

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ**

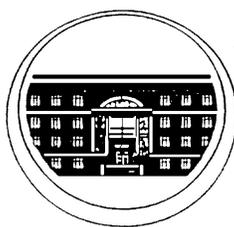
**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**Том 13, № 4**

**2007**

ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ  
И МЕХАНИКИ

Том 13  
№ 4



Екатеринбург  
2007

Труды Института математики и механики УрО РАН. Т. 13, № 4. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 191 с.  
ISBN 5-7691-1955-1

*Главный редактор*

Ю. С. Осипов

*Зам. гл. редактора:*

В. И. Бердышев, В. В. Кабанов

*Редакционная коллегия:*

Н. В. Величко, Л. П. Власов, М. И. Гусев, А. Р. Данилин, А. Ф. Клейменов,  
А. С. Кондратьев, А. И. Короткий, В. И. Максимов, С. И. Тарасова (отв. секретарь)

*Редакционный совет:*

В. В. Васин, И. И. Еремин, А. М. Ильин, Н. Н. Красовский,  
А. А. Махнев, Ю. Н. Субботин, В. Н. Ушаков, А. Г. Ченцов

Отв. редактор выпуска М. Ю. Филимонов

Т  $\frac{50(08)}{8П6(03) - 1998}$  ПВ-2007

ISBN 5-7691-1955-1

© УрО РАН, Институт  
математики и механики, 2007

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Б. И. Ананьев, Н. В. Гредасова.</b> Многократная коррекция квазилинейных систем при дискретных наблюдениях .....	3
<b>В. К. Андреев.</b> О свойствах решения краевой задачи совместного движения двух бинарных смесей .....	14
<b>И. Н. Белоусов.</b> О сильно регулярных графах с $\mu = 1$ и их автоморфизмах $\Pi$ .....	27
<b>Е. В. Березина</b> Задачи моделирования динамики дифференциальных систем с квадратичной нелинейностью .....	34
<b>А. Л. Гаврилюк.</b> Об изоспектральных подграфах бирегулярных геодезических графов диаметра 2 .....	49
<b>Д. С. Гутарин, С. С. Коновалова, В. И. Тимин, Е. С. Титов, С. С. Титов.</b> Комбинаторные проблемы существования совершенных шифров .....	61
<b>А. В. Жибер, Ю. Г. Михайлова.</b> О гиперболических системах уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа .....	74
<b>Л. В. Камнева.</b> Разрывная функция цены в игровых задачах быстрогодействия .....	84
<b>Р. Д. Муртазина.</b> Нелинейные гиперболические уравнения и характеристические алгебры Ли .....	103
<b>Е. А. Сбродова.</b> Граничные наклоны в трехмерных многообразиях .....	119
<b>Л. З. Уразбахтина.</b> Интегрирование дифференциально-инвариантных подмоделей .	129
<b>М. Ю. Филимонов.</b> Применение обобщенных систем базисных функций при построении решений нелинейных уравнений с частными производными .....	138
<b>С. В. Хабиров.</b> Классификация квазилинейных волновых уравнений специального вида .....	154
<b>Е. В. Шевалдина.</b> Аппроксимация локальными параболическими сплайнами функций по их значениям в среднем .....	169

УДК 519.856.2

**МНОГОКРАТНАЯ КОРРЕКЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ  
ПРИ ДИСКРЕТНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ<sup>1</sup>****Б. И. Ананьев, Н. В. Гредасова**

Рассмотрена минимаксная задача многократной коррекции управляющего воздействия в квазилинейной системе с целью минимизации терминального функционала при неполной информации о фазовом векторе.

**Введение**

Задача коррекции движения, рассмотренная в [1, 2], обобщается в двух направлениях. Во-первых, коррекция проводится многократно, как в [3], что приводит к последовательности моментов изменения программного управления. Во-вторых, предполагается, что уравнения движения являются квазилинейными и содержат малый параметр. Отметим, что задачи однократной коррекции для квазилинейных систем изучались в [4, 5]. Однако в данной работе используется иной способ оценивания состояния, связанный с приближенным решением уравнения Беллмана [6]. Этот способ более универсален и к тому же позволяет строить аппроксимации информационных множеств сверху и снизу. Другой подход к решению задачи коррекции предлагался в [7].

**1. Оценка состояния квазилинейной системы**

Пусть задана управляемая  $n$ -векторная система:

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + B(t)u + C(t)v, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

где вектор-функция  $f(t, x)$  непрерывна по совокупности аргументов и на любом шаре  $B_R(x, y \in B_R)$  удовлетворяет условиям

$$\|f(t, x)\| \leq c(1 + \|x\|), \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq c\|x - y\|. \quad (1.2)$$

Здесь и далее символ  $\|\cdot\|$  означает евклидову норму. В соотношениях (1.1), (1.2)  $B(t)$ ,  $C(t)$  — известные кусочно-непрерывные матрицы;  $c > 0$  — константа;  $\varepsilon$  — малый параметр. Если правая часть уравнения содержит линейные слагаемые  $A(t)x$ , то оно сводится к виду (1.1) с помощью невырожденного преобразования координат.

Фазовый вектор системы (1.1) недоступен для измерения. В дискретные моменты  $0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq T$  становятся известными результаты наблюдений:

$$y_k = G_k x(t_k) + w_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00341) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ 5344.2006.1).

где  $G_k$  — заданные матрицы размера  $m \times n$ . На помехи  $v(\cdot), w_k$  наложены совместные интегральные и суммарные ограничения

$$\|x_0\|_{P_0}^2 + \int_0^T \|v(t)\|_{H(t)}^2 dt + \sum_{k=1}^N \|w_k\|_{R_k}^2 \leq 1. \quad (1.4)$$

В формуле (1.4) и далее полагаем  $\|x\|_P^2 = x'Px$ , символ  $'$  означает транспонирование. Матрицы  $H(t), P_0, R_k$  симметричные и равномерно положительно определенные;  $H(t)$  кусочно-непрерывна по  $t$ . Управление  $u$  ограничено включением  $u(t) \in U$ , где  $U$  — компакт. Предполагается, что любое решение системы (1.1) не выходит на отрезке  $[0, T]$  за пределы некоторой ограниченной области  $\mathcal{D}$ . Размеры области  $\mathcal{D}$  и величина константы в (1.2) согласованы.

Введем в рассмотрение информационное множество  $X(t, y, u)$  [1]. Для его описания определим функцию Беллмана

$$V(t, x) = \min_{v(\cdot)} J(t, x, v), \quad (1.5)$$

где

$$J(t, x, v) = \|x_0\|_{P_0}^2 + \int_0^t \|v(s)\|_{H(s)}^2 ds + \sum_{\{k: t_k \leq t\}} \|y_k - G_k x(t_k)\|_{R_k}^2. \quad (1.6)$$

Минимум функционала (1.6) в задаче (1.5) берется по всем квадратично интегрируемым функциям  $v(\cdot)$  в системе (1.1) при краевом условии  $x(t) = x$ , заданных вплоть до момента  $t$  измерениях  $y_k$  и заданном управлении  $u(\cdot)$ . Зависимость от измерений и управления в обозначениях (1.5), (1.6) для краткости опущена. Пусть  $G(t)$  — произвольная непрерывная матричная функция с условиями  $G(t_k) = G_k, k = 1, \dots, N$ , а  $y(t)$  — произвольная непрерывная интерполяция поступающих дискретных измерений  $y_1, \dots, y_N$ . Введем обобщенную матричную функцию  $R(t) = \sum_{k=1}^N R_k \delta(t - t_k)$ , где  $\delta(t)$  — функция Дирака. Тогда дискретные наблюдения эквивалентны непрерывным наблюдениям с матрицей  $G(t)$  и непрерывными возмущениями  $w(t)$  при наличии ограничений

$$\|x_0\|_{P_0}^2 + \int_0^T (\|v(t)\|_{H(t)}^2 + \|w(t)\|_{R(t)}^2) dt \leq 1.$$

Для задачи (1.5), (1.6) запишем формально уравнение Беллмана:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= V(0, x) + \int_0^t \left( \min_v \{-v'C'V_x + \|v\|_H^2\} - (\varepsilon f(s, x) + Bu)'V_x + \|y - Gx\|_R^2 \right) ds \\ &= \|x\|_{P_0}^2 + \int_0^t \left( -(1/4)V_x'CH^{-1}C'V_x - (\varepsilon f(s, x) + Bu)'V_x + \|y - Gx\|_R^2 \right) ds; \\ \bar{v} &= (1/2)H^{-1}C'V_x. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $\bar{v}$  — оптимальный элемент в задаче (1.5), (1.6).

**Предположение 1.1.** При всех достаточно малых  $\varepsilon$  уравнение (1.7) имеет единственное решение  $V(t, x)$ , гладкое в областях  $(t_i, t_{i+1}) \times \mathcal{D}, i = 0, \dots, N$ , кусочно непрерывное по  $t$  и такое, что его градиент  $V_x(t, x)$  удовлетворяет условиям типа (1.2).

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 1.1.** При сделанном предположении 1.1 имеем  $X(t, y, u) = \{x : V(t, x) \leq 1\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $V(t, x)$  — решение уравнения Беллмана (1.7) для конкретных элементов  $\varepsilon, y_k, u(\cdot)$ , удовлетворяющее указанным в предположении 1.1 условиям.

Беря его полную производную по  $t$ , находим, что  $V(t, x) = \|x_0\|_{P_0}^2 + \int_0^t (\|v(s)\|_{H(s)}^2 + \|y(s) - G(s)x(s)\|_{R(s)}^2) ds$ . Следовательно, неравенство  $V(t, x) \leq 1$  влечет включение  $x \in X(t, y, u)$ , поскольку при  $v = \bar{v}$  и  $y_k - G_k x(t_k) = w_k$  уравнение (1.1) имеет единственное решение, для которого выполняются ограничения (1.4) и равенства (1.3). Обратно, если выполняется включение  $x \in X(t, y, u)$ , то существуют возмущения  $v(\cdot), w_k$ , для которых имеет место неравенство (1.4). Тогда подавно выполняется неравенство  $V(t, x) \leq 1$ , т.к. функция Беллмана дает минимум соответствующего функционала.  $\square$

Рассмотрим последовательность непрерывно дифференцируемых в областях  $(t_i, t_{i+1}) \times \mathcal{D}$ ,  $i = 0, \dots, N$ , функций  $V^j(t, x)$ ,  $j = 0, 1, \dots$ , и составим ряд по степеням  $\varepsilon$ :

$$V(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} V^j(t, x) \varepsilon^j, \quad (1.8)$$

равномерно сходящийся на каждом ограниченном множестве переменных  $t, x$ . Попробуем удовлетворить уравнение (1.7) с помощью ряда (1.8), приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Для нулевого приближения получим уравнение

$$V^0(t, x) = \|x\|_{P_0}^2 + \int_0^t \left( -u' B' V_x^0 - (1/4) V_x^{0'} C H^{-1} C' V_x^0 + \|y - Gx\|_R^2 \right) ds, \\ v^0 = (1/2) H^{-1} C' V_x^0.$$

Здесь  $v^0$  — нулевое приближение к оптимальному элементу  $\bar{v}$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$V^0(t, x) = \|x - \hat{x}\|_P^2 + h^2, \quad (1.9)$$

где параметры удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{P} = -P C H^{-1} C' P + G' R G, \quad P(0) = P_0; \\ \dot{\hat{x}} = P^{-1} G' R (y - G \hat{x}) + B u, \quad \hat{x}(0) = 0, \quad \dot{h}^2 = \|y - G \hat{x}\|_R, \quad h^2(0) = 0. \quad (1.10)$$

Система уравнений (1.10) имеет единственное решение, зависящее только от дискретных измерений  $y_k$ , матриц  $G_k$  и управления  $u(\cdot)$ . Для коэффициентов при более высоких степенях  $\varepsilon$  получаем уравнения

$$V_t^i + f'(t, x) V_x^{i-1} + u' B' V_x^i + (1/4) \sum_{j=0}^i V_x^j C H^{-1} C' V_x^{i-j} = 0; \quad i \geq 1, \quad V^i(0, x) = 0. \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) имеют первый порядок по частным производным и линейны относительно неизвестной функции  $V^i(t, x)$ . Они также не содержат никаких обобщенных функций. Данные факты позволяют использовать метод характеристик [8] для интегрирования данных уравнений. Положим  $W^i = \sum_{j=0}^i \varepsilon^j V^j$ ,  $v^i = (1/2) H^{-1} C' W_x^i$ . Эти функции служат  $i$ -м приближением соответственно к  $V(t, x)$  и  $\bar{v}(t, x)$ .

**Предположение 1.2.** При всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  система уравнений (1.11) имеет единственное решение  $V^i(t, x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , градиент  $V_x^i(t, x)$  которого удовлетворяет условиям типа (1.2).

Предположение 1.2 оправдывает разложение (1.8), что дает возможность построить приближенные решения.

## 2. Аппроксимации информационного множества сверху и снизу

Установим вначале оценку нулевого приближения. Рассмотрим вспомогательный критерий

$$J_0^\varepsilon(t, x, v) = J(t, x, v) + \varepsilon \int_0^t f'(s, x) V_x^0(s, x) ds. \quad (2.1)$$

Задача минимизации критерия (2.1) на решениях системы (1.1) при краевом условии  $x(t) = x$  приводит к уравнению Беллмана:

$$Q(t, x) = \|x\|_{P_0}^2 + \int_0^t \left( -(\varepsilon f(s, x) + Bu)' Q_x - (1/4) Q_x' C H^{-1} C' Q_x + \|y - Gx\|_R^2 + \varepsilon f'(s, x) V_x^0 \right) ds.$$

Очевидно, функция  $V^0(t, x)$ , определенная в (1.9), является решением последнего уравнения. Следовательно, возмущение  $v^0 = (1/2) H^{-1} C' V_x^0$  доставляет минимум функционалу (2.1). Далее, следуя рассуждениям из [9], найдем оценки разности  $J_0^\varepsilon(t, x, v^0) - J(t, x, \bar{v})$ . С учетом (2.1) вследствие оптимальности  $\bar{v}$  получим неравенство

$$J(t, x, v) \leq J(t, x, v^0) = J_0^\varepsilon(t, x, v^0) - \varepsilon \int_0^t f'(s, x^0) V_x^0(s, x^0) ds, \quad (2.2)$$

где  $x^0$  — решение (1.1) при  $v = v^0$  и  $x^0(t) = x$ . Возмущение  $v^0$  линейно по  $x$ . Отсюда и из оценок (1.2) вытекает, что  $\|x^0(s)\| \leq c(1 + \|x\|)$ . Значит,

$$\left| \int_0^t f'(s, x^0) P(s) (x^0(s) - \hat{x}(s)) ds \right| \leq c(1 + \|x\|^2). \quad (2.3)$$

Таким образом, в силу (2.2) получим

$$J(t, x, \bar{v}) \leq J_0^\varepsilon(t, x, v^0) + \varepsilon c_1^0 (1 + \|x\|^2). \quad (2.4)$$

Здесь константа  $c_1^0$  определяется параметрами системы и не зависит от  $\varepsilon$ . Аналогично вследствие оптимальности  $v^0$  в задаче (1.1), (2.1) получим

$$J_0^\varepsilon(t, x, v^0) \leq J_0^\varepsilon(t, x, \bar{v}) = J(t, x, \bar{v}) + \varepsilon \int_0^t f'(s, \bar{x}) V_x^0(s, \bar{x}) ds, \quad (2.5)$$

где  $\bar{x}$  — решение уравнения (1.1) при  $v = \bar{v}$  и  $\bar{x}(t) = x$ . В силу неравенства  $\|v\|_{H(s)}^2 \geq \lambda \|v\|^2$ ,  $\lambda > 0$ , имеем

$$\lambda \int_0^t \|\bar{v}(s, \bar{x})\|^2 ds \leq J(t, x, 0) \leq c(1 + \|x\|^2).$$

Тогда из уравнений (1.1), условий (1.2) получим

$$\|\bar{x}(s)\|^2 \leq c(1 + \|x\|^2). \quad (2.6)$$

Следовательно, аналогично (2.3) имеем

$$\left| \int_0^t f'(s, \bar{x}) P(s) (\bar{x}(s) - \hat{x}(s)) ds \right| \leq c(1 + \|x\|^2). \quad (2.7)$$

Тогда из (2.5) и (2.7) будет вытекать неравенство

$$J_0^\varepsilon(t, x, v^0) \leq J(t, x, \bar{v}) + \varepsilon c_2^0(1 + \|x\|^2), \quad (2.8)$$

где константа  $c_2^0$  не зависит от  $\varepsilon$  и определяется параметрами системы. Учитывая, что  $J(t, x, \bar{v}) = V(t, x)$ ,  $J_0^\varepsilon(t, x, v^0) = V^0(t, x)$ , а также принимая во внимание утверждение 1.1, получаем внутреннюю и внешнюю аппроксимации информационного множества.

**Утверждение 2.1.** *Существуют константы  $c_1^0, c_2^0$ , не зависящие от  $\varepsilon$  и такие, что выполняются включения*

$$\begin{aligned} X(t, y, u) &\subset \{x : V^0(t, x) - \varepsilon c_2^0(1 + \|x\|^2) \leq 1\}, \\ \{x : V^0(t, x) + \varepsilon c_1^0(1 + \|x\|^2) \leq 1\} &\subset X(t, y, u). \end{aligned}$$

Дадим оценку первого приближения. Первое приближение к  $\bar{v}(t, x)$  имеет вид

$$v^1 = (1/2)H^{-1}C'W_x^1, \quad (2.9)$$

где  $W^1 = V^0 + \varepsilon V^1$ . В соответствии с (1.11) функция  $V^1$  есть решение краевой задачи:

$$V_t^1 + f'(t, x)V_x^0 + u'B'V_x^1 + (1/2)V_x^{0'}CH^{-1}C'V_x^1 = 0, \quad V^1(0, x) = 0.$$

Из этого уравнения и уравнения для  $V^0$  получаем соотношение

$$\begin{aligned} W^1(t, x) + \int_0^t \left( u'B'W_x^1 + \varepsilon f'W_x^1 - \varepsilon^2 f'V_x^1 - \|y - Gx\|^2 + (1/4)W_x^{1'}CH^{-1}C'W_x^1 \right. \\ \left. - (1/4)V_x^{1'}CH^{-1}C'V_x^1 \right) ds = \|x\|_{P_0}^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Далее вводим вспомогательный функционал

$$\begin{aligned} J_1^\varepsilon(t, x, v) &= J(t, x, v) + \alpha_1(v), \\ \alpha_1(v) &= \varepsilon^2 \int_0^t \left( f'(s, x)V_x^1(s, x) + (1/4)V_x^{1'}CH^{-1}C'V_x^1 \right) ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Так же, как и в случае нулевого приближения, убеждаемся в том, что функция  $W^1$  является решением уравнения (2.10), а функция (2.9) доставляет минимум функционалу (2.11) на решениях системы (1.1).

Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю нулевого приближения. Согласно (2.11) получим

$$J(t, x, \bar{v}) \leq J(t, x, v^1) = J_1^\varepsilon(t, x, v^1) - \alpha_1(v^1),$$

где  $x(\cdot) = x^1(\cdot)$  — решение уравнения (1.1) при  $v = v^1$  и  $x^1(t) = x$ . В силу (2.11), оценок (1.2) и предположения 1.2 имеем  $|\alpha_1(v^1)| \leq \varepsilon^2 c(1 + \|x\|^2)$ . Следовательно,

$$J(t, x, \bar{v}) \leq J_1^\varepsilon(t, x, v^1) + \varepsilon^2 c_1^1(1 + \|x\|^2). \quad (2.12)$$

Для установления противоположного неравенства на основании оптимальности возмущения  $v^1$  в задаче (1.1), (2.11) находим

$$J_1^\varepsilon(t, x, v^1) \leq J_1^\varepsilon(t, x, \bar{v}) = J(t, x, \bar{v}) + \alpha_1(\bar{v}).$$

Но решение  $\bar{x}$  удовлетворяет оценке (2.6). Тогда из условий (1.2) и предположения 1.2 следует, что  $|\alpha_1(\bar{v})| \leq \varepsilon^2 c(1 + \|x\|^2)$ . Значит,

$$J_1^\varepsilon(t, x, v^1) \leq J(t, x, \bar{v}) + \varepsilon^2 c_2^1(1 + \|x\|^2). \quad (2.13)$$

Учитывая, что  $J(t, x, \bar{v}) = V(t, x)$ ,  $J_1^\varepsilon(t, x, v^1) = W^1(t, x)$ , приходим к следующему утверждению.

**Утверждение 2.2.** *Существуют константы  $c_1^1, c_2^1$ , не зависящие от  $\varepsilon$  и такие, что выполняются включения*

$$\begin{aligned} X(t, y, u) &\subset \{x : W^1(t, x) - \varepsilon^2 c_2^1 (1 + \|x\|^2) \leq 1\}, \\ \{x : W^1(t, x) + \varepsilon^2 c_1^1 (1 + \|x\|^2) \leq 1\} &\subset X(t, y, u). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно построить аппроксимации информационного множества более высокого порядка. Вводится вспомогательный критерий  $J_i^\varepsilon(t, x, v)$ , минимум которого на решениях уравнения (1.1) равен функции  $W^i(t, x)$ , а минимизирующим элементом является функция  $v^i(t, x)$ . Для оптимальных значений исходного и вспомогательного функционалов выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} J(t, x, \bar{v}) &\leq J_i^\varepsilon(t, x, v^1) + \varepsilon^{i+1} c_1^i (1 + \|x\|^2), \\ J_i^\varepsilon(t, x, v^1) &\leq J(t, x, \bar{v}) + \varepsilon^{i+1} c_2^i (1 + \|x\|^2). \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо утверждение, аналогичное 2.2, где функцию  $W^1(t, x)$  следует заменить на  $W^i(t, x)$ ,  $i > 1$ , константы  $c_j^1$  — на  $c_j^i$ , а величину  $\varepsilon^2$  — на  $\varepsilon^{i+1}$ .

### 3. Минимаксное управление квазилинейной системой по неполным начальным данным

Обозначим множество  $X(t_k, y, u)$  для краткости через  $X_k$  и назовем его позицией системы в момент  $t_k$ . Поскольку это множество описывается неравенством в утверждении 1.1, для всякого  $x \in X_k$  введем множество допустимых программных управлений:

$$\mathcal{V}(t, x) = \left\{ v(\cdot) : \int_t^T \|v\|^2 ds \leq 1 - V(t, x) \right\}. \quad (3.1)$$

В случае, когда  $V(t, x) < 1$ , имеем  $\mathcal{V}(t, x) \neq \{0\}$ . Это означает, что для данной точки  $x$  ресурс возмущений еще не исчерпан.

Будем минимизировать терминальный функционал  $\|Dx(T)\|$ , где  $D$  — некоторая матрица. Тогда минимаксная задача программного управления запишется как

$$\sup_{x \in X_k} \sup_{v \in \mathcal{V}(t_k, x)} \|Dx(T)\| \rightarrow \min_u = r_k(y, u). \quad (3.2)$$

Здесь минимум берется по всем допустимым управлениям  $u = u(\cdot | t_k)$ , заданным на отрезке  $[t_k, T]$ . Минимаксное значение функционала (3.2), равное  $r_k(y, u)$ , назовем гарантированным результатом программного управления. Символ  $u$  в  $r_k(y, u)$  означает ранее выбранное управление  $u(s)$ ,  $s \in [0, t_k]$ . Управление  $\bar{u} = \bar{u}(\cdot | t_k)$ , доставляющее минимум в задаче (3.2), будем называть минимаксным. В начальный момент  $t = 0$  всегда назначается минимаксное управление  $\bar{u}(\cdot | 0)$  в задаче (3.2), где  $X_0 = \{x : \|x\|_{P_0}^2 \leq 1\}$  и  $V(0, x) = \|x\|_{P_0}^2$ . Именно это управление, назначенное в начальный момент, и предполагается в дальнейшем корректировать. Корректировка производится в моменты  $t_k$  поступления очередного измерения. При этом задача (3.2) будет вспомогательным, но весьма важным элементом в общем алгоритме коррекции. Опишем процедуру решения задачи (3.2), следуя [4, 5].

Пусть  $x(t; u, v, x_k)$  — решение исходной системы (1.1), где  $u(t) \in U$ ,  $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t, x_k)$ ,  $x_k \in X_k$ , с начальным условием  $x(t_k; u, v, x_k) = x_k$ . Запишем последовательность приближений Пикара:

$$x_{(i)}(t; u, v, x_k) = x_{(0)}(t; u, v, x_k) + \varepsilon \int_{t_k}^t f(s; x_{(i-1)}(s; u, v, x_k)) ds, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

где  $x_{(0)}$  — решение системы нулевого приближения (1.1) при  $\varepsilon = 0$ . Известно [10], что последовательность  $x_{(i)}$  равномерно сходится при любых параметрах и при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , причем справедливы неравенства

$$\|x(t; u, v, x_k) - x_{(i)}(t; u, v, x_k)\| \leq \varepsilon^{i+1} N_1^{i+1}, \quad (3.4)$$

которые выполняются равномерно по всем параметрам и  $t \in [t_k, T]$ ;  $N_1 > 0$  — некоторая постоянная. Строим решение задачи (3.2) на основе следующей итерационной процедуры.

На начальном этапе рассматривается задача (3.2) для системы нулевого приближения (1.1) при  $\varepsilon = 0$ . Минимаксное значение функционала для линейного приближения имеет вид (см. [1])

$$r_k^0(y, u) = \max_{\|l\| \leq 1} \left\{ l' D \hat{x}(t_k) - \int_{t_k}^T \rho(-l' D B | U) ds + (1 - h^2(t_k))^{1/2} (\pi^2(t_k) (1 - \|l\|^2) + \|l\|_{Q(t_k)}^2)^{1/2} \right\}, \quad (3.5)$$

где

$$Q(t_k) = D \left( I + \int_{t_k}^T C H^{-1} C' ds \right) D', \quad \pi^2(t) = \max_{\|l\| \leq 1} l' Q(t) l, \\ X_k = X_k^0 = \{x : V^0(t, x) \leq 1\}.$$

Здесь и далее  $\rho(\cdot | U)$  — опорная функция множества  $U$ . В случае произвольного множества  $X_k$  имеем

$$r_k^0(y, u) = \max_{\|l\| \leq 1} \left\{ - \int_{t_k}^T \rho(-l' D B | U) ds + (\text{conc}) \varphi_0(l) \right\}, \quad (3.6) \\ \varphi_0(l) = \max_{x \in X_k} \left\{ l' D x + (1 - V(t_k, x))^{1/2} \left( l' D \int_{t_k}^T C H^{-1} C' ds D' l \right)^{1/2} \right\},$$

где conc — замкнутая вогнутая оболочка функции  $\varphi_0$ . Оптимальное управление в задаче линейного приближения удовлетворяет условию минимума

$$l^{0'} D B \bar{u}(s) = \min_{u \in U} l^{0'} D B u.$$

Пусть выполнены следующие условия регулярности.

**Предположение 3.1.** *Максимум в задаче (3.6) достигается на единственном векторе  $l^0 \neq 0$ , матрица  $D \int_{t_k}^T C H^{-1} C' ds D'$  невырождена и существует непрерывный градиент  $f_x(t, x)$  функции  $f(t, x)$ .*

При условиях предположения 3.1 на каждом шаге процедуры рассматривается вспомогательная задача

$$\sup_{x \in X_k} \sup_{v \in \mathcal{V}(t_k, x)} \|D x_*(T)\| \rightarrow \min_u = r_k^*(y, u), \quad (3.7)$$

где функция  $x_*(t)$ ,  $t \in [t_k, T]$ , подбирается на каждом шаге. На  $(i + 1)$ -м шаге,  $i \geq 0$ , полагаем:

$$x_*(t) = z_{(i)}(t) + \delta x(t); \quad \dot{z}_{(i)} = B u^i + C v^i + \varepsilon f(t, x_{(i)}(t; u^i, v^i, x_k^i)), \quad z_{(i)}(t_k) = x_k^i; \\ d\delta x/dt = \varepsilon f_x(t, x_{(i)}(t; u^i, v^i, x_k^i)) \delta x + B(u - u^i) + C(v - v^i), \quad \delta x(t_k) = x_k - x_k^i, \quad (3.8)$$

где  $u(t) \in U$ ,  $x_k \in X_k$ ,  $v \in (t_k, x_k)$ ;  $x_{(i)}$  определяется согласно (3.3). Решение вспомогательной задачи (3.7) на  $i$ -м шаге можно представить в виде

$$\begin{aligned} r_k^*(y, u) = r_k^i(y, u) = \max_{\|l\| \leq 1} & \left\{ - \int_{t_k}^T \rho(-l' DS^{(i)}(T, s)B \mid U) ds + (\text{conc})\varphi_i(l) \right\}, \\ \varphi_i(l) = \max_{x \in X_k} & \left\{ l' D(S^{(i)}(T, t_k)(x - x_k^{i-1}) + z_{(i-1)}(T)) \right. \\ & + (1 - V(t_k, x))^{1/2} \left( l' D \int_{t_k}^T S^{(i)}(T, s) C H^{-1} C' S^{(i)'}(T, s) ds D' l \right)^{1/2} \\ & \left. - \int_{t_k}^T l' DS^{(i)}(T, s)(B u^{i-1} + C v^{i-1}) ds \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В соотношениях (3.8), (3.9)  $u^i$ ,  $v^i$ ,  $x_k^i$  суть экстремальные элементы во вспомогательной задаче типа (3.9),  $S^{(i)}(t, t_k)$  — фундаментальная матрица системы в вариациях из (3.8),  $S^{(0)}(t, t_k) \equiv I$ . В условиях предположения 3.1 и при некоторых дополнительных предположениях о локальной сильной выпуклости множества  $X_k$  в точке  $x_k^0$  и множества  $U$  в точке  $u^0(t)$  в [5] доказана сходимость  $r_k^i(y, u) \rightarrow r_k(y, u)$  и  $u^i(t) \rightarrow \bar{u}(t \mid t_k)$  почти всюду. Указанная сходимость выполняется равномерно по малому параметру  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^0$ .

#### 4. Многократная коррекция минимаксного управления в квазилинейной системе

Как уже отмечалось выше, в начальный момент времени выбирается минимаксное управление  $\bar{u}(\cdot \mid 0)$ , которое следует корректировать в моменты  $\{t_1, \dots, t_N\}$  поступления измерений. Введем несколько определений.

Множеством  $Y(k, l, y, u)$  возможных продолжений сигнала в позиции  $X_k = X(t_k, y, u)$  будем называть совокупность всех векторов  $\{y_i : k < i \leq l\}$ , которые могут реализоваться в системе (1.1), (1.3) как продолжение уже измеренного сигнала  $\{y_i : 1 \leq i \leq k\}$  при заданном управлении  $u(s)$ ,  $0 \leq s \leq t_l > t_k$ .

Для оценки качества управления  $u(\cdot \mid t_k)$ , назначенного на оставшийся отрезок времени  $[t_k, T]$ , введем величину

$$r_k(l, y, u) = \max_{y \in Y(k, l, y, u)} r_l(y, u). \quad (4.1)$$

Данная величина представляет собой наихудший прогноз гарантированного результата управления  $u(\cdot \mid t_k)$  вплоть до момента  $t_l$ . Введем еще величину

$$\underline{r}_k(y, u) = \min_{k < l \leq N} r_k(l, y, u), \quad (4.2)$$

определяющую минимум наихудшего промаха (4.1).

*Алгоритм многократной коррекции* определяется следующим образом. Если выполняется неравенство  $r_k(y, u) > \underline{r}_k(y, u)$ , то управление  $u(\cdot \mid t_k)$ , найденное на предыдущих шагах, не корректируется. В противном случае, если к тому же управление  $u(\cdot \mid t_k)$  не является минимаксным в задаче (3.2), переходим к новому управлению  $\bar{u}(\cdot \mid t_k)$ . В следующий момент  $t_{k+1}$  поступления нового измерения процедуру повторяем. Данный алгоритм является позиционным и зависит от конкретной реализации сигнала.

Отметим следующее. Если в момент  $t_k$  выбрано минимаксное управление  $\bar{u}(\cdot \mid t_k)$ , то  $r_k(y, u) \geq r_k(l, y, u)$  для всех  $k < l \leq N$ . В противном случае найдутся элементы  $x_k \in X_k$ ,  $v(\cdot)$  и  $w_i$ ,  $k < i \leq l$ , порождающие некоторый сигнал и такие, что  $\|Dx(T)\| > r_k(y, u)$ . Но это невозможно в силу минимаксности управления. Таким образом, приходим к утверждению.

**Утверждение 4.1.** Алгоритм коррекции однозначно в зависимости от сигнала определяет последовательность  $\{i_1, i_2, \dots, i_K\}$ ,  $K \leq N$ , моментов  $t_{i_j}$  изменения управления. При этом управление, формируемое алгоритмом на отрезке  $[t_{i_j}, t_{i_{j+1}}]$ , совпадает с оптимальным управлением  $\bar{u}(\cdot | t_{i_j})$  в задаче (3.2),  $j = 1, \dots, K - 1$ . Гарантированные значения  $r_j = r_{i_j}(y, u)$  критерия качества образуют невозрастающую последовательность.

В изложенном выше алгоритме приходится решать вспомогательные задачи в каждый из моментов  $\{t_1, \dots, t_N\}$ . Более простой способ действий состоит в том, чтобы в случае неравенства  $r_k(y, u) > \underline{r}_k(y, u) = r_k(m, y, u)$ ,  $m > k + 1$ , перейти сразу к моменту  $t_m$ , пропуская промежуточные моменты. Однако окончательный результат управления в этом способе не может быть лучше результата основного алгоритма.

Остановимся подробнее на подсчете величины (4.1) и множества  $Y(k, l, y, u)$ . Пусть мы находимся в момент  $t_k$  в позиции  $X_k$ . Если  $x \in X_k$ , то ресурс для формирования сигнала равен

$$\int_{t_k}^T (\|v\|_H^2 + \|w\|_R^2) ds \leq 1 - V(t_k, x).$$

Для нулевого приближения имеем  $\varepsilon = 0$  и  $V(t_k, x) = V^0(t_k, x)$ . Из соотношений (1.10) следует, что набор значений  $\{y_{k+1}, \dots, y_l\} \in Y(k, l, y, u)$  тогда и только тогда, когда найдется набор векторов  $g_i$  такой, что

$$\sum_{i=k+1}^l \|g_i\|_{R_i}^2 \leq 1 - h^2(t_k).$$

Сам сигнал будет равен  $y_i = G_i \hat{x}(t_i) + g_i$ , где

$$\hat{x}(t_i) = \sum_{j=k+1}^i P^{-1}(t_j) G_j' R_j g_j + \int_{t_k}^{t_i} B u ds + \hat{x}(t_k). \quad (4.3)$$

Отсюда находим нулевое приближение для величины (4.1):

$$r_k^0(l, y, u) = \max_{\|l\| \leq 1} \left\{ l' D \left( \hat{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_l} B u ds \right) - \int_{t_l}^T \rho(-l' D B | U) ds + (1 - h^2(t_k))^{1/2} \left( \pi_1^2(t_l) (1 - \|l\|^2) + \|l\|_{Q_1(t_l)}^2 \right)^{1/2} \right\},$$

где

$$Q_1(t_l) = D \left( I + \int_{t_l}^T C H^{-1} C' ds + \sum_{j=k+1}^l P^{-1}(t_j) G_j' R_j^{-1} G_j P^{-1}(t_j) \right) D',$$

$$\pi_1^2(t_l) = \max_{\|l\| \leq 1} l' Q_1(t_l) l.$$

В [5] показано, что для любого  $\mu > 0$  существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что любое допустимое продолжение для системы нулевого приближения, удовлетворяющее условию

$$\sum_{j=k+1}^l \|g_j\|_{R_j}^2 \leq 1 - h^2(t_k) - \mu, \quad (4.4)$$

одновременно является допустимым продолжением и для исходной нелинейной системы, у которой  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Пусть  $Y^\mu(k, l, y, u)$  — это множество продолжений, получаемое по формулам (4.3), (4.4). Тогда можно указать [5] числа  $\mu > 0$  и  $\varepsilon_0 > 0$  такие, что

$$r_k(l, y, u) = \max_{y \in Y^\mu(k, l, y, u)} r_l(y, u)$$

для всякого  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

## 5. Пример

Рассмотрим простой модельный пример. Даны уравнения

$$\dot{x}^1 = \varepsilon(x^1)^2, \quad \dot{x}^2 = u, \quad y = x^1 + x^2 + w,$$

на отрезке  $[0, 2]$  с ограничениями

$$(x_0^1)^2 + (x_0^2)^2 + \int_0^2 w^2(t)dt \leq 1.$$

Управление ограничено по модулю:  $|u| \leq 1$ . Здесь предполагается, что наблюдения проводятся непрерывно, а коррекция ведется с шагом  $\Delta t = 0.5$  в моменты  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 1$ ,  $t_3 = 1.5$ . Требуется минимизировать функционал  $|x^2(2)|$ ,  $\varepsilon = 0.1$ . Функция  $V(t, x)$  здесь вычисляется явным образом:

$$V(t, x) = \left(x^2 - \int_0^t u ds\right)^2 + (x^1 / (\varepsilon x^1 t + 1))^2 + \int_0^t \left(x^2 - \int_s^t u(\tau) d\tau + x^1 / (\varepsilon x^1 (t-s) + 1) - y(s)\right)^2 ds.$$

Коэффициент при  $\varepsilon$  в разложении (1.8) имеет вид

$$V^1(t, x) = -2(x^1)^3(t + t^2/2) - 2 \int_0^t (x^1)^2(t-s) \left(x^2 - \int_s^t u(\tau) d\tau - y(s)\right) ds.$$

Уравнения (1.10) нулевого приближения принимают вид

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t & 1+t \end{pmatrix}, \quad \dot{\hat{x}}^1 = \dot{\hat{x}}^2 = (y - \hat{x}^1 - \hat{x}^2)/(1+2t) + u, \quad \hat{x}(0) = 0, \\ \dot{h}^2 = (y - \hat{x}^1 - \hat{x}^2)^2, \quad h^2(0) = 0.$$

В начальный момент значение функционала  $r_0 = 1$ , и достигается оно на любом управлении при условии  $\int_0^2 u(s)ds = 0$ . Положим, например,  $\bar{u}(\cdot | 0) = 0$ . Пусть к моменту  $t_1$  реализовался сигнал  $y(t) = (1+4t)/5$ ,  $y(t) - \hat{x}^1 - \hat{x}^2 = (1+2t)/5$ . Тогда  $h^2(1/2) = 7/150$ ,  $\hat{x}^1(1/2) = \hat{x}^2(1/2) = 1/10$ . В момент  $t_1$  нулевое управление следует скорректировать и перейти к любому управлению, для которого  $\int_{1/2}^2 u(s)ds = -1/10$ , например,  $\bar{u}(\cdot | 1/2) \equiv -1/15$ . В момент  $t_2$  управление сохраняется, а при  $t = t_3$  снова корректируется.

Отметим, что выбор минимаксного управления здесь неоднозначен. Для определенности мы полагаем его постоянным на всем оставшемся отрезке времени. Данная стратегия, построенная по нулевому приближению, сохраняется и для исходной системы. Подчеркнем, что сигнал  $y(t) = (1+4t)/5$  может реализоваться (при нулевом управлении) в системе нулевого приближения при  $x_0^1 = x_0^2 = 2/5$ ,  $w(t) = (4t-3)/5$ . Этот же сигнал может реализоваться при нулевом управлении и в исходной нелинейной системе при достаточно малых  $\varepsilon$ , в частности, при  $\varepsilon = 0.1$ . Более содержательные примеры будут рассмотрены в отдельной работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. **Ананьев Б.И., Куржанский А.Б., Шелементьев Г.С.** Минимаксный синтез в задачах навигации и коррекции движения // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып.1. С. 3–13.
3. **Ананьев Б.И., Гредасова Н.В.** Многократная коррекция движения линейно-квадратичной управляемой системы // Вестн. УГТУ – УПИ. 2005. № 4(56). С. 280–288.
4. **Кремлёв А.Г.** Задача коррекции движения квазилинейной системы при квадратичных ограничениях // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 8. С. 1348–1359.
5. **Кремлёв А.Г.** Асимптотические методы оптимального управления сингулярно возмущенными и квазилинейными системами: Дис. д-ра физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1997. 311 с.
6. **Kurzanski A.V., Varaiya P.** Dynamic optimization for reachability problems // J. Optim. Theory and Appl. 2002. No. 108. P. 227–251.
7. **Черноусько Ф.Л.** Минимаксная задача одноразовой коррекции при погрешностях измерений // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 4. С. 584–595.
8. **Степанов В.В.** Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958. 468 с.
9. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 614 с.
10. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 401 с.

Поступила 14.03.2007

УДК 517.9

## О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУХ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ<sup>1</sup>

В. К. Андреев

Исследуются свойства инвариантного решения уравнений термодиффузии в плоском слое, когда на поверхности двух смесей поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации. Для возникающей сопряженной начально-краевой задачи получены априорные оценки возмущений поля скоростей и температур, показывающие их экспоненциальную сходимость с ростом времени к стационарным значениям. Возмущения концентрации также выходят на стационарный режим — это доказывается с помощью преобразования Лапласа.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается движение двух несмешивающихся несжимаемых бинарных смесей с общей границей раздела. Обозначим через  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) области, занятые жидкостями с поверхностью раздела  $\Gamma$ ,  $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t)$ ,  $p_j(\mathbf{x}, t)$  — соответственно вектор скорости и давление,  $\theta_j(\mathbf{x}, t)$  и  $c_j(\mathbf{x}, t)$  — отклонения от средних значений температуры и концентрации. Тогда система уравнений термодиффузионного движения *в отсутствие внешних сил* имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_j}{dt} + \frac{1}{\rho_j} \nabla p_j &= \nu_j \Delta \mathbf{u}_j; & \frac{d\theta_j}{dt} &= \chi_j \Delta \theta_j; \\ \frac{dc_j}{dt} &= d_j \Delta c_j + \alpha_j d_j \Delta \theta_j; & \operatorname{div} \mathbf{u}_j &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\rho_j$  — средняя плотность,  $\nu_j$  — кинематическая вязкость,  $\chi_j$  — температуропроводность,  $d_j$  — коэффициент диффузии,  $\alpha_j$  — коэффициент термодиффузии;  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ .

Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  на границе раздела зависит от температуры и концентрации  $\sigma = \sigma(\theta, c)$ , причем для многих смесей он хорошо аппроксимируется линейной зависимостью

$$\sigma(\theta, c) = \sigma_0 - \varkappa_1(\theta - \theta_0) - \varkappa_2(c - c_0), \quad (1.2)$$

где  $\varkappa_1 > 0$  — температурный коэффициент,  $\varkappa_2$  — концентрационный коэффициент (обычно  $\varkappa_2 < 0$ , поскольку поверхностное натяжение увеличивается с ростом концентрации).

Сформулируем условия на поверхности раздела  $\Gamma$  [1]:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.3)$$

примем как равенство скоростей;

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = V_{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.4)$$

как кинематическое условие. Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\Gamma$ , направленный из  $\Omega_1$  в  $\Omega_2$ ,  $V_{\mathbf{n}}$  — скорость перемещения поверхности в направлении нормали,  $\mathbf{u}$  — значение вектора скоростей обеих жидкостей на  $\Gamma$ , попарно совпадающих в силу (1.3);

$$(P_2 - P_1)\mathbf{n} = 2\sigma H\mathbf{n} + \nabla_{\Gamma}\sigma, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.5)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-01-00836 и в рамках Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5873.2006.1).

является динамическим условием: оно означает равенство всех сил, действующих на поверхность;  $P_j = -p_j E + 2\rho_j \nu_j D(\mathbf{u}_j)$  — тензоры напряжений,  $D$  — тензор скоростей деформаций;  $H$  — средняя кривизна поверхности  $\Gamma$ ;  $\nabla_\Gamma = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}$  обозначает поверхностный градиент. Далее,

$$\theta_1 = \theta_2, \quad c_1 = \lambda c_2, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (1.6)$$

есть условие непрерывности температур и условие баланса концентраций на границе раздела,  $\lambda$  — постоянная равновесия Генри.

Кроме того, на поверхности раздела

$$k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) представляет собой равенство потоков тепла на границе раздела. Постоянные  $k_j$  — коэффициенты теплопроводности.

Еще одно условие — равенство потоков вещества через границу раздела:

$$d_2 \left( \frac{\partial c_2}{\partial n} + \alpha_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \right) = d_1 \left( \frac{\partial c_1}{\partial n} + \alpha_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Области  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  могут контактировать не только друг с другом, но и с твердыми стенками. Обозначим стенки через  $\Sigma_j$ ; на них ставится условие прилипания

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{a}_j(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_j,$$

где  $\mathbf{a}_j(\mathbf{x}, t)$  — скорость движения стенки  $\Sigma_j$ . Будем считать, что температура в точках  $\Sigma_j$  задана

$$\theta_j = \theta_{\text{ст}}^j(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma_j.$$

Кроме того, отсутствует поток вещества через твердые поверхности  $\Sigma_j$ :

$$\frac{\partial c_j}{\partial n} + \alpha_j \frac{\partial \theta_j}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_j.$$

Для полной постановки задачи к соотношениям (1.1)–(1.6) следует добавить начальные условия

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0j}(\mathbf{x}), \quad \text{div } \mathbf{u}_{0j} = 0, \quad \theta_j(\mathbf{x}, 0) = \theta_{0j}(\mathbf{x}), \quad c_j(\mathbf{x}, 0) = c_{0j}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j.$$

Ниже рассматривается система уравнений двумерного движения двух бинарных смесей с плоской границей раздела в отсутствие внешних сил. Можно показать, что эта система допускает однопараметрическую подгруппу, соответствующую оператору [2]  $\partial/\partial x + A_j \partial/\partial \theta_j + B_j \partial/\partial c_j$ ,  $A_j, B_j$  — постоянные. Инвариантное решение следует искать в виде

$$u_j = u_j(y, t), \quad v_j = v_j(y, t), \quad p_j = p_j(y, t), \quad \theta_j = A_j x + T_j(y, t), \quad c_j = B_j x + K_j(y, t).$$

Из уравнения сохранения массы следует, что  $v_j$  зависит только от времени:  $v_j = v_j(t)$ , а из проекции уравнений импульса на ось  $y$  —  $\rho_j^{-1} P_{jy} = v_j t(t)$ . Будем считать  $v_j(t) = 0$  (иначе условия прилипания на неподвижных стенках не выполняются). Таким образом, представление инвариантного решения таково:

$$u_j = u_j(y, t), \quad v_j = 0, \quad p_j = p_j(t), \quad \theta_j = A_j x + T_j(y, t), \quad c_j = B_j x + K_j(y, t). \quad (1.8)$$

Решению (1.8) можно дать следующую интерпретацию. Предположим, что на границе раздела двух смесей  $y = 0$  поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации:  $\sigma(\theta, c) = \sigma_0 - \varkappa_1 \theta - \varkappa_2 c$ , где  $\varkappa_1 > 0$ ,  $\varkappa_2$  — постоянные (см. (1.2)). В начальный момент времени первая смесь заполняет слой  $-l_1 < y < 0$ , а вторая — слой  $0 < y < l_2$ . Смеси находятся

в покое, и при  $t = 0$  в слоях мгновенно создаются поле температур  $\theta_j = A_j x$  и поле концентраций  $c_j = B_j x$ . Термоконцентрационный эффект порождает движение смесей, в котором поверхность раздела остается плоскостью  $y = 0$ , а траектории являются прямыми, параллельными оси  $x$ . Функции  $u_j, T_j, K_j$  можно назвать *возмущениями состояния покоя смесей*.

Подстановка (1.8) в систему уравнений термодиффузионного движения с учетом условий на границе раздела  $y = 0$  приводит к начально-краевой задаче:

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy}; \quad T_{jt} = \chi_j T_{jyy} - A u_j; \quad K_{jt} = d_j K_{jyy} + \alpha_j d_j T_{jyy} - B_j u_j \quad (1.9)$$

при  $-l_1 < y < 0$  ( $j = 1$ ),  $0 < y < l_2$  ( $j = 2$ );

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad K_1(0, t) = \lambda K_2(0, t); \quad (1.10)$$

$$k_1 T_{1y}(0, t) = k_2 T_{2y}(0, t); \quad (1.11)$$

$$d_1(K_{1y}(0, t) + \alpha_1 T_{1y}(0, t)) = d_2(K_{2y}(0, t) + \alpha_2 T_{2y}(0, t)); \quad (1.12)$$

$$\rho_2 \nu_2 u_{2y}(0, t) - \rho_1 \nu_1 u_{1y}(0, t) = -\varkappa_1 A - \varkappa_2 B_1 \equiv H; \quad (1.13)$$

$$u_j(y, 0) = 0, \quad T_j(y, 0) = 0, \quad K_j(y, 0) = 0. \quad (1.14)$$

Во втором уравнении из (1.9)  $A \equiv A_1 = A_2$  (это следствие равенства температур при  $y = 0$ ); в граничном условии (1.10)  $\lambda = \text{const}$  — постоянная равновесия Генри, поэтому  $B_1 = \lambda B_2$ ;  $\nu_j, \chi_j, d_j, \alpha_j, k_j$  — физические положительные постоянные смесей. К этим условиям необходимо присоединить еще условия на твердых стенках  $y = -l_1, y = l_2$ :

$$u_1(-l_1, t) = u_2(l_2, t) = 0 \quad (1.15)$$

как условие прилипания;

$$T_1(-l_1, t) = 0, \quad T_2(l_2, t) = 0 \quad (1.16)$$

как задание нулевых возмущений температуры;

$$\left( \frac{\partial K_1}{\partial y} + \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \right) \Big|_{y=-l_1} = 0, \quad \left( \frac{\partial K_2}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) \Big|_{y=l_2} = 0 \quad (1.17)$$

как отсутствие потоков смесей сквозь стенки. Видно, что уравнения (1.9)–(1.17) образуют три последовательно решаемые задачи для функций  $(u_1, u_2)$ ,  $(T_1, T_2)$ ,  $(K_1, K_2)$ .

## 2. Определение возмущения поля скоростей

В этом случае начально-краевая задача такова:

$$u_{1t} = \nu_1 u_{1yy}, \quad -l_1 < y < 0; \quad (2.1)$$

$$u_1(-l_1, t) = 0; \quad (2.2)$$

$$u_{2t} = \nu_2 u_{2yy}, \quad 0 < y < l_2; \quad (2.3)$$

$$u_2(l_2, t) = 0; \quad (2.4)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad \mu_2 u_{2y}(0, t) - \mu_1 u_{1y}(0, t) = H, \quad t \geq 0; \quad (2.5)$$

$$u_1(y, 0) = 0, \quad -l_1 < y < 0, \quad u_2(y, 0) = 0, \quad 0 < y < l_2. \quad (2.6)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Поскольку  $H \neq 0$ , то в начальный момент времени имеется разрыв в условии (2.5), так как при  $t = 0$  его левая часть равна нулю согласно (2.6).

Задача (2.1)–(2.6) имеет стационарное решение (течение Куэтта в слоях):

$$u_1^0 = a \left( 1 + \frac{y}{l_1} \right), \quad u_2^0 = a \left( 1 - \frac{y}{l_2} \right), \quad (2.7)$$

где

$$a = -\frac{Hl_1}{\mu_2(\mu + l)}, \quad H = -(\kappa_1 A + \kappa_2 B_1), \quad l = \frac{l_1}{l_2}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (2.8)$$

Применение к задаче (2.1)–(2.6) преобразования Лапласа (условия его использования см. в [3])

$$\tilde{u}_j(y, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u_j(y, t) dt \quad (j = 1, 2)$$

приводит к краевой задаче

$$\tilde{u}_1'' - \frac{p}{\nu_1} \tilde{u}_1 = 0, \quad -l_1 < y < 0; \quad (2.9)$$

$$\tilde{u}_1(-l_1, p) = 0; \quad (2.10)$$

$$\tilde{u}_2'' - \frac{p}{\nu_2} \tilde{u}_2 = 0, \quad 0 < y < l_2; \quad (2.11)$$

$$\tilde{u}_2(l_2, p) = 0; \quad (2.12)$$

$$\tilde{u}_1(0, p) = \tilde{u}_2(0, p); \quad (2.13)$$

$$\mu_2 \tilde{u}_2'(0, p) - \mu_1 \tilde{u}_1'(0, p) = \frac{H}{p}, \quad (2.14)$$

где штрих означает дифференцирование по  $y$ . Решение задачи (2.9)–(2.14) легко находится:

$$\tilde{u}_1(y, p) = -\frac{\sqrt{\nu_2} H}{\mu_2 \sqrt{p^3} W(p) \operatorname{ch} \sqrt{p\nu_1^{-1}} l_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} (l_1 + y), \quad -l_1 < y < 0; \quad (2.15)$$

$$\tilde{u}_2(y, p) = -\frac{\sqrt{\nu_2} H \operatorname{th} \sqrt{p\nu_1^{-1}} l_1}{\mu_2 \sqrt{p^3} W(p) \operatorname{sh} \sqrt{p\nu_2^{-1}} l_2} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - y), \quad 0 < y < l_2, \quad (2.16)$$

где

$$W(p) = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} + \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2. \quad (2.17)$$

Из (2.15)–(2.17) определяем пределы  $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{u}_j(y, p) = u_j^0(y)$  с функциями  $u_j^0(y)$  из (2.7), (2.8), что и должно быть согласно свойству преобразования Лапласа [3].

*Априорные оценки.* Введем новые функции

$$w_j(y, t) = u_j^0(y) - u_j(y, t). \quad (2.18)$$

Тогда  $w_j(y, t)$  являются решением задачи:

$$w_{1t} = \nu_1 w_{1yy}, \quad -l_1 < y < 0; \quad (2.19)$$

$$w_{2t} = \nu_2 w_{2yy}, \quad 0 < y < l_2;$$

$$w_1(0, t) = w_2(0, t), \quad \mu_2 w_{2y}(0, t) - \mu_1 w_{1y}(0, t) = 0; \quad (2.20)$$

$$w_1(-l_1, t) = 0, \quad w_2(l_2, t) = 0; \quad (2.21)$$

$$w_1(y, 0) = u_1^0(y), \quad w_2(y, 0) = u_2^0(y). \quad (2.22)$$

Отметим, что теперь начальные данные не нулевые, а второе граничное условие (2.20) выполнено для любых  $t > 0$ ; при  $t = 0$  его правая часть равна  $H$ .

Умножим уравнение (2.19) на  $\rho_1 w_1$  и проинтегрируем по  $y$  от  $-l_1$  до 0:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \rho_1 \int_{-l_1}^0 w_1^2 dy = \mu_1 w_1 w_{1y} \Big|_{-l_1}^0 - \mu_1 \int_{-l_1}^0 w_{1y}^2 dy.$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^{l_2} w_2^2 dy = \mu_2 w_2 w_{2y} \Big|_0^{l_2} - \mu_2 \int_0^{l_2} w_{2y}^2 dy.$$

Складывая эти равенства и используя граничные условия (2.20), (2.21), получим

$$\frac{dE}{dt} + \mu_1 \int_{-l_1}^0 w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} w_{2y}^2 dy = \begin{cases} 0, & t > 0; \\ \frac{H^2 l_1}{\mu_2(\mu + l)}, & t = 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

где “кинетическая” энергия слоев

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho_1 \int_{-l_1}^0 w_1^2 dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^{l_2} w_2^2 dy.$$

В силу граничных условий (2.21) для  $w_j$  имеют место неравенства Фридрикса

$$\int_{-l_1}^0 w_1^2(y, t) dy \leq \frac{l_1^2}{2} \int_{-l_1}^0 w_{1y}^2(y, t) dy, \quad \int_0^{l_2} w_2^2(y, t) dy \leq \frac{l_2^2}{2} \int_0^{l_2} w_{2y}^2(y, t) dy,$$

поэтому из (2.23) выводим неравенство ( $\delta = \min(l_1^{-2}\nu_1, l_1^{-2}\nu_2)$ )

$$\frac{dE}{dt} + 4\delta E \leq h(t), \quad (2.24)$$

где  $h(t)$  — правая часть в (2.23). Интегрируя (2.24) с учетом начальных условий (2.22), найдем

$$E(t) \leq E(0)e^{-4\delta t}, \quad (2.25)$$

где в силу начальных условий (2.7), (2.8)

$$E(0) = \frac{1}{2} \rho_1 \int_{-l_1}^0 w_1^2(y, 0) dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^{l_2} w_2^2(y, 0) dy = \frac{a^2}{6} (\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2). \quad (2.26)$$

**З а м е ч а н и е 2.** При выводе неравенства (2.25) было использовано неравенство Гронуолла. Его можно применять, поскольку  $h(t)$  — суммируемая функция и интеграл от нее просто равен нулю.

Следовательно,

$$\int_{-l_1}^0 w_1^2 dy \leq \frac{2E(0)}{\rho_1} e^{-4\delta t}, \quad \int_0^{l_2} w_2^2 dy \leq \frac{2E(0)}{\rho_2} e^{-4\delta t}. \quad (2.27)$$

Для оценок  $L^2$ -норм  $w_{jy}$  применим тождество

$$\int_0^t \int_a^b (u_t^2 + \nu^2 u_{yy}^2) dy dt + \nu \int_a^b u_y^2 dy = 2\nu \int_0^t (u_t u_y) \Big|_a^b dt + \nu \int_a^b u_{0y}^2 dy + \int_0^t \int_a^b F^2(y, t) dy dt,$$

где  $u(y, t)$  является решением уравнения  $u_t = \nu u_{yy} + F(y, t)$  с начальными данными  $u_0(y)$ . Приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^t \int_{-l_1}^0 (w_{1t}^2 + \nu_1^2 w_{1yy}^2) dy dt + \rho_2 \int_0^t \int_0^{l_2} (w_{2t}^2 + \nu_2^2 w_{2yy}^2) dy dt + \mu_1 \int_{-l_1}^0 w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} w_{2y}^2 dy \\ & = \mu_1 \int_{-l_1}^0 (w_{1y}^0)^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} (w_{2y}^0)^2 dy = a^2 \left( \frac{\mu_1}{l_1} + \frac{\mu_2}{l_2} \right) \equiv D_1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Отсюда

$$\int_{-l_1}^0 w_{1y}^2 dy \leq \frac{D_1}{\mu_1}, \quad \int_0^{l_2} w_{2y}^2 dy \leq \frac{D_1}{\mu_2}. \quad (2.29)$$

Теперь из (2.27)–(2.29) и неравенства Коши–Буняковского получим априорные оценки

$$|w_j(y, t)| \leq 2 \sqrt{\frac{2E(0)D_1}{\rho_j \mu_j}} e^{-2\delta t},$$

где  $E(0)$ ,  $D_1$  даются формулами (2.26), (2.28) соответственно.

Возвращаясь к замене (2.18), приходим к следующему результату.

**Теорема 1.** *Решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.6) единственно и при  $t \rightarrow \infty$  выходит на стационарный режим (2.7), причем справедливы оценки скорости сходимости*

$$|u_j(y, t) - u_j^0(y)| \leq 2 \sqrt{\frac{2E(0)D_1}{\rho_j \mu_j}} e^{-2\delta t} \quad (2.30)$$

с постоянными  $E(0)$  из (2.26) и  $D_1$  из (2.28).

Согласно (2.30) решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.6) сходится экспоненциально к стационарному решению. Теорема также обосновывает законность применения преобразования Лапласа в задаче (2.1)–(2.6).

### 3. Эволюция температурных возмущений

Здесь начально-краевая задача имеет вид

$$T_{1t} = \chi_1 T_{1yy} - Au_1, \quad -l_1 < y < 0; \quad (3.1)$$

$$T_1(-l_1, t) = 0; \quad (3.2)$$

$$T_{2t} = \chi_2 T_{2yy} - Au_2, \quad 0 < y < l_2; \quad (3.3)$$

$$T_2(l_2, t) = 0; \quad (3.4)$$

$$T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad k_1 T_{1y}(0, t) = k_2 T_{2y}(0, t); \quad (3.5)$$

$$T_1(y, 0) = 0, \quad T_2(y, 0) = 0. \quad (3.6)$$

Заметим, что граничные условия (3.5) тождественно выполняются и при  $t = 0$ .

Найдем стационарное решение задачи (3.1)–(3.5) (начальные данные (3.6) при этом не учитываются). Имеем задачу для функций  $T_1^0(y)$ ,  $T_2^0(y)$ :

$$T_{1yy}^0 = \frac{A}{\chi_1} u_1^0(y), \quad -l_1 < y < 0; \quad (3.7)$$

$$T_{2yy}^0 = \frac{A}{\chi_2} u_2^0(y), \quad 0 < y < l_2; \quad (3.8)$$

$$T_1^0(-l_1) = 0, \quad T_2^0(l_2) = 0; \quad (3.9)$$

$$T_1^0(0) = T_2^0(0), \quad kT_{1y}^0(0) = T_{2y}^0(0), \quad k = k_1/k_2. \quad (3.10)$$

Если подставить в правые части функции  $u_1^0(y)$ ,  $u_2^0(y)$  из (2.7), то после интегрирования и простых преобразований найдем из (3.7)–(3.10)

$$\begin{aligned} T_1^0(y) &= \frac{aAl_1^2}{6\chi_1} \left[ \left(1 + \frac{y}{l_1}\right)^3 - \frac{(3kl + l^2 + 2\chi)}{l(k+l)} \left(1 + \frac{y}{l_1}\right) \right], \\ T_2^0(y) &= \frac{aAl_2^2}{6\chi_2} \left[ \left(1 - \frac{y}{l_2}\right)^3 - \frac{(2kl^2 + 3\chi l + k\chi)}{\chi(k+l)} \left(1 - \frac{y}{l_2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Можно доказать, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} T_j(y, t) = T_j^0(y)$ , т.е. с ростом времени возмущение температур в слоях выходит на стационарный режим. Действительно, замена  $N_j(y, t) = T_j^0(y) - T_j(y, t)$  приводит к задаче

$$N_{1t} = \chi_1 N_{1yy} - Aw_1, \quad -l_1 < y < 0; \quad (3.12)$$

$$N_1(-l_1, t) = 0;$$

$$N_{2t} = \chi_2 N_{2yy} - Aw_2, \quad 0 < y < l_2; \quad (3.13)$$

$$N_2(l_2, t) = 0;$$

$$N_1(0, t) = N_2(0, t), \quad k_1 N_{1y}(0, t) = k_2 N_{2y}(0, t);$$

$$N_1(y, 0) = T_1^0(y), \quad N_2(y, 0) = T_2^0(y).$$

Поскольку  $\chi_j = k_j/\rho_j c_{0j}$  ( $c_{0j}$  — коэффициенты удельных теплоемкостей смесей), то, умножая уравнение (3.12) на  $\rho_1 c_{01} N_1$  ((3.13) на  $\rho_2 c_{02} N_2$ ), интегрируя по  $y$  от  $-l_1$  до 0 (от 0 до  $l_2$ ) и складывая, получим аналогично (2.28)

$$\frac{dE_1}{dt} + k_1 \int_{-l_1}^0 N_{1y}^2 dy + k_2 \int_0^{l_2} N_{2y}^2 dy = -A \left[ \rho_1 c_{01} \int_{-l_1}^0 w_1 N_1 dy + \rho_2 c_{02} \int_0^{l_2} w_2 N_2 dy \right], \quad (3.14)$$

где

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \rho_1 c_{01} \int_{-l_1}^0 N_1^2 dy + \frac{1}{2} \rho_2 c_{02} \int_0^{l_2} N_2^2 dy.$$

Для функций  $N_j(y, t)$  справедливы неравенства Фридрихса, поэтому из (3.14) получим неравенство:

$$\frac{dE_1}{dt} + 4\delta_1 E_1(t) \leq 2\delta_2 \sqrt{E_1(t)} e^{-2\delta t},$$

где  $\delta_1 = \min(l_1^{-2}\chi_1, l_2^{-2}\chi_2)$ ,  $\delta_2 = \sqrt{2}|A|\sqrt{E_0} \max(\sqrt{c_{01}}, \sqrt{c_{02}})$ . Отсюда

$$E_1(t) \leq \begin{cases} \frac{\delta_2^2}{4(\delta_1 - \delta)^2} (e^{-2\delta t} - e^{-2\delta_1 t})^2, & \delta_1 \neq \delta; \\ \delta_2^2 t^2 e^{-4\delta_1 t}, & \delta_1 = \delta. \end{cases}$$

Как и ранее для  $w_j$ , получаем оценки интегралов

$$\int_{-l_1}^0 N_{1y}^2 dy \leq \frac{\delta_3(1 - e^{-4\delta t})}{k_1}, \quad \int_0^{l_2} N_{2y}^2 dy \leq \frac{\delta_3^2(1 - e^{-4\delta t})}{k_2},$$

где  $\delta_3 = A^2 E_0(c_{01} + c_{02})/2\delta$ .

Значит,

$$|N_j(y, t)| \leq \left( 2\sqrt{\frac{2\delta_3 E_1(t)}{k_j \rho_j c_{0j}}} \right)^{1/2}.$$

Поэтому и возмущения температуры экспоненциально затухают со временем (как  $e^{-2\delta t}$  при  $\delta \leq \delta_1$  и  $e^{-2\delta_1 t}$  при  $\delta > \delta_1$ ).

Применение преобразования Лапласа к (3.1)–(3.6) приводит к краевой задаче для изображений

$$\tilde{T}_1'' - \frac{p}{\chi_1} \tilde{T}_1 = \frac{A\tilde{u}_1(y, p)}{\chi_1}, \quad -l_1 < y < 0; \quad (3.15)$$

$$\tilde{T}_2'' - \frac{p}{\chi_2} \tilde{T}_2 = \frac{A\tilde{u}_2(y, p)}{\chi_2}, \quad 0 < y < l_2; \quad (3.16)$$

$$\tilde{T}_1(0, p) = \tilde{T}_2(0, p), \quad k\tilde{T}_1'(0, p) = \tilde{T}_2'(0, p); \quad (3.17)$$

$$\tilde{T}_1(-l_1, p) = 0; \quad \tilde{T}_2(l_2, p) = 0, \quad (3.18)$$

где  $k = k_1/k_2$ , а штрих означает дифференцирование по  $y$ .

Решение задачи (3.15), (3.16) может быть представлено в виде

$$\tilde{T}_1(y, p) = L_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} y + L_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} y + \frac{A}{\chi_1 \sqrt{p\chi_1^{-1}}} \int_{-l_1}^y \tilde{u}_1(z, p) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} (y - z) \right] dz, \quad (3.19)$$

$$\tilde{T}_2(y, p) = L_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} y + L_4 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} y + \frac{A}{\chi_2 \sqrt{p\chi_2^{-1}}} \int_0^y \tilde{u}_2(z, p) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (y - z) \right] dz, \quad (3.20)$$

где  $L_i(p)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , находятся из граничных условий (3.17), (3.18):

$$L_1 = \frac{G_1(p) - G_2(p)}{W_2(p)}, \quad L_2 = L_1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1, \quad L_3 = \frac{k}{\sqrt{\chi}} L_1 - G_1, \quad (3.21)$$

$$L_4 = L_2 - \frac{A}{\chi_1 \sqrt{p\chi_1^{-1}}} \int_{-l_1}^0 \tilde{u}_1(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} z dz;$$

здесь

$$G_1(p) = -\frac{kA}{\chi_1} \sqrt{\frac{\chi_2}{p}} \int_{-l_1}^0 \tilde{u}_1(z, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} z dz,$$

$$\begin{aligned}
G_2(p) &= -\frac{A \operatorname{cth} \sqrt{p\chi_2^{-1}} l_2}{\chi_1 \sqrt{p\chi_1^{-1}}} \int_{-l_1}^0 \tilde{u}_1(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} z dz \\
&+ \frac{A}{\chi_2 \sqrt{p\chi_2^{-1}} \operatorname{sh} \sqrt{p\chi_2^{-1}} l_2} \int_0^{l_2} \tilde{u}_2(z, p) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - z) \right] dz, \\
W_1(p) &= \frac{k}{\sqrt{\chi}} + \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Можно доказать, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} T_j(y, t) = T_j^0(y)$ , т.е. с ростом времени возмущение температур в слоях выходит на стационарный режим. Здесь приведем выкладки, в качестве примера, для  $j = 1$ . С этой целью несколько преобразуем выражение (3.19), используя формулы  $L_1, L_2$  из (3.21):

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_1(y, p) &= \frac{G_1(p) - G_2(p)}{W_1(p) \operatorname{ch} \sqrt{p\chi_1^{-1}} l_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} (y + l_1) \\
&+ \frac{A}{\chi_1 \sqrt{\chi_1^{-1} p}} \int_{-l_1}^y \tilde{u}_1(z, p) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} (y - z) \right] dz.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Далее можно подставить  $\tilde{u}_j(y, p)$  из (2.15), (2.16) в (3.21)–(3.23) и получить явное выражение для  $\tilde{T}_1(y, p)$ , которое очень громоздкое и здесь не приводится. Однако есть более простой путь вычисления предела  $\lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{T}_1(y, p)$  исходя из (3.23) и уже известных пределов  $\lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{u}_j(y, p) = u_j^0(y)$ , где  $u_j^0(y)$  определяется по формулам (2.7), (2.8). Имеем из (3.22) при  $p \rightarrow 0$  ( $\operatorname{sh} x \sim x$ ,  $\operatorname{ch} x \sim 1$ ,  $x \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned}
W_1(p) &\sim \frac{k+l}{\sqrt{\chi}}, \quad pG_1(p) \sim -\frac{kA}{\chi_1 \sqrt{\chi_2^{-1} p}} \int_{-l_1}^0 u_1^0(z) dz, \\
pG_2(p) &\sim \frac{A}{\chi_1 l_2 \sqrt{p\chi_2^{-1}}} \left[ -\int_{-l_1}^0 u_1^0(z) z dz + \chi \int_0^{l_2} u_2^0(z) (l_2 - z) dz \right].
\end{aligned}$$

Входящие в правые части интегралы легко вычисляются с использованием формул (2.7), (2.8), именно

$$\int_{-l_1}^0 u_1^0(z) dz = \frac{al_1}{2}, \quad \int_{-l_1}^0 u_1^0(z) z dz = -\frac{al_1^2}{6}, \quad \int_0^{l_2} u_2^0(z) (l_2 - z) dz = \frac{al_2^2}{3}.$$

Поэтому

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{pG_1(p) - pG_2(p)}{W_1(p) \operatorname{ch} \sqrt{p\chi_1^{-1}} l_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} (y + l_1) = -\frac{Aa_1 l_1 l_2 (l_2^2 + 3kl + 2\chi)(y/l_1 + 1)}{6\chi_1 (k+l)}. \tag{3.24}$$

Второе слагаемое в (3.23), умноженное на  $p$ , при  $p \rightarrow 0$  имеет пределом выражение

$$\frac{A}{\chi_1} \int_{-l_1}^y u_1^0(z) (y - z) dz = \frac{Aal_1^2}{6\chi_1} \left( 1 + \frac{y}{l_1} \right)^3. \tag{3.25}$$

Суммируя (3.24) и (3.25), приходим в точности к первой формуле (3.11) для  $T_1^0(y)$ . Аналогично показывается, что и  $\lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{T}_2(y, p) = T_2^0(y)$ .

## 4. Эволюция возмущений концентраций в слоях

Начально-краевая задача для определения возмущений концентрации имеет вид

$$K_{1t} = d_1 K_{1yy} + \frac{\alpha_1 d_1}{\chi_1} T_{1t} + \left( \frac{\alpha_1 d_1 A}{\chi_1} - \lambda B_2 \right) u_1, \quad (4.1)$$

$$K_{2t} = d_2 K_{2yy} + \frac{\alpha_2 d_2}{\chi_2} T_{2t} + \left( \frac{\alpha_2 d_2 A}{\chi_2} - B_2 \right) u_2; \quad (4.2)$$

$$K_1(0, t) = \lambda K_2(0, t), \quad (4.3)$$

$$d(K_{1y}(0, t) + \alpha_1 T_{1y}(0, t)) = K_{2y}(0, t) + \alpha_2 T_{2y}(0, t);$$

$$K_{1y}(-l_1, t) + \alpha_1 T_{1y}(-l_1, t) = 0, \quad K_{2y}(l_2, t) + \alpha_2 T_{2y}(l_2, t) = 0; \quad (4.4)$$

$$K_1(y, 0) = 0, \quad K_2(y, 0) = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.1) выполнено при  $-l_1 < y < 0$ , а (4.2) — при  $0 < y < l_2$ , причем в них произведена замена  $T_{jyy}$  из второго уравнения (1.9). Кроме того,  $B_1 = \lambda B_2$ . Таким образом, (4.1), (4.2) — это неоднородные параболические уравнения с уже известными из предыдущих разделов правыми частями. В граничном условии (4.3)  $d = d_1/d_2$ .

Для нахождения стационарного распределения возмущений концентраций предположим, что  $K_{jt} = 0$ ,  $T_{jt} = 0$ , и вместо (4.1)–(4.4) возникает *краевая задача*:

$$K_{1yy}^0 = \left( \frac{\lambda B_2}{d_1} - \frac{\alpha_1 A}{\chi_1} \right) u_1^0(y), \quad -l_1 < y < 0; \quad (4.6)$$

$$K_{2yy}^0 = \left( \frac{B_2}{d_2} - \frac{\alpha_2 A}{\chi_2} \right) u_2^0(y), \quad 0 < y < l_2; \quad (4.7)$$

$$K_1^0 = \lambda K_2^0(0), \quad d(K_{1y}(0) + \alpha_1 T_{1y}^0(0)) = K_{2y}^0(0) + \alpha_2 T_{2y}^0(0);$$

$$K_{1y}^0(-l_1) + \alpha_1 T_{1y}^0(-l_1) = 0, \quad K_{2y}^0(l_2) + \alpha_2 T_{2y}^0(l_2) = 0,$$

где функции  $u_j^0(y)$ ,  $T_j^0(y)$  определяются формулами (2.7), (2.8), (3.11).

Результат интегрирования уравнений (4.6), (4.7) дает

$$K_1^0(y) = \left( \frac{\lambda B_2}{d_1} - \frac{\alpha_1 A}{\chi_1} \right) a \left( \frac{y^3}{6l_1} + \frac{y^2}{2} \right) + b_1 y + \lambda b_2, \quad (4.8)$$

$$K_2^0(y) = \left( \frac{B_2}{d_2} - \frac{\alpha_2 A}{\chi_2} \right) a \left( -\frac{y^3}{6l_2} + \frac{y^2}{2} \right) + b_3 y + b_2$$

при  $0 < y < l_2$ , причем здесь надо положить  $B_2 = 0$ , а  $b_1$ ,  $b_3$  находятся по формулам  $b_1 = -\alpha_1 a_1$ ,  $b_3 = -\alpha_2 k a_1$ , где  $a_1$  есть постоянная из (3.11).

Таким образом, при исследовании поведения решения задачи (4.1)–(4.5) при  $t \rightarrow \infty$  необходимо в уравнениях (4.1), (4.2) положить  $B_2 = 0$ .

*Решение в изображениях по Лапласу.* Будем искать решение задачи (4.1)–(4.5) методом преобразования Лапласа. Учитывая нулевые начальные данные для  $u_j$ ,  $K_j$ ,  $T_j$ , получим для изображений  $\tilde{K}_j(y, p)$  краевую задачу

$$\tilde{K}_1'' - \frac{p}{d_1} \tilde{K}_1 = -\frac{\alpha_1}{\chi_1} p \tilde{T}_1 + \left( \frac{\lambda B_2}{d_1} - \frac{\alpha_1 A}{\chi_1} \right) \tilde{u}_1, \quad (4.9)$$

$$\tilde{K}_2'' - \frac{p}{d_2} \tilde{K}_2 = -\frac{\alpha_2}{\chi_2} p \tilde{T}_2 + \left( \frac{B_2}{d_2} - \frac{\alpha_2 A}{\chi_2} \right) \tilde{u}_2; \quad (4.10)$$

$$\tilde{K}_1(0, p) = \lambda \tilde{K}_2(0, p), \quad (4.11)$$

$$d\tilde{K}_1'(0, p) - \tilde{K}_2'(0, p) = \alpha_2 \tilde{T}_2'(0, p) - \alpha_1 d\tilde{T}_1'(0, p);$$

$$\tilde{K}_1(-l_1, p) = -\alpha_1 \tilde{T}_1'(-l_1, p), \quad \tilde{K}_2(l_2, p) = -\alpha_2 \tilde{T}_2'(l_2, p). \quad (4.12)$$

Заметим, что в силу (3.17) правая часть в (4.11) вычисляется как

$$\alpha_2 \tilde{T}_2'(0, p) - \alpha_1 d\tilde{T}_1'(0, p) = (k\alpha_2 - \alpha_1 d)\tilde{T}_1'(0, p). \quad (4.13)$$

Решение задачи (4.9)–(4.12) записывается так:

$$\tilde{K}_1(y, p) = D_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{d_1}} y + D_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{d_1}} y + \sqrt{\frac{d_1}{p}} \int_{-l_1}^y h_1(z, p) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{p}{d_1}} (y - z) \right] dz; \quad (4.14)$$

$$\tilde{K}_2(y, p) = D_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{d_2}} y + D_4 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{d_2}} y + \sqrt{\frac{d_2}{p}} \int_0^y h_2(z, p) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{p}{d_2}} (y - z) \right] dz, \quad (4.15)$$

где

$$h_1 = -\frac{\alpha_1}{\chi_1} p \tilde{T}_1 + \left( \frac{\lambda B_2}{d_1} - \frac{\alpha_1 A}{\chi_1} \right) \tilde{u}_1, \quad h_2 = -\frac{\alpha_2}{\chi_2} p \tilde{T}_2 + \left( \frac{B_2}{d_2} - \frac{\alpha_2 A}{\chi_2} \right) \tilde{u}_2. \quad (4.16)$$

После подстановки (4.14), (4.15) в граничные условия (4.11), (4.12) с учетом (4.13) находим  $D_j(p)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ):

$$D_1(p) = \frac{\lambda}{W_2(p)} \left[ G_3(p) - G_4(p) - \alpha_2 \sqrt{\frac{d_2}{p}} \frac{\tilde{T}_2'(l_2, p)}{\operatorname{ch} \sqrt{pd_2^{-1}} l_2} - \frac{\alpha_1}{\lambda} \sqrt{\frac{d_1}{p}} \frac{\operatorname{th} \sqrt{pd_2^{-1}} l_2}{\operatorname{sh} \sqrt{pd_1^{-1}} l_1} \tilde{T}_2'(-l_1, p) \right],$$

$$D_2(p) = \sqrt{\frac{d_1}{p}} \frac{\alpha_1 \tilde{T}_1'(-l_1, p)}{\operatorname{sh} \sqrt{pd_1^{-1}} l_1} + D_1(p) \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{d_1}} l_1,$$

$$D_3(p) = \sqrt{d} D_1(p) - G_3(p), \quad d = d_1/d_2,$$

$$D_4(p) = \frac{D_2(p)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{d_1}{p}} \int_{-l_1}^0 h_1(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{d_1}} z dz, \quad (4.17)$$

$$G_3(p) = -d \sqrt{\frac{d_2}{p}} \int_{-l_1}^0 h_1(z, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{d_1}} z dz + \sqrt{\frac{d_2}{p}} (k\alpha_1 - \alpha_1 d) \tilde{T}_1'(0, p),$$

$$G_4(p) = -\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{d_1}{p}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{d_2}} l_2 \int_{-l_1}^0 h_1(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{d_1}} z dz$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{pd_2^{-1}} l_2} \sqrt{\frac{d_2}{p}} \int_0^{l_2} h_2(z, p) \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{p}{d_2}} (l_2 - z) \right] dz,$$

$$W_2(p) = \lambda \sqrt{d} + \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{d_1}} l_1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{d_2}} l_2.$$

Точно так же, как и в конце п. 3, показывается (с помощью формул (4.14)–(4.17)), что при  $B_2 = 0$   $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{K}_j(y, p) = K_j^0(y)$ , где  $K_j^0$  определяются по формулам (4.8).

Об априорной оценке для возмущений концентраций. Запишем уравнения (4.1), (4.2) в виде

$$K_{1t} = d_1 K_{1yy} + \alpha_1 d_1 T_{1yy} - \lambda B_2 u_1, \quad -l_1 < y < 0; \quad (4.18)$$

$$K_{2t} = d_2 K_{2yy} + \alpha_2 d_2 T_{2yy} - B_2 u_2, \quad 0 < y < l_2. \quad (4.19)$$

Интегрируя эти уравнения по  $y$  с учетом второго граничного условия (4.3) и условий (4.4), (4.5), найдем

$$\int_{-l_1}^0 K_1 dy + \int_0^{l_2} K_2 dy = -B_2 \left[ \lambda \int_0^t \int_{-l_1}^0 u_1 dy dt + \int_0^t \int_0^{l_2} u_2 dy dt \right].$$

Отсюда можно лишь заключить, что

$$\left| \int_{-l_1}^0 K_1 dy + \int_0^{l_2} K_2 dy \right|$$

есть ограниченная величина для  $t \geq 0$ , в частности при  $B_2 = 0$  она просто равна нулю (заметьте, что  $K_j(y, t)$  могут иметь произвольные знаки — это возмущения концентраций, а не сами концентрации).

С другой стороны, умножая (4.18) на  $K_1$ , а (4.19) на  $K_2$  и вновь интегрируя по  $y$ , приходим к интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \frac{dE_2}{dt} + d_1 \int_{-l_1}^0 K_{1y}^2 dy + d_2 \int_0^{l_2} K_{2y}^2 dy &= -\alpha_1 d_1 \int_{-l_1}^0 K_{1y} T_{1y} dy \\ &- \alpha_2 d_2 \int_0^{l_2} K_{2y} T_{2y} dy - B_2 \left( \lambda \int_{-l_1}^0 u_1 K_1 dy + \int_0^{l_2} u_2 K_2 dy \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где

$$E_2(t) = \frac{1}{2} \int_{-l_1}^0 K_1^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} K_2^2 dy. \quad (4.21)$$

При  $B_2 = 0$  отсюда легко вывести, что

$$\int_{-l_1}^0 K_1^2 dy, \quad \int_0^{l_2} K_2^2 dy$$

ограничены для любых конечных  $t$ . Для этого достаточно воспользоваться элементарным неравенством  $ab \leq \varepsilon a^2/2 + b^2/2\varepsilon$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ . Получение из (4.20), (4.21) неравенства типа (2.24) здесь вызывает затруднения. Дело в том, что для функций  $K_j(y, t)$  неравенства Фридрихса не имеют места. Они будут справедливы, если средние значения

$$\int_{-l_1}^0 K_1(y, t) dy = 0, \quad \int_0^{l_2} K_2(y, t) dy = 0.$$

Это следует из более общего неравенства Пуанкаре

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{2}{b-a} \left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 + 2(b-a)^2 \int_a^b f'^2(x) dx.$$

Однако у нас средние значения не равны нулю. Поэтому установить скорость сходимости функций  $K_j(y, t)$  к  $K_j^0(y)$  на этом пути не удастся.

**З а м е ч а н и е 3.** Если в формулах (2.15), (2.16) для  $\tilde{u}_1(y, p, l_1, l_2)$ ,  $\tilde{u}_2(y, p, l_1, l_2)$ , (3.19), (3.20) для  $\tilde{T}_1(y, p, l_1, l_2)$ ,  $\tilde{T}_2(y, p, l_1, l_2)$ , (4.14), (4.15) для  $\tilde{K}_1(y, p, l_1, l_2)$ ,  $\tilde{K}_2(y, p, l_1, l_2)$  перейти к пределу при  $l_1, l_2 \rightarrow \infty$ , а затем взять обратное преобразование Лапласа, то после некоторых преобразований получим автомодельное решение, изученное в работе [4].

## 5. Заключение

При исследовании свойств инвариантного решения уравнений термодиффузии выполнено следующее:

1. Задача о нахождении инвариантного решения сведена к сопряженной начально-краевой задаче для систем линейных параболических уравнений.
2. Получено стационарное решение.
3. Доказаны априорные оценки для возмущений скоростей и температур в слоях в равномерной метрике.
4. С использованием свойств преобразования Лапласа доказано, что решение нестационарной задачи при  $t \rightarrow \infty$  выходит на стационарный режим.
5. Получено, что для слоев большой толщины можно пользоваться известными результатами для полуограниченных слоев, когда решение становится автомодельным [4].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А.** Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000.
2. **Андреев В.К.** Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии // Симметрия и дифференциальные уравнения: Тр. 3-й Междунар. конф. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2002. С. 13–17.
3. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
4. **Андреев В.К., Картошкина А.Е.** Автомодельное движение бинарных смесей с плоской границей раздела // Сиб. журн. индустриал. математики. 2007. Т. 10, № 1(29). С. 17–24.

Поступила 2.11.2007

УДК 519.17+512.54

О СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С  $\mu = 1$  И ИХ АВТОМОРФИЗМАХ II<sup>1</sup>

И. Н. Белоусов

Выяснено строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов простых порядков сильно регулярного графа с параметрами (9701, 100, 3, 1) и доказано, что граф с этими параметрами не является вершинно транзитивным.

## Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если  $a$  – вершина графа  $\Gamma$ , то через  $\Gamma_i(a)$  обозначается сфера радиуса  $i$  с центром в вершине  $a$ . Подграф  $\Gamma_1(a)$  называется *окрестностью вершины  $a$*  и обозначается через  $[a]$ . Через  $a^\perp$  обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром  $a$ .

Граф  $\Gamma$  называется *регулярным графом степени  $k$* , если  $[a]$  содержит точно  $k$  вершин для любой вершины  $a$  из  $\Gamma$ . Граф  $\Gamma$  называется *реберно регулярным графом с параметрами  $(v, k, \lambda)$* , если  $\Gamma$  содержит  $v$  вершин, является регулярным степени  $k$  и каждое ребро из  $\Gamma$  лежит в  $\lambda$  треугольниках. Граф  $\Gamma$  называется *вполне регулярным графом с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$* , если  $\Gamma$  реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф  $[a] \cap [b]$  содержит  $\mu$  вершин в случае  $d(a, b) = 2$ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Граф  $\Gamma$  называется *сильным с параметрами  $(\lambda, \mu)$* , если каждое ребро из  $\Gamma$  лежит точно в  $\lambda$  треугольниках и подграф  $[a] \cap [b]$  содержит  $\mu$  вершин в случае  $d(a, b) = 2$ . Число вершин в  $[a] \cap [b]$  обозначим через  $\lambda(a, b)$  (через  $\mu(a, b)$ ), если  $d(a, b) = 1$  (если  $d(a, b) = 2$ ), а соответствующий подграф назовем  $(\mu)$ - $\lambda$ -*подграфом*. Ректаграфом называется связный вполне регулярный граф с  $\lambda = 0, \mu = 2$ . *Мельницей* называется граф  $\Gamma$ , совпадающий с  $a^\perp$  для некоторой вершины  $a$ , в котором  $[a]$  является объединением изолированных клик одинаковых порядков.

Автоморфизмы сильно регулярных графов с  $\mu = 1$  рассматривались в [1, 2] для графов Мура и в [3] для графов с  $\lambda = 2$  (известно, что сильно регулярные графы с  $\lambda = \mu = 1$  не существуют). В данной работе рассматриваются графы с  $\lambda = 3$ .

Хорошо известно (предложение 1.1.2 [4]), что сильный граф с  $\mu \geq 2$  регулярен. Поэтому непустые подграфы неподвижных точек  $2'$ -автоморфизмов сильно регулярного графа с  $\max\{\lambda, \mu\} \leq 2$  либо являются кликами, либо сильно регулярны с этими же параметрами.

Пусть  $\Gamma$  – сильно регулярный граф с параметрами  $(v, k, 3, 1)$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ . Тогда  $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 4k$ , причем окрестность любой вершины является объединением изолированных 4-клик. Поэтому  $k = 4u^2, n = 4u$  и  $\Gamma$  имеет неглавные собственные значения  $n - t = 2u + 1$  и  $-t = 1 - 2u$ . Далее,  $v = 1 + 4u^2 + 16u^2(u^2 - 1)$ , условие целочисленности выполнено, и так как число 5-клик в  $\Gamma$  равно  $vk/20$ , то  $u^2$  сравнимо с 0 или 1 по модулю 5. Наименьшие параметры сильно регулярного графа с  $\lambda = 3, \mu = 1$  достигаются при  $u = 4$ . Такой граф имеет параметры (3905, 64, 3, 1) и собственные значения 9 и  $-7$ . Автоморфизмы этого графа были изучены в [5]. В данной работе изучается сильно регулярный граф с параметрами (9701, 100, 3, 1) (они соответствуют значению  $u = 5$ ). Для  $g \in G$  через  $\alpha_1(g)$  обозначим число пар вершин  $(u, u^g)$  таких, что  $u, u^g$  смежны.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 05-01-00046) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект 05-01-39000).

