n(z) = \sum_{k+l=n-2} \Psi_k(z)\Psi_l(z) / ([n(n-1) + \nu n]z^3). \end{cases} \quad (4.11)$$

И тогда по индукции, оценивая, как в (4.9), получим оценку снизу

$$\Phi_n(z) \gg \Psi_n(z). \quad (4.12)$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(z, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(z)r^n.$$

По (4.11) при каждом  $z_0$  она является решением уравнения

$$\Psi_{rr} + \frac{\nu}{r}\Psi_r = \frac{1}{z^3}\Psi^2, \quad (4.13)$$

причем на оси симметрии справедливы следующие условия:

$$\Psi|_{r=0} = \Psi_0(z_0) = \Phi_0(z_0) > 0, \quad \Psi_r|_{r=0} = 0, \quad (|z_0| < z_*). \quad (4.14)$$

Замечаем, что уравнение (4.13) является обыкновенным дифференциальным уравнением вида Овсянникова — Похожаева, общее решение которого в плоском случае ( $\nu = 0$ ) определяется



через эллиптические функции Вейерштрасса, имеющие особенность типа полюсов на конечном расстоянии от оси симметрии [9]. Нами в [24] обосновано наличие таких же особенностей на прямой звуковой линии в случае осевой симметрии. Данное обстоятельство показывает, что общее ненулевое решение (3.5) уравнения Кармана имеет конечный радиус сходимости, так как отношение мажорирования является отношением частичного порядка, причем если  $\Phi \gg \Psi$ , то радиусы сходимости связаны обратным соотношением  $R(\Psi) \ll R(\Phi)$ . Следовательно, второе предположение о существовании нулевого коэффициента (4.2) в виде аналитической мажоранты при малых значениях  $z$ , определяющего целое решение (4.1) этого уравнения, неверно.

Наконец, дадим третью, газодинамическую, трактовку утверждения об отсутствии особенности в течении, примыкающем к прямой звуковой линии, без предположения аналитичности соответствующего решения. Наличие точки особенности на звуковой линии при ненулевой скорости ускорения течения в его центре газодинамически проявляется в сложной конфигурации нескольких звуковых линий, пересекающихся в этой точке [6, 7]. Построенные выше автомодельные решения при обращении в нуль скорости ускорения в центре течения “отодвигают” в бесконечность точку пересечения линий особенностей течения (к которым в данной интерпретации мы относим и звуковые линии). При этом нет необходимости исследовать экзотические решения, не имеющие физического смысла, например, дозвуковые по обе стороны от звуковой линии [18]. Поскольку сопло Лавала предназначено для ускорения потока газа, естественно изучить возможность примыкания к прямой звуковой линии полосы конечной ширины  $0 < z < z_0$ , в которой выполняется не только условие сверхзвукового потока  $\Phi_z > 0$ , но и условие положительности нескольких первых производных от потенциала по продольной переменной (для абсолютно монотонной функции они все неотрицательны).

Итак, предположим, что в некоторой полосе  $0 < z < z_*$  при всех  $r \geq 0$  справедливы неравенства  $\Phi_z > 0$ ,  $\Phi_{zz} \geq 0$ ,  $\Phi_{zzz} \geq 0$ ,  $\Phi_{zzzz} \geq 0$ ,  $\Phi_{zzzzz} \geq 0$  для пятикратно дифференцируемого решения  $\Phi(r, z)$  уравнения Кармана. Рассмотрев его дифференциальное следствие (3.3), получаем неравенство

$$\Phi_{rrzzz} + \frac{\nu}{r}\Phi_{rzzz} \geq 3\Phi_{zzz}\Phi_{zzz}.$$

Поскольку условие  $\Phi_{zzz} \equiv 0$  приводит к тривиальному течению — равномерному звуковому потоку, возьмем в сверхзвуковой области точку  $z_0$ ,  $r = 0$ , в которой  $\Phi_{zzz} > 0$ , и, как это было сделано выше, сравним функцию  $\Phi(r, z)$  при  $z = z_0$  с решением уравнения Овсянникова — Похожаева:

$$\Psi_{rr} + \frac{\nu}{r}\Psi_r = 3\Psi^2, \quad \Psi(0, z_0) = \Phi(0, z_0), \quad \Psi_r(0, z_0) = 0.$$

Приходим к неравенству  $0 < \Psi(r, z_0) \leq \Phi(r, z_0)$  при  $r > 0$ , откуда заключаем, что  $\Phi(r, z_0)$  обращается в бесконечность не позднее, чем  $\Psi(r, z_0)$ . Итак, и это третье предположение не может реализоваться, что подтверждает мнение С.В. Хабирова:

**Утверждение 2.** Гипотеза 2 не выполняется в том смысле, что не существует примыкающего к прямой звуковой линии неоднородного сверхзвукового потока, не имеющего особенности в полосе  $0 < z < z_*$  при всех  $r \geq 0$ .

## 5. Заключение

Таким образом, в трансзвуковом приближении решена проблема, поставленная Л.В. Овсянниковым, а именно, доказано, что для классического решения, описывающего непрерывное осесимметричное потенциальное установившееся трансзвуковое течение, при условии уплощения  $\Phi_{zz} = 0$  в центре течения звуковая линия является прямой. Газодинамически это означает устойчивость конфигурации такого течения газа внутри сопла. При этом на конечном расстоянии  $r^*$  от оси симметрии эта прямая звуковая линия содержит особенность, соответствующую обращению потенциала в бесконечность, при условии отличия от нуля скорости ускорения течения  $\Phi_{zzz} \neq 0$  в его центре. С точки зрения газовой динамики, полученный

результат показывает наличие ограничений на толщину сопла, т. е. в более толстых соплах ( $r > r^*$ ) невозможно получить трансзвуковое течение с плоской поверхностью перехода через скорость звука. Наконец, при обращении в нуль скорости ускорения в его центре существуют трансзвуковые течения без особенности на прямой звуковой линии, в том числе описываемые автомодельными решениями, однако не существует сверхзвуковых течений, описываемых функциями без особенностей в примыкающей к этой линии полосе постоянной ширины.

Авторы выражают благодарность Л.В. Овсянникову за постановку задачи, А.Н. Крайко, Н.И. Макаренко, В.М. Тешукову, С.В. Хабирову и А.П. Чупахину за внимание к работе, полезные обсуждения и вдохновляющие дискуссии.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физмалит, 2001.
2. **Овсянников Л.В.** О сходимости ряда Мейера для осесимметричного сопла // Мартесен Е., Зенгбуш Р. фон. Расчет околосзвуковой части плоских и осесимметричных сопел с криволинейной линией перехода. Новосибирск: СО АН СССР, 1962. С. 41–43.
3. **Дородницын А.А.** Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа // Сборник теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 77–88.
4. **Баутин С.П.** Аналитические решения задачи о движении поршня // Числ. методы механики сплошной среды. 1973. Т. 4, № 1. С. 3–15.
5. **Баутин С.П.** Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 2, № 11. С. 2052–2063.
6. **Пирумов У.Г.** Обратная задача теории сопла. М.: Машиностроение, 1988.
7. **Пирумов У.Г., Росляков Г.С.** Течения газа в соплах. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
8. **Рыжов О.С.** Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М.: ВЦ АН СССР, 1965.
9. **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исследований, 2003.
10. **Титов С.С.** Об околосзвуковом обтекании газом тонких тел вращения // Аналитические методы механики сплошной среды. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1979. Вып. 33. С. 65–72.
11. **Курмаева К.В., Титов С.С.** Аналитическое построение ближнего поля трансзвукового течения около тонкого тела вращения // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. Т. 8, № 3(23). С. 93–101.
12. **Курмаева К.В., Титов С.С.** Обобщение аналитических решений Л.В. Овсянникова для трансзвуковых течений // Прикл. механика и техн. физика. 2005. Т. 46, № 6. С. 14–25.
13. **Карман Т.** Закон подобия для звукового потока. Газовая динамика. М.: ИЛ, 1950.
14. **Гудерлей К.Г.** Теория околосзвуковых течений. М.: ИЛ, 1960.
15. **Ларькин Н.А.** Гладкие решения уравнений трансзвуковой газодинамики. Новосибирск: Наука, 1991.
16. **Кацкова О.И., Шмыглевский Ю.Д.** Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью (таблицы) // Вычисл. математика. М.: АН СССР, 1957. Сб. 2. С. 45–90.
17. **Кацкова О.И.** Об осесимметричном свободном расширении реального газа // Вычисл. математика и мат. физика. 1961. Т. 1, № 2. С. 301–308.
18. **Крайко А.Н.** Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 6. С. 941–950.
19. **Görtler G.H.** Zum Übergang von Unterschall zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen // Z. Angew. Math. and Mech. 1939. Bd. 19. H. 6.
20. **Gilbarg D., Shiffman M.** On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // J. Ration. Mech. and Analysis. 1954. Vol. 3, no. 6. P. 209–230.
21. **Франкль Ф.И.** К теории сопел Лаваля // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1945. № 3.
22. **Франкль Ф.И.** О прямой задаче теории сопла Лаваля // Учен. зап. Кавказ.-Балк. гос. ун-та. 1959, вып. 3.
23. **Титов С.С.** Решение уравнений с особенностями в аналитических шкалах банаховых пространств: Препринт. Екатеринбург: УралГАХА, 1999.
24. **Курмаева К.В., Титов С.С.** Особенности прямой звуковой линии симметричного потока в трансзвуковом приближении // Тр. математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 24. Казань: Казанское мат. об-во, 2004. С. 55–56.

25. **Курмаева К.В.** Решение проблемы Овсянникова о прямолинейной звуковой линии в осесимметричных течениях // Проблемы прикл. математики. Екатеринбург: УрГУПС, 2006. Т. 1. С. 166–211.
26. **Курмаева К.В.** Аналоги теоремы Ковалевской для уравнений с особенностью и их приложения в газовой динамике: Автореф. дис. ...канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2007.
27. **Курмаева К.В.** Решение обобщенной задачи Коши для осесимметричного уравнения потенциала с данными на оси симметрии // Молодые ученые — транспорту: Тр. V межвуз. науч.-техн. конф. Екатеринбург: УрГУПС, 2005. С. 351–362.
28. **Курмаева К.В.** Задача Коши для течений газа с данными на оси симметрии // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тр. XXXVI регион. молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. С. 151–157.
29. **Курмаева К.В.** Прямая звуковая линия без особенностей // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тр. XXXVII регион. молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. С. 214–219.
30. **Курмаева К.В.** Автомодельные решения без особенностей на прямой звуковой линии // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения: Мат-лы науч. конф. СПб., 2006. С. 99–105.
31. **Титов С.С.** О решении нелинейных уравнений в частных производных в виде многочленов по одной из переменных // Числ. методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8, №. 1. С. 144–149.
32. **Titov S.S.** Non-local solutions of the Cauchy problem in scales of analytic polyalgebras // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2. 2003. P. S148–S172.
33. **Khapiro S.V.** On some invariant solutions of rank 1 in gas dynamics // Proc. of the MOGRAN-2000. Modern group analysis for the new millenium. Ufa, 2000. P. 88–89.
34. **Маркушевич А.И.** Целые функции. Элементарный очерк. М.: Наука, 1975.
35. **Ковалевская С.В.** К теории дифференциальных уравнений в частных производных // Научные работы. М.; Л.: АН СССР, 1948. С. 7–50.

Поступила 19.09.2007

УДК 517.956.8

## О СТРУКТУРЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ<sup>1</sup>

Е. Ф. Леликова

Поведение решений эллиптических уравнений в окрестностях угловых и конических точек границы хорошо изучено, построена асимптотика этих решений. В настоящей работе предлагается новый подход к построению асимптотических разложений в окрестности угловой точки границы, который позволяет достаточно просто и наглядно описать структуру этих асимптотик.

### Введение

Краевые задачи для областей с угловыми точками рассматривались многими авторами (см. напр.: [1–4]). Исследовались вопросы существования и гладкости решений этих задач. Использовались специальные пространства, учитывающие особенности решений: последние являются всюду вне окрестности угловых точек гладкими, а их производные имеют, вообще говоря, степенные особенности при приближении к угловой точке. Наиболее полные результаты по этой проблеме содержатся в работе В.А. Кондратьева [4], посвященной коническим и угловым точкам. В частности, для уравнения

$$Lu = a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \quad (0.1)$$

было построено асимптотическое разложение решения первой краевой задачи для области, совпадающей в окрестности начала координат с углом  $0 < \theta < \beta$ , где  $0 < \beta \leq 2\pi$ . Было доказано [4, п. 5.4], что асимптотическое разложение решения  $u(x, y)$  имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{m, q} a_{mq} r^{\frac{\pi}{\beta} m} P_{mq}(r \ln^q r) + \sum_{i_1, i_2} a_{i_1, i_2} x^{i_1} y^{i_2} + \sum_{j_1, j_2} r^{j_1} \ln^{j_2} r Z_{j_1, j_2}(\theta), \quad (0.2)$$

где  $m > 0$ ,  $i_1 + i_2 \geq 0$ ,  $j_1 \geq 2$ ,  $P_{mq}$  — полином, коэффициенты которого являются линейными комбинациями тригонометрических функций; функции  $Z_{j_1, j_2}(\theta)$  бесконечно дифференцируемы и обращаются в нуль на сторонах угла, т. е. при  $\theta = 0$  и при  $\theta = \beta$ .

В настоящей работе предложен некоторый новый подход к построению асимптотики в окрестности угловой точки, позволяющий по-другому взглянуть на структуру асимптотического разложения (0.2) и в чем-то уточнить ее. Асимптотика будет описана с помощью некоторых достаточно простых и наглядных гармонических функций. В разд. 1 эти функции вводятся и там же описываются их свойства, в разд. 2 описывается процесс построения асимптотики решения уравнения (0.1) на языке этих функций.

---

<sup>1</sup>Работа поддержана РФФИ (проект 05-01-01008) и Программой фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН.

## 1. Вспомогательные построения

Введем классы функций, посредством которых будет описана асимптотика, и рассмотрим свойства этих функций.

Пусть  $r, \theta$  — полярные координаты в комплексной плоскости  $z = x + iy = re^{i\theta}$ . При  $0 \leq \theta < 2\pi$  рассмотрим функцию

$$V_{k,n}(z) = (\ln z)^n z^k = (\ln r + i\theta)^n (x + iy)^k = (\ln r + i\theta)^n r^k e^{ik\theta}, \quad (1.1)$$

где  $n \geq 0$  и  $k$  — целые числа.

Обозначим

$$\operatorname{Re} V_{k,n} = P_{kn}^{(2)}(x, y), \quad \operatorname{Im} V_{k,n} = P_{kn}^{(1)}(x, y). \quad (1.2)$$

Число  $k$  будем называть порядком функции  $P_{kn}^{(j)}(x, y)$ , а число  $n$  — индексом этой функции. Отметим, что при  $k \geq 0$  функции  $P_{k0}^{(j)}(x, y)$  — это однородные гармонические полиномы порядка  $k$ :  $P_{k0}^{(1)} = r^k \sin k\theta$ ,  $P_{k0}^{(2)} = r^k \cos k\theta$ , и иногда, если это не будет вызывать недоразумений, будем обозначать их просто через  $P_k^{(j)}(x, y)$ .

Функции  $P_{kn}^{(1)}(x, y)$  и  $P_{kn}^{(2)}(x, y)$  — сопряженные гармонические функции в плоскости  $(x, y)$  с разрезом вдоль положительной полуоси  $x$ :

$$\Delta P_{kn}^{(j)} = 0; \quad \frac{\partial P_{kn}^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial P_{kn}^{(1)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_{kn}^{(2)}}{\partial y} = -\frac{\partial P_{kn}^{(1)}}{\partial x}.$$

Поскольку по определению

$$V_{k,n}(z) = \ln z V_{k,n-1}(z) = (\ln r + i\theta)(P_{k,n-1}^{(2)}(x, y) + iP_{k,n-1}^{(1)}(x, y)),$$

то очевидны следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} P_{k,n}^{(1)} &= \ln r P_{k,n-1}^{(1)} + \theta P_{k,n-1}^{(2)}, \\ P_{k,n}^{(2)} &= \ln r P_{k,n-1}^{(2)} - \theta P_{k,n-1}^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

которые позволяют выразить функции  $P_{k,n}^{(j)}$  в конечном итоге через функции  $P_{k,0}^{(s)}$ , т. е. в случае когда  $k \geq 0$ , — через гармонические полиномы  $P_k^{(s)}$ .

Этой цели можно достичь, воспользовавшись и непосредственным определением функций  $P_{k,n}^{(j)}$ . Запишем равенство (1.1) в виде

$$V_{k,n}(z) = (Q_n^{(1)}(\ln r, \theta) + iQ_{n-1}^{(2)}(\ln r, \theta))(P_{k,0}^{(2)}(x, y) + iP_{k,0}^{(1)}(x, y)), \quad (1.4)$$

где

$$Q_n^{(1)}(\ln r, \theta) = \sum_{s=0}^{[n/2]} \gamma_s^{(n)} (\ln r)^{n-2s} \theta^{2s}, \quad Q_{n-1}^{(2)}(\ln r, \theta) = \theta \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \tilde{\gamma}_s^{(n)} (\ln r)^{n-1-2s} \theta^{2s} \quad (1.5)$$

— полиномы степеней  $n$  и  $n-1$  соответственно относительно  $\ln r$ , являющиеся, кроме того, однородными полиномами степени  $n$  относительно  $\ln r$  и  $\theta$ ;  $\gamma_0^{(n)} = 1$ ,  $\tilde{\gamma}_0^{(n)} = n$ ,  $Q_{n-1}^{(2)}(\ln r, 0) = 0$ ,  $Q_n^{(1)}(\ln r, 0) = \ln^n r$ . В результате получим новые соотношения для функций  $P_{k,n}^{(j)}$ :

$$\begin{aligned} P_{k,n}^{(1)}(x, y) &= Q_n^{(1)}(\ln r, \theta) P_{k0}^{(1)} + Q_{n-1}^{(2)}(\ln r, \theta) P_{k0}^{(2)}, \\ P_{k,n}^{(2)}(x, y) &= Q_n^{(1)}(\ln r, \theta) P_{k0}^{(2)} - Q_{n-1}^{(2)}(\ln r, \theta) P_{k0}^{(1)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отметим, что для всех  $k$  функции  $P_{k,n}^{(1)}$  обращаются в нуль при  $y = 0$ ,  $x > 0$ .

Выпишем несколько первых функций  $P_{kn}^{(j)}(x, y)$ :

$$P_0^{(1)} \equiv 0, \quad P_0^{(2)} \equiv 1; \quad P_{01}^{(1)} = \theta, \quad P_{01}^{(2)} = \ln r;$$

$$P_1^{(1)} = y, \quad P_1^{(2)} = x; \quad P_{11}^{(1)} = y \ln r + x\theta, \quad P_{11}^{(2)} = x \ln r - y\theta;$$

$$P_2^{(1)} = xy, \quad P_2^{(2)} = x^2 - y^2; \quad P_{21}^{(1)} = xy \ln r + \theta(x^2 - y^2), \quad P_{21}^{(2)} = (x^2 - y^2) \ln r - \theta xy.$$

Установим теперь ряд соотношений, которым удовлетворяют производные функций  $P_{k,n}^{(j)}$ . С одной стороны, согласно определению

$$\begin{aligned} \frac{dV_{kn}}{dz} &= n(\ln z)^{n-1} z^{k-1} + k(\ln z)^n z^{k-1} = nV_{k-1,n-1} + kV_{k-1,n} \\ &= (kP_{k-1,n}^{(2)} + nP_{k-1,n-1}^{(2)}) + i(kP_{k-1,n}^{(1)} + nP_{k-1,n-1}^{(1)}). \end{aligned}$$

С другой стороны, производная  $\frac{dV_{kn}}{dz}$  может быть записана либо в виде

$$\frac{dV_{kn}}{dz} = \frac{\partial P_{k,n}^{(2)}}{\partial x} + i \frac{\partial P_{k,n}^{(1)}}{\partial x},$$

либо в виде

$$\frac{dV_{kn}}{dz} = \frac{\partial P_{k,n}^{(1)}}{\partial y} - i \frac{\partial P_{k,n}^{(2)}}{\partial y}.$$

Сравнивая три выписанных выражения для  $\frac{dV_{kn}}{dz}$ , приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{k,n}^{(2)}}{\partial x} &= \frac{\partial P_{k,n}^{(1)}}{\partial y} = kP_{k-1,n}^{(2)} + nP_{k-1,n-1}^{(2)}, \\ -\frac{\partial P_{k,n}^{(2)}}{\partial y} &= \frac{\partial P_{k,n}^{(1)}}{\partial x} = kP_{k-1,n}^{(1)} + nP_{k-1,n-1}^{(1)}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

связывающим производные от  $P_{k,n}^{(j)}$  с функциями  $P_{k-1,n}^{(s)}$  и  $P_{k-1,n-1}^{(s)}$ . Так, при  $k \neq 0$  производная от функции  $P_{k,n}^{(j)}$ , имеющей порядок  $k$  и индекс  $n$ , представляется в виде линейной комбинации функции  $P_{k-1,n}^{(l)}$  порядка  $k-1$  и индекса  $n$  и функции  $P_{k-1,n-1}^{(s)}$  порядка  $k-1$  и индекса  $n-1$ . Перепишем соотношения (1.7) следующим образом: при  $k \neq -1$

$$P_{k,n}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \left( \frac{\partial P_{k+1,n}^{(1)}}{\partial x} - nP_{k,n-1}^{(1)} \right); \\ \frac{1}{k+1} \left( -\frac{\partial P_{k+1,n}^{(2)}}{\partial y} - nP_{k,n-1}^{(1)} \right); \end{cases} \tag{1.8}$$

$$P_{k,n}^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \left( \frac{\partial P_{k+1,n}^{(2)}}{\partial x} - nP_{k,n-1}^{(2)} \right); \\ \frac{1}{k+1} \left( \frac{\partial P_{k+1,n}^{(1)}}{\partial y} - nP_{k,n-1}^{(2)} \right). \end{cases} \tag{1.9}$$

Легко видеть, что при  $k \neq -1$  из (1.8) и (1.9) могут быть получены следующие соотношения:

$$\begin{cases} P_{k,n}^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(k,n,j)} P_{k+1,n-i}^{(j)} \right), & \alpha_0^{(k,n,j)} \neq 0, \\ P_{k,n}^{(j)} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{i=0}^n \beta_i^{(k,n,j)} P_{k+1,n-i}^{(l)} \right), & \beta_0^{(k,n,j)} \neq 0, \quad l \neq j. \end{cases} \quad (1.10)$$

Множество линейных комбинаций функций вида

$$u(x, y) = x^m y^p P_{k,n}^{(j)}(x, y),$$

где  $k, m, p$  — неотрицательные целые числа, обозначим через  $\mathcal{P}$ , а множество линейных комбинаций гармонических функций  $P_{k,n}^{(j)}(x, y)$ , где  $k, n, j$  принимают любые допустимые значения, — через  $\mathcal{P}^{(0)}$ . Очевидно, что  $\mathcal{P}^{(0)} \subset \mathcal{P}$ . Используя явное представление (1.2) гармонических функций  $P_{k,n}^{(j)}$ , нетрудно показать, что функция  $u(x, y)$  имеет вид

$$u(x, y) = r^q \sum_{s=1}^{n_1} \ln^s r \Phi_s^{(k,n,j)}(\theta),$$

где  $q = k + m + p$ ;  $n_1 = n - 1$ , если  $k = 0, j = 1$ ;  $n_1 = n$  для всех остальных допустимых значений  $k, n, j$ ;  $\Phi_s^{(k,n,j)}(\theta)$  — сумма слагаемых вида  $C_i \theta^{h_i} \sin^{h'_i} \theta \cos^{h''_i} \theta$ . Число  $q$  будем называть порядком, а число  $n_1$  — индексом функции  $u(x, y)$ . Подмножество множества  $\mathcal{P}$  ( $\mathcal{P}^{(0)}$ ), все элементы которого имеют фиксированный порядок  $q \geq 0$  и индекс, не превосходящий  $n$ , будем обозначать через  $\mathcal{P}_{qn}$  ( $\mathcal{P}_{qn}^{(0)}$ ).

**Лемма 1.** *Для любых целых  $k, s \geq 0$  существует функция  $\tilde{u}(x, y) \in \mathcal{P}_{k+s+2,n}$ , являющаяся решением неоднородного уравнения*

$$\Delta u = x^s P_{k,n}^{(j)}(x, y). \quad (1.11)$$

Доказательство этой леммы очень простое и основано на возможности представления гармонической функции  $P_{k,n}^{(j)}(x, y)$  при  $k \geq 0$  либо в виде (1.8), либо в виде (1.9).

Пусть  $v(x, y)$  — гармоническая функция и пусть существуют гармонические функции  $v_0(x, y), v_1(x, y), v_2(x, y), \dots, v_{s-1}(x, y), v_s(x, y)$  такие, что

$$v = \frac{\partial v_0}{\partial x}, \quad v_0 = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad v_1 = \frac{\partial v_2}{\partial x}, \quad \dots \quad v_{s-1} = \frac{\partial v_s}{\partial x}. \quad (1.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что можно подобрать коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_{s-1}, a_s$  таким образом, чтобы функция

$$\tilde{u}(x, y) = a_0 x^{s+1} v_0 + a_1 x^s v_1 + a_2 x^{s-1} v_2 + \dots + a_{s-2} x^3 v_{s-2} + a_{s-1} x^2 v_{s-1} + a_s x v_s$$

являлась решением неоднородного уравнения

$$\Delta u = x^s v(x, y).$$

Действительно, для функции  $\tilde{u}(x, y)$  в силу (1.12) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= a_0(s+1)sx^{s-1}v_0 + 2a_0(s+1)x^s \frac{\partial v_0}{\partial x} + a_1s(s-1)x^{s-2}v_1 \\ &+ 2a_1sx^{s-1} \frac{\partial v_1}{\partial x} + a_2(s-1)(s-2)x^{s-3}v_2 + 2a_2(s-1)x^{s-2} \frac{\partial v_2}{\partial x} \\ &+ \cdots + a(s-2)6xv_{s-2} + a_{s-2}6x^2 \frac{\partial v_{s-2}}{\partial x} + a_{s-1}2v_{s-1} + 2a_{s-1}x \frac{\partial v_{s-1}}{\partial x} + 2a_s \frac{\partial v_s}{\partial x} \\ &= 2a_0(s+1)x^s v + [a_0(s+1)s + 2a_1s]x^{s-1}v_0 + [a_1s(s-1) + 2a_2(s-1)]x^{s-2}v_1 \\ &+ \cdots + [6a_{s-2} + 2a_{s-1}]xv_{s-2} + [2a_{s-1} + 2a_s]v_{s-1} \\ &= 2a_0(s+1)x^s v + \sum_{l=1}^{s-1} b_l x^{s-l} v_l. \end{aligned}$$

Полагая  $2a_0(s+1) = 1$ ,  $b_l = 0$ , последовательно определим коэффициенты  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Построенная функция  $\tilde{u}(x, y)$  является решением неоднородного уравнения  $\Delta u = x^s v(x, y)$ .

Используя представление (1.10) гармонической функции  $P_{k,n}^{(j)}(x, y)$ , построим в соответствии с предложенным алгоритмом решение неоднородного уравнения (1.11) в виде

$$\tilde{u} = \sum_{l=0}^n \sum_{p=0}^s \mu_{lp} x^{s+1-p} P_{k+1+p, n-l}^{(j)}. \quad (1.13)$$

Очевидно, что функция  $\tilde{u}(x, y) \in \mathcal{P}_{k+s+2, n}$ . Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 2.** Для любых целых  $k, s \geq 0$  существует функция  $\tilde{u}(x, y) \in \mathcal{P}_{k+s+2, n}$ , являющаяся решением неоднородного уравнения

$$\Delta u = y^s P_{k,n}^{(j)}(x, y).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству предыдущей леммы. Решение  $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y)$  имеет вид

$$\tilde{u} = \sum_{l=0}^n \sum_{p=0}^s y^{s+1-p} \left( \gamma_{lp} P_{k+1+p, n-l}^{(1)} + \tilde{\gamma}_{lp} P_{k+1+p, n-l}^{(2)} \right).$$

**Лемма 3.** Для любых целых  $k, s, q \geq 0$  существует функция  $\tilde{u}(x, y) \in \mathcal{P}_{k+s+q+2, n}$ , являющаяся решением неоднородного уравнения

$$\Delta u = x^s y^q P_{k,n}^{(j)}(x, y).$$

Доказательство этой леммы сводится к последовательному применению алгоритмов, использованных при доказательстве предыдущих лемм. Можно проверить, что построенное таким способом решение  $\tilde{u}(x, y)$  имеет вид

$$\tilde{u} = \sum \gamma_i x^{i_1} y^{i_2} P_{k+1+i_3, n-l}^{(1)} + \sum \tilde{\gamma}_i x^{i_1} y^{i_2} P_{k+1+i_3, n-l}^{(2)}, \quad (1.14)$$

где  $i = (i_1, i_2, i_3)$ ,  $1 \leq i_1 + i_2 \leq s + q + 1$ ,  $i_1 + i_2 + i_3 = s + q + 1$ ,  $0 \leq l \leq n$ .  $\square$



З а м е ч а н и е 1. Очевидно, что так же, как было описано выше, могут быть построены решения неоднородных уравнений вида

$$\Delta u = x^s y^q \frac{\partial P_{kn}^{(j)}}{\partial x}, \quad \Delta u = x^s y^q \frac{\partial P_{kn}^{(j)}}{\partial y}.$$

При этом  $u(x, y) \in \mathcal{P}_{k+s+q+1, n}$ .

В леммах 1–3 были построены решения неоднородных уравнений  $\Delta u = f(x, y)$  со “специальными” правыми частями вида  $f(x, y) = x^m y^q P_{k, n}^{(j)}(x, y)$ , или, что то же самое, для любой функции  $f(x, y) \in \mathcal{P}_{k, n}$  построено решение  $\tilde{u}(x, y) \in \mathcal{P}_{k+m+q+2, n}$  неоднородного уравнения  $\Delta u = f(x, y)$  (см. (1.14)).

В следующих леммах будут предложены алгоритмы построения решений для однородных уравнений  $\Delta u = 0$ , совпадающих на сторонах угла  $D = \{re^\theta : r > 0, 0 < \theta < \beta\}$ ,  $\beta \leq 2\pi$ , с функциями  $\varphi(x, y) = x^m y^q P_{k, n}^{(j)}(x, y)$ . Эти решения суть гармонические функции, удовлетворяющие “специальным” граничным условиям на сторонах угла  $D$ . Будем обозначать границу угла  $D$ , т. е. объединение лучей  $\theta = 0$  и  $\theta = \beta$  через  $\Gamma$ . Будем также считать, что  $m, q, k, n, j, \beta$  таковы, что граничная функция  $\varphi(x, y) \neq 0$  на границе  $\Gamma$ .

Прежде чем сформулировать утверждения следующих лемм, рассмотрим поведение функций  $P_{kn}^{(j)}(x, y)$  на фиксированном луче  $\theta = \theta_0$ . Запишем гармонический полином  $P_k^{(1)}(x, y)$  в виде  $P_k^{(1)}(x, y) = r^k \sin k\theta$ . Очевидно, что для фиксированного  $k$  полином  $P_k^{(1)}(x, y)$  обращается в нуль на  $2k$  лучах  $\theta_{kj}^{(1)} = \frac{\pi}{k}j$ ,  $0 \leq j \leq 2k - 1$ . В частности, отметим, что для всех  $k$  эти полиномы обращаются в нуль на оси  $x$ , а для четных  $k = 2m$  — и на оси  $y$ :

$$P_k^{(1)}(x, 0) = 0, \quad P_{2m}^{(1)}(0, y) = 0.$$

Далее, из равенств (1.2), (1.4)–(1.6) получаем, что для фиксированного  $\theta_0$  имеют место соотношения

$$\begin{aligned} P_{q, n}^{(1)}(r, \theta_0) &= r^q [(\ln r)^n \sin q\theta_0 + (\ln r)^{n-1} n\theta_0 \cos q\theta_0 + R_{n-2}^{(1)}(\ln r, \theta_0)], \\ P_{q, n}^{(2)}(r, \theta_0) &= r^q [(\ln r)^n \cos q\theta_0 + (\ln r)^{n-1} n\theta_0 \sin q\theta_0 + R_{n-2}^{(2)}(\ln r, \theta_0)], \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $R_{n-2}^{(j)}(\ln r, \theta)$  — полиномы степени  $n - 2$  относительно  $\ln r$ .

Таким образом, для всех  $\theta_0 \neq \theta_{qj}^{(1)}$  функция  $P_{q, n}^{(1)}(r, \theta)$  является произведением  $r^q$  на полином степени  $n$  от  $\ln r$ , но на лучах  $\theta_0 = \theta_{qj}^{(1)}$  (т. е. в нулях гармонического полинома  $P_q^{(1)}(r, \theta)$ ) — произведением  $r^q$  на полином степени  $n - 1$  от  $\ln r$ .

**Лемма 4.** Пусть  $\beta$  таково, что  $\beta \neq \pi/2$ ,  $\beta \neq 3\pi/2$ . Тогда для любых  $k, n \geq 0$ ,  $m > 0$  существует гармоническая функция  $u(x, y) \in \mathcal{P}_{k+m, s}^{(0)}$ , удовлетворяющая на границе угла  $D$  условиям

$$u(x, y) = x^m P_{k, n}^{(1)}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (1.16)$$

При этом  $s = n$ , если  $\sin k\beta \neq 0$  и  $\sin(k+m)\beta \neq 0$  ( $\beta \neq \theta_{k, j}^{(1)}$ ,  $\beta \neq \theta_{k+m, j}^{(1)}$ );  $s = n + 1$ , если  $\sin k\beta \neq 0$  и  $\sin(k+m)\beta = 0$ ;  $s = n - 1$ , если  $\sin k\beta = 0$  и  $\sin(k+m)\beta \neq 0$ ;  $s = n$ , если  $n \geq 1$ ,  $\sin k\beta = 0$  и  $\sin(k+m)\beta = 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\beta$  таково, что  $\sin k\beta \neq 0$ . Тогда в соответствии с равенством (1.15) граничное условие (1.16) принимает вид

$$u(r, 0) = 0,$$

$$u(r, \beta) = r^{(k+m)} (\cos \beta)^m \left[ (\ln r)^n \sin k\beta + (\ln r)^{n-1} n\beta \cos k\beta + R_{n-2}^{(1)}(\ln r) \right] = r^{(k+m)} Z_n(\ln r), \quad (1.17)$$

где  $Z_n(t)$  — алгебраический полином степени  $n$ .

Пусть, кроме того, выполнено условие  $\sin(k+m)\beta \neq 0$ , т. е.  $\beta \neq \theta_{k+m,j}^{(1)}$ . Будем в этом случае строить решение  $u(x, y)$  в виде

$$u(x, y) = C_0 P_{k+m,n}^{(1)} + C_1 P_{k+m,n-1}^{(1)} + C_2 P_{k+m,n-2}^{(1)} + \cdots + C_{n-1} P_{k+m,1}^{(1)} + C_n P_{k+m}^{(1)}. \quad (1.18)$$

Как было отмечено выше, все функции  $P_{q,n}^{(1)}(r, 0) = 0$ , поэтому первое из условий (1.17) выполняется автоматически. При  $\theta = \beta$  согласно соотношению (1.15) функция  $u(x, y)$  принимает вид

$$u(r, \beta) = r^{k+m} \sum_{j=0}^n b_j (\ln r)^{n-j},$$

причем для коэффициентов  $b_j$  справедливы рекуррентные соотношения  $b_0 = C_0 \sin(k+m)\beta$ ,  $b_1 = C_1 \sin(k+m)\beta + n\beta \cos(k+m)\beta C_0$ , ...,  $b_j = C_j \sin(k+m)\beta + g_j(C_0, C_1, \dots, C_{j-1})$ , где  $g_j$  — линейная комбинация констант  $C_0, C_1, \dots, C_{j-1}$  с коэффициентами, зависящими от  $k, m, n, \beta$ . Из равенства  $Z_n(\ln r) = \sum_{j=0}^n b_j (\ln r)^{n-j}$  последовательно определим коэффициенты  $C_0, C_1, \dots, C_n$ .

Пусть теперь по-прежнему  $\sin k\beta \neq 0$ , но  $\sin(k+m)\beta = 0$ . Тогда, если и в этом случае искать решение  $u(x, y)$  в виде (1.18), то на луче  $\theta = \beta$ , в соответствии с соотношением (1.15), оно будет выражаться через полином степени  $n-1$  от  $\ln r$  и граничные условия (1.17) не могут быть удовлетворены. Но если рассмотреть функцию  $u(x, y)$  вида

$$u(x, y) = C_0 P_{k+m,n+1}^{(1)} + C_1 P_{k+m,n}^{(1)} + C_2 P_{k+m,n-1}^{(1)} + \cdots + C_n P_{k+m,1}^{(1)},$$

то для этой функции на стороне  $\theta = \beta$  угла  $D$  выполняется соотношение

$$u(r, \beta) = r^{k+m} \sum_{j=0}^n \tilde{b}_j (\ln r)^{n+1-j},$$

где  $\tilde{b}_0 = C_0(n+1) \cos(k+m)\beta$ , ...,  $\tilde{b}_j = C_j(n+1-j) \cos(k+m)\beta + \tilde{g}_j(C_0, C_1, \dots, C_{j-1})$ . Из равенства  $Z_n(\ln r) = \sum_{j=0}^n \tilde{b}_j (\ln r)^{n+1-j}$  последовательно определим константы  $C_0, C_1, \dots, C_n$ . Заметим, что к построенному решению может быть добавлено слагаемое вида  $C_{n+1} P_{k+m}^{(1)}$ , где константа  $C_{n+1}$  произвольна.

Перейдем к случаю, когда  $\sin k\beta = 0$ . Тогда, согласно (1.15), граничное условие (1.16) на луче  $\theta = \beta$  принимает вид

$$u(r, \beta) = r^{(k+m)} (\cos \beta)^m \left[ (\ln r)^{n-1} n\beta \cos k\beta + R_{n-2}^{(1)}(\ln r) \right] = r^{(k+m)} Z_{n-1}(\ln r).$$

Очевидно, что в случае, когда  $\sin(k+m)\beta \neq 0$ , достаточно в качестве решения  $u(x, y)$  взять функцию

$$u(x, y) = C_0 P_{k+m,n-1}^{(1)} + C_1 P_{k+m,n-2}^{(1)} + \cdots + C_{n-1} P_{k+m}^{(1)}$$

и аналогично тому, как это было сделано выше, последовательно определить постоянные  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ .

В случае же, когда  $\sin(k+m)\beta = 0$ , возьмем в качестве решения  $u(x, y)$  функцию

$$u(x, y) = C_0 P_{k+m,n}^{(1)} + C_1 P_{k+m,n-1}^{(1)} + \cdots + C_{n-1} P_{k+m,1}^{(1)}$$

и, вновь приравнявая соответствующие полиномы, последовательно определим постоянные  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ . Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 5.** Для произвольных целых  $m > 0$  и  $k \geq 0$  существует гармоническая функция  $u(x, y) \in \mathcal{P}_{k+m,s}^{(0)}$ , удовлетворяющая на границе угла  $D$  условиям

$$u(x, y) = x^m P_{k,n}^{(2)}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

где  $n - 1 \leq s \leq n + 1$ . При этом  $s = n + 1$  только в случае, если  $\sin(k + m)\beta = 0$ .

**Доказательство.** Воспользовавшись представлением (1.15), перепишем граничное условие в виде

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= r^{(k+m)} [(\ln r)^n + R_{n-1}(\ln r)] = r^{(k+m)} \sum_{j=0}^n b_j (\ln r)^{n-j} = r^{(k+m)} Z_n(\ln r), \\ u(r, \beta) &= r^{(k+m)} (\cos \beta)^m [(\ln r)^n \cos k\beta + (\ln r)^{n-1} n\beta \sin k\beta + R_{n-2}(\ln r)] \\ &= r^{(k+m)} \sum_{j=0}^n \tilde{b}_j (\ln r)^{s-j} = r^{(k+m)} T_s(\ln r), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где  $Z_n$  — полином степени  $n$ ,  $T_s$  — полином степени  $s$ , причем  $s = n$ , если  $\cos k\beta \neq 0$ ;  $s = n - 1$ , если  $\cos k\beta = 0$ , так что  $T_s$  — полином степени не выше, чем  $n$ . Отметим, что при  $\beta = \pi/2$  и  $\beta = 3\pi/2$  граничная функция обращается в нуль:  $u(r, \beta) = 0$ .

Будем строить решение  $u(x, y)$  в виде

$$u(x, y) = \Sigma_1 + \Sigma_2, \quad (1.20)$$

где обозначено

$$\Sigma_1 = \sum_{j=0}^{n_1} C_j P_{k+m, n_1-j}^{(1)}(x, y), \quad \Sigma_2 = \sum_{j=0}^{n_2} B_j P_{k+m, n_2-j}^{(2)}(x, y).$$

Покажем, что числа (индексы)  $n_1$ ,  $n_2$  и коэффициенты  $C_j$ ,  $B_j$  можно подобрать таким образом, чтобы гармоническая функция  $u(x, y)$ , задаваемая равенством (1.20), удовлетворяла граничным условиям (1.19).

Нетрудно проверить, что

$$u(r, 0) = \Sigma_2(r, 0) = r^{(k+m)} Q_{n_2}(\ln r) = r^{(k+m)} \sum_{j=0}^{n_2} A_j (\ln r)^{n_2-j},$$

где  $A_0 = D_0$ ,  $A_j = D_j + g_j(D_0, \dots, D_{j-1})$ . Для этого достаточно вспомнить, что все функции  $P_{q,l}^{(1)}(r, 0) = 0$ , а все функции  $P_{q,l}^{(2)}(r, 0)$  в силу соотношений (1.15) — это произведения  $r^q$  на полиномы степени  $l$  от  $\ln r$ . Поэтому следует положить  $n_2 = n$ , тогда из равенства  $Q_n(\ln r) = Z_n(\ln r)$  последовательно определяются коэффициенты  $D_0, D_1, \dots, D_n$ , и гармоническая функция  $\Sigma_2$  будет построена. Легко проверить, что для этой функции справедливо равенство:  $\Sigma_2(r, \beta) = r^{k+m} Q_l(\ln r)$ , где  $Q_l$  — полином степени  $l$  и  $l = n$ , если  $\cos(k + m)\beta \neq 0$ ,  $l = n - 1$ , если  $\cos(k + m)\beta = 0$ , т. е. в любом случае  $Q_l$  — полином степени не выше, чем  $n$ .

Осталось подобрать число  $n_1$  и коэффициенты  $C_j$  таким образом, чтобы гармоническая функция  $\Sigma_1$  удовлетворяла граничным условиям  $\Sigma_1(r, \beta) = u(r, \beta) - \Sigma_2(r, \beta)$ , которые в соответствии с соотношением (1.19) принимают вид

$$\Sigma_1(r, \beta) = r^{k+m} [T_s(\ln r) - Q_l(\ln r)] = r^{k+m} \tilde{Q}_p(\ln r),$$

где  $\tilde{Q}_p$  — полином степени  $p$ ,  $n - 1 \leq p \leq n$ . Так же, как и при доказательстве предыдущей леммы, взяв  $n_1 = p$  в случае, когда  $\sin(k + m)\beta \neq 0$ , и  $n_1 = p + 1$  в случае  $\sin(k + m)\beta = 0$ , последовательно определим коэффициенты  $C_j$ . Лемма доказана.  $\square$

Обобщая приведенные выше алгоритмы построения гармонических функций для частных видов граничной функции  $\varphi(x, y)$ , нетрудно сформулировать утверждение и для общего случая.

**Лемма 6.** При любых допустимых  $m, q, k, \beta$  существует гармоническая функция  $u(x, y) \in \mathcal{P}_{k+m+q,s}^{(0)}$ , удовлетворяющая на границе угла  $D$  условиям

$$u(x, y) = x^m y^q P_{k,n}^{(j)}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (1.21)$$

где  $n - 1 \leq s \leq n + 1$ . При этом  $s = n + 1$  только в случае, если  $\sin(k + m + q)\beta = 0$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Увеличение на единицу максимальной степени  $\ln r$  (индекса) происходит только в случае, когда угол  $\beta = \frac{l}{m+k}\pi$  для какого-нибудь целого  $l$ . Таким образом, если  $\frac{\beta}{\pi}$  иррационально, то решение задачи (1.21) имеет тот же индекс  $n$ , что и граничная функция.

**Лемма 7.** Пусть  $v(x, y) \in \mathcal{P}_{k,n}$  и  $f_0(x, y) = v(x, y)$ ,  $f_1(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$ ,  $f_2(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$ . Существуют функции  $u_0(x, y) \in \mathcal{P}_{k+2,s}$ ,  $u_1(x, y) \in \mathcal{P}_{k+1,s}$ ,  $u_2(x, y) \in \mathcal{P}_{k+1,s}$ , являющиеся решениями задач

$$\Delta u_j = f_j(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

$$u = 0, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

где  $n - 1 \leq s \leq n + 1$ . При этом в случае, когда  $\frac{\beta}{\pi}$  иррационально, индекс не меняется:  $s = n$ .

Утверждение этой леммы является очевидным следствием всех предыдущих лемм.  $\square$

В области  $D$  рассмотрим функцию

$$W_{k,m,n}(z) = (\ln z)^n z^{k\alpha+m} = (\ln r + i\theta)^n r^{k\alpha+m} e^{i(k\alpha+m)},$$

где  $\alpha = \frac{\pi}{\beta}$ , а  $n \geq 0$ ,  $k \neq 0$  и  $m$  — целые числа.

Аналогично тому, как это было сделано в начале раздела (см. (1.2)), введем функции  $U_{k,m,n}^{(j)}(x, y)$ , обозначив

$$\operatorname{Re} W_{k,m,n} = U_{k,m,n}^{(2)}(x, y),$$

$$\operatorname{Im} W_{k,m,n} = U_{k,m,n}^{(1)}(x, y).$$

Число  $\gamma = \gamma(k, m) = k\alpha + m$  будем называть порядком функции  $U_{k,m,n}^{(j)}(x, y)$ , а число  $n$  — индексом этой функции.

Очевидно, что при  $\beta = \frac{\pi}{s}$ , где  $s$  — целое число,  $U_{k,m,n}^{(j)}(x, y) = P_{ks+m,n}^{(j)}(x, y)$ . Легко видеть, что для функций  $U_{k,m,n}^{(j)}(x, y)$  справедливы соотношения, аналогичные соотношениям (1.3)–(1.6), в частности:

$$U_{k,m,n}^{(1)} = \ln r U_{k,m,n-1}^{(1)} + \theta U_{k,m,n-1}^{(2)},$$

$$U_{k,m,n}^{(2)} = \ln r U_{k,m,n-1}^{(2)} - \theta U_{k,m,n-1}^{(1)},$$

$$U_{k,m,n}^{(1)}(x, y) = Q_n^{(1)}(\ln r, \theta) U_{k,m,0}^{(1)} + Q_{n-1}^{(2)}(\ln r, \theta) U_{k,m,0}^{(2)},$$

$$U_{k,m,n}^{(2)}(x, y) = Q_n^{(1)}(\ln r, \theta) U_{k,m,0}^{(2)} - Q_{n-1}^{(2)}(\ln r, \theta) U_{k,m,0}^{(1)},$$

где полиномы  $Q_p^{(l)}(\ln r, \theta)$  определены соотношениями (1.5).

Далее, если  $k\alpha + m \neq -1$ , то справедливы соотношения, аналогичные соотношениям (1.8)–(1.10):

$$U_{k,m,n}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{k\alpha + m + 1} \left( \frac{\partial U_{k,m+1,n}^{(1)}}{\partial x} - nU_{k,m,n-1}^{(1)} \right), \\ -\frac{1}{k\alpha + m + 1} \left( \frac{\partial U_{k,m+1,n}^{(2)}}{\partial y} - nU_{k,m,n-1}^{(1)} \right); \end{cases}$$

$$U_{k,m,n}^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{k\alpha + m + 1} \left( \frac{\partial U_{k,m+1,n}^{(2)}}{\partial x} - nU_{k,m,n-1}^{(2)} \right), \\ -\frac{1}{k\alpha + m + 1} \left( \frac{\partial U_{k,m+1,n}^{(1)}}{\partial y} - nU_{k,m,n-1}^{(2)} \right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{k,m,n}^{(j)} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(k,m,n,j)} U_{k,m+1,n-i}^{(j)} \right), & \alpha_0^{(k,m,n,j)} \neq 0, \\ U_{k,m,n}^{(j)} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{i=0}^n \beta_i^{(k,m,n,j)} U_{k,m+1,n-i}^{(l)} \right), & \beta_0^{(k,m,n,j)} \neq 0, \quad l \neq j. \end{cases}$$

Множество линейных комбинаций функций вида

$$u(x, y) = x^{p_1} y^{p_2} U_{k,m,n}^{(j)},$$

где  $k > 0$ ,  $p_1 \geq 0$ ,  $p_2 \geq 0$  — целые числа, обозначим через  $\mathcal{U}$ , а множество линейных комбинаций гармонических функций  $U_{k,m,n}^{(j)}$ , где  $k, m, n, j$  принимают любые допустимые значения, — через  $\mathcal{U}^{(0)}$ . Очевидно, что  $\mathcal{U}^{(0)} \subset \mathcal{U}$ .

Заметим, что функция  $u(x, y)$  может быть записана и в виде

$$u(x, y) = r^\omega \sum_{s=1}^n \ln^s r \Phi_s^{(k,m,n,j)}(\theta),$$

где  $\omega = \gamma + p_1 + p_2$ . Число  $\omega$  будем называть порядком функции  $u(x, y)$ , а число  $n$  — ее индексом. Подмножество множества  $\mathcal{U}$  ( $\mathcal{U}^{(0)}$ ), все элементы которого имеют фиксированный порядок  $\gamma > 0$  и индекс, не превосходящий  $n$ , будем обозначать через  $\mathcal{U}_{\gamma,n}$  ( $\mathcal{U}_{\gamma,n}^{(0)}$ ).

Для функций  $U_{k,m,n}^{(j)}$  справедливы те же утверждения, что и для функций  $P_{k,n}^{(j)}$  с заменой порядка  $k$  на порядок  $\gamma = k\alpha + m$ . Поэтому целесообразно ограничиться переформулировкой наиболее общих утверждений, а именно, лемм 3, 6, 7 в леммы 8, 9, 10 соответственно.

**Лемма 8.** Для любых целых  $s \geq 0$ ,  $q \geq 0$ ,  $k > 0$  существует функция  $\tilde{u}(x, y) \in \mathcal{U}_{\gamma+s+q+2,n}$ , являющаяся решением неоднородного уравнения

$$\Delta u = x^s y^q U_{k,m,n}^{(j)}(x, y).$$

**Лемма 9.** При любых допустимых  $p, q, \beta$  существует гармоническая функция  $u(x, y) \in \mathcal{U}_{\gamma+p+q,s}^{(0)}$ , удовлетворяющая на границе угла  $D$  условиям

$$u(x, y) = x^p y^q U_{k,m,n}^{(j)}(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

где  $n - 1 \leq s \leq n + 1$ . При этом индекс  $s = n + 1$  только в случае, если  $\sin(m + p + q)\beta = 0$ .

Доказательства лемм 8 и 9 полностью совпадают с доказательствами лемм 3 и 4 соответственно; нужно только заметить, что  $\sin(k\alpha + m + p + q)\beta = \sin[\pi k + (m + p + q)\beta] = (-1)^k \sin(m + p + q)\beta$ .  $\square$

**Лемма 10.** Пусть  $f_0(x, y) = v(x, y) \in \mathcal{U}_{\omega, n}$ ,  $f_1(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$  и  $f_2(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$ . Существуют функции  $u_0(x, y) \in \mathcal{U}_{\omega+2, s}$ ,  $u_1(x, y) \in \mathcal{U}_{\omega+1, s}$ ,  $u_2(x, y) \in \mathcal{U}_{\omega+1, s}$ , являющиеся решениями задач

$$\Delta u_j = f_j(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

$$u = 0, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

где  $n - 1 \leq s \leq n + 1$ . Если при этом  $\frac{\beta}{\pi}$  иррационально, индекс не меняется:  $s = n$ .

Наконец, в завершение раздела, построим гармонические функции, обращающиеся на границе угла  $D$  в стандартные степенные функции.

**Лемма 11.** Существует гармоническая функция  $u(x, y) \in \mathcal{P}_{ks}^{(0)}$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , такая, что

$$u(x, 0) = Ax^k, \quad u(r, \beta) = Br^k.$$

**Доказательство.** Рассмотрим отдельно различные случаи. Пусть сначала  $k = 0$  и  $A = B$ , т.е. граничная функция согласована в вершине угла  $D$ . Очевидно, что функция  $u(x, y) = A = AP_0^{(2)}(x, y)$  и есть решение задачи. Пусть по-прежнему  $k = 0$ , но  $A \neq B$ . В этом случае будем строить гармоническую функцию  $u(x, y)$  в виде  $u(x, y) = C_1 P_{01}^{(1)} + C_2 P_0^{(2)}$ . Полагая  $\theta = 0$  и учитывая, что  $P_{kn}^{(1)}(x, 0) = 0$ , получим  $A = C_2$ ; полагая  $\theta = \beta$  и учитывая, что  $P_{01}^{(1)} = \theta$ , получим  $B = C_2 + C_1\beta$ . Таким образом,  $C_2 = A$ ,  $C_1 = (B - A)/\beta$  и

$$u(x, y) = A + \frac{B - A}{\beta}\theta.$$

Пусть теперь  $k > 0$  и  $\sin k\beta \neq 0$ . Будем в этом случае строить решение  $u(x, y)$  в виде суммы гармонических полиномов порядка  $k$ :  $u(x, y) = C_1 P_k^{(1)} + C_2 P_k^{(2)}$ . Полагая  $\theta = 0$ , получим  $A = C_2$  ( $P_k^{(1)}(x, 0) = 0$ ); полагая  $\theta = \beta$ , получим  $B = C_1 \sin k\beta + C_2 \cos k\beta$ . Итак, в этом случае,

$$u(x, y) = \frac{B - A \cos k\beta}{\sin k\beta} P_k^{(1)} + A P_k^{(2)}.$$

Наконец, рассмотрим случай, когда  $k > 0$ , но  $\sin k\beta = 0$ . Будем строить функцию  $u(x, y)$  в виде  $u(x, y) = C_1 P_{k1}^{(1)} + C_2 P_k^{(2)}$ . (Напомним, что  $P_{k1}^{(1)} = \ln r P_k^{(1)} + \theta P_k^{(2)}$ .) Полагая  $\theta = 0$ , получим  $A = C_2$ , полагая  $\theta = \beta$ , получим  $B = C_1 \beta \cos k\beta + C_2 \cos k\beta$  и

$$u(x, y) = \frac{B - A \cos k\beta}{\beta \cos k\beta} P_{k1}^{(1)} + A P_k^{(2)}.$$

(Заметим, что  $|\cos k\beta| = 1$ .) Лемма доказана.  $\square$

## 2. Асимптотика решения в окрестности вершины угла

Как уже было отмечено во введении, краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками рассматривались в работах [1–4]. В работе [4] было доказано существование решения первой краевой задачи в специальных пространствах функций, имеющих производные, суммируемые с некоторым весом. Там же был приведен общий

вид асимптотического представления решения в окрестности конических или угловых точек, а также рассмотрены различные конкретные случаи, в частности, первая краевая задача для эллиптического уравнения (0.1) в области, совпадающей в некоторой окрестности начала координат с углом  $D$ , ограниченными лучами  $\theta = 0$ ,  $\theta = \beta$ . Было доказано, что асимптотическое разложение решения имеет вид (0.2).

В этом разделе приведем другой вид такого асимптотического разложения, используя построенные в предыдущем разделе гармонические функции  $P_{k,n}^{(j)}(x, y)$ ,  $U_{k,m,n}^{(j)}(x, y)$ .

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что главная часть эллиптического уравнения (0.1) совпадает с оператором Лапласа, а правая часть  $f(x, y) = 0$ , т. е. будем рассматривать уравнение

$$Lu = \Delta u + a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (2.1)$$

в области  $D'$  такой, что  $D' \cap G_\delta = D \cap G_\delta$  для некоторой окрестности  $G_\delta$  начала координат.

Рассматривается первая краевая задача для этого уравнения, т. е. на границе области  $D'$  задано краевое условие

$$u(x, y) = \varphi(x), \quad \theta = 0; \quad (2.2)$$

$$u(x, y) = \psi(x, y), \quad \theta = \beta,$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x, y)$  — бесконечно дифференцируемые функции. Докажем следующую теорему.

**Теорема.** *Решение  $u(x, y)$  задачи (2.1), (2.2) при  $x, y \rightarrow 0$  имеет асимптотическое разложение вида*

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, y) + \sum_{m=1, k=0}^{\infty} v_{mk}(x, y), \quad (2.3)$$

где функции  $w_m(x, y) \in \mathcal{P}_{m, s(m)}$ ,  $v_{mk}(x, y) \in \mathcal{U}_{m\alpha+k, n(k)}$ ,  $\alpha = \pi/\beta$ ,  $s(m) \leq m$ ,  $n(k) \leq k - 1$ .

**Доказательство.** В окрестности начала координат заменим функции  $a_1(x, y)$ ,  $a_2(x, y)$ ,  $c(x, y)$  их рядами Тейлора и запишем уравнение (2.1) в виде

$$Lu = \Delta u + \left[ \sum_{j=0}^{\infty} Q_j^{(1)}(x, y) \right] u_x + \left[ \sum_{j=0}^{\infty} Q_j^{(2)}(x, y) \right] u_y + \left[ \sum_{j=0}^{\infty} Q_j^{(3)}(x, y) \right] u = 0, \quad (2.4)$$

где  $Q_j^{(s)}(x, y)$  — однородные полиномы от  $x, y$  степени  $j$ , коэффициенты которых зависят от производных порядка  $j$  соответствующих коэффициентов уравнения (2.1) в начале координат.

Заменим и граничные функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x, y)$  их рядами Тейлора:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k x^k, \quad \psi(x, y) = \psi(r \cos \beta, r \sin \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(\beta) r^k. \quad (2.5)$$

Построим асимптотический ряд

$$W(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, y), \quad (2.6)$$

являющийся формальным асимптотическим решением задачи (2.4), (2.5) и такой, что  $w_m(x, y) \in \mathcal{P}_m$ . Для этого подставим ряд (2.6) в уравнение (2.4) и граничные условия (2.5).

Учитывая, что для функции  $w_m(x, y) \in \mathcal{P}_m$  справедливы соотношения

$$\Delta w_m \in \mathcal{P}_{m-2}, \quad (w_m)_x \in \mathcal{P}_{m-1}, \quad (w_m)_y \in \mathcal{P}_{m-1},$$

а также то, что  $Q_j^{(s)}(x, y)$  — однородные полиномы степени  $j$ , и приравнивая к нулю сумму членов одного порядка в (2.4), получим систему рекуррентных соотношений для функций  $w_m(x, y)$ :

$$\begin{aligned}\Delta w_0 &= 0, \\ \Delta w_1 &= Q_0^{(1)} \frac{\partial w_0}{\partial x} + Q_0^{(2)} \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ \Delta w_2 &= Q_0^{(1)} \frac{\partial w_1}{\partial x} + Q_0^{(2)} \frac{\partial w_1}{\partial y} + Q_0^{(3)} w_0, \\ \Delta w_m &= \sum_{j=0}^{m-1} Q_j^{(1)} \frac{\partial w_{m-1-j}}{\partial x} + \sum_{j=0}^{m-1} Q_j^{(2)} \frac{\partial w_{m-1-j}}{\partial y} + \sum_{j=0}^{m-2} Q_j^{(3)} w_{m-2-j}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Подставив ряд (2.6) в граничные условия, получим

$$\begin{aligned}w_0(x, 0) &= \varphi_0, & w_1(x, 0) &= \varphi_1 x, \dots, w_m(x, 0) = \varphi_m x^m; \\ w_0(r, \beta) &= \psi_0, & w_1(r, \beta) &= \psi_1 r, \dots, w_m(r, \beta) = \varphi_m r^m.\end{aligned}$$

Применяя леммы 1–7 и 11, последовательно построим функции  $w_m(x, y) \in \mathcal{P}_{m,s(m)}$  для любого  $m \geq 0$ .

Рассмотрим далее частичную сумму построенного ряда (2.6)  $W_N(x, y) = \sum_{m=0}^N w_m(x, y)$ . Для разности  $Z_N = u(x, y) - W_N(x, y)$ , где  $u(x, y)$  — решение задачи (2.1), (2.2), выполнены соотношения

$$\begin{aligned}LZ_N &= O(r^{n-1}), & (x, y) &\in D'; \\ Z_N &= O(r^{n+1}), & \theta = 0, & \quad \theta = \beta.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Согласно работе [4] асимптотическое представление для функции  $Z_N(x, y)$  может быть записано в виде

$$Z_N(x, y) = \sum_{m=1, k=0}^{\infty} r^{\alpha m + k} \sum_{j=0}^{s(m,k)} \ln^j r \Psi_j^{(m,k)}(\theta) + \omega(x, y) = \sum_{m=1, k=0}^{\infty} v_{m,k}(x, y) + \omega(x, y),$$

где  $\alpha m + k \leq N_1(N)$ ,  $N_1 \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ , а для остаточного члена  $\omega(x, y)$  справедливо соотношение  $\omega(x, y) = O(r^{N_1+1})$ , аналогичные оценки справедливы и для производных функции  $\omega(x, y)$ .

