

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

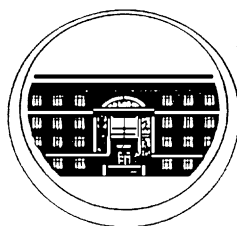
Том 13, № 3

2007

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ
УрО РАН**

**Том 13
№ 3**

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ



Екатеринбург
2007

СОДЕРЖАНИЕ

Е. Н. Акимова, Д. В. Гемайдинов. Параллельные алгоритмы решения задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое	3
В. А. Баранский, Т. А. Королева. Хроматическая определяемость атомов в решетках полных многодольных графов	22
В. А. Белоногов. Диаграммы Юнга без крюков длины четыре и характеры группы S_n	30
А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$	41
В. В. Кабанов, С. В. Унегов. Сильно регулярные графы с условием Хоффмана	54
А. В. Коныгин. О примитивных группах подстановок с нетривиальными глобальными стабилизаторами	61
Т. А. Королева. Хроматическая определяемость некоторых полных трехдольных графов I	65
П. Д. Лебедев. Вычисление меры невыпуклости плоских множеств	84
Л. А. Мельникова, В. Л. Розенберг. Сферическая блоковая модель динамики и сейсмичности литосферы: различные модификации и вычислительные эксперименты	95
Д. А. Серков. Стратегии минимаксного риска (сожаления) в системе с простыми движениями	121
А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов. О реализации метода динамического программирования в обобщенной задаче курьера	136

УДК 517.968:519.612:004.272.43

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ В СЛОЕ¹

Е. Н. Акимова, Д. В. Гемайдинов

Предложены и численно реализованы на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС–1000/32 новые параллельные прямые и итерационные алгоритмы решения задачи предварительной обработки гравитационных данных (выделение источников гравитационного поля) в криволинейном слое и задачи гравиметрии о восстановлении переменной плотности в этом слое по гравитационным данным. Параллельные алгоритмы протестированы при решении модельных задач. Проведен анализ эффективности и ускорения параллельных алгоритмов. Комплекс параллельных алгоритмов размещен на разработанном специализированном Web-сервере.

1. Введение

Рассматривается задача выделения источников гравитационного поля, локализованных в горизонтальном или криволинейном слое между заданными глубинами, и определения переменной плотности в этом слое.

Решение обратной задачи гравиметрии разбивается на два этапа. На первом этапе необходимо выделить аномальное поле из измеренного гравитационного поля. Выделенное аномальное поле служит правой частью базового интегрального уравнения первого рода относительно искомой плотности. Методика предварительной обработки гравитационных данных предложена П.С. Мартышко и И.Л. Пруткиным в работе [1] и сводится к последовательному решению трех задач: решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа на всей границе или части границы исследуемой области, вычислению интегрального оператора (пересчет поля вверх) и решению двумерного интегрального уравнения первого рода (пересчет поля вниз). Второй этап связан непосредственно с решением линейного двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода для нахождения переменной плотности в слое [2].

При исследовании каждого из двух этапов решения задачи гравиметрии приходится иметь дело с интегральными уравнениями Фредгольма, которые относятся к классу существенно некорректных задач. Поэтому при разработке методов их решения используются идеи итеративной регуляризации [3].

В данной работе предложены и численно реализованы на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС–1000/32 новые параллельные прямые и итерационные алгоритмы решения задачи предварительной обработки гравитационных данных, а для задачи о восстановлении переменной плотности в слое по гравитационным данным привлекаются алгоритмы, описанные в [6, 13].

Параллельные алгоритмы протестированы при решении модельной задачи для синтетического гравитационного поля. Проведен анализ эффективности и ускорения параллельных алгоритмов. Комплекс параллельных алгоритмов размещен на разработанном специализированном Web-сервере.

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 06-01-00116).

2. Постановка задачи гравиметрии и параллельные методы решения

Рассматривается задача о нахождении переменной плотности $\sigma = \sigma(x, y)$ в горизонтальном слое $\Pi = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, H_1 \leq z \leq H_2\}$, где H_1, H_2 — константы, либо в криволинейном слое $\Pi I = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, H_1(x, y) \leq z \leq H_2(x, y)\}$ по гравитационным данным, измеренным на площади $D = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ земной поверхности. Используется априорная информация об отсутствии аномалий плотности вне слоя с криволинейными границами $H_1 = H_1(x, y)$ и $H_2 = H_2(x, y)$ такими, что $H_1 < H_2 \forall (x, y)$, и выполняется условие $H_i(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow \pm\infty]{y \rightarrow \pm\infty} h_i = \text{const}$. При этом предполагается, что распределение плотности $\sigma = \sigma(x, y)$ внутри слоя не зависит от z (ось z направлена вниз).

Задача нахождения неизвестной плотности $\sigma(x, y)$ сводится к решению линейного двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$A\sigma \equiv f \iint_{a \ c}^{b \ d} \left\{ \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_1^2(x', y')]^{1/2}} - \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_2^2(x', y')]^{1/2}} \right\} \sigma(x', y') dx' dy' = \Delta g(x, y), \quad (2.1)$$

где f — гравитационная постоянная, $\Delta g(x, y)$ — гравитационный эффект, порождаемый источниками в горизонтальном или криволинейном слое.

После дискретизации уравнения на сетке, где задана зависимость $\Delta g(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам задача (2.1) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) либо с симметричной положительно определенной матрицей (горизонтальный слой), либо с несимметричной матрицей (криволинейный слой).

Так как уравнение (2.1) относится к классу некорректно поставленных задач, то СЛАУ, возникающее в результате дискретизации уравнения, является плохо обусловленной и преобразуется к виду

$$(A + \alpha E)z = b, \quad (2.2)$$

где α — параметр регуляризации.

В случае криволинейного слоя исходная матрица СЛАУ несимметрична, поэтому эта система предварительно преобразуется к виду

$$(A^T A + \alpha' E)z = A^T b, \quad (2.3)$$

где A^T — транспонированная матрица, α' — параметр регуляризации.

Для решения уравнений (2.2) и (2.3) используются следующие итерационные методы градиентного типа [4].

1) Итеративно регуляризованный метод простой итерации (МПИ)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{1}{\lambda_{max}} [(A + \alpha E)z^k - b], \quad (2.4)$$

где λ_{max} — максимальное собственное значение матрицы $A + \alpha E$ (симметричный случай).

2) Метод минимальных невязок (ММН)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{(A(Az^k - b), Az^k - b)}{\|A(Az^k - b)\|^2} (Az^k - b). \quad (2.5)$$

3) Метод наискорейшего спуска (МНС)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{\|A^T A z^k - A^T b\|^2}{\|A(A^T A z^k - A^T b)\|^2} A^T (A z^k - b). \quad (2.6)$$

4) Метод минимальной ошибки (ММО) для случая (2.3)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{\|Az^k - b\|^2}{\|A^T(Az^k - b)\|^2} A^T(Az^k - b). \quad (2.7)$$

Условием останова итерационных процессов является следующее: $\frac{\|Az^k - b\|}{\|b\|} < \varepsilon$.

Численная реализация и распараллеливание итерационных методов (2.4)–(2.7) для решения обратной задачи гравиметрии (2.1) выполнены на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС–1000/32 с помощью библиотеки MPI [5] на языке Фортран.

Преимущество использования параллельных алгоритмов при решении задачи о восстановлении плотности в слое с реальными гравитационными данными на МВС–1000 показано в работе [6].

Распараллеливание итерационных методов градиентного типа основано на разбиении матрицы A горизонтальными полосами на m блоков, а вектора решения z и вектора правой части b СЛАУ на m частей так, что $n = m \times L$, где n — размерность системы уравнений, m — число процессоров.

На каждой итерации каждый из m процессоров вычисляет свою часть вектора решения. В случае умножения матрицы A на вектор z каждый из m процессоров умножает свою часть строк матрицы A на вектор z . В случае матричного умножения $A^T A$ каждый из m процессоров умножает свою часть строк транспонированной матрицы A^T на всю матрицу A . Host-процессор отвечает за пересылки данных и также вычисляет свою часть вектора решения.

3. Предварительная обработка гравитационных данных и алгоритмы параллельной реализации

Предварительная обработка гравитационных данных, связанная с выделением аномально го поля (т.е. с получением правой части уравнения (2.1)), выполняется по методике, разработанной в [1]. Кратко опишем методику нахождения аномального поля $\Delta g(x, y)$ в предположении, что выше исследуемого слоя нет источников, вытянутых в горизонтальном направлении.

Существенный вклад в гравитационное поле слоя вносят источники, залегающие вне поля. Для решения задачи об определении плотности в слое необходимо отделить поле от этого слоя путем исключения боковых источников поля и источников, залегающих выше и ниже рассматриваемого слоя.

Принято считать, что при пересчете поля вверх на уровень $z = -H$ влияние приповерхностных источников (до глубины H) значительно ослабевает. Поэтому измеренное на земной поверхности поле $U(x, y, z)|_{z=0}$ сначала продолжается вверх на уровень $z = -H$. Пересчет на высоту H реализуется по формуле Пуассона

$$U(x, y, H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{3/2}} U(x', y', 0) dx' dy'. \quad (3.1)$$

Искажения, связанные с этой процедурой, наиболее значительны вблизи границы области D вследствие интегрирования не по бесконечной, а по конечной области D . Поэтому с целью уменьшения искажений из измеренного поля $U(x, y, 0)$ предварительно (т.е. до пересчета поля вверх) вычитаются значения функции $u(x, y)$, которая является решением плоской задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad u(x, y)|_{\partial D} = \varphi(x, y). \quad (3.2)$$

Здесь $\varphi(x, y) = U(x, y, 0)$, т.е. искомая функция принимает на границе области D те же значения, что и заданное гравитационное поле.

Далее, чтобы окончательно избавиться от влияния источников в горизонтальном слое от дневной поверхности до глубины H , пересчитанное вверх поле $\bar{U}(x, y, -H)$ затем продолжается вниз на глубину $z = H$. Для нахождения функции $u(x, y)$, описывающей это поле, необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Ku \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2H)^2]^{3/2}} u(x', y') dx' dy' = \bar{U}(x, y, -H). \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) относится к классу некорректно поставленных задач, поэтому при его решении привлекается регуляризация сдвигом (схема Лаврентьева)

$$(K + \alpha I)u = \bar{U},$$

где α — параметр регуляризации.

Особенности найденной функции лежат глубже $z = H$. Выше этого уровня она является гармонической, поэтому ее можно трактовать как поле глубинных источников. Сумма этого поля, пересчитанного на земную поверхность, и решения задачи Дирихле используется как поле глубинных и боковых (т.е. сторонних) источников.

Разность исходных значений гравитационного поля $U(x, y, 0)$ и упомянутой выше суммы принимается в качестве гравитационного эффекта от источников, лежащих в горизонтальном слое от земной поверхности до глубины $z = H$.

Теперь, чтобы выделить гравитационный эффект (т.е. функцию Δg в уравнении (2.1)) от источников в горизонтальном слое $\Pi = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, H_1 \leq z \leq H_2\}$, достаточно выполнить описанную выше процедуру для двух значений $H = H_2, H = H_1, H_2 > H_1$ и взять разность двух полей. В случае криволинейного слоя полагается $H_1 = \max_D H_1(x, y)$ и $H_2 = \min_D H_2(x, y)$.

Таким образом, в соответствии с методикой *задача предварительной обработки гравитационных данных* сводится к последовательному решению трех задач:

- 1) решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа на всей или части границы исследуемой области (3.2) для исключения боковых источников поля;
- 2) вычислению интегрального оператора (3.1) для пересчета поля вверх;
- 3) решению двумерного интегрального уравнения первого рода (3.3) для пересчета поля вниз.

Для решения задачи Дирихле предлагаются следующие алгоритмы.

- 1) Итерационный метод Гаусса-Зейделя (МГЗ) для конечно-разностной схемы “крест” на пятиточечном шаблоне сетки (рис. 1)

$$u_{ij}^{k+1} = 0.25(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^{k+1} - h^2 \bar{\varphi}_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, N-1. \quad (3.4)$$

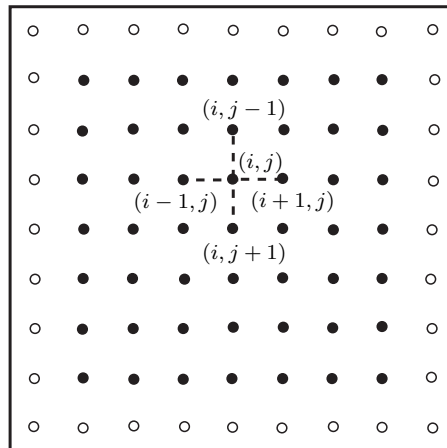


Рис. 1. Пятиточечный шаблон на сетке $N \times N$.

2) Метод разделения переменных (МРП) в сеточной прямоугольной области.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа (3.2) в прямоугольной области D сводится к задаче Дирихле для уравнения Пуассона с однородными граничными условиями путем изменения правой части уравнения в приграничных узлах. Новая правая часть определяется формулой:

$$\bar{\varphi}(x, y) = \frac{1}{h_1^2} \varphi_1(x, y) + \frac{1}{h_2^2} \varphi_2(x, y),$$

где

$$\varphi_1(x, y) = \begin{cases} \varphi(0, y), & x = h_1; \\ 0, & 2h_1 \leq x \leq l_1 - 2h_1; \\ \varphi(l_1, y), & x = l_1; \end{cases}$$

$$\varphi_2(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, 0), & y = h_2; \\ 0, & 2h_2 \leq y \leq l_2 - 2h_2; \\ \varphi(x, l_2), & y = l_2; \end{cases}$$

$$l_1 = b - a, \quad l_2 = d - c.$$

Функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ определяются из исходных данных, описывающих гравитационное поле на границе области D , с учетом условия $\varphi(x, y) = U(x, y, 0)$.

МРП для задачи Дирихле для уравнения Пуассона с однородными граничными условиями в области D имеет вид

$$\phi_k(i) = \sum_{j=1}^{N-1} \bar{\varphi}(i, j) \sin \frac{k\pi j}{N}, \quad k, i = 1, \dots, N-1; \quad (3.5)$$

$$-\nu_k(i-1) + (2 + h^2 \lambda_k) \nu_k(i) - \nu_k(i+1) = h^2 \phi_k(i), \quad (3.6)$$

$$\nu_k(0) = \nu_k(N) = 0, \quad i, k = 1, \dots, N-1;$$

$$u_k(i, j) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \nu_k(i) \sin \frac{k\pi j}{N}, \quad i, j = 1, \dots, N-1; \quad (3.7)$$

где

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2N}; \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Численная реализация и распараллеливание алгоритмов для решения задачи предварительной обработки гравитационных данных выполнены на МВС-1000/32 с помощью библиотеки MPI на языке Фортран.

В соответствии с методикой предварительной обработки гравитационных данных *на этапе пересчета поля вверх* при вычислении интегрального оператора (3.1) используется параллельный алгоритм умножения матрицы на вектор, *на этапе пересчета поля вниз* при решении интегрального уравнения (3.3) используются описанные выше параллельные итерационные методы (2.4)–(2.7).

Распараллеливание итерационного метода Гаусса-Зейделя (3.4) для решения задачи Дирихле в прямоугольной области основано на декомпозиции исходной области на вертикальные подобласти. В каждой подобласти значения функций u_{ij}^{k+1} вычисляются независимо. На границах подобластей граничные значения пересылаются в соседние процессоры. Host-процессор отвечает за пересылки данных и также вычисляет свою часть решения.

4. Распараллеливание метода разделения переменных для решения задачи Дирихле в прямоугольной области

Предлагается два способа распараллеливания метода разделения переменных (3.5)–(3.7), отличающихся распределением исходных данных вертикальными либо горизонтальными полосами по процессорам (рис. 2).

В случае горизонтального разбиения исходной области на L подобластей (горизонтального распределения исходных данных по процессорам) суммы в (3.5) и (3.7) разбиваются на L частей, и каждый из процессоров вычисляет свою часть функций $\phi_k(i)$ и $u_k(i, j)$, где $k, j = 1, \dots, N - 1$. Краевые задачи (3.6) решаются методом обычной прогонки [7].

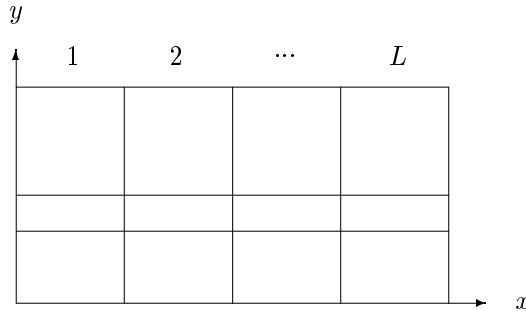


Рис. 2. Разбиение области на подобласти.

В случае вертикального разбиения исходной области на L подобластей (вертикального распределения исходных данных по процессорам) функции $\phi_k(i)$ и $u_k(i, j)$ для $k, j = 1, \dots, N - 1$ вычисляются на процессорах независимо. Краевые задачи вида (3.6) решаются с помощью алгоритма параллельной прогонки, предложенного в работе [8] для решения краевой задачи для трехточечного разностного уравнения на отрезке.

Идея алгоритма 1 распараллеливания прогонки заключается в разбиении исходного отрезка $(0, N)$ на L интервалов распараллеливания $(k, k + m)$, $k = 0, m, \dots, N - m$ так, что $n = L \cdot m$. Точки разбиения отрезка $k = 0, m, \dots, N$ выбираются в качестве узлов распараллеливания, а искомые неизвестные в узлах — в качестве параметрических $-Y_k$. Относительно Y_k строится вспомогательная система уравнений, после решения которой остальные искомые неизвестные находятся на L интервалах независимо.

Алгоритм 1 распараллеливания прогонки обобщается здесь следующим образом для решения трехдиагональных систем уравнений общего вида:

$$\begin{cases} C_0 Y_0 - B_0 Y_1 = F_0, & i = 0, \\ -A_i Y_{i-1} + C_i Y_i - B_i Y_{i+1} = F_i, & i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ -A_n Y_{n-1} + C_n Y_n = F_n, & i = n. \end{cases} \quad (4.1)$$

На L интервалах рассмотрим следующие задачи:

$$\begin{aligned} -A_i U_{i-1} + C_i U_i - B_i U_{i+1} &= 0, & U_k &= 1, & U_{k+m} &= 0, \\ -A_i V_{i-1} + C_i V_i - B_i V_{i+1} &= 0, & V_k &= 0, & V_{k+m} &= 1, \\ -A_i W_{i-1} + C_i W_i - B_i W_{i+1} &= F_i, & W_k &= 0, & W_{k+m} &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $i = k + 1, \dots, k + m - 1$.

Если U_i, V_i, W_i — решения задач (4.2) на $(k, k + m)$, а Y_i — решение исходной задачи (4.1) на $(k, k + m)$, то по принципу суперпозиции Y_i на $(k, k + m)$ может быть записано в виде линейной комбинации решений U_i, V_i, W_i :

$$Y_i = Y_k U_i + Y_{k+m} V_i + W_i. \quad (4.3)$$

Подставляя (4.3) в систему (4.1) в точках $k = 0, m, \dots, n$, получим редуцированную систему уравнений относительно параметров Y_k :

$$\begin{cases} \overline{C}_0 Y_0 - \overline{B}_0 Y_m = \overline{F}_0, & k = 0, \\ -\overline{A}_k Y_{k-m} + \overline{C}_k Y_k - \overline{B}_k Y_{k+m} = \overline{F}_k, & k = m, 2m, \dots, n-m, \\ -\overline{A}_n Y_{n-m} + \overline{C}_n Y_n = \overline{F}_n, & k = n, \end{cases} \quad (4.4)$$

где коэффициенты в уравнениях определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{C}_0 &= C_0 - B_0 U_1, & \overline{B}_0 &= B_0 V_1, & \overline{F}_0 &= F_0 + B_0 W_1, \\ \overline{A}_k &= A_k U_{k-1}, & \overline{C}_k &= C_k - A_k V_{k-1} - B_k U_{k+1}, \\ \overline{B}_k &= B_k V_{k+1}, & \overline{F}_k &= F_k + A_k W_{k-1} + B_k W_{k+1}, \\ \overline{A}_n &= A_n U_{n-1}, & \overline{C}_n &= C_n - A_n V_{n-1}, & \overline{F}_n &= F_n + A_n W_{n-1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

После вычисления параметров Y_k остальные искомые неизвестные Y_i находятся из (4.3) на каждом из L интервалов независимо.

Алгоритм 1 распараллеливания прогонки для решения СЛАУ (4.1) состоит из следующих шагов:

$$(4.2) \rightarrow (4.5) \rightarrow (4.4) \rightarrow (4.3).$$

Заметим, что редуцированная система уравнений (4.4) и задачи (4.2) имеют вид исходной системы (4.1), но меньшую размерность.

Ниже приводятся формулы метода прогонки для решения задач (4.2) на интервалах распараллеливания $(k, k+m)$, $k = 0, m, \dots, n-m$.

Прямой ход прогонки:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{B_{k+1}}{C_{k+1}}, & \alpha_i &= \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_{i-1}}, \\ \beta_{k+1} &= \frac{A_{k+1}}{C_{k+1}}, & \beta_i &= \frac{A_i \beta_{i-1}}{C_i - A_i \alpha_{i-1}}, \\ \gamma_{k+1} &= \frac{F_{k+1}}{C_{k+1}}, & \gamma_i &= \frac{F_i + A_i \gamma_{i-1}}{C_i - A_i \alpha_{i-1}}, \quad i = k+2, \dots, k+m-1. \end{aligned}$$

Обратный ход прогонки:

$$\begin{aligned} V_{k+m-1} &= \alpha_{k+m-1}, & V_i &= \alpha_i V_{i+1}, \\ U_{k+m-1} &= \beta_{k+m-1}, & U_i &= \alpha_i U_{i+1} + \beta_i, \\ W_{k+m-1} &= \gamma_{k+m-1}, & W_i &= \alpha_i W_{i+1} + \gamma_i, \quad i = k+m-2, \dots, k+1. \end{aligned}$$

Условием, гарантирующим корректность и устойчивость метода прогонки, является условие диагонального преобладания матрицы системы [9]. Возникает вопрос: следует ли из условия устойчивости метода прогонки для решения исходной системы уравнений (4.1) условие устойчивости метода прогонки для решения системы уравнений (4.4)? Ответ на этот вопрос положительный.

Выпишем для исходной системы уравнений (4.1) достаточные признаки корректности и устойчивости метода прогонки.

$$\text{Признак А.} \quad \frac{|C_i| - |A_i| - |B_i|}{|C_i| + |A_i| + |B_i|} \geq \theta, \quad \theta > 0, \quad \max\{|C_k|, |A_k|, |B_k|\} \geq C > 0.$$

$$\text{Признак В.} \quad |C_i| \geq |A_i| + |B_i| + \delta, \quad \delta > 0.$$

Покажем, что из А следует В, т.е. признак А является более сильным.

Действительно,

$$|C_i| - |A_i| - |B_i| \geq |A_i| + |B_i| + \theta\{|C_i| + |A_i| + |B_i|\} - |A_i| - |B_i| \geq \theta\{|C_i| + |A_i| + |B_i|\} > 0.$$

Следовательно,

$$|C_i| \geq |A_i| + |B_i| + \delta, \quad \text{где } \delta = \theta\{|C_i| + |A_i| + |B_i|\}.$$

Теорема 1. Если для исходной системы уравнений (4.1) выполняются достаточные признаки корректности и устойчивости метода прогонки A или B , то в обоих случаях для системы уравнений (4.4) будут выполняться признаки A и B , а именно:

1. Если для системы (4.1) выполняется признак A , то для системы (4.4) выполняется признак A с увеличением θ

$$\frac{|\overline{C}_k| - |\overline{A}_k| - |\overline{B}_k|}{|\overline{C}_k| + |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k|} \geq \overline{\theta} > 0,$$

$$\text{где } \overline{\theta} = \theta + \frac{(1 + \theta)\{|A_k|(1 - |\overline{U}_{k-1}|) + |B_k|(1 - |\overline{U}_{k+1}|)\}}{|\overline{C}_k| + |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k|}, \quad |\overline{U}_{k-1}| \leq 1, \quad |\overline{U}_{k+1}| \leq 1.$$

2. Если для системы (4.1) выполняется признак B , то для системы (4.4) выполняется более сильный признак A

$$|\overline{C}_k| \geq |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k| + \overline{\delta}, \quad \overline{\delta} > 0.$$

Доказательство. Так как из A следует B , то для системы (4.4) достаточно доказать выполнение признака A .

а) Пусть для системы (4.1) выполняется признак A .

Рассмотрим

$$\begin{aligned} |\overline{C}_k| - |\overline{A}_k| - |\overline{B}_k| - \theta\{|\overline{C}_k| + |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k|\} &= |C_k - A_k V_{k-1} - B_k U_{k+1}| - |A_k U_{k-1}| - |B_k V_{k+1}| \\ &\quad - \theta|C_k - A_k V_{k-1} - B_k U_{k+1}| - \theta|A_k U_{k-1}| - \theta|B_k V_{k+1}| \geq |C_k| - |A_k||V_{k-1}| - |B_k||U_{k+1}| \\ &\quad - |A_k||U_{k-1}| - |B_k||V_{k+1}| - \theta|C_k| - \theta|A_k||V_{k-1}| - \theta|B_k||U_{k+1}| - \theta|A_k||U_{k-1}| - \theta|B_k||V_{k+1}| \\ &\geq |A_k| + |B_k| + \theta|C_k| + \theta|A_k| + \theta|B_k| - |A_k||V_{k-1}| - |B_k||U_{k+1}| - |A_k||U_{k-1}| - |B_k||V_{k+1}| \\ &\quad - \theta|C_k| - \theta|A_k||V_{k-1}| - \theta|B_k||U_{k+1}| - \theta|A_k||U_{k-1}| - \theta|B_k||V_{k+1}| \\ &= (1 + \theta)|A_k|(1 - |U_{k-1}| - |V_{k-1}|) + (1 + \theta)|B_k|(1 - |U_{k+1}| - |V_{k+1}|) \\ &= (1 + \theta)\{|A_k|(1 - |\overline{U}_{k-1}|) + |B_k|(1 - |\overline{U}_{k+1}|)\} > 0, \quad \text{т.к. } |\overline{U}_{k-1}| \leq 1, \quad |\overline{U}_{k+1}| \leq 1, \end{aligned}$$

где \overline{U}_{k-1} и \overline{U}_{k+1} — решения задач (4.2) с краевыми условиями 1 и 1.

Следовательно,

$$\frac{|\overline{C}_k| - |\overline{A}_k| - |\overline{B}_k|}{|\overline{C}_k| + |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k|} \geq \overline{\theta} > 0,$$

$$\text{где } \overline{\theta} = \theta + \frac{(1 + \theta)\{|A_k|(1 - |\overline{U}_{k-1}|) + |B_k|(1 - |\overline{U}_{k+1}|)\}}{|\overline{C}_k| + |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k|}.$$

б) Пусть для системы (4.1) выполняется признак B .

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{|\overline{C}_k| - |\overline{A}_k| - |\overline{B}_k|}{|\overline{C}_k| + |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k|} &\geq \frac{|C_k - A_k V_{k-1} - B_k U_{k+1}| - |A_k U_{k-1}| - |B_k V_{k+1}|}{|\overline{C}_k| + |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k|} \\ &\geq \frac{|C_k| - |A_k||V_{k-1}| - |B_k||U_{k+1}| - |A_k U_{k-1}| - |B_k V_{k+1}|}{|\overline{C}_k| + |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{|A_k|(1 - |V_{k-1}| - |U_{k-1}|) + |B_k|(1 - |U_{k+1}| - |V_{k+1}|) + \delta}{|\overline{C}_k| + |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k|} \\ &= \frac{|A_k|(1 - |\overline{U}_{k-1}|) + |B_k|(1 - |\overline{U}_{k+1}|) + \delta}{|\overline{C}_k| + |\overline{A}_k| + |\overline{B}_k|} = \theta > 0, \end{aligned}$$

так как $|\overline{U}_{k-1}| \leq 1$, $|\overline{U}_{k+1}| \leq 1$, $\delta > 0$.

Итак, доказано выполнение признака A . Доказательство закончено. При этом получили: в случае а) — увеличение θ , в случае б) — выполнение более сильного признака.

Алгоритм 2 распараллеливания прогонки, описанный в работе [10] для случая разбиения отрезка на два интервала, и обоснование этого алгоритма обобщаются в настоящей работе для случая разбиения отрезка $(0, N)$ на произвольное число L интервалов распараллеливания $N = L \cdot M$ следующим образом.

Рассмотрим краевую задачу для трехточечного разностного уравнения на отрезке $(0, N)$

$$\Lambda_h Y_i = F_i, \quad Y_0 = F_0, \quad Y_N = F_N, \quad (4.6)$$

$$\Lambda_h Y_i \equiv -A_i Y_{i-1} + C_i Y_i - B_i Y_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Зададим в узлах $l \cdot M$, $l = 1, \dots, L-1$ произвольные значения Y_{lM}^0 (рис. 3).

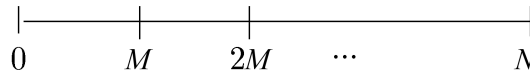


Рис. 3. Разбиение исходного отрезка на интервалы.

В результате исходная задача (4.6) разбивается на $2(L-1)$ независимых подзадач с краевыми условиями F_0, F_N, Y_{lM}^0 , а именно:

$$\begin{cases} \Lambda_h Y_i^1 = F_i, & Y_0^1 = F_0, & Y_M^1 = Y_M^0, & i = 1, \dots, M-1, \\ \Lambda_h Y_i^2 = F_i, & Y_M^2 = Y_M^0, & Y_N^2 = F_N, & i = M+1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (4.7)$$

...

$$\begin{cases} \Lambda_h Y_i^{3L-5} = F_i, & Y_0^{3L-5} = F_0, & Y_{N-M}^{3L-5} = Y_{N-M}^0, & i = 1, \dots, N-M-1, \\ \Lambda_h Y_i^{3L-4} = F_i, & Y_{N-M}^{3L-4} = Y_{N-M}^0, & Y_N^{3L-4} = F_N, & i = N-M+1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Решая задачи (4.7), найдем

$$Y_{M-1}^1, Y_{M+1}^2, Y_{2M-1}^4, Y_{2M+1}^5, \dots, Y_{N-M-1}^{3L-5}, Y_{N-M+1}^{3L-4}.$$

Далее на отрезках $(M-1, M+1)$, $(2M-1, 2M+1)$, ..., $(N-M-1, N-M+1)$ решаем сеточные уравнения

$$\begin{aligned} \Lambda_h Y_M^3 = F_M, & \quad Y_{M-1}^3 = Y_{M-1}^1, & \quad Y_{M+1}^3 = Y_{M+1}^2; \\ \Lambda_h Y_{2M}^6 = F_{2M}, & \quad Y_{2M-1}^6 = Y_{2M-1}^4, & \quad Y_{2M+1}^6 = Y_{2M+1}^5; \end{aligned} \quad (4.8)$$

...

$$\Lambda_h Y_{N-M}^{3L-3} = F_{N-M}, \quad Y_{N-M-1}^{3L-3} = Y_{N-M-1}^{3L-5}, \quad Y_{N-M+1}^{3L-3} = Y_{N-M+1}^{3L-4};$$

значения которых в точках $M, 2M, \dots, N - M$ возьмем в качестве новых краевых условий Y_{lM}^1 ; $l = 1, \dots, L - 1$ для задач (4.7) и т. д.

Последовательность $Y_{lM}^0, Y_{lM}^1, Y_{lM}^2, \dots$ сходится к искомым решениям Y_{lM}^* на границах L интервалов распараллеливания для задачи (4.6). Более того, Y_{lM}^* явно выражается через $Y_{lM}^0, Y_{lM}^1, Y_{lM}^2$. Подзадачи (4.7) решаются всего один раз, если воспользоваться принципом суперпозиции (4.3)–(4.2) для решения Y_i на L интервалах распараллеливания.