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(9701, 100, 3, 1)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $\text{Aut}(\Gamma)$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1)  $p > 3$ ,  $\Omega$  — либо пустой граф,  $p = 89$  или  $109$ , и  $20$  делит  $\alpha_1(g) + 11$ , либо является одновершинным графом,  $p = 5$  и  $\alpha_1(g)$  делится на  $20$ ;
- (2)  $p = 3$ ,  $\Omega$  — подграф из  $a^\perp$  и  $\Omega(a)$  является объединением  $x$  изолированных вершин и  $y$  клик порядка  $4$ ,  $3$  делит  $x + y - 1$  и  $5$  делит  $2x + y$ ;
- (3)  $p = 2$  и  $\Omega = a^\perp$  для некоторой вершины  $a$ .

**Следствие 1.** Порядок группы автоморфизмов сильно регулярного графа  $\Gamma$  с параметрами  $(9701, 100, 3, 1)$  делит  $2^l 3 \cdot 5^2 89 \cdot 109$  и  $\Gamma$  не является вершинно транзитивным графом.

## 1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

**Лемма 1.1.** Пусть  $\Gamma$  является сильно регулярным графом с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$  и неглавными собственными значениями  $r, s$ ,  $s < 0$ . Если  $\Delta$  — индуцированный регулярный подграф из  $\Gamma$  степени  $d$  на  $w$  вершинах, то

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из  $\Gamma - \Delta$  смежна точно с  $w(k-d)/(v-w)$  вершинами из  $\Delta$ .

**Доказательство.** Это утверждение хорошо известно (см., напр., [6, §2]).

**Лемма 1.2.** Пусть  $G$  — группа подстановок, действующая на конечном множестве  $\Omega$ , и  $p$  — простое число. Если для любого  $\alpha \in \Omega$  подгруппа  $G_\alpha$  содержит такую  $p$ -подгруппу  $X_\alpha$ , что  $\text{Fix}(X_\alpha) = \{\alpha\}$ , то  $G$  транзитивна на  $\Omega$ .

**Доказательство.** Пусть  $\alpha, \beta$  — две точки из  $\Omega$ . По условию длина каждой  $X_\alpha$ -орбиты, отличной от  $\{\alpha\}$ , делится на  $p$ . Аналогично длина каждой  $X_\beta$ -орбиты, отличной от  $\{\beta\}$ , делится на  $p$ .

Положим  $H = \langle X_\alpha, X_\beta \rangle$ . Тогда каждая  $H$ -орбита является объединением  $X_\alpha$ -орбит, поэтому длина каждой  $H$ -орбиты, отличной от  $\alpha^H$ , делится на  $p$ . Аналогично длина каждой  $H$ -орбиты, отличной от  $\beta^H$ , делится на  $p$ , поэтому  $\alpha$  и  $\beta$  лежат в одной  $H$ -орбите.

**Лемма 1.3.** Пусть  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с  $\mu = 1$ ,  $g$  — автоморфизм графа  $\Gamma$  и  $\Delta$  — такая  $\langle g \rangle$ -орбита, что для  $x \in \Delta$  вершины  $x, x^g$  смежны. Тогда  $\Delta$  является многоугольником или кликой.

**Доказательство.** Допустим, что  $\Delta$  не является кликой. Пусть  $i$  — наименьшее число из  $\{2, \dots, |g| - 1\}$  такое, что вершины  $x, x^{g^i}$  несмежны. Тогда  $[x] \cap [x^{g^i}]$  содержит  $x^g, x^{g^{i-1}}$ , поэтому  $i = 2$ . Пусть теперь  $j$  — наименьшее число из  $\{3, \dots, |g| - 1\}$  такое, что вершины  $x, x^{g^j}$  смежны. Тогда  $[x] \cap [x^{g^{j-1}}]$  содержит  $x^{g^{-1}}, x^{g^j}$  и  $j = |g| - 1$ . Но в этом случае  $\Delta$  — многоугольник.

**Лемма 1.4.** Пусть  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(v, k, 3, 1)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $\text{Aut}(\Gamma)$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $v = 16u^4 - 12u^2 + 1$ ,  $k = 4u^2$  для некоторого натурального числа  $u$  и такого, что  $u^2$  сравнимо с  $0$  или  $1$  по модулю  $5$  и либо  $p = 2$ , каждая вершина из  $\Gamma - \Omega$  смежна с единственной вершиной из  $\Omega$  и выполняется одно из утверждений:

- (1)  $\Omega$  — сильно регулярный граф с  $\lambda = 3, \mu = 1$  степени  $4w^2$  и  $u = 2w^2 - 1$  делит  $\alpha_1(g)/4 + w^2$ ;

- (2)  $\Omega = a^\perp$  для некоторой вершины  $a \in \Gamma$  и  $4u$  делит  $\alpha_1(g)$ ;  
либо  $p = 3$  и выполняется одно из утверждений:  
(3)  $\Omega$  — одновершинный граф,  $3$  делит  $u$  и  $4u$  делит  $\alpha_1(g)$ ;  
(4)  $\Omega$  является подграфом из  $a^\perp$ , причем  $\Omega(a)$  содержит  $x$  изолированных вершин и  $y$  клик порядка  $4$ ,  $3$  делит  $(u^2 - 1, x + y - 1)$  и  $2u$  делит  $ix + 2y - x$ ;  
(5)  $\Omega$  — граф Петерсена и  $u = 6$ ;  
(6)  $\Omega$  — граф Хофмана — Синглтона и  $u = 9$  или  $21$ ;  
(7)  $\Omega$  — граф Ашбахера и  $u = 10601$ ;  
(8)  $\Omega$  — является сильно регулярным графом с  $\lambda = 3, \mu = 1$  степени  $4w^2$ , число  $u^2 - w^2$  делится на  $3$  и делит  $4w^4 - 3w^2$ ;  
либо  $p \geq 5$  и выполняется одно из утверждений:  
(9)  $\Omega$  — пустой граф,  $p$  делит  $1 + 4u^2 + 16u^2(u^2 - 1)$  и  $4u$  делит  $\alpha_1(g) + 2u + 1$ ;  
(10)  $\Omega$  — одновершинный граф,  $p$  делит  $u^2$  и  $4u$  делит  $\alpha_1(g)$ ;  
(11)  $\Omega$  является 5-кликлой,  $p$  делит  $u^2 - 1$  и  $4u$  делит  $\alpha_1(g) - 4$ ;  
(12)  $\Omega$  является мельницей на  $4x + 1$  вершинах из  $a^\perp$ ,  $p$  делит  $(u^2 - 1, x - 1)$  и  $4u$  делит  $4x - \alpha_1(g)$ ;  
(13)  $\Omega$  — сильно регулярный граф степени  $4w^2$  с  $\lambda = 3, \mu = 1$ , число  $p$  делит  $u^2 - w^2$  и  $u$  делит  $4w^4 - 3w^2 - \alpha_1(g)/4$ .

Доказательство. Это теорема 1 из [5].

## 2. Автоморфизмы графа с параметрами (9701,100,3,1)

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [6]. При этом графу  $\Gamma$  отвечает симметричная схема отношений  $(X, \{R_0, \dots, R_2\})$ , где  $X$  — множество вершин графа,  $R_0$  — отношение равенства на  $X$ ,  $R_1$  — отношение смежности в  $\Gamma$ ,  $R_2$  — отношение смежности в дополнительном графе  $\bar{\Gamma}$ . Если  $P$  и  $Q$  — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v - k - 1 & -r - 1 & -s - 1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$ . Здесь  $v$  — число вершин,  $k, r, s$  — собственные значения графа  $\Gamma$  кратностей  $1, f, v - f - 1$  соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы  $Q$ ).

Подстановочное представление группы  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  на вершинах графа  $\Gamma$  обычным образом дает матричное представление  $\psi$  группы  $G$  в  $GL(v, \mathbf{C})$ . Пространство  $\mathbf{C}^v$  является ортогональной прямой суммой собственных  $\psi(G)$ -инвариантных подпространств  $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$  матрицы смежности графа  $\Gamma$ . Пусть  $\chi_i$  — характер представления  $\psi_{W_i}$ . Тогда для любого  $g \in G$  получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^2 Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где  $\alpha_j(g)$  — число точек  $x$  из  $X$  таких, что  $(x, x^g) \in R_j$ . Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть равенства для  $\chi_i(g)$  — число рациональное, то  $\chi_i(g)$  — целое число.

Рассмотрим сильно регулярный граф  $\Gamma$  с параметрами (9701,100,3,1). Тогда  $\Gamma$  имеет неглавные собственные значения  $n - t = 11$ ,  $-t = -9$  кратностей 4360, 5340. Пусть  $g$  — автоморфизм графа  $\Gamma$ . Тогда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 100 & -9 & 11 \\ 9600 & 8 & -12 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5340 & -2403/5 & 89/20 \\ 4360 & 1998/5 & -109/20 \end{pmatrix}$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 5340, равно  $\chi_1(g) = (5340\alpha_0(g) - 2403\alpha_1(g) + 89\alpha_2(g)/20)/9701$ . Подставляя в эту формулу значение  $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$ , получим  $\chi_1(g) = (11\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 89)/20$ . В частности, 20 делит  $11(\alpha_0(g) - 1) - \alpha_1(g)$ .

**Лемма 2.1.** Пусть  $g$  — автоморфизм простого порядка  $p$  графа  $\Gamma$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Если  $p > 3$ , то выполняется одно из утверждений:

(1)  $\Omega$  — пустой граф,  $p = 89$  или  $109$ , 20 делит  $\alpha_1(g) + 11$  и в случае  $p = 109$  на  $\Gamma$  имеется либо 74 многоугольных и 15 кокликовых  $\langle g \rangle$ -орбит, либо 54 многоугольных и 45 кокликовых  $\langle g \rangle$ -орбит;

(2)  $\Omega$  — одновершинный граф,  $p = 5$ , и 20 делит  $\alpha_1(g)$ .

**Доказательство.** Возможности для  $\Omega$  выяснены в лемме 1.4. Если  $\Omega$  — пустой граф, то  $p$  делит  $9701 = 89 \cdot 109$  и 20 делит  $\alpha_1(g) + 11$ . Напомним, что ввиду леммы 1.3 каждая  $\langle g \rangle$ -орбита является кликой, кокликой или многоугольником. В случае  $p = 109$  получим  $\alpha_1(g) = 109(2x + 1)$ . Если  $\alpha_1(g^i) = 21 \cdot 109$  для некоторого  $i \in \{1, \dots, 54\}$ , то  $\alpha_1(g^j) = 109$  для  $j \in \{1, \dots, 54\} - \{i\}$  и на  $\Gamma$  имеется 74 многоугольных и 15 кокликовых  $\langle g \rangle$ -орбит. Если же  $\alpha_1(g^i) = 109$  для любого  $i \in \{1, \dots, 54\}$ , то на  $\Gamma$  имеется 54 многоугольных и 45 кокликовых  $\langle g \rangle$ -орбит.

Если  $\Omega$  — одновершинный граф, то  $p = 5$  и 20 делит  $\alpha_1(g)$ .

Если  $\Omega$  является 5-кликой, то  $p$  делит  $u^2 - 1$ ; противоречие с тем, что  $u = 5$ . Если  $\Omega$  является мельницей на  $4x + 1$  вершинах из  $a^\perp$ , то  $p$  делит  $(x - 1, 24)$ ; противоречие с тем, что  $p > 3$ .

Если  $\Gamma$  содержит сильно регулярный полграф с параметрами  $(3905, 64, 3, 1)$ , то  $64 - 3905(100 - 64)/(9701 - 3905) > 11$ ; противоречие с леммой 1.1. Значит,  $\Omega$  не является сильно регулярным подграфом.

**Лемма 2.2.** Пусть  $f$  — автоморфизм порядка 3 графа  $\Gamma$  и  $\Sigma = \text{Fix}(f)$ . Тогда  $\Sigma$  — подграф из  $a^\perp$  для некоторой вершины  $a$ , и  $\Sigma(a)$  является объединением  $x$  изолированных вершин и  $y$  клик порядка 4, 3 делит  $x + y - 1$  и 5 делит  $2x + y$ .

**Доказательство.** Ввиду леммы 1.4 и доказательства предыдущей леммы граф  $\Sigma \subset a^\perp$  и  $\Sigma(a)$  является объединением  $x$  изолированных вершин и  $y$  клик порядка 4. Далее, 3 делит  $x + y - 1$ , 5 делит  $2x + y$  и  $x + y \leq 25$ .

Лемма доказана.

Из леммы 1.4 и доказательства леммы 2.1 следует, что для любого инволютивного автоморфизма  $t$  графа  $\Gamma$  подграф  $\text{Fix}(t)$  совпадает с  $a^\perp$  для подходящей вершины  $a$ .

Теорема доказана.

### 3. Группа автоморфизмов графа с параметрами (9701,100,3,1)

Пусть сильно регулярный граф  $\Gamma$  имеет параметры  $(9701, 100, 3, 1)$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $Q$  — силовская 3-подгруппа из  $G$ . Тогда  $Q$  фиксирует некоторую 5-клику  $K$ . Без ограничения общности  $Q$  фиксирует вершины  $a, b$  из  $K$ .

**Лемма 3.1.** Числа 89 и 109 изолированы в графе Грюнберга — Кегеля группы  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  — элемент порядка  $pr$  группы  $G$ , где  $p < r$ ,  $p, r$  — простые числа. Положим  $g = f^p$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Пусть  $r = 109$ . Тогда  $p = 2, 3, 5$  или  $89$ . В случае  $p = 89$  элемент  $f^r$  должен действовать на орбитах элемента  $g$  без неподвижных точек; противоречие с леммой 2.1. В случаях  $p = 2, 3$  или  $5$  подграф  $\Omega$  является пустым и непустой подграф  $\text{Fix}(f^r)$  содержится в  $\Omega$ ; противоречие.

Пусть  $r = 89$ . Тогда  $p = 2, 3$  или  $5$ . В этом случае подграф  $\Omega$  является пустым и непустой подграф  $\text{Fix}(f^r)$  содержится в  $\Omega$ ; противоречие.

Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** Пусть  $g$  — элемент порядка 3 из  $Q$ ,  $\Sigma = \text{Fix}(g)$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) для  $a \in K \cap \Sigma$  подграф  $\Sigma(a)$  содержит  $x$  изолированных вершин и  $y$  клик порядка 4 и  $g$  имеет один из типов:

- (i)  $(x, y) = (0, 1)$  или  $(x, y) = (1, 0)$ ;
- (ii) 3 делит  $x + y - 1$ , 5 делит  $2x + y$  и  $x + y \leq 25$ ;

(2)  $Q$  не содержит элементов порядка 9.

**Доказательство.** Если  $\Sigma \subseteq a^\perp$ , то по лемме 2.2 выполняется утверждение (1ii). Если же  $\Sigma \subseteq b^\perp$  для  $b \in K - \{a\}$ , то  $g$  оставляет на месте единственную 4-клику  $b^\perp \cap [a]$  из  $[a]$  и выполняется утверждение (1i).

Пусть  $f$  — элемент порядка 9 из  $Q$ ,  $g = f^3$ . Найдется вершина  $b \in K \cap \Sigma$  такая, что  $g$  имеет тип (i) относительно  $b$ ; противоречие с тем, что элемент  $f$  должен действовать без неподвижных точек на восьми  $g$ -орбитах длины 3 на множестве 4-клик в  $[b]$ .

**Лемма 3.3.** Порядок группы  $Q$  делит 3.

**Доказательство.** Некоторая подгруппа  $R$  индекса 3 из  $Q$  фиксирует  $K$  поточечно.

Пусть  $U$  — абелева подгруппа из  $Q$  порядка 9. Покажем, что  $U$  не может содержать только элементы типа (i) относительно некоторой вершины из  $K$ . Пусть найдется такая вершина  $b \in K$ , что каждый элемент порядка 3 из  $U$  имеет тип (i) относительно  $b$ . Тогда  $U$  действует на восьми  $u$ -орбитах длины 3 на множестве 4-клик из  $[b]$ . Поэтому  $U$  оставляет на месте некоторую орбиту, фиксируемую поточечно элементом порядка 3 из  $U$ .

Если  $U$  фиксирует  $K$  поточечно, то каждый элемент порядка 3 из  $U$  имеет тип, отличный от (i), относительно не более одной вершины из  $K$ . Поэтому найдется такая вершина  $b \in K$ , что каждый элемент порядка 3 из  $U$  имеет тип (i) относительно  $b$ , противоречие с доказанным в предыдущем абзаце.

Если  $|R| > 3$ , то  $R$  содержит абелеву подгруппу  $U$  порядка 9, фиксирующую  $K$  поточечно; противоречие.

Пусть  $|Q| = 9$ . Тогда  $[a]$  содержит  $Q$ -орбиту длины 3, и подгруппа  $\langle u \rangle$  порядка 3 из  $Q$  фиксирует  $K$  поточечно. Напомним, что  $Q$  содержит ровно 4 подгруппы порядка 3.

Пусть  $\Delta_i$  — множество  $Q$ -орбит длины  $i$  на 4-кликах из  $[a]$ ,  $\delta_i = |\Delta_i|$ . Тогда  $\delta_1 + 3\delta_3 + 9\delta_9 = 25$ . Заметим, что орбита из  $\Delta_3$  состоит либо из клик поточечно фиксируемых некоторым элементом порядка 3 из  $Q$ , либо из клик, в которых ровно 1 вершина фиксируется некоторым элементом порядка 3 из  $Q$ . Пусть  $\delta'_3$  — число орбит из  $\Delta_3$  первого типа.

Зафиксируем элементы  $u_1 = u, \dots, u_4$  порядка 3 из  $Q$ , порождающие попарно различные подгруппы. Пусть на множестве 4-клик из  $[a]$  элемент  $u_i$  фиксирует поточечно  $y_i$  клик и фиксирует по одной точке в  $x_i$  кликах. Тогда  $x_i + y_i \leq 25 - 9\delta_9$ ,  $\sum y_i = \delta_1 + 3\delta'_3$  и  $\sum x_i = 3(\delta_1 + \delta_3 - \delta'_3)$ . Так как для любого  $i$  число  $2x_i + y_i$  делится на 5, то  $2\delta_1 + 2\delta_3 - \delta'_3$  делится на 5. Так как для любого  $i$  число  $x_i + y_i - 1$  делится на 3, то  $\delta_1 + \delta_3 - 1$  делится на 3.

Заметим, что  $y_i$  или  $y_i - 1$  делится на 3. Если каждая поточечно фиксируемая  $u_i$  4-клика  $L$  из  $[a]$  не является  $U$ -инвариантной, то  $y_i$  делится на 3. Если  $y_1 - 1$  не делится на 3, то отличная от  $K$  4-клика  $L$  из  $[a]$  фиксируется поточечно элементом  $u$  и является  $Q$ -допустимой. Тогда  $Q$  фиксирует вершину из  $L$ , поэтому  $\text{Fix}(g) \subseteq a^\perp$  для любого элемента  $g$  порядка 3 из  $Q$ . Противоречие с тем, что тогда каждый элемент порядка 3 из  $Q$  имеет тип (i) относительно  $b$ . Значит,  $y_1 - 1$  делится на 3.

По лемме 2.2  $(x_1, y_1) \in \{(0, 1), (0, 10), (0, 25), (3, 4), (3, 19), (6, 13), (9, 7), (12, 1), (15, 10), (18, 4)\}$ . Если  $y_i$  делится на 3, то  $(x_i, y_i) \in \{(1, 0), (1, 3), (1, 18), (4, 12), (7, 6), (10, 0), (10, 15), (13, 9), (16, 3), (25, 0)\}$ .

На основе соотношений  $x_i + y_i \leq 25 - 9\delta_9$ ,  $\sum y_i = \delta_1 + 3\delta'_3$  и  $\sum x_i = 3(\delta_1 + \delta_3 - \delta'_3)$  с помощью компьютерных вычислений доказано, что верно одно из утверждений:

а)  $\delta_9 = 2$  и множество пар  $(x_i, y_i)$  (с учетом их кратностей) образует  $\{(3, 4), (1, 0)^3\}$  (в этом случае  $\delta_1 = 1, \delta_3 = 2$ );

б)  $\delta_9 = 1$  и множество пар  $(x_i, y_i)$  (с учетом их кратностей) образует  $\{(3, 4)^4, \{(3, 4), (1, 3)^2, (7, 6)\}, \{(9, 7), (1, 3)^3\}\}$  или  $\{(0, 10), (1, 3)^2, (10, 0)\}$  (в этих случаях  $\delta_1 = \delta_3 = \delta'_3 = 4$ ),  $\{(3, 4), (10, 0), (1, 0)^2\}$  (в этом случае  $\delta_1 = 1, \delta_3 = 5$ );

в)  $\delta_9 = 0$  и множество пар  $(x_i, y_i)$  (с учетом их кратностей) образует  $\{(0, 1), (4, 12), (16, 3), (1, 0)\}, \{(0, 1), (7, 6), (13, 9), (1, 0)\}, \{(0, 1), (10, 0), (10, 15), (1, 0)\}$  (в этих случаях  $\delta_1 = 4, \delta_3 = 7$ ),  $\{(3, 4), (10, 0)^2, (1, 0)\}, \{(12, 1)^2, (0, 1)^2\}$  (в этих случаях  $\delta_1 = 1, \delta_3 = 8$ ).

В случае а) элемент  $u_1$  действует на каждой 4-клике в  $Q$ -орбитах длины 3, причем точно в одной из этих орбит  $u_1$  фиксирует каждую 4-клику поточечно.

В случае б) если  $\delta_1 = \delta_3 = \delta'_3 = 4$ , то  $x_i \leq 4$ , иначе найдется  $Q$ -орбита, в каждой точке которой  $u_i$  фиксирует единственную вершину; противоречие с тем, что  $\delta_3 = \delta'_3$ . Поэтому для любого  $i$  имеем  $(x_i, y_i) = (3, 4)$  и каждая 4-клика из  $[a]$ , в которой  $u_i$  фиксирует единственную вершину, является  $Q$ -орбитой. Противоречие с тем, что  $u_1$  фиксирует все точки клики  $K$ .

В случае в) если  $\delta_1 = 4$ , то для  $(x_i, y_i) = (0, 1)$  элемент  $u_i$  имеет 8 орбит длины 3 на 4-кликах из  $[a]$ ; противоречие с тем, что  $\delta_3 = 7$ . В случае в) если  $\delta_1 = 1$  и  $(x_i, y_i) = (0, 1) = (x_j, y_j)$  для различных  $i, j$ , то  $Q$  поточечно фиксирует  $K$ ; противоречие.

Итак, в любом случае для элемента  $u_1$  имеем  $(x_1, y_1) = (3, 4)$ . Противоречие с тем, что при действии на 4-кликах из  $[b]$  элемент  $u_1$  должен иметь тип  $(0, 1)$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.4.** *Порядок силовой 5-подгруппы группы  $G$  делит 25.*

**Доказательство.** Пусть  $g$  — элемент порядка 5 из центра силовой 5-подгруппы  $P$  группы  $G$ . Тогда он фиксирует единственную вершину  $a$ , и  $P$  также фиксирует только  $a$ . Поэтому  $P$  действует без неподвижных точек на  $[a]$  и на  $\Gamma_2(a)$ . Так как  $|[a]| = k = 100$ , а  $|\Gamma_2(a)| = 9701 - 1 - 100 = 9600$ , то порядок  $P$  делит 25. Лемма доказана.

Из лемм 3.2–3.4 и теоремы вытекает, что  $|G|$  делит  $2^l 3 \cdot 5^2 89 \cdot 109$ .

**Лемма 3.5.** *Граф  $\Gamma$  не является вершинно-транзитивным.*

**Доказательство.** Пусть граф  $\Gamma$  является вершинно-транзитивным. Хорошо известно, что связный вершинно-транзитивный сильно регулярный граф допускает импримитивное действие, только если он является полным многодольным графом. Поэтому  $G$  действует примитивно на  $\Gamma$ . Так как число вершин графа не является степенью простого числа, то цоколь  $H$  группы  $G$  — простая неабелева группа. Зафиксируем вершину  $a$  графа  $\Gamma$ . Тогда  $H$  действует примитивно на  $\Gamma$  и  $|H : H_a| = 89 \cdot 109$ .

Если порядок группы  $H$  не делится на 3, то  $H$  изоморфна  $Sz(2^{2n+1})$  для некоторого натурального числа  $n$ . Противоречие с тем, что  $|H|$  делит  $2^l 5^2 89 \cdot 109$ .

По лемме 3.1 простые числа 89 и 109 изолированы в графе Грюнберга — Кегеля группы  $G$ . Теперь граф Грюнберга — Кегеля группы  $H$  содержит не менее 3 связных компонент (две из которых  $\{89\}$  и  $\{109\}$ ). Списки простых групп и информация о компонентах несвязного графа Грюнберга — Кегеля имеется в лемме 4 из [7]. Так как  $|H|$  не делится на 9, то  $H$  не является знакопеременной группой. А так как  $|H|$  делится на 109, то  $H$  не является спорадической группой. Значит,  $H$  — группа лиева типа.

Пусть граф Грюнберга — Кегеля группы  $H$  содержит 5 связных компонент. Тогда  $(n_4, n_5) = (89, 109)$  и  $H$  изоморфна группе  $E_8(q)$ , где  $q \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$ . В этом случае граф Грюнберга — Кегеля группы  $H$  содержит следующие изолированные вершины:  $\frac{q^{10} + 1}{q^2 + 1}, \frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1}, q^8 - q^4 + 1, \frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1}$ ; противоречие с тем, что при  $q = 4$  имеем  $q^8 - q^4 + 1 = 65281$ .

Пусть граф Грюнберга — Кегеля группы  $H$  содержит 4 связных компоненты. Тогда  $(n_3, n_4) = (89, 109)$  и  $H$  изоморфна группе одной из групп:  $E_8(q)$ , где  $q \equiv 2, 3 \pmod{5}$ ,  ${}^2E_6(2)$ ,  ${}^2B_2(q)$ , где  $q = 2^{2m+1} > 2$ ,  $A_2(4)$ . В первом случае граф Грюнберга — Кегеля группы  $H$  содержит следующие изолированные вершины:  $\frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1}, q^8 - q^4 + 1, \frac{q^{10} - q^5 + 1}{q^2 - q + 1}$ ; противоречие с тем, что при  $q = 2 \frac{q^{10} + q^5 + 1}{q^2 + q + 1} = 151$ . Во втором случае граф Грюнберга — Кегеля группы  $H$  содержит изолированные вершины: 13, 17 и 19; противоречие. В третьем случае граф Грюнберга — Кегеля группы  $H$  содержит следующие изолированные вершины:  $2, q - 1, q - \sqrt{2q} + 1, q + \sqrt{2q} + 1$ ; противоречие с тем, что  $q + \sqrt{2q} + 1 \neq 109$ . Группа  $H$  не изоморфна  $A_2(4)$ , так как  $\pi(A_2(4)) = \{2, 3, 5, 7\}$ .

Пусть граф Грюнберга — Кегеля группы  $H$  содержит 3 связных компоненты. Тогда  $(n_2, n_3) = (89, 109)$  и  $H$  изоморфна группе одной из групп:

- 1)  $A_1(q)$ , где  $3 \leq q \equiv \epsilon(4)$ ;
- 2)  $A_1(q)$ , где  $q > 2$ ,  $q$  — четно;
- 3)  ${}^2A_5(2)$ ;
- 4)  ${}^2D_p(3)$ , где  $p$ -просто,  $p = 2^m + 1 \geq 5$ ;
- 5)  $G_2(q)$ , где  $q \equiv 0(3)$ ;
- 6)  ${}^2G_2(q)$ , где  $q = 3^{2m+1} > 3$ ;
- 7)  $F_4(q)$ ,  $q$  — четно;
- 8)  ${}^2F_4(q)$ ,  $q = 2^{2m+1} > 2$ .

В первом случае  $\pi(q - \epsilon), \pi(q), (q + \epsilon)/2$  являются компонентами связности; противоречие с тем, что  $2 \cdot 109 \pm 1$  не является степенью простого числа. Во втором случае  $2, q - 1, q + 1$  являются компонентами связности; противоречие.

Группа  $H$  не изоморфна  ${}^2A_5(2)$ , так как  $\pi({}^2A_5(2)) = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ . В четвертом случае  $(n_2, n_3) = ((3^{p-1} + 1)/2, (3^p + 1)/4)$ ; противоречие с тем, что  $4 \cdot 109 - 1$  не является степенью 3.

В пятом случае  $(n_2, n_3) = (q^2 - q + 1, q^2 + q + 1)$ ; противоречие с тем, что  $q(q + 1) = 108$ . В шестом случае  $(n_2, n_3) = (q^2 - \sqrt{3q} + 1, q^2 + \sqrt{3q} + 1)$ ; противоречие с тем, что  $3^{4m+2} + 3^{m+1} + 1 = 109$ .

В седьмом случае  $(n_2, n_3) = (q^4 - q^2 + 1, q^4 + 1)$ ; противоречие с тем, что  $q^4 + 1 = 109$ . В восьмом случае  $(n_2, n_3) = (q^2 - \sqrt{2q^3} + q - \sqrt{2q} + 1, q^2 + \sqrt{2q^3} + q + \sqrt{2q} + 1)$ . Тогда  $n_2 + n_3 = 2q^2 + 2q + 2 = 109 + 89$  и  $q^2 + q = 98$ ; противоречие. Лемма доказана, а вместе с этим завершено и доказательство следствия 1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aschbacher M.** The nonexistence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57 // J. Algebra. 1971. Vol. 19, № 3. P. 538–540.
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Об автоморфизмах графа Ашбахера // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, №2. С. 125–134.
3. **Махнев А.А., Нирова М.С.** Узкие частичные четырехугольники и их автоморфизмы // Проблемы теорет. и прикл. математики: Тр. 37-й молодеж. конф. ИММ УрО РАН, Екатеринбург 2006. С. 25–27.
4. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs // Berlin: Springer-Verlag, 1989.
5. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** О сильно регулярных графах с  $\mu = 1$  // Докл. Акад. наук. 2006. Т. 410, № 2. С. 151–155.
6. **Cameron P.** Permutation Groups / London Math. Soc. Student Texts 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
7. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.

УДК 517.977

## ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ<sup>1</sup>

Е. В. Березина

В работе исследуется задача оценивания множества состояний нелинейной динамической управляемой системы с неопределенностью по начальным данным. Базируясь на известных результатах эллипсоидального оценивания, полученных для линейных систем с неопределенностью, здесь представлен модифицированный подход к построению внешней оценки множеств достижимости. Данный подход использует специальную структуру динамической системы, в которой нелинейные члены являются квадратичными по фазовым координатам. Приведены результаты компьютерного моделирования для некоторых нелинейных управляемых систем, построены соответствующие трубки траекторий и их внешние оценки.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную управляемую систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + f(x) + G(t)u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (1.1)$$

Предполагается, что начальное условие  $x(t_0) = x_0$  системы (1.1) известно неточно, задано лишь ограничение на допустимые значения этой величины [1–3]

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0, \quad (1.2)$$

где  $X_0$  — компактное подмножество  $\mathbb{R}^n$ .

Элементы функциональных матриц  $A(t)$  и  $G(t)$  (размерностей  $n \times n$  и  $n \times m$ , соответственно) в (1.1) являются непрерывными на  $[t_0, T]$ , а вектор-функция управления  $u(t)$  — измеримой функцией, стесненной условием

$$u(t) \in U, \quad U \subset \mathbb{R}^m, \quad (1.3)$$

где  $U$  — заданное выпуклое компактное подмножество  $\mathbb{R}^m$ ;  $f(x)$  — нелинейная вектор-функция квадратичного типа

$$f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}, \quad f_i(x) = x' B_i x, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

где  $B_i$  — постоянные  $n \times n$ -матрицы ( $i = 1, \dots, n$ ).

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие обозначения. Пусть  $\mathbb{R}^n$  обозначает  $n$ -мерное евклидово пространство,  $\mathbb{R}_+^n$  — положительный ортант  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$ ,  $\text{conv } \mathbb{R}^n$  — множество всех выпуклых компактных подмножеств  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{comp } \mathbb{R}^n$  — множество всех компактных подмножеств из  $\mathbb{R}^n$ . Символ  $(x, y)$  обозначает скалярное произведение векторов  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , а  $\|x\| = (x, x)^{1/2}$  — евклидову норму вектора  $x$ ,  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ , символ  $E(a, Q)$  обозначает эллипсоид в  $\mathbb{R}^n$  с центром в точке  $a \in \mathbb{R}^n$  и симметричной положительно определенной  $n \times n$ -матрицей  $Q$ :  $E(a, Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (Q^{-1}(x - a), (x - a)) \leq 1\}$ . Символ  $\rho(l, M)$  означает опорную функцию множества  $M \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ , ' — знак транспонирования,  $I$  — единичная  $n \times n$ -матрица,  $Tr(A)$  — сумма диагональных элементов матрицы  $A$ ,  $|A|$  —

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00483-а).

определитель матрицы  $A$ . Обозначим также символом  $h(X, Y)$  хаусдорфово расстояние между множествами  $X, Y \subset \text{comp } \mathbb{R}^n$ :  $h(X, Y) = \inf\{\epsilon \geq 0 \mid X \subseteq Y + \epsilon B(0, 1), Y \subseteq X + \epsilon B(0, 1)\}$ .

Управляемой системе (1.1) с ограничениями (1.2)–(1.4) поставим в соответствие дифференциальное включение [4]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in A(t)x + f(x) + P(t), \quad P(t) = G(t)U, \quad P(t) \subset \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq T, \\ x(t_0) &= x_0, \quad x_0 \in X_0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Обозначим символом  $x(t) = x(t; t_0, x_0)$  решение (1.5) с начальным условием (1.2), определенное на отрезке  $[t_0, T]$ . Будем предполагать, что фазовый вектор  $x(t)$  не выходит за пределы некоторой ограниченной области  $\|x\| \leq K$  ( $K > 0$ ) пространства  $\mathbb{R}^n$  на промежутке  $[t_0, T]$  (условия, при которых данное требование выполняется, будут даны ниже).

**О п р е д е л е н и е 1** [1–3]. Множество  $X(\cdot) = \mathcal{X}(\cdot; t_0, X_0) = \bigcup \{x(\cdot; t_0, x_0) \mid x_0 \in X_0\}$  называется трубкой траекторий системы (1.5) из начального состояния  $\{t_0, X_0\}$ . Сечение  $X(t) = \mathcal{X}(t; t_0, X_0)$  трубки траекторий  $\mathcal{X}(\cdot; t_0, X_0)$  в момент времени  $t$  называется множеством достижимости системы (1.5) при  $t \geq t_0$  из начального состояния  $\{t_0, X_0\}$ .

Базируясь на известных результатах теории эллипсоидального оценивания, разработанной для линейных систем с неопределенностью [1–3, 5], мы представим модифицированный подход к построению внешней аппроксимации множеств достижимости систем вида (1.1)–(1.4). В данном подходе будет использована специфическая структура системы, ее квадратичная нелинейность вида (1.4).

В связи с этим рассмотрим следующие задачи.

**З а д а ч а 1.** Для нелинейной управляемой системы (1.1) с ограничениями (1.2)–(1.4) (или для дифференциального включения (1.5)) получить эллипсоидальные оценки множества достижимости  $X(t)$ .

**З а д а ч а 2.** Найти временные интервалы, на которых гарантированы внешние оценки.

**З а д а ч а 3.** Предложить алгоритм построения внешних эллипсоидальных оценок для нелинейных систем специального вида.

В следующем разделе будет рассмотрена специфика множеств достижимости нелинейных дифференциальных систем.

## 2. Свойства множеств достижимости нелинейных систем

Исследованию свойств множеств достижимости, способам их построения и оценивания посвящена обширная литература. Отметим, в частности, результаты, существенно влияющие на дальнейшее изложение [4, 6, 7]. В этих работах изучаются вопросы, касающиеся свойств компактности множеств достижимости, непрерывной зависимости множеств достижимости от времени, связности трубок траекторий дифференциальных включений и условий выпуклости множеств достижимости. В статьях S.J. Lojasiewicz [8] и A. Plis [9] приводятся некоторые достаточные условия выпуклости множеств достижимости для нелинейных систем. Однако они доказываются при сильных допущениях и, кроме того, не дают точного значения времени, при котором выпуклость сохраняется.

Как уже было отмечено, множество достижимости нелинейной системы в общем случае не обладает свойством выпуклости. Поэтому аппроксимация при помощи выпуклых множеств является слишком грубой. Однако для систем более простого вида (в частности, для рассмотренного в работе класса) могут быть найдены временные интервалы, в течение которых выпуклость сохраняется. Рассмотрим следующий иллюстрирующий пример.

**П р и м е р 1.** Пусть динамика системы описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_1, \\ \dot{x}_2 &= bx_2 + x_2^2, \end{cases} \quad 0 \leq t < T, \quad (2.1)$$

где начальное множество  $X_0 = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ ,  $a$  и  $b$  — параметры,  $b > 0$  и  $T = \frac{\ln(1+b)}{b}$ .

Решение системы (2.1) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 &= x_1^0 e^{at}, \\ x_2 &= \frac{x_2^0 b e^{bt}}{b + x_2^0(1 - e^{bt})}, \end{cases} \quad 0 \leq t < T. \quad (2.2)$$

Выражая значения  $x_1^0$ ,  $x_2^0$  через  $x_1$  и  $x_2$  в системе (2.2) и учитывая, что  $\{x_1^0, x_2^0\} \in X_0$ , получаем

$$X(t) = \left\{ \{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}^2 \mid \left( \frac{x_1}{e^{at}} \right)^2 + \left( \frac{bx_2}{e^{bt}(b+x_2) - x_2} \right)^2 \leq 1 \right\}. \quad (2.3)$$

Введем обозначение

$$F(t, x_1, x_2) = \left( \frac{x_1}{e^{at}} \right)^2 + \left( \frac{bx_2}{e^{bt}(b+x_2) - x_2} \right)^2 - 1.$$

Отметим, что точка  $x = \{x_1, x_2\}$  принадлежит границе множества достижимости  $X(t)$  тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$F(t, x_1, x_2) = 0.$$

Заметим, что множество  $X(t)$  симметрично относительно оси  $x_2$  (в силу равенства (2.3)), поэтому рассмотрим случай  $x_1 \geq 0$ . Учитывая это, выразим  $x_1$  через  $x_2$ ; получим

$$x_1(t, x_2) = e^{at} \sqrt{1 - \frac{b^2 x_2^2}{(e^{bt}(b+x_2) - x_2)^2}}. \quad (2.4)$$

Нетрудно проверить, используя классический аппарат дифференциального исчисления, что функция  $x_1(t, x_2)$  вогнута по  $x_2$  в области

$$\left\{ \{t, x_2\} \mid \frac{be^{bt}}{1-b-e^{bt}} \leq x_2 \leq \frac{be^{bt}}{1+b-e^{bt}}, \quad 0 \leq t \leq \hat{t} \right\},$$

где  $\hat{t} = \frac{\ln(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}b)}{b}$ . Принимая во внимание (2.4), представим множество достижимости  $X(t)$  в виде

$$X(t) = \left\{ \{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1(t, x_2) \leq x_1 \leq x_1(t, x_2), \quad \frac{be^{bt}}{1-b-e^{bt}} \leq x_2 \leq \frac{be^{bt}}{1+b-e^{bt}}, \quad 0 \leq t < T \right\}.$$

Исходя из этого, получаем: при  $0 \leq t \leq \hat{t}$  множество  $X(t)$  выпукло, при  $\hat{t} < t < T$  множество  $X(t)$  не является выпуклым.

На рис. 1 изображены множества достижимости системы (2.1) (параметры  $a = b = 2$ ). На рис. 1(а) показано, что  $X(t)$  сохраняет свойство выпуклости до момента  $\hat{t} = 0.5 \ln(1 + \sqrt{2})$ . При большем значении времени  $t > \hat{t}$  множество достижимости  $X(t)$  теряет выпуклость (см. рис. 1(б)).

**З а м е ч а н и е 1.** Отметим, что в случае, когда множество достижимости  $X(t)$  нелинейной системы сохраняет свойство выпуклости, целесообразно применение известных методов эллипсоидального оценивания.

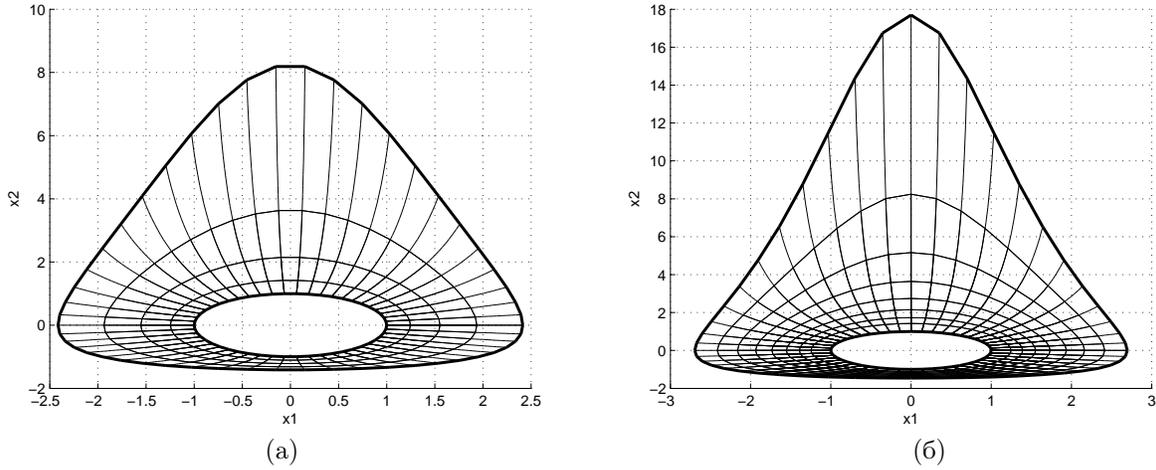


Рис. 1. Множество достижимости  $X(t)$ : (а) – для  $0 \leq t \leq \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{2}$ ; (б) – для  $0 \leq t \leq 0.5$ .

### 3. Метод внешнего эллипсоидального оценивания для нелинейных систем

Целью данного раздела является построение эллипсоидальных оценок множеств достижимости и трубок траекторий динамических систем рассматриваемого квадратичного типа на основе методов эллипсоидального оценивания, разработанных для линейных систем в условиях неопределенности [1,5]. Уточним предположения о структуре рассматриваемой нелинейной системы.

Положим, что в нелинейной управляемой системе (1.5) с начальным условием (1.2) матрица  $A(t) \equiv A$ ,  $P(t) \equiv E(a, Q)$ ,  $f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ ,  $f_i(x) = x' B_i x$ , причем матрицы  $Q$ ,  $B_i$  – симметрические, положительно определенные ( $i = 1, \dots, n$ ),  $a \in \mathbb{R}^n$  и  $t_0 = 0$ . Таким образом, дифференциальное включение (1.5) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in Ax + f(x) + E(a, Q), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x_0 &= x(0) \in X_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x) + u(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(t) &\in E(a, Q), \\ x_0 &= x(0) \in X_0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Предполагаем, как и ранее, что  $\|x\| \leq K$ , символ  $X(\cdot)$  обозначает трубку траекторий системы (3.1). Сформулируем и докажем некоторые вспомогательные утверждения.

**Лемма 1.** *Верна следующая оценка:*

$$\|f(x)\| \leq N, \quad N = K^2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2},$$

где  $\lambda_i$  – максимальное характеристическое число матрицы  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

**Доказательство.** Учитывая тот факт, что для каждого  $i = 1, \dots, n$  функции  $f_i(x)$  представляют собой положительно определенные квадратичные формы, заданные на ограниченном множестве  $\|x\| \leq K$  ( $K > 0$ ), нетрудно убедиться в справедливости неравенств:

$$\|f(x)\| \leq \max_{\|x\| \leq K} \|f(x)\| \leq \max_{\|x\| \leq K} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x' B_i x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \max_{\|x\| \leq K} (x' B_i x)^2}. \quad (3.3)$$

Известно [10], что

$$\max_{\|x\| \leq K} x' B_i x = K^2 \lambda_i. \quad (3.4)$$

Тогда из (3.3) и (3.4) следует

$$\|f(x)\| \leq K^2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Для всех  $t \in [t_0, T]$  справедливо включение  $X(t) \subset X^*(t)$ , где  $X^*(\cdot)$  — трубка траекторий линейного дифференциального включения

$$\dot{x} \in Ax + B(0, N) + E(a, Q), \quad x_0 \in X_0. \quad (3.5)$$

**Доказательство.** В силу леммы 1 существует такое  $N > 0$ , что для всех  $x$  ( $\|x\| \leq K$ )

$$\|f(x)\| \leq N.$$

Другими словами, для любого  $x$ , из того что  $\|x\| \leq K$ , следует

$$f(x) \subset B(0, N). \quad (3.6)$$

Таким образом, включение (3.5) имеет место. Лемма доказана.

Можно получить и более точную оценку, используя положительную определенность координат  $f_i(x)$  нелинейной функции  $f(x)$ .

**Лемма 3.** Для всех  $t \in [t_0, T]$  справедливо включение  $X(t) \subset X^{**}(t)$ , где  $X^{**}(\cdot)$  — трубка траекторий линейного дифференциального включения

$$\dot{x} \in Ax + B\left(c, \frac{N\sqrt{n}}{2}\right) + E(a, Q), \quad x_0 \in X_0,$$

$$c = \{N/2, \dots, N/2\} \in \mathbb{R}^n.$$

**Доказательство.** Из леммы 2, в силу (3.6), вытекает, что

$$f(x) \subset B(0, N).$$

Более того, так как для каждого  $i = 1, \dots, n$  функции  $f_i(x)$  — положительно определенные квадратичные формы, то

$$f(x) \in \Omega = \mathbb{R}_+^n \cap B(0, N).$$

Оценим  $n$ -мерную область  $\Omega$ . Нетрудно проверить, что шар с центром в точке  $c$  радиуса  $\frac{N\sqrt{n}}{2}$  содержит в себе область  $\Omega$ , т.е. для любой точки  $y \in \Omega$  выполняется неравенство

$$\|y - c\| \leq \frac{N\sqrt{n}}{2}. \quad (3.7)$$

Действительно,

$$\|y - c\|^2 = (y - c, y - c) = \|y\|^2 - 2(y, c) + \|c\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \frac{N}{2} \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n \frac{N^2}{4}$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i^2 - N \sum_{i=1}^n y_i + \frac{n}{4} N^2. \quad (3.8)$$

Так как  $y \in \Omega$ , то  $0 \leq y_i \leq N$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 - N \sum_{i=1}^n y_i \leq N^2 n - N^2 n = 0. \quad (3.9)$$

Из (3.8) и (3.9) получаем

$$\|y - c\|^2 \leq \frac{n}{4} N^2.$$

Итак, (3.7) верно и

$$f(x) \subset B\left(c, \frac{N\sqrt{n}}{2}\right), \quad \text{где } c = \{N/2, \dots, N/2\}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Включение*

$$X(t) \subset X^{***}(t)$$

справедливо для всех  $t \in [t_0, T]$ , где  $X^{***}(\cdot)$  — трубка траекторий дифференциального включения

$$\dot{x} \in Ax + E(a^*, Q^*), \quad x_0 \in X_0. \quad (3.10)$$

Здесь

$$a^* = a + c; \quad (3.11)$$

$$Q^* = (p^{-1} + 1)\tilde{Q} + (p + 1)Q; \quad (3.12)$$

$\tilde{Q} = \frac{N^2 n}{4} I$ ,  $p$  — единственное положительное решение уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p + \alpha_i} = \frac{n}{p(p + 1)}, \quad (3.13)$$

где  $\alpha_i \geq 0$  — корни характеристического уравнения

$$|\tilde{Q} - \alpha Q| = 0. \quad (3.14)$$

**Доказательство.** Для доказательства справедливости включения  $X(t) \subset X^{***}(t)$  воспользуемся результатом леммы 2 и найдем эллипсоид наименьшего объема [5], содержащий сумму двух эллипсоидов  $B\left(c, \frac{N\sqrt{n}}{2}\right)$  и  $E(a, Q)$ . Указанный эллипсоид имеет вид  $E(a^*, Q^*)$ , где  $a^*$  и  $Q^*$  определены по формулам (3.11)–(3.14). Отсюда вытекает включение (3.10). Лемма доказана.

**З а м е ч а н и е 2.** Аналогичную лемму можно сформулировать и для включения (3.5). В этом случае изменятся формулы для вычисления параметров эллипсоида  $E(a^*, Q^*)$ . Так, формула (3.11) заменится на

$$a^* = a,$$

а матрица эллипсоида  $Q^*$  будет определяться из (3.12), но с другими компонентами:

$$Q^* = (p^{-1} + 1)\tilde{Q} + (p + 1)Q, \quad \tilde{Q} = N^2 I. \quad (3.15)$$

**Теорема 1.** Пусть  $X_0 = B(a_0, r)$ ,  $a_0 = 0$ ,  $r \leq K$  и  $t_* = \min \left\{ \frac{K-r}{\sqrt{2M}}; \frac{1}{L}; T \right\}$ . Тогда для всех  $t \in [t_0, t_*]$  верно следующее включение:

$$X(t; t_0, X_0) \subset E(a^+(t), Q^+(t)). \quad (3.16)$$

Здесь  $M = K\sqrt{\lambda} + N + P$ ;  $P = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\tilde{\lambda}}$ ;  $L = \sqrt{\lambda} + 2K \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)^{1/2}$ ;  $\lambda$ ,  $\lambda_i$ ,  $\tilde{\lambda}$  — максимальные характеристические числа матриц  $AA'$ ,  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $Q$ , соответственно, а вектор-функция  $a^+(t)$  и матричная функция  $Q^+(t)$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{a}^+ &= Aa^+ + a^*, \quad a^+(t_0) = a_0; \\ \dot{Q}^+ &= AQ^+ + Q^+A^T + qQ^+ + q^{-1}Q^*; \\ q &= \{n^{-1} \text{Tr}((Q^+)^{-1}Q^*)\}^{1/2}; \\ Q^+(t_0) &= Q_0 = r^2I. \end{aligned}$$

**Доказательство.** По аналогии с доказательствами классических теорем существования и единственности решений для нелинейных дифференциальных систем [2, 4, 11] нам необходимо отыскать такое значение времени  $t_*$ , при котором на промежутке  $[t_0, t_*]$ , во-первых, траектории системы не выйдут из ограниченной области  $\|x\| \leq K$  ( $K > 0$ ) и, во-вторых, будет справедлива оценка (3.16). Величина  $t_*$  вычисляется по схеме доказательства теоремы Коши существования решения системы, но при этом соответствующие константы необходимо определить с учетом специфики задачи.

Возьмем произвольную допустимую функцию  $u(t) \in E(a, Q)$ . Обозначим  $F(x) = Ax + f(x) + u(t)$ . Тогда

$$\|F(x)\| \leq \|Ax\| + \|f(x)\| + \|u(t)\|.$$

При этом  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \sqrt{\lambda}K$ , где  $\lambda$  — максимальное характеристическое число матрицы  $AA'$  [10].

Далее,

$$\|u(t)\| \leq \max_{u \in E(a, Q)} \|u\| \leq \|a\| + \max_{u \in E(0, Q)} \|u\|.$$

С учетом того что

$$\max_{u \in E(0, Q)} \|u\|^2 = \max_{(Q^{-1}u, u) \leq 1} (u, u) = \max_{(v, v) \leq 1} (Qv, v) = \tilde{\lambda},$$

где  $v = Q^{-\frac{1}{2}}u$ , а  $\tilde{\lambda}$  — максимальное характеристическое число матрицы  $Q$ , имеем

$$\|u(t)\| \leq \|a\| + \sqrt{\tilde{\lambda}} = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\tilde{\lambda}} = P.$$

Таким образом, в силу полученных оценок и леммы 1 правая часть системы (3.2) ограничена:

$$\|F(x)\| \leq \sqrt{\lambda}K + N + P = M,$$

причем константа  $M$  не зависит от выбора  $u(t) \in E(a, Q)$ .

Определим константу Липшица  $L > 0$  для функции  $F(x)$ , т.е. найдем  $L > 0$ , при котором

$$\|F(x') - F(x'')\| \leq L\|x' - x''\| \quad \forall x', x'' \in \mathbb{R}^n, \|x'\| \leq K, \|x''\| \leq K.$$

Оценим

$$\begin{aligned} \|F(x') - F(x'')\| &= \|A(x' - x'') + f(x') - f(x'')\| \leq \|A(x' - x'')\| + \|f(x') - f(x'')\| \\ &\leq \|A\| \|x' - x''\| + \|f(x') - f(x'')\|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Согласно теореме о среднем значении для непрерывно дифференцируемой вектор-функции имеем

$$f(x') - f(x'') = \frac{\partial f}{\partial x}(c)(x' - x''), \quad (3.18)$$

где  $\|c\| \leq K$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \|f(x') - f(x'')\| &= \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(c)(x' - x'') \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_i}{\partial x}(c)(x' - x'') \right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(c) \right\|^2} \|x' - x''\| \leq \|x' - x''\| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(c) \right\|^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Заметим, что для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  и каждого  $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_i(x) = \frac{\partial}{\partial x} (x' B_i x) = 2B_i x,$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} f_i(x) \right\|^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} f_i(x), \frac{\partial}{\partial x} f_i(x) \right) = (2B_i x, 2B_i x) = 4x' B_i' B_i x \leq 4\lambda_i^2 x' x,$$

где  $\lambda_i$  — максимальное характеристическое число матрицы  $B_i$ . Полагая здесь  $x = c$ , где  $c$  определено в (3.18), получим

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(c) \right\|^2 \leq 4\lambda_i^2 c' c \leq 4\lambda_i^2 \|c\|^2 \leq 4K^2 \lambda_i^2.$$

Отсюда и в силу (3.19) имеем

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(c)(x' - x'') \right\| \leq 2K \|x' - x''\| \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}.$$

Учитывая (3.17), приходим к оценке:

$$\|F(x') - F(x'')\| \leq \|A\| \|x' - x''\| + 2K \|x' - x''\| \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)^{1/2} \leq \|x' - x''\| \left( \|A\| + 2K \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)^{1/2} \right).$$

Поэтому константа Липшица  $L$  имеет вид  $L = \sqrt{\lambda} + 2K \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)^{1/2}$ , где  $\lambda$  — максимальное характеристическое число матрицы  $AA'$ .

Итак, все константы найдены, и возможно применение схемы доказательства теоремы Коши существования решения при каждом допустимом управлении  $u(t) \in E(a, Q)$  [2, 4, 11], причем указанное решение на промежутке  $t \in [t_0, t_*]$  не покинет области  $\{x \mid \|x\| \leq K\}$ . Таким образом, на промежутке  $t \in [t_0, t_*]$  верно включение (3.16). Теорема доказана.

Принимая во внимание замечание 2, можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 1, для следующего включения:

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in Ax + \hat{f}(x) + E(a, Q), \quad 0 \leq t \leq T, \\ x_0 &= x(0) \in X_0, \end{aligned}$$

где  $\hat{f}_i(x) = \pm f_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

**Теорема 2** (см. [12,13]). Пусть  $X_0 = B(a_0, r)$ ,  $a_0 = 0$ ,  $r \leq K$  и  $t_* = \min \left\{ \frac{K-r}{\sqrt{2}M}; \frac{1}{L}; T \right\}$ . Тогда для всех  $t \in [t_0, t_*]$  верно следующее включение:

$$X(t; t_0, X_0) \subset E(a^+(t), Q^+(t)). \quad (3.20)$$

Здесь  $M = K\sqrt{\lambda} + N + P$ ;  $P = \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\tilde{\lambda}}$ ;  $L = \sqrt{\lambda} + 2K \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right)^{1/2}$ ;  $\lambda$ ,  $\lambda_i$ ,  $\tilde{\lambda}$  — максимальные характеристические числа матриц  $AA'$ ,  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $Q$ , соответственно, а вектор-функция  $a^+(t)$  и матричная функция  $Q^+(t)$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{a}^+ &= Aa^+ + a, \quad a^+(t_0) = a_0; \\ \dot{Q}^+ &= AQ^+ + Q^+A^T + qQ^+ + q^{-1}Q^*; \\ q &= \{n^{-1} \text{Tr}((Q^+)^{-1}Q^*)\}^{1/2}; \\ Q^+(t_0) &= Q_0 = r^2I. \end{aligned}$$

Здесь матрица  $Q^*$  вычисляется по формуле (3.15).

Проиллюстрируем применение теорем 1, 2 на примере.

**Пример 2.** Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 6x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + x_2^2 + u_2 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.21)$$

$$X_0 = B(0, 1), \quad P(t) \equiv U = B(0, 1).$$

Положим  $T = 0.15$  и  $K = 2.6$ .

Воспользовавшись результатом теоремы 1, найдем предельное значение времени, при котором гарантирована внешняя эллипсоидальная оценка (3.16):  $t_* = \frac{\sqrt{2}}{29.2}$ . Отметим, что в данном примере указанная оценка остается справедливой и при  $t$ , несколько больших  $t_*$ . На рис. 2 показаны множество достижимости  $X(t)$  и его внешняя оценка  $E(a^+(t), Q^+(t))$  в моменты времени  $t = \frac{\sqrt{2}}{29.2}$  (см. рис. 2(а)) и  $t = 0.15$  (см. рис. 2(б)).

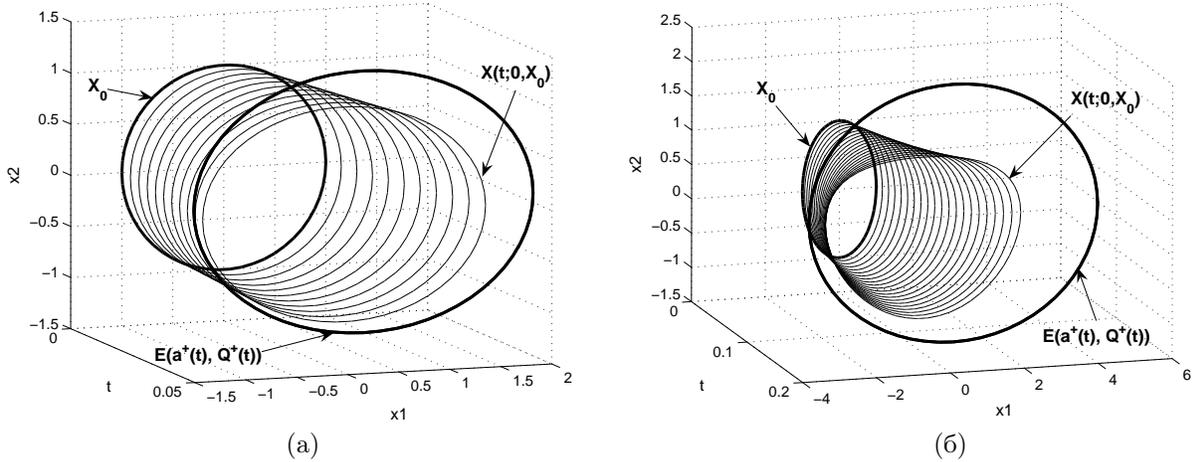


Рис. 2. Трубки траекторий системы (3.21) и эллипсоидальные оценки  $E(a^+(t), Q^+(t))$  множеств достижимости  $X(t)$ : (а) — для  $t_* = \frac{\sqrt{2}}{29.2}$ ; (б) — для  $t = 0.15$ .

Далее, найдем параметры оценивающего эллипсоида вторым способом, исходя из теоремы 2, и построим множество достижимости  $X(t)$  и его внешнюю эллипсоидальную оценку  $E(a^+(t), Q^+(t))$  в момент времени  $t = \frac{\sqrt{2}}{29.2}$  и  $t = 0.15$ . Нетрудно проверить, что в этом случае  $a^+(t) \equiv 0$  для всех  $t \in [0, T]$  (рис. 3).

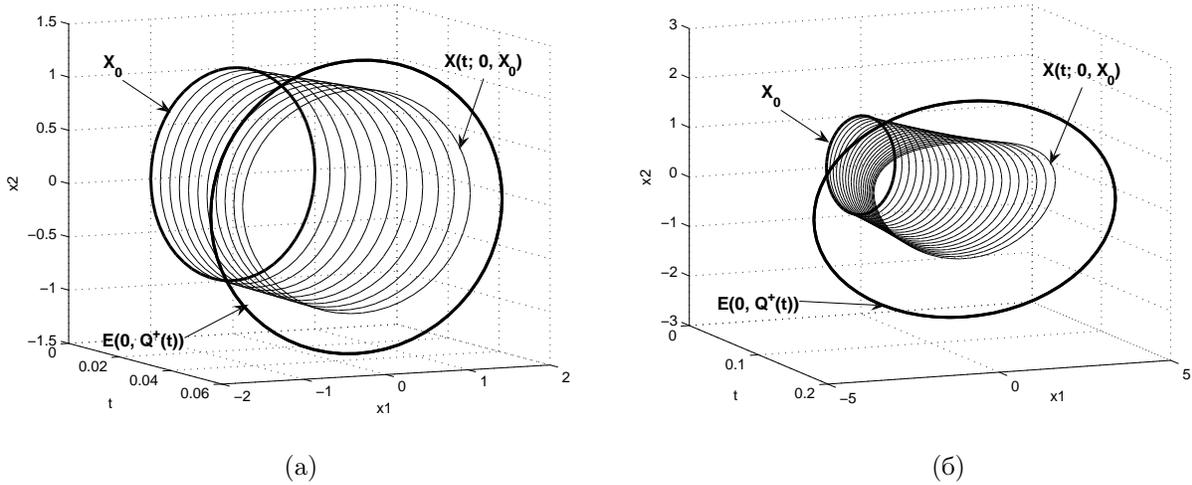


Рис. 3. Трубки траекторий системы (3.21) и эллипсоидальные оценки  $E(0, Q^+(t))$  множеств достижимости  $X(t)$ : (а) — для  $t_* = \frac{\sqrt{2}}{29.2}$ ; (б) — для  $t = 0.15$ .

Заметим, что для данной системы (3.21) оценка (3.16) является более эффективной, чем оценка (3.20) (рис. 4, 5).

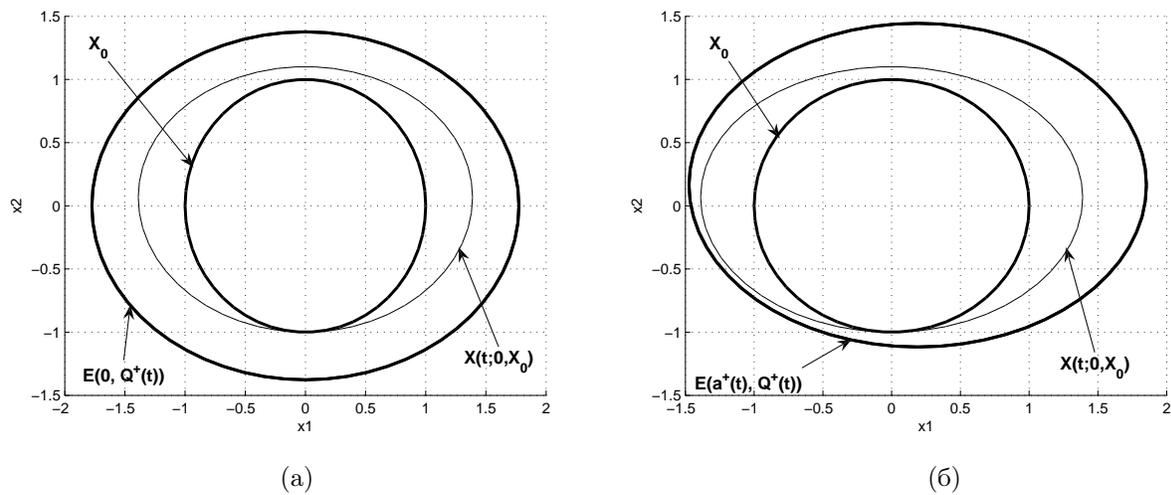


Рис. 4. Множества достижимости  $X(t)$  системы (3.21) и их эллипсоидальные оценки  $E(a^+(t), Q^+(t))$  в момент времени  $t_* = \frac{\sqrt{2}}{29.2}$ , полученные двумя способами: (а) — оценка (3.20), (б) — оценка (3.16).

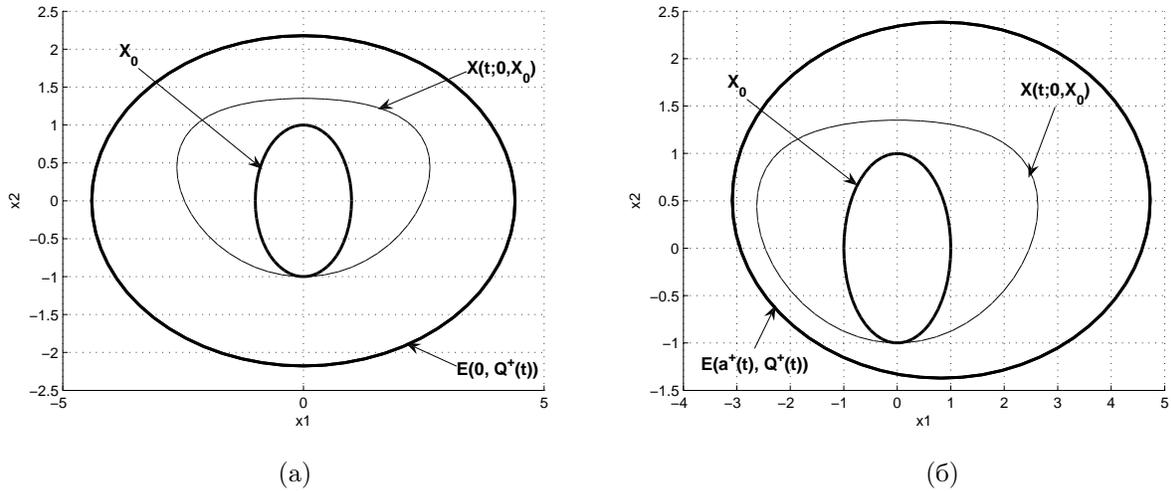


Рис. 5. Множества достижимости  $X(t)$  системы (3.21) и их эллипсоидальные оценки  $E(a^+(t), Q^+(t))$  в момент времени  $t_* = 0.15$ , полученные двумя способами: (а) — оценка (3.20), (б) — оценка (3.16).

#### 4. Внешние оценки множеств достижимости на основе уравнения интегральной воронки

Наряду с эллипсоидальными оценками одним из эффективных методов описания динамики множеств достижимости дифференциальных включений является метод, основанный на теории уравнений интегральной воронки [2, 14, 15].

Рассмотрим управляемую систему, описанную дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \\ u &\in Q(t, x), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где функция  $f : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  измерима по  $t$  и непрерывна по остальным переменным, а  $Q(t, x)$  является многозначным отображением ( $Q : T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp } \mathbb{R}^m$ ), которое измеримо по  $t$  и непрерывно по  $x$ . Здесь используются понятия непрерывности и измеримости многозначного отображения в смысле [16].

Рассмотрим многозначную функцию

$$\mathcal{F}(t, x) = \bigcup \{ f(t, x, u) \mid u \in Q(t, x) \}$$

или дифференциальное включение [4, 17]

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(t, x). \quad (4.2)$$

Будем предполагать, что начальное условие системы (4.1) (или дифференциального включения (4.2)) точно не известно, но принадлежит компактному множеству  $X_0$ :

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 \in \text{comp } \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$  ( $t \in [t_0, T]$ ) решение (4.2), исходящее из точки  $x_0$ . Предположим, что все решения  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$  ( $x_0 \in X_0$ ) существуют и продолжимы до момента  $T$ , что возможно при дополнительных условиях [17]. Пусть  $X(t) = \bigcup \{ x(t) = x(t, t_0, x_0) \mid x_0 \in X_0 \}$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Уравнение вида

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} h(X(t+\sigma), \bigcup_{x \in X(t)} (x + \sigma \mathcal{F}(t, x))) &= 0, \\ X(t_0) &= X_0, \quad t \in [t_0, T] \end{aligned} \quad (4.3)$$

называется уравнением интегральной воронки.

**Теорема 3** (см. [14, 15]). *Многозначная функция  $X(t) = X(t, t_0, X_0)$  является единственным решением эволюционного уравнения (4.3).*

Вычислительные схемы, использующие понятие интегральной воронки и являющиеся многозначными аналогами приближенных методов Эйлера и Рунге — Кутты построения решения дифференциальных систем, рассмотрены в [18–20].

В этом разделе мы представим подход, использующий указанное эволюционное уравнение, описывающее динамику  $X(t) = X(t; t_0, X_0)$  нелинейной системы специального вида:

$$\dot{x} = Ax + \tilde{f}(x)d, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (4.4)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $\|x\| \leq K$  ( $K > 0$ );  $d \in \mathbb{R}^n$ ;  $\tilde{f}(x) = x'Bx$ , причем  $B = \text{diag}(b_1^2, \dots, b_n^2)$  — матрица диагонального вида;  $X_0 = E(a, k^2 B^{-1})$  ( $k \neq 0$ ).

Справедлива следующая оценка множества достижимости  $X(t_0 + \sigma)$ .

**Теорема 4.** *Пусть  $X_0 = E(a, k^2 B^{-1})$  ( $k \neq 0$ ). Тогда для всех  $\sigma > 0$  имеем*

$$X(t_0 + \sigma; t_0, X_0) \subseteq E(a(\sigma), Q(\sigma)) + o(\sigma)B(0, 1), \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1}o(\sigma) = 0, \quad (4.5)$$

где параметры эллипсоида  $E(a(\sigma), Q(\sigma))$  определяются равенствами

$$a(\sigma) = a + \sigma(Aa + a'Ba \cdot d + k^2 d), \quad (4.6)$$

$$Q(\sigma) = k^2(I + \sigma R)B^{-1}(I + \sigma R)', \quad R = A + 2da'B. \quad (4.7)$$

**Доказательство.** Запишем уравнение интегральной воронки для системы (4.4):

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1}h(X(t + \sigma), \bigcup_{x \in X(t)} \{x + \sigma(Ax + \tilde{f}(x)d)\}) = 0, \quad t \in [t_0, T], \quad X(t_0) = X_0. \quad (4.8)$$

Если  $x_0 \in \partial X_0$  (здесь символ  $\partial X_0$  обозначает границу множества  $X_0$ ), то

$$\tilde{f}(x_0) = k^2 + 2a'Bx - a'Ba.$$

Тогда

$$\bigcup_{x_0 \in \partial X_0} \{(I + \sigma A)x_0 + \sigma \tilde{f}(x_0)d\} = \bigcup_{x_0 \in \partial X_0} \{(I + \sigma R)x_0 + \sigma(k^2 - a'Ba)d\}. \quad (4.9)$$

Правая часть равенства (4.9) соответствует аффинному преобразованию границы эллипсоида  $X_0$  с матрицей преобразования  $I + \sigma R$  и вектором сдвига координат  $\sigma(k^2 - a'Ba)d$ . Множество эллипсоидов инвариантно относительно аффинных преобразований [5]. При указанном выше преобразовании граничные точки эллипсоида  $E(a, k^2 B^{-1})$  ( $k \neq 0$ ) переходят в граничные, а внутренние — во внутренние точки некоторого эллипсоида  $E(a(\sigma), Q(\sigma))$ , параметры  $a(\sigma)$  и  $Q(\sigma)$  которого определяются по известным формулам [5]. Следовательно, применяя теорему 3 и принимая во внимание равенства (4.8) и (4.9), мы приходим к оценке (4.5). Теорема доказана.

Базируясь на результате теоремы 3, сформулируем алгоритм, который позволяет строить внешние оценки множеств достижимости систем вида (4.4). Но прежде рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

**Задача 4.** Даны два эллипсоида  $E(a, Q)$ ,  $E(a, \tilde{Q}) \subset \mathbb{R}^n$ . Найти минимальное значение числа  $k = k_0$ , такое что верно включение

$$E(a, Q) \subseteq E(a, k^2 \tilde{Q}). \quad (4.10)$$

Следующая лемма дает решение задачи 4.

**Лемма 5.** Пусть  $k_0 = \sqrt{\lambda}$ , где  $\lambda$  — максимальное характеристическое число матрицы  $\tilde{Q}^{-1/2}Q\tilde{Q}^{-1/2}$ . Тогда  $k_0$  есть решение задачи 4.

**Доказательство.** Включение (4.10) эквивалентно совокупности неравенств:

$$\rho(l, E(a, Q)) \leq \rho(l, E(a, k^2\tilde{Q})); \quad \forall l \in \mathbb{R}^n, \|l\| \leq 1, l \neq 0,$$

или

$$l'Ql \leq k^2l'\tilde{Q}l; \quad \forall l \in \mathbb{R}^n, \|l\| \leq 1, l \neq 0.$$

Следовательно,

$$k^2 \geq \max_{\|l\| \leq 1, l \neq 0} \frac{l'Ql}{l'\tilde{Q}l}. \quad (4.11)$$

Найдем максимум в равенстве (4.11). Для этого обозначим  $v = \tilde{Q}^{1/2}l$ . Тогда

$$\begin{aligned} v' &= l'\tilde{Q}^{1/2}; \\ l &= \tilde{Q}^{-1/2}v; \quad l' = v'\tilde{Q}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Подставим (4.12) в равенство (4.11), получим

$$k^2 \geq \max_{\|v\| \leq 1} \frac{v'\tilde{Q}^{-1/2}Q\tilde{Q}^{-1/2}v}{v'v} = \lambda = k_0^2.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим следующую схему нахождения внешней оценки для  $X(t)$ .

**А л г о р и т м.** Разобьем временной интервал  $[t_0, T]$  на подынтервалы  $[t_i, t_{i+1}]$ , где  $t_i = t_0 + ih$  ( $i = 0, \dots, m-1$ );  $h = \frac{T-t_0}{m}$ ;  $t_m = T$ .

**Шаг 1.** Пользуясь формулами (4.6)–(4.7) теоремы 3, для заданного начального множества  $X_0 = E(a_0, k_0^2 B^{-1})$  ( $k_0 \neq 0$ ) определим множество  $X_1 = E(a_1, Q_1)$ . Здесь  $a_1 = a(\sigma)$ ;  $Q_1 = Q(\sigma)$ ;  $\sigma = h$ .

**Шаг 2.** Найдем наименьшую постоянную  $k_1$ , такую что

$$E(a_1, Q_1) \subset \tilde{X}_1 = E(a_1, k_1^2 B^{-1}).$$

В лемме 5 было доказано, что  $k_1^2$  является максимальным характеристическим числом матрицы  $B^{1/2}Q_1B^{1/2}$ .

**Шаг 3.** Рассмотрим систему на следующем временном интервале  $[t_1, t_2]$ . Теперь эллипсоид  $E(a_1, k_1^2 B^{-1})$  считаем начальным множеством в момент времени  $t_1$ .

На следующих итерациях повторяем шаги 1–3. В конце этого процесса мы получим внешнюю оценку  $E(a(t), Q(t))$  множества достижимости  $X(t)$  с погрешностью, стремящейся к нулю при уменьшении шага ( $m \rightarrow \infty$ ).

Рассмотрим следующий пример.

**Пример 3.** Дана нелинейная дифференциальная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_2 + 3\left(\frac{x_1^2}{4} + x_2^2\right), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 0.12, \quad (4.13)$$

с начальным условием

$$X_0 = E(0, Q_0), \quad Q_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условия теоремы 4 здесь выполнены:  $k = k_0^2 = 1$ ,  $a = a_0 = (0, 0)'$ ,  $B^{-1} = Q_0$ . Применяя изложенный алгоритм, находим рекуррентные соотношения для определения параметров эллипсоида  $E(a_i, Q_i)$ , оценивающего множество достижимости на каждом шаге итерации:

$$a_i = \begin{pmatrix} 0 \\ a_i(\sigma) \end{pmatrix};$$

$$a_i(\sigma) = a_{i-1}(\sigma) + \sigma \left( \frac{1}{2} a_{i-1}(\sigma) + 3(k_{i-1}^2 + a_{i-1}^2(\sigma)) \right);$$

$$k_i^2 = k_{i-1}^2 \left( 1 + \sigma \left( \frac{1}{2} + 6a_{i-1}(\sigma) \right) \right)^2;$$

$$Q_i = Q_i(\sigma) = k_i^2 B^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

На рис. 6, 7 изображена трубка траекторий системы (4.13) и ее внешняя эллипсоидальная оценка с соответствующей погрешностью при  $m = 10$ .

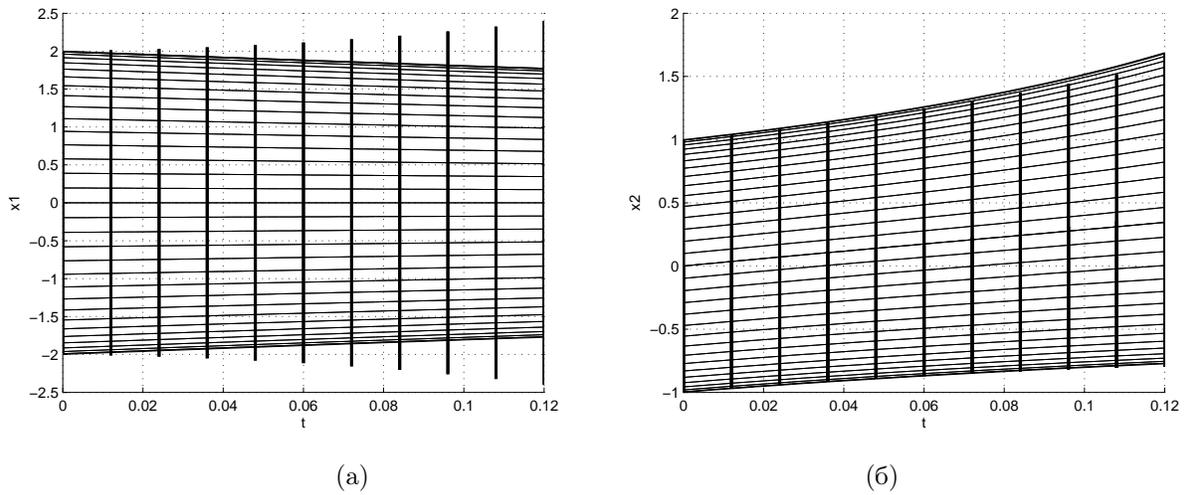


Рис. 6. Трубка траекторий  $\mathcal{X}(\cdot; t_0, X_0)$  системы из начального состояния  $\{0, E(0, B^{-1})\}$  в момент времени  $t = 0.012$  в проекции: (а) — на плоскость  $(t, x_1)$ ; (б) — на плоскость  $(t, x_2)$ .

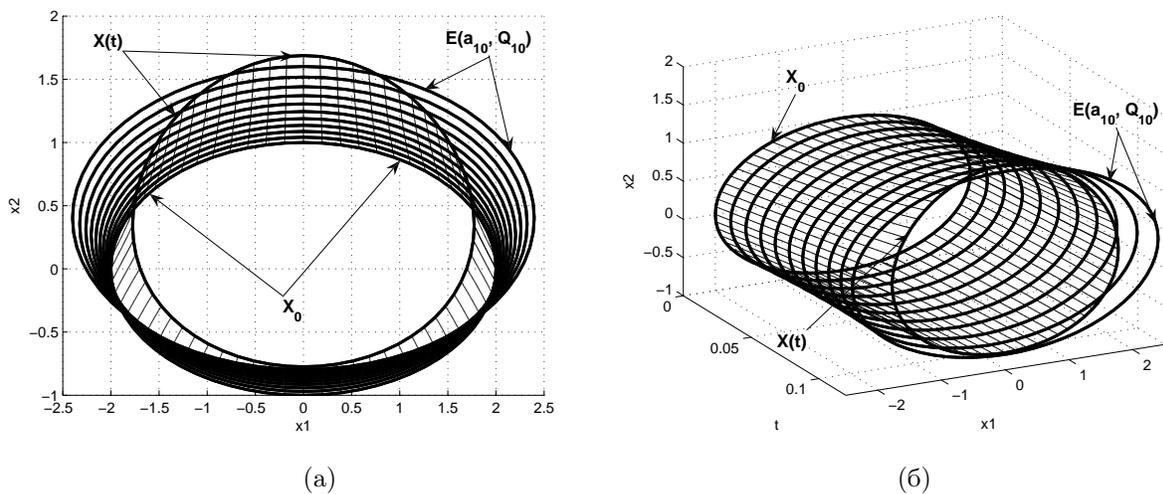


Рис. 7. Трубка траекторий  $\mathcal{X}(\cdot; t_0, X_0)$  системы из начального состояния  $\{0, E(0, B^{-1})\}$  в момент времени  $t = 0.012$ : (а) — на фазовой плоскости  $(x_1, x_2)$ ; (б) — в пространстве  $(t, x_1, x_2)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. Kurzhanski A. V., Filippova T. F. On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control, in *Advances in Nonlinear Dynamics and Control // Progress in Systems and Control Theory*. Birkhauser. 1993. Vol. 17. P. 122–188.
3. Kurzhanski A. V., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Birkhauser. Boston, 1997.
4. Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.
5. Черноушко Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
6. Красовский Н. Н. Теория управление движением. М.: Наука, 1968.
7. Пономарев В. Д. Связность множества решений обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка // *Латв. мат. ежегодник*. 1984. Т. 28. С. 101–103.
8. Lojasiewicz S. Some properties of accessible sets in non-linear control systems // *Annales Polonici Mathematici*. 1979. Vol. 36. P. 123–137.
9. Plis A. Uniqueness of optimal trajectories for non-linear control systems // *Ann. Polon. Math.* 1974. Vol. 29. P. 397–401.
10. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
11. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Иностр. лит., 1958.
12. Filippova T. F., Berezina E. V. On State Estimation Approaches for Uncertain Dynamical Systems with Quadratic Nonlinearity: Theory and Computer Simulations. // *Proc. 6th Int. Conf. Large-Scale Scientific Computations LSSC'07*. Sozopol, Bulgaria, 2007. Abstr. P. 20–21.
13. Березина Е. В. Задачи моделирования динамики дифференциальных систем с неопределенностью по начальным данным // *Тр. 38-й регион. мол. конф. Екатеринбург: изд-во УрО РАН*, 2007. С. 276–280.
14. Panasyuk A. I. Equations of attainable set dynamics. Part 1: Integral funnel equations // *J. Optimiz. Theory Appl.* 1990. Vol. 64, no. 2. P. 349–366.
15. Wolenski P. R. The exponential formula for the reachable set of a Lipschitz differential inclusion // *SIAM J. Control Optimization*, 1990. Vol. 28, no. 5. P. 1148–1161.
16. Aubin J. P., Frankowska H. *Set-Valued Analysis*. Birkhauser, Boston. 1990.
17. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985.
18. Baier R., Chahma I. A., Gerdtts M. Approximation of reachable sets by direct solution methods for optimal control problems // *Optimization Methods and Software*. 2007. Vol. 22, no. 3. P. 433–452.
19. Dyn N., Farkhi E. M., Mokhov A. Approximations of set-valued functions by metric linear operators // *Constr. Approx.* 2007. Vol 25. P. 193–209.
20. Пацко В. С., Пятко С. Г., Кумков С. И., Федотов А. А. Оценивание траекторного движения воздушного судна на основе информационных множеств // *Науч. докл. Акад. граждан. авиации / ИММ УрО РАН*. СПб.; Екатеринбург, 1999.

Поступила 13.04.2007

УДК 519.17

## ОБ ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ПОДГРАФАХ БИРЕГУЛЯРНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ГРАФОВ ДИАМЕТРА 2<sup>1</sup>

А. Л. Гаврилюк

Геодезическим графом называется неполный граф, в котором любые две вершины соединены единственным кратчайшим (геодезическим) путем. В работе показано, что в бирегулярном геодезическом графе диаметра 2 любые два равномоощных подграфа, содержащие все вершины большей степени и еще несколько вершин меньшей степени, имеют равные спектры.

## Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины  $a$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(a)$  обозначим подграф, индуцированный  $\Gamma$  на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $a$ . Подграф  $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$  называется *окрестностью вершины  $a$*  в графе  $\Gamma$ . Если граф  $\Gamma$  зафиксирован, то вместо  $\Gamma(a)$  будем писать  $[a]$ . Пусть  $a^\perp$  — шар радиуса 1 с центром  $a$ . Для подграфа  $\Sigma$  графа  $\Gamma$  через  $\Sigma^\perp$  обозначим  $\cap_{a \in \Sigma} a^\perp$ . Далее, подграф из  $\Gamma$  будет означать индуцированный подграф.

Через  $k_a$  обозначим *степень вершины  $a$* , т.е. число вершин в  $[a]$ . Граф  $\Gamma$  называется *регулярным степени  $k$* , если  $k_a = k$  для любой вершины  $a$  из  $\Gamma$ . Граф  $\Gamma$  называется *бирегулярным*, если степени его вершин принимают точно два значения. Для ребра  $\{a, c\}$  графа  $\Gamma$  положим  $\lambda_{ac} = |[a] \cap [c]|$ . Подграф, индуцированный на  $[a] \cap [b]$ , назовем  *$\mu$ -подграфом*, если  $d(a, b) = 2$ , а через  $\mu_{ab}$  обозначим число вершин в этом подграфе. Скажем, что  $\mu(\Gamma) = \mu$ , если для любых вершин  $a, b$  на расстоянии 2 верно равенство  $\mu_{ab} = \mu$ . Регулярный степени  $k$  граф  $\Gamma$  диаметра 2 называется *сильно регулярным* графом с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$ , если  $\Gamma$  содержит  $v$  вершин,  $\mu(\Gamma) = \mu$  и  $\lambda_{ab} = \lambda$  для любых смежных вершин  $a, b$ . Граф называется *геодезическим*, если для любых двух вершин в графе существует единственный геодезический путь, связывающий эти вершины.

Положим, что  $Sp(\mathbf{A}) = \{\theta_1^{f_1}, \dots, \theta_n^{f_n}\}$  — спектр матрицы  $\mathbf{A}$ , запись  $\theta_i^{f_i}$  означает, что собственное значение  $\theta_i$  имеет кратность  $f_i$ . Множество всех попарно различных собственных значений матрицы назовем *простым спектром*, обозначим его через  $S(\mathbf{A})$ . Через  $E_{\mathbf{A}}(\theta)$  обозначим инвариантное подпространство матрицы  $\mathbf{A}$ , отвечающее собственному значению  $\theta$ . Для вектор-столбцов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$  положим  $\mathbf{x}'$  — вектор, транспонированный к вектору  $\mathbf{x}$ , и  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ . Для подпространства  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  через  $\dim(\mathcal{V})$  обозначим размерность  $\mathcal{V}$ , т.е. максимальное число линейно независимых векторов в  $\mathcal{V}$ . Для множества векторов  $V$  запись  $\langle V \rangle$  означает линейную оболочку векторов  $V$ .

*Спектром* графа называется спектр матрицы смежности графа. Если графы  $\Sigma$  и  $\Delta$  имеют одинаковый спектр, то такие графы будем называть *изоспектральными*. Из существования изоморфизма между парой графов следует их изоспектральность. Обратное в общем случае неверно. Пусть графы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , определенные на  $v$  вершинах, имеют матрицы смежности  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  соответственно,  $\mathbf{J}_v$  — матрица порядка  $v$ , состоящая целиком из единиц. Если матрицы  $y\mathbf{J}_n - \mathbf{A}_1$  и  $y\mathbf{J}_n - \mathbf{A}_2$  (обобщенные матрицы смежности графов, см. [1]) имеют равные спектры для любого  $y \in \mathbb{R}$ , то графы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  будем называть  $\mathbb{R}$ -изоспектральными. Если матрицы

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00046).

$y\mathbf{J}_n - \mathbf{A}_1$  и  $y\mathbf{J}_n - \mathbf{A}_2$  имеют равные спектры только для некоторого  $y \in \mathbb{R}$ , то графы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  будем называть  $y$ -изоспектральными (в частности, точно изоспектральные графы являются 0-изоспектральными).

*Кликовым* расширением графа  $\Gamma$  называется граф, полученный заменой каждой вершины  $x$  на клику  $(x)$ , причем различные клики попарно не пересекаются, и вершина из  $(a)$  смежна точно со всеми вершинами из  $(b)$  тогда и только тогда, когда  $a$  и  $b$  смежны в  $\Gamma$ . Если число вершин в каждой клике равно  $\alpha$ , то расширение называется  $\alpha$ -кликовым.