Подставляя  $Z_N$  в уравнение и граничные условия (2.8), нетрудно получить, что для функций  $v_{m,k}$  в области  $D'$  будут выполнены рекуррентные соотношения, аналогичные соотношениям (2.7), а на границе этой области условия

$$v_{mk}(x, 0) = 0, \quad v_{mk}(r, \beta) = 0.$$

Анализируя полученные соотношения, нетрудно убедиться в том, что  $v_{10}(x, y) = r^\alpha \sin \alpha \theta = U_{1,0,0}^{(1)} \in \mathcal{U}_{\alpha,0}$ , а каждое из следующих  $v_{mk}(x, y)$  — это либо решение неоднородного уравнения, построенное в соответствии с леммой 10, либо сумма такого решения и функции вида  $CU_{m,0,0}^{(1)}(x, y)$ . Теорема доказана.  $\square$

**З а м е ч а н и е 3.** Если граничные функции  $\psi(x, y)$ ,  $\varphi(x)$  согласованы в вершине угла  $D$  ( $\psi(0, 0) = \varphi(0)$ ) и  $\frac{\beta}{\pi}$  иррационально, то для решения  $u(x, y)$  справедливо представление

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, y) + \sum_{m=1, k=0}^{\infty} v_{mk}(x, y),$$



где функции  $w_m(x, y) \in \mathcal{P}_{m,0}$ , функции  $v_{mk}(x, y) \in \mathcal{U}_{m\alpha+k,0}$ , и, таким образом, асимптотика описывается с помощью гармонических полиномов  $P_m^{(j)}(x, y)$  и функций  $U_{m,k,0}^{(j)}(x, y)$ , т. е. не содержит степеней  $\ln r$ .

В заключение приведем явный вид нескольких первых членов асимптотического разложения (2.3). Обозначим  $\varphi_0 = \varphi(0)$ ,  $\varphi_1 = \varphi'(0)$ ;  $\psi_0 = \varphi(0, 0)$ ,  $\psi_1 = \psi_x(0, 0) \cos \beta + \psi_y(0, 0) \sin \beta$ .

Функция  $w_0(x, y)$  имеет вид:

$$w_0(x, y) = \begin{cases} \varphi(0), & \text{если } \varphi(0) = \psi(0, 0); \\ \varphi(0) + \frac{\psi(0, 0) - \varphi(0)}{\beta} \theta, & \text{если } \varphi(0) \neq \psi(0, 0). \end{cases}$$

Функцию  $w_1(x, y)$  запишем в виде суммы двух функций:  $w_1(x, y) = w_1^{(1)}(x, y) + w_1^{(2)}(x, y)$ , где

$$w_1^{(1)}(x, y) = \begin{cases} (\psi_1 - \varphi_1 \cos \beta) \left( \frac{1}{\sin \beta} y + \varphi_1 x \right), & \beta \neq \pi, \beta \neq 2\pi; \\ (\psi_1 - \varphi_1 \cos \beta) \left( \frac{1}{\beta \cos \beta} (y \ln r + \theta x) + \varphi_1 x \right), & \beta = \pi \text{ или } \beta = 2\pi, \end{cases}$$

$$w_1^{(2)}(x, y) = -\frac{\psi(0, 0) - \varphi(0)}{\beta} \left( a_1(0, 0)x\theta + a_2(0, 0)y\theta \right) + \eta \zeta,$$

$$\zeta = \begin{cases} \frac{y}{\sin \beta}, & \beta \neq \pi, \beta \neq 2\pi; \\ \frac{1}{\beta \cos \beta} (y \ln r + \theta x) + \varphi_1 x, & \beta = \pi \text{ или } \beta = 2\pi, \end{cases}$$

$$\eta = \frac{(\psi(0, 0) - \varphi(0)) (a_1(0, 0) \cos \beta + a_2(0, 0) \sin \beta)}{2}.$$

Из-за громоздкости формул приведем лишь три первые функции  $v_{mk}(x, y)$ :

$$v_{10}(x, y) = C_{10} r^\alpha \sin \alpha \theta = C_{10} U_{1,0,0}^{(1)}, \quad v_{20}(x, y) = C_{20} r^{2\alpha} \sin 2\alpha \theta = C_{20} U_{2,0,0}^{(1)},$$

$$v_{11}(x, y) = -C_{10}/2 \left[ a_1(0, 0)xU_{1,0,0}^{(1)} + a_2(0, 0)yU_{1,0,0}^{(1)} \right].$$

Здесь  $\alpha = \frac{\pi}{\beta}$ ,  $C_{10}$ ,  $C_{20}$  — некоторые абсолютные константы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Волков Е.А.** О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике // Докл. АН СССР. 1963. Т. 147, № 1. С. 13–16.
2. **Кондратьев В.А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 27–29.
3. **Эскин Г.И.** Общие краевые задачи для уравнений главного типа в плоскости с угловыми точками // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 3. С. 241–242.
4. **Кондратьев В.А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.

УДК 515.126, 515.16, 519.6

## ПРОБЛЕМЫ ГОМЕОМОРФИЗМА, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК

М. Ф. Прохорова

В данной работе доказываются некоторые общие критерии гомеоморфности для непрерывных отображений топологических пространств и топологических многообразий, а также критерии диффеоморфности для гладких отображений гладких многообразий.

### Введение

При разработке алгоритмов построения сеток для численных расчетов в областях сложной конфигурации необходимо использовать (см., например, [1, 2]) различные критерии для определения того, является ли непрерывное отображение гомеоморфизмом или гладкое — диффеоморфизмом. Такие критерии для ограниченных областей в  $\mathbb{R}^n$  были предложены в работах [3, 4]. К сожалению, некоторые теоремы в [3, 4] неверны, а доказательства некоторых других неполны (см. разд. 6).

В данной работе формулируются и доказываются некоторые общие критерии гомеоморфности для непрерывных отображений топологических пространств, топологических многообразий и триангулированных топологических многообразий, а также критерии диффеоморфности для гладких отображений гладких многообразий. Эта работа является продолжением работы [5].

Для удобства читателя, занимающегося численными методами, а не топологией, в статье приведены определения основных топологических понятий, фигурирующих в формулировках теорем. Более детально с ними можно ознакомиться, например, в [6, 7]. Также для удобства читателя в начале разд. 1 приведены доказательства некоторых элементарных топологических утверждений, активно используемых в следующих разделах. В разд. 1 описаны некоторые критерии для определения того, является ли непрерывное отображение из одного топологического пространства в другое погружением, вложением или гомеоморфизмом. В разд. 2 рассматриваются непрерывные отображения топологических многообразий. В разд. 3 — непрерывные отображения топологических многообразий с особенностью на клеточном подпространстве, а также непрерывные отображения топологических многообразий, снабженных клеточным разбиением. В разд. 4 рассматриваются непрерывные отображения триангулированных топологических многообразий и псевдомногообразий. В разд. 5 приводятся некоторые очевидные следствия результатов предыдущих разделов для гладких и кусочно-гладких отображений. В разд. 6 дается краткое сравнение результатов работы с работами [3, 4].

Автор благодарит П.Е.Пушкарю, Е.Г.Пыткееву и автора блога [14] за полезные советы, О.В.Ушакову — за привлечение внимания к данной тематике. Работа была закончена во время моего пребывания в Институте высших научных исследований — IHES (Франция); я благодарна этому институту за гостеприимство и замечательные рабочие условия.

## 1. Топологические пространства

О б о з н а ч е н и я

- Пусть  $A, A_1, \dots, A_k$  — подпространства  $X$ ,  $B, B_1, \dots, B_k$  — подпространства  $Y$  (подпространство — это подмножество, наделенное топологией, индуцированной с основного пространства). Будем обозначать

$C(X, Y)$  — множество непрерывных отображений из  $X$  в  $Y$ ,

$C(X, A; Y, B)$  — множество  $f \in C(X, Y)$  таких, что  $f(A) \subset B$ ,

$C(X, A_1, \dots, A_k; Y, B_1, \dots, B_k)$  — множество  $f \in C(X, Y)$  таких, что  $f(A_i) \subset B_i$  для всех  $i = 1 \dots k$ .

- Для  $f \in C(X, A; Y, B)$  будем обозначать  $f|_{A \rightarrow B}$  отображение, получающееся из  $f$  сужением области определения до  $A$  и области значений — до  $B$ .

Заметим, что отображения  $f = f|_{X \rightarrow Y}$ ,  $f|_A = f|_{A \rightarrow Y}$  и  $f|_{A \rightarrow B}$  различны и могут обладать разными свойствами. Например, отображение  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , задаваемое формулой  $f(x) = \sin x$ , не является открытым, а  $f|_{\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]}$  открыто.

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть  $X, Y$  — топологические пространства. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  будем называть

- вложением, если  $f|_{X \rightarrow f(X)}$  — гомеоморфизм,
- погружением, если у любой точки  $x \in X$  существует окрестность  $U$  такая, что  $f|_{U \rightarrow f(U)}$  — гомеоморфизм,
- локальным гомеоморфизмом, если у любой точки  $x \in X$  существует окрестность  $U$  такая, что  $f(U)$  открыто в  $Y$ , и  $f|_{U \rightarrow f(U)}$  — гомеоморфизм.

З а м е ч а н и я

1. Все вложения, погружения и локальные гомеоморфизмы непрерывны.
2. Как вложение, так и локальный гомеоморфизм являются погружениями.
3. Отображение является локальным гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда оно открытое погружение.

Далее везде  $X, Y$  — хаусдорфовы топологические пространства, удовлетворяющие второй аксиоме счетности.

Напомним, что непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *собственным*, если для любого компактного  $K \subset Y$  его прообраз  $f^{-1}(K)$  компактен. Для компактного  $X$  любое непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  является собственным.

Непрерывное отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *накрытием*, если у любой точки  $y \in Y$  существует окрестность  $V$  такая, что  $f$  гомеоморфно отображает каждую компоненту связности  $f^{-1}(V)$  на  $V$ .

**Лемма 1.** Пусть  $Y$  связно,  $f: X \rightarrow Y$  — собственное отображение, являющееся локальным гомеоморфизмом. Тогда  $f$  — накрытие.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для любой точки  $y \in \text{Im } f$  существует окрестность  $V \ni y$ ,  $V \subset \text{Im } f$ , так как  $f$  — локальный гомеоморфизм. Следовательно,  $\text{Im } f$  открыт в  $Y$ . Если  $\text{Im } f \neq Y$ , то выберем произвольную точку  $y$  на границе  $\text{Im } f$ . Выберем  $y_n \in \text{Im } f$ ,  $y_n \rightarrow y$ ,  $x_n \in f^{-1}(y_n)$ . Множество  $\bigcup \{y_n\} \cup \{y\}$  компактно, следовательно, его прообраз  $K$  также компактен. Из последовательности  $\{x_n\} \subset K$  можно выбрать сходящуюся в  $K$  подпоследовательность  $\{x'_n\} \rightarrow x \in K$ . Но  $f(x) = \lim f(x'_n) = y$ , значит,  $y \in \text{Im } f$ . Следовательно,  $f$  сюръективно.

Возьмем произвольную точку  $y \in Y$ . Прообраз  $y$  дискретен (так как  $f$  — локальный гомотопизм) и компактен; следовательно, он конечен.

Пусть  $f^{-1}(y) = \{x_i : i \in I\}$  ( $I$  конечно),  $U_i$  — непересекающиеся окрестности точек  $x_i$ , гомеоморфно проектирующиеся в открытые множества в  $Y$ ,  $V = \bigcap f(U_i)$ .

Покажем, что существует окрестность  $W \ni y$ , прообраз которой содержится в  $\bigcup U_i$ . Если это не так, то найдутся  $z_k \notin \bigcup U_i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f(z_k) \rightarrow y$ . Множество  $\bigcup \{f(z_k)\} \cup \{y\}$  компактно, поэтому его прообраз  $K$  также компактен. Из последовательности  $\{z_k\} \subset K$  можно выбрать сходящуюся в  $K$  подпоследовательность  $\{z'_k\} \rightarrow z \in K$ . Но  $f(z) = \lim f(z'_k) = y$ , значит,  $z = x_i$  для некоторого  $i$ , и  $z'_k$  начиная с некоторого  $k = k_0$  лежат в  $U_i$ , что противоречит предположению.

Таким образом, существует окрестность  $W \ni y$ , прообраз которой является несвязным объединением областей  $W_i = f^{-1}(W) \cap U_i$ , и каждое из них гомеоморфно проектируется на  $W$ . Следовательно,  $f$  — накрытие.

Следующие две леммы являются очевидным следствием леммы 1 и элементарных свойств накрытий; для удобства читателя здесь будут приведены их полные доказательства.

**Лемма 2.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — собственный локальный гомеоморфизм,  $Y$  связно, и существует точка  $y_0 \in Y$  с одноточечным прообразом:  $f^{-1}(y_0) = \{x_0\}$ . Тогда  $f$  — гомеоморфизм.

**Доказательство.** Рассмотрим отображение  $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{Z}_+$ ,  $\varphi(y) = \text{card } f^{-1}(y)$ . Так как  $f$  — накрытие,  $\varphi$  локально постоянна. Но  $Y$  связно, так что  $\varphi$  глобально постоянна и тождественно равна  $\varphi(y_0) = 1$ . Значит, отображение  $f: X \rightarrow Y$  биективно. По условию локальной гомеоморфности  $f$  — гомеоморфизм.

**Лемма 3.** Пусть  $X$  линейно связно,  $Y$  связно и односвязно,  $f: X \rightarrow Y$  — собственный локальный гомеоморфизм. Тогда  $f$  — гомеоморфизм.

**Доказательство.** Предположим, что существуют две различные точки  $x_0, x_1 \in X$  с совпадающими образами:  $f(x_0) = f(x_1) = y$ . Так как  $X$  линейно связно, существует непрерывная кривая  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ ,  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(1) = x_1$ . Так как  $Y$  односвязно, существует гомотопия  $h_t: [0, 1] \rightarrow Y$ ,  $h_0 = f \circ \gamma$ ,  $h_t(0) = h_t(1) = h_1(s) \equiv y$ . По лемме 1,  $f$  — накрытие. Значит, гомотопия  $h_t$  поднимается до гомотопии  $H_t: [0, 1] \rightarrow X$  так, что  $f \circ H_t = h_t$ ,  $H_0 = \gamma$  [7]. Рассмотрим кривую  $H_1(s)$ , соединяющую точки  $x_0$  и  $x_1$ . Ее проекция на  $Y$  — точка  $y$ . Однако это противоречит условию локальной гомеоморфности  $f$  в  $x_0$  (в некоторой окрестности точки  $x_0$  не должно быть точек, проектирующихся в  $y$  и отличных от  $x_0$ ). Следовательно,  $f$  — инъекция. Так как  $Y$  связно, а  $f$  — накрытие,  $f$  сюръективно и, следовательно, является гомеоморфизмом.

**Лемма 4.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное собственное инъективное отображение. Тогда  $f$  — вложение.

**Доказательство.** Так как  $X$  удовлетворяет второй аксиоме счетности, достаточно доказать, что для  $y_n, y \in \text{Im } f$ ,  $\{y_n\} \rightarrow y$ , последовательность  $x_n = f^{-1}(y_n)$  сходится к  $x = f^{-1}(y)$ . Множество  $K = \bigcup \{y_n\} \cup \{y\}$  компактно, следовательно,  $f^{-1}(K)$  также компактно, и последовательность  $\{x_n\}$  имеет предельную точку в  $f^{-1}(K)$ . Если  $x'$  — предельная точка  $\{x_n\}$  в  $X$ , то  $f(x')$  — предельная точка  $\{y_n\}$ , и  $x' = x$ . Значит,  $\lim x_n = x$ , так что  $f^{-1}: \text{Im } f \rightarrow X$  непрерывно.

Напомним, что хаусдорфово топологическое пространство  $X$  называется *регулярным*, если для любой точки  $x \in X$  и ее окрестности  $U$  существует окрестность  $V \ni x$ , замыкание которой содержится в  $U$ .

**Лемма 5.** Пусть  $X$  — регулярное топологическое пространство,  $X' \subset X$  открыто,  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное собственное отображение,  $f' = f|_{X'}$  — локальная инъекция (т.е. у любой точки  $X'$  существует такая ее окрестность  $U$  в  $X'$ , что ограничение  $f'$  на  $U$  является инъекцией). Тогда  $f'$  является погружением.

**Доказательство.** Пусть  $x \in X'$ ,  $U \subset X'$  — окрестность  $x$ ,  $f'|_U$  — инъекция. Пусть  $W$  — окрестность точки  $x$ , замыкание  $\overline{W}$  которой содержится в  $U$ . Для любого компакта  $K \subset f(W)$  прообраз  $(f|_W)^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap W = f^{-1}(K) \cap \overline{W}$  компактен, так что  $f|_{W \rightarrow f(W)}$  — собственное отображение. По лемме 4 оно является вложением. Следовательно,  $f'$  — погружение.

**Теорема 1.** Пусть  $X$  регулярно,  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное собственное отображение,  $A \subset X$ ,  $f(A) \cap f(X \setminus A) = \emptyset$ ,  $f|_A$  — инъекция,  $f|_{X \setminus A \rightarrow Y \setminus f(A)}$  — локальный гомеоморфизм, и выполняется одно из двух условий:

- $Y \setminus f(A)$  связно и существует точка в  $Y \setminus f(A)$  с одноточечным прообразом, или
- $X \setminus A$  линейно связно,  $Y \setminus f(A)$  связно и односвязно.

Тогда  $f$  — гомеоморфизм.

**Доказательство.**  $f|_{X \setminus A \rightarrow Y \setminus f(A)}$  — собственный локальный гомеоморфизм и по леммам 2, 3 является гомеоморфизмом. Тогда  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывная биекция. По лемме 4  $f$  является гомеоморфизмом.

**Теорема 2.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное собственное отображение,  $A \subset X$ , ограничение  $f$  на  $X \setminus A$  — локальный гомеоморфизм.

1. Если  $Y_1 = Y \setminus f(A)$  связно и выполняется одно из двух условий:

- для некоторой точки  $y_0 \in Y_1$  ее прообраз  $f^{-1}(y_0)$  одноэлементен, или
- $X_1 = f^{-1}(Y_1)$  линейно связно,  $Y_1$  односвязно,

то  $f|_{X_1}$  — вложение.

2. Если  $f|_{X \setminus f^{-1}(f(A))}$  — инъекция и  $f(A)$  имеет пустую внутренность в  $Y$ , то  $f|_{X \setminus A}$  — открытое вложение.

3. Если  $f|_{X \setminus A}$  — открытое вложение,  $A$  замкнуто и имеет пустую внутренность в  $X$  и  $X/A$  хаусдорфово, то  $f(A) \cap f(X \setminus A) = \emptyset$ . Если при этом  $Y \setminus f(A)$  связно, то  $f|_{X \setminus A \rightarrow Y \setminus f(A)}$  — гомеоморфизм.

Здесь  $X/A$  — факторпространство  $X$  со стянутым в точку подпространством  $A$ . Заметим, что требование хаусдорфовости  $X/A$  в п.2 теоремы выполняется, в частности, если  $X$  регулярно или если  $A$  компактно.

**Доказательство**

1. Для любого компакта  $K \subset Y_1$  прообраз  $(f|_{X_1 \rightarrow Y_1})^{-1}(K) = f^{-1}(K)$  компактен в силу собственности  $f$ , так что  $f|_{X_1 \rightarrow Y_1}$  — собственное отображение. Применяя леммы 2, 3, находим, что  $f|_{X_1 \rightarrow Y_1}$  — гомеоморфизм.

2. Рассмотрим множество  $\{y \in Y: \text{card}(f^{-1}(y) \cap (X \setminus A)) > 1\}$ . Оно открыто (так как  $f|_{X \setminus A}$  — локальный гомеоморфизм) и содержится в  $f(A)$  и, следовательно, пусто. Значит,  $f|_{X \setminus A}$  — открытое вложение.

3. Пусть  $U \subset X \setminus A$  — открытое множество, замыкание которого также лежит в  $X \setminus A$ . Множество  $U' = (X \setminus \overline{U}) \cap f^{-1}(f(U))$  открыто в  $X$  и содержится в  $A$ . Так как внутренность  $A$  в  $X$  пуста,  $U'$  также пусто, так что  $f^{-1}(f(U)) \subset \overline{U} \subset X \setminus A$ . Так как для любой точки  $x \in X \setminus A$  у  $x$  и  $A$  существуют непересекающиеся окрестности, то объединение всех таких  $U$  совпадает с  $X \setminus A$ , поэтому  $f(A) \cap f(X \setminus A) = \emptyset$ .  $f|_{X \setminus A \rightarrow Y \setminus f(A)}$  — собственное открытое вложение. По лемме 1 оно является гомеоморфизмом на открыто-замкнутое подмножество  $Y \setminus f(A)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — непрерывное собственное отображение,  $X$  регулярно,  $A \subset X$  замкнуто,  $\text{int}_X A = \text{int}_Y f(A) = \emptyset$ ,  $f|_{X \setminus A}$  — локальный гомеоморфизм,  $f|_{X \setminus f^{-1}(f(A))}$  — инъекция. Тогда

1. Если  $f|_A$  — инъекция, то  $f$  — вложение; если при этом  $Y \setminus f(A)$  связно, то  $f$  — гомеоморфизм.
2. Если  $f|_A$  — погружение, то и  $f$  является погружением.
3. Если  $A' \subset A$  замкнуто и  $f|_{A \setminus A'}$  — погружение, то и  $f|_{X \setminus A'}$  является погружением.

**Доказательство.**  $f|_{X \setminus f^{-1}(f(A)) \rightarrow Y \setminus f(A)}$  — собственное отображение; по лемме 4 оно является вложением. По теореме 2  $f|_{X \setminus A}$  также является вложением,  $f(A) \cap f(X \setminus A) = \emptyset$ , и  $f|_{X \setminus A}$  является гомеоморфизмом на открыто-замкнутое подмножество  $Y \setminus f(A)$ .

1. Отображение  $f$  — инъекция; по лемме 4 оно является вложением. Если  $Y \setminus f(A)$  связно, то согласно п.3 теоремы 2  $f$  — биекция; применяя лемму 4, получаем, что  $f$  — гомеоморфизм.
2. Этот пункт является следствием более общего п.3 данной теоремы, доказываемого ниже.
3. Пусть  $x \in A \setminus A'$  — произвольная точка. Возьмем окрестность  $U \ni x$  в  $X \setminus A'$  такую, что  $f|_{U \cap A}$  — вложение.  $f|_{U \setminus A}$  также является вложением, и  $f(U \cap A) \cap f(U \setminus A) = \emptyset$ . Поэтому  $f|_U$  — инъекция,  $f|_{X \setminus A'}$  — локальная инъекция. По лемме 5 получаем, что  $f|_{X \setminus A'}$  — погружение.

**Теорема 4.** Пусть

- $X$  регулярно,  $A \subset X$  замкнуто, для любой точки  $a$  границы  $A$  и любой ее окрестности  $U$  в  $X$  существует окрестность  $U' \subset U$  точки  $a$  такая, что  $U' \setminus A$  линейно связно,
- $B \subset Y$ , для любой точки  $b$  границы  $B$  и любой ее окрестности  $V$  в  $Y$  существует окрестность  $V' \subset V$  точки  $b$  такая, что  $V' \setminus B$  связно и односвязно,
- $f \in C(X, A, X \setminus A; Y, B, Y \setminus B)$  — собственное отображение,  $f|_{A \rightarrow B}$  и  $f|_{X \setminus A \rightarrow Y \setminus B}$  — локальные гомеоморфизмы.

Тогда  $f$  — накрытие.

**Доказательство.** По лемме 1  $f|_{A \rightarrow B}$  является накрытием над каждой компонентой связности  $B$ , а  $f|_{X \setminus A \rightarrow Y \setminus B}$  — накрытием над каждой компонентой связности  $Y \setminus B$ .

Пусть  $a$  лежит на границе  $A$ ,  $b = f(a)$ ,  $V$  — окрестность  $b$  в  $Y$  такая, что  $V \setminus B$  связно и односвязно,  $U$  — окрестность  $a$  в  $f^{-1}(V)$  такая, что  $U \setminus A$  линейно связно и  $f|_{U \cap A}$  — вложение.  $f|_{U \setminus A}$  — тоже вложение, и  $f(U \cap A) \cap f(U \setminus A) = \emptyset$ . Значит,  $f|_U$  — инъекция,  $f$  — локальная инъекция. По лемме 5 получаем, что  $f$  — погружение.

Покажем, что  $f$  открыто. Достаточно доказать, что для любой точки  $a$  на границе  $A$  и для сколь угодно малой окрестности  $U \ni a$  в  $X$  точка  $b = f(a)$  содержится во внутренней части  $f(U)$  в  $Y$ . Без ограничения общности  $U$  можно выбрать так, чтобы  $f|_{\overline{U}}$  было вложением, а  $U \setminus A$  было связно. Предположим, что  $b \notin \text{int}_Y f(U)$ . Тогда для любой окрестности  $V \ni b$  выполняется  $(V \setminus B) \setminus (f(U) \setminus B) \neq \emptyset$ , так как  $f(U)$  содержит окрестность  $b$  в  $B$ . Если  $V \setminus B$  связно, то его пересечение с границей множества  $f(U) \setminus B$  непусто, так как  $f(U) \setminus B = f(U \setminus A)$  непусто и открыто в  $Y \setminus B$ . Пусть  $\{y_i\}$  — последовательность точек в границе  $f(U)$ , сходящихся к  $b$  и не лежащих на  $B$ . Так как  $y_i \in \overline{f(U)} \setminus B$ , а  $f|_{X \setminus A \rightarrow Y \setminus B}$  — собственное накрытие, то  $f^{-1}(y_i) \cap \overline{U} = \{x_i\}$  для некоторых точек  $x_i \in \overline{U} \setminus (U \cup A)$ .  $\bigcup \{x_i\} \cup \{a\} = f^{-1}(K) \cap \overline{U}$ , где  $K = \bigcup \{y_i\} \cup \{b\}$ , и компактно в силу собственности  $f$ . Для любой предельной точки  $x'$  последовательности  $\{x_i\}$   $f(x') = \lim y_i = b$ , так что  $\lim x_i = a$ . Но  $a$  не может быть предельной точкой границы открытого множества  $U \ni a$ . Полученное противоречие показывает, что  $b \in \text{int} f(U)$ .

Итак,  $f$  — открытое погружение, т.е. локальный гомеоморфизм. Тогда по лемме 1  $f$  — накрытие.

## 2. Топологические многообразия

**О п р е д е л е н и е 2.** Хаусдорфово топологическое пространство  $M$  со счетной базой называется  $n$ -мерным топологическим многообразием, если для любой точки  $x \in M$  некоторая ее окрестность гомеоморфна пространству  $\mathbb{R}^n$  либо полупространству  $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, x_1 \geq 0\}$ .

Точки  $x \in M$ , имеющие окрестность, гомеоморфную  $\mathbb{R}^n$ , называются *внутренними*. Подпространство  $M$ , состоящее из точек, не являющихся внутренними, называется *краем*  $\partial M$  многообразия  $M$ . Если  $\partial M = \emptyset$ , то  $M$  называется многообразием без края. Край  $n$ -мерного многообразия является  $(n - 1)$ -мерным многообразием без края.

Если подпространство  $A \subset M$  многообразия  $M$  само является многообразием, то оно называется *подмногообразием*  $M$ .

Приведем вначале два очевидных следствия результатов, полученных в предыдущем разделе:

**Теорема 5.** Пусть  $M, N$  — связные топологические многообразия одинаковой размерности,  $f: M \rightarrow N$  — непрерывное собственное отображение,  $A \subset M$  замкнуто,  $\text{int}_M A = \text{int}_N f(A) = \emptyset$ ,  $f|_{M \setminus A}$  — локальный гомеоморфизм,  $f|_{M \setminus f^{-1}(f(A))}$  — инъекция. Тогда

1. Если  $f|_A$  — погружение, то и  $f$  — погружение.
2. Если  $f|_A$  — инъекция, то  $f$  — вложение.
3. Если  $f|_A$  — инъекция и  $N \setminus f(A)$  связно, то  $f$  — гомеоморфизм.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Следствие теоремы 3.

**Теорема 6.** Пусть  $M, N$  — связные топологические многообразия одинаковой размерности,  $f: M \rightarrow N$  — непрерывное собственное отображение,  $A \subset M$  замкнуто,  $\text{int}_M A = \text{int}_N f(A) = \emptyset$ ,  $N \setminus f(A)$  связно,  $f|_{M \setminus A}$  — локальный гомеоморфизм, и выполняется одно из двух условий:

- для некоторой точки  $y_0 \in N \setminus f(A)$  ее прообраз  $f^{-1}(y_0)$  одноэлементен или
- $M \setminus A$  связно,  $N \setminus f(A)$  односвязно.

Тогда если  $f|_A$  — погружение, то и  $f$  — погружение; если  $f|_A$  — инъекция, то  $f$  — гомеоморфизм.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Следствие лемм 2, 3 и теоремы 3.

**Теорема 7.** Пусть  $M, N$  — топологические многообразия одинаковой размерности,  $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$ ,  $f|_{\partial M}$  и  $f|_{M \setminus \partial M}$  — погружения. Тогда  $f$  — локальный гомеоморфизм.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $f$  — собственное отображение, то  $f$  является локальным гомеоморфизмом по теореме 4 (если положить  $X = M$ ,  $A = \partial M$ ,  $Y = N$ ,  $B = \partial N$ ). Докажем теорему в общем случае.

$\partial M$ ,  $\partial N$  — топологические многообразия без края одинаковой размерности, и по теореме об инвариантности области [6]  $f|_{\partial M \rightarrow \partial N}$  — локальный гомеоморфизм. По той же теореме  $f(M \setminus \partial M) \subset N \setminus \partial N$  и  $f|_{M \setminus \partial M \rightarrow N \setminus \partial N}$  — также локальный гомеоморфизм.

Разобьем доказательство на два этапа: (1)  $f$  открыто, (2)  $f$  является локальным гомеоморфизмом.

1. Докажем, что для любой точки  $x_0 \in \partial M$  и для сколь угодно малой ее окрестности  $U$  точки  $y_0 = f(x_0)$  имеется окрестность  $V$ , содержащаяся в  $f(U)$ .

Пусть  $x_0 \in \partial M$ ,  $U$  — окрестность  $x_0$  в  $M$  такая, что  $f|_{U \cap \partial M \rightarrow \partial N}$  — вложение. Рассмотрим  $n$ -мерный симплекс  $\Delta^n$ ,  $n = \dim M$ , вложенный в  $U$  таким образом, что одна его  $(n-1)$ -мерная грань  $\Delta^{n-1}$  вложена в  $U \cap \partial M$  и содержит  $x_0$  в своей относительной внутренности, а оставшаяся часть  $\tilde{\Delta}^n = \Delta^n \setminus \Delta^{n-1}$  вложена в  $U \setminus \partial M$ . Тогда  $x_0 \in \text{int}_M \Delta^n$ .

Пусть  $V$  — связная окрестность точки  $y_0 = f(x_0)$  в  $N$ , не пересекающаяся с  $f(Q)$ ,  $Q = \partial \Delta^n \setminus (\Delta^{n-1} \setminus \partial \Delta^{n-1})$ , и такая, что  $V \cap \partial N \subset f(\Delta^{n-1})$  (такая окрестность существует, поскольку  $Q$  компактно). Предположим, что  $V \not\subset f(\Delta^n)$ . Тогда и  $V \setminus \partial N \not\subset f(\Delta^n)$ . Так как  $f^{-1}(V) \cap \Delta^n$  непусто (содержит  $x_0$ ) и открыто в  $\Delta^n$ , то  $f^{-1}(V) \cap (M \setminus \partial M) \cap \Delta^n \neq \emptyset$ , и  $V \cap (N \setminus \partial N) \cap f(\Delta^n) \neq \emptyset$ . Значит, в  $V \setminus \partial N$  есть точки, как принадлежащие  $f(\Delta^n)$ , так и не принадлежащие. Тогда граница  $\Gamma$  множества  $f(\Delta^n)$  в  $N$  должна пересекаться с  $V \setminus \partial N$ . Пусть  $y \in (V \setminus \partial N) \cap \Gamma$ .  $f(\Delta^n)$  компактно, поэтому  $\Gamma \subset f(\Delta^n)$  и  $y = f(x)$  для некоторого  $x \in \tilde{\Delta}^n$ .  $(V \setminus \partial N) \cap f(\partial \Delta^n) = \emptyset$ , поэтому  $x \in \Delta^n \setminus \partial \Delta^n$ . Но  $f(\Delta^n \setminus \partial \Delta^n)$  открыто в  $N \setminus \partial N$ , так как  $f|_{M \setminus \partial M \rightarrow N \setminus \partial N}$  — локальный гомеоморфизм, поэтому  $y = f(x)$  лежит во внутренней части  $f(\Delta^n)$  в  $N$ , что противоречит предположению  $x \in \Gamma$ . Следовательно,  $V \subset f(\Delta^n) \subset f(U)$ , и  $f$  открыто.

2.  $f|_{M \setminus \partial M \rightarrow N \setminus \partial N}$  — локальный гомеоморфизм, и  $M \setminus \partial M$  открыто в  $M$ , поэтому достаточно доказать, что для любого  $x_0 \in \partial M$  существует такая окрестность точки  $x_0$  в  $M$ , что ограничение  $f$  на эту окрестность — вложение.

Положим  $U' = f^{-1}(V) \cap \Delta^n = f^{-1}(V) \cap (\Delta^n \setminus Q)$ . Так как  $f^{-1}(V)$  и  $\Delta^n \setminus Q$  открыты в  $M$ , то и  $U'$  открыто в  $M$ . Отображение  $f|_{U' \rightarrow V}$  сюръективное и собственное, так как для любого компакта  $K \subset V$  прообраз  $(f|_{U' \rightarrow V})^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap U' = f^{-1}(K) \cap \Delta^n$  — замкнутое подмножество компакта  $\Delta^n$  и поэтому само компактно.

Рассмотрим  $n$ -мерный симплекс  $\sigma^n$ , вложенный в  $V$  таким образом, что одна его  $(n-1)$ -мерная грань  $\sigma^{n-1}$  вложена в  $\partial N$  и содержит  $y_0$  в своей относительной внутренности, а оставшаяся часть  $\tilde{\sigma}^n = \sigma^n \setminus \sigma^{n-1}$  вложена в  $V \setminus \partial N$ . Напомним, что  $U$  была выбрана так, что  $f|_{U \cap \partial M \rightarrow \partial N}$  — вложение, поэтому  $f|_{U' \cap \partial M \rightarrow V \cap \partial N}$  — гомеоморфизм. Значит,  $f$  задает гомеоморфизм между некоторым  $(n-1)$ -мерным симплексом  $\rho^{n-1}$ , вложенным в  $U' \cap \partial M$ , и  $\sigma^{n-1}$ .

Так как  $f|_{U' \setminus \partial M \rightarrow V \setminus \partial N}$  — накрытие (по лемме 1) и  $\tilde{\sigma}^n$  односвязно, то его прообраз  $(f|_{U' \setminus \partial M \rightarrow V \setminus \partial N})^{-1}(\tilde{\sigma}^n)$  гомеоморфен несвязному объединению одного или нескольких экземпляров  $\tilde{\sigma}^n$ :  $f^{-1}(\tilde{\sigma}^n) \cong J \times \tilde{\sigma}^n$ , где  $J$  — множество индексов с дискретной топологией. Таким образом, получены гомеоморфизмы  $\tilde{g}_j : \tilde{\sigma}^n \rightarrow U' \setminus \partial M$ ,  $j \in J$  такие, что  $f \circ \tilde{g}_j = \text{id}$ , и  $\text{Im } \tilde{g}_i \cap \text{Im } \tilde{g}_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Гомеоморфизмы  $\tilde{g}_j$  можно продолжить до гомеоморфизмов  $g_j : \sigma^n \rightarrow U'$  так, что  $f \circ g_j = \text{id}$ .

Значит, замкнутая окрестность  $f^{-1}(\sigma^n)$  точки  $x_0$  гомеоморфна факторпространству  $J \times \sigma^n$  по отображению  $J \times \sigma^{n-1} \rightarrow \sigma^{n-1}$  (т.е. каждый экземпляр  $n$ -симплекса  $j \times \sigma^n$  приклеивается к единственному экземпляру  $\sigma^{n-1}$  по стандартному вложению  $\sigma^{n-1} \rightarrow \sigma^n$ ). Это совместимо с условием, что окрестность точки  $x_0$  в  $M$  гомеоморфна полупространству  $\mathbb{R}_+^n$ , лишь тогда, когда множество индексов  $J$  одноэлементно.

Таким образом, ограничение  $f$  на некоторую окрестность произвольной точки  $x_0 \in \partial M$  — вложение, и  $f$  — локальный гомеоморфизм.

**Теорема 8.** Пусть  $M, N$  — связные топологические многообразия одинаковой размерности,  $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$  — собственное отображение,  $f|_{\partial M}$  и  $f|_{M \setminus \partial M}$  — погружения. Тогда  $f$  — накрытие.

Если выполняется одно из двух условий:

- $N$  односвязно, или
- существует точка в  $N$  с одноточечным прообразом,

то  $f$  — гомеоморфизм.

Доказательство является следствием теоремы 7 и лемм 1–3 (а также следствием теоремы 4 и лемм 2–3).



Следующий результат является очевидным следствием теоремы 8; он сформулирован здесь в качестве отдельного утверждения ввиду наличия его аналогов для ограниченных областей в  $\mathbb{R}^n$  в работах [3, 4] и отсутствия полного доказательства соответствующих теорем в этих работах.

**Теорема 9.** Пусть  $M, N$  — связные топологические многообразия одинаковой размерности с непустым краем,  $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$  — собственное отображение,  $f|_{\partial M \rightarrow \partial N}$  — инъекция,  $f|_{M \setminus \partial M}$  — погружение. Тогда  $f$  — гомеоморфизм.

**Доказательство.** Так как  $f(M \setminus \partial M) \subset N \setminus \partial N$  и  $f|_{\partial M \rightarrow \partial N}$  — инъекция, то существует  $y_0 \in \partial N$  с одноточечным прообразом.  $f|_{\partial M}$  — погружение по лемме 4. Осталось применить теорему 8.

В предыдущих теоремах требовалось, чтобы край  $M$  отображался в край  $N$ ; хотелось бы избавиться от этого условия.

**Теорема 10.** Пусть  $M, N$  — связные топологические многообразия одинаковой размерности,  $N$  односвязно,  $\partial M$  компактно,  $f: M \rightarrow N$  — собственное погружение, ограничение  $f$  на каждую компоненту связности  $\partial M$  — инъекция. Тогда  $f$  — вложение.

Эта теорема является обобщением леммы 1 из [8] (там рассматриваются гладкие компактные  $M, N$  и локальный диффеоморфизм  $f: M \rightarrow N$ , причем  $\partial N = \emptyset$ ). Воспользуемся идеей доказательства из [8], заключающейся в разрезании  $N$  вдоль образов компонент связности  $\partial M$  и приклеивании возникающих при этом “шапочек” к  $M$  вдоль соответствующих компонент  $\partial M$ . Однако в нашей ситуации возникают дополнительные трудности, связанные с отсутствием гладкости (например, мы не знаем, являются ли образы компонент связности  $\partial M$  локально плоскими подмногообразиями  $N$ ) и незамкнутостью  $N$ . В частности, потребуется следующая лемма.

**Лемма 6.** Пусть  $M, N$  — топологические многообразия,  $\partial M$  компактно,  $f: M \rightarrow N$  — погружение, ограничение  $f$  на  $\partial M$  — вложение. Тогда существует окрестность  $U \supset \partial M$  в  $M$  такая, что ограничение  $f$  на  $U$  также является вложением.

Заметим, что здесь, в отличие от остальных теорем данного раздела, не требуется равенства размерностей  $M, N$ .

**Доказательство.** Так как нас интересует поведение  $f$  лишь в окрестности  $\partial M$ , а  $\partial M$  обладает воротником в  $M$  [9], то без ограничения общности можно считать, что  $M = \partial M \times [0, 1)$ . Поэтому доказываемое утверждение является следствием следующего факта:

**Лемма 7.** Пусть  $A, N$  — метрические пространства,  $A$  компактно,  $M = A \times [0, 1)$ ,  $f: M \rightarrow N$  — погружение,  $f|_{A \times \{0\}}$  — вложение. Тогда существует окрестность  $U \supset A \times \{0\}$  в  $M$  такая, что ограничение  $f$  на  $U$  также является вложением.

**Доказательство.** Зададим метрику на  $M$  равенством  $\rho((x, t), (x', t')) = \rho(x, x') + |t - t'|$  (метрики на  $A, M, N$  будем обозначать одной буквой  $\rho$  для удобства; из контекста всюду будет ясно, о каком пространстве идет речь). Обозначим через  $B_a(x)$  открытый шар радиуса  $a$  с центром в точке  $x$ .

Так как  $f$  — погружение, для каждой точки  $x \in A$  существует  $a \in (0, 1)$  такое, что  $f|_{B_a \times [0, a]}$  — вложение. Так как  $A$  компактно, его можно покрыть конечным числом шаров  $B_{a_i}(x_i)$ ; положим  $a = \min a_i$ .

Множество  $\{(x, y): x, y \in A, \rho(x, y) \geq a\} \subset A^2$  компактно, и непрерывная функция  $(x, y) \mapsto \rho(f(x, 0), f(y, 0))$  принимает на нем минимальное значение  $d > 0$ .  $f$  равномерно непрерывна на компактном множестве  $A \times [0, a]$ , так что

$$\exists \epsilon \in (0, a) \forall z, z' \in A \times [0, a] \quad \rho(z, z') < 2\epsilon \Rightarrow \rho(f(z), f(z')) < d/2.$$

Для любой пары точек  $(x, t), (x', t') \in A \times [0, 2\epsilon)$  возможны два варианта:

- либо  $\rho(x, x') < a$ , и тогда  $f(x, t) \neq f(x', t')$  в силу выбора  $a$ ,
- либо  $\rho(x, x') \geq a$ , и тогда  $\rho(f(x, t), f(x', t')) > \rho(f(x, 0), f(x', 0)) - d/2 - d/2 \geq 0$ .

Таким образом,  $f|_{A \times [0, 2\epsilon]}$  инъективно,  $f|_{A \times [0, \epsilon]}$  — вложение, и  $f|_{A \times [0, \epsilon]}$  — также вложение.

**Доказательство теоремы 10.**  $\partial M$  обладает воротником в  $M$  [9], т.е. существует вложение  $\varphi: \partial M \times [0, 1] \hookrightarrow M$ ,  $\varphi(x, 0) = x$  при  $x \in \partial M$ . По лемме 6 этот воротник можно выбрать так, чтобы ограничение  $f$  на каждую компоненту связности  $\text{Im } \varphi$  было вложением. Определим изотопию  $H: [0, 1] \times M \rightarrow M$  формулой

$$H_t(x) = \begin{cases} x, & x \notin \text{Im } \varphi \\ \varphi(q, s + t(1 - s)), & x = \varphi(q, s). \end{cases}$$

$H_0 = \text{id}$ , и  $H_t$  является вложением  $M \hookrightarrow M$  для любого  $t \in [0, 1]$ .

Положим  $F_t = f \circ H_t$  и зафиксируем произвольное  $t \in (0, 1)$ .

Пусть  $A$  — компонента связности  $\partial M$ ,  $B = F_t(A)$ . По построению  $F_t|_{A \rightarrow B}$  — гомеоморфизм,  $B \subset N \setminus \partial N$ . Так как  $N$  односвязно, а  $B$  — связное замкнутое подмногообразие  $N \setminus \partial N$  коразмерности 1, то  $N \setminus B$  распадается на две компоненты связности. Для  $U = \varphi(A \times [0, 1])$  образ  $F_t(U \setminus A)$  связан и не пересекается с  $B$ , поэтому содержится в одной из компонент связности  $N \setminus B$ . Обозначим эту компоненту через  $N_1$ , а другую —  $N_2$ .  $N_2 \cup B$  содержит воротник  $f \circ \varphi(A \times (0, t))$  подмногообразия  $B = f \circ \varphi(A \times \{t\})$  и, следовательно, является  $n$ -мерным топологическим многообразием с краем, одной из компонент связности которого является  $B$ , а оставшиеся компоненты содержатся в  $\partial N$ . Приклеим к  $M$  вдоль  $A$  многообразие  $N_2 \cup B$  по гомеоморфизму  $F_t|_{A \rightarrow B}$ , и продолжим  $F_t$  на полученное многообразие, полагая  $F_t|_{N_2} = \text{id}$ .

Проделав эту процедуру последовательно для всех компонент связности  $\partial M$  (их конечное число в силу компактности  $\partial M$ ), получаем вложение  $i_t: M \hookrightarrow \tilde{M}_t$  и погружение  $\tilde{F}_t: \tilde{M}_t \rightarrow N$ , причем ограничение  $\tilde{F}_t$  на каждую компоненту связности  $\partial \tilde{M}_t$  является вложением в  $\partial N$ . По построению  $\tilde{F}_t$  — собственное отображение. По теореме 8  $\tilde{F}_t$  — гомеоморфизм, а его ограничение  $\tilde{F}_t|_M = F_t$  — вложение.

Таким образом, для любого  $t \in (0, 1)$  отображение  $F_t: M \rightarrow N$  является вложением. Так как  $\bigcup_{t>0} H_t(M) = M \setminus \partial M$ , то  $f|_{M \setminus \partial M}$  также является вложением и  $f(M \setminus \partial M) \cap f(\partial M) = \emptyset$ .

Предположим, что существует пара различных точек  $x_0, x_1 \in \partial M$  с совпадающими образами  $f(x_0) = f(x_1)$ . Пусть  $\gamma$  — несамопересекающийся путь в  $M$ , соединяющий  $x_0$  с  $x_1$  и весь, за исключением концевых точек, лежащий в  $M \setminus \partial M$ ;  $A$  — компонента связности  $\partial M$ , содержащая  $x_0$ . Тогда  $\text{Im}(f \circ \gamma)$  — окружность в  $N$ , и ее индекс пересечения с  $f(A)$  равен 1, что противоречит односвязности  $N$ .

Следовательно,  $f|_{\partial M}$  инъективно,  $f$  также инъективно, и по лемме 4  $f$  является вложением.

### 3. Клеточные разбиения

**О п р е д е л е н и е 3.** Разбиение топологического пространства  $X$  называется *клеточным*, если для каждого элемента разбиения (*открытой клетки*)  $e$ : (1) задано неотрицательное целое число  $k$  (*размерность  $e$* ), (2) существует непрерывное отображение  $\varphi$  замкнутого диска  $D^k$  в  $X$  такое, что ограничение  $\varphi$  на внутренность  $D^k$  является гомеоморфизмом на  $e$ , а образ ограничения  $\varphi$  на границу  $D^k$  содержится в объединении клеток размерности меньше  $k$  (такое отображение  $\varphi$  называется характеристическим отображением для клетки  $e$ ).

Хаусдорфово топологическое пространство  $X$ , наделенное клеточным разбиением, называется *клеточным пространством*, если выполняются два условия: (C) замыкание каждой клетки пересекается лишь с конечным числом клеток, (W)  $A \subset X$  замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто пересечение  $A$  с замыканием каждой клетки.

Размерностью клеточного пространства называется верхняя граница размерностей его клеток. Клеточное пространство называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа клеток. *k-мерным остовом* клеточного пространства  $X$  называется объединение  $X_k$  открытых клеток  $X$  размерности не выше  $k$ . *Клеточным подпространством* клеточного пространства называется его подмножество, содержащее вместе с каждой точкой замыкание содержащей ее клетки.

### Коразмерность 1

**Теорема 11.** Пусть  $M, N$  — связные топологические  $n$ -мерные многообразия,  $A \subset M$  — клеточное пространство размерности  $\leq n - 1$ , замкнутое в  $M$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $f: M \rightarrow N$  — гомеоморфизм.
2.  $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$  — собственное отображение, ограничения  $f$  на  $M \setminus A$  и на каждую открытую клетку  $A$  — погружения,  $f|_{M \setminus f^{-1}(f(A))}$  — инъекция.

**Доказательство.** Одна половина утверждения ( $1 \Rightarrow 2$ ) очевидна. Докажем вторую половину.

Так как  $M$  имеет счетную базу,  $A$  состоит из не более чем счетного числа клеток.  $f(A)$  является объединением не более чем счетного числа подмногообразий  $N$  ненулевой коразмерности. Каждое из них нигде не плотно в  $N$ , поэтому  $f(A)$  имеет пустую внутренность в  $N$ . Аналогично,  $A$  является объединением не более чем счетного числа вложенных в  $M$  дисков ненулевой коразмерности, и  $\text{int}_M A = \emptyset$ . По теореме 2  $f|_{M \setminus A}$  — открытое вложение, и  $f(A) \cap f(M \setminus A) = \emptyset$ .

Обозначим через  $A_k$   $k$ -мерный остов  $A$ .

Предположим, что  $f|_{M \setminus A_k}$  — открытое вложение. Так как  $f|_{A_k \setminus A_{k-1}}$  — погружение, по п. 3 теоремы 3  $f|_{M \setminus A_{k-1}}$  является погружением. Так как  $M \setminus A_{k-1}$  —  $n$ -мерное многообразие с краем  $\partial(M \setminus A_{k-1}) \subset \partial M$ , то по теореме 7  $f|_{M \setminus A_{k-1}}$  является локальным гомеоморфизмом. По теореме 2  $f|_{M \setminus A_{k-1}}$  — открытое вложение.

По индукции получаем, что  $f$  — открытое вложение. По лемме 1  $f$  — гомеоморфизм.

**Теорема 12.** Пусть  $M, N$  — связные топологические  $n$ -мерные ориентированные многообразия;  $A \subset M$  — клеточное пространство размерности  $\leq n - 1$ , замкнутое в  $M$ ;  $A \cap \partial M$  является клеточным подпространством  $A$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $f: M \rightarrow N$  — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм.
2.  $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$  — собственное отображение,  $f|_{M \setminus A}$  — сохраняющее ориентацию погружение, ограничение  $f$  на каждую открытую клетку  $A$  — погружение, и для некоторой точки  $x_0 \in M \setminus A$  выполняется  $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ .

**Доказательство.** ( $1 \Rightarrow 2$ ) очевидно; докажем ( $2 \Rightarrow 1$ ).

Без ограничения общности можно считать, что  $\partial M = \partial N = \emptyset$ , так как общий случай сводится к этому переходом к дублям  $\mathcal{D}f: \mathcal{D}M \rightarrow \mathcal{D}N$ . Здесь  $\mathcal{D}$  — функтор взятия дубля: склеивания двух экземпляров многообразия вдоль края (при этом один из склеиваемых экземпляров остается с исходной ориентацией, а ориентация второго меняется на противоположную). Так как  $A \cap \partial M$  является клеточным подпространством  $A$ , можно определить дубль  $A$  как замкнутое клеточное пространство  $\mathcal{D}A \subset \mathcal{D}M$ : клетки, лежащие в  $A \cap \partial M$ , оставим в единственном экземпляре, а все остальные клетки продублируем (характеристические отображения для дублированных клеток задаются очевидным образом).

Так как  $f$  — собственное отображение, определена степень  $\deg f$ , и  $f_*(o_{f^{-1}(y)}) = (\deg f)o_y$  для любого  $y \in N$ , где  $o_y \in H_n(N, N \setminus \{y\})$ ,  $o_{f^{-1}(y)} \in H_n(M, M \setminus f^{-1}(y))$  — образующие соответствующих относительных гомологических групп [6]. По условию  $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$  и  $f$  —

сохраняющий ориентацию гомеоморфизм в окрестности  $x_0$ , поэтому  $\deg f = 1$ ,  $f$  сюръективно и  $f|_{M \setminus f^{-1}(f(A)) \rightarrow N \setminus f(A)}$  — гомеоморфизм. Значит,  $(N \setminus \partial N) \setminus (f(A) \setminus \partial N) = N \setminus (\partial N \cup f(A))$  связно. Осталось применить теорему 11.

## Коразмерность 2

**Теорема 13.** Пусть  $M, N$  — связные топологические  $n$ -мерные многообразия,  $A \subset M$  — конечное клеточное пространство размерности  $\leq n - 2$ . Пусть  $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$  — собственное отображение, ограничения  $f$  на  $M \setminus A$  и на каждую открытую клетку  $A$  являются погружениями. Если выполняется одно из двух условий:

1. Существует точка  $x_0 \in M \setminus A$  такая, что  $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ , или
2.  $N \setminus f(A)$  односвязно,

то  $f: M \rightarrow N$  — гомеоморфизм.

Для того, чтобы доказать эту теорему, нам понадобится ряд вспомогательных результатов. Напомним определение размерности  $\dim X$  топологического пространства  $X$  и некоторые основные ее свойства:

- $\dim X$  равна наименьшему целому числу  $n \geq 0$ , удовлетворяющему условию: в любое конечное открытое покрытие пространства  $X$  можно вписать конечное открытое покрытие кратности  $\leq n + 1$  ([10], II.2).
- Для произвольного подпространства  $X_0$  совершенно нормального пространства  $X$   $\dim X_0 \leq \dim X$  ([10], IV.8, теорема 18).
- Если нормальное пространство  $X$  есть сумма счетного числа своих замкнутых подмножеств, каждое из которых имеет размерность  $\leq n$ , то и само пространство  $X$  имеет размерность  $\leq n$  ([10], IV.7, теорема 16).
- Если  $M$  —  $n$ -мерное связное топологическое многообразие без края и  $A \subset M$  имеет размерность  $\leq n - 2$ , то  $M \setminus A$  связно ([10], VIII.2, теорема 2).

**Лемма 8.** Пусть  $A$  — конечное клеточное пространство размерности  $\leq n - 2$ ,  $N$  —  $n$ -мерное топологическое многообразие,  $f: A \rightarrow N$  — непрерывное отображение, ограничение  $f$  на каждую открытую клетку  $A$  является погружением. Тогда, если  $N$  линейно связно, то и  $N \setminus f(A)$  линейно связно.

**Доказательство.** Обозначим через  $E_i$  объединение открытых  $i$ -мерных клеток  $A$ . Каждая точка  $x \in E_i$  обладает окрестностью  $U_x$  в  $E_i$ , гомеоморфной  $i$ -мерному диску и такой, что  $f|_{U_x}$  — вложение. Из покрытия  $\{U_x: x \in E_i\}$  можно выделить счетное подпокрытие  $\{U_{i,j}\}$  пространства  $E_i$ . Тогда  $f(A)$  будет покрыто счетным числом дисков  $f(U_{i,j})$  размерности  $\leq n - 2$ , следовательно, и оно само, и его подпространство  $f(A) \setminus \partial N$  должны иметь размерность  $\leq n - 2$ .

Так как  $A$  компактно,  $f(A) \setminus \partial N$  замкнуто в  $N \setminus \partial N$ , и  $N \setminus (\partial N \cup f(A))$  — топологическое многообразие без края. Поэтому из связности  $N \setminus (\partial N \cup f(A))$  вытекает его линейная связность.

Для любой точки  $y_0 \in \partial N \setminus f(A)$  существует ее окрестность в  $N$ , не пересекающаяся с  $f(A)$ , и путь, связывающий  $y_0$  с точкой из  $N \setminus (\partial N \cup f(A))$ , следовательно,  $N \setminus f(A)$  также линейно связно.

**Лемма 9.** Пусть  $M, N$  — связные топологические  $n$ -мерные многообразия,  $A \subset M$  — конечное клеточное пространство размерности  $\leq n - 2$ ,  $f: M \rightarrow N$  — непрерывное собственное отображение, ограничения  $f$  на  $M \setminus A$  и на каждую открытую клетку  $A$  являются погружениями. Тогда  $M \setminus f^{-1}(f(A))$  линейно связно.

**Доказательство.** По доказанному в предыдущей лемме  $\dim f(A) \leq n - 2$ .

Пусть  $x \in f^{-1}(f(A)) \setminus A \subset M \setminus A$ . По условию существует окрестность  $U_x \subset M \setminus A$  точки  $x$  такая, что  $f|_{U_x}$  — вложение. Тогда  $\dim(f^{-1}(f(A)) \cap U_x) \leq n - 2$ .  $f^{-1}(f(A)) \setminus A$  покрывается не более чем счетным числом таких окрестностей, так что  $\dim(f^{-1}(f(A)) \setminus A) \leq n - 2$ , и  $\dim f^{-1}(f(A)) \leq n - 2$ .

Так как  $f$  собственно,  $f^{-1}(f(A))$  компактно.

Отсюда, аналогично доказательству предыдущей леммы, получаем, что  $M \setminus f^{-1}(f(A))$  линейно связно.

**Доказательство теоремы 13.** По леммам 8, 9  $N \setminus f(A)$  и  $M \setminus f^{-1}(f(A))$  линейно связны. По теореме 2  $f|_{M \setminus f^{-1}(f(A))}$  — вложение. Осталось применить теорему 11.

### Клеточные разбиения многообразий

**Определение 4.** Клеточное разбиение топологического многообразия  $M$  будем называть *правильным*, если  $\partial M$  является клеточным подпространством  $M$ .

**Теорема 14.** Пусть  $M, N$  — связные топологические  $n$ -мерные ориентированные многообразия, и задано правильное клеточное разбиение  $M$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $f: M \rightarrow N$  — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм.
2.  $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$  — собственное отображение; ограничение  $f$  на каждую открытую клетку  $M$  — погружение, причем если клетка  $n$ -мерна, то это погружение сохраняет ориентацию; и для некоторой точки  $x_0 \in (M \setminus M_{n-1}) \cup (\partial M \setminus M_{n-2})$ , где  $M_i$  —  $i$ -мерный остов  $M$ , выполняется  $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ .

**Доказательство**

1. Пусть  $x_0 \in \partial M \setminus M_{n-2}$ . Покажем, что этот случай сводится к случаю  $x_0 \in M \setminus M_{n-1}$ .

Пусть  $e^{n-1}$  — открытая  $(n - 1)$ -мерная клетка  $\partial M$ , содержащая  $x_0$ . По определению клеточного пространства, если замыкание некоторой клетки пересекается с  $e^{n-1}$ , то эта клетка  $n$ -мерна. Кроме того,  $M$  локально компактно, так что клеточное разбиение  $M$  локально конечно. Поэтому существует окрестность  $U \ni x_0$  в  $M$  такая, что  $U \setminus \partial M \subset \bigcup e_i^n$ , где  $\{e_i^n\}$  — некоторые  $n$ -мерные клетки. Без ограничения общности можно считать, что  $U$  гомеоморфно  $\mathbb{R}_+^n$  и  $U \cap \partial M \subset e^{n-1}$ . Так как  $e_i^n$  открыты, а  $U \setminus \partial M$  связно, то  $U \setminus \partial M$  полностью содержится в одной из  $n$ -мерных клеток; обозначим ее  $e^n$ .

$U$  является  $n$ -мерным топологическим многообразием с краем и  $f|_U \in C(U, \partial U; N, \partial N)$ . Ограничения  $f|_{\partial U}$ ,  $f|_{U \setminus \partial U}$  являются погружениями, так как  $\partial U$  и  $U \setminus \partial U$  содержатся в открытых клетках  $e^{n-1}$  и  $e^n$  соответственно. По теореме 7  $f|_U$  — локальный гомеоморфизм.

Пусть  $U' \in U$  — такая окрестность  $x_0$ , что  $f|_{U'}$  — вложение. Предположим, что существует последовательность  $\{x_i\} \subset M \setminus U'$  такая, что  $f(x_i) \rightarrow y_0 = f(x_0)$ . Так как  $\bigcup \{f(x_i)\} \cup \{y_0\}$  компактно, а  $f$  собственно, то у последовательности  $\{x_i\}$  есть предельная точка  $x \in M$ . По непрерывности  $f$ ,  $f(x) = y_0$ , и по условию одноэлементности  $f^{-1}(y_0)$  должно быть  $x = x_0$ . Но  $x_0$  не может быть предельной точкой последовательности, все элементы которой лежат вне  $U'$ .

Полученное противоречие доказывает, что существует такая окрестность  $V \ni y_0$  в  $N$ , что  $f^{-1}(V) \subset U$ . Но тогда  $f|_{f^{-1}(V)}$  — вложение, и для любой точки  $x_0 \in f^{-1}(V) \cap (M \setminus M_{n-1})$  будет выполняться  $f^{-1}(f(x'_0)) = \{x'_0\}$ , так что точку  $x_0$  в условии можно заменить точкой  $x'_0 \in M \setminus M_{n-1}$ .

2. Пусть теперь  $x_0 \in M \setminus M_{n-1}$ . Положим  $A = M_{n-1}$  и применим теорему 12.

В неориентируемом случае приходится дополнительно следить за поведением  $f$  в окрестности  $(n - 1)$ -мерных клеток:

**Теорема 15.** Пусть  $M, N$  — связные топологические  $n$ -мерные многообразия,  $M$  компактно, и задано правильное клеточное разбиение  $M$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $f: M \rightarrow N$  — гомеоморфизм.
2.  $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$  — собственное отображение; ограничение  $f$  на  $M \setminus M_{n-2}$  и на каждую открытую клетку  $M_{n-2}$  — погружение, и для некоторой точки  $x_0 \in M \setminus M_{n-2}$  выполняется  $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ .

**Доказательство.** Положим  $A = M_{n-2}$  и применим теорему 13.

#### 4. Триангуляции

**Определение 5.** Триангуляцией множества называется его покрытие симплексами такое, что (1) грани любого симплекса покрытия сами являются симплексами покрытия, (2) если один симплекс покрытия покрыт другим, то первый является гранью второго, (3) пересечение двух перекрывающихся симплексов покрытия также является симплексом покрытия.