Теорема 2. *Если для исходной задачи (4.6) выполняется достаточное условие устойчивости метода прогонки — признак В, то искомые неизвестные на границах L интервалов распараллеливания, определяемые в результате решения задач (4.8), имеют вид*

$$Y_{lM}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{lM}^n = \frac{Q}{1 - q}, \quad |q| < 1, \quad l = 1, \dots, L - 1; \quad (4.9)$$

где Q и q вычисляются по формулам

$$q = \frac{Y_{lM}^2 - Y_{lM}^1}{Y_{lM}^1 - Y_{lM}^0}, \quad Q = \frac{Y_{lM}^1 Y_{lM}^1 - Y_{lM}^0 Y_{lM}^2}{Y_{lM}^1 - Y_{lM}^0};$$

Y_{lM}^0 — начальные приближения в узлах $l \cdot M$; Y_{lM}^1, Y_{lM}^2 — последовательные решения задач (4.8).

Доказательство. Пусть для исходной задачи (4.6) выполняется достаточное условие устойчивости метода прогонки — признак В. Запишем уравнения (4.8) в точках $l \cdot M$, $l = 1, \dots, L - 1$. Получим

$$-A_{lM} Y_{lM-1} + C_{lM} Y_{lM}^1 - B_{lM} Y_{lM+1} = F_{lM}. \quad (4.10)$$

Воспользуемся принципом суперпозиции (4.3). Тогда решения задач (4.8) Y_{lM-1} и Y_{lM+1} на L интервалах распараллеливания представимы в виде

$$\begin{aligned} Y_{lM-1} &= F_0 U_{lM-1} + Y_{lM}^0 V_{lM-1} + W_{lM-1}, \\ Y_{lM+1} &= Y_{lM}^0 U_{lM+1} + F_N V_{lM+1} + W_{lM+1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

С учетом (4.11) выразим Y_{lM}^1 из уравнения (4.10), получим

$$\begin{aligned} Y_{lM}^1 &= \frac{A_{lM}}{C_{lM}} Y_{lM-1} + \frac{B_{lM}}{C_{lM}} Y_{lM+1} + \frac{F_{lM}}{C_{lM}} = \frac{A_{lM} V_{lM-1} + B_{lM} U_{lM+1}}{C_{lM}} Y_{lM}^0 \\ &+ \frac{A_{lM}(F_0 U_{lM-1} + W_{lM-1}) + B_{lM}(F_N V_{lM+1} + W_{lM+1})}{C_{lM}} = q Y_{lM}^0 + Q. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Соотношения вида (4.12) связывают и произвольные значения Y_{lM}^i и Y_{lM}^{i-1} , т. е.

$$Y_{lM}^2 = q Y_{lM}^1 + Q = q(q Y_{lM}^0 + Q) + Q \text{ и т. д.} \quad (4.13)$$

Таким образом, для Y_{lM}^n имеет место представление

$$Y_{lM}^n = q^n Y_{lM}^0 + Q \sum_{l=0}^{n-1} q^l. \quad (4.14)$$

Покажем, что $|q| < 1$. В силу условий (4.2) и признака B будем иметь

$$|q| = \frac{|A_{lM}V_{lM-1} + B_{lM}U_{lM+1}|}{|C_{lM}|} \leq \frac{|A_{lM}| + |B_{lM}|}{|C_{lM}|} < 1.$$

Тогда

$$Y_{lM}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{lM}^n = \frac{Q}{1 - q},$$

где Q и q вычисляются по формулам (следует из (4.12)–(4.13))

$$q = \frac{Y_{lM}^2 - Y_{lM}^1}{Y_{lM}^1 - Y_{lM}^0}, \quad Q = \frac{Y_{lM}^1 Y_{lM}^1 - Y_{lM}^0 Y_{lM}^2}{Y_{lM}^1 - Y_{lM}^0}.$$

Алгоритм 2 распараллеливания прогонки для решения задачи (4.6) состоит из следующих шагов:

$$(4.2) \rightarrow (4.9) \rightarrow (4.3).$$

Наиболее экономичным алгоритм является в случае разбиения отрезка на два интервала $N = 2 \cdot M$. Тогда задача (4.6) разбивается на две подзадачи вида (4.7) с крайевыми условиями F_0, Y_M^0 и Y_M^0, F_N . В случае $L = 2$ решения на интервалах распараллеливания определяются следующим образом:

$$Y_i = F_0 U_i + Y_M^* V_i + W_i, \quad i = 1, \dots, M - 1;$$

$$Y_i = Y_M^* U_i + F_N V_i + W_i, \quad i = M + 1, \dots, N - 1,$$

где Y_M^* — искомое решение на границе, а U_i, V_i, W_i — решения задач вида (4.2).

5. Об эффективности распараллеливания МРП при решении двумерных краевых задач

Алгоритмы распараллеливания прогонки эффективно применяются при решении двумерных краевых задач в прямоугольной области методом разделения переменных (3.5)–(3.7). При вычислении функций $\phi_k(i)$ и $u_k(i, j)$ удобно использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Рассмотрим коэффициенты ускорения и эффективности

$$S_m = T_1/T_m, \quad E_m = S_m/m, \quad (5.1)$$

где T_m — время выполнения параллельного алгоритма на МВС–1000 с числом процессоров m ($m > 1$), T_1 — время выполнения последовательного алгоритма на одном процессоре.

T_m представляет собой совокупность чистого времени счета и накладных расходов на межпроцессорные обмены

$$T_m = T_c + T_o.$$

Число процессоров m соответствует упомянутому разбиению векторов на m частей и разбиению исходной области на m подобластей.

В общем случае эффективность распараллеливания меняется в пределах $0 < E_m < 1$. В идеальном случае при равномерной и сбалансированной загрузке процессоров и минимальном времени обменов между ними E_m близко к единице, но при решении практических задач она уменьшается за счет накладных расходов.

Теоретическая оценка эффективности распараллеливания МРП с использованием алгоритма БПФ при различных способах передачи данных между процессорами приводится в работах [11, 12].

Проведем теоретическую оценку эффективности распараллеливания МРП с использованием алгоритма БПФ и алгоритма 1 распараллеливания прогонки с учетом времени межпроцессорных обменов T_o для МВС–1000/32.

Последовательный алгоритм МРП с использованием алгоритма БПФ и алгоритма обычной прогонки реализуется за время [7]

$$T_1 \simeq (3N^2 \log_2 N)t_c + (N^2 \log_2 N + 2N^2)t_y + (N^2)t_d,$$

где $N=2^k$ — число узлов квадратной сетки; t_c, t_y, t_d — времена выполнения арифметических операций сложения, умножения и деления, соответственно.

Параллельный алгоритм МРП с использованием алгоритма БПФ и алгоритма распараллеливания прогонки реализуется за время

$$T_m \simeq \frac{(3N^2 \log_2 N + 3N^2 + 3Nm)t_c + (N^2 \log_2 N + 7N^2 + 2Nm)t_y + (N^2 + Nm)t_d}{m} + (16N)t_o,$$

где m — число процессоров, равное числу подобластей.

Время для выполнения обменных операций составляет $T_o=16Nt_o$, где t_o — время, необходимое для пересылки элемента данных из одного процессора в другой.

Имеем следующую оценку эффективности:

$$E_m \simeq \frac{(3 \log_2 N)t_c + (\log_2 N + 2)t_y + t_d}{(3 \log_2 N + 3 + 3m/N)t_c + (\log_2 N + 7 + 2m/N)t_y + (1 + m/N)t_d + 16m t_o/N}. \quad (5.2)$$

Теоретическая оценка эффективности распараллеливания МРП с использованием алгоритма 1 распараллеливания прогонки без использования алгоритма БПФ с учетом времени межпроцессорных обменов T_o для МВС–1000/32 имеет вид

$$E'_m \simeq \frac{(3N)t_c + (N + 2)t_y + t_d}{(3N + 3 + 3m/N)t_c + (N + 7 + 2m/N)t_y + (1 + m/N)t_d + 16m t_o/N}. \quad (5.3)$$

Обозначим $t = t_c$. Тогда для МВС–1000/32 (в грубом приближении) можно полагать $t_y \simeq t$, $t_d \simeq 10t$, $t_o \simeq 500t$. Оценки (5.2) и (5.3) будут иметь вид

$$E_m \simeq \frac{(4 \log_2 N + 12)t}{(4 \log_2 N + 20 + 15m/N)t + 16m t_o/N}, \quad (5.4)$$

$$E'_m \simeq \frac{(4N + 12)t}{(4N + 20 + 15m/N)t + 16m t_o/N}. \quad (5.5)$$

На рис. 4 изображены график изменения эффективности E_m (график 1) параллельного МРП с использованием алгоритма БПФ и график изменения эффективности E'_m (график 2) параллельного МРП без использования алгоритма БПФ в зависимости от числа процессоров m для МВС–1000/32.

Таким образом, данные параллельные алгоритмы имеют достаточно высокую эффективность распараллеливания, которая уменьшается с ростом m и с увеличением T_o .

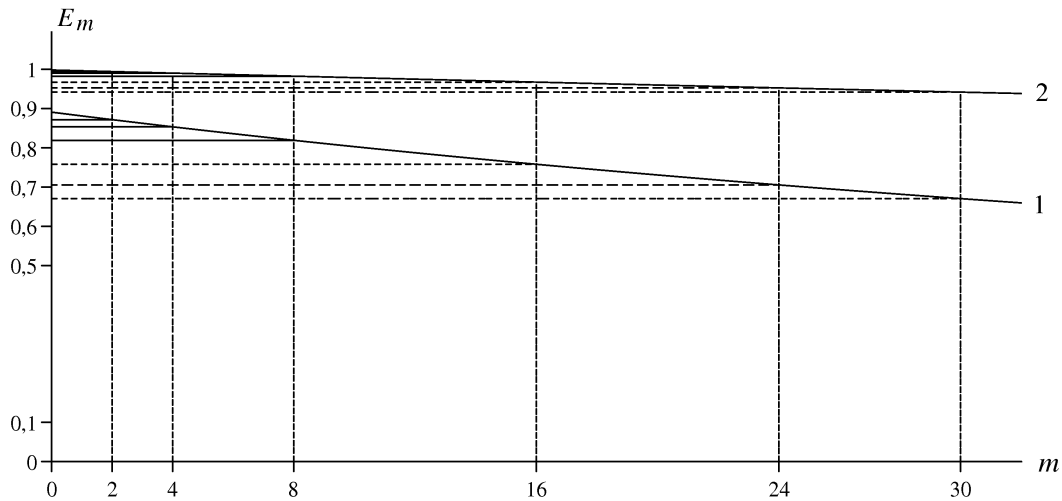


Рис. 4. Зависимость коэффициентов эффективности E_m и E'_m от числа процессоров m .

Проведем сравнение времени счета и коэффициенты ускорения и эффективности параллельного метода разделения переменных с использованием алгоритма 1 распараллеливания прогонки (без использования алгоритма БПФ) и параллельного итерационного метода Гаусса-Зейделя с начальным приближением $u_0 = 0$ при решении модельной задачи Дирихле.

Рассматривается модельная задача Дирихле для уравнения Пуассона в единичном квадрате $D = \{(x, y) \in D : 0 \leq x, y \leq 1\}$ с точным решением $u(x, y) = (x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)$, правой частью $\varphi(x, y) = 4 + 2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y$ и граничными условиями

$$\begin{cases} u(x, y)|_{\partial D} = y^2 - y, & x = 0, x = 1; \\ u(x, y)|_{\partial D} = x^2 - x, & y = 0, y = 1. \end{cases}$$

На рис. 5 показано решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона, полученное параллельными МГЗ и МРП. Результаты, полученные двумя методами, совпадают. Приближенное решение совпадает с модельным с точностью до 10^{-3} .

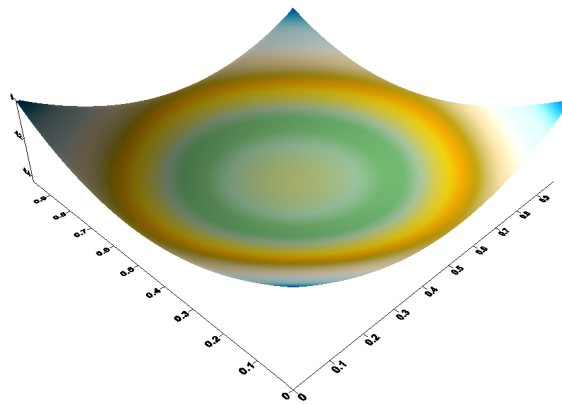


Рис. 5. Решение $u(x, y)$ задачи Дирихле.

В табл. 1 приведены коэффициенты ускорения и эффективности решения задачи Дирихле с помощью последовательного и параллельного метода Гаусса-Зейделя на МВС-1000/32 для 1000×1000 точек сетки.

В табл. 2 приведены коэффициенты ускорения и эффективности решения задачи Дирихле с помощью последовательного и параллельного метода разделения переменных с использованием алгоритма 1 параллельной прогонки на МВС-1000/32 для 1000×1000 точек сетки.

Т а б л и ц а 1

Решение задачи Дирихле МГЭ

m	$T_m, \text{min.}$	S_m	E_m
1	60.11	—	—
2	31.28	1.92	0.96
4	16.86	3.57	0.89
5	14.51	4.14	0.83
8	10.97	5.48	0.68

Т а б л и ц а 2

Решение задачи Дирихле МРП

m	$T_m, \text{sec.}$	S_m	E_m
1	86.24	—	—
2	44.21	1.95	0.98
4	22.38	3.85	0.96
5	18.13	4.76	0.95
8	11.45	7.53	0.94

Результаты вычислений показывают, что применение параллельного метода разделения переменных с использованием алгоритма 1 распараллеливания прогонки при решении задачи Дирихле по сравнению с использованием параллельного итерационного метода Гаусса-Зейделя существенно сокращает время счета (на порядок) при высокой эффективности распараллеливания $E_m \geq 0.9$, которая согласуется с полученной теоретической оценкой (5.5).

6. Результаты численных экспериментов решения задачи выделения источников гравитационного поля и эффективность распараллеливания

Задача выделения источников гравитационного поля в криволинейном слое между заданными глубинами и задача о восстановлении плотности в этом слое (2.1) рассматривались для модельной области S , имеющей размеры 10×10 (км²). Криволинейные границы слоя менялись в пределах $1,0$ (км) $\leq H_1(x, y) \leq 2,0$ (км); $1,5$ (км) $\leq H_2(x, y) \leq 2,5$ (км). Шаги сетки $\Delta x \approx \Delta y \approx 0,101$ (км). Гравитационная постоянная $f = 6.67 \cdot 10^{-8}$ (см³/г·с²).

После дискретизации исходного уравнения на сетке, где задана функция $\Delta g(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам задача (2.1) сводится к системе линейных алгебраических уравнений с несимметричной матрицей порядка $10^4 \times 10^4$.

На этапе решения задачи предварительной обработки гравитационных данных при решении задачи Дирихле (3.2) использовался параллельный метод разделения переменных (3.5)–(3.7) с применением алгоритма параллельной прогонки (горизонтальное распределение исходных данных по процессорам). Для решения интегрального уравнения (3.3) использовался параллельный итеративно регуляризованный метод простой итерации (2.4) с параметром

регуляризации $\alpha = 0.0001$. На этапе решения задачи о восстановлении плотности в слое использовался параллельный итеративно регуляризованный метод наискорейшего спуска (2.6) с параметром регуляризации $\alpha = 0.001$.

На рис. 6 изображено исходное модельное (синтетическое) гравитационное поле.

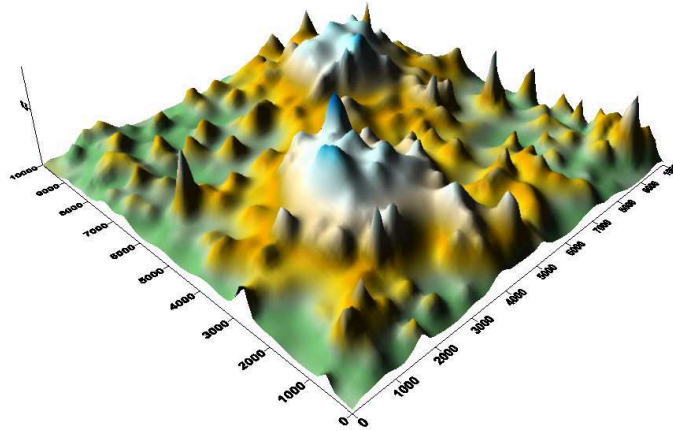


Рис. 6. Исходное модельное гравитационное поле $g(x, y)$.

Данное поле определялось путем решения прямой задачи гравиметрии — определения правой части в уравнении (2.1) по некоторому исходному распределению плотности в слое $\sigma(x, y)$ с добавлением влияния 1000 точечных источников, лежащих выше исследуемого слоя, таким образом, что максимум поля точечных источников составлял 120 процентов от максимума поля слоя.

На рис. 7 изображено исходное распределение плотности в слое.

На рис. 8 изображено аномальное поле, выделенное из исходного в соответствии с методикой предварительной обработки гравитационных данных.

На рис. 9 изображены линии уровня плотности в слое, восстановленной по выделенному аномальному полю.

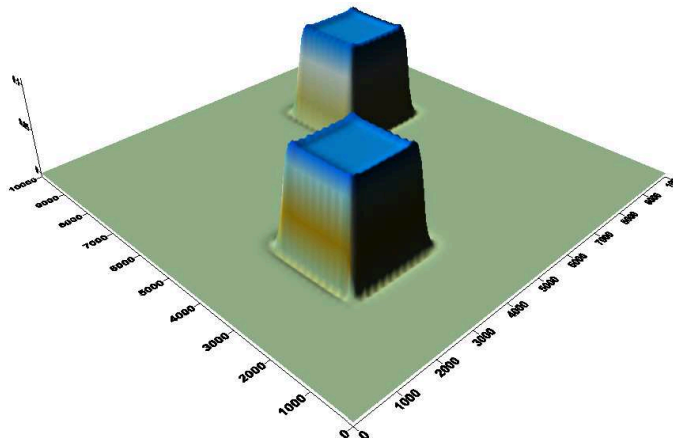
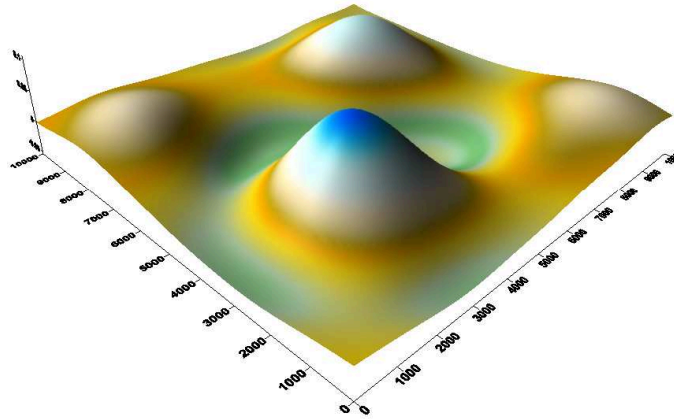
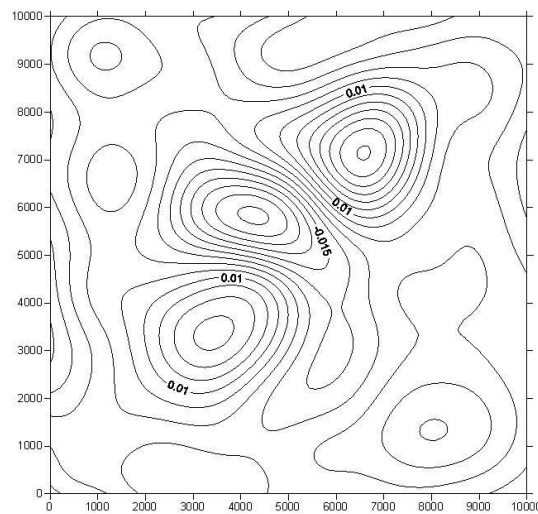
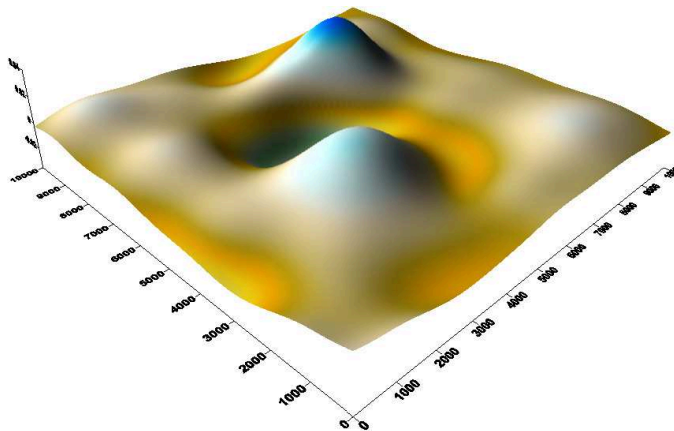


Рис. 7. Исходное распределение плотности $\sigma(x, y)$ в слое.

Рис. 8. Выделенное аномальное поле $\Delta g(x, y)$.

На рис. 10 изображено распределение 1 восстановленной плотности в слое. Максимумы исходной и восстановленной плотности находятся в одинаковых областях. Максимумы исходного распределения плотности $\max_z \sigma(x, y) = 0.1$. Максимумы восстановленной плотности $\max \hat{\sigma}(x, y) = 0.05$. Можно говорить лишь о качественном восстановлении плотности в связи со z значительным возмущением исходного гравитационного поля.

Относительная погрешность вычислений составляет $\frac{\|\sigma - \hat{\sigma}\|_{R^n}}{\|\sigma\|_{R^n}} \leq 0.8$.

Рис. 9. Линии уровня восстановленной плотности $\sigma(x, y)$ в слое.Рис. 10. Распределение 1 восстановленной плотности $\sigma(x, y)$ в слое.

На рис. 11 изображено распределение 2 плотности в слое, восстановленной в Институте геофизики УрО РАН другими алгоритмами. В этом случае относительная погрешность вычислений составляет $\frac{\|\sigma - \hat{\sigma}\|_{R^n}}{\|\sigma\|_{R^n}} > 1.0$. При сравнении результатов можно отметить, что максимумы восстановленных плотностей близки и находятся в одинаковых областях. При использовании численных алгоритмов, предложенных в настоящей работе, улучшается качество восстановленной плотности.

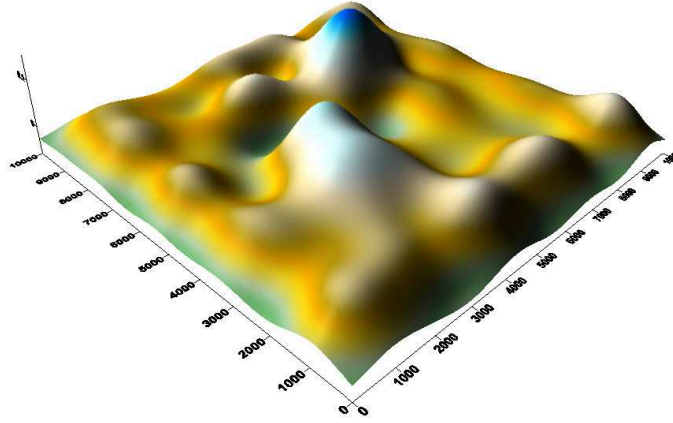


Рис. 11. Распределение 2 восстановленной плотности $\sigma(x, y)$ в слое.

Для решения задачи предварительной обработки данных с использованием параллельных алгоритмов МРП и МПИ проведено сравнение коэффициентов ускорения и эффективности.

Т а б л и ц а 3

**Задача предварительной обработки
гравитационных данных**

m	$T_m, \text{min.}$	S_m	E_m
1	65.3	—	—
2	36.5	1.78	0.89
4	19.6	3.38	0.85
5	16.2	4.03	0.81
8	11.2	5.83	0.73
10	10.2	6.40	0.64

В табл. 3 приведены времена счета и коэффициенты ускорения и эффективности решения задачи предварительной обработки гравитационных данных с использованием параллельных алгоритмов МРП и МПИ на МВС–1000/32 для 100×100 точек сетки (матрица $10^4 \times 10^4$).

Результаты вычислений показывают, что решение задачи предварительной обработки гравитационных данных с использованием параллельных алгоритмов, предложенных в данной работе, существенно уменьшает время счета, а используемые параллельные алгоритмы имеют достаточно высокую эффективность распараллеливания.

Времена счета и коэффициенты ускорения и эффективности решения задачи о восстановлении плотности в слое с различными гравитационными данными с использованием параллельных итерационных методов приводятся в работах [13, 14].

7. Специализированный Web-сервер

Разработан специализированный Web-сервер, предназначенный для запуска программ, реализующих параллельные алгоритмы решения задачи предварительной обработки гравитационных данных и задачи гравиметрии о нахождении переменной плотности в слое на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС–1000/32 через Web-интерфейс.

Web-сервер (рис. 12) состоит из трех основных частей: Web-сервера IIS (Internet Information Services — информационные службы Интернета), на котором установлено Web-приложение; базы данных SQL Server 2000, в которой хранятся все задачи пользователей с входными и выходными данными; службы, выполняющей загрузку данных, запуск задач на МВС–1000/32, просмотр состояния задачи и загрузку результатов завершенных задач на Web-сервер.

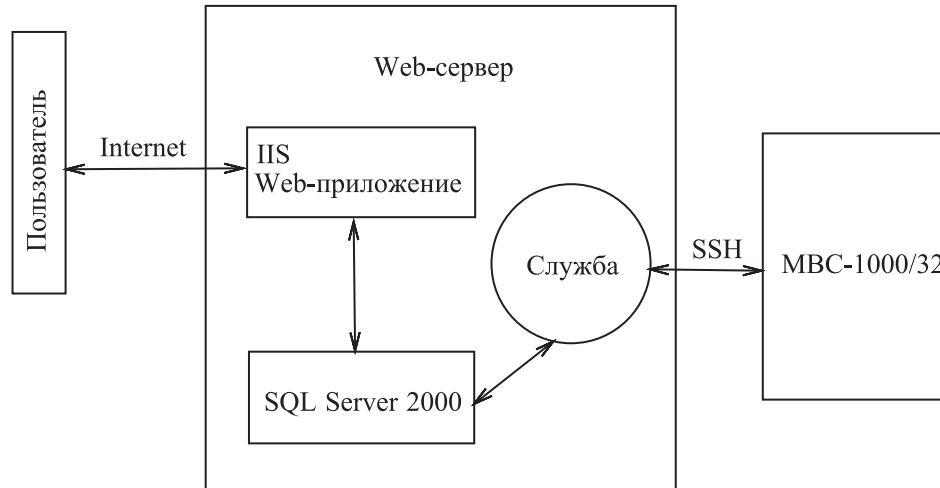


Рис. 12. Архитектура Web-сервера.

Web-сервер предоставляет возможность пользователю через Web-интерфейс выбирать определенный тип задачи и метод ее решения, загружать входные данные, указывать число процессоров, на которых будет решаться задача, получать выходные данные после ее решения. Для каждой задачи считается время ее решения.

Спроектирована база данных, в которой хранятся задачи пользователей с входными и выходными данными, написана служба запуска задач и передачи данных между сервером и МВС–1000/32. Для создания изображений решений задач используется графический пакет Surfer. После копирования выходных данных на Web-сервер запускается скрипт, в котором указывается путь к данным, и происходит автоматическое построение решения.

Комплекс параллельных алгоритмов для решения обратной задачи гравиметрии о нахождении переменной плотности в слое и задачи предварительной обработки гравитационных данных размещен на данном Web-сервере. Специализированный Web-сервер может быть использован для обработки реальных гравитационных данных.

Специализированный Web-сервер установлен в Институте математики и механики УрО РАН и будет расширен добавлением новых типов задач и алгоритмов путем описания их в специально разработанной базе данных и использован для решения этих задач на МВС–1000/32.

8. Заключение

Предложены и численно реализованы на многопроцессорном вычислительном комплексе МВС–1000/32 новые параллельные прямые и итерационные алгоритмы решения задачи предварительной обработки гравитационных данных в криволинейном слое и задачи о восстановлении переменной плотности в слое по гравитационным данным.

Разработан специализированный Web-сервер, предназначенный для запуска программ, реализующих параллельные алгоритмы решения обратной задачи гравиметрии и задачи предварительной обработки гравитационных данных на MVS-1000/32 через Web-интерфейс.

Комплекс параллельных алгоритмов размещен на специализированном Web-сервере.

Параллельные алгоритмы протестированы при решении модельных задач. Проведен анализ эффективности и ускорения параллельных алгоритмов.

Авторы выражают признательность за поддержку и внимание к работе членам-корреспондентам РАН В.В. Васину и П.С. Мартышко.

Поступила 28.09.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мартышко П.С., Пруткин И.Л.** Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофиз. журн. 2003. Т. 25, № 3. С. 159–168.
2. **Martyshko P.S., Koksharov D.E.** On the construction of the density sections using gravity data // Extended Abstracts of 66th EAGE Conference and Exhibition. Paris, 2004. P. 143.
3. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
4. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 2005.
5. **Baranov A.V., Latsis A.O., Sazhin C.V., Khramtsov M.Yu.** The MVS-1000 system user's guide // <http://parallel.ru/mvs/user.html>.
6. **Akimova E.N., Vasin V.V.** Parallel iterative algorithms for solving the inverse gravity problems // Proceedings of the XXXII international summer school "Advanced Problems in Mechanics". St. Petersburg, 2004. P. 1–8.
7. **Самарский А.А., Николаев Е.С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. **Яненко Н.Н., Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Шустов С.В.** Об организации параллельных вычислений и "распараллеливании" прогонки // Численные методы механики сплошной среды. 1978. Т. 9, № 7. С. 139–146.
9. **Годунов С.К., Рябенский В.С.** Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
10. **Бугров А.Н., Коновалов А.Н.** Об устойчивости алгоритма распараллеливания прогонки // Численные методы механики сплошной среды. 1979. Т. 10, № 6. С. 27–32.
11. **Акимова Е.Н.** Об эффективности крупноблочного распараллеливания метода разделения переменных. Препринт ВЦ СО АН СССР. № 833. Новосибирск, 1989. 21 с.
12. **Акимова Е.Н.** Параллельные алгоритмы для решения трехмерной задачи упругости и разреженных линейных систем // Дальневост. мат. журн. Т. 2, № 2. С. 10–28.
13. **Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В., Клименков А.В.** Параллельные алгоритмы решения обратной задачи гравиметрии // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2006. Вып. 9. С. 3–16.
14. **Акимова Е.Н., Васин В.В., Пересторонина Г.Я., Тимерханова Л.Ю., Мартышко П.С., Кокшаров Д.Е.** О регулярных методах решения обратных задач гравиметрии на многопроцессорном вычислительном комплексе // Вычисл. методы и программирование. М.: МГУ, 2007. Т. 8, № 1. С. 107–116.

УДК 519.174

ХРОМАТИЧЕСКАЯ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ АТОМОВ В РЕШЕТКАХ ПОЛНЫХ МНОГОДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

В. А. Баранский, Т. А. Королева

Предлагается новый подход к изучению хроматической определяемости полных многодольных графов, основанный на вводимом естественном решеточном порядке для таких графов. Доказывается, что атомы решетки полных t -дольных n -графов для заданных натуральных чисел n и t , имеющие неоднородные доли, хроматически определяются.

Введение

В данной работе мы рассматриваем только обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных ребер. Обозначения и терминологию для графов будем использовать в соответствии с [2].

Пусть G — произвольный (n, m, k) -граф, т. е. граф, имеющий n вершин, m ребер и k компонент связности. Для натурального числа x через $P(G, x)$ обозначим число всевозможных раскрасок графа G в x заданных цветов, причем не предполагается, что в раскраске должны быть использованы все x цветов. Хорошо известно (см., например, [1] или [2]), что функция $P(G, x)$ является многочленом степени n от x , который называют *хроматическим многочленом* графа G .