Граф Тервиллигера — это неполный граф, в котором пересечение окрестностей любых двух вершин, находящихся на расстоянии 2, является  $\mu$ -кликой для некоторой целой константы  $\mu > 0$ . В случае, когда  $\mu = 1$  и диаметр графа равен 2, граф Тервиллигера является геодезическим графом. Геодезические графы диаметра 2 имеют тесную связь с графами Тервиллигера с  $\mu > 1$  с учетом со следующей проблемой, сформулированной в первой главе монографии [2].

**Проблема 1.** Пусть  $\Gamma$  — связный регулярный граф Тервиллигера, содержащий вершину  $b$  с  $|[b]^\perp| < \mu$ . Верно ли, что для любой вершины  $x$  подграф  $[x] - [x]^\perp$  является регулярным?

В [3] эта проблема решена в случае  $\mu = 2$ . В совместной работе А.А. Махнева и автора указанная проблема решена положительно для любого натурального  $\mu > 1$  [4].

В работе А.А. Махнева и автора [5] проблема 1 была решена положительно без предположения регулярности графа  $\Gamma$  при  $\mu \in \{3, 4\}$  (случай  $\mu = 4$  рассмотрен автором и не опубликован). В связи с этим можно сформулировать усиленный вариант проблемы 1.

**Проблема 2.** Пусть  $\Gamma$  — связный граф Тервиллигера с  $\mu \geq 3$ , содержащий вершину  $b$  с  $|[b]^\perp| < \mu$  и не являющийся  $\mu/2$ -кликовым расширением некоторого графа с  $\bar{\mu} = 2$ . Верно ли, что для любой вершины  $x$  подграф  $[x] - [x]^\perp$  является регулярным?

Подграф  $[x] - [x]^\perp$  для вершины  $x$  в графе Тервиллигера является графом Тервиллигера с меньшим значением  $\mu$ , но уже имеющим диаметр 2. В работе [5] (лемма 5) показано, что граф Тервиллигера диаметра 2 является либо кликовым расширением геодезического бирегулярного графа с  $\mu = 1$ , либо регулярным графом.

Между тем в [2] (теорема 1.17.1) доказано следующее

**Предложение 1.** Пусть  $\Gamma$  — граф диаметра 2 с  $\mu = 1$ . Тогда либо  $\Gamma$  является сильно регулярным графом, либо  $\Gamma = a^\perp$  для подходящей вершины  $a$ , либо выполняются следующие утверждения:

- (1)  $\Gamma$  является бирегулярным графом; если  $A$  (если  $B$ ) — множество всех вершин степени  $\alpha$  (степени  $\beta$ ),  $1 < \alpha < \beta$ , то  $A$  является кокликой;
- (2) для  $a \in A$  подграф  $[a]$  является кокликой; если  $b, c$  — смежные вершины из  $B$ , то  $\lambda_{bc} = \beta - \alpha$ ;
- (3)  $|\Gamma| = \alpha\beta + 1$ .

Окрестность каждой вершины в сильно регулярном геодезическом графе является объединением  $r$  изолированных  $s$ -клик. Известны существование и единственность графов только в случае  $s = 1$  и  $r \in \{2, 3, 7\}$ . Если  $s = 1$ , то имеется еще одна гипотетическая возможность  $r = 57$ . При  $s = 2$  такие графы не существуют (см., напр.: [4]), а при  $s = 3$  параметр  $r$  равен 7, и это неизвестный пример с наименьшим числом вершин  $v = 400$ .

В гл. 1 работы [2] перечислены все известные типы бирегулярных геодезических графов диаметра 2, не лежащие в  $a^\perp$  ни для какой своей вершины  $a$ :

$(A_l)$  граф на  $2l + 1$  вершинах, в котором подграф вершин меньшей степени  $A$  — это  $l$ -клик, подграф вершин большей степени  $B$  является объединением изолированной вершины (смежной со всеми вершинами из  $A$ ) и  $l$ -клики;

$(\mathcal{B}_l)$  для натурального  $l$  такого, что существует аффинная плоскость  $(X, \mathcal{L})$  порядка  $l$ , вершины подграфа  $A$  — точки плоскости, а подграф  $B$  — это граф, дополнительный к графу коллинеарности прямых плоскости, и точка смежна с прямой, если точка лежит на этой прямой;

$(\mathcal{C}_l)$  для графа  $\Gamma'$  типа  $(\mathcal{B}_l)$  построим граф  $\Gamma$  добавлением к графу  $\Gamma'$  клики порядка  $l$ , каждая вершина которой смежна только с каждой прямой класса параллельных прямых аффинной плоскости;

$(\mathcal{D}_l)$  для натурального  $l$  такого, что существует проективная плоскость  $(X, \mathcal{L})$  порядка  $l$ , и полярности этой плоскости  $\pi$  определим граф  $\Gamma$  на множестве точек  $X$ , в котором две вершины  $x, y$  смежны тогда и только тогда, когда  $x \in y^\pi$ .

В связи с этим в гл. 1 работы [2] сформулирована

**Проблема 3.** Пусть  $\Gamma$  — бирегулярный геодезический граф диаметра 2, не лежащий в  $a^\perp$  ни для какой вершины  $a$ . Верно ли, что  $\Gamma$  принадлежит, по крайней мере, одному из типов  $(\mathcal{A}_l)$ ,  $(\mathcal{B}_l)$ ,  $(\mathcal{C}_l)$  или  $(\mathcal{D}_l)$ ?

Пусть  $\Gamma$  — бирегулярный геодезический граф диаметра 2, не лежащий в  $a^\perp$  ни для какой своей вершины  $a$ ; обозначим через  $A$  (через  $B$ ) множество всех вершин (подграф) степени  $\alpha$  (степени  $\beta$ ),  $\alpha < \beta$ . Такой граф назовем *BRG-графом*. Положим  $m = |A|$ ,  $n = |B|$ . Для вершины  $u \in \Gamma$  и подграфа  $X \subset \Gamma$  обозначим через  $X(u)$  подграф  $X \cap [u]$ , а число вершин в подграфе  $X \cap [u]$  будем называть степенью вершины  $u$  в графе  $X$ .

В работе доказана следующая

**Теорема 1.** Если  $\Gamma$  является *BRG-графом*, то для любого натурального  $r \in \{1, \dots, m-1\}$  и любой пары  $A_1, A_2$  подмножеств из  $A$  таких, что  $|A_1| = |A_2| = r$ , подграфы  $A_1 \cup B$  и  $A_2 \cup B$  являются  $\mathbb{R}$ -изоспектральными.

В связи с полученными результатами представляет интерес

**Проблема 4.** Описать бирегулярные геодезические графы диаметра 2 с таким условием однородности, что для некоторого натурального  $r \in \{1, \dots, m-1\}$  и любой пары  $A_1, A_2$  подмножеств из  $A$  таких, что  $|A_1| = |A_2| = r$ , подграфы  $A_1 \cup B$  и  $A_2 \cup B$  изоморфны или группа  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  содержит автоморфизм  $g$  такой, что  $(A_1 \cup B)^g = A_2 \cup B$ .

С помощью следующего предложения, доказанного в этой работе, нам удалось показать несуществование некоторых гипотетических *BRG-графов*, связанных, в частности, с графами Тервиллигера с  $\mu = 2$  (см. [5]).

**Предложение 2.** Пусть  $\Gamma$  — *BRG-граф* со степенями вершин  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $s = \beta - \alpha + 1$ . Положим  $q \equiv \beta \pmod{s}$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1)  $m \equiv \alpha - 1 \equiv q \pmod{s}$ ;
- (2) число  $s$  делит  $q^2(q-1)$  и  $q^3(1+2b) + q^2(1-b-3a) + q(a+b) + c(q-1)$ , где  $a = (m-q)/s$ ,  $b = (\alpha - q - 1)/s$ ,  $c = q^2(q-1)/s$ .

**Следствие 1.** Бирегулярные геодезические графы диаметра 2 со степенями вершин  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ , не существуют при  $(\alpha, \beta) \in \{(11, 13), (57, 66), (57, 82)\}$ .

Последние два случая из следствия редуцируют описание графов Тервиллигера с  $\mu = 2$  (см. § 4 настоящей работы и работу [5]).

## 1. Предварительные результаты

До конца работы зафиксируем *BRG* — граф  $\Gamma$ . Обозначим через  $\mathbf{M}$  матрицу размера  $m \times n$ , где  $m = |A|$ ,  $n = |B|$  и  $m_{ij} = 1$ , если при фиксированной нумерации вершин  $a_i \in A$  и

$b_j \in B$  вершины  $a_i$  и  $b_j$  смежны, и  $m_{ij} = 0$  в противном случае; через  $\mathbf{m}_i$  обозначим  $i$ -ю строку матрицы  $\mathbf{M}$ . Определим матрицу  $\mathbf{N}$  порядка  $n$  как матрицу смежности подграфа  $B$ . Пусть  $\mathbf{k}$  — вектор,  $i$ -я координата которого равна степени вершины  $b_i \in B$  в подграфе  $A$ :  $(\mathbf{k})_i = |A(b_i)|$ . Как обычно, обозначим через  $\mathbf{j}_n$  вектор-столбец из 1 длины  $n$ , а через  $\mathbf{J}_{m \times n}$  (через  $\mathbf{J}_n$ ) матрицу размера  $m \times n$  (если  $m = n$ ), каждый элемент которой равен 1. Положим, что  $\mathbf{I}_n$  — единичная матрица порядка  $n$ . Наконец, через  $\mathbf{A}$  обозначим матрицу смежности графа  $\Gamma$ .

**Лемма 1.1.** *Справедливы следующие соотношения:*

- (1)  $\mathbf{M} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{j}_n) = (m - 1)\mathbf{j}_m$ ;
- (2)  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{j}_n = \alpha\mathbf{j}_m$ ;
- (3)  $\mathbf{M}' \cdot \mathbf{j}_m = \mathbf{k}$ ;
- (4)  $(\mathbf{N} + \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{k} = m\mathbf{j}_n$ ;
- (5)  $(\mathbf{N} + \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{j}_n = (\beta + 1)\mathbf{j}_n - \mathbf{k}$ ;
- (6)  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{J}_{m,n} - \mathbf{M}$ .

**Доказательство.** Проверим каждое утверждение непосредственными вычислениями. Любая пара вершин из  $A$  смежна точно с одной общей вершиной в  $B$ , поэтому для каждой вершины  $a \in A$  имеем  $\sum_{x \in B(a)} (|A(x)| - 1) = m - 1$ . Отсюда следует утверждение (1).

Далее, каждая строка матрицы  $\mathbf{M}$  содержит точно  $\alpha$  единиц, а  $i$ -й столбец матрицы  $\mathbf{M}$  содержит точно  $k_i$  единиц. Это доказывает утверждения (2) и (3).

Вершина  $b \in B$  смежна точно с  $|A(b)|$  вершинами из  $A$ , поэтому все остальные вершины из подграфа  $A - [b]$  смежны с единственной вершиной из подграфа  $B(b)$  и верно равенство  $|A(b)| + \sum_{c \in B(b)} |A(c)| = m$ . Отсюда следует утверждение (4).

Утверждение (5) следует из того, что  $i$ -я строка матрицы  $\mathbf{B}$  содержит  $\beta - k_i$  единиц. Наконец, утверждение (6) легко проверяется непосредственно.

Обозначим через  $\mathcal{L}$  линейное подпространство из  $\mathbb{R}^n$ , порожденное векторами  $\mathbf{j}_n$  и  $\mathbf{k}$ .

**Лемма 1.2.** *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) ранг матрицы  $\mathbf{M}$  равен  $m$ ;
- (2) для любого набора индексов  $\nu \subset \{1, \dots, m\}$  подпространство  $\langle \mathbf{m}'_i \mid i \in \nu \rangle \oplus \mathcal{L}$  имеет размерность  $|\nu| + \dim(\mathcal{L})$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $\text{rank}(\mathbf{M}) \leq \min\{m, n\} = m$ . Заметим, что любая пара строк матрицы  $\mathbf{M}$  имеет точно одну общую координату, в которой записана 1, поэтому  $\mathbf{M}$  удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' = \mathbf{J}_m + (\alpha - 1) \cdot \mathbf{I}_m.$$

В правой части этого равенства стоит невырожденная матрица, которая является матрицей Грамма векторов  $\mathbf{m}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Поэтому  $\text{rank}(\mathbf{M}) = m$ . Утверждение (1) доказано.

Зафиксируем множество индексов  $\nu \subset \{1, \dots, m\}$ ,  $r = |\nu| < m$ . По утверждению (1) этой леммы ранг матрицы  $\mathbf{M}$  равен  $m$ , и при  $r < m$  множество векторов  $\{\mathbf{m}'_j \mid j \in \nu\}$  является линейно независимым. Предположим теперь, что вектор  $\mathbf{k}$  или  $\mathbf{j}_n$  связан некоторым линейным соотношением с множеством векторов  $\{\mathbf{m}'_j \mid j \in \nu\}$ .

Заметим, что согласно утверждению (3) леммы 1.1 сумма всех строк матрицы  $\mathbf{M}$  равна транспонированному вектору  $\mathbf{k}$ . Следовательно, если вектор  $\mathbf{k}$  связан линейным соотношением с множеством векторов  $\{\mathbf{m}'_j\}_{j \in \nu}$  при  $r < m$ , мы получаем противоречие с утверждением (1) доказываемой леммы.

Допустим, что существует вектор-строка  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$  такая, что

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{j}'_n$$

и  $c_t = 0$  для  $t \notin \nu$ .

Тогда

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{J}_{n \times n} + (\alpha - 1) \cdot \mathbf{I}_n) = \mathbf{j}'_n \cdot \mathbf{M}'.$$

Из утверждений (1) и (2) леммы 1.1 следует, что  $\mathbf{j}'_n \cdot \mathbf{M}' = \alpha \mathbf{j}'_n$ , поэтому

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{j}'_n (\mathbf{J}_{n \times n} + (\alpha - 1) \cdot \mathbf{I}_n)^{-1}$$

и  $c_t = \alpha / (n + \alpha - 1)$  для любого  $t \in \{1, \dots, n\}$ ; противоречие.

Допустим, что векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{j}_n$  не пропорциональны, и предположим, что вектор  $\mathbf{j}_n$  выражается линейной комбинацией векторов  $\mathbf{k}$  и  $\{\mathbf{m}'_i \mid i \in \nu\}$ . По утверждению (3) леммы 1.1 вектор  $\mathbf{k}$  можно представить в виде  $\mathbf{k} = \sum_{i=1}^m \mathbf{m}'_i$ , поэтому можно считать, что вектор  $\mathbf{j}_n$  выражается линейной комбинацией векторов множества  $\{\mathbf{m}'_i \mid i = 1, \dots, m\}$ . В этом случае мы получим противоречие, как и в предыдущем абзаце. Лемма доказана.

**Лемма 1.3.** Матрица  $\mathbf{N}$  удовлетворяет квадратному уравнению:

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{J}_{n,n} + (\beta - 1) \cdot \mathbf{I}_n - \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M} + (\beta - \alpha - 1) \cdot \mathbf{N}.$$

**Доказательство.** Проверим утверждение прямыми вычислениями. Действительно,  $(\mathbf{N}^2)_{ij} = 1$ , если вершины, соответствующие индексам  $i, j$ , не смежны в  $B$ , но их окрестности содержат общую вершину из  $B$ . Соответствующий элемент матрицы справа (в последнем соотношении) равен  $1 + 0 - 0 + 0 = 1$  (так как  $i \neq j$  и  $(\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M})_{ij} = 1$ , если вершины из  $B$ , соответствующие индексам  $i, j$ , смежны с общей вершиной из  $A$ ,  $(\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M})_{ij} = k_i$  при  $i = j$  и  $(\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M})_{ij} = 0$  во всех остальных случаях). Если же окрестности вершин, соответствующих индексам  $i, j$ , пересекаются по вершине из  $A$ , то соответствующий элемент матрицы справа равен  $1 + 0 - 1 + 0 = 0$ . Но в этом случае и  $(\mathbf{N}^2)_{ij} = 0$ . Допустим теперь, что  $i = j$ . Тогда  $(\mathbf{N}^2)_{ii} = \beta - k_i$ . Из правой части следует, что  $(\mathbf{N}^2)_{ii} = 1 + \beta - 1 - k_i + 0 = \beta - k_i$ . Наконец, если вершины, отвечающие индексам  $i, j$ , смежны в  $B$ , то  $(\mathbf{N}^2)_{ij} = \beta - \alpha$ . Легко убедиться, что и в этом случае равенство выполняется.

Следующие обозначения нам понадобятся при доказательстве теоремы. Обозначим через  $\mathbf{e}_i$  вектор-столбец из  $\mathbb{R}^s$  такой, что  $(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Размерность  $s$  всегда будет определена ниже. Кроме того, если  $\mathbf{x}$  — вектор из  $\mathbb{R}^n$ , то для натурального  $r$  через  $\mathbf{x}^r$  будем обозначать вектор из  $\mathbb{R}^{n+r}$ , образованный из вектора  $\mathbf{x}$  добавлением  $r$  нулевых координат с номерами  $n + 1, \dots, n + r$  ( $n$  используется в прежнем смысле).

Зафиксируем натуральное  $r \in \{1, \dots, m\}$ . Обозначим через  $\mathbf{N}_\nu$  матрицу следующего вида:

$$\mathbf{N}_\nu = \begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{m}'_{i_1} & \dots & \mathbf{m}'_{i_r} \\ \mathbf{m}_{i_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{m}_{i_r} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\nu$  — множество попарно различных индексов  $\nu = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, m\}$ .

Матрица  $\mathbf{N}_\nu$ , как легко видеть, является матрицей смежности подграфа  $A_1 \cup B$  графа  $\Gamma$ , где  $A_1 = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\} \subset A$ .

## 2. Доказательство теоремы в случае нерегулярного графа $B$

В этом параграфе проведено доказательство теоремы в предположении, что граф  $\Gamma$  имеет нерегулярный подграф  $B$ . В частности, векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{j}_n$  не пропорциональны. Случай, когда  $\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{j}_n$ , для некоторого натурального  $k$  будет рассмотрен отдельно в следующем параграфе.

**Лемма 2.1.** Простой спектр матрицы  $\mathbf{N}$  равен

$$\left\{ -1, \frac{(\beta - 1) \pm \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4m}}{2}, \frac{(\beta - \alpha - 1) \pm \sqrt{(\beta - \alpha - 1)^2 + 4(\beta - 1)}}{2} \right\}.$$

Доказательство. Из утверждений (4) и (5) леммы 1.1 можно получить следующее соотношение:

$$(\mathbf{N} + \mathbf{I}_n)^2 \cdot \mathbf{k} = m(\beta + 1)\mathbf{j}_n - m\mathbf{k}.$$

Далее, пусть  $\mathbf{x}$  — собственный вектор  $\mathbf{N} + \mathbf{I}_n$ , отвечающий собственному значению  $\theta$ . Тогда

$$(\theta^2 + m)(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = m(\beta + 1)(\mathbf{x}, \mathbf{j}_n).$$

С другой стороны, из утверждения (4) леммы 1.1 следует, что  $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = m(\mathbf{x}, \mathbf{j}_n)$ . Отсюда либо  $(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = (\mathbf{x}, \mathbf{j}_n) = 0$ , либо  $\theta^2 - \theta(\beta + 1) + m = 0$ . Решая это квадратное уравнение и учитывая, что собственные значения матриц  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{N} + \mathbf{I}_n$  связаны равенством  $\theta(\mathbf{N}) = \theta(\mathbf{N} + \mathbf{I}_n) - 1$ , получим пару собственных значений

$$\theta_{2,3} = \frac{(\beta - 1) \pm \sqrt{(\beta + 1)^2 - 4m}}{2}$$

из формулировки леммы.

Итак, если  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{N}}(\theta)$  и  $\theta \neq \theta_{2,3}$ , то  $\mathbf{x}$  ортогонален векторам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{j}_n$ . Тогда из соотношения (6) леммы 1.1 следует, что

$$\theta \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{x}.$$

Отсюда либо  $\theta = -1$ , либо  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = 0$ .

Далее, по лемме 1.3 матрица  $\mathbf{N}$  удовлетворяет квадратному уравнению

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{J}_{n,n} + (\beta - 1) \cdot \mathbf{I}_n - \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M} + (\beta - \alpha - 1) \cdot \mathbf{N}.$$

Умножив это соотношение на вектор  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{N}}(\theta)$ ,  $\theta \notin \{\theta_2, \theta_3, -1\}$ , получим уравнение

$$\theta^2 \mathbf{x} = (\beta - 1) \cdot \mathbf{x} + \theta \cdot (\beta - \alpha - 1) \cdot \mathbf{x}.$$

Таким образом, собственное значение  $\theta \notin \{\theta_2, \theta_3, -1\}$  является корнем уравнения  $\theta^2 - \theta \times (\beta - \alpha - 1) - (\beta - 1) = 0$  и

$$\theta_{4,5} = \frac{(\beta - \alpha - 1) \pm \sqrt{(\beta - \alpha - 1)^2 + 4(\beta - 1)}}{2}.$$

Лемма доказана.

Напомним, что матрица  $\mathbf{N}_\nu$ , введенная в предыдущем параграфе, является матрицей смежности подграфа  $A_1 \cup B$  графа  $\Gamma$ , где  $A_1 = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\} \subset A$ ,  $\nu = \{i_1, \dots, i_r\}$ . Следующая лемма описывает простой спектр матрицы  $\mathbf{N}_\nu$  через простой спектр матрицы  $\mathbf{D}_r$ , связанной с параметрами графа  $\alpha, \beta, m$  и  $r = |\nu|$ , но не зависящей от выбора индексов множества  $\nu$ .

**Лемма 2.2.** При  $r \in \{0, \dots, m - 1\}$  простой спектр  $\mathbf{N}_\nu$  равен

$$\left\{ -1, \frac{(\beta - \alpha - 1) \pm \sqrt{(\beta - \alpha - 1)^2 + 4(\beta - 1)}}{2} \right\} \cup S(\mathbf{D}_r),$$

где  $\mathbf{D}_r$  — матрица следующего вида:

$$\mathbf{D}_r = \begin{pmatrix} \beta & -1 & \mathbf{j}'_r & (\alpha - \beta) \cdot \mathbf{j}'_r \\ m & -1 & \mathbf{0}'_r & (\alpha - 1) \cdot \mathbf{j}'_r \\ \mathbf{j}_r & \mathbf{0}_r & -\mathbf{I}_r & (\alpha - 1) \cdot \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r & \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r \times r} \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Пусть условия леммы выполняются. Начнем с самого простого случая. Пусть вектор  $\mathbf{x}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{N}$ , отвечающим собственному значению  $\theta \in \{\theta_4, \theta_5\}$ . Непосредственно из доказательства предыдущей леммы и строения матрицы  $\mathbf{N}_\nu$  следует, что вектор  $\mathbf{x}^r$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{N}_\nu$ , отвечающим собственному значению  $\theta$ .

Далее, для зафиксированного  $r = |\nu|$  положим

$$V = \{\mathbf{j}_{n+r}, \mathbf{k}^r\} \cup \{\mathbf{m}'_j \mid j \in \nu\} \cup \{\mathbf{e}_i \mid i = n+1, \dots, n+r\}$$

и  $\mathcal{V} = \langle V \rangle$ . Тогда справедливы утверждения:

$$(1') \dim(\mathcal{V}) = 2r + 2;$$

$$(2') \mathbf{N}_\nu \cdot \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Действительно, векторы множества  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=n+1}^{i=n+r}$  линейно независимы очевидным образом и линейно независимы по отношению к остальными векторам из  $V$ . Ввиду утверждения (2) леммы 1.2 пункт (1') доказан. Таким образом,  $V$  есть базис  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2r+2}$ .

Далее, непосредственными вычислениями можно убедиться, что выполняются следующие соотношения:

$$(i) \mathbf{N}_\nu \cdot \mathbf{j}_{n+r} = \beta \mathbf{j}_{n+r} - \mathbf{k}^r + \sum_{j \in \nu} \mathbf{m}'_j + (\alpha - \beta) \sum_{j=n+1}^{j=n+r} \mathbf{e}_j;$$

$$(ii) \mathbf{N}_\nu \cdot \mathbf{k}^r = m \mathbf{j}_{n+r} - \mathbf{k}^r + (\alpha - 1) \sum_{j=n+1}^{j=n+r} \mathbf{e}_j;$$

$$(iii) \mathbf{N}_\nu \cdot \mathbf{m}'_{l_j} = \mathbf{j}_{n+r} - \mathbf{m}'_{l_j} + (\alpha - 1) \mathbf{e}_{j+n} \text{ для любого } j \in \{1, \dots, r\} \text{ и } l_j \in \nu;$$

$$(iv) \mathbf{N}_\nu \cdot \mathbf{e}_{j+n} = \mathbf{m}'_{l_j}, \text{ для любого } j \in \{1, \dots, r\} \text{ и } l_j \in \nu.$$

Отсюда  $\mathbf{N}_\nu \cdot \langle V \rangle = \langle V \rangle = \mathcal{V}$ . Утверждение (2') доказано.

Для некоторого собственного значения  $\theta$  матрицы  $\mathbf{N}_\nu$  выберем собственный вектор  $\mathbf{y} \in E_{\mathbf{N}_\nu}(\theta)$ . Умножив слева на  $\mathbf{y}$  каждое равенство из (i)–(iv), получим следующие соотношения:

$$(i') \theta(\mathbf{y}, \mathbf{j}_{n+r}) = \beta(\mathbf{y}, \mathbf{j}_{n+r}) - (\mathbf{y}, \mathbf{k}^r) + \sum_{j \in \nu} (\mathbf{y}, \mathbf{m}'_j) + (\alpha - \beta) \sum_{j=n+1}^{j=n+r} (\mathbf{y}, \mathbf{e}_j);$$

$$(ii') \theta(\mathbf{y}, \mathbf{k}^r) = m(\mathbf{y}, \mathbf{j}_{n+r}) - (\mathbf{y}, \mathbf{k}^r) + (\alpha - 1) \sum_{j=n+1}^{j=n+r} (\mathbf{y}, \mathbf{e}_j);$$

$$(iii') \theta(\mathbf{y}, \mathbf{m}'_{l_j}) = (\mathbf{y}, \mathbf{j}_{n+r}) - (\mathbf{y}, \mathbf{m}'_{l_j}) + (\alpha - 1)(\mathbf{y}, \mathbf{e}_{j+n});$$

$$(iv') \theta(\mathbf{y}, \mathbf{e}_{j+n}) = (\mathbf{y}, \mathbf{m}'_{l_j}).$$

Положим  $\mathbf{y}_\nu$  — вектор-столбец, состоящий из скалярных произведений вектора  $\mathbf{y}_\nu$  и векторов из  $V$  (в том же порядке, в каком они записаны выше, при определении множества  $V$ ). Тогда из (i')–(iv') следует, что  $\mathbf{y}_\nu$  — собственный вектор матрицы  $\mathbf{D}_r$  с собственным значением  $\theta$ , где  $\mathbf{D}_r$  — матрица из формулировки леммы.

Покажем, что простой спектр матрицы  $\mathbf{D}_r$  содержится в простом спектре матрицы  $\mathbf{N}_\nu$ . Действительно, в силу того что  $\dim(\mathcal{V}) = 2r + 2$ , среди собственных векторов матрицы  $\mathbf{N}_\nu$  найдется  $2r+2$  вектора таких, что их проекции на подпространство  $\mathcal{V}$  все попарно не равны и не равны нулевому вектору. В этом случае для любого такого собственного вектора, отвечающего собственному значению  $\theta$  из спектра  $\mathbf{N}_\nu$ , получим, что  $\theta$  является собственным значением матрицы  $\mathbf{D}_r$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.3.** *Спектр матрицы  $\mathbf{N}_\nu$  вычисляется как*

$$Sp(\mathbf{N}_\nu) = \{-1^{m-r-1}, \theta_4^s, \theta_5^t\} \cup Sp(\mathbf{D}_r),$$

где  $s + t = n - m - 1$ .

**Доказательство.** Из доказательства леммы 2.1 следует, что собственные векторы  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{N}}(\theta)$ , где  $\theta \in \{\theta_4, \theta_5\}$  лежат в нуль-пространстве матрицы  $\mathbf{M}$ . По лемме 1.2 имеем  $\text{rank}(\mathbf{M}) = m$ , поэтому число таких векторов не более, чем  $n - m$ . Далее,  $\dim(E_{\mathbf{N}}(\theta_2)) + \dim(E_{\mathbf{N}}(\theta_3)) = 2$ , поэтому  $\dim(E_{\mathbf{N}}(-1)) \geq n - (n - m) - 2 = m - 2$ . С другой стороны,  $\dim(E_{\mathbf{N}}(-1)) \leq m - 1$  (так как вектор  $\mathbf{x}$  из  $E_{\mathbf{N}}(-1)$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}$  с собственным значением  $\alpha - 1$ , а таких векторов точно  $m - 1$ ). Итак, возможны два случая.

Положим  $\mathbf{L} = \mathbf{N}_\nu$ . Пусть  $\dim(E_{\mathbf{N}}(-1)) = m - 2$ . Тогда  $\dim(E_{\mathbf{N}}(\theta_4)) + \dim(E_{\mathbf{N}}(\theta_5)) = n - m$  и поэтому  $\dim(E_{\mathbf{L}}(\theta_4)) + \dim(E_{\mathbf{L}}(\theta_5)) = n - m$ . Далее, спектр матрицы  $\mathbf{L}$  содержит  $2r + 2$  собственных значений спектра матрицы  $\mathbf{D}(\mathbf{X}_r)$ . Наконец, остается  $n + r - (n - m) - (2r + 2) = m - r - 2$  пока неизвестных нам собственных значений. Но при  $r = m - 1$ , как видно,  $m - r - 2 = -1$ ; противоречие. Итак,  $\dim(E_{\mathbf{N}}(-1)) = m - 1$ .

Найдем оставшиеся неизвестными  $m - r - 1$  собственные значения матрицы  $\mathbf{L}$ . По аналогии с доказательством леммы 1.3 можно показать, что матрица  $\mathbf{L}$  удовлетворяет квадратному уравнению

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{J}_{n+r} + (\beta - 1) \cdot \mathbf{I}_{n+r} - (\mathbf{M}^r)' \cdot \mathbf{M}^r + \mathbf{K}_{n+r} + (\beta - \alpha - 1) \cdot \mathbf{L},$$

где матрица  $\mathbf{M}^r$  получена из матрицы  $\mathbf{M}$  добавлением справа  $r$  нулевых столбцов, а матрица  $\mathbf{K}_{n+r}$  имеет вид

$$\mathbf{K}_{n+r} = \begin{pmatrix} \sum_{i \in \nu} \mathbf{m}'_i \cdot \mathbf{m}_i & (\alpha - \beta) \cdot \mathbf{M}_\nu \\ (\alpha - \beta) \cdot \mathbf{M}'_\nu & (\alpha - \beta) \mathbf{I}_r \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{M}_\nu$  — матрица, составленная из столбцов  $\mathbf{m}'_{i_j}$  для всех  $i_j \in \nu$ .

Далее, пусть  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{L}}(\theta)$  и  $\theta \notin \{\theta_4, \theta_5\} \cup S(\mathbf{D}_r)$ . Тогда вектор  $\mathbf{x}$  ортогонален  $\mathcal{V}$  и ортогонален  $E_{\mathbf{L}}(\theta)$ ,  $\theta \in \{\theta_4, \theta_5\} \cup S(\mathbf{D}_r)$ . Поэтому при умножении приведенного выше квадратного уравнения на вектор  $\mathbf{x}$  получим

$$\theta^2 \mathbf{x} = (\beta - 1) \mathbf{x} - (\mathbf{M}^r)' \cdot \mathbf{M}^r \cdot \mathbf{x} + \theta(\beta - \alpha - 1) \mathbf{x}.$$

Но спектр матрицы  $(\mathbf{M}^r)' \cdot \mathbf{M}^r$  содержит только три различных собственных значения:  $\alpha - 1$  кратности  $m - 1$ ,  $0$  кратности  $n - m + r$  и  $\alpha$  кратности  $1$  (этому собственному значению соответствует вектор  $\mathbf{j}_{n+r}$ ). Отсюда  $\mathbf{x}$  — собственный вектор матрицы  $(\mathbf{M}^r)' \cdot \mathbf{M}^r$  с собственным значением  $\alpha - 1$  и одновременно собственный вектор матрицы  $\mathbf{L}$  с собственным значением  $-1$ . Лемма доказана.

Легко видеть, спектр матрицы  $\mathbf{N}_\nu$  не зависит от выбора множества индексов  $\nu$  мощности  $r$ , следовательно, для любых наборов индексов  $\nu_1$  и  $\nu_2$  подграфы  $A_{\nu_1} \cup B$  и  $A_{\nu_2} \cup B$ , где  $A_{\nu_j} = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$  и  $\nu_j = \{i_1, \dots, i_r\}$ , имеют равные спектры. Теперь их  $\mathbb{R}$ -изоспектральность следует из того, что все собственные векторы матрицы  $\mathbf{N}_\nu$ , отвечающие собственным значениям  $\theta \in \{-1, \theta_4, \theta_5\}$ , ортогональны вектору  $\mathbf{j}_n$ . Поэтому, рассматривая в лемме 2.2 вместо матрицы  $\mathbf{N}_\nu$  матрицу  $y\mathbf{J} - \mathbf{N}_\nu$ , получим утверждение, аналогичное лемме 2.2 с матрицей  $\mathbf{D}_r^*$  в роли  $\mathbf{D}_r$ , где

$$\mathbf{D}_r^* = - \begin{pmatrix} \beta - y(n+r) & -1 & \mathbf{j}'_r & (\alpha - \beta) \cdot \mathbf{j}'_r \\ m - \alpha y & -1 & \mathbf{0}'_r & (\alpha - 1) \cdot \mathbf{j}'_r \\ \mathbf{j}_r - \alpha y & \mathbf{0}_r & -\mathbf{I}_r & (\alpha - 1) \cdot \mathbf{I}_r \\ -y\mathbf{j}_r & \mathbf{0}_r & \mathbf{I}_r & \mathbf{O}_{r \times r} \end{pmatrix},$$

и, как видно, ее спектр также не зависит от выбора множества  $\nu$  из  $r$  индексов.

Итак, для случая, когда векторы  $\mathbf{j}_n$  и  $\mathbf{k}$  не пропорциональны (и, следовательно, граф  $B$  не регулярен), теорема доказана.

### 3. Доказательство теоремы в случае регулярного графа $B$

Пусть теперь граф  $B$  регулярен, и  $\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{j}_n$  для некоторого натурального  $k$ .

**Лемма 3.1.** *Простой спектр матрицы  $\mathbf{N}$  равен*

$$\left\{ -1, \beta - k, \frac{(\beta - \alpha - 1) \pm \sqrt{(\beta - \alpha - 1)^2 + 4(\beta - 1)}}{2} \right\}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Хорошо известно, что регулярный граф степени  $l$  имеет главное собственное значение, равное  $l$ . Граф  $B$  регулярен, поэтому имеет главное собственное значение  $\beta - k$  кратности 1.

Далее, если собственный вектор  $\mathbf{x}$  взят из подпространства  $E_{\mathbf{N}}(\theta)$  и  $\theta \neq \beta - k$ , то  $\mathbf{x}$  ортогонален вектору  $\mathbf{j}_n$ . Отсюда и из соотношения (6) леммы 1.1 следует, что

$$\theta \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{x},$$

и снова либо  $\theta = -1$ , либо  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = 0$ .

По лемме 1.3 матрица  $\mathbf{N}$  удовлетворяет квадратному уравнению

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{J}_{n,n} + (\beta - 1) \cdot \mathbf{I}_n - \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M} + (\beta - \alpha - 1) \cdot \mathbf{N}.$$

Умножив это соотношение на вектор  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{N}}(\theta)$ ,  $\theta \notin \{\beta - k, -1\}$ , получим уравнение

$$\theta^2 \mathbf{x} = (\beta - 1) \cdot \mathbf{x} + \theta \cdot (\beta - \alpha - 1) \cdot \mathbf{x}.$$

Таким образом, собственное значение  $\theta \notin \{\beta - k, -1\}$  является корнем уравнения  $\theta^2 - \theta \times (\beta - \alpha - 1) - (\beta - 1) = 0$  и

$$\theta_{4,5} = \frac{(\beta - \alpha - 1) \pm \sqrt{(\beta - \alpha - 1)^2 + 4(\beta - 1)}}{2}.$$

Лемма доказана.

Как и ранее, рассмотрим далее матрицу  $\mathbf{N}_\nu$  для некоторого множества индексов  $\nu = \{i_1, \dots, i_r\}$ ,  $r = |\nu|$ .

**Лемма 3.2.** При  $r \in \{0, \dots, m - 1\}$  простой спектр  $\mathbf{N}_\nu$  равен

$$\left\{ -1, \frac{(\beta - \alpha - 1) \pm \sqrt{(\beta - \alpha - 1)^2 + 4(\beta - 1)}}{2} \right\} \cup S(\mathbf{D}_r),$$

где  $\mathbf{D}_r$  — матрица следующего вида:

$$\mathbf{D}_r = \begin{pmatrix} \beta & -1 & (\alpha - \beta) \cdot \mathbf{j}'_r \\ \mathbf{j}_r & -\mathbf{I}_r & (\alpha - 1) \cdot \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0}_r & \mathbf{I}_r & \mathbf{O}_{r \times r} \end{pmatrix}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть вектор  $\mathbf{x}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{N}$ , отвечающим собственному значению  $\theta \in \{\theta_4, \theta_5\}$ . Из доказательства предыдущей леммы следует, что вектор  $\mathbf{x}^r$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{N}_\nu$ , отвечающим собственному значению  $\theta$ .

Далее, для зафиксированного  $r = |\nu|$  положим

$$V = \{\mathbf{j}_{n+r}\} \cup \{\mathbf{m}'_j \mid j \in \nu\} \cup \{\mathbf{e}_i \mid i = n + 1, \dots, n + r\}$$

и  $\mathcal{V} = \langle V \rangle$ . Тогда:

$$(1') \dim(\mathcal{V}) = 2r + 1;$$

$$(2') \mathbf{N}_\nu \cdot \mathcal{V} = \mathcal{V}.$$

Действительно, векторы множества  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=n+1}^{i=n+r}$  линейно независимы и линейно независимы по отношению к остальными векторам из  $V$ . Ввиду утверждения (2) леммы 1.2 пункт (1') доказан. Таким образом,  $V$  есть базис  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2r+1}$ .

По аналогии с рассуждениями предыдущего параграфа выполняются следующие соотношения:

$$(i) \mathbf{N}_\nu \cdot \mathbf{j}_{n+r} = (\beta - k)\mathbf{j}_{n+r} + \sum_{j \in \nu} \mathbf{m}'_j + (\alpha - \beta) \sum_{j=n+1}^{j=n+r} \mathbf{e}_j;$$

(ii)  $\mathbf{N}_\nu \cdot \mathbf{m}'_{l_j} = \mathbf{j}_{n+r} - \mathbf{m}'_{l_j} + (\alpha - 1)\mathbf{e}_{j+n}$ , для любого  $j \in \{1, \dots, r\}$  и  $l_j \in \nu$ ;

(iii)  $\mathbf{N}_\nu \cdot \mathbf{e}_{j+n} = \mathbf{m}'_{l_j}$  для любого  $j \in \{1, \dots, r\}$  и  $l_j \in \nu$ .

Отсюда  $\mathbf{N}_\nu \cdot \langle V \rangle = \langle V \rangle = \mathcal{V}$ .

Для некоторого собственного значения  $\theta$  матрицы  $\mathbf{N}_\nu$  выберем собственный вектор  $\mathbf{y} \in E_{\mathbf{N}_\nu}(\theta)$ . Умножив слева на  $\mathbf{y}$  каждое равенство из (i)–(iv), получим следующие соотношения:

(i')  $\theta(\mathbf{y}, \mathbf{j}_{n+r}) = (\beta - k)(\mathbf{y}, \mathbf{j}_{n+r}) + \sum_{j \in \nu} (\mathbf{y}, \mathbf{m}'_{l_j}) + (\alpha - \beta) \sum_{j=n+1}^{j=n+r} (\mathbf{y}, \mathbf{e}_j)$ ;

(ii')  $\theta(\mathbf{y}, \mathbf{m}'_{l_j}) = (\mathbf{y}, \mathbf{j}_{n+r}) - (\mathbf{y}, \mathbf{m}'_{l_j}) + (\alpha - 1)(\mathbf{y}, \mathbf{e}_{j+n})$ ;

(iii')  $\theta(\mathbf{y}, \mathbf{e}_{j+n}) = (\mathbf{y}, \mathbf{m}'_{l_j})$ .

Положим  $\mathbf{y}_\nu$  – вектор-столбец, состоящий из скалярных произведений вектора  $\mathbf{y}_\nu$  и векторов из  $V$ . Тогда из (i')–(iii') следует, что  $\mathbf{y}_\nu$  – собственный вектор матрицы  $\mathbf{D}_r$  с собственным значением  $\theta$ , где  $\mathbf{D}_r$  – матрица из формулировки леммы. Доказательство этой леммы завершается так же, как и в лемме 2.2.

**Лемма 3.3.** *Спектр матрицы  $\mathbf{N}_\nu$  определяется формулой*

$$Sp(\mathbf{N}_\nu) = \{-1^{m-r-1}, \theta_4^s, \theta_5^t\} \cup Sp(\mathbf{D}_r),$$

где  $s + t = n - m$ .

**Доказательство.** Из доказательства леммы 3.1 следует, что собственные векторы  $\mathbf{x} \in E_{\mathbf{N}}(\theta)$ , где  $\theta \in \{\theta_4, \theta_5\}$ , лежат в нуль-пространстве матрицы  $\mathbf{M}$ . По лемме 1.2 имеем  $\text{rank}(\mathbf{M}) = m$ , поэтому число таких векторов не более, чем  $n - m$ . Далее,  $\dim(E_{\mathbf{N}}(\beta - k)) = 1$ , поэтому  $\dim(E_{\mathbf{N}}(-1)) \geq n - (n - m) - 1 = m - 1$ . С другой стороны,  $\dim(E_{\mathbf{N}}(-1)) \leq m - 1$  (так как вектор  $\mathbf{x}$  из  $E_{\mathbf{N}}(-1)$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}$  с собственным значением  $\alpha - 1$ , а таких векторов точно  $m - 1$ ). Итак,  $\dim(E_{\mathbf{N}}(-1)) = m - 1$  и доказательство этой леммы завершается так же, как и доказательство леммы 2.3.

Итак, и в случае регулярного графа спектр матрицы  $\mathbf{N}_\nu$  не зависит от выбора множества индексов  $\nu$  мощности  $r$ , следовательно, для любых наборов индексов  $\nu_1$  и  $\nu_2$  подграфы  $A_{\nu_1} \cup B$  и  $A_{\nu_2} \cup B$ , где  $A_{\nu_j} = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$  и  $\nu_j = \{i_1, \dots, i_r\}$ , имеют равные спектры. Теорема доказана.

#### 4. Некоторые результаты относительно несуществования бирегулярных геодезических графов диаметра 2 с неклассическими параметрами

В этом параграфе мы докажем предложение 2. Введем разбиение множества вершин графа  $B$  подмножествами  $X_i$  так, что вершина  $b$  из  $B$  принадлежит  $X_i$  тогда и только тогда, когда  $|A(b)| = i$ . Положим  $x_i = |X_i|$ . Тогда

- (1)  $\sum_i x_i = n$ ;
- (2)  $\sum_i i x_i = m\alpha$ ;
- (3)  $\sum_i i(i - 1)x_i = m(m - 1)$ .

Эти утверждения получаются путем подсчета числа вершин в  $\cup_i X_i$ , числа ребер между  $A$  и  $B$  и числа пар несмежных вершин в  $A$ , смежных с вершиной из  $B$ . Далее, если вершина  $b$  выбрана из  $X_i$ , то она смежна с  $\beta - i$  вершинами в  $B$ , с другой стороны, окрестность каждой вершины из  $B$  является объединением изолированных клик порядка  $s = \beta - \alpha + 1$ . Отсюда  $s$  делит  $\beta - i$ .

Пусть  $q \equiv \beta(s)$ . Выберем вершину  $b \in X_i$  и положим  $\gamma_j = |X_j \cap [b]|$ . Тогда  $\sum \gamma_j = \beta - i$ ,  $\sum j\gamma_j = m - i$ . Заметим, что все индексы  $j$  сравнимы с  $q$  по модулю  $s$ . Теперь  $\sum j\gamma_j - q \cdot \sum \gamma_j \equiv 0(s)$ . Отсюда  $m - i - q(\beta - i) \equiv 0(s)$  и  $m \equiv q(s)$ .

Далее, вычтем из уравнения (2) уравнение (1), умноженное на  $q$ . Получим  $\sum (i - q)x_i = (\alpha + q)m - q(\alpha\beta + 1)$ . Так как  $s$  делит левую часть полученного соотношения и  $s$  делит  $\alpha - 1 = \beta - s$  с остатком  $q$ , то  $(2q + 1)q - q(q(q + 1) + 1) = q^2(1 - q) \equiv 0(s)$ .

Вычтем из уравнения (3) уравнение (2), умноженное на  $q - 1$ . Из полученного соотношения вычтем разность (2) - (1) ·  $q$ , рассмотренную в предыдущем абзаце и умноженную на  $q + s$ .

Тогда правая часть итогового соотношения будет равна  $m(m-1) - (q-1)m\alpha - (q+s)((\alpha+q)m - q(\alpha\beta+1))$ . Заметим, что все коэффициенты при  $x_i$  в левой части нового соотношения делятся на  $s^2$ . Поэтому  $s^2$  делит  $m(m-1) - (q-1)m\alpha - (q+s)((\alpha+q)m - q(\alpha\beta+1))$ . Так как  $s$  делит  $(\alpha+q)m - q(\alpha\beta+1)$ , то  $s^2$  делит  $m(m-1) - (q-1)m\alpha - q((\alpha+q)m - q(\alpha\beta+1))$ . Положим  $m = a \cdot s + q$  и  $\alpha = b \cdot s + q + 1$  для некоторых целых  $a, b$ . Тогда  $m(m-1) = a^2s^2 + 2asq + q^2 - as - q$ ,  $m\alpha(q-1) = (as+q)(bs+q+1)(q-1) = (q-1)(abs^2 + asq + bsq + q^2 + as + q)$ ,  $q((\alpha+q)m - q(\alpha\beta+1)) = q((bs+2q+1)(as+q) - q((bs+q+1)(bs+q+s)+1)) = q(abs^2 + bsq + (2q+1)as + q(2q+1) - q(b^2s^2 + 2bsq + q^2 + s(bs+q) + bs+q+s+1))$ . Отсюда  $s^2$  делит  $2asq + q^2 - as - q - (q-1)(asq + bsq + q^2 + as + q) - q(bsq + (2q+1)as + q(2q+1) - q(2bsq + q^2 + sq + bs + q + s + 1))$ .

Положим  $c = q^2(q-1)/s$ . Тогда  $s$  делит  $2aq + q^2/s - a - q/s - (q-1)(aq + bq + q^2/s + a + q/s) - q(bq + (2q+1)a + q(2q+1)/s - q(2bq + q^2/s + q + b + q/s + 1 + 1/s))$ . Далее,  $q^2/s - q/s - (q-1)(q^2+q)/s - q(q(2q+1)/s - q(q^2/s + q/s + 1/s)) = (q^2 - 2q^3 + q^4)/s = q^2(1 - 2q + q^2)/s = q^2(q-1)^2/s = c(q-1)$ .

Отсюда  $s$  делит  $c(q-1) + 2aq - a - (q-1)(aq + bq + a) - q(bq + (2q+1)a - q(2bq + q + b + 1)) = c(q-1) + aq - bq^2 + bq - 3aq^2 + 2bq^3 + q^3 + q^2 = q^3(1 + 2b) + q^2(1 - b - 3a) + q(a + b) + c(q-1)$ . Предложение 2 доказано.

Докажем далее несуществование бирегулярного геодезического графа диаметра 2 со степенями вершин  $\alpha = 11$ ,  $\beta = 13$ . Несложный компьютерный перебор показывает, что это наименьший (по числу вершин) гипотетический граф, который не входит в классификацию из монографии [2]. Для таких значений  $\alpha$  и  $\beta$  имеем  $d = \sqrt{4(\alpha-1) + (\beta-\alpha+1)^2} = 7$ , поэтому условия теоремы 4.17.1 из [2] не выполняются.

Заметим, что  $s = \beta - \alpha + 1 = 3$  не делит  $\beta$ , следовательно, граф не содержит вершин из  $B$  степени 0 в  $A$ . Далее, обозначим через  $\mathbf{N}$  матрицу смежности подграфа  $B$  графа  $\Gamma$ . Тогда по лемме 2.3 для кратностей  $f$  и  $g$  собственных значений  $\theta_4$  и  $\theta_5$  получим следующие соотношения (сумма кратностей и след матрицы  $\mathbf{N}$ ):

$$f + g = n - m - 1, \quad 2(\beta - m) + (n - m - 1)(\beta - \alpha - 1) + (f - g)d = 0.$$

Отсюда следует, что  $d$  делит  $2(m-\beta) - (n-m-1)(\beta-\alpha-1)$ . Далее,  $|\Gamma| = n+m = \alpha\beta+1 = 144$ . Так как  $n > m$ , то можно считать, что  $m < 72$ . Из условия целочисленности кратностей собственных значений  $\theta_4$  и  $\theta_5$  получим, что  $m \in \{9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58, 65\}$ . Однако при  $m \geq 51$  матрицы  $\mathbf{D}_i$ , рассматриваемые ранее в § 2 данной работы, имеют невещественный спектр. Итак,  $m \leq 44$ . Но  $s = 3$ ,  $q = 1$ , поэтому  $m \equiv 1(3)$ . Отсюда  $m \in \{16, 37\}$ .

Пусть  $m = 37$ . Тогда в предыдущих обозначениях  $a = 12$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0$  и 3 делит  $7 + 1 - 3 - 36 + 15 = -16$ ; противоречие. Если  $m = 16$ , то  $a = 5$  и 3 делит  $7 + 1 - 3 - 15 + 8 = 2$ ; противоречие.

Далее, докажем несуществование бирегулярных геодезических графов диаметра 2 со степенями вершин  $\alpha = 57$  и  $\beta \in \{66, 82\}$ . По предложению из работы [5] каждый из этих гипотетических графов может быть изоморфен окрестности вершины большей степени в бирегулярном графе Тервиллигера с  $\mu = 2$ , если окрестность вершины меньшей степени изоморфна графу Мура степени 57. Соответственно, несуществование таких геодезических графов исключает указанные две возможности для графа Тервиллигера с  $\mu = 2$  из предложения работы [5].

Пусть  $\beta = 66$ . Тогда  $d = \sqrt{4 \cdot 56 + 10^2} = 18$  и  $d$  делит  $2(m-\beta) - (n-m-1)(\beta-\alpha-1) = 2(m-66) - 8(n-m-1)$ . Упрощая, получим, что 9 делит  $5m - 4n - 62$ . Далее,  $n+m = 57 \cdot 66 + 1 = 3763$ , поэтому 9 делит  $5m - 4(3763 - m) - 62 = 9m - 15114$ . Следовательно, 9 делит 15114; противоречие.

Пусть  $\beta = 82$ . Тогда  $s = 26$ ,  $q = 4$  и 26 делит  $16 \cdot (4 - 1)$ ; противоречие.

Автор выражает признательность за рекомендации и оказанное внимание своему научному руководителю, чл.-корр. РАН Александру Алексеевичу Махневу.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Dam E.R. van, Haemers W.H., Koolen J.H.** Cospectral graphs and the generalized adjacency matrix // Linear Algebra and its Applications. Vol. 423, Issue 1. P. 33–41.
2. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-Regular Graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
3. **Махнев А.А.** О регулярных графах Тервиллигера с  $\mu = 2$  // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1132–1134.
4. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** О проблеме регулярности в графах Тервиллигера // Докл. РАН. 2007. Т. 417, № 2. С. 151-155.
5. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** О графах Тервиллигера с  $\mu \leq 3$  // Мат. заметки. 2007. Т. 82. С. 14–26.

Поступила 14.03.2007

УДК 519.1, 519.4

## КОМБИНАТОРНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ СОВЕРШЕННЫХ ШИФРОВ

Д. С. Гутарин, С. С. Коновалова, В. И. Тимин, Е. С. Титов, С. С. Титов

Работа посвящена актуальной, но недостаточно разработанной теме в теоретической криптографии (криптологии) — исследованию и генерации совершенных шифров, конструкция которых дает им возможность противостоять активным атакам злоумышленников. Целью работы является нахождение взаимосвязи между  $O(2)$ -,  $U(2)$ - и  $S(L)$ -стойкими совершенными шифрами и изучение условий их существования. Результатами работы стали теорема о взаимосвязи между циклическими  $U(2)$ - и  $O(2)$ -стойкими шифрами и предположение о взаимосвязи  $U(2)$ - и  $O(2)$ -стойких шифров произвольного вида; найденные условия существования  $U(L)$ - и  $S(L)$ -стойких шифров, наложенные на параметр  $\lambda$ ; доказательство невозможности построения эндоморфного  $U(3)$ -стойкого шифра определенного типа с параметрами  $\lambda = 11$  и  $\lambda = 128$ .

### Введение

Данная работа посвящена теории совершенных шифров. Понятие “совершенный шифр” введено Клодом Шенноном в сороковых годах прошлого века как теоретически (абсолютно) стойкий шифр: никакой метод криптоанализа не позволит получить какую-либо информацию о ключе или об открытом тексте, так как она не отличается от общеизвестной априорной информации. К. Шеннон охарактеризовал шифры, являющиеся совершенными по отношению к криптоатаке, на основе одного шифртекста: это шифры обобщенного гаммирования со случайной равновероятной гаммой, и только они [1–3]. Правило зашифрования совершенного по Шеннону шифра задается уравнением  $y = x * k$ , где  $y$  — зашифрованный текст,  $x$  — открытый текст,  $k$  — ключ зашифрования,  $*$  — умножение в соответствующей квазигруппе. Множества  $X$  открытых текстов и  $Y$  закрытых текстов рассматриваются обычно как подмножества векторных пространств над конечным полем  $F$ .

Современными аналогами классических совершенных шифров являются совершенные шифры, стойкие к активным атакам. К ним относятся  $U(L)$ -,  $O(L)$ - и  $S(L)$ -стойкие шифры.

Будем придерживаться понятий, терминологии и методов книги [1].

**О п р е д е л е н и е 1.**  $U(L)$ -стойкий шифр — это шифр, стойкий к атакам на основе неупорядоченной  $L$ -кратной совокупности шифртекстов, полученных на одном ключе.

**О п р е д е л е н и е 2.** Перпендикулярный массив  $PA_\omega(t, \lambda, \mu)$  — это матрица  $A$  размера  $\omega \cdot \binom{\mu}{t} \times \lambda$  с элементами из множества  $Y$  мощности  $\mu$ , каждая строка которой состоит из  $\lambda$  различных элементов, и любые  $t$  различных элементов множества  $Y$  содержатся точно в  $\omega$  строках подматрицы, составленной любыми  $t$  столбцами матрицы  $A$ .

**Теорема 1** ([1], теорема 4.2.8). *Если существует перпендикулярный массив  $PA_\omega(t, \lambda, \mu)$ , то существует и  $U(t)$ -стойкий шифр с параметрами  $|X| = \lambda$ ,  $|Y| = \mu$ ,  $|K| = \omega \cdot \binom{\mu}{t} = \pi$ .*

**О п р е д е л е н и е 3.** Циклический перпендикулярный массив  $CPA_\omega(t, \lambda, \mu)$  — это перпендикулярный массив  $PA_\omega(t, \lambda, \mu)$ , который с каждой строкой содержит в качестве строк все ее циклические сдвиги.

**О п р е д е л е н и е 4.**  $O(L)$ -стойкий шифр — это шифр, стойкий к атакам на основе упорядоченной  $L$ -кратной совокупности шифртекстов, полученных на одном ключе. В этом случае в таблице зашифрования  $A_\omega(L, \lambda, \mu)$  при  $\omega = 1$  любая строка должна содержать только по одному вектору из любых  $L$  ее элементов, содержащихся в любых  $L$  столбцах.

**О п р е д е л е н и е 5.**  $S(L)$ -стойкий шифр — это шифр, стойкий к атакам на основе любой неупорядоченной  $L'$ -кратной совокупности шифртекстов для всех  $L' \leq L$ , полученных на одном ключе.

**О п р е д е л е н и е 6.** Эндоморфный шифр — это шифр, для которого выполняется равенство  $X = Y$ .

Минимальный эндоморфный шифр в классическом понимании — это шифр с минимальным количеством ключей  $\pi = |K| = q^m - 1$  (если  $F = GF(q)$ ). Для шифров, стойких к активным атакам, минимальность понимается как минимальное число ключей  $\pi$ , обеспечивающих нужную стойкость. Далее будем рассматривать только минимальные эндоморфные шифры, которые строятся на основе массивов с  $\lambda = \mu, \omega = 1$  (см. теорему 4.2.4 [1]).

**Лемма 1** ([1], лемма 5.6). *Если эндоморфный шифр удовлетворяет условию  $O(L)$ -стойкости, то он удовлетворяет и условию  $S(L)$ -стойкости.*

**Лемма 2** ([1], лемма 5.2). *Если шифр удовлетворяет условию  $S(L)$ -стойкости, то он удовлетворяет и условиям  $U(L')$ - и  $S(L')$ -стойкости для любого  $L'$  из интервала  $1 \leq L' \leq L$ .*

**Лемма 3** ([1], лемма 5.3). *Шифр удовлетворяет условию  $S(L)$ -стойкости тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию  $U(L')$ -стойкости для любого  $L'$  из интервала  $1 \leq L' \leq L$ .*

**Теорема 2** ([1], теорема 6.1). *Пусть  $Y = X$  и  $E$  — множество подстановок на  $X$ , рассматриваемое как множество правил зашифрования для шифра с числом ключей  $\pi = \binom{\lambda}{L}$ , удовлетворяющего условию  $U(L)$ -стойкости. Тогда при  $L' \leq L$  шифр удовлетворяет условию  $U(L')$ -стойкости только в том случае, если число  $\binom{\lambda}{L}$  делится на число  $\binom{\lambda}{L'}$  и для любой пары  $X', Y' \in X(L)$  существует в точности  $\omega = C_\lambda^L : \binom{\lambda}{L'}$  подстановок  $e \in E$  таких, что  $e(X') = Y'$ .*

**Теорема 3** ([1], теорема 6.6). *Пусть  $Y = X$  и  $E$  — множество подстановок на  $X$ , рассматриваемое как множество правил зашифрования для шифра с числом ключей  $\pi = \binom{\lambda}{L}$ , удовлетворяющего условию  $U(L)$ -стойкости, и  $1 \leq L \leq \frac{\lambda+1}{2}$ . Тогда шифр удовлетворяет условию  $U(L')$ -стойкости при любом  $L'$  таком, что  $1 \leq L' \leq L$  или  $\lambda - L \leq L' \leq \lambda$ . В частности, шифр удовлетворяет условию  $S(L)$ -стойкости.*

Так как основной недостаток совершенных  $U(L)$ -,  $O(L)$ - и  $S(L)$ -стойких шифров — большой расход ключевой информации, то их целесообразно использовать только для передачи особо ценной информации, именно поэтому особое внимание уделяется минимальным эндоморфным шифрам.

В криптографии представляют интерес построение эндоморфных совершенных шифров, стойких к активным атакам, для  $L > 2$ , и изучение конструкций, порождающих семейства таких шифров, поскольку с ростом  $L$  шифр становится более стойким. С ростом параметров  $\lambda$  и  $L$  усложняются и замедляются построение шифра, его проверка на стойкость. Поэтому для более эффективного поиска необходимы критерии существования или хотя бы достаточные условия несуществования таких шифров.

По причине схожести параметров указанных типов совершенных шифров вызывает интерес нахождение взаимосвязи между ними. Это облегчит их построение, так как вместо нахождения новых конструкций (что является более сложной задачей) будут использоваться уже существующие.

В [1] указано существование  $CPA_1(2, 5, 5)$  и двух эндоморфных  $U(3)$ -стойких шифров с  $\omega = 1$ : с параметрами  $\lambda = 8$  и  $\lambda = 32$ . В [4, 5] построены следующие массивы, определенные с помощью таблиц:

1. Циклические массивы  $CPA_1(2, 7, 7)$ , соответствующий  $U(2)$ - и  $A_1(2, 7, 7)$ , соответствующий  $O(2)$ -стойкому шифру — на основе формулы зашифрования  $y = ix + j$ .

2.  $A_1(2, 9, 9)$  — по формуле  $y = x \cdot k + \ell$ , где векторы  $x, y, k, \ell$  — элементы поля  $GF(9)$ , а  $k$  соответствует матрице зашифрования Холла  $M_k$  на основе многочлена  $f(x) = x^2 + 1$ . Приводит к  $O(2)$ -стойкому шифру.

3.  $PA_1(3, 8, 8) = A_1(2, 8, 8)$  — на основе конечной плоскости по формуле  $y = x \cdot k + \ell$ , где умножение производится в поле  $GF(8)$  по таблице степеней  $f(x) = x^3 + x + 1$ , неприводимого над  $GF(2)$ . Приводит к  $U(3)$ - и  $O(2)$ -стойкому шифру.

4.  $A_1(3, 6, 6)$  — на основе группы  $PGL(2, 5)$  в виде дробно-линейной функции  $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$  с элементом  $\infty$ :  $f(\infty) = a/c$ ;  $f(-d/c) = \infty$ ;  $a, b, c, d$  — элементы поля  $Z_5$ . Приводит к  $O(3)$ -стойкому шифру.

5.  $PA_1(3, 32, 32)$  — в поле  $GF(32)$  по формуле  $y = x^\sigma \cdot k + \ell$ , где  $\sigma = 2^j$ ,  $j = 0 \dots 4$ .

Для расширения этого списка в [5] нами получены следующие наблюдения (сформулированные здесь как утверждения) и теорема об  $U(L)$ - и  $O(L)$ -стойких шифрах.

**Утверждение 1.** Построение  $O(L)$ -стойкого шифра приводит к пороговой схеме разделения секрета  $(L, 2L - 1)$ .

**Утверждение 2.** Построение эндоморфного  $O(2)$ -стойкого шифра эквивалентно построению конечной (аффинной) плоскости: любым двум значениям  $x$  соответствуют два значения  $y$ , что определяет на плоскости две точки, через которые можно провести единственную прямую.

**Утверждение 3.** Набор матриц  $M_k$  приводит к  $U(2)$ -стойкому шифру тогда и только тогда, когда  $\det[M(k') \pm M(k'')] \neq 0$  для любых различных ненулевых ключей  $k'$  и  $k''$ .

**Теорема 4.** Эндоморфный  $U(2)$ -стойкий шифр с уравнением зашифрования  $\vec{y} = \vec{x} M_{\vec{k}} + \vec{\ell}$  (где  $M_{\vec{k}}$  — некоторый набор матриц над конечным полем) может быть дополнен до линейного  $O(2)$ -стойкого шифра. Обратное, если с каждой матрицей  $M_k$  в линейном  $O(2)$ -стойком шифре содержится и матрица  $(-M_k)$ , то одну матрицу из каждой такой пары можно убрать и получить линейный  $U(2)$ -стойкий шифр.

**З а м е ч а н и е.** В теореме 4 предполагается, что  $\vec{\ell}$  произвольно для каждого  $M_k$ .

## 1. Взаимосвязь между $U(2)$ - и $O(2)$ -стойкими шифрами

Теорема 4 указывает на взаимосвязь эндоморфных  $U(2)$ - и  $O(2)$ -стойких шифров, задаваемых линейными функциями зашифрования. В общем случае проблема взаимосвязи пока не решена. Однако в дополнение к линейным шифрам получим результат для шифров, задаваемых циклическими массивами.

Пусть  $y = E(x)$  — уравнение зашифрования. Тогда  $U(2)$ -стойкий шифр должен удовлетворять следующему условию:

$$\forall x_1 \neq x_2, \forall y_1 \neq y_2 \quad \exists! E : \begin{cases} \text{либо } E(x_1) = y_1 \text{ и } E(x_2) = y_2 \\ \text{либо } E(x_1) = y_2 \text{ и } E(x_2) = y_1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Условие  $O(2)$ -стойкости:

$$\forall x_1 \neq x_2, \forall y_1 \neq y_2 \quad \exists! E : E(x_1) = y_1 \text{ и } E(x_2) = y_2. \quad (1.2)$$

Перепишем условия (1.1) и (1.2) через обратную функцию  $x = E^{-1}(y)$ :

$$E^{-1} : \begin{cases} \text{либо } E^{-1}(y_1) = x_1 \text{ и } E^{-1}(y_2) = x_2 \\ \text{либо } E^{-1}(y_1) = x_2 \text{ и } E^{-1}(y_2) = x_1. \end{cases}$$

Как видим, они аналогичны условиям  $U(2)$ -стойкости шифра. Итак, доказано

**Утверждение 4.** Если набор перестановок  $E$  образует  $U(2)$ - или  $O(2)$ -стойкий шифр, то и набор обратных перестановок  $E^{-1}$  образует  $U(2)$ - или  $O(2)$ -стойкий шифр соответственно.

Рассмотрим циклические перпендикулярные массивы вида  $CPA_1(2, \lambda, \lambda)$ , соответствующие эндоморфному  $U(2)$ -стойкому шифру. Число  $\pi$  ключей, необходимых [1] для их построения, вычисляется как  $\pi = \binom{\lambda}{2} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$ .

Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — произвольные функции зашифрования, соответствующие различным значениям ключа и образующие массив  $CPA_1(2, \lambda, \lambda)$ . Это означает, что:

1) вместе с  $\alpha(x)$  массив содержит и все ее циклические сдвиги  $\alpha(x - \ell)$ , где  $\ell \in \mathbb{Z}_\lambda$  произвольно;

2)  $\alpha(x) \pm x$  являются перестановками. Таким образом, любые две функции зашифрования  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  из  $CPA_1(2, \lambda, \lambda)$  удовлетворяют условию:

$$(\alpha(x) \pm \beta(x)) \pmod{\lambda} = \gamma(x) \in S_\lambda, \quad (1.3)$$

т.е. являются перестановками [6].

Пусть  $K' = \{\alpha : \alpha(0) = 0, \alpha(1) = k\}$ . Рассмотрим ситуации, при которых условие (1.3)  $U(2)$ -стойкости не выполняется:

1)  $\alpha(1) = \beta(1) = k$ . Тогда  $\alpha(0) - \beta(0) = \alpha(1) - \beta(1) = 0$  и разность функций не является перестановкой. Поэтому существует единственная функция  $\alpha(1) = k$ . Параметр  $k$  выступает частью ключа, на котором зашифровывается открытое сообщение, и геометрически является наклоном прямой, чье уравнение является уравнением зашифрования.

2)  $\begin{cases} \alpha(1) = k \\ \beta(1) = -k \end{cases}$ . Тогда  $\alpha(1) + \beta(1) = \alpha(0) + \beta(0) = 0$  и сумма функций не является перестановкой.

Обозначим через  $K'' \subset \mathbb{Z}_\lambda^*$  множество таких значений  $k$  некоторого циклического  $U(2)$ -стойкого шифра. Тогда из второго случая следует, что  $(-k) \notin K''$  при  $k \in K''$ .

Определим новые операции зашифрования  $\alpha_{-k}(x)$  для  $k \in K''$  равенством  $\alpha_{-k}(x) = -\alpha_k(x)$  (это тождество выполняется для линейных функций в поле) и сформулируем

**Утверждение 5.** Подстановки вида  $\alpha_{-k}(x)$  для  $k \in K''$  вместе с массивом  $CPA_1(2, \lambda, \lambda)$  образуют циклический массив  $CA_1(2, \lambda, \lambda)$ , являющийся  $O(2)$ -стойким шифром.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Количество ключей, необходимых [1] для построения эндоморфного  $O(2)$ -стойкого шифра, вычисляется как

$$\pi = \frac{\lambda!}{(\lambda-L)!} = \frac{\lambda!}{(\lambda-2)!} = \lambda(\lambda-1).$$

Множество  $K''$  состоит из  $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$  элементов, так как оно образует  $U(2)$ -стойкий шифр. Такое же количество элементов и во множестве функций  $\alpha_{-k}(x)$ . В сумме получается необходимое число  $\pi$  для  $O(2)$ -стойкого шифра.

Условие  $O(2)$ -стойкости циклического шифра:

$$(\alpha_k(x) - \alpha_m(x)) \pmod{\lambda} = \gamma(x) \in S_\lambda. \quad (1.4)$$

Заметим, что условие (1.4) включено в условие (1.3). Проверим это условие для различных  $k$  и  $m$ :

$$k \in K'', m \in K'' : \alpha_k(x) - \alpha_m(x) = \gamma(x) \in S_\lambda;$$

$$\begin{aligned} k \notin K'', m \notin K'' &\implies -k \in K'', -m \in K'' : \alpha_k(x) - \alpha_m(x) = -\alpha_{-k}(x) + \alpha_{-m}(x) \\ &= -(\alpha_{-k}(x) - \alpha_{-m}(x)) = -\gamma(x) \in S_\lambda; \end{aligned}$$

$$k \in K'', m \notin K'' \implies -m \in K'' : \alpha_k(x) - \alpha_m(x) = \alpha_k(x) + \alpha_{-m}(x) = \gamma(x) \in S_\lambda;$$

$$\begin{aligned} k \notin K'', m \in K'' &\implies -k \in K'' : \alpha_k(x) - \alpha_m(x) = -\alpha_{-k}(x) - \alpha_m(x) \\ &= -(\alpha_k(x) + \alpha_{-m}(x)) = -\gamma(x) \in S_\lambda. \end{aligned}$$

Функция  $(-\gamma(x))$ , противоположная перестановке, также является перестановкой. Для каждого из четырех сочетаний  $k$  и  $m$  разность функций — это перестановка, значит, утверждение доказано.

**З а м е ч а н и е.** Обратные подстановки (подстановки расшифрования) образуют массив  $D_1(2, \lambda, \lambda)$ , тоже являющийся  $O(2)$ -стойким шифром. Он будет циклическим только в случае ассоциативности умножения, т.е. в поле.

Действительно, если уравнением зашифрования является  $y = xk + \ell$ , то обратное ему  $x = (y - \ell)/k = y/k - \ell/k$ . Вместо  $x$  подставим  $y$ , а вместо  $y$  подставим  $x$ :  $y = x/k - \ell/k$ . Это уравнение задает прямую, если существуют такие  $m$  и  $L$ , что  $y = xm + L$ :  $L = -\ell/k$ ;  $x/k = xm \implies \forall x : x/k = x(1/k) \implies \forall x : x = [x(1/k)]k$ , так как надо  $m = 1/k$ , чтобы равенство выполнялось при  $x = 1$ .

В поле в силу ассоциативности тождество выполняется:  $[x(1/k)]k = x[(1/k)k] = x \cdot 1 = x$ . В полуполе, не сводящемся к полю, умножение неассоциативно, поэтому обратный циклический массив  $D_1(2, \lambda, \lambda)$  в полуполе не будет являться набором прямых, а значит, по утверждению 2 не будет образовывать  $O(2)$ -стойкий шифр.

Вернемся к массиву  $CA_1(2, \lambda, \lambda)$ .

$d_k(x) = \alpha_k^{-1}(x)$  — функция расшифрования, обратная к  $\alpha_k(x)$ , причем  $d_k(0) = 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}_\lambda^*$ . Если  $y = \alpha_k(x - \ell)$ , то  $\alpha_k^{-1}(y) = x - \ell$ , т.е.  $d_k(y) + \ell = x$ . Переобозначая  $x \longleftrightarrow y$ , получаем  $y = d_k(x) + \ell$ . Согласно утверждениям 2 и 4 семейство функций, обратных  $\alpha_k(x - \ell)$ , образует эндоморфный  $O(2)$ -стойкий шифр и их можно представить в виде прямых вида  $y = d_k(x) + \ell = x \odot s + \ell$ ,  $s \in \mathbb{Z}_\lambda^*$ ,  $d_k(x) = x \odot s$ , где  $+$  есть сложение по модулю  $\lambda$ ;  $\odot$  — умножение в такой квазигруппе на множестве ненулевых вычетов по модулю  $\lambda$ , которая допускает инволюцию  $\mathbb{Z}_\lambda^* \longrightarrow \mathbb{Z}_\lambda^*$  такую, что  $m \longmapsto (-m)$ ,  $(-x) \odot m = x \odot (-m)$  для любого  $x \in \mathbb{Z}_\lambda^*$ .

При  $x = 1$  получаем  $y = 1 \odot s + \ell = s + \ell \pmod{\lambda}$ . Поэтому  $d_k(1) = s$  — наклон прямой. Также  $s = d_{-k}(-1)$ . Обозначим через  $\bar{s}$  наклон прямой  $d_{-k}(x)$ , т.е.  $\bar{s} = d_k(-1) = d_{-k}(1)$ .

Пусть  $z = \alpha_k(x)$ . Функцией, обратной  $\alpha_{-k}(x) = -\alpha_k(x) = -z$ , является  $d_{-k}(z) = d_k(-z)$ . Применяя замену  $m = -k$ , приходим к уравнению  $y = d_m(x) + \ell = (-x) \odot s + \ell = x \odot \bar{s} + \ell$ . При  $x = 1$  получим тождество  $(-1) \odot s = 1 \odot \bar{s} \implies \bar{s} = -s \implies (-x) \odot m = x \odot (-m)$  для всех  $x$ .

Итак, доказана следующая

**Теорема 5.** *Циклический перпендикулярный массив  $CPA_1(2, \lambda, \lambda)$  и соответствующий ему эндоморфный  $U(2)$ -стойкий шифр существуют тогда и только тогда, когда существует конечная аффинная плоскость порядка  $\lambda$ , наклонные прямые в которой задаются уравнениями зашифрования  $y = x \odot s + \ell$ .*

Теорема 5 развивает теорему 4, в которой также есть инволюция, только другого вида. Умножение  $x \odot s$  является частным случаем теоремы 4: соотношения  $(-x)t = -(xM_k) = x(-M_k)$  переносятся на циклический массив.

Обобщим обе теоремы и выдвинем предположение о взаимосвязи  $U(2)$ - и  $O(2)$ -стойких шифров произвольного вида, используя понятие системы Веблена — Веддербёрна. Система Веблена — Веддербёрна (или VW-система) [7] является одним из типов тернара, определяющего конечную плоскость, с операциями сложения и умножения, содержащего в том числе элементы 0 и 1.

**Предположение 1.** *Если имеется эндоморфный  $U(2)$ -стойкий шифр, то существует VW-система с такой квазигруппой по умножению, которая допускает инволюцию  $(-x)t = x(-t)$ . Обратно, если имеется  $O(2)$ -стойкий эндоморфный шифр, представляющий собой набор прямых в VW-системе, то в нем можно выделить  $U(2)$ -стойкий подшифр только тогда, когда квазигруппа по умножению допускает такую инволюцию.*

## 2. Условия существования $U(L)$ - и $S(L)$ -стойких шифров

Неменьший интерес представляет исследование  $S(L)$ -стойких шифров и их взаимосвязь с  $U(L)$ -стойкими шифрами. В [1] сформулированы необходимые условия (см. леммы 2, 3 и теоремы 2, 3) существования  $S(L)$ -стойких шифров. Однако достаточные условия неизвестны.

В [1] указано, что условие  $S(L)$ -стойкости сильнее условия  $U(L)$ -стойкости, и приведен пример, показывающий это. Но он оставляет впечатление искусственности и неестественной экстремальности.

В [1] говорится, что импликация  $U(L) \implies U(L-1)$  может не выполняться, и далее указываются дополнительные условия, при которых она имеет место.

Разберем этот вопрос подробнее, в естественных границах параметров шифров. В гл. 6 [1] используется комбинаторное описание множества ключей для  $U(L)$ - и  $S(L)$ -стойкого шифра. Из теоремы 2 и леммы 3 вытекает теорема 3, которая дает необходимое арифметическое условие  $S(L)$ -стойкости.

Из этого результата нами получено следующее арифметическое

**Следствие 1.** *Эндоморфный  $U(L)$ -стойкий шифр с минимальным числом ключей  $\pi = \binom{\lambda}{L}$  и  $1 \leq L \leq \frac{\lambda+1}{2}$  является  $U(L')$ -стойким для  $L' \leq L$  только при условии, что  $\binom{\lambda}{L}$  делит  $\binom{\lambda}{L'}$ .*

Получаем, что отношение  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = \frac{\lambda!}{(\lambda-L)!L!} = \frac{(\lambda-L')!L!}{(\lambda-L)!L!}$  должно являться целым чис-

лом для всех  $L'$ .

При  $L' = L - a$ :  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = \frac{(\lambda-L+1) \cdot (\lambda-L+2) \cdot \dots \cdot (\lambda-L+a)}{L \cdot (L-1) \cdot (L-2) \cdot \dots \cdot (L-a+1)}$ . Рассмотрим примеры

использования следствия 1:

Пример 1.  $L = 2, \lambda \geq 5$ :  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = \frac{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}}{\lambda} = \frac{\lambda-1}{2}$  — целое число, т.е.  $\lambda$  нечетно (см. лемму 4.2.9 [1]).

Пример 2.  $L = 3, \lambda \geq 5$ :

При  $L' = 1$  имеем  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = \frac{\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{6}}{\lambda} = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{6}$  — целое число.

При  $L' = 2$  имеем  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = \frac{\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{6}}{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}} = \frac{\lambda-2}{3}$  — целое число, а значит,  $(\lambda-2)$  должно делиться на три без остатка.

При  $L' = 3$  имеем  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = 1$ , что не накладывает никаких условий на  $\lambda$ .

Для выведения общего условия обозначим  $z = \frac{\lambda-2}{3}$  — целое число.

Тогда  $A = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{6} = \frac{(\lambda-1)z}{2}$ . При нечетном  $\lambda$  дробь  $\frac{\lambda-1}{2}$  является целым числом, и тогда  $A$  — целое число. При четном  $\lambda$ , так как  $z$  четно, получаются  $\frac{z}{2}$  — целое число и вся дробь  $A$  — целое число. Итак, получаем

**Утверждение 6.** Если существует эндоморфный  $U(3)$ -стойкий шифр с минимальным числом ключей, то  $(\lambda-2)$  делится на три.

По утверждению 6 получается, что существуют, например, массивы  $PA_1(3, 5, 5) = PA_1(2, 5, 5)$ ,  $PA_1(3, 8, 8)$ ,  $PA_1(3, 32, 32)$ , о которых было сказано в [1]; но не существуют  $PA_1(3, 6, 6)$ ,  $PA_1(3, 7, 7)$  и соответствующие им  $U(3)$ -стойкие шифры.

Если  $\lambda = 2^n$ , то  $2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1)$  делится на три только при четных  $(n-1)$ . Следовательно,  $PA_1(3, 2^n, 2^n)$  может существовать только при нечетных  $n$  (в указанных выше примерах  $n = 3$  и  $n = 5$ ).

Пример 3.  $L = 4, \lambda \geq 7$ :

При  $L' = 1$  имеем  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = \frac{\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{24}}{\lambda} = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{24}$  — целое число.

При  $L' = 2$  имеем  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = \frac{\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{24}}{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}} = \frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{12}$  — целое число.

При  $L' = 3$  имеем  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = \frac{\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{24}}{\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{6}} = \frac{\lambda-3}{4}$  — целое число.

При  $L' = 4$  имеем  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = 1$ .

При рассмотрении всех вариантов  $\lambda$  приходим к следующему утверждению:

**Утверждение 7.** Если существует эндоморфный минимальный  $U(4)$ -стойкий шифр, то либо  $\lambda = 15 + 12t$ , либо  $\lambda = 11 + 12t$ , где  $t \geq 0$ .

**Следствие 2.** Из перпендикулярных массивов  $PA_4(4, \lambda, \lambda)$  при  $\lambda = 9$  и  $\lambda = 33$  нельзя извлечь подмассивы, реализующие  $PA_1(4, \lambda, \lambda)$  с минимальным количеством ключей при  $\lambda = 9$  и  $\lambda = 33$ , так как  $9 - 3 = 6$  и  $33 - 3 = 30$  не делятся на 4.

Существование массивов  $PA_4(4, \lambda, \lambda)$  с  $\lambda = 9$  и  $\lambda = 33$  указано в [1].

В общем случае при  $L' = L - 1$  получим равенство  $\frac{\binom{\lambda}{L}}{\binom{\lambda}{L'}} = \frac{\lambda - L + 1}{L}$  и соответствующее ему

**Утверждение 8.** Если существует эндоморфный минимальный  $U(L)$ -стойкий шифр, то  $(\lambda - L + 1)$  делится на  $L$ .

Данное условие  $U(L)$ -стойкости является необходимым, но недостаточным.

### 3. О существовании массива $PA_1(3, 128, 128)$

Как было уже сказано, современные аналоги совершенных шифров можно строить на основе линейных уравнений зашифрования вида

$$y = F(x)k + \ell. \quad (3.1)$$

Поскольку поиск таких шифров трудоемок из-за недостаточности информации, рассмотрим вопрос о существовании соответствующих им массивов конкретного вида.

Рассмотрим эндоморфный  $U(3)$ -стойкий шифр над конечным полем характеристики два  $GF(128)$  и соответствующий ему перпендикулярный массив. В формуле зашифрования (3.1)  $k \in GF^*(q)$ ,  $\ell \in GF(q)$ , а  $F(x)$  — некоторая функция (это может быть дробно-линейная или степенная функция, матрица). Число ключей для этого шифра над  $GF(128)$  рассчитывается по формуле  $\pi = \binom{128}{3} = 2^7 \cdot (2^7 - 1) \cdot \frac{126}{6} = 2^7 \cdot (2^7 - 1) \cdot 21$ . Для существования эндоморфного  $U(3)$ -стойкого шифра необходима двадцать одна функция  $F(x)$ .

Пусть функция  $F(x)$  задается с помощью линейных многочленов. Для этого нужно решить систему сравнений многочленов по китайской теореме об остатках:

$$\begin{cases} f(x) \equiv 1 \pmod{(x+1)} \\ f(x) \equiv ax^2 + bx + c \pmod{(x^3 + x + 1)} \\ f(x) \equiv dx^2 + ex + g \pmod{(x^3 + x^2 + 1)} \end{cases}. \quad (3.2)$$

Необходимо найти функцию, для которой выполнялись бы условия равенства функций  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = 1$  и  $f_3(x) = x^2 + 1$  по модулю  $(x^7 + 1)$ , являющемуся произведением модулей системы.

Общая формула:

$$\begin{aligned}
y &= (x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) + (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(ax^2 + bx + c) \\
&+ (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^2 + 1)(dx^2 + ex + g) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\
&+ ax^6 + bx^5 + cx^4 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c \\
&+ dx^8 + ex^7 + gx^6 + dx^7 + ex^6 + gx^5 + dx^5 + ex^4 + gx^3 + dx^2 + ex + g \\
&= dx^8 + x^7(d + e) + x^6(a + e + g + 1) + x^5(b + d + g + 1) + x^4(a + c + e + 1) \\
&+ x^3(a + b + g + 1) + x^2(a + b + c + d + 1) + x(b + c + e + 1) + c + g + 1,
\end{aligned}$$

где  $a, b, c, d, e, g \in \mathbb{Z}_2$ .

Всего  $2^6 = 64$  варианта решения системы. Нам не подходят варианты параметров, для которых  $a = b = c = 0$  и  $d = e = g = 0$ . Остается 49 вариантов, при подстановке которых в систему (3.2) получаются 21 пятичлен, 21 трехчлен и 7 одночленов.

Далее необходимо проверить, являются ли перестановками функции  $G(x)$  и  $H(x)$ , где  $G(x) = \frac{F(x)}{x}$  и  $H(x) = x \cdot F(x)$ . Одночлены всегда являются перестановками функций  $G(x)$ ,  $H(x)$ , поэтому нужно проверить только пятичлены и трехчлены.

Примером линейного многочлена является линейный многочлен  $A(x) = x^{2^5} + x^{2^2} + x^{2^0}$ , ассоциированный с многочленом  $a(x) = x^5 + x^2 + 1$ .

Пример проверки пятичлена на перестановки:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + x^0; \\
F(x) &= x^{2^5} + x^{2^4} + x^{2^3} + x^{2^2} + x^{2^1} + x^{2^0}; \\
G(x) &= x^{2^5-1} + x^{2^4-1} + x^{2^3-1} + x^{2^2-1} + x^{2^1-1} + x^{2^0-1}; \\
G(\alpha^{13}) &= G(\alpha^{78}) = G(\alpha^{110}); \\
H(x) &= x^{2^5+1} + x^{2^4+1} + x^{2^3+1} + x^{2^2+1} + x^{2^1+1} + x^{2^0+1}; \\
H(\alpha^8) &= H(\alpha^{59}) = H(\alpha^{65}).
\end{aligned}$$

При проверке не было найдено ни одного трехчлена или пятичлена, для которых являлись бы перестановками функции  $G(x)$  и  $H(x)$ . При условии, что необходимо было найти не менее четырнадцати либо пятичленов, либо трехчленов, которые являются перестановками, делаем вывод о несуществовании  $U(3)$ -стойкого шифра со 128 шифрвеличинами, в котором функции  $F(x)$  являются линейными многочленами.

Теперь зададим функцию  $F(x)$  как степенную вида  $x^s$  и получим  $y = x^s k + \ell$ . Необходимо найти 21 значение параметра  $s$  из интервала  $\{1, 2, 3, \dots, 126\}$ . Используем для этого следующие три условия  $U(3)$ -стойкости для шифра, задаваемого уравнением зашифрования (3.1):

1. Уравнение

$$f_i(x)k' + \ell' = f_j(x)k'' + \ell'' \quad (3.3)$$

имеет меньше трех корней.

2. Система уравнений

$$\begin{cases} f_i(x_1)k' + \ell' = f_j(x_2)k'' + \ell'' \\ f_i(x_2)k' + \ell' = f_j(x_1)k'' + \ell'' \\ f_i(x_3)k' + \ell' = f_j(x_3)k'' + \ell'' \end{cases} \quad (3.4)$$

не имеет решений.

3. Система уравнений

$$\begin{cases} f_i(x_1)k' + \ell' = f_j(x_2)k'' + \ell'' \\ f_i(x_2)k' + \ell' = f_j(x_3)k'' + \ell'' \\ f_i(x_3)k' + \ell' = f_j(x_1)k'' + \ell'' \end{cases} \quad (3.5)$$

не имеет решений.

Отсев степеней  $s$  происходит по этим трем условиям. Элементы 1, 19, 20, 107, 108, 126 образуют подгруппу шестого порядка в циклической группе 126-го порядка, являющейся группой автоморфизмов группы  $\mathbb{Z}_{127} = GF^*(128)$ . Построим таблицу смежных классов группы  $\text{Aut}(GF^*(128))$  по этой подгруппе (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Таблицы смежных классов

$\times$	1	19	20	107	108	126
1	1	<u>19</u>	20	<u>107</u>	108	126
2	2	38	40	<u>87</u>	<u>89</u>	125
3	3	57	60	67	70	<u>124</u>
4	4	<u>76</u>	80	47	51	123
5	5	95	100	27	<b>32</b>	<u>122</u>
6	<u>6</u>	<u>114</u>	<u>120</u>	<u>7</u>	13	<u>121</u>
8	8	25	33	94	102	119
9	9	44	53	74	83	<u>118</u>
10	<u>10</u>	63	<u>73</u>	54	<b>64</b>	117
11	11	82	93	34	45	116
12	12	101	113	<u>14</u>	26	115

$\times$	1	19	20	107	108	126
15	15	<u>31</u>	46	81	<u>96</u>	<u>112</u>
16	16	50	66	61	77	111
17	17	69	<u>86</u>	<u>41</u>	58	<u>110</u>
18	<u>18</u>	88	<u>106</u>	<u>21</u>	<u>39</u>	<u>109</u>
22	<u>22</u>	37	59	68	90	105
23	23	56	79	48	71	104
24	24	75	99	28	<u>52</u>	103
29	29	43	72	<u>55</u>	84	98
30	30	62	92	35	65	<u>97</u>
36	36	49	85	<u>42</u>	78	91

Всего получился 21 класс. Из табл. 1 видно, что строки 9, 11, 12, 23, 29, 30 содержат степени, которые нельзя использовать в качестве  $s$ . Здесь жирным шрифтом выделены степени двойки, которые можно использовать в качестве степени  $s$ . Жирным подчеркнутым шрифтом выделены числа, которые имеют две неподвижных точки и поэтому удовлетворяют условию (3.3); условия (3.4) и (3.5) для них не проверялись. Обычным шрифтом обозначены степени, соответствующие функции которых имеют более двух неподвижных точек, а подчеркнутым шрифтом — степени многочленов Човла вида  $x^n + x + 1$ , которые нельзя использовать, так как они имеют 7 корней в поле  $GF(128)$ .