Симплициальным пространством называется множество, наделенное триангуляцией и индуцированной этой триангуляцией топологией (подмножество замкнуто тогда и только тогда, когда его пересечение с любым симплексом триангуляции замкнуто).

Следующая теорема является следствием теоремы 14:

**Теорема 16.** Пусть  $M, N$  — связные топологические  $n$ -мерные ориентированные многообразия,  $K$  — триангуляция  $M$  (не обязательно комбинаторная),  $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$  — собственное отображение, ограничение  $f$  на относительную внутренность каждого симплекса триангуляции является погружением, ограничение  $f$  на относительную внутренность каждого  $n$ -мерного симплекса сохраняет ориентацию. Пусть для некоторой точки  $x_0 \in M$ , лежащей в объединении относительных внутренностей  $n$ -мерных симплексов  $M$  и  $(n-1)$ -мерных симплексов  $\partial M$ , выполняется  $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ . Тогда  $f: M \rightarrow N$  — гомеоморфизм, переводящий  $K$  в триангуляцию  $N$ .

**Определение 6.** Симплициальное пространство  $K$  называется  $n$ -мерным псевдомногообразием, если выполняются следующие условия: (1) каждый симплекс  $K$  является гранью некоторого  $n$ -мерного симплекса  $K$ , (2) каждый  $(n-1)$ -мерный симплекс  $K$  является гранью не более чем двух  $n$ -мерных симплексов  $K$ , (3) любые два  $n$ -мерных симплекса  $K$  можно включить в конечную последовательность  $n$ -мерных симплексов  $K$  такую, что каждые два соседних симплекса этой последовательности имеют общую  $(n-1)$ -мерную грань. Краем  $\partial K$   $n$ -мерного псевдомногообразия  $K$  называется подпространство  $K$ , образованное  $(n-1)$ -мерными симплексами  $K$ , каждый из которых является гранью ровно одного  $n$ -мерного симплекса  $K$  [11].

**Теорема 17.** Пусть  $K$  — компактное связное  $n$ -мерное ориентированное псевдомногообразие,  $N$  — связное  $n$ -мерное ориентированное топологическое многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $K$  — триангулированное топологическое многообразие, а  $f: K \rightarrow N$  — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм.
2.  $f \in C(K, \partial K; N, \partial N)$ ; ограничение  $f$  на относительную внутренность каждого симплекса  $K$  — погружение, причем если симплекс  $n$ -мерный, то это погружение сохраняет ориентацию; и для некоторой точки  $x_0 \in (K \setminus K_{n-1}) \cup (\partial K \setminus K_{n-2})$  (где  $K_i$  —  $i$ -мерный остов  $K$ ) выполняется  $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ .

Для доказательства этой теоремы нам понадобится обобщение на псевдомногообразия теоремы об инвариантности области:

**Лемма 10.** Пусть  $K$  —  $n$ -мерное псевдомногообразие,  $U \subset K \setminus \partial K$  открыто,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — погружение. Тогда  $f$  является локальным гомеоморфизмом, а  $U$  — топологическое многообразие.

**Доказательство.** Достаточно доказать, что если  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  — вложение для открытого  $U \subset K \setminus \partial K$ , то  $f(U)$  открыто. Доказательство аналогично доказательству теоремы об инвариантности области в [6]. Пусть  $x \in U$ ,  $K'$  — измельчение триангуляции  $K$  такое, что звезда  $S$  точки  $x$  в триангуляции  $K'$  содержится в  $U$ . Обозначим через  $L$  линк точки  $x$  в  $K'$ ;  $L$  является границей  $S$ .

По двойственности Александера — Понтрягина число компонент линейной связности  $\mathbb{R}^n \setminus f(L)$  на единицу больше ранга свободного  $\mathbb{Z}_2$ -модуля  $\check{H}^{n-1}(L; \mathbb{Z}_2)$  когомологий Чеха пространства  $L$  с коэффициентами в  $\mathbb{Z}_2$  [6]. Так как  $L$  — связное замкнутое  $(n-1)$ -мерное псевдомногообразие, то  $\check{H}^{n-1}(L; \mathbb{Z}_2) = H^{n-1}(L; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ , и  $\mathbb{R}^n \setminus f(L) = (\mathbb{R}^n \setminus f(S)) \cup f(S \setminus L)$  имеет две компоненты связности.

$S$  стягиваемо, поэтому  $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$  связно.

Поскольку  $f(S \setminus L)$  связно, оно должно быть компонентой связности  $\mathbb{R}^n \setminus f(L)$ . Так как  $\mathbb{R}^n \setminus f(L)$  открыто в  $\mathbb{R}^n$ , то и  $f(S \setminus L)$  открыто в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, для любой точки  $x \in U$  существует такая ее окрестность  $S \setminus L$  в  $U$ , что  $f(S \setminus L)$  открыто в  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство теоремы 17.** ( $1 \Rightarrow 2$ ) очевидно; докажем ( $2 \Rightarrow 1$ ).

1. Обозначим через  $K_i$   $i$ -мерный остов  $K$ ,  $K_{i-1} = \emptyset$ . Случай  $x_0 \in \partial K \setminus K_{n-2}$  сводится к случаю  $x_0 \in K \setminus K_{n-1}$  так же, как и в доказательстве теоремы 14. Как и в доказательстве теоремы 12, сведем задачу к случаю  $\partial K = \partial N = \emptyset$ , перейдя, если надо, к дублям.

Положим  $N' = N \setminus f(K_{n-2})$ ,  $K' = K \setminus f^{-1}(f(K_{n-2})) \subset K \setminus K_{n-2}$ . Так как  $K_{n-2}$  компактно, а  $K \setminus K_{n-2}$  — топологическое многообразие, то  $K'$ ,  $N'$  также являются  $n$ -мерными топологическими многообразиями без края. Рассмотрим собственное отображение  $f' = f|_{K' \rightarrow N'}$ . По лемме 8  $N'$  связно, так что определена степень  $\deg f'$ . По условию  $\deg f' = 1$ , так что  $f|_{K \setminus f^{-1}(f(K_{n-1}))}$  является вложением. Применяя п.2 теоремы 2 к  $X = K$ ,  $A = K_{n-1}$ ,  $Y = N$ , находим, что  $f|_{K \setminus K_{n-1}}$  — открытое вложение.

2. Пусть уже доказано, что  $f|_{K \setminus K_i}$  является открытым вложением для некоторого  $i \leq n-1$ . Применяя теорему 3 к  $X = K$ ,  $A = K_i$ ,  $A' = K_{i-1}$ ,  $Y = N$ , получаем, что  $f|_{K \setminus K_{i-1}}$  — погружение. По лемме 10 это погружение является локальным гомеоморфизмом. По лемме 8  $N \setminus f(K_{i-1})$  связно, и по условию теоремы существует точка в  $N \setminus f(K_{i-1})$  с одноточечным прообразом, так что к  $X = K$ ,  $A = K_i$ ,  $Y = N$  применима теорема 2, и  $f|_{K \setminus K_{i-1}}$  — открытое вложение.

По индукции получаем, что  $f = f|_{K \setminus K_{n-1}}$  — открытое вложение. Так как  $K$  компактно,  $f$  является гомеоморфизмом.  $K$  гомеоморфно топологическому многообразию  $N$  и, следовательно, само является топологическим многообразием.

В неориентируемом случае можно использовать следующую формулировку:

**Теорема 18.** Пусть  $K$  — компактное связное  $n$ -мерное псевдомногообразие,  $N$  — связное  $n$ -мерное топологическое многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $K$  — триангулированное топологическое многообразие, и  $f: K \rightarrow N$  — гомеоморфизм.
2.  $f \in C(K, \partial K; N, \partial N)$ ; ограничение  $f$  на  $K \setminus K_{n-2}$  и на относительную внутренность каждого симплекса  $K_{n-2}$  — погружение, и для некоторой точки  $x_0 \in K \setminus K_{n-2}$  выполняется  $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ .

**Доказательство.** Как и в доказательстве предыдущей теоремы, сведем общий случай к случаю  $\partial K = \partial N = \emptyset$  и рассмотрим собственное отображение  $f' = f|_{K' \rightarrow N'}$ . Отличие от условия предыдущей теоремы в том, что здесь уже само отображение  $f'$  является

локальным гомеоморфизмом. По леммам 8, 9 многообразия  $K'$ ,  $N'$  связны. По теореме 8  $f'$  — гомеоморфизм. По п. 2 теоремы 2  $f|_{K \setminus K_{n-2}}$  — открытое вложение. Остается повторить рассуждения п. 2 доказательства предыдущей теоремы с тем изменением, что начинать индукцию здесь надо с  $i = n - 2$ , а не с  $i = n - 1$ , как там.

## 5. Гладкие многообразия

**О п р е д е л е н и е 7.** Пусть  $M$  —  $n$ -мерное топологическое многообразие. *Картой*  $M$  называется гомеоморфизм  $\varphi$  открытой области  $U \subset M$  на  $\mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{R}_+^n$ . Две карты  $\varphi: U \rightarrow V$ ,  $\varphi': U' \rightarrow V'$  называются  $C^r$ -согласованными, если отображение  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  и обратное ему являются  $C^r$ -гладкими на своей области определения.  $C^r$ -структурой на  $M$  называется покрытие  $M$  попарно  $C^r$ -согласованными картами. Две  $C^r$ -структуры на  $M$  считаются эквивалентными, если их объединение также является  $C^r$ -структурой.

$C^r$ -многообразием (многообразием класса гладкости  $C^r$ ) называется  $n$ -мерное топологическое многообразие  $M$  с заданной на нем  $C^r$ -структурой.

Отображение  $f: M \rightarrow M'$ , где  $M, M'$  —  $C^r$ -многообразия, называется гладким отображением класса  $C^r$ , или  $C^r$ -отображением, если для любой пары карт  $\varphi: U \rightarrow V$ ,  $\varphi': U' \rightarrow V'$ ,  $U \subset M$ ,  $U' \subset M'$  отображение  $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$   $C^r$ -гладко на своей области определения. Множество  $C^r$ -отображений  $f: M \rightarrow M'$  будем обозначать  $C^r(M, M')$ .

$C^r$ -отображение  $f: M \rightarrow N$  называется  $C^r$ -погружением, если его дифференциал  $df$  невырожден ( $\text{rang}(df) = \dim M$ ) в каждой точке. Инъективное  $C^r$ -погружение называется  $C^r$ -вложением. Биъективное  $C^r$ -погружение называется  $C^r$ -диффеоморфизмом.

Заметим, что всякое  $C^r$ -погружение является (если забыть про гладкую структуру) погружением в смысле определения 1 и всякое  $C^r$ -вложение является вложением в смысле определения 1. Поэтому результаты разд. 2–4 легко переформулируются для гладкого случая (заметим, что прямое доказательство гладких и кусочно-гладких вариантов существенно проще, чем доказательство их топологических аналогов). Приведем гладкие варианты некоторых из них (всюду ниже  $r \geq 1$ ):

**Теорема 19.** Пусть  $M, N$  — связные  $C^r$ -многообразия одинаковой размерности,  $f \in C^r(M, \partial M; N, \partial N)$  — собственное отображение,  $df$  невырожден на  $M$ , и выполняется одно из двух условий:

- $N$  односвязно, или
- существует точка в  $N$  с одноточечным прообразом.

Тогда  $f$  —  $C^r$ -диффеоморфизм.

**Теорема 20.** Пусть  $M, N$  — связные  $C^r$ -многообразия одинаковой размерности с непустым краем,  $f \in C(M, \partial M; N, \partial N) \cap C^r(M \setminus \partial M, N)$  — собственное отображение,  $df$  невырожден на  $M \setminus \partial M$ ,  $f|_{\partial M}$  — инъекция. Тогда  $f$  — гомеоморфизм, а ограничение  $f|_{M \setminus \partial M \rightarrow N \setminus \partial N}$  —  $C^r$ -диффеоморфизм. Если  $df$  невырожден на  $M$ , то  $f$  —  $C^r$ -диффеоморфизм.

**Теорема 21.** Пусть  $M, N$  — связные  $C^r$ -многообразия одинаковой размерности,  $N$  односвязно,  $\partial M$  компактно,  $f \in C^r(M, N)$  — собственное погружение, ограничение  $f$  на каждую компоненту связности  $\partial M$  — инъекция. Тогда  $f|_{M \rightarrow f(M)}$  —  $C^r$ -диффеоморфизм.

Пусть  $K$  — симплициальное пространство,  $N$  —  $C^r$ -многообразие. В [12] для отображений из  $K$  в  $N$  вводятся понятия (кусочно-гладкого)  $C^r$ -отображения,  $C^r$ -погружения,  $C^r$ -вложения, а также  $C^r$ -триангуляции многообразия  $N$ . Там же доказывается следующий результат (теорема 3.8):



Всякое невырожденное  $C^r$ -отображение  $f: K \rightarrow N$ , являющееся гомеоморфизмом полиэдра  $K$  на многообразии  $N$ , представляет собой  $C^r$ -триангуляцию этого многообразия.

Очевидным следствием этой теоремы и наших теорем 17–18 являются следующие результаты (ориентируемый и неориентируемый варианты):

**Теорема 22.** Пусть  $K$  — компактное связное  $n$ -мерное ориентированное псевдомногообразие,  $N$  — связное  $n$ -мерное ориентированное  $C^r$ -многообразие,  $f \in C(K, \partial K; N, \partial N)$  — невырожденное  $C^r$ -отображение, ограничение  $f$  на относительную внутренность каждого  $n$ -мерного симплекса сохраняет ориентацию. Пусть для некоторой точки  $x_0 \in (K \setminus K_{n-1}) \cup (\partial K \setminus K_{n-2})$  выполняется  $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ . Тогда  $f$  задает  $C^r$ -триангуляцию  $N$ .

**Теорема 23.** Пусть  $K$  — компактное связное  $n$ -мерное псевдомногообразие,  $N$  — связное  $n$ -мерное  $C^r$ -многообразие,  $f \in C(K, \partial K; N, \partial N)$  — невырожденное  $C^r$ -отображение, ограничение  $f$  на  $K \setminus K_{n-2}$  является  $C^r$ -погружением, Пусть для некоторой точки  $x_0 \in K \setminus K_{n-2}$  выполняется  $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$ . Тогда  $f$  задает  $C^r$ -триангуляцию  $N$ .

## 6. Заключение

Доказываемые в данной работе критерии могут быть использованы для определения характеристик непрерывного отображения, заданного либо глобально на некотором многообразии, либо независимо на каждой ячейке (клетке или симплексе), на которые это многообразие разбито.

Некоторые результаты данной работы являются обобщениями критериев, сформулированных в работах [3, 4] и широко используемых в настоящее время при разработке алгоритмов построения сеток.

Так, теорема 3 в [4] является частным случаем теоремы 9 данной работы (и еще более частным случаем теоремы 8) и в нашей терминологии выглядит так: Пусть  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное  $C^1$ -многообразие,  $f \in C^1(\bar{\Omega}, \partial\bar{\Omega}; \bar{\Omega}, \partial\bar{\Omega})$ ,  $f|_{\partial\bar{\Omega} \rightarrow \partial\bar{\Omega}}$  — диффеоморфизм,  $f|_{\bar{\Omega}}$  —  $C^1$ -погружение; тогда  $f$  является гомеоморфизмом. Заметим, что у нас в отличие от [4]

- не требуется гладкости  $f$ ;
- не требуется, чтобы  $f$  задавало диффеоморфизм границы на границу (требуется лишь, чтобы оно инъективно отображало границу в границу, или — в теореме 8 — было погружением границы в границу);
- $f$  определено на произвольном топологическом многообразии и действует в произвольное топологическое многообразие (а не в исходную или гомеоморфную исходной область).

Теоремы 7, 8, 9 работы [4] являются следствиями теоремы 14 данной работы.

Например, в теореме 7 работы [4] утверждается следующее: Пусть  $\Omega$  — ограниченная связная область в  $\mathbb{R}^n$ , и задано разбиение  $\bar{\Omega}$  на ячейки  $\bar{\Omega}_i$ , причем каждая ячейка — выпуклая область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(\bar{\Omega}, \partial\bar{\Omega}; \bar{\Omega}, \partial\bar{\Omega})$ ,  $f|_{\partial\bar{\Omega} \rightarrow \partial\bar{\Omega}}$  — гомеоморфизм, ограничение  $f_i = f|_{\bar{\Omega}_i}$  на замыкание каждой ячейки является  $C^1$ -погружением. Пусть для любой точки  $x \in \bar{\Omega}$  выпуклая оболочка множества матриц  $\{df_i|_x : x \in \bar{\Omega}_i\}$  содержит лишь матрицы с положительным определителем. Тогда  $f$  — гомеоморфизм. Заметим, что условие выпуклости ячеек означает, что все внутренние грани — клетки немаксимальной размерности — плоские.

В теореме 9 работы [4] рассматривается такое же разбиение  $\bar{\Omega}$  на ячейки  $\bar{\Omega}_i$ , и для отображения  $f \in C(\bar{\Omega}, \partial\bar{\Omega}; \bar{\Omega}, \partial\bar{\Omega})$  такого, что  $f|_{\partial\bar{\Omega} \rightarrow \partial\bar{\Omega}}$  — гомеоморфизм, а для каждой замкнутой ячейки  $f_i = f|_{\bar{\Omega}_i}$  — сохраняющее ориентацию  $C^1$ -погружение, ограничение которого на границу этой ячейки  $f|_{\partial\bar{\Omega}_i}$  — вложение, доказывается, что  $f$  — гомеоморфизм.

В отличие от этих условий, в теореме 14 данной работы

- ячейки могут быть произвольной формы (не налагается никаких требований выпуклости, плоских граней и т.п.);
- не требуется гладкости отображения  $f$  (достаточно непрерывности);
- накладывается условие (“невырожденность”) лишь на поведение  $f$  внутри ячеек и граней, а не в их замыканиях, и не на совокупность всех матриц из выпуклой оболочки, как описано выше;
- не требуется инъективности ограничения  $f$  на границы ячеек;
- достаточно лишь наличия одной точки с одноэлементным прообразом (не требуется, чтобы  $f$  гомеоморфно отображало границу области на границу);
- отображение определено на произвольном топологическом многообразии (а не на замкнутой области в  $\mathbb{R}^n$ ) и действует в произвольное топологическое многообразие (а не в исходную или гомеоморфную исходной область).

Ряд теорем в [3, 4] относятся к отображениям замыкания произвольной ограниченной связной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  в себя. К сожалению, две из них неверны, а доказательства других либо неполны, либо отсутствуют.

Ошибочность теоремы 4 в [3] показывает следующий контрпример:  $\Omega = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \rho \leq 2, \varphi \neq 0\}$  — ограниченная связная односвязная область в  $\mathbb{R}^2$  (здесь  $(\rho, \varphi)$  — полярные координаты), гладкое отображение  $h : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$  задается формулой  $(\rho, \varphi) \mapsto (\rho, 2\varphi)$ . Область  $\Omega$  и отображение  $h$  удовлетворяют условиям данной теоремы, однако  $h$  не является гомеоморфизмом  $\overline{\Omega}$  на  $\overline{\Omega}$ . Аналогично строится и контрпример к теореме 6 в [3].

В доказательствах теоремы 3 в [3], теорем 3 и 5 в [4] авторы используют необоснованное предположение о пустоте пересечения образа области и образа ее границы.

Например, в теореме 3 в [3] утверждается следующее: *Для ограниченной связной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  и  $h \in C^1(\overline{\Omega}; \overline{\Omega}, \partial\Omega, \partial\Omega)$  такого, что  $\det h' > 0$  на  $\overline{\Omega}$  и  $h|_{\partial\Omega \rightarrow \partial\Omega}$  — гомеоморфизм,  $h$  является гомеоморфизмом (здесь  $\partial\Omega$  — граница области  $\Omega$ ).* Доказательство сюръективности  $h$  основано на (не формулируемом явно) предположении, что для любой точки  $x_1 \in \Omega$  векторное поле  $\Phi_1(x) = h(x) - h(x_1)$  не обращается в нуль на  $\partial\Omega$ . Это предположение выполняется лишь тогда, когда  $h(\partial\Omega) \cap h(\Omega) = \emptyset$ . Однако оно никак не доказывается и не обсуждается в [3]. То, что это не так для произвольного локального гомеоморфизма  $h : \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$ , инъективно отображающего границу  $\Omega$  в себя (т.е. при ослаблении условия биективности  $h|_{\partial\Omega \rightarrow \partial\Omega}$  до инъективности), показывает следующий пример:  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \setminus \{2^{-2^i} : i \in \mathbb{N}\} \times \{1/2\} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h(x, y) = (x^2, y)$ .

Заметим, что отмеченный пробел в доказательствах связан с тем, что граница  $\Omega$  может иметь “внутренние” точки — точки, лежащие в  $\text{int}_{\mathbb{R}^n} \overline{\Omega}$ . Если же запретить такую возможность, т.е. ограничиться рассмотрением лишь таких областей  $\Omega$ , которые совпадают со внутренностью своего замыкания, то теорема 3 в [3] и теоремы 1, 4, 5, 6 в [4] при таком ограничении на область  $\Omega$  являются очевидными следствиями леммы 2 из [13] (надо подставить в условие этой леммы  $X = \overline{\Omega}$ ,  $Z = \emptyset$ ,  $M_n = \mathfrak{M}_n = \mathbb{R}^n$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ushakova O.V.** On nondegeneracy of three-dimensional grids // Proc. of the Steklov Inst. of Math. 2004. Suppl. 1. P. S78–S100.
2. **Ushakova O.V.** Nondegeneracy conditions for different types of grids // Advances in grid generation. / Ed. O.V. Ushakova. New York: Nova Science Publishers, 2007. P. 241–278.
3. **Бобылев Н.А., Иваненко С.А., Исмаилов И.Г.** Несколько замечаний о гомеоморфных отображениях // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 4. С. 593–596.
4. **Бобылев Н.А., Иваненко С.А., Казунин А.В.** О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложениях к теории сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 6. С. 808–817.

5. **Прохорова М.Ф.** Некоторые критерии гомеоморфности // Проблемы теоретической и прикладной математики. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 65–69.
6. **Дольд А.** Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.
7. **Рохлин В.А., Фукс Д.Б.** Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
8. **Novikov D., Khovanskii A.** On affine hypersurfaces with everywhere nondegenerate Second Quadratic Form // Moscow Math. J. 2006. Vol. 6, no. 1. P. 135–152.
9. **Brown M.** Locally flat imbeddings of topological manifolds // Ann. of Math. 1962. Vol. 75, no. 2. P. 331–341.
10. **Александров П.С., Пасынков Б.А.** Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. М.: Наука, 1973.
11. **Спеньер Э.** Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
12. **Манкрс Дж.** Элементарная дифференциальная топология. Приложение // Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
13. **Meisters G.H., Olech C.** Locally one-to-one mappings and a classical theorem on schlicht functions // Duke Math. J. 1963. Vol. 30, no. 1. P. 63–80.
14. <http://sowa.livejournal.com>.

Поступила 01.11.2007.

УДК 517.977

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА<sup>1</sup>

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Рассматриваются плоские нестационарные потенциальные течения политропного газа. Методом поверхностей уровня исследуется соответствующее уравнение в частных производных. Получены достаточные условия для произвольных функций, которые обеспечивают построение точных решений уравнения потенциала. Выписаны уравнения для ударных волн, отделяющих потенциальное течение от области покоя или постоянного движения.

## Введение

Пусть задано нелинейное уравнение в частных производных

$$L(x_i, u, u_{i_1}^{(1)}, u_{i_1 i_2}^{(2)}, \dots, u_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(m)}) = 0, \quad (*)$$

где  $\{x_i\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — исходные независимые переменные уравнения,  $u$  — неизвестная функция (решение уравнения),  $u_{i_1 i_2 \dots i_k}^{(k)}$  — частные производные функции  $u$  (верхний индекс указывает порядок производной, нижние индексы — номера независимых переменных, по которым берется производная),  $m$  — порядок уравнения ( $1 \leq k \leq m$ ).

Будем искать такие независимые переменные  $\{\psi, \alpha_j\}$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ), при переходе к которым решение уравнения (\*) зависит только от  $\psi$ . Тогда  $\psi(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$  является поверхностью уровня функции, представляющей решение уравнения. Метод отыскания новых независимых переменных, исследования и решения уравнения в этих переменных будем называть методом поверхностей уровня [1].

Из условия

$$\psi \equiv \psi(x_i(\psi, \alpha_j)) \quad (i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n-1)$$

необходимо следует, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \psi} = 1, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n-1). \quad (0.1)$$

Нетрудно заметить, что якобиан такого преобразования всегда отличен от нуля.

Далее в статье методом поверхностей уровня исследуется уравнение потенциала для плоского нестационарного течения политропного газа.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы интеграционных проектов фундаментальных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с учеными СО и ДВО РАН.

## 1. Сведение уравнения потенциала к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Уравнение для потенциала плоского нестационарного течения политропного газа имеет вид (см. [2]):

$$\Phi_{xx}(a^2 - \Phi_x^2) + \Phi_{yy}(a^2 - \Phi_y^2) - \Phi_{tt} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} - 2\Phi_x\Phi_{xt} - 2\Phi_y\Phi_{yt} = 0, \quad (1.1)$$

$$a^2 = -(\varkappa - 1)[\Phi_t + 0.5(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)].$$

Здесь  $x, y$  — пространственные переменные,  $t$  — время,  $\Phi$  — потенциал течения газа,  $\varkappa$  — показатель политропы,  $a$  — скорость звука. Нижние индексы указывают на переменную, по которой вычисляется производная.

Пусть  $\Phi = \Phi(\psi(x, y, t))$ , тогда

$$\Phi_x = \Phi'\psi_x, \quad \Phi_y = \Phi'\psi_y, \quad \Phi_t = \Phi'\psi_t,$$

$$\Phi_{xx} = \Phi''\psi_x^2 + \Phi'\psi_{xx}, \quad \Phi_{yy} = \Phi''\psi_y^2 + \Phi'\psi_{yy}, \quad \Phi_{xy} = \Phi''\psi_x\psi_y + \Phi'\psi_{xy}, \quad (1.2)$$

$$\Phi_{xt} = \Phi''\psi_x\psi_t + \Phi'\psi_{xt}, \quad \Phi_{yt} = \Phi''\psi_y\psi_t + \Phi'\psi_{yt}, \quad \Phi_{tt} = \Phi''\psi_t^2 + \Phi'\psi_{tt}.$$

После подстановки (1.2) в (1.1) получим

$$\begin{aligned} & (\varkappa + 1)\Phi'\Phi''\psi_t(\psi_x^2 + \psi_y^2) + \frac{\varkappa + 1}{2}\Phi'^2\Phi''(\psi_x^2 + \psi_y^2)^2 + \Phi''\psi_t^2 + \Phi'\psi_{tt} \\ & + \Phi'^2[(\varkappa - 1)\psi_t(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + 2(\psi_x\psi_{xt} + \psi_y\psi_{yt})] \\ & + \Phi'^3\left[\frac{\varkappa + 1}{2}(\psi_x^2\psi_{xx} + \psi_y^2\psi_{yy}) + \frac{\varkappa - 1}{2}(\psi_y^2\psi_{xx} + \psi_x^2\psi_{yy}) + 2\psi_x\psi_y\psi_{xy}\right] = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь и далее штрих ' означает дифференцирование по переменной  $\psi$ .

Если в уравнении (1.1) перейти к новым независимым переменным  $\psi, \alpha, \beta$  (см. введение), то в полученном уравнении (1.3) координаты  $\alpha$  и  $\beta$  являются параметрами, следовательно, уравнение (1.3) можно считать обыкновенным дифференциальным уравнением по переменной  $\psi$ . Тогда, предположив, что  $\psi_t \neq 0$ , уравнению (1.3) можно поставить в соответствие систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & (\psi_x^2 + \psi_y^2) - f_1(\psi)\psi_t = 0, \\ & \psi_{tt} - f_2\psi_t^2 = 0, \\ & (\varkappa - 1)\psi_t(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + 2(\psi_x\psi_{xt} + \psi_y\psi_{yt}) - f_3\psi_t^2 = 0, \\ & 0.5(\varkappa + 1)(\psi_x^2\psi_{xx} + \psi_y^2\psi_{yy}) + 0.5(\varkappa - 1)(\psi_y^2\psi_{xx} + \psi_x^2\psi_{yy}) + 2\psi_x\psi_y\psi_{xy} - f_4(\psi)\psi_t^2 = 0 \end{aligned} \right. \quad (1.4)$$

и уравнение (1.3) переписать в виде

$$(\varkappa + 1)\Phi'\Phi''f_1(\psi) + \frac{\varkappa + 1}{2}\Phi'^2\Phi''f_1^2(\psi) + \Phi'' + \Phi'f_2(\psi) + \Phi'^2f_3(\psi) + \Phi'^3f_4(\psi) = 0. \quad (1.5)$$

Здесь  $f_k(\psi)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) — новые неизвестные функции. Предполагается, что функции  $\psi(x, y, t)$  и  $\Phi(x, y, t)$  непрерывно дифференцируемы столько раз, сколько требуется.

Покажем, что система уравнений (1.4) совместна при некоторых условиях на функции  $f_k(\psi)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ).

Рассмотрим сначала первое уравнение системы (1.4)

$$(\psi_x^2 + \psi_y^2) - f_1 \psi_t = 0. \quad (1.6)$$

Выпишем для этого уравнения систему уравнений характеристик [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 2\psi_x, & \frac{dy}{ds} &= 2\psi_y, & \frac{dt}{ds} &= -f_1, \\ \frac{d\psi}{ds} &= f_1 \psi_t, & \frac{d\psi_x}{ds} &= f_1' \psi_t \psi_x, & \frac{d\psi_y}{ds} &= f_1' \psi_t \psi_y, & \frac{d\psi_t}{ds} &= f_1' \psi_t^2. \end{aligned}$$

Отсюда, выбрав в качестве независимой переменной  $\psi$  и предполагая, что  $f_1 \neq 0$ , получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\psi} &= \frac{2\psi_x}{f_1 \psi_t}, & \frac{dy}{d\psi} &= \frac{2\psi_y}{f_1 \psi_t}, & \frac{dt}{d\psi} &= -\frac{1}{\psi_t}, \\ \frac{d\psi_x}{d\psi} &= \frac{f_1'}{f_1} \psi_x, & \frac{d\psi_y}{d\psi} &= \frac{f_1'}{f_1} \psi_y, & \frac{d\psi_t}{d\psi} &= \frac{f_1'}{f_1} \psi_t. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Выпишем решение системы (1.7):

$$\begin{aligned} \psi_x &= c_1(\alpha, \beta) f_1, & \psi_y &= c_2(\alpha, \beta) f_1, & \psi_t &= (c_1^2 + c_2^2) f_1, \\ x &= \frac{2c_1}{c_1^2 + c_2^2} w + c_3(\alpha, \beta), & y &= \frac{2c_2}{c_1^2 + c_2^2} w + c_4(\alpha, \beta), \\ t &= -\frac{1}{c_1^2 + c_2^2} w + c_5(\alpha, \beta), & w &= \int \frac{d\psi}{f_1}, & c_1 > 0, & c_2 > 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $c_i(\alpha, \beta)$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) — функции, которые должны удовлетворять условиям (0.1). Для данного конкретного преобразования (1.8) первое условие в (0.1) удовлетворяется тождественно, а второе условие в соотношениях (0.1) дает

$$c_1 \frac{\partial c_3}{\partial i} + c_2 \frac{\partial c_4}{\partial i} + (c_1^2 + c_2^2) \frac{\partial c_5}{\partial i} = 0 \quad (i = \alpha, \beta). \quad (1.9)$$

Таким образом, преобразования (1.8), (1.9) позволяют перейти к новым независимым переменным  $\{\psi, \alpha, \beta\}$ .

Для доказательства совместности системы (1.4) перепишем уравнения из системы (1.7), определяющие первые производные функции  $\psi$ , подробнее:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_x}{d\psi} &= \psi_{xx} \frac{dx}{d\psi} + \psi_{xy} \frac{dy}{d\psi} + \psi_{xt} \frac{dt}{d\psi} = \frac{f_1'}{f_1} \psi_x, \\ \frac{d\psi_y}{d\psi} &= \psi_{yx} \frac{dx}{d\psi} + \psi_{yy} \frac{dy}{d\psi} + \psi_{yt} \frac{dt}{d\psi} = \frac{f_1'}{f_1} \psi_y, \\ \frac{d\psi_t}{d\psi} &= \psi_{tx} \frac{dx}{d\psi} + \psi_{ty} \frac{dy}{d\psi} + \psi_{tt} \frac{dt}{d\psi} = \frac{f_1'}{f_1} \psi_t. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставив в уравнения (1.10) значения

$$\frac{dx}{d\psi}, \quad \frac{dy}{d\psi}, \quad \frac{dt}{d\psi}$$

из системы (1.7) и продифференцировав первое уравнение системы (1.10) последовательно сначала по  $x$ , потом по  $y$ , а затем по  $t$ , получим

$$\frac{d\psi_{xx}}{d\psi} = -\psi_{xx} \left( \frac{2\psi_x}{f_1 \psi_t} \right)_x - \psi_{xy} \left( \frac{2\psi_y}{f_1 \psi_t} \right)_x + \psi_{xt} \left( \frac{1}{\psi_t} \right)_x + \left( \frac{f_1'}{f_1} \right)' \psi_x^2 + \left( \frac{f_1'}{f_1} \right) \psi_{xx},$$

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{xy}}{d\psi} &= -\psi_{xx} \left( \frac{2\psi_x}{f_1\psi_t} \right)_y - \psi_{xy} \left( \frac{2\psi_y}{f_1\psi_t} \right)_y + \psi_{xt} \left( \frac{1}{\psi_t} \right)_y + \left( \frac{f'_1}{f_1} \right)' \psi_x \psi_y + \left( \frac{f'_1}{f_1} \right) \psi_{xy}, \\ \frac{d\psi_{xt}}{d\psi} &= -\psi_{xx} \left( \frac{2\psi_x}{f_1\psi_t} \right)_t - \psi_{xy} \left( \frac{2\psi_y}{f_1\psi_t} \right)_t + \psi_{xt} \left( \frac{1}{\psi_t} \right)_t + \left( \frac{f'_1}{f_1} \right)' \psi_x \psi_t + \left( \frac{f'_1}{f_1} \right) \psi_{xt}.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Аналогично, продифференцировав по  $y$  и  $t$  второе, а по  $t$  — третье уравнение системы (1.10), будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{yy}}{d\psi} &= -\psi_{yx} \left( \frac{2\psi_x}{f_1\psi_t} \right)_y - \psi_{yy} \left( \frac{2\psi_y}{f_1\psi_t} \right)_y + \psi_{yt} \left( \frac{1}{\psi_t} \right)_y + \left( \frac{f'_1}{f_1} \right)' \psi_y^2 + \left( \frac{f'_1}{f_1} \right) \psi_{yy}, \\ \frac{d\psi_{yt}}{d\psi} &= -\psi_{yx} \left( \frac{2\psi_x}{f_1\psi_t} \right)_t - \psi_{yy} \left( \frac{2\psi_y}{f_1\psi_t} \right)_t + \psi_{yt} \left( \frac{1}{\psi_t} \right)_t + \left( \frac{f'_1}{f_1} \right)' \psi_y \psi_t + \left( \frac{f'_1}{f_1} \right) \psi_{yt}, \\ \frac{d\psi_{tt}}{d\psi} &= -\psi_{xt} \left( \frac{2\psi_x}{f_1\psi_t} \right)_t - \psi_{yt} \left( \frac{2\psi_y}{f_1\psi_t} \right)_t + \psi_{tt} \left( \frac{1}{\psi_t} \right)_t + \left( \frac{f'_1}{f_1} \right)' \psi_t^2 + \left( \frac{f'_1}{f_1} \right) \psi_{tt}.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Система уравнений (1.11), (1.12) описывает поведение вторых производных функции  $\psi$  вдоль характеристик [4]. В дальнейшем систему уравнений (1.7), (1.11), (1.12) будем называть расширенной системой уравнений характеристик.

Вторые производные функции  $\psi$  должны удовлетворять не только системе (1.11), (1.12), но всем уравнениям системы (1.4) тождественно по  $\psi$ .

Если мы выпишем дифференциальные следствия уравнения (1.6)

$$\begin{aligned}L_1 &= 2\psi_x \psi_{xx} + 2\psi_y \psi_{yx} - f_1 \psi_{tx} = f'_1 \psi_t \psi_x, \\ L_2 &= 2\psi_x \psi_{xy} + 2\psi_y \psi_{yy} - f_1 \psi_{ty} = f'_1 \psi_t \psi_y, \\ L_3 &= 2\psi_x \psi_{xt} + 2\psi_y \psi_{yt} = f_1 \psi_{tt} + f'_1 \psi_t^2\end{aligned}\quad (1.13)$$

и добавим к ним второе, третье и четвертое уравнение системы (1.4)

$$\psi_{tt} - f_2 \psi_t^2 = 0,$$

$$L_4 = (\varkappa - 1) \psi_t (\psi_{xx} + \psi_{yy}) + 2(\psi_x \psi_{xt} + \psi_y \psi_{yt}) = f_3 \psi_t^2, \quad (1.14)$$

$$L_5 = \frac{\varkappa + 1}{2} (\psi_x^2 \psi_{xx} + \psi_y^2 \psi_{yy}) + \frac{\varkappa - 1}{2} (\psi_y^2 \psi_{xx} + \psi_x^2 \psi_{yy}) + 2\psi_x \psi_y \psi_{xy} = f_4(\psi) \psi_t^2,$$

то получим алгебраическую систему (1.13), (1.14) шести уравнений для определения шести вторых производных. Заменяя в выражениях (1.13) производную  $\psi_{tt}$  ее значением  $f_2 \psi_t^2$ , увидим, что

$$0.5\psi_x L_1 + 0.5\psi_y L_2 - 0.25f_1 L_3 + 0.5f_1 L_4 = L_5,$$

т.е. соответствующий определитель системы равен нулю, поэтому для совместности системы необходимо выполнение следующего условия на правые части

$$f_4 = 0.25f_1(f'_1 - f_1 f_2 + 2f_3). \quad (1.15)$$

Соотношения (1.13) являются первыми интегралами системы уравнений (1.11), (1.12) при любой функции  $f_1(\psi)$  в силу самого способа построения этой системы (так как (1.11), (1.12) — дифференциальные следствия системы уравнений (1.13)).

Выразим из (1.13) производные  $\psi_{xx}$ ,  $\psi_{xy}$ ,  $\psi_{xt}$  и подставим их в соотношения (1.11), (1.12) и (1.14). Далее выпишем условия, при которых полученные выражения

$$\psi_{tt} = f_2 \psi_t^2, \quad (1.16)$$

$$\psi_t \psi_{yy} - \psi_y \psi_{yt} = \frac{1}{(\varkappa - 1)f_1} \psi_t \psi_x^2 [f_3 - (f_1 f_2 + f_1')] + \frac{f_1'}{f_1} \psi_y^2 \psi_t - \frac{f_1 f_2 + 3f_1'}{4} \psi_t^2 \quad (1.17)$$

будут первыми интегралами (см. [5]) системы (1.11), (1.12).

Соотношение (1.16) есть первый интеграл системы (1.11), (1.12), если наряду с условиями (1.13), (1.16), (1.17) выполняется условие

$$\psi_{yt} = 0.5\psi_t(R_1\psi_y \pm \psi_x\sqrt{-R_2}), \quad (1.18)$$

где

$$R_1 = \frac{f_1'}{f_1} + f_2, \quad R_2 = \left(f_2 - \frac{f_1'}{f_1}\right) \left(f_2 + \frac{f_1'}{f_1}\right) + 2 \left(f_2 - \frac{f_1'}{f_1}\right)'$$

Все выражения (1.13), (1.16)–(1.18) будут первыми интегралами системы (1.11), (1.12), если

$$R_2' = 2R_2[(\varkappa + 1)f_1' + 2f_2f_1 - 2f_3]/[f_1(\varkappa - 1)]. \quad (1.19)$$

В частности, условие (1.19) выполняется, если  $R_2 \stackrel{\psi}{\equiv} 0$ .

Нетрудно заметить, что  $R_2 \stackrel{\psi}{\equiv} 0$ , если  $f_2 = f_1'/f_1$ . В этом случае выражения (1.13), (1.16)–(1.18) будут первыми интегралами системы уравнений (1.11), (1.12), если

$$f_2 = f_1'/f_1, \quad f_3 = (\varkappa + 1)f_1', \quad f_4 = 0.5(\varkappa + 1)f_1f_1', \quad (1.20)$$

где  $f_1 \neq 0$  — произвольная функция.

Если же  $R_2 \stackrel{\psi}{\equiv} 0$ , но  $f_2 \neq f_1'/f_1$ , то уравнение  $R_2 = 0$  (см. (1.18)) после замены функции решения можно записать как ОДУ

$$z' = -0.5z^2 - f_1'z/f_1, \quad z = f_2 - f_1'/f_1,$$

которое заменой переменных  $z_1 = z f_1$  сводится к уравнению с разделяющимися переменными [6,7]. В результате получаем, что  $z = 2/(f_1 w)$ , следовательно,

$$f_2 = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{2}{f_1 w}.$$

Далее, требуя, чтобы при такой функции  $f_2$  перечисленные выше выражения были первыми интегралами системы (1.11), (1.12), приходим к уравнению

$$R_3' = -2R_3^2 - \frac{f_1'}{f_1}R_3, \quad R_3 = \frac{f_3}{(\varkappa - 1)f_1} - \frac{(\varkappa + 3)}{4(\varkappa - 1)}R_1 - \frac{f_1'}{2f_1}. \quad (1.21)$$

Частным решением уравнения (1.21) является  $R_3 \stackrel{\psi}{\equiv} 0$ . В этом случае для совместности системы (1.4) необходимо, чтобы

$$f_2 = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{2}{f_1 w}, \quad f_3 = (\varkappa + 1)f_1' - \frac{\varkappa + 3}{2w}, \quad f_4 = \frac{\varkappa + 1}{2}f_1f_1' - \frac{(\varkappa + 5)f_1}{4w}. \quad (1.22)$$

Если  $R_3 \neq 0$ , то, решая уравнение (1.21), приходим к соотношениям

$$f_2 = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{2}{f_1 w}, \quad f_3 = (\varkappa + 1) \left(f_1' + \frac{1}{w}\right), \quad f_4 = 0.5f_1 \left[(\varkappa + 1)f_1' + \frac{\varkappa}{w}\right], \quad w = \int \frac{dw}{f_1}. \quad (1.23)$$

В выражениях (1.22) и (1.23)  $f_1$  — также произвольная функция.

Если  $R_2 \neq 0$  (см. (1.19)), то из условия (1.19) выразим функцию  $f_3$  через функции  $f_1$  и  $f_2$ :

$$f_3 = 0.25[2(\varkappa + 1)f_1' + 4f_2f_1 - (\varkappa - 1)f_1R_2'/R_2]. \quad (1.24)$$



Тогда для того, чтобы выражения (1.16)–(1.18) были первыми интегралами системы уравнений (1.11), (1.12), достаточно выполнения условий

$$\left(\frac{R_2'}{2R_2} + f_2\right)' - \frac{R_2'}{2R_2} \left(\frac{R_2'}{2R_2} + f_2\right) = 0, \quad f_1 = \text{const}, \quad f_1 \neq 0. \quad (1.25)$$

Так как в данном случае  $f_1 = \text{const}$ , то  $R_2 = f_2^2 + 2f_2'$  и условия (1.25) сводятся к дифференциальному уравнению относительно функции  $f_2$ . Функции  $f_3$  и  $f_4$  после определения  $f_2$  будут получены из соотношений (1.24), (1.15) соответственно.

Условия (1.25) выполняются, в частности, если  $R_2'/(2R_2) + f_2 \equiv 0$ . Это уравнение для определения функции  $f_2$  можно переписать в виде

$$(f_2^2 + 2f_2')/(2f_2^2 + 2f_2') + f_2 = 0$$

Решая выписанное уравнение второго порядка [6,7], сначала сводим его к дифференциальному уравнению первого порядка стандартной заменой  $f_2' = p(f_2)$ , а затем полученное уравнение первого порядка приводим заменой

$$\xi = 0.5f_2^2, \quad p^2 = 2p_1\xi^2$$

к уравнению с разделяющимися переменными. Возвращаясь к независимой переменной  $\psi$  и функции  $f_2$ , получаем, что для совместности системы (1.4) необходимо, чтобы

$$f_1 = \text{const} \neq 0, \quad f_2 = \frac{2(\psi + b_0)}{[(\psi + b_0)^2 + c_0]}, \quad f_3 = \frac{(\varkappa + 1)f_1(\psi + b_0)}{[(\psi + b_0)^2 + c_0]}, \quad f_4 = \frac{\varkappa f_1^2(\psi + b_0)}{2[(\psi + b_0)^2 + c_0]} \quad (1.26)$$

$$(b_0 = \text{const}, \quad c_0 = \text{const} > 0).$$

Если  $R_2 \neq 0$  и  $R_2'/(2R_2) + f_2 \neq 0$ , то выражение (1.25) можно представить в виде

$$\left[\ln\left(\frac{R_2'}{2R_2} + f_2\right)\right]' - 0.5(\ln R_2)' = 0.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{R_2'}{2R_2} + f_2 - c_0\sqrt{R_2} = 0, \quad c_0 > 0, \quad c_0 = \text{const}.$$

Это ОДУ второго порядка относительно функции  $f_2$ . Предположим, что  $f_2' \neq 0$ . Тогда, сначала полагая  $p = f_2'$ , а затем  $q^2 = 2p + f_2^2$ , придем к уравнению относительно новой функции  $q(f_2)$

$$(q^2 - f_2^2)q' + 2f_2q - 2c_0q^2 = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными для функции  $q/f_2$ . Решая его и возвращаясь к функции  $p(f_2)$ , получим уравнение

$$\left(\frac{p}{f_2^2}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{f_2^2}\right) \left[1 - \left(\frac{1}{2a_0f_2} + c_0\right)^2\right] + \left[1 - \left(\frac{1}{2a_0f_2} + c_0\right)^2\right] = 0.$$

Определим отсюда  $f_2$  ( $p = f_2'$ ), а затем из соотношений (1.24) и (1.15) найдем функции  $f_3$  и  $f_4$ . Получим

$$f_2 = \frac{2[2c_0a_0 + (\psi + b_0)]}{(\psi + b_0)^2 + 4a_0^2(1 - c_0^2)},$$

$$f_3 = 0.5f_1 \left[ (\varkappa + 1)f_2 - (\varkappa - 1)c_0\sqrt{2f_2' + f_2^2} \right] = \frac{f_1[(\varkappa + 1)(\psi + b_0) + 4a_0c_0]}{(\psi + b_0)^2 + 4a_0(1 - c_0^2)}, \quad (1.27)$$

$$f_4 = 0.25f_1^2 \left[ \varkappa f_2 - (\varkappa - 1)c_0 \sqrt{2f_2' + f_2^2} \right] = \frac{0.5f_1^2[\varkappa(\psi + b_0) + 2a_0c_0]}{(\psi + b_0)^2 + 4a_0^2(1 - c_0^2)}$$

$$(a_0 = \text{const} > 0, \quad b_0 = \text{const}, \quad f_1 = \text{const} \neq 0, \quad c_0 = \text{const} > 0).$$

Итак, показано, при каких дополнительных условиях, налагаемых на функции  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) (см. (1.20), (1.22), (1.23), (1.26), (1.27)), система (1.4) совместна. Если выписанные условия выполняются, то решением расширенной системы уравнений характеристик являются функции (1.8) и вторые производные, которые определяются из алгебраических соотношений (1.13), (1.16)–(1.18). Нетрудно проверить, что определитель этой системы относительно вторых производных функции  $\psi$  отличен от нуля.

## 2. Точные решения уравнения потенциала в новых координатах

Обратимся к уравнению (1.5).

(1) Рассмотрим сначала случай, когда  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) удовлетворяют условиям (1.20). Перейдем в уравнении (1.5) к переменной  $w$  и подставим вместо  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) их значения из (1.20). Получим уравнение

$$\Phi_{ww}[(\varkappa + 1)\Phi_w + 0.5(\varkappa + 1)\Phi_w^2 + 1] = 0.$$

Решение этого уравнения легко выписывается:

$$\Phi = a_1w + a_2, \quad a_1 = \text{const}, \quad w = \int \frac{d\psi}{f_1}, \quad a_2 = \text{const}. \quad (2.1)$$

(2) Если  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) удовлетворяют соотношениям (1.22), то после подстановки (1.22) в (1.5) получаем уравнение

$$w\Phi_{ww}[(\varkappa + 1)\Phi_w + 0.5(\varkappa + 1)\Phi_w^2 + 1] + [2\Phi_w + (\varkappa + 1)\Phi_w^2 + 0.5\varkappa\Phi_w^3] = 0.$$

Положив  $\Phi_w = p$ , получим уравнение с разделяющимися переменными, решив которое, выпишем выражение для  $\Phi$  в параметрическом виде ( $p$  — параметр)

$$\Phi = \int pw_p dp + B, \quad w(p) = \frac{A}{p^{1/2}(p+2)^{1/[2(\varkappa-1)]}(p+2/\varkappa)^{(\varkappa^2-2)/[2\varkappa(\varkappa-1)]}}, \quad (2.2)$$

$$A = \text{const}, \quad B = \text{const}.$$

(3) Если  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) удовлетворяют соотношениям (1.23), то решение выписывается аналогично случаю (1.22).

(4) Пусть  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) удовлетворяют соотношениям (1.26), тогда после подстановки этих функций в уравнение (1.5) получаем

$$[(\psi + b_0)^2 + c_0]\Phi''[(\varkappa + 1)f_1\Phi' + 0.5(\varkappa + 1)(f_1\Phi')^2 + 1]$$

$$+ (\psi + b_0)\Phi'[2 + (\varkappa + 1)f_1\Phi' + 0.5\varkappa(f_1\Phi')^2] = 0.$$

Решение этого уравнения также выписывается через параметр  $p$  ( $p = \Phi'$ )

$$\psi = -b_0 + \sqrt{\frac{A}{p(pf_1 + 2)^{1/(\varkappa-1)}(pf_1 + 2/\varkappa)^{(\varkappa^2-2)/[\varkappa(\varkappa-1)]} - c_0}}, \quad \Phi = \int p\psi_p dp + B, \quad (2.3)$$

$$B = \text{const}, \quad A = \text{const}.$$

(5) Если  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) определяются условиями (1.27), то уравнение (1.5) имеет вид

$$[(\psi + b_0)^2 + 4a_0^2(1 - c_0^2)]\Phi''[0.5(\varkappa + 1)f_1^2\Phi'^2 + (\varkappa + 1)f_1\Phi' + 1]$$

$$+ a_0 c_0 \Phi' (4 + 4f_1 \Phi' + f_1^2 \Phi'^2) + (\psi + b_0) \Phi' [2 + (\varkappa + 1) f_1 \Phi' + 0.5 \varkappa f_1^2 \Phi'^2] = 0, \quad (2.4)$$

$$a_0 = \text{const}, \quad b_0 = \text{const}, \quad c_0 = \text{const}, \quad f_1 = \text{const}, \quad f_1 \neq 0.$$

Частными решениями уравнения (2.4) являются  $\Phi = \text{const}$  и  $\Phi = -(2/f_1)\psi + A$ ,  $A = \text{const}$ . Общее решение выписать в квадратурах не удастся.

Мы получили точные решения уравнения (1.5) для случаев, когда  $f_1 \neq 0$ . Это доказывает, что рассматриваемый класс решений системы (1.4) не пуст и содержит решения, обладающие некоторым произволом.

Если  $f_1 = 0$ , то из системы уравнений характеристик следует, что функция  $\psi$  зависит от двух переменных  $z$  и  $t$ , причем  $x = \text{Re } z$ ,  $y = \text{Im } z$ . В этом случае непосредственно из уравнения (1.1) получаем, что  $\Phi = N(z)t + G(z)$ , где  $N(z)$ ,  $G(z)$  — произвольные функции.

Итак, найдены точные решения уравнения (1.5). Чтобы получить решения уравнения (1.1), нужно от переменных  $\psi, \alpha, \beta$  перейти к первоначальным переменным  $x, y, t$ .

### 3. Точные решения уравнения потенциала в первоначальных координатах

Обратимся к соотношениям (1.8), (1.9).

Если в выражениях (1.8) известны функции  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), то, исключив  $\alpha$  и  $\beta$  из этих выражений, получим  $w = w(x, y, t)$  или  $\psi = \psi(x, y, t)$ . Таким образом, будет получено решение уравнения (1.1) либо подстановкой соответствующих функций  $\psi$  или  $w$  в точные решения (2.1)–(2.4), либо подстановкой непосредственно в уравнение (1.1) соответствующих выражений.

Функции  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) не произвольны. Для них должны выполняться условия (1.9). Вообще говоря, мы можем произвольно задать 3 функции, например,  $c_3, c_4, c_5$  и из соотношений (1.9) определить две другие  $c_1, c_2$ . А можем, наоборот, задать  $c_1, c_2, c_3$ , а затем из (1.9) найти  $c_4, c_5$ . Во всех случаях с точностью до преобразования координат можно считать, что одна из задаваемых функций равна  $\alpha$ , другая —  $\beta$ , а третья — в общем случае произвольная функция от  $\alpha$  и  $\beta$ . Наличие такого произвола дает возможность получать решения, удовлетворяющие тем или иным начальным или краевым условиям.

Рассмотрим несколько примеров выбора функций  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

**Пример 1.** Пусть  $c_i = \text{const}$  ( $i = 3, 4, 5$ ). Условия (1.9) выполняются. Исключая  $c_1$  и  $c_2$  из соотношений (1.8), получаем

$$w = \frac{(x - c_3)^2 + (y - c_4)^2}{4(c_5 - t)}, \quad (3.1)$$

если  $f_1$  — произвольная функция. Подставив (3.1) в соотношения (2.1) и (2.2), найдем соответствующие решения уравнения (1.1).

Если же  $f_1 = \text{const}$ , то  $w = \psi/f_1$ , и, подставив полученные  $\psi = f_1 w$  ( $w$  из (3.1)) в решения уравнений (2.3), (2.4), также получим решения уравнения (1.1).

**Пример 2.** Пусть  $c_3 = \alpha$ ,  $c_4 = \beta$ ,  $c_5 = -(\alpha + \beta)$ , тогда из соотношений (1.9) находим, что

$$\frac{c_1}{c_1^2 + c_2^2} = 1, \quad \frac{c_2}{c_1^2 + c_2^2} = 1, \\ x = 2w + \alpha, \quad y = 2w + \beta, \quad t = -w - (\alpha + \beta). \quad (3.2)$$

Исключая из (3.2)  $\alpha$  и  $\beta$ , получаем  $w = (x + y + t)/3$ .

**Пример 3.** Пусть  $c_1 = \alpha$ ,  $c_2 = \beta$ ,  $c_5 = \text{const}$ , тогда, подставив эти значения в соотношения (1.9), выразим из них производные функции  $c_4$  и потребуем, чтобы смешанные производные были равны. Получим уравнение для определения функции  $c_3$

$$\alpha \frac{\partial c_3}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial c_3}{\partial \beta} = 0.$$

Возьмем  $c_3$  равным частному решению этого уравнения —  $c_3 = \alpha/\beta$ . Тогда  $c_4 = -0.5\alpha^2/\beta^2$ . Отсюда получаем

$$x = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}w + \frac{\alpha}{\beta}, \quad y = \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}w - 0.5\frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad (3.3)$$

$$t = -\frac{w}{\alpha^2 + \beta^2} + c_5.$$

Исключая из выражений (3.3) переменные  $\alpha$  и  $\beta$ , находим

$$w = \frac{(x - u - v)^2[(u + v)^2 + 1]}{4(c_6 - t)(u + v)^2}, \quad u = \left(x + \sqrt{8(y + 1)^3/27 + x^2}\right)^{1/3},$$

$$v = \left(x - \sqrt{8(y + 1)^3/27 + x^2}\right)^{1/3}.$$

В рассмотренных примерах из пяти функций  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) три функции выбирались произвольно.

**Пример 4.** Предположим, далее, что нам известно  $\Phi(x, y, 0) = F(x, y)$  и  $\Phi_t(x, y, 0) = S(x, y)$ , тогда имеем на начальном многообразии  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$ ,  $t = 0$

$$\Phi' \psi_x = F_\alpha, \quad \Phi' \psi_y = F_\beta, \quad \Phi' \psi_t = S.$$

Отсюда

$$\psi_x/\psi_y = F_\alpha/F_\beta, \quad \psi_x/\psi_t = F_\alpha/S.$$

Подставим в эти выражения соответствующие значения первых производных из (1.8) и потребуем, чтобы удовлетворялись начальные условия. Получим

$$\alpha = \frac{F_\alpha}{S}w + c_3, \quad \beta = \frac{F_\beta}{S}w + c_4, \quad 0 = -\frac{F_\alpha^2 + F_\beta^2}{S^2}w + c_5. \quad (3.4)$$

Исключив  $w$  из соотношений (3.4), найдем

$$c_1 = \frac{SF_\alpha}{F_\alpha^2 + F_\beta^2}, \quad c_2 = \frac{SF_\beta}{F_\alpha^2 + F_\beta^2}, \quad c_3 = \alpha - \frac{c_5 SF_\alpha}{F_\alpha^2 + F_\beta^2}, \quad c_4 = \beta - \frac{c_5 SF_\beta}{F_\alpha^2 + F_\beta^2}, \quad (3.5)$$

$$F_\alpha^2 + F_\beta^2 \neq 0.$$

Таким образом, соотношения (1.9) после подстановки в них (3.5) будут представлять собой уравнения для определения одной неизвестной функции  $c_5$ . Но полученная система уравнений, в общем случае переопределенная, будет иметь решение, так как, потребовав равенства смешанных производных функции  $c_5$ , мы получим одно уравнение в частных производных первого порядка, решение которого определит функцию  $c_5$ , удовлетворяющую условиям (1.9).

**Пример 5.** Задача о течении с ударной волной.

Рассмотрим следующую задачу. Предположим, что с одной стороны от поверхности ударной волны находится газ, движущийся с постоянной скоростью, а с другой стороны — потенциальное течение.

Возможно ли в рамках описанного метода, используя найденные точные решения уравнения потенциала, получить такое течение с ударной волной, т.е. можно ли найти такие функции  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), которые обеспечат существование течения заданной конфигурации? Если возможно, то какую форму при этом будет иметь поверхность ударной волны? Ответам на поставленные вопросы посвящен следующий раздел.

#### 4. Задача о течении с ударной волной

Пусть на начальном многообразии — фронте ударной волны  $t = \varphi(\alpha, \beta)$ , отделяющей потенциальное течение от области постоянного движения газа ( $p_0 = \text{const}$ ,  $\rho_0 = \text{const}$ ,  $u_0 = \text{const}$ ,  $v_0 = \text{const}$ , где  $u_0, v_0$  — проекции вектора скорости на оси  $x, y$  соответственно),

$$\begin{aligned} x = \alpha, \quad y = \beta, \quad t = \varphi(\alpha, \beta), \quad \Phi_x(\alpha, \beta) = \Phi' \psi_x = u(\alpha, \beta), \\ \Phi_y(\alpha, \beta) = \Phi' \psi_y = v(\alpha, \beta), \quad \Phi_t(\alpha, \beta) = \Phi' \psi_t = -0.5(u^2 + v^2) - \frac{1}{\varkappa - 1} a^2(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4.1)$$

При этом из условий Гюгонио на фронте ударной волны имеем

$$\begin{aligned} u(\alpha, \beta) = u_0 - \left( \frac{p - p_0}{\rho_0 g} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad v(\alpha, \beta) = v_0 - \left( \frac{p - p_0}{\rho_0 g} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \\ p(\alpha, \beta) = \frac{\rho_0 g^2 - (\varkappa - 1) p_0 z / 2}{(\varkappa + 1) z / 2}, \quad \rho(\alpha, \beta) = \frac{(\varkappa + 1) \rho_0^2 g^2 / 2}{\varkappa p_0 z + (\varkappa - 1) \rho_0 g^2 / 2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Так как для политропного газа  $a^2 = \varkappa p / \rho$ , мы получаем

$$a^2 = \frac{4\varkappa[\rho_0 g^2 - (\varkappa - 1) p_0 z / 2][(\varkappa - 1) \rho_0 g^2 / 2 + \varkappa p_0 z]}{(\varkappa + 1)^2 z \rho_0^2 g^2}, \quad (4.3)$$

$$z = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2, \quad g = -1 + u_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}.$$

Соответственно,  $a_0^2 = \varkappa p_0 / \rho_0$ , где  $a_0$  — скорость звука в покоящемся или движущемся с постоянной скоростью газе.

##### 4.1. Уравнение поверхности ударной волны. Необходимое условие

Из условий (4.1) получаем, что на поверхности ударной волны дополнительно к условиям (1.6), (4.2) выполняются соотношения

$$\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{u(\alpha, \beta)}{v(\alpha, \beta)}, \quad \frac{\psi_y}{\psi_t} = -\frac{v(\alpha, \beta)}{0.5(u^2 + v^2) + a^2(\alpha, \beta) / (\varkappa - 1)}.$$

Тогда, учитывая соотношения (1.6), (1.8), находим

$$\begin{aligned} \psi_y(\alpha, \beta) = -f_1 v F(\alpha, \beta) = c_2 f_1, \quad \psi_x(\alpha, \beta) = -f_1 u F(\alpha, \beta) = c_1 f_1, \\ \psi_t(\alpha, \beta) = f_1 [0.5(u^2 + v^2) + a^2 / (\varkappa - 1)] F = (c_1^2 + c_2^2) f_1, \\ F = \frac{0.5(u^2 + v^2) + a^2 / (\varkappa - 1)}{u^2 + v^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Отсюда определяются функции  $c_1 = c_1(\alpha, \beta)$  и  $c_2 = c_2(\alpha, \beta)$ .