Два графа называются *хроматически эквивалентными* или χ -*эквивалентными*, если они имеют одинаковые хроматические многочлены. Предположим, что каждому графу приписано некоторым образом число. Это число называют *хроматическим инвариантом*, если оно одинаково для любых двух хроматически эквивалентных графов. Хроматическими инвариантами являются число вершин, число ребер и число компонент связности графа (см. [1] или [2]). Число ребер графа G будем обозначать через $I_2(G)$. Отметим, что число вершин графа G можно было бы обозначать через $I_1(G)$.

Укажем еще два хроматических инварианта для графов (см. [3] или [4]):

$$I_3(G) = \triangle(G)$$

— число треугольников в графе G ;

$$I_4(G) = vg \square(G) - 2 \boxtimes(G),$$

где через $vg \square(G)$ мы обозначаем число вершинно порожденных подграфов вида \square в графе G , т. е. число бесхордных 4-циклов в G , а через $\boxtimes(G)$ — число полных четырехвершинных подграфов K_4 в графе G .

Через $pt(G, i)$ будем обозначать число разбиений множества вершин графа G на i непустых клик, т. е. подмножеств, состоящих из попарно несмежных вершин графа G . По теореме Зыкова (см. [2])

$$P(G, x) = \sum_{i=\chi}^n pt(G, i)x^i,$$

где через $x^{(i)}$ обозначается *факториальная степень* переменной x , т. е. $x^{(i)} = x(x-1)(x-2) \times \dots \times (x-i+1)$, а через χ — хроматическое число графа G , т. е. наименьшее число красок, необходимое для раскраски графа G . В силу указанной теоремы числа $pt(G, i)$ ($\chi \leq i \leq n$) являются хроматическими инвариантами.

Нас особенно будет интересовать инвариант $pt(G, \chi + 1)$. Вычислим его значение для полного t -дольного графа $G = K(n_1, n_2, \dots, n_t)$, где $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq 1$. Здесь $\chi = t$ и раскраска графа в t цветов дает единственное разбиение множества его вершин на t коклик — долей этого графа. Разбиение на $t+1$ непустых коклик получается из предыдущего разбиения разбиением одной из долей на два непустых подмножества. Следовательно,

$$pt(K(n_1, n_2, \dots, n_t), t+1) = 2^{n_1-1} - 1 + \dots + 2^{n_t-1} - 1 = 2^{n_1-1} + \dots + 2^{n_t-1} - t.$$

Граф называется *хроматически определяемым* или χ -*определяемым*, если он изоморфен любому хроматически эквивалентному ему графу. Это понятие ввели в 1978 г. С.У. Чао и Е.Г. Whitehead Jr. Различными авторами были проведены многочисленные исследования по изучению хроматической эквивалентности и хроматической определяемости для графов. Обзор полученных результатов можно найти в статьях [5–8] и монографии [9]. В этих исследованиях большое внимание было уделено изучению хроматической определяемости полных многодольных графов $K(n_1, n_2, \dots, n_t)$. Многие авторы пытались изучить хроматическую определяемость полных двудольных графов, и в 1990 г. К.М. Кох и К.Л. Тео доказали, что полный двудольный граф $K(n_1, n_2)$ хроматически определяется при $n_1 \geq n_2 \geq 2$. Затем в многочисленных работах были найдены разнообразные классы хроматически определяемых полных многодольных графов (см. [9]). Главная проблема здесь состоит в следующем:

Является ли хроматически определяемым полный многодольный граф $K(n_1, n_2, \dots, n_t)$ при $t \geq 3$ и $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq 2$?

В данной работе мы предлагаем некоторый новый и систематический подход к изучению хроматической определяемости полных многодольных графов, в котором используется вводимый нами решеточный порядок на множестве таких графов и указанные ранее инварианты.

Разбиением натурального числа n (см. [10]) называется невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $u = (u_1, u_2, \dots)$ такая, что $n = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. Ясно, что u содержит лишь конечное число $l = l(u)$ ненулевых компонент. Число l будем называть *длиной* разбиения u и будем писать $n = \text{num}(u)$. Для удобства будем записывать u в одном из следующих видов $u = (u_1, u_2, \dots, u_{l+i})$, где $i = 0, 1, 2, \dots$.

Через $NPL(n)$ обозначим множество всех разбиений натурального числа n . Пусть $u = (u_1, \dots, u_t)$ — разбиение числа n , где $u_1 \geq \dots \geq u_t \geq 0$ и существуют числа $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$ такие, что $i < j$, $u_i - 1 \geq u_{i+1}$, $u_{j-1} \geq u_j + 1$ и $u_i = u_j + \delta$, где $\delta \geq 2$. Будем говорить, что разбиение $v = (u_1, \dots, u_i - 1, \dots, u_j + 1, \dots, u_t)$ получено *элементарным преобразованием* разбиения u . Такое преобразование сводится к “перемещению” одной единицы из i -й компоненты u в j -ю компоненту. Введем отношение \geq на множестве $NPL(n)$, полагая $u \geq v$ для $u, v \in NPL(n)$, если v можно получить из u с помощью последовательного выполнения конечного числа элементарных преобразований. Очевидно, \geq есть отношение частичного порядка.

Элементарное преобразование разбиения числа n при $j = i + 1$ будем называть *падением блока* и *сдвигом блока*, если $i + 1 < j$, $u_i = u_{i+1} + 1$, $u_{i+1} = u_{i+2} = \dots = u_{j-1}$ и $u_{j-1} = u_j + 1$. Для удобства падение блока при $\delta = 2$ также будем называть сдвигом блока. Если разбиение v получается из разбиения u падением или сдвигом блока, то будем писать $u \Rightarrow v$.

Говорят, что элемент u *покрывает* элемент v относительно порядка \leq , если $u > v$ и не существует такого w , что $u > w > v$. Нетрудно доказать, что разбиение u покрывает разбиение v в $NPL(n)$ относительно введенного порядка \leq тогда и только тогда, когда $u \Rightarrow v$.

Пусть даны два разбиения $u = (u_1, \dots, u_t), v = (v_1, \dots, v_t) \in NPL(n)$, где t — наибольшая из длин u и v . Укажем алгоритм вычисления вспомогательной последовательности $w = w(u, v) = (w_1, w_2, \dots)$.

Алгоритм. Полагаем $\Delta_0(u) = 0$ и $\Delta_0(v) = 0$ (это начальные *запасы* для u и v).

Для $i = 1, 2, \dots$ выполняем следующие действия до тех пор, пока не получим число w_i , равное 0:

i) полагаем $w_i = \min\{u_i + \Delta_{i-1}(u), v_i + \Delta_{i-1}(v)\}$ и определяем величины запасов для u и v после i -го этапа

$$\Delta_i(u) = u_i + \Delta_{i-1}(u) - w_i \geq 0,$$

$$\Delta_i(v) = v_i + \Delta_{i-1}(v) - w_i \geq 0.$$

Легко заметить, что при работе алгоритма на каждом из этапов один из запасов равен 0.

Пример. $n = 46, t = 8$.

$$\begin{array}{rcccccccc} \Delta = & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ u = & 12 & 9 & 6 & 6 & 6 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ v = & 11 & 11 & 9 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ \Delta = & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline w = & 11 & 10 & 6 & 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Нетрудно убедиться, что $w = w(u, v)$ является пересечением $u \wedge v$ элементов u, v в $NPL(n)$ относительно частичного порядка \leq . Поскольку в $NPL(n)$ есть наибольший элемент — тривиальное разбиение $(n, 0, \dots)$, отсюда следует, что $NPL(n)$ является решеткой [11] относительно \leq .

Пусть n, t — фиксированные натуральные числа такие, что $3 \leq t \leq n$. Через $NPL(n, t)$ обозначим множество всех разбиений числа n длины t . Из устройства пересечения элементов в решетке $NPL(n)$ и устройства порядка \leq легко следует, что $NPL(n, t)$ является подрешеткой решетки $NPL(n)$.

Разделим n на t с остатком: $n = t \cdot q + r$, где $0 \leq r < t$. Рассмотрим разбиение $a = (q + 1, \dots, q + 1, q, \dots, q) \in NPL(n, t)$, где компонента $q + 1$ повторяется в a точно r раз. Очевидно, разбиение $(n - t + 1, 1, \dots, 1)$ числа n является наибольшим элементом решетки $NPL(n, t)$, а разбиение a — ее наименьшим элементом.

Пусть $n = n_1 + \dots + n_t$, где $n_1 \geq \dots \geq n_t \geq 1$, — разбиение числа n . Через $K(n_1, \dots, n_t)$ будем обозначать полный t -дольный граф [9] на n вершинах с долями размеров n_1, \dots, n_t . Ясно, что с точностью до изоморфизма существует взаимно однозначное соответствие между полными t -дольными графами на n вершинах и элементами решетки $NPL(n, t)$. Поэтому порядок \leq на $NPL(n, t)$ индуцирует отвечающий ему порядок на множестве таких графов. Далее, мы активно будем использовать этот порядок на графах. Более того, мы можем отождествлять полный многодольный n -граф с соответствующим разбиением числа n .

В 1982 г. С.У. Chao и G.A. Novasky Jr. [12] доказали, что полные многодольные графы, являющиеся наименьшими элементами в решетках $NPL(n, t)$, хроматически определяемы. Иными словами, хроматически определяемы полные t -дольные n -графы вида $K(q + 1, \dots, q + 1, q, \dots, q)$, где компонента $q + 1$ повторяется r раз, а компонента q повторяется $s = t - r$ раз. Далее мы приведем очень простое доказательство этого утверждения (см. предложение 1).

Легко видеть, что в решетке $NPL(n, t)$ имеется не более двух атомов, т. е. разбиений, покрывающих наименьшее разбиение $u = (q + 1, \dots, q + 1, q, \dots, q)$. Эти атомы имеют вид

$$u_1 = (q + 1, \dots, q + 1, q, \dots, q, q - 1),$$

где компонента $q + 1$ повторяется $r + 1$ раз, компонента q повторяется $s - 2$ раза, и

$$u_2 = (q + 2, q + 1, \dots, q + 1, q, \dots, q),$$

где компонента $q + 1$ повторяется $r - 2$ раза, а компонента $q - s + 1$ раз. Первый из атомов существует при условии $s \geq 2$ и $q \geq 2$, а второй — при условии $r \geq 2$. Отметим, что если $0 \leq r \leq 1$, то $s = t - r \geq t - 1 \geq 2$, т. е. если отсутствует атом второго типа, то при $q \geq 2$ обязательно существует атом первого типа.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. Пусть (n_1, \dots, n_t) — разбиение, являющееся атомом решетки разбиений натурального числа n на t слагаемых, $n_1 \geq \dots \geq n_t \geq 2$ и $3 \leq t \leq n$. Тогда полный многодольный граф $K(n_1, \dots, n_t)$ хроматически определяем.

Отметим, что частный случай теоремы при $r = 0$ был получен в 1988 г. R.E. Giudici и M.A. Lopez (см. [9]). Другой частный случай следует из одного результата H.X. Zhao (см. [9]), но при условии $q \geq t + 2$.

1. Предварительные сведения

Зафиксируем элементарное преобразование разбиений из $NPL(n, t)$

$$u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_t) \Rightarrow v = (u_1, \dots, u_i - 1, \dots, u_j + 1, \dots, u_t),$$

где $i < j$, $u_i = u_j + \delta$ и $\delta \geq 2$.

Для графа $K(u_1, \dots, u_t)$ хроматический инвариант I_2 кратко будем записывать в виде $I_2(u)$. Аналогично мы будем поступать и для других хроматических инвариантов.

Лемма 1. $I_2(u) - I_2(v) = -(\delta - 1)$.

Доказательство. Очевидно, $I_2(u) = \binom{n}{2} - \binom{u_1}{2} - \dots - \binom{u_t}{2}$. В силу этого получаем $I_2(u) - I_2(v) = -\left(\binom{u_i}{2} - \binom{u_j}{2}\right) + \binom{u_i - 1}{2} + \binom{u_j + 1}{2} = -(u_i - 1) + u_j = -\delta + 1 = -(\delta - 1)$. \square

Обозначим через Y сумму $\sum u_p u_q$, где суммирование ведется по всем p, q таким, что $p, q \neq i, j$ и $1 \leq p < q \leq t$, а через Z — сумму $\sum u_p$, где суммирование ведется по всем $p = 1, \dots, t$ таким, что $p \neq i, j$.

Лемма 2. $I_3(u) - I_3(v) = -(\delta - 1)(n - u_i - u_j)$.

Доказательство. $I_3(u) - I_3(v) = u_i Y + u_j Y + u_i u_j Z - (u_i - 1)Y - (u_j + 1)Y - (u_i - 1)(u_j + 1)Z = Y - Y + u_i u_j Z - (u_i u_j + u_i - u_j - 1)Z = (-u_i + u_j + 1)(n - u_i - u_j) = -(\delta - 1)(n - u_i - u_j)$. \square

Лемма 3. Пусть в $NPL(n, t)$ существует два атома u_1 и u_2 . Тогда соответствующие им полные t -дольные графы $K(u_1)$ и $K(u_2)$ не являются хроматически эквивалентными.

Доказательство. Пусть $K(u_1)$ и $K(u_2)$ хроматически эквивалентны. Тогда $pt(K(u_1), t + 1) = pt(K(u_2), t + 1)$ и поэтому

$$(r + 1)2^q + (s - 2)2^{q-1} + 2^{q-2} = 2^{q+1} + (r - 2)2^q + (s + 1)2^{q-1},$$

т. е. $2^q + (s - 2)2^{q-1} + 2^{q-2} = (s + 1)2^{q-1}$, откуда следует $2^{q-2} = 2^{q-1}$, что невозможно. \square

Из лемм 1 и 3 вытекает

Следствие 1. Любой полный t -дольный n -граф, являющийся атомом решетки $NPL(n, t)$, хроматически не эквивалентен каждому не изоморфному ему полному многодольному графу.

Пусть теперь задан полный t -дольный граф $K(n_1, \dots, n_t)$, где $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq 1$, и граф H получен из него удалением непустого семейства ребер E , т. е. $H = K(n_1, \dots, n_t) - E$.

Выясним, как изменяется инвариант I_3 при переходе от $K(n_1, \dots, n_t)$ к H . Любой треугольник в $K(n_1, \dots, n_t)$ устроен следующим образом: он имеет по одной вершине из трех различных долей этого графа. Обозначим через X число треугольников, разрушающихся при удалении E , а через $\xi_1(f)$ — число треугольников в $K(n_1, \dots, n_t)$, содержащих заданное ребро $f \in E$. Положим $\xi_1 = \sum_{f \in E} \xi_1(f)$.

Через ξ_2 обозначим число треугольников в $K(n_1, \dots, n_t)$, содержащих два смежных ребра из E и содержащих одно ребро, не принадлежащее E , а через ξ_3 — число треугольников в E .

Очевидно, $X = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3$, поэтому $I_3(H) = I_3(K(n_1, \dots, n_t)) - X = I_3(K(n_1, \dots, n_t)) - \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$, т. е.

$$I_3(H) = I_3(n_1, \dots, n_t) - \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3.$$

Пусть $G = K(q + \alpha_1, \dots, q + \alpha_t)$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_t = r$, $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_t$, $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ — некоторые целые числа и $u = (q + \alpha_1, \dots, q + \alpha_t)$. В дальнейшем при доказательстве χ -определяемости графа G мы всегда будем рассматривать некоторый χ -эквивалентный ему граф H и от противного предполагать, что H неизоморфен G .

Такой граф H обязан быть t -хроматическим графом. Рассмотрим его t -раскраску с долями размера n_1, \dots, n_t , где $n_1 \geq \dots \geq n_t$ и $n = n_1 + \dots + n_t$. В силу следствия $H = K(n_1, \dots, n_t) - E$ для некоторого непустого множества ребер E графа $K(n_1, \dots, n_t)$. Ясно, что $I_2(G) = I_2(H) = I_2(n_1, \dots, n_t) - |E|$, т. е. $I_2(n_1, \dots, n_t) = I_2(G) + |E|$. Следовательно, в графе $K(n_1, \dots, n_t)$ ребер больше, чем в G точно на $|E|$.

Положим $v = (n_1, \dots, n_t) = (q + \beta_1, \dots, q + \beta_t)$ для некоторых целых чисел β_1, \dots, β_t и $|E| = e$. Через E_{ij} для $i, j = 1, \dots, t$ обозначим множество ребер из E , соединяющих вершину из i -й компоненты с вершиной из j -й компоненты. Тогда $E = \cup_{1 \leq i < j \leq t} E_{ij}$, где объединяемые множества попарно не пересекаются. Положим $e_{ij} = |E_{ij}|$. Очевидно, $e = \sum_{1 \leq i < j \leq t} e_{ij}$ и $\xi_1 = \sum_{1 \leq i < j \leq t} e_{ij}(n - n_i - n_j)$.

Используя ранее введенные обозначения, имеем $I_3(u) = I_3(v) - \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$, т. е.

$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)).$$

Предложение 1. Граф $G = K(q+1, \dots, q+1, q, \dots, q)$, где компонента $q+1$ повторяется r раз, а компонента $q - s$ раз, является χ -определяемым при $q \geq 1$.

Доказательство. Для графа H в данном случае в силу леммы 1 выполняется $I_2(n_1, \dots, n_t) < I_2(q+1, \dots, q+1, q, \dots, q)$, так как $(n_1, \dots, n_t) > (q+1, \dots, q+1, q, \dots, q)$. С другой стороны, $I_2(n_1, \dots, n_t) = I_2(G) + |E|$, что противоречиво. \square

2. Основные результаты

Лемма 4. Для любого натурального числа l выполняется

- 1) $\binom{l}{2} \binom{l}{2} - (l-1)^2 - \binom{l+1}{2} \binom{l-1}{2} = -\frac{(l-1)(l-2)}{2}$;
- 2) $2 \binom{l}{2} - \binom{l+1}{2} - \binom{l-1}{2} + 1 = 0$.

Доказательство. 1) $\binom{l}{2} \binom{l}{2} - (l-1)^2 - \binom{l+1}{2} \binom{l-1}{2} = \binom{l}{2} \binom{l}{2} - (l-1)^2 - \left(\binom{l}{2} + l \right) \left(\binom{l}{2} - (l-1) \right) = -(l-1)^2 + \binom{l}{2} (l-1) - l \binom{l}{2} + l(l-1) = -(l-1)^2 - \binom{l}{2} + l(l-1) = -\binom{l}{2} + (l-1) = -\binom{l-1}{2} - (l-1) + (l-1) = -\binom{l-1}{2} = -\frac{(l-1)(l-2)}{2}$;

$$2) \quad 2 \binom{l}{2} - \binom{l+1}{2} - \binom{l-1}{2} + 1 = 2 \binom{l}{2} - \binom{l}{2} - l - \binom{l-1}{2} + 1 = \binom{l-1}{2} + (l-1) - l - \binom{l-1}{2} + 1 = 0. \quad \square$$

Предложение 2. Пусть $s \geq 2$, $q \geq 3$ и $t \geq 3$. Тогда граф

$$K(q+1, \dots, q+1, q, \dots, q, q-1),$$

где компонента $q+1$ повторяется $r+1$ раз, а компонента q повторяется $s-2$ раза, является χ -определяемым.

Доказательство. Пусть $G = K(u_1)$, где u_1 — атом, указанный на стр. 24. Тогда для H в силу леммы 1 имеем $v = (n_1, \dots, n_t) = (q+1, \dots, q+1, q, \dots, q)$, где компонента $q+1$ повторяется r раз, а компонента $q - s$ раз. Здесь $e = 1$ и поэтому $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Следовательно, $\xi_1 = -(I_3(u_1) - I_3(v)) = (\delta - 1)(n - (q+1) - (q-1)) = n - 2q$. С другой стороны, $\xi_1 = n - n_i - n_j$ для некоторых $i, j \in \{1, \dots, t\}$ и $i \neq j$. Отсюда следует, что $n_i = n_j = q$. Таким образом, удаляемое ребро соединяет две вершины из долей, содержащих по q элементов. В силу имеющейся симметрии можно считать, что удаляемое ребро соединяет две вершины из $(r+1)$ -й и t -й долей графа $K(q+1, \dots, q+1, q, \dots, q)$ (см. рис. 1).

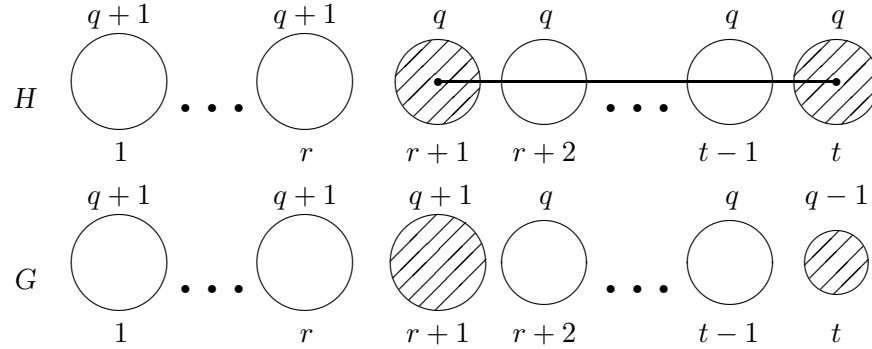
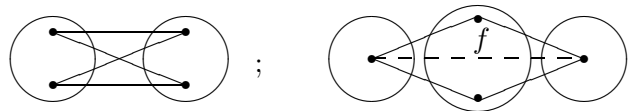


Рис. 1

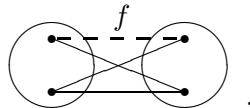
Доли графов H и G с номерами $r+1$ и t будем называть *особыми*, а содержащиеся в них вершины — *особыми вершинами*.

Перейдем теперь к рассмотрению инварианта I_4 для графов H и G .

В графе H вершинно порожденные подграфы вида \square могут быть двух типов



где в первом подграфе нет ребра из E , а во втором точно одно ребро f лежит в E . Кроме того, при переходе от $K(n_1, \dots, n_t)$ к H разрушаются вершинно порожденные подграфы \square вида



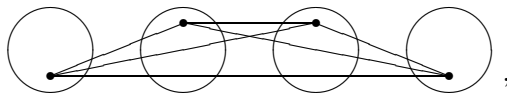
Обозначим через A число способов выбора двух различных неособых вершин, которые лежат вместе в какой-нибудь неособой доле (это число одинаково для G и для $K(n_1, \dots, n_t)$). Тогда, рассматривая только вершинно порожденные 4-циклы, содержащие особые вершины, получаем

$$vg \square(H) - vg \square(G) = \binom{q}{2} \binom{q}{2} - (q-1)(q-1) + 2 \binom{q}{2} \cdot A + A - \binom{q+1}{2} \binom{q-1}{2} - \binom{q+1}{2} \times A - \binom{q-1}{2} \cdot A = \binom{q}{2} \binom{q}{2} - (q-1)^2 - \binom{q+1}{2} \binom{q-1}{2} + \left(2 \binom{q}{2} - \binom{q+1}{2} - \binom{q-1}{2} + 1 \right) \cdot A.$$

Используя лемму 4 при $q = l$, заключаем

$$vg \square(H) - vg \square(G) = -\frac{(q-1)(q-2)}{2}.$$

Заметим теперь, что 4-клики в H устроены следующим образом:



причем при переходе от $K(n_1, \dots, n_t)$ разрушаются 4-клики, содержащие ребро f из E .

Обозначим через B_2 число способов выбора двух вершин по одной из двух различных неособых долей, а через B_3 — число способов выбора трех вершин по одной из трех различных неособых долей. Тогда

$$\square(H) - \square(G) = qqB_2 - B_2 + 2qB_3 - (q+1)(q-1)B_2 - (q+1)B_3 - (q-1)B_3 = (q^2 - 1 - (q+1)(q-1))B_2 + (2q - (q+1) - (q-1))B_3 = 0.$$

Таким образом, $I_4(H) - I_4(G) = -\frac{(q-1)(q-2)}{2}$. Так как $q \geq 3$, получаем $I_4(H) \neq I_4(G)$, что противоречит хроматической эквивалентности H и G . \square

Предложение 3. Пусть $r \geq 2$, $q \geq 2$ и $t \geq 3$. Тогда граф

$$K(q+2, q+1, \dots, q+1, q, \dots, q),$$

где компонента $q+1$ повторяется $r-2$ раз, а компонента $q-s+1$ раз, является χ -определяемым.

Доказательство. Пусть $G = K(u_2)$, где u_2 — атом, указанный на стр. 24. Тогда для H в силу леммы 1 имеем $v = (n_1, \dots, n_t) = (q+1, \dots, q+1, q, \dots, q)$, где компонента $q+1$ повторяется r раз, а компонента $q-s = t-r$ раз. Здесь $e = 1$ и поэтому $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Следовательно, $\xi_1 = -(I_3(u_2) - I_3(v)) = (\delta-1)(n - (q+2) - q) = n - 2(q+1)$. С другой стороны, $\xi_1 = n - n_i - n_j$ для некоторых $i, j \in \{1, \dots, t\}$ и $i \neq j$. Отсюда следует, что $n_i = n_j = q+1$. Таким образом, удаляемое ребро соединяет две вершины из долей, содержащих по $q+1$ элементов. В силу имеющейся симметрии можно считать, что удаляемое ребро соединяет две вершины из 1-й и r -й долей графа $K(q+1, \dots, q+1, q, \dots, q)$ (см. рис. 2).

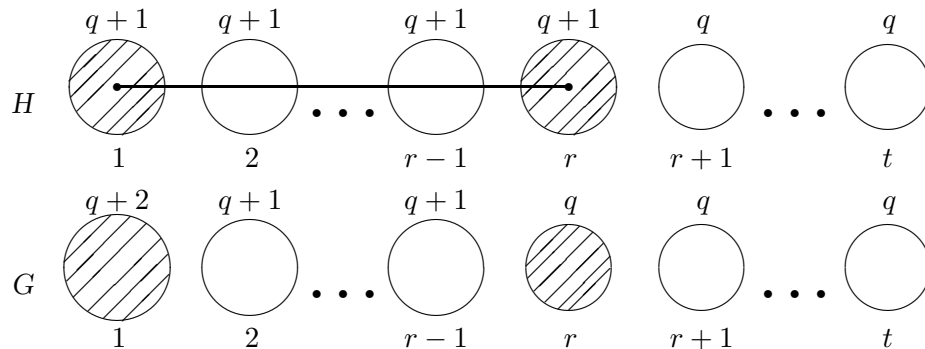


Рис. 2

Доли графов H и G с номерами 1 и r будем называть *особыми*, а содержащиеся в них вершины — *особыми вершинами*.

Как и в доказательстве предложения 2, через A обозначим число способов выбора двух различных неособых вершин, которые лежат вместе в какой-нибудь неособой доле. Тогда, рассматривая только вершинно порожденные 4-циклы, содержащие особые вершины, получаем

$$vg \square(H) - vg \square(G) = \binom{q+1}{2} \binom{q+1}{2} - q \cdot q + 2 \binom{q+1}{2} \cdot A + A - \binom{q+2}{2} \binom{q}{2} - \binom{q+2}{2} \times \\ A - \binom{q}{2} \cdot A = \binom{q+1}{2} \binom{q+1}{2} - q^2 - \binom{q+2}{2} \binom{q}{2} + \left(2 \binom{q+1}{2} - \binom{q+2}{2} - \binom{q}{2} + 1 \right) \cdot A.$$

Используя лемму 4 при $l = q + 1$, заключаем

$$vg \square(H) - vg \square(G) = -\frac{q(q-1)}{2}.$$

Как и раньше, обозначим через B_2 число способов выбора двух вершин по одной из двух различных неособых долей, а через B_3 — число способов выбора трех вершин по одной из трех различных неособых долей. Тогда

$$\boxtimes(H) - \boxtimes(G) = (q+1)(q+1)B_2 - B_2 + 2(q+1)B_3 - (q+2)qB_2 - (q+2)B_3 - qB_3 = \\ ((q+1)^2 - 1 - (q+2)q)B_2 + (2(q+1) - (q+2) - q)B_3 = 0.$$

Таким образом, $I_4(H) - I_4(G) = -\frac{q(q-1)}{2}$. Так как $q \geq 2$, получаем $I_4(H) \neq I_4(G)$, что противоречит хроматической эквивалентности H и G . \square

Осталось заметить, что из предложений 2 и 3 вытекает сформулированная ранее теорема.

Поступила 05.10.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Read R.C.** An introduction to chromatic polynomials // J. Comb. Theory. 1968. Vol. 4. P. 52–71.
2. **Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 288 с.
3. **Farrell E.J.** On chromatic coefficients // Discrete Math. 1980. Vol. 29. P. 257–264.
4. **Баранский В.А., Вихарев С.В.** О хроматических инвариантах двудольных графов // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика и механика. 2005. Вып. 7, № 36. С. 25–34.
5. **Koh K.M., Teo K.L.** The search for chromatically unique graphs // Graphs Combin. 1990. Vol. 6. P. 259–285.
6. **Read R.C., Tutte W.T.** Chromatic polynomials // Selected Topics in Graph Theory III. New York: Academic Press, 1988.
7. **Koh K.M., Teo K.L.** The search for chromatically unique graphs II // Discrete Math. 1997. Vol. 172. P. 59–78.
8. **Chia G.L.** Some problems on chromatic polynomials // Discrete Math. 1997. Vol. 172. P. 39–44.
9. **Zhao H.** Chromaticity and adjoint polynomials of graphs. Zutphen: Wöhrmann Print Service, 2005.
10. **Эндрюс Г.** Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.
11. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
12. **Chao S.Y., G.A. Novacky Jr.** On maximally saturated graphs // Discrete Math. 1982. Vol. 41. P. 139–143.

УДК 512.54

ДИАГРАММЫ ЮНГА БЕЗ КРЮКОВ ДЛИНЫ ЧЕТЫРЕ И ХАРАКТЕРЫ ГРУППЫ S_n ¹

В. А. Белоногов

Найдены все конечные диаграммы Юнга, не имеющие крюков длины 4. Самоассоциированные диаграммы с этим свойством подразделены на три серии. Определены множества всех длин крюков в диаграммах каждой серии. Проведённое исследование оказалось необходимым для изучения некоторых пар неприводимых характеров симметрических и знакопеременных групп.

Введение

Множество всех неприводимых характеров симметрической группы S_n находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $P(n)$ всех разбиений числа n (см. [1, 2]). Свойства неприводимого характера χ^α группы S_n , соответствующего разбиению $\alpha \in P(n)$, определяются свойствами диаграммы Юнга $[\alpha]$ этого разбиения. В связи с задачей изучения некоторых пар неприводимых характеров симметрических и знакопеременных групп (см. разд. 4 для деталей) возникла необходимость определить строение всех конечных самоассоциированных диаграмм Юнга, не имеющих крюков длины 4.

В настоящей работе получено исчерпывающее описание таких диаграмм (теорема 2.1). Они образуют три двухпараметрические серии $3^k.\Delta_m$, $3^k.\Sigma_m$ и $3^k.2.\Sigma_m$ (описаны также и неассоциированные диаграммы Юнга без крюков длины 4). В разд. 3 найдены множества всех длин крюков в диаграммах каждой из этих серий (предложение 3.1). В частности, ни одно из этих разбиений не имеет крюков, длина которых делится на 4.

В разд. 4 рассматриваются некоторые пары неприводимых характеров χ^α и χ^β симметрических групп n ($\alpha, \beta \in P(n)$), связанные с гипотезой об отсутствии полупропорциональных неприводимых характеров у знакопеременных групп, и формулируется ряд гипотез о строении диаграмм Юнга $[\alpha]$ и $[\beta]$ для таких пар. (Определение полупропорциональных характеров напоминается там же.) Один результат о свойствах таких диаграмм (предложение 4.1), использующий результаты предыдущих разделов, утверждает, что $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины 4 и не имеют крюков длины $4t$ при натуральных $t \geq 2$.

Встречающиеся далее обозначения и понятия, связанные с разбиениями, напоминаются в разд. 1. Другие обозначения в основном стандартны (см., например, [3]). В частности, \mathbb{N} и \mathbb{C} есть множества всех натуральных чисел и всех комплексных чисел соответственно; $\text{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G ; $\text{Cl}(G)$ — множество всех классов сопряжённых элементов группы G ; запись $A := B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B . Как обычно, последовательности складываются по координатам; если $a = (a_1, \dots, a_k)$, $b = (b_1, \dots, b_l)$ и $k \geq l$, то $a + b := (a_1 + b_1, \dots, a_l + b_l, a_{l+1}, \dots, a_k)$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00148) и РФФИ-ГФЕН Китая (проект 05-01-39000).