На примере 12-й строки покажем, что эти числа имеют более двух неподвижных точек. Для этого приведем изначальное уравнение зашифрования к следующему виду:  $y = \theta^{st}k + \ell$ , где  $\theta^t = x$ . Ищем неподвижные точки, для которых  $f(x) = x$ ,  $\ell = 1$ . Тогда  $\theta^t = \theta^{st}k + 1 \iff \theta^t + 1 = \theta^{st}k \implies k = \frac{\theta^t + 1}{\theta^{st}} = \theta^{L(t)-st}$ , где  $L(t)$  — логарифм Зеха — Якоби. Неподвижными точками будут:

- $t \in \{19, 36, 82, 107\}$  при  $s = 12$  (т.е. при этих  $t$  получаются одинаковые значения  $k$ );
- $t \in \{61, 80, 91\}$  при  $s = 101$ ;
- $t \in \{1, 50, 55\}$  при  $s = 113$ ;
- $t \in \{52, 71, 124\}$  при  $s = 26$ ;
- $t \in \{12, 18, 105\}$  при  $s = 115$ .

Следовательно, вся 12-я строка содержит запрещенные степени и ее нельзя брать для построения шифра. Остальных 20 строк не хватит для  $U(3)$ -стойкого шифра. Поэтому функции  $F(x)$  нельзя задать в виде степенных функций  $x^s$ .

На основе полученных выше результатов мы получили следующее

**Утверждение 9.** *Невозможно построить перпендикулярный массив  $PA_1(3, 128, 128)$  и соответствующий ему  $U(3)$ -стойкий шифр с уравнением зашифрования  $y = F(x)k + \ell$ , где  $F(x)$  — линейный многочлен или степенная функция вида  $F(x) = x^s$ .*

#### 4. О существовании массива $PA_1(3, 11, 11)$

Рассмотрим еще один вид функции зашифрования (3.1) на примере массива  $PA_1(3, 11, 11)$ , возможность существования которого вытекает из следствия 1. Параметры  $k, \ell \in \mathbb{Z}_{11}$ .

В такой матрице будет  $\frac{11 * 10 * 9}{1 * 2 * 3} = 11 * 5 * 3 = 165$  строк; для построения ее, таким образом, можно использовать 3 функции, 5 значений  $k$  и все 11 возможных значений  $\ell$  [5]. Возьмем в качестве одной из трех функций  $f_1(x) = x$ . Необходимо найти такие  $f(x)$  и  $k$ , чтобы они в совокупности образовывали перпендикулярный массив, или доказать, что таких наборов не существует.

Одним из способов решения данной задачи является полный перебор и отсеивание ненужных функций, а затем проверка комбинаций  $k$  и оставшихся  $f(x)$  на условие  $U(3)$ -стойкости.

Функции можно представить в виде подстановок на множестве из 11-и элементов, которые не должны противоречить условиям (3.3)–(3.5) с  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Так как  $k', k'' \in \mathbb{Z}_{11}^*$ ;  $\ell', \ell'' \in \mathbb{Z}_{11}$ , то условие (3.3) будет выполняться хотя бы для одного набора параметров, для каждой функции в массиве обязательно будет перестановка, начинающиеся с 01. Этим условиям могут удовлетворять только два типа функций, имеющих разложения на циклы следующего вида:

- 1)  $(0)(1)(abcd)(efgih)$ , длины циклов соответственно 1, 1, 4 и 5.
- 2)  $(0)(1)(abcdefgih)$ , длины циклов соответственно 1, 1 и 9.

Для построения массива, во-первых, нужно сгенерировать массив всех  $9! = 362\,880$  перестановок из 9 элементов. Для этого используется быстрый алгоритм генерации из книги [9]. К получившимся строкам добавляем префикс 01.

Во-вторых, необходимо, насколько это возможно, уменьшить список функций, которыми можно будет воспользоваться для перебора матриц-кандидатов на  $U(3)$ -стойкий шифр. Для этого было разработано консольное приложение SelectPerm [10]. Его задача — искать во входном файле перестановки, которые не создают коллизии вместе с каким-либо началом матрицы. Под коллизией здесь понимается ситуация, когда пара строк не удовлетворяет условиям (3.3)–(3.5), под началом матрицы — блок, построенный на основе уравнения (3.1) с  $f_1(x) = x$  и  $k = 1$  (без ограничения общности). Приложение использует следующий алгоритм проверки подстановок  $\alpha$  и  $\beta$ :

1. Вычисляется композиция  $\gamma = \alpha\beta^{-1}$ .
2. Полученная подстановка раскладывается на циклы.
3. Выводится информации о возникновении коллизии, если среди циклов образуются:
  - (а) хотя бы три цикла длины 1;
  - (б) хотя бы один цикл длины 1 и хотя бы один цикл длины 2;
  - (с) хотя бы один цикл длины 3.

**Пример 4.** Пусть  $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ , тогда  $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  разлагается на циклы  $(0,2,3)(1,4)$ . Так как присутствует цикл длины 3, то возникла коллизия.

Так как часть матрицы, построенная по формуле  $y = x + \ell$ , должна присутствовать обязательно, то эта операция выполняется 11 раз, по одному на каждую строку первого квадрата. В результате таких действий остается лишь 85 функций-подстановок. Осталось выбрать такую функцию и такой набор  $k$ , чтобы можно было построить матрицу.

Перебор вариантов осуществлялся с помощью Microsoft Excel и макроса, представляющего собой проверку пар строк на возникновение коллизии этим алгоритмом.

Одной из функций, посредством которой строится  $U(3)$ -стойкий шифр, является  $y = kx + \ell$  [5]. С помощью нее и (3.1) генерируется треть будущей матрицы — 55 строк, или 5 квадратов с размерами  $11 \times 11$ .

В-третьих, необходимо проверить эту часть матрицы вместе с оставшимися после предыдущего шага 85 функциями на возникновение коллизий.

После выполнения всех трех шагов получилась следующая таблица (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

**Список функций, прошедших проверку  
на отсутствие коллизий с квадратами матрицы,  
построенными с помощью уравнения  $y = kx + \ell$  ( $A = 10$ )**

$x$	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A	Функции вида $y = kx + \ell$
$f(x)$	0 1 7 2 8 9 3 5 A 4 6	$y = x + \ell, y = 3x + \ell$
$f(x)$	0 1 6 8 2 7 9 3 4 A 5	$y = x + \ell, y = 3x + \ell$
$f(x)$	0 1 3 6 9 7 A 2 4 5 8	$y = x + \ell, y = 4x + \ell$
$f(x)$	0 1 3 5 A 7 4 2 9 6 8	$y = x + \ell, y = 5x + \ell$
$f(x)$	0 1 8 4 2 7 3 9 6 A 5	$y = x + \ell, y = 9x + \ell$
$f(x)$	0 1 7 2 6 3 9 5 A 8 4	$y = x + \ell, y = 9x + \ell$

Однако после данной операции не осталось ни одной подстановки. Какие функции не создают коллизии, с каким квадратом первой трети части матрицы, можно узнать из табл. 2. Заметим, что нет ни одной подстановки, которая бы удовлетворяла условиям  $U(3)$ -стойкости больше чем, вместе с двумя квадратами.

Итак, получено

**Утверждение 10.** *Не существует эндоморфного  $U(3)$ -стойкого шифра с  $\lambda = 11$  и с уравнением зашифрования  $y = f_i(x)k + \ell, i \in \{1, 2, 3\}$ , для которого  $f_1(x) = x, k \in \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\}; x, y, k, \ell \in \mathbb{Z}_{11}$ .*

### З а к л ю ч е н и е

Полученные результаты показали взаимосвязь этой проблематики с классической комбинаторной проблематикой конечных плоскостей, традиционно считающейся трудной для исследования. Созданы основания для построения обобщенной теоремы о взаимосвязи  $U(2)$ - и  $O(2)$ -стойких шифров и сокращения перебора вариантов уравнений зашифрования при построении  $U(L)$ -стойких шифров. Показана фактическая эквивалентность понятий  $S(L)$ -стойких и  $U(L)$ -стойких эндоморфных минимальных шифров. Полученное необходимое условие существования эндоморфных  $U(L)$ -стойких и  $S(L)$ -стойких шифров с минимальным количеством ключей привело к получению новых результатов о несуществовании. Привлечение более тонких алгебраических, в том числе групповых, свойств, может привести к эффективным критериям существования, применимым на практике [11–13].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зубов А.Ю.** Криптографические методы защиты информации. Совершенные шифры: Учебн. пособие. М.: Гелиос АРВ, 2005.
2. **Алферов А.П., Зубов А.Ю., Кузьмин А.С., Черемушкин А.В.** Основы криптографии. М.: Гелиос АРВ, 2001.
3. **Шеннон К.** Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.

4. **Коновалова С.С., Титов С.С.** Разностные схемы, проективные плоскости и совершенные шифры // Проблемы теор. и прикл. математики: Тр. 37-й регион. молодеж. конф. Екатеринбург: изд-во УрО РАН, 2006. С. 483–486.
5. **Коновалова С.С., Титов С.С.** О конструкциях эндоморфных совершенных шифров // Проблемы прикл. математики / Под общей ред. С.Л. Дерябина. Екатеринбург: УрГУПС. 2006. Т. 2, № 41(124). С. 70–106.
6. **Гребенщикова Н.В., Корепанова Н.В., Русина И.С., Титов С.С.** Варианты расстановки ферзей на цилиндрической доске // Молодые ученые — транспорту: Тр. 4-й науч.-техн. конф. Екатеринбург: УрГУПС, 2003. С. 359–363.
7. **Холл М.** Комбинаторика. М.: Мир, 1970.
8. **Титов Е.С.** О стойких по Стинсону шифрах // Проблемы теор. и прикл. математики: Тр. 38-й регион. молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 397–400.
9. **Липский В.** Комбинаторика для программистов: пер с пол. М.: Мир, 1988.
10. **Гутарин Д.С.** Реализация проверки и конструирования имитостойких шифров с помощью компьютера // Проблемы теор. и прикл. математики: Тр. 38-й регион. молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 345–350.
11. **Титов Е.С.** Проблемы защиты информационных каналов и данных // Безопасность информационного пространства: Материалы Междунар. науч.-практ. конф. Екатеринбург: УрГУПС, 2006. С. 46.
12. **Титов Е.С.** Незащищенность традиционных каналов связи от несанкционированного доступа: теория и практика // Молодые ученые – транспорту: Тр. 4-й науч.-практ. конф. Екатеринбург: УрГУПС, 2005. С. 148–153.
13. **Титов Е.С., Мясников И.В.** Проблемы современных методов аутентификации в автомобильных противоугонных сигнализациях // Безопасность информационного пространства. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2003. С. 74–75.

Поступила 17.03.2007

УДК 517.9

## О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ОБОБЩЕННЫМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛАПЛАСА<sup>1</sup>

А. В. Жибер, Ю. Г. Михайлова

В статье получен критерий обрыва цепочки обобщенных инвариантов Лапласа, построено общее решение линейной гиперболической системы уравнений с нулевыми инвариантами.

### Введение

Одним из классических приемов построения общих решений линейных гиперболических уравнений вида

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \quad (0.1)$$

является каскадный метод Лапласа (см. напр.: [1]). Основу этого метода составляют последовательность инвариантов Лапласа

$$\dots, h_{-3}, h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2, h_3, \dots \quad (0.2)$$

и связанные с ней преобразования Лапласа.

Элементы цепочки (0.2) вычисляются с помощью рекуррентной формулы

$$h_{i+1} = 2h_i - h_{i-1} - (\ln h_i)_{xy}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

исходя из “начальных значений”

$$h_{-1} = b_y + ab - c, \quad h_0 = a_x + ab - c.$$

Если хотя бы один из инвариантов последовательности (0.2) тождественно равен нулю, то уравнение (0.1) интегрируется в квадратурах.

Наблюдающийся в последнее десятилетие всплеск интереса к преобразованиям и инвариантам Лапласа обусловлен тем, что в ряде недавних работ (см. [2]) были обнаружены тесные связи между некоторыми важными свойствами скалярного нелинейного уравнения

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y),$$

такими как точная интегрируемость, наличие симметрий и дифференциальных подстановок, и свойствами цепочки инвариантов Лапласа линеаризации

$$v_{xy} - F_{u_x}v_x - F_{u_y}v_y - F_u v = 0$$

этого уравнения.

Между тем, хотя инварианты и преобразования Лапласа для скалярных линейных уравнений известны уже более сотни лет, для систем линейных уравнений эти понятия, по-видимому, начали изучаться лишь в последнее время (см. [2–4]).

<sup>1</sup>Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 07-01-00081-а и 08-01-00440-а).

Рассмотрим теперь системы линейных уравнений (0.1). В дальнейшем будем считать  $u$   $n$ -мерным вектором, а коэффициенты  $a, b$  и  $c$  — квадратными матрицами. Введем понятие обобщенных инвариантов, предложенное в [2, 4].

**О п р е д е л е н и е.** Обобщенными  $x$ -инвариантами Лапласа системы (0.1) называются матрицы  $X_i$ , заданные рекуррентными формулами:

$$\begin{aligned} X_1 = H_1 = \frac{\partial}{\partial x}a + ba - c, \quad X_{i+1} = H_{i+1}X_i, \\ H_{i+1} = \frac{\partial}{\partial x}(a_i) - \frac{\partial}{\partial y}b + [b, a_i] + H_i, \quad \frac{\partial}{\partial y}(X_i) + a_iX_i - X_ia = 0. \end{aligned} \quad (0.3)$$

Заметим, что в случае вырожденных инвариантов Лапласа уравнения для нахождения матриц  $a_i$  могут быть неразрешимы, а при наличии решений матрицы  $a_i$  определены неоднозначно. Справедливо следующее утверждение (см. [2, 4]):

**Теорема 1.** *Инвариант Лапласа  $X_i$  системы (0.1) существует и определен однозначно тогда и только тогда, когда для всех  $k < i$  выполнены условия*

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right) (\ker X_k) \subset \ker X_k, \quad (0.4)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) (\operatorname{Im} X_k) \subset \operatorname{Im} X_k. \quad (0.5)$$

Известно (см. напр.: [1]), что если скалярное уравнение (0.1) имеет решение

$$u(x, y) = \sum_{i=0}^m p_i(x, y) \frac{d^i}{dx^i} X(x),$$

где  $p_i, i = 0, 1, \dots, m$  — заданные функции, а  $X(x)$  — произвольная функция, то найдется целое число  $r$  ( $0 \leq r \leq m$ ) такое, что инвариант  $h_r$  равен нулю.

В данной работе этот факт обобщается на системы уравнений типа (0.1) и для таких систем уравнений построено общее решение.

## 1. Условие обрыва цепочки обобщенных инвариантов Лапласа

Опираясь на утверждение теоремы 1, мы можем доказать следующий критерий завершения нулем последовательности обобщенных инвариантов Лапласа.

**Теорема 2.** *Пусть для системы уравнений (0.1) выполнены условия (0.4) и (0.5) для  $k = 1, 2, \dots, m$  и существует решение вида*

$$u = \sum_{i=0}^m p_i(x, y) \frac{\partial^i}{\partial x^i} X(x), \quad (1.1)$$

где  $X(x)$  — столбец произвольных функций  $x_1(x), \dots, x_n(x)$  переменного  $x$ , а  $p_0, p_1, \dots, p_m$  — заданные матрицы-функции переменных  $x$  и  $y$ , причем  $\det p_m \neq 0$ . Тогда обобщенный инвариант Лапласа  $X_{m+1} = 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Нетрудно показать, что формула (0.4) дает необходимое и достаточное условие разрешимости системы (0.3), которую удобно записать так:

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} + a_k \right) X_k = X_k \left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right), \quad (1.2)$$

а (0.5) есть условие разрешимости уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) X_k = X_k \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_k\right). \quad (1.3)$$

Далее, согласно (0.3), справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_k\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) - H_k = \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_k\right) - H_{k+1}. \quad (1.4)$$

Подстановка решения (1.1) в исходную систему (0.1) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) p_m &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) p_{m-1} = H_1 p_m, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) p_k - H_1 p_k + \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) p_{k-1} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) p_0 - H_1 p_0 &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Теперь, полагая  $\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) p_k = Z_{k1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m-2$ , из (1.5) получаем соотношения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) H_1 p_m - H_1 p_{m-1} + Z_{m-21} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) Z_{k1} - H_1 p_k + Z_{k-11} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) Z_{01} - H_1 p_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Далее к правым частям равенств (1.6) применим оператор  $\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right)$  и, учитывая формулы (1.2) и (1.4), будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right) Z_{m-21} &= X_2 p_m, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right) Z_{k1} - H_2 Z_{k1} + \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right) Z_{k-11} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right) Z_{01} - H_2 Z_{01} &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-2. \end{aligned}$$

В силу формул (1.3) и (1.6) получаем, что элементы  $Z_{k1}$  представимы следующим образом:

$$Z_{k1} = H_1 F_{k1}, \quad k = 1, 2, \dots, m-2.$$

Продолжая этот процесс, на  $m-1$  шаге приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{m-1}\right) Z_{0m-1} &= X_m p_m, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{m-1}\right) Z_{0m-1} - H_m Z_{0m-1} &= 0, \quad Z_{0m-1} = X_{m-1} F_{0m-1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

И, наконец, применим к второму соотношению (1.7) оператор  $\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_m\right)$  и, используя равенства (1.2) и (1.4), при  $k = m$ , получим выражение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) X_m \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) p_m - X_{m+1} p_m + H_m \left(X_m p_m - \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{m-1}\right) Z_{0m-1}\right) = 0.$$

Отсюда, в силу первого соотношения (1.7) и формулы  $\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) p_m = 0$  (см. (1.5)), следует, что  $X_{m+1} p_m = 0$  и, соответственно,  $X_{m+1} = 0$ .

Поясним, что, пользуясь симметрией  $x \leftrightarrow y$  системы уравнений (0.1), выше мы привели лишь по одному из двух “симметричных” вариантов теорем 1, 2.

## 2. Построение общего решения линейной системы уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа

Пусть для системы уравнений (0.1) найдутся  $r > 0$  и  $s > 0$  такие, что для всех  $i \leq r$ ,  $j \leq s$  ее инварианты Лапласа  $X_i$  и  $Y_j$  существуют, однозначно определены и  $X_r = Y_s = 0$ .

Предлагаемая здесь схема построения решения системы (0.1) является обобщением так называемого метода “спуска” нахождения высших симметрий для систем уравнений экспоненциального типа (см. [5, 6]). Систему (0.1) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) u = H_1 u,$$

преобразуя ее затем следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) u = u_1, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_1 = H_1 u. \quad (2.1)$$

Предположим, что инварианты  $H_1 = X_1, \dots, X_k$  — невырожденные матрицы. Теперь, полагая

$$u_1 = X_1 v_1,$$

из соотношений (2.1) и (1.3) при  $k = 1$  получаем, что

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_1\right) v_1 \quad (2.2)$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_1\right) v_1 = H_1 v_1. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right) X_1 v_1 = X_2 v_1. \quad (2.4)$$

Для этого надо умножить левую и правую части уравнения (2.3) на матрицу  $X_1$  и воспользоваться равенствами (1.2)–(1.4) при  $k = 1$ .

Далее систему (2.4) запишем в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_1\right) X_1 v_1 = u_2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_2 = X_2 v_1$$

и, полагая  $u_2 = X_2 v_2$ , как и выше, получаем, что

$$v_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_2\right) v_2, \quad (2.5)$$

где  $v_2$  — решение системы уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_2\right) X_2 v_2 = X_3 v_2.$$

При этом из (2.2) и (2.5) имеем

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_1\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_2\right) v_2.$$

Напомним, что так как инварианты  $X_1, \dots, X_k$ , по предположению, — невырожденные матрицы, то этот процесс можно продолжить, и после  $k$ -го шага получаем следующее представление решения  $u$  исходной системы уравнений (0.1):

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_1\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_2\right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial x} + B_k\right) v_k, \quad (2.6)$$

где  $v_k$  — решение системы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_k\right) X_k v_k = X_{k+1} v_k. \quad (2.7)$$

Формулу (2.6), учитывая соотношения (1.3), можно записать так:

$$u = \left[ X_1^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) X_1 \right] \left[ X_2^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) X_2 \right] \dots \left[ X_k^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) X_k \right] v_k. \quad (2.8)$$

Отметим, что обобщенный инвариант  $X_{k+1}$  является вырожденной матрицей.

Теперь при построении решения системы (2.7) мы будем учитывать, что исходная система уравнений (0.1) является двухкомпонентной. Тогда

$$\ker X_{k+1} = \ker X_{k+2} = \dots = \ker X_{r-1}, \quad X_r = 0. \quad (2.9)$$

Оказывается, что возможны только два случая:

либо

$$\operatorname{Im} X_{k+i} \neq \ker X_{k+i}, \quad i = 1, \dots, r - k - 1,$$

либо

$$\operatorname{Im} X_{k+i} = \ker X_{k+i}, \quad i = 1, \dots, r - k - 1.$$

Рассмотрим первый случай:

$$\operatorname{Im} X_{k+i} \neq \ker X_{k+i}, \quad i = 1, \dots, r - k - 1. \quad (2.10)$$

Далее систему (2.7) запишем так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_k\right) X_k v_k = u_k, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_k = X_{k+1} v_k. \quad (2.11)$$

Из равенства (2.10) следует, что  $u_k$  и  $v_k$  можно представить в виде

$$u_k = X_{k+1} v_{k+1},$$

$$v_k = X_{k+1} q_k + e_k, \quad e_k \in \ker X_{k+1}.$$

Пусть  $P$  — базис  $\operatorname{Im} X_{k+1}$ , а  $Q$  — базис  $\ker X_{k+1}$ . Элемент  $Q$  можно выбрать таким, что  $\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) Q = 0$ , а  $P$  — так, что  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) P = 0$ . Также справедливы соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a\right) P = pP + qQ, \quad X_i P = \psi_i P, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, r - 1. \quad (2.12)$$

Отметим, что

$$v_k = W(x)Q,$$

где  $W(x)$  — произвольная функция, есть решение системы (2.7).

Теперь систему уравнений (2.11) перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a_k \right) X_k [X_{k+1}q_k + e_k] = X_{k+1}v_{k+1}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) X_{k+1}v_{k+1} = X_{k+1}^2 q_k. \end{cases} \quad (2.13)$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.13) на матрицу  $H_{k+1}$  и учитывая формулы (1.2), получаем систему

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a_{k+1} \right) X_{k+1}^2 q_k = H_{k+1} X_{k+1} v_{k+1}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) X_{k+1} v_{k+1} = X_{k+1}^2 q_k. \end{cases} \quad (2.14)$$

Учитывая формулу (1.4), нетрудно показать, что система (2.14) эквивалентна системе

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} + a_{k+1} \right) X_{k+1} v_{k+1} = X_{k+2} v_{k+1},$$

которую перепишем в эквивалентной форме:

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} + a_{k+1} \right) X_{k+1} v_{k+1} = u_{k+1}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) u_{k+1} = X_{k+2} v_{k+1}. \quad (2.15)$$

В силу (2.9) имеем

$$u_{k+1} = X_{k+2} v_{k+2}.$$

Тогда система (2.15) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a_{k+1} \right) X_{k+1} v_{k+1} = X_{k+2} v_{k+2}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) X_{k+2} v_{k+2} = X_{k+2} v_{k+1}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.16) на матрицу  $H_{k+2}$  и учитывая формулы (1.2), приходим к системе

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a_{k+2} \right) X_{k+2} v_{k+1} = H_{k+2} X_{k+2} v_{k+2}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) X_{k+2} v_{k+2} = X_{k+2} v_{k+1}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Система (2.17) эквивалентна следующей:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} + a_{k+2} \right) X_{k+2} v_{k+2} = X_{k+3} v_{k+2}.$$

Продолжая этот процесс, на  $(i-1)$ -м шаге мы приходим к системе

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} + a_{k+i} \right) X_{k+i} v_{k+i} = X_{k+i+1} v_{k+i},$$

которую, как и выше, перепишем так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{k+i}\right) X_{k+i} v_{k+i} = u_{k+i}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) u_{k+i} = X_{k+i+1} v_{k+i}. \quad (2.18)$$

Далее, полагая

$$u_{k+i} = X_{k+i+1} v_{k+i+1},$$

приходим к уравнениям

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{k+i}\right) X_{k+i} v_{k+i} = X_{k+i+1} v_{k+i+1}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) X_{k+i+1} v_{k+i+1} = X_{k+i+1} v_{k+i}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.19) на матрицу  $H_{k+i+1}$  и учитывая формулы (1.2), мы получим систему вида

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{k+i+1}\right) X_{k+i+1} v_{k+i} = H_{k+i+1} X_{k+i+1} v_{k+i+1}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) X_{k+i+1} v_{k+i+1} = X_{k+i+1} v_{k+i}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Последняя эквивалентна следующей:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{k+i+1}\right) X_{k+i+1} v_{k+i+1} = X_{k+i+2} v_{k+i+1}. \quad (2.21)$$

Далее, так как  $X_r = 0$ , то при  $i = r - k - 2$  уравнение (2.21) принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + a_{r-1}\right) X_{r-1} v_{r-1} = 0. \quad (2.22)$$

Используя соотношения (2.12), нетрудно показать, что система (2.22) имеет решение вида

$$v_{r-1} = w(x) \exp\left(-\int_{y_0}^y p dy\right) P, \quad (2.23)$$

здесь  $w(x)$  — произвольная функция.

Далее из системы (2.20) мы определим  $v_{r-2}$ :

$$v_{r-2} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{r-1})'_x}{\psi_{r-1}}\right) z\right] P, \quad (2.24)$$

где  $z = \exp\left(-\int_{y_0}^y p dy\right) w(x)$ .

Нетрудно проверить, используя равенство

$$H_{r-1} P = \frac{\psi_{r-1}}{\psi_{r-2}} P,$$

что формулы (2.23), (2.24) удовлетворяют системе (2.19) при  $i = r - k - 1$ . Таким образом построено решение  $v_{r-2}$  уравнения (2.18).

Продолжая этот процесс, мы получаем

$$v_{k+1} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{k+2})'_x}{\psi_{k+2}}\right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{r-1})'_x}{\psi_{r-1}}\right) z\right] P.$$

С учетом (2.12) и формул

$$H_{k+1}P = hP, \quad X_kP = \frac{\psi_{k+1}}{h}P + \mu X_kQ,$$

непосредственно проверяется, с использованием первого уравнения (2.14), что решение системы (2.13) ((2.11))  $v_k = X_{k+1}q_k + e_k$  вычисляется по формуле

$$v_k = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{k+1})'_x}{\psi_{k+1}} \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{r-1})'_x}{\psi_{r-1}} \right) z \right] P + WQ - \int_{y_0}^y \left[ \left( q \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{k+1})'_x}{\psi_{k+1}} \right) + \mu h \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{k+2})'_x}{\psi_{k+2}} \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\psi_{r-1})'_x}{\psi_{r-1}} \right) z(\varsigma) \right] d\varsigma Q. \quad (2.25)$$

Теперь специальное решение исходной системы (0.1) вычисляется по формулам (2.8) и (2.25).

Используя обобщенные инварианты  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{s-1}$ , получаем решение системы (0.1) вида

$$\bar{u} = \left[ Y_1^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right) Y_1 \right] \left[ Y_2^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right) Y_2 \right] \dots \left[ Y_m^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right) Y_m \right] \bar{v}_m, \quad (2.26)$$

где

$$\bar{v}_m = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\psi}_{m+1})'_y}{\bar{\psi}_{m+1}} \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\psi}_{s-1})'_y}{\bar{\psi}_{s-1}} \right) \bar{z} \right] \bar{P} + \bar{W}\bar{Q} - \int_{x_0}^x \left[ \left( \bar{q} \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\psi}_{m+1})'_y}{\bar{\psi}_{m+1}} \right) + \bar{\mu}\bar{h} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\psi}_{m+2})'_y}{\bar{\psi}_{m+2}} \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\psi}_{s-1})'_y}{\bar{\psi}_{s-1}} \right) \bar{z}(\varsigma) \right] d\varsigma \bar{Q}. \quad (2.27)$$

Здесь  $\bar{z} = \exp \left( - \int_{x_0}^x \bar{p} dx \right) \bar{w}(y)$ .

Осталось рассмотреть случай, когда

$$\text{Im } X_{k+i} = \ker X_{k+i}, \quad i = 1, \dots, r - k - 1. \quad (2.28)$$

Из равенств (2.9), (2.28) следует, что  $u_k$  и  $v_k$  можно представить в виде

$$u_k = X_{k+1}v_{k+1}, \quad v_k = q_k + e_k, \quad e_k \in \ker X_{k+1}. \quad (2.29)$$

Как и раньше, через  $Q$  обозначим базис  $\ker X_{k+1}$ , а  $P$  — базис прообраза  $X_{k+1}$ . Элемент  $Q$  можно выбрать таким, что

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right) Q = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) Q = \lambda Q.$$

Так же справедливы соотношения

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right) P = pP + qQ, \quad X_iP = \phi_iQ, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, r - 1. \quad (2.30)$$

Отметим, что

$$v_k = W(x)Q,$$

где  $W(x)$  — произвольная функция, есть решение системы (2.7).

Теперь систему уравнений (2.11), с учетом формул (2.29), перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a_k \right) X_k [q_k + e_k] = X_{k+1} v_{k+1}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) X_{k+1} v_{k+1} = X_{k+1} q_k. \end{cases} \quad (2.31)$$

Умножая левую и правую части первого уравнения системы (2.31) на матрицу  $H_{k+1}$  и учитывая формулы (1.2), получаем систему

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a_{k+1} \right) X_{k+1} q_k = H_{k+1} X_{k+1} v_{k+1}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) X_{k+1} v_{k+1} = X_{k+1} q_k. \end{cases} \quad (2.32)$$

Учитывая формулу (1.4), нетрудно показать, что система (2.32) эквивалентна следующей системе:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} + a_{k+1} \right) X_{k+1} v_{k+1} = X_{k+2} v_{k+1}.$$

Далее, действуя так же, как и в предыдущем случае, получим решение вида

$$v_{k+1} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\phi_{k+2})'_x}{\phi_{k+2}} + \lambda \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\phi_{r-1})'_x}{\phi_{r-1}} + \lambda \right) z \right] P. \quad (2.33)$$

Используя (2.30) и формулы

$$H_{k+1} Q = hQ, \quad X_k P = \frac{\phi_{k+1}}{h} Q + \mu X_k Q,$$

непосредственно проверяем, привлекая первое уравнение (2.32), что решение системы (2.31)((2.11))  $v_k = q_k + e_k$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} v_k &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\phi_{k+1})'_x}{\phi_{k+1}} + \lambda \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\phi_{r-1})'_x}{\phi_{r-1}} + \lambda \right) z \right] P + WQ \\ &- \int_{y_0}^y \left[ \left( q \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\phi_{k+1})'_x}{\phi_{k+1}} + \lambda \right) + \mu h \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\phi_{k+2})'_x}{\phi_{k+2}} + \lambda \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(\phi_{r-1})'_x}{\phi_{r-1}} + \lambda \right) z(\varsigma) \right] d\varsigma Q. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Теперь специальное решение исходной системы (0.1) вычисляется по формулам (2.8) и (2.34).

Используя обобщенные инварианты  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{s-1}$ , получаем решение системы (0.1) вида

$$\bar{u} = \left[ Y_1^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right) Y_1 \right] \left[ Y_2^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right) Y_2 \right] \dots \left[ Y_m^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right) Y_m \right] \bar{v}_m, \quad (2.35)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{v}_m &= \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\phi}_{m+1})'_y}{\bar{\phi}_{m+1}} + \bar{\lambda} \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\phi}_{s-1})'_y}{\bar{\phi}_{s-1}} + \bar{\lambda} \right) \bar{z} \right] \bar{P} + \bar{W}\bar{Q} \\ &- \int_{x_0}^x \left[ \left( \bar{q} \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\phi}_{m+1})'_y}{\bar{\phi}_{m+1}} + \bar{\lambda} \right) + \bar{\mu}\bar{h} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\phi}_{m+2})'_y}{\bar{\phi}_{m+2}} + \bar{\lambda} \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{(\bar{\phi}_{s-1})'_y}{\bar{\phi}_{s-1}} + \bar{\lambda} \right) \bar{z}(\varsigma) \right] d\varsigma \bar{Q}. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно формулам (2.8), (2.25)–(2.27), (2.33)–(2.35) построено решение двухкомпонентной системы уравнений (0.1), зависящее от четырех произвольных функций  $w(x), W(x), \bar{w}(y), \bar{W}(y)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Goursat E.** *Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* P.: Hermann, 1896.
2. **Жибер А.В., Соколов В.В.** Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевого типа // *Успехи мат. наук.* 2001. Т. 56, № 1. С. 63–106.
3. **Жибер А.В., Старцев С.Я.** Интегралы, решения и существование преобразований Лапласа линейной гиперболической системы уравнений // *Мат. заметки.* 2003. Т. 74, № 6. С. 848–857.
4. **Гурьева А.М., Жибер А.В.** Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды // *Теорет. и мат. физика.* 2004. Т. 138, № 3. С. 401–421.
5. **Лезнов А.Н., Шабат А.Б.** *Интегрируемые системы.* Уфа: БФ АН СССР, 1982. С. 34–44.
6. **Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б.** Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // *Теорет. и мат. физика.* 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.

Поступила 01.11.2007

УДК 62-50

## РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ<sup>1</sup>

Л. В. Камнева

Статья посвящена изучению функции цены в игровых задачах быстрогодействия. Предполагается, что построена тестируемая функция и требуется установить, что именно она является функцией цены игры. Сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях совпадения тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстрогодействия, охватывающая случай разрывной тестируемой функции. Работоспособность теоремы проиллюстрирована на примере дифференциальной игры быстрогодействия второго порядка с динамикой конфликтно-управляемой материальной точки.

### Введение

В теории дифференциальных игр изучаются задачи управления по принципу обратной связи в условиях неопределенности и помех. Исследования дифференциальных игр начались в 1950–60-е гг. с рассмотрения математических моделей конфликтных ситуаций в динамических системах. В этих моделях движение управляемой системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, в правую часть которых входят управляющие воздействия. Полезное управление рассматривается как действие первого игрока, минимизирующего некоторый функционал на множестве траекторий системы, а помеха считается результатом управления второго игрока, цель которого состоит в максимизации того же функционала. Управления игроков стеснены геометрическими ограничениями.

В статье рассматриваются игры, в которых функционалом платы является время до попадания фазовой точки на заданное замкнутое терминальное множество  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Такие игры называются дифференциальными играми быстрогодействия. К ним относятся, например, задачи преследования–уклонения, а также задачи оптимального быстрогодействия в теории управления, которые можно рассматривать как игровые задачи при нулевом ограничении на управление второго игрока.

Будем придерживаться позиционной формализации дифференциальной игры, изложенной в книгах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [1, 2]. В рамках позиционной формализации важным для исследования дифференциальной игры является поиск функции цены, которая каждой точке пространства состояний системы ставит в соответствие оптимальный гарантированный результат в игре, начинающейся из этой точки. На базе функции цены можно построить стратегии оптимального управления по принципу обратной связи.

В общем случае функция цены дифференциальной игры быстрогодействия может быть негладкой, разрывной и, кроме того, допускает несобственное значение  $\infty$ .

Предположим, что построена некоторая тестируемая функция и требуется установить, что именно она является функцией цены игры. Данная задача тесно связана с характеристикой функции цены.

Дифференцируемая функция цены [3] является единственным классическим решением краевой задачи для уравнения в частных производных 1-го порядка (уравнения Айзекса–Беллмана).

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (06–01–00414).

Если функция цены негладкая, но непрерывная, то основными при ее характеристике становятся понятия непрерывных  $u$ - и  $v$ -стабильных функций [2, с. 145], введенные в теории позиционных дифференциальных игр. В этом случае  $u$ -стабильные ( $v$ -стабильные) функции при соответствующем краевом условии мажорируют (минорируют) функцию цены дифференциальной игры, которая единственная обладает свойствами  $u$ - и  $v$ -стабильности.

Характеризация разрывной функции цены значительно усложняется [4, 5] и совпадает с описанием разрывного минимаксного решения [4, с. 243] краевой задачи для уравнения Айзекса — Беллмана. А именно в задачах быстрогодействия функция цены является единственной полунепрерывной снизу  $u$ -стабильной функцией, удовлетворяющей нулевому краевому условию на границе терминального множества, к которой поточечно сходится последовательность полунепрерывных сверху  $v$ -стабильных функций, удовлетворяющих тому же краевому условию и непрерывных на границе множества  $M$ . Проверка существования такой последовательности и тем более ее построение затруднительны даже при решении задач на плоскости.

В статье доказана теорема о достаточных условиях совпадения тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстрогодействия, охватывающая случай разрывной функции цены. Условия теоремы требуют проверки свойств, аналогичных свойствам разрывного минимаксного решения, но в сколь угодно малых окрестностях подмножеств, на которые разбиваются границы множеств уровня тестируемой функции. Рассмотрение нескольких окрестностей во многих случаях делает полученные условия более удобными для практической проверки, чем непосредственное использование определения разрывного минимаксного решения. Применение теоремы проиллюстрировано на примере игровой задачи быстрогодействия на плоскости.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние в момент времени  $t$ ;  $u(t) \in P$  и  $v(t) \in Q$  — управления первого и второго игроков;  $P$  и  $Q$  — компактные множества. Предполагается [1, 2], что функция  $f$  непрерывна по совокупности переменных, для нее выполнены условие подлинейного роста и локальное условие Липшица по  $x$ . Пусть

$$H(x, p) := \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle p, f(x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle p, f(x, u, v) \rangle, \quad x, p \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Здесь угловыми скобками обозначено скалярное произведение векторов. Функция  $H$  называется гамильтонианом системы (1.1).

Позиционными стратегиями [1, 2] первого и второго игроков являются произвольные функции  $U: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow P$  и  $V: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow Q$ . Стратегии  $U, V$  порождают пучки  $X_1(x_0, U), X_2(x_0, V)$  конструктивных движений, выходящих из начальной позиции  $x_0$  при  $t = 0$ .

Конструктивным движением  $x(\cdot) \in X_1(x_0, U)$  называется функция  $x(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  [1, с. 33], для которой на любом отрезке  $[0, \vartheta]$ ,  $\vartheta > 0$ , найдется последовательность ломаных Эйлера  $x^{(k)}(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , определяемых условиями

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(k)}(t) &= f(x^{(k)}(t), U(\tau_i^{(k)}, x^{(k)}(\tau_i^{(k)})), v^{(k)}(t)); \\ t &\in [\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)}), \quad x^{(k)}(0) = x_0, \quad \tau_0^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

равномерно сходящаяся к  $x(\cdot)$  на  $[0, \vartheta]$  и такая, что  $\sup_i (\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Здесь интервалы  $[\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , разбивают полуось  $t \geq 0$ ,  $v^{(k)}(\cdot)$  — измеримая функция со значениями в множестве  $Q$ . Аналогично определяются элементы множества  $X_2(x_0, V)$ .

Цель первого игрока — быстреее сближение точки  $x(t)$  с заданным замкнутым множеством  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Второй игрок стремится либо исключить встречу с  $M$ , либо максимизировать время до встречи. Таким образом, функционал платы для игровой задачи быстродействия имеет вид

$$J(x(\cdot); M) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x(t) \notin M \text{ для любого } t \geq 0; \\ \min\{t \geq 0: x(t) \in M\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если в точке  $x_0$  выполнено равенство

$$\inf_U \sup_{x(\cdot) \in X_1(x_0, U)} J(x(\cdot); M) = \sup_V \inf_{x(\cdot) \in X_2(x_0, V)} J(x(\cdot); M) =: T(x_0; M),$$

то значение  $T(x_0; M) \in [0, \infty]$  называется ценой игры в точке  $x_0$ .

При указанных условиях на функцию  $f$  для любого  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  существует цена игры [1, 2]. Функция  $T(\cdot; M) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  называется функцией цены игры.

Пусть на замкнутом множестве  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  определена некоторая функция  $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Задача состоит в нахождении таких условий на функцию  $\varphi(\cdot)$ , при которых выполнено равенство  $\varphi(x) = T(x; M)$ ,  $x \in \Omega$ .

## 2. Свойства $u$ - и $v$ -стабильных функций

С функцией цены тесно связаны понятия  $u$ - и  $v$ -стабильных функций [2, 4].

**О п р е д е л е н и е 1.** Функция  $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$   $u$ -стабильна на открытом множестве  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ , если она полунепрерывна снизу и для любых  $y_0 \in G$  и  $v_* \in Q$  существуют  $\tau > 0$  и такое решение  $y(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow G$  дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co} \{f(y(t), u, v_*) : u \in P\}, \quad y(0) = y_0, \quad (2.1)$$

для которых имеет место неравенство

$$\omega(y(t)) \leq \omega(y_0) - t, \quad t \in [0, \tau]. \quad (2.2)$$

В случае, когда функция  $\omega(\cdot)$  конечна, неравенство (2.2) означает выполнение включения

$$(\omega(y_0) - t, y(t)) \in \text{epi} \omega, \quad t \in [0, \tau],$$

где  $\text{epi} \omega = \{(z, x) : z \geq \omega(x), x \in G\}$  — надграфик функции  $\omega(\cdot)$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Функция  $\tilde{\omega}(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$   $v$ -стабильна на открытом множестве  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ , если она полунепрерывна сверху и для любых  $y_0 \in G$  и  $u_* \in P$  существуют  $\tau > 0$  и такое решение  $y(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow G$  дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co} \{f(y(t), u_*, v) : v \in Q\}, \quad y(0) = y_0, \quad (2.3)$$

для которых имеет место неравенство

$$\tilde{\omega}(y(t)) \geq \tilde{\omega}(y_0) - t, \quad t \in [0, \tau]. \quad (2.4)$$

В случае, когда функция  $\tilde{\omega}(\cdot)$  конечна, неравенство (2.4) означает выполнение включения

$$(\tilde{\omega}(y_0) - t, y(t)) \in \text{hypo} \omega, \quad t \in [0, \tau],$$

где  $\text{hypo} \tilde{\omega} = \{(z, x) : z \leq \tilde{\omega}(x), x \in G\}$  — подграфик функции  $\tilde{\omega}(\cdot)$ .

Заметим, что в работах [2, 4] определения  $u$ - и  $v$ -стабильных функций даны для конечных функций.

Сформулируем инфинитезимальные критерии стабильных функций.

Пусть задана функция  $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ , где  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  — открытое множество. Применим к функции  $\omega(\cdot)$  преобразование Кружкова [6]:

$$\mathbf{w}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\omega(x)), & \omega(x) < \infty; \\ 1, & \omega(x) = \infty. \end{cases} \quad (2.5)$$

Имеем  $\mathbf{w}(\cdot) : G \rightarrow [0, 1]$ , т.е. функция  $\mathbf{w}(\cdot)$  принимает только конечные значения.

Свойство  $u$ -стабильности полунепрерывной снизу функции  $\omega(\cdot)$  эквивалентно слабой инвариантности надграфика  $\text{epi } \mathbf{w}$  функции  $\mathbf{w}(\cdot)$  относительно дифференциального включения [4, с. 265]

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in \mathbf{E}^+(x(t), z(t), v_*).$$

Здесь многозначное отображение  $\mathbf{E}^+$  определяется формулой

$$\mathbf{E}^+(x, z, v_*) = \text{co} \{(f(x, u, v_*), g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : u \in P, g = z - 1\},$$

где  $x \in G$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $v_* \in Q$ . Это свойство характеризует функцию  $\mathbf{w}(\cdot)$  как верхнее минимаксное решение [4, с. 38] уравнения в частных производных первого порядка

$$H(x, \nabla \mathbf{w}(x)) + 1 - \mathbf{w}(x) = 0, \quad x \in G.$$

Воспользовавшись одним из эквивалентных критериев [4, с. 38] верхнего минимаксного решения, находим, что свойство  $u$ -стабильности функции  $\omega(\cdot)$  равносильно выполнению неравенства

$$\inf \{d^- \mathbf{w}(x; \eta) - g : (\eta, g) \in \mathbf{E}^+(x, z, v_*)\} \leq 0, \quad x \in G, \quad v_* \in Q. \quad (2.6)$$

Здесь  $d^- \mathbf{w}(x; \eta)$  — нижняя производная функции  $\mathbf{w}(\cdot)$  в точке  $x$  по направлению  $\eta$ :

$$d^- \mathbf{w}(x; \eta) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon \mathbf{w}(x; \eta),$$

$$D_\varepsilon \mathbf{w}(x; \eta) = \{\delta^{-1}[\mathbf{w}(x + \delta \eta') - \mathbf{w}(x)] : \delta \in (0, \varepsilon), \|\eta - \eta'\| \leq \varepsilon\}.$$

Аналогично можно показать, что свойство  $v$ -стабильности полунепрерывной сверху функции  $\omega(\cdot)$  равносильно выполнению неравенства

$$\sup \{d^+ \mathbf{w}(x; \eta) - g : (\eta, g) \in \mathbf{E}^-(x, z, u_*)\} \geq 0, \quad x \in G, \quad u_* \in P. \quad (2.7)$$

Здесь

$$\mathbf{E}^-(x, z, u_*) = \text{co} \{(f(x, u_*, v), g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : v \in Q, g = z - 1\},$$

$$d^+ \mathbf{w}(x; \eta) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon \mathbf{w}(x; \eta)$$

есть верхняя производная функции  $\mathbf{w}(\cdot)$  в точке  $x$  по направлению  $\eta$ .

После несложных преобразований неравенств (2.6), (2.7) получаем следующее утверждение.

**Утверждение 1.** *Полунепрерывная снизу (сверху) функция  $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ , где  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  есть открытое множество, будет  $u$ -стабильной ( $v$ -стабильной) тогда и только тогда, когда для любого  $x_* \in G$  выполнено неравенство*

$$\inf \{d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) : \eta \in \text{co } f(x_*, P, v)\} \leq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad v \in Q \quad (2.8)$$

$$\left( \sup \{d^+ \mathbf{w}(x_*; \eta) : \eta \in \text{co } f(x_*, u, Q)\} \geq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad u \in P \right). \quad (2.9)$$

Здесь функция  $\mathbf{w}(\cdot)$  определена формулой (2.5),

$$f(x, P, v) = \{f(x, u, v) : u \in P\}, \quad f(x, u, Q) = \{f(x, u, v) : v \in Q\}.$$

Следующие утверждения упрощают проверку неравенств (2.8), (2.9) в некоторых частных случаях.

**Утверждение 2.** Пусть задана функция  $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ ,  $x_* \in G$ ,  $\omega(x_*) < \infty$  и для любого  $v \in Q$  найдется число  $\tau > 0$  и такая функция  $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow G$ , что

$$\beta(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\beta}(+0) \in \text{co } f(x_*, P, v), \quad \beta(0) = x_*,$$

$$\Phi(t) = \omega(\beta(t)) < \infty, \quad t \in [0, \tau), \quad \Phi(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\Phi}(+0) \leq -1.$$

Тогда в точке  $x_*$  выполнено соотношение (2.8).

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{\Phi}(t) = \mathbf{w}(\beta(t))$ ,  $t \in [0, \tau)$ . Имеем

$$\tilde{\Phi}(t) = 1 - e^{-\Phi(t)}, \quad \dot{\tilde{\Phi}}(t) = e^{-\Phi(t)} \dot{\Phi}(t), \quad t \in (0, \tau),$$

$$\dot{\tilde{\Phi}}(+0) = e^{-\omega(x_*)} \dot{\Phi}(+0) \leq -e^{-\omega(x_*)} = \mathbf{w}(x_*) - 1. \quad (2.10)$$

Покажем, что  $d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) \leq \dot{\tilde{\Phi}}(+0)$ , где  $\eta = \dot{\beta}(+0)$ . Выберем произвольную последовательность  $\delta_k \downarrow 0$ . По формуле Тейлора имеем

$$\beta(\delta_k) = \beta(0) + \dot{\beta}(+0)\delta_k + o(\delta_k).$$

Следовательно,

$$\beta(\delta_k) = x_* + \eta_k \delta_k, \quad \eta_k = \eta + o(\delta_k)/\delta_k, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = \eta.$$

Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{w}(x_* + \eta_k \delta_k) - \mathbf{w}(x_*)}{\delta_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\Phi}(\delta_k) - \tilde{\Phi}(0)}{\delta_k} = \dot{\tilde{\Phi}}(+0).$$

Пусть  $\varepsilon_k = \max\{\delta_k, \|\eta - \eta_k\|\}$ . Имеем

$$\frac{\mathbf{w}(x_* + \eta_k \delta_k) - \mathbf{w}(x_*)}{\delta_k} \in D_{\varepsilon_k} \mathbf{w}(x_*; \eta).$$

Следовательно,

$$d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) = \liminf_{k \rightarrow \infty} D_{\varepsilon_k} \mathbf{w}(x_*; \eta) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{w}(x_* + \eta_k \delta_k) - \mathbf{w}(x_*)}{\delta_k} = \dot{\tilde{\Phi}}(+0).$$

Учитывая (2.10), получаем, что

$$d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) \leq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad \eta = \dot{\beta}(+0),$$

откуда следует неравенство (2.8).

**Утверждение 3.** Пусть задана функция  $\omega : G \rightarrow [0, \infty]$ ,  $x_* \in G$  и для любого  $u \in P$  найдется число  $\tau > 0$  и такая функция  $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow G$ , что

$$\beta(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\beta}(+0) \in \text{co } f(x_*, u, Q), \quad \beta(0) = x_*,$$

и для случая  $\omega(x_*) < \infty$  выполнены условия

$$\Phi(t) = \omega(\beta(t)) < \infty, \quad t \in [0, \tau), \quad \Phi(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\Phi}(+0) \geq -1,$$

а для случая  $\omega(x_*) = \infty$  имеем  $\Phi(t) = \omega(\beta(t)) = \infty$ ,  $t \in [0, \tau)$ . Тогда в точке  $x_*$  выполнено соотношение (2.9).

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{\Phi}(t) = \mathbf{w}(\beta(t))$ ,  $t \in [0, \tau)$ . В случае  $\omega(x_*) < \infty$  имеем

$$\dot{\tilde{\Phi}}(+0) = e^{-\omega(x_*)} \dot{\Phi}(+0) \geq -e^{-\omega(x_*)} = \mathbf{w}(x_*) - 1.$$

В случае  $\omega(x_*) = \infty$  выполнено равенство  $\tilde{\Phi}(t) = 0$ ,  $t \in (0, \tau)$ . Следовательно,  $\dot{\tilde{\Phi}}(+0) = 0 \geq \mathbf{w}(x_*) - 1$ . Таким образом, в обоих случаях имеем

$$\dot{\tilde{\Phi}}(+0) \geq \mathbf{w}(x_*) - 1.$$

Аналогично доказательству утверждения 2 можно показать, что

$$d^+ \mathbf{w}(x_*; \eta) \geq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad \eta = \dot{\beta}(+0),$$

откуда следует неравенство (2.9).

**Утверждение 4.** Пусть функция  $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$  конечна и дифференцируема в окрестности точки  $x_* \in G$ . Тогда соотношение (2.8) [(2.9)] эквивалентно неравенству

$$H(x_*, \nabla \omega(x_*)) \leq -1 \tag{2.11}$$

$$\left[ H(x_*, \nabla \omega(x_*)) \geq -1 \right]. \tag{2.12}$$

**Доказательство.** В силу конечности и дифференцируемости функции  $\omega(\cdot)$  в окрестности точки  $x_*$  верно равенство

$$d^\pm \mathbf{w}(x_*; \eta) = \langle \nabla \mathbf{w}(x_*), \eta \rangle = e^{-\omega(x_*)} \langle \nabla \omega(x_*), \eta \rangle, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, для любого  $v \in Q$  имеем

$$\begin{aligned} \inf\{d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) : \eta \in \text{co } f(x_*, P, v)\} &= e^{-\omega(x_*)} \inf\{\langle \nabla \omega(x_*), \eta \rangle : \eta \in \text{co } f(x_*, P, v)\} \\ &= e^{-\omega(x_*)} \min_{u \in P} \langle \nabla \omega(x_*), f(x_*, u, v) \rangle \leq e^{-\omega(x_*)} H(x_*, \nabla \omega(x_*)) = (1 - \mathbf{w}(x_*)) H(x_*, \nabla \omega(x_*)). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что соотношение (2.8) эквивалентно неравенству (2.11).

Аналогично доказывается эквивалентность условий (2.9) и (2.12).

**Утверждение 5.** Пусть функция  $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$  равна  $\infty$  в окрестности точки  $x_* \in G$ . Тогда в точке  $x_*$  выполнены соотношения (2.8) и (2.9).

**Доказательство.** Пусть  $O_* \subset G$  — такая окрестность точки  $x_* \in G$ , что  $\omega(x) = \infty$ ,  $x \in O_*$ . Имеем  $\mathbf{w}(x_*) = 1$ ,  $x \in O_*$ . Следовательно,

$$d^\pm \mathbf{w}(x; \eta) = 0, \quad x \in O_*, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, левые части неравенств (2.8) и (2.9) равны нулю для всех  $x \in O_*$ . Поскольку  $\mathbf{w}(x_*) - 1 = 0$ , то неравенства (2.8) и (2.9) выполнены.

**Утверждение 6.** Пусть функция  $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$  конечна в окрестности точки  $x_* \in G$  и точка  $x_*$  — точка локального минимума функции  $\omega(\cdot)$ . Тогда в точке  $x_*$  выполнено соотношение (2.9).

**Доказательство.** Имеем  $\omega(x) < \infty$  и  $\omega(x_*) \leq \omega(x)$ ,  $x \in O_*$ . Здесь  $O_* \subset G$  — некоторая окрестность точки  $x_*$ . Следовательно,  $\mathbf{w}(x_*) \leq \mathbf{w}(x)$ ,  $x \in O_*$ , и для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  и любых  $\eta \in \mathbb{R}^n$  множество  $D_\varepsilon \mathbf{w}(x_*; \eta)$  не содержит отрицательных чисел. Таким образом,

$$d^+ \mathbf{w}(x_*; \eta) \geq 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Учитывая, что  $\mathbf{w}(x_*) - 1 < 0$ , получаем неравенство (2.9).

Сформулируем леммы, устанавливающие связь между  $u$ - и  $v$ -стабильными функциями и функцией цены игры для подходящего терминального множества.

**Определение 3.** *Допустимой траекторией* называется решение уравнения (1.1) при некоторых измеримых управлениях  $u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow P$  и  $v(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow Q$ .

**Лемма 1.** Пусть  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  — открытое множество,  $D \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутое множество, функция  $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$   $u$ -стабильна на множестве  $G \setminus D$ ,  $t_* \geq 0$  и

$$D \cap G = \{x \in G : \omega(x) \leq t_*\} \neq \emptyset.$$

Предположим, что  $x_* \in G \setminus D$  и все допустимые траектории из начальной точки  $x_*$  не покидают множества  $G$  на отрезке времени  $[0, \omega(x_*) - t_*]$ . Тогда  $\omega(x_*) - t_* \geq T(x_*; D)$ .

**Лемма 2.** Пусть  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  — открытое множество,  $D \subset \mathbb{R}^n$  — замкнутое множество, функция  $\tilde{\omega}(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$   $v$ -стабильна на множестве  $G \setminus D$ ,  $t_* \geq 0$ ,

$$D \cap G = \{x \in G : \tilde{\omega}(x) \leq t_*\} \neq \emptyset$$

и функция  $\tilde{\omega}(\cdot)$  непрерывна в точках множества  $D \cap G$ . Предположим, что  $x_* \in G \setminus D$ ,  $\vartheta \in [0, \tilde{\omega}(x_*) - t_*)$  и все допустимые траектории из начальной точки  $x_*$  не покидают множества  $G$  на отрезке времени  $[0, \vartheta]$ . Тогда  $\vartheta < T(x_*; D)$ .

В случае  $G = \mathbb{R}^n$  доказательства лемм 1, 2 следуют из [1, с. 49–65] и основываются на свойствах стратегий, экстремальных к надграфику (подграфику)  $u$ -стабильной ( $v$ -стабильной) функции. Еще один способ доказательства вытекает из [4, с. 265–274] при условии, что правая часть динамики системы является глобально липшицевой по переменной  $x$ . В случае  $G \subset \mathbb{R}^n$  идея доказательства по сравнению с [1] не изменяется, поскольку допустимые траектории не выходят из  $G$  на рассматриваемом промежутке времени.

**Доказательство леммы 1.** Положим

$$W_* = \{(t, x) \in [0, \omega(x_*) - t_*] \times G : \omega(x) \leq \omega(x_*) - t\}.$$

Заметим, что множество

$$\{(z, x) : z = \omega(x_*) - t, (t, x) \in W_*\}$$

представляет собой часть надграфика функции  $\omega(\cdot)$ , заключенную между значениями  $z = t_*$  и  $z = \omega(x_*)$ .

В силу  $u$ -стабильности функции  $\omega(\cdot)$  множество  $W_*$  является  $u$ -стабильным [1, с. 52] относительно множества  $\tilde{D}$ , где

$$\tilde{D} = [0, \omega(x_*) - t_*] \times (D \cup (\mathbb{R}^n \setminus G)),$$

т.е. для любой точки  $(t_0, y_0) \in W_*$  и любых значений  $\tau > 0$  и  $v_* \in Q$  найдется такое решение  $y(\cdot) : [t_0, t_0 + \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$  дифференциального включения (2.1) с начальным условием  $y(t_0) = y_0$ , что либо  $(t_0 + \tau, y(t_0 + \tau)) \in W_*$ , либо  $(\tau_*, y(\tau_*)) \in \tilde{D}$  для некоторого  $\tau_* \in [t_0, t_0 + \tau]$ .

Имеем  $(0, x_*) \in W_*$  и

$$\{x \in G : (\omega(x_*) - t_*, x) \in W_*\} = D \cap G.$$

Поскольку допустимые траектории для начальной точки  $x_*$  не выходят из множества  $G$  на промежутке времени  $[0, \omega(x_*) - t_*]$ , то стратегия экстремального прицеливания [1, с. 57] первого игрока на множество  $W_*$  сохраняет траекторию системы в  $W_*$  и, следовательно, гарантирует ее приведение на множество  $D$  на отрезке времени  $[0, \omega(x_*) - t_*]$ . Отсюда вытекает неравенство  $\omega(x_*) - t_* \geq T(x_*; D)$ .

**Доказательство леммы 2.** Положим

$$W_{\vartheta}^* = \{(t, x) \in [0, \vartheta] \times G : \tilde{\omega}(x) \geq \tilde{\omega}(x_*) - t\}.$$

Заметим, что множество

$$\{(z, x) : z = \tilde{\omega}(x_*) - t, (t, x) \in W_{\vartheta}^*\}$$

представляет собой часть подграфика функции  $\tilde{\omega}(\cdot)$ , заключенную между значениями  $z = \tilde{\omega}(x_*) - \vartheta$  и  $z = \tilde{\omega}(x_*)$ .

В силу  $v$ -стабильности функции  $\tilde{\omega}(\cdot)$  множество  $W_{\vartheta}^*$  является  $v$ -стабильным [1, с. 52] множеством, т.е. для любой точки  $(t_0, y_0) \in W_{\vartheta}^*$  и любых значений  $\tau > 0$  и  $u_* \in P$  найдется такое решение  $y(\cdot) : [t_0, t_0 + \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$  дифференциального включения (2.3) с начальным условием  $y(t_0) = y_0$ , что если  $t_0 + \tau \leq \vartheta$ , то  $(t_0 + \tau, y(t_0 + \tau)) \in W_{\vartheta}^*$ .

Имеем  $(0, x_*) \in W_{\vartheta}^*$ . Кроме того, в силу непрерывности функции  $\tilde{\omega}(\cdot)$  в точках множества  $D \cap G$  и неравенства  $\tilde{\omega}(x_*) - t_* > \vartheta$  справедливо соотношение

$$\{x \in G : (\vartheta, x) \in W_{\vartheta}^*\} \cap D = \emptyset.$$

Поскольку допустимые траектории для начальной точки  $x_*$  не выходят из множества  $G$  на промежутке времени  $[0, \vartheta]$ , то стратегия экстремального прицеливания [1, с. 57] второго игрока на множество  $W_{\vartheta}^*$  сохраняет траекторию системы в  $W_{\vartheta}^*$  и, следовательно, гарантирует ее уклонение от множества  $D$  на отрезке времени  $[0, \vartheta]$ . Отсюда вытекает неравенство  $\vartheta < T(x_*; D)$ .

### 3. Теорема о достаточных условиях

Далее будем использовать обозначения:  $\bar{A}$  — замыкание множества  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $O(r)$  — открытый шар в  $\mathbb{R}^n$  радиуса  $r > 0$  с центром в начале координат.

Сформулируем и докажем теорему.

**Теорема.** Пусть  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $M \subseteq \Omega$  — замкнутые множества и задана функция

$$\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty].$$

Введем обозначения

$$\Theta = \sup_{z \in \Omega} \varphi(z), \quad D(t) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \leq t\}, \quad t \in [0, \Theta];$$

$$F(t) = \{x \in \partial D(t) : \varphi(x) = t\}, \quad B(t) = \{x \in \partial D(t) : \varphi(x) < t\};$$

$$S(t) = \overline{F(t)} \cap \overline{B(t)}, \quad G(t, \varepsilon) = \begin{cases} \emptyset, & S(t) = \emptyset; \\ S(t) + O(\varepsilon), & S(t) \neq \emptyset, \end{cases} \quad \varepsilon > 0.$$

Предположим, что функция  $\varphi(\cdot)$  полунепрерывна снизу,  $D(0) = M$ ,  $\mathcal{T} \subset (0, \Theta)$  — некоторое конечное (возможно, пустое) множество и выполнены следующие условия:

1) Для любого  $t \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$ , такого что  $S(t) \neq \emptyset$ , существуют число  $\varepsilon_0 > 0$  и множество  $G_\infty \subset G(t, \varepsilon_0) \setminus D(t)$  такие, что:

а) выполнены соотношения  $G(t, \varepsilon_0) \subset G_\infty \cup \Omega$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup \{ \varphi(x) : x \in G(t, \varepsilon) \setminus G_\infty \} = t \quad (3.1)$$

и функция

$$\omega(x) = \begin{cases} \varphi(x) - t, & x \in G(t, \varepsilon_0) \setminus (G_\infty \cup D(t)); \\ 0, & x \in D(t) \cap G(t, \varepsilon_0); \\ \infty, & x \in G_\infty \end{cases} \quad (3.2)$$

и-стабильна на множестве  $G(t, \varepsilon_0) \setminus D(t)$ ;

б) существует последовательность функций

$$\omega_k(\cdot) : G(t, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

которые  $v$ -стабильны на множестве  $G(t, \varepsilon_0) \setminus D(t)$ , равны нулю и непрерывны в точках множества  $D(t) \cap G(t, \varepsilon_0)$ , и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k(x) = \omega(x), \quad x \in G(t, \varepsilon_0). \quad (3.3)$$

2) Для любого  $t \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$ , такого что  $F(t) \setminus S(t) \neq \emptyset$ , и всякого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для множества

$$G^F(t, \varepsilon, \delta) = F(t) \setminus G(t, \varepsilon) + O(\delta)$$

выполнено вложение  $G^F(t, \varepsilon, \delta) \subset \Omega$ , а функция  $\varphi(\cdot)$  конечна и обладает свойствами  $u$ - и  $v$ -стабильности на множестве  $G^F(t, \varepsilon, \delta)$ .

3) Для любого  $t \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$ , такого что  $B(t) \setminus S(t) \neq \emptyset$ , и всякого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$  и последовательность функций

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G^B(t, \varepsilon, \delta) \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$G^B(t, \varepsilon, \delta) = B(t) \setminus G(t, \varepsilon) + O(\delta),$$

такие, что функции  $\omega_k^\infty(\cdot)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $v$ -стабильны на множестве  $G^B(t, \varepsilon, \delta) \setminus D(t)$ , равны нулю и непрерывны в точках множества  $D(t) \cap G^B(t, \varepsilon, \delta)$ , и выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k^\infty(x) = \infty, \quad x \in G^B(t, \varepsilon, \delta) \setminus D(t). \quad (3.4)$$

4) Для любого  $x_0 \in \Omega \setminus M$ , такого что  $\varphi(x_0) = \Theta < \infty$ , найдется последовательность  $\{x_k\}_1^\infty \subset \Omega$ , для которой  $\varphi(x_k) < \varphi(x_0)$  и  $x_k \rightarrow x_0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Тогда

$$\varphi(x) = T(x; M), \quad x \in \Omega.$$

Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма [7].

**Лемма 3.** Пусть замкнутые множества  $D_\tau \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\tau > 0$ , монотонно убывают по включению при  $\tau \rightarrow +0$  и  $\bigcap_{\tau > 0} D_\tau = M$ . Тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} T(x; D_\tau) = T(x; M), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство теоремы. Сначала докажем теорему для случая  $T = \emptyset$ .

Предположим, что  $\Theta = 0$ . Тогда  $\varphi(x) = 0$ ,  $x \in \Omega$ . В силу условия  $D(0) = M$  теоремы получаем, что  $\Omega = M$ , и заключение теоремы очевидно. Далее будем считать, что  $\Theta > 0$ .

1°. Пусть  $t_* \in (0, \Theta)$ . Для краткости будем использовать обозначения

$$D_* = D(t_*), \quad F_* = F(t_*), \quad B_* = B(t_*), \quad S_* = S(t_*).$$

Покажем, что найдется такое  $\vartheta > 0$ , для которого имеет место равенство

$$W(t; D_*) = D(t_* + t), \quad t \in [0, \vartheta]. \quad (3.5)$$

Здесь  $W(t; D_*) = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x; D_*) \leq t\}$  — множество уровня функции цены.

Возможные три случая:  $S_* \neq \emptyset$ ;  $S_* = \emptyset$  и  $F_* \neq \emptyset$ ;  $S_* = \emptyset$  и  $B_* \neq \emptyset$ .

С л у ч а й  $S_* \neq \emptyset$ . Для момента  $t_*$  выберем число  $\varepsilon_0 > 0$ , множество  $G_\infty$  и функции  $\omega_k(\cdot)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , о существовании которых говорится в условии 1) теоремы. Пусть функция  $\omega(\cdot)$  определяется формулой (3.2) при  $t = t_*$ .

а) Покажем, что найдется такое  $\delta_* \in (0, \varepsilon_0)$ , что

$$\varphi(x) - t_* = T(x; D_*), \quad x \in (\overline{F_*} + O(\delta_*)) \setminus (G_\infty \cup D_*). \quad (3.6)$$

Введем обозначение

$$G_*(\varepsilon) = G(t_*, \varepsilon).$$

Пусть  $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ . Найдется такое  $\vartheta_1 > 0$ , что из любой начальной точки  $x_0 \in G_*(\varepsilon_1)$  допустимые траектории не покидают множество  $G_*(\varepsilon_0)$  на отрезке времени  $[0, \vartheta_1]$ . В силу равенства (3.1) существует такое  $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ , что

$$\omega(x) = \varphi(x) - t_* < \vartheta_1, \quad x \in G_*(\varepsilon_2) \setminus G_\infty.$$

Выберем  $x_0 \in G_*(\varepsilon_2) \setminus (G_\infty \cup D_*)$ . Поскольку все допустимые траектории из начальной точки  $x_0$  не покидают множество  $G_*(\varepsilon_0)$  на отрезке времени  $[0, \vartheta_1]$ ,  $\omega(x_0) < \vartheta_1$  и функция  $\omega(\cdot)$   $u$ -стабильна, то в силу леммы 1 справедливо неравенство

$$\omega(x_0) \geq T(x_0; D_*). \quad (3.7)$$

Заметим, что  $\omega(x_0) > 0$ . Выберем произвольное число  $\tau \in (0, \omega(x_0)]$ . В силу условия (3.3) найдется такое  $k \in \mathbb{N}$ , что выполнены неравенства

$$\omega(x_0) - \tau < \omega_k(x_0) < \vartheta_1.$$

Кроме того,  $\omega(x_0) - \tau \geq 0$ . Функция  $\omega_k(\cdot)$   $v$ -стабильна на множестве  $G_*(\varepsilon_0)$ , равна нулю и непрерывна в точках множества  $G_*(\varepsilon_0) \cap D_*$ . В силу леммы 2 справедливо неравенство

$$\omega(x_0) - \tau < T(x_0; D_*), \quad \tau \in (0, \omega(x_0)].$$

Переходя к пределу при  $\tau \rightarrow 0$  и учитывая соотношение (3.7), получаем равенство (3.6) во всех точках множества  $G_*(\varepsilon_2) \setminus (G_\infty \cup D_*)$ .

Предположим, что  $F_* \setminus S_* \neq \emptyset$ . Без ограничения общности считаем, что  $F_* \setminus G_*(\varepsilon_2) \neq \emptyset$ .

По условию 2) теоремы найдется такое  $\delta \in (0, \varepsilon_2]$ , что функция  $\varphi(\cdot)$  непрерывна и  $u$ - и  $v$ -стабильна на множестве  $G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta)$ . Пусть  $\delta_1 \in (0, \delta)$ . Выберем такое  $\vartheta_2 \in (0, \vartheta_1]$ , что из любой начальной точки  $x_0 \in G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta_1)$  допустимые траектории не покидают множество  $G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta)$  на отрезке времени  $[0, \vartheta_2]$ . В силу непрерывности и  $u$ -стабильности функции  $\varphi(\cdot)$  на множестве  $G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta)$  существует такое  $\delta_* \in (0, \delta_1]$ , что

$$\varphi(x) - t_* \leq \vartheta_2, \quad x \in G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta_*).$$

В силу лемм 1, 2 для любой точки  $x_0 \in G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta_*)$  справедливы неравенства

$$\varphi(x_0) - t_* - \tau < T(x_0; D_*) \leq \varphi(x_0) - t_*, \quad \tau \in (0, \varphi(x_0) - t_*).$$

Переходя к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ , получаем равенство (3.6) во всех точках множества  $G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta_*)$ .

Поскольку

$$\overline{F}_* + O(\delta_*) \subset G_*(\varepsilon_2) \cup G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta_*),$$

то имеют место соотношения (3.6).

В случае  $F_* \setminus S_* = \emptyset$  можно взять  $\delta_* = \varepsilon_2$ ; кроме того, положим  $\vartheta_2 = \vartheta_1$ .

б) Покажем, что

$$W(\vartheta_2; D_*) \cap G_\infty \cap G_*(\delta_*) = \emptyset. \quad (3.8)$$

Пусть  $x_0 \in G_\infty \cap G_*(\delta_*)$ . Тогда  $\omega(x_0) = \infty$ . В силу условия (3.3) можно выбрать такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $\omega_k(x_0) > \vartheta_2$ . Поскольку функция  $\omega_k(\cdot)$   $v$ -стабильна на множестве  $G_*(\varepsilon_0)$ , равна нулю и непрерывна в точках множества  $D_* \cap G_*(\varepsilon_0)$ , а из начальной точки  $x_0$  все допустимые траектории не покидают множество  $G_*(\varepsilon_0)$  на отрезке времени  $[0, \vartheta_2]$ , то в силу леммы 2 справедлива оценка

$$\vartheta_2 < T(x_0; D_*), \quad x_0 \in G_\infty \cap G_*(\delta_*).$$

Таким образом, соотношение (3.8) доказано.

в) Предположим сначала, что  $B_* \setminus S_* \neq \emptyset$ . Без ограничения общности можно считать, что  $B_* \setminus G_*(\delta_*) \neq \emptyset$ . Для значения  $\delta_*$  найдем число  $\delta_2 \in (0, \delta_*]$  и последовательность функций

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G^B(t_*, \delta_*, \delta_2) \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

которые удовлетворяют свойствам, приведенным в условии 3) теоремы.

Пусть  $\delta_3 \in (0, \delta_2)$ . Выберем такое  $\vartheta_3 \in (0, \vartheta_2]$ , что из любой начальной точки  $x_0 \in G^B(t_*, \delta_*, \delta_3)$  допустимые траектории не покидают множество  $G^B(t_*, \delta_*, \delta_2)$  на отрезке времени  $[0, \vartheta_3]$ .

Пусть  $x_0 \in G^B(t_*, \delta_*, \delta_3) \setminus D_*$ . В силу (3.4) выберем такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $\omega_k^\infty(x_0) > \vartheta_3$ . Поскольку функция  $\omega_k^\infty(\cdot)$   $v$ -стабильна на множестве  $G^B(t_*, \delta_*, \delta_2)$ , равна нулю и непрерывна в точках множества  $D_* \cap G^B(t_*, \delta_*, \delta_2)$ , то в силу леммы 2 справедлива оценка

$$\vartheta_3 < T(x_0; D_*), \quad x_0 \in G^B(t_*, \delta_*, \delta_3) \setminus D_*.$$

Таким образом,

$$W(\vartheta_3; D_*) \cap (G^B(t_*, \delta_*, \delta_3) \setminus D_*) = \emptyset. \quad (3.9)$$

В случае  $B_* \setminus S_* = \emptyset$  положим  $\vartheta_3 = \vartheta_2$ ,  $\delta_3 = \delta_*$ .

г) Найдем такое  $\vartheta \in (0, \vartheta_3]$ , что для любой начальной точки  $x_0 \notin D_* + O(\delta_3)$  допустимые траектории не достигают множества  $D_*$  на отрезке времени  $[0, \vartheta]$ . Имеем  $T(x_0; D_*) > \vartheta$  для  $x_0 \notin D_* + O(\delta_3)$ . Следовательно,  $W(\vartheta; D_*) \subset D_* + O(\delta_3)$ .

д) Учитывая соотношения (3.8) и (3.9) (последнее — для случая  $B_* \setminus S_* \neq \emptyset$ ), получаем, что

$$W(\vartheta; D_*) \setminus D_* \subset (\overline{F}_* + O(\delta_3)) \setminus (G_\infty \cup D_*).$$

Таким образом, в силу равенства (3.6) и неравенства  $\delta_3 < \delta_*$  соотношение (3.5) выполнено.

С л у ч а й  $S_* = \emptyset$  и  $F_* \neq \emptyset$ . В этом случае  $\partial D_* = F_*$  и для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  имеем  $G^F(t_*, \varepsilon, \delta) = F_* + O(\delta)$ .

По условию 2) теоремы найдется такое  $\delta_0 > 0$ , что функция  $\varphi(\cdot)$  непрерывна и обладает свойствами  $u$ - и  $v$ -стабильности на множестве  $F_* + O(\delta_0)$ .

Пусть  $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ . Выберем такое  $\vartheta_1 > 0$ , что из любой начальной точки  $x_0 \in F_* + O(\delta_1)$  допустимые траектории не покидают множество  $F_* + O(\delta_0)$  на отрезке времени  $[0, \vartheta_1]$ . В силу непрерывности и  $u$ -стабильности функции  $\varphi(\cdot)$  существует такое  $\delta_* \in (0, \delta_1]$ , что

$$\varphi(x) - t_* \leq \vartheta_1, \quad x \in F_* + O(\delta_*).$$

В силу лемм 1, 2 для любой точки  $x_0 \in F_* + O(\delta_*)$  справедливы неравенства

$$\varphi(x_0) - t_* - \tau < T(x_0; D_*) \leq \varphi(x_0) - t_*, \quad \tau \in (0, \varphi(x_0) - t_*].$$

Переходя к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ , получаем равенство

$$\varphi(x) - t_* = T(x; D_*), \quad x \in F_* + O(\delta_*). \quad (3.10)$$

Найдем такое  $\vartheta \in (0, \vartheta_1]$ , что для любой начальной точки  $x_0 \notin D_* + O(\delta_*)$  допустимые траектории не достигают множества  $D_*$  на отрезке времени  $[0, \vartheta]$ . Имеем  $T(x_0; D_*) > \vartheta$  для  $x_0 \notin D_* + O(\delta_*)$ . Следовательно,  $W(\vartheta; D_*) \subset D_* + O(\delta_*)$ . В силу равенства (3.10) соотношения (3.5) выполнены.

**С л у ч а й**  $S_* = \emptyset$  и  $B_* \neq \emptyset$ . В этом случае  $\partial D_* = B_*$  и для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  имеем  $G^B(t_*, \varepsilon, \delta) = B_* + O(\delta)$ . Кроме того, найдется такое  $\vartheta_1 > 0$ , что выполнено равенство

$$D(t_* + t) = D_*, \quad t \in [0, \vartheta_1]. \quad (3.11)$$

Найдем число  $\delta_0 > 0$  и последовательность функций

$$\omega_k^\infty(\cdot) : B_* + O(\delta_0) \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

которые удовлетворяют свойствам, приведенным в условии 3) теоремы.

Пусть  $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ . Выберем такое  $\vartheta \in (0, \vartheta_1]$ , что из любой начальной точки  $x_0 \in B_* + O(\delta_1)$  допустимые траектории не покидают множество  $B_* + O(\delta_0)$  на отрезке времени  $[0, \vartheta]$  и, кроме того, для любой начальной точки  $x_0 \notin B_* + O(\delta_1)$  допустимые траектории не достигают множества  $D_*$  на отрезке времени  $[0, \vartheta]$ . Имеем  $W(\vartheta; D_*) \subset B_* + O(\delta_1)$ .

Пусть  $x_0 \in (B_* + O(\delta_1)) \setminus D_*$ . В силу (3.4) выберем такое  $k \in \mathbb{N}$ , что  $\omega_k^\infty(x_0) > \vartheta$ . Поскольку функция  $\omega_k^\infty(\cdot)$   $v$ -стабильна на множестве  $B_* + O(\delta_0)$ , равна нулю и непрерывна в точках множества  $D_* \cap (B_* + O(\delta_0))$ , то в силу леммы 2 справедлива оценка

$$\vartheta < T(x_0; D_*), \quad x_0 \in (B_* + O(\delta_1)) \setminus D_*.$$

Таким образом,

$$W(t; D_*) \cap ((B_* + O(\delta_1)) \setminus D_*) = \emptyset, \quad t \in [0, \vartheta].$$

Следовательно,  $W(t; D_*) = D_*$ ,  $t \in [0, \vartheta]$ . В силу равенства (3.11) соотношения (3.5) выполнены.

2°. Выберем  $\tau \in (0, \Theta)$ . Определим функцию  $\varphi_\tau(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  следующим образом:

$$\varphi_\tau(x) = \begin{cases} \varphi(x) - \tau, & x \in \Omega \setminus D(\tau); \\ 0, & x \in D(\tau). \end{cases}$$

Для краткости положим

$$D_\tau = D(\tau), \quad E(t) = D(\tau + t).$$

Пусть

$$\gamma = \sup\{\vartheta \in [0, \Theta - \tau) : W(t; D_\tau) = E(t), \quad t \in [0, \vartheta]\}.$$

В силу результата, доказанного в пункте 1°, имеем неравенство  $\gamma > 0$ .

а) Покажем, что

$$T(x; D_\tau) = \varphi_\tau(x), \quad x \in \cup_{\vartheta \in [0, \gamma]} E(\vartheta). \quad (3.12)$$

Пусть

$$\vartheta \in [0, \gamma), \quad x \in E(\vartheta), \quad t = T(x; D_\tau), \quad t' = \varphi_\tau(x).$$

В силу равенства  $W(\vartheta; D_\tau) = E(\vartheta)$  имеем  $t, t' \in [0, \vartheta]$ . Следовательно,

$$W(t; D_\tau) = E(t), \quad W(t'; D_\tau) = E(t').$$

Поскольку  $x \in W(t; D_\tau) \cap E(t')$ , то  $x \in W(t'; D_\tau) \cap E(t)$ . Отсюда получаем, что

$$\varphi_\tau(x) \leq t, \quad T(x; D_\tau) \leq t',$$

и равенство (3.12) доказано.

б) Покажем, что

$$T(x; D_\tau) = \varphi_\tau(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.13)$$

Рассмотрим следующие случаи.

**С л у ч а й 1:**  $\gamma = \infty$ . Если  $\Omega = \cup_{\vartheta \geq 0} E(\vartheta)$ , то соотношения (3.13) совпадают с доказанными соотношениями (3.12). Предположим теперь, что  $\Omega \setminus \cup_{\vartheta \geq 0} E(\vartheta) \neq \emptyset$ . Выберем  $x \in \Omega \setminus \cup_{\vartheta \geq 0} E(\vartheta)$ . Имеем  $\varphi_\tau(x) = \infty$ . Учитывая определение величины  $\gamma$ , находим, что  $x \notin \cup_{\vartheta \geq 0} W(\vartheta; D_\tau)$  и, следовательно,  $T(x; D_\tau) = \infty$ . Таким образом,  $\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau) = \infty$ . В силу (3.12) соотношения (3.13) для случая 1 доказаны.

**С л у ч а й 2:**  $0 < \gamma < \infty$ . Выберем  $x \in E(\gamma) \setminus \cup_{\vartheta \in [0, \gamma)} E(\vartheta)$ . Имеем  $\varphi_\tau(x) = \gamma$ . Учитывая определение величины  $\gamma$ , находим, что  $x \notin \cup_{\vartheta \in [0, \gamma)} W(\vartheta; D_\tau)$ , и, следовательно,  $T(x; D_\tau) \geq \gamma$ .

В силу свойств  $u$ -стабильности из условий 1), 2) и в силу условия 4) теоремы найдется такая последовательность  $\{x_k\}_1^\infty$ , что  $\varphi(x_k) < \varphi(x)$  и  $x_k \rightarrow x$  при  $k \rightarrow \infty$ . Имеем

$$t_k = \varphi_\tau(x_k) = \varphi(x_k) - \tau < \varphi(x) - \tau = \gamma, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Учитывая полунепрерывность снизу функции  $\varphi(\cdot)$ , получаем, что  $t_k \rightarrow \gamma$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поскольку  $W(t_k; D_\tau) = E(t_k)$  и  $x_k \in E(t_k)$ , то справедливо неравенство  $T(x_k; D_\tau) \leq t_k$ . Принимая во внимание полунепрерывность снизу функции  $T(\cdot; D_\tau)$  [1, 4], имеем

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k \geq \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_k; D_\tau) \geq T(x; D_\tau) \geq \gamma.$$

Следовательно,  $T(x; D_\tau) = \gamma$ .

В силу (3.12) доказано равенство

$$T(x; D_\tau) = \varphi_\tau(x), \quad x \in E(\gamma). \quad (3.14)$$

Покажем, что

$$W(\gamma; D_\tau) = E(\gamma). \quad (3.15)$$

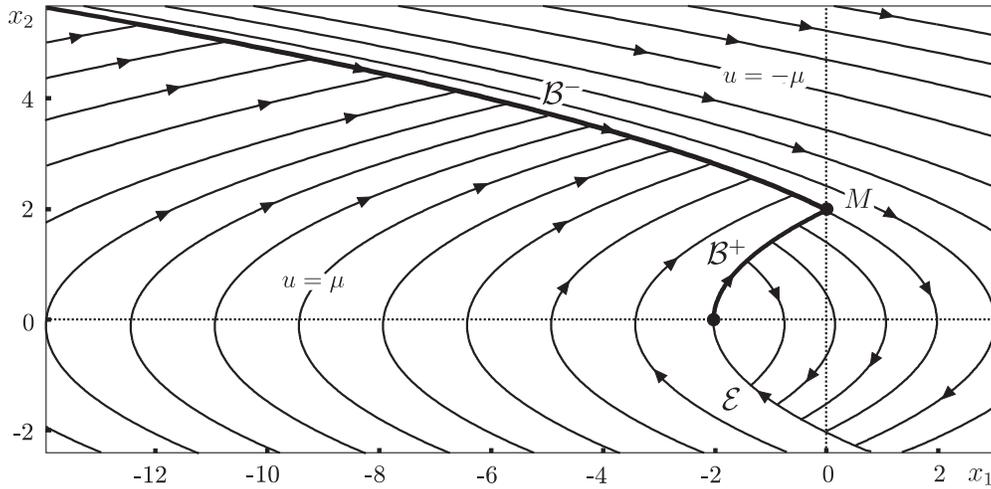
Включение  $E(\gamma) \subseteq W(\gamma; D_\tau)$  следует из (3.14). Докажем обратное включение.

Пусть  $\hat{x} \in W(\gamma; D_\tau)$  и  $\hat{t} = T(\hat{x}; D_\tau)$ . Имеем  $\hat{t} \leq \gamma$ .

Предположим, что  $\hat{t} < \gamma$ . Учитывая определение величины  $\gamma$ , находим, что

$$\hat{x} \in W(\hat{t}; D_\tau) = E(\hat{t}) \subseteq E(\gamma).$$

Предположим, что  $\hat{t} = \gamma$ . Поскольку  $\gamma > 0$ , то  $\hat{t} > 0$  и  $\hat{x} \notin D_\tau$ . В силу  $u$ -стабильности функции  $T(\cdot; D_\tau)$  [1, 4] найдется такая последовательность  $\{y_k\}_1^\infty$ , что  $t_k = T(y_k; D_\tau) < \gamma$  и  $y_k \rightarrow \hat{x}$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поскольку  $W(t_k; D_\tau) = E(t_k)$  и  $y_k \in W(t_k; D_\tau)$ , то  $y_k \in E(t_k) \subseteq E(\gamma)$ . В силу замкнутости множества  $E(\gamma)$  получаем включение  $\hat{x} \in E(\gamma)$ .

Рис. 1. Построение функции  $\varphi(\cdot)$  при  $a = 2$ ,  $\mu = 1$ ,  $\nu = 0$ .

Таким образом, равенство (3.15) доказано.

Из результатов пункта 1°, равенства (3.15) и определения числа  $\gamma$  следует, что  $\gamma = \Theta - \tau$ . В силу равенств (3.14) и  $E(\gamma) = D(\Theta) = \Omega$  справедливы соотношения (3.13) для случая 2.

в) Пусть  $x_* \in \Omega \setminus M$ . Тогда при малых  $\tau > 0$  имеем равенство  $\varphi_\tau(x_*) = \varphi(x_*) - \tau$ . В силу леммы 3 и равенства (3.13) получаем

$$T(x_*; M) = \lim_{\tau \rightarrow +0} T(x_*; D(\tau)) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \varphi_\tau(x_*) = \varphi(x_*),$$

откуда следует утверждение теоремы для случая  $T = \emptyset$ .

Предположим теперь, что  $T = \{a_1\}$ ,  $a_1 \in (0, \Theta)$ . Доказательство, аналогичное случаю  $T = \emptyset$ , примененное к функции  $\varphi(\cdot) : D(a_1) \rightarrow [0, \infty)$ , дает равенство  $\varphi(x) = T(x; M)$  для  $x \in D(a_1)$ . Далее, вводя обозначения

$$M_1 = D(a_1), \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) - a_1, & x \in \Omega \setminus M_1; \\ 0, & x \in M_1, \end{cases}$$

аналогичное доказательство применяем к функции  $\varphi_1(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  и дифференциальной игре с терминальным множеством  $M_1$ . Получаем равенство  $\varphi_1(x) = T(x; M_1)$ ,  $x \in \Omega$ . Используя соотношение  $T(x; M_1) = T(x; M) - a_1$  [1, 4], находим, что  $\varphi(x) = T(x; M)$ ,  $x \in \Omega$ .

Аналогичные рассуждения проводятся для случая любого конечного множества  $T \subset (0, \Theta)$ .

#### 4. Пример

Рассмотрим модельный пример игровой задачи преследования на прямой. Уравнения движения и ограничения на управления преследователя и убегающего имеют вид

$$\ddot{y}_P = u, \quad \dot{y}_E = v, \quad |u| \leq \mu, \quad 0 \leq v \leq \nu, \quad \mu > 0. \quad (4.1)$$

Преследователь стремится за наименьшее время совместить точку  $y_P$  с точкой  $y_E$  так, чтобы в момент совмещения скорость  $\dot{y}_P$  точки  $y_P$  равнялась наперед заданному числу  $a > \nu$ .