Кроме того, соотношения (1.8) на начальном многообразии (4.1) должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{2c_1}{c_1^2 + c_2^2} w + c_3(\alpha, \beta), \quad \beta = \frac{2c_2}{c_1^2 + c_2^2} w + c_4(\alpha, \beta), \\ \varphi(\alpha, \beta) = -\frac{1}{c_1^2 + c_2^2} w + c_5(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из соотношений (4.5) получаем, что на поверхности ударной волны должны выполняться зависимости

$$c_3(\alpha, \beta) = \alpha + 2c_1[\varphi(\alpha, \beta) - c_5(\alpha, \beta)], \quad c_4(\alpha, \beta) = \beta + 2c_2[\varphi(\alpha, \beta) - c_5(\alpha, \beta)]. \quad (4.6)$$

Подставив (4.6) в (1.9), находим

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = c_1 + (c_1^2 + c_2^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial \beta} = c_2 + (c_1^2 + c_2^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad R = (c_1^2 + c_2^2)(c_5 - \varphi). \quad (4.7)$$

Потребуем равенства смешанных производных для функции  $R$ . Тогда получим:

$$\frac{\partial(Fu)}{\partial \beta} \left( 2Fu \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - 1 \right) - 2Fu \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial(Fu)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(Fv)}{\partial \alpha} \left( 1 - 2Fv \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) + 2Fv \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial(Fv)}{\partial \beta} = 0. \quad (4.8)$$

Если значения  $c_1(\alpha, \beta)$ ,  $c_2(\alpha, \beta)$  из соотношений (4.4) подставим в (4.7), то получим зависимость, которой должна удовлетворять функция  $\varphi(\alpha, \beta)$  в уравнении ударной волны  $t = \varphi(\alpha, \beta)$ . Сначала рассмотрим случай, когда  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ . Тогда соотношение (4.8) приводится к виду

$$(E - 2J^2 - 2EJz) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} \right) - z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} \right] = 0, \quad (4.9)$$

$$E = \frac{(\varkappa - 1)\rho_0^2 + 0.5\varkappa^2(\varkappa^2 - 6\varkappa + 1)p_0^2 z^2 / (\varkappa - 1) - 2\varkappa(\varkappa - 1)p_0 \rho_0 z}{0.5(\varkappa + 1)z^2(\rho_0 - \varkappa p_0 z)^2},$$

$$J = \frac{0.5(1 - \varkappa)\rho_0^2 + \varkappa^2 p_0^2 z^2 + 0.25\varkappa(\varkappa^2 - 10\varkappa + 5)p_0 \rho_0 z / (\varkappa - 1)}{0.5(\varkappa + 1)\rho_0 z(\rho_0 - \varkappa p_0 z)}.$$

Отсюда получаем, что уравнение поверхности ударной волны, отделяющей покоящийся газ от потенциального течения, необходимо удовлетворяет уравнению

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 = b(\varphi). \quad (4.10)$$

Здесь  $b(\varphi)$  — пока не известная функция.

Если с одной стороны от поверхности ударной волны течение газа постоянно, т.е.  $u_0 = \text{const} \neq 0$ ,  $v_0 = \text{const} \neq 0$ , то соотношение (4.8) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \left\{ 2F^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \left( u_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \left( q \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + T \right) + \left( v_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) \left( 2Q \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + u_0 H + qS + 2qF^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 \right) \right. \\ & \quad \left. - qF \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \left( \left( u_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( v_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 \right) \left( 2Q \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + u_0 H + qS \right) \right\} \\ & + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} \left\{ 2F^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \left( v_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) \left( h \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + T \right) + \left( u_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \cdot \left( 2Q \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + v_0 H + hS + 2hF^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 \right) \right. \\ & \quad \left. - hF \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \left( \left( u_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( v_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 \right) \left( 2Q \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + v_0 H + hS \right) \right\} \\ & + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} \left\{ \left[ 2F \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \left( 2Q \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + u_0 H + qS \right) - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \left( 2Q \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + v_0 H + hS \right) \right] \right. \\ & \quad \times x \left( \left( u_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( v_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 \right) + F \left( q \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - h \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) + \left( u_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right) \\ & \quad \left. \times x \left( -2qF^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right)^2 - 2TF^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + 2hF^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - 2Q \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - u_0 H - qS \right) \right\} \end{aligned}$$

$$- \left( v_0 - T \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) \left( -2hF^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right)^2 - 2TF^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + 2qF^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - 2Q \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - v_0 H - hS \right) \Big\} = 0. \quad (4.11)$$

Здесь (см. также (4.3), (4.4))

$$T = \frac{2}{\varkappa + 1} \left( \frac{g}{z} - \frac{a_0^2}{g} \right), \quad F = 0.5 - \frac{\varkappa z (T + a_0^2 / (\varkappa g)) (T - g/z) / (\varkappa - 1)}{(u_0^2 + v_0^2) + zT^2 - 2(g+1)T},$$

$$Q = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad H = \frac{\partial F}{\partial g}, \quad S = \frac{\partial F}{\partial T}, \quad q = \frac{\partial T}{\partial \varphi_\alpha}, \quad h = \frac{\partial T}{\partial \varphi_\beta}, \quad \varphi_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \varphi_\beta = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}.$$

Таким образом, выписаны необходимые условия — уравнения, которым должна удовлетворять функция  $\varphi(\alpha, \beta)$ .

Изучим подробнее, какую форму может иметь поверхность ударной волны, примыкающая к области покоя. Выпишем систему уравнений характеристик для уравнения (4.10)

$$\frac{d\alpha}{ds} = 2\varphi_\alpha, \quad \frac{d\beta}{ds} = 2\varphi_\beta, \quad \frac{d\varphi}{ds} = 2b, \quad \frac{d\varphi_\alpha}{ds} = b_\varphi \varphi_\alpha, \quad \frac{d\varphi_\beta}{ds} = b_\varphi \varphi_\beta.$$

Выберем в этой системе в качестве независимой переменной  $\varphi$ , полагая, что  $b \neq 0$ , а затем проинтегрируем полученную систему. Получим решение

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &= \gamma \sqrt{b}, \quad \varphi_\beta = \sqrt{b(1 - \gamma^2)}, \\ \alpha &= \gamma h + k(\gamma), \quad \beta = h \sqrt{1 - \gamma^2} + m(\gamma), \quad h = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{b}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\gamma$  — новые переменные ( $\alpha = \alpha(\varphi, \gamma)$ ,  $\beta = \beta(\varphi, \gamma)$ ). Функции  $k(\gamma)$  и  $m(\gamma)$  — произвольные.

Если функция  $b(\varphi)$  задана через параметр  $p$ , т.е.  $b = b(p)$ ,  $\varphi = \varphi(p)$ , тогда

$$h = h(p) = \int \frac{\varphi_p dp}{\sqrt{b(p)}}, \quad \alpha = \alpha(p, \gamma), \quad \beta = \beta(p, \gamma)$$

и необходимо, чтобы в новых переменных  $\gamma$  и  $p$  выполнялись условия

$$\varphi_\alpha \alpha_p + \varphi_\beta \beta_p = \varphi_p, \quad \varphi_\alpha \alpha_\gamma + \varphi_\beta \beta_\gamma = 0.$$

Отсюда следует, что в соотношениях (4.12) функции  $k$  и  $m$  должны удовлетворять зависимости

$$\gamma k_\gamma + m_\gamma \sqrt{1 - \gamma^2} = 0. \quad (4.13)$$

Будем полагать, что фронт ударной волны проходит через точку  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ , тогда из соотношений (4.12), (4.13) получим

$$k = k_0 \gamma, \quad m = k_0 \sqrt{1 - \gamma^2}, \quad k_0 = \text{const}, \quad k_0 > 0, \quad (4.14)$$

если  $k \neq \text{const}$  и  $m \neq \text{const}$ . Подставив (4.14) в (4.12) и исключив из полученных соотношений  $\gamma$ , придем к выражению

$$h(p) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - k_0. \quad (4.15)$$

Если  $k = \text{const}$  и  $m = \text{const}$ , то, исключая из соотношений (4.12) переменную  $\gamma$ , получаем

$$h(p) = \sqrt{(\alpha - k)^2 + (\beta - m)^2}. \quad (4.16)$$

Из соотношений (4.15), (4.16) следует, что если существует обратная функция  $p = p(h)$ , то  $t = \varphi(p) = \varphi(p(h))$ . Тогда, если  $t = t^* = \text{const}$ , то  $h = A_0(t^*) = \text{const}$ , т.е. выражения (4.15), (4.16) задают фронт ударной волны в каждый фиксированный момент времени  $t = t^*$ .

## 4.2. Уравнение поверхности ударной волны. Достаточное условие

Условия (4.10), (4.11) не обеспечивают точного выполнения начальных условий (4.1) для конкретного потенциального течения из рассматриваемого класса течений, но чтобы такие условия выполнялись, достаточно потребовать дополнительно выполнения соотношения  $\Phi' \psi_x = u(\alpha, \beta)$ . Это соотношение (см. (4.4)) сводится к равенству  $\Phi' f_1 = 1/F(\alpha, \beta)$ , где  $\Phi'$  определено, если выбрано потенциальное течение, для которого строится фронт ударной волны, отделяющий это течение от области покоя или постоянного движения.

Рассмотрим подробно, что дает достаточное условие при построении примыкания потенциального течения к покою через фронт ударной волны.

В этом случае имеем

$$u = \frac{\varphi_\alpha [1 - a_0^2 b(\varphi)]}{0.5(\varkappa + 1)b(\varphi)}, \quad v = \frac{\varphi_\beta [1 - a_0^2 b(\varphi)]}{0.5(\varkappa + 1)b(\varphi)}, \quad (4.17)$$

$$a^2 = \frac{4\varkappa [1 - 0.5(\varkappa - 1)a_0^2 b(\varphi)/\varkappa][0.5(\varkappa - 1) + a^2 0b(\varphi)]}{(\varkappa + 1)^2 b(\varphi)}. \quad (4.18)$$

Подставив соотношения (4.17), (4.18) в (4.4), определим  $c_1(\alpha, \beta)$ ,  $c_2(\alpha, \beta)$ :

$$c_1 = -\frac{\varphi_\alpha [2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b(\varphi)/(\varkappa - 1)]}{2b(\varphi)[1 - a_0^2 b(\varphi)]}, \quad c_2 = -\frac{\varphi_\beta [2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b(\varphi)/(\varkappa - 1)]}{2b(\varphi)[1 - a_0^2 b(\varphi)]}. \quad (4.19)$$

Тогда из (4.6), (4.7) получаем

$$c_5 = \varphi + \frac{4Rb(1 - a_0^2 b)^2}{[2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1)]^2}, \quad c_3 = \alpha + \frac{4\varphi_\alpha R(1 - a_0^2 b)}{[2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1)]}, \quad (4.20)$$

$$c_4 = \beta + \frac{4\varphi_\beta R(1 - a_0^2 b)}{[2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1)]}.$$

$$R = \int \frac{[2(\varkappa - 1) - (\varkappa - 3)a_0^2 b](\varkappa + 1)a_0^2}{4(\varkappa - 1)^2(1 - a_0^2 b)^2} d\varphi + N_0, \quad N_0 = \text{const}. \quad (4.21)$$

Подставив функции (4.19), (4.20) в (1.8), получим

$$\begin{aligned} t &= \varphi + (R - w) \frac{4b(1 - a_0^2 b)^2}{[2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1)]^2}, \\ x &= \alpha + (R - w) \frac{4\varphi_\alpha(1 - a_0^2 b)}{[2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1)]}, \\ y &= \beta + (R - w) \frac{4\varphi_\beta(1 - a_0^2 b)}{[2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1)]}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Кроме того, из условий (4.1), (4.4), (4.17)–(4.19) следует, что на поверхности ударной волны должны выполняться соотношения

$$\Phi' f_1 = \frac{4(1 - a_0^2 b)^2}{(\varkappa + 1)[(\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1) - 2]}, \quad R = w. \quad (4.23)$$

Отсюда определяются  $b = b(\psi)$  и  $R = R(\psi)$ , если выбрано потенциальное течение, примыкающее к покою через ударный фронт, т.е. выбрана функция  $\Phi'$ , определяемая одним из найденных точных решений уравнения (1.5). Далее, подставив полученные соотношения в (4.21), найдем  $\varphi(\psi)$ . Тем самым функция  $b = b(\varphi)$  (см. (4.10)) определяется параметрическим выражением  $b = b(\psi)$ ,  $\varphi = \varphi(\psi)$ .

Итак, достаточное условие, которому должен удовлетворять фронт ударной волны, отделяющий потенциальное течение от области покоя, приводит к тому, что функция  $b(\varphi)$  уже не является произвольной, а имеет конкретный вид.



### 4.3. Примеры построения ударных волн, примыкающих к области покоя

(1) Будем строить фронт ударной волны, отделяющий потенциальное течение (2.1) от области покоя.

Из соотношения (4.23) находим  $b(\varphi)$ , получив предварительно, что  $\Phi' f_1 = a_1$ ,

$$b = \frac{[1 + 0.125(\varkappa + 1)(\varkappa - 3)a_1/(\varkappa - 1)] \pm \sqrt{D}}{a_0^2}, \quad (4.24)$$

$$D = \frac{(\varkappa + 1)^2 a_1 [(\varkappa - 3)^2 a_1 - 16(\varkappa - 1)]}{64(\varkappa - 1)^2}.$$

Дискриминант  $D \geq 0$ , если

$$a_1 \geq \frac{16(\varkappa - 1)}{(\varkappa - 3)^2}, \quad 1 < \varkappa < 3.$$

Таким образом, в этом случае  $b(\varphi) = \text{const}$ .

Из уравнения (4.10) имеем (см. [3])

$$\varphi = r\alpha + \beta\sqrt{b - r^2} + \gamma, \quad r = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}. \quad (4.25)$$

Поверхность  $t = \varphi(\alpha, \beta)$ , где  $\varphi$  задается выражением (4.25), является искомым фронтом ударной волны, отделяющим область покоя от потенциального течения (2.1).

Чтобы в потенциальном течении (2.1), примыкающем к ударному фронту (4.25), перейти к координатам  $\{x, y, t\}$ , сначала найдем, что (см. (4.7)),

$$R = A\varphi + N_0, \quad A = \frac{(\varkappa + 1)a_0^2}{4(\varkappa - 1)(1 - a_0^2 b)K}, \quad K = \frac{1 - a_0^2 b}{2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1)}. \quad (4.26)$$

Подставим (4.26) в (4.22) и исключим из соотношений (4.22) переменные  $\alpha$  и  $\beta$ . В результате получим

$$w = N_0 + \frac{1}{4bK^2}t - \frac{1}{2bK}(rx + y\sqrt{b - r^2} + \gamma), \quad (4.27)$$

$$K \neq 0, \quad b \neq 0.$$

Итак, к области покоя через ударный фронт (4.25) примыкает потенциальное течение (2.1), (4.27).

(2) Получим течение (2.2) в первоначальных координатах, когда фронт ударной волны проходит через точку  $\{\alpha = 0, \beta = 0\}$ .

Из соотношений (4.12) при условиях (4.14) получаем

$$\alpha = \gamma(h + k_0), \quad \beta = \sqrt{1 - \gamma^2}(h + k_0). \quad (4.28)$$

Фронт ударной волны в этом случае имеет форму (4.15). Требуя выполнения достаточного условия и выбрав  $b$  в качестве независимой переменной, будем иметь на поверхности ударной волны, с одной стороны,

$$R(b) = w(b) = Ap^{-1/2}(p + 2)^{\{-1/[2(\varkappa - 1)]\}}(p + 2/\varkappa)^{-\{(\varkappa^2 - 2)/[2\varkappa(\varkappa - 1)]\}}, \quad (4.29)$$

$$p = \frac{4(1 - a_0^2 b)^2}{(\varkappa + 1)[(\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1) - 2]}.$$

Но, с другой стороны, из (4.21) следует, что

$$w(b) = R(b) = \int \frac{(\varkappa + 1)a_0^2[2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1)]}{4(\varkappa - 1)(1 - a_0^2 b)^2} \frac{d\varphi}{db} db + N_0. \quad (4.30)$$

Тогда соотношения (4.30) и (4.12) приводят к зависимостям

$$\varphi(b) = \int \frac{4(\varkappa - 1)(1 - a_0^2 b)^2}{(\varkappa + 1)a_0^2(2 - (\varkappa - 3)a_0^2 b/(\varkappa - 1))} \frac{dw}{db} db, \quad h(b) = \int \frac{d\varphi}{db} \frac{db}{\sqrt{b}}. \quad (4.31)$$

Подставив (4.28), (4.30) и (4.31) в (4.22) и исключив из полученных выражений переменную  $\gamma$ , находим

$$t = \varphi(b) + 4bK^2(w(b) - w), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = (h(b) + k_0) + 4\sqrt{b}K(w(b) - w). \quad (4.32)$$

Таким образом,  $w = w(r, t)$  определяется из (4.32) исключением параметра  $b$ . Затем из соотношений (2.2) можно определить  $\Phi_w = p(r, t)$  и  $\Phi(r, t)$ . Выражения (4.32) задают параметрическое представление поверхности уровня

$$r = r(b, s), \quad t = t(b, s), \quad w = s.$$

### Заключение

Получен класс решений уравнения потенциала, обладающий достаточным произволом для решения ряда начальных и краевых задач для уравнения (1.1). Примеры таких задач рассмотрены. Описан путь получения решения других аналогичных задач.

В данной работе не рассматриваются решения, которые могут быть получены, когда функции  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) зависят не только от переменной  $\psi$ , но и от постоянных  $\alpha$  и  $\beta$ .

**З а м е ч а н и е 1.** При решении конкретных краевых или начальных задач нет необходимости находить функции  $f_i$ . Достаточно найти функции  $c_i$ , удовлетворяющие условиям (1.9), и, исключив новые переменные из соотношений (1.8), определить вид  $\psi(x, y, t)$ . Затем, полагая  $\Phi = \Phi(\psi(x, y, t))$ , найти соответствующие производные и подставить их в уравнение (1.1). Получим уравнение для определения  $\Phi(\psi)$ , где  $\psi(x, y, t)$  удовлетворяет начальным или краевым условиям задачи.

**З а м е ч а н и е 2.** Можно рассмотреть случай, когда уравнению (1.3) ставится в соответствие не система (1.4), а система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (\psi_x^2 + \psi_y^2) = f_0, \\ \psi_t = f_1, \\ \psi_{tt} = f_2, \\ (\varkappa - 1)\psi_t(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + 2(\psi_x\psi_{xt} + \psi_y\psi_{yt}) = f_3, \\ \frac{\varkappa+1}{2}(\psi_x^2\psi_{xx} + \psi_y^2\psi_{yy}) + \frac{\varkappa-1}{2}(\psi_y^2\psi_{xx} + \psi_x^2\psi_{yy}) + 2\psi_x\psi_y\psi_{xy} = f_4. \end{array} \right. \quad (**)$$

Но исследование совместности выписанной системы показывает, что класс возможных решений уравнения потенциала в этом случае узок.

На самом деле здесь, не уменьшая общности, можно считать, что  $f_0 = 1$ . Если мы выпишем дифференциальные следствия первых двух уравнений системы (\*\*)

$$\psi_x\psi_{xx} + \psi_y\psi_{xy} = 0, \quad \psi_x\psi_{xy} + \psi_y\psi_{yy} = 0,$$

$$\psi_x\psi_{xt} + \psi_y\psi_{yt} = 0, \quad \psi_{tx} = f_1'\psi_x, \quad \psi_{ty} = f_1'\psi_y, \quad \psi_{tt} = f_1'f_1$$

и потребуем равенства смешанных производных, то придем к условию  $f_1 = \text{const}$ .

Выразив из этих соотношений производные  $\psi_{xx}$ ,  $\psi_{xy}$ ,  $\psi_{tt}$  и подставив их в третье и четвертое уравнения системы (\*\*), получим

$$\psi_{tt} = 0, \quad \psi_{xt} = 0, \quad \psi_{yt} = 0,$$

$$\psi_{yy} = \frac{f_3}{(\varkappa - 1)f_1}\psi_x^2, \quad \psi_{xx} = \frac{f_3}{(\varkappa - 1)f_1}\psi_y^2, \quad \psi_{xy} = -\frac{f_3}{(\varkappa - 1)f_1}\psi_x\psi_y.$$

Требование равенства смешанных третьих производных приводит к условиям  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = 0$ , и все вторые производные обращаются в нуль. Тогда последнее уравнение системы (\*\*) дает  $f_4 = 0$ . Следовательно,

$$\psi = A_0x + y\sqrt{1 - A_0^2} + f_1t + B_0, \quad A_0 = \text{const}, \quad B_0 = \text{const}, \quad f_1 = \text{const}.$$

Решение уравнения (1.1) в новых переменных имеет вид

$$\Phi = A\psi + B, \quad A = \text{const}, \quad B = \text{const},$$

где  $\psi$  определяется выписанным выше выражением.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рубина Л.И.** Метод построения линий уровня для получения точных решений нелинейных уравнений в частных производных // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: Тез. докл. конф. Абрау-Дюрсо, 2004. С. 89–90.
2. **Мизес Р.** Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Иностран. лит., 1961.
3. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
4. **Рубина Л.И.** О распространении слабых разрывов для квазилинейных систем // Прикл. математика и механика. 1972. Т.36, №3. С.435–443.
5. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
6. **Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001.
7. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965.

Поступила 25.10.2007

УДК 517.977

**ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДВОЙНЫЕ ВОЛНЫ****В. А. Сучков**

В работе рассматриваются двумерные автомодельные потенциальные течения политропного газа. Построен ряд решений за детонационными волнами постоянной интенсивности в классе бегущих волн.

**Введение**

Наиболее интересными в газовой динамике являются задачи, где в течениях присутствуют сильные разрывы. Особенно трудными эти задачи становятся, когда движения многомерные. В работах А.Ф. Сидорова [1, 2] предложен метод построения решений с сильными разрывами в классе течений с вырожденным годографом. В докладе [3] приведено точное решение задачи об иницировании детонации взрывчатого вещества в точке на свободной поверхности полупространства. Задача автомодельная, искомые функции  $u$ ,  $v$ ,  $c$  зависят от двух переменных  $\xi = x/t$ ,  $\eta = y/t$ . Здесь  $u$ ,  $v$  — компоненты вектора скорости,  $c$  — скорость звука,  $x$ ,  $y$  — пространственные координаты,  $t$  — время. Подобная задача рассматривалась в [4].

Структура решения задачи состоит из головной детонационной волны, граничной характеристики, отделяющей одномерное решение за волной от двумерного течения разрежения типа Прандтля — Майера, и свободной границы  $p = 0$ . Решение строится из простой волны в области одномерного движения за детонационной волной, примыкающего к двойной волне в области разрежения [5]. Задача изучалась в двух постановках: плоской и осесимметричной. В первом случае детонационная волна постоянной интенсивности цилиндрическая, во втором — сферическая. В работе обсуждаются решения типа двойных волн для осесимметричного движения. В [6] приведены результаты расчетов тестовых задач по программе ГРАД.

**1. Постановки задач**

В пространстве  $x > 0$ ,  $y > 0$ , занятом взрывчатым веществом, заданы параметры:  $u^0 = v^0 = 0$ ,  $\rho^0 = 0.75$ ,  $c^0 = 0$ ,  $p^0 = 0$ . Иницирование взрывного процесса производится в точке на границе  $x = 0$ ,  $y = 0$  при  $t = 0$ . Рассматривается движение детонационной волны при  $t > 0$ . Задача автомодельная, все параметры  $u$ ,  $v$ ,  $c$  зависят от пространственных переменных  $\xi = x/t$ ,  $\eta = y/t$ . Компоненты  $u$ ,  $v$  вектора скорости и скорость звука  $c$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям в конических переменных:

$$\begin{aligned} (u - \xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} + (v - \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= 0, \\ (u - \xi) \frac{\partial v}{\partial \xi} + (v - \eta) \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \\ (u - \xi) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + (v - \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{N \cdot c^2 \cdot v}{\eta} &= 0, \\ \varphi &= \frac{c^2}{\gamma - 1}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Получим уравнение для двойных волн в осесимметричной постановке  $N = 1$ . Для сокращения записи в последующих уравнениях переменные в (1.1) переобозначим следующим образом:

$$u = u_1, \quad v = u_2, \quad \xi = \xi_1, \quad \eta = \xi_2.$$

Положив

$$\Pi = \Pi(u_1, u_2) = \varphi + \frac{u_1^2 + u_2^2}{2},$$

получим систему уравнений двойных волн

$$L(\Pi) = \Pi_{11}a_{22} - 2\Pi_{12}a_{12} + \Pi_{22}a_{11} = F. \quad (1.2)$$

Здесь

$$a_{ij} = \varphi_i \varphi_j - c^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$c^2 = (\gamma - 1)\varphi = (\gamma - 1)\left(\Pi - \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}\right),$$

$$\xi_i = u_i + \varphi_i = \Pi_i, \quad i = 1, 2,$$

$$F = N \frac{c^2 u_2}{\Pi_2} (\Pi_{11} \Pi_{22} - \Pi_{12}^2),$$

$N = 0$  — плоский,  $N = 1$  — осесимметричный случай. Индекс внизу у функций  $\Pi(u_1, u_2)$  и  $\varphi(u_1, u_2)$  обозначает дифференцирование по соответствующей переменной:

$$\Pi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial u_i}, \quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \quad \Pi_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u_i \partial u_j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Уравнение (1.2) для  $N = 0$  совпадает с уравнением двойных волн плоского течения [5].

**З а д а ч а 1.** *Движение цилиндрической детонационной волны.*

Задача рассматривается в плоской постановке. В этом случае детонационная волна постоянной интенсивности является цилиндрической.

**З а д а ч а 2.** *Движение сферической детонационной волны.*

Задача рассматривается в осесимметричной постановке. В этом случае детонационная волна постоянной интенсивности является сферической.

Задачи рассматривались для различных граничных условий на левой границе  $x = 0$  взрывчатого вещества:  $u = 0$  в одномерной задаче и  $p = 0$  в двумерной задаче.

Для изучения симметричного движения уравнения (1.1) записываются в полярных координатах:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

$$u = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta, \quad v = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta,$$

$$u_r = u \cos \theta + v \sin \theta, \quad u_\theta = -u \sin \theta + v \cos \theta, \quad (1.3)$$

$$0 \leq \theta < \pi/2.$$

### 1.1. Одномерная задача

Для одномерного симметричного движения

$$u_\theta = 0, \quad u_r = U, \quad u = \xi \cdot U/\zeta, \quad v = \eta \cdot U/\zeta, \quad \zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

система уравнений, описывающих одномерные сферическую и цилиндрическую волны, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\zeta} &= \frac{\nu}{a^2} \cdot \frac{Uc^2}{\zeta}, \\ \frac{dc}{d\zeta} &= \frac{\nu(\gamma - 1)}{2} \cdot \frac{Uc}{\zeta a^2} (\zeta - U). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $U = U(\zeta)$  — симметричная скорость,  $c(\zeta)$  — скорость звука,  $\zeta$  — симметричная координата,  $\nu = 0, 1, 2$  — условие симметрии:  $\nu = 1$  — цилиндрическая задача,  $\nu = 2$  — сферическая задача;  $a^2 = (\zeta - U)^2 - c^2$ ,  $0 \leq \zeta \leq D$ .

Система дифференциальных уравнений (1.4) решается с начальными условиями:  $\zeta = D = \gamma + 1$ ,  $U = 1$ ,  $c = \gamma$ .

В результате интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.4) получим решение одномерных задач  $U = U(\zeta)$ ,  $c = c(\zeta)$  в области  $0 \leq \zeta \leq \zeta^0$ :

$$U = 0, \quad c = \zeta^0 = 1.8876$$

для цилиндрической детонационной волны;

$$U = 0, \quad c = \zeta^0 = 1.8202$$

для сферической детонационной волны.

### 1.2. Двумерная задача

Задача решается в независимых переменных  $\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  и  $\alpha$ , где  $\alpha$  — угол, отсчитываемый по часовой стрелке от касательной к кривой AD (детонационная волна) в точке A при  $\alpha = 0$  и до касательной к кривой AB при некотором  $\alpha = \alpha'$ ;  $\rho(0) = 1$ ,  $\rho(\alpha') = 0$  (см. рис. 1). Граничная характеристика  $\zeta = \zeta(\delta)$  (AC) описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\zeta}{d\delta} = \frac{\zeta a(D \sin \delta - y)}{cy - ax} \quad (1.5)$$

с начальным условием  $\zeta = D$  при  $\delta = 0$ . Здесь

$$\begin{aligned} \delta &= \alpha \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}, \\ a^2 &= (\zeta - U)^2 - c^2, \\ x &= D \cos \delta, \\ y &= \begin{cases} \sqrt{\zeta^2 - x^2}, & 0 \leq \delta \leq \delta_0, \\ -\sqrt{\zeta^2 - x^2}, & \delta > \delta_0, \end{cases} \end{aligned}$$

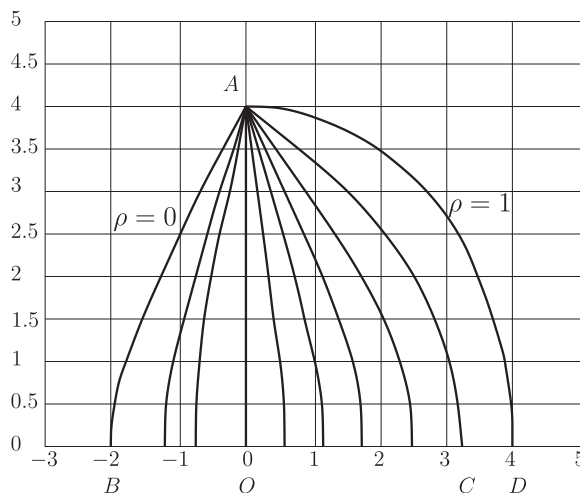
$\gamma = 3$ ,  $c = \rho$ ,  $D = \gamma + 1$ . Функции  $U$  и  $c$  зависят от переменной  $\zeta$ :  $U(\zeta)$ ,  $c(\zeta)$  — решения симметричных задач (1.4).

В окрестности особой точки  $\delta = 0$ ,  $\zeta = D$  применяется следующее разложение:

$$\zeta = D - \frac{64}{81} \gamma \delta^4.$$

При интегрировании уравнения (1.5) найдем граничную характеристику АС, на которой  $U$  и  $s$  известны.

На рисунке представлено решение задачи Гурса в области между АВ и АС с краевыми условиями на этих характеристиках. Здесь АВ — характеристика Прандтля — Майера (линия вакуума  $p = 0$ ).



Изолинии плотности на момент времени  $t = 1$ .

### Заключение

В работе представлены тестовые задачи о движении детонационных волн от точки на свободной поверхности. Точные решения задач могут служить для верификации численных методик по программам счета задач детонации. В [6] изложены постановки и результаты счета тестовых задач с использованием комплекса программ ГРАД, проведено обсуждение задач и сравнение результатов счета с точными решениями. Получено удовлетворительное согласие результатов численных решений с точными. Тестовые задачи могут быть рекомендованы для отработки численных методик счета детонации, особенно в части графического представления результатов расчетов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров А.Ф. Об ударных волнах в течениях политропного газа, имеющих прямолинейные характеристики // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 2. С. 377–381.
2. Сидоров А.Ф. Некоторые точные решения нестационарной двумерной газодинамики // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 2. С. 380–386.
3. Сучков В.А., Шнитко А.С., Исламова Л.Р. О движении газа за расходящейся детонационной волной от точки на свободной поверхности // VIII Забабахинские научные чтения: Тр-ды междунар. конф. Снежинск: РФЯЦ – ВНИИТФ, 2005. С. 209–210.
4. Каждан Я.М. О движении газа за расходящейся детонационной волной в пространстве с вырезанным конусом // Прикл. математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 5. С. 916–928.
5. Сучков В.А. О движении газа за плоской детонационной волной, ортогональной свободной поверхности // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 6. С. 1100–1108.
6. Сучков В.А., Шнитко А.С., Жилина Р.А., Исламова Л.Р. Газодинамическое моделирование движения детонационных волн: Препринт № 210. Снежинск: РФЯЦ – ВНИИТФ, 2004.

Поступила 15.07.2007

УДК 519.63

## АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ СЕТОК ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ<sup>1</sup>

О. В. Ушакова

Описаны алгоритмы оптимизации трехмерных структурированных сеток для областей вращения.

### Введение

Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения представляют собой развитие двумерного метода [1] для трехмерного случая. Предложенные алгоритмы предназначены для построения и оптимизации трехмерных структурированных сеток при моделировании процессов многокомпонентной гидродинамики и для решения других инженерных и физических задач. Алгоритмы оптимизации сеток не сводятся к вращению двумерных сеток вокруг оси — подходу, традиционно используемому для построения и оптимизации трехмерных сеток в областях вращения. Раздел 1 посвящен общей формулировке проблемы.

Алгоритмы созданы в рамках вариационного подхода к конструированию оптимальных криволинейных сеток [2–7]. Раздел 2 посвящен формулировке подхода в трехмерном случае, описанию его отличительных свойств.

Алгоритмы предполагают оптимизацию некоторых ранее построенных сеток, обычно называемых начальными и удовлетворяющих ряду требований. В общем случае начальные сетки считаются невырожденными в смысле [8] и близкими к равномерным в смысле [6, 7]. Как исключение допускаются отдельные вырожденные ячейки, вырождающиеся в призмы или многогранники, представляющие собой объединение двух призм. В качестве начальных используются сетки, построенные по алгоритмам Т.Н. Брониной [9] в рамках геометрического подхода [10]. В алгоритмах оптимизации могут использоваться другие невырожденные начальные сетки. Алгоритмы оптимизации сеток были созданы на основе алгоритмов глобальной перестройки сеток [9]. Алгоритмы оптимизации сеток перестраивают начальные сетки в оптимальные в смысле [6, 7], т.е. невырожденные гладкие сетки, близкие к равномерным ортогональным. Оптимизация сеток может осуществляться внутри области вращения и на ее границе. В последнем случае узлы сетки в процессе оптимизации двигаются по поверхности, сотканной из линейчатых поверхностей граней граничных ячеек начальной сетки. Для того чтобы фиксировать изломы границ областей вращения, разработаны специальные алгоритмы. Созданы алгоритмы построения сеток с координатными линиями, ортогональными границе, а также алгоритмы, обеспечивающие гладкую стыковку координатных линий сетки. Все эти алгоритмы описаны в разд. 3.

В разд. 4 приводятся примеры расчетов сеток.

В заключение перечисляются возможные направления развития созданных алгоритмов.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН.



### 1. Формулировка проблемы

Проблема состоит в разработке алгоритмов оптимизации структурированных сеток в трехмерной области  $G$ , полученной вращением образующей, заданной в плоскости  $x_1, x_3$ , относительно оси  $x_3$  на угол  $\varphi$  ( $0 < \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi$ ) и в областях вращения с деформированными границами. Образующая кривая может состоять из отрезков прямых, дуг окружностей и эллипсов. Под оптимизацией сеток понимают алгоритмы построения сеток, удовлетворяющие определенным критериям оптимальности.

Виды образующей кривой представлены на рис. 1 (а)–(с). Рис. 1 и классификация видов образующей кривой созданы Т.Н. Брониной. Если образующая кривая не содержит выреза на оси вращения, то область вращения называется телом (случай (а)); если вырез есть — оболочкой (случай (b)); если в дополнение кривая срезана — срезом или срезанной оболочкой (случай (с)). Соответствующие области вращения очень часто возникают при моделировании многокомпонентных сред.

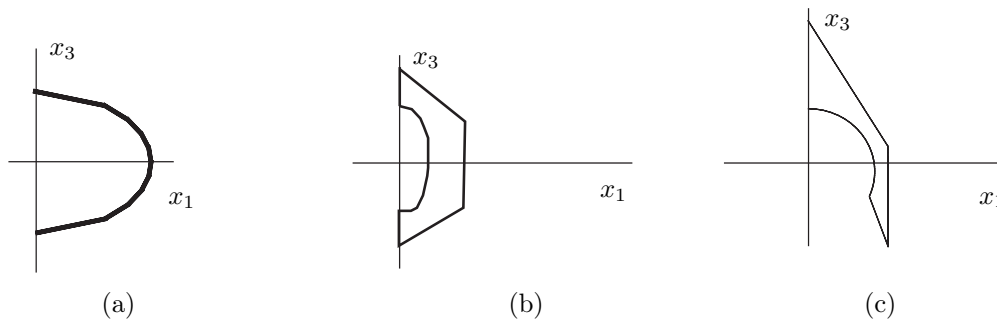


Рис. 1. Виды образующей кривой: (а) образующая кривая для тела вращения; (b) образующая кривая для оболочки; (с) образующая кривая для срезанной оболочки.

Под конфигурацией области будем понимать не только форму расчетной области, но и способ ее представления в виде криволинейного шестигранника с помощью выделения ребер и граней. Необходимость представления области в виде криволинейного шестигранника связана со способом построения структурированных сеток с помощью отображений. Считаем, что трехмерная структурированная сетка в области  $G$  решения физической задачи, называемой физической областью и в общем случае имеющей сложную геометрическую форму, задается с помощью непрерывного отображения  $\mathbf{x}$  вспомогательной области  $P$  более простой формы и называемой вычислительной (расчетной) областью, или пространством параметров, на область  $G$ . Отображение  $\mathbf{x}$  определяется также и на границе области: оно взаимно однозначно отображает границу  $\partial P$  области  $P$  в границу  $\partial G$  области  $G$  (т.е. узлы сетки расставляются еще и на границе области  $G$ ). Вычислительная область определяется в виде прямоугольного параллелепипеда  $P = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : 0 \leq \xi_l \leq I_l, l = 1, 2, 3\}$ , где  $I_l$  — целые числа, задающие число узлов сетки по каждому из координатных направлений. Значения отображения  $\mathbf{x} : \overline{P} \rightarrow \overline{G}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \{x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\}$$

при  $\xi_l = i_l, l = 1, 2, 3, i_l = 0, 1, \dots, I_l$  дают координаты узлов трехмерной сетки  $\mathbf{x}_{i_1 i_2 i_3} = \mathbf{x}(i_1, i_2, i_3)$ . Ячейки вычислительной области, заданные в форме единичных кубов

$$P_{i_1 i_2 i_3} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : i_l \leq \xi_l \leq i_l + 1, l = 1, 2, 3, \},$$

$i_l = 0, 1, \dots, I_l - 1$ , отображаются на ячейки сетки, а соответствующие фиксированным значениям индексов  $i_l$  линии и плоскости — на координатные линии и поверхности. Таким образом,

при подходящем отображении области  $P$  на область  $G$  возникает (строится) сетка как объект, состоящий из узлов и ячеек.

Это отображение в зависимости от используемого подхода может определяться различными методами: решением дифференциальных уравнений, минимизацией специальных функционалов, зависящих от функций, задающих искомое отображение, алгебраическими методами. Свойства и геометрические характеристики сеток и ячеек определяются рассматриваемым отображением, формализуются и контролируются с помощью специальных выражений от искомых функций и их производных. Эти выражения, как правило, определяют вид минимизируемых функционалов в вариационных задачах и часто — вид дифференциальных уравнений для расчета сеток.

Отображение  $\mathbf{x} : \bar{P} \rightarrow \bar{G}$ , задающее сетку в  $G$ , будем искать в узлах равномерной прямоугольной сетки области  $P$ , а в остальных точках области  $P$  будем восполнять его с помощью трилинейных отображений единичных кубических ячеек сетки области  $P$ . Использование трилинейного отображения единичного куба — это наиболее распространенный способ построения трехмерных ячеек [11]. Положение узлов  $\mathbf{x}_{i_1 i_2 i_3} = \mathbf{x}(i_1, i_2, i_3)$  криволинейной сетки будем находить из условия минимума специального дискретного функционала качества сетки, формализующего рассматриваемые критерии оптимальности при различных краевых условиях.

От искомого отображения обычно требуется, чтобы оно задавало невырожденную сетку: было взаимно однозначным, отображением “на” и имело положительный якобиан внутри области  $P$  и на ее границе (подробно о невырожденности см. [8]). Положительность якобиана отображения гарантирует сохранение той же ориентации основных векторов шестигранных ячеек, что и у единичных кубов, т.е. ориентации декартовой системы координат, и позволяет осуществлять преобразование координат при численном решении физической задачи, а все расчеты проводить в вычислительной области. Если якобиан отображения обращается в нуль или становится отрицательным, то сетка (ячейка) уже не будет невырожденной (см. классификацию шестигранных ячеек в [12]).

Требование невырожденности — это одно из главных требований, предъявляемых к сеткам. На вырожденных сетках физическое явление не может быть описано с необходимой точностью, потому что в этом случае системы алгебраических уравнений, заменяющие исходную дифференциальную задачу, являются плохо обусловленными.

При проверке невырожденности сетки будем использовать теорему из [13]. Важными условиями в теореме являются то, что сужение отображения на границу области  $P$  — гомеоморфизм, и положительность якобиана отображения. Так как искомое отображение восполняется с помощью трилинейных отображений единичных кубов области [8], то якобиан отображения в каждой точке области  $P$  и на ее границе будет равен якобиану соответствующего трилинейного отображения в данной точке. Условия положительности якобиана трилинейного отображения получены в [8, 14, 15].

Для построения трехмерных сеток в областях вращения традиционно применяется ротационный способ построения трехмерных сеток, при котором сетка образуется путем вращения вокруг оси двумерной сетки, построенной в плоскости задания образующей. Конфигурация рассчитываемых областей для ротационных сеток на оси вращения имеет особенность: одна грань криволинейного шестигранника вырождается в отрезок прямой на оси вращения (для тела вращения). Такие сетки относят к  $O$ -сеткам [16]. При таком способе построения трехмерных сеток около оси вращения возникают вырожденные ячейки — призмы, причем вырожденные ячейки становятся малыми для малых углов поворота при увеличении числа узлов, что часто бывает неприемлемым для решения физических задач.

Рассматриваемые в работе конфигурации являются экзотическими в том смысле, что несколько ребер и граней криволинейного шестигранника  $G$  лежат в одной плоскости и порождают особенности в сетке: ячейки вдоль указанных ребер вырождаются в линейчатые призмы [8, 12, 17] и характеризуются нулевыми значениями якобиана трилинейного отображения в двух вершинах вдоль одного ребра ячейки. Но в отличие от ротационных сеток,

вырожденные ячейки не становятся малыми при увеличении числа узлов. Типы возникающих вырождений оказываются допустимыми для используемых алгоритмов расчета физических явлений. Такие конфигурации позволяют рассчитывать стыкующиеся из узла в узел сетки в блочных конструкциях, состоящих из нескольких областей вращения, надетых друг на друга.

Кроме требования невырожденности, к сетками предъявляют еще ряд требований — критериев оптимальности, также влияющих на точность численного решения физической задачи.

Обычно в качестве критериев оптимальности рассматривают требования гладкости сеточных линий, близости сетки к равномерной или ортогональной и адаптации к решению физической задачи.

Наиболее широко используются следующие критерии оптимальности сеток.

1. Критерий близости сеток к равномерным (u). Объемы соседних ячеек сетки должны быть одного порядка. В противном случае трудно строить достаточно точные разностные аппроксимации дифференциальных уравнений. Кроме того, резко ухудшается обусловленность систем разностных уравнений, аппроксимирующих на построенной сетке системы дифференциальных уравнений.

2. Критерий близости сеток к ортогональным (o). Координатные линии или поверхности различных семейств не должны пересекаться под углами, близкими к 0 или  $\pi$ . В противном случае снова ухудшается обусловленность систем разностных уравнений.

3. Критерий адаптации (a). Криволинейная сетка должна отслеживать особенности заданной функции (семейства функций) или должна изменяться в итерационных или нестационарных процессах при решении краевых задач. Сгущение сетки должно происходить, в частности, в зонах больших градиентов функций, для которых строится адаптивная сетка.

Эти критерии оптимальности, особенно (u) и (a), противоречивы, но, как правило, могут применяться с весовыми параметрами, определяющими ценность критериев.

Наиболее естественными для оптимизации сеток являются вариационные методы. Вариационные методы, используемые для построения криволинейных сеток в областях сложной формы, хотя и требуют при их реализации решения довольно трудоемких задач (минимизации функционалов от функций многих переменных или решения соответствующих уравнений Эйлера — Остроградского), тем не менее дают возможность строить сетки с хорошими вычислительными достоинствами. Как правило, с помощью вариационных подходов строятся структурированные или блочно-структурированные сетки в односвязных и многосвязных областях. Топология сеток может быть при этом различной.

Функции, реализующие искомое отображение, должны минимизировать какой-либо вариационный функционал при заданных краевых или естественных условиях. Набор таких функционалов достаточно широк [6, 7, 16, 18–23].

В подавляющем большинстве случаев [16] в интегральные вариационные функционалы, формализующие критерии оптимальности, входят первые частные производные функций, осуществляющих отображение. Уравнения Эйлера — Остроградского для них являются системой уравнений в частных производных второго порядка, как правило, эллиптического типа.

В последнее время популярными стали также методы, когда искомое отображение представляет собой композицию двух отображений [18, 22, 23]. Варьирование одного из отображений с помощью специальной мониторинной метрики позволяет управлять качеством сетки. Если в представляемом методе свойства сеток могут меняться с помощью управляющих параметров, то в методах с мониторинными метриками их выбор представляет одну из главных проблем метода.

Помимо общих критериев, приведенных выше, к сеткам могут предъявляться еще и другие требования, например, определяемые конкретным численным алгоритмом решения физической задачи. В данной работе, кроме требований оптимальности, рассматривается еще и требование близости линейных размеров сетки. При расчете сеток для численного моделирования гидродинамических процессов [24], протекающих в многокомпонентных средах, от сетки также требуется, чтобы максимальные и минимальные размеры ячеек сетки не сильно

отличались [9]. Данное требование может быть продиктовано условием на временной и пространственный шаги численного решения задачи, например, условием Куранта или другими.

О том, какие еще требования могут предъявляться к сеткам, см. также в [18, 25, 26].

## 2. Вариационные задачи оптимизации сеток

Для оптимизации трехмерных сеток в данной работе будем использовать только два критерия оптимальности (u) и (o), т.е. критерии, отвечающие за геометрическую оптимальность сеток. Таким образом, будем конструировать алгоритм построения геометрически оптимальных сеток без учета критерия адаптации.

Будем рассматривать следующий дискретный функционал оптимальности [6, 7]:

$$D = A_u D_u + A_o D_o, \quad (2.1)$$

где  $A_u$  и  $A_o > 0$  — весовые коэффициенты, регулирующие степени близости сетки к равномерной и ортогональной соответственно,  $D_u$ ,  $D_o$  — соответствующие дискретные меры близости:

$$D_u = \sum_{ijk} \left\{ [r_{i+1,j,k} - r_{i-1,j,k}]^2 \left( \frac{1}{r_{i+1,j,k}^2} + \frac{1}{r_{i-1,j,k}^2} \right) + [r_{i,j+1,k} - r_{i,j-1,k}]^2 \left( \frac{1}{r_{i,j+1,k}^2} + \frac{1}{r_{i,j-1,k}^2} \right) + [r_{i,j,k+1} - r_{i,j,k-1}]^2 \left( \frac{1}{r_{i,j,k+1}^2} + \frac{1}{r_{i,j,k-1}^2} \right) \right\}, \quad (2.2)$$

$$D_o = \sum_{ijk} \sum_{p=1}^4 \left( \frac{1}{\sin^2 \varphi_{ij}^p} + \frac{1}{\sin^2 \varphi_{ik}^p} + \frac{1}{\sin^2 \varphi_{jk}^p} \right). \quad (2.3)$$

Здесь  $r_{i\pm 1,j,k} = \overrightarrow{H_{ijk}H_{i\pm 1,j,k}} = |\mathbf{h}_{i\pm 1}|$ ,  $H_{ijk}$  — узел сетки. Аналогично,  $r_{i,j\pm 1,k} = |\mathbf{h}_{j\pm 1}|$ ,  $r_{i,j,k\pm 1} = |\mathbf{h}_{k\pm 1}|$ . Через  $\varphi_{ij}^p$  ( $p = 1, 2, 3, 4$ ) обозначены углы между векторами  $\mathbf{h}_{i\pm 1}$  и  $\mathbf{h}_{j\pm 1}$  (см. рис. 2).

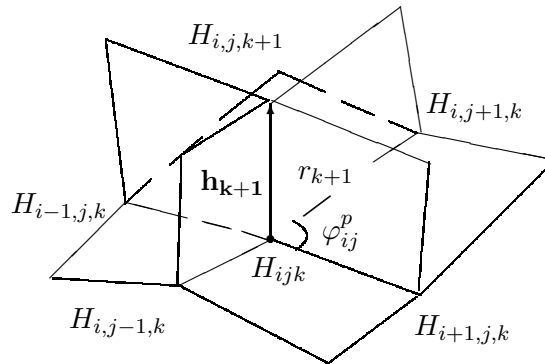


Рис. 2. Элементы ячеек трехмерной сетки.

Суммирование производится по всем внутренним узлам сетки.

Функционалы  $D_u$  и  $D_o$  формализуют критерии близости сеток к равномерным и ортогональным, соответственно. Постоянные  $A_u, A_o$  — положительные весовые коэффициенты, определяющие вклад функционалов  $D_u, D_o$  в построение сетки.

Минимизация функционала  $D$  должна обеспечить построение оптимальной сетки (близкой к равномерной ортогональной).

Общая характеристика этого функционала и отличительные особенности описаны в [6, 7, 9]. В [6, 7] для построения сеток предложено использовать третий функционал — функционал

адаптации сетки к особенностям решения физической задачи. Так как при построении сеток для моделирования процессов многокомпонентной гидродинамики [24] требование адаптации сеток к численному решению задач не учитывается, то в данных алгоритмах функционал адаптации не используется. Чтобы описать особенности возникающих краевых задач, приведем непрерывные аналоги дискретных функционалов оптимальности.

Непрерывный функционал с весовыми коэффициентами  $A_U, A_O$  имеет вид

$$I = A_U I_U + A_O I_O, \quad (2.4)$$

$$I_U = \iiint_P \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial \xi_i} \ln \sqrt{g_{ii}} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

$$I_O = \iiint_P \frac{1}{J^2} \left( \frac{G_1 G_2}{g_{33}} + \frac{G_1 G_3}{g_{22}} + \frac{G_2 G_3}{g_{11}} \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

$$g_{ii} = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \right)^2, \quad J = \det \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right\}, \quad G_i = g_{kk} g_{ll} - g_{kl}^2, \quad g_{kl} = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \xi_l} \right)^2 \quad (i \neq k \neq l \neq i).$$

В алгоритмах оптимизации сеток возможны различные способы расстановки узлов на границе области. Наиболее часто узлы на границе области считаются заданными и фиксированными. Этот способ используется и при построении блочно-структурированных сеток, когда расчетная область разрезается на подобласти, и на их общих границах узлы должны совпадать. Если сетки в отдельных блоках рассчитывать независимо друг от друга, то гладкость линий сетки в местах стыковок блоков нарушается. Гладкость сеточных линий и движение узлов на линиях стыковок блоков в соответствии с заданными критериями оптимальности может достигаться специальной организацией перекрытия блоков, реализованной, например, в программе MOPS-2a [6].

При построении адаптирующихся сеток граничные узлы естественнее определять в процессе счета из некоторых требований, предъявляемых к сетке на границе, т. е. рассматривать способ подвижных (свободных) узлов.

В некоторых методах конструкция алгоритма построения сетки позволяет задавать угол наклона координатных линий к границе области. В [16, 27] отмечается, что применение сеток, сильно отличающихся от ортогональных, вблизи границ может привести к дополнительным трудностям при аппроксимации граничных условий в решаемых на таких сетках задачах. Поэтому часто сетки рассматриваются как ортогональные или “почти” ортогональные к границам.

В рассматриваемом способе формализации критериев оптимальности возможна реализация всех перечисленных способов задания граничных условий как при минимизации дискретных функционалов, так и в вариационных задачах. В постановке вариационных задач определяющим является слагаемое  $A_U I_U$ . Оно дает второй порядок подынтегрального выражения минимизируемого функционала  $I$ , допуская в вариационной постановке задачи произвол в выборе искомых функций и их первых производных. Это позволяет при формулировке краевой задачи расчета сетки задавать либо оставлять свободными как положение самих узлов на границе области (определяется значениями искомых функций), так и угол наклона координатных линий к границе (определяется значениями производных от искомых функций) [28].

Например, как и в ранее созданных двумерных программах MOPS-2a (Хайруллина) и LADA (Ушакова) [1, 6, 29], в трехмерном случае узлы на границе области могут считаться заданными и фиксированными

$$x_i|_{\partial P} = l_i(\xi), \quad \xi \in \partial P, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.5)$$

где  $l_i(\xi)$  — заданные функции координат узлов на границе области.

В дополнение к (2.5) можно рассматривать также необходимые краевые условия, возникающие из минимизации функционала (2.4) на классе функций, удовлетворяющих на границе  $\partial P$  условиям (2.5). Это естественные граничные условия для производных (углы наклона координатных линий к границе свободны):

$$\frac{1}{g_{ii}^2} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} g_{ii} \Big|_{\xi_i=0, I_i} = 0, \quad j=1, 2, 3, \quad i=1, 2, 3.$$

Другие варианты задания краевых условий рассматривались в [28], где описан двумерный алгоритм с подвижными узлами на границе области и координатными линиями, ортогональными к границе (узлы свободны, углы наклона координатных линий к границе заданы).

Слагаемое  $I_{\square}$  не только определяет способ задания краевых условий, но и тип системы уравнений Эйлера — Остроградского.

Система уравнений Эйлера — Остроградского для функционалов вида (2.4) в трехмерном случае слишком громоздка, чтобы приводить ее целиком. Структуру ее с выделением главной части можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial^4 x_k}{\partial \xi_i^4} + L_i(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

где  $L_i(x_1, x_2, x_3)$  — нелинейные формы, содержащие частные производные функций  $x_k$  не выше третьего порядка.

Пусть уравнение

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$$

является уравнением характеристического многообразия для системы уравнений (2.6). Из (2.6) следует [30], что  $\Psi$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_3} = 0.$$

Таким образом, система уравнений (2.6) является гиперболической в широком смысле [30], а линии или плоскости  $\xi_i = \text{const}$  являются характеристическими.

Если в (2.4) положить  $A_{\square} = 0$ ,  $A_0 = 1$ , т.е. оставить лишь функционал, отвечающий за близость сеток к ортогональным, то прямой анализ системы уравнений Эйлера — Остроградского [3] показывает, что она имеет второй порядок и смешанный эллиптико-гиперболический тип, поэтому краевая задача с данными (2.5) может быть некорректно поставленной. Таким образом, введение слагаемого с  $A_{\square} \neq 0$  играет важную регуляризующую роль. Численные эксперименты только с одним функционалом ортогональности как в двумерном случае [3], так и в трехмерном [9, 17] обнаруживают неустойчивость численных процедур.

Исследование корректности краевых задач для системы (2.6) из-за ее нелинейности представляется весьма трудным. Простейший модельный пример корректной краевой задачи приведен в [3]. Позже были найдены примеры точного решения уравнений Эйлера — Остроградского для двумерного случая [31] и трехмерного случая [32]. К сожалению, теоремы о существовании и единственности решения, а также о корректности поставленных задач, в отличие от одномерного случая [2, 33], в настоящее время неизвестны. Формальные соображения (в двумерном случае задано 8, а в трехмерном случае — 18 функций  $l_i(\xi)$ , т.е. имеется произвол в 8 (18) функций), и большой опыт расчетов сеток подтверждает гипотезу о корректности краевой задачи.

Функционал ортогональности  $I_0(D_0)$  также играет очень важную роль. Благодаря его конструкции целевая функция содержит якобиан от искомого преобразования в качестве знаменателя, поэтому  $I(D)$  будет обращаться в бесконечность, если якобиан от искомого преобразования или дискретный аналог якобиана в узле сетки (в трехмерном случае коэффициент

$\alpha_{i_1 i_2 i_3}$  из [14, 15] или объем тетраэдра, построенного на ребрах ячейки, выходящих из данного узла, далее называемый “угловым тетраэдром”) будет обращаться в нуль. Такие конструкции для построения сеток называют барьерными методами [34, 35], обладающими “барьером” против вырожденных элементов. Кроме того, как показывает многочисленный опыт расчетов, использование только одного функционала равномерности приводит к построению равномерных, но не гладких сеток, а функционал ортогональности (при наличии функционала равномерности) обеспечивает построение гладких сеток.

### 3. Численные алгоритмы оптимизации сеток

Вариационные методы являются наиболее естественными для оптимизации сеток. Получение же эффективных алгоритмов связано с преодолением целого ряда трудностей. Численные процедуры оптимизации сеток, основанные только на решении уравнений Эйлера — Остроградского, часто малоэффективны в силу ряда причин [1, 36], а именно:

(1) громоздкий вид уравнений Эйлера — Остроградского приводит к большому числу арифметических операций при расчете сетки;

(2) для устойчивости счета в явных итерационных схемах временной шаг приходится выбирать малым, что сказывается на числе необходимых итераций;

(3) противоречивость требований, заложенных в основу вариационного метода, приводит к естественным трудностям при выборе управляющих параметров  $A_U, A_O$ , определяющих ценность того или иного критерия оптимальности, в частности, к неустойчивости численной процедуры решения уравнений [37].

В предлагаемом подходе [2–7] в отличие от [37] при любых положительных весовых коэффициентах тип системы уравнений Эйлера — Остроградского не меняется. Однако, так как при  $A_U=0, A_O \neq 0$  система смешанного эллипτικο-гиперболического типа, то для устойчивости вычислений при решении уравнений Эйлера — Остроградского весовые коэффициенты выбираются таким образом, чтобы вклад слагаемых, соответствующих  $I_O$ , не превосходил  $I_U$ . В противном случае в дискретной ситуации задача может оказаться неустойчивой. Подробные рекомендации для выбора весовых коэффициентов в вариационных методах, основанных на решении уравнений Эйлера — Остроградского, на примере уравнений Брекбилла — Зальцмана приведены в [36, 37]. Отметим, что численное решение уравнений Эйлера — Остроградского (первоначально использовался именно такой алгоритм, см. [28]) — не единственный путь для реализации вариационных принципов. Более эффективными при построении сеток могут оказаться прямые методы минимизации дискретных функционалов [1, 22, 23, 38, 39].

В подходе [6] эффективные процедуры расчета сеток реализованы в специальных итерационных процессах, которые используют как решение специальных нестационарных модификаций уравнений Эйлера — Остроградского, так и прямые геометрические способы минимизации дискретных функционалов [1, 6, 9, 29].

В трехмерном случае описываемый алгоритм разработан на основе его эффективного аналога для двумерного случая [1] и представляет собой алгоритм прямой геометрической минимизации дискретного функционала (2.1)–(2.3) с  $A_U = 1$  и  $A_O > 0$ .

#### 3.1. Общая характеристика алгоритма

Опишем численную процедуру минимизации дискретного функционала  $D$ . Минимизация дискретного функционала осуществляется методом покоординатного спуска. Процедура является итерационной. Итерации начинаются от некоторой невырожденной начальной сетки. Как исключение допускаются начальные сетки, содержащие вырожденные ячейки обычно на границе области  $G$ . Возможные случаи будут перечислены ниже.

Для нахождения каждого внутреннего узла осуществляется локальная оптимизация сетки, основанная на геометрических принципах. Положение нового узла ищется из условия миниму-

ма функционала и условия невырожденности сетки. При этом рассматриваются восемь ячеек, содержащих узел  $i, j, k$  в качестве вершины.

Узлы сетки  $H_{i+\Delta_i, j+\Delta_j, k+\Delta_k}^n$ ,  $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k = -1, 0, 1$ , являющиеся вершинами рассматриваемых восьми шестигранников, образуют 27-точечный шаблон (см. рис. 3). Фиксируем внешние узлы этих восьми шестигранников, позволяя двигаться только внутреннему узлу. Для граничных узлов шаблон строится аналогично (см. далее рис. 9).

Отметим следующие основные черты численного алгоритма.

Смещение любого узла не изменяет геометрию шаблонов узлов, не являющихся соседями с данным узлом, следовательно, оно не может изменить значения отображения, задающего сетку, и его якобиана в узлах, не являющихся соседними с данным, а значит, и качество сетки в этих узлах.

На очередной итерации  $n$  при выборе смещения  $\overrightarrow{H_{ij}^n H_{ijk}^{n+1}}$  узла  $H_{ijk}^n$ , минимизирующего функционал и сохраняющего невырожденность сетки, можно руководствоваться различными стратегиями. Допустимым множеством (обеспечивающим невырожденность) в большей части случаев будет восьмигранник  $\Gamma$  (с плоскими гранями), с вершинами в точках  $I_m = H_{i-1jk}^n$ ,  $I_p = H_{i+1jk}^n$ ,  $J_m = H_{ij-1k}^n$ ,  $J_p = H_{ij+1k}^n$ ,  $K_m = H_{ijk-1}^n$ ,  $K_p = H_{ijk+1}^n$  (см. рис. 3 и 4), если этот восьмигранник выпуклый.