1. Разбиения и диаграммы Юнга

Разбиение натурального числа n есть последовательность $\alpha = (a_1, \dots, a_l)$ натуральных чисел такая, что $a_1 \geq \dots \geq a_l$ и $n = a_1 + \dots + a_l$. Длина l разбиения α обозначается через $l(\alpha)$. i -й член a_i ($1 \leq i \leq l$) разбиения α обозначается через α_i . Считают также, что $\alpha_i = 0$ при $i > l$. Знаком разбиения $\alpha \in P(n)$ называется число $\text{sign}(\alpha) := (-1)^{n-l(\alpha)}$, а также знак этого числа. Каждому разбиению $\alpha = (a_1, \dots, a_l) \in P(n)$ сопоставляется его *диаграмма Юнга* (или просто *диаграмма*) $[\alpha] := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq a_i\}$. На рисунке её обычно изображают в виде l -строчной таблицы, состоящей из n равных квадратных клеток, так, что i -я строка имеет a_i клеток и начальные клетки всех строк находятся в одном столбце. Клетки (элементы) вида (i, i) диаграммы образуют её *главную диагональ*. Говорят, что разбиения α и β *ассоциированы*, если диаграмма одного из них получается из диаграммы другого отражением относительно главной диагонали. Разбиение, ассоциированное с α , обозначается через α' . Разбиение называется *самоассоциированным*, если $\alpha = \alpha'$. Множество всех клеток (i, j) диаграммы $[\alpha]$ таких, что $[\alpha]$ не содержит клетки $(i + 1, j + 1)$, называется её *границей*.

Крюком с вершиной (i, j) диаграммы $[\alpha]$ (или разбиения α) называется множество $H_{ij}^\alpha := \{(i, j)\} \cup A \cup L$, где $A := \{(i, j+k) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*рука крюка*) и $L := \{(i+k, j) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*нога крюка*). *Косым крюком* с вершиной (i, j) диаграммы $[\alpha]$ называется часть границы диаграммы $[\alpha]$, “вырезанная”, крюком H_{ij}^α . Его обозначают через R_{ij}^α или через $R(H_{ij}^\alpha)$. Косые крюки диаграммы $[\alpha]$ — это в точности те связные части её границы, после удаления которых из $[\alpha]$ остаётся диаграмма некоторого разбиения (какого-либо меньшего числа).

Пусть α, β — разбиения и H есть крюк в α . Введём обозначения:

$\alpha - H$ есть разбиение с диаграммой $[\alpha] \setminus R(H)$;

$\alpha^{ij} := \alpha - H_{ij}^\alpha$ (вместо α^{ij} пишут $\alpha^{i,j}$, если индексы записываются неслитно);

запись $\alpha = ' \beta$ означает, что $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$ (знак $'$ можно прочесть как “квазиравно”). Отрицание отношения $\alpha = ' \beta$ обозначается через $\alpha \neq ' \beta$.

На рис. 1.1 изображены диаграммы разбиений $\alpha = (5, 4, 4, 2)$ и $\alpha^{12} = (3, 3, 1, 1)$; точками отмечены клетки крюка H_{12}^α .

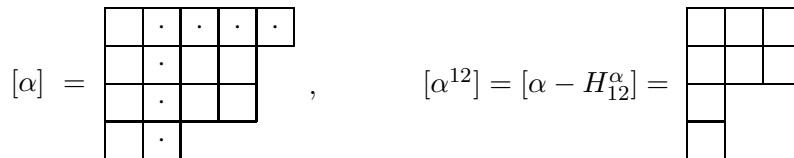


Рис. 1.1

Длиной крюка (косого крюка, диагонали, ноги крюка) называется его (или её) *мощность*. Длина главной диагонали диаграммы $[\alpha]$ обозначается через $d(\alpha)$. Положим $h_{ij}^\alpha := |H_{ij}^\alpha|$ ($= |R_{ij}^\alpha|$). Для обозначения обычного словарного (лексикографического) порядка на $P(n)$ при любом n используется знак \leq (например, $(6, 3, 3, 1) < (6, 4, 2, 1)$).

При $k \in \mathbb{N}$ k -*ядро разбиения* λ есть разбиение λ , диаграмма которого может быть получена из диаграммы $[\alpha]$ последовательным удалением нескольких косых крюков длины k , причём сама диаграмма $[\tilde{\lambda}]$ не имеет крюков длины k ($\tilde{\lambda}$ не зависит от выбора последовательности удаляемых косых крюков).

Разбиением числа 0 называют пустую (длины 0) последовательность натуральных чисел, обозначаемую через $()$, и считают, что $[()] = \emptyset$ и $()' = ()$. Далее под *разбиением* понимается разбиение некоторого целого неотрицательного числа.

Часто разбиения записывают в условной форме, заменяя подпоследовательность a, \dots, a длины $t \geq 0$ выражением a^t . Например, $(5, 4^2, 2) := (5, 4, 4, 2)$ и $(5, 1^0) := (5)$.

Будем говорить, что *к разбиению β можно добавить (косой) крюк длины t* , если существуют разбиение α и его крюк H длины t такие, что $\beta = \alpha - H$ и что *разбиение α получается добавлением к разбиению β (косого) крюка с вершиной (i, j) , если $\beta = \alpha^{ij}$* .

Предложение 1.1 ([1, теор. 2.1.7, 2.1.8, 2.1.11, 2.3.15] или [2, утвержд. 2.3, 4.12, 6.7]).

(1) $\text{Cl}(S_n) = \{C_\alpha \mid \alpha \in P(n)\}$, $|\text{Cl}(S_n)| = |P(n)|$.

(2) $\text{Irr}(S_n) = \{\chi^\alpha \mid \alpha \in P(n)\}$, $|\text{Irr}(S_n)| = |P(n)|$.

(3) $\chi^{(n)} = 1_{S_n}$ (главный характер группы S_n), $\chi^{(1^n)} = \xi$ — знакопеременный характер S_n (линейный характер с ядром A_n).

(4) $\chi^{\alpha'} = \chi^\alpha \xi$ для всех $\alpha \in P(n)$ (характеры χ^α и $\chi^{\alpha'}$ называются ассоциированными).

(5) χ^α исчезает на $S_n \setminus A_n$, если и только если $\alpha = \alpha'$ ($\alpha \in P(n)$).

(6) Неприводимые характеры группы S_n принимают лишь целые значения.

2. Диаграммы Юнга без крюков длины 4

Главная цель этого раздела — описать все самоассоциированные разбиения, не содержащие крюков длины 4. Нам потребуются следующие определения 2.1–2.4.

О п р е д е л е н и е 2.1. Для любого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\Delta_m := (m, m-1, \dots, 2, 1).$$

Диаграммы разбиений Δ_m изобразим на рис. 2.1.

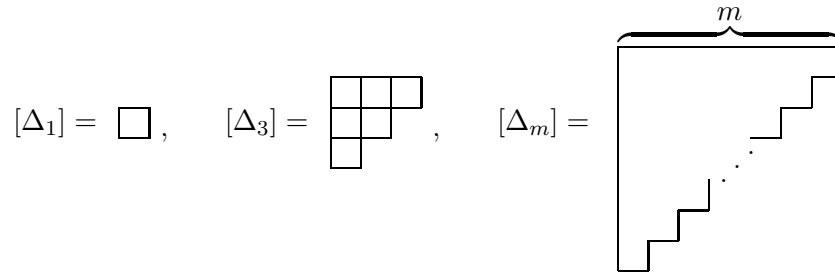


Рис. 2.1

Подсчитаем некоторые параметры разбиений Δ_m :

$$l(\Delta_m) = m, \quad d(\Delta_m) = \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor \quad \text{и} \quad |[\Delta_m]| = \frac{(m+1)m}{2}.$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Для любого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим

$$\Sigma_m := ((2m)^2, (2m-2)^2, \dots, 2^2) \quad (\Sigma_0 = ()).$$

При $m > 0$ диаграмма $[\Sigma_m]$ получается из диаграммы $[\Delta_m]$, заменой каждой её клетки четырёхклеточным квадратом (см. рис. 2.2).

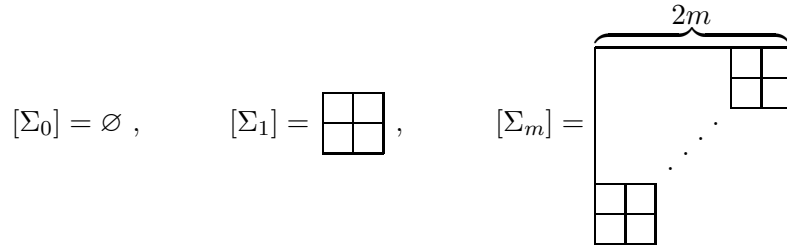


Рис. 2.2

Очевидно,

$$l(\Sigma_m) = 2m, \quad d(\Sigma_m) = 2 \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor \quad \text{и} \quad |[\Sigma_m]| = 2m(m+1).$$

О п р е д е л е н и е 2.3. Для любого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим

$$2.\Sigma_m := (2m+3, (2m+1)^2, (2m-1)^2, \dots, 3^2, 1^2) \quad (2.\Sigma_0 = (3, 1^2)).$$

Диаграммы разбиения $2.\Sigma_m$ изображены на рис. 2.3.

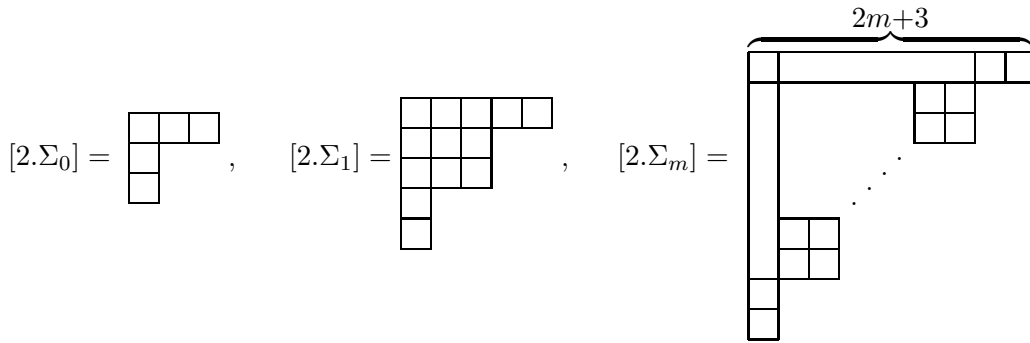


Рис. 2.3

Имеем:

$$l(2.\Sigma_m) = 3 + 2m, \quad d(2.\Sigma_m) = 1 + 2\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor \quad \text{и} \quad |[\Sigma_m]| = 1 + 2(m+1)(m+2).$$

Разбиение $2.\Sigma_m$ можно назвать 2-накрытием разбиения Σ_m . Нам потребуются также и некоторые “3-накрытия”.

О п р е д е л е н и е 2.4. Для любого самоассоциированного разбиения Θ положим

$$3.\Theta := (\Theta_1 + 4, \Theta_1 + 1, \Theta_2 + 1, \dots, \Theta_l + 1, 1^3), \quad \text{где } l = l(\Theta)$$

(в частности, $3.(.) = (4, 1^3)$), $3^0.\Theta := \Theta$ и $3^k.\Theta := 3.(3^{k-1}.\Theta)$ для натуральных k .

Схематично изобразим диаграмму $[3^k.\Theta]$ при $k = 2$ на рис. 2.4.

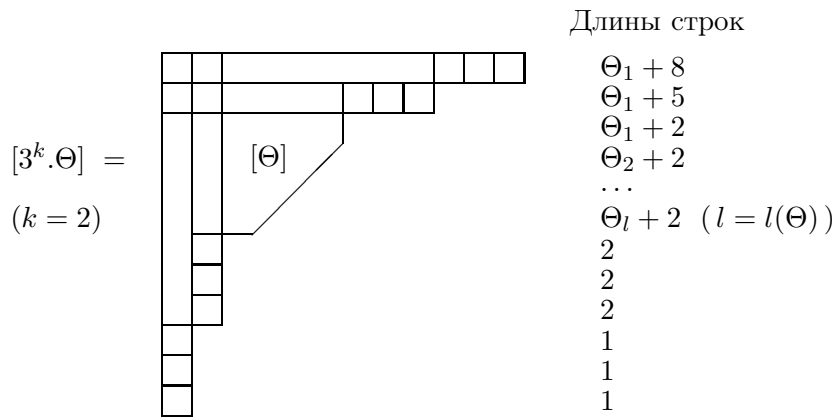


Рис. 2.4

Легко увидеть, что $l(3^k.\Theta) = 4k + l(\Theta)$, $d(3^k.\Theta) = k + d(\Theta)$ и $|[3^k.\Theta]| = |[\Theta]| + 2k\Theta_1 + 2 \cdot 3(1 + \dots + k) = |[\Theta]| + 2k\Theta_1 + 4k^2 + 3k$.

Теорема 2.1. Пусть γ – самоассоциированное разбиение некоторого числа. Равносильны условия:

- (1) γ не имеет крюков длины 4;
- (2) γ есть одно из разбиений $3^k.\Delta_m$, $3^k.\Sigma_m$ и $3^k.2.\Sigma_m$ при некоторых k, m .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (2) \Rightarrow (1) непосредственно видно из рис. 2.1–2.4.

Предположим, что γ не имеет крюков длины 4. Можно считать, что $\gamma \neq ()$ (иначе $\gamma = \Sigma_0$). Будем считать, что клетка диаграммы есть квадрат со стороной длины 1. Пусть S – ломаная, ограничивающая эту диаграмму справа-снизу, и $T = T(\gamma)$ – слово в алфавите $\{v, h\}$, составленное следующим образом: двигаясь по S от верхней точки до нижней, последовательно

записываем букву v , пройдя вертикальный отрезок длины 1, и букву h , пройдя горизонтальный отрезок длины 1. Например, если $\gamma = 2.\Sigma_1$ (см. рис. 2.3), то $T = vhhvvhvvh = vh^2v^2h^2v^2h$.

Далее мы установим типы слов T разбиений γ со свойством (1), не предполагая заранее, что $\gamma = \gamma'$.

Очевидно, слово T начинается с буквы v , оканчивается буквой h и по условию теоремы ни одна буква не встречается в нём подряд более трёх раз.

Ясно также, что слово T может быть лишь одного из следующих типов:

(1) $v^3h\tilde{v}$, (2) $v^2h\tilde{v}$, (4) $v^2h^2\tilde{v}$, (4) $vh\tilde{v}$, (5) $vh^2\tilde{v}$, (6) $vh^3\tilde{v}$, где \tilde{v} — некоторое подслово из T , которое либо пусто, либо начинается с v ; в каждом случае начало ломаной S показано на рис. 2.5 (нижняя вертикальная линия присутствует лишь в случае, когда слово \tilde{v} непустое).

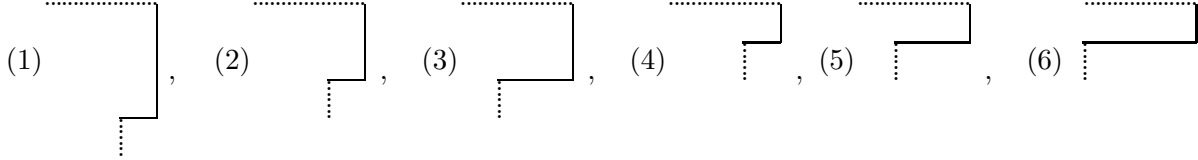


Рис. 2.5

1. Предположим, что $T = v^3h\tilde{v}$. Тогда, как легко увидеть, в начале слова \tilde{v} , если оно не пустое, может стоять лишь снова знакосочетание v^3h и т. д. Таким образом,

$$\text{если } T = v^3h\tilde{v}, \text{ то } T = (v^3h)^k, \text{ где } k \geq 1. \quad (2.1)$$

В этом случае, очевидно, $\gamma \neq \gamma'$.

2. Во втором случае мы приходим к тому же самому заключению относительно \tilde{v} , что и в первом случае, т. е.

$$\text{если } T = v^2h\tilde{v}, \text{ то } T = v^2h(v^3h)^k \text{ при } k \geq 0. \quad (2.2)$$

И в этом случае $\gamma \neq \gamma'$.

Далее мы будем учитывать (без ссылок) следующий факт, непосредственно вытекающий из пунктов 1 и 2:

$$\text{если } T = T_1v^2hvT_2, \text{ где } T_1 \text{ и } T_2 \text{ — подслова в } T, \text{ то } T = T_1v^2h(v^3h)^k \text{ при } k \geq 1.$$

3. Пусть $T = v^2h^2\tilde{v}$. Тогда в начале слова \tilde{v} (если оно не пустое) может стоять лишь одно из знакосочетаний v^2h^2v , v^2hv и v^3h . Отсюда легко следует, что

$$\text{если } T = v^2h^2\tilde{v}, \text{ то } T = (v^2h^2)^m(v^3h)^k \text{ или } T = (v^2h^2)^mv^2h(v^3h)^k, \text{ где } m \geq 1 \text{ и } k \geq 0. \quad (2.3)$$

Если $\gamma = \gamma'$, то в этом случае $T = (v^2h^2)^m$ и, следовательно, $\gamma = \Sigma_m$.

В общем же случае $[\gamma]$ получается отбрасыванием первых k строк в диаграмме $[3^k.\delta]$, где $[\delta]$ есть либо $[\Sigma_m]$, либо получается из $[2.\Sigma_m]$ отбрасыванием первой строки.

4. Легко увидеть, что

$$\text{если } T = vh\tilde{v}, \text{ то } T = (vh)^m(v^3h)^k, \text{ где } m \geq 1 \text{ и } k \geq 0. \quad (2.4)$$

Если $\gamma = \gamma'$, то здесь $k = 0$ и $\gamma = \Delta_m$.

В общем же случае γ получается из $3^k.\Delta_m$ отбрасыванием первых k строк.

5. Если же $T = vh^2\tilde{v}$, то слово \tilde{v} может начинаться только с v^2h^2 или с v^3h . Поэтому

$$\begin{aligned} \text{если } T = vh^2\tilde{v}, \text{ то } T = vh^2(v^2h^2)^m(v^3h)^k \text{ или} \\ T = vh^2(v^2h^2)^mv^2h(v^3h)^k, \text{ где } m \geq 0 \text{ и } k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $\gamma \neq \gamma'$.

6. Пусть, наконец, $T = vh^3\tilde{v}$. Пусть l — наибольшее натуральное число такое, что T начинается с $(vh^3)^l$. Если слово T продолжается, то $T = (v^3h)^l T_1$, где T_1 — любое из слов, описанных в предыдущих случаях. Поэтому

$$\text{если } T = vh^3\tilde{v}, \text{ то } T = (v^3h)^l T_1, \text{ где } l \in \mathbb{N} \text{ и } T_1 \text{ — либо пустое, либо одно из слов, встречающихся в заключениях утверждений (2.1)–(2.5).} \quad (2.6)$$

Из утверждений (2.1)–(2.6) следует, что все типы слова T получаются из заключительных выражений для T в (2.1)–(2.5) добавлением в начале слова подслово $(v^3h)^l$, где $l \geq 0$.

Теперь понятно, что если $\gamma = \gamma'$, то γ есть одно из разбиений пункта (2) теоремы. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.1 позволяет описать все разбиения без крюков длины 4. Для формулировки результата удобно ввести следующие обозначения. Для любого разбиения Θ и чисел $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ определим разбиение $3^{k,l}.\Theta$ следующим образом:

- $3^{k,l}.\Theta := 3^k.\Theta$, если $k = l$,
- $[3^{k,l}.\Theta]$ получается из $[3^l.\Theta]$ удалением первых $l - k$ столбцов, если $k < l$,
- $[3^{k,l}.\Theta]$ получается из $[3^k.\Theta]$ удалением первых $k - l$ строк, если $k > l$.

Далее пусть

$2^{0,1}\Sigma_m$ ($m \geq 0$) есть разбиение, диаграмма разбиения которого получается из диаграммы разбиения $2.\Sigma_m$ удалением первого столбца.

Теорема 2.2. Пусть γ — разбиение некоторого натурального числа. Равносильны условия:

- (1) γ не имеет крюков длины 4;
- (2) $\gamma = 3^{k,l}.\delta$, где $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и δ есть одно из разбиений Δ_m ($m \geq 1$), Σ_m ($m \geq 0$), $2.\Sigma_m$ ($m \geq 0$) и $2^{0,1}.\Sigma_m$ ($m \geq 0$).

Доказательство. Пусть верно условие (1). Тогда из утверждений (2.1)–(2.6) в доказательстве теоремы 2.1 (см. также предпоследний абзац этого доказательства) легко усмотреть справедливость условия (2).

Очевидно, что и из (2) следует (1).

Теорема 2.2 доказана.

3. Некоторые свойства разбиений $3^k.\Delta_m$, $3^k.\Sigma_m$, $3^k.2.\Sigma_m$

Введём следующие обозначения. Для любого разбиения γ пусть

$L(\gamma)$ обозначает множество длин всех крюков разбиения γ , и

$L_i(\gamma)$ — множество длин всех тех крюков разбиения γ , вершина которых лежит в i -й строке диаграммы $[\gamma]$.

Предложение 3.1.

- (1) Если $\gamma = \Delta_m$, где $m \geq 1$, то $L(\gamma) = L_1(\gamma) = \{1, \dots, 2m - 1\} \setminus 2\mathbb{N}$.
- (2) Если $\gamma = \Sigma_m$, где $m \geq 1$, то $L(\gamma) = L_1(\gamma) \cup L_2(\gamma) = \{1, \dots, 4m - 1\} \setminus 4\mathbb{N}$.
- (3) Если $\gamma = 2.\Sigma_m$, где $m \geq 0$, то $L(\gamma) = L_1(\gamma) \cup L_2(\gamma) = (\{1, \dots, 4m + 5\} \setminus \{4m + 3\}) \setminus 4\mathbb{N}$.
- (4) Если $\gamma = 3.\delta$ для некоторого разбиения $\delta = \delta'$ длины l , то $L(\gamma) = L_1(\gamma) \cup L(\delta)$, причём $L_1(\gamma) = \{h_{12}^\delta + 4, \dots, h_{1l}^\delta + 4\} \cup \{7 + 2l, 3, 2, 1\}$.

Доказательство. 1. Пусть сначала $\gamma = \Delta_m$ ($m \geq 1$). Очевидно, что $L(\gamma) = L_1(\gamma)$ и

$$h_{1j}^\gamma = 1 + 2(m - j) \text{ для всех } j \in \{1, \dots, m\}. \quad (3.1)$$

Следовательно, $L(\gamma)$ есть множество всех нечётных чисел, не превосходящих $2m - 1$, т. е. верно утверждение (1).

2. Пусть $\gamma = \Sigma_m$ ($m \geq 0$). Если $m = 0$, то $L(\gamma) = \emptyset$. Пусть $m \geq 1$. Легко увидеть, что тогда $L(\gamma) = L_1(\gamma) \cup L_2(\gamma)$ ($h_{i+2,j}^\gamma = h_{i,j+2}^\gamma$ для всех $(i+2, j) \in [\gamma]$) и справедливы следующие формулы при любом $s \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} h_{1,2s-1}^{\Sigma_m} &= 4(m-s) + 3, & h_{1,2s}^{\Sigma_m} &= 4(m-s) + 2, \\ h_{2,2s-1}^{\Sigma_m} &= 4(m-s) + 2, & h_{2,2s}^{\Sigma_m} &= 4(m-s) + 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из этих формул следует утверждение (2).

3. Пусть $\gamma = 2.\Sigma_m$ ($m \geq 0$). Если $m = 0$, то $\gamma = (3, 1^2)$ $L(\gamma) = \{1, 2, 5\}$. Пусть $m \geq 1$. Очевидно, что диаграмма $[\gamma]$ есть часть диаграммы $[\Sigma(m+2)]$, а именно, $[\gamma] = [\Sigma(m+2)]^{11}$. Отсюда и из (3.2) следует, как нетрудно заметить, что $L(\gamma) = L_1(\gamma) \cup L_2(\gamma)$ и справедливы равенства:

$$\begin{aligned} h_{1,2s-1}^{2.\Sigma_m} &= 4(m-s) + 9 \quad \text{при } s \in \{1, \dots, m+2\}, \\ h_{1,2s}^{2.\Sigma_m} &= 4(m-s) + 6 \quad \text{при } s \in \{1, \dots, m+1\}, \\ h_{2,2s-1}^{2.\Sigma_m} &= 4(m-s) + 6 \quad \text{при } s \in \{1, \dots, m+1\}, \\ h_{2,2s}^{2.\Sigma_m} &= 4(m-s) + 3 \quad \text{при } s \in \{1, \dots, m\} \quad (m > 0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Заметим, что эти формулы справедливы и при $m = 0$. Отсюда следует утверждение (3).

4. Пусть $\gamma = 3.\delta$, где $\delta = \delta'$. Пусть $l := l(\delta) (= \delta_1)$. Пусть $l > 0$. Очевидно, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} h_{1,1}^\gamma &= 7 + 2l, \\ h_{1,s+1}^\gamma &= h_{1,s}^\delta + 4 \quad \text{при } s \in \{1, \dots, l\} \quad (l > 0), \\ h_{1,l+2}^\gamma &= 3, \quad h_{1,l+3}^\gamma = 2, \quad h_{1,l+4}^\gamma = 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку эти формулы справедливы и при $l = 0$, то отсюда следует утверждение (4). Предложение 3.1 доказано.

Следствие 3.1. Ни одно из разбиений $3^k.\Delta_m$, $3^k.\Sigma_m$ и $3^k.2.\Sigma_m$ при любых возможных k, m не имеет крюков, длина которых делится на 4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k = 0$ требуемое утверждение непосредственно вытекает из пунктов (1)–(3) предложения 3.1. Но теперь общий случай ($k \geq 0$) легко доказывается индукцией по k с помощью пункта (4) предложения 3.1. Следствие доказано.

4. К гипотезе об отсутствии полупропорциональных неприводимых характеров у знакопеременных групп

В статье [4] (см. также [5, гипотеза 1]) была выдвинута следующая

Гипотеза 1. Знакопеременная группа A_n при любом $n \in \mathbb{N}$ не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.

Напомним, что функции φ и ψ из некоторого множества G в поле \mathbb{C} называются *полупропорциональными*, если они непропорциональны и для некоторого подмножества M из G пропорциональны ограничения φ и ψ на M и их ограничения на $G \setminus M$.

Из [4, теорема 2] следует, что гипотеза 1 равносильна следующей гипотезе, сформулированной в терминах неприводимых характеров группы S_n .

Гипотеза 2. Если χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n ($\alpha, \beta \in P(n)$), полупропорциональные на A_n , то одно из разбиений α и β самоассоциировано.

Однако для доказательства гипотезы 2 индукцией по n , оказывается необходимым для всех n описать также и все пары (α, β) такие, что неприводимые характеры χ^α и χ^β группы S_n полупропорциональны на разности $S_n \setminus A_n$.

Экспериментальный материал позволяет предположить, что справедливы следующие гипотезы.

Гипотеза 3. Если χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n ($\alpha, \beta \in P(n)$), полупропорциональные на A_n , то

- (а) диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины 3 и
- (б) после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма, не имеющая крюков длины 3.

Гипотеза 4. Если χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n ($\alpha, \beta \in P(n)$), полупропорциональные на $S_n \setminus A_n$, то

- (а) диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины 4 и
- (б) после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма, не имеющая крюков длины 4.

Интересно отметить своеобразную похожесть заключений этих гипотез.

Обе гипотезы имеют серьёзные подтверждения. Как следует из [5, теорема Б] и [6, теорема 1], каждая из них верна всякий раз, когда длина главной диагонали хотя бы одного из разбиений α и β меньше трёх.

Описание пар (α, β) из заключения гипотезы 3 получено автором ранее (см. [7]; здесь оно нам не потребуется).

Описание пар (α, β) из заключения гипотезы 4 легко получается из теоремы 2.1, которая описывает самоассоциированную диаграмму из пункта (б) (диаграмму, являющуюся 4-ядром каждого из разбиений α и β). Дело в том, что по ней, какой бы из серий $3^k \cdot \Delta_m$, $3^k \cdot \Sigma_m$ и $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_m$ она ни принадлежала, множество $\{\alpha, \beta\}$ восстанавливается однозначно с точностью до ассоциированности. Используя рис. 2.1–2.4, легко понять, что гипотезу 4 можно переформулировать следующим образом (см. также рис. 4.1–4.3).

Гипотеза 5. Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и χ^α полупропорционально χ^β на $S_n \setminus A_n$. Тогда с точностью до перемены мест α и β верно одно из следующих утверждений (везде k, m целые):

- (1) $\alpha = 3^k \cdot \Delta_m + (4)$ и $\beta = 3^k \cdot \Delta_m + (0^k, 2, 2)$, где $k \geq 0$ и $m \geq 1$;
- (2) $\alpha = 3^k \cdot \Sigma_m + (4)$ и $\beta = 3^k \cdot \Sigma_m + (0^k, 3, 1)$, где $k \geq 0$ и $m \geq 0$;
- (3) $\alpha = 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_m + (4)$ и $\beta = 3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_m + (0^k, 1, 3)$, где $k \geq 0$ и $m \geq 0$.

Следующий результат будет необходим для доказательства этой гипотезы.

Предложение 4.1. Пусть α и β — разбиения какого-либо из условий (1)–(3) гипотезы 5. Тогда

- (1) α и β имеют точно по одному крюку длины 4;
- (2) α и β не имеют крюков длины $4t$ при натуральных $t \geq 2$.

Доказательство. Мы можем считать, что $\alpha = \gamma + (4)$ и $\beta = \gamma + \tau$, где γ есть одно из разбиений $3^k \cdot \Delta_m$, $3^k \cdot \Sigma_m$ и $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_m$, а τ — зависящее от γ разбиение числа 4, указанное в гипотезе 5. Диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ при $k = 0$ изображены на рис. 4.1–4.3. Легко представить себе эти диаграммы и при $k > 0$.

Утверждение (1) получается из следствия 3.1 и внимательного рассмотрения этих диаграмм (единственные косые крюки длины 4 на рисунках помечены точками).

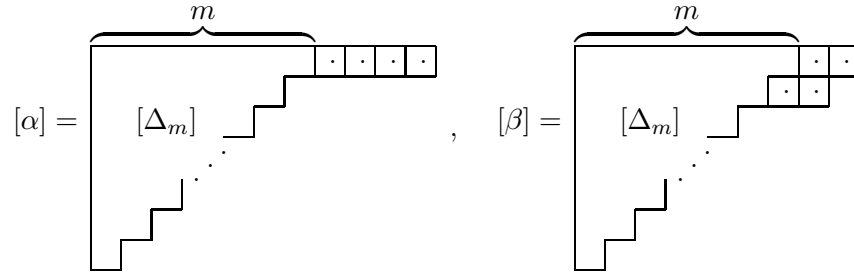


Рис. 4.1

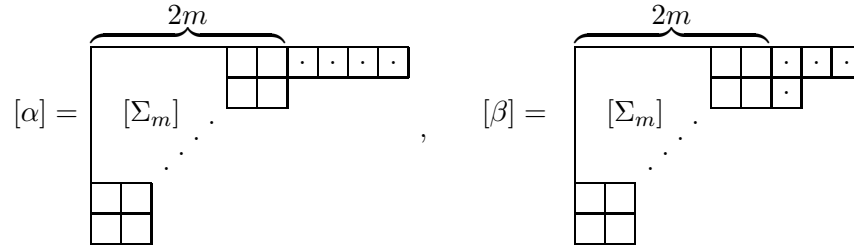


Рис. 4.2

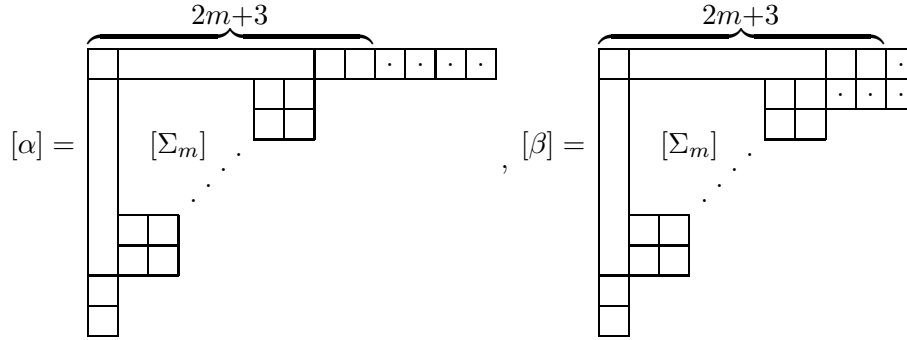


Рис. 4.3

Докажем утверждение (2). Так как $\alpha = \gamma + (4)$, то множество всех длин крюков в α состоит из чисел 1, 2, 3, 4, чисел $h_{1j}^\alpha = h_{1j}^\gamma + 4$ при $j \in \{1, \gamma_1\}$ и чисел $h_{ij}^\alpha = h_{ij}^\gamma$ при $i \geq 2$ и $j \in \{1, \gamma_i\}$. Отсюда и из следствия 3.1 следует, что α не имеет крюков длины $4t$ при натуральных $t \geq 2$.