Такая задача преследования формулируется как задача быстрогодействия, если ввести замену  $x_1 = y_P - y_E$ ,  $x_2 = \dot{y}_P$ . В силу системы (4.1) имеем

$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq \mu, \quad 0 \leq v \leq \nu. \quad (4.2)$$

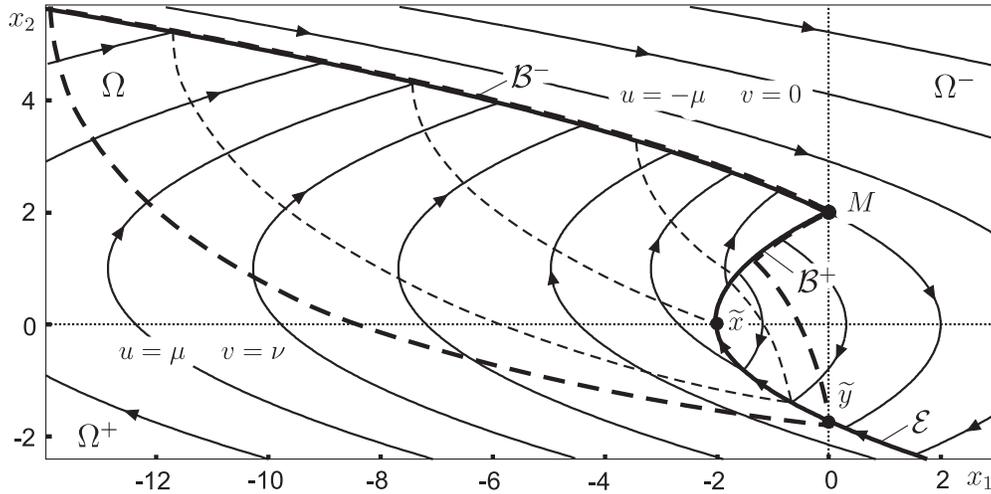


Рис. 2. Построение функции  $\varphi(\cdot)$  при  $a = 2, \mu = \nu = 1$ .

Первый игрок минимизирует время перевода фазовой точки  $x = (x_1, x_2)^\top$  из заданного начального положения  $x_0$  на терминальное множество  $M = (0, a)^\top$ ,  $a > \nu$ . Здесь  $\top$  — символ транспонирования. Интересы второго игрока противоположны.

Если  $\nu = 0$ , то получаем задачу оптимального управления, решение которой известно (см., напр.: [8, 9]). На рис. 1 показаны траектории, составленные из частей парабол, образующих два семейства. Левое семейство соответствует управлению  $u = \mu$ , правое — управлению  $u = -\mu$ . Время  $\varphi(x_0)$  движения из точки  $x_0$  вдоль указанных кривых до попадания в точку  $M$  является временем оптимального быстрогодействия. Функция  $\varphi(\cdot)$  разрывна на кривой, составленной из дуг  $\mathcal{B}^+$  и  $\mathcal{B}^-$ , и недифференцируема на дуге  $\mathcal{E}$  параболы левого семейства.

Опишем построение траекторий при  $\nu > 0$ , при помощи которых зададим функцию  $\varphi(\cdot)$ . Такие траектории исследованы ранее в [10, 11].

На множестве  $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$  рассмотрим кривую  $\mathcal{B}^\pm$ , вдоль которой идет траектория системы (4.2) при  $v(t) = 0, u(t) = \pm\mu$ , приходящая в точку  $M$ . Парабола  $\mathcal{B}^+$  пересекается с осью  $x_1$  в точке  $\tilde{x} = (-a^2/(2\mu), 0)^\top$ . В нижней полуплоскости построим кривую  $\mathcal{E}$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению

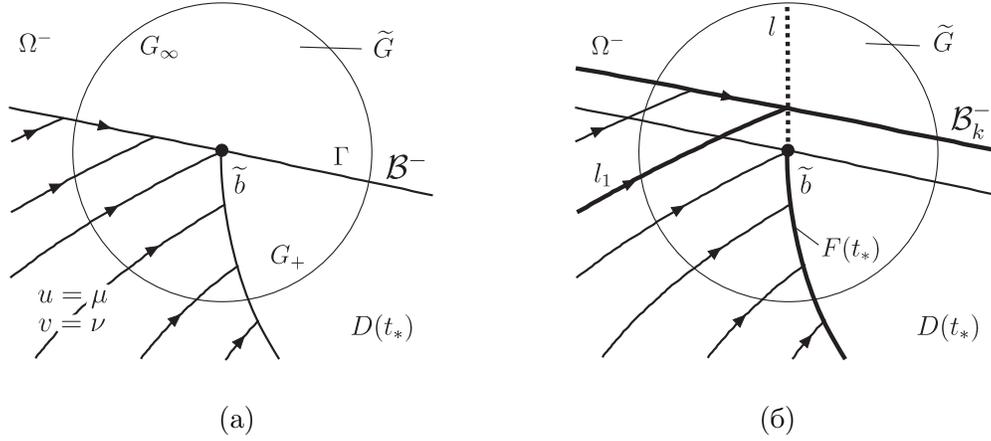
$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{\mu} + \frac{2\nu x_2}{\mu(\sqrt{\nu^2 - 4\nu x_2 - 4\mu x_1 + 2x_2^2 + 2a^2} - \nu - 2x_2)}$$

и проходящую через точку  $\tilde{x}$ . Символом  $\Omega^+$  (соответственно,  $\Omega^-$ ) обозначим открытую часть плоскости, лежащую слева (соответственно, справа) от составной кривой  $\mathcal{B}^-\mathcal{B}^+\mathcal{E}$  (см. рис. 2).

Пусть начальная точка находится на кривой  $\mathcal{B}^-$  и игроки применяют управления  $v = \nu, u^-(x) = \mu(1 - \nu/x_2)$ . Тогда движение идет по  $\mathcal{B}^-$  и на нем реализуется время самого “медленного” движения системы (4.2) вдоль этой кривой до точки  $M$ . Время такого движения из точки  $x \in \mathcal{B}^-$  до точки  $M$  обозначим  $\varphi(x)$ .

Для точки  $x \in \Omega^+ \cup \mathcal{B}^+\mathcal{E}$  ( $x \in \Omega^-$ ) значение  $\varphi(x)$  возьмем равным времени движения системы (4.2) из начальной точки  $x$  при  $u = \mu, v = \nu$  ( $u = -\mu, v = 0$ ) до пересечения с кривой  $\mathcal{B}^-$  ( $\mathcal{E}$ ) плюс значение функции  $\varphi(\cdot)$  в точке пересечения.

Подчеркнем принципиальное отличие синтеза, соответствующего игровой задаче (см. рис. 2), от синтеза, соответствующего задаче управления (см. рис. 1). В игровом случае линия  $\mathcal{E}$ , на которой переключается управление в нижней части, не является дугой параболы. Она описывается дифференциальным уравнением, которое в явном виде не интегрируется. Кроме того, на верхней параболе  $\mathcal{B}^-$  принятое значение функции  $\varphi(\cdot)$  соответствует самому “медленному” движению системы по этой кривой при управлении  $v = \nu$ , хотя сама парабола  $\mathcal{B}^-$  является траекторией при  $u = -\mu, v = 0$ .


 Рис. 3. Проверка условий теоремы для случая **A**.

Пусть  $\tilde{y}$  — точка пересечения кривой  $\mathcal{E}$  с осью  $x_2$ . Будем рассматривать функцию  $\varphi(\cdot)$  на ограниченном замкнутом множестве  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq \varphi(\tilde{y})\}$ , в котором она разрывна на дуге  $(\mathcal{B}^+ \cap \text{int } \Omega) \setminus \{\tilde{x}\}$ . На рис. 2 граница множества  $\Omega$  показана полужирной пунктирной линией. Изображены также линии уровня функции  $\varphi(\cdot)$  на  $\Omega$ .

Проверим, что для функции  $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \varphi(\tilde{y})]$  выполнены условия теоремы.

Способ определения функции  $\varphi(\cdot)$  на множествах  $\Omega^\pm$  реализует известный метод характеристик [12] построения дважды непрерывно дифференцируемого решения уравнения

$$H^\pm(x, \nabla \varphi(x)) = -1, \quad x \in \Omega^\pm,$$

с соответствующим краевым условием на кривой  $\mathcal{B}^-$  или  $\mathcal{E}$ . Здесь

$$H^+(x, p) = p_1(x_2 - \nu) + p_2\mu, \quad H^-(x, p) = p_1x_2 - p_2\mu.$$

Гамильтониан (1.2) дифференциальной игры имеет вид

$$H(x, p) = |p_1|\nu/2 + p_1(x_2 - \nu/2) - |p_2|\mu.$$

Нетрудно проверить, что

$$H^\pm(x, \nabla \varphi(x)) = H(x, \nabla \varphi(x)) = -1, \quad x \in \Omega^\pm. \quad (4.3)$$

По построению функция  $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  полунепрерывна снизу и  $D(0) = M$ . Выполнение условия 4) теоремы очевидно. Положим  $\mathcal{T} = \{\varphi(\tilde{x})\}$ . Проверим выполнение условий 1)–3) для  $t_* \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$ , где  $\Theta = \varphi(\tilde{y})$ .

1) Имеем

$$S(t_*) = \{b^-(t_*), b^+(t_*)\}, \quad b^\pm(t_*) = \overline{F}(t_*) \cap \mathcal{B}^\pm.$$

Поскольку множество  $S(t_*)$  конечно, то выполнение условия 1) теоремы достаточно проверить для каждой из точек  $\tilde{b} \in S(t_*)$  отдельно. Возможны три случая:

$$\mathbf{A.} \quad \tilde{b} = b^-(t_*), \quad t_* \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}; \quad \mathbf{B.} \quad \tilde{b} = b^+(t_*), \quad t_* \in (0, \varphi(\tilde{x})); \quad \mathbf{B.} \quad \tilde{b} = b^+(t_*), \quad t_* \in (\varphi(\tilde{x}), \Theta).$$

Приведем доказательство только для случая **A**. Пусть  $\tilde{b} = b^-(t_*)$ ,  $t_* \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$ . Выберем число  $\varepsilon_0 > 0$  так, что множество  $\tilde{G} = \{\tilde{b}\} + O(\varepsilon_0)$  представимо в виде

$$\tilde{G} = G_+ \cup \Gamma \cup G_\infty,$$

где  $\Gamma \subset \mathcal{B}^-$ ,  $\varphi(\cdot) \in C^1(G_+)$ ,  $G_+ \subset \Omega^+$ ,  $G_\infty \subset \Omega^-$  (см. рис. 3(a)).

а) Имеем

$$\tilde{G} \subset G_\infty \cup \Omega, \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\varphi(x) : x \in \tilde{G} \setminus G_\infty\} = t_*.$$

Определим функцию  $\omega(\cdot) : \tilde{G} \rightarrow [0, \infty]$  по формуле (3.2), в которой обозначения  $D(t)$  и  $G(t, \varepsilon_0)$  заменены на  $D(t_*)$  и  $\tilde{G}$ . Проверим  $u$ -стабильность функции  $\omega(\cdot)$  на множестве  $\tilde{G} \setminus D(t_*)$ . Для этого достаточно проверить выполнение неравенств (2.8) в любой точке  $x_* \in \tilde{G} \setminus D(t_*)$ .

Поскольку  $\omega(x_*) = \infty$ ,  $x_* \in G_\infty$ , и  $H(x, \nabla \varphi(x)) = -1$ ,  $x \in G_+$ , то в силу утверждений 4, 5 неравенство (2.8) выполнено для всех точек  $x_* \in \tilde{G} \setminus (G \cup D(t_*))$ .

Пусть  $x_* \in G$ . Для любого  $v_* \in Q$  существуют число  $\tau > 0$  и функция  $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{\beta}(t) = f(\beta(t), \bar{u}(\beta(t), v_*), v_*), \quad t \in (0, \tau),$$

и начальному условию  $\beta(0) = x_*$ . Здесь управление  $\bar{u}(z, v_*) = -\mu(1 - v_*/z_2)$  выбрано из условия касания в точке  $z \in \mathcal{B}^-$  вектора скорости и параболы  $\mathcal{B}^-$  при управлении  $v_*$  второго игрока. Имеем  $\beta(t) \in G$ ,  $t \in [0, \tau)$ .

Пусть  $\Phi(t) = \omega(\beta(t))$ ,  $t \in [0, \tau)$ ;  $z(\cdot)$  — траектория самого медленного движения вдоль параболы  $\mathcal{B}^-$  из начальной точки  $x_*$ . Имеем

$$\varphi(\beta(t)) \leq \varphi(z(t)) = \varphi(x_*) - t, \quad t \in [0, \tau).$$

Следовательно,

$$\dot{\Phi}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} (\varphi(\beta(t)) - \varphi(x_*))/t \leq -1.$$

Учитывая утверждение 2, получаем  $u$ -стабильность функции  $\omega(\cdot)$  на множестве  $\tilde{G} \setminus D(t_*)$ .

б) Определим последовательность функций

$$\omega_k(\cdot) : \tilde{G} \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

следующим образом. Сдвинем параболу  $\mathcal{B}^-$  на величину  $1/k$  вправо вдоль оси  $x_1$  и обозначим ее через  $\mathcal{B}_k^-$ . Продолжим линию  $F(t_*)$  гладкой линией  $l$  на множество  $G_\infty$  так, чтобы траектории первого семейства, продолженные выше линии  $\mathcal{B}_k^-$ , пересекались с кривой  $l$ .

Линия  $F(t_*)$  имеет вертикальную касательную в точке  $\tilde{b}$ . В качестве  $l$  возьмем отрезок вертикальной прямой. Обозначим через  $l_k$  параболу первого семейства, проходящую через точку  $l \cap \mathcal{B}_k^-$  (см. рис. 3(б)).

Положим  $\omega_k(x) = \infty$  для точек  $x \in \tilde{G}$ , лежащих выше параболы  $\mathcal{B}_k^-$  включительно;  $\omega_k(x) = 0$  для точек  $x \in \tilde{G}$ , лежащих строго ниже кривой  $\mathcal{B}_k^-$  и правее кривой  $F(t_*) \cup l$  включительно. Для точки  $x \in \tilde{G}$ , лежащей строго левее кривой  $F(t_*) \cup l$  и не выше параболы  $l_k$ , определим  $\omega_k(x)$  как время движения из начальной точки  $x$  вдоль параболы первого семейства при  $u = \mu$ ,  $v = \nu$  до момента попадания на множество  $F(t_*) \cup l$ . Для точки  $x \in \tilde{G}$ , лежащей между кривыми  $\mathcal{B}_k^-$  и  $l_k$ , определим  $\omega_k(x)$  как время движения из начальной точки  $x$  вдоль параболы первого семейства при  $u = \mu$ ,  $v = \nu$  до момента пересечения с кривой  $\mathcal{B}_k^-$  плюс время самого медленного движения вдоль параболы  $\mathcal{B}_k^-$  из точки пересечения до точки  $l_k \cap \mathcal{B}_k^-$ .

Функции  $\omega_k(\cdot)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , полунепрерывны сверху, равны нулю и непрерывны в точках множества  $D(t_*) \cap G$ . Нетрудно видеть, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k(x) = \omega(x), \quad x \in \tilde{G}.$$

Проверим  $v$ -стабильность функции  $\omega_k(\cdot)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , на множестве  $\tilde{G} \setminus D(t_*)$ . Для этого достаточно проверить выполнение неравенства (2.9) в любой точке  $x_* \in \tilde{G} \setminus D(t_*)$ .

Заметим, что, по определению функции  $\omega_k(\cdot)$ , выполнено равенство  $H(x, \nabla \omega_k(x)) = -1$  в точках  $\tilde{G} \setminus l_k$ , таких что  $\omega_k(x) \in (0, \infty)$ . Следовательно, в силу утверждений 4, 5 неравенство (2.9) выполнено для точек  $x_* \in \tilde{G} \setminus (D(t_*) \cup \mathcal{B}_k^- \cup l_k)$ .

Пусть  $x_* \in \mathcal{B}_k^-$ . Для любого  $u_* \in P$  положим  $v_* = 0$  и определим функцию  $\beta(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow \tilde{G}$  как решение начальной задачи

$$\dot{\beta}(t) = f(\beta(t), u_*, v_*), \quad t \in (0, \tau), \quad \beta(0) = x_*. \quad (4.4)$$

Имеем  $\beta(t) \in \mathcal{B}_k^- \cup G_\infty$ ,  $t \in [0, \tau)$ . В силу утверждения 3 в точке  $x_*$  выполнено неравенство (2.9).

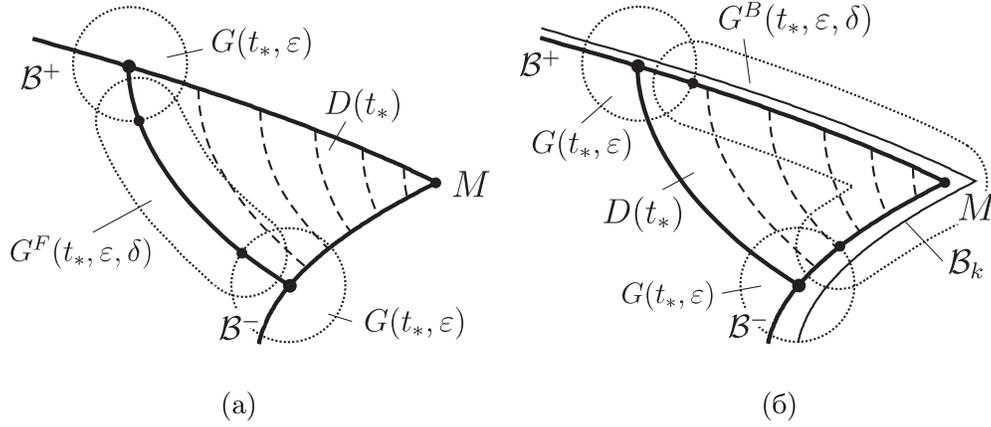


Рис. 4. Проверка условий теоремы для множеств  $F(t_*)$  и  $B(t_*)$ .

Пусть  $x_* \in l_k$ . Для любого  $u_* \in P$  и  $v_* = \nu$  решение  $\beta(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow \tilde{G}$  начальной задачи (4.4) не пересекает кривую  $l_k$ . Пусть  $\Phi(t) = \varphi(\beta(t))$ ,  $t \in [0, \tau)$ . Если  $u_* = \mu$ , то  $\beta(t) \in l_k$ ,  $t \in [0, \tau)$  и, по определению функции  $\varphi(\cdot)$ , имеем  $\dot{\Phi}(+0) = -1$ . Если  $u_* = [-\mu, \mu)$ , то точка  $\beta(t)$ ,  $t \in (0, \tau)$ , лежит ниже параболы  $l_k$ . Следовательно,

$$\dot{\Phi}(t) = \langle \nabla \omega_k(\beta(t)), f(\beta(t), u_*, v_*) \rangle \geq H(\beta(t), \nabla \omega_k(\beta(t))) = -1$$

и  $\dot{\Phi}(+0) \geq -1$ . В силу утверждения 3 в точке  $x_*$  выполнено неравенство (2.9).

2) Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что выполнено включение

$$G^F(t_*, \varepsilon, \delta) \subset \Omega \cap (\Omega^+ \cup \mathcal{E} \cup \Omega^-).$$

Для  $t_* \in (0, \varphi(\tilde{x}))$  окрестность  $G^F(t_*, \varepsilon, \delta)$  показана на рис. 4(a).

Из равенств (4.3) следует, что точки множества  $\Omega^\pm$  являются регулярными точками [13] функции  $\varphi(\cdot)$ , а точки кривой  $\mathcal{E}$  — простейшими сингулярными точками экивокального типа [13]. В силу основного результата работы [13] функция  $\varphi(\cdot)$  обладает свойствами  $u$ - и  $v$ -стабильности на множестве  $G^F(t_*, \varepsilon, \delta)$ .

3) Для любого  $\varepsilon > 0$  выберем такое  $\delta > 0$ , что выполнены соотношения

$$G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \cap F(t_*) = \emptyset, \quad G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\} = \emptyset.$$

Для  $t_* \in (0, \varphi(\tilde{x}))$  окрестность  $G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$  показана на рис. 4(б).

Определим последовательность функций

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

следующим образом. Сдвинем составную кривую  $B^-B^+$  вправо вдоль оси  $x_1$  на величину  $1/k$ , обозначим ее через  $B_k$  (см. рис. 4(б)). Положим  $\omega_k^\infty(x) = 0$  в точках  $x \in G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$ , расположенных строго левее кривой  $B_k$ , и  $\omega_k^\infty(x) = \infty$  во всех остальных точках множества  $G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$ .

Покажем  $v$ -стабильность функции  $\omega_k^\infty(\cdot)$ . В силу утверждений 5, 6 неравенство (2.9) выполнено в точках  $x_* \in G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \setminus (D(t_*) \cup \mathcal{B}_k)$ . Пусть  $x_* \in \mathcal{B}_k \cap G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$ . Для любого  $u_* \in P$  положим  $v_* = 0$  и определим функцию  $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$  как решение начальной задачи (4.4). Поскольку траектория  $\beta(\cdot)$  не переходит в область левее кривой  $\mathcal{B}_k$ , имеем  $\omega_k^\infty(\beta(t)) = \infty$ ,  $t \in [0, \tau)$ . В силу утверждения 3 в точке  $x_*$  выполнено неравенство (2.9). Следовательно, функция  $\omega_k^\infty(\cdot)$   $v$ -стабильна на множестве  $G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \setminus D(t_*)$ .

Предельное соотношение  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k^\infty(x) = \infty$ ,  $x \in G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \setminus D(t_*)$ , очевидно.

Таким образом, все условия теоремы проверены и тем самым доказано равенство

$$\varphi(x) = T(x, M), \quad x \in \Omega.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Krasovskii N. N., Subbotin A. I.** Game-Theoretical Control Problems. N.Y.: Springer, 1988. 518 p.
3. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
4. **Субботин А. И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютер. исслед. М.: Ижевск. 2003. 336 с.
5. **Bardi M., Capuzzo-Dolcetta, I.** Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. Boston: Birkhauser, 1997. 570 p.
6. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I // Математический сборник. 1975. Т. 98, №3. С. 450–493.
7. **Камнева Л.В.** Об условиях совпадения разрывной функции с функцией цены игры в задаче быстрогодействия // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 739–752.
8. **Федоренко Р.П.** К задаче Коши для уравнения динамического программирования Беллмана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, №2. С. 426–432.
9. **Leitmann G.** The calculus of variations and optimal control. N.Y. etc.: Plenum Press, 1981. 311 p.
10. **Пацко В. С.** Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, №3. С. 424–435. II; 1972. Т. 8, №8. С. 1423–1434.
11. **Филимонов М. Ю.** Сопряжение сингулярных линий в дифференциальной игре. Исследование задач минимаксного управления: сб. ст. Свердловск: изд-во УНЦ АН СССР, 1985. С. 117–124.
12. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1945. 620 с.
13. **Камнева Л.В.** Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 3. С. 366–383.

Поступила 19.03.2007

УДК 517.957

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ<sup>1</sup>

Р. Д. Муртазина

Одним из способов классификации интегрируемых уравнений является симметричный метод. Симметричный подход очень эффективен в случае эволюционных уравнений, однако при симметричной классификации гиперболических уравнений возникают серьезные технические трудности даже в простейшей ситуации. Для решения классификационной задачи нелинейных уравнений  $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$  используется метод, основанный на исследовании структуры характеристической алгебры Ли. Приводится список интегрируемых уравнений.

### Введение

Для решения задачи классификации интегрируемых гиперболических уравнений

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y) \quad (0.1)$$

используется подход, основанный на исследовании структуры характеристической алгебры.

Понятие характеристической алгебры было введено в работе [1] для гиперболических уравнений вида

$$u_{xy}^i = F^i(u^1, \dots, u^r), \quad i = 1, \dots, r.$$

В работе [2] для экспоненциальных систем

$$u_{xy}^i = \exp(a_{i1}u^1 + \dots + a_{in}u^n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (0.2)$$

доказано, что характеристическая алгебра Ли системы (0.2) конечномерна тогда и только тогда, когда  $K = (k_{ij})$  — матрица Картана простой алгебры Ли. Отметим также работу [3], в которой метод исследования интегрируемости, основанный на изучении характеристических алгебр Ли, используется для систем гиперболических уравнений вида

$$u_x^i = c_{jk}^i u^j v^k + c_k^i v^k, \quad v_y^k = d_{jl}^k u^j v^l + d_j^k u^j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Показано, что последняя система уравнений обладает не одной, а двумя характеристическими алгебрами и эти алгебры естественным образом “склеиваются” в единую алгебру Ли на основе так называемых соотношений нулевой кривизны.

В работе [4] для уравнения (0.1) со специальной правой частью  $f = f(u, u_x)$  с помощью характеристической алгебры получен список интегрируемых уравнений.

Для определения характеристической алгебры Ли уравнения (0.1) введем набор независимых переменных

$$u_1 = u_x, \bar{u}_1 = u_y, u_2 = u_{xx}, \bar{u}_2 = u_{yy}, \dots$$

Обозначим через  $\mathfrak{F}$  пространство локально аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных  $u, u_1, \bar{u}_1, u_2, \dots, u_n$ . На этом классе функций оператор полного дифференцирования по  $y$   $\bar{D}$ , в силу уравнения (0.1), задается формулой

$$\bar{D} = \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + D(f) \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + D^{n-1}(f) \frac{\partial}{\partial u_n} + \dots,$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ (проекты 05-01-00775-а и 06-01-92051-КЭ-а).

где  $D$  — оператор полной производной по  $x$ .

Положим

$$X_1 = \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + D^{n-1}(f) \frac{\partial}{\partial u_n} + \dots, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1},$$

тогда

$$\bar{D} = X_1 + \bar{u}_2 X_2. \quad (0.3)$$

Вычисление высших симметрий Ли — Беклунда уравнения (0.1) основано на исследовании характеристического уравнения [5]

$$\bar{D}W(u, u_1, u_2, \dots, u_m) = 0. \quad (0.4)$$

Уравнение (0.4), согласно (0.3), эквивалентно системе

$$X_1 W = 0, \quad X_2 W = 0. \quad (0.5)$$

С уравнениями (0.5) естественным образом связана алгебра Ли, порожденная векторными полями  $X_1$  и  $X_2$ . Эту алгебру будем называть  $x$ -характеристической алгеброй Ли уравнения (0.1).

Аналогично определяется  $y$ -характеристическая алгебра, порожденная образующими

$$Y_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} + \dots + \bar{D}^{n-1}(f) \frac{\partial}{\partial \bar{u}_n} + \dots, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Если характеристическое уравнение (0.4) имеет нетривиальное решение, то  $x$ -характеристическая алгебра  $X$  конечномерна и обратно, если  $\dim X < \infty$ , то уравнение (0.4) имеет нетривиальное решение. Уравнения (0.1) с конечномерными алгебрами  $X$  и  $Y$  называются уравнениями, интегрируемыми по Дарбу. Полный список таких уравнений вида (0.1) получен в работе [6], в которой решение классификационной задачи основано на свойстве обрыва цепочки инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения.

Далее обозначим через  $L_1$  — линейную оболочку операторов длины 1:  $X_1$  и  $X_2$ , через  $L_2$  — линейную оболочку коммутатора — длины 2:  $X_3 = [X_2, X_1]$ , через  $L_3$  — линейную оболочку операторов — длины 3:  $X_4 = [X_2, X_3]$  и  $X_5 = [X_1, X_3]$  и т.д. Тогда характеристическая алгебра  $X$  представима в виде

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i,$$

а  $y$ -характеристическая алгебра

$$Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{L}_i.$$

В настоящей работе перечислены нелинейные уравнения (0.1) с конечномерной характеристической алгеброй Ли размерности 2, 3 и 4, а также уравнения, для которых выполнены условия  $n \leq \dim \bigcup_{i=1}^n L_i \leq n+1$ ,  $m \leq \dim \bigcup_{i=1}^m \bar{L}_i \leq m+1$ ,  $n, m = 1, 2, 3, 4, 5$ , т.е. накладыва-  
ется ограничение на порядок роста линейных пространств  $\bigcup_{i=1}^n L_i$  и  $\bigcup_{i=1}^m \bar{L}_i$ , а именно на первых шагах не более чем на единицу. Полученный при этом список уравнений (0.1) содержит все известные примеры уравнений, обладающих бесконечной алгеброй высших симметрий.

## 1. Нелинейные уравнения с конечномерной характеристической алгеброй

В этом разделе рассматриваются уравнения (0.1) с характеристической алгеброй  $X$  размерности 2 и 3.

Приведем важное для дальнейшего утверждение.

**Лемма 1.** Пусть

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad \alpha_i = \alpha_i(u, \bar{u}_1, u_1, u_2, \dots, u_{n_i}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда соотношение

$$[D, Z] = 0 \tag{1.1}$$

выполняется тогда и только тогда, когда  $Z = 0$ .

**Доказательство.** Условие (1.1) запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty} D(\alpha_i) \frac{\partial}{\partial u_i} = \alpha_1 f_{u_1} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i}$$

или

$$\alpha_1 f_{u_1} = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad D(\alpha_i) = \alpha_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Откуда получаем, что  $\alpha_1 = \dots = \alpha_i = \dots = 0$ . Итак,  $Z = 0$ . Лемма доказана.

Далее, с учетом того, что  $D$  и  $\bar{D}$  коммутируют и используя формулу (0.3), получаем

$$[D, \bar{D}] = \bar{u}_1 f_u X_2 + f f_{u_1} X_2 + \bar{u}_2 f_{\bar{u}_1} X_2 + \bar{u}_2 [D, X_2] + [D, X_1] = 0.$$

Следовательно,

$$[D, X_1] = -(\bar{u}_1 f_u + f f_{u_1}) X_2, \quad [D, X_2] = -f_{\bar{u}_1} X_2. \tag{1.2}$$

Используя тождество Якоби

$$[D, X_3] = [D, [X_2, X_1]] = -[X_1, [D, X_2]] - [X_2, [X_1, D]]$$

и соотношения (1.2), имеем

$$[D, X_3] = -(f_u + f_{u_1} f_{\bar{u}_1}) X_2 - f_{\bar{u}_1} X_3. \tag{1.3}$$

Следует отметить, что операторы  $X_1$  и  $X_2$  линейно независимы, т.е.  $\dim L_1 = 2$ .

Условие  $\dim X = 2$  эквивалентно равенству  $X_3 + c_1 X_1 + c_2 X_2 = 0$ , где  $c_i = c_i(u, \bar{u}_1, u_1, u_2, \dots)$ ,  $i = 1, 2$ . Из структуры операторов  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  следует, что  $c_2 = 0$ ,  $c_1 = -\frac{1}{\bar{u}_1}$ .

Согласно лемме 1

$$\left[ D, X_3 - \frac{1}{\bar{u}_1} X_1 \right] = 0$$

и учитывая соотношения (1.2), (1.3), имеем

$$-f_{\bar{u}_1} + \frac{1}{\bar{u}_1} f = 0, \quad f_{u_1} \left( -f_{\bar{u}_1} + \frac{1}{\bar{u}_1} f \right) = 0.$$

Следовательно,  $f = A(u, u_1) \bar{u}_1$ .

Справедлива следующая лемма:

**Лемма 2.** *Размерность характеристической алгебры  $X$  равна двум, если и только если правая часть  $f$  уравнения (0.1) имеет вид*

$$f = A(u, u_x)u_y.$$

При этом  $X_3 = \frac{1}{u_y}X_1$ .

Далее предполагаем, что  $X_1, X_2$  и  $X_3$  — линейно независимые векторные поля. Используя тождество Якоби и соотношения (1.2), (1.3), получаем

$$[D, X_4] = -f_{u_1}f_{\bar{u}_1\bar{u}_1}X_2 - f_{\bar{u}_1\bar{u}_1}X_3 - 2f_{\bar{u}_1}X_4,$$

$$[D, X_5] = (f_u + f_{u_1}f_{\bar{u}_1} - \bar{u}_1f_{u\bar{u}_1} - ff_{u_1\bar{u}_1})(f_{u_1}X_2 + X_3) - (\bar{u}_1f_u + ff_{u_1})X_4 - f_{\bar{u}_1}X_5. \quad (1.4)$$

Нетрудно показать, что размерность алгебры  $X$  равна трем тогда и только тогда, когда  $X_4 + c(X_1 - \bar{u}_1X_3) = 0$ ,  $X_5 + \bar{c}(X_1 - \bar{u}_1X_3) = 0$ ,  $c = c(u, \bar{u}_1, u_1, u_2, \dots)$ ,  $\bar{c} = \bar{c}(u, \bar{u}_1, u_1, u_2, \dots)$ .

Тогда

$$[D, X_4 + c(X_1 - \bar{u}_1X_3)] = 0, \quad [D, X_5 + \bar{c}(X_1 - \bar{u}_1X_3)] = 0.$$

Последние соотношения, согласно (1.2), (1.3) и (1.4), эквивалентны следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} D(c) + 2cf_{\bar{u}_1} &= 0, \quad f_{\bar{u}_1\bar{u}_1} + c(f - \bar{u}_1f_{\bar{u}_1}) = 0, \\ D(\bar{c}) + c(\bar{u}_1f_u + ff_{u_1}) + \bar{c}f_{\bar{u}_1} &= 0, \\ f_u + f_{u_1}f_{\bar{u}_1} - \bar{u}_1f_{u\bar{u}_1} - ff_{u_1\bar{u}_1} - \bar{c}(f - \bar{u}_1f_{\bar{u}_1}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ясно, что  $c = c(u, \bar{u}_1)$ ,  $\bar{c} = \bar{c}(u, \bar{u}_1)$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3.** *Уравнение (0.1) с характеристической алгеброй Ли  $X$  размерности 3 точечной заменой приводится к одному из следующих соотношений:*

$$u_{xy} = -\frac{1}{B_{u_x}}(B_u u_y + 1), \quad B = B(u, u_x), \quad c = \bar{c} = 0,$$

либо

$$u_{xy} = e^u \Psi(u_x), \quad c = 0, \quad \bar{c} = \bar{c}(u, u_y),$$

либо

$$u_{xy} = \frac{1}{u}p(u_x)\bar{r}(u_y), \quad \bar{r}' + \frac{u_y}{\bar{r}} = \lambda, \quad p' + \frac{u_x}{p} = \lambda, \quad \lambda - \text{const}, \quad \lambda \neq 0, \quad c = \frac{1}{\bar{r}^2}, \quad \bar{c} = -\frac{1}{u},$$

либо

$$u_{xy} = q(u)p(u_x)\bar{r}(u_y), \quad (\ln q)'' = q^2, \quad \bar{r}' + \frac{u_y}{\bar{r}} = 0, \quad p' + \frac{u_x}{p} = 0, \quad c = \frac{1}{\bar{r}^2}, \quad \bar{c} = \frac{q'}{q},$$

либо

$$u_{xy} = \bar{F}(u, u_y)u_x, \quad c = \frac{1}{u_y}(\ln(\bar{F} - u_y\bar{F}_{u_y}))_{u_y}, \quad \bar{c} = (\ln(\bar{F} - u_y\bar{F}_{u_y}))_u,$$

где функция  $\bar{F}$  удовлетворяет соотношению

$$u_y e^{-\varphi} + (\bar{F} - \varphi' u_y) \int e^{-\varphi} du = \Phi(\bar{F} - \varphi' u_y), \quad \varphi = \varphi(u).$$

Здесь  $B, \Psi, \Phi, \bar{F}$  — произвольные функции своих аргументов. При этом

$$X_4 = -c(X_1 - u_y X_3), \quad X_5 = -\bar{c}(X_1 - u_y X_3).$$

**Доказательство.** Если  $c = 0$ , то из второго уравнения (1.5) следует, что  $f = a(u, u_1)\bar{u}_1 + b(u, u_1)$ . В случае, когда  $b = 0$ , приходим к утверждению леммы 2. Подстановка в четвертое уравнение приводит к определению  $\bar{c}$

$$\bar{c} = \frac{b_u}{b} + a \frac{b_{u_1}}{b} - a_{u_1},$$

т.е.  $\bar{c} = \bar{c}(u)$ . Тогда согласно третьему уравнению

$$\bar{c}'u_1 + \bar{c}a = 0.$$

Если  $\bar{c} = 0$ , то  $\frac{b_u}{b} + a \frac{b_{u_1}}{b} - a_{u_1} = 0$  и, следовательно,

$$u_{xy} = -\frac{1}{B_{u_1}}(B_u \bar{u}_1 + 1), \quad B = B(u, u_1).$$

Если  $\bar{c} \neq 0$ , то

$$a = -\frac{\bar{c}'}{\bar{c}}u_1, \quad \bar{c} = \frac{b_u}{b} - \frac{\bar{c}'}{\bar{c}} \frac{b_{u_1}}{b}u_1 + \frac{\bar{c}'}{\bar{c}}, \quad f = -\frac{\bar{c}'}{\bar{c}}u_1\bar{u}_1 + b.$$

Отсюда

$$b = \Psi(u_1\bar{c}) \frac{e^{\int \bar{c} du}}{\bar{c}}.$$

Используя замену  $\int \bar{c} du = v$ , приходим к уравнению

$$v_{xy} = e^v \Psi(v_x).$$

Если  $c \neq 0$ , то, полагая

$$f = F(u, u_1, \bar{u}_1)\bar{r}(u, \bar{u}_1), \quad c = \frac{1}{\bar{r}^2},$$

из первого уравнения (1.5) получаем, что

$$F = u_1 \int \frac{\bar{r}_u}{\bar{r}^2} d\bar{u}_1 + B(u, u_1).$$

Подстановка во второе уравнение (1.5) дает следующее:

$$\bar{r}_{\bar{u}_1} + \frac{\bar{u}_1}{\bar{r}} = \lambda, \lambda - \text{const} \quad (\text{иначе } B = 0 \text{ и } f = \bar{F}(u, \bar{u}_1)u_1)$$

Так как

$$f = \bar{A}u_1 + \bar{r}B, \quad \bar{A} = \bar{r} \int \frac{\bar{r}_u}{\bar{r}^2} d\bar{u}_1,$$

и, если  $c_u = 0$ , то  $\bar{A} = 0$  и  $f = \bar{r}B$ . Теперь функцию  $f$  подставим в четвертое уравнение (1.5)

$$(\bar{r} - \bar{u}_1 \bar{r}_{\bar{u}_1})(B_u - \bar{c}B) = 0.$$

Если  $\bar{r} - \bar{u}_1 \bar{r}_{\bar{u}_1} = 0$ , то  $f_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} = 0$ . Если  $\bar{r} - \bar{u}_1 \bar{r}_{\bar{u}_1} \neq 0$ , тогда

$$B = p(u_1)q(u), \quad \bar{c} = \frac{q'}{q},$$

и третье уравнение принимает вид ( $\lambda \neq 0$ ):

$$u_1(\ln q)'' + p(\lambda q' + q^2 p') = 0.$$

Разделим на  $q^2$  и, учитывая, что  $p'' \neq 0$ , имеем

$$q = -\frac{1}{\xi u + \zeta}, \quad \xi^2 u_1 + p(\lambda \xi + p') = 0.$$

Точечной заменой приходим к уравнению

$$f = \frac{1}{u} p(u_1) \bar{r}(\bar{u}_1), \quad p' + \frac{u_1}{p} = \lambda, \quad \bar{r}' + \frac{\bar{u}_1}{\bar{r}} = \lambda, \quad \lambda - \text{const}.$$

Если  $\lambda = 0$ , то третье уравнение запишем так:

$$\frac{(\ln q)''}{q^2} + \frac{pp'}{u_1} = 0.$$

Отсюда следует, что  $\frac{pp'}{u_1} = \xi$ ,  $\frac{(\ln q)''}{q^2} = -\xi$ .

Если  $f = \bar{F}(u, \bar{u}_1)u_1$ , то из второго и четвертого уравнений (1.5) выразим  $c$  и  $\bar{c}$

$$c = \frac{1}{u_1} (\ln(\bar{F} - \bar{u}_1 \bar{F}_{\bar{u}_1}))_{\bar{u}_1}, \quad \bar{c} = (\ln(\bar{F} - \bar{u}_1 \bar{F}_{\bar{u}_1}))_u.$$

Так как  $\bar{c}_{\bar{u}_1} = c_u \bar{u}_1$ , то первое и третье уравнения (1.5) перепишем так:

$$(\bar{c} + \bar{u}_1 c \bar{F})_u + \bar{F}_{u \bar{u}_1} = \varphi'', \quad c \bar{F}^2 + \bar{c} \bar{F}_{\bar{u}_1} = \bar{F}_{u \bar{u}_1} - \varphi'', \quad \varphi = \varphi(u). \quad (1.6)$$

Выражения для  $c$  и  $\bar{c}$  подставим в (1.6):

$$\begin{aligned} -\bar{u}_1 (\bar{F} \bar{F}_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} + \bar{F}_{u \bar{u}_1}) + \bar{F}_u + \bar{F}_{\bar{u}_1} (\bar{F} - \bar{u}_1 \bar{F}_{\bar{u}_1}) - \varphi' (\bar{F} - \bar{u}_1 \bar{F}_{\bar{u}_1}) &= 0, \\ -\bar{F} (\bar{F} \bar{F}_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} + \bar{F}_{u \bar{u}_1}) + \bar{F}_u \bar{F}_{\bar{u}_1} + \varphi'' (\bar{F} - \bar{u}_1 \bar{F}_{\bar{u}_1}) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда функция  $\bar{F}$  есть решение уравнения

$$\bar{F}_u + \bar{F} \bar{F}_{\bar{u}_1} = \varphi' \bar{F} + \varphi'' \bar{u}_1,$$

которое определяется из соотношения

$$\bar{u}_1 e^{-\varphi} + (\bar{F} - \varphi' \bar{u}_1) \int e^{-\varphi} du = \Phi(\bar{F} - \varphi' \bar{u}_1).$$

Здесь  $\Phi$  — произвольная функция.

Случай  $c_u \neq 0$  сводится к уравнениям, рассмотренным выше. Лемма доказана.

## 2. Основная теорема

Введем обозначения

$$\mathcal{L}_n = \bigcup_{i=1}^n L_i, \quad n = 2, 3, \dots$$

В этом разделе получены условия на правую часть уравнения (0.1), для которых

$$\dim \mathcal{L}_i = i + 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Мы исключаем уравнения (0.1), линейные по переменной  $u_x$  либо по  $u_y$ . Полная классификация таких уравнений симметричным методом проведена в работе [7].

Справедливо утверждение.

**Теорема 1.** *Размерность пространства  $\mathcal{L}_3$ , порожденного операторами длины 1, 2 и 3, равна четырем тогда и только тогда, когда*

$$X_4 + c_1(X_1 - \bar{u}_1 X_3) + c_2 X_5 = 0$$

и либо выполняется следующее соотношение для правой части уравнения (0.1):

$$f = \bar{c} \left( u_1 \int \frac{\bar{c}_u}{\bar{c}^2} d\bar{u}_1 + B \right), \quad \bar{c}_{\bar{u}_1} + \frac{\delta \bar{u}_1}{\bar{c}} = \lambda, \quad \delta, \lambda - \text{const}, \quad (2.1)$$

$$\text{где } c_1 = \frac{1}{\bar{c}^2}, \quad c_2 = 0, \quad B = B(u, u_1), \quad \bar{c} = \bar{c}(u, \bar{u}_1),$$

либо функция  $f$  удовлетворяет соотношениям

$$f_u + f_{u_1} f_{\bar{u}_1} - \bar{u}_1 f_{u \bar{u}_1} - f f_{u_1 \bar{u}_1} - c f_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} = 0,$$

$$D(c) - c f_{\bar{u}_1} - (\bar{u}_1 f_u + f f_{u_1}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\text{где } c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{c}, \quad c_2 \neq 0, \quad c = c(u, \bar{u}_1).$$

**Доказательство.** Положим

$$\alpha = -(\bar{u}_1 f_u + f f_{u_1}), \quad \beta = -f_{\bar{u}_1}, \quad \gamma = -(f_u + f_{u_1} f_{\bar{u}_1}), \quad p = -f_{\bar{u}_1 \bar{u}_1}, \quad q = f_{u_1 p},$$

$$r = f_u + f_{u_1} f_{\bar{u}_1} - \bar{u}_1 f_{u \bar{u}_1} - f f_{u_1 \bar{u}_1}, \quad s = f_{u_1 r}.$$

Тогда формулы (1.2)–(1.3) и (1.4) переписываются следующим образом:

$$[D, X_1] = \alpha X_2, \quad [D, X_2] = \beta X_2, \quad [D, X_3] = \beta X_3 + \gamma X_2,$$

$$[D, X_4] = 2\beta X_4 + p X_3 + q X_2, \quad [D, X_5] = \beta X_5 + \alpha X_4 + r X_3 + s X_2.$$

Далее рассматриваются уравнения (0.1), для которых размерность пространства  $\mathcal{L}_3$  равна 4. Тогда либо

$$X_4 + c_1(X_1 - \bar{u}_1 X_3) + c_2 X_5 = 0$$

и, следовательно, согласно лемме 1 и соотношениям (1.2)–(1.4)

$$D(c_1) + c_1(2f_{\bar{u}_1} + c_2(\bar{u}_1 f_u + f f_{u_1})) = 0,$$

$$f_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} + c_1(f - \bar{u}_1 f_{\bar{u}_1}) - c_2(f_u + f_{u_1} f_{\bar{u}_1} - \bar{u}_1 f_{u \bar{u}_1} - f f_{u_1 \bar{u}_1}) = 0, \quad (2.3)$$

$$D(c_2) + c_2(f_{\bar{u}_1} + c_2(\bar{u}_1 f_u + f f_{u_1})) = 0, \quad c_i = c_i(u, \bar{u}_1), \quad i = 1, 2,$$

либо

$$X_5 + \bar{c}_1(X_1 - \bar{u}_1 X_3) + \bar{c}_2 X_4 = 0$$

и, соответственно,

$$D(\bar{c}_2) - \bar{u}_1 f_u - f f_{u_1} - \bar{c}_2 f_{\bar{u}_1} = 0,$$

$$f_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} \bar{c}_2 + \bar{c}_1(f - \bar{u}_1 f_{\bar{u}_1}) - f_u - f_{u_1} f_{\bar{u}_1} + \bar{u}_1 f_{u \bar{u}_1} + f f_{u_1 \bar{u}_1} = 0, \quad (2.4)$$

$$D(\bar{c}_1) + \bar{c}_1 f_{\bar{u}_1} = 0, \quad \bar{c}_i = \bar{c}_i(u, \bar{u}_1), \quad i = 1, 2.$$

Если  $c_1 \neq 0$ , то, умножая первое уравнение (2.3) на  $c_2$ , а третье — на  $c_1$  и почленно вычитая, имеем

$$\left( \frac{c_1}{c_2} \right)_u u_1 + \left( \frac{c_1}{c_2} f \right)_{\bar{u}_1} = 0, \quad c_2 \neq 0,$$

тогда

$$f = \bar{c} \left( u_1 \int \frac{\bar{c}_u}{\bar{c}^2} d\bar{u}_1 + B(u, u_1) \right), \text{ где } \bar{c} = \frac{c_2}{c_1}.$$

Теперь умножим первое уравнение (2.3) на  $c_2$ , а второе — на  $2c_1$  и, вычитая почленно, получаем

$$c_2 D(c_1) - 2c_1 D(c_2) + c_1 c_2^2 \alpha = 0$$

или

$$\alpha = \left( -\frac{c_1 u}{c_1 c_2} + 2\frac{c_2 u}{c_2^2} \right) u_1 + \left( \frac{c_2 \bar{u}_1}{c_2^2} - \frac{c_1 \bar{u}_1}{c_1 c_2} \right) \left( u_1 \int \frac{\bar{c}_u}{\bar{c}^2} d\bar{u}_1 + B \right) \bar{c},$$

т.е.  $\alpha = -(p_2 u_1 + q_2 B)$ .

Введем обозначение  $\bar{A} = \bar{c} \int \frac{\bar{c}_u}{\bar{c}^2} d\bar{u}_1$ , тогда  $f = \bar{A}(u, \bar{u}_1) u_1 + B(u, u_1) \bar{c}$ . Подстановка во второе уравнение (2.3) дает следующее:

$$\bar{A}_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} u_1 + \bar{c}_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} B - c_1 (\bar{A}_{\bar{u}_1} u_1 + \bar{c}_{\bar{u}_1} B - \bar{A} u_1 - \bar{c} B) - c_2 r = 0.$$

Отсюда  $r = p_0 u_1 + q_0 B$ .

Так как  $r - \alpha \bar{u}_1 = 2(f_u + f_{u_1} f_{\bar{u}_1})$  и  $\alpha = -(\bar{u}_1 f_u + f f_{u_1})$ , то

$$B_u + B_{u_1} u_1 \bar{A}_{\bar{u}_1} + B B_{u_1} \bar{c}_{\bar{u}_1} = p_1 u_1 + q_1 B, \quad (2.5)$$

$$\bar{u}_1 B_u + B_{u_1} u_1 \bar{A} + B B_{u_1} \bar{c} = p_2 u_1 + q_2 B. \quad (2.6)$$

Умножим (2.5) на  $\bar{u}_1$  и вычтем из (2.6):

$$u_1 B_{u_1} (\bar{A} - \bar{u}_1 \bar{A}_{\bar{u}_1}) + B B_{u_1} (\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1}) = p_3 u_1 + q_3 B, \quad p_i = p_i(u, \bar{u}_1),$$

$$q_i = q_i(u, \bar{u}_1), \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

Таким образом, приходим к рассмотрению следующих четырех случаев:

(1) Соотношения  $\bar{A} - \bar{u}_1 \bar{A}_{\bar{u}_1} = 0$  и  $\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1} = 0$  для уравнений (2.3) выполняются только тогда, когда  $\bar{A} = 0$  и  $f = B\bar{c}$ . Но тогда  $\dim \mathcal{L}_2 = 2$ .

(2) Если  $\bar{A} - \bar{u}_1 \bar{A}_{\bar{u}_1} \neq 0$  и  $\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1} = 0$ , то  $\bar{c} = a(u) \bar{u}_1$ ,

$$f = a \bar{u}_1 \left( B - \left( \frac{1}{a} \right)_u u_1 \ln \bar{u}_1 \right) + b(u) u_1.$$

Подстановка во второе уравнение (2.3) дает

$$u_1 B_{u_1} = B - G(u) u_1,$$

а из (2.7) следует, что  $u_1 B_{u_1} = p_4 u_1 + q_4 B$ . Поэтому  $B(1 - q_4) = (G + p_4) u_1$ .

Если  $1 - q_4 \neq 0$ , то  $B = \bar{b}(u) u_1$  и  $f = \bar{G}(u, \bar{u}_1) u_1$ . Подстановка в систему уравнений (2.3) приводит к соотношению

$$a \left( \frac{1}{a} \right)_u = 0.$$

Но  $a \neq 0$ .

Если  $1 - q_4 = 0$ , тогда из первого соотношения (2.3) имеем, что  $a = \text{const}$  и  $\bar{A} = b$ . При этом  $b = 0$ , т.е.  $f = a B \bar{u}_1$ , что приводит к утверждению леммы 2.

(3) Теперь пусть  $\bar{A} - \bar{u}_1 \bar{A}_{\bar{u}_1} = 0$  и  $\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1} \neq 0$ , т.е.  $\bar{A} = a(u) \bar{u}_1$ .

Если  $a = 0$ , то  $\bar{A} = 0$  и  $f = B\bar{c}(\bar{u}_1)$ . Из второго уравнения (2.3) видно, что  $B = K(u)G(u_1)$ , тогда

$$f = K(u)G(u_1)\bar{c}(\bar{u}_1).$$

Так как  $GG' = k_1u_1 + k_2G$ ,  $k_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2$ , то перепишем систему (2.3) так:

$$\left(\frac{1}{c_1}\right)_u = \bar{c}^3 K^2 k_1, \quad \left(\frac{1}{c_1}\right)_{\bar{u}_1} \frac{1}{\bar{c}} + 2\frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{\bar{c}}\right)_{\bar{u}_1} = \bar{u}_1 \frac{K'}{K} + k_2 K \bar{c}.$$

Подстановка первого уравнения во второе дает:

$$\bar{c}\bar{c}' = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{c}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{k_1} \frac{1}{K^2} \left(\frac{K'}{K}\right)', \quad \lambda_2 = \frac{k_2}{k_1} \frac{K'}{K^2}, \quad k_2 \lambda_1 = -\lambda_2, \quad \lambda_i = \text{const}, \quad i = 1, 2.$$

А также  $c_1 = \frac{K}{k_1(\bar{c}K' - K)} \frac{1}{\bar{c}^2}$ . Видно, что  $K = \frac{1}{u}$ . Таким образом, приходим к утверждению леммы 3.

Если  $a \neq 0$ , тогда система (2.3) принимает вид

$$B_u + u_1 a B_{u_1} = G_1 u_1 + G_2 B, \quad G_i = G_i(u, \bar{u}_1),$$

$$B(\bar{c}_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} + c_1(\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1})(1 - a\bar{c}) - c_1 \bar{c}(\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1})_u) - c_1 \bar{c}(\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1})(B_u + u_1 a B_{u_1}) = 0.$$

Подстановка первого уравнения во второе дает:

$$B(\bar{c}_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} + c_1(\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1})(1 - a\bar{c} - \bar{c}G_2) - c_1 \bar{c}(\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1})_u) - u_1 c_1 \bar{c}(\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1})G_1 = 0.$$

Положим

$$W(u, \bar{u}_1) = \bar{c}_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} + c_1(\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1})(1 - a\bar{c} - \bar{c}G_2) - c_1 \bar{c}(\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1})_u.$$

Так как  $W \neq 0$ , тогда  $B = bu_1$  и  $f = u_1(a\bar{u}_1 + b\bar{c})$ .

(4) Когда  $\bar{A} - \bar{u}_1, \bar{A}_{\bar{u}_1} \neq 0$  и  $\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1} \neq 0$ .

Перепишем систему (2.3) так:

$$\bar{u}_1 B_u + \bar{A} u_1 B_{u_1} + \bar{c} B B_{u_1} = p_1 u_1 + q_1 B, \quad p_i = p_i(u, \bar{u}_1), \quad q_i = q_i(u, \bar{u}_1), \quad i = 1, 2, \quad (2.8)$$

$$B_u(\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1}) + u_1 B_{u_1}(\bar{c} \bar{A}_{\bar{u}_1} - \bar{c}_{\bar{u}_1} \bar{A}) = p_2 u_1 + q_2 B. \quad (2.9)$$

Если  $\bar{c} \bar{A}_{\bar{u}_1} - \bar{c}_{\bar{u}_1} \bar{A} = 0$ , то, так как

$$\bar{A} = \bar{c} \int \frac{\bar{c}_u}{\bar{c}^2} d\bar{u}_1,$$

имеем  $\bar{c}_u = 0$  и  $\bar{A} = 0$ .

Если  $\bar{c} \bar{A}_{\bar{u}_1} - \bar{c}_{\bar{u}_1} \bar{A} \neq 0$ , то из соотношений (2.7)–(2.9) видно, что  $B_u = p_3 u_1 + q_3 B$ ,  $p_3 = p_3(u)$ ,  $q_3 = q_3(u)$ . А также  $u_1 B_{u_1} = p(u)u_1 + q(u)B$ . Если  $p = 0$ , то  $B = \varphi(u)u_1^q$  и уравнение (2.9) перепишем так:

$$\varphi^2 q z^2 + \varphi(\tilde{p}q - q_2)z - p_2 = 0, \quad z = u_1^{q-1}, \quad \tilde{p} = \frac{\bar{c} - \bar{u}_1 \bar{c}_{\bar{u}_1}}{\bar{c} \bar{A}_{\bar{u}_1} - \bar{c}_{\bar{u}_1} \bar{A}}.$$

Тогда  $z = \text{const}$ .

Если  $q = 0$ , то  $B = pu_1 + k$ ,  $k = k(u)$  и выполняются соотношения

$$(p - q_2)k = 0, \quad \tilde{p}p + p^2 - p_2 - q_2 p = 0.$$

Видно, что  $k \neq 0$  (иначе  $f = (\bar{A} + \bar{c}p)u_1$ ) и  $p = q_2, \tilde{p}p = p_2$ . Здесь  $f = (\bar{A} + \bar{c}p)u_1 + k\bar{c}$ .

Если  $p \neq 0, q \neq 0, q \neq 1$ , то

$$B = \frac{p}{1-q}u_1 + ku_1^q, \quad k = k(u).$$

Тогда уравнение (2.9) примет следующий вид:

$$k^2 q z^2 + k \left( \tilde{p}q + \frac{p(q+1)}{1-q} - q_2 \right) z + \frac{p}{1-q}(\tilde{p} - q_2) - p_2 + \frac{p^2}{(1-q)^2} = 0, \quad z = u_1^{q-1}.$$

Отсюда  $z = \text{const}$ .

Если  $q = 1$ , то  $B = u_1(p \ln u_1 + \tilde{p}), \tilde{p} = \tilde{p}(u)$  и

$$\ln^2 u_1 p^2 + \ln u_1 p(2p + 2\tilde{p} - q_2) + 2(p + \tilde{p})\tilde{p} - p_2 - q_2 \tilde{p} = 0.$$

Значит,  $p = 0$  и  $B = \tilde{p}u_1$ , т.е.  $f = (\bar{A} + \bar{c}\tilde{p})u_1$ .

Теперь, если  $c_2 = 0$ , то, используя замену  $f = F(u, u_1, \bar{u}_1) \cdot \bar{c}(u, \bar{u}_1)$ ,  $c_1 = \frac{1}{\bar{c}^2}$ , во втором уравнении (2.3) имеем

$$F_{\bar{u}_1} = -u_1 \left( \frac{1}{\bar{c}} \right)_u \quad \text{или} \quad F = u_1 \int \frac{\bar{c}_u}{\bar{c}^2} d\bar{u}_1 + B(u, u_1).$$

А подстановка в первое уравнение дает

$$\bar{c}_{\bar{u}_1} + \frac{\bar{u}_1}{\bar{c}} = \lambda, \quad \lambda = \text{const}.$$

Если  $c_1 = 0$ , то перепишем систему уравнений (2.3) так:

$$\begin{aligned} f_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} - c_2(f_u + f_{u_1} f_{\bar{u}_1} - \bar{u}_1 f_u \bar{u}_1 - f f_{u_1 \bar{u}_1}) &= 0, \\ D(c_2) + c_2(f_{\bar{u}_1} + c_2(\bar{u}_1 f_u + f f_{u_1})) &= 0. \end{aligned}$$

Если  $c_2 \neq 0$ , используем замену  $c_2 = \frac{1}{c}$ :

$$\begin{aligned} f_u + f_{u_1} f_{\bar{u}_1} - \bar{u}_1 f_u \bar{u}_1 - f f_{u_1 \bar{u}_1} - c f_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} &= 0; \\ D(c) - c f_{\bar{u}_1} - (\bar{u}_1 f_u + f f_{u_1}) &= 0, \quad c = c(u, \bar{u}_1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если  $c_2 = 0$ , то  $f_{\bar{u}_1 \bar{u}_1} = 0$ .

Теперь рассмотрим систему уравнений (2.4).

Если  $\bar{c}_1 = 0$ , то при  $\bar{c}_2 = 0$   $f = A(\bar{u}_1)$ , а при  $\bar{c}_2 \neq 0$  система уравнений (2.4) приводится к (2.10).

Пусть  $\bar{c}_1 \neq 0$ , тогда замена  $\bar{c}_1 = \frac{c_1}{c_2}$  и  $\bar{c}_2 = \frac{1}{c_2}$  ( $\bar{c}_2 \neq 0$ ) приведет к решению системы (2.3).

Если  $\bar{c}_2 = 0$ , то перепишем (2.4) так:

$$D(\bar{c}_1) + \bar{c}_1 f_{\bar{u}_1} = 0, \quad f_u \bar{u}_1 + f f_{u_1} = 0, \quad \bar{c}_1(f - \bar{u}_1 f_{\bar{u}_1}) - f_u - f_{u_1} f_{\bar{u}_1} + \bar{u}_1 f_u \bar{u}_1 + f f_{u_1 \bar{u}_1} = 0.$$

Продифференцируем второе уравнение по  $\bar{u}_1$  и прибавим к третьему, тогда

$$\left( 2f_{u_1} \frac{1}{\bar{u}_1} + \bar{c}_1 \right) (\bar{u}_1 f_{\bar{u}_1} - f) = 0.$$

Следовательно,  $f_{u_1} = -\frac{\bar{c}_1 \bar{u}_1}{2}$ , т.е.  $f_{u_1 u_1} = 0$ .

Теорема доказана.

Рассматривая  $y$ -характеристическую алгебру, получим “симметричный” вариант теоремы 1.

**Теорема 2.** *Размерность пространства  $\overline{\mathcal{L}}_3$  равна четырем, если и только если*

$$Y_4 + \bar{c}_1(Y_1 - u_1 Y_3) + \bar{c}_2 Y_5 = 0$$

*и выполняется одно из следующих соотношений для правой части уравнения (0.1):*

*либо*

$$f = c \left( \bar{u}_1 \int \frac{c_u}{c^2} du_1 + \bar{B} \right), \quad c_{u_1} + \frac{\delta u_1}{c} = \bar{\lambda}, \quad \bar{\delta}, \bar{\lambda} - \text{const}, \quad (2.11)$$

где  $\bar{c}_1 = \frac{1}{c^2}$ ,  $\bar{c}_2 = 0$ ,  $\bar{B} = \bar{B}(u, \bar{u}_1)$ ,  $c = c(u, u_1)$ ,

*либо функция  $f$  удовлетворяет соотношениям*

$$\begin{aligned} f_u + f_{u_1} f_{\bar{u}_1} - u_1 f_{uu_1} - f f_{u_1 \bar{u}_1} - \bar{c} f_{u_1 u_1} &= 0, \\ \bar{D}(\bar{c}) - \bar{c} f_{u_1} - (u_1 f_u + f f_{\bar{u}_1}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\bar{c}_1 = 0$ ,  $\bar{c}_2 = \frac{1}{c}$ ,  $\bar{c}_2 \neq 0$ ,  $\bar{c} = \bar{c}(u, u_1)$ .

Отметим, что соотношения (2.11), (2.12) получаются из уравнений (2.1), (2.2) заменой  $u_1$  на  $\bar{u}_1$  и  $\bar{u}_1$  на  $u_1$ .

### 3. Интегрируемые нелинейные уравнения

В этой главе рассматривается уравнение (0.1) со специальной правой частью:

$$u_{xy} = K(u)L(u_x)\bar{B}(u_y). \quad (3.1)$$

**Лемма 4.** *Уравнение (3.1), удовлетворяющее системе (2.2) теоремы 1, приводится к виду*

$$u_{xy} = K(u)\sqrt{1-u_x^2}\sqrt{1-u_y^2}, \quad \text{где } K \text{ такое, что } \left(\frac{K'}{K}\right)' = K^2. \quad (3.2)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** При  $f = K(u)L(u_x)\bar{B}(u_y)$  из первого соотношения системы (2.2) выражаем  $c_2$ :

$$c_2 = \frac{K}{K'} \frac{\bar{B}''}{\bar{B} - \bar{u}_1 \bar{B}'}$$

Подстановка во второе выражение (2.2) дает:

$$\frac{K'}{K} - \frac{K''}{K'} = \lambda_1, \quad \frac{\bar{B}^2 \bar{B}''}{\bar{B} - \bar{u}_1 \bar{B}'} = \lambda_2, \quad \frac{K^3}{K'} = \lambda_3, \quad \frac{\bar{B}'''}{\bar{B}''} \bar{B} + 2 \frac{\bar{u}_1 \bar{B}''}{\bar{B} - \bar{u}_1 \bar{B}'} \bar{B} + \bar{B}' = \lambda_4.$$

где  $\lambda_i - \text{const}$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ .

Видно, что  $\lambda_4 = 0$ , а также

$$\bar{B}^2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_5} + \lambda_6 \bar{u}^2 \quad \text{и} \quad L^2 = \lambda_7 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} u_1^2.$$

С помощью точечных преобразований приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Характеристическая алгебра  $X$  уравнения (3.2) равна трем (см. лемму 3).

Теперь будем считать, что правая часть уравнения (0.1) удовлетворяет соотношениям (2.1), (2.11).

**Лемма 5.** При выполнении (2.1), (2.11) уравнение (0.1) приводится к виду:

$$u_{xy} = K(u)L(u_x)\bar{B}(u_y), \quad L' + \eta\left(\frac{u_x}{L}\right) = \tilde{\lambda}, \quad \bar{B}' + \delta\left(\frac{u_y}{\bar{B}}\right) = \lambda, \quad \tilde{\lambda}, \lambda, \eta, \delta - \text{const}. \quad (3.3)$$

**Доказательство.** Так как  $\bar{c}_{\bar{u}_1\bar{u}_1}B_{u_1u_1} = c_{u_1u_1}\bar{B}_{\bar{u}_1\bar{u}_1}$ , то  $B = \lambda c + \chi u_1 + \mu$ ,  $\bar{B} = \lambda\bar{c} + p\bar{u}_1 + q$ , где  $\lambda = \lambda(u)$ ,  $\chi = \chi(u)$ ,  $\mu = \mu(u)$ ,  $p = p(u)$ ,  $q = q(u)$ . Подстановка в (2.1), (2.11) определяет  $\mu = q = 0$  и

$$f = h(u)u_1\bar{u}_1 + \lambda(u)c\bar{c}, \quad (3.4)$$

где

$$h(u) = \frac{\bar{c}}{\bar{u}_1} \left( \int \frac{\bar{c}_u}{\bar{c}^2} d\bar{u}_1 + \chi \right) = \frac{c}{u_1} \left( \int \frac{c_u}{c^2} du_1 + p \right).$$

Теперь в уравнении (0.1) с правой частью (3.4) сделаем замену  $v = H(u)$ ,  $H'(u) = e^{-\int h du}$  и, учитывая, что

$$c = \Phi(u_1 e^{-\int h du}) e^{\int h du}, \quad \bar{c} = \bar{\Phi}(\bar{u}_1 e^{-\int h du}) e^{\int h du},$$

имеем

$$v_{xy} = \aleph(v)\Phi(v_1)\bar{\Phi}(\bar{v}_1), \quad \Phi'(v_1) + \frac{v_1}{\Phi(v_1)} = \alpha, \quad \bar{\Phi}'(\bar{v}_1) + \frac{\bar{v}_1}{\bar{\Phi}(\bar{v}_1)} = \bar{\alpha}, \quad \alpha, \bar{\alpha} - \text{const}.$$

Лемма доказана.

Для уравнения (3.3) операторы  $X_4$  и  $Y_4$  такие:

$$X_4 + \frac{\delta}{B^2}(X_1 - u_y X_3) = 0, \quad Y_4 + \frac{\eta}{L^2}(Y_1 - u_x Y_3) = 0.$$

Далее рассмотрим уравнение (3.3), для которого  $\dim \mathcal{L}_3 = 4$ . Введем операторы длины 4:

$$X_6 = [X_2, X_5] = \frac{\delta\bar{u}_1}{B} X_5, \quad X_7 = [X_1, X_5].$$

Используя тождество Якоби и соотношения (1.2), (1.3) и (1.4), имеем

$$\begin{aligned} [D, X_7] = & -\frac{\delta}{B^2}(\bar{u}_1\alpha_u + f\alpha_{u_1})(X_1 - \bar{u}_1 X_3) + (\bar{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s)(f_{u_1} X_2 + X_3) \\ & + \left( 2\alpha \frac{\delta\bar{u}_1}{B^2} + \bar{u}_1\beta_u + f\beta_{u_1} + r \right) X_5 + \beta X_7. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Видно, что размерность пространства  $\mathcal{L}_4$  растет не более чем на единицу, т.е.  $\dim \mathcal{L}_4 \leq 5$ .

Допустим, что  $\dim \mathcal{L}_4 = 4$ , т.е.  $X_7 + g_1(X_1 - \bar{u}_1 X_3) + g_2 X_5 = 0$ . Последнее, согласно лемме 1 и (1.2), (1.3), (1.4) и (3.5), эквивалентно равенствам:

$$\begin{aligned} -\frac{\delta}{B^2}(\bar{u}_1\alpha_u + f\alpha_{u_1}) + D(g_1) - g_2\alpha\frac{\delta}{B^2} - g_1\beta &= 0, \\ \bar{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s - g_1(f + \bar{u}_1\beta) + g_2 r &= 0, \\ 2\alpha\frac{\delta\bar{u}_1}{B^2} + \bar{u}_1\beta_u + f\beta_{u_1} + r + D(g_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из второго уравнения (3.6) выразим  $g_1$ :

$$g_1 = g_2 \frac{K'}{K} + \bar{u}_1 \frac{K''}{K}.$$

Подставив в первое и третье уравнение (3.6), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\bar{B}}(\bar{u}_1^2 K'' L + 3KK'LL'\bar{B} + K^3L\bar{B}^2(L'^2 + LL'')) + \left(g_2 \frac{K'}{K}\right)_u u_1 + u_1 \bar{u}_1 \left(\frac{K''}{K}\right)' + (g_2 \bar{B})_{\bar{u}_1} K' L \\ & + (\bar{u}_1 \bar{B})_{\bar{u}_1} K'' L + g_2 \frac{\delta}{\bar{B}}(K' L \bar{u}_1 + K^2 LL' \bar{B}) = 0, \\ & - 2K' L \bar{u}_1 (\bar{B}' + \delta \frac{\bar{u}_1}{\bar{B}}) + K' L \bar{B} - K^2 LL' \bar{B} \left(\bar{B}' + 2\delta \frac{\bar{u}_1}{\bar{B}}\right) + g_{2u} u_1 + g_{2\bar{u}_1} K L \bar{B} = 0. \end{aligned}$$

Так как  $LL' = k_1 u_1 + k_2 L$ , то

$$L'^2 + LL'' = k_1 + k_2 L', \quad L(L'^2 + LL'') = k_1 k_2 u_1 + (k_1 + k_2^2)L.$$

Тогда первое уравнение перепишем так:

$$3k_1 \delta K K' + k_1 k_2 \delta K^3 \bar{B} + \left(g_2 \frac{K'}{K}\right)_u + \bar{u}_1 \left(\frac{K''}{K}\right)' + k_1 \delta g_2 K^2 = 0,$$

$$\frac{\delta}{\bar{B}}(\bar{u}_1^2 K'' + 3k_2 K K' \bar{B} + (k_1 + k_2^2) K^3 \bar{B}^2) + (g_2 \bar{B})_{\bar{u}_1} K' + (\bar{u}_1 \bar{B})_{\bar{u}_1} K'' + g_2 \frac{\delta}{\bar{B}}(K' \bar{u}_1 + k_2 K^2 \bar{B}) = 0,$$

а третье — так:

$$g_{2u} = k_1 K^2 \bar{B} \left(\bar{B}' + 2\delta \frac{\bar{u}_1}{\bar{B}}\right), \quad (3.7)$$

$$g_{2\bar{u}_1} = 2 \frac{K' \bar{u}_1}{K \bar{B}} \left(\bar{B}' + \delta \frac{\bar{u}_1}{\bar{B}}\right) - \frac{K'}{K} + k_2 K \left(\bar{B}' + 2\delta \frac{\bar{u}_1}{\bar{B}}\right). \quad (3.8)$$

Уравнение (3.7) продифференцируем по  $\bar{u}_1$ , а уравнение (3.8) — по  $u$  и приравняем, тогда

$$\left(\bar{B}' + \delta \frac{\bar{u}_1}{\bar{B}}\right) \left(k_1 K^2 \bar{B}' - 2 \left(\frac{K'}{K}\right)' \frac{\bar{u}_1}{\bar{B}} - k_2 K'\right) + k_1 \delta K^2 + \left(\frac{K'}{K}\right)' = 0.$$

Известно, что  $\bar{B}' + \delta \frac{\bar{u}_1}{\bar{B}} = \lambda$ , поэтому

$$\lambda \left(k_1 K^2 \left(\lambda - \delta \frac{\bar{u}_1}{\bar{B}}\right) - 2 \left(\frac{K'}{K}\right)' \frac{\bar{u}_1}{\bar{B}} - k_2 K'\right) + k_1 \delta K^2 + \left(\frac{K'}{K}\right)' = 0$$

или, так как  $\bar{B}' \neq \text{const}$ ,

$$\lambda^2 k_1 K^2 - \lambda k_2 K' + k_1 \delta K^2 + \left(\frac{K'}{K}\right)' = 0, \quad \lambda \left(\delta k_1 K^2 + 2 \left(\frac{K'}{K}\right)'\right) = 0. \quad (3.9)$$

Из соотношения (3.9) видно, что

$$\left(\frac{K'}{K}\right)' = \kappa K^2, \quad \kappa - \text{const},$$

тогда если  $\frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{\eta}} \neq \frac{\lambda}{\sqrt{\delta}}$ , то характеристическая алгебра Ли уравнения (3.2) конечномерна, т.е.  $\dim \mathcal{L}_3 = \dim \mathcal{L}_4 = 4$ . А операторы выражаются так:

$$X_4 = -\frac{\delta}{\bar{B}^2}(X_1 - \bar{u}_1 X_3), \quad X_6 = \frac{\delta \bar{u}_1}{\bar{B}^2} X_5, \quad X_7 = -\left(g_2 \frac{K'}{K} + \left(\kappa K^2 + \left(\frac{K'}{K}\right)^2\right) \bar{u}_1\right)(X_1 - \bar{u}_1 X_3) - g_2 X_5,$$

где  $\delta, \kappa - \text{const}$ ,  $g_2$  — решение уравнений (3.7), (3.8). При  $\frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{\eta}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\delta}} \dim \mathcal{L}_3 = 3$ , т.е. приходим к утверждению леммы 3.

Для уравнения (3.3) размерность пространства  $\mathcal{L}_4$  равна 5, т.е. операторы  $X_1, X_2, X_3, X_5, X_7$  линейно независимы. Теперь введем операторы длины 5:  $X_8 = [X_2, X_7]$ ,  $X_9 = [X_1, X_7]$ ,  $[X_3, X_5]$ . Используя тождество Якоби, имеем

$$[X_3, X_5] = -\frac{\delta \bar{u}_1}{B^2} X_7 + X_8,$$

т.е.  $\dim \mathcal{L}_5 \leq 7$ .

А также, согласно (1.2), (1.3), (1.4) и (3.5),

$$\begin{aligned} [D, X_8] &= (\bar{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s) \bar{u}_1 (f_{u_1} X_2 + X_3) - \left( \frac{\delta}{B^2} (\bar{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s) + \left( \frac{\delta}{B^2} (\bar{u}_1 \alpha_u + f \alpha_{u_1}) \right) \right)_{\bar{u}_1} \\ &\quad + \frac{\delta^2}{B^4} \bar{u}_1 (\bar{u}_1 \alpha_u + f \alpha_{u_1}) \left( X_1 - \bar{u}_1 X_3 \right) + \left( \left( 2\delta \alpha \frac{\bar{u}_1}{B^2} + \bar{u}_1 \beta_u + f \beta_{u_1} + r \right) \right)_{\bar{u}_1} \\ &\quad + \delta \frac{\bar{u}_1}{B^2} \left( 2\delta \alpha \frac{\bar{u}_1}{B^2} + \bar{u}_1 \beta_u + f \beta_{u_1} + r \right) X_5 + \beta_{\bar{u}_1} X_7 + 2\beta X_8, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} [D, X_9] &= \left( \bar{u}_1 (\bar{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s)_u + f (\bar{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s)_{u_1} - f_{u_1} (\bar{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s) \right) (f_{u_1} X_2 + X_3) \\ &\quad + \left( 2\bar{u}_1 r_u + 2f r_{u_1} - s + \bar{u}_1 \left( 3\delta \frac{\bar{u}_1}{B^2} \alpha_u + \bar{u}_1 \beta_{uu} + f_u \beta_{u_1} \right) + 2\bar{u}_1 f \beta_{uu_1} + f \left( 3\delta \frac{\bar{u}_1}{B^2} \alpha_{u_1} + f_{u_1} \beta_{u_1} + f \beta_{u_1 u_1} \right) \right) X_5 \\ &\quad + \left( 2\delta \frac{\bar{u}_1}{B^2} \alpha + 2\bar{u}_1 \beta_u + 2f \beta_{u_1} + r \right) X_7 + \alpha X_8 + \beta X_9 - \frac{\delta}{B^2} \left( 2\bar{u}_1 f \alpha_{uu_1} + \bar{u}_1 (\bar{u}_1 \alpha_{uu} + f_u \alpha_{u_1}) \right. \\ &\quad \left. + f (f_{u_1} \alpha_{u_1} + f \alpha_{u_1 u_1}) \right) (X_1 - \bar{u}_1 X_3). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Пусть размерность пространства  $\mathcal{L}_5$  равна 5. Тогда

$$X_8 + d_1 (X_1 - \bar{u}_1 X_3) + d_2 X_5 + d_3 X_7 = 0, \quad X_9 + \bar{d}_1 (X_1 - \bar{u}_1 X_3) + \bar{d}_2 X_5 + \bar{d}_3 X_7 = 0. \quad (3.12)$$

Так как

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s &= (\bar{B} - \bar{u}_1 \bar{B}') \bar{u}_1 K'' L, \\ \bar{u}_1 \alpha_u + f \alpha_{u_1} &= - \left( \bar{u}_1^2 K'' L \bar{B} + 3\bar{u}_1 K K' L L' \bar{B}^2 + K^3 L \bar{B}^3 (L'^2 + L L'') \right), \\ 2\delta \alpha \frac{\bar{u}_1}{B^2} + \bar{u}_1 \beta_u + f \beta_{u_1} + r &= - (\bar{u}_1 K' L + K^2 L L' \bar{B}) \left( 2\delta \frac{\bar{u}_1}{B} + \bar{B}' \right) + K' L (\bar{B} - \bar{u}_1 \bar{B}'), \end{aligned}$$

то, упростив первое уравнение (3.12) и используя соотношения (1.2), (1.3), (1.4), (3.5), (3.10), (3.11), перепишем так:

$$\begin{aligned} \delta K^2 (k_1 + k_2^2) \left( \bar{B}' + \delta \frac{\bar{u}_1}{B} + d_3 \bar{B} \right) + 3\delta k_2 K' \left( 1 + \left( d_3 + \delta \frac{\bar{u}_1}{B^2} \right) \bar{u}_1 \right) + d_{1\bar{u}_1} \bar{B} + d_1 \left( 2\lambda - \delta \frac{\bar{u}_1}{B} \right) + k_2 \delta d_2 K &= 0, \\ \delta k_1 k_2 K^3 \left( \bar{B}' + \delta \frac{\bar{u}_1}{B} + d_3 \bar{B} \right) + 3\delta k_1 K K' \left( 1 + \left( d_3 + \delta \frac{\bar{u}_1}{B^2} \right) \bar{u}_1 \right) + d_{1u} + d_2 \delta k_1 K^2 &= 0, \\ d_1 - d_2 \frac{K'}{K} = \frac{K''}{K} \left( 1 + (\lambda + l) \frac{\bar{u}_1}{B} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$K'G_1 + k_1K^2G_2 + (d_2\bar{B})_{\bar{u}_1}K = 0,$$

$$k_2K^2G_2 + d_{2u} = 0,$$

$$d_{3u} = 0, \quad (d_3\bar{B})_{\bar{u}_1} = \bar{B}'',$$

где  $LL' = k_1u_1 + k_2L$ ,  $G_1 = l - (2\lambda(\lambda + l) + \delta)\frac{\bar{u}_1}{\bar{B}}$ ,  $G_2 = -(\delta + \lambda(2\lambda + l)) - l\delta\frac{\bar{u}_1}{\bar{B}}$ ,  $l - \text{const.}$

Если  $d_2 = 0$ , то  $l = G_1 = G_2 = 0$ ,  $\delta = -2\lambda^2$  и

$$d_1 = \frac{K''}{K} \left(1 + \lambda\frac{\bar{u}_1}{\bar{B}}\right),$$

$$3\lambda K'' - \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{K''}{K}\right)' - 4k_1\lambda^3 K^3 = 0,$$

$$\left(\frac{K''}{K}\right)' = (4\lambda k_2 K^2 + 6K')k_1 K \lambda^2.$$

Подстановка третьего уравнения во второе дает:

$$K'' = \frac{4}{3}\lambda^2 K^3 (k_1 + k_2^2) + 2k_2\lambda K K',$$

тогда  $\lambda^2(2k_2^2 - k_1)(10K' + 4\lambda K^2) = 0$ , т.е.  $k_1 = 2k_2^2$  и  $K'' = 2\lambda k_2(2\lambda k_2 K^3 + K K')$ .

А требование выполнения второго соотношения (3.12) приводит к утверждению леммы 3. Теперь будем считать, что размерность пространства  $\mathcal{L}_5$  равна 6. Тогда либо

$$X_8 + d_1(X_1 - \bar{u}_1 X_3) + d_2 X_5 + d_3 X_7 + d_4 X_9 = 0, \quad (3.14)$$

либо

$$X_9 + \bar{d}_1(X_1 - \bar{u}_1 X_3) + \bar{d}_2 X_5 + \bar{d}_3 X_7 + \bar{d}_4 X_8 = 0. \quad (3.15)$$

Если  $d_4 \neq 0$ , то в (3.14) выпишем соотношение при  $X_9$ , используя (1.2), (1.3), (1.4), (3.5), (3.10), (3.11):

$$d_{4u}u_1 + d_{4\bar{u}_1}f + d_4 f_{\bar{u}_1} + d_4^2(\bar{u}_1 f_u + f f_{u_1}) = 0$$

или

$$\left(\frac{1}{d_4\bar{B}}\right)_{\bar{u}_1} = \frac{K'\bar{u}_1}{K\bar{B}} + k_2 K, \quad \left(\frac{1}{d_4}\right)_u = k_1 K^2 \bar{B}^2,$$

т.е.  $\left(\frac{1}{K}\right)' = -\frac{k_1}{k_2}\lambda$ . Таким образом, выполняется утверждение леммы 3.

Если  $d_4 = 0$ , тогда приходим к решению системы (3.13).

В случае (3.15) выпишем соотношение при  $X_8$ :

$$K'\bar{u}_1 + k_2 K^2 \bar{B}^2 + \bar{d}_4 K \bar{B}' = 0 \quad \text{и} \quad k_1 K^2 \bar{B}^2 = 0,$$

т.е.  $k_1 = 0$  и  $f_{u_1 u_1} = 0$ .

Следовательно, справедливо утверждение.

**Лемма 6.** *Размерность пространства  $\mathcal{L}_5$  для уравнения (3.3) равна шести если и только если функции  $K(u)$ ,  $L(u_x)$  и  $\bar{B}(u_y)$  удовлетворяют соотношениям вида*

$$K'' = 4\lambda^2 k_2^2 K^3 + 2k_2\lambda K K', \quad L' = k_2 \left(1 + 2k_2 \frac{u_x}{L}\right), \quad \bar{B}' = \lambda \left(1 + 2\lambda \frac{u_y}{\bar{B}}\right). \quad (3.16)$$

При этом

$$X_8 + d_1(X_1 - u_y X_3) + d_3 X_7 = 0,$$

где

$$d_1 = 2\lambda k_2 \left(1 + \lambda \frac{u_y}{\bar{B}}\right) (2\lambda k_2 K^2 + K'), \quad d_3 = 2\lambda \frac{1}{\bar{B}} \left(1 + \lambda \frac{u_y}{\bar{B}}\right).$$

**З а м е ч а н и е.** Отметим, что для уравнения (3.3), (3.16) постоянная  $\lambda$  не равна нулю, иначе  $\bar{B}' = 0$ .

Уравнения (3.3), (3.16) при  $\lambda k_2 = 1$  связаны с уравнением Цицейки  $v_{xy} = e^v + e^{-2v}$  дифференциальной подстановкой (см. [6, 8])

$$v = -\frac{1}{2} \ln(u_x - L) - \frac{1}{2}(u_y - \bar{B}) + P(u),$$

где функция  $P$  определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$P'^2 - 2KP' - 3K' - 2K^2 = 0.$$

Пусть теперь для уравнения (3.3)  $\lambda = 0$ . Тогда  $\dim \mathcal{L}_5 = 7$  и введем операторы длины 6:

$$X_{10} = [X_2, X_8] = \frac{3\bar{u}_1}{B^2} X_8, \quad X_{11} = [X_1, X_8], \quad X_{12} = [X_2, X_9], \quad X_{13} = [X_1, X_9].$$

Если  $\dim \mathcal{L}_6 = 9$ , то

$$X_{11} = -3KK'\bar{u}_1(X_1 - \bar{u}_1 X_3) + (3K^2 + \mu)\bar{u}_1 X_5 + \frac{\bar{u}_1}{1 - \bar{u}_1^2} X_9,$$

а функция  $K$  удовлетворяет уравнению вида

$$K'' - 2K^3 - \mu K = 0, \quad \mu - \text{const}. \quad (3.17)$$

Уравнения (3.3), (3.17) в значительно более громоздкой форме впервые возникли в работе [9]. Последнее заменой [6]

$$v = \arcsin u_x + \arcsin u_y + P(u), \quad P'^2 = 2K' - 2K^2 - \mu$$

сводится к уравнению синус-Гордона  $v_{xy} = e^v + e^{-v}$ .

Автор выражает благодарность А.В. Жиберу за внимание к работе и критические замечания.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б.** Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // Теорет. и мат. физика. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.
2. **Шабат А.Б., Ямилов Р.И.** Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана: Препринт № 1. Башк. фил. АН СССР. Уфа, 1981.
3. **Жибер А.В., Мукминов Ф.Х.** Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры // Задачи математической физики и асимптотика их решений / ВНЦ УРО АН СССР. Уфа, 1991. С. 14–33.
4. **Zhiber A.V., Murtazina R.D.** On the characteristic Lie algebras for equations  $u_{xy} = f(u, u_x)$  // Fundam. Appl. Math. Hamiltonian and Lagrangian Systems and Lie Algebras. 2006. Т. 12, № 7. Р. 65–78.
5. **Жибер А.В.** Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечномерной алгеброй симметрий // Сер. мат. РАН. Москва, 1994. Т. 58, № 4. С. 33–54.
6. **Жибер А.В., Соколов В.В.** Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевого типа // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 1. С. 63–106.
7. **Жибер А. В., Шабат А. Б.** Системы уравнений  $u_x = p(u, v)$ ,  $v_y = q(u, v)$ , обладающие симметриями // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 29–33.
8. **Борисов А. Б., Зыков С. А.** Уравнение Цицейки и размножение нелинейных интегрируемых уравнений // Теорет. и мат. физика. 2002. Т. 131, № 1. С. 126–134.
9. **Борисов А. Б., Зыков С. А.** Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений // Теорет. и мат. физика. 1998. Т. 115, № 2. С. 199–214.

УДК 515.16

ГРАНИЧНЫЕ НАКЛОНЫ В ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ<sup>1</sup>

Е. А. Сбродова

Напомним, что род  $g(F)$  компактной поверхности  $F$  с краем вычисляется по формуле  $g(F) = 1 - \frac{\chi(F) + k}{2}$ , где  $\chi(F)$  — эйлерова характеристика поверхности  $F$  и  $k$  — число компонент ее края. В работе доказывается существование алгоритма, который по данному трехмерному многообразию  $M$  и данному числу  $N$  выясняет, содержит ли  $M$  собственную существенную инъективную поверхность рода  $\leq N$ . Для случая  $N = 0$ , когда искомые поверхности являются плоскими, аналогичные алгоритмы были известны ранее [1, 2].

## Введение

Как известно, *наклоном* на торе  $T^2$  называется класс кривых, изотопных нетривиальной простой замкнутой кривой  $\delta \subset T^2$  [1, 3]. В [4] рассмотрено обобщение этого понятия на случай произвольной поверхности. *Наклоном* на крае трехмерного многообразия  $M$  называется набор  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  нетривиальных простых замкнутых кривых на  $\partial M$ , которые попарно не пересекаются и не изотопны. Будем говорить, что край собственной поверхности  $F$  в многообразии  $M$  имеет наклон  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , если  $\partial F = k_1\alpha_1 \cup k_2\alpha_2 \cup \dots \cup k_n\alpha_n$ , т. е. состоит из  $k_1$  копий кривой  $\alpha_1$ ,  $k_2$  копий кривой  $\alpha_2$  и т. д., где числа  $\{k_i\}$  принимают натуральные значения. Наклон края собственной поверхности  $F$  обозначим через  $[\partial F]$ .

Наклон  $\alpha$  на крае  $\partial M$  будем называть *граничным*, если найдется такая собственная существенная инъективная поверхность  $F \subset M$ , что  $[\partial F] = \alpha$ . Будем говорить, что наклон  $\alpha$  на крае  $\partial M$  имеет характеристику  $N$ , если найдется такая собственная существенная поверхность  $F \subset M$ , что  $[\partial F] = \alpha$ , и род поверхности  $F$  равен  $N$ . Напомним, что род  $g(F)$  компактной поверхности  $F$  с краем вычисляется по формуле  $g(F) = 1 - \frac{\chi(F) + k}{2}$ , где  $\chi(F)$  — эйлерова характеристика поверхности  $F$  и  $k$  — число компонент ее края. В работе решается задача алгоритмического нахождения граничных наклонов ограниченной характеристики на крае данного ориентируемого компактного неприводимого гранично неприводимого трехмерного многообразия.