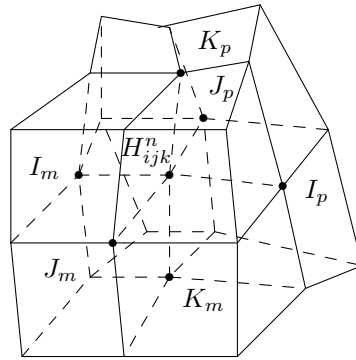


Рис. 3. Шаблон узлов.

Целевая функция содержит якобиан от искомого преобразования в качестве знаменателя, поэтому  $D$  будет обращаться в бесконечность, если дискретный аналог якобиана в узле сетки будет обращаться в нуль. Отметим, что важно следить за тем, чтобы барьерные свойства функционала сохранялись при численной реализации алгоритма. Например, для некоторых вырожденных ячеек дискретный аналог знаменателя подынтегральной функции функционала ортогональности обращается в нуль, но при этом и числитель также обращается в нуль. Но оказывается, что в большинстве таких ситуаций функционал равномерности обращается в бесконечность и общий функционал  $D$  сохраняет барьерные свойства, поэтому сетки с вырожденными ячейками не могут быть выбраны в качестве очередных параметров итерационного процесса минимизации функционала  $D$ . Кроме того, на каждой итерации осуществляется дополнительный контроль за невырожденностью ячеек, что также предотвращает возникновение вырожденных сеток.

Итерационный процесс прекращается, когда значения минимизируемого функционала стабилизируются или меняются незначительно от итерации к итерации.

### 3.2. Оптимизация внутренних узлов

Как и в двумерном случае [1], положение узла находится из условия невырожденности сетки и условия минимума функционала  $D$  на специальном множестве точек  $H_+$  или  $H_-$ . В процессе счета координаты узлов заменяются на новые.



Множества точек для минимизации функционала  $D$ . Множества  $H_+, H_-$  строятся с помощью специальных точек  $C_+, C_-$ . При нахождении точек определяющим является критерий близости сетки к равномерной по расстояниям между соседними узлами.

Будем рассматривать восьмигранник  $\Gamma$  (см. рис. 3, 4).

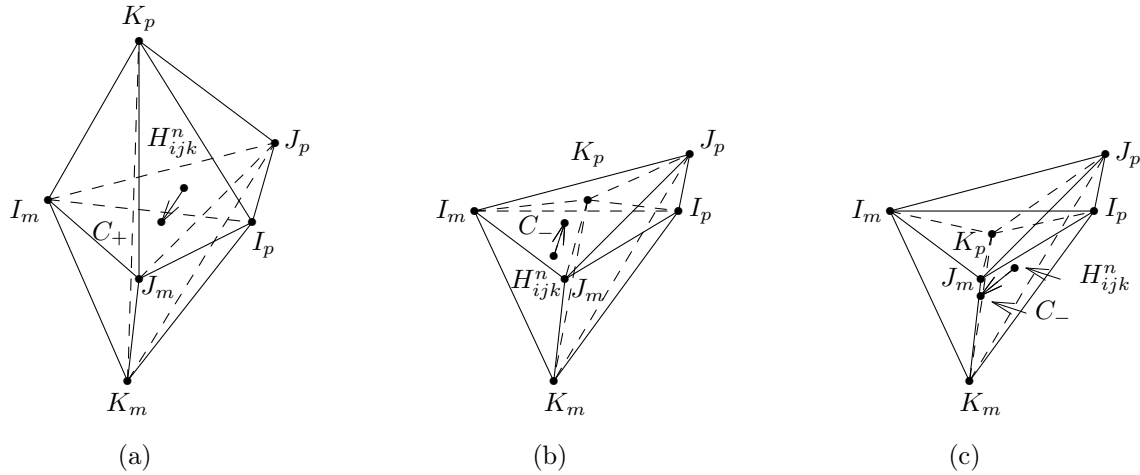


Рис. 4. Выпуклое (а) и невыпуклые (b), (c) допустимые множества.

Если  $\Gamma$  — выпуклый восьмигранник, то задается точка  $C_+$ . Она совпадает с центром тяжести данного восьмигранника (центр тяжести трех его диагоналей). Точка  $C_-$  задается, если  $\Gamma$  не является выпуклым. В этом случае она определяется как центр тяжести одной или двух внутренних диагоналей в зависимости от того, сколько внутренних диагоналей имеет данный восьмигранник. Для выпуклых многогранников функционал  $D$  (рис. 4 (а)) минимизируется на множестве  $H_+$ , для невыпуклых (рис. 4 (b), (c)) — на множестве  $H_-$ .

Множества  $H_+, H_-$  суть множества точек  $H_{ijk}^{n+1}(m)$  таких, что

$$\overrightarrow{H_{ijk}^n H_{ijk}^{n+1}(m)} = \frac{m}{3} \overrightarrow{H_{ijk}^n C}, \quad m = 0, 1, 2, 3,$$

где  $C$  совпадает соответственно с  $C_+, C_-$ .

Отметим, что для центра тяжести восьмигранника ( $H_{ijk}^{n+1} = C$ ) (для равномерной ортогональной сетки) вклад в функционал  $D_{\square}$  минимален (равен нулю).

Мы используем точку  $C$  для выпуклых восьмигранников криволинейной сетки. Для центра тяжести внутренней диагонали невыпуклых восьмигранников мы получаем нулевой вклад в функционал  $D_{\square}$  для направления, соответствующего внутренней диагонали восьмигранника. Рассматривать выпуклые и невыпуклые восьмигранники  $\Gamma$  необходимо, поскольку существуют сложные конфигурации областей с качеством начальной сетки, допускающей такие  $\Gamma$  и отдельные вырожденные ячейки. Отметим, что невыпуклые восьмигранники  $\Gamma$  могут возникать как при положительных, так и при отрицательных объемах угловых тетраэдров. На рис. 4 (b) приведен пример восьмигранника  $\Gamma$ , когда все восемь тетраэдров с ребрами, исходящими из узла  $i, j, k$ , имеют положительный объем. На рис. 4 (c) приведен пример невыпуклого восьмигранника  $\Gamma$  с четырьмя отрицательными объемами угловых тетраэдров. Случаи (b) и (c) могут возникать в сетках для сложных конфигураций областей, случай (c) — для сетки с вырожденными ячейками. В рассматриваемых случаях восьмигранника  $\Gamma$ , если мы выберем в качестве нового положения  $H_{ijk}^{n+1}$  узла  $H_{ijk}^n$  любую точку на отрезке  $H_{ijk}^n C$ , мы не изменим знаки восьми объемов угловых тетраэдров в узле  $H_{ijk}^{n+1}$ , и таким образом новый узел сетки будет удовлетворять необходимым условиям невырожденности в данном узле сетки (при малых смещениях — достаточным условиям невырожденности при условии, что начальная сетка была невырождена).

Обеспечение невырожденности сетки. Условия невырожденности трехмерных структурированных сеток, составленных из шестигранных линейчатых ячеек, были получены в [8, 14, 15]. Эти условия в случае взаимно однозначного отображения границы параметрической области  $P$  в границу физической области  $G$  представляют собой условия невырожденности для всех ячеек сетки. В [8, 14, 15] были получены необходимые условия, а также достаточные условия, не совпадающие с необходимыми, для невырожденности ячеек. И те, и другие условия являются условиями положительности якобиана трилинейного отображения, используемого для построения ячеек, и представляют собой 27 неравенств (для 8 вершин, 12 ребер, 6 граней и внутренней части ячеек) для объемов 8 угловых тетраэдров и 24 “специальных” тетраэдров с вершинами в вершинах ячеек. (“Специальными” мы называем тетраэдры, построенные по двум ребрам и диагонали, исходящим из рассматриваемого узла.) При проверке невырожденности сеток мы пользуемся проверкой этих 27 условий для всех ячеек сетки. В реальных расчетах сеток для некоторых конфигураций криволинейного шестигранника возможно возникновение отдельных шестигранных линейчатых ячеек, вырождающихся в другие виды многогранников: призмы, тетраэдры и пирамиды. Среди невырожденных ячеек могут возникать экзотические по форме “выкрученные” ячейки. Поэтому, помимо условий невырожденности, используется и классификация шестигранных линейчатых ячеек [12]. Тестирование начальной и оптимальной сеток на невырожденность и на выявление различных типов ячеек осуществляется согласно полученной классификации.

В процессе расчетов проверять каждый раз после перестройки очередного узла сетки выполнение 27 условий было бы крайне обременительно. Поэтому проверяются более простые условия [22], полученные при непосредственном участии автора настоящей работы. Они представляют собой условия положительности объемов десяти тетраэдров, построенных на исходящих из рассматриваемого узла ребрах (уже упомянутые восемь угловых тетраэдров) и диагоналях граней (два диагональных тетраэдра; см. величины  $\bar{k}_{000}$ ,  $\bar{k}_{111}$  из [8, 14, 15]). Эти условия являются условиями невырожденности двенадцатигранных ячеек, соответствующих восьми вершинам шестигранной ячейки и имеющих плоские грани (см. рис. 5). В [22] было показано, что в большинстве случаев сетки из шестигранных линейчатых ячеек с такими свойствами являются невырожденными.

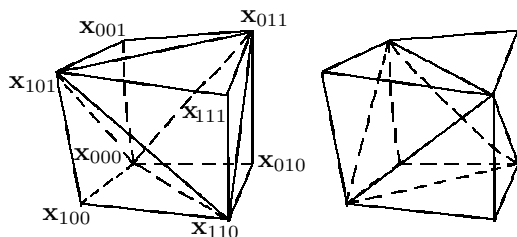


Рис. 5. Двенадцатигранники, соответствующие шестигранной ячейке.

Опишем такую проверку более подробно. Считаем, что начальная сетка из шестигранных ячеек является невырожденной. Это обеспечивает положительность объемов угловых тетраэдров, составляющих восьмигранник  $\Gamma$ , который будет невырожденным согласно теореме 3 из [8], так как является образом при кусочно-линейном отображении восьмигранника, составленного из соответствующих тетраэдров единичных кубических ячеек в вычислительной области.

Считаем также, что начальная сетка не содержит “выкрученных” шестигранных ячеек. “Выкрученные” шестигранные ячейки характеризуются наличием хотя бы одного диагонального тетраэдра с неположительным объемом. Таким образом, все 10 тетраэдров имеют положительный объем, т.е. сетка является невырожденной и как сетка, состоящая из двенадцатигранных ячеек. Для большей части ячеек в начальных сетках условия положительности объемов десяти тетраэдров выполняются.

Рассмотрим для определенности движение узла  $H_{111}^n$ . Получив новое положение  $H_{111}^{n+1}$  узла на  $n$ -й итерации, рассмотрим одну из ячеек шаблона, содержащую этот узел (см. рис. 5). Очевидно, что так как остальные узлы ячейки не двигаются, знаки объемов  $\alpha_{100}, \alpha_{001}, \alpha_{010}$  угловых тетраэдров и  $\bar{\kappa}_{000}$  диагонального тетраэдра не меняются, т.е. эти объемы являются положительными. Узел  $H_{111}^n$  двигается так, что  $\alpha_{111} > 0$ . Поэтому проверяем только знаки  $\alpha_{101}, \alpha_{011}, \alpha_{000}, \alpha_{110}$  и  $\bar{\kappa}_{111}$ . Обычно их положительность сохраняется. В случае, если эти объемы все же будут неположительными, допускается только одно деление отрезка пополам. И далее для середины отрезка снова проверяются условия для 5 тетраэдров  $\alpha_{101}, \alpha_{011}, \alpha_{000}, \alpha_{110}$  и  $\bar{\kappa}_{111}$ . Если они не выполняются, узел  $H_{ijk}^n$  не двигаем. Оптимизацию сетки в этом случае будем производить за счет других узлов. Если условия выполняются, в качестве нового узла выбираем середину отрезка  $[H_{ijk}^{n+1}, H_{ijk}^n]$ . При таком способе расчета узлов, если в начальной сетке ячейки были невырождены, то и на каждой итерации их невырожденность сохраняется. Так, во всех приведенных примерах расчетов оптимальные сетки состоят из невырожденных шестигранных ячеек, за исключением ячеек, вырождающихся в призмы вдоль ребер стыковки плоских граней. В случаях невырожденных начальных сеток рассматриваемый процесс вычислений не продуцирует вырожденных ячеек.

Отметим, что в практических расчетах сеток никогда не осуществлялось деление отрезка  $[H_{ijk}^{n+1}, H_{ijk}^n]$  пополам, т.е. рассматриваемый способ движения узлов не продуцирует вырожденных ячеек, если начальная сетка была невырождена. Отсутствию вырожденных ячеек способствует наличие у минимизируемого функционала барьерных свойств. Большинство вырожденных ячеек характеризуются неположительными значениями объемов угловых тетраэдров, представляющих собой значения якобиана трилинейного отображения, используемого для построения ячеек, в узле сетки. В случаях обращения этих значений в нуль знаменатель функционала ортогональности обращается в нуль, однако для некоторых вырожденных ячеек и числитель также может обращаться в нуль, например, когда расстояния между соседними узлами  $r_{i\pm 1, j, k}, r_{i, j\pm 1, k}, r_{i, j, k\pm 1}$  равны нулю, но в этом случае соответствующие слагаемые дискретного функционала равномерности  $D_{\Pi}$  обращаются в бесконечность, т.е. общий функционал сохраняет барьерные свойства.

Ясно, что если для одного узла мы имеем более четырех неположительных объемов угловых тетраэдров (это характеризует вырожденную самопересекающуюся сетку), то  $\Gamma$  не является восьмигранником вида, изображенного на рис. 4. Как показывают примеры расчетов сеток, предлагаемые алгоритмы допускают только единичные вырожденные ячейки с числом неположительных объемов угловых тетраэдров, не большим двух. Если в начальной сетке возникает вырожденный самопересекающийся восьмигранник  $\Gamma$ , алгоритм и соответствующая программа выявляет такие случаи. Далее расчет сетки может не производиться. Так и были организованы первоначальные варианты программы. Программа прекращала работу с выдачей сообщения о возникновении вырожденного шаблона [9]. В описываемых алгоритмах программа свою работу не прекращает, и в таких шаблонах пересчет узла не осуществляется, а расчет сетки происходит за счет оптимизации в других шаблонах.

(В двумерном случае [1] вместо восьмигранника  $\Gamma$  рассматривался четырехугольник  $\Gamma$ , а в качестве точки  $C$  — центр тяжести его внутренних диагоналей, если четырехугольник выпуклый, или одной внутренней диагонали, если четырехугольник невыпуклый.)

Тестирование восьмигранника  $\Gamma$  на выпуклость осуществляется на основе одного из определений выпуклости многогранников (с плоскими гранями), а именно, следующего: для любой грани многогранника все его вершины, за исключением вершин выбранной грани, расположены по одну сторону от плоскости грани. Численно этот факт проверяется с помощью условий положительности следующих двенадцати смешанных произведений или объемов тетраэдров из [14]:

$$[\overrightarrow{I_m J_m}, \overrightarrow{I_m I_p}, \overrightarrow{I_m K_p}], [\overrightarrow{I_m I_p}, \overrightarrow{I_m J_p}, \overrightarrow{I_m K_p}], [\overrightarrow{I_m I_p}, \overrightarrow{I_m J_m}, \overrightarrow{I_m K_m}], [\overrightarrow{I_m J_p}, \overrightarrow{I_m I_p}, \overrightarrow{I_m K_m}],$$

$$\begin{aligned} & [\overrightarrow{J_p I_m}, \overrightarrow{J_p J_m}, \overrightarrow{J_p K_p}], [\overrightarrow{J_p I_p}, \overrightarrow{J_p J_m}, \overrightarrow{J_p K_p}], [\overrightarrow{J_p J_m}, \overrightarrow{J_p I_m}, \overrightarrow{J_p K_p}], [\overrightarrow{J_p I_p}, \overrightarrow{J_p J_m}, \overrightarrow{K_m J_p}], \\ & [\overrightarrow{K_m K_p}, \overrightarrow{K_m I_m}, \overrightarrow{K_m J_m}], [\overrightarrow{K_m K_p}, \overrightarrow{K_m K_p}, \overrightarrow{K_m J_m}], [\overrightarrow{K_m I_m}, \overrightarrow{K_m K_p}, \overrightarrow{K_m J_p}], [\overrightarrow{K_m K_p}, \overrightarrow{K_m I_p}, \overrightarrow{K_m J_p}]. \end{aligned}$$

Положительность четырех смешанных произведений первой (второй, третьей) строки означает, что диагональ  $[I_m, I_p]$  ( $[J_m, J_p]$ ,  $[K_m, K_p]$ ) — внутренняя диагональ восьмигранника  $\Gamma$ .

Таким образом, при проверке выпуклости восьмигранников мы так же, как и при проверке условий невырожденности сетки, снова оперируем с объемами тетраэдров из [14], что очень удобно для организации вычислений.

Если все диагонали восьмигранника  $\Gamma$  — его внутренние диагонали, тогда восьмигранник выпуклый, если одна или две диагонали — внешние, тогда восьмигранник невыпуклый. Если восьмигранник выпуклый, тогда

$$C = C_+ = \frac{1}{6}(I_m + I_p + J_m + J_p + K_m + K_p). \quad (3.1)$$

Если внутренней является только диагональ  $[I_m, I_p]$  ( $[J_m, J_p]$ ,  $[K_m, K_p]$ ), тогда

$$C = C_- = \frac{1}{2}(I_m + I_p), \quad (C = C_- = \frac{1}{2}(J_m + J_p), \quad C = C_- = \frac{1}{2}(K_m + K_p)). \quad (3.2)$$

В случае двух внутренних диагоналей

$$C = C_- = \frac{1}{4}(I_m + I_p + J_m + J_p) \quad (3.3)$$

для  $[I_m, I_p]$  и  $[J_m, J_p]$ ,

$$C = C_- = \frac{1}{4}(I_m + I_p + K_m + K_p)$$

для  $[I_m, I_p]$  и  $[K_m, K_p]$ ,

$$C = C_- = \frac{1}{4}(J_m + J_p + K_m + K_p)$$

для  $[J_m, J_p]$  и  $[K_m, K_p]$ .

В каждом из случаев мы работаем только с теми тетраэдрами восьмигранника  $\Gamma$ , которые имеют положительные объемы.

Если для всех шаблонов восьмигранника  $\Gamma$  выпуклые и если  $H_{ijk}^{n+1} = C = C_+$ , тогда такая вычислительная процедура эквивалентна численному решению системы уравнений Лапласа вида

$$\begin{aligned} x_{1\xi_1\xi_1} + x_{1\xi_2\xi_2} + x_{1\xi_3\xi_3} &= 0, \\ x_{2\xi_1\xi_1} + x_{2\xi_2\xi_2} + x_{2\xi_3\xi_3} &= 0, \\ x_{3\xi_1\xi_1} + x_{3\xi_2\xi_2} + x_{3\xi_3\xi_3} &= 0 \end{aligned}$$

с фиксированными граничными условиями (2.5) на границе области изменения параметров. Численная процедура для этого случая — это явная схема (3.1) для решения вспомогательной нестационарной задачи для этих уравнений. Однако эта численная процедура не будет эффективной даже для простых конфигураций областей, так как она порождает вырожденные ячейки, особенно для областей с негладкой границей, имеющей острые углы или резкие перегибы границы (см. пример из [8]).

Вырождение сетки происходит потому, что уравнения Лапласа не гарантируют невырожденности решения, задающего искомое отображение (обсуждение данного вопроса см., например, в [25, 26]). Данный недостаток особенно проявляется при невыпуклых восьмигранниках  $\Gamma$ . Поэтому для невыпуклых восьмигранников  $\Gamma$  мы модифицируем (см. (3.2) и (3.3)) схему (3.1),

исключая одно или два направления или слагаемых в каждом из уравнений в зависимости от числа внутренних диагоналей  $\Gamma$ . В этом случае  $C = C_-$ . Такая модификация не позволяет нам избавиться от вырожденности, присущей начальной сетке и связанной с особенностями конфигурации области. Поэтому, если мы имеем призматические ячейки с треугольным основанием в начальной сетке (они возникают обычно на границе), то в этом же месте области  $G$  оптимальная сетка также содержит призматические ячейки. Однако если невырожденность не связана с особенностями конфигурации области, а характеризует только начальную сетку, то, как показывают эксперименты, алгоритм позволяет избавиться от вырожденных шестигранных ячеек перечисленных выше типов (см. вырожденную начальную сетку, построенную в [8] с помощью случайных чисел). Практика вычислений показывает, что предлагаемый алгоритм может улучшить начальную сетку, состоящую из невырожденных шестигранных ячеек и вырожденных шестигранных ячеек, являющихся несамопересекающимися многогранниками (либо невырожденными ячейками других видов).

Когда точка  $C$  найдена, организуем локальную оптимизационную процедуру для функционала  $D$  на множестве точек  $H_+$  или  $H_-$ . В качестве нового узла выбираем точку из указанных выше множеств, дающую функционалу  $D$  его минимальное значение. Как результат такого выбора получается новый шаблон, состоящий из невырожденных ячеек, если начальная сетка была невырожденной, или шаблон, содержащий вырожденные ячейки типов, перечисленных выше, если начальная сетка была вырожденной. Последнее допускается как исключение. Когда новый узел найден, заменяем старый узел новым и переходим к новому шаблону.

### 3.3. Вычисление дискретных функционалов

При вычислении координат внутренних узлов  $ijk$  вклад  $D_{ijk}$  в функционал  $D$  оценивается с помощью формулы

$$D_{ijk} = D_{u_{ijk}} + A_0 D_{O_{ijk}}.$$

Вклад в функционал равномерности для каждого узла  $D_{u_{ijk}}$  вычисляется как компонента соответствующей суммы (2.2).

Вклад в функционал ортогональности для каждого внутреннего узла  $D_{O_{ijk}}$  вычисляется по формуле

$$D_{O_{ijk}} = \sum_{p=1}^4 \left( \frac{1}{\sin^2 \varphi_{ij}^p} + \frac{1}{\sin^2 \varphi_{ik}^p} + \frac{1}{\sin^2 \varphi_{jk}^p} \right) + \sum_{p=1}^8 \left( \frac{1}{\sin^2 \varphi_i^p} + \frac{1}{\sin^2 \varphi_j^p} + \frac{1}{\sin^2 \varphi_k^p} \right),$$

где углы  $\varphi_{ij}^p, \varphi_{ik}^p, \varphi_{jk}^p, \varphi_i^p, \varphi_j^p, \varphi_k^p$  показаны на рис. 6, а углы  $\varphi_{ij}^p, \varphi_{ik}^p, \varphi_{jk}^p$  также введены в (2.3).

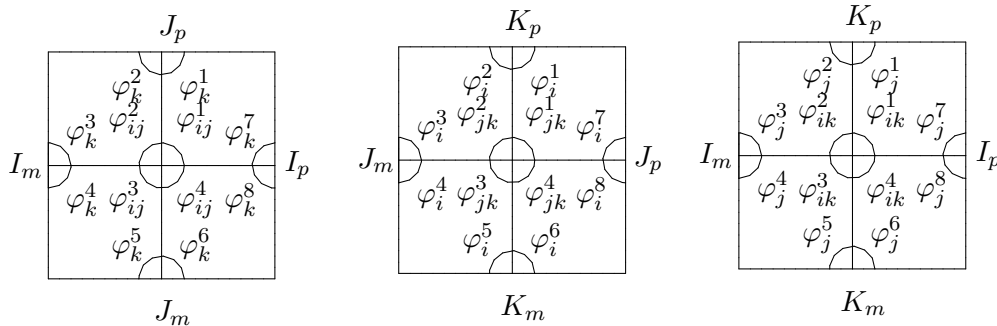


Рис. 6. Схема для определения углов между координатными линиями.

Далее, мы будем использовать краткое обозначение  $\varphi$  для указанных углов.

Если  $|\sin \varphi| \leq 0.01$ , тогда мы устанавливаем барьер, заменяя соответствующее слагаемое величиной  $10^4$ , т. е. считаем, что

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = 10^4.$$

После вычисления всех узлов на каждой итерации мы вычисляем общий функционал  $D$  по формулам (2.1)–(2.3). Здесь мы также используем введенный выше барьер.

Тем самым мы не позволяем узлам двигаться по направлению к точкам, в которых якобиан равен нулю. Это препятствует возникновению вырожденных ячеек.

### 3.4. Порядок вычислений

Первоначально в [9] процесс расчета узлов был организован в следующем порядке. Сначала менялся индекс  $i$  в порядке возрастания, затем  $j$  и  $k$  аналогичным образом. После того как рассчитывался очередной узел, его координаты в общем массиве узлов заменялись новыми. Отметим, что при такой организации вычислений нельзя добиться полного соответствия между симметрией сетки и симметрией области, даже если начальная сетка была симметричной. Для обеспечения симметричного счета на каждой итерации координаты узлов в общем массиве нужно заменять на новые только после расчета всех узлов. Однако такой порядок может оказаться неудачным, особенно при расчете адаптивных сеток и сеток, сильно отличающихся по размерам ячеек, так как перестройка сетки на каждой итерации осуществляется на основе положения узлов для предыдущей итерации и не фиксирует изменения в положении узлов на данной итерации. Следовательно, при таком порядке возможно возникновение вырожденных ячеек.

Как показал опыт расчетов сеток в двумерном случае [1], более эффективен следующий порядок расчетов. В двумерном случае вычисление узлов осуществлялось против часовой стрелки по окаймляющим линиям в порядке удаления от границы. В трехмерном случае для достижения желаемой симметрии сетки вычисления должны быть организованы по оболочкам или окаймляющим поверхностям. Нулевой окаймляющей поверхностью является граница, первая окаймляющая поверхность образована узлами, соседними с границей, и т.д. На окаймляющих поверхностях вычисления могут быть организованы в узлах с постоянным индексом  $i$ , далее  $j$  и затем  $k$ . На каждой грани окаймляющей поверхности вычисления организуются по окаймляющим линиям против часовой стрелки в направлении удаления от границы грани (см. рис. 7, окаймляющие линии на гранях  $i = 0$  и  $i = N$ ). На каждой итерации расчет сетки начинается с вычисления внутренних узлов, которое осуществляется с первой окаймляющей поверхности и далее по окаймляющим поверхностям в порядке удаления от границы. Затем рассчитываются граничные узлы.

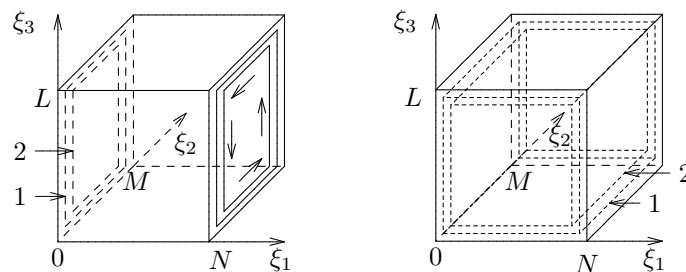


Рис. 7. Окаймляющие линии и поверхности.

### 3.5. Вычисление граничных узлов

Мы описываем рассматриваемые алгоритмы для случая, когда граница физической области  $G$  задана линейчатыми поверхностями граней начальной сетки. Выбор такого способа задания границы физической области был определен требованиями алгоритма глобальной перестройки сеток [9]. Так как граница области оказалась сотканной из кусочков различных линейчатых поверхностей, для данных алгоритмов оказалось более удобным не применять минимизацию непрерывного функционала общепринятыми средствами вариационного исчисления, как в [28], а организовать специальные алгоритмы минимизации дискретного функционала  $D$  на границах областей.

*Алгоритм 1. Фиксированные граничные узлы.* В этом алгоритме узлы на границе всей области либо ее подобласти заданы и фиксированы. Положение граничных узлов задано положением соответствующих узлов начальной сетки и не меняется от итерации к итерации.

*Алгоритм 2. Свободные граничные узлы.* В этом алгоритме узлы на границе области на каждой итерации находятся из условия минимума функционала  $D$ . Граница области  $G$  задана распределением граничных узлов начальной сетки и граничная поверхность определяется как поверхность, полученная с помощью линейчатых поверхностей соответствующих граней граничных ячеек начальной сетки. Для того чтобы строить такую поверхность на каждой итерации, мы храним координаты узлов начальной сетки в трех двумерных массивах для каждой из шести граней криволинейного шестигранника  $G$ . Для каждой из граней мы также вводим два двумерных массива параметров  $p$  и  $q$ , определяющих координаты узлов на каждой итерации по начальной параметризации грани, а именно, параметризации поверхности, сотканной из линейчатых граней ячеек начальной сетки.

Например, для грани  $i = 0$  мы храним три массива координат граничных узлов  $x_{i_l}^0(0, j, k)$  начальной сетки, показанных на рис. 8 (а), и массивы параметров  $p_{j,k}^n$  и  $q_{j,k}^n$ , соответствующих координатам узлов, лежащих на поверхности для текущей  $n$ -й итерации (см. рис. 8 (б)).

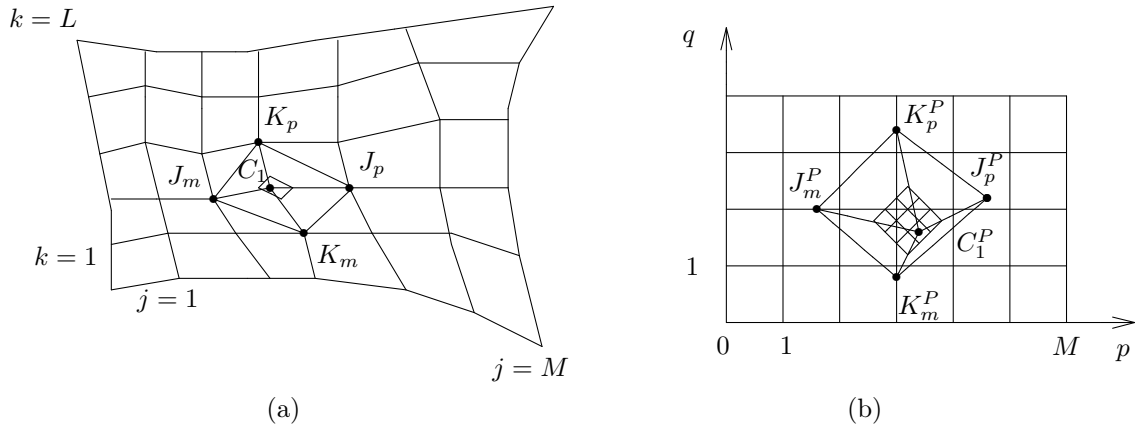


Рис. 8. Способ интерполяции для определения узлов грани: (а) физическая область и (б) пространство параметров.

При задании поверхности этой грани используем параметризацию вида

$$x_{i_l} = S_{i_l}(p, q) = x_{i_l}^0(0, p, q), \quad i_l = 1, 2, 3,$$

при значениях параметров  $p_{j,k}^0 = j$ ,  $q_{j,k}^0 = k$  ( $j = 0, 1, \dots, M$ ;  $k = 0, 1, \dots, L$ ) и соответствующих значениях координат  $x_{i_l} = S_{i_l}(j, k) = x_{i_l}^0(0, j, k)$ . (Здесь и далее используются обозначения  $N = I_1$ ,  $M = I_2$ ,  $L = I_3$ .)

Для того чтобы определить положение граничных узлов сетки, используем следующую интерполяционную технику. Восполняем функции, задающие поверхности, с помощью линейчатых поверхностей граней начальной сетки.

Предположим, что мы нашли положение узлов  $H_{1jk}^{n+1}$  на  $n$ -й итерации. Для того чтобы найти узел  $H_{0jk}^{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, M-1$ ,  $k = 1, \dots, L-1$ , будем менять параметры  $p$  и  $q$  и находить для них точки на поверхности, сотканной из линейчатых поверхностей граней ячеек начальной сетки. Таким образом, будем конструировать допустимое множество граничных узлов для минимизации функционала  $D$ . В качестве нового узла  $H_{0jk}^{n+1}$  будем выбирать точку из допустимого множества, дающую функционалу  $D$  минимальное значение. Будем использовать следующий алгоритм. Аналогично рис. 4 определим точки (см. рис. 8 (а)):

$$C_1 = H_{0jk}^n, \quad J_m = H_{0j-1k}, \quad J_p = H_{0j+1k}, \quad K_m = H_{0jk-1}, \quad K_p = H_{0jk+1}. \quad (3.4)$$

Здесь  $J_m$ ,  $J_p$ ,  $K_m$ ,  $K_p$  относятся к  $n$ -й или  $(n+1)$ -й итерации, это зависит от того, сосчитан данный узел или нет. Указанные в (3.4) точки принадлежат грани  $i = 0$ . Соответствующие точки в пространстве параметров (см. рис. 8 (b)) обозначаются так же, но с верхним индексом  $P$ . Они определяются следующим образом:

$$C_1^P = (p_{jk}^n, q_{jk}^n), J_m^P = (p_{j-1k}^n, q_{j-1k}^n), J_p^P = (p_{j+1k}^n, q_{j+1k}^n), K_m^P = (p_{jk-1}^n, q_{jk-1}^n), K_p^P = (p_{jk+1}^n, q_{jk+1}^n).$$

Определим в пространстве параметров для  $l = 3$  следующие четыре точки:

$$\begin{aligned} J_{m-}^P &= C_1^P - (C_1^P - J_m^P)/l, & J_{p-}^P &= C_1^P + (J_p^P - C_1^P)/l, \\ K_{m-}^P &= C_1^P - (C_1^P - K_m^P)/l, & K_{p-}^P &= C_1^P + (K_p^P - C_1^P)/l, \end{aligned}$$

содержащиеся в четырехугольнике  $J_m^P K_p^P J_p^P K_m^P$  (см. рис. 8 (b)). В четырехугольнике с вершинами в новых точках  $J_{m-}^P, K_{p-}^P, J_{p-}^P, K_{m-}^P$  рассматриваем  $l_1 \times l_1$  точек

$$\begin{aligned} P_- &= (p_-, q_-) = J_{m-}^P + (K_{m-}^P - J_{m-}^P)\alpha \\ &+ (K_{p-}^P - J_{m-}^P)\beta + (J_{p-}^P - K_{m-}^P - K_{p-}^P + J_{m-}^P)\alpha\beta \\ &= J_{m-}^P(1-\alpha)(1-\beta) + K_{m-}^P\alpha(1-\beta) + K_{p-}^P\beta(1-\alpha) + J_{p-}^P\alpha\beta, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = h(i-1), \quad \beta = h(j-1), \quad h = 1/(l_1-1), \quad i, j = 1, 2, \dots, l_1.$$

(В расчетах  $l_1 = 4$ .) Когда найдем точки в пространстве параметров, определим соответствующие точки на поверхности грани  $i = 0$  следующим образом. Сначала для каждой из  $l_1 \times l_1$  точек вычисляем параметры

$$j_- = [p_-], \quad k_- = [q_-],$$

где  $[p_-], [q_-]$  — целые части от  $p_-, q_-$ . Затем находим узлы начальной сетки

$$X_{00} = H_{0j_-k_-}^0, \quad X_{01} = H_{0j_-k_-+1}^0, \quad X_{10} = H_{0j_-+1k_-}^0, \quad X_{11} = H_{0j_-+1k_-+1}^0.$$

Тем самым для каждой из  $l_1 \times l_1$  точек, соответствующих  $[p_-], [q_-]$ , на рассматриваемой поверхности криволинейного шестигранника  $G$  мы находим грань ячейки (ее вершины совпадают с  $X_{00}, X_{01}, X_{10}, X_{11}$ ), содержащую эту точку.

Затем на поверхности грани находим точки

$$\begin{aligned} C_2 &= X_{00} + (X_{10} - X_{00})(p_- - j_-) + (X_{01} - X_{00})(q_- - k_-) \\ &+ (X_{11} - X_{01} - X_{10} - X_{00})(p_- - j_-)(q_- - k_-). \end{aligned}$$



Среди всех точек  $C_2$  выбираем точку, которая дает минимальный вклад  $D_{0jk}$  в функционал  $D$ , в качестве нового граничного узла  $H_{0jk}^{n+1}$ , а соответствующие значения параметров — в качестве новых значений  $p_{jk}^{n+1}, q_{jk}^{n+1}$ , которые храним в массиве параметров до следующего пересчета точки. Расстояния между узлами и углы между координатными линиями, используемые при вычислении вклада в функционал  $D$ , показаны на рис. 6, 9(b), 10.

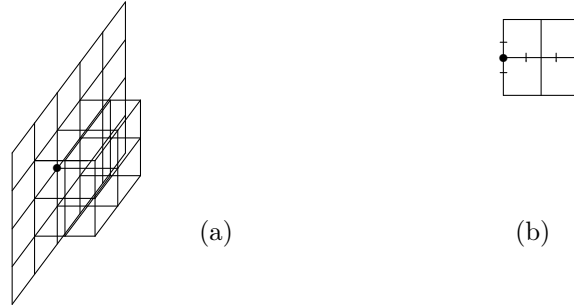


Рис. 9. (a) основной шаблон для грани  $i = 0$ , (b) расстояния между узлами для  $D_{0jk}$  по одному из направлений.

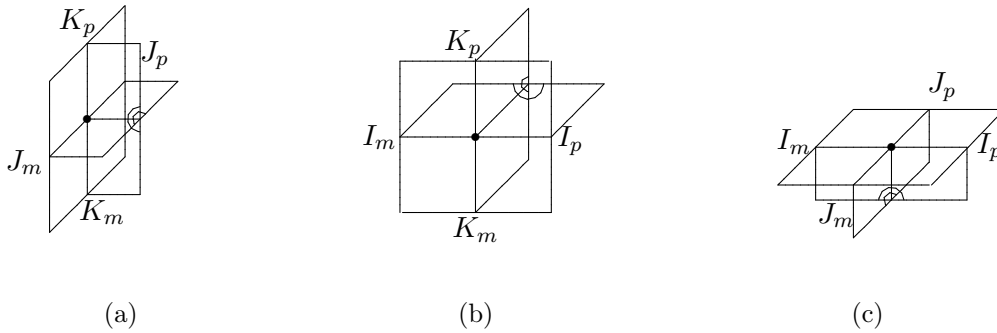


Рис. 10. Углы между координатными линиями: (a) для грани  $i = 0$ ; (b) для грани  $j = 0$  и (c) для грани  $k = 0$ .

Выше мы описали локальную процедуру минимизации функционала  $D$  на гранях (исключая ребра).

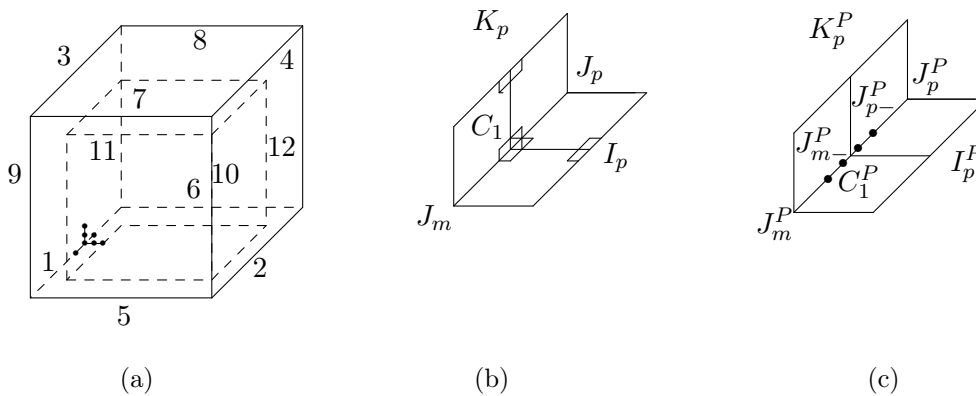


Рис. 11. Алгоритм для ребра  $i = 0, k = 0$ : (a) расстояния, (b) углы и (c) точки  $P_-$ .

Аналогичная минимизация функционала  $D$  организуется на ребрах, пронумерованных от 1 до 12. Опишем эту минимизацию на ребре  $i = 0$ ,  $k = 0$ , обозначенном номером 1 (см. рис. 11 (а)). Предполагаем, что на  $n$ -й итерации внутренние узлы на гранях вычислены. Определим следующие точки:

$$C_1 = H_{0j0}, \quad J_m = H_{0j-10}, \quad J_p = H_{0j+10}.$$

Соответствующие точки в пространстве параметров определяются следующим образом:

$$C_1^P = p_{j0}^n, \quad J_m^P = p_{j-10}^n, \quad J_p^P = p_{j+10}^n.$$

Снова в пространстве параметров определяем точки для  $l = 3$

$$J_{m-}^P = C_1^P - (C_1^P - J_m^P)/l, \quad J_{p-}^P = C_1^P + (J_p^P - C_1^P)/l,$$

находящиеся на ребре  $i = 0$ ,  $k = 0$  между точками  $J_m^P$  и  $J_p^P$  (см. рис. 11 (b), (c)).

На отрезке  $[J_{m-}^P, J_{p-}^P]$  мы рассматриваем  $l_1$  точек для  $l_1 = 4$  (рис. 11 (c)):

$$P_- = (p_-, q_-) = (p_-, 0) = J_{m-}^P(1 - \alpha) + J_{p-}^P\alpha, \quad \text{где } \alpha = h(j - 1), \quad h = 1/(l_1 - 1), \quad j = 1, 2, 3, l_1.$$

После того как мы нашли точки в пространстве параметров, находим соответствующие точки на образе ребра  $i = 0$ ,  $k = 0$  в физическом пространстве следующим образом. Сначала для каждой из  $l_1$  точек находим параметры

$$j_- = [p_-],$$

где  $[p_-]$  — целая часть числа  $p_-$ . Затем определяем узлы начальной сетки

$$X_{00} = H_{0j-0}^0, \quad X_{10} = H_{0j-+10}^0.$$

Тем самым для каждой точки

$$C_2 = X_{00} + (X_{10} - X_{00})(p_- - j_-)$$

из  $l_1$  точек, соответствующих  $[p_-]$ , на рассматриваемом ребре криволинейного шестигранника  $G$  находим ребра ячеек, содержащие внутри себя эту точку. Среди таких точек  $C_2$  выбираем ту точку, которая дает минимальный вклад  $D_{0j0}$  в функционал  $D$  и выбираем ее в качестве нового узла  $H_{0j0}^{n+1}$ , а соответствующее значение параметров — как  $p_{j0}^{n+1}$  для грани  $i = 0$  и  $q_{0j}^{n+1}$  для грани  $k = 0$ . Точки  $P_-$ , расстояния между узлами и углы между координатными линиями, которые используются при вычислении функционала  $D$ , показаны на рис. 11 для рассматриваемого ребра. На других ребрах алгоритм аналогичен.

Таким образом, на каждой итерации мы находим внутренние узлы области, затем внутренние узлы на гранях и затем узлы на ребрах с помощью описанной выше процедуры.

Отметим, что при нахождении узлов на ребрах вместо минимизации функционала  $D$  можно осуществлять минимизацию функционала  $D_{\square}$ , т.е. расставлять узлы на ребрах только из принципа равномерности. Такая расстановка оказалась более удачной для построения сеток требуемого качества и реализована в описываемых алгоритмах. Необходимо отметить, что в вопросе расстановки узлов на границе области допускается большой произвол. Например, при расстановке узлов на ребрах можно придерживаться равномерной расстановки по длине дуги ребра, аналогично на гранях можно рассматривать реализацию критериев равномерности и ортогональности для поверхности грани, а не для трехмерной сетки и т.д. Возможны и другие способы расстановки.

*Алгоритм 3. Ортогональность координатных линий граням.* В этом алгоритме на каждой итерации рассчитываются сначала все внутренние узлы, затем для каждого приграничного узла (соседнего с граничным) ищется соответствующий граничный узел из условия ортогональности рассматриваемой координатной линии и соответствующей грани, при этом в качестве

граничного узла выбирается та точка на грани, которая дает наименьшее расстояние от данного приграничного узла до поверхности грани. Точки на поверхности грани, полученной из линейчатых поверхностей начальной сетки, перебираются по специальному алгоритму.

Предположим, что на  $n$ -й итерации мы нашли узлы  $H_{1jk}^{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, M-1$ ,  $k = 1, \dots, L-1$ , затем мы определим положение узлов  $H_{0jk}^{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, M-1$ ,  $k = 1, \dots, L-1$  на грани  $i = 0$  из условий ортогональности по следующему алгоритму (см. рис. 12).

Для грани  $i = 0$  криволинейного шестигранника  $G$  перебираем все грани ячеек начальной сетки с узлами

$$X_{00} = H_{0j_1k_1}^0, \quad X_{01} = H_{0j_1k_1+1}^0, \quad X_{10} = H_{0j_1+1k_1}^0, \quad X_{11} = H_{0j_1+1k_1+1}^0,$$

где  $j_1 = 0, 1, \dots, M-1$ ,  $k_1 = 0, 1, \dots, L-1$ . На каждой такой грани перебираем точки

$$X_{p_lq_l} = (1 - p_l)(X_{00}(1 - q_l) + X_{01}q_l) + p_l(X_{10}(1 - q_l) + X_{11}q_l)$$

при следующих значениях параметров  $h = 1/(l_- - 1)$ ,  $p_l = h(l - 1)$ ,  $q_l = h(l - 1)$ ,  $l = 1, \dots, l_-$  (в тестовых расчетах  $l_- = 21$ ), и в качестве узла  $H_{0jk}^{n+1}$  выбираем такую точку  $X_{p_lq_l}$ , которая дает минимальное значение  $|X_{p_lq_l}, H_{1jk}^{n+1}|$ . На других гранях криволинейного шестигранника  $G$  для поиска узлов сетки организуется аналогичный алгоритм.

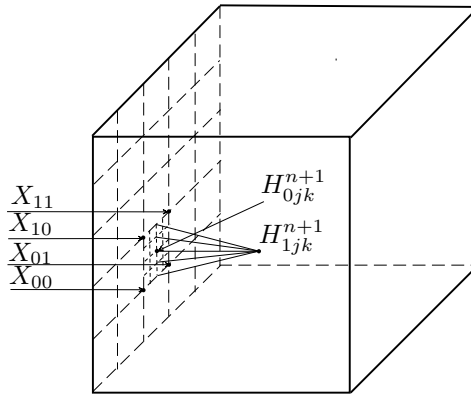


Рис. 12. Алгоритм 3 для грани  $i = 0$ .

Узлы на ребрах находятся по алгоритму 2 минимизации функционала  $D$  на ребрах.

*Алгоритм 4. Ортогональность координатных линий граням и ребрам.* Узлы на гранях (исключая узлы, принадлежащие ребрам) находятся по алгоритму 3. Узлы на ребрах находятся по алгоритму, подобному алгоритму 3, из условия ортогональности ребрам координатных линий, лежащих на гранях.

Предположим, на каждой грани мы нашли внутренние узлы. Затем мы рассматриваем узлы  $H_{ijk}^{n+1}$ , лежащие на соседних к ребрам координатных линиях

$$i = 0, j = 1, \quad i = 0, j = M - 1, \quad i = N, j = 1, \quad i = N, j = M - 1,$$

$$i = 1, k = 0, \quad i = N - 1, k = 0, \quad i = 1, k = L, \quad i = N - 1, k = L,$$

$$j = 1, k = 0, \quad j = M - 1, k = 0, \quad j = 1, k = L, \quad j = M - 1, k = L,$$

показанных на рис. 13.

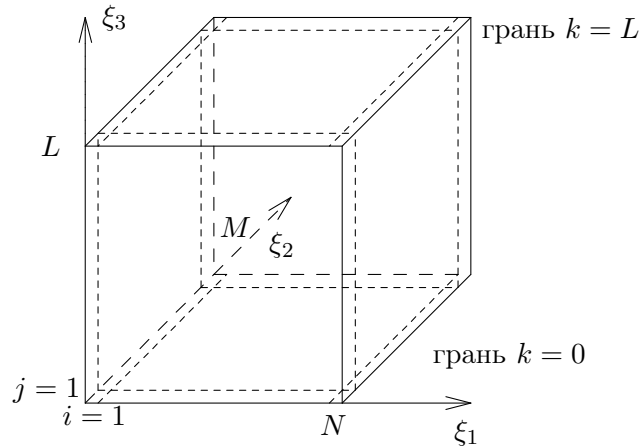


Рис. 13. Координатные линии из алгоритма 4.

Используя узлы  $H_{ijk}^{n+1}$ , лежащие на указанных координатных линиях, находим узлы на соответствующих ребрах по следующему алгоритму.

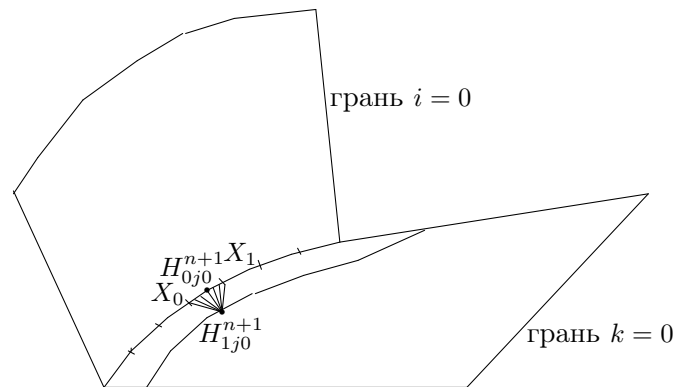
Рассмотрим линию  $i = 1, k = 0$  и узлы  $H_{1j0}^{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, M - 1$  (см. рис. 14). Для каждого узла  $H_{1j0}^{n+1}$  узел  $H_{0j0}^{n+1}$  находится из условия ортогональности соответствующей координатной линии  $j = j_1$ ,  $j_1 = 1, \dots, M - 1$ ,  $k = 0$  ребру  $i = 0, k = 0$ . Указанное условие ортогональности будет выполнено, если мы выберем узел  $H_{0j0}^{n+1}$  как точку на ребре  $i = 0, k = 0$ , дающую минимальное значение  $|H_{1j0}^{n+1}, H_{0j0}^{n+1}|$ . Мы находим эту точку перебором точек на ребре. Сначала перебираем ребра ячеек начальной сетки. Выпишем их конечные и начальные точки

$$X_0 = H_{0j0}^0, \quad X_1 = H_{0j+10}^0, \quad j = 0, \dots, M - 1,$$

и затем на каждом ребре ячейки перебираем точки

$$X_{q_l} = X_0(1 - q_l) + X_1 q_l$$

при следующих значениях параметров  $h = 1/(l_- - 1)$ ,  $q_l = h(l - 1)$ ,  $l = 1, \dots, l_-$  (в тестовых примерах  $l_- = 21$ ), и в качестве узла  $H_{0j0}^{n+1}$  выбираем точку  $X_{q_l}$ , дающую минимальное значение  $|X_{q_l}, H_{1j0}^{n+1}|$ . Такой алгоритм организуется на всех ребрах криволинейного шестигранника  $G$ .

Рис. 14. Алгоритм 4 для ребра  $i = 0$ ,  $k = 0$ .

Алгоритмы 3 и 4 — также примеры алгоритмов со свободными узлами на границе области  $G$  (с фиксированными наклонами координатных линий к границе). В созданной программе (алгоритмы 3 и 4) узлы на границе пересчитываются только на каждой пятой итерации. Отметим также, что условие ортогональности удовлетворяется не точно, а приближенно. Это означает, что угол между ребром или гранью и координатной линией в общем случае близок к  $\pi/2$ . Он может быть равен  $\pi/2$ , если выбранная точка  $H_{0j0}^{n+1}$  на ребре (грани), дающая минимальное значение  $|H_{1j0}^{n+1}, H_{0j0}^{n+1}|$ , совпадает с точкой, дающей наикратчайшее расстояние до ребра (грани).

*Алгоритм 5. Расчет узлов, выбранных пользователем.* Чтобы организовать расчет только выбранных узлов, вводим трехмерный массив индексов  $I(i, j, k)$ . Если  $I(i, j, k) = 1$ , то узел  $i, j, k$  ни на какой итерации не перестраивается; если  $I(i, j, k) = 0, 2$  или  $3$ , то узел  $i, j, k$  перестраивается из условия минимума функционала, из условия ортогональности координатных линий границе или из условия гладкой стыковки координатных линий на ребрах, соответственно. Для указанных выше алгоритмов обеспечивается стандартное заполнение данных массивов. Стандартное заполнение массивов определяется следующим образом:

$$I(i, j, k) = 0, 2, 3 \quad (i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M; k = 0, \dots, L)$$

для свободных узлов (алгоритмы 2–4, 6) и для фиксированных узлов (алгоритм 1);

$$I(i, j, k) = 1 \quad (i = 0, N; j = 0, \dots, M; k = 0, \dots, L)$$

для левой и правой границ прямоугольного параллелепипеда  $P$ ;

$$I(i, j, k) = 1 \quad (i = 0, \dots, N; j = 0, M; k = 0, \dots, L)$$

для передней и задней границы и

$$I(i, j, k) = 1 \quad (i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M; k = 0, L)$$

для верхней и нижней. Для выбора стандартного заполнения или случая заполнения массива пользователем должен быть задан еще один параметр, который определяется равным 0 для стандартного заполнения массива и 1 для случая заполнения массива пользователем. Алгоритм 5 позволяет фиксировать изломы границ областей вращения указанием соответствующей точки на образующей кривой, а также узлы на плоских гранях.

*Алгоритм 6. Условие гладкой стыковки на ребрах, лежащих в одной плоскости.* К созданию этого алгоритма привели особенности конфигураций рассматриваемых областей, а именно то, что несколько граней области  $G$  лежат в одной плоскости (в этом случае на ребрах — отрезках прямых, лежащих в одной плоскости, нарушается невырожденность якобиана отображения для построения сетки).

Узлы сетки, лежащие на плоских гранях (см., например, рис. 19), можно рассматривать как узлы, образующие двумерные сетки, лежащие в одной плоскости и стыкующиеся из узла в узел по ребрам трехмерной области. При построении стыкующихся двумерных сеток часто рассматривают условия гладкой стыковки координатных линий.

Смоделировать такую стыковку в некоторых случаях можно с помощью условия ортогональности координатных линий указанным ребрам (ср. фрагменты сеток на рис. 23). Такая возможность реализована в алгоритме 4 (ортогональность удовлетворяется приближенно). Поэтому условия гладкой стыковки были опробованы с использованием алгоритма 4 (см. рис. 21). Затем был предложен алгоритм 6. Перейдем к его краткому описанию.

*Нахождение координат узлов на ребрах.* Пусть две грани стыкуются по ребру  $[P_3, P_4]$  (см. рис. 15).

В процессе расчета на каждой итерации сначала вычисляются внутренние узлы сетки, затем — внутренние узлы на гранях, а затем — узлы на ребрах. Пусть мы уже определили внутренние узлы на гранях. Выделим приграничные к ребрам узлы на рис. 15. Для того чтобы определить узлы на ребрах из условий гладкой стыковки координатных линий, необходимо найти точки пересечения ребра и прямых линий, соединяющих приграничные узлы на стыкующихся гранях. Пусть  $P_1, P_2$  — любые два таких приграничных узла.

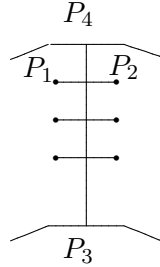


Рис. 15. Стыковка граней, лежащих в одной плоскости.

Необходимо найти точку пересечения прямых  $(P_1, P_2)$  и  $(P_3, P_4)$ . Пусть каждая из точек  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) имеет координаты  $(x_i, y_i, z_i)$ , а отрезки прямых  $(P_1, P_2)$  и  $(P_3, P_4)$  заданы параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)t, & x &= x_3 + (x_4 - x_3)p, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)t, & y &= y_3 + (y_4 - y_3)p, \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)t, & z &= z_3 + (z_4 - z_3)p, \end{aligned}$$

где  $t, p \in [0, 1]$ .

Отрезки прямых пересекаются, если найдутся такие значения параметров  $t, p \in [0, 1]$ , при которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)t - (x_4 - x_3)p &= x_3 - x_1, \\ (y_2 - y_1)t - (y_4 - y_3)p &= y_3 - y_1, \\ (z_2 - z_1)t - (z_4 - z_3)p &= z_3 - z_1. \end{aligned}$$

Поскольку расположение прямых в пространстве может быть произвольным, возможны следующие случаи.

*Случай 1.* Координаты точек удовлетворяют условию

$$\Delta_1 = (x_2 - x_1)(y_4 - y_3) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_3) \neq 0. \quad (3.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} p &= (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) / \Delta_1, \\ t &= (x_3 - x_1)(y_4 - y_3) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_3) / \Delta_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

При этом прямые пересекаются, если

$$(z_2 - z_1)t - (z_4 - z_3)p = z_3 - z_1.$$

Случай 2. Координаты точек удовлетворяют условиям

$$(x_2 - x_1)(y_4 - y_3) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_3) = 0,$$

$$(x_2 - x_1)(z_4 - z_3) - (z_2 - z_1)(x_4 - x_3) \neq 0.$$

Тогда при вычислении параметров  $t, p$  в формулах (3.5), (3.6) заменяем  $y_4 - y_3$  на  $z_4 - z_3$ ,  $y_2 - y_1$  на  $z_2 - z_1$ , а  $y_3 - y_1$  на  $z_2 - z_1$ . При этом отрезки пересекаются, если

$$(y_2 - y_1)t - (y_4 - y_3)p = y_3 - y_1.$$

Случай 3. Координаты точек удовлетворяют условиям

$$(x_2 - x_1)(y_4 - y_3) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_3) = 0,$$

$$(x_2 - x_1)(z_4 - z_3) - (z_2 - z_1)(x_4 - x_3) = 0,$$

$$(y_2 - y_1)(z_4 - z_3) - (z_2 - z_1)(y_4 - y_3) \neq 0.$$

При вычислении параметров  $t, p$  в формулах (3.5), (3.6) заменяем  $x_2 - x_1$  на  $y_2 - y_1$ ,  $x_4 - x_3$  на  $y_4 - y_3$ ,  $y_2 - y_1$  на  $z_2 - z_1$ ,  $y_4 - y_3$  на  $z_4 - z_3$ ,  $x_3 - x_1$  на  $y_3 - y_1$ ,  $y_3 - y_1$  на  $z_3 - z_1$ . Прямые пересекаются, если

$$(x_2 - x_1)t - (x_4 - x_3)p = x_3 - x_1.$$

Случай 4. Координаты точек удовлетворяют условиям

$$(x_2 - x_1)(y_4 - y_3) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_3) = 0,$$

$$(x_2 - x_1)(z_4 - z_3) - (z_2 - z_1)(x_4 - x_3) = 0,$$

$$(y_2 - y_1)(z_4 - z_3) - (z_2 - z_1)(y_4 - y_3) = 0.$$

В этом случае прямые не пересекаются.

*Нахождение значений параметров (в параметризации граней) для задания узлов на ребрах.*

Каждому узлу на ребрах соответствуют свои значения параметров. Отметим, что для всех узлов на одном ребре один из двух параметров принимает одно и то же значение (0,  $N$ ,  $M$  или  $L$ ), а другой различные. Опишем алгоритм нахождения второго параметра. Отметим, что ребра — это отрезки прямых. Пусть мы рассматриваем какой-либо узел  $X$  на ребре  $P_3, P_4$  (см. рис. 16).

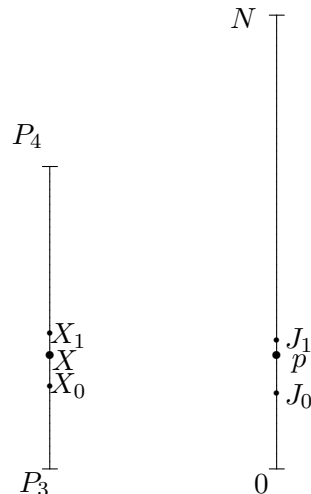


Рис. 16. Узлы на грани и соответствующие значения параметров.

Определим отрезок начальной сетки (обозначим его  $[X_0, X_1]$ ), которому принадлежит данный узел. Пусть узлу  $X_0$  ( $X_1$ ) соответствует значение параметра  $p_{J_0} = J_0$  ( $p_{J_1} = J_1$ ), а  $J_1 - J_0 = 1$ . Пусть  $d$  — расстояние между узлами  $X_0, X_1$  ( $d = |X_0, X_1|$ ), а  $d_0$  — расстояние между узлами  $X_0, X$  ( $d_0 = |X_0, X|$ ). Тогда значение параметра, соответствующее узлу  $X$ , находится по формуле:

$$p = p_{J_0} + (p_{J_1} - p_{J_0})d_0/d = p_{J_0} + d_0/d.$$

Если  $X$  не принадлежит ни одному из интервалов сетки ( $J_1$  больше  $N$ ,  $M$  или  $L$  в зависимости от ребра), то расчет узлов на данном ребре должен осуществляться другим способом и алгоритм 6 был выбран пользователем ошибочно.

### 3.6. Начальные сетки

Рассматриваемые конструкции минимизируемых функционалов определены только для невырожденных сеток. Для вырожденных сеток, когда якобиан искомого преобразования  $J$  обращается в нуль, функционал  $I$  (2.4) обращается в бесконечность.