Такое же утверждение для $\beta = \gamma + \tau$ получается с помощью тех же аргументов, но с отдельным разбором случаев $3^k \cdot \Delta_m$, $3^k \cdot \Sigma_m$ и $3^k \cdot 2 \cdot \Sigma_m$.

Случай 1. Пусть $\gamma = \Delta_m$ ($m \geq 1$) и, следовательно, $\beta = \Delta_m + (2, 2)$ (см. рис. 4.1). Поскольку по предложению 3.1 длины всех крюков в Δ_m нечётны, то в β крюки H_{ij}^β длины, делящейся на 4, могут существовать лишь при $i \in \{1, 2\}$. Но при таких i числа $h_{ij}^\beta (= h_{ij}^{\Delta_m} + 2)$ нечётны при $j \leq m-1$ (по (3.1)), а остальные таковы: $h_{1m}^\beta = 4$, $h_{1,m+1}^\beta = 3$, $h_{1,m+2}^\beta = 1$, $h_{2m}^\beta = 2$, $h_{2,m+1}^\beta = 1$. Значит, при таких β утверждение (2) верно.

Пусть теперь $\gamma = 3 \cdot \Delta_m$ ($m \geq 1$) и, следовательно, $\beta = 3 \cdot \Delta_m + (0, 2, 2)$. Так как, очевидно, $\beta^{11} = \Delta_m + (2, 2)$, то согласно пункту 1 мы знаем значения h_{ij}^β при $i \geq 2$ и $j \geq 2$. Используя их, находим, что числа h_{ij}^β нечётны при $i \leq m+1$ и $j \leq m$ и не превосходят 6 в противном случае. (См. также рис. 4.4, где для наглядности при некоторых маленьких γ изображены диаграммы $[\beta] = [\gamma + \tau]$ рассматриваемых серий, а в каждой клетке диаграммы записана длина крюка с вершиной в этой клетке.)

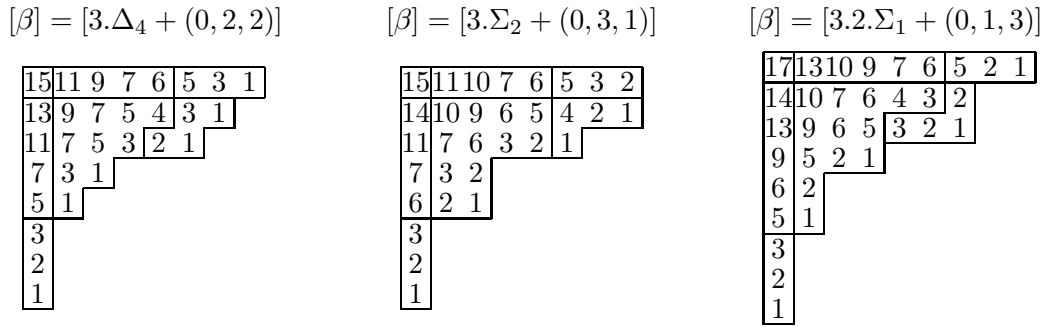


Рис. 4.4

Пусть, наконец, $\beta = 3^k.\Delta_m + (0^k, 2, 2)$, где $k \geq 2$. Согласно предыдущему абзацу $L_1(3.\Delta_m + (0, 2, 2))$ не содержит чисел, делящихся на 4. Используя это и утверждение (4) предложения 3.1, с помощью индукции по k заключаем, что множество $L_1(\beta) \cup \dots \cup L_k(\beta)$ не содержит чисел, делящихся на 4. Отсюда и из заключения первого абзаца случая 1 следует справедливость утверждения (2) для $\beta = 3^k.\Delta_m + (0^k, 2, 2)$ при любых k, m .

Случай 2. Пусть $\gamma = \Sigma_m$ ($m \geq 0$) и, следовательно, $\beta = \Sigma_m + (3, 1)$ (см. рис. 4.2). Достаточно рассмотреть лишь случай, когда $m > 0$. Очевидно, $\beta_1 = 2m + 3$. Поскольку при $j \leq 2m$ $h_{1j}^\beta = h_{1j}^{\Sigma_m} + 3$ и $h_{2j}^\beta = h_{2j}^{\Sigma_m} + 1$, то из (3.2) следует, что при этих j числа h_{1j}^β и h_{2j}^β не делятся на 4. Далее, $(h_{1,2m+1}^\beta, h_{1,2m+2}^\beta, h_{1,2m+3}^\beta) = (4, 2, 1)$ и $h_{2,2m+1}^\beta = 1$. Значит, при таких β утверждение (2) верно.

Пусть $\gamma = 3.\Sigma_m$ ($m \geq 0$) и, следовательно, $\beta = 3.\Sigma_m + (0, 3, 1)$ (см. рис. 4.4). Так как, очевидно, $\beta^{11} = \Sigma_m + (3, 1)$, то согласно предыдущему абзацу мы знаем значения h_{ij}^β при $i \in \{2, 3\}$. Используя их, находим, что числа h_{1j}^β не делятся на 4 при $j \leq m - 1$ и равны 6, 5, 2, 1 при j , равном $m, m + 1, m + 2, m + 3$ соответственно. Таким образом, $L_1(3.\Sigma_m + (0, 2, 2))$ не содержит чисел, делящихся на 4.

Теперь так же, как в случае 1, с помощью индукции по k заключаем, что множество $L_1(\beta) \cup \dots \cup L_k(\beta)$ не содержит чисел, делящихся на 4. Отсюда и из заключения первого абзаца случая 2 следует справедливость утверждения (2) для $\beta = 3^k.\Sigma_m + (0^k, 3, 1)$ при любых k, m .

Случай 3. Пусть $\gamma = 2.\Sigma_m$ ($m \geq 0$) и, следовательно, $\beta = \Sigma_m + (1, 3)$ (см. рис. 4.3). Достаточно рассмотреть лишь случай, когда $m > 0$. Здесь $l(\beta) = 2m + 4$. Имеем $h_{11}^\beta = 4m + 2$, $h_{21}^\beta = 4m + 1$ и при $j \in \{2, \dots, 2m + 1\}$ $h_{1j}^\beta = h_{1j}^{\Sigma_m} + 1$ и $h_{2j}^\beta = h_{2j}^{\Sigma_m} + 3$. Как следует из (3.3), ни одно из этих чисел не делится на 4. Далее, $(h_{1,2m+2}^\beta, h_{1,2m+3}^\beta, h_{1,2m+4}^\beta) = (4, 3, 2)$ и $(h_{2,2m+2}^\beta, h_{2,2m+3}^\beta, h_{2,2m+4}^\beta) = (3, 3, 1)$. Значит, при таких β утверждение (2) верно.

Пусть $\gamma = 3.2.\Sigma_m$ ($m \geq 0$) и, следовательно, $\beta = 3.2.\Sigma_m + (0, 1, 3)$ (см. рис. 4.4). Так же, как и в предыдущих случаях, легко проверить, что $L_1(\beta)$ не содержит чисел, делящихся на 4. Теперь подобно предыдущим случаям получаем справедливость утверждения (2) для $\beta = 3^k.2.\Sigma_m + (0^k, 1, 3)$ при любых k, m .

Предложение 4.1 доказано.

Поступила 2.11.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **James G., Kerber A.** The representation theory of the symmetric group. London: Addison–Wesley, 1981.
2. **Джеймс Г.** Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982.

3. **Белоногов В. А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990.
4. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.
5. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n и A_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, №1. С. 10–43.
6. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, №2. С. 3–23.
7. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n , полупропорциональных на A_n // Алгебра и логика. Принято к печати.

УДК 519.14

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}^1$

А. Л. Гаврилюк, А. А. Махнев

Изучены простые делители порядков автоморфизмов и подграфы их неподвижных точек гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$. В частности, доказано, что этот граф не является дистанционно транзитивным.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , т.е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом). Если Γ — граф диаметра d , то через Γ_{i_1, \dots, i_t} , где $i_j \leq d$ для всех $j = 1, \dots, t$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии $i \in \{i_1, \dots, i_t\}$ в Γ .

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если степень любой вершины a из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если он содержит v вершин, регулярен степени k , и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин ab , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $\Gamma_1(w)$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается подмножество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Далее, через $p_{ij}^k(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии k в графе Γ . По определению [1], в дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^k(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y и равны p_{ij}^k — числам пересечения графа Γ .

Через $K_{m \times n}$ обозначим полный m -дольный граф с долями порядка n . Граф на множестве пар $X \times Y$ называется $m \times n$ *решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. *Треугольным графом $T(m)$* называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны только, если они имеют единственный общий элемент.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00046).

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a , не лежащей на прямой L , найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры, называется псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s, t)$.

Система инцидентности (X, \mathcal{B}) с множеством точек X и множеством блоков \mathcal{B} называется t - (V, K, Λ) схемой, если $|X| = V$, каждый блок инцидентен ровно K точкам и любые t точек инцидентны ровно Λ блокам. Любая 2-схема является (V, B, R, K, Λ) схемой, где B — число блоков, каждая точка инцидентна R блокам, и имеют место равенства $VR = BK$, $(V - 1)\Lambda = R(K - 1)$.

Блок-схемы естественно возникают внутри вполне регулярных графов. Например, если для коклики X графа Γ достигается равенство в границе Хоффмана (см. [1]), то пара $(X, \Gamma - X)$ является 2-схемой. В [2] рассматривается возможность, когда в сильно регулярном графе Γ для некоторой вершины a пара $(\Gamma_1(a), \Gamma_2(a))$ является 2-схемой, в которой точка и блок инцидентны, только если они смежны в Γ .

В работе [3] исследовались вполне регулярные графы Γ диаметра d с параметрами (v, k, λ, μ) , в которых для некоторой вершины a пара $(\Gamma_d(a), \Gamma_{d-1}(a))$ является 2 - (V, B, R, K, Λ) схемой. Тогда $R = c_d(a, x)$ для $x \in \Gamma_d(a)$, $K = b_{d-1}(a, y)$ для $y \in \Gamma_{d-1}(a)$ и подграф $\Gamma_d(a)$ является кликой, кокликой или сильно регулярным графом с параметрами $(v' = V, k' = k - R, \lambda' = \lambda - \Lambda, \mu' = \mu - \Lambda)$.

Класс дистанционно регулярных графов Γ , в которых для некоторой вершины a подграф $\Gamma_d(a)$ является кокликой, содержит антиподальные и двудольные графы, для этих графов $\Lambda = 0$ (и 2-схема вырождена) и $\Lambda = \mu$ соответственно. Дистанционно регулярный граф Γ , в котором для некоторой вершины a подграф $\Gamma_d(a)$ — клика, оказывается половинным графом дистанционно регулярного графа нечетного диаметра $2d + 1$, являющегося антиподальным 2-накрытием. Следующие дистанционно регулярные графы диаметра $2d + 1 \geq 7$ являются двудольными и антиподальными 2-накрытиями:

- (1) удвоения нечетных графов на $2d + 1$ точках (половинные графы являются графами Джонсона $J(2d + 1, d)$);
- (2) $(2d + 1)$ -куб;
- (3) графы диаметра 7 на 2048 вершинах (удвоение графа смежных классов усеченного бинарного кода Голея) и на 4096 вершинах (удвоение графа смежных классов бинарного кода Голея).

Для дистанционно регулярных графов диаметра $d \geq 3$, в которых для любой вершины a пара $(\Gamma_d(a), \Gamma_{d-1}(a))$ является 2-схемой, можно выдвинуть следующее предположение.

Предположение 1. Если Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$, в котором для любой вершины a пара $(\Gamma_d(a), \Gamma_{d-1}(a))$ является 2-схемой, то подграф $\Sigma = \Gamma_d(a)$ является кликой или кокликой.

Указанная гипотеза подтверждается тем, что среди допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов, приведенных в [1], лишь два массива $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ и $\{49, 36, 8; 1, 6, 42\}$ отвечают графам, для которых могут быть выполнены условия предположения 1. Для первого массива $\Gamma_3(a)$ является 6×6 решеткой, а для второго — объединением семи изолированных 8-клик. Однако, в работе [3] доказано, что в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ найдется вершина, третья окрестность которой не является 6×6 решеткой. Для второго случая пара $(\Gamma_3(a), \Gamma_2(a))$ является (V, B, R, K, Λ) -схемой,

где $V = 56$, $B = 294$, $R = 42$, $K = 8$ и $\Lambda = R(K - 1)/(V - 1) = 42 \cdot 7/55$ (дробность числа Λ показывает наличие вершин в $\Gamma_3(a)$, находящихся на расстоянии 3, что противоречит предположению, что пара $(\Gamma_3(a), \Gamma_2(a))$ является 2-схемой в указанном смысле). Таким образом, неизвестны массивы пересечений, которым бы отвечали дистанционно регулярные графы, третья окрестность каждой вершины которых является сильно регулярным графом, а пара $(\Gamma_d(a), \Gamma_{d-1}(a))$ является 2-схемой.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$. Этот граф является Q -полиномиальным, имеет спектр $\{60^1, 14^{45}, 0^{207}, -10^{69}\}$, и граф $\Gamma_{\{1,3\}}$ сильно регулярен с параметрами $(322, 96, 20, 32)$. Изучение группы автоморфизмов этого гипотетического графа может оказать помощь при решении вопроса о существовании графа с помощью компьютера.

Теорема 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка $p \geq 5$ и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда верно одно из утверждений:

- (1) $p = 7$ или 23 и Ω — пустой граф;
- (2) $p = 5$ и либо
 - (i) Ω состоит из двух вершин, находящихся на расстоянии 3 в Γ , либо
 - (ii) $|\Omega| = 7$ и $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ является 6-кликкой для некоторой вершины $a \in \Omega$.

Следствие 1. Дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$, не является дистанционно транзитивным.

1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы. Следующая лемма является аналогом границы Хоффмана для произвольных регулярных подграфов.

Лемма 1.1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с собственными значениями k, r, s на v вершинах, и Ω — регулярный подграф графа Γ степени k' на u вершинах. Тогда $s \leq k' - u(k - k')/(v - u) \leq r$, причем если в одном из этих нестрогих неравенств достигается равенство, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с $u(k - k')/(v - u)$ вершинами из Ω .

Доказательство. Это утверждение хорошо известно (см., например, § 2 из [4]).

Лемма 1.2. Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(322, 96, 20, 32)$. Тогда Δ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(6, 15)$, имеет собственные значения $4, -16$ кратностей $252, 69$ соответственно и

- (1) для клики L имеем $|L| \leq 7$, причем в случае равенства каждая вершина вне L смежна точно с 2 вершинами из L ;
- (2) $|C| \leq 46$ для любой коклики C из Δ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина вне C смежна точно с 16 вершинами из C ;
- (3) если Ω — регулярный подграф графа Δ степени k' на u вершинах, то $-16 \leq k' - u(96 - k')/(322 - u) \leq 4$, причем в случае равенства в любом из этих нестрогих неравенств каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с $u(96 - k')/(322 - u)$ вершинами из Ω .

Доказательство. Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(322, 96, 20, 32)$. Легко заметить, что граф Δ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(6, 15)$, поэтому он имеет собственные значения 4 и -16 кратностей 252 и 69 соответственно.

Для клики L граница Хоффмана дает оценку $|L| \leq 1+96/16 = 7$, причем в случае равенства каждая вершина вне L смежна точно с 2 вершинами из L .

Далее, $|C| \leq 322 \cdot 16/112 = 46$ для любой коклики C из Δ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина вне C смежна точно с 16 вершинами из C (граница Хоффмана для коклик).

Утверждение (3) следует из леммы 1.1. Лемма доказана.

Лемма 1.3. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$. Тогда граф $\Delta = \Gamma_{1,3}$ является сильно регулярным с параметрами $(322, 96, 20, 32)$ и для чисел пересечения графа Γ верны равенства:

- (1) $p_{11}^1 = 14, p_{21}^1 = 45, p_{32}^1 = 30, p_{22}^1 = 150, p_{33}^1 = 6,$
- (2) $p_{12}^2 = 40, p_{13}^2 = 8, p_{32}^2 = 24, p_{33}^2 = 4, p_{22}^2 = 160,$
- (3) $p_{12}^3 = 50, p_{22}^3 = 150, p_{13}^3 = 10, p_{23}^3 = 25$ и $p_{33}^3 = 0.$

Доказательство. Из леммы 4.1.7 [1] следуют равенства:

$$p_{ii-1}^1 = c_i k_i / k, p_{ii}^1 = a_i k_i / k, p_{ii+1}^1 = b_i k_i / k,$$

$$p_{i-22}^i = c_{i-1} c_i / \mu, p_{i+12}^{i-1} = b_{i-1} b_i / \mu, p_{i-1i+1}^2 = k_i c_i b_i / (k b_1),$$

$$p_{i2}^{i-1} = b_{i-1} (a_i + a_{i-1} - a_1) / \mu, p_{i2}^{i+1} = c_{i+1} (a_i + a_{i+1} - a_1) / \mu.$$

Имеем $a_1 = 14, a_2 = 40$ и $a_3 = 10$. Далее, $k_1 = 60, k_2 = 225$ и $k_3 = 36$. Поэтому $p_{21}^1 = c_2 k_2 / k = 12 \cdot 225 / 60 = 45$ и $p_{32}^1 = c_3 k_3 / k = 50 \cdot 36 / 60 = 30$. По определению параметров a_i имеем $p_{12}^2 = 40$ и $p_{13}^3 = 10$.

Аналогично, $p_{11}^1 = a_1 k_1 / k = 14, p_{22}^1 = a_2 k_2 / k = 40 \cdot 225 / 60 = 150$ и $p_{33}^1 = a_3 k_3 / k = 10 \cdot 36 / 60 = 6$.

Далее, $p_{12}^3 = c_2 c_3 / \mu = 50, p_{13}^2 = k_2 c_2 b_2 / (k b_1) = 8, p_{22}^2 = p_{21}^2 (a_2 + a_3 - a_1) / \mu = 150$ и $p_{32}^2 = b_2 (a_3 + a_2 - a_1) / \mu = 8 \cdot 36 / 12 = 24$. Поэтому $p_{33}^2 = 36 - p_{23}^2 - p_{13}^2 = 4$.

Снова по лемме 4.1.7 из [1] получим $p_{22}^2 = (p_{11}^2 b_1 + p_{12}^2 (a_2 - a_1) + p_{13}^2 c_3 - p_{02}^2 b_0) / \mu = 160,$
 $p_{33}^2 = (p_{12}^2 b_2 + p_{13}^2 (a_3 - a_1) - p_{03}^2 b_0) / \mu = 25$ и $p_{33}^3 = (p_{22}^3 b_2 + p_{23}^3 (a_3 - a_2) - p_{13}^3 b_1) / c_3 = 0$.

Наконец, по определению параметров a_i имеем $p_{12}^2 = 40$ и $p_{13}^3 = 10$.

Теперь граф Γ_2 является сильно регулярным и дополнительный к нему граф Δ имеет параметры $(322, 96, 20, 32)$. Лемма доказана.

Интересно (предложение 1.3.2 из [1]), что граница Хоффмана для коклик дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ также равна 46, причем любая вершина вне 46-коклики C смежна точно с 10 вершинами из C и находится на расстоянии 3 от 6 вершин из C .

2. Характеры конечных групп и автоморфизмы дистанционно регулярных графов

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений (X, \mathcal{R}) с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $n_i = |\Gamma_i(u)|, n = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^k A_k$ для подходящих неотрицательных целых p_{ij}^k .

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, k) стоит p_{ij}^k . Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1 , поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задает порядок на множестве

собственных значений матрицы P_j . Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$.

Предложение 1. Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1 , отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $n/\langle u_j, w_j \rangle$.

Доказательство. См. теорему 17.12 из [2].

Фактически из доказательства теоремы 17.12 следует, что w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q .

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(n, \mathbb{C})$. Пространство \mathbb{C}^n является ортогональной прямой суммой собственных G -инвариантных подпространств $W_0 \oplus \dots \oplus W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. § 3.7 [4]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = n^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Тогда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 60 & 14 & 12 & 0 \\ 0 & 45 & 40 & 50 \\ 0 & 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.1. Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1 , отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда

- (1) $u_0 = (1, 1, 1, 1)$, $w_0 = (1, 60, 225, 36)^t$,
- (2) $u_1 = (1, 7/30, -1/45, -5/18)$, $w_1 = (1, 14, -5, -10)^t$,
- (3) $u_2 = (1, 0, -1/45, 1/9)$, $w_2 = (1, 0, -5, 4)^t$,
- (4) $u_3 = (1, -1/6, 1/15, -1/6)$, $w_3 = (1, -10, 15, -6)^t$.

Доказательство. Прямые вычисления. Рассмотрим, например, $p_1(1) = 14$. Тогда

$$P_1 - 14I = \begin{pmatrix} -14 & 1 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 45 & 26 & 50 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Если $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ — вектор-столбец из ядра матрицы $P_1 - 14I$, то можно положить $x_1 = 1$, $x_2 = 14$. Тогда $60 + 12x_3 = 0$ и $x_3 = -5$, поэтому $x_4 = -10$ и $w_1 = (1, 14, -5, -10)^t$. Аналогично вычисляется u_1 . Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть $g \in G$, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 207, χ_3 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 69. Тогда

$$\begin{aligned}\chi_2(g) &= (45\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 5\alpha_3(g))/70, \\ \chi_3(g) &= (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/20 - 23/2.\end{aligned}$$

Доказательство. По лемме 2.1 имеем

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 60 & 14 & 0 & -10 \\ 225 & -5 & -5 & 15 \\ 36 & -10 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 45 & 21/2 & -1 & -25/2 \\ 207 & 0 & -23/5 & 23 \\ 69 & -23/2 & 23/5 & -23/2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = 1/322(207\alpha_0(g) - 23\alpha_2(g)/5 + 23\alpha_3(g))$ и $\chi_2(g) = (45\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 5\alpha_3(g))/70$.

Далее, $\chi_3(g) = 1/322(69\alpha_0(g) - 23\alpha_1(g)/2 + 23\alpha_2(g)/5 - 23\alpha_3(g)/2)$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 322 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g)$, получим $\chi_3(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/20 - 23/2$.

Лемма 2.3. Если g — автоморфизм простого порядка r графа Γ и $\text{Fix}(g)$ — пустой граф, то выполняется одно из утверждений:

- (1) $|g| = 23$, $\alpha_2(g) = 230$ и $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 46$;
- (2) $|g| = 7$, $\alpha_2(g) = 210$ или 70 и $\alpha_1(g), \alpha_3(g)$ делятся на 14 ;
- (3) $|g| = 2$, $\alpha_2(g) = 70r$ для $r = 1$ или 3 и $\alpha_1(g) = 322 - 70r$.

Доказательство. Так как $322 = 14 \cdot 23$, то $|g| = 2, 7$ или 23 . Из целочисленности $\chi_3(g)$ следует, что $\alpha_2(g)$ делится на 10 и отлично от 0 . Пусть $|g| = 23$. Тогда $\alpha_2(g) = 230$. Далее, ввиду леммы 2.2 имеем $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 46)/14$. Поэтому $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 46$.

Пусть $|g| = 7$. Из целочисленности $\chi_3(g)$ следует, что $\alpha_2(g) = 70$ или 210 . Если $\alpha_2(g) = 210$, то ввиду леммы 2.2 имеем $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/14 - 3$, поэтому $\alpha_3(g) = 14t$ и $\alpha_1(g) = 14(8 - t)$ для некоторого t .

Пусть $\alpha_2(g) = 70$. Тогда $\chi_1(g) = \alpha_3(g)/14 - 1$, $\alpha_3(g) = 14t$ и $\alpha_1(g) = 14(18 - t)$ для некоторого t .

Пусть $|g| = 2$. Тогда $\alpha_2(g) = 10t$ для некоторого нечетного t . Далее, ввиду леммы 2.2 имеем $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 2t)/14$, поэтому $\alpha_3(g) = 14s + 2t$ и $\alpha_1(g) = 322 - 14s - 12t$ для некоторого целого s .

Определим на $\langle g \rangle$ -орбитах граф Γ' , считая две орбиты смежными, если некоторая вершина одной орбиты смежна с вершиной другой. Для $x \in \Gamma$ положим $X = \{x, x^g\}$. Ребро, соединяющее смежные орбиты A, B , назовем толстым, если a смежна с b, b^g . Скажем, что орбита X типа (i) , если $d(x, x^g) = i$. Если вершины a, a^g смежны, то имеются 7 орбит, вершины которых смежны с a, a^g (и эти орбиты имеют тип (1) или (2)), и 45 орбит, вершины которых смежны точно с одной вершиной из A , поэтому степень A в графе Γ' равна 52 . Если $d(b, b^g) = 2$, то имеются 6 орбит, вершины которых смежны с b, b^g (и эти орбиты имеют тип (1) или (2)), и 48 орбит, вершины которых смежны точно с одной вершиной из B , поэтому степень B в графе Γ' равна 54 . Если $d(c, c^g) = 3$, то имеются 60 орбит, вершины которых смежны точно с одной вершиной из C , поэтому степень C в графе Γ' равна 60 . В частности, C не инцидентна толстым ребрам.

Пусть A — орбита типа (3) . Тогда расстояние от A до любой орбиты в графе Γ' не больше 2 . Для орбиты C , смежной с A (можно считать, что a смежна с c), подграф $[a] \cap [c]$ содержит 14 вершин, и подграф $[a] \cap [c^g]$ содержит 12 вершин, поэтому $\chi'(A, C) = 26$. Для орбиты B , находящейся на расстоянии 2 от A , и орбиты C , смежной с A, B (можно считать, что c смежна с a, b), подграф $[a] \cap [b]$ содержит 12 вершин. Если $d(a^g, b) = 3$, то $\mu'(A, B) = 12$ (и число таких орбит B равно 10). Если же $d(a^g, b) = 2$, то $\mu'(A, B) = 24$. Пусть $\Gamma'_1(A)$ содержит δ_i

вершин типа (i). Тогда число ребер между $\Gamma'_1(A)$ и $\Gamma'_2(A)$ равно $25\delta_1 + 27\delta_2 + 33\delta_3$, причем $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 60$. С другой стороны, указанное число ребер равно $12 \cdot 10 + 24 \cdot 90 = 2280$. Поэтому $\delta_2 + 4\delta_3 = 390$, противоречие с тем, что $4(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) = 240$.

Итак, орбит типа (3) нет и $\alpha_3(g) = 0$, поэтому $\alpha_2(g) = 70r$ для некоторого нечетного r и $\alpha_1(g) = 322 - 70r$. Лемма доказана.

В леммах 2.4–2.9 предполагается, что $g \in G$, $|g|$ — простое число p , и $\Omega = \text{Fix}(g)$ содержит вершину a . Для любой вершины $u \in \Gamma$ положим $\Sigma^u = \Gamma_3(u)$ и зафиксируем обозначение $\Sigma = \Sigma^a$. Ввиду леммы 1.2 подграф Σ не содержит 7-клик.

Лемма 2.4. *Число p не больше 5.*

Доказательство. Допустим, что Ω вместе с любой вершиной u содержит и Σ^u . Так как каждая вершина из $\Gamma_1(a)$ попадает в Σ^b для некоторой вершины $b \in \Sigma$, то Ω содержит $\Gamma_1(a)$. Теперь по связности Γ граф Ω содержит Γ , противоречие.

Пусть $p > 5$. Так как $|[a]| = 60$, то Ω содержит вершину b из $[a]$. Аналогично, $|\Gamma_2(a)| = 225$ и $|\Gamma_3(a)| = 36$, поэтому Ω содержит вершины c из $\Gamma_2(a)$ и d из $\Gamma_3(a)$. Для данной вершины c подграф $[a] \cap [c]$ содержит 12 вершин, поэтому можно найти вершину b , смежную с c .

Предположим, что $p > 7$. Тогда $\Sigma_1(d) \subset \Omega$. Допустим, что Σ не содержится в Ω . Тогда Ω содержит каждую связную компоненту графа Σ , пересекающую Ω . Поэтому p делит $|\Sigma - \Omega|$.

Если Ω — вполне регулярный граф с параметрами $(v', k', 14, 12)$, то p делит $60 - k'$ и $225 - k'(k' - 15)/12$. В этом случае получим $k' = 27$ и $p = 11$. В случае $d(\Omega) = 2$ получим $v' = 55$. Если $d(\Omega) > 2$, то по теореме 1.5.5 из [1] Ω является графом Тэйлора и $v' = 56$. В любом случае $|\Gamma - \Omega|$ не делится на 11. Фактически, не существуют сильно регулярные графы с параметрами $(55, 27, 14, 12)$ (нарушено условие целочисленности) и графы Тэйлора с параметрами $(56, 27, 14, 12)$ (окрестность вершины в таком графе является сильно регулярным графом с параметрами $(27, 14, 7, 7)$, но $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 28$ не является квадратом).

Таким образом, Ω не является вполне регулярным графом с $\lambda(\Omega) = 14$ и $\mu(\Omega) = 12$, поэтому либо $p = 11$ и $|\Sigma - \Omega| = 22$ (в случае $|\Sigma - \Omega| = 11$ подграф $\Sigma - \Omega$ является 11-кликкой), либо $p = 13$ и $|\Sigma - \Omega| = 13$ (в случае $|\Sigma - \Omega| = 26$ подграф $\Sigma \cap \Omega$ содержит всего 10 вершин).

Если $p = 13$, то для любой вершины $x \in \Gamma$ подграф $\Sigma - \Omega$ является пустым или $\langle g \rangle$ -орбитой. В последнем случае граф $\Sigma - \Omega$ является регулярным степени 10 и поэтому совпадает с дополнительным графом для 13-угольника. Пусть $w \in \Sigma - \Omega$. Тогда $\Sigma^d \cap \Sigma^w$ содержит a и 3 вершины вне Ω (иначе для $e \in \Sigma^d \cap \Sigma^w \cap \Omega - \{a\}$ подграф $\Sigma^e \cap \Sigma$ содержит не менее 14 вершин). Далее, $\Sigma^d \cap [w]$ содержит 8 вершин из Ω (иначе для $f \in \Sigma^d \cap [w] - \Omega$ вершина f смежна с некоторой вершиной из $\Sigma^d \cap \Sigma^w - \Omega$, противоречие). Теперь для $f \in \Sigma^d \cap [w] \cap \Omega$ подграф $\Sigma^f \cap \Sigma$ содержит не менее 14 вершин, противоречие.