Как правило, подобные алгоритмические задачи решаются при помощи метода нормальных поверхностей Хакена [5]. Исходная задача переформулируется таким образом, чтобы вопрос сводился к поиску поверхностей, удовлетворяющих определенным условиям. Метод Хакена работает, если удается доказать, что многообразие содержит поверхность интересующего нас типа лишь тогда, когда интересующая нас поверхность есть среди конечного множества так называемых фундаментальных поверхностей. В этом случае алгоритм строится довольно просто. При помощи метода Хакена были построены алгоритмы, выясняющие, содержит ли данное трехмерное многообразие существенный диск, существенное кольцо [5, 6].

Задача алгоритмического нахождения поверхностей со сколь угодно большой эйлеровой характеристикой впервые была решена в [1]. Был построен алгоритм, выясняющий, содержит ли

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-96026) и интеграционного проекта “Дифференциально-геометрические и компьютерные методы классификации трехмерных многообразий”.

данное ориентируемое компактное трехмерное многообразие с краем, состоящим из нескольких торов, существенную плоскую поверхность (т. е. такую проколотую поверхность  $F$ , что  $g(F) = 0$ ). Доказательство существования алгоритма использует теорию нормальных поверхностей Хакена, однако не следует из прямого применения метода Хакена. Важную роль при построении алгоритма сыграла оценка средней длины граничных кривых существенной поверхности ограниченного рода в трехмерном многообразии. Для ориентируемых компактных трехмерных многообразий с произвольным краем этот результат также остается верен: существует алгоритм, выясняющий, содержит ли данное ориентируемое компактное трехмерное многообразие существенную плоскую поверхность [2]. Работа является продолжением работы [2], ее основным результатом служит следующая теорема.

**Теорема 1.** *Существует алгоритм, выясняющий для данного целого числа  $N$ , содержит ли данное ориентируемое компактное неприводимое гранично неприводимое трехмерное многообразие  $M$  граничный наклон характеристики  $\leq N$ .*

## 1. Нормальные поверхности и метод Хакена

Напомним, что трехмерное многообразие  $M$  с фиксированным графом (одномерным полиэдром)  $\Gamma \subset \partial M$  называется *многообразием с граничным узором* и обозначается через  $(M, \Gamma)$ . Подмножество  $X$  в трехмерном многообразии  $(M, \Gamma)$  с граничным узором называется *чистым*, если  $X$  не пересекает  $\Gamma$ . Изотопия  $f_t : X \rightarrow M$  называется *чистой*, если  $f_t(X) \cap \Gamma = \emptyset$  для любого  $t$  [6]. Будем говорить, что поверхность  $F \subset M$  является *собственной поверхностью* многообразия  $(M, \Gamma)$ , если  $F \cap \partial M = \partial F$  и  $\partial F$  находится в общем положении по отношению к  $\Gamma$ , т. е.  $\partial F$  не проходит через вершины графа  $\Gamma$  и пересекает ребра трансверсально.

**О п р е д е л е н и е 1.** Чистая связная собственная поверхность  $F$ , лежащая в трехмерном неприводимом гранично неприводимом многообразии  $(M, \Gamma)$ , называется *существенной*, если:

1.  $F$  несжимаема, т. е. край любого такого диска  $D \subset \text{Int}(M, \Gamma)$ , что  $D \cap F = \partial D$ , является тривиальной кривой на  $F$ ;
2.  $F$  гранично несжимаема, т. е. для любого такого чистого диска  $D \subset (M, \Gamma)$ , что  $\partial D$  есть объединение двух дополнительных дуг  $l = D \cap F$  и  $l_1 = D \cap \partial(M, \Gamma)$ , дуга  $l$  отсекает от поверхности  $F$  чистый диск;
3.  $F$  отлична от сферы и чистого диска.

Заметим, что в случае пустого узора это определение совпадает с классическим (см. [1, 3]).

**О п р е д е л е н и е 2.** Связная поверхность  $F \overset{i}{\subset} M$  называется *инъективной*, если индуцированный гомоморфизм  $i_* : \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$  является инъективным (см. [6, 7]). Заметим, что инъективная поверхность является несжимаемой, обратное неверно (см. [6, 8]).

Напомним основные сведения теории нормальных поверхностей Хакена. Пусть многообразие  $(M, \Gamma)$  триангулировано так, что  $\Gamma$  состоит из ребер триангуляции. Будем говорить, что собственная поверхность  $F \subset (M, \Gamma)$ , находящаяся в общем положении относительно триангуляции, *нормальна*, если ее пересечение с любым тетраэдром состоит из дисков, каждый из которых является либо треугольником, отсекающим одну из вершин тетраэдра, либо четырехугольником, рассекающим тетраэдр на две части, по две вершины в каждой. Таким образом, нормальная поверхность естественным образом разбивается на диски *разрешенного* типа: треугольники и четырехугольники (связные компоненты ее пересечения с тетраэдрами триангуляции).

Допустим, что нормальные поверхности  $F_1, F_2$  в триангулированном многообразии  $(M, \Gamma)$  таковы, что для любого тетраэдра  $\Delta^3$  любые два четырехугольника из  $(F_1 \cap \Delta^3) \cup (F_2 \cap \Delta^3)$  имеют одинаковые типы, т. е. пересекают одни и те же ребра тетраэдра. Тогда определена

*геометрическая сумма* поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ . Она строится так. Сначала нужно изотопно пошевелить поверхности  $F_1, F_2$  так, чтобы для любого тетраэдра  $\Delta^3$  триангуляции многообразия  $(M, \Gamma)$  любые диски  $\alpha \subset F_1 \cap \Delta^3, \beta \subset F_2 \cap \Delta^3$  либо не пересекались, либо пересекались ровно по одной дуге. Затем вдоль каждой дуги пересечения нужно разрезать поверхности и склеить полученные части попарно так, чтобы образовались непересекающиеся диски разрешенного типа. Построенная таким образом нормальная поверхность называется *геометрической суммой* поверхностей  $F_1, F_2$  и обозначается  $F_1 + F_2$ .

Нормальная поверхность в триангулированном многообразии  $(M, \Gamma)$  называется *фундаментальной*, если ее нельзя представить в виде геометрической суммы двух непустых поверхностей из  $(M, \Gamma)$ . В триангулированном многообразии с граничным узором, состоящим из ребер триангуляции, число фундаментальных поверхностей конечно, и существует процедура их перечисления (см. [6]).

На конечности числа фундаментальных поверхностей основан метод Хакена для нахождения поверхностей в трехмерном многообразии, обладающих некоторым свойством  $\mathcal{P}$ . В нашем случае поверхность  $F \subset (M, \Gamma)$  обладает свойством  $\mathcal{P}$ , если  $F$  является существенной инъективной поверхностью с непустым краем и ограниченного рода. Напомним основные этапы этого метода:

1. Нужно триангулировать данное многообразие  $(M, \Gamma)$  так, чтобы узор  $\Gamma$  состоял из ребер триангуляции.
2. Нужно доказать, что если в  $(M, \Gamma)$  существует поверхность со свойством  $\mathcal{P}$ , то в  $(M, \Gamma)$  существует нормальная поверхность со свойством  $\mathcal{P}$ .
3. Нужно доказать, что если в  $(M, \Gamma)$  существует нормальная поверхность со свойством  $\mathcal{P}$ , то в  $(M, \Gamma)$  существует фундаментальная поверхность со свойством  $\mathcal{P}$ .

При использовании этого метода алгоритм строится довольно просто. Нужно триангулировать данное многообразие, перечислить все фундаментальные поверхности (их конечное число) и проверить, найдется ли фундаментальная поверхность со свойством  $\mathcal{P}$ .

Первый шаг метода Хакена, выбор триангуляции, мы обсудим ниже, в § 2. Второй шаг метода состоит в “переходе” к нормальным поверхностям. Допустив, что данное многообразие  $M$  содержит поверхность  $F$  с требуемым свойством  $\mathcal{P}$ , нужно доказать, что в  $M$  найдется нормальная поверхность, вообще говоря, отличная от  $F$ , со свойством  $\mathcal{P}$ . В [6] описаны процедуры нормализации, применяя которые любую поверхность в триангулированном многообразии можно привести к нормальной. Остается проверить, сохранится ли свойство  $\mathcal{P}$  поверхности при таких преобразованиях. В большинстве случаев процедуры нормализации есть не что иное, как изотопия поверхности.

**Лемма 1.** Пусть неприводимое гранично неприводимое трехмерное многообразие  $M$  с граничным узором  $\Gamma$  триангулировано так, что  $\Gamma$  состоит из ребер триангуляции. Тогда если  $(M, \Gamma)$  содержит чистую существенную поверхность  $F$ , то в  $(M, \Gamma)$  найдется нормальная чистая поверхность, чисто изотопная  $F$ .

**Доказательство.** См. теорему 3.3.21 и предложение 3.3.24 в [6].

Заметим, что свойства поверхности быть инъективной и иметь непустой край сохраняются при чистой изотопии.

Частичное решение п. 3 метода Хакена, а именно доказательство того, что свойство поверхности быть существенной сохраняется при переходе к фундаментальным поверхностям, следует из теоремы У. Джейко, справедливой и для многообразий с граничными узорами (см. теорему 4.1.36 [6]). Однако нам потребуются одновременно рассматривать два граничных узора на одном и том же многообразии, точнее, два многообразия  $(M, \emptyset)$  и  $(M, \Gamma)$ , и этот результат нам понадобится в более общем случае. Напомним, что нормальная поверхность  $F$  в триангулированном многообразии  $(M, \Gamma)$ , пересекающая ребра триангуляции в наименьшем числе точек среди всех поверхностей, чисто изотопных данной, называется *минимальной* [6].

**Лемма 2.** Пусть в неприводимом гранично неприводимом триангулированном трехмерном многообразии  $(M, \Gamma)$  выбран граничный узор  $\Gamma'$  так, что  $\Gamma \subset \Gamma'$  и многообразие  $(M, \Gamma')$  является гранично неприводимым. Допустим, что чистая минимальная в  $(M, \Gamma')$  существенная в  $(M, \Gamma)$  нормальная связная поверхность  $F$  представлена в виде  $F = F_1 + F_2$ , где  $F_1$  и  $F_2$  — связные чистые поверхности в  $(M, \Gamma')$ . Тогда  $F_1$  и  $F_2$  являются существенными поверхностями в  $(M, \Gamma)$ . Более того, ни одна из поверхностей  $F_1, F_2$  не является проективной плоскостью.

**Доказательство.** Рассмотрим случай, когда  $\Gamma' = \Gamma$ . В этом случае требуемое следует из теоремы 4.1.36 [6]. Доказательство этой теоремы в [6] ведется от противного. Если предположить, что хотя бы одна из поверхностей  $F_1$  или  $F_2$  допускает сжимающий или гранично сжимающий чистый диск, то удастся прийти к противоречию одного из следующих двух типов:

1. Построить сжимающий или гранично сжимающий чистый в  $(M, \Gamma)$  диск для  $F$ . Это противоречит существенности поверхности  $F$ .
2. Построить чистую в  $(M, \Gamma)$  изотопию поверхности  $F$ , которая уменьшает число ее пересечений с ребрами триангуляции. Это противоречит минимальности поверхности  $F$ .

Оказывается, что эти же аргументы верны и в случае, когда  $\Gamma' \neq \Gamma$ . В п. 1 получаем то же самое противоречие с существенностью в  $(M, \Gamma)$  поверхности  $F$ . Пункт 2 рассмотрим более подробно. Формально говоря, построенная в нем изотопия поверхности  $F$  является чистой в  $(M, \Gamma)$ . Однако непосредственная проверка показывает, что эту изотопию легко сделать чистой в  $(M, \Gamma')$ , что по-прежнему будет противоречить минимальности поверхности  $F$  в  $(M, \Gamma')$ .

Лемма доказана.

**Следствие 1.** Пусть в неприводимом гранично неприводимом триангулированном трехмерном многообразии  $(M, \Gamma)$  выбран граничный узор  $\Gamma'$  так, что  $\Gamma \subset \Gamma'$  и многообразие  $(M, \Gamma')$  является гранично неприводимым. Допустим, что чистая минимальная в  $(M, \Gamma')$  существенная в  $(M, \Gamma)$  нормальная связная поверхность  $F$  представлена в виде  $F = \sum_{i=1}^n F_i$ , где  $F_i$  — связные чистые поверхности в  $(M, \Gamma')$ . Тогда для любого  $1 \leq i \leq n$  поверхность  $F_i$  является существенной в  $(M, \Gamma)$ . Более того, ни одна из поверхностей  $F_i, 1 \leq i \leq n$ , не будет проективной плоскостью.

**Доказательство.** Представим поверхность  $F$  в виде  $F = F_1 + F'$ , где  $F' = \sum_{i=2}^n F_i$ .

Согласно лемме 2 поверхность  $F_1$  является существенной в  $(M, \Gamma)$ . Аналогично остальные поверхности  $F_i$ , где  $2 \leq i \leq n$ , будут также существенными поверхностями в  $(M, \Gamma)$ .

Следствие доказано.

Теперь обратимся к свойству инъективности. Рассмотрим в триангулированном ориентируемом трехмерном многообразии  $M$  собственную нормальную поверхность  $F$ . Обозначим через  $2F$  нормальное удвоение поверхности  $F$ .

**Лемма 3 ([6]).** Пусть  $F$  — нормальная собственная поверхность в триангулированном трехмерном многообразии  $M$ . Тогда выполнены следующие условия:

1. Если поверхность  $F$  является двусторонней, то  $F$  — несжимаема  $\Leftrightarrow F$  — инъективна;
2. Если поверхность  $F$  является односторонней, то  $2F$  — несжимаема  $\Leftrightarrow F$  — инъективна  $\Rightarrow F$  — несжимаема.

**Лемма 4.** Пусть нормальная минимальная поверхность  $F$  в триангулируемом неприводимом гранично неприводимом компактном ориентируемом трехмерном многообразии  $(M, \Gamma)$  представлена в виде геометрической суммы  $F_1 + F_2$  связных поверхностей из  $(M, \Gamma)$ . Если поверхность  $F$  является инъективной, то  $F_1$  и  $F_2$  такие же.

**Доказательство.** Пусть нормальная минимальная поверхность  $F \subset (M, \Gamma)$  представлена в виде суммы  $F_1 + F_2$  нормальных связанных поверхностей  $F_1, F_2 \subset (M, \Gamma)$ . Рассмотрим нормальное удвоение  $2F$  поверхности  $F$  в многообразии  $(M, \Gamma)$ . Так как  $F$  является минимальной инъективной поверхностью, то  $2F$  является минимальной несжимаемой в  $(M, \Gamma)$  поверхностью (см. лемму 3) и справедливо равенство  $2F = 2F_1 + 2F_2$ . По лемме 2 поверхности  $2F_1$  и  $2F_2$  будут несжимаемыми в  $(M, \Gamma)$ , что эквивалентно условию,  $F_1$  и  $F_2$  являются инъективными поверхностями. Что и требовалось доказать.

**Следствие 2.** Пусть нормальная минимальная поверхность  $F$  в триангулируемом неприводимом гранично неприводимом компактном ориентируемом трехмерном многообразии  $(M, \Gamma)$  представлена в виде геометрической суммы  $F_1 + F_2 + \dots + F_n$  связанных поверхностей из  $(M, \Gamma)$ . Если поверхность  $F$  является инъективной, то для любого  $1 \leq i \leq n$  поверхность  $F_i$  такая же.

**Доказательство.** Представим поверхность  $F$  в виде  $F = F_1 + F'$ , где  $F' = \sum_{i=2}^n F_i$ .

По лемме 4 поверхность  $F_1$  является инъективной в  $(M, \Gamma)$ . Аналогично остальные поверхности  $F_i$ , где  $2 \leq i \leq n$ , будут так же инъективными поверхностями в  $(M, \Gamma)$ .

Следствие доказано.

Отметим, что метод нормальных поверхностей Хакена работает лишь в том случае, когда свойство  $\mathcal{P}$  поверхности является алгоритмически проверяемым. В нашем случае следует обратить внимание на алгоритмическую проверяемость свойств сущестственности и инъективности.

**Теорема 2 ([6]).** Существует алгоритм, выясняющий, является ли данная связанная двусторонняя поверхность  $F$  в данном неприводимом гранично неприводимом компактном ориентируемом трехмерном многообразии  $(M, \Gamma)$  несжимаемой и гранично несжимаемой.

**Теорема 3.** Существует алгоритм, выясняющий, является ли данная связанная поверхность  $F$  в данном неприводимом гранично неприводимом компактном ориентируемом трехмерном многообразии  $(M, \Gamma)$  инъективной.

**Доказательство.** Доказательство следует из леммы 3 и теоремы 2.

## 2. Наклон и специальная триангуляция

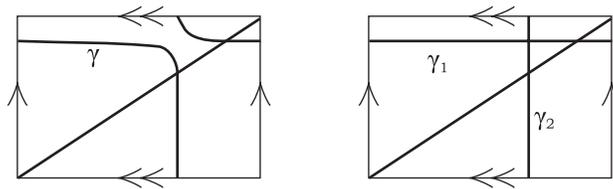
**Определение 3.** Наклоном на крае трехмерного многообразия  $(M, \Gamma)$  называется набор  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  нетривиальных простых замкнутых чистых кривых на  $\partial(M, \Gamma)$ , которые попарно не пересекаются и чисто не изотопны.

Рассмотрим два наклона  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  и  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  на  $\partial(M, \Gamma)$ . Будем говорить, что наклон  $\alpha$  содержится в наклоне  $\beta$ , если существует чистая изотопия, переводящая кривые  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  в кривые  $\{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_n}\}$ , где  $\beta_{i_j} \in \beta$ . Два наклона  $\alpha$  и  $\beta$  считаются равными, если  $\alpha \subset \beta$  и  $\beta \subset \alpha$ .

Рассмотрим трехмерное многообразие  $(M, \Gamma)$  и чистую собственную поверхность  $F \subset (M, \Gamma)$ . Если край поверхности  $F$  состоит из нетривиальных кривых, то под наклоном ее края будем понимать такой набор  $[\partial F]$  попарно чисто неизотопных кривых  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ , лежащих в  $\partial F$ , что каждая компонента края  $\partial F$  чисто изотопна одной из кривых  $\alpha_i \in [\partial F]$ . Таким образом, если  $[\partial F] = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , то край поверхности  $F$  имеет вид  $\partial F = k_1 \alpha_1 \cup k_2 \alpha_2 \cup \dots \cup k_n \alpha_n$ , т. е. состоит из  $k_1$  копий кривой  $\alpha_1$ ,  $k_2$  копий кривой  $\alpha_2$  и т. д., где числа  $\{k_i\}$  принимают натуральные значения.

Заметим, что при геометрическом суммировании наклон не обязан сохраняться. Это видно из рисунка; тип кривых, а также число кривых при суммировании не сохраняется. Однако нас

будут интересовать не простые кривые, а кривые, являющиеся краем существенной поверхности.



На триангулированном торе кривая  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ .

В [3] доказано, что для многообразий с торическим краем наклон края существенной поверхности сохранится при геометрическом суммировании. Доказательство опирается на свойства тора и тот факт, что торический наклон состоит из ровно одной кривой. В случае произвольного края многообразия идея преодоления этой трудности состоит в рассмотрении специальных триангуляций.

**Лемма 5** ([4]). Пусть  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  — наклон на крае трехмерного ориентируемого многообразия  $(M, \Gamma)$ . Тогда существуют такая триангуляция  $\mathcal{T}_\alpha$  многообразия  $(M, \Gamma)$  и такой набор чистых симплицальных колец  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  на  $\partial(M, \Gamma)$ , что выполнены следующие условия:

1.  $\Gamma$  состоит из ребер триангуляции  $\mathcal{T}_\alpha$ .
2. Каждая кривая  $\alpha_i$  лежит внутри кольца  $A_i$ .
3. Кольца  $\{A_i\}$  попарно не пересекаются.
4. Триангуляция любого кольца  $A_i$  устроена таким образом, что все вершины и одно ребро каждого треугольника этой триангуляции лежат на крае  $\partial A_i$ .

**Лемма 6.** Пусть  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  — наклон на крае трехмерного ориентируемого многообразия  $(M, \Gamma)$ . Выберем триангуляцию  $\mathcal{T}_\alpha$  и набор  $\{A_i\}$  симплицальных колец, удовлетворяющие условиям леммы 5. Тогда для любого кольца  $A_i$  все нормальные нетривиальные кривые на  $\partial(M, \Gamma)$ , лежащие в  $\text{Int}A_i$ , будут чисто изотопны кривой  $\alpha_i$ . Число таких кривых аддитивно при геометрическом суммировании.

**Доказательство.** Пусть симплицальное кольцо  $A_i$ , где  $1 \leq i \leq n$ , удовлетворяет условиям леммы 5. По построению, кольцо  $A_i$  является регулярной окрестностью кривой  $\alpha_i$ , поэтому кривая  $\alpha_i$  чисто изотопна в  $(M, \Gamma)$  средней линии кольца  $A_i$ .

Кольцо  $A_i$  триангулировано таким образом, что все вершины и ровно одно ребро триангуляции лежат на крае  $\partial A_i$ . Любая нормальная относительно триангуляции  $\mathcal{T}_\alpha$  нетривиальная кривая  $\gamma$  в  $\text{Int}A_i$  не пересекает  $\partial A_i$ , следовательно, пересекает каждый треугольник триангуляции кольца  $A_i$  по дуге, параллельной ребру, лежащему на крае кольца. Поэтому кривая  $\gamma$  изотопна средней линии кольца  $A_i$  и, так как  $\Gamma \cap A_i = \emptyset$ , построенная изотопия будет чистой в  $(M, \Gamma)$ . Таким образом, кривая  $\gamma$  чисто изотопна кривой  $\alpha_i$ .

Заметим, что нормальная относительно  $\mathcal{T}_\alpha$  нетривиальная кривая пересекает каждое внутреннее ребро триангуляции кольца  $A_i$  ровно в одной точке. Поэтому общее число кривых в  $\text{Int}A_i$  равно числу точек пересечения кривых с каким-либо внутренним ребром триангуляции кольца  $A_i$ . Для доказательства последнего утверждения теоремы осталось заметить, что геометрическое суммирование не меняет число точек пересечения кривых ребрами триангуляции.

Лемма доказана.

### 3. Алгоритм

**Теорема 4.** *Существует алгоритм, который для данного числа  $N \geq 0$ , для данного неприводимого гранично неприводимого компактного ориентируемого трехмерного многообразия  $M$  без существенных плоских поверхностей и данного наклона  $\alpha$  на  $\partial M$  выясняет, содержит ли  $M$  такую связную инъективную существенную проколотую поверхность  $F$ , что  $[\partial F] \subset \alpha$  и  $g(F) \leq N$ . В случае положительного ответа алгоритм строит такую поверхность.*

**Доказательство.** Требуемый алгоритм строится при помощи метода нормальных поверхностей Хакена. Докажем, что выполнены все шаги метода нормальных поверхностей Хакена. Выберем триангуляцию  $\mathcal{T}_\alpha$  многообразия  $M$  и набор симплициальных колец  $\{A_i\}$ , удовлетворяющие условиям 1–4 леммы 5. Пусть граничный узор  $\Gamma'$  состоит из всех ребер триангуляции края  $\partial M$ , не лежащих в  $\cup_i \text{Int}A_i$ . Многообразие  $(M, \Gamma')$ , так же как и многообразии  $M$ , будет неприводимым и гранично неприводимым ввиду выбора граничного узора  $\Gamma'$ .

Допустим, что многообразие  $M$  содержит такую связную инъективную существенную проколотую поверхность  $F \subset M$ , что  $g(F) \leq N$  и  $[\partial F] \subset \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Триангуляция  $\mathcal{T}_\alpha$  многообразия  $M$  выбрана таким образом, что каждая кривая  $\alpha_i$  лежит в симплициальном кольце  $A_i \subset \partial M$ . Для каждого  $i$  при помощи изотопии в  $M$  сдвинем компоненты края  $\partial F$ , изотопные кривой  $\alpha_i$ , так, чтобы все они оказались внутри кольца  $A_i$ . Получим поверхность  $F_C \subset M$ , которая не пересекает граничный узор  $\Gamma'$  и, следовательно, является чистой поверхностью в  $(M, \Gamma')$ . Так как  $F$  является инъективной существенной в  $M$ , то  $F_C$ , изотопная поверхности  $F$ , будет инъективной существенной поверхностью в  $M$ . Из леммы 1 следует, что в многообразии  $(M, \Gamma')$  найдется нормальная чистая поверхность  $F_N$ , чисто изотопная поверхности  $F_C$ . Без ограничения общности можем считать, что поверхность  $F_N$  минимальна в  $(M, \Gamma')$ , т. е. пересекает ребра триангуляции в наименьшем числе точек среди всех нормальных чистых в  $(M, \Gamma')$  поверхностей, чисто изотопных в  $(M, \Gamma')$  поверхности  $F_N$ . Если поверхность  $F_N$  является фундаментальной, то переходим к построению алгоритма. Предположим, что  $F_N$  не является фундаментальной, и существует разложение

$$F_N = F_1 + F_2 + \dots + F_m$$

в геометрическую сумму фундаментальных непустых связных чистых в  $(M, \Gamma')$  поверхностей. По следствию 1 и 2 каждая из поверхностей  $F_j$ , где  $1 \leq j \leq m$ , является инъективной существенной в  $M$  и отлична от проективной плоскости.

Нетривиальные компоненты края любой нормальной чистой поверхности в  $(M, \Gamma')$ , в силу выбора граничного узора, лежат в объединении  $\cup_i \text{Int}A_i$  и пересекают каждый треугольник триангуляции колец  $\{A_i\}$  по дуге, параллельной ребру, лежащему на крае кольца. Поэтому все кривые из  $\partial F_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , лежат в  $\cup_i \text{Int}A_i$ . Более того, из леммы 6 следует, что  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ , где  $k, k_1, \dots, k_m$  — числа компонент связности краев  $\partial F_N, \partial F_1, \dots, \partial F_m$ , соответственно. Из условия аддитивности эйлеровой характеристики при геометрическом суммировании имеем равенство

$$\chi(F_N) + k = \sum_{j=1}^m \chi(F_j) + k_j.$$

Заметим, что так как неприводимое многообразие  $M$  не содержит собственных существенных плоских поверхностей, то для любого  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  справедливо неравенство  $\chi(F_j) + k_j \leq 1$ . Более того, если найдется такое  $1 \leq j \leq m$ , что  $\chi(F_j) + k_j = 1$ , то нормальное удвоение инъективной существенной поверхности  $F_j$ , отличной от проективной плоскости, даст существенную плоскую поверхность  $2F_j \subset M$ , что противоречит условию теоремы. Напомним, что поверхность  $F_N$  имеет непустой край, следовательно, найдется такое  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , что

$\partial F_j \neq \emptyset$ . Без ограничения общности можем считать, что  $\partial F_1 \neq \emptyset$ . Так как выполнены равенство  $g(F) = g(F_1) - \sum_{j=2}^m \frac{(\chi(F_j) + k_j)}{2}$  и неравенство  $g(F) \leq N$ , то  $g(F_1) \leq N$ .

Итак, если данное многообразие  $M$  содержит такую связную инъективную существенную проколотую поверхность  $F$ , что  $[\partial F] \subset \alpha$  и  $g(F) \leq N$ , то среди фундаментальных поверхностей найдется такая чистая в  $(M, \Gamma')$  связная инъективная существенная в  $M$  проколотая поверхность  $F_F$ , что  $g(F_F) \leq N$ . Более того, все компоненты  $\partial F_F$ , в силу выбора граничного узора, лежат в  $\cup_i \text{Int} A_i$ , поэтому  $[\partial F_F] \subset \alpha$ . Поэтому поверхность  $F_F$  будет искомой.

Требуемый алгоритм состоит в выполнении следующих шагов:

Шаг 1. Задать триангуляцию многообразия  $M$  и набор симплициальных колец  $\{A_i\}$ , удовлетворяющие условиям 1–4 леммы 5. Затем выбрать новый граничный узор  $\Gamma'$  как граф, состоящий из тех ребер триангуляции края  $\partial M$ , которые не лежат в  $\cup_i \text{Int}(A_i)$ .

Шаг 2. Выписать все чистые в  $(M, \Gamma')$  фундаментальные поверхности (их конечное число и существует процедура их перечисления [6]).

Шаг 3. Выяснить, найдутся ли в списке чистых в  $(M, \Gamma')$  фундаментальных поверхностей такие инъективные существенные в  $M$  проколотые поверхности, что  $g(F) \leq N$ . Найденные таким образом поверхности будут искомыми. Если таких поверхностей нет, то в данном многообразии такой инъективной существенной проколотой поверхности  $F$ , что  $g(F) \leq N$  и  $[\partial F] \subset \alpha$ , нет.

Теорема доказана.

Основной идеей построения алгоритма, выясняющего, содержит ли данное многообразие граничные наклоны ограниченной характеристики, является оценка  $C(\alpha)$  средней длины кривых наклона  $\alpha$ , предложенная в работе [1]. Напомним, что *длиной* нормальной кривой  $\gamma$  на крае триангулированного трехмерного многообразия  $M$  называется число  $l(\gamma)$  точек пересечения кривой  $\gamma$  с ребрами триангуляции многообразия  $M$ .

**Лемма 7.** Пусть даны целое число  $N > 1$  и наклон  $\alpha$  на крае неприводимого гранично неприводимого компактного ориентируемого трехмерного многообразия  $M$  без существенных плоских поверхностей. Тогда существует и может быть алгоритмически построен такой конечный (возможно, пустой) набор  $S(\alpha)$  наклонов на  $\partial M$ , что будут выполнены следующие условия:

1. Любой наклон из  $S(\alpha)$  состоит из всех кривых наклона  $\alpha$  и еще одной кривой на  $\partial M$ .
2. Если  $M$  содержит такую связную инъективную существенную проколотую поверхность  $F$ , что  $\partial F \neq \emptyset$  не пересекает кривых наклона  $\alpha$  и  $g(F) \leq N$ , то  $M$  содержит такую связную инъективную существенную проколотую поверхность  $F'$ , что  $g(F') \leq N$  и  $\partial F'$  не пересекает кривых хотя бы одного наклона из  $S(\alpha)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим наклон  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  на крае  $\partial M$ . Допустим, что зафиксированы триангуляция  $\mathcal{T}_\alpha$  многообразия  $M$  и набор  $\{A_i\}$  симплициальных колец, удовлетворяющие условиям 1–4 леммы 5. Выберем граничный узор  $\Gamma'' = \cup_i \partial A_i$ . Тогда для любой чистой собственной поверхности  $F \subset (M, \Gamma'')$  определены следующие числа:  $l_{\bar{\alpha}}(\partial F)$ , равное длине граничных кривых поверхности  $F$ , не лежащих в  $\cup_i \text{Int} A_i$ , и  $\chi_{\bar{\alpha}}(F)$ , равное  $\chi(F) + k_\alpha$ , где  $k_\alpha$  есть число компонент края  $\partial F$ , лежащих в  $\cup_i \text{Int} A_i$ . Обозначим через  $C(\alpha)$  число  $\max \left\{ \frac{l_{\bar{\alpha}}(\partial F_j)}{-\chi_{\bar{\alpha}}(F_j)} \right\}$ , где максимум берется по всем таким фундаментальным чистым в  $(M, \Gamma'')$  существенным в  $M$  поверхностям  $F_j$ , что  $(-\chi_{\bar{\alpha}}(F_j)) > 0$ . Если таких поверхностей нет, то полагаем  $C(\alpha) = 0$ . Построим в  $(M, \Gamma'')$  все чистые кривые, которые не изотопны в  $M$  ни одной из кривых наклона  $\alpha$  и имеют длину не больше  $(2N + 1)C(\alpha)$ . Таких кривых существует конечное число. Обозначим эти кривые через  $\gamma_t$ ,  $1 \leq t \leq k$ . Добавляя для каждого  $t = 1, \dots, k$  кривую  $\gamma_t$  к наклону  $\alpha$ , получим конечное множество наклонов  $S(\alpha) = \{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_t\}, t = 1, \dots, k\}$  на  $\partial M$ .

Заметим, что для любой чистой в  $(M, \Gamma'')$  проколотой поверхности  $F$  выполнено неравенство

$$\frac{l_{\bar{\alpha}}(\partial F)}{k - k_{\alpha}} \leq \frac{C(-\chi_{\bar{\alpha}}(F))}{k - k_{\alpha}} \leq C(2g(F) + 1).$$

Поэтому нетрудно показать, что построенное множество наклонов  $S(\alpha)$  будет удовлетворять всем требованиям леммы.

Лемма доказана.

**Теорема 5.** *Существует алгоритм, выясняющий для данного числа  $N$ , содержит ли данное ориентируемое компактное неприводимое гранично неприводимое трехмерное многообразие  $M$  такую связную инъективную существенную проколотую поверхность  $F$ , что  $g(F) \leq N$ .*

**Доказательство.** Поскольку род связной поверхности не меньше 0, то при  $N < 0$  задача алгоритмического нахождения таких связных инъективных существенных проколотых поверхностей  $F \subset M$ , что  $g(F) \leq N$ , имеет заведомо отрицательный ответ. Для  $N = 0$  задача решена в [2]. Заметим, что нормальное удвоение инъективной существенной проективной плоскости в  $M$  дает существенную плоскую поверхность, поэтому решение задачи для  $N = 1$  сводится к решению задачи для  $N = 0$ .

Допустим теперь, что  $N > 1$  и в данном многообразии нет существенных плоских поверхностей. Требуемый алгоритм состоит из следующих шагов. Обозначим через  $S_0$  множество, состоящее из пустого наклона. Далее по индукции построим множества  $S_1, S_2, \dots$  наклонов на  $\partial M$  следующим образом. Если множество  $S_i$  уже построено, то положим  $S_{i+1} = \emptyset$  и для каждого наклона  $\alpha \in S_i$  строим конечное множество наклонов  $S(\alpha)$ , как описано в лемме 7. Все полученные на  $i$ -м шаге наклоны добавляем в  $S_{i+1}$ .

Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока это возможно. По построению, множество  $S_i$  содержит лишь конечное число наклонов, каждый из которых содержит ровно  $i$  кривых. Так как любой наклон на замкнутой ориентируемой поверхности рода  $g$  состоит из не более чем  $3g - 2$  кривых, то процесс заведомо остановится. Это может произойти лишь в том случае, когда очередное построенное множество  $S_{i+1}$  окажется пустым. При помощи алгоритма, построенного в теореме 4, для каждого наклона  $\alpha$  из  $S_{m-1}$  проверим, найдется ли в  $M$  такая связная инъективная существенная проколотая поверхность  $F$ , что  $g(F) \leq N$  и  $[\partial F] \subset \alpha$ . Утверждается, что если для каждого наклона из  $S_{m-1}$  получен отрицательный ответ, то в  $M$  таких связных инъективных существенных проколотых поверхностей  $F$ , что  $g(F) \leq N$ , нет.

Предположим противное. Пусть наклон любой такой инъективной существенной проколотой поверхности  $F \subset M$ , что  $g(F) \leq N$ , не содержится ни в одном из наклонов в  $S_{m-1}$ . Так как поверхность  $F$  не пересекает пустого наклона, то, применяя последовательно лемму 7, получим такие инъективные существенные проколотые поверхности  $F_1, F_2, F_3, \dots$  в  $M$ , что  $g(F) \leq N$  и  $\partial F_i$  не пересекает кривых хотя бы одного наклона из  $S_i$ . Тогда найдется такая связная инъективная существенная проколотая поверхность  $F_m$ , что  $\partial F_m$  не пересекает хотя бы одного наклона из  $S_m$ , но  $S_m = \emptyset$ . Получили противоречие.

**Доказательство** теоремы 1. Многообразие  $M$  содержит граничный наклон характеристики не меньше  $N$  лишь в том случае, когда в  $M$  найдется такая связная инъективная существенная проколотая поверхность  $F$ , что  $g(F) \leq N$ . Таким образом, доказательство теоремы 1 следует из теоремы 5.

Автор благодарит научного руководителя С.В. Матвеева за помощь в написании данной работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jaco W., Rubinstein J.H., Sedgwick E.** Finding planar surfaces in knot- and link-manifolds // arXiv:math.GT/0608700.
2. **Сбродова Е.А.** Плоские поверхности в трехмерных многообразиях // Сиб. электрон. мат. изв. 2006. Т. 3. С. 451–463.
3. **Jaco W., Sedgwick E.** Decision problems in the space of Dehn fillings // arXiv:math.GT/9811031.
4. **Сбродова Е.А.** Алгоритм нахождения плоских поверхностей в трёхмерных многообразиях // Фундам. и прикл. математика. 2005. Т. 11, № 4. С. 197–202.
5. **Haken W.** Theorie der Normalflächen. Ein Isotopiekriterium für der Kreisknoten // Acta. Math. 1961. Vol. 105. P. 245–375.
6. **Matveev S.** Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds. B.; Heidelberg: Springer-Verl., 2003.
7. **Jaco W., Oertel U.** An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold // Topology. 1984. Vol. 23, № 2. P. 195–209.
8. **Jaco W.** Lectures on three-manifold topology // Regional conference series in mathematics. 1977. No. 43.

Поступила 19.03.2007

УДК 517. 958

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ ПОДМОДЕЛЕЙ<sup>1</sup>****Л. З. Уразбахтина**

В работе проведена классификация дифференциально-инвариантных подмоделей 3-параметрической группы, состоящей из двух переносов и переноса с растяжением. Доказана редукция четырех подмоделей к инвариантной подмодели на некоторой подгруппе. Для интегрирования инвариантной подмодели использовано гиперзвуковое приближение.

**Введение**

Рассматриваем уравнения газовой динамики (УГД) со специальным уравнением состояния (давление есть сумма степенной функции плотности и функции от энтропии). В этом случае УГД допускают группу преобразований, алгебра Ли которой имеет размерность 13. Оптимальная система допускаемых подалгебр приведена в работе [1]. Трехмерных подалгебр в оптимальной системе — 57 штук. Для каждой из них можно строить инвариантные (ИП) и дифференциально-инвариантные (ДИП) подмодели. Способ построения ДИП описан в работе [2].

В работе [3] рассмотрены ДИП для подалгебры  $3.2''$ . Подалгебра  $3.2''$  — такая, что ее инварианты выражаются через лишнюю функцию, что затрудняет доказательства теорем редукции (редукция в работе [3] не доказана). В настоящей работе рассматривается подалгебра 3.18, для которой выражения для инвариантов не содержат лишних функций. Это облегчает задачу, в частности в работе доказаны теоремы о редукции ДИП к ИП. Кроме того, предлагается оригинальный способ интегрирования ИП с помощью гиперзвукового приближения.

ДИП строятся тогда, когда для подалгебры из инвариантов нельзя определить все газодинамические функции. Частный случай ДИП есть частично инвариантные подмодели (ЧИП) [4].

**О п р е д е л е н и е.** Дифференциально-инвариантной подмоделью ранга  $r + r_1$  называется представление уравнений газовой динамики как многообразия размерности  $r + r_1$  в пространстве независимых дифференциальных инвариантов, проекция которого в пространство инвариантов нулевого порядка имеет размерность  $r$ .

Для построения ДИП трехмерных подалгебр необходимо продолжить операторы на производные первого порядка, вычислить базис дифференциальных инвариантов (БДИ) и найти операторы инвариантного дифференцирования (ОИД). Тогда все остальные инварианты получаются действием ОИД на БДИ.

Для трехмерных подалгебр возможны ДИП пяти рангов:  $2+0$ ,  $2+1$ ,  $2+2$ ,  $3+0$ ,  $3+1$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 05-01-97-909а).

## 1. Представление уравнений газовой динамики через инварианты подалгебры

Уравнения газовой динамики

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla p = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0 \quad (1.1)$$

замыкаются уравнением состояния для сжимаемой жидкости [5]

$$p = B\rho^\gamma + F(S).$$

Здесь  $\vec{u}$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $F(S)$  — функция энтропии;  $B$ ,  $\gamma$  — постоянные,  $B\gamma > 0$ ,  $\gamma \neq 0, 1$ ;  $d/dt = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$  — оператор полного дифференцирования. Скорость звука определяется по формуле  $c^2 = B\gamma\rho^{\gamma-1}$ .

Для подалгебры 3.18 базис операторов в декартовой системе координат имеет вид [1]:

$$X_{10} = \partial_t, \quad X_1 + X_{12} = \partial_x + t\partial_t - \vec{u}\partial_{\vec{u}} - (\bar{\gamma} - 2)\rho\partial_\rho - \bar{\gamma}p\partial_p, \quad X_{13} = \partial_p,$$

где  $\bar{\gamma} = 2\gamma(\gamma - 1)^{-1}$ .

Базис дифференциальных инвариантов найден в работе [3]:

$$\begin{aligned} y, \quad z, \quad \vec{u}_0 = \vec{u} \exp(x), \quad \rho_0 = \rho \exp((\bar{\gamma} - 2)x), \\ p_0 = p_t \exp((\bar{\gamma} + 1)x), \quad p_1 = p_x \exp(\bar{\gamma}x), \quad p_2 = p_y \exp(\bar{\gamma}x), \quad p_3 = p_z \exp(\bar{\gamma}x). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Там же указаны операторы инвариантного дифференцирования:

$$Y_0 = \exp(x)D_t, \quad Y_1 = D_x, \quad Y_2 = D_y, \quad Y_3 = D_z. \quad (1.3)$$

ОИД (1.3) образуют алгебру с коммутаторами:

$$[Y_0, Y_1] = -Y_0, \quad [Y_0, Y_2] = [Y_0, Y_3] = [Y_1, Y_2] = [Y_1, Y_3] = [Y_2, Y_3] = 0. \quad (1.4)$$

С помощью инвариантов (1.2) и ОИД (1.3) УГД (1.1) записываются в виде:

$$\begin{aligned} Y_0 u_0 + u_0 Y_1 u_0 + v_0 Y_2 u_0 + w_0 Y_3 u_0 &= u_0^2 - p_1 \rho_0^{-1}, \\ Y_0 v_0 + u_0 Y_1 v_0 + v_0 Y_2 v_0 + w_0 Y_3 v_0 &= u_0 v_0 - p_2 \rho_0^{-1}, \\ Y_0 w_0 + u_0 Y_1 w_0 + v_0 Y_2 w_0 + w_0 Y_3 w_0 &= u_0 w_0 - p_3 \rho_0^{-1}, \\ Y_0 \rho_0 + u_0 Y_1 \rho_0 + v_0 Y_2 \rho_0 + w_0 Y_3 \rho_0 + \rho_0(k - (\bar{\gamma} - 1)u_0) &= 0, \\ p_0 + u_0 p_1 + v_0 p_2 + w_0 p_3 + B\gamma \rho_0^{\bar{\gamma}}(k - u_0) &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $k = Y_1 u_0 + Y_2 v_0 + Y_3 w_0$ .

Такое представление удобно для построения ДИП. Из (1.5) можно определить  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  через ОИД и инварианты  $y$ ,  $z$ ,  $\vec{u}_0$ ,  $\rho_0$ .

## 2. Дифференциально-инвариантная подмодель ранга 2+0

ДИП ранга 2+0 имеет представление решения:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_0(y, z) \exp(-x), \quad \rho = \rho_0(y, z) \exp((2 - \bar{\gamma})x), \\ p_t &= p_0(y, z) \exp(-(\bar{\gamma} + 1)x), \quad p_x = p_1(y, z) \exp(-\bar{\gamma}x), \\ p_y &= p_2(y, z) \exp(-\bar{\gamma}x), \quad p_z = p_3(y, z) \exp(-\bar{\gamma}x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Общее решение уравнений (2.1) имеет вид:

$$p = \exp(-\bar{\gamma}x)\varphi(y, z) + P_0 t \exp(-(\bar{\gamma} + 1)x) + P_1, \quad P_0(\bar{\gamma} + 1) = 0,$$

где  $P_0$ ,  $P_1$  — постоянные,  $\varphi(y, z)$  — произвольная функция.

**Утверждение 1.** ДИП ранга  $2+0$  совпадает с ИП на подалгебре, порожденной операторами

$$\langle X_{10} + P_0 X_{13}, X_1 + X_{12} + \bar{\gamma} P_1 X_{13} \rangle, \quad P_0(\bar{\gamma} + 1) = 0. \quad (2.2)$$

**Доказательство.** Подействуем линейной комбинацией операторов  $C_1 X_{10} + C_2(X_1 + X_{12}) + C_3 X_{13}$  на инварианты  $y, z, \vec{u}_0(y, z), \rho_0(y, z), \varphi(y, z)$ . Подействовав на  $\varphi(y, z)$ , имеем:

$$C_1 P_0 \exp(-(\bar{\gamma} + 1)x) + \bar{\gamma} P_1 C_2 - C_3 = 0.$$

Выразив из последнего уравнения  $C_3$  и подставив в линейную комбинацию операторов, получим:  $C_1(X_{10} + P_0 X_{13}) + C_2(X_1 + X_{12} + \bar{\gamma} P_1 X_{13})$ . Из последнего соотношения находим, что подалгебра имеет вид (2.2). Подействовав линейной комбинацией на остальные инварианты, получаем тождества. Что и требовалось доказать.

Таким образом,  $\vec{u}_0, \rho_0, \varphi$  являются инвариантами указанной подалгебры.

УГД (1.5) примут вид:

$$\begin{aligned} Du_0 &= u_0^2 + \bar{\gamma} \varphi \rho_0^{-1}, & Dv_0 + \varphi_y \rho_0^{-1} &= u_0 v_0, & Dw_0 + \varphi_z \rho_0^{-1} &= u_0 w_0, \\ D\rho_0 + \rho_0(v_{0y} + w_{0z}) &= (\bar{\gamma} - 1)u_0 \rho_0, & & & & \\ D\varphi + B\gamma \rho_0^\gamma (v_{0y} + w_{0z}) &= u_0(B\gamma \rho_0^\gamma + \bar{\gamma} \varphi) - P_0, & P_0(\bar{\gamma} + 1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $D = v_0 \partial_y + w_0 \partial_z$ ;  $c_0^2 = B\gamma \rho_0^{\gamma-1}$  — инвариантная скорость звука.

Система (2.3) есть подмодель стационарного типа [6]. В системе (2.3) объединены две инвариантные подмодели для подалгебры вида (2.2) с  $P_0 = 0$  и для подалгебры с  $\bar{\gamma} = -1, P_0 \neq 0$  из разных оптимальных систем.

Система (2.3) имеет 3 действительные характеристики (одна трехкратная и две простые) для заданного решения в области, определяемой неравенством  $v_0^2 + w_0^2 > c_0^2$ , и одну трехкратную действительную характеристику в области, определяемой неравенством  $v_0^2 + w_0^2 < c_0^2$ .

Условно-контактная характеристика  $C_0$  с уравнением [6]  $w_0 dy = v_0 dz$  в области  $v_0^2 + w_0^2 > c_0^2$  имеет три условия вдоль характеристики:

$$\begin{aligned} D_0 u_0 &= u_0^2 + \bar{\gamma} \varphi \rho_0^{-1}, & 2^{-1} D_0(v_0^2 + w_0^2) + \rho_0^{-1} D_0 \varphi &= u_0(v_0^2 + w_0^2), \\ c_0^2 D_0 \rho_0 - D_0 \varphi &= (\bar{\gamma} - 2)u_0 \rho_0 c_0^2 - \bar{\gamma} u_0 \varphi + P_0, \end{aligned}$$

где  $D_0 = v_0 \partial_y + w_0 \partial_z$  — дифференцирование вдоль характеристики  $C_0$ .

Условно-звуковые характеристики  $C_\pm$  в области  $v_0^2 + w_0^2 > c_0^2$  задаются уравнениями

$$\left( v_0 w_0 \mp c_0 \sqrt{v_0^2 + w_0^2 - c_0^2} \right) dy = (v_0^2 - c_0^2) dz \quad (2.4)$$

и имеют по одному условию вдоль характеристик:

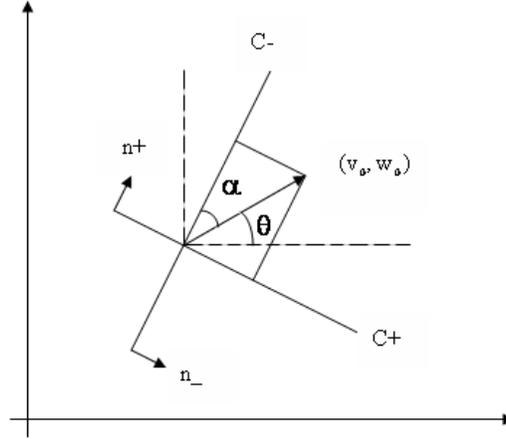
$$\rho_0 c_0 v_0^2 D_\pm (w_0 v_0^{-1}) \mp \sqrt{v_0^2 + w_0^2 - c_0^2} D_\pm \varphi + (\bar{\gamma} \varphi u_0 - P_0) \left( \pm v_0 \sqrt{v_0^2 + w_0^2 - c_0^2} - c_0 w_0 \right) = 0,$$

где  $D_\pm = (v_0^2 - c_0^2) \partial_y + (v_0 w_0 \mp c_0 \sqrt{v_0^2 + w_0^2 - c_0^2}) \partial_z$  — дифференцирование вдоль характеристик  $C_\pm$ .

**Утверждение 2.** Абсолютная величина проекции инвариантной скорости на нормаль к характеристике равна инвариантной скорости звука.

**Доказательство.** Введем вспомогательные величины (см. рисунок):  $\theta$  — угол между вектором  $(v_0, w_0)$  и осью  $y$ ,  $\alpha$  — условный угол Маха,  $\sin \alpha = c_0^{-1} q_0$ , где  $q_0^2 = v_0^2 + w_0^2$ ,  $\varphi_\pm$  —

угол между характеристикой  $C_{\pm}$  и осью  $y$ . Тогда уравнение характеристик  $C_{\pm}$  (2.4) запишется в виде  $\varphi_{\pm} = \alpha \mp \theta$ . Что и требовалось доказать.



Нормализатор подалгебры [1] состоит из операторов

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_7, \quad X_{10} - P_0 \bar{\gamma}^{-1} X_{13}, \quad X_{12} + P_1 \bar{\gamma} X_{13}.$$

Записав эти операторы через инварианты двумерной подалгебры из утверждения 1, получим фактор нормализатора, состоящий из операторов

$$X_1 = \partial_x = -u_0^i \partial_{u_i} - (\bar{\gamma} - 2) \rho_0 \partial_{\rho_0} - \bar{\gamma} \varphi \partial_{\varphi}, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_7 = y \partial_z - z \partial_y + v_0 \partial_{w_0} - w_0 \partial_{v_0}.$$

Проверим, допускает ли система (2.3) преобразование растяжения переменных, отличное от  $X_1$ :

$$\begin{aligned} y &\rightarrow Yy, & z &\rightarrow Zz, & u_0 &\rightarrow Uu_0, & v &\rightarrow Vv_0, & w_0 &\rightarrow Ww_0, & \varphi &\rightarrow \Phi\varphi, \\ \rho_0 &\rightarrow R\rho_0, & P_0 &\rightarrow P_2P_0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $Y, Z, U, V, W, \Phi, R, P_2$  — некоторые (отличные от нуля) параметры растяжения.

Подмодель (2.3) примет вид:

$$\begin{aligned} VY^{-1}v_0u_{0y} + WZ^{-1}w_0u_{0z} &= Uu_0^2 + \Phi R^{-1}U^{-1}\bar{\gamma}\varphi\rho_0^{-1}, \\ VY^{-1}v_0v_{0y} + WZ^{-1}w_0v_{0z} + \Phi R^{-1}V^{-1}Y^{-1}\rho_0^{-1}\varphi_y &= Uu_0v_0, \\ VY^{-1}v_0w_{0y} + WZ^{-1}w_0w_{0z} + \Phi R^{-1}W^{-1}Z^{-1}\rho_0^{-1}\varphi_z &= Uu_0w_0, \\ VY^{-1}v_0\rho_{0y} + WZ^{-1}w_0\rho_{0z} + \rho_0(VY^{-1}v_{0y} + WZ^{-1}w_{0z}) &= (\bar{\gamma} - 1)Uu_0\rho_0, \quad P_2P_0(\bar{\gamma} + 1) = 0, \\ VY^{-1}v_0\varphi_{0y} + WZ^{-1}w_0\varphi_{0z} + B\gamma\rho_0^{\bar{\gamma}}R^{\bar{\gamma}}(VY^{-1}v_{0y} + WZ^{-1}w_{0z}) &= Uu_0(B\gamma R^{\bar{\gamma}}\rho_0^{\bar{\gamma}} + \bar{\gamma}\Phi\varphi) - P_2P_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если система (2.3) инвариантна относительно преобразований (2.5), то параметры растяжений должны удовлетворять равенствам

$$Y = Z = 1, \quad U = V = W = R^{(\bar{\gamma}-1)/2}, \quad \Phi = R^{\bar{\gamma}}, \quad P_2 = R^{(3\bar{\gamma}-1)/2},$$

где  $R$  — произвольный параметр.

**Утверждение 3.** Система уравнений (2.3) допускает преобразование растяжения только с оператором  $X_1$ .

В (2.5) параметры растяжения примем за средние величины, так чтобы в системе (2.6) остался один параметр. Положим  $U = W = V$ ,  $Y = Z = 1$ ,  $\Phi = R^\gamma$ ,  $P_2 = R^{(3\gamma-1)/2}$ . Тогда система (2.6) примет вид:

$$\begin{aligned} Du_0 &= u_0^2 + \varepsilon^2 \bar{\gamma} \varphi \rho_0^{-1}, & Dv_0 + \varepsilon^2 \rho_0^{-1} \varphi_y &= u_0 v_0, & Dw_0 + \varepsilon^2 \rho_0^{-1} \varphi_z &= u_0 w_0, \\ D\rho_0 + \rho_0(v_{0y} + w_{0z}) &= (\bar{\gamma} - 1)u_0 \rho_0, \\ D\varphi + B\gamma \rho_0^\gamma (v_{0y} + w_{0z}) &= u_0(B\gamma \rho_0^\gamma + \bar{\gamma} \varphi) - \varepsilon P_0, & P_0(\bar{\gamma} + 1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\varepsilon = R^{(\gamma-1)/2} U^{-1}$  считаем малым параметром.

Система (2.7) будет гиперболического типа для данного решения в той части области течения, где будет выполнено соотношение  $v_0^2 + w_0^2 > \varepsilon^2 c_0^2$  [6]. В этой области есть три семейства характеристик. Семейство трехкратных характеристик задает траектории частиц  $w_0 dy = v_0 dz$ , на которых определены три условия. Два других семейства характеристик задают траектории частиц вида  $(v_0 w_0 \mp \varepsilon c_0 (v_0^2 + w_0^2 - \varepsilon^2 c_0^2)^{1/2}) dy = (v_0^2 - \varepsilon^2 c_0^2) dz$ . Отсюда следует, что проекция вектора  $(v_0, w_0)$  на нормаль к характеристике равна  $\varepsilon c_0$ .

Решение системы (2.7) будем искать в виде рядов по малому параметру (гиперзвуковое приближение):  $\vec{u}_0 = \sum \vec{u}_{0k} \varepsilon^k$ ,  $\rho_0 = \sum \rho_{0k} \varepsilon^k$ ,  $\varphi = \sum \varphi_{0k} \varepsilon^k$ ,  $P_0 = \sum P_{0k} \varepsilon^k$ ,  $k \geq 0$ .

**Утверждение 4.** Нулевое приближение системы (2.7) описывает гиперзвуковое приближение газовых течений.

**Доказательство.** Квадрат скорости звука  $c^2 = B\gamma \rho^{\gamma-1} = c_0^2 e^{-2x}$ , где  $c_0^2 = B\gamma \rho_0^{\gamma-1}$  — инвариантный квадрат скорости звука для подмодели. Число Маха  $M = qc^{-1} = q_0 c_0^{-1} = M_0$ , где  $q^2 = u^2 + v^2 + w^2 = |\vec{u}|^2$ ,  $M_0$  — инвариантное число Маха. В безразмерных величинах число Маха  $M_0 \rightarrow \varepsilon^{-1} M_0 \gg 1$ . Что и требовалось доказать.

Нулевое приближение является интегрируемой системой:

$$\begin{aligned} Du_{00} &= u_{00}^2, & Dv_{00} &= u_{00} v_{00}, & Dw_{00} &= u_{00} w_{00}, \\ D\rho_{00} + \rho_{00}(v_{00y} + w_{00z}) &= (\bar{\gamma} - 1)u_{00} \rho_{00}, & D\varphi_{00} + B\gamma \rho_{00}^\gamma (v_{00y} + w_{00z} - u_{00}) &= \bar{\gamma} u_{00} \varphi_{00}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

так же, как и последующие приближения.

Действительно, введем новые переменные  $s = s(y, z)$  и  $l = l(y, z)$  так, чтобы

$$\partial_s = v_{00} \partial_y + w_{00} \partial_z, \quad \partial_l = b \partial_y + c \partial_z.$$

Тогда система (2.8) равносильна системе, состоящей из семи обыкновенных дифференциальных уравнений и одному уравнению в частных производных первого порядка:

$$\begin{aligned} u_{00s} &= u_{00}^2, & v_{00s} &= u_{00} v_{00}, & w_{00s} &= u_{00} w_{00}, & \rho_{00s}/\rho_{00} + J_{00s}/J &= (\bar{\gamma} - 1)u_{00}, \\ \varphi_{00s} + B\gamma \rho_{00}^\gamma (J_s/J - u_{00}) &= \bar{\gamma} u_{00} \varphi_{00}, & y_s &= v_{00}, & z_s &= w_{00}, & J &= y_l z_s - z_l y_s. \end{aligned} \quad (2.9)$$

**Утверждение 5.** Система уравнений (2.9) интегрируема. Общее решение для функций  $y$ ,  $z$ ,  $u_{00}$ ,  $v_{00}$ ,  $w_{00}$ ,  $\rho_{00}$ ,  $\varphi_{00}$  зависит от пяти существенных произвольных функций одной переменной  $C_i = C_i(l)$ ,  $i = \overline{1, 5}$ :

$$\begin{aligned} u_{00} &= C_3 \exp(C_1 y) = C_4 \exp(C_2 z), & v_{00} &= C_1^{-1} u_{00}, & w_{00} &= C_2^{-1} u_{00}, \\ \rho_{00} &= |u_{00}|^{\bar{\gamma}-2} C_1 C_2 [C_2' z - C_1' y + C_4^{-1} C_4' - C_3^{-1} C_3']^{-1}, & \varphi_{00} &= |u_{00}|^{\bar{\gamma}} C_5 + B\rho_{00}^\gamma, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $C_3 C_4 > 0$ ,  $u_{00} C_3 > 0$ ,  $u_{00} C_4 > 0$ .

Для определения решения системы (2.8) необходимо в (2.10) исключить  $s$  и  $l$ , выразив  $l = l(y, z)$  из равенства  $C_3 \exp(C_1 y) = C_4 \exp(C_2 z)$ .

Рассмотрим частное решение системы (2.10). Положим,  $C_1 = C, C_2 = l, C_3 = C_4 = C_5 = 1$ , где  $C$  — отличная от нуля постоянная. Физические величины выражаются в виде:

$$\begin{aligned} u &= \exp(Cy - x), \quad v = C^{-1} \exp(Cy - x), \quad w = C^{-1} y^{-1} z \exp(Cy - x), \\ \rho &= z^{-2} C^2 y \exp((\bar{\gamma} - 2)(Cy - x)), \\ p &= (BC^{2\gamma} y^\gamma z^{-2\gamma} + 1) \exp((Cy - x)\bar{\gamma}) + P_0 t \exp^{-(1+\bar{\gamma})x} + P_1, \quad P_0(\bar{\gamma} + 1) = 0. \end{aligned}$$

Мировые линии частиц есть прямые

$$x = Kt + x_0, \quad y = C^{-1} Kt + y_0, \quad z = z_0(C^{-1} y_0^{-1} Kt + 1),$$

где  $\ln K = Cy_0 - x_0$ , а  $x_0, y_0, z_0$  — начальное положение частиц.

Якобиан перехода от лагранжевых координат  $(x_0, y_0, z_0)$  к эйлеровым  $(x, y, z)$  равен  $1 + tC^{-1}y_0^{-1}K$ . Он обращается в ноль в момент времени  $t = -Cy_0K^{-1}$ , зависящий от  $x_0, y_0$  и не зависящий от  $z_0$ . В момент времени  $t = t_*$  некоторые частицы находятся на оси  $x$ :  $x = x_0 - Cy_0, y = 0, z = 0$ . Эти частицы в начальный момент времени образуют цилиндр с уравнением  $x_* = Cy_0 + \ln(-t_*C^{-1}y_0^{-1})$ ;  $z_0$  — любое. В другой момент времени на ось  $x$  коллапсирует другой цилиндр. После момента времени  $t_*$  для коллапсирующих частиц наступает мгновенный источник. Таким образом, получается коллапс с последующим прямолинейным непрерывным источником.

### 3. Дифференциально-инвариантная подмодель ранга 3+0

Представление решения для ДИП ранга 3+0 записывается в виде:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_0(y, z, \alpha) \exp(-x), \quad \rho = \rho_0(y, z, \alpha) \exp((2 - \bar{\gamma})x), \\ p_t &= p_0(y, z, \alpha) \exp(-(\bar{\gamma} + 1)x), \quad p_x = p_1(y, z, \alpha) \exp(-\bar{\gamma}x), \\ p_y &= p_2(y, z, \alpha) \exp(-\bar{\gamma}x), \quad p_z = p_3(y, z, \alpha) \exp(-\bar{\gamma}x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\alpha$  — инвариант, составленный из независимых инвариантов базиса.

Введем новые функции — инварианты  $\alpha_i, i = 0, 1, 2, 3$  по правилу

$$\alpha_i(y, z, \alpha) = Y_i \alpha. \quad (3.2)$$

С помощью коммутаторов (1.4) запишем условия совместности для  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{1\alpha} \alpha_0 - \alpha_{0\alpha} \alpha_1 &= -\alpha_0, \quad \alpha_{2\alpha} \alpha_1 - \alpha_{1\alpha} \alpha_2 - \alpha_{1y} = 0, \quad \alpha_{3\alpha} \alpha_0 - \alpha_{0\alpha} \alpha_3 - \alpha_{0z} = 0, \\ \alpha_{2\alpha} \alpha_0 - \alpha_{0\alpha} \alpha_2 - \alpha_{0y} &= 0, \quad \alpha_{3\alpha} \alpha_1 - \alpha_{1\alpha} \alpha_3 - \alpha_{1z} = 0, \quad \alpha_{3\alpha} \alpha_2 - \alpha_{2\alpha} \alpha_3 - \alpha_{2z} + \alpha_{3y} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Условия совместности для функции  $p$ , удовлетворяющей системе (3.1), имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{1\alpha} \alpha_0 - p_{0\alpha} \alpha_1 &= -(\bar{\gamma} + 1)p_0, \quad p_{2\alpha} \alpha_1 - p_{1\alpha} \alpha_2 - p_{1y} = \bar{\gamma} p_2, \quad p_{3\alpha} \alpha_0 - p_{0\alpha} \alpha_3 - p_{0z} = 0, \\ p_{2\alpha} \alpha_0 - p_{0\alpha} \alpha_2 - p_{0y} &= 0, \quad p_{3\alpha} \alpha_1 - p_{1\alpha} \alpha_3 - p_{1z} = \bar{\gamma} p_3, \quad p_{3\alpha} \alpha_2 - p_{2\alpha} \alpha_3 - p_{2z} + p_{3y} = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из условий совместности (3.3) и (3.4) находим общее решение:

$$\alpha_1 = \psi_\alpha^{-1}, \quad \alpha_2 = -\psi_y \psi_\alpha^{-1}, \quad \alpha_3 = -\psi_z \psi_\alpha^{-1}, \quad \alpha_0 = \exp(\psi) \psi_\alpha^{-1}, \quad (3.5)$$

$$p_1 = \chi_\alpha \psi_\alpha^{-1} - \bar{\gamma} \chi, \quad p_2 = \chi_y - \psi_y \chi_\alpha \psi_\alpha^{-1}, \quad p_3 = \chi_z - \psi_z \chi_\alpha \psi_\alpha^{-1}, \quad p_0 = \chi_\alpha \exp(\psi) \psi_\alpha^{-1}, \quad (3.6)$$

где  $\psi$  и  $\chi$  — функции от переменных  $y, z, \alpha$ .

Интегрируя представления (3.1) и (3.2), в силу (3.5) и (3.6) получим:

$$\psi(y, z, \alpha) = x - \ln(-t), t < 0, \quad p(y, z, \alpha) = \exp(-\bar{\gamma}x)\chi(y, z, \alpha). \quad (3.7)$$

УГД (1.5) записаны через инвариантные функции  $\bar{u}_0$ ,  $\rho_0$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  и операторы инвариантного дифференцирования. Например,  $Y_0\rho_0$  находится так:

$$Y_0\rho_0 = \rho_{0\alpha}Y_0\alpha = \rho_{0\alpha}\alpha_0 = \rho_{0\alpha}\exp(\psi)\psi_\alpha^{-1}.$$

В результате вычислений получим недоопределенную систему:

$$\begin{aligned} Du_0 + mu_{0\alpha} + \chi_\alpha\psi_\alpha^{-1}\rho_0^{-1} &= u_0^2 + \bar{\gamma}\chi\rho_0^{-1}, & Dv_0 + mv_{0\alpha} - \psi_y\chi_\alpha\psi_\alpha^{-1}\rho_0^{-1} &= u_0v_0 - \chi_y\rho_0^{-1}, \\ Dw_0 + mw_{0\alpha} - \psi_z\chi_\alpha\psi_\alpha^{-1}\rho_0^{-1} &= u_0w_0 - \chi_z\rho_0^{-1}, & D\rho_0 + m\rho_{0\alpha} + \rho_0(v_{0y} + w_{0z} + k) &= (\bar{\gamma} - 1)u_0\rho_0, \\ D\chi + m\chi_\alpha - \bar{\gamma}u_0\chi + B\gamma\rho_0^\gamma(v_{0y} + w_{0z} - u_0 + k) &= 0, & P_0(\bar{\gamma} + 1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $D = v_0\partial_y + w_0\partial_z$ ,  $m = (\exp(\psi) + u_0 - D\psi)\psi_\alpha^{-1}$ ,  $k = (u_{0\alpha} - \psi_yv_{0\alpha} - \psi_zw_{0\alpha})\psi_\alpha^{-1}$ .

**Утверждение 6.** *Выражения  $y$ ,  $z$ ,  $x - \ln(-t)$ ,  $t < 0$  являются инвариантами подалгебры  $X_1 + X_{12}$  из алгебры  $L_{13}$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Подействуем линейной комбинацией операторов [1]

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k$$

на  $y$ ,  $z$ ,  $x - \ln(-t)$ ,  $t < 0$ . Получим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + t\lambda_4 + z\lambda_8 - y\lambda_9 - t^{-1}\lambda_{10} + (x - 1)\lambda_{11} - \lambda_{12} &= 0, & \lambda_2 + t\lambda_5 - z\lambda_7 + x\lambda_9 + y\lambda_{11} &= 0, \\ \lambda_3 + t\lambda_6 + y\lambda_7 - x\lambda_8 + z\lambda_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем:  $\lambda_1 = \lambda_{12}$ ,  $\lambda_i = 0$ ,  $i = \overline{2, 11}$ . Что и требовалось доказать.

**Утверждение 7.** *ДИП ранга  $3 + 0$  редуцируется к ИП на подалгебре  $X_1 + X_{12}$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В системе (3.8) сделаем замену:

$$\begin{aligned} \beta &= \psi(y, z, \alpha), & \bar{\chi}(y, z, \beta) &= \chi(y, z, \alpha), & \bar{\rho}_0(y, z, \beta) &= \rho_0(y, z, \alpha), \\ \bar{u}_0(y, z, \beta) &= u_0(y, z, \alpha), & \bar{v}_0(y, z, \beta) &= v_0(y, z, \alpha), & \bar{w}_0(y, z, \beta) &= w_0(y, z, \alpha). \end{aligned}$$

Получим систему, не содержащую  $\psi$ , которая совпадает с ИП для  $X_1 + X_{12}$ . Величины  $\bar{\rho}_0$ ,  $\bar{u}_0$ ,  $\bar{v}_0$ ,  $\bar{w}_0$  — инварианты подалгебры  $X_1 + X_{12}$  по построению, а  $\bar{\chi}$  — инвариант по определению. Что и требовалось доказать.

#### 4. Редукция подмодели ранга $2+1$

Представление решения ДИП ранга  $2+1$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_0(y, z) \exp(-x), & \rho &= \rho_0(y, z) \exp((2 - \bar{\gamma})x), \\ p_t &= p_0(y, z, \alpha) \exp(-(\bar{\gamma} + 1)x), & p_x &= p_1(y, z, \alpha) \exp(-\bar{\gamma}x), \\ p_y &= p_2(y, z, \alpha) \exp(-\bar{\gamma}x), & p_z &= p_3(y, z, \alpha) \exp(-\bar{\gamma}x), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $\alpha$  — независимый инвариант базиса.

**Утверждение 8.** ДИП ранга  $2 + 1$  редуцируется к ДИП  $2 + 0$ .

**Доказательство.** Введем новые функции по правилу (3.2). Действуя коммутаторами (1.4) на  $\alpha$ , получим условия совместности (3.3). Общее решение переопределенной системы (3.3) имеет вид (3.5). Подействовав коммутаторами (1.4) на  $p$ , в силу (4.1), найдем условия совместности (3.4). Общее решение системы (3.4) имеет вид (3.6). Интегрируя представления (4.1) и (3.2), в силу (3.5) и (3.6) получим решение (3.7).

УГД (1.5) примут вид:

$$\begin{aligned} \rho_0(Du_0 - u_0^2) &= \bar{\gamma}\chi - \chi_\alpha \psi_\alpha^{-1} = \varphi_1(y, z), & \rho_0(Dv_0 - u_0v_0) &= \psi_y \chi_\alpha \psi_\alpha^{-1} - \chi_y = \varphi_{2y}(y, z), \\ \rho_0(Dw_0 - u_0w_0) &= \psi_z \chi_\alpha \psi_\alpha^{-1} - \chi_z = \varphi_{3z}(y, z), & D\rho_0 + \rho_0(v_{0y} + w_{0z}) &= (\bar{\gamma} - 1)u_0\rho_0, \\ B\gamma\rho_0^\gamma(v_{0y} + w_{0z} - u_0) &= \bar{\gamma}u_0\chi - D\chi - (\exp(\psi) + u_0 - D\psi)\chi_\alpha \psi_\alpha^{-1} = \varphi_0(y, z), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\varphi_1(y, z)$ ,  $\varphi_{2y}(y, z)$ ,  $\varphi_{3z}(y, z)$ ,  $\varphi_0(y, z)$  — произвольные функции от  $y$  и  $z$ .

В системе (4.2) выражения в левой части уравнений зависят от  $y$  и  $z$ , а в правой части — от  $y, z$  и  $\alpha$ . Левые части 1-го, 2-го, 3-го, 5-го уравнений системы обозначены соответственно через  $\varphi_1(y, z)$ ,  $\varphi_{2y}(y, z)$ ,  $\varphi_{3z}(y, z)$ ,  $\varphi_0(y, z)$

Исследуем на совместность уравнения

$$\chi_\alpha = (\bar{\gamma}\chi - \varphi_1)\psi_\alpha, \quad \chi_y = (\bar{\gamma}\chi - \varphi_1)\psi_y - \varphi_{2y}, \quad \chi_z = (\bar{\gamma}\chi - \varphi_1)\psi_z - \varphi_{3z}. \quad (4.3)$$

Получим:

$$\tilde{\varphi} = \bar{\gamma}^{-1}\varphi_1, \quad \chi - \tilde{\varphi} = \bar{\gamma}^{-1}P_0 \exp(\bar{\gamma}\psi), \quad \varphi_{2y} = -\tilde{\varphi}_y, \quad \varphi_{3z} = -\tilde{\varphi}_z, \quad (4.4)$$

где  $P_0$  — постоянная. Пятое уравнение системы (4.2), с учетом (4.3) и (4.4), примет вид:

$$\varphi_0(y, z) = -D\tilde{\varphi} + \bar{\gamma}u_0\tilde{\varphi} - P_0 \exp((\bar{\gamma} + 1)\psi).$$

Продифференцировав последнее соотношение по  $\alpha$ , находим:  $P_0(\bar{\gamma} + 1) = 0$ . Таким образом, происходит редукция к ДИП  $2+0$ . Что и требовалось доказать.

## 5. Редукция дифференциально-инвариантной подмодели ранга $2+2$

Представление решения для ДИП ранга  $2+2$  совпадает с представлением для частично инвариантного решения ранга 2 дефекта 1 [4]:

$$\vec{u} = \vec{u}_0(y, z) \exp(-x), \quad \rho = \rho_0(y, z) \exp((2 - \bar{\gamma})x), \quad p = p(t, x, y, z).$$

УГД (1.5) примут вид:

$$\begin{aligned} \rho_0(Du_0 - u_0^2) &= -p_x \exp(\bar{\gamma}x), & \rho_0(Dv_0 - u_0v_0) &= -p_y \exp(\bar{\gamma}x), \\ \rho_0(Dw_0 - u_0w_0) &= -p_z \exp(\bar{\gamma}x), & D\rho_0 + \rho_0(v_{0y} + w_{0z}) &= (\bar{\gamma} - 1)u_0\rho_0, \\ p_t \exp((\bar{\gamma} + 1)x) + u_0p_x \exp(\bar{\gamma}x) + v_0p_y \exp(\bar{\gamma}x) + w_0p_z \exp(\bar{\gamma}x) + B\gamma\rho_0^\gamma(v_{0y} + w_{0z} - u_0) &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $D = v_0\partial_y + w_0\partial_z$ .

**Утверждение 9.** ДИП ранга  $2 + 2$  редуцируется к ДИП ранга  $2 + 0$ .

**Доказательство.** Из системы (5.1) видно, что левые части уравнений зависят от  $y$  и  $z$ . Обозначим

$$p_x \exp(\bar{\gamma}x) = n(y, z), \quad p_y \exp(\bar{\gamma}x) = m(y, z), \quad p_z \exp(\bar{\gamma}x) = k(y, z), \quad p_t \exp((\bar{\gamma} + 1)x) = l(y, z).$$

Исследуя последние соотношения на совместность, находим:

$$p(t, x, y, z) = \exp(-\bar{\gamma}x)\varphi(y, z) + P_0t \exp(-(\bar{\gamma} + 1)x) + P_1, \quad P_0(\bar{\gamma} + 1) = 0,$$

$$n(y, z) = -\bar{\gamma}\varphi, \quad m(y, z) = \varphi_y, \quad k(y, z) = \varphi_z, \quad l(y, z) = -P_0 + \bar{\gamma}\varphi u_0 - D\varphi.$$

Подстановка последних соотношений в (5.1) дает подмодель (2.3). Что и требовалось доказать.

## 6. Дифференциально-инвариантная подмодель 3+1

ДИП 3+1 имеет представление решения, совпадающее с представлением частично инвариантного решения ранга 3 дефекта 2 [4]:

$$\vec{u} = \vec{u}_0(y, z, \alpha) \exp(-x), \quad \rho = \rho_0(y, z, \alpha) \exp((2 - \bar{\gamma})x), \quad p = p(t, x, y, z),$$

где  $\alpha$  — инвариант.

УГД (1.5) примут вид:

$$\begin{aligned} \rho_0(Du_0 - u_0^2) + m\rho_0u_{0\alpha} &= -p_x \exp(\bar{\gamma}x), & \rho_0(Dv_0 - u_0v_0) + m\rho_0v_{0\alpha} &= -p_y \exp(\bar{\gamma}x), \\ \rho_0(Dw_0 - u_0w_0) + m\rho_0w_{0\alpha} &= -p_z \exp(\bar{\gamma}x), & D\rho_0 + \rho_0(v_{0y} + w_{0z}) + m\rho_{0\alpha} + k\rho_0 &= (\bar{\gamma} - 1)u_0\rho_0, \\ p_t \exp((\bar{\gamma} + 1)x) + u_0p_x \exp(\bar{\gamma}x) + v_0p_y \exp(\bar{\gamma}x) + w_0p_z \exp(\bar{\gamma}x) + B\gamma\rho_0^\gamma(v_{0y} + w_{0z} - u_0 + k) &= 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $D = v_0\partial_y + w_0\partial_z$ ,  $m = \exp(x)\alpha_t + u_0\alpha_x + v_0\alpha_y + w_0\alpha_z$ ,  $k = u_{0\alpha}\alpha_x + v_{0\alpha}\alpha_y + w_{0\alpha}\alpha_z$ .

Недоопределенная система (6.1) на совместность не исследована. Редукция для ДИП ранга 3+1 не доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хабиров С.В.** Оптимальные системы подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики: Препринт / Ин-т механики УНЦ РАН. Уфа: Гилем, 1998.
2. **Хабиров С.В.** Классификация дифференциально-инвариантных подмоделей // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.
3. **Уразбахтина Л.З.** Дифференциально-инвариантные подмодели трехмерных подалгебр для сжимаемой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. 10, № 2. С. 128–137.
4. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. **Станюкович К.П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: ГИТТЛ, 1955.
6. **Хабиров С.В.** Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: ГИЛЕМ, 2003.

Поступила 23.03.2007

УДК 517.957

## ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ<sup>1</sup>

М. Ю. Филимонов

Предложено обобщение одного из аналитических методов представления решений нелинейных уравнений в частных производных — метода специальных рядов. Суть метода специальных рядов состоит в разложении решения в ряд по степеням одной или нескольких специальным образом выбираемых функций, называемых в дальнейшем базисными. Такой выбор базисных функций, как правило, позволяет находить коэффициенты построенного ряда из последовательности линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложено обобщение этого метода для случая двух базисных функций. Главным отличием нового представления решений является наличие в дифференциальных соотношениях для базисных функций отрицательных степеней одной из базисных функций. Сформулированы условия, при которых коэффициенты ряда будут находиться рекуррентно. Расширение класса базисных функций позволяет задавать более широкий класс начальных условий.

### Введение

Метод специальных рядов является конструктивным аналитическим подходом к построению решений нелинейных уравнений. К аналитическим подходам можно отнести следующие методы получения точных решений:

- обобщенный метод разделения переменных;
- методы теории размерностей;
- групповые методы;
- методы дифференциальных связей;
- метод вырожденного годографа;
- метод поиска многосолитонных решений.

Однако точные решения описывают, как правило, достаточно узкий класс физических процессов, и при решении реальных начально-краевых задач, как правило, не удается обойтись найденным набором точных решений. Поэтому развитие получили и другие аналитические подходы, связанные с рядами, коэффициенты которых вычисляются рекуррентно. Наиболее близко в идейном плане к методу специальных рядов примыкают характеристические ряды. Решения линейных уравнений с частными производными в виде характеристических рядов были получены в работах Р. Куранта [1], Г.Ф. Даффа, Д. Людвига [2, 3], В.М. Бабича [4], А.А. Дородницына [5]. Для нелинейных уравнений характеристические ряды использовались в работах А.Ф. Сидорова [6], С.П. Баутина [7], В.М. Тешукова [8] и др.

Метод специальных рядов получил свое развитие после опубликования работы [6]. Суть метода состоит в разложении решения нелинейного уравнения с частными производными в ряд по степеням одной или нескольких специальным образом выбираемых функций, называемых далее *базисными функциями* (БФ). При таком выборе базисных функций формальное

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00217) и целевой программы по междисциплинарным проектам между УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

решение исследуемого нелинейного уравнения представимо в виде специального ряда, коэффициенты которого будут находиться рекуррентно как решения последовательности более простых уравнений. Различные аспекты применения метода специальных рядов обсуждались во многих работах (см., напр.: [9, 17]).

### 1. Метод специальных рядов

Рассмотрим для уравнения

$$u_t = F\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^l u}{\partial x^l}\right) \quad (1.1)$$

задачу Коши

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (1.2)$$

где функция  $F$  аналитична в нуле по всем переменным, кроме, быть может, первой (хотя обычно  $F$  является многочленом от  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^l u}{\partial x^l}$ , коэффициенты которого постоянны либо непрерывные ограниченные функции от  $t$ ).

Опишем одну из возможных схем построения специальных рядов в случае двух переменных  $x, t$  для уравнения (1.1) для двойных специальных рядов [18] по степеням функций  $P_1(x), P_2(x)$ :

$$u(x, t) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} g_{n_1, n_2}(t) P_1^{n_1}(x) P_2^{n_2}(x). \quad (1.3)$$

Предположим, что функции  $P_1(x), P_2(x)$  удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} P_1' &= a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + W_1(P_1, P_2), \\ P_2' &= a_{22}P_2 + W_2(P_1, P_2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $a_{11}, a_{12}, a_{22} = \text{const}$  и функции  $W_1(P_1, P_2), W_2(P_1, P_2)$  являются аналитическими в нуле функциями с условиями

$$W_1(0, 0) = W_2(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial W_k(P_1, \dots, P_m)}{\partial P_s} = 0, \quad k, s = \overline{1, 2}$$

при

$$P_1 = P_2 = 0.$$

Пусть начальные данные (1.2) представимы в виде двойного сходящегося ряда

$$u_0(x) = \sum_{|\mathbf{n}|=0}^{\infty} h_{\mathbf{n}} P_1^{n_1}(x) P_2^{n_2}(x), \quad h_{\mathbf{n}} = \text{const}, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ ,  $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2$ . В работе [18] было доказано следующее предложение.

**Предложение 1.** *Формальное решение задачи (1.1), (1.2), (1.5) представимо в виде двойного ряда (1.3), т.е. функции  $P_1(x), P_2(x)$  являются базисными.*

Для доказательства этого утверждения ряд (1.3) подставлялся в уравнение (1.1), приводились подобные члены с учетом уравнений (1.4), и для нахождения коэффициентов ряда  $g_{n_1, n_2}(t)$  были получены дифференциальные уравнения

$$g_0' = F(t, g_0, 0, \dots, 0), \quad g_0(0) = h_0, \quad (1.6)$$

$$g'_{\mathbf{n}} = F_{\mathbf{n}}(t, g_{\mathbf{n}}, \dots, g_0), \quad g_{\mathbf{n}}(0) = h_{\mathbf{n}}, \quad |\mathbf{n}| = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

где в правые части  $F_{\mathbf{n}}$  коэффициенты  $g_{\mathbf{n}}$  могут входить в  $F_{\mathbf{n}}$  только линейным образом. Был также предложен порядок вычисления коэффициентов, а именно рассматривалась канторовская нумерационная функция

$$c(n_1, n_2) = n_2 + \frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2}, \quad (1.8)$$

по которой каждому коэффициенту  $g_{n_1, n_2}(t)$  ставилось в соответствие число  $c(n_1, n_2)$ , и первыми находились те коэффициенты, у которых это число меньше. Заметим, что рекуррентность нахождения коэффициентов ряда достигается за счет специального вида линейной части системы (1.4).

## 2. Специальные ряды по степеням обобщенных систем базисных функций

Рассмотренные выше конструкции специальных рядов объединяет то, что правые части системы дифференциальных соотношений на БФ, обеспечивающие рекуррентное нахождение коэффициентов ряда, являются аналитическими в нуле функциями. В данном параграфе для случая двух БФ дается обобщение метода специальных рядов по пути расширения классов БФ, а именно сформулированы условия, при которых рекуррентность нахождения коэффициентов ряда сохранится и в случае, когда правые части дифференциальных соотношений для БФ могут быть и не аналитическими в нуле функциями.

Для двух функций  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} P_1' &= a_{10}P_1 + a_{01}P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} a_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_1 \sum_{l_2 > |l_1|} a_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2}, \\ P_2' &= b_{01}P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} b_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_2 \sum_{l_2 > |l_1|} b_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2}, \\ a_{10}, a_{01}, a_{l_1, l_2}^+, a_{l_1, l_2}^-, \beta_1, b_{l_1, l_2}^+, b_{l_1, l_2}^-, \beta_2 &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Знак “+” соответствует тому, что коэффициенты  $a_{l_1, l_2}^+$  и  $b_{l_1, l_2}^+$  умножаются на функции  $P_1^{l_1} P_2^{l_2}$  в положительных степенях  $l_1$  и  $l_2$ . Знак “-” соответствует тому, что коэффициенты  $a_{l_1, l_2}^-$  и  $b_{l_1, l_2}^-$  умножаются на функции  $P_1^{l_1} P_2^{l_2}$ , у которых  $l_1 < 0$  и  $l_2 > 0$ . При  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  система (2.1) совпадает с системой (1.4). Будем предполагать, что ряды в правых частях системы (2.1) абсолютно сходятся в некоторой области.

**О п р е д е л е н и е.** Решения системы (2.1) при  $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$  будем называть обобщенными системами базисных функций.

Приведем примеры обобщенных систем базисных функций.

**П р и м е р 1**

$$\begin{aligned} P_1' &= nP_1 - (n + \nu k) \frac{P_2^\nu}{P_1^{\nu-2}}, \\ P_2' &= (k + n)P_2 - (n + \nu k) \frac{P_2^{\nu+1}}{P_1^{\nu-1}}, \quad n, k, \nu \in \mathbb{N}, \quad (\nu > 1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решением системы (2.2) являются обобщенные системы базисных функций

$$P_1 = \frac{1}{\exp(-nx) + \exp(\nu kx)}, \quad P_2 = \frac{\exp(kx)}{\exp(-nx) + \exp(\nu kx)}, \quad (2.3)$$

с помощью которых можно задавать начальные условия, убывающие к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Пример 2

$$\begin{aligned} P_1' &= P_2, \\ P_2' &= \frac{3P_1^3}{2} + \frac{P_2^2}{2P_1}. \end{aligned}$$

Эта система разрешима в эллиптических функциях [19].

Пример 3

$$\begin{aligned} P_1' &= P_2, \\ P_2' &= \frac{P_2^4}{2P_1} + \frac{P_2^2}{2P_1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Система (2.4) описывает семейство циклоид, точки возврата которой лежат на оси  $x$  [19].

Покажем, что для построенных выше функций  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ , удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (2.1), можно предложить ряд по степеням этих функций, что при надлежащем выборе нумерационной функции, определяющей порядок нахождения коэффициентов ряда, эти коэффициенты будут находиться рекуррентно.

Рассмотрим кольцо  $\mathbf{K}_t$ , элементами которого являются абсолютно сходящиеся в некоторой области двойные ряды по степеням функций  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ :

$$u(x, t) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} g_{n_1, n_2}^+(t) P_1^{n_1}(x) P_2^{n_2}(x) + \sum_{n_2 \geq |n_1|} g_{n_1, n_2}^-(t) P_1^{n_1}(x) P_2^{n_2}(x). \quad (2.5)$$

Знак “+” также соответствует тому, что коэффициенты  $g_{n_1, n_2}^+(t)$  умножаются на функции  $P_1^{n_1} P_2^{n_2}$  в неотрицательных степенях  $n_1$  и  $n_2$ . Знак “−” соответствует тому, что коэффициенты  $g_{n_1, n_2}^-(t)$  умножаются на функции  $P_1^{n_1} P_2^{n_2}$ , у которых  $n_1 < 0$  и  $n_2 > 0$ . Формально первая сумма в ряде (2.5) совпадает с двойным рядом (1.3), предложенным С.С. Титовым [18]. Однако функции  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$  удовлетворяют другой системе дифференциальных уравнений (2.1), которая и не позволяет использовать канторовскую нумерационную функцию (1.8) для задания порядка вычисления коэффициентов ряда (2.5).