Дискретный функционал (формулы (2.1)–(2.3)) не содержит напрямую дискретных аналогов якобиана искомого отображения, в данном случае объемов угловых тетраэдров, однако синусы углов  $\sin \varphi_{ij}^p, \sin \varphi_{ik}^p, \sin \varphi_{jk}^p$  между координатными линиями выражаются через эти значения, так как объем тетраэдра равен одной трети произведения площади основания на высоту тетраэдра, а площадь основания выражается через синусы углов. Таким образом, дискретный функционал тоже предполагает невырожденность сеток. Выше мы рассмотрели влияние функционала ортогональности на значения минимизируемого функционала  $D$ . Отметим, что функционал равномерности тоже влияет на значения функционала  $D$  и предотвращает вырождение сетки, возникающее в случае “слипания” узлов. В данном случае  $D_{\text{н}}$  (а значит и  $D$ ) будет обращаться в бесконечность, если хотя бы одно из расстояний между узлами  $r_{i\pm 1, j, k}, r_{i, j\pm 1, k}, r_{i, j, k\pm 1}$  в знаменателях (а значит, и дискретный аналог якобиана) будет обращаться в 0.

Таким образом, начальная сетка должна быть невырожденной.

Однако для областей вращения возникают конфигурации областей, когда не удастся построить невырожденную начальную сетку, как, впрочем, и оптимальную из невырожденных шестигранных линейчатых ячеек. В этом случае условие невырожденности ячеек как шестигранных является слишком сильным, и для вычисления дискретных функционалов используется введенный в разд. 3.3 барьер.

Как исключение в начальных сетках допускается наличие нескольких вырожденных ячеек, характеризуемых максимум двумя неположительными значениями якобиана трилинейного отображения в вершинах ячеек.

Возможны случаи вырождения линейчатых шестигранных ячеек в другие виды многогранников, связанные (а) и не связанные (б) с конфигурацией расчетной области.

Случаи (а) и (б) уже были представлены в [8]: случай (а) — сеткой, построенной Т.Н. Брониной, случай (б) — начальными сетками, построенными с помощью случайных чисел.

Начальная сетка, помимо удовлетворения указанным выше требованиям невырожденности, должна хорошо аппроксимировать поверхность физической области  $G$  — для этого следует выбрать достаточное число узлов в начальной сетке и учесть критерий близости сетки к равномерной.

## 4. Примеры расчетов

**Пример 1.** “Оболочка”. На рис. 17 приведены примеры оптимизации сетки с числом узлов  $31 \times 31 \times 3$  при  $A_0 = 0.3$ . Очевидно, что начальную сетку (см. рис. 17) для большей эффективности алгоритма следует строить симметричной и симметрии должны соответствовать симметриям области.



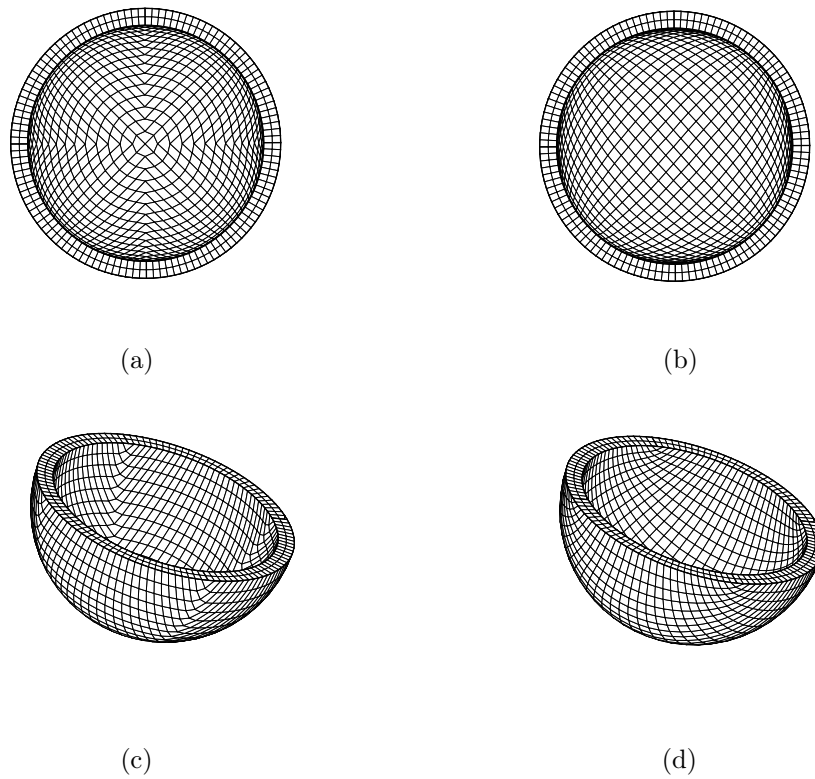


Рис. 17. Рисунки сеток: (a), (c) начальная сетка; (b), (d) оптимальная сетка.

Число итераций при оптимизации сетки на рис. 17 равно 21.

На рис. 17 узлы на плоских гранях фиксированы (используется алгоритм 1), на других гранях узлы свободны (используется алгоритм 2). Таким образом, если начальная сетка на плоских гранях является удовлетворительной по качеству, то для расчета сеток следует выбирать алгоритм 5.

При тестировании сетки на рис. 17 на невырожденность программа оптимизации сеток сообщает, что среди 1800 ячеек восемь являются вырожденными — эти ячейки расположены вдоль ребер на плоских гранях и вырождаются в треугольные призмы.

Результаты тестирования сеток по критериям качества следующие. Для начальной сетки на рис. 17  $D_{\text{н}} = 30.249$ ,  $D_{\text{о}} = 32450.0$ , отношение максимального и минимального по всей области линейного размера ячеек равно 3.23. Для оптимальной сетки  $D_{\text{н}} = 86.27$ ,  $D_{\text{о}} = 30910.5$ , отношение максимального и минимального по всей области линейного размера ячеек равно 3.69.

**Пример 2.** “Матрешка”. В итоге исследований расчетов примера 1 была выбрана технология расчета оптимальных сеток в областях с особенностями (когда несколько граней шестигранника находятся в одной плоскости), а именно, на плоских гранях при минимизации функционала избирался способ заданных и фиксированных узлов для поиска искомого отображения (алгоритм 5). При этом еще на стадии построения начальной сетки на данных гранях достигалось построение сеток хорошего качества. И далее в процессе минимизации функционалов узлы на этих гранях не двигались.

Однако на стадии построения начальной сетки для некоторых конфигураций областей начальная сетка могла не обладать требуемым качеством из-за негладкой стыковки на ребрах (см., например, сетку на рис. 18). Анализируя эту сетку по качеству, можно выделить следующие моменты:

(1) в начальной сетке на рис. 18 невырожденные ячейки — это призмы вдоль ребер на

плоских гранях; число призм — 60 (всего ячеек 30375,  $N = 46$ ,  $M = 46$ ,  $L = 16$ );

(2) сетка содержит очень много сильно вытянутых в одном направлении ячеек.

При расчете сеток по алгоритму 2 (свободные узлы на границе) качество ячеек вдоль ребер на плоских гранях может быть неудовлетворительным также из-за негладкой стыковки координатных линий вдоль данных ребер (см. рис. 19 и 20).

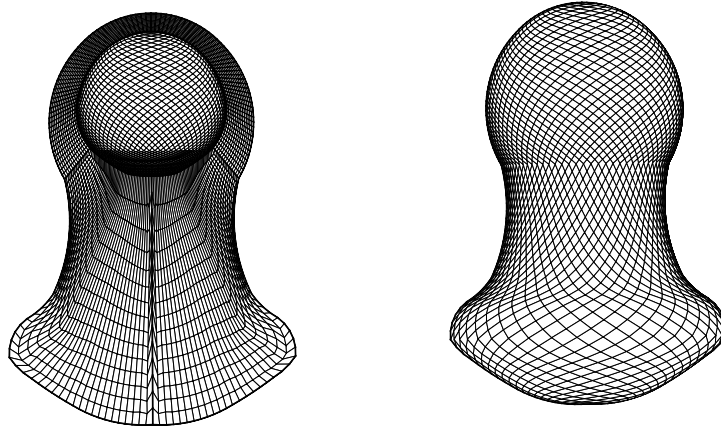


Рис. 18. Начальная сетка (разные ракурсы).

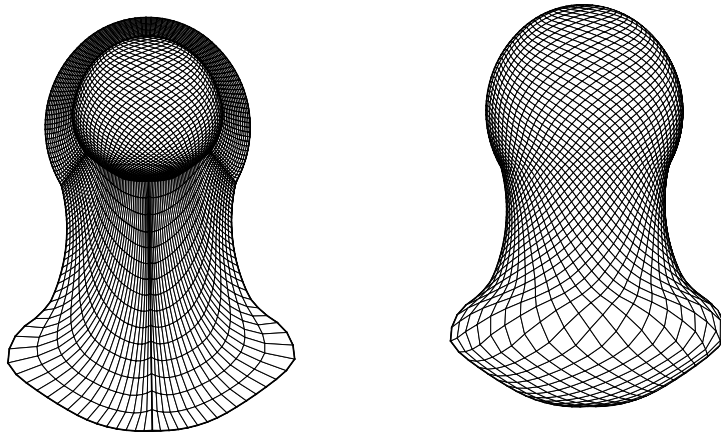


Рис. 19. Оптимальная сетка,  $A_0 = 0.5$  (алгоритм 2).

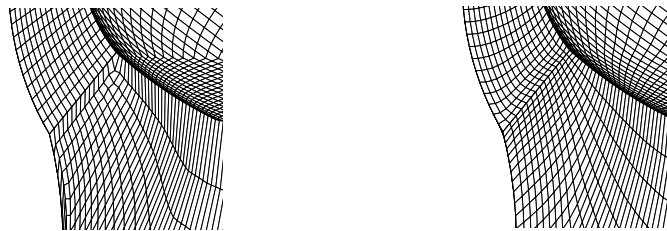


Рис. 20. Фрагменты рис. 18 и 19 вдоль ребер на плоских гранях.

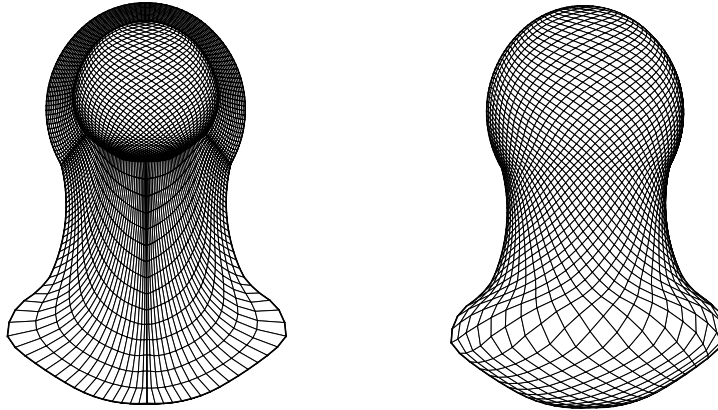


Рис. 21. Оптимальная сетка ( $A_0 = 0.5$ ), условие ортогональности линий ребрам (алгоритм 4).

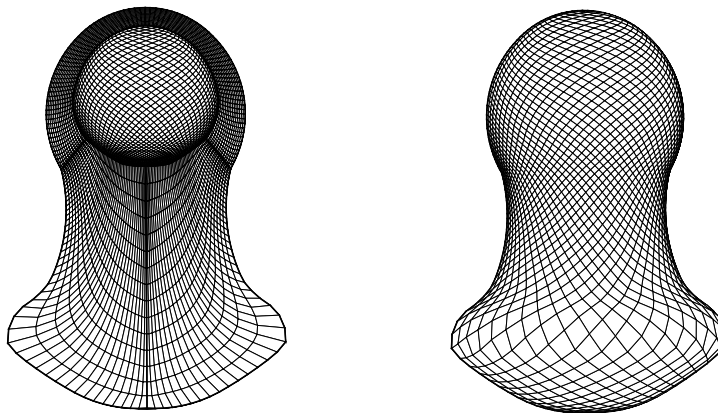


Рис. 22. Оптимальная сетка ( $A_0 = 0.5$ ), условие гладкой стыковки на ребрах (алгоритм 6).

Для получения сеток с гладкой стыковкой на ребрах, находящихся в одной плоскости, расчеты проводились по алгоритму 6. Но первоначально были проведены расчеты по алгоритму 4 при условии ортогональности координатных линий трем ребрам, лежащим в одной плоскости. Расчеты координат остальных узлов проводились из условия минимума функционала. Сетка, полученная по алгоритму 4, представлена на рис. 21 и 23. Сетка, построенная по алгоритму 6, представлена на рис. 22 и 23. Видно, что построенные по алгоритмам 4 и 6 сетки близки на ребрах стыковки плоских граней (ср. фрагменты сеток на рис. 23). Построенные сетки тестируются сначала по качеству ячеек. Например, эти сетки содержат 60 призм с треугольным основанием, остальные ячейки невырождены. Сетки не содержат невырожденных “выкрученных” шестигранных ячеек [12]. Далее сетка тестируется на близость к равномерной ортогональной. Выдаются значения функционалов равномерности и ортогональности. Для сетки на рис. 22 и 23  $A_0 = 0.5$ ,  $D_{\text{н}} = 896.24$ ,  $D_0 = 1106000$ . Число итераций 160. Для начальной сетки на рис. 18 и 20  $D_{\text{н}} = 9015.9$ ,  $D_0 = 1668700$ .

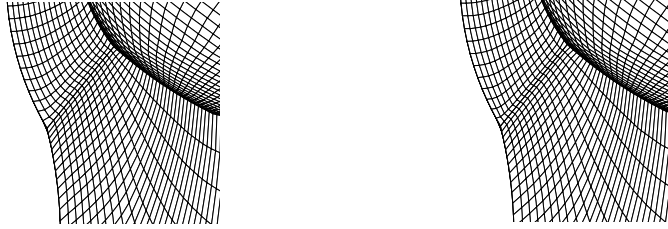


Рис. 23. Фрагменты сетки вдоль ребер на плоских гранях (алгоритмы 4 (слева) и 6).

В этом примере рассматриваемая конфигурация с резким перепадом размеров является сложной для расчетов структурированных сеток, когда область не делится на блоки, а рассматривается как шестигранник. Поэтому данная конфигурация была выбрана в качестве теста: позднее расчеты сеток для этой конфигурации были осуществлены также в [23], в том числе и для случая построения адаптивных пространственных сеток.

В заключение отметим, что проведенные тестовые расчеты показали работоспособность и эффективность разработанных алгоритмов и программ.

Спектр возможных дальнейших направлений развития алгоритмов довольно широк. Это развитие алгоритмов оптимизации сеток, адаптирующихся к особенностям решения физических задач, разработка параллельных алгоритмов оптимизации сеток с большим числом узлов, разработка алгоритмов построения многоблочных сеток, совершенствование способов аппроксимации границы области.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ушакова О.В.** ЛАДА — экономичный алгоритм и программа построения двумерных криволинейных оптимальных адаптивных сеток в односвязных областях геометрически сложной формы. // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1994. Вып. 3. С. 47–56.
2. **Сидоров А.Ф.** Об одном алгоритме расчета оптимальных разностных сеток // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. 1966. Т. 74. С. 147–151.
3. **Сидоров А.Ф., Шабашова Т.И.** Об одном методе расчета оптимальных разностных сеток для многомерных областей // Числ. методы механики сплошной среды. 1981. Т. 12, № 5. С. 106–123.
4. **Сидоров А.Ф., Ушакова О.В.** Об одном алгоритме расчета оптимальных разностных сеток и его приложениях // Числ. методы механики сплошной среды. 1985. Т. 16, № 5. С. 101–115.
5. **Serezhnikova T.I., Sidorov A.F., and Ushakova O.V.** On one method of construction of optimal curvilinear grids and its applications // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1989. Vol. 4, no. 2. P. 137–155.
6. **Khairullina O.B., Sidorov A.F., and Ushakova O.V.** Variational methods of construction of optimal grids // Handbook of grid generation / Ed. by J. F. Thompson, B. K. Soni, and N. P. Weatherill. Boca Raton; London; New York; Washington: CRC Press, 1999. P. 36-1–36-25.
7. **Сидоров А.Ф., Ушакова О.В., Хайруллина О.Б.** Вариационные методы построения оптимальных сеток // Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. С. 512–538.
8. **Ushakova O.V.** On nondegeneracy of three-dimensional grids // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. S78-S100.
9. **Бронина Т.Н., Гасилова И.А., Ушакова О.В.** Алгоритмы для построения трехмерных структурированных сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 6. С. 875–883.
10. **Кошкина Т.Н. (Бронина Т.Н.), Сидоров А.Ф.** Об одном геометрическом способе построения трехмерных разностных сеток // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды: Сб. науч. тр. Свердловск, 1981. С. 91–100.

11. Управляемый термоядерный синтез / Под ред. Дж. Киллина. М.: Мир, 1980.
12. **Ушакова О.В.** Классификация шестигранных ячеек // Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления: Тр. всерос. конф. М.: ВЦ РАН, 2006. С. 180–189.
13. **Бобылев Н.А., Иваненко С.А., Казунин А.В.** О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложениях к теории сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 6. С. 808–817.
14. **Ушакова О.В.** Условия невырожденности трехмерных ячеек. Формула для объема ячеек // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 6. С. 881–894.
15. **Ushakova O.V.** Conditions of nondegeneracy of three-dimensional cells. A formula of a volume of cells // SIAM J. Sci. Comp. 2001. Vol. 23, no. 4. P. 1273–1289.
16. **Thompson J.F., Warsi Z.U.A., and Mastine C. W.** Numerical grid generation: Foundation and applications. New York: North-Holland, 1985.
17. **Бронина Т.Н., Ушакова О.В.** Расчеты трехмерных структурированных сеток в конфигурациях с особенностями // Численная геометрия, построение расчетных сеток и высокопроизводительные вычисления: Тр. всерос. конф. М.: ВЦ РАН, 2006. С. 190–199.
18. **Liseikin V.D.** Grid generation methods. Berlin: Springer, 1999.
19. **Knupp P. M. and Robidoux N.** A framework for variational grid generation: Conditioning the Jacobian matrix with matrix norms // SIAM J. Sci. Comput. 2000. Vol. 21. P. 2029–2047.
20. **Прокопов Г.П.** Универсальные вариационные функционалы для построения двумерных сеток: Препринт № 1. М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2001.
21. **Прокопов Г.П.** Реализация вариационного подхода к расчету двумерных сеток в нестационарных задачах: Препринт № 116. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2005.
22. **Azarenok V.N.** A variational hexahedral grid generator with control metric // J. Comp. Phys. 2006. Vol. 218, no. 2. P. 720–747.
23. **Азаренок Б.Н.** О построении подвижных адаптивных пространственных сеток // Препринт. М.: ВЦ РАН, 2007.
24. **Volkov V.I., Gordeychuk V.A., Es'kov N.S., Kozyrev O.M.** Numerical simulation by the MAH-3 code of the interfaces using an unstructured mesh of markers // Laser and Particle Beams. 2000. No. 18. P. 197-205.
25. **Прокопов Г.П.** Некоторые общие проблемы в конструировании алгоритмов построения сеток: Препринт № 98. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1987.
26. **Прокопов Г.П.** Выбор параметров при вариационном подходе к расчету регулярных сеток: Препринт № 14. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2006.
27. **Thomson J.F., Mastin C.W.** Order of difference expressions in curvilinear coordinate systems // J. Fluids Engineering. 1985. Vol. 107. P. 241–250.
28. **Ушакова О.В.** Итерационная процедура расчета двумерных оптимальных адаптивных сеток // Приближенные методы исследования нелинейных задач механики сплошной среды : Сб. науч. тр. Екатеринбург, 1992. С. 58–65.
29. **Khairullina O.V.** Method of constructing block regular optimal grids in two-dimensional multiply-connected domains of complex geometries // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1996. Vol. 11, no. 4. P. 343–358.
30. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1962.
31. **Сидоров А.Ф.** Примеры точного построения геометрически оптимальных двумерных сеток // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1994. Вып. 4. С. 18–22.
32. **Рубина Л.И.** Примеры точного решения задачи построения трехмерных оптимальных сеток // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1995. Вып. 4. С. 37–41.
33. **Ушакова О.В.** Теорема существования и единственности решения краевой задачи построения одномерных оптимальных адаптирующихся сеток // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3, № 2. С. 134–141.
34. **Иваненко С.А., Чарахчян А.А.** Криволинейные сетки из выпуклых четырехугольников // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 4. С. 503–514.

35. **Ivanenko S.A.** Selected chapters on grid generation and applications. M.: Dorodnicyn Comput. Centre of RAS, 2004.
36. **Kreis R.I., Thames F.C., and Hassan H.A.** Application of a variational method for generating adaptive grids // AIAA J. 1986. Vol. 24, no. 3. P. 404–410.
37. **Brackbill J.U., Saltzman J.C.** Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // J. Comp. Phys. 1982. Vol. 46, no. 3. P. 342–368.
38. **Kennon S.R., Dulikravich G.S.** Generation of computational grids using optimization // AIAA J. 1986. Vol. 24, no. 7. P. 1069–1073.
39. **Nakahashi K., Deiwert G.S.** Three-dimensional adaptive grid method // AIAA J. 1986. No. 6. P. 948–954.

Поступила 25.11.2007

УДК 517.957

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СПЕЦИАЛЬНЫХ РЯДОВ  
ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ  
УРАВНЕНИЯ ЛИНЯ — РЕЙСНЕРА — ЦЯНЯ<sup>1</sup>**

**М. Ю. Филимонов**

Для двумерного уравнения Линя — Рейснера — Цяня, описывающего нестационарные течения газа, построены новые классы решений с функциональным произволом в виде рядов по степеням специально выбираемых функций. Коэффициенты таких рядов находятся последовательно как решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений или как решения линейных уравнений с частными производными. Использование специальных рядов, коэффициенты которых определяются линейными дифференциальными уравнениями с частными производными, позволило точно удовлетворить двум заданным дополнительным краевым условиям. Для одного класса течений эти коэффициенты находились в явном виде из линейных уравнений гиперболического типа, для другого — из линейных уравнений параболического типа. Это обстоятельство и было использовано при доказательстве сходимости таких рядов и изучении асимптотики построенных решений. Приведены результаты численных расчетов по нестационарному трансзвуковому обтеканию клина.

**Введение**

Одним из аналитических методов представления решений нелинейных уравнений в частных производных является метод специальных рядов по степеням специально выбираемых функций, называемых далее *базисными функциями*. Коэффициенты таких рядов находятся последовательно как решения линейных дифференциальных уравнений. При этом рекуррентность нахождения коэффициентов достигается за счет выбора базисных функций [1] (см. также раздел II в монографии [2]). Такой выбор, в отличие от методов типа Галеркина, позволяет находить решение с контролируемой точностью, поскольку используемые подходы приводят к цепочке конечномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые оказываются линейными даже для нелинейных решаемых уравнений, что позволяет исследовать сходимость специальных рядов [1, 3–5] и применять их для численного решения конкретных задач [6–10].

Современная история развития этого метода для решения уравнений математической физики связана с именем А.Ф. Сидорова. Эти работы естественным образом примыкают к его работам по точным решениям. Первоначальная идея состояла в построении решений, в некотором смысле близких к точным. В 1975 году была опубликована работа [11], послужившая толчком для развития метода специальных рядов. В следующем разделе предложен один из возможных подходов к описанию метода специальных рядов, который и будет использован при построении новых классов решений для уравнения Линя — Рейснера — Цяня.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00217), программы фундаментальных исследований Президиума РАН и интеграционного проекта УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

# 1. Специальные ряды с функциональным произволом для многомерных областей

Рассмотрим общее уравнение в частных производных с искомой функцией  $u(\mathbf{x}, t)$

$$G\left(u, \dots, \frac{\partial^{k_0+\dots+k_m} u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}}, \dots\right) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $k_0 + \dots + k_m \leq N$  ( $N$  — порядок уравнения),  $G$  — функция, аналитическая в нуле относительно своих переменных.

Определим кольцо  $K_{\mathbf{g}}$ , элементами которого являются абсолютно сходящиеся в некоторой области ряды

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\mathbf{g}) P^n(\mathbf{y}), \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{g} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_s}, t)$  или  $\mathbf{g} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$ ,  $1 \leq s \leq m$ . Важные частные случаи:  $\mathbf{g} = t$ ,  $\mathbf{g} = x_l$  ( $1 \leq l \leq m$ ). Соответствующий вектор  $\mathbf{y}$  обязательно имеет те компоненты вектора  $(x_1, \dots, x_m, t)$ , которые не являются компонентами вектора  $\mathbf{g}$ , хотя некоторые компоненты  $\mathbf{g}$  могут входить в  $\mathbf{y}$ . Предположим, что функции  $\alpha_n(\mathbf{g})$ ,  $P(\mathbf{y})$  имеют соответствующие непрерывные частные производные  $N$ -го порядка и функция  $P(\mathbf{y})$  удовлетворяет дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{\infty} h_{0j}(\mathbf{g}) P^j(\mathbf{y}), \\ \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij}(\mathbf{g}) P^j(\mathbf{y}), \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $h_{0j}(\mathbf{g})$ ,  $h_{ij}(\mathbf{g})$  — достаточно гладкие функции такие, что ряды в правых частях уравнений (1.3) абсолютно сходятся в некоторой области.

Заметим, что в отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которым в [12, 13] удовлетворяли базисные функции в случае одного пространственного переменного ( $m = 1$ ), система уравнений в частных производных (1.3) является переопределенной и требует анализа на совместность. Однако нам для дальнейших построений решений начально-краевых задач в двумерных областях понадобятся лишь некоторые важные частные случаи этой системы, для которой базисные функции выписываются в явном виде. Поэтому анализ на совместность системы (1.3) здесь не проводится.

Благодаря условиям (1.3) кольцо  $K_{\mathbf{g}}$  содержит все частные производные любого его элемента.

**О п р е д е л е н и е 1.** Ряды по степеням базисных функций с коэффициентами, зависящими от  $\mathbf{g}$ , будем называть *рядами*  $K_{\mathbf{g}}$ .

**Утверждение 1.** Если функции  $h_{0j}(\mathbf{g})$ ,  $h_{ij}(\mathbf{g})$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $j \geq 1$ ) обеспечивают совместность переопределенной системы (1.3), то ряд (1.2) при соответствующем рекуррентном построении коэффициентов  $\alpha_n(\mathbf{g})$  является формальным решением уравнения (1.1).

Данное утверждение проверяется подстановкой ряда (1.2) в уравнение (1.1) и приравниванием выражений при одинаковых степенях  $P(\mathbf{y})$  аналогично тому, как это сделано, например, в работах [12, 13].

Коэффициенты  $\alpha_n(\mathbf{g})$  ряда  $K_{\mathbf{g}}$  будут находиться рекуррентно в общем случае уже как решения последовательности линейных уравнений в частных производных (для рядов  $K_t$ ,  $K_{x_i}$  как решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений).



**З а м е ч а н и е 1.** Поскольку коэффициенты  $\alpha_n(\mathbf{g})$  могут определяться из последовательности линейных уравнений в частных производных, то это обстоятельство можно использовать для удовлетворения в том числе и краевых условий при построении решений начально-краевых задач для уравнения (1.1) в виде специальных рядов  $K_{\mathbf{g}}$ .

Приведем примеры базисных функций  $P(\mathbf{y})$  для рядов  $K_{\mathbf{g}}$ , применяемых для представления решения уравнения (1.1) в случае двух независимых переменных  $x_1$  и  $t$ . Эти функции, как и базисные функции из работы [14], могут содержать произвольные функции.

**П р и м е р 1.** Пусть  $\mathbf{g} = x_1$ ,  $\mathbf{y} = (x_1, t)$ . Рассмотрим следующие функции  $P(\mathbf{y})$ :

$$P_1(x_1, t) = \frac{1}{(f(x_1) + t)^{N_1}}, \quad N_1 \in \mathbb{N}, \quad f(x_1) \in C^N[0, L], \quad L > 0,$$

$$P_2(x_1, t) = \frac{1}{f(x_1) + \exp(\beta t)}, \quad \beta = \text{const.}$$

Функции  $P_1(x_1, t)$ ,  $P_2(x_1, t)$  являются базисными, поскольку они удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -N_1 P_1^{N_1+1}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial x_1} = -N_1 f'(x_1) P_1^{N_1+1},$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\beta P_2 + \beta f(x_1) P_2^2, \quad \frac{\partial P_2}{\partial x_1} = -f'(x_1) P_2^2,$$

которые являются частным случаем систем (1.3). Ряды  $K_{\mathbf{g}}$  для этого примера будут рядами  $K_{x_1}$ .

**П р и м е р 2.** В случае трех независимых переменных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $t$  ряды  $K_{x_1}$  также могут быть использованы для представления решения уравнения (1.1). Функция

$$P_3(x_1, x_2, t) = \frac{1}{(f(x_1) + x_2 + t)^{N_1}}, \quad N_1 \in \mathbb{N}, \quad f(x_1) \in C^N[0, L],$$

является базисной, поскольку система (1.3) для функции  $P_3(x_1, x_2, t)$  имеет вид

$$\frac{\partial P_3}{\partial t} = -N_1 P_3^{N_1+1}, \quad \frac{\partial P_3}{\partial x_1} = -N_1 f'(x_1) P_3^{N_1+1}, \quad \frac{\partial P_3}{\partial x_2} = -N_1 P_3^{N_1+1}.$$

**П р и м е р 3.** Для трех независимых переменных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $t$  могут быть использованы и ряды  $K_{x_1, x_2}$ . Рассмотрим функцию

$$P_4(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\psi(x_1, x_2) + \exp(\beta t)}, \quad \beta = \text{const.}$$

Здесь произвольная функция  $\psi(x_1, x_2)$  имеет непрерывные частные производные  $N$ -го порядка. Для этого примера коэффициенты ряда  $K_{x_1, x_2}$  будут уже находиться из последовательности линейных уравнений в частных производных по степеням базисной функции  $P_4(x_1, x_2, t)$ .

Применим далее ряды  $K_{\mathbf{g}}$  при построении решений нестационарных трансзвуковых течений газа.

## 2. Постановка задачи

При изучении движений невязкого газа при отсутствии массовых сил и в предположении, что течение изэнтропическое и безвихревое, получается одно уравнение второго порядка для потенциала скоростей. Однако это уравнение достаточно сложно, и в ряде случаев его можно упростить. Полный анализ законности упрощений впервые был проведен Линем, Рейснером и Цянем в работе [15], которые рассматривали обтекание тонких тел потоком газа. Оценивая величины различных членов в уравнении для потенциала скоростей, авторы упростили

его в некоторых частных случаях. Оказалось, что малые возмущения описываются линейными уравнениями, кроме случая медленно меняющегося во времени околзвучкового потока. В последнем случае для потенциала возмущения  $\varphi(x, y, z, t)$  основного потока, текущего со звуковой скоростью, получается уравнение

$$-\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} - 2\varphi_{xt} = 0, \quad (2.1)$$

которое использовалось при исследовании околзвучковых движений газа [16] и для изучения движения газа с ударными волнами [17]. Уравнение (2.1) используется для определения проекций вектора скорости потока газа  $(v_x, v_y, v_z)$  на оси декартовой системы координат. Согласно [16] в случае двух пространственных переменных имеем

$$v_x = a_* \left[ 1 + \varepsilon^{\frac{2}{3}} (2m_*)^{-\frac{1}{3}} \varphi_x \right],$$

$$v_y = \varepsilon a_* \varphi_y,$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, который характеризует отклонение линий тока от прямой  $y = y_0$ ,  $m_*$  — безразмерный коэффициент ( $m_* = \frac{\gamma + 1}{2}$  для идеального газа, где  $\gamma$  — показатель адиабаты),  $a_*$  — критическая скорость, дающая величину скорости основного потока. Заметим, что различный порядок продольной и поперечной компоненты возмущенной скорости и неравномерная роль координаты  $x$  по отношению к координате  $y$  приводит к нелинейному уравнению (2.1), не позволяя создать линейную теорию для исследования нестационарных околзвучковых течений.

Ввиду того, что плоскость  $t = \text{const}$  для уравнения (2.1) является характеристической плоскостью, задача Коши в данном случае является некорректной, т.е. задача либо совсем не имеет решения, либо имеет бесконечное множество решений [16]. Вопросы о постановке краевых задач и их разрешимости обсуждались в работах Е.В. Мамонтова [18, 19], где доказывались теоремы существования и единственности гладкого решения при некоторых ограничениях на начальные и краевые условия, что позволило при доказательстве существования решения использовать теорему Л.В. Овсянникова о разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений в шкале банаховых пространств [20].

Следуя работе [19], для уравнения (2.1) в случае двух пространственных переменных рассмотрим две начально-краевые задачи  $A$  и  $B$ .

*Задача А.*

В области  $D_A = \{(x, y, t): t \geq 0, x \geq 0, -\infty < y < \infty\}$  для уравнения

$$-\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - 2\varphi_{xt} = 0 \quad (2.2)$$

заданы начальные данные

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) \quad (2.3)$$

и краевые условия

$$\varphi(0, y, t) = \psi_0(y, t), \quad \varphi_x(0, y, t) = \psi_1(y, t). \quad (2.4)$$

Предполагается, что функции  $\varphi_0(x, y)$ ,  $\psi_0(y, t)$ ,  $\psi_1(y, t)$  являются достаточно гладкими и удовлетворяют условиям согласования при  $x = 0$ ,  $t = 0$ , а функция  $\psi_1(y, t) > 0$ . Физический смысл неравенства  $\psi_1 > 0$  состоит в том, что прямая  $x = 0$  на плоскости  $x, y$  все время должна находиться в сверхзвуковой части потока.

При сделанных предположениях Е.В. Мамонтовым доказано существование и единственность решения задачи (2.2), (2.3), (2.4) (задачи  $A$ ) в некоторой области.

Задача *B*.

В области  $D_B = \{(x, y, t): t \geq 0, x \geq 0, -1 \leq y \leq 1\}$ , когда переменная  $y$  меняется на конечном промежутке  $-1 \leq y \leq 1$ , можно рассмотреть “задачу со стенками”. В этом случае следует задать дополнительные краевые условия

$$\varphi_y(x, 1, t) = \varphi_y(x, -1, t) = 0. \quad (2.5)$$

Е.В. Мамонтовым было показано, что решение задачи (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) (задачи *B*) существует и единственно в некоторой области.

Заметим, что специальные ряды в виде двойного ряда по степеням расстояния до оси симметрии и его логарифма применялись в работе [21] для представления решения характеристической задачи Коши для уравнения потенциала скорости стационарного осесимметричного движения идеального газа. С помощью логарифмических рядов было также получено решение осесимметрической задачи нестационарного трансзвукового обтекания тонких тел вращения [22].

Далее рассмотрим различные конструкции специальных рядов (1.2), имеющих функциональный произвол, для представления решений задач *A* и *B*.

### 3. Построение решений задачи *A* с помощью специальных рядов $K_g$

Использование рядов  $K_t$ .

Решение уравнения (2.2) будем искать в виде ряда  $K_t$

$$\varphi(x, y, t) = a_1x + a_2y + g_1(t)y + g_2(t) + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t)P_1^i(t, x, y), \quad (3.1)$$

где функция  $P_1$  имеет вид

$$P_1(t, x, y) = \frac{1}{f(t) + e^{b_1x + b_2y}}, \quad f(t) \in C^1[0, \infty), \quad b_1, b_2 = \text{const}, \quad (3.2)$$

$a_1, a_2$  — постоянные,  $g_1(t), g_2(t) \in C^1[0, \infty)$ . Функция  $P_1(t, x, y)$  является базисной (обеспечивает рекуррентное нахождение коэффициентов  $u_i(t)$ ), поскольку справедливы дифференциальные соотношения

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -f'(t)P_1^2, \quad \frac{\partial P_1}{\partial x} = -b_1P_1 + b_1P_1^2, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y} = -b_2P_1 + b_2P_1^2. \quad (3.3)$$

Ряд  $K_t$  позволяет точно задать начальное условие

$$\varphi_0(x, y) = a_1x + a_2y + g_1(0)y + g_2(0) + \sum_{i=1}^{\infty} u_{i0}P_1^i(0, x, y), \quad u_{i0} = \text{const}. \quad (3.4)$$

Однако в этом случае краевые условия (2.4) имеют специальный вид и порождаются произвольной функцией  $f(t)$ .

Краевые условия (2.4) представимы в виде

$$\begin{aligned} \psi_0(y, t) &= a_2y + g_1(t)y + g_2(t) + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t) \frac{1}{(f(t) + e^{b_2y})^i}, \\ \psi_1(y, t) &= a_1 + b_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-iu_i(t) + f(t)(i-1)u_{i-1}}{(f(t) + e^{b_2y})^i}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Теорема 1.** Пусть заданы функция  $f(t) \in C^1[0, \infty)$ , положительные постоянные  $q_1, q_2$ ,  $0 < q_1 + q_2 \leq 0.1$ , и выполнены следующие условия:

$$(1) \quad 0 \leq f(t) \leq d = 0.018, \quad |f'(x)| \leq d_1 \quad (d_1 > 0, \quad t \geq 0);$$

(2) для постоянных  $u_{i0}$  справедливы неравенства

$$|u_{i0}| \leq \frac{Mq_2}{i^3} \quad (i \geq 1, \quad M > 0);$$

$$(3) \quad a_1 \geq \frac{1}{b_1^2} \left\{ b_2^2 - \frac{2b_1[(\pi^2 + 4)b_1^2 M(1 + 4d)^3 + 17d_1]}{q_1} \right\}, \quad b_1 < 0.$$

Тогда решение задачи  $A$  со специальными краевыми условиями (2.4), (3.5) и с начальными данными (2.3), (3.4) представимо в виде ряда (3.1) по степеням базисной функции (3.2) в области  $D_1 = \{(x, y, t): t \geq 0, 0 \leq b_1 x + b_2 y\}$  и выполняется неравенство

$$|\varphi_x - a_1| \leq M_1 e^{-qt}, \quad t \geq 0, \quad q = \frac{b_2^2 - a_1 b_1^2}{2b_1}, \quad M_1 > 0. \quad (3.6)$$

**Доказательство.** После подстановки ряда (3.1) в уравнение (2.2) и приведения подобных членов с учетом дифференциальных соотношений (3.3) для нахождения коэффициентов ряда  $u_i(t)$  получится последовательность линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u'_i + \frac{b_2^2 - a_1 b_1^2}{2b_1} i u_i &= \left[ \frac{(b_2^2 - a_1 b_1^2)(2i - 1)}{2b_1} + 2f' \right] \frac{(i - 1)u_{i-1}}{i} \\ &- \left[ \frac{(b_2^2 - a_1 b_1^2)}{2b_1} f^2 + f f' \right] \frac{(i - 2)(i - 1)u_{i-2}}{i} + \frac{f(i - 1)u'_{i-1}}{i} \\ &+ \frac{b_1^2}{2i} \sum_{m+n=i} \left[ -mn^2 u_m u_n + m(2n^2 - 3n + 1) f u_m u_{n-1} - m(n - 2)(n - 1) f^2 u_m u_{n-2} \right. \\ &\quad \left. + (m - 1)n^2 u_{m-1} u_n - f^2(m - 1)(2n^2 - 3n + 1) u_{m-1} u_{n-1} \right. \\ &\quad \left. + f^3(m - 1)(n - 2)(n - 1) u_{m-1} u_{n-2} \right] \equiv R_i(t) \quad (i \geq 1) \end{aligned}$$

с начальными условиями  $u_i(0) = u_{i0}$ , определяемыми начальными данными (3.4). Решения этих уравнений представимы в виде

$$u_i(t) = e^{-qit} \left( u_{i0} + \int_0^t R_i(\tau) e^{qit} d\tau \right). \quad (3.7)$$

Методом математической индукции докажем следующее неравенство:

$$|u_i(t)| \leq \frac{M e^{-qt}}{i^3}, \quad i \geq 1. \quad (3.8)$$

Из уравнения (3.7) при  $i = 1$  имеем

$$|u_1(t)| = |u_{10} e^{-qt}| \leq M q_2 e^{-qt} < M e^{-qt},$$

т.е. неравенство (3.8) справедливо. Предполагая его справедливость при  $i \leq N$ , докажем эту оценку для  $i = N + 1$ .

Вначале выделим из  $R_{N+1}(t)$  слагаемое  $(fu_N)' \frac{N}{N+1}$ , для которого

$$\left| \int_0^t e^{q(N+1)\tau} (f(\tau)u_N(\tau))' \frac{N}{N+1} d\tau \right| \leq \frac{e^{qt} M}{(N+1)^3} 32d.$$

Эта оценка легко доказывается после интегрирования по частям и с учетом предположения индукции (3.8) при  $i = N$ . Используя полученную оценку, предположение индукции (3.8) и условия теоремы 1, оценим  $u_{N+1}(t)$ :

$$\begin{aligned} |u_{N+1}(t)| &\leq |u_{(N+1)0}| e^{-qt} + e^{-qt(N+1)} \left| \int_0^t e^{q(N+1)\tau} R_{N+1}(\tau) d\tau \right| \leq e^{-qt} \left\{ |u_{(N+1)0}| \right. \\ &+ M \left[ \frac{2d}{N^3} + \frac{2d_1}{qN^3} + \left( d^2 + \frac{dd_1}{q} \right) \frac{9}{(N+1)^3} + \frac{(\pi^2 + 4)b_1^2 M}{2(N+1)^2 q N} (1 + 8d + 6d^2 + 4d + 32d^2 + 24d^3) \right. \\ &\left. \left. + \frac{32d}{(N+1)^3} \right] \right\} \leq \frac{Me^{-qt}}{(N+1)^3} \left[ q_2 + 0.9 + \frac{(\pi^2 + 4)b_1^2 M(1 + 4d)^3 + 17d_1}{q} \right] \\ &\leq \frac{Me^{-qt}}{(N+1)^3} [q_2 + 0.9 + q_1] \leq \frac{Me^{-qt}}{(N+1)^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенства (3.8) доказаны.

С помощью этих оценок теперь легко доказать сходимость ряда (3.1), (3.2) и соответствующих производных на множестве  $D_1$ . Справедливость неравенства (3.6) очевидна. Теорема 1 доказана.

*Использование рядов  $K_x$ .*

Решение уравнения (2.2) можно также построить в виде ряда  $K_x$ :

$$\varphi(x, y, t) = a_1 x + a_2 y + g_1(t)y + g_2(t) + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) P_2^i(t, x, y), \quad (3.9)$$

где

$$P_2(t, x, y) = \frac{1}{f(x) + \beta y + t}, \quad f(x) \in C^2[0, L], \quad L > 0, \quad \beta = \text{const}, \quad (3.10)$$

$a_1, a_2$  — постоянные,  $g_1(t), g_2(t) \in C^1[0, \infty)$ . Система дифференциальных соотношений для базисной функции  $P_2(t, x, y)$ , обеспечивающая рекуррентное нахождение коэффициентов ряда, имеет вид

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = -P_2^2, \quad \frac{\partial P_2}{\partial y} = -\beta P_2^2, \quad \frac{\partial P_2}{\partial x} = -f'(x)P_2^2. \quad (3.11)$$

Структура ряда (3.9), (3.10) определяет краевые условия (2.4) следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_0(y, t) &= a_2 y + g_1(t)y + g_2(t) + \sum_{i=1}^{\infty} u_{i0} \frac{1}{(f_0 + \beta y + t)^i}, \\ \psi_1(y, t) &= a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_{i1} - f_1(i-1)u_{i-1,0}}{(f_0 + \beta y + t)^i}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где  $f_0, f_1, u_{i0}, u_{i1}$  — постоянные. Теперь после подстановки ряда (3.9) в уравнение (2.2) и проведения преобразований с учетом соотношений (3.11) для нахождения коэффициентов ряда  $u_i(x)$  получится последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$u_i'' = f''(i-1)u_{i-1} + 2(i-1)u'_{i-1} + \frac{1}{a_1} \left\{ 2(i-1)u'_{i-1} + [\beta^2 - a_1(f')^2 - f'](i-2)(i-1)u_{i-2} \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{m \neq 0 \\ m+n=i}} \left[ u'_m u''_n - f''(n-1)u'_m u_{n-1} - 2f'(n-1)u'_m u'_{n-1} \right. \\
& + (f')^2(n-2)(n-1)u'_m u_{n-2} - f'(m-1)u_{m-1}u''_n + f'f''(m-1)(n-1)u_{m-1}u_{n-1} \\
& \left. + 2(f')^2(m-1)(n-1)u_{m-1}u'_{n-1} - (f')^3(m-1)(n-2)(n-1)u_{m-1}u_{n-2} \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

Обозначим правые части этих уравнений через  $R_i(x)$  и положим  $f(0) = f_0$ ,  $f'(0) = f_1$ . Тогда с учетом краевых условий (2.4), (3.12) для определения коэффициентов  $u_i(x)$  получатся следующие формулы:

$$u_i(x) = \int_0^x \int_0^\tau R_i(\sigma) d\sigma d\tau + u_{i1}x + u_{i0}, \quad i \geq 1.$$

Начальные условия для задачи имеют специальный вид

$$\varphi_0(x, y) = a_1x + a_2y + g_1(0)y + g_2(0) + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x)P_2^i(0, x, y) \quad (3.13)$$

и порождаются произвольной функцией  $f(x)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $L > 0$ ,  $f(x) \in C^2[0, L]$  — произвольная функция, входящая в базисную функцию (3.10), и выполнены следующие условия:

(1) для производных функции  $f(x)$  справедливы неравенства

$$|f'(x)| \leq d, \quad |f''(x)| \leq d, \quad d > 0, \quad 0 \leq x \leq L;$$

(2) постоянные  $u_{i0}$ ,  $u_{i1}$  удовлетворяют неравенствам

$$|u_{i0}| \leq \frac{M}{2i^3}, \quad |u_{i1}| \leq \frac{M}{2i^2}, \quad i \geq 1, \quad M > 0;$$

(3) справедливы неравенства

$$f(x) > e^{bL} + \beta a, \quad b \geq 2(2 + 3d)^3[2 + \beta^2 + M(\pi^2 + 4)], \quad \beta, a > 0;$$

(4)  $a_1 \geq b^2$ .

Тогда решение задачи  $A$  с краевыми условиями (2.4) и специальными начальными данными (3.13) представимо в виде ряда (3.9) по степеням базисной функции (3.10) в области  $D_2 = \{(x, y, t): t \geq 0, 0 \leq x \leq L, y \geq -a\}$ .

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 и здесь не приводится.

**З а м е ч а н и е 2.** Из теорем 1 и 2 следует, что  $\varphi_x \rightarrow a_1$  при  $t \rightarrow +\infty$  (в теореме 2 со скоростью  $t^{-1}$ , в теореме 1 со скоростью  $e^{-qt}$ ). Следовательно, проекция скорости потока на ось  $x$  тоже стремится к некоторому постоянному числу, т.е.  $v_x \rightarrow a_*[1 + \varepsilon^{\frac{2}{3}}(2m_*)^{-\frac{1}{3}}a_1]$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

**З а м е ч а н и е 3.** В случае аналитичности начальных и краевых условий решения, построенные в теоремах 1 и 2, являются единственными в силу результатов Е.В. Мамонтова [19]. Действительно, его условие  $\varphi_x(0, y, t) = \psi_1(y, t) > 0$  выполняется и в теоремах 1, 2: в теореме 1 из условия 3 и оценок (3.8) для коэффициентов ряда (3.5) получается неравенство  $\psi_1(y, t) \geq |b_1|M > 0$ , а в теореме 2 условию  $\psi_1(y, t) > 0$  соответствует условие (4).

Использование рядов  $K_{xy}$ .

Построим решение уравнения (2.2) такое, чтобы при  $t \rightarrow +\infty$  выполнялась следующая асимптотика:

$$v_x \rightarrow a_* \left[ 1 + \varepsilon^{\frac{2}{3}} (2m_*)^{-\frac{1}{3}} (a_1 + \Psi(x, y)) \right], \quad (3.14)$$

где функция  $\Psi(x, y)$  зависит от некоторой произвольной функции  $f(b_1x + b_2y)$ .

Пусть  $z = b_1x + b_2y$ ,  $b_1, b_2$  — постоянные. Рассмотрим базисную функцию

$$P_3(x, y, t) = \frac{1}{f(b_1x + b_2y) + e^{-t}} \equiv \frac{1}{f(z) + e^{-t}}. \quad (3.15)$$

Базисная функция  $P_3$  удовлетворяет дифференциальным соотношениям

$$\frac{\partial P_3}{\partial t} = P_3 - fP_3^2, \quad \frac{\partial P_3}{\partial y} = -f'b_2P_3^2, \quad \frac{\partial P_3}{\partial x} = -f'b_1P_3^2. \quad (3.16)$$

Дифференцируя уравнение (2.2) по  $x$  и полагая  $u = \varphi_x$ , получим уравнение

$$-u_{xx}u - u_x^2 + u_{yy} - 2u_{tx} = 0 \quad (3.17)$$

с начальными данными

$$\int_0^x u(\tau, y, 0) d\tau + \Psi_0(y, 0) = \varphi_0(x, y) \quad (3.18)$$

и краевым условием

$$u(0, y, t) = \Psi_1(y, t). \quad (3.19)$$

Формула перехода от  $u(x, y, t)$  к  $\varphi(x, y, t)$  имеет вид

$$\varphi = \int_0^x u(\tau, y, t) d\tau + \Psi_0(y, t).$$

Таким образом, первое краевое условие  $\varphi(0, y, t) = \Psi_0(y, t)$  в (2.4) выполняется автоматически.

Решение уравнения (3.17) будем искать в виде ряда  $K_{xy}$  ( $K_z$ )

$$u(x, y, t) = a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(z) P_3^i(z, t). \quad (3.20)$$

После подстановки ряда (3.20) в уравнение (3.17) и проведения преобразований с учетом соотношений (3.16) для нахождения коэффициентов ряда  $u_i(z)$  получится последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$u_i'' + \frac{2b_1 i u_i'}{b_1^2 a_1 - b_2^2} = \frac{R_i(z)}{b_2^2 - b_1^2 a_1} \quad (3.21)$$

с начальными условиями

$$u_i'(0) = u_{i1}, \quad u_i(0) = u_{i0} \quad (u_{i1}, u_{i0} = \text{const}, \quad i \geq 1). \quad (3.22)$$

В уравнении (3.21) функция  $R_i(z)$  имеет вид

$$R_i(z) = b_1^2 \sum_{m+n=i} \left\{ u_m \left[ u_n'' - f''(n-1)u_{n-1} - 2f'(n-1)u_{n-1}' + (f')^2(n-2)(n-1)u_{n-2} \right] \right. \\ \left. + u_m' u_n' - 2u_m' f'(n-1)u_{n-1} + (f')^2(m-1)(n-1)u_{m-1}u_{n-1} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + b_2^2 \left[ f''(i-1)u_{i-1} + 2f'(i-1)u'_{i-1} - (f')^2(i-2)(i-1)u_{i-2} \right] \\
& + 2b_1 \left[ u_{i-2}(i-2)(i-1)ff' - iu_{i-1}(i-1)f' - u'_{i-1}f \right].
\end{aligned}$$

В представлении функции  $R_i(z)$  входят только коэффициенты  $u_\nu$  с  $\nu < i$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Будем говорить, что  $f(z) \in B_L$ , если  $f(z) \in C^2[0, L]$  и выполнены неравенства:

- (1)  $|f'(z)| + |f''(z)| \leq f_1 e^{bz}$ ;
- (2)  $1 < q_0 \leq f(z) \leq f_0 e^{bz}$ ,  $0 \leq z \leq L$ ;
- (3)  $\max_{0 \leq z \leq L} \left| \frac{b_2^2}{b_1} f'(z) - f(z) \right| \leq q_1 e^{bz}$ ,

где положительные постоянные  $f_1, f_0, q_0, q_1, q_2, b_1, b, L$  удовлетворяют условиям

$$0 < q_1 + q_2 < 1, \quad b \geq \max \left\{ 1, \frac{4b_1}{q_1}, \frac{\frac{b_2^2}{b_1}(f_1 + f_1^2) + 2f_1(1 + f_0)}{q_2} \right\}, \quad L < \frac{\ln q_0}{b}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $f(z) \in B_L$ , заданы положительные постоянные  $q_3, q_4$  такие, что  $\sum_{k=1}^4 q_k = 1$ , и выполнены следующие условия:

- (1)  $a_1 \geq \frac{1 + b_2^2}{b_1^2}$ ;
- (2)  $0 < M < \frac{q_3 b}{(\pi^2 + 1)b_1(b + f_1)^2 + \pi^2 b_1(f_1^2 + f_1)}$ ;
- (3) для постоянных  $u_{i0}, u_{i1}$  справедливы неравенства

$$|u_{i0}| \leq \frac{Mq_4}{4i^2}, \quad |u_{i1}| \leq \frac{Mb_1q_4}{2i}, \quad i \geq 1.$$

Тогда решение уравнения (3.17) со специальными начальными данными (3.18) и краевыми условиями (3.19) представимо в виде ряда (3.20) по степеням базисной функции (3.15) в области  $D_3 = \{(z, t): t \geq 0, 0 \leq z \leq L\}$  и выполняется асимптотика (3.14) для  $u = \varphi_x = v_x$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доказательство также будем проводить методом математической индукции. Справедливы следующие неравенства:

$$|u_i(z)| \leq \frac{M}{i^2} e^{biz}, \quad (3.23)$$

$$|u'_i(z)| \leq \frac{Mb}{i} e^{biz}, \quad |u''_i(z)| \leq Mb^2 e^{biz}, \quad 0 \leq z \leq L, \quad i \geq 1. \quad (3.24)$$

Обозначим  $\lambda_i = \frac{2b_1 i}{b_1^2 a_1 - b_2^2}$ ,  $c_{1i} = -\frac{u_{i1}}{\lambda_i}$ ,  $c_{2i} = u_{i0} + \frac{u_{i1}}{\lambda_i}$ . Тогда решение уравнения (3.21) с начальными условиями (3.22) запишется в виде

$$u_i(z) = c_{1i} e^{-\lambda_i z} + c_{2i} + \frac{1}{2b_1 i} \int_0^z R_i(\tau) d\tau - \frac{e^{-\lambda_i z}}{2b_1 i} \int_0^z R_i(\tau) e^{\lambda_i \tau} d\tau. \quad (3.25)$$



Формула для  $u'_i(z)$  имеет вид

$$u'_i(z) = -c_{1i}\lambda_i e^{-\lambda_i z} + \frac{e^{-\lambda_i z}}{b_1^2 a_1 - b_2^2} \int_0^z R_i(\tau) e^{\lambda_i \tau} d\tau.$$

Если  $i = 1$ , то  $u_1(z) = c_{11}e^{-\lambda_1 z} + c_{21}$ . Нетрудно проверить, что неравенства (3.23), (3.24) выполняются. Предполагая справедливость этих неравенств при  $i \leq N$ , докажем неравенство (3.23) при  $i = N + 1$ . Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{N+1}(z) = & b_1^2 \sum_{m+n=N+1} \left\{ |u_m| \left[ |u''_n| + |f''|(n-1)|u_{n-1}| + 2|f'|(n-1)|u'_{n-1}| \right. \right. \\ & \left. \left. + (f')^2(n-2)(n-1)|u_{n-2}| \right] + |u'_m| |u'_n| + 2|u'_m| |f'|(n-1)|u_{n-1}| \right. \\ & \left. + (f')^2(m-1)(n-1)|u_{m-1}| |u_{n-1}| \right\} + b_2^2 \left[ |f''|N|u_N| + (f')^2(N-1)N|u_{N-1}| \right] \\ & + 2b_1 \left[ |u_{N-1}|(N-1)N|f'| + (N+1)N|u_N| |f'| \right] + 2b_1 N |u'_N| \max_{0 \leq z \leq L} \left| \frac{b_2^2}{b_1} f'(z) - f(z) \right|, \end{aligned}$$

где  $|u_k|, |u'_k|, |u''_k|$  заменены оценками (3.23), (3.24),  $1 \leq k \leq N$ , а функции  $f(z), |f(z)'|, |f(z)''|$  заменены на верхние оценки из определения 2. Справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |u_{N+1}(z)| & \leq |c_{1,N+1}e^{-\lambda_{N+1}z} + c_{2,N+1}| \\ & + \frac{1}{2b_1(N+1)} \left| \int_0^z R_{N+1}(\tau) d\tau - e^{-\lambda_{N+1}z} \int_0^z R_{N+1}(\tau) e^{\lambda_{N+1}\tau} d\tau \right| \\ & \leq |c_{1,N+1}|e^{-\lambda_{N+1}z} + |c_{2,N+1}| + \frac{1}{2b_1(N+1)} \int_0^z \widehat{R}_{N+1}(\tau) d\tau \\ & \leq \frac{e^{b(N+1)}M}{(N+1)^2} q_4 + \frac{e^{b(N+1)}M}{(N+1)^2} \left\{ \frac{M|b_1|\pi^2}{12b} [(b+f_1)^2 + f_1^2 + f_1] \right. \\ & \quad \left. + \frac{Mb_1(b+f_1)^2}{b} + q_1 + \frac{b_2^2(f_1+f_1^2)}{b_1b} + \frac{2f_1}{b}(1+f_0) \right\} \\ & \leq \frac{e^{b(N+1)}M}{(N+1)^2} (q_4 + q_3 + q_2 + q_1) = \frac{e^{b(N+1)}M}{(N+1)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (3.23) доказано. Аналогично доказываются неравенства (3.24).

Оценим ряд (3.20) на множестве  $D_3$ :

$$|u(z, t)| \leq a_1 + M \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{e^{bz}}{f(z) + e^{-t}} \right)^i \frac{1}{i^2} \leq a_1 + M \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{e^{bL}}{q_0} \right)^i \leq a_1 + MM_1,$$

где  $M_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{e^{bL}}{q_0} \right)^i < \infty$ , так как  $L < \frac{\ln q_0}{b}$ . Аналогично оцениваются и ряды соответствующих производных. Теорема 3 доказана.

Таким образом, мы доказали, что функция  $u(x, y, t)$  (3.20), соответствующая  $\varphi_x$ , стремится с ростом  $t$  к некоторому стационарному решению, отличному от константы на множестве  $D_3$ .

**Пример 4.** Возьмем  $f(z) \equiv 2 + z$  ( $z = b_1x + b_2y$ ),  $b_1 = 1, b_2 = 2$ . Тогда

$$f_1 = 1, \quad f_0 = q_0 = 2, \quad q_1 = q_2 = 0.4, \quad b = 40, \quad L < \frac{\ln q_0}{b} = \frac{\ln 2}{40}.$$

При  $a_1 = 5$  ряд

$$\varphi_x = u = 5 + \frac{1.5 \left[ 1 - e^{-\frac{2}{3}(x+2y)} \right] u_{11} + u_{10}}{2 + x + 2y + e^{-t}} + \dots$$

сходится в области  $0 \leq x + 2y < \frac{\ln 2}{40}$  и  $t \geq 0$ . При  $t \rightarrow +\infty$  приближенно можно считать, что в формуле (3.14)

$$\Psi(x, y) \approx \frac{1.5 \left[ 1 - e^{-\frac{2}{3}(x+2y)} \right] u_{11} + u_{10}}{2 + x + 2y}.$$

Далее рассмотрим задачу  $B$  при дополнительных условиях (2.5). В этом случае не удастся использовать ряды  $K_x$  (3.9) и  $K_t$  (3.1).

В следующем пункте построим специальные ряды  $K_g$  для решения задачи  $B$  с точным удовлетворением дополнительных краевых условий.

#### 4. Построение решений задачи $B$ с помощью специальных рядов $K_g$

Использование рядов  $K_{yt}$ .

Рассмотрим ряд

$$\varphi(x, y, t) = a_1 x + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(y, t) P_5^i(x, t), \quad a_1 > 0, \quad (4.1)$$

с базисной функцией

$$P_5(x, t) = \frac{1}{e^{b_1 x} + f(t)}, \quad f(t) \in C^1[0, \infty), \quad b_1 < 0. \quad (4.2)$$

Пусть начальное условие (2.3) представимо в виде сходящегося ряда

$$\varphi_0(x, y) = a_1 x + \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta_i(y) P_5^i(x, 0), \quad (4.3)$$

где  $\vartheta_i(y) = \sum_{k=0}^{Ki} b_{k0}^{(i)} \cos k\pi y$ ,  $K \in \mathbb{N}$ ,  $b_{k0}^{(i)} = \text{const}$ .

Подставляя ряд (4.1) в уравнение (2.2) и приравнявая выражения при одинаковых степенях  $P_5$ , получим последовательность линейных уравнений в частных производных параболического типа

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{1}{2b_1 i} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{a_1 b_1}{2} i u_i + R_i(t, y), \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} R_i(t, y) = & -\frac{a_1 b_1}{2i} \left[ -f u_{i-1} (2i^2 - 3i + 1) + f^2 u_{i-2} (i-2)(i-1) \right] \\ & - \frac{b_1^2}{2i} \sum_{m+n=i} \left[ -u_m u_n m n^2 + u_m m (2n^2 - 3n + 1) f u_{n-1} \right. \\ & \left. - u_m m f^2 u_{n-2} (n-2)(n-1) + u_{m-1} (m-1) f u_n n^2 \right. \\ & \left. - f^2 u_{m-1} (m-1) (2n^2 - 3n + 1) u_{n-1} + f^3 u_{m-1} (m-1) u_{n-2} (n-2)(n-1) \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{i} \left[ f(i-1) \frac{\partial u_{i-1}}{\partial t} + f'(i-1) i u_{i-1} - u_{i-2} (i-2)(i-1) f f' \right].$$

Для уравнения (4.4) рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u_i}{\partial y}(-1, t) = \frac{\partial u_i}{\partial y}(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad i \geq 1, \quad (4.5)$$

$$u_i(y, 0) = \vartheta_i(y), \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (4.6)$$

Условие (4.5) обеспечивает выполнение соотношений (2.5) на стенках, а условие (4.6) — удовлетворение начального условия (4.3).