Если $p = 11$, то $\Sigma^b \cap \Sigma$ содержит все 6 вершин из $\Omega \cap \Sigma - [c]$. Если для некоторой вершины $b \in \Omega_1(a)$ подграф $[b] - a^\perp$ содержит более одной вершины из Ω , то $|([b] - a^\perp) \cap \Omega| \geq 12$ и окрестность каждой вершины из $(\Omega \cap \Sigma) - \Sigma^b$ содержит $([b] - a^\perp) \cap \Omega$. Противоречие с тем, что для различных вершин d, e из $(\Omega \cap \Sigma) - \Sigma^b$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит не менее 6 вершин из $\Sigma \cap \Omega$ и 12 вершин из $\Gamma_2(a)$. Значит, для любой вершины $b \in \Omega_1(a)$ подграф $[b] - a^\perp$ содержит единственную вершину c из Ω . Так как $\lambda = 14$, то $|[b] \cap [c] \cap \Omega| \geq 3$, поэтому $[a] \cap [c]$ содержит не менее 4 вершин из Ω и $[a] \cap [c] \subset \Omega$. Поэтому $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 5$, и число ребер между $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ и Σ равно 40. Противоречие с тем, что каждая вершина из $\Sigma \cap \Omega$ смежна по крайней мере с 6 вершинами из $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ (так как $s_3 = 50$) и указанное число ребер не меньше 84.

Итак, в случае $p > 7$ подграф Ω вместе с любой вершиной u содержит и Σ^u , противоречие с рассуждением из первого абзаца доказательства.

Пусть $p = 7$. Тогда для $w \in \Sigma \cap \Omega$ подграф $\Sigma_1(w)$ содержит 3 или 10 вершин из Ω . Вершину w из $\Sigma \cap \Omega$ назовем Ω -замкнутой, если $\Sigma_1(w) \subset \Omega$ (Ω -незамкнутой в противном случае). Ясно, что $|\Sigma - \Omega| = 7s$, $s \leq 4$. Далее, подграф $[a] \cap [c]$ содержит 5 или 12 вершин из Ω . Наконец, Ω содержит все 6 вершин из $[a] \cap \Sigma^d$ и не менее 4 вершин из $\Gamma_2(a) \cap \Sigma^d$. Поэтому любая $\langle g \rangle$ -орбита длины 7 лежит в третьей окрестности не более одной вершины из Ω .

Если $s = 4$, то все вершины из $\Sigma \cap \Omega$ являются Ω -незамкнутыми и граф $\Sigma \cap \Omega$ регулярен степени 3. Далее, число ребер между $\Sigma \cap \Omega$ и $\Sigma - \Omega$ равно 56. Поэтому $\Sigma - \Omega$ состоит из 4 семерок, каждая из которых смежна с парой вершин из $\Sigma \cap \Omega$. Без ограничения общности, $b \in [c]$ и $\Sigma^b \cap \Sigma$ содержит 6 вершин из $\Omega - [c]$, в частности, каждая вершина из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ смежна не более чем с двумя вершинами из $\Sigma \cap \Omega$. Отсюда каждая вершина из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ смежна с некоторой $\langle g \rangle$ -орбитой из $\Sigma - \Omega$ и с единственной вершиной из $\Sigma \cap \Omega$. Теперь для данной вершины d найдется вершина $e \in (\Omega \cap \Sigma) - [d]$ такая, что d, e смежны с разными семерками из $\Sigma - \Omega$. Отсюда $[d] \cap [e]$ содержит не менее 5 вершин из Ω , не более 3 из которых попадают в $\Sigma \cap \Omega$, противоречие с тем, что не менее 2 вершин из $[d] \cap [e]$ попадают в $\Gamma_2(a) \cap \Omega$. Значит, $s < 4$.

Пусть σ — число вершин w из $\Sigma \cap \Omega$ таких, что a является Ω -незамкнутой вершиной в $\Gamma_3(w)$. Тогда $|\Omega_1(a)| = (3\sigma + 10(|\Sigma \cap \Omega| - \sigma))/6$ и $|\Sigma \cap \Omega| = 3(2|\Omega_1(a)| - \sigma)/10$. Если $|\Omega_1(a)| = 11$, то $|\Sigma \cap \Omega| = 6$, а если $|\Omega_1(a)| = 18$, то $|\Sigma \cap \Omega| = 6$ или 9. В обоих случаях имеем противоречие с тем, что 7 делит $|\Sigma - \Omega|$. Если же $|\Omega_1(a)| = 25$ или 32, то $|\Sigma \cap \Omega| = 15$. В случаях $|\Omega_1(a)| = 46$ или 53 также получим противоречия. Наконец, в случае $|\Omega_1(a)| = 60$ получим $|\Sigma \cap \Omega| = 36$ и для $c \in \Gamma_2(a)$ подграф $[c] \cap \Omega$ содержит 12 вершин из $[a]$ и 8 вершин из Ω . Противоречие с тем, что тогда $c \in \Omega$ и $\Gamma = \Omega$. Итак, $|\Sigma^u \cap \Omega| = 15$ и $|\Omega_1(u)| = 25$ или 32 для любой вершины u (при этом $\sigma = 0$ или 14 соответственно).

Заметим, что $\Sigma \cap \Sigma^c$ содержит 4 вершины из Ω . Пусть $\Gamma_2(a) \cap \Sigma^d$ содержит 11 вершин из Ω для δ_1 вершин $d \in \Omega \cap \Sigma$ и $\Gamma_2(a) \cap \Sigma^e$ содержит 4 вершины из Ω для δ_2 вершин $e \in \Omega \cap \Sigma$. Тогда $\delta_1 + \delta_2 = 15$ и $11\delta_1 + 4\delta_2 = 4|\Omega \cap \Gamma_2(a)|$, поэтому $|\Omega \cap \Gamma_2(a)| = 7\delta_1/4 + 15$ и δ_1 делится на 4. Но δ_1 совпадает с параметром σ из предыдущего абзаца, поэтому $\delta_1 = 0$, $|\Omega_1(u)| = 25$ и $|\Omega \cap \Gamma_2(u)| = 15$ для любой вершины $u \in \Omega$.

Пусть $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ содержит ω_1 вершин, смежных с 5 вершинами из $\Omega_1(a)$, и ω_2 вершин, смежных с 12 вершинами из $\Omega_1(a)$. Тогда $\omega_1 + \omega_2 = 15$ и $5\omega_1 + 12\omega_2 = 75 + 7\omega_2$ равно числу ребер между $\Omega_1(a)$ и $\Omega \cap \Gamma_2(a)$. С другой стороны, для $b \in \Omega_1(a)$ подграф $\Sigma \cap \Omega \cap \Gamma_2(b)$ содержит 9 вершин и b смежна по крайней мере с $9 \cdot 5/8$ вершинами из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$. Поэтому b смежна не более чем с 35 вершинами из $\Gamma_2(a) - \Omega$, по крайней мере с 10 вершинами из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ и указанное число ребер не меньше 250. Отсюда $\omega_2 = 25$, противоречие.

Лемма 2.5. *Если $p = 5$ и Ω не пересекает $\Gamma_2(x)$ для любой вершины $x \in \Omega$, то выполняется одно из утверждений:*

- (1) Ω состоит из двух вершин, находящихся на расстоянии 3 в Γ , $\alpha_2(g) = 20t$ и $4 - 4t + \alpha_3(g)$ делится на 14;
- (2) $|\Omega| = 7$ и $\Gamma_3(a) \cap \Omega$ является 6-кликкой для некоторой вершины $a \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $p = 5$. Заметим, что если $d(x, x^g) = 3$, то $d(x, x^{g^2}) = 2$, иначе вершины x, x^{g^2} смежны и $x^{(g)}$ — пятиугольник.

Так как $p_{33}^1 = 6$, то Ω содержит вершину b из Σ . Если $|\Omega| = 2$, то по лемме 2.2 $\chi_3(g) = (10 + \alpha_2(g))/20 - 23/2$ и $\alpha_2(g) = 20t$. Далее, $\chi_2(g) = (90 - 20t + 5\alpha_3(g))/70$ и $4 - 4t + \alpha_3(g)$ делится на 14. В этом случае выполняется утверждение (1).

Пусть $|\Omega| > 2$. Если Ω не пересекает $\Gamma_2(x)$ для любой вершины $x \in \Omega$, то Σ содержит одну или 6 вершин из Ω . Если Σ содержит единственную вершину d из Ω , то $\Gamma_3(d) \cap [a]$ является 6-кликкой из Ω и $|\Omega| = 7$. Если же Σ содержит 6 вершин из Ω , то $\Sigma \cap \Omega$ является 6-кликкой и снова $|\Omega| = 7$. Заметим, что в этом случае $d(u, u^g) \leq 2$ для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$, иначе, $\Omega \subset \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$, противоречие с леммой 1.2. Теперь $\chi_2(g) = (45\alpha_0(g) - \alpha_2(g))/70 = 9/2 - \alpha_2(g)/70$, поэтому $\alpha_2(g) = 70s - 35$ для некоторого натурального числа s . Далее, $\chi_3(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/20 - 23/2 = 7s/2 - 23/2$ и s нечетно. Отсюда либо $\alpha_2(g) = 35$ и $\alpha_1(g) = 280$, либо $\alpha_2(g) = 175$ и $\alpha_1(g) = 140$.

Итак, если $|\Omega| > 2$ и Ω не пересекает $\Gamma_2(x)$ для любой вершины $x \in \Omega$, то выполняется утверждение (2). Лемма доказана.

В леммах 2.6–2.9 предполагается, что $p = 5$ и Ω пересекает $\Gamma_2(a)$ для некоторой вершины $a \in \Omega$. Если $d \in \Sigma - \Omega$, то $\Sigma^d \cap \Omega$ не пересекает $\Gamma_2(a)$ (в противном случае для $c \in \Sigma^d \cap \Omega \cap \Gamma_2(a)$ подграф $\Sigma^c \cap \Sigma$ содержит 5 вершин из $d^{(g)}$, противоречие с тем, что $p_{33}^2 = 4$). Для вершины $x \in \Omega$ положим $\Phi^x = \Sigma^x \cap \Omega$ и зафиксируем обозначение $\Phi = \Phi^a$.

Лемма 2.6. Пусть $c \in \Omega \cap \Gamma_2(a)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) Φ содержит 3 или 8 вершин из $[c]$, не менее 4 вершин из $\Gamma_2(c)$ и 4 вершины из $\Gamma_3(c)$;
- (2) для $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $\Gamma_3(u) \cap \Omega$ является кликой, содержащей не более 2 вершин, если $u^{(g)}$ — клика, не более 4 вершин, если $u^{(g)}$ не является кликой;
- (3) для любой вершины $x \in \Omega$ подграф $\Gamma_2(x)$ пересекает Ω ;
- (4) если $e \in \Phi^x$, то e^\perp не содержит Φ^x ;
- (5) $|\Phi^x| \neq 31$.

Доказательство. Так как $|[a] \cap [c]| = 14$, то Ω содержит 4, 9 или 14 вершин из $[a] \cap [c]$.

Так как $p_{13}^2 = 8$ и $p_{23}^2 = 24$, то Φ содержит 3 или 8 вершин из $[c]$, не менее 4 вершин из $\Gamma_2(c)$ и все 4 вершины из $\Sigma^c \cap \Sigma$. Таким образом, подграф Φ содержит не менее 11 вершин и, следовательно, Σ содержит не более пяти $\langle g \rangle$ -орбит длины 5. Утверждение (1) доказано.

Пусть $u \in \Gamma - \Omega$. Так как $p_{33}^2 = 4$, то $\Gamma_3(u) \cap \Omega$ является кликой. Если $u^{(g)}$ — клика, то по лемме 1.2 число $|\Gamma_3(u) \cap \Omega|$ не больше 2. Если же $u^{(g)}$ не является кликой, то $|\Gamma_3(u) \cap \Omega|$ не больше 4. Утверждение (2) доказано.

Пусть $b \in \Omega_1(a)$, $d \in \Phi$. Тогда по крайней мере 2 вершины из $[b] \cap [d]$ попадают в $\Gamma_2(a) \cap \Omega$. Поэтому $\Gamma_2(b)$ и $\Gamma_2(d)$ пересекают Ω . Для $c \in \Omega \cap \Gamma_2(x)$ вершина a попадает в $\Omega \cap \Gamma_2(c)$. Утверждение (3) доказано.

Пусть $e \in \Phi$ и $\Phi \subset e^\perp$. Тогда $|\Phi| = 11$. Если e смежна с вершиной c из $\Gamma_2(a) \cap \Omega$, то по утверждению (1) Σ^c содержит 4 вершины из Φ , противоречие с тем, что все они лежат в e^\perp . Допустим, что e несмежна с вершинами из $\Gamma_2(a) \cap \Omega$. По утверждению (1) подграф $[c] \cap \Phi$ содержит 3 или 8 вершин. Противоречие с тем, что число $|\Omega_1(c) \cap [e]|$ сравнимо с 2 по модулю 5. Утверждение (4) доказано.

Допустим, что $|\Phi| = 31$. Тогда $\Sigma - \Phi = d^{(g)}$. Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma_2(a)$, смежных точно с i вершинами из $\Sigma - \Phi$ и $x_i = |X_i|$.

Если $\Sigma - \Phi$ является кликой, то d смежна с различными вершинами u, w из Φ . В этом случае $\{a, u\} \cup d^{(g)}$ является 7-кликой в графе Δ и w смежна в Δ с 6 вершинами этой клики, противоречие с леммой 1.2. Если $\Sigma - \Phi$ является кокликой, то $[d] \cap [d^{(g)}]$ содержит 10 вершин из Φ и 2 вершины из $\Gamma_2(a)$, поэтому $\sum x_i = 225$, $\sum ix_i = 250$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = 20$. Вычитая из суммы первого и третьего равенств второе, получим $x_0 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 = -5$, противоречие.

Пусть $\Sigma - \Phi$ является пятиугольником. Тогда $[d] \cap [d^{(g)}]$ содержит 8 вершин из Φ , вершину из $\Sigma - \Phi$ и 3 вершины из $\Gamma_2(a)$, поэтому $\sum x_i = 225$, $\sum ix_i = 250$ и $\sum x_i = 225$, $\sum ix_i = 250$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 35$. Вычитая из суммы первого и третьего равенств второе, получим $x_0 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 10$. Но $\Omega \cap \Gamma_2(a) \subset X_0 \cup X_5$, поэтому $|\Omega \cap \Gamma_2(a)|$ не больше 10. С другой стороны, для $b \in \Omega_1(a)$ и $e \in \Phi$ подграф $[b] \cap [e]$ содержит не менее 2 вершин из Ω . По утверждению (2) подграф $[e]$ содержит не менее 5 вершин из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ и $|\Omega \cap \Gamma_2(a)| \geq 31 \cdot 5/8$, противоречие.

Лемма 2.7. Для $x \in \Omega$ имеем $|\Phi^x| \geq 16$.

Доказательство. Допустим, что $|\Phi| = 11$. По утверждению (4) леммы 2.6 степень каждой вершины в графе Φ равна 0 или 5. Пусть Φ_i — подграф, индуцированный Φ на множестве вершин степени i . Если $|\Phi_5| = 6$, то Φ_5 является кликой и подграф $K = \{a\} \cup \Phi_5$ является 7-кликой в графе Δ , причем по лемме 1.2 вершина из Φ_0 смежна в Δ с единственной вершиной из K , противоречие.

Пусть $|\Phi_5| = 8$. Тогда Φ_5 является дополнительным графом либо к восьмиугольнику, либо к объединению двух изолированных четырехугольников, либо к объединению изолированного треугольника и пятиугольника. Напомним, что для любой вершины c из $\Gamma_2(a) \cap \Omega$ подграф Φ содержит 3 вершины из $[c]$ и по 4 вершины из $\Gamma_2(c)$ и из Σ^c . Если $\Phi \cap [c]$ содержит 2 вершины из Φ_0 и вершину e из Φ_5 , то 4 вершины из $\Phi \cap \Sigma^c$ не попадают в e^\perp . Противоречие с тем, что $\Phi \cap \Sigma^c$ содержит, быть может, вершину из Φ_0 и не более 2 вершин из $\Phi_5 - e^\perp$. Если $\Phi \cap [c]$ содержит вершину из Φ_0 и 2 вершины e, f из Φ_5 , то $\Phi \cap \Sigma^c$ содержит 2 вершины из Φ_0 и 2 из $\Phi_5 - (e^\perp \cup f^\perp)$, и в этом случае $e^\perp \cap \Phi_5 = f^\perp \cap \Phi_5$. Положим $\{e', f'\} = \Phi_5 - e^\perp$. Тогда $(e')^\perp \cap \Phi_5 = (f')^\perp \cap \Phi_5$ и каждая вершина из $\Phi_5 - \{e, f, e', f'\}$ смежна со всеми вершинами из $\{e, f, e', f'\}$, в частности, $\Phi_5 - \{e, f, e', f'\}$ является объединением двух изолированных ребер $\{p, q\}$ и $\{p', q'\}$. Теперь $[e] \cap [p]$ содержит f, q и вершину c' из $\Gamma_2(a) \cap \Omega$. Противоречие со строением $\Phi \cap \Sigma^{c'}$.

Если $\Phi \cap [c]$ содержит 3 вершины e, f, g из Φ_5 , то $\Phi \cap \Sigma^c$ содержит не более 3 вершин из Φ_0 и вершину h из $\Phi_5 - (e^\perp \cup f^\perp \cup g^\perp)$. Противоречие с тем, что $\Phi_5(h)$ содержит не более 4 вершин.

Итак, $\Phi \cap [c]$ содержит 3 вершины из Φ_0 для любой вершины $c \in \Omega \cap \Gamma_2(a)$. Для $b \in \Omega_1(a)$ подграф $\Sigma \cap \Sigma^b$ содержит не более 5 вершин из Φ_5 . Теперь для $e \in \Phi_5 \cap \Gamma_2(b)$ подграф $[b] \cap [e]$ содержит не менее двух вершин из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$, противоречие.

Пусть $|\Phi_5| = 10$ и $\Phi_0 = \{u\}$. Если $c \in \Gamma_2(a) \cap \Omega \cap \Gamma_2(u)$, то для $\{e, f, g\} = \Phi \cap [c]$ получим $e^\perp \cap \Phi_5 = f^\perp \cap \Phi_5 = g^\perp \cap \Phi_5$ и $\Phi \cap \Sigma^c$ содержит 4 вершины из $\Phi_5 - e^\perp$. Положим $\Phi' = \Phi_5(e) - \{f, g\}$. Тогда каждая вершина из Φ' смежна не более чем с 2 вершинами из $\Phi_5 \cap \Sigma^c$ и число ребер между Φ' и $\Phi_5 \cap \Sigma^c$ не больше 6. С другой стороны, каждая вершина из $\Phi_5 \cap \Sigma^c$ смежна по крайней мере с 2 вершинами из Φ' и указанное число ребер не меньше 8, противоречие.

Пусть φ_i — число вершин e из Φ_5 таких, что $|\Omega \cap [e] \cap [u]| = i$. Тогда $\varphi_2 + \varphi_7 + \varphi_{12} = 10$. Далее, для $c \in \Omega \cap [e] \cap [u]$ подграф $\Sigma^c \cap \Phi_5$ совпадает с $\Phi_5 - e^\perp$. Теперь для различных вершин x, y из $\Phi_5 - e^\perp$ подграф $\Sigma^x \cap \Sigma^y$ содержит $\Omega \cap [e] \cap [u]$, поэтому $\varphi_7 = \varphi_{12} = 0$. Отсюда, в частности, $|\Omega_1(u)| = 10$ (каждая вершина из $\Omega_1(u)$ смежна точно с 2 вершинами из Φ_5). Пусть $\{c, c'\} = [e] \cap \Omega_1(u)$, $f \in \Phi_5 \cap [c] - \{e\}$ и $f' \in \Phi_5 \cap [c'] - \{e\}$. Если $f \neq f'$, то противоречие получается, как и в предыдущем абзаце. Значит, $f = f'$.

Пусть ψ_i — число вершин e из Φ_5 таких, что $|\Omega_1(u) \cap \Sigma^e| = i$. Тогда $\psi_3 + \psi_8 = 10$. Так как для $c \in \Omega_1(u)$ верно равенство $|\Sigma^c \cap \Phi_5| = 4$, то $3\psi_3 + 8\psi_8 = 40$. Отсюда $\psi_3 = 8$ и $\psi_8 = 2$. Пусть e — такая вершина из Φ_5 , что $|\Omega_1(u) \cap \Sigma^e| = 8$. Тогда число вершин из $\Phi_5 - e^\perp$ не меньше 8 (каждая вершина из $\Omega_1(u) \cap \Sigma^e$ смежна с 2 вершинами из $\Phi_5 - e^\perp$), противоречие.

Итак, $\Phi = \Phi_0$. Заметим, что каждая вершина e из Φ смежна по крайней мере с 10 вершинами из Ω . Действительно, для $f \in \Phi - \{e\}$ подграф $[e] \cap [f]$ содержит не менее 2 вершин из Ω , всего не меньше 10 вершин. Пусть $\Psi = \Omega \cap ([a] \cup \Gamma_2(a))$, Ψ_i — множество вершин b из Ψ таких, что Φ содержит точно i вершин из Σ^b . Тогда $\Psi = \Psi_1 \cup \Psi_4 \cup \Psi_6$, причем $\Psi_4 = \Psi \cap \Gamma_2(a)$. Далее, число троек вершин (b, e, f) таких, что $b \in \Psi$, $e, f \in \Phi \cap \Sigma^b$, равно $3 \binom{11}{2} = 6|\Psi_4| + 15|\Psi_6|$. Отсюда $2|\Psi_4| + 5|\Psi_6| = 55$. С другой стороны, число ребер между Ψ_4 и Φ равно $3|\Psi_4|$, но не меньше 110. Таким образом, $3(55 - 5|\Psi_6|) \geq 220$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.8. Пусть $\omega_i = |\Gamma_i(a) \cap \Omega|$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) $6\omega_1 + 4\omega_2 \geq \sum_{z \in \Phi} (|\Phi^z| - 1) \geq 15|\Phi|$;
- (2) $\omega_1 \leq 4\omega_2/5$;
- (3) для $x \in \Omega$ имеем $|\Phi^x| \neq 36$.

Доказательство. Число пар (x, y) таких, что $x \in ([a] \cup \Gamma_2(a)) \cap \Omega$, $y \in \Phi$ и $d(x, y) = 3$, равно $\sum_{z \in \Phi} (|\Phi^z| - 1)$, но не больше $6\omega_1 + 4\omega_2$. По лемме 2.7 имеем $|\Phi^z| \geq 16$, и утверждение (1) доказано.

Для $b \in \Omega_1(a)$ подграф Φ^b содержит 1 или 6 вершин из Φ и не менее 10 вершин из $\Gamma_2(a)$. Аналогично, для $c \in \Omega \cap \Gamma_2(a)$ подграф Φ^c содержит 3 или 8 вершин из $[a]$. Поэтому $10\omega_1 \leq \sum_{b \in \Omega_1(a)} |\Phi^b \cap \Gamma_2(a)| = \sum_{c \in \Omega \cap \Gamma_2(a)} |\Phi^c \cap [a]| \leq 8\omega_2$. Отсюда следует утверждение (2).

Пусть $\Phi^e = \Sigma^e$ для некоторой вершины $e \in \Phi$. Предположим, что $\Sigma - \Phi$ содержит вершину d . Если d смежна с e , то по лемме 2.5 подграф $\Phi^e \cap \Sigma^d$ является 6-кликой, противоречие с леммой 1.2. Значит, d несмежна с e и по лемме 2.5 подграф $\Phi^e \cap \Sigma^d$ является 4-кликой (содержащей a) и ввиду леммы 1.2 подграф $d^{(g)}$ не является 5-кликой. Далее, $[d]$ содержит 8 вершин из Φ^e , причем разным $\langle g \rangle$ -орбитам из $\Sigma - \Phi$ отвечают непересекающиеся восьмерки вершин из Φ^e . Так как $|\Phi^e - a^\perp| = 25$, то $|\Sigma - \Phi| \leq 15$. Допустим, что $d^{(g)}$ является кликой. Тогда $[d]$ содержит 8 вершин из Φ^e , $i \leq 4$ вершин из Φ и не менее 6 вершин из $\Sigma - \Phi$, в частности, $|\Sigma - \Phi| = 15$. Так как $[d]$ не содержит $\langle g \rangle$ -орбит длины 5, то $[d]$ содержит не менее 2 вершин из Φ и не более 8 вершин из $\Sigma - \Phi$. Если $[d]$ содержит 4 вершины из $f^{(g)}$ для некоторой вершины $f \in \Sigma - \Phi$, то $[d] \cap [d^g]$ содержит не менее 10 вершин из Ω и 3 вершины из $f^{(g)}$. Значит, $[d]$ содержит 4 вершины из Φ и по 3 вершины в каждой $\langle g \rangle$ -орбите из $\Sigma - (\Phi \cup \{d\})$. Противоречие с тем, что $[d] \cap [d^g]$ содержит 12 вершин из Ω и 2 вершины из $\Sigma - \Phi$.

Значит, $d^{(g)}$ является пятиугольником и $[d]$ содержит $i \leq 3$ вершин из Φ и $8 - i$ вершин из $\Sigma - (\Phi \cup d^{(g)})$. Без ограничения общности, вершины d, d^g несмежны. Если $[d]$ содержит 4 вершины из $f^{(g)}$ для некоторой вершины $f \in \Sigma - \Phi$, то $[d] \cap [d^g]$ содержит 8 вершин из Ω , вершину из $d^{(g)}$, 3 вершины из $f^{(g)}$ и еще одну вершину из $\Phi \cup (\Sigma - d^{(g)} \cup f^{(g)})$. Итак, $[d]$ содержит 3 вершины в каждой $\langle g \rangle$ -орбите из $\Sigma - (\Phi \cup \{d\})$. Противоречие с тем, что $[d] \cap [d^g]$ содержит 10 вершин из Ω и 3 вершины из $\Sigma - \Phi$. Лемма доказана.

Лемма 2.9. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) $|\Phi^x| \neq 26$ для любой вершины $x \in \Omega$;
- (2) $|\Omega| < 57$;
- (3) $|\Phi^x| = 16$ для любой вершины $x \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $|\Phi| = 26$ и $c^{(g)}, d^{(g)}$ — различные орбиты на $\Sigma - \Phi$. По утверждению (1) леммы 2.8 имеем $3\omega_1/2 + \omega_2 \geq 195/2$. Подставляя неравенство из утверждения (2) леммы 2.8, получим $97,5 \leq 3\omega_1/2 + \omega_2 \leq (3/2 \cdot 4/5 + 1)\omega_2$. Так как ω_2 кратно 5, то $\omega_2 \geq 45$.

Если $c^{(g)}$ является 5-кликой, то ввиду леммы 1.2 вершина c смежна не более чем с одной вершиной из Φ . Поэтому $[c]$ содержит $d^{(g)}$, противоречие с тем, что d^g смежна в графе Δ по крайней мере с 6 вершинами 7-клики $\{a, d\} \cup c^{(g)}$.

Пусть $[c]$ содержит γ вершин из $\Gamma_2(a) \cap \Omega$. Если $c^{(g)}$ является 5-кликкой, то $[c] \cap [c^g]$ содержит не более 5 вершин из $\Sigma - \Phi$ и не менее 5 вершин из Φ . Число вершин из $\Gamma_2(a) - \Omega$, смежных по крайней мере с одной вершиной из $c^{(g)}$, не больше $225 - 45 = 180$. С другой стороны, $[c] \cap [c^g]$ содержит не более $7 - \gamma$ вершин из $\Gamma_2(a) - \Omega$, поэтому указанное число вершин не меньше $(50 - \gamma) + 43 + (36 + \gamma) + (29 + 2\gamma) + (22 + 3\gamma) = 180 + 5\gamma$. Отсюда $\gamma = 0$ и $[c] \cap [c^g]$ содержит точно 5 вершин из Φ , 7 вершин из $\Gamma_2(a)$ и орбиту $d^{(g)}$, противоречие.

Итак, подграфы $c^{(g)}$ и $d^{(g)}$ являются пятиугольниками. Обозначим через β число вершин в подграфе $[c] \cap d^{(g)}$. Тогда $|[c] \cap [c^g] \cap \Phi| = 8 - \beta$. В случае $\beta \geq 3$ имеем $|[c] \cap [c^g] \cap d^{(g)}| \geq (2\beta - 5)$ и $|[c] \cap [c^g] \cap \Gamma_2(a)| \leq (14 - (8 - \beta) - (2\beta - 5)) = 11 - \beta \leq 8$, если c и c^g смежны, и $|[c] \cap [c^g] \cap \Gamma_2(a)| \leq (11 - (8 - \beta) - (2\beta - 5)) = 8 - \beta \leq 5$, если c и c^g несмежны. При $\beta \leq 2$ получим $|[c] \cap [c^g] \cap \Gamma_2(a)| \leq (14 - (8 - \beta)) = 6 + \beta \leq 8$, если c и c^g смежны, и $|[c] \cap [c^g] \cap \Gamma_2(a)| \leq (11 - (8 - \beta)) = 3 + \beta \leq 5$, если c и c^g несмежны.

Снова подсчитаем число вершин из $\Gamma_2(a) - \Omega$, смежных по крайней мере с одной вершиной из $c^{(g)}$. Как показано выше, $[c] \cap [c^g]$ содержит не более $8 - \gamma$ вершин из $\Gamma_2(a) - \Omega$, если c и c^g смежны, и не более $5 - \gamma$ в противном случае. Поэтому указанное число вершин не меньше $(50 - \gamma) + (50 - 8) + (50 - 5 - 8 + \gamma) + (50 - 5 - 5 - 8 + 2\gamma) + (50 - 8 - 5 - 5 - 8 + 3\gamma) = 185 + 5\gamma$, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Пусть $|\Omega| \geq 57$. Если $u \in \Gamma - \Omega$, то число пар вершин (a, w) таких, что $a \in \Omega - \Gamma_3(u)$ и $w \in \Gamma_3(u) \cap \Sigma^a$, не меньше $58 \cdot 4$. С другой стороны, указанное число не больше $4 \cdot 21 + 32 \cdot 4$. Отсюда $|\Omega| = 57$, для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ имеем $|\Omega \cap \Gamma_3(u)| = 4$ и $|\Phi^x| = 21$ для любой

вершины $x \in \Omega$. С другой стороны, по лемме 2.8 имеем (1) $(24/5+4)\omega_2 \geq 20 \cdot 21$ и $\omega_2 \geq 25 \cdot 21/11$. Противоречие с тем, что тогда $|\Omega| \geq 72$. Утверждение (2) доказано.

Если $|\Phi| = 21$, то по лемме 2.8 имеем $(24/5+4)\omega_2 \geq 15 \cdot 21$ и $\omega_2 \geq 75 \cdot 21/44$. Противоречие с тем, что тогда $|\Omega| \geq 1 + 40 + 21$. Лемма доказана.

По лемме 2.8 имеем $(24/5+4)\omega_2 \geq 15 \cdot 16$, $\omega_2 \geq 75 \cdot 4/11$ и $\omega_2 \geq 30$. Ввиду леммы 2.8 получим $\omega_1 = 5$, $\omega_2 = 30$ и $|\Omega| = 1 + 5 + 30 + 16$. Противоречие с тем, что по утверждению (1) леммы 2.8 получим $6\omega_1 + 4\omega_2 \geq 240$. Таким образом, для любой вершины $a \in \Omega$ подграф Ω не пересекает $\Gamma_2(a)$.

3. Граф с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ не является дистанционно транзитивным

В этом параграфе предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$.

В леммах 3.1 и 3.2 предполагается, что g — автоморфизм порядка 3 графа Γ и $\Omega = \text{Fix}(g)$ содержит вершину a . Для вершины x положим $\Sigma^x = \Gamma_3(x)$, $\Phi^x = \Sigma^x \cap \Omega$, $\Sigma = \Sigma^a$ и $\Phi = \Phi^a$. Заметим, что $\alpha_3(g) = 0$, иначе $d(u, u^g) = 3$ для некоторой вершины $u \in \Gamma$ и $u^{g^2} \in \Sigma^u \cap \Sigma^{u^g}$, противоречие.