Справедлива

**Лемма 2.1.** *Кольцо  $\mathbf{K}_t$ , элементами которого являются двойные ряды (2.5), будет инвариантным относительно операции дифференцирования по  $x$ .*

**Доказательство.** Найдем первую производную по  $x$  от (2.5), используя дифференциальные уравнения (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{n_1+n_2 \geq 1} g_{n_1, n_2}^+ n_1 P_1^{n_1-1} P_2^{n_2} \left( a_{10} P_1 + a_{01} P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} a_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_1 \sum_{l_2 > |l_1|} a_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2} \right) \\ &+ \sum_{n_1+n_2 \geq 1} g_{n_1, n_2}^+ n_2 P_1^{n_1} P_2^{n_2-1} \left( b_{01} P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} b_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_2 \sum_{l_2 > |l_1|} b_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2} \right) \\ &+ \sum_{n_2 \geq |n_1|} g_{n_1, n_2}^- n_1 P_1^{n_1-1} P_2^{n_2} \left( a_{10} P_1 + a_{01} P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} a_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_1 \sum_{l_2 > |l_1|} a_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2} \right) \\ &+ \sum_{n_2 \geq |n_1|} g_{n_1, n_2}^- n_2 P_1^{n_1} P_2^{n_2-1} \left( b_{01} P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} b_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_2 \sum_{l_2 > |l_1|} b_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2} \right) \\ &= \sum_{n_1+n_2 \geq 1} [g_{n_1, n_2}^+ (n_1 a_{10} + n_2 b_{01}) + g_{n_1+1, n_2-1}^+ (n_1+1) a_{01}] P_1^{n_1} P_2^{n_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} \sum_{n_1+n_2 \geq l_1+l_2} [(n_1+1-l_1)a_{l_1,l_2}^+ g_{n_1+1-l_1,n_2-l_2}^+ (n_2+1-l_2)b_{l_1,l_2}^+ g_{n_1-l_1,n_2+1-l_2}^+] P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\
& + \sum_{l_2 > |l_1|} \sum_{n_1+n_2 \geq l_1+l_2} [(n_1+1-l_1)a_{l_1,l_2}^- \beta_1 g_{n_1+1-l_1,n_2-l_2}^+ + (n_2+1-l_2)b_{l_1,l_2}^- \beta_2 g_{n_1-l_1,n_2+1-l_2}^+] P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\
& \quad + \sum_{n_2 \geq |n_1|} [g_{n_1,n_2}^- (n_1 a_{10} + n_2 b_{01}) + g_{n_1+1,n_2-1}^- (n_1+1) a_{01}] P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\
& + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} \sum_{n_2 \geq |n_1+1-l_1|+l_2} [(n_1+1-l_1)a_{l_1,l_2}^+ g_{n_1+1-l_1,n_2-l_2}^- + (n_2+1-l_2)b_{l_1,l_2}^+ g_{n_1-l_1,n_2+1-l_2}^-] P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\
& + \sum_{l_2 > |l_1|} \sum_{n_2 \geq |n_1+1-l_1|+l_2} [(n_1+1-l_1)a_{l_1,l_2}^- \beta_1 g_{n_1+1-l_1,n_2-l_2}^- + (n_2+1-l_2)b_{l_1,l_2}^- \beta_2 g_{n_1-l_1,n_2+1-l_2}^-] P_1^{n_1} P_2^{n_2}.
\end{aligned}$$

Здесь мы предполагаем, что если коэффициенты ряда, помеченные знаком “+”, имеют отрицательные индексы, то они равны нулю. Также равными нулю полагаются любые коэффициенты ряда, если второй индекс является отрицательным. Анализ формулы для  $\frac{\partial u}{\partial x}$  показывает, что  $\frac{\partial u}{\partial x} \in \mathbf{K}_t$ . Аналогично показывается, что и любая  $j$ -я производная  $\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \in \mathbf{K}_t$ .

Это и доказывает лемму 2.1.

Из анализа формулы для  $u_x$  в лемме 2.1 вытекает

**Следствие 1.** При вычислении производной по  $x$  от  $u \in \mathbf{K}_t$  выражение при  $P_1^{n_1}(x)P_2^{n_2}(x)$  ( $n_2 \geq |n_1|$ , если  $n_1 < 0$ ) является линейной комбинацией коэффициентов  $g_{n_1,n_2}$ ,  $g_{n_1+1,n_2-1}$ ,  $g_{n_1+1-l_1,n_2-l_2}$ ,  $g_{n_1-l_1,n_2+1-l_2}$ , причем  $0 < |l_1| < l_2 \leq n_2$  при  $l_1 < 0$ ;  $0 \leq l_1 \leq n_1$ ,  $0 \leq l_2 \leq n_2$ ,  $l_1 + l_2 \geq 2$  при  $l_1 \geq 0$ .

Для обозначения линейной комбинации в смысле следствия 1 введем следующие обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim L_1(g_{n_1,n_2}; g_{n_1+1,n_2-1}; g_{n_1+1-l_1,n_2-l_2}; g_{n_1-l_1,n_2+1-l_2}) P_1^{n_1}(x) P_2^{n_2}(x).$$

Аналогичные обозначения будут использованы и при вычислении  $j$ -й производной по  $x$ . С использованием следствия 1 доказываемся

**Лемма 2.2.** При вычислении  $j$ -й производной по  $x$  от  $u \in \mathbf{K}_t$ ,  $j \geq 1$ , выражение при  $P_1^{n_1}(x)P_2^{n_2}(x)$  ( $n_2 \geq |n_1|$ , если  $n_1 < 0$ ) является линейной комбинацией коэффициентов  $g_{n_1+k_1,n_2-k_2}$ ,  $g_{n_1-k_3,n_2+k_4}$ ,  $g_{n_1-k_5,n_2-k_6}$ ,  $m.e.$

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \sim L_j(g_{n_1+k_1,n_2-k_2}; g_{n_1-k_3,n_2+k_4}; g_{n_1-k_5,n_2-k_6}) P_1^{n_1}(x) P_2^{n_2}(x),$$

причем

$$0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n_2; \quad k_3 \geq 2k_4 \geq 0; \quad k_5 \geq 0, \quad 0 \leq k_6 \leq n_2. \quad (2.6)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доказательство будем проводить методом математической индукции. При  $j = 1$  из следствия 1 определяются коэффициенты  $g_{n_1,n_2}$ ,  $g_{n_1+1,n_2-1}$ ,  $g_{n_1+1-l_1,n_2-l_2}$ ,  $g_{n_1-l_1,n_2+1-l_2}$ , индексы которых можно получить за счет выбора  $k_i$ ,  $i = \overline{1,6}$ . Действительно, для  $g_{n_1,n_2}$  полагаем  $k_1 = k_2 = 0$ , для  $g_{n_1+1,n_2-1}$  полагаем  $k_1 = k_2 = 1$ . Причем выполняется неравенство  $0 \leq k_1 \leq k_2$ . Для коэффициентов  $g_{n_1+1-l_1,n_2-l_2}$  возможны варианты:

- 1)  $0 \leq l_1 \leq 1$ . Тогда  $k_1 = 1 - l_1$ ,  $k_2 = l_2$  и  $0 \leq k_1 \leq k_2$ , поскольку  $l_1 + l_2 \geq 2$ ;
- 2)  $l_1 > 1$ . Тогда  $k_5 = l_1 - 1$ ,  $k_6 = l_2$ ;
- 3)  $l_1 < 0$ . Тогда  $k_1 = 1 - l_1$ ,  $k_2 = l_2$  и  $0 \leq k_1 \leq k_2$ , поскольку  $|l_1| < l_2$ .

Для коэффициентов  $g_{n_1-l_1,n_2+1-l_2}$  также возможны несколько вариантов:

- 1)  $l_1 \geq 0, l_2 = 0$ . Тогда  $k_3 = l_1, k_4 = 1$  и  $k_3 \geq 2k_4$ , поскольку  $l_1 \geq 2$ ;
- 2)  $l_1 \geq 0, l_2 \geq 1$ . Тогда  $k_5 = l_1, k_6 = l_2 - 1$ ;
- 3)  $l_1 < 0$ . Тогда  $k_1 = |l_1|, k_2 = l_2 - 1$  и  $0 \leq k_1 \leq k_2$ , поскольку  $l_2 > |l_1|$ .

Таким образом, лемма 2.2 при  $j = 1$  справедлива.

Пусть утверждение справедливо при  $j \leq n$ . Докажем это утверждение при  $j = n + 1$ . Поскольку выражение  $L_n(g_{n_1+k_1, n_2-k_2}; g_{n_1-k_3, n_2+k_4}; g_{n_1-k_5, n_2-k_6})$  есть линейная комбинация коэффициентов  $g_{n_1+k_1, n_2-k_2}; g_{n_1-k_3, n_2+k_4}; g_{n_1-k_5, n_2-k_6}$ , то для дальнейших построений введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} & L_n(g_{n_1+k_1, n_2-k_2}; g_{n_1-k_3, n_2+k_4}; g_{n_1-k_5, n_2-k_6}) \\ &= L_n^{(1)}(g_{n_1+k_1, n_2-k_2}) + L_n^{(2)}(g_{n_1-k_3, n_2+k_4}) + L_n^{(3)}(g_{n_1-k_5, n_2-k_6}), \end{aligned}$$

где через  $L_n^{(1)}, L_n^{(2)}, L_n^{(3)}$  обозначены линейные комбинации соответствующих коэффициентов. При проведении выкладок воспользуемся также дифференциальными уравнениями (2.1):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} \sim L_n(g_{n_1+k_1, n_2-k_2}; g_{n_1-k_3, n_2+k_4}; g_{n_1-k_5, n_2-k_6}) \left( P_1^{n_1}(x) P_2^{n_2}(x) \right)'_x \\ & \sim L_n(g_{n_1+k_1, n_2-k_2}; g_{n_1-k_3, n_2+k_4}; g_{n_1-k_5, n_2-k_6}) n_1 P_1^{n_1-1} P_2^{n_2} \left[ \left( a_{10} P_1 + a_{01} P_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} a_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_1 \sum_{l_2 > |l_1|} a_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2} \right) \right. \\ & \quad \left. + n_2 P_1^{n_1} P_2^{n_2-1} \left( b_{01} P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} b_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_2 \sum_{l_2 > |l_1|} b_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2} \right) \right] \\ & \sim L_n^{(1)}(g_{n_1+k_1, n_2-k_2}) n_1 a_{10} P_1^{n_1} P_2^{n_2} + L_n^{(1)}(g_{n_1+k_1+1, n_2-k_2-1}) (n_1+1) a_{01} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & \quad + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} a_{l_1, l_2}^+ (n_1+1-l_1) L_n^{(1)}(g_{n_1+k_1+1-l_1, n_2-k_2-l_2}) P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & \quad + \beta_1 \sum_{l_2 > |l_1|} a_{l_1, l_2}^- (n_1+1-l_1) L_n^{(1)}(g_{n_1+k_1+1-l_1, n_2-k_2-l_2}) P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & + L_n^{(2)}(g_{n_1-k_3, n_2+k_4}) n_1 a_{10} P_1^{n_1} P_2^{n_2} + L_n^{(2)}(g_{n_1-k_3+1, n_2+k_4-1}) (n_1+1) a_{01} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & \quad + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} a_{l_1, l_2}^+ (n_1+1-l_1) L_n^{(2)}(g_{n_1-k_3+1-l_1, n_2+k_4-l_2}) P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & \quad + \beta_1 \sum_{l_2 > |l_1|} a_{l_1, l_2}^- (n_1+1-l_1) L_n^{(2)}(g_{n_1-k_3+1-l_1, n_2+k_4-l_2}) P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & + L_n^{(3)}(g_{n_1-k_5, n_2-k_6}) n_1 a_{10} P_1^{n_1} P_2^{n_2} + L_n^{(3)}(g_{n_1-k_5+1, n_2-k_6-1}) (n_1+1) a_{01} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & \quad + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} a_{l_1, l_2}^+ (n_1+1-l_1) L_n^{(3)}(g_{n_1-k_5+1-l_1, n_2-k_6-l_2}) P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & \quad + \beta_1 \sum_{l_2 > |l_1|} a_{l_1, l_2}^- (n_1+1-l_1) L_n^{(3)}(g_{n_1-k_5+1-l_1, n_2+k_6-l_2}) P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & \quad + L_n^{(1)}(g_{n_1+k_1, n_2-k_2}) n_2 b_{01} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & \quad + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} b_{l_1, l_2}^+ (n_2+1-l_2) L_n^{(1)}(g_{n_1+k_1-l_1, n_2-k_2-l_2+1}) P_1^{n_1} P_2^{n_2} \\ & \quad + \beta_2 \sum_{l_2 > |l_1|} b_{l_1, l_2}^- (n_2+1-l_2) L_n^{(1)}(g_{n_1+k_1-l_1, n_2-k_2+1-l_2}) P_1^{n_1} P_2^{n_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L_n^{(2)}(g_{n_1-k_3, n_2+k_4})n_2b_{01}P_1^{n_1}P_2^{n_2} \\
& + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} b_{l_1, l_2}^+(n_2+1-l_2)L_n^{(2)}(g_{n_1-k_3-l_1, n_2+k_4-l_2+1})P_1^{n_1}P_2^{n_2} \\
& + \beta_2 \sum_{l_2 > |l_1|} b_{l_1, l_2}^-(n_2+1-l_2)L_n^{(2)}(g_{n_1-k_3-l_1, n_2+k_4+1-l_2})P_1^{n_1}P_2^{n_2} \\
& + L_n^{(3)}(g_{n_1-k_5, n_2-k_6})n_2b_{01}P_1^{n_1}P_2^{n_2} \\
& + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} b_{l_1, l_2}^+(n_2+1-l_2)L_n^{(3)}(g_{n_1-k_5-l_1, n_2-k_6-l_2+1})P_1^{n_1}P_2^{n_2} \\
& + \beta_2 \sum_{l_2 > |l_1|} b_{l_1, l_2}^-(n_2+1-l_2)L_n^{(3)}(g_{n_1-k_5-l_1, n_2+k_6+1-l_2})P_1^{n_1}P_2^{n_2}.
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства достаточно проверить выполнение для индексов коэффициентов, входящих в  $L_n^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , неравенств на индексы (2.6). Например, для коэффициентов  $g_{n_1+k_1+1, n_2-k_2-1}$  определим  $\widehat{k}_1 = k_1 + 1$ ,  $\widehat{k}_2 = k_2 + 1$ . Поскольку  $k_1 \leq k_2$ , то, очевидно,  $\widehat{k}_1 \leq \widehat{k}_2$ .

Для коэффициентов  $g_{n_1+k_1+1-l_1, n_2-k_2-l_2}$  возможны следующие варианты:

1)  $0 \leq l_1 \leq k_1 + 1$ . Тогда  $\widehat{k}_1 = k_1 + 1 - l_1$ ,  $\widehat{k}_2 = k_2 + l_2$  и  $\widehat{k}_1 \leq \widehat{k}_2$ , поскольку  $\widehat{k}_1 - \widehat{k}_2 = (k_1 - k_2) + [1 - (l_1 + l_2)] \leq 0$ , т.к.  $(k_1 - k_2) \leq 0$  и  $(l_1 + l_2) \geq 2$ ;

2)  $l_1 > k_1 + 1$ . Тогда полагаем  $g_{n_1+k_1+1-l_1, n_2-k_2-l_2} = g_{n_1-\widehat{k}_5, n_2-\widehat{k}_6}$ , где  $\widehat{k}_5 = l_1 - (1 + k_1) \geq 0$  и  $\widehat{k}_6 = k_2 + l_2 \geq 0$ , т.к.  $k_2, l_2 \geq 0$ ;

3)  $l_1 < 0$ . Тогда  $\widehat{k}_1 = k_1 + 1 - l_1$ ,  $\widehat{k}_2 = k_2 + l_2$  и  $\widehat{k}_1 \leq \widehat{k}_2$ , поскольку  $\widehat{k}_1 - \widehat{k}_2 = (k_1 - k_2) + [1 + (|l_1| - l_2)] \leq 0$ , т.к.  $(k_1 - k_2) \leq 0$  и  $l_2 > |l_1|$ .

Для коэффициентов  $g_{n_1-k_3+1, n_2+k_4-1}$  возможны следующие варианты:

1)  $k_3 = 0, 1$ , а значит,  $k_4 = 0$ , т.к.  $k_3 \geq 2k_4$ . В этом случае полагаем  $\widehat{k}_1 = 1 - k_3$ ,  $\widehat{k}_2 = 1$  и  $\widehat{k}_1 \leq \widehat{k}_2$ ;

2)  $k_3 > 1, k_4 = 0$ . В этом случае полагаем  $\widehat{k}_5 = k_3 - 1$ ,  $\widehat{k}_6 = 1$ ;

3)  $k_3 > 1, k_4 \geq 0$ . В этом случае полагаем  $\widehat{k}_3 = k_3 - 1$ ,  $\widehat{k}_4 = k_4 - 1$  и  $\widehat{k}_3 \geq 2\widehat{k}_4$ .

Для коэффициентов  $g_{n_1-k_3+1-l_1, n_2+k_4-l_2}$  возможны следующие варианты:

1)  $-k_3 + 1 - l_1 \leq 0, k_4 - l_2 \geq 0$ . В этом случае полагаем  $\widehat{k}_3 = k_3 + l_1 - 1$ ,  $\widehat{k}_4 = k_4 - l_2$  и  $\widehat{k}_3 \leq \widehat{k}_4$ , т.к.  $(k_3 - 2k_4) + l_1 - 1 + 2l_2 \geq 0$ ;

2)  $k_3 + 1 - l_1 \leq 0, k_4 - l_2 < 0$ . В этом случае полагаем  $\widehat{k}_5 = k_3 + l_1 - 1$ ,  $\widehat{k}_6 = l_2 - k_4$ ;

3)  $-k_3 + 1 - l_1 > 0, k_4 - l_2 < 0$ . В этом случае полагаем  $\widehat{k}_1 = 1 - k_3 - l_1$ ,  $\widehat{k}_2 = l_2 - k_4$  и  $\widehat{k}_1 \leq \widehat{k}_2$ , т.к.  $(k_4 - k_3) + 1 - (l_1 + l_2) \leq 0$  при любом знаке  $l_1$ , поскольку при  $l_1 < 0$  должно быть  $l_2 > |l_1|$ .

Случай  $-k_3 + 1 - l_1 > 0, k_4 - l_2 \geq 0$  невозможен.

Аналогично проверяются неравенства (2.6) на индексы и для других коэффициентов, используемых при вычислении  $n + 1$ -й производной. Предположение индукции доказано, а с ним и лемма 2.2.

**Следствие 2.** После подстановки ряда (2.5) в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \quad (2.7)$$

и приравнивания выражений при одинаковых степенях  $P_1^{n_1}(x)P_2^{n_2}(x)$  для определения коэффициентов ряда получается бесконечная система уравнений

$$g'_{n_1, n_2} = L_j(g_{n_1+k_1, n_2-k_2}; g_{n_1-k_3, n_2+k_4}; g_{n_1-k_5, n_2-k_6}), \quad (2.8)$$

где индексы  $k_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$  удовлетворяют неравенствам (2.6).

**З а м е ч а н и е 1.** Пока не задана нумерационная функция, определяющая последовательность вычисления коэффициентов ряда (2.5), нельзя утверждать, что система (2.8) распадется на последовательно решаемые дифференциальные уравнения.

Действительно, если мы воспользуемся канторовской нумерационной функцией (1.8), используемой для задания последовательности вычисления коэффициентов двойного ряда (1.3) по положительным степеням БФ (решения системы (2.1) с  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ), предложенной в работе [18], то условию  $n_1 + n_2 = N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  при  $n_1 < 0$  удовлетворяет бесконечное число коэффициентов  $g_{n_1, n_2}$ . Например, при фиксированном  $N$  можно положить  $n_1 = -l$ ,  $n_2 = N + l$ , где  $l \in \mathbb{N}$ .

**Следствие 3.** Пусть индексы у коэффициента  $g_{n_1, n_2}$  в уравнении (2.8) удовлетворяют условию  $n_1 + 2n_2 = N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Тогда и индексы всех коэффициентов, входящих в  $L_j$ , лежат не выше прямой  $n_1 + 2n_2 = N$ .

Действительно, для индексов коэффициентов  $g_{n_1+k_1, n_2-k_2}$ ,  $g_{n_1-k_3, n_2+k_4}$ ,  $g_{n_1-k_5, n_2-k_6}$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned} n_1 + k_1 + 2n_2 - 2k_2 - N &= k_1 - 2k_2 \leq 0, \\ n_1 - k_3 + 2n_2 + 2k_4 - N &= 2k_4 - k_3 \leq 0, \\ n_1 - k_5 + 2n_2 - 2k_6 - N &= -k_5 - 2k_6 \leq 0, \end{aligned}$$

поскольку индексы  $k_i$ ,  $i = \overline{1, 6}$  удовлетворяют неравенствам (2.6).

Пусть для уравнения (1.1) начальные данные (1.2) представимы в виде двойного ряда

$$u_0(x) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} h_{n_1, n_2}^+ P_1^{n_1}(x) P_2^{n_2}(x) + \sum_{n_2 \geq |n_1|} h_{n_1, n_2}^- P_1^{n_1}(x) P_2^{n_2}(x), \quad (2.9)$$

где  $h_{n_1, n_2}^+$ ,  $h_{n_1, n_2}^- = \text{const}$ . Справедлива

**Теорема 1.** Формальное решение задачи (1.1), (1.2), (2.9) представимо в виде ряда (2.5) с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами по степеням обобщенных систем базисных функций, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (2.1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Учитывая следствие 3, определим следующую нумерационную функцию:

$$\widehat{c}(n_1, n_2) = n_1 + n_2 + \frac{(n_1 + 2n_2)(n_1 + 2n_2 + 1)}{2}, \quad (2.10)$$

по которой каждому коэффициенту  $g_{n_1, n_2}(t)$  ставится в соответствие число  $\widehat{c}(n_1, n_2)$ , и первыми будут находиться те коэффициенты, у которых это число меньше, т.е. коэффициент  $g_{l_{11}, l_{12}}(t)$  вычисляется раньше  $g_{l_{21}, l_{22}}(t)$ , если выполняется неравенство  $\widehat{c}(l_{11}, l_{12}) < \widehat{c}(l_{21}, l_{22})$ .

Покажем, что определенная таким образом нумерационная функция (2.10) позволит находить коэффициенты ряда (2.5) рекуррентно.

Данное утверждение проверяется также подстановкой ряда (2.5) в уравнение (1.1) с учетом дифференциальных уравнений (2.1). После приравнивания выражений при одинаковых степенях  $P_1^{n_1}(x) P_2^{n_2}(x)$  коэффициенты ряда  $g_{n_1, n_2}(t)$  будут находиться последовательно как решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными данными  $h_{n_1, n_2}^+$ ,  $h_{n_1, n_2}^-$ :

$$g'_{0,0} = F(t, g_{0,0}, 0, \dots, 0), \quad g_{0,0}(0) = h_{0,0}^+, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} g'_{n_1, n_2} &= F_{n_1, n_2}(t, g_{n_1, n_2}, \dots, g_{0,0}), \\ g_{n_1, n_2}(0) &= h_{n_1, n_2}^+, \quad n_1 \geq 0; \quad g_{n_1, n_2}(0) = h_{n_1, n_2}^-, \quad n_1 < 0; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$n_1 + 2n_2 = 1, 2, \dots,$$

где в правые части  $F_{n_1, n_2}$  коэффициенты  $g_{n_1, n_2}$  могут входить в  $F_{n_1, n_2}$  только линейным образом, а нумерационная функция (2.10) задаст последовательность решения уравнений (2.12).

Для доказательства этого факта рассмотрим правую часть уравнений (2.12) с точки зрения максимального значения нумерационной функции (2.10) для коэффициентов  $g_{l_1, l_2}$ , от которых зависит функция  $F_{n_1, n_2}$ .

Очевидно, что максимальное значение нумерационная функция (2.10) может иметь для коэффициентов  $g_{l_1, l_2}$ , которые определяются линейными членами, входящими в правые части уравнения (1.1). Нелинейные члены в уравнении (1.1) при вычислении коэффициентов  $g_{n_1, n_2}$ , например квадратичные, будут порождать в уравнении (2.12) квадратичные формы, состоящие из коэффициентов  $g_{l_{11}, l_{12}}(t)g_{l_{21}, l_{22}}(t)$ , для индексов которых справедливы равенства

$$l_{11} + l_{12} = n_1, \quad l_{21} + l_{22} = n_2, \quad (2.13)$$

причем  $l_{12}, l_{22} \geq 0$ , а если  $l_{11}, (l_{21}) < 0$ , то  $l_{21}, (l_{22}) \geq |l_{11}|, (|l_{12}|)$ .

Для коэффициентов  $g_{l_{11}, l_{12}}(t)$  справедливо неравенство

$$\widehat{c}(n_1, n_2) \geq \widehat{c}(l_{11}, l_{12}), \quad (2.14)$$

которое получается из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \widehat{c}(n_1, n_2) &= l_{11} + l_{12} + l_{21} + l_{22} + \frac{[(l_{11} + 2l_{12}) + (l_{12} + 2l_{22})][(l_{11} + 2l_{12} + 1) + (l_{12} + 2l_{22})]}{2} \\ &\geq \widehat{c}(l_{11}, l_{12}) + (l_{11} + l_{12}) \geq \widehat{c}(l_{11}, l_{12}). \end{aligned}$$

При этом мы учитывали равенства (2.13) и то, что выражения в круглых скобках в этой цепочке неравенств неотрицательные.

Таким образом, согласно неравенству (2.14) все коэффициенты  $g_{l_{11}, l_{12}}(t)$ , которые входят в правую часть уравнения (2.12), благодаря нелинейным членам из уравнения (1.1), и участвуют при заданном  $N \in \mathbb{N}$  в определении коэффициента  $g_{n_1, n_2}$ ,  $n_1 + 2n_2 = N$ , будут находиться раньше, чем коэффициент  $g_{n_1, n_2}$ .

Из предложения 2.2 и следствий 2, 3 получим, что члены, входящие в уравнение (1.1) линейным образом, могут определять в правой части уравнения (2.12) коэффициенты  $g_{n_1 + k_1, n_2 - k_2}$ ,  $g_{n_1 - k_3, n_2 + k_4}$ ,  $g_{n_1 - k_5, n_2 - k_6}$ , имеющие максимальную нумерационную функцию (2.10), причем все индексы этих коэффициентов лежат ниже прямой  $n_1 + 2n_2 = N$  и для них справедливы неравенства (2.6). Осталось показать, что все эти коэффициенты имеют значение нумерационной функции, не превосходящее  $\widehat{c}(n_1, n_2)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \widehat{c}(n_1 + k_1, n_2 - k_2) &= n_1 + n_2 + (k_1 - k_2) + \frac{[n_1 + 2n_2 + (k_1 - 2k_2)][n_1 + 2n_2 + 1 + (k_1 - 2k_2)]}{2} \\ &\leq \widehat{c}(n_1, n_2) + (k_1 - k_2) \leq \widehat{c}(n_1, n_2). \\ \widehat{c}(n_1 - k_3, n_2 + k_4) &= n_1 + n_2 + (k_4 - k_3) + \frac{[n_1 + 2n_2 + (2k_4 - k_3)][n_1 + 2n_2 + 1 + (2k_4 - k_3)]}{2} \\ &\leq \widehat{c}(n_1, n_2) + (k_4 - k_3) \leq \widehat{c}(n_1, n_2). \\ \widehat{c}(n_1 - k_5, n_2 - k_6) &= n_1 + n_2 + (-k_5 - k_6) \\ &+ \frac{[n_1 + 2n_2 + (-2k_6 - k_5)][n_1 + 2n_2 + 1 + (-2k_6 - k_5)]}{2} \leq \widehat{c}(n_1, n_2) + (-k_5 - k_6) \leq \widehat{c}(n_1, n_2). \end{aligned}$$

При этом мы учитывали неравенства (2.6) и то, что выражения в круглых скобках в этой цепочке неравенств неположительные.

Итак, предлагается следующая последовательность нахождения коэффициентов двойного ряда (2.5):

1.  $\widehat{c}(0, 0) = 0 \rightarrow g_{0,0}$ ;
2.  $\widehat{c}(-1, 1) = 1 \rightarrow g_{-1,1}$ ;
3.  $\widehat{c}(1, 0) = 2 \rightarrow g_{1,0}$ ;
4.  $\widehat{c}(-2, 2) = 3 \rightarrow g_{-2,2}$ ;
5.  $\widehat{c}(0, 1) = 4 \rightarrow g_{0,1}$ ;
6.  $\widehat{c}(2, 0) = 5 \rightarrow g_{2,0}$

и т.д.

Таким образом, коэффициенты ряда (2.5) определяются рекуррентно из последовательности линейных дифференциальных уравнений (2.11), (2.12) и дают формальное решение задачи (1.1), (1.2), (2.9). Заметим, что рекуррентность нахождения коэффициентов ряда достигается за счет специального вида не только линейной части системы (2.1), но и нелинейной части, содержащей базисные функции в отрицательных степенях.

Теорема 1 доказана.

**З а м е ч а н и е 2.** В отличие от работы [20], в которой рассматривался частный вид обобщенных систем БФ, в настоящей работе анализируются общие конструкции обобщенных систем БФ и предложена нумерационная функция (2.10), задающая порядок нахождения коэффициентов ряда (2.5).

### 3. Обобщенные системы базисных функций с функциональным произволом

Обобщенные системы БФ, зависящие от двух независимых переменных так же, как и функции  $P(x, t)$ ,  $Q(x, t)$  из работы [9], могут содержать произвольную функцию  $f(t)$ . Для этого необходимо потребовать, чтобы пара функций  $P_1(x, t)$ ,  $P_2(x, t)$  удовлетворяла переопределенной системе дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial x} &= a_{10}P_1 + a_{01}P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} a_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_1 \sum_{l_2 > |l_1|} a_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} &= b_{01}P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} b_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_2 \sum_{l_2 > |l_1|} b_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2}, \\ \frac{\partial P_1}{\partial t} &= c_{10}P_1 + c_{01}P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} c_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_3 \sum_{l_2 > |l_1|} c_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} &= d_{01}P_2 + \sum_{l_1+l_2 \geq 2} d_{l_1, l_2}^+ P_1^{l_1} P_2^{l_2} + \beta_4 \sum_{l_2 > |l_1|} d_{l_1, l_2}^- P_1^{l_1} P_2^{l_2}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &a_{10}(t), a_{01}(t), a_{l_1, l_2}^+(t), a_{l_1, l_2}^-(t), b_{l_1, l_2}^+(t), b_{l_1, l_2}^-(t), \\ &c_{10}(t), c_{01}(t), c_{l_1, l_2}^+(t), c_{l_1, l_2}^-(t), d_{l_1, l_2}^+(t), d_{l_1, l_2}^-(t) \in C^1[0, \infty), \\ &\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 = \text{const}. \end{aligned}$$

Эту систему можно исследовать на совместность, однако условия на коэффициенты будут очень громоздкими. Сформулируем только одно необходимое условие совместности.

**Утверждение 1.** Для того чтобы система (3.1) была совместной, необходимо выполнение следующих соотношений:

- 1)  $a_{10} = \text{const}, b_{01} = \text{const}$ ;
- 2)  $a'_{01} + a_{01}(d_{01} - c_{10}) = c_{01}(b_{01} - a_{10})$ .

Это утверждение легко проверяется перекрестным дифференцированием по  $t$  и  $x$  правых частей системы (3.1).

**Утверждение 2.** Решения системы (3.1) могут содержать произвольную функцию  $f(t) \in C^1[0, \infty)$ .

Для проверки утверждения 2 рассмотрим следующую систему, являющуюся частным случаем системы (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial x} &= nP_1 - (n + \nu k)f(t)\frac{P_2^\nu}{P_1^{\nu-2}}, & \frac{\partial P_1}{\partial t} &= -f'(t)\frac{P_2^\nu}{P_1^{\nu-2}}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} &= (k + n)P_2 - (n + \nu k)f(t)\frac{P_2^{\nu+1}}{P_1^{\nu-1}}, & \frac{\partial P_2}{\partial t} &= -f'(t)\frac{P_2^{\nu+1}}{P_1^{\nu-1}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решением системы (3.2) является пара функций

$$P_1(x, t) = \frac{1}{\exp(-nx) + f(t)\exp(\nu kx)}, \quad P_2(x, t) = \exp(kx)P_1(x, t), \quad (3.3)$$

которые при  $\nu > 1$  являются обобщенными системами БФ. Как было показано в работе [17], функциональный производный может быть также использован при доказательстве разрешимости краевых задач.

#### 4. Доказательство сходимости специальных рядов по степеням обобщенных систем базисных функций

Сходимость специальных рядов по степеням обобщенных систем БФ можно установить для нелинейного эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^{2r+1} u}{\partial x^{2r+1}} + F\left(t, u, \dots, \frac{\partial^{2r} u}{\partial x^{2r}}\right). \quad (4.1)$$

В уравнении (4.1)  $F$  — полином от своих переменных (кроме, быть может, первой) с непрерывными и ограниченными по  $t$  коэффициентами, такой что  $F\left(t, u_0, \dots, \frac{\partial^{2r} u_0}{\partial x^{2r}}\right) \equiv 0$  при  $u_0 = \text{const}$ .

Оказывается, что доказательство сходимости специальных рядов по степеням обобщенных систем БФ в некоторых ситуациях можно свести к теореме о сходимости специальных кратных рядов из работы [20]. Сформулируем эту теорему для случая, когда специальный ряд имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{|\mathbf{n}|=0}^{\infty} g_{\mathbf{n}}(t) \prod_{i=1}^m P_i^{n_i}(x), \quad (4.2)$$

где  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ ,  $|\mathbf{n}| = n_1 + \dots + n_m$ , а базисные функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$P_i' = \sum_{j=i}^m a_{ij} P_j + \sum_{s=1}^N \sum_{i_1+\dots+i_m \geq 2} a_{i_1, \dots, i_m}^{(i,s)} \prod_{k=1}^m P_k^{i_k}, \quad a_{i_1, \dots, i_m}^{(i,s)} = \text{const}. \quad (4.3)$$

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

1. Для постоянных  $h_{\mathbf{n}}$ , определяющих начальные данные (1.2), (1.5), справедливы неравенства

$$|h_{\mathbf{n}}| \leq \frac{H_0}{n_{10}^{2r+1}, \dots, n_{m0}^{2r+1}}, \quad H_0 > 0, \quad n_{j0} = \begin{cases} n_j, & n_j \neq 0, \\ 1, & n_j = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

2. Для постоянных  $a_{ii}$  справедливы неравенства

$$a_{ii}\gamma < 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.5)$$

3. Постоянные  $a$  и  $A$  удовлетворяют неравенству

$$\frac{a}{A} < \varepsilon_r(F, N, m) < 1, \quad (4.6)$$

где положительная постоянная  $\varepsilon_r(F, N, m)$  зависит от  $r, F, N, m$  и является достаточно малой, а числа  $a, A$  определяются следующим образом:

$$a = \max_{i,s,i_1,\dots,i_m,k>i} \{|a_{i_1,\dots,i_m}^{(i,s)}|, |a_{ik}|\}, \quad A = \min_i \{|a_{ii}|\}.$$

Тогда решение задачи Коши (1.2), (1.5) для уравнения (4.1) представимо в виде ряда (4.2), (4.3), сходящегося в области  $G = \{(x, t) : t \geq 0, |P_i(x, t)| < 1\}$ .

Ввиду громоздкости выкладок для специальных рядов по степеням обобщенных систем БФ, все основные построения будем проводить на примере уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ). Для этого в уравнении (4.1) положим  $r = 1, F = -uu_x$ . В качестве  $f(t)$  в БФ (3.3) возьмем функцию  $f(t) = \varepsilon \exp(\nu\gamma t)$ , тогда удастся несколько расширить область сходимости решения и воспользоваться теоремой 2.

Для выбранной функции  $f(t)$  обобщенные системы БФ  $P_1$  и  $P_2$  с  $\nu > 1$  имеют вид

$$P_1(x, t) = \frac{1}{\exp(-nx) + \varepsilon \exp(\nu(kx + \gamma t))}, \quad P_2(x, t) = \exp(kx)P_1(x, t). \quad (4.7)$$

Соответствующие дифференциальные соотношения, которые будут обеспечивать рекуррентность нахождения коэффициентов ряда, запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial x} &= nP_1 - (n + \nu k)\varepsilon e^{\nu\gamma t} \frac{P_2^\nu}{P_1^{\nu-2}}, & \frac{\partial P_1}{\partial t} &= -\nu\gamma e^{\nu\gamma t} \frac{P_2^\nu}{P_1^{\nu-2}}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial x} &= (k + n)P_2 - (n + \nu k)e^{\nu\gamma t} \frac{P_2^{\nu+1}}{P_1^{\nu-1}}, & \frac{\partial P_2}{\partial t} &= -\nu\gamma e^{\nu\gamma t} \frac{P_2^{\nu+1}}{P_1^{\nu-1}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Введем следующие обозначения:

$$Q_1 = in + j(k + n), \quad Q_2 = n + \nu k.$$

После подстановки ряда (2.5), (4.7) в уравнение КдФ с учетом соотношений (4.8) для нахождения коэффициентов ряда получится последовательность линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'_{ij} + b_{ij}u_{ij} = \varepsilon\gamma R_{ij}(t), \quad (4.9)$$

где  $b_{ij} = -\gamma Q_1^3$ ,

$$\begin{aligned} R_{ij}(t) &= \nu e^{\nu\gamma t}(i + j - 1)u_{i+\nu-1, j-\nu} - e^{\nu\gamma t}Q_2(i + j - 1)(3Q_1^2 - 5Q_1Q_2 + 3Q_2^2)u_{i+\nu-1, j-\nu} \\ &+ e^{2\nu\gamma t}Q_2^2(i + j - 1)[(i + j)(3Q_1 - Q_2) - 2Q_1]u_{i+2\nu-1, j-2\nu} \\ &+ e^{3\nu\gamma t}Q_2^3(i + j - 3)(i + j - 2)(i + j - 1)u_{i+3\nu-3, j-3\nu} \\ &- \sum_{m_1+m_2=i} \sum_{n_1+n_2=j} [u_{m_1 n_1} u_{m_2 n_2} (m_2 n + n_2 k + n_2 n) \\ &- Q_2 e^{\nu\gamma t} u_{m_1 n_1} u_{m_2+\nu-1, n_2-\nu} (m_2 n + n_2 k - 1)]. \end{aligned}$$

Последовательность решения уравнений (4.9) будет определяться нумерационной функцией (2.10). Справедлива

**Лемма 4.1.** Пусть начальные условия (1.2) для уравнения КдФ представимы в виде сходящегося ряда

$$u_0(x) = \sum_{j > \frac{\nu}{\nu-1}|i|} h_{ij} P_1^i(x, 0) P_2^j(x, 0), \quad (4.10)$$

где  $h_{ij} = \text{const}$ ,  $P_1(x, t)$ ,  $P_2(x, t)$  удовлетворяют системе (4.8).

Тогда коэффициенты ряда (2.5), (4.7)  $u_{ij}(t) \equiv 0$  для  $0 \leq j \leq \frac{\nu}{\nu-1}|i|$ .

**Доказательство.** Покажем, что все решения системы (4.9) с начальными условиями  $u_{ij}(0) = h_{ij} = 0$  при  $0 \leq j \leq \frac{\nu}{\nu-1}|i|$  тождественно равны нулю, т.е. справедливы тождества

$$u_{ij}(t) \equiv 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq j \leq \frac{\nu}{\nu-1}|i|. \quad (4.11)$$

Для этого используем специфику системы (4.9), которая во многом определяется видом соотношений для обобщенных систем БФ (4.8). Решение системы (4.9) можно выписать в явном виде:

$$u_{ij}(t) = e^{-b_{ij}t} \left( h_{ij} + \int_0^t R_{ij}(\tau) e^{b_{ij}\tau} d\tau \right). \quad (4.12)$$

Из формулы (4.12) следует, что

$$u_{ij} = F_{ij}(h_{ij}, u_{i+\nu-1, j-\nu}, u_{i+2\nu-2, j-2\nu}, u_{i+3\nu-3, j-3\nu}, u_{m_1 n_1} u_{m_2 n_2}, u_{m_1 n_1} u_{m_2+\nu-1, n_2-\nu}), \quad (4.13)$$

где индексы  $m_1 + m_2 = i$ ,  $n_1 + n_2 = j$  и  $F_{ij}(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$ .

Рассмотрим  $u_{i_0 j_0}$ , для индексов которого справедливо неравенство

$$j_0 \leq \frac{\nu}{\nu-1}|i_0|, \quad (4.14)$$

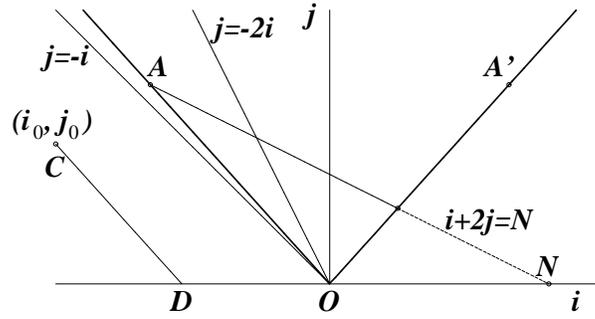
и  $h_{i_0 j_0} = 0$ . Для определенности будем считать, что  $i_0 < 0$ . Через точку  $C$  с координатами  $(i_0, j_0)$  проведем прямую  $CD$

$$j = -\frac{\nu}{\nu-1}i + \left( j_0 + \frac{\nu}{\nu-1}i_0 \right), \quad (4.15)$$

параллельную прямой  $OA$ , ограничивающую область  $AOA' G_\nu = \{(i, j): j > \frac{\nu}{\nu-1}|i|\}$ , внутри которой имеются начальные данные  $h_{ij} \neq 0$ , а значит, и коэффициенты  $u_{ij}(t) \neq 0$  (см. рисунок). Заметим, что все коэффициенты, входящие в функцию (4.13) линейным образом, лежат на прямой  $CD$  (4.15). Действительно, если подставить коэффициенты  $u_{i_0+\nu-1, j_0-\nu}$ ,  $u_{i_0+2\nu-2, j_0-2\nu}$ ,  $u_{i_0+3\nu-3, j_0-3\nu}$  в уравнение (4.15), то получим тождества. Проверим это, например, для коэффициента  $u_{i_0+\nu-1, j_0-\nu}$ :

$$j_0 - \nu = -\frac{\nu}{\nu-1}(i_0 + \nu - 1) + \left( j_0 + \frac{\nu}{\nu-1}i_0 \right) = j_0 - \nu,$$

т.е. имеет место тождество. Теперь нетрудно показать, что поскольку прямая (4.15) не пересекает область  $G_\nu$  — область ненулевых начальных данных для уравнений (4.9), то и сам коэффициент  $u_{i_0 j_0}(t) \equiv 0$ , если установить, что функция (4.13) не содержит коэффициентов, входящих в нее нелинейным образом и принадлежащих  $G_\nu$ .



Пусть коэффициенты  $u_{m_1 n_1}, u_{m_1 n_2} \in G_\nu$  и справедливы равенства  $m_1 + m_2 = i_0, n_1 + n_2 = j_0$ . При этом для индексов справедливы неравенства

$$n_1 > \frac{\nu}{\nu-1}|m_1|, \quad n_2 > \frac{\nu}{\nu-1}|m_2|,$$

складывая которые получим

$$n_1 + n_2 = j_0 > \frac{\nu}{\nu-1}(|m_1| + |m_2|) \geq \frac{\nu}{\nu-1}(|m_1 + m_2|) = \frac{\nu}{\nu-1}|i_0|.$$

Следовательно, мы получили  $j_0 > |i_0|$ , что противоречит неравенству (4.14). Аналогично получается противоречие и для последней пары коэффициентов  $u_{m_1 n_1} u_{m_2 + \nu - 1, n_2 - \nu}$ , входящих в (4.13).

Таким образом, доказано, что коэффициент  $u_{i_0 j_0}$  определяется через коэффициенты, равные нулю, т.е. имеет место

$$u_{i_0 j_0}(t) = F_{i_0 j_0}(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0.$$

Следовательно, доказано тождество (4.11). Лемма 4.1 доказана.

Из леммы 4.1 следует, что решение задачи Коши (2.9) для уравнения КдФ может быть представлено в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{j > \frac{\nu}{\nu-1}|i|} u_{ij}(t) P_1^i(x, t) P_2^j(x, t). \quad (4.16)$$

Поскольку все приведенные выше рассуждения справедливы не только для уравнения КдФ, но и для более общих уравнений, то сформулируем теорему о сходимости ряда (4.16) для уравнения (4.1).

Справедлива

**Теорема 3.** Пусть выполнены следующие условия:

1. Для постоянных  $h_{ij}$ , определяющих начальные данные (1.2), (2.9), справедливы неравенства

$$|h_{ij}| \leq \frac{H_0}{|i_0|^{2r+1} j^{2r+1}}, \quad H_0 > 0, \quad j > \frac{\nu}{\nu-1}|i|, \quad i_0 = \begin{cases} i, & i \neq 0, \\ 1, & i = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

2.  $\gamma < 0$ .

3. В качестве функции  $f(t)$  положим

$$f(t) = \varepsilon_r(F, 2, 2)e^{\nu\gamma t}. \quad (4.18)$$

Тогда решение задачи Коши (1.2), (2.9) для уравнения (4.1) представимо в виде ряда (4.16) по степеням обобщенных систем БФ (4.7), сходящегося в области  $\nu|\gamma|t - (n + k\nu)x \geq 0$ .

**Доказательство.** Методом математической индукции доказываются неравенства

$$|u_{ij}(t)| \leq \frac{Me^{\gamma jt}}{|i_0|^{2r+1}j^{2r+1}}, \quad t \geq 0, \quad M > 0, \quad (4.19)$$

которые устанавливаются после сведения условий этой теоремы к условиям теоремы 2 за счет выбора функции  $f(t)$  вида (4.18). В этом случае сохраняются все обозначения, принятые в теореме 2. Уравнения для нахождения коэффициентов  $u_{ij}$  (4.9) имеют вид, аналогичный уравнениям для коэффициентов  $g_n(t)$ , полученных для кратных специальных рядов по положительным степеням БФ. Принципиально отличается только порядок нахождения коэффициентов: для ряда (4.16), (4.7) по степеням обобщенных систем БФ порядок вычисления коэффициентов задает нумерационная функция (2.10), т.е. все коэффициенты, индексы которых лежат ниже прямой  $AN$  (см. рисунок) и принадлежат области  $G_\nu$ , находятся последовательно согласно нумерационной функции (2.10).

Условия 1 и 2 теоремы 2 в нашем случае выполняются, а условие 3 (4.6) может быть выполнено за счет выбора параметра  $\varepsilon_r(F, 2, 2)$  в условии (4.18). Напомним, что в БФ (4.7)  $\varepsilon = \varepsilon_r(F, 2, 2) = \varepsilon_r(F, N, m)$ , при  $N = 2$  (число членов в правой части уравнений для БФ) и  $m = 2$  (число БФ). Выбор постоянной  $M$  и оценки (4.19) доказываются аналогично тому, как это сделано в теореме 2. При проведении оценок используется явный вид для представления коэффициентов  $u_{ij}(t)$  в виде (4.12) с постоянными  $h_{ij}$ , удовлетворяющими условию (4.17).

После доказательства неравенств (4.19) нетрудно установить область сходимости ряда (4.16), (4.7). Действительно, при  $x < 0$  сходимость ряда очевидна. При  $x \geq 0$  справедливы цепочки неравенств

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \sum_{j > \frac{\nu}{\nu-1}|i|} |u_{ij}(t)| P_1^i(x, t) P_2^j(x, t) \leq 2M \sum_{j > \frac{\nu}{\nu-1}|i|} |e^{j(kx+\gamma t)}| P_1^{-|i|}(x, t) P_2^j(x, t) \\ &\leq \frac{2M}{e^{-nx} + \varepsilon e^{\nu(kx+\gamma t)}} \sum_{j > \frac{\nu}{\nu-1}|i|} \frac{e^{j(kx+\gamma t)}}{[e^{-nx} + \varepsilon e^{\nu(kx+\gamma t)}]^{\frac{j}{\nu}}} \leq \frac{2M}{e^{-nx} + \varepsilon e^{\nu(kx+\gamma t)}} \sum_{j > \frac{\nu}{\nu-1}|i|} \frac{1}{[e^{-nx-\nu kx-\nu\gamma t} + \varepsilon]^{\frac{j}{\nu}}}. \end{aligned}$$

Следовательно, в области  $\nu|\gamma|t - (n + k\nu)x \geq 0$  справедливо неравенство

$$|u(x, t)| \leq \frac{M_0}{e^{-nx} + \varepsilon e^{\nu(kx+\gamma t)}}, \quad M_0 > 0.$$

Аналогично доказывается и сходимость рядов для соответствующих частных производных, т.е. ряд (4.16) по степеням обобщенных систем БФ (4.7) является решением задачи Коши (1.2), (2.9) в указанной полуограниченной области, расширяющейся со временем.

Таким образом, теорема 3 доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Courant R., Hilbert D.** Methods of mathematical physics. First English edition, NY: Wiley-Interscience, 1962. Vol. 2.
2. **Duff G.F.** Mixed problems for linear system of first order equations // Canadian J. of Mathematics. 1958. Vol. 10, no. 1. P. 127–160.

3. **Ludwig D.** Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem // *Comm. Pure & Appl. Math.* 1960. Vol. 13, № 3. P. 473–508.
4. **Бабич В.М.** Об элементарных решениях гиперболических уравнений // *Докл. АН СССР.* 1959. Т. 219, № 3. С. 478–481.
5. **Дородницын А.А.** Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа // *Сборник теоретических работ по аэродинамике.* М.: Оборонгиз, 1957. С. 77–88.
6. **Сидоров А.Ф.** О некоторых представлениях решений квазилинейных гиперболических уравнений // *Численные методы механики сплошной среды.* Новосибирск, 1975. Т. 6, № 4. С. 106–115.
7. **Баутин С.П.** Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // *Дифференц. уравнения.* 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.
8. **Тешуков В.М.** Пространственная задача о распространении контактного разрыва в идеальном газе // *Динамика сплошной среды.* 1977. Вып. 32. С. 82–94.
9. **Коковихина О.В., Сидоров А.Ф.** Специальные конструкции рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными // *Численные методы механики сплошной среды.* Новосибирск, 1984. Т. 15, № 3. С. 72–84.
10. **Вершинин С.В., Сидоров А.Ф.** О поведении решений уравнений двойных волн в окрестности области покоя // *Прикладная математика и механика.* 1974. Т. 39, вып. 6. С. 1043–1050.
11. **Титов С.С.** Пространственно-периодические решения полной системы Навье–Стокса // *Докл. РАН.* 1999. Т. 365, № 6. С. 761–763.
12. **Титов С.С.** Решение уравнений с особенностями в аналитических шкалах банаховых пространств: Препринт / УрГАХА. Екатеринбург, 1999. 264 с.
13. **Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F.** Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series // *Russian J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling.* 1993. Vol. 8, no. 2. P. 101–125.
14. **Vaganova N.A.** Constructing New Classes of Solutions of Nonlinear Filtration Equation by Special Consistent Series // *Proc. of Steklov Inst. of Math.* 2003. Suppl. 2. P. S182–S193.
15. **Титов С.С., Курмаева К.В.** Обобщение аналитических решений Л.В. Овсянникова для трансзвуковых течений // *Прикл. механика и техн. физика.* 2005. Т. 46, № 6. С. 14–25.
16. **Титов С.С., Курмаева К.В.** Аналитическое построение ближнего поля трансзвукового течения около тонкого тела вращения // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2005. Т. 8, № 3(23). С. 93–101.
17. **Filimonov M.Yu.** Application of the Method of Special Series in Nonlinear Mathematical Physics // *Proc. of the Steklov Inst. of Math.* 2004. Suppl. 1. P. S58–S77.
18. **Титов С.С.** Разложение решений нелинейных уравнений в двойные ряды // *Дифференц. уравнения.* 1978. Т. 14, № 10. С. 1844–1850.
19. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
20. **Филимонов М.Ю.** Применение обобщенных базисных функций и кратных рядов для разложения решений нелинейных уравнений // *Численные и аналитические методы моделирования в механике сплошной среды: Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* Свердловск, 1989. С. 76–85.

Поступила 23.03.2007

УДК 517.9

## КЛАССИФИКАЦИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА<sup>1</sup>

С. В. Хабиров

Решается задача групповой классификации нелинейной гиперболической системы дифференциальных уравнений. Допускаемая непрерывная группа преобразований имеет алгебру Ли размерности меньше 5. С помощью преобразований эквивалентности нелинейные системы классифицируются по известным структурам алгебр Ли размерности 3 и 4.

### Введение

Нелинейное волновое уравнение вида

$$u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x)$$

контактным преобразованием приводится к системе уравнений [1]

$$v_t = a(x, v)w_x, \quad w_t = b(x, v)v_x. \quad (0.1)$$

Мы рассматриваем нелинейные гиперболические системы  $ab > 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $a_v^2 + b_v^2 \neq 0$ ,  $a_x^2 + b_x^2 \neq 0$ . Систему можно записать в характеристической форме:

$$C_+ : \frac{dx}{dt} = \sqrt{ab}, \quad D_+v - \sqrt{ab^{-1}}D_+w = 0; \quad C_- : \frac{dx}{dt} = -\sqrt{ab}, \quad D_-v + \sqrt{ab^{-1}}D_-w = 0.$$

Преобразования эквивалентности системы (0.1) вычислены в [1]. Они образуют бесконечную группу с произволом в две функции одного аргумента. Для групповой классификации [2] системы (0.1) вычислены инварианты производной алгебры Ли группы эквивалентности. Два инварианта первого порядка играют важную роль при доказательстве конечной размерности допускаемой алгебры. Размерность допускаемой алгебры не превосходит 4.

В работе [1] приведен пример необходимых условий на коэффициенты  $a$ ,  $b$ , при выполнении которых система допускает конечнопараметрическую группу преобразований. Эти условия переопределенные и сильно нелинейные. Совместность условий не изучалась ввиду сложности задачи. В настоящей статье эта задача полностью решена с помощью оригинального метода, а именно используется свойство определяющих уравнений алгебры вместе с двумя решениями иметь решением коммутатор.

После того как доказано, что размерность допускаемой алгебры меньше 5, для перечисления различных нелинейных систем (0.1) можно воспользоваться известной классификацией Бианки 3-мерных алгебр Ли и классификацией Г.И. Кручковича 4-мерных алгебр Ли [3]. В результате получился список из 14 неэквивалентных случаев нелинейных систем уравнений с допускаемыми конечномерными алгебрами Ли.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 05-01-00080-а, 05-01-00775-а) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5245.2006.1).

## 1. Преобразования эквивалентности гиперболической системы уравнений

Замена переменных  $t, x, v, w$  системы (0.1) может не изменить вид системы, но лишь преобразовать коэффициенты  $a, b$ . Такие замены называются преобразованиями эквивалентности. Ясно, что они образуют группу. Непрерывная часть этой группы, зависящая от параметров, образует группу Ли, алгебра Ли которой находится по известному алгоритму [2, §6, п.4].

**Теорема 1.** Алгебра Ли  $L$  преобразований эквивалентности задается операторами

$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_w, \quad E_3 = t\partial_t - a\partial_a - b\partial_b, \quad E_4 = w\partial_w - a\partial_a + b\partial_b,$$

$$\langle \eta \rangle_1 = \eta(x)\partial_x + \eta'(x)(a\partial_a + b\partial_b), \quad \langle \zeta \rangle_1 = \zeta(v)\partial_v + \zeta'(v)(a\partial_a - b\partial_b).$$

Ненулевые коммутаторы [2, §7] операторов из теоремы 1 таковы:  $[E_1, E_3] = E_1$ ,  $[E_2, E_4] = E_2$ ,  $[\langle \eta \rangle_1, \langle \eta \rangle_2] = \langle \eta_1\eta_2' - \eta_2\eta_1' \rangle_1$ ,  $[\langle \zeta \rangle_1, \langle \zeta \rangle_2] = \langle \zeta_1\zeta_2' - \zeta_2\zeta_1' \rangle_2$ . Отсюда видно, что бесконечное векторное пространство, порожденное операторами  $E_i, i = 1, 2, 3, 4, \langle \eta \rangle_1, \langle \zeta \rangle_2$ , является бесконечной алгеброй Ли  $L$ . Алгебра  $L$  разбивается в полупрямую сумму  $L = J \oplus L_2$  производной алгебры Ли  $L^{(1)} = J = \{\langle \eta \rangle_1\} \oplus \{\langle \zeta \rangle_2\} \oplus \{E_1, E_2\}$  и абелевой подалгебры  $L_2 = \{E_3, E_4\}$ .

**Теорема 2.** Инварианты первого порядка идеала  $J$  задаются выражениями

$$i = \sqrt{ab} \left( \frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b} \right), \quad j = \sqrt{ab^{-1}} \left( \frac{a_v}{a} + \frac{b_v}{b} \right).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Продолжим операторы идеала  $J$  на первые производные [2, §4]. Операторы  $E_1, E_2$  не продолжаются

$$\langle \tilde{\eta} \rangle_1 = \eta\partial_x + \eta'(a\partial_a + b\partial_b + a_v\partial_{a_v} + b_v\partial_{b_v}) + \eta''(a\partial_{a_x} + b\partial_{b_x}),$$

$$\langle \tilde{\zeta} \rangle_2 = \zeta\partial_v + \zeta'(a\partial_a - b\partial_b + a_x\partial_{a_x} - b_x\partial_{b_x} - 2b_v\partial_{b_v}) + \zeta''(a\partial_{a_v} - b\partial_{b_v}).$$

Инвариант есть функция  $I$ , которая анулируется продолженными операторами. Так как  $\eta(x), \zeta(v)$  – произвольные функции, то, приравнявая нулю коэффициенты при производных этих функций, получим переопределенную систему линейных однородных уравнений

$$I_x = I_v = 0, \quad aI_a + bI_b + a_vI_{a_v} + b_vI_{b_v} = 0,$$

$$aI_a - bI_b + a_xI_{a_x} - b_xI_{b_x} - 2b_vI_{b_v} = 0, \quad aI_{a_x} + bI_{b_x} = 0, \quad aI_{a_v} - bI_{b_v} = 0.$$

Общее решение есть произвольная функция инвариантов  $i, j$  из формулировки теоремы.

Конечные преобразования, отвечающие операторам из теоремы 1, получаются решением уравнений Ли [2, §2, п.3] и обозначаются так же, как их операторы. Преобразования инвариантных величин не записаны для  $E_k$ .

$$E_1 : \bar{t} = t + a_1;$$

$$E_2 : \bar{w} = w + a_2;$$

$$E_3 : \bar{t} = ta_3, \bar{b} = ba_3^{-1}, \bar{a} = aa_3^{-1};$$

$$E_4 : \bar{w} = wa_4, \bar{b} = ba_4, \bar{a} = aa_4^{-1};$$

$$\langle \eta \rangle_1 : \bar{x} = f(x), \bar{v} = v, \bar{a}(\bar{x}, \bar{v}) = a(x, v)f'(x), \bar{b}(\bar{x}, \bar{v}) = b(x, v)f'(x);$$

$$\langle \zeta \rangle_2 : \bar{x} = x, \bar{v} = g(v), \bar{a}(\bar{x}, \bar{v}) = a(x, v)g'(v), \bar{b}(\bar{x}, \bar{v}) = b(x, v)(g'(v))^{-1}.$$

Здесь  $a_k$  – параметры однопараметрических подгрупп;  $f(x), g(v)$  – функциональные параметры бесконечнопараметрических подгрупп.

Замечены дискретные преобразования эквивалентности системы (0.1).

Преобразования годографа:

$$\bar{t} = w, \quad \bar{x} = v, \quad \bar{v} = x, \quad \bar{w} = t, \quad \bar{a}(\bar{x}, \bar{v}) = a(x, v), \quad \bar{b}(\bar{x}, \bar{v}) = (b(x, v))^{-1}$$

и инверсии:

$$(1) \bar{t} = -t, \bar{a} = -a, \bar{b} = -b; \quad (2) \bar{v} = -v, \bar{a} = -a, \bar{b} = -b,$$

$$(3) \bar{x} = -x, \bar{a} = -a, \bar{b} = -b; \quad (4) \bar{w} = -w, \bar{a} = -a, \bar{b} = -b.$$

**Лемма 1.** *Инварианты преобразуются по правилу: для годографа  $\bar{i} = j$ ,  $\bar{j} = i$ ; для инверсии (2)  $\bar{i} = i$ ,  $\bar{j} = -j$ ; для инверсии (3)  $\bar{i} = -i$ ,  $\bar{j} = j$ .*

**Доказательство.** Формулы для годографа дифференцируем по  $x$  и  $v$ :

$$\bar{a}_{\bar{v}} = a_x, \quad \bar{a}_{\bar{x}} = a_v, \quad \bar{b}_{\bar{v}} = -b^{-2}b_x, \quad \bar{b}_{\bar{x}} = -b^{-2}b_v.$$

Отсюда получим

$$\bar{i} = \sqrt{\bar{a}\bar{b}}(\bar{a}^{-1}\bar{a}_{\bar{x}} - \bar{b}^{-1}\bar{b}_{\bar{x}}) = \sqrt{ab^{-1}}(a^{-1}a_v + b^{-1}b_v) = j,$$

$$\bar{j} = \sqrt{\bar{a}\bar{b}^{-1}}(\bar{a}^{-1}\bar{a}_{\bar{v}} + \bar{b}^{-1}\bar{b}_{\bar{v}}) = \sqrt{ab}(a^{-1}a_x - b^{-1}b_x) = i.$$

Для отражений (2) и (3) преобразование очевидно.

## 2. Определяющие уравнения алгебры Ли

Оператор, допускаемый системой (0.1), разыскивается в виде

$$X = \xi(t, x, v, w)\partial_t + \eta(t, x, v, w)\partial_x + \zeta(t, x, v, w)\partial_v + \chi(t, x, v, w)\partial_w.$$

Условия инвариантности многообразия (0.1) записываются с помощью продолжения  $X$  на производные

$$\begin{aligned} \tilde{X} = X &+ (D_t\zeta - v_tD_t\xi - v_xD_t\eta)\partial_{v_t} + (D_x\zeta - v_tD_x\xi - v_xD_x\eta)\partial_{v_x} \\ &+ (D_t\chi - w_tD_t\xi - w_xD_t\eta)\partial_{w_t} + (D_x\chi - w_tD_x\xi - w_xD_x\eta)\partial_{w_x}. \end{aligned}$$

Для этого действуем оператором  $\tilde{X}$  на каждое уравнение системы (0.1) в силу уравнений системы (0.1). Полученные тождества расщепляем по независимым производным  $w_x$ ,  $v_x$ , которые являются свободными параметрами в тождествах. Получаем определяющую систему уравнений

$$\begin{aligned} \eta_w = a\xi_v, \quad \eta_v = b\xi_w, \quad \zeta_t = a\chi_x, \quad \chi_t = b\zeta_x, \quad b\zeta_w = a\chi_v, \quad \eta_t = ab\xi_x, \\ 2\eta_x - 2\zeta_t = \left(\frac{b_x}{b} + \frac{a_x}{a}\right)\eta + \left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta, \quad 2\chi_w - 2\zeta_v = \left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta + \left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right)\zeta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если функции  $a, b$  произвольны, то  $\xi=C_{01}$ ,  $\eta=0$ ,  $\zeta=0$ ,  $\chi=C_{02}$ , где  $C_{0k}$ ,  $k=1, 2$ , — постоянные. Получаем операторы  $X_k = E_k$ ,  $k = 1, 2$ , которые образуют ядро допускаемых алгебр.

Из 8 уравнений (2.1) можно найти все производные функций  $\chi$  и  $\xi$ . Перекрестное дифференцирование дает 12 уравнений совместности:

$$2\left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\eta_t + b\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta_w + b\left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta_w = 0, \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta_t + 2b\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\zeta_w + \left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta_t = 0, \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b}\right) \eta_v + \left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)_x \eta + \left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right) \zeta_v + \left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)_v \zeta = 0, \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right) \eta_x + \left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)_x \eta - \left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right) \zeta_x + \left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)_v \zeta = 0, \quad (2.5)$$

$$2\eta_{tt} = 2ab\eta_{xx} - (ab)_x\eta_x - (ab)_v\zeta_x - ab\left(\frac{a_x}{a} + \frac{b_x}{b}\right)_x \eta - ab\left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)_x \zeta, \quad (2.6)$$

$$\eta_{tv} = b\eta_{xw} + \left(\frac{a_v}{a} + \frac{b_v}{b}\right) \eta_t - b\frac{a_x}{a}\eta_w, \quad (2.7)$$

$$\eta_{tw} = a\eta_{xv} - a\frac{b_x}{b}\eta_v, \quad (2.8)$$

$$\eta_{vv} = \frac{b}{a}\eta_{ww} + \frac{b_v}{b}\eta_v, \quad (2.9)$$

$$\zeta_{tt} = ab\zeta_{xx} + ab_x\zeta_x, \quad (2.10)$$

$$\zeta_{tw} = a\zeta_{xv} + a\frac{b_v}{b}\zeta_x, \quad (2.11)$$

$$\zeta_{tv} = b\zeta_{xw} + b\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right) \zeta_w + \frac{a_v}{a}\zeta_t, \quad (2.12)$$

$$2\zeta_{ww} = 2\frac{a}{b}\zeta_{vv} + \frac{a}{b}\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right) \eta_v + \frac{a}{b}\left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right) \zeta_v + \frac{a}{b}\left(\frac{b_x}{b} + \frac{a_x}{a}\right)_v \eta + \frac{a}{b}\left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right)_v \zeta. \quad (2.13)$$

**Теорема 3.** Система определяющих уравнений (2.2)–(2.13) не порождает новых уравнений.

Тогда говорят, что система находится в инволюции [4].

Для доказательства проверяется, что все дифференциальные следствия уравнений 1-го порядка (2.2)–(2.5) есть тождества. Далее из (2.6)–(2.13) находим смешанные производные функций  $\eta$  и  $\zeta$  3-го порядка. Их сравнение приводит к тождествам.

Уравнения (2.2), (2.3) — линейные однородные с постоянными коэффициентами, поэтому имеют общее решение:

$$\eta = -2^{-1}tI(h+g)_s + g, \quad b\zeta = 2^{-1}tI^2(h+g)_s + Ih, \quad (2.14)$$

где  $h(x, v, s)$ ,  $g(x, v, s)$  — произвольные функции,  $s = w + It$ ,  $I = ij^{-1}$ ,  $i, j$  — инварианты из теоремы 2.

Подстановка представления (2.14) с новыми независимыми переменными  $t, s, x, v$  в оставшиеся уравнения определяющей системы (2.4)–(2.13) дает уравнения, в которых переменная  $t$  свободная. Приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $t$ , получим расщепление определяющих уравнений. Из уравнений (2.4), (2.5) следуют равенства для  $a$  и  $b$ :

$$\left(\frac{a_v}{a} + \frac{b_v}{b}\right) I_x = I(\ln b)_{xv}, \quad \left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b}\right) I_v = I(\ln b)_{xv}. \quad (2.15)$$

При  $(g+h)_s \neq 0$  (при  $(g+h)_s = 0$  этих равенств нет), а также в любом случае справедливы уравнения для  $h$  и  $g$ :

$$\left[\left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b}\right)(g+h)\right]_x = 2b^{-1}I(\ln b)_{xv}h, \quad \left[\left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b}\right)(g+h)\right]_v = -2(\ln b)_{xv}g. \quad (2.16)$$

**Лемма 2.** Пусть  $I \neq \text{const}$ ,  $(\ln b)_{xv} \neq 0$ ,  $(g+h)_s \neq 0$ . Тогда  $\zeta, \eta$  — линейные функции по переменным  $t, w$ .

Доказательство. Коэффициент при  $t^3$  в (2.9), (2.10) дает равенства

$$II_x(g+h)_{sss} = 0, \quad II_v(g+h)_{sss} = 0. \quad (2.17)$$

Если  $I \neq \text{const}$ ,  $(\ln b)_{xv} \neq 0$ ,  $(g+h)_s \neq 0$ , то из (2.17), (2.16) следует, что  $g, h$  — многочлены 2-й степени по переменной  $s$ :

$$g+h = \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0, \quad h = \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0,$$

где  $\alpha_k, \beta_k, k = 0, 1, 2$ , — функции переменных  $x, v$ .

Коэффициенты при  $t^2$  в (2.9), (2.10) дают равенства

$$2\alpha_{2v} + (I_{vv}I_v^{-1} - b_v b^{-1})\alpha_2 + 2I_v I^{-1}\beta_2 = 0,$$

$$2\alpha_{2x} + (I_{xx}I_x^{-1} - b_x b^{-1} + 4I_x I^{-1})\alpha_2 + 2I_x I^{-1}\beta_2 = 0,$$

а из (2.8), (2.13) получим

$$\alpha_2 [I_x I_v^{-1} I_{vv} - 2I_{xv} + I_v I_x^{-1} I_{xx} - 4I^{-1} I_x I_v + b^{-1}(b_x I_v - b_v I_x)] = 0.$$

Используя эти равенства, из (2.6), (2.13) получим

$$I_x \alpha_2 = 0, \quad I_v \alpha_2 = 0.$$

Так как  $I \neq \text{const}$ , то  $\alpha_2 = 0$  и  $\beta_2 = 0$ . Значит, функции  $\eta, \zeta$  линейны по  $t, w$ .

### 3. Частные случаи

Пусть  $i = 0$ , тогда  $ab^{-1} = \beta(v)$ . Преобразование эквивалентности  $\langle \zeta \rangle_2$  делает  $\beta = 1$ . Если  $j = 0$ , то  $ab = \alpha(x)$ . Преобразование эквивалентности  $\langle \eta \rangle_1$  делает  $\alpha = 1$ , а годограф приводит к предыдущему случаю. Итак, если  $i = 0$  или  $j = 0$ , то система (0.1) эквивалентна случаю  $a = b$ .

#### 3.1. Случай $a = b$

Можно считать, что  $a_x \neq 0, a_v \neq 0, (\ln a)_{xv} \neq 0$ . Иначе система (0.1) эквивалентна линейной системе.

Из уравнений (2.3), (2.5) следует  $\zeta_t = \zeta_x = 0$ , а из (2.2) получим  $\eta = -2^{-1}ta\zeta_w + \eta_1(x, v, w)$ . Подстановка в уравнение (2.8) дает линейное равенство по переменной  $t$ , от которой функции  $\zeta, \eta_1$  не зависят. Приравняв нулю коэффициент при  $t$ , получим  $\zeta_w(\ln a)_{xv} = 0$ . Отсюда следует  $\zeta_w = 0$ . Из (2.13) получим  $\zeta = C_1 v + C_0$ , где  $C_k$  — постоянные. Из уравнения (2.4) определяем

$$\eta = -(\ln a)_{xv}^{-1} [C_1 (v(\ln a)_v)_v + C_0 (\ln a)_{vv}].$$

Уравнения (2.10)–(2.12) тождественно выполняются. Остальные уравнения (2.6), (2.8), (2.9) дают условия совместности для функции  $a$  и возможную линейную связь на постоянные  $C_0$  и  $C_1$ .

По решению системы (2.2)–(2.13) решение системы (2.1) определяется с точностью до двух аддитивных постоянных, которые задают ядро допускаемых алгебр. Общее решение линейно и однородно зависит от 4 или меньшего числа постоянных.

Таким образом, размерность допускаемой алгебры не превосходит 4.

#### 3.2. Случай $I_x = I_v = 0$

Преобразование эквивалентности  $E_3$  переводит постоянное значение  $I$  в единицу  $I = 1$ . Значит,  $i = j$  или

$$b(ba_x - ab_x) = ba_v + ab_v.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$a = \varphi_x^{-1} \varphi_v^{-1}, \quad b = \varphi_v \varphi_x^{-1},$$

где  $\varphi(x, v)$  — произвольная функция. В системе (0.1) с такими выражениями для  $a$  и  $b$  сделаем замену  $\bar{v} = \varphi(x, v)$ ,  $v = \sigma(x, \bar{v})$  — обратная функция,  $\bar{w} = w + t$ ; получим систему

$$\bar{v}_t = -\sigma_{\bar{v}} \sigma_x^{-1} \bar{w}_x, \quad \bar{w}_t = -\sigma_{\bar{v}} \sigma_x^{-1} \bar{v}_x$$

вида (0.1) с  $a = b$ . Мы приходим к случаю 3.1. Замена, использованная здесь, есть преобразование эквивалентности, отличное от рассмотренных в § 1. Изменение группы эквивалентности возможно для специальных соотношений между коэффициентами  $a$  и  $b$ .

### 3.3. С л у ч а й $(\ln b)_{xv} = 0$

В рассматриваемом случае  $b = \alpha(x)\beta(v)$ . Преобразованиями эквивалентности  $\langle \eta \rangle_1, \langle \zeta \rangle_2$  можно перевести  $b$  в единицу:  $b = 1$ .

Если  $(g + h)_s \neq 0$ , то из (2.15) следует  $I = I_0$  — постоянная. Получаем случай 3.2.

Пусть  $b = 1$ ,  $(g + h)_s = 0$ . Тогда из (2.14) следует  $\eta = g(x, v, s)$ ,  $\zeta = Ih(x, v, s)$ ,  $s = w + It$ ,  $I = a_x a_v^{-1}$ . Уравнения (2.4), (2.5) дают  $a_x \eta + a_v \zeta = a C_0$ , где  $C_0$  — постоянная.

Если  $I \neq \text{const}$ , то из (2.6), (2.7) следует  $g_{ss} = 0$ , а из (2.10), (2.11) следует  $g_s = 0$ . Уравнения (2.6)–(2.9) интегрируются  $\eta = C_1 x + C_2 v + C_3$ ,  $\zeta = C_0 a a_v^{-1} - I(C_1 x + C_2 v + C_3)$ .

Решение определяющих уравнений (2.1) зависит не более чем от 6 постоянных, учитывая ядро. Подстановка в (2.11) дает тождество, а из (2.9), (2.10), (2.12) получим классификационные соотношения:

$$\begin{aligned} C_1(2I_x + xI_{xx}) + C_2 v I_{xx} + C_3 I_{xx} + C_0[(a a_{xv} a_v^{-2})_v - I_x] &= 0, \\ C_1(I_v + xI_{xv}) + C_2(I_x + vI_{xv}) + C_3 I_{xv} + C_0[(a a_{xv} a_v^{-2})_v - I_v] &= 0, \\ C_1 x I_{vv} + C_2(2I_v + vI_{vv}) + C_3 I_{vv} + C_0(a a_{xv} a_v^{-2})_v &= 0. \end{aligned}$$

Постоянные  $C_k$  линейно зависимы, иначе  $I = \text{const}$ .

Размерность векторного пространства решений определяющих уравнений (2.1) равна 5, если все миноры 2-го порядка матрицы системы классификационных соотношений равны нулю. Вычисляя миноры 2-го порядка, получаем  $I_x = I_v = 0$  и возвращаемся к случаю 3.2. Алгебра нелинейных уравнений (0.1) имеет размерность не больше 4.

### 3.4. С л у ч а й $(g + h)_s = 0$ , $(\ln b)_{xv} \neq 0$ , $I \neq \text{const}$

Из (2.16) следует  $g_s = h_s = 0$ , т.е.  $\eta = \eta(x, v)$ ,  $\zeta = \zeta(x, v)$ . Из уравнений (2.1) получим

$$\xi = C_1 w + C_3 t + C_{01}, \quad \chi = C_2 t + C_4 w + C_{02}, \quad (3.1)$$

где  $C_{01}, C_{02}$  — постоянные ядра,  $C_k$  — постоянные векторного пространства решений системы (2.1);

$$\begin{aligned} \eta_v = C_1 b, \quad \zeta_x = C_2 b^{-1}; \\ 2\eta_x - 2C_3 = \left(\frac{a_x}{a} + \frac{b_x}{b}\right) \eta + \left(\frac{a_v}{a} + \frac{b_v}{b}\right) \zeta, \quad 2\zeta_v - 2C_4 = \left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b}\right) \eta + \left(\frac{a_v}{a} - \frac{b_v}{b}\right) \zeta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.2) выразим все производные функций  $\eta, \zeta$ . Условия совместности принимают вид

$$\eta j_x + \zeta j_v = -C_1 i - C_4 j, \quad \eta i_x + \zeta i_v = -C_3 i - C_2 j. \quad (3.3)$$

По теореме Фробениуса других условий совместности нет [2, §12, п.8].

Если определитель системы (3.3) не равен нулю  $\Delta = j_x i_v - i_x j_v \neq 0$ , то решение имеет вид

$$\eta = -\Delta^{-1} \begin{vmatrix} C_1 i + C_4 j & j_v \\ C_3 i + C_2 j & i_v \end{vmatrix}, \quad \zeta = \Delta^{-1} \begin{vmatrix} C_1 i + C_4 j & j_x \\ C_3 i + C_2 j & i_x \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Размерность векторного пространства решений определяющих уравнений (2.1) не больше 6.

Подстановка (3.4) в (3.2) дает 4 классификационных соотношения:

$$\begin{aligned}
& C_1 [(ii_v \Delta^{-1})_v + b] - C_2 (jj_v \Delta^{-1})_v - C_3 (ij_v \Delta^{-1})_v + C_4 (ji_v \Delta^{-1})_v = 0, \\
& C_1 (ii_x \Delta^{-1})_x - C_2 [(jj_x \Delta^{-1})_x + b^{-1}] - C_3 (ij_x \Delta^{-1})_x + C_4 (ji_x \Delta^{-1})_x = 0, \quad (3.5) \\
& C_1 [-2(ii_v \Delta^{-1})_x + (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})ii_v \Delta^{-1} - (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})ii_x \Delta^{-1}] \\
& + C_2 [2(jj_v \Delta^{-1})_x - (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})jj_v \Delta^{-1} + (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})jj_x \Delta^{-1}] \\
& + C_3 [-2 + 2(ij_v \Delta^{-1})_x - (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})ij_v \Delta^{-1} + (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})ij_x \Delta^{-1}] \\
& + C_4 [-2(ji_v \Delta^{-1})_x + (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})ji_v \Delta^{-1} - (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})ji_x \Delta^{-1}] = 0, \\
& C_1 [2(ii_x \Delta^{-1})_v + (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})ii_v \Delta^{-1} - (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})ii_x \Delta^{-1}] \\
& + C_2 [-2(jj_x \Delta^{-1})_v - (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})jj_v \Delta^{-1} + (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})jj_x \Delta^{-1}] \\
& + C_3 [-2(ij_x \Delta^{-1})_v - (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})ij_v \Delta^{-1} + (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})ij_x \Delta^{-1}] \\
& + C_4 [-2 + 2(ji_x \Delta^{-1})_v + (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})ji_v \Delta^{-1} - (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})ji_x \Delta^{-1}] = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим 2 оператора общего вида, исключая ядро,

$$X_k = (C_1^k w + C_3^k t) \partial_t + \eta^k \partial_x + \zeta^k \partial_v + (C_2^k t + C_4^k w) \partial_w, \quad k = 1, 2.$$

Коммутатор есть решение определяющих уравнений, значит, он есть оператор того же вида:

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] = & [w(C_1^1(C_3^2 - C_4^2) + C_1^2(C_4^1 - C_3^1)) + t(C_2^1 C_1^2 - C_2^2 C_1^1)] \partial_t + (\eta^1 \eta_x^2 + \zeta^1 \eta_v^2 - \eta^2 \eta_x^1 - \zeta^2 \eta_v^1) \partial_x \\
& + (\eta^1 \zeta_x^2 + \zeta^1 \zeta_v^2 - \eta^2 \zeta_x^1 - \zeta^2 \zeta_v^1) \partial_v + [w(C_1^1 C_2^2 - C_1^2 C_2^1) + t(C_2^2(C_3^1 - C_4^1) + C_2^1(C_4^2 - C_3^2))] \partial_w.
\end{aligned}$$

Если классификационные соотношения справедливы для произвольных  $C_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , то из (3.5) следуют равенства

$$\begin{aligned}
jj_v = \alpha_1(x) \Delta, \quad ij_v = \alpha_2(x) \Delta, \quad ji_v = \alpha_3(x) \Delta, \quad b + (ii_v \Delta^{-1})_v = 0; \\
ii_x = \beta_1(v) \Delta, \quad ij_x = \beta_2(x) \Delta, \quad ji_x = \beta_3(v) \Delta, \quad b^{-1} + (jj_x \Delta^{-1})_x = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\alpha_1 i = \alpha_2 j; \quad j \beta_1 = i \beta_3 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_3 = 0,$$

иначе  $I = \text{const}$ ,

$$i_x = 0, \quad j_v = 0, \quad \Delta = i_v j_x, \quad j = \alpha_3 j_x, \quad i = \beta_2 i_v, \quad b = -\frac{\alpha_3(x) i(v)}{j(x) \beta_2(v)}.$$

Значит, коэффициент  $b$  эквивалентен 1, что рассматривалось в случае 3.3.

Размерность алгебры меньше 6. Пусть  $C_4 = kC_1 + nC_2 + mC_3$ , где  $k, n, m$  — фиксированные постоянные,  $C_1, C_2, C_3$  — произвольные постоянные. Из (3.5) следует  $b = \varphi_v$ ,  $b^{-1} = \psi_x$ ,  $\varphi_v \psi_x = 1$ ,

$$\begin{aligned}
(i + kj)i_v = -\varphi \Delta, \quad j(ni_v - j_v) = \alpha_1(x) \Delta, \quad mji_v - ij_v = \alpha_2(x) \Delta, \\
(i + kj)i_x = \beta_1(v) \Delta, \quad j(ni_x - j_x) = \psi \Delta, \quad mji_x - ij_x = \beta_2(v) \Delta. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Операторы  $X_k$ , отвечающие постоянным  $C_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , таковы:

$$\begin{aligned} X_1 &= w\partial_t + \varphi\partial_x + \beta_1(v)\partial_v + kw\partial_w, & X_2 &= -\alpha_1(x)\partial_x + \psi\partial_v + (t + nw)\partial_w, \\ X_3 &= t\partial_t - \alpha_2(x)\partial_x + \beta_2(v)\partial_v + mw\partial_w. \end{aligned}$$

Вычисляя коммутаторы по формуле (3) и сравнивая коэффициенты при  $\partial_t$  и  $\partial_w$ , получим:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -X_3 - nX_1, & [X_1, X_3] &= (1 - m)X_1, & [X_2, X_3] &= (m - 1)X_2 \Rightarrow k = 0, m = -1, n = 0; \\ \psi\varphi_v - \alpha_1\varphi_x + \varphi\alpha'_1 &= -\alpha_2, & \varphi\psi_x + \beta_1\psi_v - \psi\beta'_1 &= -\beta_2, & \alpha_2\varphi_x - \beta_2\varphi_v - \varphi\alpha'_2 &= 2\varphi, \\ \beta_1\beta'_2 - \beta_2\beta'_1 &= 2\beta_1, & \alpha_1\alpha'_1 - \alpha_2\alpha'_1 &= 2\alpha_1, & \alpha_2\psi_x - \beta_2\psi_v + \psi\beta'_2 &= -2\psi_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Если  $\alpha_2 = 0$ , то  $\alpha_1 = 0$ ,  $\psi\varphi_v = 0$ ; противоречие с равенством  $\varphi_v\psi_x = 1$ . Если  $\beta_2 = 0$ , то  $\beta_1 = 0$ ,  $\varphi\psi_x = 0$ ; противоречие.

Значит,  $\alpha_2 \neq 0$ ,  $\beta_2 \neq 0$  и заменой  $\langle \eta \rangle_1$ ,  $\langle \zeta \rangle_2$  сделаем  $\alpha_2 = \beta_2 = 1$ . Из (3.7) получим  $\alpha_1 = A_1e^{-2x}$ ,  $\beta_1 = B_1e^{-2v}$ ,  $\varphi = e^{2x}\varphi_1(s)$ ,  $\psi = e^{2v}\psi_1(s)$ ,  $s = x + v$ ,

$$e^{2s}\psi_1\varphi'_1 - A_1(4\varphi_1 + \varphi'_1) + 1 = 0, \quad e^{2s}\varphi_1\psi'_1 + B_1(4\psi_1 + \psi'_1) + 1 = 0, \quad e^{2s}\varphi'_1\psi'_1 = 1, \quad (3.8)$$

где  $A_1, B_1$  — постоянные.

Равенства (3.6) принимают вид

$$\begin{aligned} i &= e^x i_1(s), & ij &= \lambda(s), & \Delta &= -\lambda' \neq 0, & i_1 i'_1 &= \varphi_1 \lambda', \\ i_1(i_1 + i'_1) &= -B_1 e^{-2s} \lambda', & \lambda i_1^{-1}(\lambda i_1^{-1})' &= A_1 \lambda', & \lambda i_1^{-1}(-\lambda i_1^{-1} + (\lambda i_1^{-1})') &= e^{2s} \psi_1 \lambda'. \end{aligned}$$

Отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (A_1 + J_0\lambda^{-1})(2A_1 + J_0\lambda^{-1})^{-2}, & \psi_1 &= (2A_1 + J_0\lambda^{-1})[B_1(2A_1 + J_0\lambda^{-1})e^{-4s} + e^{-2s}], \\ \lambda i_1^{-2} &= 2A_1 + J_0\lambda^{-1}, & \lambda' &= \frac{-\lambda(2A_1 + J_0\lambda^{-1})}{A_1 + J_0\lambda^{-1} + B_1e^{-2s}(2A_1 + J_0\lambda^{-1})^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если  $A_1 = 0$ , то из (3.9) следует

$$\begin{aligned} J_0 i_1^2 &= \lambda^2, & J_0 > 0, & \varphi_1 = J_0^{-1}\lambda, & \psi_1 &= J_0\lambda^{-2}e^{-2s}(\lambda + B_1J_0e^{-2s}), \\ \lambda' &= -\lambda^2(\lambda + J_0B_1e^{-2s})^{-1} \Rightarrow J_0B_1e^{-2s}(T_0 - 2\lambda) = \lambda^2, \end{aligned}$$

а из (3.8) получим  $\lambda(T_0 - \lambda)(T_0 - 2\lambda) + T_0^2 = 0$ . Значит,  $\lambda = \text{const}$ ; противоречие.

Пусть  $A_1 \neq 0$ , тогда переносом по  $x$  сделаем  $A_1 = 1$ .

Если  $A_1 = 1$ ,  $B_1 = 0$ , то  $i_1 = e^{-s}$ ,  $\psi_1 = \lambda$ ,  $\varphi_1 = \lambda(\lambda + J_0)(2\lambda + J_0)^{-2}$ ,  $\lambda^2 e^{2s} = 2\lambda + J_0$ ,  $\lambda' = -\lambda(2\lambda + J_0)(\lambda + J_0)^{-1}$ . Из (3.8) следует

$$(2\lambda + J_0)^3 = 4\lambda(\lambda + J_0) + (\lambda + J_0)^2 \Rightarrow \lambda = \text{const};$$

противоречие.

Значит,  $B_1 \neq 0$  и переносом по  $v$  сделаем  $B_1 = 1$ . Равенства (3.9) принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 i_1^{-2} &= 2\lambda + J_0, & \varphi_1 &= \lambda(\lambda + J_0)(T_0 - 2\lambda)^{-2}, \\ \lambda^2 e^{2s} &= (2\lambda - J_0)(T_0 - 2\lambda), & \psi_1 &= \lambda(T_0 - \lambda)(T_0 - 2\lambda)^{-2}. \end{aligned}$$

Из (3.8) получим

$$T_0 = J_0, \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 e^{2s} + (2\lambda - J_0)^2 = 0,$$

и нет действительных решений.

Итак, постоянная  $C_4$  линейно не выражается через  $C_1, C_2, C_3$ . Значит, она независимая, и возможно  $C_3 = kC_1 + nC_2$ . Из классификационных соотношений (3.5) получим

$$\begin{aligned} i(i - kj)_v + \varphi\Delta = 0, \quad (ni + j)j_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_2(x)\Delta, \\ i(i - kj)_x = \beta_1\Delta, \quad (j + ni)j_x + \psi\Delta = 0, \quad ji_x = \beta_2(v)\Delta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

С помощью (3.10), (3.1) и (3.4) операторы, отвечающие постоянным  $C_1, C_2, C_4$ , принимают вид

$$X_1 = (w + kt)\partial_t + \varphi\partial_x + \beta_1(v)\partial_v, \quad X_2 = nt\partial_t + \alpha_1(x)\partial_x + \psi\partial_v + t\partial_w, \quad X_3 = -\alpha_2(x)\partial_x + \beta_2(v)\partial_v + w\partial_w.$$

Вычисляя коммутатор и сравнивая коэффициенты при  $\partial_t$  и  $\partial_w$ , получим

$$[X_1, X_2] = X_3 + kX_2 \Rightarrow nw - t = knt;$$

противоречие.