Решение задачи (4.4), (4.5), (4.6) будем искать в виде ряда Фурье

$$u_i(y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(i)}(t) \cos k\pi y. \quad (4.7)$$

Для определения коэффициентов  $b_k^{(i)}(t)$  подставим ряд (4.7) в уравнение (4.4) и введем следующие обозначения:

$$\langle b_s^{(m)} b_j^{(n)} \rangle = \frac{1}{2} \left( \sum_{s+j=k} b_s^{(m)}(t) b_j^{(n)}(t) + \sum_{s-j=k} b_s^{(m)}(t) b_j^{(n)}(t) + \sum_{j-s=k} b_s^{(m)}(t) b_j^{(n)}(t) \right).$$

Тогда коэффициенты  $b_k^{(i)}(t)$  находятся из следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{b}_k^{(i)}(t) - \left( \frac{\pi^2 k^2}{2b_1 i} + \frac{a_1 b_1}{2} i \right) b_k^{(i)} &= \frac{a_1 b_1}{2i} \left[ f b_k^{(i-1)} (2i^2 - 3i + 1) - f^2 b_k^{(i-2)} (i-2)(i-1) \right] \\ &- \frac{b_1^2}{2i} \sum_{m+n=i} \left[ -mn^2 \langle b_s^{(m)} b_j^{(n)} \rangle + m(2n^2 - 3n + 1) f \langle b_s^{(m)} b_j^{(n-1)} \rangle \right. \\ &- m(n-2)(n-1) f^2 \langle b_s^{(m)} b_j^{(n-2)} \rangle + (m-1)n^2 f \langle b_s^{(m-1)} b_j^{(n)} \rangle \\ &- (m-1)(2n^2 - 3n + 1) f^2 \langle b_s^{(m-1)} b_j^{(n-1)} \rangle + (m-1)(n-2)(n-1) f^3 \langle b_s^{(m-1)} b_j^{(n-2)} \rangle \left. \right] \\ &- \frac{1}{i} \left[ f(i-1) \dot{b}_k^{(i-1)} + f'(i-1) i b_k(i-1) - (i-2)(i-1) f f' b_k^{(i-2)} \right] \end{aligned}$$

с начальными условиями, определяемыми начальными данными (4.3)

$$b_k^{(i)}(0) = b_{k0}^{(i)} \quad (i \geq 1, \quad k \geq 0).$$

Обозначив правые части этих уравнений через  $R_{ik}(t)$ , запишем общее решение в виде

$$b_k^{(i)}(t) = e^{i\gamma_{ik}t} \left( b_{k0}^{(i)} + \int_0^t R_{ik}(\tau) e^{-i\gamma_{ik}\tau} d\tau \right), \quad \gamma_{ik} = \left( \frac{\pi^2 k^2}{2b_1 i} + \frac{a_1 b_1}{2} \right). \quad (4.8)$$

Для доказательства сходимости ряда (4.1) оценим функции  $b_k^{(i)}(t)$ . Для этого нам потребуются вспомогательные неравенства.

**Лемма 1.** Пусть функции  $b_l^{(\nu)}(t)$  удовлетворяют неравенствам

$$|b_l^{(\nu)}(t)| \leq \frac{M^\nu e^{-qt}}{\nu^3(l+1)^4}, \quad \nu \geq 1, \quad l \geq 0, \quad M \geq 0. \quad (4.9)$$

Тогда имеют место оценки

$$\left| \sum_{s+j=k} b_s^{(m)}(t) b_j^{(n)}(t) \right| \leq \frac{M^{m+n} e^{-2qt} (2\pi)^4}{45m^3 n^3 (k+1)^4}, \quad (4.10)$$

$$\left| \sum_{s-j=k} b_s^{(m)}(t) b_j^{(n)}(t) \right| \leq \frac{M^{m+n} e^{-2qt} \pi^4}{90m^3 n^3 (k+1)^4}. \quad (4.11)$$

Доказательство этой леммы опирается на неравенство из работы [6]

$$\sum_{m_1 + \dots + m_n = \nu} \frac{1}{m_1^q \dots m_n^q} \leq \left( \frac{4^q \pi^2}{3} \right)^{n-1} \frac{1}{\nu^q}, \quad (4.12)$$

где  $q, n, \nu, m_i \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 2$ ,  $n \geq 2$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Из леммы 1 следует

**Лемма 2.** При выполнении неравенств (4.9) справедливы оценки

$$\left| \langle b_s^{(m)} b_j^{(n)} \rangle \right| \leq \frac{M^{m+n} e^{-2qt} \pi^4}{3m^3 n^3 (k+1)^4}.$$

**Лемма 3.** Пусть выполнены неравенства (4.9) и условия

$$(1) \quad |\dot{b}_l^{(\nu)}(t)| \leq \frac{M^\nu e^{-qt}}{\nu^2 (l+1)^4} h \quad (\nu \geq 1, \quad l \geq 0, \quad h > 0);$$

$$(2) \quad |f(t)| \leq dM, \quad |f'(t)| \leq dM \quad (t \geq 0),$$

где  $f(t) \in C^1[0, \infty)$  — произвольная функция.

Тогда для функции  $R_{N+1, k}$  из формулы (4.8) имеет место оценка

$$|R_{N+1, k}| \leq \frac{e^{-qt} M^{N+1} |a_1 b_1|}{2(k+1)^4 (N+1)^2} \left[ 12d^2 + 9d + \frac{3hd}{|a_1 b_1|} + \frac{\pi^4 |b_1| (\pi^2 + 4)}{3|a_1|} (1 + 19d + 11d^2 + 7d^3) \right].$$

**Доказательство.** Используя лемму 2, выпишем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |R_{N+1, k}| &\leq \frac{e^{-qt} M^{N+1} |a_1 b_1|}{2(k+1)^4 (N+1)^2} \left\{ \frac{2d(N+1)^2}{N^3} + \frac{d^2 N}{(N-1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^4 |b_1| e^{-qt}}{3|a_1|} \sum_{m+n=N+1} \left[ \frac{1}{m^2 n} + \frac{2n^2 d}{m^3 (n-1)^3} + \frac{d^2 (n-1)}{m^2 (n-2)^2} + \frac{d}{(m-1)^2 n} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{d^2 2n^2}{(m-1)^2 (n-1)^2} + \frac{d^3 (n-1)}{(m-1)^2 (n-2)^2} \right] + \frac{2hd}{|a_1 b_1| N} + \frac{d(N+1)}{N^2} + \frac{d^2 N}{(N-1)^2} \right\} \\ &\leq \frac{e^{-qt} M^{N+1} |a_1 b_1|}{2(k+1)^4 (N+1)^2} \left[ 2d \left( 1 + \frac{1}{N} \right)^3 + \frac{d^2 N (N+1)}{(N-1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^4 |b_1| (\pi^2 + 4)}{3|a_1|} \left( 1 + 16d + 3d^2 + \frac{9d}{4} + 8d^2 + 7d^3 \right) + \frac{3hd}{|a_1 b_1|} + \frac{9d}{4} + 6d^2 \right] \\ &\leq \frac{e^{-qt} M^{N+1} |a_1 b_1|}{2(k+1)^4 (N+1)^2} \left[ 12d^2 + 9d + \frac{3hd}{|a_1 b_1|} + \frac{\pi^4 |b_1| (\pi^2 + 4)}{3|a_1|} (1 + 19d + 11d^2 + 7d^3) \right]. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

**Теорема 4.** Пусть  $f(t) \in C^1[0, \infty)$  и выполнены следующие условия:

$$(1) |b_{k0}^{(i)}| \leq \frac{M}{2i^3(k+1)^4}, \quad i \geq 1, \quad k \geq 0, \quad 0 < M < e^{b_1 L}, \quad b_1 < 0;$$

$$(2) a_1 \geq 2|b_1|(\pi^2 + 4)\pi^4;$$

$$(3) 0 \leq f(t) \leq dM, \quad |f'(t)| \leq dM, \quad t \geq 0,$$

$$\text{где } 0 < d \leq \min\left\{\frac{1}{30}, \frac{a_1|b_1|}{9h}\right\}, \quad h = \left|\frac{\pi^2 K^2}{b_1} + a_1 b_1\right|.$$

Тогда ряд (4.1) с базисной функцией (4.2) является решением задачи  $B$  с точным удовлетворением дополнительных краевых условий (2.5), с заданными начальными данными (4.3) и специальными краевыми условиями, порождаемыми произвольной функцией  $f(t)$ , в области  $D_5 = \{(x, y, t): t \geq 0, 0 \leq x \leq L, -1 \leq y \leq 1\}$ .

**Доказательство.** Доказательство также будем проводить методом математической индукции. Справедливы следующие неравенства:

$$|b_k^{(\nu)}(t)| \leq \frac{M^\nu e^{-qt}}{\nu^3(k+1)^4} \quad (k = \overline{1, \nu K}), \quad (4.13)$$

$$|\dot{b}_k^{(\nu)}(t)| \leq \frac{M^\nu e^{-qt}}{\nu^2(k+1)^4} h \quad (q = \frac{a_1|b_1|}{2}, \quad t \geq 0). \quad (4.14)$$

При  $\nu = 1$  из равенства (4.8) находим

$$|b_k^{(1)}(t)| = |b_{k0}^{(1)} e^{\gamma_{1k} t}| \leq e^{-qt} |b_{k0}^{(1)}| \leq \frac{M e^{-qt}}{2(k+1)^4},$$

$$|\dot{b}_k^{(1)}(t)| \leq \frac{|\gamma_{1k}| M e^{-qt}}{2(k+1)^4} \leq \frac{M e^{-qt}}{2(k+1)^4} h,$$

и неравенства (4.13), (4.14) выполняются. Предполагая их справедливость при  $\nu = N$ , проведем доказательство при  $\nu = N + 1$ . Используя лемму 3 и формулу (4.8), имеем

$$\begin{aligned} |b_k^{(N+1)}(t)| &\leq e^{(N+1)\gamma_{N+1,k} t} \left( |b_{k0}^{(N+1)}| + \int_0^t |R_{N+1,k}(\tau)| e^{-(N+1)\gamma_{N+1,k} \tau} d\tau \right) \\ &\leq \frac{M^{N+1} e^{-qt}}{2(N+1)^3(k+1)^4} + \frac{M^{N+1} e^{-qt} |a_1 b_1|}{2(N+1)^3(k+1)^4 \gamma_{N+1,k}} \left[ 12d^2 + 9d + \frac{3hd}{|a_1 b_1|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi^4 |b_1|}{3a_1} (\pi^2 + 4)(1 + 19d + 11d^2 + 7d^3) \right] \leq \frac{M^{N+1} e^{-qt}}{(N+1)^3(k+1)^4} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{3hd}{|a_1 b_1|} + \frac{\pi^4 |b_1|}{3a_1} (\pi^2 + 4) \right) \right] \\ &\leq \frac{M^{N+1} e^{-qt}}{(N+1)^3(k+1)^4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{M^{N+1} e^{-qt}}{(N+1)^3(k+1)^4}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (4.13) доказано. Аналогично доказывается и неравенство (4.14).

Заметим, что так как функции  $\vartheta_i(y)$ , используемые для определения начальных условий (4.3), представимы в виде конечных отрезков ряда, то коэффициенты ряда  $u_i(y, t)$  имеют такой же вид

$$u_i(y, t) = \sum_{k=0}^{Ki} b_k^i(t) \cos k\pi y.$$

Для  $i \geq 1$  с учетом неравенств (4.13), (4.14) при  $t \geq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$  справедливы оценки

$$|u_i(y, t)| \leq \frac{M^i e^{-qt} \pi^4}{90i^3}, \quad \left| \frac{\partial u_i(y, t)}{\partial t} \right| \leq \frac{M^i e^{-qt} \pi^4}{90i^2} h, \quad \left| \frac{\partial^2 u_i(y, t)}{\partial^2 y} \right| \leq \frac{M^i e^{-qt} \pi^2}{6i^3},$$

с учетом которых на множестве  $D_5$  можно оценить ряд (4.1)

$$|\varphi(x, y, t) - a_1 x| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i(y, t)|}{(e^{b_1 x} + f(t))} \leq e^{-qt} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{M}{e^{b_1 L}} \right)^i \frac{1}{i^3} \leq \frac{e^{-qt} \pi^2}{6}.$$

Аналогично оцениваются ряды, соответствующие  $\varphi_x$ ,  $\varphi_{xx}$ ,  $\varphi_{yy}$ . Теорема 4 доказана.

Использование рядов  $K_{yt}$  позволяет решать задачу  $B$  при специальных краевых условиях, определяемых произволом функции  $f(t)$ . Далее будет показано, что применение рядов  $K_{xy}$  позволит решить задачу  $B$  с заданными краевыми условиями, но с начальными условиями, порождаемыми произвольной функцией  $f(x)$ . Дополнительное краевое условие (2.5) также будет удовлетворено точно.

*Использование рядов  $K_{xy}$ .*

Рассмотрим ряд

$$\varphi(x, y, t) = ax + \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x, y) P_6^i(x, t), \quad a > 0, \quad (4.15)$$

с базисной функцией

$$P_6(x, t) = \frac{1}{e^{bt} + f(x)}, \quad f(x) \in C^2[0, \infty), \quad b > 0. \quad (4.16)$$

Подставляя ряд (4.15) в уравнение (2.2) и приравнявая выражения при одинаковых степенях базисной функции (4.16), получим последовательность линейных гиперболических уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{2b}{a} i \frac{\partial u_i}{\partial x} + R_i(x, y), \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} R_i(x, y) = & -\frac{2b}{a} f'(i-1) i u_{i-1} - \frac{2fb}{a} (i-1) \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x} + \frac{2ff'b}{a} (i-2)(i-1) u_{i-2} \\ & + f''(i-1) u_{i-1} + 2f'(i-1) \frac{\partial u_{i-1}}{\partial x} - (f')^2 (i-2)(i-1) u_{i-2} - \frac{1}{a} \sum_{\substack{m \neq 0 \\ m+n=i}} \frac{\partial u_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{a} \sum_{m+n=i} \left[ f''(n-1) \frac{\partial u_m}{\partial x} u_{n-1} + 2f'(n-1) \frac{\partial u_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - (f')^2 (n-2)(n-1) \frac{\partial u_m}{\partial x} u_{n-2} \right. \\ & \quad \left. + f'(m-1) u_{m-1} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - f' f'' (m-1)(n-1) u_{m-1} u_{n-1} \right. \\ & \quad \left. - 2(f')^2 (m-1)(n-1) u_{m-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + (f')^3 (m-1)(n-2)(n-1) u_{m-1} u_{n-2} \right]. \end{aligned}$$

Для уравнения (4.17) рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u_i}{\partial y}(x, 1) = \frac{\partial u_i}{\partial y}(x, -1) = 0, \quad i \geq 1, \quad (4.18)$$

$$u_i(0, y) = \vartheta_i(y), \quad \frac{\partial u_i}{\partial x}(0, y) = \omega_i(y). \quad (4.19)$$

Условия (4.18) обеспечивают выполнение краевых условий (2.5), а условия (4.19) позволяют рассматривать для задачи  $B$  краевые условия (2.4) следующего вида:

$$\begin{aligned}\varphi(0, y, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\vartheta_i(y)}{[e^{bt} + f(0)]^i}, \\ \varphi_x(0, y, t) &= a + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i(y) - (i-1)f'(0)\omega_{i-1}(y)}{[e^{bt} + f(0)]^i},\end{aligned}\tag{4.20}$$

где

$$\vartheta_i(y) = \sum_{k=0}^{Ki} b_{k0}^{(i)} \cos k\pi y, \quad \omega_i(y) = \sum_{k=0}^{Ki} b_{k1}^{(i)} \cos k\pi y,$$

$K \in \mathbb{N}$ ,  $b_{k0}^{(i)}, b_{k1}^{(i)} = \text{const}$ . Тогда решение задачи (4.16)–(4.19) имеет вид

$$u_i(x, y) = \sum_{k=0}^{Ki} b_k^{(i)}(x) \cos k\pi y,$$

где функции  $b_k^{(i)}(x)$  находятся последовательно из линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}\ddot{b}_k^{(i)}(x) &= -\frac{\pi^2 k^2}{a} b_k^{(i)}(x) + \frac{2bi}{a} \dot{b}_k^{(i)}(x) + R_{ik}(x), \\ \dot{b}_k^{(i)}(0) &= b_{k1}^{(i)}, \quad \dot{b}_k^{(i)}(0) = b_{k0}^{(i)} \quad (i \geq 1, \quad k = \overline{0, Ki}).\end{aligned}\tag{4.21}$$

Здесь функция  $R_{ik}(x)$  имеет вид

$$\begin{aligned}R_{ik}(x) &= -\frac{2b}{a} f'(i-1) i b_k^{(i-1)} - \frac{2fb}{a} (i-1) \dot{b}_k^{(i-1)} + \frac{2ff'b}{a} (i-2)(i-1) b_k^{(i-2)} \\ &+ f''(i-1) b_k^{(i-1)} + 2f'(i-1) \dot{b}_k^{(i-1)} - (f')^2 (i-2)(i-1) b_k^{(i-2)} - \frac{1}{a} \sum_{\substack{m+n=i \\ m \neq 0}} \langle \ddot{b}_s^{(m)} \dot{b}_j^{(n)} \rangle \\ &+ \frac{1}{a} \sum_{m+n=i} \left[ f''(n-1) \langle \dot{b}_s^{(m)} b_j^{(n-1)} \rangle + 2f'(n-1) \langle \dot{b}_s^{(m)} \dot{b}_j^{(n-1)} \rangle - (f')^2 (n-2)(n-1) \langle \dot{b}_s^{(m)} b_j^{(n-2)} \rangle \right. \\ &\quad \left. + f'(m-1) \langle b_s^{(m-1)} \ddot{b}_j^{(n)} \rangle - f'f''(m-1)(n-1) \langle b_s^{(m-1)} b_j^{(n-1)} \rangle \right. \\ &\quad \left. - 2(f')^2 (m-1)(n-1) \langle b_s^{(m-1)} \dot{b}_j^{(n-1)} \rangle + (f')^3 (m-1)(n-2)(n-1) \langle b_s^{(m-1)} b_j^{(n-2)} \rangle \right].\end{aligned}$$

**Лемма 4.** Пусть  $f(x) \in C^2[0, \infty)$  и выполнены условия

(1) для постоянных  $d > 0$ ,  $c > 0$

$$|f(x)| \leq de^{cx}, \quad |f'(x)| \leq de^{cx}, \quad |f(x)''| \leq de^{cx} \quad (x \geq 0);$$

(2) для постоянной  $M > 0$  при  $i \geq 1$ ,  $k = \overline{0, Ki}$

$$|b_k^{(i)}(x)| \leq \frac{Me^{cxi}}{i^3(k+1)^4}, \quad |\dot{b}_k^{(i)}(x)| \leq \frac{Me^{cxi}}{i^2(k+1)^4}, \quad |\ddot{b}_k^{(i)}(x)| \leq \frac{Me^{cxi}}{i(k+1)^4}.$$

Тогда при  $a > 0$ ,  $b > 0$  для функции  $R_{N+1,k}$  из уравнения (4.21) следует оценка:

$$|R_{N+1,k}| \leq \frac{Mbe^{c(N+1)x}}{a(k+1)^4(N+1)} \left[ 12d(d+1) + \frac{6ad^2}{b} + \frac{5ad}{b} + \frac{M\pi^4(\pi^2+4)}{3b} (1+10d+30d^2+24d^3) \right].$$

Доказательство леммы проводится с использованием леммы 2 аналогично тому, как это сделано в лемме 3.

Введем следующие обозначения:

$$q_{ik} = 1 + \sqrt{1 - \frac{ak^2\pi^2}{b^2i^2}}, \quad \beta_{ik} = 1 - \sqrt{1 - \frac{ak^2\pi^2}{b^2i^2}},$$

$$c_{ki}^{(2)} = \frac{q_{ik}l_{k0}^{(i)} - \frac{a}{bi}l_{k1}^{(i)}}{2(q_{ik} - 1)}, \quad c_{ki}^{(1)} = b_{k0}^{(i)} - c_{ki}^{(2)}.$$

Тогда решение уравнения (4.21) запишется в виде

$$b_k^{(i)}(x) = c_{ki}^{(1)} e^{\frac{b}{a}iq_{ik}x} + c_{ki}^{(2)} e^{\frac{b}{a}i\beta_{ik}x} + \frac{a}{bi(q_{ik} - 1)} \left[ e^{\frac{b}{a}iq_{ik}x} \int_0^x R_{ik}(\tau) e^{-\frac{b}{a}iq_{ik}\tau} d\tau - e^{-\frac{b}{a}i\beta_{ik}x} \int_0^x R_{ik}(\tau) e^{\frac{b}{a}i\beta_{ik}\tau} d\tau \right]. \quad (4.22)$$

**Теорема 5.** Пусть  $f(x) \in C^2[0, \infty)$  и выполнены следующие условия:

- (1)  $b \geq 13\pi^2 K^2$ ,  $\frac{b^2}{4\pi^2 K^2} \leq a \leq \frac{b^2}{2\pi^2 K^2}$ ;
- (2)  $0 < r \leq f(x) \leq de^{dx}$ ,  $|f'(x)| \leq de^{dx}$ ,  $|f''(x)| \leq de^{dx}$ ,  $x \geq 0$ ,  $r \leq d = \frac{1}{3b^2}$ ;
- (3)  $|c_{ki}^{(\nu)}| \leq \frac{M}{8i^3(k+1)^4}$ ,  $\nu = 1, 2$ ,  $0 < M \leq \frac{1}{4\pi^4(\pi^2 + 4)}$ .

Тогда ряд (4.15) с базисной функцией (4.16) является решением задачи В с точным удовлетворением дополнительных краевых условий (2.5), со специальными начальными данными, порождаемыми произвольной функцией  $f(x)$ , и с заданными краевыми условиями (4.20) в области  $D_6 = \left\{ (x, y, t): t \geq 0, 0 \leq x \leq \frac{b}{1 + 7\pi^2 K^2} \ln(1 + r), -1 \leq y \leq 1 \right\}$ .

**Доказательство.** Доказательство также проводится методом математической индукции. При  $i \geq 1$ ,  $k = \overline{0, K}$ ,  $x \geq 0$  и  $c = \frac{7\pi^2 K^2 + 1}{b}$  справедливы следующие неравенства:

$$|b_k^{(i)}(x)| \leq \frac{Me^{cxi}}{i^3(k+1)^4}, \quad |\dot{b}_k^{(i)}(x)| \leq \frac{Me^{cxi}}{i^2(k+1)^4}, \quad |\ddot{b}_k^{(i)}(x)| \leq \frac{Me^{cxi}}{i(k+1)^4} \quad (x \geq 0).$$

Докажем, например, первое неравенство. При  $i = 1$  функции  $R_{1k} \equiv 0$ . Следовательно, для любого  $k$  эти неравенства справедливы. Предполагая их справедливость при  $i = N$ , проведем доказательство для  $i = N + 1$ . Воспользовавшись леммой 4 и условиями теоремы, получим для  $R_{N+1,k}(x)$  неравенство

$$|R_{N+1,k}| \leq \frac{Mbe^{c(N+1)x}}{a(k+1)^4(N+1)} \left[ 12d(d+1) + \frac{b}{2\pi^2}(6d^2 + 5d) + \frac{(1+4d)^3}{12b} \right],$$

которое применим к оценке функций  $|b_k^{(N+1)}(x)|$ . Из формулы (4.22) получим

$$|b_k^{(N+1)}(x)| \leq \frac{Me^{c(N+1)x}}{(k+1)^4(N+1)^3} \left\{ \frac{(k+1)^4(N+1)^3}{M} \left( |c_{k,N+1}^{(1)}| + |c_{k,N+1}^{(2)}| \right) + \frac{4b}{\sqrt{3}} \left[ 12d(d+1) + \frac{b}{2\pi^2}(6d^2 + 5d) + \frac{(1+4d)^3}{12b} \right] \right\}$$



$$\begin{aligned} &\leq \frac{Me^{c(N+1)x}}{(k+1)^4(N+1)^3} \left[ \frac{1}{4} + \frac{48bd}{\sqrt{3}}(d+1) + \frac{b^2 4d}{\sqrt{3} 2\pi^2}(6d+5) + \frac{(1+4d)^3}{3\sqrt{3}} \right] \\ &\leq \frac{Me^{c(N+1)x}}{(k+1)^4(N+1)^3} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{Me^{c(N+1)x}}{(k+1)^4(N+1)^3}. \end{aligned}$$

Оценка для  $|b_k^{(i)}(x)|$  доказана. Аналогично доказываются оценки и для функций  $|\dot{b}_k^{(i)}(x)|$  и  $|\ddot{b}_k^{(i)}(x)|$ .

Теперь нетрудно доказать сходимость ряда (4.15) с базисной функцией (4.16) на множестве  $D_6$ . Действительно,

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y, t)| &= |ax| + \sum_{i=1}^{\infty} |u_i(x, y)| |P_6^i(x, t)| \leq |ax| + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{Ki} \|b_k^{(i)}(x)\| \cos k\pi y |P_6^i(x, t)| \\ &\leq |ax| + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{Ki} \frac{Me^{cix}}{(k+1)^4 i^3} \frac{1}{[e^{bt} + f(x)]^i} \leq |ax| + \frac{\pi^4}{90} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} \left[ \frac{e^{cx}}{1+r} \right]^i \leq |ax| + \frac{\pi^6}{540}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и сходимость рядов соответствующих производных. Теорема 5 доказана.

**З а м е ч а н и е 4.** В работах Е.В. Мамонтова при доказательстве существования классического решения задач  $A$  и  $B$  на конечном промежутке времени требовалась аналитичность начальных и краевых функций по своим переменным. Специальные ряды, построенные выше в классах функций конечной гладкости, будут сходиться при всех  $t \geq 0$ .

### 5. Результаты численного эксперимента по нестационарному околосзвуковому обтеканию клина

В этом параграфе приведены результаты численных расчетов по применению ряда  $K_{yt}$  к решению задачи  $B$ , когда вместе с начально-краевыми условиями задачи  $B$  следует дополнительно задать краевые условия, возникающие при обтекании тела, расположенного на оси  $x = 0$ , набегающим околосзвуковым потоком газа.

Пусть на оси  $x = 0$  находится тело  $y = h(x)$ . Тогда дополнительно потребуется задать краевое условие [23]

$$\varphi_y(x, 0, t) = h'(x), \quad x \geq 0. \tag{5.1}$$

Для представления решения уравнения (2.2) воспользуемся следующим рядом  $K_{yt}$ :

$$\varphi(x, y, t) = a_1 x + a_2 y + \sum_{i=1}^{\infty} P_5^i(x, t) \sum_{k=0}^{Ki} b_k^{(i)}(t) \cos k\pi y, \quad a_2 = \text{const}. \tag{5.2}$$

От ряда (4.1) ряд (5.2) отличается только присутствием слагаемого  $a_2 y$ , которое и будет использовано для задания на оси  $x = 0$  клина. Действительно, условие (5.1) для ряда (5.2) имеет вид

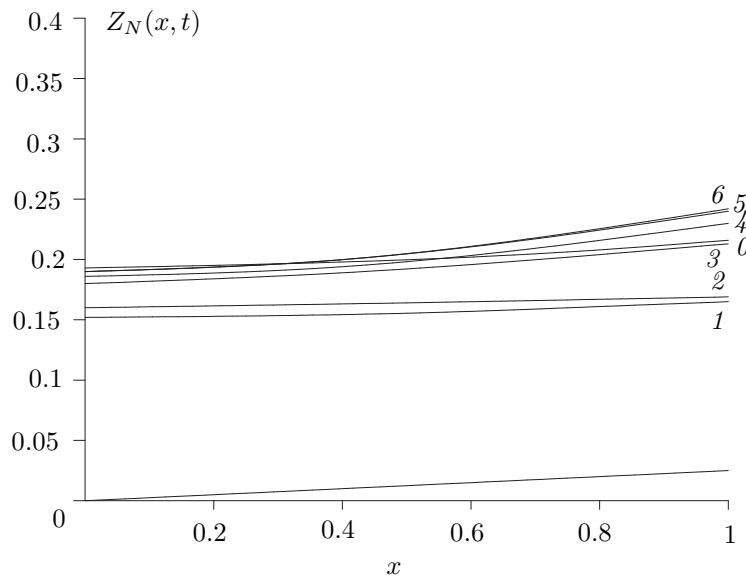
$$\varphi_y(x, 0, t) = h'(x) = a_2.$$

Следовательно,  $h(x) = a_2 x$  и обтекаемое тело есть клин. Если  $a_2$  — функция времени, то мы имеем клин с изменяющимся во времени углом раствора.

В численных расчетах в качестве начальных данных берутся функции вида

$$\varphi_0(x, y) = a_1 x + a_2 y + \sum_{i=1}^{N_1} P_5^i(x, 0) \sum_{k=0}^{Ki} b_{k0}^{(i)} \cos k\pi y, \quad N_1, K \in \mathbb{N},$$

а краевые условия порождаются функцией  $f(t) = c \sin \pi t$ ,  $c = \text{const}$ . Как показывают расчеты, такие условия осуществляют поворот вектора скорости потока против часовой стрелки относительно оси  $x = 0$ . При дальнейшем увеличении  $t$  ( $t > 0.5$ ) быстро устанавливается стационарный поток. Таким образом, возмущения, вызванные краевыми условиями, затухают (в теореме 4 было показано, что это затухание происходит по экспоненциальному закону).



Число Маха на клине.

На рисунке цифрами  $N > 1$  обозначены кривые, соответствующие  $Z_N(x, t) = M_N(x, t) - 1$ , где  $M_N(x, t)$  — число Маха на клине, найденное с помощью  $N$  членов ряда (5.2) при  $t = 0.1$ . Цифрой 0 обозначено начальное распределение  $Z(x, 0)$  на клине и цифрой 1 — положение кривой 5 при  $t = 0.5$ . Из приведенных расчетов видно, что ряд (5.2) достаточно быстро сходится и уже при  $N > 5$  кривые  $Z_N(x, t)$  практически совпадают с  $Z_5(x, t)$ .

Таким образом, используя ряд (5.2), можно описать переход нестационарного решения уравнения (2.2) к его стационарному решению.

В заключение автор выражает благодарность Е.В. Мамонтову за полезное обсуждение результатов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F.** Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. Vol. 8, no. 2. P. 101–125.
2. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
3. **Титов С.С.** Решение уравнений с особенностями в аналитических шкалах банаховых пространств: Препринт. Екатеринбург: УрГАХА, 1999.
4. **Филимонов М.Ю.** Применение специальных рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными в неограниченных областях // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 11. С. 1538–1543.
5. **Filimonov M.Yu.** Application of special series in proof of new theorems of existence of solutions of boundary-initial problems of nonlinear evolutionary equations // Proceedings of XXXV summer school-conference APM, 2007. St. Petersburg, 2007. P. 103–109.
6. **Филимонов М.Ю.** О представлении решений смешанных задач для нелинейного волнового уравнения специальными двойными рядами // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1625–1632.
7. **Филимонов М.Ю.** Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений двумерного уравнения фильтрации // Математическое моделирование и проблемы экологической безопасности: Тр. всерос. конф. Ростов-на-Дону, 2000. С. 216–221.

8. **Filimonov M.Yu.** Application of the method of special series in nonlinear mathematical physics // Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 1. 2004. P. 58–77.
9. **Vaganova N.A.** Constructing new classes of solutions of nonlinear filtration equation by special consistent series // Proc. of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 2. 2003. P. 182–193.
10. **Филимонов М.Ю.** Применение метода специальных рядов для представления решений уравнения нестационарных течений газа // Тр. Ин-та механики. Уфа: Гилем, 2007. Вып. 5. С. 300–306.
11. **Сидоров А.Ф.** О некоторых представлениях решений квазилинейных гиперболических уравнений // Численные методы механики сплошной среды. 1975. Т. 6, № 4. С. 106–115.
12. **Титов С.С.** Разложение решений нелинейных уравнений в двойные ряды // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 10. С. 1844–1850.
13. **Филимонов М.Ю.** Применение обобщенных систем базисных функций при построении решений нелинейных уравнений с частными производными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 4.
14. **Коковихина О.В., Сидоров А.Ф.** Специальные конструкции рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными // Численные методы механики сплошной среды. 1984. Т. 15, № 3. С. 72–84.
15. **Lin C.C., Reissner E., Tsien H.S.** On two-dimensional nonsteady motion of a slender body in a compressible fluid // J. Math. and Phys. 1948. Vol. 27, no. 3.
16. **Рыжов О.С.** Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М.: ВЦ АН СССР, 1965.
17. **Овсянников Л.В.** Уравнения околосзвукового движения газа // Вестник ЛГУ. 1952. Вып. 6. С. 47–54.
18. **Мамонтов Е.В.** К теории нестационарных околосзвуковых течений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 185, № 3. С. 538–540.
19. **Мамонтов Е.В.** К теории нестационарных околосзвуковых течений газа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973.
20. **Овсянников Л.В.** Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 789–792.
21. **Титов С.С., Курмаева К.В.** Обобщение аналитических решений Л.В. Овсянникова для трансзвуковых течений // Прикл. механика и техн. физика. 2005. Т. 46, № 6. С. 14–25.
22. **Титов С.С., Курмаева К.В.** Аналитическое построение ближнего поля трансзвукового течения около тонкого тела вращения // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. Т. 8, № 3(23). С. 93–101.
23. **Коул Дж.** Методы возмущения в прикладной математике. М.: Мир, 1972.

Поступила 9.11.2007

УДК 519.633

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФфуЗИИ<sup>1</sup>****И. В. Целищева, Г. И. Шишкин**

Рассматривается краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии в прямоугольной области по  $x$  и  $t$ ; возмущающий параметр  $\varepsilon$  при старшей производной принимает произвольные значения из полуинтервала  $(0,1]$ . Для краевой задачи строится схема метода прямых по  $x$ , проходящих через  $N_0 + 1$  узлов сетки по  $t$ . Для решения задачи на системе отрезков применяется метод декомпозиции области (на перекрывающихся подобластях с шириной перекрытия  $\delta$ ), являющийся модификацией метода Шварца. Для непрерывных схем метода декомпозиции исследуется влияние последовательных и параллельных вычислений, очередности последовательности, в которой решаются подзадачи на подобластях, и величины параметра  $\varepsilon$  (как и величин  $N_0, \delta$ ) на скорость сходимости схемы декомпозиции (при  $N_0 \rightarrow \infty$ ), а также на вычислительные затраты на решение схемы и на время, требующееся для ее решения (до достижения заданной погрешности). Для уравнений конвекции-диффузии, в отличие от реакции-диффузии, последовательная схема оказывается эффективнее, чем параллельная.

**1. Введение**

В настоящее время специальные сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных задач, позволяющие получать сеточные решения, сходящиеся равномерно относительно возмущающего параметра  $\varepsilon$  (сходящиеся  $\varepsilon$ -равномерно; описание специальных методов см., например, в [1–4] и библиографию там же), рассматриваются в основном на достаточно простых областях, что сужает область их применимости. Отметим также, что разработка эффективных алгоритмов решения для  $\varepsilon$ -равномерно сходящихся численных методов практически не рассматривалась.

В этой связи отметим привлекательные численные методы на основе декомпозиции области, хорошо разработанные для регулярных краевых задач (см., например, [5–8] и библиографию там же). Такие методы позволяют свести решение задачи на достаточно сложных областях к решению задач на достаточно простых областях. Использование параллельных вариантов метода декомпозиции позволяет ускорить решение задачи. Таким образом, разработка  $\varepsilon$ -равномерно сходящихся методов декомпозиции для сингулярно возмущенных краевых задач является актуальной. В случае сингулярно возмущенных задач методы Шварца и их  $\varepsilon$ -равномерная сходимость исследовались в [9] для одномерных уравнений реакции-диффузии и в [10] для двумерных уравнений конвекции-диффузии.

Известно (см., например [11, 12]), что в случае сингулярно возмущенных параболических уравнений реакции-диффузии распараллеливание  $\varepsilon$ -равномерно сходящихся схем приводит к ускорению решения декомпозируемой сеточной задачи, причем ошибка, вызванная декомпозицией задачи, существенно меньше, чем ошибка, вызванная дискретизацией краевой задачи. Затраты на решение параллельной схемы лишь незначительно превышают затраты на решение декомпозируемой задачи. Причем вычислительные затраты на решение последовательного и

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 07-01-00729), Булевского центра исследований по информатике при Национальном университете Ирландии (г. Корк), а также Ассоциации MACSI по приложениям математики в науке и технике в Ирландии по математической инициативе Научного фонда Ирландии.

параллельного вариантов схем близки. Время решения декомпозируемой задачи уменьшается практически в  $P$  раз, где  $P$  — число процессоров, что обеспечивает преимущество параллельных методов в эффективности по сравнению с последовательными. Подобные эффекты проявляются и в случае континуальных методов декомпозиции.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для сингулярно возмущенного параболического уравнения конвекции-диффузии в прямоугольной области по  $x$  и  $t$ . Строятся и исследуются схемы континуального метода декомпозиции на основе последовательных и параллельных вычислений на подобластях, когда вычисления подзадач (на подобластях) проводятся на одном временном слое. Характер поведения методов декомпозиции для сингулярно возмущенных параболических уравнений конвекции-диффузии существенно отличен от методов декомпозиции для уравнений реакции-диффузии. Ошибка континуального метода декомпозиции области (последовательного и параллельного) существенно зависит от того, в каком порядке (по потоку либо против потока) располагаются подобласти, на которых решаются подзадачи декомпозиции; наименьшая ошибка получается в том случае, когда подобласти располагаются по потоку. При малых значениях  $\varepsilon$  распараллеливание последовательного варианта схемы декомпозиции с ростом числа процессоров приводит к чрезвычайно большому нарастанию ошибки декомпозиции. Вычислительные затраты для параллельной схемы и время, требующееся для ее решения, много больше, чем для последовательной схемы, имеющей точность параллельной схемы (в случае растущего числа подобластей декомпозиции). Эффективность параллельных схем снижается с ростом  $P$ ; при большом числе подобластей разбиения последовательная схема оказывается эффективнее, чем параллельная.

## 2. Постановка задачи. Цель работы

### 2.1. На множестве

$$\bar{G}, \quad \text{где} \quad \bar{G} = G \cup S, \quad G = D \times (0, T], \quad D = (0, d), \quad (2.1)$$

рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G, \quad (2.2a)$$

$$u(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S. \quad (2.2б)$$

Здесь

$$L = L^{(2)} + L^{(1)}, \quad L^{(2)} \equiv \varepsilon a(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L^{(1)} \equiv b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} - c(x, t) - p(x, t) \frac{\partial}{\partial t},$$

$a, b, c, p, f$  и  $\varphi$  — достаточно гладкие функции соответственно на  $\bar{G}$  и  $\bar{S}^L, \bar{S}^R, S^B, \varphi \in C(S)$ , удовлетворяющие условию<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} a_0 \leq a(x, t) \leq a^0, \quad b_0 \leq b(x, t) \leq b^0, \quad 0 \leq c(x, t) \leq c^0, \quad p_0 \leq p(x, t) \leq p^0, \\ a_0, b_0, p_0 > 0, \quad |f(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in \bar{G}, \quad |\varphi(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in S; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$S^L, S^R, S^B$  — левая, правая и нижняя части границы множества  $G$ ,  $S^B = \bar{S}^B$ ; параметр  $\varepsilon$  принимает произвольные значения из интервала  $(0, 1]$ .

Для простоты считаем, что на множестве угловых точек  $S^B \cap \{\bar{S}^L \cup \bar{S}^R\}$  выполнены условия согласования [13], обеспечивающие достаточную гладкость решений задачи при каждом фиксированном значении  $\varepsilon$ . При стремлении параметра  $\varepsilon$  к нулю в окрестности множества  $S^L$  появляется (экспоненциальный) регулярный погранслой.

<sup>2</sup> Здесь и ниже через  $M, M_i$  (через  $m$ ) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$  и от параметров разностных схем. Запись  $L_{(j,k)} (m_{(j,k)}, D_{h(j,k)})$  означает, что эти операторы (постоянные, сетки) введены в формуле  $(j,k)$ .

В следующих подразделах для краевой задачи (2.2), (2.1) выпишем классическую разностную схему и схему метода прямых по  $x$  и получим оценки для решений этих схем.

**2.2.** Рассмотрим разностную схему для задачи (2.2), (2.1).

На множестве  $\overline{G}$  введем сетку

$$\overline{G}_h = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_0, \quad (2.4)$$

где  $\overline{\omega}_1$  и  $\overline{\omega}_0$  — сетки на  $\overline{D}$  и  $[0, T]$  соответственно, вообще говоря, неравномерные. Полагаем  $h^i = x^{i+1} - x^i$ ;  $x^i, x^{i+1} \in \overline{\omega}_1$ ,  $h = \max_i h_i$ ;  $h_t^j = t^{j+1} - t^j$ ;  $t^j, t^{j+1} \in \overline{\omega}_0$ ,  $h_t = \max_j h_t^j$ ;  $N + 1$  и  $N_0 + 1$  — число узлов сетки  $\overline{\omega}_1$  и  $\overline{\omega}_0$  соответственно. Считаем выполненным условие  $h \leq MN^{-1}$ ,  $h_t \leq MN_0^{-1}$ .

На сетке  $\overline{G}_{h(2.4)}$  краевой задаче (2.2), (2.1) сопоставим разностную схему [14]

$$\begin{aligned} \Lambda z(x, t) &= f(x, t), & (x, t) \in G_h, \\ z(x, t) &= \varphi(x, t), & (x, t) \in S_h. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь  $G_h = G \cap \overline{G}_h$ ,  $S_h = S \cap \overline{G}_h$ ,

$$\Lambda z(x, t) \equiv \{\varepsilon a(x, t) \delta_{\overline{x}\overline{x}} + b(x, t) \delta_x - c(x, t) - p(x, t) \delta_{\overline{t}}\} z(x, t),$$

$\delta_{\overline{x}\overline{x}} z(x, t)$  и  $\delta_x z(x, t)$ ,  $\delta_{\overline{t}} z(x, t)$  — вторая и первые (вперед и назад) разностные производные;

$$\delta_{\overline{x}\overline{x}} z(x, t) = 2(h^i + h^{i-1})^{-1} [\delta_x z(x, t) - \delta_{\overline{x}} z(x, t)], \quad x = x^i, \quad (x, t) \in G_h.$$

Разностная схема (2.5), (2.4) является монотонной [14]  $\varepsilon$ -равномерно на сетках с произвольным распределением узлов.

**2.3.** Рассмотрим схему метода прямых по  $x$ , используемую для решения задачи (2.2), (2.1) [15].

На множестве  $\overline{G}$  введем “сетку” — набор отрезков, параллельных оси  $x$ :

$$\overline{G}^\tau = \overline{D} \times \overline{\omega}_0, \quad (2.6)$$

где  $\overline{D} = \overline{D}_{(2.1)}$ ,  $\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_{0(2.4)}$ . Задаче (2.2), (2.1) сопоставим “разностную” (полудискретную) схему

$$\Lambda^\tau u^\tau(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G^\tau, \quad (2.7a)$$

$$u^\tau(x, t) = \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S^\tau. \quad (2.7b)$$

Здесь  $G^\tau = G \cap \overline{G}^\tau$ ,  $S^\tau = S \cap \overline{G}^\tau$ ,

$$\Lambda^\tau u^\tau(x, t) \equiv \left\{ \varepsilon a(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} - c(x, t) - p(x, t) \delta_{\overline{t}} \right\} u^\tau(x, t).$$

Совокупность из набора отрезков  $\overline{G}^\tau$  и краевых задач для дифференциально-разностных уравнений (2.7a) (обыкновенных дифференциальных уравнений по  $x$ ) назовем *континуальной разностной схемой*, получаемой дискретизацией задачи (2.2), (2.1) по  $t$ .

Континуальная разностная схема (2.7), (2.6) является монотонной  $\varepsilon$ -равномерно на множествах  $\overline{G}^\tau$  с произвольным распределением узлов сетки  $\overline{\omega}_0$ .

Монотонность схемы (2.7), (2.6) устанавливается подобно монотонности разностной схемы (2.5), (2.4); см., например, [14].

**2.4.** Приведем оценки скорости сходимости разностной схемы (2.5), (2.4) и континуальной схемы (2.7), (2.6) и сформулируем цель исследования.

Здесь мы используем априорные оценки решений краевой задачи (2.2), (2.1) (см., например, [2, 16]). Для компонент из представления

$$u(x, t) = U(x, t) + V(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G},$$

где  $U(x, t)$  и  $V(x, t)$  — регулярная и сингулярная части решения, имеют место оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} U(x, t) \right| &\leq M[1 + \varepsilon^{2-k}], \\ \left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} V(x, t) \right| &\leq M\varepsilon^{-k} \exp(-m\varepsilon^{-1}x), \quad (x, t) \in \overline{G}, \quad k + 2k_0 \leq 4, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $m$  — произвольное число из интервала  $(0, m_0)$ ,  $m_0 = \min_{\overline{G}}[a^{-1}(x, t)b(x, t)]$ .

С учетом этих оценок, с использованием техники мажорантных функций (см., например, [1, 2, 17]), устанавливаются оценки

$$|u(x, t) - u^\tau(x, t)| \leq MN_0^{-1}, \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau; \quad (2.9)$$

$$|u(x, t) - z(x, t)| \leq M[(\varepsilon + N^{-1})^{-1}N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x, t) \in \overline{G}_h. \quad (2.10)$$

Оценки (2.9) и (2.10) нелучшаемы по вхождению величин  $N_0$  и  $N, N_0, \varepsilon$  соответственно. Разностная схема (2.5), (2.4) сходится при условии

$$N^{-1} = o(\varepsilon). \quad (2.11)$$

Разностные схемы для задачи (2.2), (2.1), сходящиеся  $\varepsilon$ -равномерно, рассматриваются в [1, 2, 4, 17].

Ошибка решения континуальной схемы (2.7), (2.6) есть компонента ошибки решения разностной схемы (2.5), (2.4), порождаемая дискретизацией краевой задачи по переменной  $t$ .

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть для компонент решений краевой задачи (2.2), (2.1) выполняется оценка (2.8). Тогда континуальная разностная схема (2.7), (2.6) сходится  $\varepsilon$ -равномерно; разностная схема (2.5), (2.4) сходится при условии (2.11). Для решений  $u^\tau(x, t)$  и  $z(x, t)$  континуальной и разностной схем справедливы оценки (2.9) и (2.10).

Разностная схема (2.5), (2.4) есть схема, получаемая из континуальной разностной схемы (2.7), (2.6) дискретизацией ее по  $x$ .

Наша цель — для краевой задачи (2.2), (2.1) построить последовательные и параллельные континуальные схемы метода декомпозиции и исследовать затраты на решение задачи и время, требуемое для решения задачи, а также ошибки, порождаемые этими методами декомпозиции. Кроме того, требуется сравнить эффективность последовательных и параллельных континуальных схем.

Континуальные последовательные схемы декомпозиции строятся и исследуются в разд. 3, 4. Параллельные схемы рассматриваются в разд. 5. Сравнение последовательных и параллельных схем декомпозиции проводится в разд. 6.

### 3. Континуальные последовательные схемы декомпозиции области

Приведем модифицированный метод Шварца для задачи (2.2), (2.1), на основе которого построим континуальную схему метода декомпозиции для континуальной схемы (2.7), (2.6). Далее в разд. 4 обсудим поведение решений континуальной схемы декомпозиции.

**3.1.** Опишем вариант метода Шварца, использующий последовательные вычисления подзадач (см. также [11, 18]).

Пусть множество открытых подобластей

$$D^k, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.1a)$$

с границами  $\Gamma^k$ ,  $\Gamma^k = \Gamma(D^k) = \overline{D^k} \setminus D^k$ ,  $\Gamma^k = \Gamma^{kL} \cup \Gamma^{kR}$ ,  $\Gamma^{kL}$  и  $\Gamma^{kR}$  — левая и правая границы  $D^k$ , образует покрытие области  $D$ :  $D = \bigcup_{k=1}^K D^k$ ;  $\Gamma = \Gamma(D) = \Gamma^L \cup \Gamma^R$ . Пусть  $D^{[k]}$  — объединение подобластей  $D^1, \dots, D^K$ , не содержащих множество  $D^k$

$$D^{[k]} = \bigcup_{i=1, i \neq k}^K D^i. \quad (3.16)$$

Через  $\Delta^k$  обозначим минимальную ширину перекрытия множеств  $\overline{D^k}$  и  $\overline{D^{[k]}}$ , а через  $\Delta$  — наименьшее значение  $\Delta^k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , т.е.

$$\min_{k, x^1, x^2} \rho(x^1, x^2) = \Delta, \quad x^1 \in \overline{D^k}, \quad x^2 \in \overline{D^{[k]}}, \quad x^1, x^2 \notin \{D^k \cap D^{[k]}\}, \quad (3.2a)$$

$k = 1, \dots, K$ , где  $\rho(x^1, x^2)$  — расстояние между точками  $x^1, x^2$ . Вообще говоря, значение  $\Delta$  может зависеть от величины параметра  $\varepsilon$ ,  $\Delta = \Delta_{(3.2)}(\varepsilon)$ .

Считаем, что каждая точка из  $D$  принадлежит не более, чем двум подобластям из (3.1a), откуда следует условие

$$\Delta \leq MK^{-1}, \quad (3.2б)$$

где  $M \leq 2d$ . Далее считаем выполненным условие

$$\Delta \geq mK^{-1}. \quad (3.2в)$$

Будем говорить, что разбиение области  $D$  на подобласти  $D^k$  сбалансировано, если размеры множеств  $D^k$  одного порядка, как и одного порядка величины  $\Delta^k$ .

Приведем модифицированный метод Шварца для задачи (2.2), (2.1). Пусть

$$\overline{\omega}_0 \quad (3.3a)$$

— равномерная сетка на  $[0, T]$ ; считаем выполненным условие

$$K \leq N_0, \quad (3.4)$$

$N_0 + 1$  — число узлов сетки  $\overline{\omega}_0$ . Условие (3.4) обеспечивает ограниченность решений схем метода декомпозиции области. Через  $G(t_1)$  обозначим полосу из  $G$ :

$$G(t_1) = \{(x, t) : (x, t) \in G, \quad t_1 < t \leq t_1 + h_t\}, \quad t_1, t_1 + h_t \in \overline{\omega}_0.$$

Пусть  $S(t_1) = \overline{G}(t_1) \setminus G(t_1)$ , и пусть функция  $v(x, t) = v(x, t; t_1)$  определена на  $S(t_1)$ . Продолжение функции  $v(x, t)$  на все множество  $\overline{G}(t_1)$  обозначим через  $\overline{v}(x, t; t_1)$ . Считаем, что функция  $\overline{v}(x, t; t_1)$  удовлетворяет условию Липшица по  $t$ . Полагаем  $G^k(t_1) = G^k \cap G(t_1)$ ,  $S^k(t_1) = \overline{G}^k(t_1) \setminus G^k(t_1)$ ,  $G^k = D^k \times (0, T]$ .

Построим функцию  $u_\tau(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}$ , аппроксимирующую решение задачи (2.2), (2.1). Положим  $u_\tau(x, t) = \varphi(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}$  при  $t = 0$ .

Предположим, что функция  $u_\tau(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}$ ,  $t \leq t^n$  для  $t^n \in \overline{\omega}_0$ ,  $0 \leq n \leq N_0 - 1$  уже построена. Построим функцию  $u_\tau(x, t)$  при  $t \leq t^{n+1}$ . Найдем функции  $u_\tau^{\frac{k}{K}}(x, t)$ ,  $k = 1, \dots, K$  на полосе  $G(t^n)$ ,  $t^n = nh_t$ , решая задачи

$$L_{(3.3)} \left( u_\tau^{\left(\frac{k}{K}\right)}(x, t) \right) = 0, \quad (x, t) \in G^k(t^n), \quad (3.3б)$$

$$u_\tau^{\left(\frac{k}{K}\right)}(x, t) = \begin{cases} \overline{u}_\tau(x, t; t^n), & k = 1, \\ u_\tau^{\frac{k-1}{K}}(x, t), & k \geq 2 \end{cases}, \quad (x, t) \in S^k(t^n) \quad \text{при} \quad (x, t) \in \overline{G}^k(t^n).$$



Здесь функция  $\bar{u}_\tau(x, t; t^n)$  строится на основе функции  $v(x, t) = v(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in S(t^n)$ :

$$\bar{u}_\tau(x, t; t^n) = \bar{v}(x, t; t^n), \quad (x, t) \in \bar{G}(t^n), \quad t^n \in \bar{\omega}_0, \quad (3.3\text{в})$$

функция  $u_\tau^{\frac{k}{K}}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \bar{G}(t^n)$  — продолжение функции  $u_\tau^{\left(\frac{k}{K}\right)}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \bar{G}^k(t^n)$  на  $\bar{G}(t^n)$ :

$$u_\tau^{\frac{k}{K}}(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} u_\tau^{\left(\frac{k}{K}\right)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{G}^k(t^n), \\ \bar{u}_\tau(x, t; t^n), \quad k = 1 \\ u_\tau^{\frac{k-1}{K}}(x, t), \quad k \geq 2 \end{array} \right\}, \quad (x, t) \in \bar{G}(t^n) \setminus \bar{G}^k(t^n) \quad \left. \vphantom{u_\tau^{\frac{k}{K}}(x, t)}} \right\} \text{ при } (x, t) \in \bar{G}(t^n);$$

$$k = 1, \dots, K, \quad t^n \in \bar{\omega}_0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1;$$

оператор  $L_{(3.3)}(\cdot)$  на функции  $v \in C^{2,1}(G^k(t^n))$  определяется соотношением

$$L_{(3.3)}(v(x, t)) \equiv L_{(2.2)}v(x, t) - f(x, t), \quad (x, t) \in G^k(t^n). \quad (3.3\text{г})$$

Функцию  $u_\tau(x, t)$  на полосе  $\bar{G}(t^n)$  определим соотношением

$$u_\tau(x, t) = u_\tau^{\frac{K}{K}}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{G}(t^n), \quad t^n \in \bar{\omega}_0. \quad (3.3\text{д})$$

Функции  $v(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in S(t^n)$  и  $\bar{v}(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in \bar{G}(t^n)$  определяются соотношениями

$$\bar{v}(x, t; t^n) = \left\{ \begin{array}{l} v(x, t^n; t^n), \quad (x, t) \in G(t^n), \\ v(x, t; t^n), \quad (x, t) \in S(t^n), \quad (x, t) \in \bar{G}(t^n), \end{array} \right. \quad (3.3\text{е})$$

где

$$\begin{aligned} v(x, t; t^n) &= v(x, t; t^n; u_\tau(\cdot, t^n); \varphi(\cdot), t \leq t^{n+1}) \\ &\equiv \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S(t^n), \quad t^n = t^0 = 0, \\ \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S(t^n) \cap S, \quad t \geq t^n \\ u_\tau(x, t), \quad (x, t) \in S(t^n) \setminus S, \quad t = t^n \end{array} \right\}, \quad t^n > 0, \quad (3.3\text{ж}) \\ &\quad (x, t) \in S(t^n), \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \end{aligned}$$

Построенная функция  $u^S(x, t)$ ,  $(x, t) \in \bar{G}$ , где  $u^S(x, t) = u_{\tau(3.3)}(x, t)$ , есть решение задачи (3.3), (3.1) — модифицированного метода Шварца. В методе декомпозиции области (3.3), (3.1) краевые подзадачи (3.3б) на подобластях  $\bar{G}^k(t^n)$ ,  $k = 1, \dots, K$  из полосы  $\bar{G}(t^n)$  решаются последовательно.

**3.2.** Приведем континуальную схему декомпозиции для задачи (2.7), (2.6). Через  $G^\tau(t_1)$  обозначим “полосу”

$$G^\tau(t_1) = \{(x, t) : (x, t) \in G^\tau, \quad t = t_1 + h_t\}, \quad t_1, t_1 + h_t \in \bar{\omega}_0,$$

где  $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_{0(3.3)}$ . Полагаем

$$\bar{G}^\tau(t_1) = \{(x, t) : (x, t) \in \bar{G}^\tau, \quad t = t_1, t_1 + h_t\}, \quad t_1, t_1 + h_t \in \bar{\omega}_0.$$

Пусть  $S^\tau(t_1) = \bar{G}^\tau(t_1) \setminus G^\tau(t_1)$ , и пусть функция  $v(x, t) = v(x, t; t_1)$  определена на  $S^\tau(t_1)$ . Продолжение функции  $v(x, t)$  на множество  $\bar{G}^\tau(t_1)$  обозначим через  $\bar{v}(x, t; t_1)$ . Полагаем  $G^{\tau k}(t_1) = G^{\tau k} \cap G^\tau(t_1)$ ,  $S^{\tau k}(t_1) = \bar{G}^{\tau k}(t_1) \setminus G^{\tau k}(t_1)$ ,  $G^{\tau k} = D^k \times \omega_0$ .

Построим функцию  $u^\tau(x, t)$ ,  $(x, t) \in \bar{G}^\tau$ , аппроксимирующую решение задачи (2.7), (2.6). Положим  $u^\tau(x, t) = \varphi(x, t)$ ,  $(x, t) \in \bar{G}^\tau$  при  $t = 0$ .

Предположим, что функция  $u^\tau(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^\tau$ ,  $t \leq t^n$  для  $t^n \in \overline{\omega}_0^\tau$ ,  $0 \leq n \leq N_0 - 1$  уже построена. Построим функцию  $u^\tau(x, t)$  при  $t \leq t^{n+1}$ . Найдем функции  $u^{\tau \frac{k}{K}}(x, t)$ ,  $k = 1, \dots, K$  на полосе  $\overline{G}^\tau(t^n)$ ,  $t^n = nh_t$ , решая задачи

$$\Lambda_{(3.5)}\left(u^{\tau \frac{k}{K}}(x, t)\right) = 0, \quad (x, t) \in G^{\tau k}(t^n), \quad (3.5a)$$

$$u^{\tau \frac{k}{K}}(x, t) = \begin{cases} \overline{u}^\tau(x, t; t^n), & k = 1, \\ u^{\tau \frac{k-1}{K}}(x, t), & k \geq 2 \end{cases}, \quad (x, t) \in S^{\tau k}(t^n) \quad \text{при} \quad (x, t) \in \overline{G}^{\tau k}(t^n).$$

Здесь функция  $\overline{u}^\tau(x, t; t^n)$  строится на основе функции  $v(x, t) = v(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in S^\tau(t^n)$ :

$$\overline{u}^\tau(x, t; t^n) = \overline{v}(x, t; t^n), \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n), \quad t^n \in \overline{\omega}_0, \quad (3.5б)$$

Функция  $u^{\tau \frac{k}{K}}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n)$  — продолжение функции  $u^{\tau \frac{k}{K}}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^{\tau k}(t^n)$  на  $\overline{G}^\tau(t^n)$ :

$$u^{\tau \frac{k}{K}}(x, t) = \begin{cases} u^{\tau \frac{k}{K}}(x, t), & (x, t) \in \overline{G}^{\tau k}(t^n), \\ \overline{u}^\tau(x, t; t^n), & k = 1 \\ u^{\tau \frac{k-1}{K}}(x, t), & k \geq 2 \end{cases}, \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n) \setminus \overline{G}^{\tau k}(t^n) \quad \text{при} \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n);$$

$$k = 1, \dots, K, \quad t^n \in \overline{\omega}_0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1;$$

оператор  $\Lambda_{(3.5)}(\cdot)$  определяется соотношением

$$\Lambda_{(3.5)}(v(x, t)) \equiv \Lambda_{(2.7)}^\tau v(x, t) - f(x, t), \quad (x, t) \in G^{\tau k}(t^n). \quad (3.5в)$$

Функцию  $u^\tau(x, t)$  на полосе  $\overline{G}^\tau(t^n)$  определим соотношением

$$u^\tau(x, t) = u^{\tau \frac{K}{K}}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n), \quad t^n \in \overline{\omega}_0. \quad (3.5г)$$

Функции  $v(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in S^\tau(t^n)$  и  $\overline{v}(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n)$  определяются соотношениями (3.3е), (3.3ж), где  $G(t^n)$ ,  $S(t^n)$  есть  $G^\tau(t^n)$ ,  $S^\tau(t^n)$  соответственно:

$$\overline{v}(x, t; t^n) = \begin{cases} v(x, t; t^n), & (x, t) \in G^\tau(t^n), \\ v(x, t; t^n), & (x, t) \in S^\tau(t^n), \end{cases} \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n); \quad (3.5д)$$

где

$$v(x, t; t^n) = v(x, t; t^n; u^\tau(\cdot, t^n); \varphi(\cdot), t \leq t^{n+1})$$

$$\equiv \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S^\tau(t^n), \quad t^n = t^0 = 0, \\ \varphi(x, t), \quad (x, t) \in S^\tau(t^n) \cap S, \quad t \geq t^n \\ u_\tau(x, t), \quad (x, t) \in S^\tau(t^n) \setminus S, \quad t = t^n \end{array} \right\}, \quad t^n > 0, \quad (3.5е)$$

$$(x, t) \in S^\tau(t^n), \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1.$$

Функция  $u^S(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^\tau$ , где  $u^S(x, t) = u_{(3.5)}^\tau(x, t)$ , есть решение задачи (3.5), (3.1) — континуальной схемы декомпозиции, построенной на основе модифицированного метода Шварца. В методе декомпозиции области (3.5), (3.1) краевые подзадачи (3.5а) на подобластях  $\overline{G}^{\tau k}(t^n)$ ,  $k = 1, \dots, K$  из полосы  $\overline{G}^\tau(t^n)$  решаются последовательно.