Лемма 3.1. *Выполняется одно из утверждений:*

- (1) $\Omega = \{a\}$ и на $\Gamma - \{a\}$ имеются 15 кокликовых и 92 треугольных $\langle g \rangle$ -орбиты;
- (2) Ω является 7-кликкой и на $\Gamma - \Omega$ имеются 105 кокликовых $\langle g \rangle$ -орбит;
- (3) Ω не является кликой и верны утверждения:
 - (i) для $c \in \Gamma_2(a) \cap \Omega$ подграф Φ содержит вершину из Φ^c и не менее 2 вершин из $[c]$,
 - (ii) если $d \in \Phi$, то Φ^d содержит по вершине из $[a]$ и из $\Gamma_2(a)$, а $[d] \cap \Omega$ содержит вершину из Φ и две из $\Gamma_2(a)$,
 - (iii) если $b \in [a] \cap \Phi^d$, то $|\Phi \cap \Phi^b| = 3$ или 6.

Доказательство. Если $|\Omega| = 1$, то $\chi_3(g) = (5 + \alpha_2(g))/20 - 23/2$ и $\alpha_2(g) = 20t + 5$. Далее, $\chi_2(g) = (45 - 20t - 5)/70$, поэтому $t = 7s + 2$ и $\alpha_2(g) = 140s + 45$. Так как $\alpha_2(g)$ делится на 3, то $s = 0$ и на $\Gamma - \{a\}$ имеются 15 кокликовых и 92 треугольные $\langle g \rangle$ -орбиты. В этом случае выполняется утверждение (1).

Пусть $|\Omega| > 1$. Если Ω является кликой, то $|\Omega| = 4$ или 7. Допустим, что $|\Omega| = 4$. Тогда $\chi_2(g) = (180 - \alpha_2(g))/70$ и $\chi_3(g) = (20 + \alpha_2(g))/20 - 23/2$. Поэтому $\alpha_2(g) = 10t$, t нечетно, $t - 4$ делится на 7 и $t = 7s + 4$. Так как $\alpha_2(g)$ делится на 3, то $\alpha_2(g) = 180$, противоречие с тем, что t нечетно. Если Ω является 7-кликкой, то $\chi_2(g) = (315 - \alpha_2(g))/70$ и $\chi_3(g) = (35 + \alpha_2(g))/20 - 23/2$. Поэтому $\alpha_2(g) = 35t$, t нечетно и $t + 1$ сравнимо с 2 по модулю 4. Таким образом, $\alpha_2(g) = 35, 175$ или 315. Но $\alpha_2(g)$ делится на 3, поэтому $\alpha_2(g) = 315$ и выполняется утверждение (2).

Пусть Ω не является кликой. Тогда Ω содержит вершину c из $\Gamma_2(a)$ и $\Sigma \cap [c]$ содержит не менее 2 вершин из Ω . Далее, $\Gamma_3(c) \cap \Sigma$ содержит 4 вершины и по крайней мере одна из них попадает в Ω .

Если $d \in \Phi$, то Φ^d содержит по вершине из $[a]$ и из $\Gamma_2(a)$, а $[d] \cap \Omega$ содержит 2 вершины из $\Gamma_2(a)$. Пусть $b \in [a] \cap \Phi^d$. Так как $p_{33}^1 = 6$, то $|\Phi \cap \Phi^b| = 3$ или 6. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Верны равенства:*

- (1) $\sum_{b \in \Omega_1(a)} |\Phi \cap \Phi^b| = \sum_{e \in \Phi} |[a] \cap \Phi^e|$;
- (2) $\sum_{c \in \Omega \cap \Gamma_2(a)} |\Phi \cap ([c] \cup \Phi^c)| = \sum_{e \in \Phi} |\Gamma_2(a) \cap (\Omega_1(e) \cup \Phi^e)|$;
- (3) число ребер между $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ и Φ не меньше $2\max\{\omega_2, \omega_3\}$;
- (4) для любой вершины $a \in \Omega$ имеем $|\Gamma_3(a) \cap \Omega| \geq 6$.

Доказательство. Подсчитав число пар (b, e) таких, что $b \in \Omega_1(a)$, $e \in \Phi$ и $d(b, e) = 2$, получим $\sum_{b \in \Omega_1(a)} (\omega_3 - |\Phi \cap \Phi^b|) = \sum_{e \in \Phi} (\omega_1 - |[a] \cap \Phi^e|)$. Отсюда следует утверждение (1).

Подсчитав число пар (c, e) таких, что $c \in \Omega \cap \Gamma_2(a)$, $e \in \Phi$ и $d(c, e) = 2$, получим $\sum_{c \in \Omega \cap \Gamma_2(a)} (\omega_3 - |\Phi \cap ([c] \cup \Phi^c)|) = \sum_{e \in \Phi} (\omega_2 - |\Gamma_2(a) \cap (\Omega_1(e) \cup \Phi^e)|)$. Отсюда следует утверждение (2).

Заметим, что каждая вершина из $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ смежна по крайней мере с 2 вершинами из Φ . Поэтому число ребер между $\Omega \cap \Gamma_2(a)$ и Φ не меньше $2\omega_2$. Так как вершина из Φ смежна с 50 вершинами из $\Gamma_2(a)$, то указанное число ребер не меньше $2\omega_3$. Утверждение (3) доказано.

Допустим, что $|\Phi| = 3$. По лемме 3.1 степень каждой вершины в графе Φ не меньше 1. Поэтому Φ содержит вершину d степени 2, противоречие с тем, что тогда g действует без неподвижных точек на 8 вершинах из $\Sigma_1(d) - \Phi$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Граф Γ не является дистанционно транзитивным.*

Доказательство. Пусть группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует дистанционно транзитивно на Γ . Зафиксируем вершину $a \in \Gamma$. Тогда $H = G_a$ действует транзитивно на $\Gamma_i(a)$ для $i = 1, 2, 3$. Поэтому для $b_i \in \Gamma_i(a)$ и $F_i = H_{b_i}$ получим равенства $|H : F_1| = 60$, $|H : F_2| = 225$ и $|H : F_3| = 36$. Отсюда F_3 содержит силовскую 5-подгруппу P из H и $|P|$ делится на 25.

Вершину b_1 из $[a]$ можно выбрать так, что подгруппа Q индекса 5 из P фиксирует b_1 . Тогда элемент порядка 5 из Q фиксирует a, b_1 и b_3 . Противоречие с теоремой 1. Лемма и следствие доказаны.

Поступила 20.09.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. New York: Springer-Verlag, 1989.
2. **Cameron P.J., van Lint J.** Graphs, codes and designs // London Math. Soc. Student Texts. No. 22. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
3. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Вполне регулярные графы и блок-схемы // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 753–768.
4. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. V. 14. P. 397–407.
5. **Cameron P.J.** Permutation groups // London Math. Soc. Student Texts. No. 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

УДК 519.17

СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ С УСЛОВИЕМ ХОФФМАНА

В. В. Кабанов, С. В. Унегов

Известно, что если -2 является минимальным собственным значением графа, то для графа выполняется условие Хоффмана, т. е. для любого порожденного полного двудольного подграфа $K_{1,3}$ с долями $\{p\}$ и $\{q_1, q_2, q_3\}$ любая вершина, отличная от p и смежная с двумя вершинами из второй доли, не смежна с третьей вершиной и смежна с вершиной p . В работе доказывается обратное утверждение для сильно регулярных графов, содержащих 3-лапу и удовлетворяющих условию $\mu > 1$.

Введение

Мы рассматриваем только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Всюду подграф будет означать порожденный подграф, т. е. подграф, две вершины из которого смежны в том и только в том случае, если эти вершины смежны в исходном графе.

Если вершины x и y смежны, то будем писать $x \sim y$. Точно так же будем писать $X \sim Y$ для двух множеств вершин X и Y , если все вершины из X смежны со всеми вершинами из Y .

Через $[x]$ будем обозначать *окрестность вершины x* , т. е. множество всех вершин, смежных с x , а через x^\perp — объединение $[x] \cup \{x\}$, которое будем называть *замкнутой окрестностью* вершины x .

Граф называется *регулярным* валентности k , если число вершин в $[x]$ не зависит от выбора вершины x и равно k .

Пересечение $[x] \cap [y]$ для двух различных вершин x и y будем обозначать через $M(x, y)$, если $x \not\sim y$, и через $\Lambda(x, y)$, если $x \sim y$.

Подграф, порожденный множеством $M(x, y)$, будем называть *μ -подграфом* вершин x и y , если эти вершины находятся на расстоянии 2 в графе.

Подграф, порожденный множеством $\Lambda(x, y)$, будем называть *λ -подграфом* вершин x и y .

Граф называется *сильно регулярным* графом с параметрами (v, k, λ, μ) , если он является регулярным валентности k графом на v вершинах таким, что $|\Lambda(x, y)| = \lambda$ для любых двух смежных вершин x, y и $|M(x, y)| = \mu$ для любых двух несмежных вершин x, y .

Будем называть *m -лапой* полный двудольный граф $K_{1,m}$ с долями порядка 1 и m при $m \geq 2$. Через $\{p; q_1, \dots, q_m\}$ обозначается m -лапа с долями $\{p\}$ и $\{q_1, \dots, q_m\}$.

Реберным графом $\mathcal{L}(\Gamma)$ графа Γ будем называть граф, множество вершин которого является ребрами исходного графа Γ . Причем два ребра смежны в нем в том и только в том случае, когда они имеют одну общую вершину в графе Γ .

Говорят, что граф получен переключением графа Γ относительно множества вершин X , если множество его вершин совпадает с множеством вершин графа Γ , а любые две его вершины смежны тогда и только тогда, когда они либо не смежны в исходном графе и ровно одна из них содержится в X , либо смежны в исходном графе и обе содержатся или не содержатся в X .

Реберный граф $\mathcal{L}(K_n)$ полного графа K_n называется *треугольным графом* и обозначается через $T(n)$. Этот граф является сильно регулярным графом с параметрами $\left(\frac{n(n-1)}{2}, 2(n-2), n-2, 4\right)$. Л. С. Чанг и А. Дж. Хоффман в работах [6, 8] и [9] показали, что любой сильно регулярный граф с параметрами треугольного графа изоморфен треугольному графу $T(n)$ за исключением случая $n = 8$, когда кроме графа $T(8)$ существует ровно три графа с

теми же параметрами. Эти три графа мы будем называть графами Чанга. Все они могут быть получены из $T(8)$ переключением относительно следующих множеств вершин:

- любых четырех попарно не смежных вершин;
- любых восьми вершин, порождающих непересекающиеся 3-цикл и 5-цикл;
- любых 12 вершин, порождающих реберный граф для 8-цикла со смежными антиподальными вершинами.

Аналогичный результат был получен С. С. Шрикханде в [11] для реберного графа $\mathcal{L}(K_{n,n})$, называемого решетчатым $(n \times n)$ -графом и являющегося сильно регулярным графом с параметрами $(n^2, 2n - 2, n - 2, 2)$. С. С. Шрикханде показал, что любой сильно регулярный граф с такими параметрами изоморфен решетчатому $(n \times n)$ -графу, кроме случая $n = 4$, когда существует еще ровно один граф с такими же параметрами, который мы будем называть графом Шрикханде. Граф Шрикханде можно получить из (4×4) -графа переключением относительно любых восьми вершин, порождающих 8-цикл.

Под матрицей смежности графа Γ будем понимать матрицу $A = (a_{ij})$, строки и столбцы которой перенумерованы вершинами графа Γ , причем $a_{ij} = 1$, если ij является ребром в Γ и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Собственными значениями графа будем называть собственные значения его матрицы смежности.

Для всякого сильно регулярного графа с параметрами (v, k, λ, μ) кроме собственного значения, равного k , есть еще ровно два действительных собственных значения разных знаков [3]. В частности, если -2 является собственным значением сильно регулярного графа, то это значение является минимальным собственным значением графа.

Дж. Дж. Зейдель в [10] определил все сильно регулярные графы, для которых -2 является собственным значением. Список таких графов исчерпывается треугольными графами, тремя графами Чанга, решетчатыми $(n \times n)$ -графами, графом Шрикханде, дополнительными графами к лестничным графам, графом Шлефли, графом Клебша и графом Петерсена. Определения последних графов можно найти в работе [10].

Будем говорить, что граф Γ удовлетворяет *условию Хоффмана*, если для любой 3-лапы $\{p; q_1, q_2, q_3\}$ из графа Γ любая вершина r , отличная от p и смежная с q_1 и q_2 , смежна с вершиной p , но не смежна с вершиной q_3 . Очевидно, что условие Хоффмана имеет содержательный смысл только для тех графов, в которых найдется хотя бы одна 3-лапа и у которых $\mu > 1$.

В работе [8] доказывается, что любой граф (даже не сильно регулярный), имеющий минимальное собственное значение, равное -2 , удовлетворяет условию Хоффмана. Пользуясь этим фактом, М. Д. Хестенс и Д. Г. Хигман в работе [7] нашли отличным от Дж. Дж. Зейделя способом полный список сильно регулярных графов с минимальным собственным значением -2 .

В настоящей работе доказывается, что справедлива следующая

Теорема 1. *Если граф Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , где $\mu > 1$, содержит 3-лапу и удовлетворяет условию Хоффмана, то -2 является собственным значением графа Γ .*

Среди сильно регулярных графов, для которых -2 является собственным значением, только граф Шрикханде и три графа Чанга содержат 3-лапу и удовлетворяют условию $\mu > 1$. Поэтому из теоремы очевидным образом вытекает

Следствие 1. *Если граф Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , где $\mu > 1$, содержит 3-лапу и удовлетворяет условию Хоффмана, то граф Γ является либо графом Шрикханде, либо любым из трех графов Чанга.*

1. Графы, содержащие 3-лапу

В данном разделе будем считать, что граф Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , содержит 3-лапу и удовлетворяет условию Хоффмана.

Для произвольной максимальной (по включению) m -лапы $\{p; q_1, \dots, q_m\}$ из графа Γ , где $m \geq 3$, введем обозначения:

$$Q_i = \left(\Lambda(q_i, p) \setminus \bigcup_{j \neq i} [q_j] \right) \cup \{q_i\}, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$M_{ij} = M(q_i, q_j) \setminus \{p\}, \quad 1 \leq i < j \leq m$$

Из определений очевидным образом вытекают следующие два утверждения:

Лемма 1.1. $[p]$ совпадает с дизъюнктивным объединением $\bigcup_{1 \leq i \leq m} Q_i \cup \bigcup_{1 \leq i < j \leq m} M_{ij}$.

Лемма 1.2. $|M_{ij}| = \mu - 1$, $|Q_i| = \lambda - (m - 1)(\mu - 1) + 1$.

Лемма 1.3. $k = m(\lambda + 1) - \binom{m}{2}(\mu - 1)$.

Доказательство. Воспользуемся леммами 1.1 и 1.2: $k = \sum_{1 \leq i \leq m} |Q_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |M_{ij}| = m(\lambda - (m - 1)(\mu - 1) + 1) + \binom{m}{2}(\mu - 1) = m(\lambda + 1) - \binom{m}{2}(\mu - 1)$.

Для дальнейшего изложения понадобится

Лемма 1.4. Если $abcd$ — четырехугольник в графе Γ , то $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$.

Доказательство. Утверждение очевидным образом вытекает из условия Хоффмана.

Лемма 1.5. Если $m > 3$, то для любых двух несмежных вершин x и y $M(x, y)$ является полным графом.

Доказательство. Возьмем вершины x и x' такие, что $M(x, x')$ не является полным графом. Тогда в графе Γ содержится в качестве подграфа четырехугольник $xyx'z$ для некоторых вершин y и z из $M(x, x')$. В силу леммы 1.4 $[x] \subseteq y^\perp \cup z^\perp$ и, следовательно, $k \leq 2\lambda + 2$. По лемме 1.3 получим, что $m(\lambda + 1) - \binom{m}{2}(\mu - 1) \leq 2\lambda + 2$, или $(m - 2)(\lambda + 1) \leq \binom{m}{2}(\mu - 1)$. Далее, пользуясь леммой 1.2 и, учитывая, что $|Q_i| > 0$, получим $(m - 1)(\mu - 1) < \lambda + 1 \leq \frac{m(m - 1)}{2(m - 2)}(\mu - 1)$. Следовательно, $\frac{m}{2(m - 2)} > 1$, что возможно только при $m = 3$. Лемма доказана.

Напомним, что графом Тервиллигера называется неполный граф, в котором для некоторого фиксированного μ все μ -подграфы являются полными графами из μ вершин. Короной называется полный многодольный граф $K_{1,1,3}$. Очевидно, что в графе не содержится корон, если он удовлетворяет условию Хоффмана.

Лемма 1.6. Если $m > 3$, то $\mu = 1$.

Доказательство. Очевидно, что Γ не является полным графом. По лемме 1.5 все μ -графы из Γ являются полными графами. Поскольку граф Γ сильно регулярен, то все μ -графы равномощны, и, стало быть, граф Γ является графом Тервиллигера. Теперь для доказательства утверждения достаточно сослаться на работу [2], где доказано, что $\mu = 1$ для всякого графа Тервиллигера, не содержащего корон и содержащего 3-лапу.

2. Графы, содержащие максимальную 3-лапу

В данном разделе будем полагать, что граф Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , содержит максимальную 3-лапу $\{p, q_1, q_2, q_3\}$ и удовлетворяет условию Хоффмана. Тогда окрестность вершины p представляется в виде $[p] = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup M_{12} \cup M_{13} \cup M_{23}$. Причем $|M_{12}| = |M_{13}| = |M_{23}| = \mu - 1$ и $|Q_1| = |Q_2| = |Q_3| = \lambda - 2\mu + 3$. Без ограничения общности в формулировках лемм будем использовать конкретные множества Q_i и M_{ij} .

Лемма 2.1. $Q_2 \subseteq M(q'_1, q'_2)$ для любых двух несмежных вершин q'_1 и q'_2 из M_{12} .

Доказательство. Пусть найдутся несмежные вершины q'_1 и q'_2 из M_{12} . Тогда вершины q_1, q'_1, q_2, q'_2 образуют четырехугольник. По лемме 1.4 $k = |[q_1]| = 2(\lambda + 1) - \alpha$, где $\alpha = |[q_1] \cap M(q'_1, q'_2)|$. С другой стороны, по лемме 1.3 $k = 3(\lambda - \mu) + 6$. Откуда $\alpha = 3\mu - \lambda - 4$. Рассмотрим множество вершин $A = ([q_2] \cap M(q'_1, q'_2)) \setminus [q_1]$. Очевидно, что $|A| = \mu - 2 - \alpha = \lambda - 2\mu + 2$. Докажем теперь, что $A \subseteq Q_2 \setminus \{q_2\}$. По условию Хоффмана $A \subseteq [p]$. Ясно, что $q_1, q_2, q_3 \notin A$. Если $x \in M_{13} \cup Q_3 \cup M_{23}$, то $x \notin A$, так как $x \notin M(q'_1, q'_2)$. Если $x \in (Q_1 \cup M_{12}) \setminus \{q_1\}$, то также $x \notin A$. Таким образом, $A \subseteq Q_2 \setminus \{q_2\}$. Кроме того, заметим, что $|Q_2 \setminus \{q_2\}| = \lambda - 2\mu + 2 = |A|$. Значит, $A = Q_2 \setminus \{q_2\}$ и $Q_2 \subseteq M(q'_1, q'_2)$.

Лемма 2.2. Если M_{12} не является полным графом, то $M_{23} \sim Q_2$ и $M_{13} \sim Q_1$.

Доказательство. Возьмем произвольные вершины $x \in M_{23}$, $y \in Q_2$ и две несмежные вершины $q'_1, q'_2 \in M_{12}$. Тогда, пользуясь леммами 1.4 и 2.1, получим, что $x \in q_1^\perp \cup q_2^\perp = q_1'^\perp \cup q_2'^\perp = q_1^\perp \cup y^\perp$ и, стало быть, $x \in y^\perp$, так как $x \notin q_1^\perp$. Аналогично доказывается вторая часть утверждения.

Лемма 2.3. Если M_{12} не является полным графом, то $Q_3 \sim M_{23}$ и $Q_3 \sim M_{13}$.

Доказательство. Возьмем произвольную вершину $x_3 \in Q_3 \setminus \{q_3\}$. Для доказательства леммы достаточно показать, что $\Lambda(x_3, p) \subseteq (M_{13} \cup Q_3 \cup M_{23}) \setminus \{x_3\}$, поскольку в правой части включения стоит множество из λ вершин. Пусть q'_1, q'_2 — две несмежные вершины из M_{12} . Если $x_2 \in Q_2$, то $x_2 \not\sim x_3$, так как в противном случае по лемме 2.1 $x_3 \in x_2^\perp \cup q_1^\perp = q_1'^\perp \cup q_2'^\perp = q_1^\perp \cup q_2^\perp$, что противоречит выбору x_3 . Точно так же любая вершина $x_1 \in Q_1$ не смежна с вершиной x_2 . Ну и, наконец, по условию Хоффмана никакая вершина $x_{12} \in M_{12}$ не может быть смежна с x_3 . Лемма доказана.

Лемма 2.4. Если в M_{23} найдется вершина x_{23} такая, что $x_{23}^\perp \supseteq Q_2 \cup M_{23} \cup Q_3$, то $\lambda - 2\mu + 3 = 1$.

Доказательство. Возьмем вершину x_{23} , удовлетворяющую посылке леммы. Тогда $\lambda = |\Lambda(x_{23}, p)| = \mu - 2 + 2(\lambda - 2\mu + 3) + \alpha$, где $\alpha = |[q_1] \cap \Lambda(x_{23}, p)|$. С другой стороны, $\mu = |M(q_1, x_{23})| = \alpha + 1 + \beta$, где β — число вершин множества $B = M(q_1, x_{23}) \setminus p^\perp$. Стало быть, $\beta = \mu - \alpha - 1 = \lambda - 2\mu + 3$. Из леммы 1.2 вытекает, что есть только две возможности: $\beta = 1$ или $\beta > 1$. Во втором случае мы придем к противоречию. Пусть $\beta > 1$. Выберем две различные вершины $y_1, y_2 \in B$ и рассмотрим множество вершин $C = ([y_1] \cap [y_2]) \setminus [p]$. По лемме 1.4 $C = (([x_{23}] \setminus p^\perp) \cup ([q_1] \setminus p^\perp)) \setminus \{y_1, y_2\}$. Следовательно, $|C| = 2(k - \lambda - 1) - \beta - 2 = 2(3(\lambda - \mu) + 6 - \lambda - 1) - (\lambda - 2\mu + 3) - 2 = 3\lambda - 4\mu + 5$. Обе вершины y_1 и y_2 смежны по крайней мере с двумя вершинами из окрестности $[p]$: x_{23} и q_1 . Поэтому $2 \leq |[y_1] \cap [y_2] \cap [p]| = \lambda - |C| = 4\mu - 2\lambda - 5$, что влечет неравенство $\lambda \leq 2\mu - \frac{7}{2}$. Однако $\beta > 1$, т. е. $\lambda > 2\mu - 2$. Полученное противоречие показывает, что β может быть равным только 1. Лемма доказана.

Для множества вершин Δ через Δ^\perp обозначим множество $\bigcap_{x \in \Delta} x^\perp$. Если множество Δ не менее, чем двухэлементно, то ядром Δ будем называть множество $K(\Delta) = \Delta^\perp \cap \Delta$.

Лемма 2.5. Если M_{12} не является ни пустым, ни полным графом и $\lambda - 2\mu + 3 \neq 1$, то $K(M_{ij}) = \emptyset$ для любых $1 \leq i < j \leq 3$.

Доказательство. Пусть M_{12} не является ни пустым, ни полным графом. Заметим, что в этом случае каждое из множеств M_{ij} для любых $1 \leq i < j \leq 3$ не менее, чем двухэлементно. В силу лемм 2.2, 2.3, 2.4 и условия $\lambda - 2\mu + 3 \neq 1$ ядро $K(M_{23})$ пусто. В частности, подграф, порожденный M_{23} , не является полным графом и к нему применимы те же леммы. Продолжая подобные рассуждения, получаем заключение доказываемой леммы.

Лемма 2.6. Для графа Γ выполняется хотя бы одно из условий:

1. $\lambda - 2\mu + 3 = 1$.
2. $M(x, y) \subseteq p^\perp$ для любых двух несмежных вершин x и y из $[p]$.

Доказательство. Возьмем две произвольные несмежные вершины x и y из $[p]$. Заметим, что если внутри $[p]$ найдется третья вершина, не смежная ни с x , ни с y , то по условию Хоффмана $M(x, y) \subseteq p^\perp$. Без ограничения общности могут быть только следующие случаи:

1. $x \in Q_1 \cup M_{12}$, $y \in Q_2 \cup M_{12}$. В этом случае вершина q_3 не смежна ни с x , ни с y .
2. $x \in Q_1$, $y \in M_{23}$. Если подграф, порожденный M_{23} , не является полным графом и $\lambda - 2\mu + 3 \neq 1$, то по лемме 2.5 обязательно найдется вершина $z \in M_{23}$ такая, что $z \not\sim y$. Кроме того, в силу условия Хоффмана $z \not\sim x$. Рассмотрим оставшийся случай, когда подграф, порожденный M_{23} , является полным графом. Если $x = q_1$ и $M(x, y) \setminus p^\perp \neq \emptyset$, то по лемме 1.4 вершина y оказывается смежной со всеми вершинами из Q_2 и Q_3 . Следовательно, $y^\perp \supseteq Q_2 \cup M_{23} \cup Q_3$ и по лемме 2.4 $\lambda - 2\mu + 3 = 1$. Случай, когда $x \in Q_1 \setminus \{q_1\}$, рассматривается аналогично: достаточно вместо 3-лапы $\{p; q_1, q_2, q_3\}$ взять 3-лапу $\{p; x, q_2, q_3\}$ — для последней подграф, порожденный $M(q_2, q_3)$, тоже будет полным графом.
3. $x \in M_{12}$, $y \in M_{23}$. Будем полагать, что $\lambda - 2\mu + 3 \neq 1$. Если подграф, порожденный M_{23} , не является полным графом, то по лемме 2.5 найдется вершина $x' \in M_{12}$ такая, что $x \not\sim x'$. Очевидно, из леммы 1.4, примененной к четырехугольнику $q_1 x q_2 x'$, получим, что $y \sim x'$ и, рассматривая 3-лапу $\{p; x, x', q_3\}$, мы попадаем в уже разобранный в предыдущем пункте случай. Будем теперь полагать, что подграф, порожденный M_{23} , является полным графом и существует вершина $z \in M(x, y) \setminus p^\perp$. Как следует из предыдущего пункта, $M(q_1, y) \subseteq p^\perp$. С другой стороны, вершина y смежна с любой вершиной из Q_3 , что вытекает из леммы 1.4, примененной к четырехугольнику $p x z y$. Следовательно, $\Lambda(p, y) \supseteq (M_{23} \setminus \{y\}) \cup (M(q_1, y) \setminus \{p\}) \cup Q_3 \cup \{q_2\}$, что противоречиво, поскольку во множестве из правой части включения содержится $(\mu - 2) + (\mu - 1) + (\lambda - 2\mu + 3) + 1 = \lambda + 1$ элемент.

Лемма доказана.

Лемма 2.7. Если для графа Γ выполняется равенство $\lambda - 2\mu + 3 = 1$, то минимальное собственное значение графа Γ равно -2 .

Доказательство. Поскольку $\lambda - 2\mu + 3 = 1$, $k = 3(\lambda - \mu) + 6 = 3\mu$. Минимальное собственное значение сильно регулярного графа должно содержаться среди корней уравнения $x^2 + (\mu - \lambda)x + (\mu - k) = 0$ (см. [3]), или, в нашем случае, среди корней уравнения $x^2 + (2 - \mu)x - 2\mu = 0$. Корни этого уравнения будут равны $x_{1,2} = \frac{\mu - 2 \pm \sqrt{(\mu - 2)^2 + 8\mu}}{2} = \frac{\mu - 2 \pm (\mu + 2)}{2} = \mu, -2$. Лемма доказана.

В следующей лемме нам понадобится понятие α -расширения графа. Под α -расширением графа Θ будем понимать граф Θ' , полученный заменой каждой вершины x из Θ на полный граф (x) на α вершинах, причем вершины (x) и (y) смежны в Θ' тогда и только тогда, когда x и y смежны в Θ .

Лемма 2.8. *Если $M(x, y) \subseteq p^\perp$ для любых двух несмежных вершин x и y из $[p]$, то или $\mu = 1$, или $\lambda - 2\mu + 3 = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим подграф Δ , порожденный множеством вершин $[p] \setminus \{p\}$. Если $\mu > 1$, то его диаметр не больше 2 и к нему можно применить результат работы [1], из которого следует, что граф Δ является α -расширением одного из трех графов:

1. Решетчатого $(m \times n)$ -графа при $m, n \geq 3$.
2. Треугольного графа $T(m)$ при $m \geq 3$.
3. Графа Шлефли ([10]).

Покажем, что граф Δ не может быть ни одним из этих графов. Прежде всего заметим, что в графе Δ есть максимум 3 попарно несмежных вершины. Поэтому, если граф Δ является α -расширением решетчатого $(m \times n)$ -графа, то можно, не ограничивая общности, считать, что $m = 3$. Кроме того, пользуясь леммой 2.2 и рассматривая строение решетки, легко получить, что и $n = 3$. Таким образом, $\lambda - 2\mu + 3 = \alpha$ и $\mu - 1 = 2\alpha$. Отсюда найдем параметры λ , μ и k : $\lambda = 5\alpha - 1$, $\mu = 2\alpha + 1$ и $k = 9\alpha$. Соотношение $\mu(v - k - 1) = k(k - \lambda - 1)$ выполняется для всех сильно регулярных графов ([7]), так что $\mu | k(k - \lambda - 1)$, или, для рассматриваемого случая, $2\alpha + 1 | 36\alpha^2$. Следовательно, α может принимать одно из двух значений $\alpha = 1, 4$. В первом случае $\lambda - 2\mu + 3 = 1$, а во втором случае корни характеристического уравнения $x^2 + (\mu - \lambda)x + \mu - k = 0$ не целые, что возможно только в так называемом “половинном” случае, когда $v = 4\mu + 1$, $k = 2\mu$, а $\lambda = \mu - 1$ (см. [4]). Противоречие.

Если граф Δ является α -расширением треугольного графа $T(m)$, то m может принимать значения либо 6, либо 7. Случай $T(7)$ невозможен в силу леммы 2.2. Для случая $T(6)$ непосредственный подсчет показывает, что $k = 15\alpha$, $\mu = 4\alpha + 1$ и $\lambda = 9\alpha - 1$. Применяя соотношение для сильно регулярных графов, получим, что $4\alpha + 1 | 15\alpha \cdot 6\alpha$. Следовательно α может принимать одно из трех значений $\alpha = 1, 2, 11$. И снова приходим к тому, что или $\lambda - 2\mu + 3 = 1$, или корни характеристического уравнения не целые.

Наконец, если Δ является α -расширением графа Шлефли, то $k = 27\alpha$, $\mu = 8\alpha + 1$, $\lambda = 17\alpha - 1$, и из соотношения $17\alpha - 1 | 27\alpha \cdot 10\alpha$ вытекает, что $\alpha = 1$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Пусть граф Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) для $\mu > 1$, содержит 3-лапу и удовлетворяет условию Хоффмана. Учитывая неравенство $\mu > 1$, по лемме 1.6 получим, что любая 3-лапа в графе Γ является максимальной. Далее остается воспользоваться леммами 2.6, 2.7 и 2.8.

Поступила 01.10.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кабанов В.В., Махнев А.А. Графы без 3-лап с равномошными μ -подграфами // Изв. Урал. ун-та. Екатеринбург, 1998. № 10. С. 44–68.
2. Кабанов В.В., Махнев А.А., Падучих Д.В. О графах без корон с регулярными μ -подграфами, II // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 375–384.
3. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs. New York: Springer-Verlag, 1989.
4. Brouwer A.E., van Lint J.H. Strongly regular graphs and partial geometries. Enumerating and Design / Ed. by D. M. Jackson and S. A. Vanstone. New York: Academic Press, 1984. P. 85–122.