Постоянные  $C_4, C_3$  — независимы,  $C_2 = kC_1$ . Из (3.5) получим

$$\begin{aligned} ii_v - kjj_v + \varphi\Delta = 0, \quad ij_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_2(x)\Delta, \\ ii_x - kjj_x = \psi\Delta, \quad ij_x = \beta_1(v)\Delta, \quad ji_x = \beta_2(v)\Delta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Операторы алгебры без ядра отвечают постоянным  $C_1, C_3, C_4$ :

$$X_1 = w\partial_t + \varphi\partial_x + \psi\partial_v + kt\partial_w, \quad X_2 = t\partial_t + \alpha_1\partial_x - \beta_1\partial_v, \quad X_3 = -\alpha_2\partial_x + \beta_2\partial_v + w\partial_w.$$

Вычислим коммутаторы:

$$[X_1, X_2] = X_1 \Rightarrow k = 0, \quad [X_1, X_3] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Отсюда следуют соотношения:

$$\begin{aligned} -\alpha_1\varphi_x + \beta_1\varphi_v + \varphi\alpha'_1 = \varphi, \quad -\alpha_1\psi_x + \beta_1\psi_v - \psi\beta'_1 = \psi, \quad \alpha_2\varphi_x - \beta_2\varphi_v - \varphi\alpha'_2 = -\varphi, \\ \alpha_2\psi_x - \beta_2\psi_v + \psi\beta'_2 = -\psi, \quad \alpha_1\alpha'_2 = \alpha_2\alpha'_1, \quad \beta_1\beta'_2 = \beta_2\beta'_1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Если  $\alpha_1 = 0$ , то  $\alpha_2 \neq 0$  (иначе  $\Delta = 0$ ), и эквивалентность по  $x$  делает  $\alpha_2 = 1$ . Тогда  $\beta_1 \neq 0$  (иначе  $\varphi = 0 \Rightarrow b = 0$ ), и эквивалентность по  $v$  делает  $\beta_1 = 1$ . Отсюда получим  $\varphi = e^v\varphi_1(x) = b$  (случай 3.3).

Значит,  $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = A \neq 0$  — постоянная (иначе  $\Delta = 0$ ),  $\beta_1 \neq 0 \Rightarrow \beta_1 = 1$  (иначе следует случай 3.3),  $\beta_2 = B \neq 0$  — постоянная. Из (3.12) получим:

$$\varphi = e^{-x}\varphi_1(s), \quad \psi = e^{-x}\psi_1(s), \quad s = x + v,$$

$$(A - B)\varphi'_1 = (A - 1)\varphi_1, \quad (A - B)\psi'_1 = (A - 1)\psi_1.$$

Если  $A \neq B$ , то  $\varphi_1 = \Phi_1 e^{Ks}, \psi_1 = \Psi_1 e^{Ks}, K = (A - 1)(A - B)^{-1}$  и  $\varphi$  есть произведение двух функций: одна зависит от  $x$ , другая зависит от  $v$ . Приходим к случаю 3.3.

Следовательно,  $A = B = 1$ . Из (3.11) следует  $\Delta = ij_v = ji_v = ij_x = ji_x \Rightarrow i = i_1(s), j = j_1(s) \Rightarrow \Delta = 0$ ; противоречие.

Остается случай  $C_1 = 0, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные. Из соотношений (3.5) получим:

$$\begin{aligned} jj_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ij_v = \alpha_2(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_3(x)\Delta, \\ jj_x + \psi\Delta = 0, \quad ij_x = \beta_1(v)\Delta, \quad ji_x = \beta_2(v)\Delta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Операторы без ядра имеют вид

$$X_1 = \alpha_1\partial_x - \psi\partial_v + t\partial_w, \quad X_2 = t\partial_t + \alpha_2\partial_x - \beta_1\partial_v, \quad X_3 = -\alpha_3\partial_x + \beta_2\partial_v + w\partial_w.$$

Коммутационные соотношения

$$[X_1, X_2] = -X_1, \quad [X_1, X_3] = X_1, \quad [X_2, X_3] = 0$$

дают уравнения

$$\begin{aligned} \alpha'_1 \alpha_2 - \alpha'_2 \alpha_1 &= \alpha_1, & \alpha_2 \psi_x - \beta_1 \psi_v + \psi \beta'_1 &= \psi, & \alpha'_1 \alpha_3 - \alpha'_3 \alpha_1 &= \alpha_1, \\ \alpha_3 \psi_x - \beta_2 \psi_v + \psi \beta'_2 &= \psi, & \alpha'_3 \alpha_2 &= \alpha'_2 \alpha_3, & \beta'_2 \beta_1 &= \beta'_1 \beta_2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Если  $j_v \neq 0$ , то  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 \neq 0$ , и замена  $x$  делает  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_3 = -x = \alpha_2$ ,  $i = -xj$ ,  $\Delta = jj_v$ ,  $j_x + \psi j_v = 0$ ,  $-xj_x = \beta_1 j_v \Rightarrow \psi = \beta_1(v)x^{-1}$ ,  $b^{-1} = -\beta_1(v)x^{-2}$ . Пришли к случаю 3.3.

Если  $j_v = 0$ , то из (3.13)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 \neq 0$ , и замена  $x$  делает  $\alpha_3 = 1$ ,  $\Delta = j_x i_v \neq 0$ ,  $j = j_x \Rightarrow j = e^x$ ; из (3.14)  $\beta_1 \neq 0$ , и замена  $v$  делает  $\beta_1 = 1 \Rightarrow \beta_2 = B$  — постоянная,  $\psi = e^{-v} \psi_1(x) \Rightarrow b^{-1} = e^{-v} \psi'_1(x)$ . Опять пришли к случаю 3.3.

При решении системы (3.3) предполагалось  $\Delta \neq 0$ . Рассмотрим случай  $\Delta = 0 \Rightarrow j = f(i)$ ,

$$\eta i_x + \zeta i_v = -C_2 f - C_3 i, \quad (3.15)$$

$$f'(C_2 f + C_3 i) = C_1 i + C_4 f. \quad (3.16)$$

Если в (3.16) величины  $C_k$  линейно независимы или линейно выражаются через 2 или 3 линейно независимые величины, то из (3.16) следуют 4, 3 или 2 уравнения, из которых, исключив  $f'$ , найдем  $I = \text{const}$  (случай 3.2).

Пусть  $C_l = k_l C$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ , где  $C$  — произвольный параметр,  $k_l$  — фиксированные постоянные. Из (3.2) находим  $\eta = k_1 C \varphi + \eta_1(x)$ ,  $\zeta = k_2 C \psi + \zeta_1(v)$ ,  $\varphi_v \psi_x = 1$ . Параметру  $C$  отвечает оператор  $X_0$ , другие операторы имеют вид  $X = \eta_1 \partial_x + \zeta_1 \partial_v$ . Множество  $\{X\}$  образует идеал  $J$ , который может быть бесконечным. Рассмотрим 2-мерную подалгебру в  $J$ . Если она абелева, то заменами  $\langle \eta(x) \rangle_1$ ,  $\langle \zeta(v) \rangle_2$  приведем ее к виду  $\{\partial_x, \partial_v\}$ . В этом случае из (3.15) следует  $i = \text{const} \Rightarrow j = \text{const}$ ,  $I = \text{const}$  (случай 3.2). Пусть 2-мерная подалгебра не абелева,

$$X_l = \eta_1^l(x) \partial_x + \zeta_1^l(v), \quad l = 1, 2, \quad [X_1, X_2] = X_1.$$

Отсюда следуют уравнения подалгебры:

$$\eta_1^1 \eta_1^{2'} - \eta_1^2 \eta_1^{1'} = \eta_1^1, \quad \zeta_1^1 \zeta_1^{2'} - \zeta_1^2 \zeta_1^{1'} = \zeta_1^1.$$

Если  $\eta_1^1 \neq 0$ , то заменой сделаем  $\eta_1^1 = 1$ , тогда  $\eta_1^2 = x$ . При этом если  $\zeta_1^1 \neq 0$ , то заменой сделаем  $\zeta_1^1 = 1$ ,  $\zeta_1^2 = v$ ; если  $\zeta_1^1 = 0$ ,  $\zeta_1^2 \neq 0$ , то заменой сделаем  $\zeta_1^2 = 1$ .

Из уравнений (3.15) получим условия совместности  $\eta_1^l i_x + \zeta_1^l i_v = 0$ ,  $l = 1, 2$ . Отсюда для двух случаев подалгебр  $\{\partial_x + \partial_v, x\partial_x + v\partial_v\}$  и  $\{\partial_x, x\partial_x + \partial_v\}$  получим  $i = \text{const}$  (случай 3.2).

Остается возможность  $\zeta_1 = 0$ . Чтобы допускаемая уравнениями (0.1) алгебра имела размерность больше 4, необходимо, чтобы идеал  $J$  был бесконечномерным.

Из (3.2) следует  $2\eta_1^1 = (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})\eta_1$ ,  $a_x a^{-1} = b_x b^{-1} \Rightarrow i = 0$  (случай 3.1).

В разобранных частных случаях допускаемая системой (0.1) алгебра имеет размерность меньше 5. Справедливо более сильное утверждение.

**Теорема 4.** *Размерность алгебры, допускаемой нелинейной системой (0.1), не превосходит 4.*

Для доказательства надо разобрать случай леммы 2.

Таким образом, если размерность допускаемой алгебры больше 4, то преобразованиями эквивалентности система (0.1) сводится к линейной.

#### 4. Системы, допускающие 3-мерные алгебры Ли

Для классификации систем (0.1), допускающих 3-мерные алгебры Ли преобразований, воспользуемся классификацией Бианки неподобных алгебр Ли, приведенной, например, в [3]. В этой классификации над полем действительных чисел 9 структур. Из них только 7 разрешимых алгебр содержат абелеву 2-мерную подалгебру (в нашем случае это ядро допускаемых алгебр  $X_1 = \partial_t$ ,  $X_2 = \partial_w$ ). Рассмотрим по порядку 7 разрешимых 3-мерных алгебр. Структура задается коммутационными соотношениями. Все структуры содержат соотношение  $[X_1, X_2] = 0$ . Далее записываем лишь остальные два коммутационных соотношения. Третий оператор представим в виде  $X_3 = \xi\partial_t + \eta\partial_x + \zeta\partial_v + \chi\partial_w$ .

4.1: Абелева алгебра  $[X_1, X_3] = 0$ ,  $[X_2, X_3] = 0$

Из коммутационных соотношений следует, что  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\chi$  не зависят от  $t$ ,  $w$ . Из определяющих уравнений (2.1) получим  $\xi_v = \eta_v = \chi_x = \zeta_x = \chi_v = \xi_x = 0$ , т.е.  $\xi = C_{01}$ ,  $\eta = C_{02}$ ,  $\eta = \eta(x)$ ,  $\zeta = \zeta(v)$ . Постоянным соответствует ядро, поэтому можно считать их равными нулю. Преобразования эквивалентности делают  $\eta = 1$ ,  $\zeta = -\varepsilon$ , где  $\varepsilon = 0$  или 1. Последние два уравнения в (2.1) определяют  $a = a(x + \varepsilon v)$ ,  $b = b(x + \varepsilon v)$ . Если  $\varepsilon = 0$ , то получим линейную систему (0.1). Нелинейная система (0.1) допускает оператор и имеет коэффициенты вида

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad a = a(x + v), \quad b = b(x + v).$$

Аналогичные вычисления для других структур дают следующие представления.

4.2:  $[X_2, X_3] = X_1$ ,  $[X_3, X_1] = 0$

Допускаемый оператор имеет вид  $X_3 = w\partial_t + \varphi(x, v)\partial_x + \partial_v$ , коэффициенты системы представляются в виде  $b = \varphi_v$ ,  $a = \varphi_v a_1(J)$ , где  $J$  — интеграл уравнения  $dx = \varphi(x, v)dv$ ,  $a_1(J)$  — произвольная функция, а функция  $\varphi(x, v)$  удовлетворяет уравнению

$$\varphi\varphi_{xv} - \varphi_x\varphi_v + \varphi_{vv} = 0.$$

4.3:  $[X_2, X_3] = 0$ ,  $[X_1, X_3] = X_1$

Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad a = e^{-x}a_1(x + v), \quad b = e^{-x}b_1(x + v),$$

где  $a_1(s)$ ,  $b_1(s)$  — произвольные функции.

4.4:  $[X_2, X_3] = X_1 + X_2$ ,  $[X_1, X_3] = X_1$

Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = (t + w)\partial_t + \varphi(x, v)\partial_x + \partial_v + w\partial_w, \quad a = \varphi_v e^{-2v}a_1(J), \quad b = \varphi_v,$$

где  $J$ ,  $a_1$ ,  $\varphi$  — такие же, как в п. 4.2.

4.5:  $[X_2, X_3] = X_2$ ,  $[X_1, X_3] = X_1$

Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = t\partial_t + \partial_x - \partial_v + w\partial_w, \quad a = e^{-2x}a_1(x + v), \quad b = b_1(x + v),$$

где  $a_1(s)$ ,  $b_1(s)$  — произвольные функции.

4.6:  $[X_2, X_3] = qX_2$  ( $q \neq 0, 1$ ),  $[X_1, X_3] = X_1$

Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = t\partial_t + \partial_x - \partial_v + qw\partial_w, \quad a = e^{-(q+1)x}a_1(x + v), \quad b = e^{(q-1)x}b_1(x + v),$$

где  $a_1(s)$ ,  $b_1(s)$  — произвольные функции.

$$4.7: [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2 \quad (q^2 < 4), \quad [X_1, X_3] = X_2$$

Допускаемый оператор и коэффициент  $b$  системы принимают вид

$$X_3 = -w\partial_t - \varphi(x, v)\partial_x + \psi(x, v)\partial_v + (t + qw)\partial_w, \quad b = \varphi_v,$$

коэффициент  $a$  находится из уравнения

$$\varphi a_x - \psi a_v = a(q + \varphi_x - \psi_v),$$

а функции  $\varphi$ ,  $\psi$  удовлетворяют системе уравнений

$$\varphi_v \psi_x = 1, \quad \psi_x (\psi \varphi_v)_v + \varphi_v (\varphi \psi_x)_x = q.$$

Итак, получили 7 различных типов систем (0.1), допускающих 3-мерные алгебры Ли.

## 5. Системы, допускающие 4-мерные алгебры Ли

Для классификации систем (0.1), допускающих 4-мерные алгебры Ли преобразований, воспользуемся классификацией Г.И. Кручковича неподобных алгебр Ли, приведенной, например, в [3]. В этой классификации над полем действительных чисел 11 структур, каждая из которых содержит двумерную абелеву подалгебру. В представлении операторами абелева подалгебра соответствует ядру  $X_1 = \partial_t$ ,  $X_2 = \partial_w$  с коммутатором  $[X_1, X_2] = 0$ . Другие 2 оператора представим в виде  $X_{2+l} = \xi_l \partial_t + \eta_l \partial_x + \zeta_l \partial_v + \chi_l \partial_w$ ,  $l = 1, 2$ . Далее записываем остальные 5 коммутационных соотношений 4-мерной алгебры Ли.

$$5.1: [X_1, X_3] = 0, [X_2, X_3] = X_1, [X_1, X_4] = cX_1, [X_2, X_4] = X_2, [X_3, X_4] = (c-1)X_3$$

Коммутационные соотношения кроме последнего дают  $\xi_{1w} = 1$ ,  $\eta_{1w} = \zeta_{1w} = \chi_{1w} = 0$ ,  $\xi_{1t} = \eta_{1t} = \zeta_{1t} = \chi_{1t} = 0$ ;  $\xi_{2t} = c$ ,  $\eta_{2t} = \zeta_{2t} = \chi_{2t} = 0$ ,  $\xi_{2w} = \eta_{2w} = \zeta_{2w} = 0$ ,  $\chi_{2w} = 1$ .

Определяющие уравнения (2.1) кроме двух последних принимают вид  $\xi_{lx} = \eta_{lx} = \chi_{lx} = 0$ ,  $\xi_{lv} = \chi_{lv} = 0$ ,  $l = 1, 2$ ,  $\eta_{1v} = b = \varphi_x$ ,  $\eta_{2v} = 0$ . Отсюда, используя преобразования эквивалентности, получим  $\xi_1 = w$ ,  $\eta_1 = \varphi(x, v)$ ,  $\zeta_1 = \varepsilon = 0$  или  $1$ ,  $\chi_1 = 0$ ;  $\xi_2 = ct$ ,  $\eta_2 = \varepsilon_1 = 0$  или  $1$ ,  $\zeta_2 = \zeta(v)$ ,  $\chi_2 = w$ .

Если  $\varepsilon = 0$ , то эквивалентностью сделаем  $\zeta = \varepsilon_2 = 0$  или  $1$ .

Последнее коммутационное соотношение дает

$$(c-1)\varphi + \varepsilon_1 \varphi_x + \zeta(v)\varphi_v = 0, \quad \varepsilon \zeta' = \varepsilon(c-1).$$

Оставшиеся определяющие уравнения (2.1) принимают вид

$$\begin{aligned} b\varphi_x &= b_x \varphi + b_v \varepsilon, & 2a\varphi_x &= a_x \varphi + a_v \varepsilon, \\ -(c-1 + \zeta')b &= b_x \varepsilon_1 + b_v \zeta, & (-c-1 + \zeta')a &= a_x \varepsilon_1 + a_v \zeta. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Если  $\varepsilon = 1$ , то  $\zeta_1 = 1$ ,  $\zeta = (c-1)v$  при  $c \neq 1$ ,  $\varphi = v^{-1}\varphi_1(s)$ ,  $s = x - \varepsilon_1(c-1)^{-1} \ln |v|$ ,

$$a = v^{-2(c-1)^{-1}} a_1(s), \quad b = -v^{-2}(\varphi_1 + \varepsilon_1(c-1)^{-1}\varphi_1'), \quad (5.2)$$

функция  $a_1(s)$  находится из уравнения

$$a_1'(\varphi_1 - \varepsilon_1(c-1)^{-1}) = a_1(\varphi_1' + 2(c-1)^{-1}), \quad (5.3)$$

а функция  $\varphi_1(s)$  удовлетворяет уравнению

$$(c-1)(\varphi_1' + 2)(\varphi_1(c-1) + \varphi_1') + \varepsilon_1(\varphi_1'(c-1) + \varphi_1'')(\varphi_1(c-1) - 1) = 0. \quad (5.4)$$

При этом операторы допускаемой алгебры таковы:

$$X_3 = w\partial_t + v^{-1}\varphi_1(s)\partial_x + \partial_v, \quad X_4 = ct\partial_t + \varepsilon_1\partial_x + (c-1)v\partial_v + w\partial_w. \quad (5.5)$$

Если  $\varepsilon = 1$ ,  $c = 1$ , то  $\zeta = k$  — постоянная,  $\varphi = \varphi_1(\varepsilon_1 v - kx)$ ,  $b = \varepsilon_1 \varphi'_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = 1$ . Из определяющих уравнений (5.1) получим  $-kb\varphi'_1 = \varphi_1 b_x + b_v$ ,  $b_x + kb_v = 0 \Rightarrow \varphi'_1 = 0$ , т.е.  $b = 0$ ; противоречие.

Если  $\varepsilon = 0$ , то  $\zeta_1 = 0$ ,  $\zeta_2 = \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varphi = e^{(1-c)x}\varphi_1(v)$ ,  $b = e^{(1-c)x}\varphi'_1$ . Из определяющих уравнений (5.1) следует  $\varepsilon_2\varphi''_1 = 0$ ,  $a = e^{(1-c)x}a_1(v)$ . Преобразование эквивалентности сводит систему (0.1) к линейной.

Если  $\varepsilon = 0$ ,  $c = 1$ , то  $\zeta_1 = 0$ ,  $\zeta_2 = \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_2\varphi_v = 0 \Rightarrow \varepsilon_2 = 0$ ,  $c = 0$ ; противоречие.

Итак, алгебра с базисными операторами (5.5) допускается системой (0.1) с коэффициентами (5.2), которые определяются из уравнений (5.3) (5.4).

Аналогичные вычисления для других структур приводят к следующим представлениям.

$$5.2: [X_1, X_3] = 0, [X_2, X_3] = X_2, [X_1, X_4] = X_1, [X_2, X_4] = 0, [X_3, X_4] = 0$$

Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x + \varepsilon\partial_v + w\partial_w, \quad X_4 = t\partial_t + n\partial_x + m\partial_v,$$

$$a = \exp \frac{(n-1)v - (m-\varepsilon)x}{m-\varepsilon n}, \quad b = \exp \frac{(m+\varepsilon)x - (n+1)v}{m-\varepsilon n}, \quad m \neq \varepsilon n,$$

где  $\varepsilon = 0$  или  $1$ ,  $m, n$  — постоянные.

$$5.3: [X_1, X_3] = X_1, [X_2, X_3] = X_2, [X_1, X_4] = X_2, [X_2, X_4] = -X_1, [X_3, X_4] = 0$$

Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = t\partial_t + \partial_x - \partial_v + w\partial_w, \quad X_4 = -w\partial_t - k^{-1}e^{k(x+v)}\partial_x - k^{-1}e^{-k(v+x)}\partial_v + w\partial_w,$$

$$a = -e^{-kv-(k+2)x} \left(1 + e^{2k(x+v)}\right)^{1+k^{-1}}, \quad b = e^{k(x+v)}.$$

#### 5.4: Разрешимые алгебры с абелевой 3-мерной подалгеброй

Для 4 разрешимых алгебр с абелевой 3-мерной подалгеброй имеются одинаковые коммутаторы  $[X_1, X_3] = 0$ ,  $[X_2, X_3] = 0$ . Далее записываем остальные три коммутатора:

$$1) [X_1, X_4] = \varepsilon X_1, [X_2, X_4] = kX_2, [X_3, X_4] = lX_3, \quad \varepsilon = 0 \text{ или } 1.$$

Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad X_4 = \varepsilon t\partial_t + l(x\partial_x + v\partial_v) + kw\partial_w,$$

$$a = -|x+v|^{2(k+\varepsilon)l^{-1}}, \quad b = -|x+v|^{(k-\varepsilon)l^{-1}}$$

при  $l \neq 0$ ;

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad E_4 = \varepsilon t\partial_t - m\partial_v + kw\partial_w,$$

$$a = -e^{(k+\varepsilon)m^{-1}(x+v)}, \quad b = -e^{(\varepsilon-k)m^{-1}(v+x)},$$

при  $l = 0$ ;  $k, l, m, n$  — постоянные.

$$2) [X_1, X_4] = kX_1 + X_2, [X_2, X_4] = -X_1 + kX_2, [X_3, X_4] = lX_3.$$

Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x + \partial_v, \quad X_4 = (kt-w)\partial_t + (lx - \varphi_1(x-v))\partial_x + (lv + \psi_1(x-v))\partial_v + (t+kw)\partial_w,$$

$$b = -\varphi'_1, \quad \varphi'_1\psi'_1 = -1, \quad ab = m \exp(2(k-l+1)\arctg b), \quad b' = nb \exp(l\arctg b).$$

$$3) [X_1, X_4] = kX_1 + X_2, [X_2, X_4] = kX_2, [X_3, X_4] = \varepsilon X_3.$$

Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$\begin{aligned} X_3 &= \partial_x - \partial_v, & X_4 &= kt\partial_t + \varepsilon x\partial_x - (\varepsilon x - b'^{-1})\partial_v + (t + kw)\partial_w, \\ a &= a(x + v), & b &= b(x + v), & b' &= -nbe^{-\varepsilon b}, & ab &= e^{2(\varepsilon - k)b}. \end{aligned}$$

Еще одна подалгебра отнесена в последнюю подсекцию.

### 5.5: Алгебры, не имеющие представления операторами

Для 5 алгебр нет нелинейных систем, допускающих их представления операторами:

$$\begin{aligned} [X_1, X_3] &= 0, [X_2, X_3] = X_1, [X_1, X_4] = 2X_1, [X_2, X_4] = X_2, [X_3, X_4] = X_2 + X_3; \\ [X_1, X_3] &= 0, [X_2, X_3] = X_1, [X_1, X_4] = qX_1, [X_2, X_4] = X_3, [X_3, X_4] = -X_2 + qX_3, q^2 < 4; \\ [X_1, X_3] &= 0, [X_2, X_3] = 0, [X_1, X_4] = kX_1 + X_2, [X_2, X_4] = kX_2 + X_3, [X_3, X_4] = \varepsilon X_3; \\ [X_1, X_3] &= 0, [X_2, X_3] = X_3, [X_1, X_4] = 0, [X_2, X_4] = -X_4, [X_3, X_4] = -2X_2; \\ [X_1, X_3] &= 0, [X_2, X_3] = X_4, [X_1, X_4] = 0, [X_2, X_4] = -X_3, [X_3, X_4] = X_2. \end{aligned}$$

Для примера докажем утверждение для алгебры с номером 5.

Из следующих коммутационных соотношений, кроме последнего, вытекает представление:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi(x, v) \sin w + \bar{\xi}(x, v) \cos w, & \xi_2 &= \xi(x, v) \cos w - \bar{\xi}(x, v) \sin w, \\ \eta_1 &= \eta(x, v) \sin w + \bar{\eta}(x, v) \cos w, & \eta_2 &= \eta(x, v) \cos w - \bar{\eta}(x, v) \sin w, \\ \zeta_1 &= \zeta(x, v) \sin w + \bar{\zeta}(x, v) \cos w, & \zeta_2 &= \zeta(x, v) \cos w - \bar{\zeta}(x, v) \sin w, \\ \chi_1 &= \chi(x, v) \sin w + \bar{\chi}(x, v) \cos w, & \chi_2 &= \chi(x, v) \cos w - \bar{\chi}(x, v) \sin w. \end{aligned}$$

Из определяющих уравнений (2.1), кроме двух последних, следует, что функции  $\xi, \bar{\xi}, \zeta, \bar{\zeta}, \chi, \bar{\chi}$  зависят только от  $v$ ,

$$\eta = a\xi', \quad \bar{\eta} = -a\xi', \quad (a\xi')_v + b\xi = 0, \quad (a\bar{\xi}')_v + b\bar{\xi} = 0, \quad \frac{b}{a} = \frac{\bar{\chi}'}{\zeta} = -\frac{\chi'}{\bar{\zeta}} \equiv n^{-1}(v).$$

Если  $\xi' \neq 0$  ( $\bar{\xi}' \neq 0$ ), то

$$a = \xi_0(x)\xi'^{-1} \exp(-\xi n^{-1}\xi'^{-1}), \quad b = an^{-1}.$$

Замена  $x$  преобразованием эквивалентности делает  $\xi_0 = 1$ . Далее годограф приводит к линейной системе.

Если  $\xi' = \bar{\xi}' = 0$ , то  $\eta = \bar{\eta} = 0$ ,  $a = n(v)b$ ,  $\zeta = n\bar{\chi}'$ ,  $\bar{\zeta} = -n\chi'$ .

Замена  $v$  преобразованием эквивалентности делает  $n = 1$ . Из предпоследнего уравнения определяющей системы (2.1) получим  $b_v(\bar{\chi}' \sin w - \chi' \cos w) = 0 \Rightarrow \chi' = \bar{\chi}' = 0$ ,  $\chi = A$ ,  $\bar{\chi} = B$ , где  $A, B$  — постоянные.

Из последнего уравнения определяющей системы (2.1) получим  $A \cos w - B \sin w = 0 \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow X_3 = X_4 = 0$ ; противоречие.

Итак, получили 7 типов систем (0.1), допускающих 4-мерные алгебры Ли.

## Заключение

При решении задачи групповой классификации нелинейной системы (0.1) выполнены следующие этапы:

1. Вычислена бесконечная группа преобразований эквивалентности и ее инварианты.
2. Система определяющих уравнений алгебры Ли приведена в инволюцию.
3. Использовано важное свойство определяющих уравнений: коммутатор двух решений есть решение определяющей системы.
4. Доказано, что размерность алгебры Ли, допускаемой нелинейной системой (0.1), не больше 4.
5. Для классификации систем (0.1) использованы неподобные структуры алгебр Ли размерностей 3 и 4.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Ibragimov N.H., Khabirov S.V.** Contact transformation group classification of nonlinear wave equation // Nonlinear Dynamics. 2000. Vol. 22. P. 61–71.
2. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. **Петров А.З.** Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
4. **Фиников С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

Поступила 27.03.2007

УДК 519.65

## АППРОКСИМАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ В СРЕДНЕМ<sup>1</sup>

Е. В. Шевалдина

В работе изучаются аппроксимативные и формосохраняющие свойства локальных параболических сплайнов вида  $S(x) = \sum_j y_j B_2(x - jh)$ , ( $h > 0$ ), где  $B_2$  — нормализованный параболический  $B$ -сплайн с равномерными узлами и функционалы  $y_j = y_j(f)$  задаются для произвольной функции  $f$ , определенной на  $\mathbb{R}$ , при помощи равенств

$$y_j = \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} f(jh + t) dt \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

На классе функций  $W_\infty^2$  при  $0 < h_1 \leq 2h$  вычислена точно величина погрешности аппроксимации такими сплайнами в равномерной метрике.

### Введение

При решении задач аппроксимации и численного анализа локальные полиномиальные сплайны порядка  $r$  минимального дефекта обычно строятся как линейные комбинации соответствующих  $B$ -сплайнов  $B_{r,j}(x)$ . А именно для непрерывной функции  $f$  локальный полиномиальный сплайн  $S(x) = S(f, x)$  определяется следующим образом:

$$S(x) = \sum_j b_j(f) B_{r,j}(x), \quad (0.1)$$

где  $b_j(f)$  — последовательность линейных непрерывных функционалов, выбор которых и определяет вид приближения. В качестве функционалов  $b_j(f)$  выбирают линейные комбинации значений функции, ее производных в точках сетки или разделенных разностей. Самый простой и удобный с вычислительной точки зрения вариант  $b_j(f) = f(x_j)$  ( $x_j$  — узлы сетки сплайна  $S$ ) приводит к хорошо изученному локальному сплайну (см., напр.: [1–4]):

$$S(x) = \sum_j f(x_j) B_{r,j}(x). \quad (0.2)$$

Вместо  $x_j$  в формуле (0.2) также часто используют среднее арифметическое всех узлов  $B$ -сплайна  $B_{r,j}(x)$  [1–3]. Построенный сплайн не является интерполяционным, но в случае  $r = 2$  (параболические сплайны) выступает непрерывно-дифференцируемой функцией на всей числовой оси  $\mathbb{R}$  и обладает как формосохраняющими, так и экстремальными свойствами [5]. Если же функция  $f$  не непрерывна, а только интегрируема, то неестественно рассматривать вопросы приближения такой функции, исходя из ее значений в узлах сетки, т.к. значения в отдельных точках несущественны для таких функций. В этом случае используют интерполяцию в среднем.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-01092) и гранта поддержки научных исследований, выполняемых учеными УрО РАН совместно с СО РАН.

Полиномиальный сплайн  $S(x)$  с равномерными узлами  $x_j = jh$  ( $j \in \mathbb{Z}, h > 0$ ) называется *интерполяционным в среднем* для интегрируемой на всей числовой оси  $\mathbb{R}$  функции  $f$ , если он удовлетворяет следующим равенствам ( $h_1 > 0$ ):

$$\frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} f(jh + t) dt = S(jh) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

Вопросы существования, единственности, аппроксимативные и экстремальные свойства таких сплайнов изучались в работах Ю.Н. Субботина [6–8] (обобщения на  $L$ -сплайны см. также: [9, 10]).

Пусть заданы два вещественных числа  $h > 0$  и  $h_1 > 0$ . Для интегрируемой на всей числовой оси функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  положим

$$b_j(f) = y_j = \begin{cases} \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} f(jh + t) dt, & h_1 > 0, \\ f(jh), & h_1 = 0. \end{cases} \quad (0.3)$$

Пусть  $B_{2,0}(x)$  — нормализованный параболический  $B$ -сплайн (см., напр.: [1, с. 24]) с узлами  $-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}, \frac{3h}{2}$ , т.е.

$$B_{2,0}(x) = \frac{1}{2h^2} \begin{cases} \left(x + \frac{3h}{2}\right)^2, & x \in \left[-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}\right], \\ \frac{3}{2}h^2 - 2x^2, & x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], \\ \left(x - \frac{3h}{2}\right)^2, & x \in \left[\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right], \\ 0, & x \leq -\frac{3h}{2}, \quad x \geq \frac{3h}{2}, \end{cases}$$

и  $B_{2,j}(x) = B_{2,0}(x - jh)$ . Пусть также

$$W_\infty^2 = W_\infty^2(\mathbb{X}) = \{f : f' \in AC, \|f''\|_\infty \leq 1\}$$

есть не что иное, как класс функций, заданных на множестве  $\mathbb{X}$  ( $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{X} = [a, b]$ ). Здесь  $AC$  — класс локально абсолютно непрерывных функций,  $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{L_\infty(\mathbb{X})}$ ,  $L_\infty(\mathbb{X})$  — класс функций, существенно ограниченных на  $\mathbb{X}$  с обычным определением нормы

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{X}} |f(x)|.$$

В данной работе изучаются вопросы аппроксимации гладких функций  $f$  локальными параболическими сплайнами вида (0.1) (т.е. при  $r = 2$ ) с выбором функционалов  $b_j(f)$  в форме (0.3). Построенные таким образом гладкие локальные параболические сплайны  $S(x)$  не являются интерполяционными в среднем, но обладают формосохраняющими и сглаживающими свойствами.

Основными результатами работы являются следующие утверждения<sup>2</sup>:

1) При  $0 \leq h_1 \leq 2h$  имеет место равенство

$$\sup_{f \in W_\infty^2(\mathbb{R})} \|f - S\|_\infty = \frac{h^2}{8} + \frac{h_1^2}{24}.$$

<sup>2</sup>См. далее теорему 3 и теорему 5.

2) При  $0 \leq h_1 \leq 2h$  имеет место равенство

$$\sup_{f \in W_{\infty}^2(\mathbb{R})} \|f' - S'\|_{\infty} = \frac{h}{2} + \frac{h_1^2}{24h}.$$

Отметим, что при  $h_1 = 0$  оба утверждения были доказаны Ю.Н. Субботиним [5].

### 1. Свойства сплайна $S(x)$

Рассмотрим на оси  $\mathbb{R}$  бесконечную в обе стороны сетку узлов:  $\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ ; и пусть  $x_j = jh$ ,  $h = x_{j+1} - x_j$ ,  $x_{j+1/2} = x_j + \frac{h}{2}$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ).

При  $x_j \leq x \leq x_{j+1/2}$  из формул (0.1) и (0.3) следует, что

$$S(x) = y_{j-1} \cdot \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} + y_j \cdot \left( \frac{x_{j+1} - x}{h} - \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{h^2} \right) + y_{j+1} \cdot \left( \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} + \frac{x - x_j}{h} \right), \quad (1.1)$$

а при  $x_{j+1/2} \leq x \leq x_{j+1}$

$$S(x) = y_j \cdot \left( \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} + \frac{x_{j+1} - x}{h} \right) + y_{j+1} \cdot \left( \frac{x - x_j}{h} - \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{h^2} \right) + y_{j+2} \cdot \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2}. \quad (1.2)$$

Функции  $f(x) \in W_{\infty}^2(\mathbb{R})$  ставится в соответствие параболический сплайн  $S(x) = S(f, x)$  (см. (1.1), (1.2)), где функционалы  $y_j$  определены формулой (0.3). При  $h_1 = 0$  формосохраняющие и аппроксимативные свойства таких сплайнов были исследованы Ю.Н. Субботиним [5], поэтому мы будем рассматривать случай  $h_1 > 0$ .

Обозначим через  $A_j = \left( x_j - \frac{h_1}{2}; x_j + \frac{h_1}{2} \right)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ .

**Теорема 1.** *Локальный сплайн  $S(x)$ , определенный формулами (0.3)–(1.2), обладает следующими свойствами:*

1. *Наследует локально знак исходной функции  $f$  в том смысле, что:*

a) *если  $f(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) при  $x \in A_{j-1} \cup A_j \cup A_{j+1}$ , то  $S(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) при  $x_j \leq x \leq x_{j+1/2}$  ( $j \in \mathbb{Z}$ );*

b) *если  $f(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) при  $x \in A_j \cup A_{j+1} \cup A_{j+2}$ , то  $S(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) при  $x_{j+1/2} \leq x \leq x_{j+1}$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ).*

2. *Локально наследует свойство монотонности исходной функции  $f$ , а именно:*

a) *если функция  $f(x)$  не убывает (не возрастает) на промежутке  $\left( x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right)$ , то сплайн  $S(x)$  не убывает (не возрастает) на промежутке  $(x_j; x_{j+1/2})$  ( $j \in \mathbb{Z}$ );*

b) *если функция  $f(x)$  не убывает (не возрастает) на промежутке  $\left( x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j+2} + \frac{h_1}{2} \right)$ , то сплайн  $S(x)$  не убывает (не возрастает) на промежутке  $(x_{j+1/2}; x_{j+1})$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пункт 1) следует из неотрицательности  $B$ -сплайна  $B_{2,0}(x)$ , формулы (0.2) и неотрицательности  $y_j$  при  $x \in A_j$ .

2a): Из условий п. 2a) теоремы 1 и определения  $y_j$  следует, что  $y_{j+1} \geq y_j \geq y_{j-1}$ .

Дифференцируя правую часть равенства (1.1), получаем, что при  $x \in (x_j; x_{j+1/2})$  производная

$$S'(x) = \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \frac{x - x_{j+1/2}}{h^2} \cdot (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$$

сплайна  $S$  на этом промежутке является линейной функцией по переменной  $x$ . Поэтому для доказательства п. 2а) достаточно проверить, что при  $y_{j+1} \geq y_j \geq y_{j-1}$  имеют место неравенства  $S'(x_j + 0) \geq 0$ ,  $S'(x_{j+1/2} - 0) \geq 0$ . Справедливость последних неравенств вытекает из формул

$$S'(x_j + 0) = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h},$$

$$S'(x_{j+1/2} - 0) = \frac{y_{j+1} - y_j}{h},$$

и п. 2а) теоремы 1 доказан.

2б): Из условий п. 2б) теоремы 1 и определения  $y_j$  следует, что  $y_{j+2} \geq y_{j+1} \geq y_j$ .

Дифференцируя правую часть равенства (1.2), получаем, что при  $x \in (x_{j+1/2}; x_j)$  производная

$$S'(x) = \frac{y_{j+1} - y_j}{h} + \frac{x - x_{j+1/2}}{h^2} \cdot (y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j)$$

сплайна  $S$  на этом промежутке является линейной функцией по переменной  $x$ . Поэтому для доказательства п. 2б) достаточно проверить, что при  $y_{j+2} \geq y_{j+1} \geq y_j$  имеют место неравенства  $S'(x_{j+1/2} + 0) \geq 0$ ,  $S'(x_{j+1} - 0) \geq 0$ , что вытекает из формул

$$S'(x_{j+1/2} + 0) = \frac{y_{j+1} - y_j}{h},$$

$$S'(x_{j+1} - 0) = \frac{y_{j+2} - y_j}{2h}.$$

Теорема 1 доказана.

Прежде чем формулировать дальнейшие утверждения, получим интегральное представление для разности  $S(x) - f(x)$  на отрезке  $[x_j; x_{j+1}]$  при  $0 < h_1 \leq 2h$ . Пусть сначала  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$ .

Для функции  $f(x) \in W_\infty^2(\mathbb{R})$  из формулы Тейлора имеем

$$f(x) = f(x_j) + f'(x_j)(x - x_j) + \int_{x_j}^x (x - t)f''(t)dt. \quad (1.3)$$

Используя (1.3) и определение  $y_j$  (см. (0.3)), выводим, что

$$y_{j-1} = f(x_j) - f'(x_j)h + \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} ds \int_{x_j}^{s+x_{j-1}} (x_{j-1} + s - t)f''(t)dt,$$

$$y_j = f(x_j) + \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} ds \int_{x_j}^{s+x_j} (x_j + s - t)f''(t)dt,$$

$$y_{j+1} = f(x_j) + f'(x_j)h + \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} ds \int_{x_j}^{s+x_{j+1}} (x_{j+1} + s - t)f''(t)dt.$$

Подставляя эти выражения в (1.1), получаем, что

$$S(x) = \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} \left[ f(x_j) - f'(x_j)h + \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} ds \int_{x_j}^{s+x_{j-1}} (x_{j-1} + s - t)f''(t)dt \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{x_{j+1} - x}{h} - \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{h^2} \right) \left[ f(x_j) + \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} ds \int_{x_j}^{s+x_j} (x_j + s - t) f''(t) dt \right] \\
 & + \left( \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} + \frac{x - x_j}{h} \right) \left[ f(x_j) + f'(x_j)h + \frac{1}{h_1} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} ds \int_{x_j}^{s+x_{j+1}} (x_{j+1} + s - t) f''(t) dt \right]. \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Учитывая то, что  $0 < h_1 \leq 2h$ , изменим порядок интегрирования в интегралах, входящих в представление (1.4). Получим

$$\begin{aligned}
 S(x) & = \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} \\
 & \times \left\{ f(x_j) - f'(x_j)h + \frac{1}{h_1} \left[ \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_{j-1} + \frac{h_1}{2} \right)^2 dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) h_1 (t - x_{j-1}) dt \right] \right\} \\
 & \quad + \left( \frac{x_{j+1} - x}{h} - \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{h^2} \right) \\
 & \quad \times \left\{ f(x_j) + \frac{1}{h_1} \left[ \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_j + \frac{h_1}{2} \right)^2 dt + \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_j - \frac{h_1}{2} \right)^2 dt \right] \right\} \\
 & \quad + \left( \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} + \frac{x - x_j}{h} \right) \left\{ f(x_j) + f'(x_j)h \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{h_1} \left[ \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) h_1 (x_{j+1} - t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right)^2 dt \right] \right\}, \quad x \in [x_j; x_{j+1/2}]. \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

В силу симметрии формул для  $S(x)$  относительно середины  $x_{j+1/2}$  отрезка  $[x_j; x_{j+1}]$  получаем аналогичное представление  $S(x)$  при  $x \in [x_{j+1/2}; x_{j+1}]$ :

$$\begin{aligned}
 S(x) & = \left( \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} + \frac{x_{j+1} - x}{h} \right) \\
 & \times \left\{ f(x_j) + \frac{1}{h_1} \left[ \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_j + \frac{h_1}{2} \right)^2 dt + \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_j - \frac{h_1}{2} \right)^2 dt \right] \right\} \\
 & \quad + \left( \frac{x - x_j}{h} - \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{h^2} \right) \\
 & \quad \times \left\{ f(x_j) + f'(x_j)h + \frac{1}{h_1} \left[ \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) h_1 (x_{j+1} - t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right)^2 dt \right] \right\} \\
 & \quad + \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} \left\{ f(x_j) + f'(x_j)2h \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{h_1} \left[ \int_{x_j}^{x_{j+2} - \frac{h_1}{2}} f''(t) h_1 (x_{j+2} - t) dt + \int_{x_{j+2} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+2} + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_{j+2} - \frac{h_1}{2} \right)^2 dt \right], x \in [x_{j+1/2}, x_{j+1}].$$

**Теорема 2.** Локальный сплайн  $S(x)$ , определенный формулами (0.3)–(1.2), при  $0 < h_1 \leq 2h$  обладает следующими свойствами:

1. Наследует локально свойство выпуклости исходной функции  $f$ , а именно:

а) если функция  $f(x)$  выпукла вниз (вверх) на промежутке  $\left(x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}\right)$ , то сплайн  $S(x)$  является выпуклой вниз (вверх) функцией на промежутке  $(x_j; x_{j+1/2})$  ( $j \in \mathbb{Z}$ );

б) если функция  $f(x)$  выпукла вниз (вверх) на промежутке  $\left(x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j+2} + \frac{h_1}{2}\right)$ , то сплайн  $S(x)$  является выпуклой вниз (вверх) функцией на промежутке  $(x_{j+1/2}; x_{j+1})$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ).

2. а) Для любой функции  $f \in W_\infty^2 \left[x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}\right]$  имеет место точное неравенство

$$|S''(x)| \leq 1, \quad x \in (x_j; x_{j+1/2}),$$

причем знак равенства при всех  $x \in (x_j; x_{j+1/2})$  реализует функция  $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ;

б) для любой функции  $f \in W_\infty^2 \left[x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j+2} + \frac{h_1}{2}\right]$  имеет место точное неравенство

$$|S''(x)| \leq 1, \quad x \in (x_{j+1/2}; x_{j+1}),$$

причем знак равенства при всех  $x \in (x_{j+1/2}; x_{j+1})$  реализует функция  $f(x) = \frac{x^2}{2}$ .

**Доказательство.** 1а): Для доказательства данного утверждения требуется проверить, что если  $f''(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) при  $x \in \left(x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}\right)$ , то  $S''(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) при  $x \in (x_j; x_{j+1/2})$ .

Дважды продифференцировав функцию  $S(x)$ , из формулы (1.5) получаем

$$\begin{aligned} S''(x) = & \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) C_1(t) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) C_2(t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) C_3(t) dt \\ & + \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t) C_4(t) dt + \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) C_5(t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) C_6(t) dt, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{1}{2h^2 h_1} \left( t - x_{j-1} + \frac{h_1}{2} \right)^2, \quad C_2(t) = \frac{1}{h^2} (t - x_{j-1}), \quad C_3(t) = -\frac{1}{h^2 h_1} \left( t - x_j + \frac{h_1}{2} \right)^2; \\ C_4(t) &= -\frac{1}{h^2 h_1} \left( t - x_j - \frac{h_1}{2} \right)^2, \quad C_5(t) = \frac{1}{h^2} (x_{j+1} - t), \quad C_6(t) = \frac{1}{2h^2 h_1} \left( t - x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Дальнейшее доказательство п. 1а) разобьем на два случая: 1)  $0 < h_1 \leq h$ , 2)  $h < h_1 \leq 2h$ .

**Случай 1.** Пусть  $0 < h_1 \leq h$ . Функция  $S''(x)$  в этом случае преобразуется к виду

$$S''(x) = \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) C_1(t) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} f''(t) C_2(t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) (C_2(t) + C_3(t)) dt$$

$$+ \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t)(C_4(t) + C_5(t)) dt + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t)C_5(t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t)C_6(t) dt. \quad (1.7)$$

Из определения  $C_j(t)$  ( $j = \overline{1,6}$ ) следует, что  $C_1(t) \geq 0$  при  $t \in [x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j-1} + \frac{h_1}{2}]$ ,  $C_2(t) \geq 0$  при  $t \in [x_{j-1} + \frac{h_1}{2}; x_j - \frac{h_1}{2}]$ ,  $C_5(t) \geq 0$  при  $t \in [x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1} - \frac{h_1}{2}]$ ,  $C_6(t) \geq 0$  при  $t \in [x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}]$ . Осталось исследовать квадратные трехчлены  $C_2(t) + C_3(t)$  при  $t \in [x_j - \frac{h_1}{2}; x_j]$  и  $C_4(t) + C_5(t)$  при  $t \in [x_j; x_j + \frac{h_1}{2}]$ .

Неотрицательность функций  $C_2(t) + C_3(t)$  при  $t \in [x_j - \frac{h_1}{2}; x_j]$  и  $C_4(t) + C_5(t)$  при  $t \in [x_j; x_j + \frac{h_1}{2}]$  следует из того, что ветви соответствующих парабол направлены вниз и значения в концах исследуемых отрезков неотрицательны, а именно:

$$C_2(x_j) + C_3(x_j) = C_4(x_j) + C_5(x_j) = \frac{4h - h_1}{4h^2} \geq 0,$$

$$C_2(x_j - \frac{h_1}{2}) + C_3(x_j - \frac{h_1}{2}) = C_4(x_j + \frac{h_1}{2}) + C_5(x_j + \frac{h_1}{2}) = \frac{2h - h_1}{2h^2} \geq 0.$$

Из доказанных утверждений, представления (1.7) и условия  $f''(t) \geq 0$  при  $t \in (x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2})$  следует, что  $S''(x) \geq 0$  при  $x \in (x_j; x_{j+1/2})$ .

С л у ч а й 2. Пусть  $h < h_1 \leq 2h$ . Функция  $S''(x)$  в этом случае преобразуется к виду

$$S''(x) = \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} f''(t)C_1(t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t)(C_1(t) + C_3(t)) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t)(C_2(t) + C_3(t)) dt + \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t)(C_4(t) + C_5(t)) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t)(C_4(t) + C_6(t)) dt + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t)C_6(t) dt. \quad (1.8)$$

Из определения  $C_j(t)$  ( $j = \overline{1,6}$ ) следует, что  $C_1(t) \geq 0$  при  $t \in [x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_j - \frac{h_1}{2}]$  и  $C_6(t) \geq 0$  при  $t \in [x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}]$ .

Элементарные вычисления показывают, что

$$C_1(x_j - \frac{h_1}{2}) + C_3(x_j - \frac{h_1}{2}) = C_4(x_j + \frac{h_1}{2}) + C_6(x_j + \frac{h_1}{2}) = \frac{1}{2h_1} \geq 0,$$

$$C_1(x_{j-1} + \frac{h_1}{2}) + C_3(x_{j-1} + \frac{h_1}{2}) = C_4(x_{j+1} + \frac{h_1}{2}) + C_6(x_{j+1} + \frac{h_1}{2}) = \frac{2h^2 - (h_1 - 2h)^2}{2h_1h^2} \geq 0,$$

$$C_2(x_j) + C_3(x_j) = C_4(x_j) + C_5(x_j) = \frac{1}{h^2} \left( h - \frac{h_1}{4} \right) \geq 0,$$

$$C_2(x_{j-1} + \frac{h_1}{2}) + C_3(x_{j-1} + \frac{h_1}{2}) = C_4(x_{j+1} - \frac{h_1}{2}) + C_5(x_{j+1} - \frac{h_1}{2}) = \frac{2h^2 - (h_1 - 2h)^2}{2h_1h^2} \geq 0.$$

Поскольку у квадратных трехчленов  $C_1(t)+C_3(t)$ ,  $C_2(t)+C_3(t)$ ,  $C_4(t)+C_5(t)$ ,  $C_4(t)+C_6(t)$  старшие коэффициенты отрицательны и значения в концах соответствующих отрезков неотрицательны, то  $C_1(t)+C_3(t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j-1} + \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $C_2(t)+C_3(t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_{j-1} + \frac{h_1}{2}; x_j \right]$ ,  $C_4(t)+C_5(t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_j; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $C_4(t)+C_6(t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$ .

Из доказанных утверждений, представления (1.8) и условия  $f''(t) \geq 0$  при  $t \in \left( x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right)$  следует, что  $S''(x) \geq 0$  при  $x \in (x_j; x_{j+1/2})$ .

1b): Доказательство почти дословно повторяет рассуждения, проведенные в п. 1a), после замены переменной  $x - x_j$  на переменную  $x_{j+1} - x$ .

2a): Оценим  $|S''(x)|$  при  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$ . При  $0 < h_1 \leq h$  из (1.7) для любой функции  $f \in W_\infty^2 \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$  эта величина, в силу доказанного в предыдущем пункте, оценивается сверху суммой интегралов, которая оказывается равной 1, а именно:

$$\begin{aligned} |S''(x)| \leq & \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} C_1(t) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} C_2(t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} (C_2(t) + C_3(t)) dt \\ & + \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} (C_4(t) + C_5(t)) dt + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} C_5(t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} C_6(t) dt = 1, \quad x \in [x_j; x_{j+1/2}]. \end{aligned}$$

Аналогично при  $h < h_1 \leq 2h$  из (1.8) выводим, что для любой функции  $f \in W_\infty^2 \left[ x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j+2} + \frac{h_1}{2} \right]$  при  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$  имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |S''(x)| \leq & \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} C_1(t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} (C_1(t) + C_3(t)) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} (C_2(t) + C_3(t)) dt \\ & + \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} (C_4(t) + C_5(t)) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_j + \frac{h_1}{2}} (C_4(t) + C_6(t)) dt + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} C_6(t) dt = 1. \end{aligned}$$

Из приведенного доказательства следует, что в обоих случаях функцией, реализующей равенство в доказанных неравенствах, является функция  $f(x) = \frac{x^2}{2}$ .

2b): Доказательство следует из симметрии сплайна  $S(x)$  относительно середины  $x_{j+1/2}$  отрезка  $[x_j; x_{j+1}]$ .

Теорема 2 доказана.

## 2. Оценки погрешности

**Теорема 3.** При  $0 \leq h_1 \leq 2h$  имеет место равенство

$$\sup_{f \in W_\infty^2(\mathbb{R})} \|f - S\|_\infty = \frac{h^2}{8} + \frac{h_1^2}{24}.$$

Доказательство. Рассмотрим при  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$  неинтегральные слагаемые для функции  $f \in W_\infty^2 \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$  в представлении (1.3) и сплайна  $S(x)$  в представлении (1.5). Они совпадают, так как

$$\begin{aligned} & \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} (f(x_j) - f'(x_j)h) + \left( \frac{x_{j+1} - x}{h} - \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{h^2} \right) f(x_j) \\ & + \left( \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} + \frac{x - x_j}{h} \right) (f(x_j) + f'(x_j)h) = f(x_j) + f'(x_j)(x - x_j). \end{aligned}$$

С учетом этого при любом  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$  имеем

$$\begin{aligned} S(x) - f(x) &= \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} \frac{1}{h_1} \\ & \times \left[ \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_{j-1} + \frac{h_1}{2} \right)^2 dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) h_1 (t - x_{j-1}) dt \right] \\ & + \left( \frac{x_{j+1} - x}{h} - \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{h^2} \right) \frac{1}{h_1} \\ & \times \left[ \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_j + \frac{h_1}{2} \right)^2 dt + \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_j - \frac{h_1}{2} \right)^2 dt \right] \\ & + \left( \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} + \frac{x - x_j}{h} \right) \frac{1}{h_1} \\ & \times \left[ \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) h_1 (x_{j+1} - t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right)^2 dt \right] \\ & - \int_{x_j}^x f''(t) (x - t) dt. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Поэтому при любом  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} S(x) - f(x) &= \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) K_1(x, t) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) K_2(x, t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) K_3(x, t) dt \\ & + \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t) K_4(x, t) dt + \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) K_5(x, t) dt \\ & + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) K_6(x, t) dt - \int_{x_j}^x f''(t) K_7(x, t) dt, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$K_1(x, t) = \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{4h^2h_1} \left( t - x_{j-1} + \frac{h_1}{2} \right)^2, \quad K_2(x, t) = \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} (t - x_{j-1});$$

$$K_3(x, t) = \left( \frac{x_{j+1} - x}{h} - \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{h^2} \right) \frac{1}{2h_1} \left( t - x_j + \frac{h_1}{2} \right)^2;$$

$$K_4(x, t) = \left( \frac{x_{j+1} - x}{h} - \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{h^2} \right) \frac{1}{2h_1} \left( t - x_j - \frac{h_1}{2} \right)^2;$$

$$K_5(x, t) = \left( \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} + \frac{x - x_j}{h} \right) (x_{j+1} - t);$$

$$K_6(x, t) = \left( \frac{(x - x_{j+1/2})^2}{2h^2} + \frac{x - x_j}{h} \right) \frac{1}{2h_1} \left( t - x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right)^2, \quad K_7(x, t) = t - x.$$

Дальнейшее доказательство при  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$  разбивается на два случая: 1)  $0 < h_1 \leq h$ , 2)  $h < h_1 \leq 2h$ .

С л у ч а й 1. Пусть  $0 < h_1 \leq h$ . Тогда разность  $S(x) - f(x)$  при  $x \in [x_j, x_j + \frac{h_1}{2}]$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} S(x) - f(x) = & \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) K_1(x, t) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} f''(t) K_2(x, t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) (K_2(x, t) + K_3(x, t)) dt \\ & + \int_{x_j}^x f''(t) (K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t)) dt + \int_x^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t) (K_4(x, t) + K_5(x, t)) dt \\ & + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) K_5(x, t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) K_6(x, t) dt, \end{aligned} \quad (2.3)$$

а при  $x \in [x_j + \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2}]$  — к виду

$$\begin{aligned} S(x) - f(x) = & \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) K_1(x, t) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} f''(t) K_2(x, t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) (K_2(x, t) + K_3(x, t)) dt \\ & + \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t) (K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t)) dt + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^x f''(t) (K_5(x, t) + K_7(x, t)) dt \\ & + \int_x^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) K_5(x, t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) K_6(x, t) dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для получения оценки погрешности на классе  $W_\infty^2(\mathbb{R})$  докажем, что:

а) при  $x \in [x_j, x_{j+1/2}]$ :  $K_1(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j-1} + \frac{h_1}{2}]$ ,  $K_2(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_{j-1} + \frac{h_1}{2}; x_j - \frac{h_1}{2}]$ ,  $K_2(x, t) + K_3(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_j - \frac{h_1}{2}; x_j]$ ,  $K_6(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}]$ ;

б) при  $x \in [x_j, x_j + \frac{h_1}{2}]$ :  $K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_j; x]$ ,  $K_4(x, t) + K_5(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x; x_j + \frac{h_1}{2}]$ ,  $K_5(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1} - \frac{h_1}{2}]$ ;

в) при  $x \in [x_j + \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2}]$ :  $K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_j; x_j + \frac{h_1}{2}]$ ,  $K_5(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_j + \frac{h_1}{2}; x]$ ,  $K_5(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x; x_{j+1} - \frac{h_1}{2}]$ .

Все эти неравенства, кроме двух, сразу вытекают из определения функций  $K_j(x, t)$  ( $j = \overline{1, 7}$ ). Необходимо лишь проверить, что  $K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  при  $x \in [x_j, x_j + \frac{h_1}{2}]$ ,  $t \in [x_j; x]$  при  $x \in [x_j + \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2}]$ ,  $t \in [x_j; x_j + \frac{h_1}{2}]$  и  $K_5(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  при  $x \in [x_j + \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2}]$ ,  $t \in [x_j + \frac{h_1}{2}; x]$ . Функция  $K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t)$  является квадратным трехчленом по переменной  $t$ , старший коэффициент которого положителен; на концах отрезков  $[x_j; x]$ ,  $[x_j; x_j + \frac{h_1}{2}]$  эта функция как функция от переменной  $t$  принимает положительные значения, и абсцисса вершины соответствующей параболы находится левее точки  $x_j$ . Отсюда следует неотрицательность данной функции на указанных множествах. Функция  $K_5(x, t) + K_7(x, t)$  является линейной по переменной  $t$  и на концах отрезка  $[x_j + \frac{h_1}{2}; x]$  принимает неотрицательные значения; следовательно,  $K_5(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  на всем отрезке  $[x_j + \frac{h_1}{2}; x]$  при  $x \in [x_j + \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2}]$ .

С учетом доказанного из формул (2.3) и (2.4) следует, что для получения оценки сверху для величины  $|S(x) - f(x)|$  на классе  $W_\infty^2(\mathbb{R})$  в этих формулах, а следовательно, и в формуле (2.1) функцию  $f''(t)$  можно заменить на 1. Положим  $f''(t) = 1$  и вычислим при этом значения интегралов, стоящих в правой части формулы (2.1), которую обозначим буквой  $J$ . После элементарных вычислений получаем, что  $J = \frac{h^2}{8} + \frac{h_1^2}{24}$ . Значит, справедливо точное неравенство

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{h^2}{8} + \frac{h_1^2}{24}$$

для любой функции  $f \in W_\infty^2[x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}]$  при любом  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$ , причем знак равенства достигается для  $f(t) = \frac{t^2}{2}$  при  $t \in [x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}]$ .

Аналогично для функции  $f \in W_\infty^2[x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j+2} + \frac{h_1}{2}]$  при любом  $x \in [x_{j+1/2}; x_{j+1}]$  выводим точное неравенство

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{h^2}{8} + \frac{h_1^2}{24},$$

причем знак равенства реализует функция  $f(t) = \frac{t^2}{2}$  при  $t \in [x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j+2} + \frac{h_1}{2}]$ .

С л у ч а й 2. Пусть  $h < h_1 \leq 2h$ . В этом случае разность  $S(x) - f(x)$  при  $x \in \left[ x_j, x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
S(x) - f(x) &= \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} f''(t) K_1(x, t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) (K_1(x, t) + K_3(x, t)) dt \\
&+ \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) (K_2(x, t) + K_3(x, t)) dt + \int_{x_j}^x f''(t) (K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t)) dt \\
&+ \int_x^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) (K_4(x, t) + K_5(x, t)) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t) (K_4(x, t) + K_6(x, t)) dt + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) K_6(x, t) dt,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

а при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$  — к виду

$$\begin{aligned}
S(x) - f(x) &= \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} f''(t) K_1(x, t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) (K_1(x, t) + K_3(x, t)) dt \\
&+ \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) (K_2(x, t) + K_3(x, t)) dt + \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) (K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t)) dt \\
&+ \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^x f''(t) (K_4(x, t) + K_6(x, t) + K_7(x, t)) dt + \int_x^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t) (K_4(x, t) + K_6(x, t)) dt \\
&+ \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) K_6(x, t) dt.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Для получения оценки погрешности на классе  $W_{\infty}^2(\mathbb{R})$  докажем, что:

а) при  $x \in \left[ x_j, x_{j+1/2} \right]$  имеют место неравенства  $K_1(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_j - \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $K_1(x, t) + K_3(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j-1} + \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $K_2(x, t) + K_3(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_{j-1} + \frac{h_1}{2}; x_j \right]$ ,  $K_6(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$ ;

б) при  $x \in \left[ x_j, x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$  имеют место неравенства  $K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_j; x]$ ,  $K_4(x, t) + K_5(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $K_4(x, t) + K_6(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$ ;

с) при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$  имеют место неравенства  $K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_j; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $K_4(x, t) + K_6(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x \right]$ ,  $K_4(x, t) + K_6(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$ .

Как и в предыдущем случае, все эти неравенства, кроме двух, сразу вытекают из определения функций  $K_j(x, t)$  ( $j = \overline{1, 7}$ ). Необходимо лишь проверить, что  $K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  при  $x \in \left[ x_j, x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $t \in [x_j; x]$  при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$ ,  $t \in \left[ x_j; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ , и  $K_4(x, t) + K_6(x, t) + K_7(x, t) \geq 0$  при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$ ,  $t \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x \right]$ . Функция  $K_4(x, t) + K_5(x, t) + K_7(x, t)$  является квадратным трехчленом по переменной  $t$ , старший коэффициент которого положителен; на концах отрезков  $[x_j; x]$ ,  $\left[ x_j; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$  этот трехчлен принимает положительные значения, и абсцисса вершины соответствующей параболы находится левее точки  $x_j$ . Аналогичными свойствами обладает и функция  $K_4(x, t) + K_6(x, t) + K_7(x, t)$  при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$ ,  $t \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x \right]$ , которая также представляет собой квадратный трехчлен по переменной  $t$  с положительным старшим коэффициентом, неотрицательными значениями на концах отрезка  $\left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x \right]$  и вершиной соответствующей параболы левее точки  $x_{j+1} - \frac{h_1}{2}$ . Отсюда следует неотрицательность данных функций на указанных множествах.

С учетом доказанного из формул (2.5) и (2.6) следует, что для получения оценки сверху для величины  $|f(x) - S(x)|$  на классе  $W_\infty^2(\mathbb{R})$  в этих формулах, а следовательно и в формуле (2.1), функцию  $f''(t)$  можно заменить на 1. Положим  $f''(t) = 1$  и вычислим в этом случае значения интегралов, стоящих в правой части формулы 2.1), которую мы обозначили буквой  $J$ . После элементарных преобразований получим, что  $J = \frac{h^2}{8} + \frac{h_1^2}{24}$ . Значит, справедливо точное неравенство

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{h^2}{8} + \frac{h_1^2}{24}$$

для любой функции  $f \in W_\infty^2 \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$  при любом  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$ , причем знак равенства достигается для  $f(t) = \frac{t^2}{2}$  при  $t \in \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$ .

Аналогично для функции  $f \in W_\infty^2 \left[ x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j+2} + \frac{h_1}{2} \right]$  при любом  $x \in [x_{j+1/2}; x_{j+1}]$  выводим точное неравенство:

$$|S(x) - f(x)| \leq \frac{h^2}{8} + \frac{h_1^2}{24},$$

причем знак равенства реализует функция  $f(t) = \frac{t^2}{2}$  при  $t \in \left[ x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j+2} + \frac{h_1}{2} \right]$ .

Теорема 3 доказана.

В следующих двух теоремах будут получены оценка для уклонения  $|f'(x) - S'(x)|$  при любом фиксированном  $x \in [x_j; x_{j+1}]$  на классе функций  $W_\infty^2 \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) и оценка погрешности  $\|f' - S'\|_\infty$  на классе функций  $W_\infty^2 = W_\infty^2(\mathbb{R})$ . Прежде чем формулировать теорему 4, введем на отрезке  $[x_j; x_{j+1}]$  вспомогательные функции:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \varphi_{j,1}(x), & x \in \left[x_j; x_j + \frac{h_1}{2}\right], \\ \varphi_{j,2}(x), & x \in \left[x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2}\right], \\ \varphi_{j,3}(x), & x \in \left[x_{j+1/2}; x_{j+1} - \frac{h_1}{2}\right], \\ \varphi_{j,4}(x), & x \in \left[x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1}\right], \end{cases} \quad \psi_j(x) = \begin{cases} \psi_{j,1}(x), & x \in \left[x_j; x_{j+1} - \frac{h_1}{2}\right], \\ \psi_{j,2}(x), & x \in \left[x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2}\right], \\ \psi_{j,3}(x), & x \in \left[x_{j+1/2}; x_j + \frac{h_1}{2}\right], \\ \psi_{j,4}(x), & x \in \left[x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1}\right], \end{cases}$$

где

$$\varphi_{j,1}(x) = \frac{h_1^2}{24h} + \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2h^2}(x - x_j)^2 - \frac{3}{2h}(x - x_j)^2 + \frac{2}{3h^2h_1}(x - x_j)^4;$$

$$\varphi_{j,2}(x) = \frac{h_1^2}{24h} + \frac{h}{2} + \frac{h_1^2}{12h^2}(x - x_j) - \frac{3}{2h}(x - x_j)^2 + \frac{1}{h^2}(x - x_j)^3;$$

$$\varphi_{j,3}(x) = \varphi_{j,2}(-x + x_j + x_{j+1});$$

$$\varphi_{j,4}(x) = \varphi_{j,1}(-x + x_j + x_{j+1});$$

$$\psi_{j,1}(x) = \frac{h_1^2}{24h} + \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2h^2}(x - x_j)^2 - \frac{3}{2h}(x - x_j)^2 + \frac{2}{3h^2h_1}(x - x_j)^4;$$

$$\psi_{j,2}(x) = \frac{h_1^2}{48h} + \frac{h}{4} + \frac{h_1}{8} + \frac{h^2}{6h_1} - \frac{h_1^2}{24h^2}(x - x_j) + \frac{h_1}{8h}(x - x_j) - \frac{h}{6h_1}(x - x_j) + \frac{h_1}{4h^2}(x - x_j)^2;$$

$$-\frac{1}{2h_1}(x - x_j)^2 - \frac{3}{4h}(x - x_j)^2 - \frac{1}{2h^2}(x - x_j)^3 + \frac{5}{6hh_1}(x - x_j)^3 + \frac{1}{3h^2h_1}(x - x_j)^4;$$

$$\psi_{j,3}(x) = \psi_{j,2}(-x + x_j + x_{j+1});$$

$$\psi_{j,4}(x) = \psi_{j,1}(-x + x_j + x_{j+1}).$$

Нетрудно проверить, что функции  $\varphi_j(x)$  и  $\psi_j(x)$  являются непрерывными на отрезке  $[x_j; x_{j+1}]$ , а в точке  $x = x_{j+1/2}$  обе функции недифференцируемы.

**Теорема 4.** Для любой функции  $f \in W_\infty^2\left[x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}\right]$  для сплайна  $S(x) = S(f, x)$ , определенного формулами (0.3)–(1.2), при  $0 < h_1 \leq h$  имеет место точное неравенство

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \varphi_j(x), \quad x \in [x_j; x_{j+1}] \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

причем знак равенства в любой фиксированной точке  $x \in [x_j; x_{j+1}]$  реализует функция

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x\right], \\ \frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[x; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}\right]. \end{cases}$$

Для любой функции  $f \in W_\infty^2\left[x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}\right]$  для сплайна  $S(x) = S(f, x)$ , определенного формулами (0.3)–(1.2), при  $h < h_1 \leq 2h$  имеет место точное неравенство

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \psi_j(x), \quad x \in [x_j; x_{j+1}] \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

причем знак равенства в любой фиксированной точке  $x \in [x_j; x_{j+1}]$  реализует функция

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x\right], \\ \frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[x; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}\right]. \end{cases}$$

Доказательство. Продифференцировав обе части равенства (2.1), получаем

$$\begin{aligned}
 S'(x) - f'(x) &= \frac{(x - x_{j+1/2})}{h^2} \frac{1}{h_1} \\
 &\times \left[ \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_{j-1} + \frac{h_1}{2} \right)^2 dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) h_1 (t - x_{j-1}) dt \right] \\
 &\quad + \left( -\frac{1}{h} - \frac{2(x - x_{j+1/2})}{h^2} \right) \frac{1}{h_1} \\
 &\times \left[ \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_j + \frac{h_1}{2} \right)^2 dt + \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_j - \frac{h_1}{2} \right)^2 dt \right] \\
 &\quad + \left( \frac{(x - x_{j+1/2})}{h^2} + \frac{1}{h} \right) \frac{1}{h_1} \\
 &\times \left[ \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) h_1 (x_{j+1} - t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} \frac{1}{2} f''(t) \left( t - x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right)^2 dt \right] \\
 &\quad - \int_{x_j}^x f''(t) dt, \quad x \in [x_j; x_{j+1/2}]. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Отсюда при  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$  имеем

$$\begin{aligned}
 S'(x) - f'(x) &= \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) L_1(x, t) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) L_2(x, t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) L_3(x, t) dt \\
 &\quad + \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t) L_4(x, t) dt + \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) L_5(x, t) dt \\
 &\quad + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) L_6(x, t) dt - \int_{x_j}^x f''(t) L_7(x, t) dt, \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 L_1(x, t) &= \frac{(x - x_{j+1/2})}{2h^2 h_1} \left( t - x_{j-1} + \frac{h_1}{2} \right)^2, & L_2(x, t) &= \frac{(x - x_{j+1/2})}{h^2} (t - x_{j-1}); \\
 L_3(x, t) &= \left( -\frac{1}{h} - \frac{2(x - x_{j+1/2})}{h^2} \right) \frac{1}{2h_1} \left( t - x_j + \frac{h_1}{2} \right)^2; \\
 L_4(x, t) &= \left( -\frac{1}{h} - \frac{2(x - x_{j+1/2})}{h^2} \right) \frac{1}{2h_1} \left( t - x_j - \frac{h_1}{2} \right)^2; \\
 L_5(x, t) &= \left( \frac{(x - x_{j+1/2})}{h^2} + \frac{1}{h} \right) (x_{j+1} - t);
 \end{aligned}$$

$$L_6(x, t) = \left( \frac{(x - x_{j+1/2})}{h^2} + \frac{1}{h} \right) \frac{1}{2h_1} \left( t - x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right)^2, \quad L_7(x, t) = -1.$$

Дальнейшее доказательство при  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$  разбивается на два случая: 1)  $0 < h_1 \leq h$ , 2)  $h < h_1 \leq 2h$ .

С л у ч а й 1. Пусть  $0 < h_1 \leq h$ . В этом случае разность  $S'(x) - f'(x)$  при  $x \in [x_j, x_j + \frac{h_1}{2}]$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} S'(x) - f'(x) = & \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) L_1(x, t) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} f''(t) L_2(x, t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) (L_2(x, t) + L_3(x, t)) dt \\ & + \int_{x_j}^x f''(t) (L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t)) dt + \int_x^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t) (L_4(x, t) + L_5(x, t)) dt \\ & + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) L_5(x, t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) L_6(x, t) dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

а при  $x \in [x_j + \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2}]$  — к виду

$$\begin{aligned} S'(x) - f'(x) = & \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) L_1(x, t) dt + \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} f''(t) L_2(x, t) dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t) (L_2(x, t) + L_3(x, t)) dt \\ & + \int_{x_j}^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t) (L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t)) dt + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^x f''(t) (L_5(x, t) + L_7(x, t)) dt \\ & + \int_x^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t) L_5(x, t) dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t) L_6(x, t) dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для получения оценки уклонения  $|f'(x) - S'(x)|$  при  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$  докажем, что:

а) при  $x \in [x_j, x_{j+1/2}]$  справедливы неравенства  $L_1(x, t) \leq 0$  при  $t \in [x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j-1} + \frac{h_1}{2}]$ ,  $L_2(x, t) \leq 0$  при  $t \in [x_{j-1} + \frac{h_1}{2}; x_j - \frac{h_1}{2}]$ ,  $L_2(x, t) + L_3(x, t) \leq 0$  при  $t \in [x_j - \frac{h_1}{2}; x_j]$ ,  $L_6(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2}]$ ;

б) при  $x \in [x_j, x_j + \frac{h_1}{2}]$  имеют место неравенства  $L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t) \leq 0$  при  $t \in [x_j; x]$ ,  $L_4(x, t) + L_5(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x; x_j + \frac{h_1}{2}]$ ,  $L_5(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1} - \frac{h_1}{2}]$ ;

в) при  $x \in [x_j + \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2}]$  имеют место неравенства  $L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t) \leq 0$  при  $t \in [x_j; x_j + \frac{h_1}{2}]$ ,  $L_5(x, t) + L_7(x, t) \leq 0$  при  $t \in [x_j + \frac{h_1}{2}; x]$ ,  $L_5(x, t) \geq 0$  при  $t \in [x; x_{j+1} - \frac{h_1}{2}]$ .

Все эти неравенства, кроме трех, сразу вытекают из определения функций  $L_i(x, t)$  ( $i = \overline{1, 7}$ ). Необходимо лишь проверить, что  $L_4(x, t) + L_5(x, t) \geq 0$  при  $x \in [x_j, x_j + \frac{h_1}{2}]$ ,  $t \in [x; x_j + \frac{h_1}{2}]$ ;

$L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t) \leq 0$  при  $x \in \left[ x_j + \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$ ,  $t \in \left[ x_j; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$  и  $L_5(x, t) + L_7(x, t) \leq 0$  при  $x \in \left[ x_j + \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$ ,  $t \in \left[ x_j + \frac{h_1}{2}; x \right]$ . Функция  $L_4(x, t) + L_5(x, t)$  является квадратным трехчленом по переменной  $t$ , старший коэффициент которого отрицателен; на концах отрезка  $\left[ x; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$  эта функция принимает отрицательные значения, и абсцисса вершины соответствующей параболы находится левее точки  $x_j$ . Аналогичными свойствами обладает и функция  $L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t)$  при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$ ,  $t \in \left[ x_j; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$ , т.е. она является квадратным трехчленом с отрицательным старшим коэффициентом, отрицательными значениями на концах отрезка  $\left[ x_j; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$  и вершиной соответствующей параболы левее точки  $x_{j+1} - \frac{h_1}{2}$ . Функция  $L_5(x, t) + L_7(x, t)$  является линейной по переменной  $t$  и на концах отрезка  $\left[ x_j + \frac{h_1}{2}; x \right]$  принимает отрицательные значения. Отсюда следует отрицательность данных функций на указанных множествах.

С учетом доказанного из формул (2.9) и (2.10) следует, что для получения оценки сверху для величины  $|f'(x) - S'(x)|$  на классе функций  $W_\infty^2 \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$  в этих формулах необходимо положить  $f''(t) = -1$  при  $t \in \left( x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x \right)$  и  $f''(t) = 1$  при  $t \in \left( x; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right)$ . Вычисляя при таком выборе  $f''(t)$  значения интегралов, стоящих в правых частях формул (2.9)–(2.10), после элементарных преобразований получаем точные неравенства

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \varphi_{j,1}(x), \quad x \in \left[ x_j; x_j + \frac{h_1}{2} \right] \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \varphi_{j,2}(x), \quad x \in \left[ x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2} \right] \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

справедливые для любой функции  $f \in W_\infty^2 \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$ , причем знак равенства в любой фиксированной точке  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$  достигается для функции

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x \right], \\ \frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[ x; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]. \end{cases}$$

Аналогично для функции  $f \in W_\infty^2 \left[ x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j+2} + \frac{h_1}{2} \right]$  при любом  $x \in [x_{j+1/2}; x_{j+1}]$  в силу симметрии функций  $\varphi_j$  и  $S(x)$  относительно середины  $x_{j+1/2}$  отрезка  $[x_j; x_{j+1}]$  выводим точные неравенства

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \varphi_{j,3}(x), \quad x \in \left[ x_{j+1/2}; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right] \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \varphi_{j,4}(x), \quad x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} \right] \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

причем знак равенства в любой фиксированной точке  $x \in [x_{j+1/2}; x_{j+1}]$  достигается для функции

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x \right], \\ \frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[ x; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]. \end{cases}$$

С л у ч а й 2. Пусть  $h < h_1 \leq 2h$ . В этом случае разность  $S'(x) - f'(x)$  при  $x \in \left[ x_j, x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
S'(x) - f'(x) &= \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} f''(t)L_1(x, t)dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t)(L_1(x, t) + L_3(x, t))dt \\
&+ \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t)(L_2(x, t) + L_3(x, t))dt + \int_{x_j}^x f''(t)(L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t))dt \\
&+ \int_x^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t)(L_4(x, t) + L_5(x, t))dt + \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t)(L_4(x, t) + L_6(x, t))dt + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t)L_6(x, t)dt,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

а при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1}/2 \right]$  — к виду

$$\begin{aligned}
S'(x) - f'(x) &= \int_{x_{j-1} - \frac{h_1}{2}}^{x_j - \frac{h_1}{2}} f''(t)L_1(x, t)dt + \int_{x_j - \frac{h_1}{2}}^{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}} f''(t)(L_1(x, t) + L_3(x, t))dt \\
&+ \int_{x_{j-1} + \frac{h_1}{2}}^{x_j} f''(t)(L_2(x, t) + L_3(x, t))dt + \int_{x_j}^{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}} f''(t)(L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t))dt \\
&+ \int_{x_{j+1} - \frac{h_1}{2}}^x f''(t)(L_4(x, t) + L_6(x, t) + L_7(x, t))dt \\
&+ \int_x^{x_j + \frac{h_1}{2}} f''(t)(L_4(x, t) + L_6(x, t))dt + \int_{x_j + \frac{h_1}{2}}^{x_{j+1} + \frac{h_1}{2}} f''(t)L_6(x, t)dt,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Для получения поточечной оценки погрешности докажем, что:

а) при  $x \in \left[ x_j, x_{j+1}/2 \right]$  имеют место неравенства  $L_1(x, t) \leq 0$  при  $t \in \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_j - \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $L_1(x, t) + L_3(x, t) \leq 0$  при  $t \in \left[ x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j-1} + \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $L_2(x, t) + L_3(x, t) \leq 0$  при  $t \in \left[ x_{j-1} + \frac{h_1}{2}; x_j \right]$ ,  $L_6(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$ ;

б) при  $x \in \left[ x_j, x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$  имеют место неравенства  $L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t) \leq 0$  при  $t \in \left[ x_j; x \right]$ ,  $L_4(x, t) + L_5(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $L_4(x, t) + L_6(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$ ;

в) при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1}/2 \right]$  справедливы неравенства  $L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t) \leq 0$  при  $t \in \left[ x_j; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $L_4(x, t) + L_6(x, t) + L_7(x, t) \leq 0$  при  $t \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x \right]$ ,  $L_4(x, t) + L_6(x, t) \geq 0$  при  $t \in \left[ x; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$ .

Все эти неравенства, кроме четырех, сразу вытекают из определения  $L_i(x, t)$  ( $i = \overline{1, 7}$ ). Необходимо лишь проверить, что  $L_4(x, t) + L_5(x, t) + L_7(x, t) \leq 0$  при  $x \in \left[ x_j, x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $t \in [x_j; x]$  и  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} - \right]$ ,  $t \in \left[ x_j; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ ;  $L_4(x, t) + L_5(x, t) \geq 0$  при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$ ,  $t \in \left[ x; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ ;  $L_4(x, t) + L_6(x, t) \geq 0$ ,  $x \in \left[ x_j, x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right]$ ,  $t \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$  и при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$ ,  $t \in \left[ x; x_j + \frac{h_1}{2} \right]$  и  $L_4(x, t) + L_6(x, t) + L_7(x, t) \leq 0$  при  $x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}, x_{j+1/2} \right]$ ,  $t \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x \right]$ . Проверка первых двух неравенств проводится так же, как и в случае 1. Функция  $L_4(x, t) + L_6(x, t)$  является линейной по переменной  $x$  и на концах отрезка  $[x_j; x_{j+1/2}]$  принимает неотрицательные значения. Функция  $L_4(x, t) + L_6(x, t) + L_7(x, t)$  является линейной по переменной  $x$  и на концах отрезка  $\left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2} \right]$  принимает отрицательные значения. Отсюда следует справедливость требуемых неравенств на указанных множествах.

С учетом доказанного из формул (2.11) и (2.12) следует, что для получения оценки сверху для величины  $|f'(x) - S'(x)|$  на классе функций  $W_\infty^2 \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$  в этих формулах следует положить  $f''(t) = -1$  при  $t \in \left( x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x \right)$  и  $f''(t) = 1$  при  $t \in \left( x; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right)$ . Вычисляя при таком выборе  $f''(t)$  значения интегралов, стоящих в правой части формул (2.11), (2.12), после элементарных преобразований получаем точные неравенства

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \psi_{j,1}(x), \quad x \in \left[ x_j; x_j + \frac{h_1}{2} \right] \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \psi_{j,2}(x), \quad x \in \left[ x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2} \right] \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

справедливые для любой функции  $f \in W_\infty^2 \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]$ , причем знак равенства в любой фиксированной точке  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$  достигается для

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x \right], \\ \frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[ x; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]. \end{cases}$$

Аналогично для функции  $f \in W_\infty^2 \left[ x_j - \frac{h_1}{2}; x_{j+2} + \frac{h_1}{2} \right]$  при любом  $x \in [x_{j+1/2}; x_{j+1}]$  в силу симметрии функций  $\psi_j$  и функции  $S$  относительно середины  $x_{j+1/2}$  отрезка  $[x_j; x_{j+1}]$  выводим точные неравенства

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \psi_{j,3}(x), \quad x \in \left[ x_{j+1/2}; x_{j+1} - \frac{h_1}{2} \right] \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

$$|f'(x) - S'(x)| \leq \psi_{j,4}(x), \quad x \in \left[ x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1} \right] \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

причем знак равенства в любой фиксированной точке  $x \in [x_{j+1/2}; x_{j+1}]$  достигается для

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[ x_{j-1} - \frac{h_1}{2}; x \right], \\ \frac{(t-x)^2}{2}, & t \in \left[ x; x_{j+1} + \frac{h_1}{2} \right]. \end{cases}$$

Теорема 4 доказана.

**Теорема 5.** При  $0 \leq h_1 \leq 2h$  имеет место равенство

$$\sup_{f \in W_{\infty}^2(\mathbb{R})} \|f' - S'\|_{\infty} = \frac{h}{2} + \frac{h_1^2}{24h}.$$

**Доказательство.** Напомним, что функции  $\varphi_j(x)$  и  $\psi_j(x)$  являются непрерывными на  $[x_j; x_{j+1}]$ . Снова доказательство разбивается на 2 случая: 1)  $0 < h_1 \leq h$ , 2)  $h < h_1 \leq 2h$ .

**Случай 1.** Пусть  $0 < h_1 \leq h$  и  $x \in [x_j; x_{j+1/2}]$ . Исследуя производные функций  $\varphi_{j,1}(x)$  и  $\varphi_{j,2}(x)$ , получаем, что эти функции являются убывающими соответственно на промежутках  $[x_j; x_j + \frac{h_1}{2}]$  и  $[x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2}]$ . Аналогично при  $x \in [x_{j+1/2}; x_{j+1}]$  устанавливаем, что функции  $\varphi_{j,3}(x)$  и  $\varphi_{j,4}(x)$  являются возрастающими функциями соответственно на промежутках  $[x_{j+1/2}; x_{j+1} - \frac{h_1}{2}]$  и  $[x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1}]$ . Поэтому

$$\max_{x \in [x_j; x_{j+1}]} \varphi_j(x) = \varphi_j(x_j) = \varphi_j(x_{j+1}) = \frac{h}{2} + \frac{h_1^2}{24h} \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

**Случай 2.** Пусть  $h < h_1 \leq 2h$ . При  $x \in [x_j; x_{j+1} - \frac{h_1}{2}]$ , исследуя знак производной функции  $\psi_{j,1}(x)$ , получаем, что  $\psi_{j,1}(x)$  убывает на  $[x_j; x_{j+1} - \frac{h_1}{2}]$ . Случай  $x \in [x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2}]$  требует более тонкого обоснования.

Имеем

$$\begin{aligned} \psi_{j,2}''(x) &= \frac{h_1}{2h^2} - \frac{3}{2h} - \frac{1}{h_1} + \left(\frac{5}{hh_1} - \frac{3}{h^2}\right)(x - x_j) + \frac{4}{h^2h_1}(x - x_j)^2, \\ \psi_{j,2}''(x_{j+1} - \frac{h_1}{2}) &= \frac{(8h - 3h_1)(h - h_1)}{h^2h_1} \leq 0, \quad \psi_{j,2}''(x_{j+1/2}) = \frac{(5h - h_1)(h - h_1)}{2h^2h_1} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поскольку  $\psi_{j,2}''(x)$  представляет собой квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом, то из (2.13) выводим, что  $\psi_{j,2}''(x) < 0$  при  $x \in [x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2}]$ . Поэтому функция  $\psi_{j,2}'(x)$  убывает на отрезке  $[x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2}]$  и

$$\max_{x \in [x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2}]} \psi_{j,2}'(x) = \psi_{j,2}'\left(x_{j+1} - \frac{h_1}{2}\right).$$

Таким образом, для доказательства убывания функции  $\psi_{j,2}(x)$  на промежутке  $[x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2}]$  достаточно установить, что  $\psi_{j,2}'\left(x_{j+1} - \frac{h_1}{2}\right) < 0$ . Имеем

$$\psi_{j,2}'\left(x_{j+1} - \frac{h_1}{2}\right) = \frac{-42h_1h^2 + 16h^3 + 27h_1^2h - 5h_1^3}{6h_1h^2}.$$

Корнями числителя выписанной дроби являются числа  $\frac{h_1}{2}$ ,  $\left(\frac{17}{16} + \frac{\sqrt{129}}{16}\right)h_1 \approx 1,77h_1$ ,  $\left(\frac{17}{16} - \frac{\sqrt{129}}{16}\right)h_1 \approx 0,35h_1$ . Отсюда следует, что при  $h < h_1 \leq 2h$  справедливо неравенство  $\psi_{j,2}'\left(x_{j+1} - \frac{h_1}{2}\right) < 0$ . Следовательно, функция  $\psi_{j,2}(x)$  убывает на всем отрезке  $[x_{j+1} - \frac{h_1}{2}; x_{j+1/2}]$ .

В силу симметрии формул для  $\psi_j(x)$  получаем, что функции  $\psi_{j,3}(x)$  и  $\psi_{j,4}(x)$  возрастают соответственно на отрезках  $[x_{j+1/2}; x_j + \frac{h_1}{2}]$  и  $[x_j + \frac{h_1}{2}; x_{j+1}]$ . Таким образом, установлено, что

$$\max_{x \in [x_j; x_{j+1}]} \psi_j(x) = \psi_j(x_j) = \psi_j(x_{j+1}) = \frac{h}{2} + \frac{h_1^2}{24h} \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

Теорема 5 полностью доказана.

**З а м е ч а н и е.** При  $h_1 = 0$  теоремы 1–3 и 5 доказаны Ю.Н. Субботиным [5].

Автор выражает глубокую благодарность профессору К. Еттеру (Германия) и В.Л. Мирошниченко (Новосибирск) за полезное обсуждение результатов настоящей работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. **Piegl L., Tiller W.** The NURBS Book. В.; Heidelberg. N. Y.: Springer-Verlag, 1997.
3. **Завьялов Ю. С.** О формулах локальной аппроксимации, точных на кубических сплайнах // Вычислительные системы. 1998. Т. 128. С. 75–88.
4. **Корнейчук Н. П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984.
5. **Субботин Ю. Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
6. **Субботин Ю. Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 109. С. 35–60.
7. **Субботин Ю. Н.** Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением  $n$ -й производной при больших интервалах усреднения // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 1. С. 114–132.
8. **Субботин Ю. Н.** Экстремальная в  $L_p$  интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1997. Т. 61, № 1. С. 177–198.
9. **Шевалдин В. Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
10. **Шевалдин В.Т.** Экстремальная интерполяция в среднем при перекрывающихся интервалах усреднения и L-сплайны // Изв. РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 4. С. 201–224.

Поступила 20.03.2007

Научное издание

**ТРУДЫ**  
**ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН**

Сборник научных трудов

*Рекомендовано к изданию Ученым советом  
Института математики и механики  
и НИСО Уральского отделения Российской академии наук*

ЛР № 020764 от 24.04.98

Редактор Н. М. Юркова  
Технический редактор Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

---

НИСО УрО РАН № 50(08).  
Подписано в печать 02.04.08. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 24, 0. Уч.-изд. л. 19,4. Тираж 200 экз. Заказ 2436.

---

Институт математики и механики УрО РАН  
620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии  
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”  
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д.17, офис 226