Заметим, что итерационный алгоритм (3.5), (3.1) не есть итерационный алгоритм в строгом смысле. Краевые задачи на подобластях из полосы решаются лишь один раз в тех точках множества  $\overline{G}^\tau$ , которые не принадлежат пересечению подобластей.

#### 4. Исследование континуальной последовательной схемы декомпозиции области

**4.1.** Исследуем сходимость континуальной схемы декомпозиции (3.5), (3.1) в том случае, когда число подобластей в разбиении (3.1a) ограничено.

Континуальная схема (3.5), (3.1) является монотонной. Справедлив следующий вариант принципа максимума, используемый при обосновании сходимости схем декомпозиции.

**Лемма 1.** Пусть для данных континуальной схемы (2.7), (2.6) выполняются условия

$$f(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \overline{G}, \quad \varphi(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in S.$$

Тогда для решения континуальной схемы декомпозиции (3.5), (3.1) выполняется оценка

$$u_{(3.5)}^\tau(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \overline{G}.$$

**Доказательство.** В самом деле, из неотрицательности функции  $\varphi(x, t)$  на  $S$  в силу продолжения (3.5б) следует, что функция  $\bar{u}^\tau(x, t; t^n)$ ,  $t^n = 0$  неотрицательна на  $\overline{G}^\tau(t^n)$ . С учетом принципа максимума (см., например, [19]) показывается, что функция  $u^{\tau(\frac{k}{K})}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^{\tau k}(t^n)$  при  $k = 1$  неотрицательна, что влечет неотрицательность ее продолжения на  $\overline{G}^\tau(t^n)$  — функции  $u^{\tau\frac{k}{K}}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n)$ . Подобным образом убеждаемся, что  $u^{\tau\frac{k}{K}}(x, t) \geq 0$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n)$  при  $1 < k \leq K$ ,  $n \geq 0$ .  $\square$

Обсудим схему декомпозиции (3.5), (3.1) в том случае, когда выполняется условие

$$K \leq M_K, \tag{4.1}$$

т.е. число подобластей конечно и не превосходит величины  $M_K$ . Заметим, что функция  $w(x, t) = u_{(2.7)}^\tau(x, t) - u_{(3.5)}^\tau(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^\tau$  есть ошибка, вызываемая декомпозицией задачи (2.7), (2.6) (или короче, ошибка декомпозиции), где  $u_{(2.7)}^\tau(x, t)$  и  $u_{(3.5)}^\tau(x, t)$  — решения задач (2.7), (2.6) и (3.5), (3.1) соответственно. Функция  $w(x, t)$  — решение однородного дифференциально-разностного уравнения с однородным условием на границе  $S^\tau$ , причем на множестве  $S^{\tau k}(t^n) \setminus S^\tau$ ,  $t = t^{n+1}$  решение локальной задачи на  $\overline{G}^{\tau k}(t^n)$  изменяется на величину порядка  $O(N_0^{-1})$  (в силу оценки первой производной по  $t$  решения задачи (2.2), (2.1); см. оценку (2.8)). Таким образом, с использованием техники мажорантных функций [1, 14] получаем оценку

$$\left| u_{(2.7)}^\tau(x, t) - u_{(3.5)}^\tau(x, t) \right| \leq M \min \left[ N_0^{-1} (1 - \exp(-m\varepsilon^{-1}\Delta))^{-1}, 1 \right], \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau,$$

где  $m = m_{(2.8)}$ ,  $M = M(M_{K(4.1)})$ . При условии  $\varepsilon \leq M\Delta$  имеем неуплощающую оценку

$$\left| u_{(2.7)}^\tau(x, t) - u_{(3.5)}^\tau(x, t) \right| \leq MN_0^{-1}, \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau;$$

при условии  $\Delta = o(\varepsilon)$  имеем

$$N_0 \max_{\overline{G}^\tau} \left| u_{(2.7)}^\tau(x, t) - u_{(3.5)}^\tau(x, t) \right| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \varepsilon^{-1}\Delta \rightarrow 0.$$

Таким образом, в случае условия (4.1) при условии

$$\Delta_{(3.2)} \geq \Delta_{(4.2)}(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad \inf_{\varepsilon \in (0, 1]} [\varepsilon^{-1}\Delta_{(4.2)}(\varepsilon)] > 0, \tag{4.2a}$$

которое эквивалентно условию

$$\Delta_{(3.2)} \geq \Delta_{(4.2)}(\varepsilon), \quad \Delta_{(4.2)}(\varepsilon) = m_{(4.2)}\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, 1], \tag{4.2b}$$

функция  $u_{(3.5)}^\tau(x, t)$  в силу оценки (2.9) сходится к решению задачи (2.2), (2.1)  $\varepsilon$ -равномерно со скоростью  $O(N_0^{-1})$ . В том случае, когда  $\Delta = \Delta_{(3.2)}(\varepsilon) > 0$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$ , однако условие (4.2) нарушается, а именно, при  $\Delta = o(\varepsilon)$ , теряется порядок  $\varepsilon$ -равномерной скорости сходимости функции  $u_{(3.5)}^\tau(x, t)$ . При условии  $\Delta = O(\varepsilon N_0^{-1})$  схема (3.5), (3.1) не сходится. В случае условия (4.1) условие (4.2) — необходимое и достаточное условие  $\varepsilon$ -равномерной сходимости схемы (3.5), (3.1), (4.1) со скоростью  $O(N_0^{-1})$ .

При нарушении условия (4.1), т.е. при  $K \gg 1$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$ , схема (3.5), (3.1) не сходится  $\varepsilon$ -равномерно, при этом не играет роли, как строятся разбиения  $\{D_{(3.1)}^k\}$  множества  $\bar{D}$ .

Таким образом, доказана следующая теорема (см. также [1, 10]).

**Теорема 2.** Пусть для данной краевой задачи (2.2), (2.1) выполняются условие (2.3), а также оценки (2.8). В случае условия (4.1) условие (4.2) является необходимым и достаточным для  $\varepsilon$ -равномерной сходимости континуальной схемы декомпозиции (3.5), (3.1) со скоростью  $O(N_0^{-1})$ . При условии  $K \rightarrow \infty$  не существует схем (3.5), (3.1), сходящихся  $\varepsilon$ -равномерно.

**4.2.** Принимая во внимание утверждение теоремы 2, приходим к следующей задаче — выявить условия, накладываемые на параметр  $\varepsilon$  и разбиение (3.1a), при которых схема (3.5), (3.1) сходится со скоростью  $O(N_0^{-1})$  в том случае, когда условие (4.1) нарушается. Исследуем сходимость схемы (3.5), (3.1) в зависимости от структуры разбиения  $\{D_{(3.1)}^k\}$ .

В итерационном процессе (3.5), (3.1) номер  $k$  указывает, что при решении задачи на полосе  $\bar{G}^\tau(t^n)$  подзадача (3.5a) решается на множестве  $\bar{D}^k$  на  $k$ -м подшаге итерации, причем расположение подобласти на множестве  $\bar{D}$  может быть произвольным.

Будет удобно ввести упорядоченность расположения подобластей на множестве  $\bar{D}$ , начиная отсчет (нумерацию) подобластей от  $\Gamma^R$  — правой (“входной”) части границы множества  $\bar{D}$ , т.е. нумеруя подобласти по потоку. Например, подобласти  $\bar{D}^k$  в схеме (3.5), (3.1) может соответствовать номер  $j$  в порядке упорядоченного расположения подобластей. Связь между величинами  $k$  и  $j$  ( $j = j(k) \equiv j_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ) зададим  $K \times K$ -матрицей

$$J = J(\{D^k, k = 1, \dots, K\}) \quad (4.3)$$

с единичными элементами, где единица в  $k$ -й строке и  $j$ -м столбце указывает, что подобласть  $\bar{D}^k$  находится на  $j$ -м месте от входной части границы. Матрицу  $J$  назовем матрицей распределения подобластей для схемы (3.5), (3.1) (или, короче, матрицей распределения), которая задает распределение подобластей  $D^k$  по их упорядоченности на  $D$  относительно границы  $\Gamma^R$ . При  $J = E$  ( $j_k = k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ) подмножества  $\bar{D}^k$  в (3.1a) расположены в порядке по потоку. Матрица  $J = E^0$  с диагональю, “ортогональной” диагонали  $E$  ( $j_k = K - k + 1$ ,  $k = 1, \dots, K$ ), соответствует расположению подмножеств  $\bar{D}^k$  в (3.1a) в порядке против потока.

Рассмотрим схему (3.5), (3.1) при различных матрицах  $J_{(4.3)}$  (будем обозначать эту схему с заданной матрицей  $J$  через (3.5), (3.1), (4.3)). Выполнение условия (4.1) не предполагается.

Заметим, что при  $K \rightarrow \infty$  в силу условия (3.2б) нарушается условие (4.2) — необходимое условие  $\varepsilon$ -равномерной сходимости схемы (3.5), (3.1) со скоростью  $O(N_0^{-1})$ , что приводит к потере порядка скорости сходимости. В том случае, когда нарушается условие (4.1), разностная схема (3.5), (3.1), (4.3) при  $N_0 \rightarrow \infty$  не сходится  $(K, \varepsilon)$ -равномерно. Уточним область сходимости схемы (3.5), (3.1), (4.3).

Введем величину  $\eta = \eta(K, J)$  — максимум решения задачи (3.5), (3.1), (4.3) при условии

$$f(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \bar{G}, \quad \varphi(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S; \quad (4.4a)$$

функцию  $\bar{v}(x, t; t^n)$  из (3.5) определим соотношением

$$\bar{v}_{(3.5д)}(x, t; t^n) = 1, \quad (x, t) \in G^\tau(t^n), \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1. \quad (4.4б)$$

Величина

$$\eta = \eta(K, J) = \eta(K, J; \varepsilon, \Delta) \quad (4.5)$$

характеризует возмущение решения схемы декомпозиции (3.5), (3.1), (4.3), порождаемое нормированным возмущением граничных условий на интерфейсных границах  $S^{\tau k}(t^n) \setminus S^\tau(t^n)$  подобластей  $\overline{G}^{\tau k}(t^n)$ . Величину  $\eta(K, J)$  назовем параметром чувствительности возмущений решений схемы декомпозиции к возмущениям на интерфейсных границах, или короче, *параметром чувствительности*.

Для величины  $\eta(K, J)$  в силу условия (3.4) выполняется достаточно грубая оценка:  $\eta(K, J) \leq MN_0$ .

С учетом связи функции  $w(x, t) = u_{(2.7)}^\tau(x, t) - u_{(3.5)}^\tau(x, t)$  с решением задачи (3.5), (3.1), (4.4) находим

$$|u_{(2.7)}^\tau(x, t) - u_{(3.5)}^\tau(x, t)| \leq M\eta N_0^{-1}, \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau, \quad (4.6a)$$

где величина  $M_{(4.6)}$  не зависит от  $K, J, \Delta, \varepsilon$ ; она определяется лишь максимумом производной  $(\partial/\partial t)u(x, t)$  на  $\overline{G}$ :

$$M \leq T \max_{\overline{G}} |(\partial/\partial t)u(x, t)|. \quad (4.6b)$$

Величина  $\eta = \eta(K, J)$  отражает динамику ошибки декомпозиции схемы (3.5), (3.1), (4.3) и связана с ошибкой, порождаемой при продолжении функции  $v_{(3.5e)}(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in S^\tau(t^n)$ , на  $\overline{G}^\tau(t^n)$  (при решении промежуточных задач на подобластях), и с переносом ошибки с потоком. Из сравнения решений задачи (3.5), (3.1), (4.4) с различными матрицами  $J_{(4.3)}$  следует, что наибольшие и наименьшие значения  $\eta$  (с точностью до постоянной-сомножителя) получаются при  $J = E^0$  и  $J = E$  соответственно:

$$m \eta(K, J = E) \leq \eta(K, J) \leq M \eta(K, J = E^0), \quad \text{где } J = J_{(4.3)}. \quad (4.6в)$$

Рассмотрим оценки  $\eta(K, J)$  при  $J = E$  и  $J = E^0$ .

В случае  $J = E$  при  $\varepsilon$  и  $\Delta$ , удовлетворяющих условию

$$\Delta = \Delta_{(3.2)}(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad (4.7a)$$

с использованием техники мажорантных функций находим оценку

$$\eta = \eta(K, E) \leq MK \exp(-m\varepsilon^{-1}\Delta), \quad m = m_{(2.8)}. \quad (4.7б)$$

При решении задачи на двух соседних подобластях порождаемая ошибка оценивается величиной

$$h_t \exp(-m\varepsilon^{-1}\Delta)(1 - \exp(-m\varepsilon^{-1}\Delta))^{-1} \max_{\overline{G}} |(\partial/\partial t)u(x, t)|,$$

и далее эта ошибка “транспортируется” с потоком при решении последующих задач.

Заметим, что при больших значениях  $K$  выбором достаточно большой величины  $\varepsilon^{-1}\Delta$  (малой величины  $\varepsilon$  по сравнению с  $\Delta$ ) величина  $\eta(K, E)$  в силу (4.7) может быть сделана достаточно малой. Например, при условии

$$K \exp(-m\varepsilon^{-1}\Delta) \leq m_0,$$

эквивалентном условию

$$\varepsilon \leq m\Delta \ln^{-1}(m_0^{-1}K), \quad (4.8a)$$

где  $m = m_{(2.8)}$ ,  $m_0$  — произвольная постоянная из интервала  $(0, 1]$ , получается оценка

$$|u_{(2.7)}^\tau(x, t) - u_{(3.5)}^\tau(x, t)| \leq M\eta N_0^{-1}, \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau, \quad J = E, \quad (4.8б)$$

где  $M = T \max_{\bar{G}} |(\partial/\partial t)u(x, t)|$ ,

$$\eta = \eta(K, E) \leq m_0 K (K - m_0)^{-1} \leq 2m_0 \quad \text{при} \quad m_0 = m_{0(4.8a)} \leq 1, \quad K \geq 2m_0. \quad (4.8b)$$

В случае условия (3.2) при условии

$$\varepsilon = O(K^{-1} \ln^{-1} K), \quad K \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \in (0, 1] \quad (4.9)$$

величина  $\eta(K, E)$  ( $K, \varepsilon$ )-равномерно ограничена. Таким образом, при условии (4.9) схема (3.5), (3.1), (4.3), где  $J = E$ , при  $N_0 \rightarrow \infty$  сходится со скоростью  $O(N_0^{-1})$ . При нарушении условия (4.9) уже в случае условия (3.2б) величина  $\eta(K, E)$  не является ( $K, \varepsilon$ )-равномерно ограниченной; происходит потеря первого порядка скорости сходимости и, в частности, полная потеря сходимости схемы (3.5), (3.1), (4.3).

Пусть  $J = E^0$ . Тогда при  $\varepsilon$  и  $\Delta$ , удовлетворяющих условию

$$\Delta \geq \Delta_{(4.2)}(\varepsilon), \quad (4.10a)$$

находим оценку

$$\eta = \eta(K, J = E^0) \leq MK. \quad (4.10б)$$

В случае сбалансированных разбиений области  $D$  для величины  $\eta(K, J = E^0)$  выполняется оценка снизу

$$\eta(K, J = E^0) \geq m_1(K - 1), \quad K > 1, \quad (4.10в)$$

где  $m_1$  — достаточно малая величина, не зависящая от  $K$ .

При решении задачи на подобласти, имеющей справа от нее соседнюю подобласть, порождаемая ошибка на интерфейсной границе этой подобласти оценивается величиной  $h_t \max_{\bar{G}} |(\partial/\partial t)u(x, t)|$ . В отличие от величины параметра  $\eta(K, J = E)$ , которая выбором достаточно больших значений произведения  $\varepsilon^{-1} \Delta$  (см. (4.8)) может быть сделана достаточно малой, оценка величины  $\eta(K, J = E^0)$  снизу при условии (4.10а) не зависит от  $\varepsilon$ ,  $\Delta$  и неограниченно растет с ростом  $K$ .

Таким образом, при  $J = E^0$  в силу (3.2б), (4.10в) условие

$$K = O(1), \quad \varepsilon \in (0, 1] \quad (4.11)$$

является необходимым, а при условиях (3.2) либо (4.2) и достаточным для  $\varepsilon$ -равномерной ограниченности величины  $\eta(K, J = E^0)$ , а в силу (4.6а) — для  $\varepsilon$ -равномерной сходимости схемы (3.5), (3.1), (4.3) со скоростью  $O(N_0^{-1})$ .

**Теорема 3.** Пусть для данных краевой задачи (2.2), (2.1) и ее решения выполняется условие теоремы 2, и пусть для континуальной схемы (3.5), (3.1), (4.3) выполняется условие (3.4). Тогда в случае  $J = E$  для того, чтобы имела место сходимость решений континуальной схемы (при  $N_0 \rightarrow \infty$ ) к решению краевой задачи с порядком скорости сходимости  $O(N_0^{-1})$ , условие (4.9) является необходимым, а при дополнительном условии (3.2) и достаточным; в случае  $J = E^0$  условие (4.11) является необходимым, а при дополнительных условиях (3.2) либо (4.2) и достаточным. Для решений континуальной схемы (3.5), (3.1), (4.3) и величины  $\eta_{(4.5)}$  справедливы оценки (4.6)–(4.8), (4.10).

Заметим, что необходимое условие (4.11) при  $J = E^0$ , накладываемое на число подобластей  $K$  и параметр  $\varepsilon$ , требуемое для ( $K, \varepsilon$ )-равномерной ограниченности величины  $\eta$ , существенно более ограничительное по сравнению с достаточным условием (4.9) при  $J = E$ . При  $J = E$  и  $J = E^0$  оценки (4.7) и (4.10) параметра  $\eta$  весьма различны по вхождению величин  $K$  и  $\varepsilon^{-1} \Delta$ .

### 5. Параллельные схемы декомпозиции области

Для схемы (2.7), (2.6) рассмотрим континуальную схему метода декомпозиции, использующую параллельные вычисления.

**5.1.** В случае задачи (2.2), (2.1) приведем вариант метода Шварца, использующий параллельные вычисления на подобластях в случае  $P > 1$  процессоров.

Пусть каждая подобласть  $D^k$ ,  $k = 1, \dots, K$  из (3.1a) является многосвязной и образована объединением  $P$  несвязных областей

$$D^k = \bigcup_{p=1}^P D_p^k, \quad k = 1, \dots, K, \quad \overline{D}_i^k \cap \overline{D}_j^k = \emptyset, \quad i \neq j; \quad (5.1a)$$

считаем выполненным условие

$$KP \leq N_0. \quad (5.2)$$

Пусть каждая точка из  $\overline{D}$  принадлежит не более, чем двум подобластям  $D_p^k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $p = 1, \dots, P$ , что влечет условие

$$\Delta \leq MK^{-1}P^{-1}, \quad (5.16)$$

где  $\Delta$  есть минимальная ширина всех возможных пересечений множеств  $D_p^k$  и сумм всех подмножеств  $D_j^i$  из разбиения (5.1a), не содержащих  $D_p^k$ . Далее считаем выполненным условие

$$\Delta \geq mK^{-1}P^{-1}. \quad (5.1в)$$

Полагаем

$$G_p^k = D_p^k \times (0, T], \quad p = 1, \dots, P, \quad k = 1, \dots, K.$$

Строим функцию  $u_\tau(x, t)$  на  $\overline{G}(t^n)$ ,  $t^n \geq 0$ , считая, что  $u_\tau(x, t)$  при  $t \leq t^n$  известна.

Функции  $u_{\tau p}^{(\frac{k}{K})}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}_p^k(t^n)$ , находим, решая задачи

$$L_{(3.3)}\left(u_{\tau p}^{(\frac{k}{K})}(x, t)\right) = 0, \quad (x, t) \in G_p^k(t^n), \quad (5.3)$$

$$u_{\tau p}^{(\frac{k}{K})}(x, t) = \left\{ \begin{array}{ll} \overline{u}_\tau(x, t; t^n), & k = 1, \\ u_{\tau p}^{(\frac{k-1}{K})}(x, t), & k \geq 2 \end{array} \right\}, \quad (x, t) \in S_p^k(t^n), \quad p = 1, \dots, P$$

при  $(x, t) \in \overline{G}_p^k(t^n)$ .

Здесь

$$u_{\tau p}^{(\frac{k}{K})}(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} u_{\tau p}^{(\frac{k}{K})}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G}_p^k(t^n), \quad p = 1, \dots, P, \\ \overline{u}_\tau(x, t; t^n), \quad k = 1, \\ u_{\tau p}^{(\frac{k-1}{K})}(x, t), \quad k \geq 2 \end{array} \right\}, \quad (x, t) \in \overline{G}(t^n) \setminus \bigcup_{p=1}^P \overline{G}_p^k(t^n)$$

при  $(x, t) \in \overline{G}(t^n); \quad k = 1, \dots, K$ .

Функцию  $u_\tau(x, t)$  на полосе  $\overline{G}(t^n)$  определим соотношением

$$u_\tau(x, t) = u_{\tau p}^{(\frac{k}{K})}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G}(t^n), \quad t^n \in \overline{\omega}_0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1.$$

Функция  $\overline{u}_\tau(x, t; t^n) = \overline{v}(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}(t^n)$ ,  $t^n \in \overline{\omega}_0$  строится на основе функции  $v(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in S(t^n)$ , и определяется соотношениями (3.3в), (3.3е), (3.3ж).

Функция  $u_{\tau(5.3)}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}$  — решение схемы (5.3), (5.1) — схемы для  $P$  “процессоров”.

Построенная функция  $u^S(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}$ , где  $u^S(x, t) = u_{\tau(5.3)}(x, t)$ , есть решение параллельного модифицированного метода Шварца для задачи (2.2), (2.1).

**5.2.** На основе метода Шварца строим параллельную схему декомпозиции для задачи (2.7), (2.6). Считаем выполненными условия (5.1б,в), (5.2).

Полагаем

$$G_p^{\tau k} = D_p^k \times \omega_0, \quad p = 1, \dots, P, \quad k = 1, \dots, K.$$

Строим функцию  $u^\tau(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n)$ ,  $t^n \geq 0$ , считая, что  $u^\tau(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^\tau$ ,  $t \leq t^n$ , известна.

Функции  $u_p^{\tau(\frac{k}{K})}(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}_p^{\tau k}(t^n)$ , находим, решая задачи

$$\begin{aligned} \Lambda_{(3.5)}\left(u_p^{\tau(\frac{k}{K})}(x, t)\right) &= 0, \quad (x, t) \in G_p^{\tau k}(t^n), \\ u_p^{\tau(\frac{k}{K})}(x, t) &= \begin{cases} \overline{u}^\tau(x, t; t^n), & k = 1, \\ u^\tau \frac{k-1}{K}(x, t), & k \geq 2 \end{cases}, \quad (x, t) \in S_p^{\tau k}(t^n), \quad p = 1, \dots, P \\ &\text{при } (x, t) \in \overline{G}_p^{\tau k}(t^n), \end{aligned} \tag{5.4}$$

где

$$\begin{aligned} u^{\tau \frac{k}{K}}(x, t) &= \begin{cases} u_p^{\tau(\frac{k}{K})}(x, t), & (x, t) \in \overline{G}_p^{\tau k}(t^n), \quad p = 1, \dots, P, \\ \overline{u}^\tau(x, t; t^n), & k = 1, \\ u^\tau \frac{k-1}{K}(x, t), & k \geq 2 \end{cases}, \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n) \setminus \bigcup_{p=1}^P \overline{G}_p^{\tau k}(t^n) \\ &\text{при } (x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n); \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Полагаем

$$u^\tau(x, t) = u^{\tau \frac{K}{K}}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n), \quad t^n \in \overline{\omega}_0, \quad n = 0, 1, \dots, N_0 - 1.$$

Функция  $\overline{u}^\tau(x, t; t^n) = \overline{v}(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}^\tau(t^n)$ ,  $t^n \in \overline{\omega}_0$  строится на основе функции  $v(x, t; t^n)$ ,  $(x, t) \in S^\tau(t^n)$ , и определяется соотношениями (3.5б), (3.5д), (3.5е).

Функция  $u_{(5.4)}^\tau(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}$  — решение схемы (5.4), (5.1) — схемы для  $P$  “процессоров”. Схема (5.4), (5.1) — континуальная схема метода декомпозиции области при параллельных вычислениях на подобластях (или короче, *континуальная параллельная схема декомпозиции*).

В параллельном варианте схемы декомпозиции (5.4), (5.1) промежуточные задачи на подмножествах  $\overline{D}_p^k$ ,  $p = 1, \dots, P$ ,  $k = 1, \dots, K$  могут решаться независимо одна от другой для всех  $p = 1, \dots, P$  при условии  $\overline{D}_{p_i}^k \cap \overline{D}_{p_j}^k = \emptyset$  при  $p_i \neq p_j$ ,  $p_i, p_j = 1, \dots, P$ ,  $k = 1, \dots, K$ , т.е. при условии, что на  $k$ -м подшаге итерации разные процессоры  $p_i, p_j$  решают задачи на непересекающихся элементарных подобластях  $\overline{D}_{p_i}^k, \overline{D}_{p_j}^k$ .

В итерационном процессе (5.4), (5.1) при решении задачи на полосе  $\overline{G}^\tau(t^n)$  индексы  $k$  и  $p$  указывают, что на  $k$ -м подшаге итерации решается подзадача ( $p$ -м процессором в параллельном режиме) на подмножестве  $\overline{D}_p^k$  из множества  $\overline{D}^k$ , причем расположение подмножества  $\overline{D}_p^k$  в множестве  $\overline{D}^k$ , как расположение множества  $\overline{D}^k$  на множестве  $\overline{D}$ , может быть произвольным. Чтобы проследить влияние взаимного расположения множеств  $\overline{D}^k, \overline{D}_p^k$  на ошибку схемы декомпозиции (5.4), (5.1), введем упорядоченность расположения подмножеств  $\overline{D}_p^k$  на  $\overline{D}$ .

Заметим, что  $p$ -й процессор решает подзадачи на подобластях  $\overline{D}_p^k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , причем на  $k$ -м подшаге итерации решается подзадача на подобласти  $\overline{D}_p^k$ . Номеру  $p$  сопоставим  $K \times K$ -матрицу  $J_p$  из единичных элементов. Единице в  $k$ -й строке и  $j$ -м столбце соответствует множество  $\overline{D}_p^k$ , имеющее номер  $j$  среди набора множеств  $\overline{D}_p^k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , упорядоченных по



потоку. Матрица  $J = K \times (KP)$ -матрица — есть вектор-матрица, элементами которой являются  $P$  компонент  $K \times K$ -матриц;  $p$ -й компоненте вектор-матрицы  $J$  соответствует матрица  $J_p$ ,  $p = 1, \dots, P$ . Задание матрицы

$$J = J(J_p, p = 1, \dots, P) = J\left(J_p, p = 1, \dots, P; \{D_p^k, k = 1, \dots, K, p = 1, \dots, P\}\right) \quad (5.5)$$

полностью определяет метод декомпозиции (5.4), (5.1). Матрицу  $J$  назовем *матрицей распределения подобластей* для схемы (5.4), (5.1) (или короче, матрицей распределения), которая задает распределение подобластей  $D_p^k$  (на  $D^k$ ) по процессорам и по упорядоченности подобластей  $D^k$  (на  $D$ ) относительно границы  $\Gamma^R$ .

В том случае, когда  $J_p = E$  — диагональная матрица, подобласти  $D_p^k$ ,  $k = 1, \dots, K$  упорядочены по потоку; при  $J_p = E^0$  подобласти упорядочены в порядке против потока.

**5.3.** Исследуем сходимость схемы (5.4), (5.1), (5.5).

Схема (5.4), (5.1), (5.5) является монотонной. Для ее решений выполняется принцип максимума, подобный приведенному в лемме 1.

Пусть выполняется условие

$$KP \leq M_{KP}. \quad (5.6)$$

В этом случае для схемы (5.4), (5.1), (5.5), как и для схемы (3.5), (3.1), (4.3) при условии (4.1), условие (4.2) является необходимым и достаточным для  $\varepsilon$ -равномерной сходимости решений задачи (5.4), (5.1), (5.5) к решению краевой задачи (2.2), (2.1) со скоростью  $O(N_0^{-1})$ .

Справедлива следующая теорема, подобная теореме 2.

**Теорема 4.** Пусть для данных краевой задачи (2.2), (2.1) и ее решения выполняется условие теоремы 2. В случае условия (5.6) условие (4.2) является необходимым и достаточным для  $\varepsilon$ -равномерной сходимости континуальной схемы декомпозиции (5.4), (5.1), (5.5) со скоростью  $O(N_0^{-1})$ . При условии  $KP \rightarrow \infty$  не существует схем (5.4), (5.1), (5.5), сходящихся  $\varepsilon$ -равномерно.

**5.4.** Рассмотрим поведение решения схемы (5.4), (5.1), (5.5) в том случае, когда условие (5.6) нарушается.

При  $K \rightarrow \infty$  схема (5.4), (5.1), (5.5) при  $N_0 \rightarrow \infty$  не сходится  $(K, \varepsilon)$ -равномерно. Уточним для этой схемы область ее сходимости со скоростью  $O(N_0^{-1})$ .

Введем величину  $\eta = \eta(K, P, J)$  — максимум решения задачи (5.4), (5.1), (5.5) при условии (4.4)

$$\eta = \eta(K, P, J) = \eta(K, P, J; \varepsilon, \Delta); \quad (5.7)$$

упорядоченное расположение множеств  $D_p^k$  из (5.1) задается матрицей  $J$ .

С применением принципа максимума для решения схемы (5.4), (5.1), (5.5) находим оценку

$$|u(x, t) - u_{(5.4)}^\tau(x, t)| \leq M(1 + \eta)N_0^{-1}, \quad (x, t) \in \bar{G}. \quad (5.8)$$

Здесь  $M$  не зависит от  $K, P, J, \Delta, \varepsilon$ ,  $M \leq T \max_{\bar{G}} |(\partial/\partial t)u(x, t)|$ ;  $\eta = \eta(K, P, J)$ .

Пусть в схеме (5.4), (5.1), (5.5)  $t = t^0$ . При  $J_p = E$ ,  $p = 1, \dots, P$  на подобластях  $D_p^k$  из множества  $D_{(p)} = \bigcup_k D_p^k$ ,  $k = 1, \dots, K$  при  $p = 1$  поведение ошибки декомпозиции  $u_{(2.7)}^\tau(x, t) - u_{(5.4)}^\tau(x, t)$  на множестве  $\bar{D}_{(p)}$  в случае параллельной схемы (5.4), (5.1), (5.5) подобно поведению ошибки декомпозиции в последовательной схеме (3.5), (3.1), (4.3) при условии, что множество  $\bar{D}$  есть  $\bar{D}_{(1)}$  и  $J = J_{(4.3)}(\bar{D} = \bar{D}_{(1)}) = E$ . Однако на множестве  $\bigcup_p \bar{D}_{(p)}$ ,  $p = 2, \dots, P$  ошибка декомпозиции ведет себя подобно ошибке декомпозиции в схеме (3.5), (3.1), (4.3), где  $\bar{D}$  есть  $\bigcup_p \bar{D}_{(p)}$ ,  $K$  есть  $P-1$ , при условии, что подмножества  $D_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  в (3.1) есть подмножества

$D_{(p)}$ ,  $p = 2, \dots, P$  при  $J = J_{(4.3)} \left( \overline{D} = \bigcup_{p=2}^P \overline{D}_{(p)} \right) = E^0$ . При  $t > t^0$  наблюдается подобное поведение ошибки декомпозиции на подобластях  $\overline{D}_{(p)}$  из разбиения  $\overline{D}$ .

Пусть  $|(\partial/\partial t)u(x, t)| \geq m$ ,  $(x, t) \in \overline{G}$ . Рассматривая задачу (5.4), (5.1), (5.5) на подобластях  $\overline{D} \setminus \left\{ \bigcup_{p=1}^n \overline{D}_{(p)} \right\}$ , где  $n \leq P - 1$ , в случае сбалансированных разбиений при условиях (5.1б,в), (5.2) и произвольных матрицах  $J$  для ошибки декомпозиции  $u_{(2.7)}^\tau(x, t) - u_{(5.4)}^\tau(x, t)$  получаем оценку снизу

$$\left| u_{(2.7)}^\tau(x, t) - u_{(5.4)}^\tau(x, t) \right| \geq mn, \quad (x, t) \in \overline{G}^\tau, \quad x \in \overline{D} \setminus \left\{ \bigcup_{p=1}^n D_{(p)} \right\}, \quad x \geq m\varepsilon, \quad t \geq t^n,$$

где  $u_{(2.7)}^\tau(x, t)$  и  $u_{(5.4)}^\tau(x, t)$  — решения задач (2.7), (2.6) и (5.4), (5.1), (5.5) соответственно;  $m$  не зависит от  $J$  и разбиения (5.1).

Таким образом, для величины  $\eta(K, P, J)$  при условии (5.2) при произвольных матрицах  $J$  получается оценка снизу

$$\eta(K, P, J) \geq m(P - 1), \quad P > 1. \quad (5.9)$$

При  $J_p = E^0$ ,  $p = 1, \dots, P$  поведение ошибки декомпозиции подобно поведению ошибки в схеме (3.5), (3.1), (4.3), где  $K_{(3.1)}$  есть  $K_{(5.1)}P_{(5.1)}$  и  $J_{(4.3)} = E^0$ . Для величины  $\eta(K, P, J_p = E^0, p = 1, \dots, P)$  получается оценка снизу

$$\eta(K, P, J_p = E^0, p = 1, \dots, P) \geq mKP. \quad (5.10)$$

Таким образом, при  $P \rightarrow \infty$  не существует схем декомпозиции, сходящихся со скоростью  $O(N_0^{-1})$  вне зависимости от соотношения между параметром  $\varepsilon$  и величиной  $P$ .

В случае сбалансированных разбиений при условии

$$\Delta = \Delta_{(5.1)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, 1] \quad (5.11a)$$

при  $J_p = E$  и  $J_p = E^0$ ,  $p = 1, \dots, P$  выполняются оценки

$$\eta(K, P, J_p = E, p = 1, \dots, P) \leq M(P - 1)[1 + K \exp(-m\varepsilon^{-1}\Delta)], \quad (5.11б)$$

$$\eta(K, P, J_p = E^0, p = 1, \dots, P) \leq MKP, \quad (5.11в)$$

где  $m = m_{(2.8)}$ .

Основной результат, полученный в этом разделе, сформулирован в следующей теореме.

**Теорема 5.** Пусть для данных краевой задачи (2.2), (2.1) и ее решения выполняется условие теоремы 2, а для непрерывной схемы (5.4), (5.1), (5.5) выполняется условие (5.2). При  $P \rightarrow \infty$  не существует непрерывных схем декомпозиции (5.4), (5.1), (5.5), сходящихся (при  $N_0 \rightarrow \infty$ ) со скоростью  $O(N_0^{-1})$  при любых соотношениях между  $P$  и  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$ . Для решений непрерывной схемы и величины  $\eta_{(5.7)}$  справедливы оценки (5.8)–(5.11).

**З а м е ч а н и е 1.** Для сбалансированных разбиений области  $D$  минимальная ошибка решения параллельного метода декомпозиции при условии (5.2) растет с ростом числа решателей  $P$  не медленнее, чем  $(P - 1)N_0^{-1}$ .

## 6. Сравнение схем декомпозиции

**6.1.** Сравним эффективность континуальных схем декомпозиции для последовательных и параллельных вычислений (будем говорить, *S-схем* и *P-схем*), предполагая, что общее число подобластей, покрывающих  $D$ , в случае последовательных и параллельных схем одинаково. Будем рассматривать схемы, для которых выполняется условие

$$KP = K_0, \quad P \geq 1; \quad (6.1)$$

величина  $K_0$  — общее число покрывающих подобластей, как и величины  $K, P$ , может быть большой. Подмножества  $D^k$  и  $D_p^k$  в случае *S*- и *P*-схем (при разных  $P$ ) берутся из одного и того же базового набора “элементарных” подобластей, фиксированного при фиксированном  $K_0$ . Считаем выполненным условие

$$K_0 \leq N_0, \quad (6.2)$$

причем для величины перекрытия элементарных подобластей выполняется условие

$$mK_0^{-1} \leq \Delta \leq MK_0^{-1}; \quad (6.3)$$

элементарные подобласти считаем сбалансированными.

Требуется исследовать влияние величин  $K_0$  и  $P$  на эффективность схем метода декомпозиции. Характеристики, определяющие эффективность схем, рассматриваются в подразд. 6.2. Нас интересуют характеристики последовательных и параллельных схем декомпозиции задачи (2.7), (2.6) в том случае, когда величина  $N_0$  для этих схем декомпозиции одинакова; такие схемы рассматриваются в подразд. 6.3. Нас также интересуют характеристики последовательных и параллельных схем, при которых ошибки решений этих схем одинаковы; такие схемы рассматриваются в подразд. 6.4.

**6.2.** Пусть для простоты затраты по решению схемы декомпозиции на слое  $\bar{G}^\tau(t^n)$  определяются суммой длин отрезков  $D^k$  и  $D_p^k$  для последовательных и параллельных вычислений. Тогда общие затраты  $R$  на решение задачи в *относительных единицах затрат* (относительно затрат на решение задачи на отрезке длины  $d$ ) определяются соотношениями

$$R^S = d^{-1}N_0 \sum_{k=1}^K (d^{kR} - d^{kL}), \quad R^P = d^{-1}N_0 \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P (d_p^{kR} - d_p^{kL}), \quad (6.4a)$$

где  $R^S$  и  $R^P$  — затраты на решение *S*- и *P*-схем соответственно;  $D^k = (d^{kL}, d^{kR})$  при  $P = 1$ ,  $D_p^k = (d_p^{kL}, d_p^{kR})$  при  $P \geq 2$ . Тогда время решения задач в *относительных временных единицах* (один “процессор” решает задачу на отрезке относительной единичной длины за единицу времени) определяется соотношениями

$$T^S = R^S, \quad T^P = P^{-1}R^P. \quad (6.4б)$$

Величины  $\delta^S$  и  $\delta^P$  — ошибки решений *S*- и *P*-схем — определим соотношениями

$$\delta^S = \max_{\bar{G}^\tau} |u(x, t) - u_{(3.5)}^\tau(x, t)|, \quad \delta^P = \max_{\bar{G}^\tau} |u(x, t) - u_{(5.4)}^\tau(x, t)|. \quad (6.4в)$$

Через

$$R_\delta^S, \quad R_\delta^P \quad \text{и} \quad T_\delta^S, \quad T_\delta^P \quad (6.4г)$$

обозначим затраты на решение *S*- и *P*-схем, имеющих ошибку решения  $\delta$  (будем говорить — *эффективность схем по затратам* или, короче, *эффективность схем*), и время, требующееся для решения таких задач (будем говорить — *эффективность схем по времени решения* или, короче, *время решения S- и P-схем*).

Верхний индекс  $M$  используем для обозначения *эталонных* (reference) *величин*; в случае сетки (3.5а) полагаем

$$R^M = N_0, \quad T^M = R^M, \quad \delta^M = N_0^{-1}, \quad R_\delta^M = R^M, \quad T_\delta^M = T^M, \quad (6.4д)$$

что соответствует континуальной схеме (2.7), (2.6) для задачи (2.2), (2.1) в случае ошибки континуальной схемы, равной  $N_0^{-1}$ , — будем говорить, *эталонной  $M$ -схеме*.

В эталонной схеме ошибка  $\delta^M$  соизмерима с компонентой ошибки, порождаемой дискретизацией по  $t$  краевой задачи, в случае разностной схемы (2.5) на сетке (2.4) (см. оценку (2.10)).

Рассматривая  $S$ - и  $P$ -схемы, предполагаем выполненным условие

$$J = E \quad \text{при } P = 1 \quad \text{и} \quad J_p = E, \quad p = 1, \dots, P \quad \text{при } P > 1; \quad (6.5)$$

при этом условии в силу оценок теорем 3 и 5 получаются лучшие по порядку оценки для  $\delta^S$  и  $\delta^P$  — ошибок  $S$ - и  $P$ -схем, в то время как другие величины, определяемые соотношениями (6.4), сохраняются. Считаем выполненными условия (6.2), (6.3).

**6.3.** Рассмотрим континуальные схемы при условии

$$N_0^S = N_0^P = N_0^M = N_0, \quad (6.6)$$

где  $N_0^S + 1$ ,  $N_0^P + 1$ ,  $N_0^M + 1$  — число узлов сетки  $\bar{\omega}_0$  в  $S$ -,  $P$ - и  $M$ -схемах. В этом случае имеем

$$R^S, R^P \approx R^M; \quad T^S \approx T^M, \quad T^P \approx P^{-1}T^M, \quad (6.7а)$$

т.е.

$$R^S \approx R^P, \quad T^S \approx PT^P. \quad (6.7б)$$

Таким образом, затраты на решение  $S$ - и  $P$ -схем одного порядка, в то время как одного порядка время решения  $S$ -схемы и произведения числа процессоров и времени решения  $P$ -схемы. Для ошибок  $S$ - и  $P$ -схем выполняется также оценка

$$\delta^S \leq M\delta^P. \quad (6.8)$$

При условии

$$K_0 \leq MK_0 \quad (6.9)$$

для  $S$ - и  $P$ -схем затраты и время, требуемые для решения, а также точность получаемого решения одного порядка.

Обсудим поведение ошибок  $\delta^S$ ,  $\delta^P$  при больших значениях  $K_0$ . Пусть выполняется условие

$$\varepsilon K_0 \geq M \quad \text{при } K_0 \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

С учетом оценок из теорем 3 и 5 получаем оценки

$$\delta^S \approx N_0 \eta(K_0, J = E) \geq m\varepsilon K_0^2 N_0^{-1} \geq mK_0 N_0^{-1} \approx K_0 \delta^M, \quad (6.11)$$

$$\delta^P \approx N_0 \eta(K, P, J_p = E, p = 1, \dots, P) \geq m\varepsilon K^2 P^2 N_0^{-1} \geq mK_0 N_0^{-1} \approx K_0 \delta^M \quad \text{при } K_0 \rightarrow \infty;$$

в случае условия (6.10) теряется порядок (первый порядок относительно  $N_{0(6.6)}$ ) скорости сходимости  $S$ - и  $P$ -схем с ростом  $K_0$ .

Пусть выполняется условие

$$\varepsilon K_0 \leq M \quad \text{при } K_0 \rightarrow \infty, \quad (6.12)$$

эквивалентное условию  $\varepsilon^{-1}\Delta \geq m$ ,  $K_0 \rightarrow \infty$ . Тогда для ошибок  $S$ - и  $P$ -схем выполняются оценки

$$\begin{aligned} \delta^S &\leq M\delta^M K_0 \exp(-m_1 \varepsilon^{-1} K_0^{-1}), \\ m\delta^M P < \delta^P &\leq M\delta^M [P + K_0 \exp(-m_1 \varepsilon^{-1} K_0^{-1})], \end{aligned} \quad (6.13)$$

где  $m_1 = m_{(3.2)}m_{(2.8)}$ ,  $P \geq 2$ . Оценка ошибки  $\delta^P$  снизу понимается в том смысле, что такая оценка достигается. Выполнение условия (6.12) еще не предотвращает потери порядка скорости сходимости  $S$ - и  $P$ -схем.

Пусть  $\varepsilon = \varepsilon_{K_0}$  — решение уравнения

$$K_0 \exp(-m_1 \varepsilon^{-1} K_0^{-1}) = 1;$$

имеем  $\varepsilon_{K_0} = m_1 K_0^{-1} \ln^{-1} K_0$ . При условии ( $\varepsilon = o(\varepsilon_{K_0})$ )

$$\varepsilon \ll \varepsilon_{K_0}, \quad K_0 \rightarrow \infty \quad (6.14)$$

отсюда вытекают соотношения

$$\delta^S \ll \delta^M, \quad \delta^P \approx P \delta^M, \quad (6.15a)$$

т.е.

$$\delta^S \ll P^{-1} \delta^P. \quad (6.15б)$$

Таким образом, при малых значениях параметра  $\varepsilon$  ошибки решения  $S$ -схемы много меньше, чем произведение величины, обратной числу процессоров, и ошибки решения  $P$ -схемы.

**6.4.** Сравним  $S$ - и  $P$ -схемы в том случае, когда выполняется условие (6.14), а также условие

$$\delta^S = \delta^P. \quad (6.16)$$

Пусть  $\delta^S = \delta^P = \delta^M$ , и пусть  $N_0^S + 1$  и  $N_0^P + 1$  — число узлов сетки  $\bar{\omega}_0$ , при котором достигаются ошибки  $\delta^S$  и  $\delta^P$  для  $S$ - и  $P$ -схем. При условии (6.12) в силу оценок (6.13) имеем

$$N_0^S \leq MN_0 K_0 \exp(-m_1 \varepsilon^{-1} K_0^{-1}), \quad N_0^P \geq mN_0 P, \quad m_1 = m_{1(6.13)}.$$

Для эффективностей  $S$ - и  $P$ -схем по затратам и по времени решения получаются оценки

$$\begin{aligned} R_\delta^S &\approx N_0^S \leq MR_\delta^M K_0 \exp(-m_1 \varepsilon^{-1} K_0^{-1}), & R_\delta^P &\approx N_0^P \geq mR_\delta^M P; \\ T_\delta^S &\approx N_0^S \leq MT_\delta^M K_0 \exp(-m_1 \varepsilon^{-1} K_0^{-1}), & T_\delta^P &\approx P^{-1} N_0^P \geq mT_\delta^M. \end{aligned} \quad (6.17a)$$

В случае условия (6.14) получаются оценки

$$P^{-1} R_\delta^P \gg R_\delta^S, \quad T_\delta^P \gg T_\delta^S. \quad (6.17б)$$

Таким образом, при малых значениях параметра  $\varepsilon$  эффективности по затратам и по времени решения для  $S$ -схем существенно лучше, чем для  $P$ -схем, причем эффективность по затратам  $P$ -схем снижается с ростом  $P$ .

В силу оценок (6.7), (6.8) эффективности  $S$ - и  $P$ -схем при условии (6.9) одного порядка.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.** Пусть для данных краевой задачи (2.2), (2.1) выполняются условия теоремы 2, и пусть для непрерывных  $S$ - и  $P$ -схем выполняются условия (6.2), (6.3). Тогда наилучшие по порядку оценки величин, определяемых (6.4), достигаются при условии (6.5), накладываемом на матрицы распределения  $J_{(4.3)}$  и  $J_{(5.5)}$ . В случае условий (6.5) и (6.6) для величин  $R^S$ ,  $R^P$ ,  $T^S$ ,  $T^P$  и  $\delta^S$ ,  $\delta^P$  выполняются соответственно оценки (6.7) и (6.8); при дополнительном условии (6.14) для величин  $\delta^S$ ,  $\delta^P$  выполняются оценки (6.15), а при условиях (6.10) и (6.12) — оценки (6.11) и (6.13) соответственно. В случае условий (6.5) и (6.16) для величин  $R_\delta^S$ ,  $R_\delta^P$ ,  $T_\delta^S$ ,  $T_\delta^P$  выполняются оценки (6.17).

**З а м е ч а н и е 2.** В случае растущего числа подобластей (покрывающих  $\overline{D}$ ), на которых проводится декомпозиция краевой задачи, при малых значениях параметра  $\varepsilon$  (удовлетворяющих условию (6.14)) распараллеливание схем декомпозиции приводит к снижению их эффективности по затратам и по времени решения задачи по сравнению со схемами с последовательными вычислениями. В случае конечной величины  $K_0$  эффективности по затратам и по времени решения для последовательных и параллельных схем одного порядка.

Пользуясь случаем, авторы выражают благодарность академику Г.И. Марчуку, Ю.В. Василевскому и другим участникам Всероссийской конференции по вычислительной математике КВМ-2007 (Новосибирск, 18–20 июня 2007 г.), а также 12-й международной конференции “Математическое моделирование и анализ” ММА-2007 (Тракай, Литва, 30 мая–2 июня 2007 г.).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.** Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Singapore: World Scientific, 1996.
2. **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
3. **Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.** Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems. Berlin: Springer, 1996.
4. **Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.** Robust computational techniques for boundary layers. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2000.
5. **Quarteroni A.** Domain decomposition and parallel processing for the numerical solution of partial differential equations // *Surveys Math. Indust.* 1991. Vol. 1, no. 1. P. 75–118.
6. **Ewing R.E., Lazarov R.D., Pasciak J.E., Vassilevski P.S.** Domain decomposition type iterative techniques for parabolic problems on locally refined grids // *SIAM J. Numer. Anal.* 1993. Vol. 30, no. 6. P. 1537–1557.
7. **Le Tallec P.** Domain decomposition methods in computational mechanics // *Comput. Mech. Adv.* 1994. Vol. 1, no. 2. P. 121–220.
8. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
9. **MacMullen H., Miller J.J.H., O’Riordan E., Shishkin G.I.** A second order parameter-uniform overlapping Schwarz method for reaction-diffusion problems with boundary layers // *J. Comput. Appl. Math.* 2001. Vol. 130, no. 1-2. P. 231–244.
10. **MacMullen H., O’Riordan E., Shishkin G.I.** The convergence of classical Schwarz methods applied to convection-diffusion problems with regular boundary layers // *Appl. Numer. Math.* 2002. Vol. 43, no. 3. P. 297–313.
11. **Shishkin G.I.** Acceleration of the process of the numerical solution to singularly perturbed boundary value problems for parabolic equations on the basis of parallel computations // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1997. Vol. 12, no. 3. P. 271–291.
12. **Hemker P.W., Shishkin G.I., Shishkina L.P.** Distributing the numerical solution of parabolic singularly perturbed problems with defect correction over independent processes // *Sib. J. Numer. Math.* 2000. Vol. 3, no. 3. P. 229–258.
13. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
14. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
15. **Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.** Вычислительные методы. Т.2. М.: Наука, 1977.
16. **Shishkin G.I.** Robust novel high-order accurate numerical methods for singularly perturbed convection-diffusion problems // *Math. Modelling and Anal.* 2005. Vol. 10, no. 4. P. 393–412.
17. **Farrell P.A., Hemker P.W., Shishkin G.I.** Discrete approximations for singularly perturbed boundary value problems with parabolic layers // *J. Comput. Math.* 1996. Vol. 14, no. 1. P. 71–97. Part 1; 1996. Vol. 14, no. 2. P. 183–194. Part 2; 1996. Vol. 14, no. 3. P. 273–290. Part 3.
18. **Hemker P.W., Shishkin G.I., Shishkina L.P.** High-order time-accurate parallel schemes for parabolic singularly perturbed problems with convection // *Computing.* 2001. Vol. 66, no. 2. P. 139–161.
19. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

*V. K. Andreev.* **On Properties of Solution of a Boundary Value Problem Describing Simultaneous Flow of Two Binary Mixtures.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 4. P. 14–26.

Properties of an invariant solution of thermodiffusion equations in a planar layer are investigated in the case when the surface tension on the surface of two mixtures depends linearly on temperature and concentration. For the arising adjoint initial–boundary value problem, a priori estimates of perturbations of velocity and temperature fields are obtained. The estimates show that perturbations converge exponentially to stationary values as time increases. Concentration perturbations also settle into a stationary regime; this is proved by means of a Laplace transformation.

*V. A. Baranskii and T. A. Koroleva.* **Chromatic Uniqueness of Atoms in Lattices of Complete Multipartite Graphs.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 3. P. 22–29.

A new approach is suggested to the study of the chromatic uniqueness of complete multipartite graphs. The approach is based on the natural lattice order introduced for such graphs. It is proved that atoms with nonelemental partite sets are chromatically unique in the lattice of complete  $t$ -partite  $n$ -graphs for any given positive integers  $n$  and  $t$ .

*V. A. Belonogov.* **Young Diagrams Without Hooks of Length 4 and Characters of the Group  $S_n$ .** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 3. P. 30–40.

All finite Young diagrams not containing hooks of length 4 are found. Self-associated diagrams possessing this property are subdivided into three series. Sets of all hook lengths are determined for diagrams contained in each series. The research conducted has proven necessary for the study of certain pairs of irreducible characters of symmetric and alternating groups.

*T. N. Bronina.* **An Algorithm for Constructing Initial Three-Dimensional Structured Grids for Domains of Revolution.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 3–10.

An algorithm for constructing initial three-dimensional structured grids for geometrically complicated domains of revolution is described. The algorithm prevents the appearance of degenerate (not hexagonal) cells and cells of small volume around the axis of rotation. Examples of grids constructed by the suggested algorithm are given.

*G. V. Dolgoleva and A. V. Zabrodin.* **Computational Construction of Microtargets for Shockless Compression.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 31–40.

The use of the shockless compression conception reveals a promising method of constructing microtargets for thermonuclear fusion. Cylindrical layered systems can serve as a base. Energy input is carried out by irradiating open ends with coaxial ion beams along the length of the target. Deceleration of particles in the energy-input layer causes its intense heating and the cumulation of material from the DT layer and from the encompassing shell at the target axis. In the paper, single-cascade and two-cascade layered systems are considered. Energy-input laws for shockless compression of the effective DT region are found analytically. The analytical computations are corroborated by numerical experiments.

*M. Yu. Filimonov.* **Application of the Method of Special Series to the Representation of Solutions of the Lin–Reissner–Tsien Equation.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 181–201.

For the two-dimensional Lin–Reissner–Tsien equation, which describes nonstationary gas flows, we construct new classes of solutions with functional arbitrariness in the form of series in powers of specially chosen functions. Coefficients of such series are found successively as solutions of linear ordinary differential equations or as solutions of linear partial differential equations. The use of special series whose coefficients are determined by linear partial differential equations allowed us to satisfy two given additional boundary conditions exactly. For one class of flows, these coefficients were found in an explicit form from linear equations of the hyperbolic type; for another one, they were found from linear equations of the parabolic type. This circumstance was used to prove the convergence of such series and to study the asymptotics of the solutions constructed. We present results of numerical calculations on nonstationary transonic flow around a wedge.

*A. R. Garifullin and S. V. Khabirov.* **Continuous Conjugation of Special Nonisentropic One-Dimensional Gas Motions.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 22–30.

The exact partially invariant solution of equations of motion of a compressible fluid describing the collapse of particles to a point and an instantaneous source from the point in a one-dimensional nonisentropic motion is cut off by the characteristics and glued into a continuous solution of a one-dimensional submodel in a finite domain. The possibility of a continuous periodic nonisentropic motion of a compressible fluid in a bounded domain under the action of a piston is shown.

*V. I. Isaev and V. P. Shapeev.* **Development of the Collocations and Least Squares Method.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 41–60.

We propose and implement new, more general versions of the method of collocations and least squares (the CLS method) and, for a system of linear algebraic equations, an orthogonal method for accelerating the convergence of an iterative solution. The use of the latter method and the proper choice of values of control parameters, based on the results of investigating the dependence of the properties of the CLS method on these parameters, as well as some other improvements of the CLS method suggested in this paper, allow one to solve numerically problems for Navier–Stokes equations in a reasonable time using a single-processor computer even for grids as large as  $1280 \times 1280$ . In this case, the total number of unknown variables is  $\sim 25 \cdot 10^6$ . The numerical results for the problem of the lid-driven cavity flow of a viscous fluid are in good agreement with known results of other authors, including those obtained by means of schemes of higher approximation order with a small artificial viscosity. This and some other facts prove that the new versions of the CLS method make it possible to obtain an approximate solution with high accuracy.

*V. V. Kabanov and S. V. Unegov.* **Strongly Regular Graphs with Hoffman’s Condition.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 3. P. 54–60.

It is known that if the minimal eigenvalue of a graph is  $-2$ , then the graph satisfies Hoffman’s condition; i.e., for any generated complete bipartite subgraph  $K_{1,3}$  with parts  $\{p\}$  and  $\{q_1, q_2, q_3\}$ , any vertex distinct from  $p$  and adjacent to two vertices from the second part is not adjacent to the third vertex and is adjacent to  $p$ . We prove the converse statement, formulated for strongly regular graphs containing a 3-claw and satisfying the condition  $\mu > 1$ .

*A. V. Konygin.* **On Primitive Permutation Groups with Nontrivial Global Stabilizers.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 3. P. 61–64.

In the paper the distinguishing number  $D(G)$  of an arbitrary finite primitive permutation group  $G$  is determined. As a consequence, the distinguishing number  $D(\Gamma)$  of an arbitrary finite graph  $\Gamma$  with a vertex-primitive group of automorphisms is found.

*A. I. Korotkii and D. A. Kovtunov.* **On Solvability of Stationary Problems of Natural Thermal Convection of a High-Viscosity Fluid.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 61–73.

In the paper the distinguishing number  $D(G)$  of an arbitrary finite primitive permutation group  $G$  is determined. As a consequence, the distinguishing number  $D(\Gamma)$  of an arbitrary finite graph  $\Gamma$  with a vertex-primitive group of automorphisms is found.

*V. A. Koshcheev.* **Separators of Hereditarily Arcwise Connected Continua Admitting Chebyshev Systems of Complex Continuous Functions.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 74–80.

A decomposition is constructed of a hereditarily arcwise connected continuum containing no open arcs and  $\theta$ -curves into two subcontinua with connected intersection, one of which has an arc or a simple closed curve as a separator. The results obtained are related to a problem called Overdeck’s conjecture.

*E. F. Lelikova.* **On the Structure of Asymptotics of the Solution of a Second-Order Elliptic Equation in a Neighborhood of an Angular Point.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 98–111.

The behavior of solutions of elliptic equations in neighborhoods of angular and conical boundary points has been well studied; the asymptotics of these solutions has been constructed. In the present paper, we propose a new approach to constructing asymptotic decompositions in a neighborhood of an angular boundary point, which allows us to describe the structure of these asymptotics in a relatively simple and illustrative way.



*Yu. G. Mikhailova and A. V. Zhiber.* **On Hyperbolic Systems of Equations with Zero Generalized Laplace Invariants.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2007. Vol. 13, no. 4. P. 74–83.

A criterion for the interruption of the sequence of generalized Laplace invariants is found. A general solution of a system of linear hyperbolic equations with zero invariants is constructed.

*M. F. Prokhorova.* **Problems of Homeomorphism Arising in the Theory of Grid Generation.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 112–129.

Some general criteria of being a homeomorphism for continuous maps of topological spaces and topological manifolds are proved in this paper, as well as criteria of being a diffeomorphism for smooth maps of smooth manifolds.

*L. I. Rubina and O. N. Ul'yanov.* **On Solving the Potential Equation.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 130–145.

We consider planar nonstationary potential flows of polytropic gas. The corresponding partial differential equation is studied by the method of level surfaces. Sufficient conditions on the arbitrary functions providing the construction of exact solutions of the potential equation are obtained. Equations for shock waves separating the potential flow from the rest area or from the area of motion with constant velocity are written out.

*V. A. Suchkov.* **Spatial Axially Symmetric Double Waves.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 146–149.

In this paper, two-dimensional self-similar potential flows of a polytropic gas are considered. A number of solutions are constructed behind detonation waves of permanent intensity in the class of traveling waves.

*I. V. Tselishcheva and G. I. Shishkin.* **Sequential and Parallel Domain Decomposition Methods for a Singularly Perturbed Parabolic Convection–Diffusion Equation.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 202–220.

A boundary value problem for a singularly perturbed parabolic convection–diffusion equation is considered in a rectangular domain in  $x$  and  $t$ ; the perturbation parameter  $\varepsilon$  multiplying the highest derivative takes arbitrary values in the half-open interval  $(0, 1]$ . For the boundary value problem, we construct a scheme based on the method of lines in  $x$  passing through  $N_0 + 1$  points of the mesh with respect to  $t$ . To solve the problem on a set of intervals, we apply a domain decomposition method (on overlapping subdomains with the overlap width  $\delta$ ), which is a modification of the Schwarz method. For the continual schemes of the decomposition method, we study how sequential and parallel computations, the order of priority in which the subproblems are sequentially solved on the subdomains, and the value of the parameter  $\varepsilon$  (as well as the values of  $N_0$ ,  $\delta$ ) influence the convergence rate of the decomposition scheme (as  $N_0 \rightarrow \infty$ ), and also computational costs for solving the scheme and time required for its solution (unless a prescribed tolerance is achieved). For convection–diffusion equations, in contrast to reaction-diffusion ones, the sequential scheme turns out to be more efficient than the parallel scheme.

*O. V. Ushakova.* **Optimization Algorithms for Three-Dimensional Grids in Domains of Rotation.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 150–180.

Optimization algorithms for three-dimensional structured grids in domains of rotation are described.

*N. A. Vaganova.* **Existence of a Solution of an Initial–Boundary Value Difference Problem for a Linear Heat Equation with a Nonlinear Boundary Condition.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2008. Vol. 14, no. 1. P. 11–21.

A problem of heat propagation in the ground from a heated pipeline with a partially heat-insulating shell is considered. The possibility is proved to construct a numerical solution of a linear heat equation by using a direct finite-difference method in the case when the thermal radiation on the ground surface is taken into account. On the basis of the theorem about the solvability of a system of linear difference equations by means of the sweep method, the existence and uniqueness of a solution of a corresponding difference problem with nonlinear boundary condition are proved.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

2008, Том 14, № 1

Январь–Март

Учредитель  
Учреждение Российской академии наук  
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

Редактор Е. Г. Понизовкина  
Технический редактор Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск: Н. А. Артемова, О. О. Коврижных

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

---

Подписано в печать 15.04.08. Формат  $60 \times 84^{1/8}$ . Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 22. Тираж 200 экз. Заказ 2424.

---

Адрес редакции: 620219, Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16  
Институт математики и механики УрО РАН  
Редакция журнала “Труды Института математики и механики”  
тел. (343) 375-34-58  
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии  
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”  
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д.17, офис 226