5. **Chang L.C.** The uniqueness and nonuniqueness of triangular association schemes // Sci. Record. 1949. Vol. 3. P. 604–613.
6. **Chang L.C.** Association schemes of partially balanced block designs with parameters $v = 28$, $n_1 = 12$, $n_0 = 15$ and $p_{11}^2 = 4$ // Sci. Record. 1950. Vol. 4. P. 12–18.
7. **Hestens M.D., Higman D.G.** Rank 3 groups and strongly regular graphs // SIAM-AMS Proc. 1971. Vol. 4. P. 141–159.
8. **Hoffman A.J.** On the uniqueness of the triangular association scheme // Ann. Math. Stat. 1960. Vol. 31. P. 492–497.
9. **Hoffman A.J.** On the exceptional case in a characterization of the arcs of complete graphs // IBM J. Res. Develop. 1960. Vol. 4. P. 487–496.
10. **Seidel J.J.** Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3 // Linear Algebra and Appl. 1. 1968. P. 281–298.
11. **Shrikhande S.S.** The uniqueness of the L_2 association scheme // Ann. Math. Stat. 1959. Vol. 30. P. 781–798.

УДК 512.542.7

О ПРИМИТИВНЫХ ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ ГЛОБАЛЬНЫМИ СТАБИЛИЗАТОРАМИ¹

А. В. Коныгин

В [2] доказано, что (с точностью до подстановочного изоморфизма) существует лишь конечное число примитивных групп подстановок G на конечных множествах X таких, что $\text{Alt}(X) \not\leq G$ и глобальный стабилизатор любого подмножества R множества X в группе G нетривиален (т. е. $G_{\{R\}} \neq 1$). Для конечных примитивных не почти простых групп в [7] указаны явные конструкции множеств с тривиальными глобальными стабилизаторами в случаях, когда такие множества существуют. Описание примитивных групп подстановок G на конечных множествах X таких, что $G_{\{R\}} \neq 1$ для любого $R \subseteq X$ было получено в [5]. (Независимо, но позже автором был получен аналогичный результат в контексте исследования величины $D(G)$ для конечных примитивных групп, см. ниже.) Следствием этого описания являются следующие результаты.

Пусть G — группа подстановок на конечном множестве X . Определим $D(G)$ как минимальное натуральное число n , для которого существует функция $\chi : X \rightarrow \{1, \dots, n\}$ такая, что из условий $g \in G$ и $\chi(g(x)) = \chi(x)$ для всех $x \in X$ следует $g = 1$ (см. [3, 6]).

Теорема 1. Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X . Тогда $D(G) = 2$ или выполняются одно из следующих утверждений:

- (1) $D(G) = 3$ и G — одна из групп подстановок: D_{10} , $AGL_1(5)$ степени 5; $PSL_2(5)$ степени 6; $AGL_1(7)$ степени 7; $AGL_1(8)$, $PSL_2(7)$, $PGL_2(7)$ степени 8; $3^2 : D_8$, $AGL_1(9)$, $ASL_2(3)$, $AGL_2(3)$, S_5 , $PSL_2(9)$, $PGL_2(9)$, S_6 , M_{10} , $PGL_2(9)$ степени 10; $PSL_2(11)$ степени 11; M_{11} , $PGL_2(11)$ степени 12; $PSL_3(3)$ степени 13; $PGL_2(13)$ степени 14; $PSL_4(2)$ степени 15; $2^4 : PSL_4(2)$, $AGL_2(4)$, $2^4 : S_6$, $2^4 : A_6$, $2^4 : A_7$ степени 16; $PSL_2(16) : 2$, $PGL_2(16)$ степени 17; $PGL_3(4)$ степени 21; M_{22} , $M_{22} : 2$ степени 22; M_{23} степени 23; M_{24} степени 24; $ASL_5(2)$ степени 32;
- (2) $D(G) = 4$ и G — одна из групп подстановок: $PGL_2(5)$ степени 6; $PSL_3(2)$ степени 7; $ASL_3(2)$ степени 8; M_{11} степени 11; M_{12} степени 12;
- (3) $G = \text{Alt}(X)$, $|X| \geq 3$ и $D(G) = |X| - 1$;
- (4) $G = \text{Sym}(X)$ и $D(G) = |X|$.

Доказательство. Пусть G — примитивная группа подстановок, $|X| \geq 3$. Из теоремы 2 в [5] следует, что $\text{Alt}(X) \leq G$ или существует подмножество R множества X со свойством $G_{\{R\}} = 1$, или группа G подстановочно изоморфна одной из 43 явно указываемых в теореме 2 в [5] групп подстановок.

Предположим, что $\text{Alt}(X) \leq G$. Тогда либо $G = \text{Sym}(X)$, либо $G = \text{Alt}(X)$. Если $G = \text{Sym}(X)$, то, очевидно, $D(G) = |X|$. Если $G = \text{Alt}(X)$, то, очевидно, $D(G) = |X| - 1$. Таким образом, если $\text{Alt}(X) \leq G$, то теорема справедлива.

Предположим теперь, что существует подмножество R множества X со свойством $G_{\{R\}} = 1$. Тогда, очевидно, $D(G) = 2$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00378).

С помощью [4] проверяется, что $D(G) \in \{3, 4\}$ в случае, когда группа G подстановочно изоморфна одной из 43 явно указываемых в теореме 2 в [5] групп подстановок, т. е. G — одна из групп из первого столбца следующей таблицы (во втором столбце таблицы указан номер группы из первого столбца в списке примитивных групп данной степени в библиотеке примитивных групп подстановок пакета GAP [4]. Для каждой группы из первого столбца таблицы в третьем столбце указывается полученное с помощью GAP семейство множеств, имеющее наименьшую мощность и такое, что пересечение глобальных стабилизаторов множеств этого семейства в группе тривиально. (При этом группа G отождествляется с изоморфной группой из библиотеки примитивных групп подстановок пакета GAP.)

группа	номер	семейство множеств
$D(G) = 3$		
D_{10} степени 5	2	{3}, {5}
$AGL_1(5)$ степени 5	3	{3, 4}, {2, 5}
$PSL_2(5)$ степени 6	1	{1, 2}, {5, 6}
$AGL_1(7)$ степени 7	4	{2, 3}, {5}
$AGL_1(8)$ степени 8	2	{5, 6}, {1, 4}
$PSL_2(7)$ степени 8	4	{2}, {1, 8}
$PGL_2(7)$ степени 8	5	{1, 3, 8}, {4, 6}
$3^2 : D_8$ степени 9	2	{6, 8}, {1, 4}
$AGL_1(9)$ степени 9	5	{2, 3}, {4, 8}
$ASL_2(3)$ степени 9	6	{6, 7}, {2, 3}
$AGL_2(3)$ степени 9	7	{1, 2, 4}, {5, 6, 9}
$PSL_2(8)$ степени 9	8	{3, 4, 5}, {1, 6, 8}
$PGL_2(8)$ степени 9	9	{1, 6, 9}, {4, 7, 8}
S_5 степени 10	2	{2, 8}, {6, 7}
$PSL_2(9)$ степени 10	3	{2, 10}, {4, 8}
$PGL_2(9)$ степени 10	4	{2, 8, 9}, {1, 7, 10}
S_6 степени 10	5	{4, 10}, {5, 8}
M_{10} степени 10	6	{1, 8}, {7, 9}
$PGL_2(9)$ степени 10	7	{2, 6, 9}, {4, 5, 7}
$PSL_2(11)$ степени 11	5	{3, 7}, {1, 2}
M_{11} степени 12	1	{4, 9, 11}, {1, 5, 6, 7}
$PGL_2(11)$ степени 12	4	{5, 8, 10}, {1, 2, 11}
$PSL_3(3)$ степени 13	7	{1, 6, 7}, {4, 9, 012}
$PGL_2(13)$ степени 14	2	{5, 9, 14}, {2, 4, 12}
$PSL_4(2)$ степени 15	4	{8, 12, 13, 14}, {1, 2, 10, 15}
$2^4.PSL_4(2)$ степени 16	11	{2, 5, 7, 9, 10, 13}, {6, 11, 12, 15}
$AGL_2(4)$ степени 16	12	{6, 8, 16}, {9, 13}
$2^4.S_6$ степени 16	16	{4, 7, 9}, {1, 3, 10}
$2^4.A_6$ степени 16	17	{1, 2}, {5, 15}
$2^4.A_7$ степени 16	20	{2, 7, 15}, {3, 5, 11}
$PSL_2(16) : 2$ степени 17	7	{1, 10, 13}, {4, 5, 7}
$PGL_2(16)$ степени 17	8	{1, 11, 14}, {2, 5, 16}
$PGL_3(4)$ степени 21	7	{2, 4, 16}, {1, 10, 18}
M_{22} степени 22	1	{3, 5, 9, 18}, {1, 2, 4, 17}
$M_{22} : 2$ степени 22	2	{1, 12, 17, 20}, {4, 9, 15, 22}
M_{23} степени 23	5	{3, 14, 19, 22}, {1, 2, 6, 11, 12}
M_{24} степени 24	1	{1, 4, 7, 9, 16, 17}, {8, 12, 18, 21, 23, 24}
$ASL_5(2)$ степени 32	3	{2, 8, 11, 16, 24}, {1, 3, 4, 15, 31}
$D(G) = 4$		
$PGL_2(5)$ степени 6	2	{4}, {5}, {6}
$PSL_3(2)$ степени 7	5	{3}, {6}, {7}
$ASL_3(2)$ степени 8	3	{2, 3}, {7, 8}, {4, 5}
M_{11} степени 11	6	{2, 6}, {4, 7}, {8, 10}
M_{12} степени 12	2	{2, 4, 10}, {5, 6, 11}, {8, 9}

Таким образом, теорема 1 доказана. □

Пусть Γ — конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер, $V(\Gamma)$ — множество вершин графа Γ . Определим $D(\Gamma)$ как минимальное натуральное число n , для которого существует функция $\chi : V(\Gamma) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ такая, что из условий $g \in \text{Aut}(\Gamma)$ и $\chi(g(v)) = \chi(v)$ для всех $v \in V(\Gamma)$ следует $g = 1$ (см. [1, 6]).

Теорема 2. Пусть Γ — конечный связный неориентированный граф без петель и кратных ребер, допускающий вершинно-примитивную группу автоморфизмов. Тогда $D(\Gamma) = 2$ или выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Γ — полный граф;
- (2) $D(\Gamma) = 3$ и Γ изоморфен одному из следующих четырех графов: цикл длины 5; граф Петерсена; дополнительный граф к графу Петерсена; граф с множеством вершин $\{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, 3\}\}$, причем вершина (i, j) смежна с вершиной (i', j') , если $i = i'$ или $j = j'$.

Доказательство. Пусть $D(\Gamma) > 2$ и граф Γ не является полным. Положим $G = \text{Aut}(\Gamma)$ (где $\text{Aut}(\Gamma)$ рассматривается как группа подстановок на $V(\Gamma)$). Тогда $D(G) = D(\Gamma) > 2$ и группа G не является дважды транзитивной. Из теоремы 1 поэтому следует, что G — одна из групп подстановок: D_{10} степени 5, $3^2 : D_8$ степени 9, S_5 степени 10. Теперь непосредственная проверка показывает, что граф Γ изоморфен одному из следующих четырех графов: цикл длины 5; граф Петерсена; дополнительный граф к графу Петерсена; граф с множеством вершин $\{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, 3\}\}$, причем вершина (i, j) смежна с вершиной (i', j') , если $i = i'$ или $j = j'$. Теорема доказана. \square

З а м е ч а н и е. В [7] рассмотрение случаев аффинных групп степеней 9, 16, 32 было проделано некорректно. Ниже приводятся необходимые исправления в доказательстве и соответствующие изменения в формулировке результата из [7].

На с. 115, в п. (ix) формулировки теоремы вместо “подгруппа порядка 144” должно быть “подгруппы порядков 72 и 144”. Кроме того, в формулировку этой теоремы следует добавить: “(xii) $AGL(4, 2)$ степени 16 и подгруппы $AGL(2, 4)$, $2^4 : A_7$, $2^4 : S_6$ и $2^4 : A_6$ группы $AGL(4, 2)$ в естественном подстановочном представлении степени 16; (xiii) $AGL(5, 2)$ в естественном подстановочном представлении степени 32”.

На с. 116, строка 8 сверху, вместо “(xi)” должно быть “(xiii)”.

На с. 123, строка 28 сверху, вместо “Положим” должно быть “Если $k = 4$ и G — одна из групп: $AGL(4, 2)$, $AGL(2, 4)$, $2^4 : A_7$, $2^4 : S_6$ и $2^4 : A_6$, то подмножества R множества X со свойством $G_{\{R\}} = 1$ не существует. В остальных случаях при $k = 4$ имеем $G_{\{R\}} = 1$, где $R = \{0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, e_1 + e_2 + e_3\}$. Если $k = 5$ и $G = AGL(5, 2)$, то подмножества R множества X со свойством $G_{\{R\}} = 1$ не существует. В остальных случаях при $k = 5$ имеем $G_{\{R\}} = 1$, где $R = \{0, e_1, e_2, \dots, e_5, e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_4 + e_5, e_1 + e_2 + e_3\}$. Пусть теперь, $k > 5$. Положим...”.

На с. 124, строка 6 сверху, вместо “ $G = ASL(2, 3)$ или” должно быть “ $G = ASL(2, 3)$, $G = 3^2 : D_8$ или”.

Поступила 09.08.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Albertson M.O., Collins K.L.** Symmetry breaking in graphs // Electron. J. Combin. 1996. Vol. 3, no. 1. #R18.
2. **Cameron P.J., Neumann P.M., Saxl J.** On groups with no regular orbits on the set of subsets // Arch. Math. 1984. Vol. 43. P. 295–296.
3. **Chan M.** The maximum distinguishing number of a group // Electron. J. Combin. 2006. Vol. 13. #R70.

4. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms and Programming. Version 4.4.6.
<http://www.gap-system.org>. 2007.
5. **Seress A.** Primitive groups with no regular orbits on the sets of subsets // Bull. London. Math. Soc. 1997. Vol. 29. P. 697–704.
6. **Tymoczko J.** Distinguishing numbers for graphs and groups // Electron. J. Combin. 2004. Vol. 11. #R63.
7. **Коньгин А.В.** Множества с тривиальными глобальными стабилизаторами для примитивных групп подстановок, не являющихся почти простыми // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 115–131.

УДК 519.174

ХРОМАТИЧЕСКАЯ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОЛНЫХ ТРЕХДОЛЬНЫХ ГРАФОВ I

Т. А. Королева

Найден новый класс хроматически определяемых полных трехдольных графов, имеющих высоту, меньшую или равную 3 в решетке полных трехдольных графов заданного порядка.

В данной работе рассматриваются только обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных ребер. Обозначения и терминологию для графов будем использовать в соответствии с [1] и [2].

Граф называется *хроматически определяемым* или χ -*определяемым*, если он изоморфен любому хроматически эквивалентному ему графу. Различными авторами были проведены многочисленные исследования по изучению хроматической эквивалентности и хроматической определяемости для графов. Обзор полученных результатов можно найти в монографии [3]. В этих исследованиях большое место было уделено изучению хроматической определяемости полных многодольных графов.

Главная проблема здесь состоит в следующем:

является ли хроматически определяемым полный многодольный граф $K(n_1, n_2, \dots, n_t)$ при $t \geq 3$ и $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq 2$?

Для случая $t = 3$ разными авторами были указаны некоторые классы хроматически определяющихся полных трехдольных графов (см. [3]).

Цель данной работы состоит в том, чтобы доказать следующую теорему:

Теорема 1. Пусть n, n_1, n_2, n_3 — натуральные числа такие, что $n = n_1 + n_2 + n_3$, $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 2$, $n \equiv 1 \pmod{3}$ и $n_1 - n_3 \leq 4$. Тогда граф $K(n_1, n_2, n_3)$ является хроматически определяемым.

Данная теорема дает новый класс хроматически определяемых полных трехдольных графов.

1. Предварительные сведения

Пусть n и t — натуральные числа такие, что $n \geq t \geq 3$. Разделим n на t с остатком: $n = t \cdot q + r$, где $0 \leq r < t$. Зафиксируем элементарное преобразование (см. [2]) разбиений из $NPL(n, t)$

$$u = (n_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_t) \Rightarrow v = (n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_t),$$

где $i < j$, $n_i = n_j + \delta$ и $\delta \geq 2$.

При $t = 3$ рассмотрим два случая: \swarrow $i = 1, j = 2$ и \searrow $i = 2, j = 3$.

Заметим, что при $t = 3$ граф $K(n_1, n_2, n_3)$ не содержит подграфов K_4 и поэтому $I_4(u) = vg \square (K(n_1, n_2, n_3))$.

Лемма 1. Пусть $t = 3$. Тогда в случаях \swarrow) и \searrow) выполняется

$$\swarrow) I_4(u) - I_4(v) = -(\delta - 1) \left[\frac{(n_1 - 1)n_2}{2} - \binom{n_3}{2} \right];$$

$$\searrow) I_4(u) - I_4(v) = -(\delta - 1) \left[\frac{(n_2 - 1)n_3}{2} - \binom{n_1}{2} \right].$$

Доказательство. \swarrow) $I_4(u) - I_4(v) = \binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2} + \binom{n_2}{2} \binom{n_3}{2} + \binom{n_3}{2} \binom{n_1}{2} - \binom{n_1 - 1}{2} \binom{n_2 + 1}{2} - \binom{n_2 + 1}{2} \binom{n_3}{2} - \binom{n_3}{2} \binom{n_1 - 1}{2} = \binom{n_1}{2} \binom{n_2}{2} - \binom{n_1 - 1}{2} \binom{n_2 + 1}{2} + \binom{n_3}{2} \left[\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} - \binom{n_1 - 1}{2} - \binom{n_2 + 1}{2} \right] = (n_1 - 1) \binom{n_2}{2} - \binom{n_1 - 1}{2} n_2 + \binom{n_3}{2} \times [n_1 - 1 - n_2] = \frac{(n_1 - 1)n_2}{2} (n_2 - 1 - n_1 + 2) + \binom{n_3}{2} (\delta - 1) = -(\delta - 1) \left[\frac{(n_1 - 1)n_2}{2} - \binom{n_3}{2} \right].$

Случай \searrow) рассматривается аналогично. \square

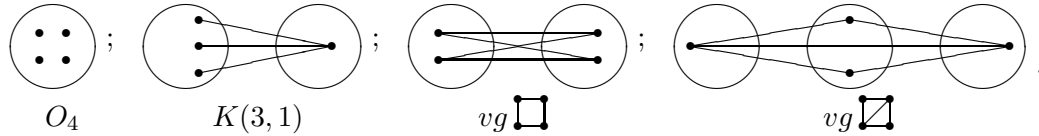
Пусть граф H получен из графа $K(n_1, n_2, n_3)$ удалением непустого семейства ребер E , т. е. $H = K(n_1, n_2, n_3) - E$.

Как показано в [2], инвариант I_3 при переходе от $K(n_1, n_2, n_3)$ к H меняется следующим образом:

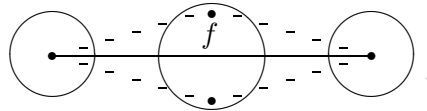
$$I_3(H) = I_3(n_1, n_2, n_3) - \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3.$$

Выясним, как изменяется инвариант I_4 при переходе от $K(n_1, n_2, n_3)$ к H .

Отметим сначала, что в $K(n_1, n_2, n_3)$ любой 4-подграф имеет один из следующих типов:



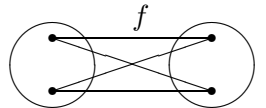
Рассмотрим сначала, сколько возникает новых подграфов вида $vg \square$ при удалении E из $K(n_1, n_2, n_3)$. Такие подграфы возникают при отбрасывании ребра $f \in E$ в подграфе вида



где остальные четыре ребра рассматриваемого подграфа не лежат в E . Обозначим число таких подграфов через η .

Теперь рассмотрим, сколько подграфов вида $vg \square$ разрушается при переходе от $K(n_1, n_2, n_3)$ к H .

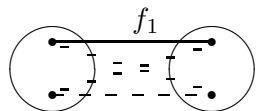
Далее, через $\eta_1(f)$, где $f \in E$, обозначим число подграфов вида $vg \square$ в $K(n_1, n_2, n_3)$, содержащих f



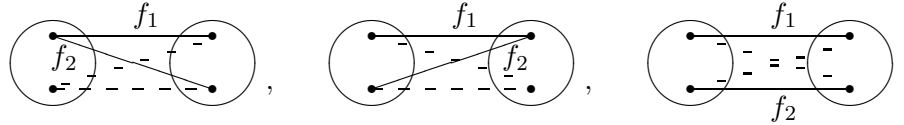
Положим $\eta_1 = \sum_{f \in E} \eta_1(f)$.

Посмотрим, сколько раз разрушается каждый из бесхордных 4-циклов вида $vg \square$ из $K(n_1, n_2, n_3)$.

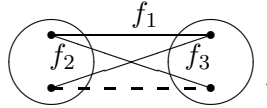
1) Цикл, содержащий точно одно ребро из E , разрушается один раз



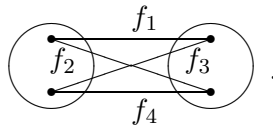
2) Цикл, содержащий точно два ребра из E , разрушается дважды, т. е. каждым из двух ребер. Число таких подграфов $vg \square$ обозначим через η_2 . Они имеют один из следующих типов:



3) Цикл, содержащий точно три ребра из E , разрушается трижды. Число таких подграфов $vg \square$ обозначим через η_3 . Они имеют следующий вид:



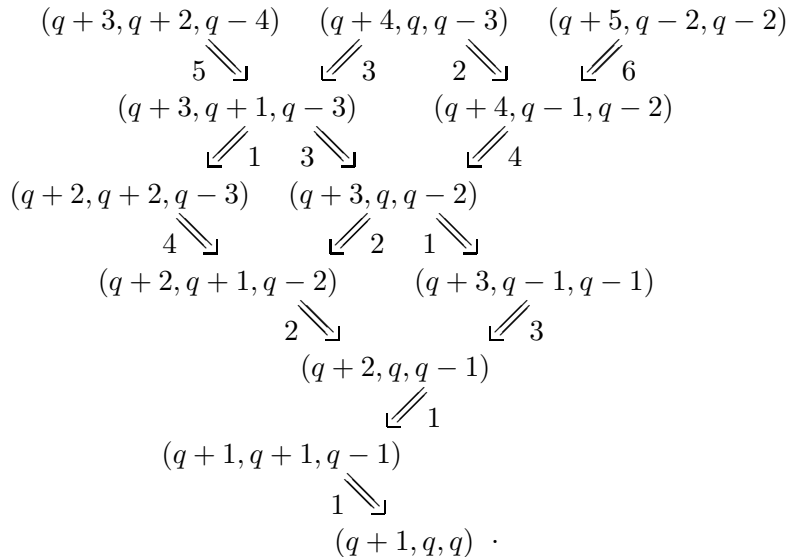
4) Цикл, содержащий точно четыре ребра из E , разрушается четыре раза. Число таких подграфов $vg \square$ из $K(n_1, n_2, n_3)$ обозначим через η_4



Ясно, что $\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4$ — это число, на которое меняется число подграфов вида $vg \square$ при переходе от $K(n_1, n_2, n_3)$ к $H = K(n_1, n_2, n_3) - E$. Таким образом,

$$I_4(H) = I_4(n_1, n_2, n_3) + \eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4.$$

Будем считать далее, что $n = 3 \cdot q + 1$, т. е. $t = 3$ и $r = 1$. Легко видеть, что нижние этажи решетки $NPL(n, 3)$ устроены следующим образом:



На этой диаграмме рядом с отношением покрытия указано отвечающее ему значение $\delta - 1$.

- Лемма 2.** 1) $I_4(q + 3, q - 1, q - 1) - I_4(q + 2, q, q - 1) = -6q + 6$.
 2) $I_4(q + 2, q + 1, q - 2) - I_4(q + 2, q, q - 1) = 5q + 2$.
 3) $I_4(q + 2, q, q - 1) - I_4(q + 1, q + 1, q - 1) = -2q + 1$.
 4) $I_4(q + 1, q + 1, q - 1) - I_4(q + 1, q, q) = q$.

Доказательство проводится простыми вычислениями в соответствии с леммой 1. □

Лемма 3. Пусть $u = (q + \alpha_1, q + \alpha_2, q + \alpha_3)$ и $v = (q + \beta_1, q + \beta_2, q + \beta_3)$ — произвольные элементы из $NPL(n, 3)$ такие, что $q + \alpha_1 > q + \beta_1$ и $q + \alpha_3 < q + \beta_3$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ — целые числа. Тогда $u \geq v$.

Доказательство. Применим алгоритм вычисления $u \wedge v$, указанный в [2]. Очевидно, $u \wedge v = (q + \beta_1, x, q + \beta_3)$ для некоторого натурального числа x . Поскольку $u \wedge v$ — разбиение числа n , отсюда имеем $x = q + \beta_2$, т. е. $u \wedge v = v$. Следовательно, $u \geq v$. \square

Лемма 4. Пусть u и v — произвольные несравнимые элементы в $NPL(n, 3)$. Тогда

$$I_2(u) \neq I_2(v) \text{ или } I_3(u) \neq I_3(v).$$

Доказательство. Ясно, что $u = (q + \alpha_1, q + \alpha_2, q + \alpha_3)$ и $v = (q + \beta_1, q + \beta_2, q + \beta_3)$ для некоторых целых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Если $q + \alpha_1 = q + \beta_1$, то легко понять, что u и v сравнимы. Без ограничения общности будем считать, что $q + \alpha_1 > q + \beta_1$. Если $q + \alpha_3 = q + \beta_3$, то u и v сравнимы. Поэтому имеем $q + \alpha_3 \neq q + \beta_3$. В силу леммы 3 получаем $q + \alpha_3 > q + \beta_3$. Используя алгоритм вычисления пересечения, получаем $u \wedge v = (q + \beta_1, x, q + \alpha_3)$ для некоторого натурального числа x .

Тогда от u до $u \wedge v$ имеется цепочка элементарных преобразований, осуществляющих падение блока с первой компоненты на вторую. Обозначим через l_1 сумму всех значений $\delta - 1$, отвечающих этим преобразованиям. Аналогично, имеется цепочка элементарных преобразований от v до $u \wedge v$, осуществляющих падение блока со второй компоненты на третью. Обозначим через l_2 сумму всех значений $\delta - 1$, отвечающих этим преобразованиям. Тогда $I_2(u) - I_2(u \wedge v) = -l_1$ и $I_2(v) - I_2(u \wedge v) = -l_2$ на основании леммы 1 [2].

Пусть выполняется равенство $I_2(u) = I_2(v)$. Тогда $l_1 = l_2$. В силу леммы 2 [2] имеем

$$I_3(u) - I_3(u \wedge v) = -l_1(q + \alpha_3),$$

$$I_3(v) - I_3(u \wedge v) = -l_2(q + \beta_1).$$

Пусть от противного $I_3(u) = I_3(v)$. Тогда $q + \alpha_3 = q + \beta_1$, т. е. $\alpha_3 = \beta_1$. Последнее равенство невозможно, так как $\beta_1 > 0$ и $\alpha_3 < 0$. \square

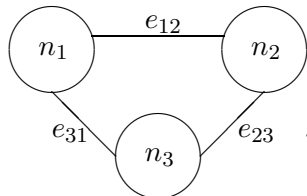
Предложение 1. Любые два различные полные трехдольные n -графы не являются хроматически эквивалентными.

Доказательство. Учитывая лемму 4, достаточно заметить, что в силу леммы 1 [2] в $NPL(n, 3)$ из условия $u > v$ следует $I_2(u) < I_2(v)$. \square

Пусть $G = K(q + \alpha_1, q + \alpha_2, q + \alpha_3)$, $n = q + \alpha_1 + q + \alpha_2 + q + \alpha_3$, $u = (q + \alpha_1, q + \alpha_2, q + \alpha_3)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — некоторые целые числа. В дальнейшем при доказательстве χ -определяемости графа G при некоторых значениях $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ всегда будем рассматривать некоторый χ -эквивалентный ему граф H и от противного предполагать, что H неизоморфен G .

Такой граф H обязан быть 3-хроматическим графом. Рассмотрим его 3-раскраску с долями размера n_1, n_2, n_3 , где $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ и $n = n_1 + n_2 + n_3$. В силу предложения 1 имеем $H = K(n_1, n_2, n_3) - E$ для некоторого непустого множества ребер E графа $K(n_1, n_2, n_3)$. Ясно, что $I_2(G) = I_2(H) = I_2(n_1, n_2, n_3) - |E|$, т. е. $I_2(n_1, n_2, n_3) = I_2(G) + |E|$. Следовательно, в графе $K(n_1, n_2, n_3)$ ребер больше, чем в G точно на $|E|$.

Положим $v = (n_1, n_2, n_3) = (q + \beta_1, q + \beta_2, q + \beta_3)$ для некоторых целых чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и $|E| = e$. Через E_{ij} для $i, j = 1, 2, 3$ обозначим множество ребер из E , соединяющих вершину из i -й компоненты с вершиной из j -й компоненты. Тогда $E = E_{12} \dot{\cup} E_{23} \dot{\cup} E_{31}$, где объединяемые множества попарно не пересекаются. Положим $e_{12} = |E_{12}|$, $e_{23} = |E_{23}|$, $e_{31} = |E_{31}|$. Ясно, что $e = e_{12} + e_{23} + e_{31}$



Используя ранее введенные обозначения, имеем $I_3(u) = I_3(v) - \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$, т. е.

$$\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)).$$

Аналогично имеем $I_4(u) = I_4(v) + \eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4$, т. е.

$$\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = I_4(u) - I_4(v).$$

2. Основные результаты

Предложение 2. *Граф $G = K(q + 2, q, q - 1)$ является χ -определяемым при $q \geq 3$.*

Доказательство. Для графа H в данном случае выполняется $v = (q + 1, q + 1, q - 1)$ или $v = (q + 1, q, q)$.

1-й случай. Пусть $v = (q + 1, q + 1, q - 1)$. Тогда $e = 1$ и $\xi_2 = \xi_3 = 0$, поэтому $\xi_1 = -(I_3(u) - I_3(v)) = q - 1$ в силу леммы 2 [2]. Поскольку $\xi_1 = e_{12}(q - 1) + e_{23}(q + 1) + e_{31}(q + 1)$, отсюда вытекает $e_{12} = 1$ и $e_{23} = e_{31} = 0$. Тогда $\eta = \binom{q - 1}{2}$, $\eta_1 = q \cdot q$ и $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0$, поэтому с учетом леммы 2 имеем

$$\binom{q - 1}{2} - q^2 = I_4(u) - I_4(v) = -2q + 1.$$

Следовательно, $q^2 - q = 0$, т. е. $q = 0$ или $q = 1$, что невозможно.

2-й случай. Пусть $v = (q + 1, q, q)$. Тогда $e = 1 + 1 = 2$, $\xi_2 \leq 1$, $\xi_3 = 0$ и по лемме 2 [2] получаем $\xi_1 - \xi_2 = -(I_3(u) - I_3(v)) = (q - 1) + (q + 1) = 2q$. Кроме того, поскольку $\eta_3 = \eta_4 = 0$, имеем $\eta - \eta_1 + \eta_2 = I_4(u) - I_4(v) = -2q + 1 + q = -q + 1$.

Заметим, что сейчас e_{12} и e_{31} играют симметричные роли. Поэтому проведем классификацию возможных случаев по e_{23} (см. табл. 1). Воспользуемся также тем, что $\xi_1 = e_{12}q + e_{23}(q + 1) + e_{31}q$.

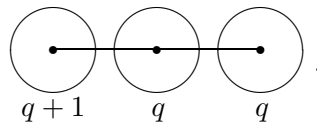
Т а б л и ц а 1

Случаи	e_{12}	e_{23}	e_{31}
1	0	2	0
2	1	1	0
3	2	0	0
4	1	0	1

Рассмотрим четыре случая.

2.1. Пусть $e_{23} = 2$ и $e_{12} = e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2(q + 1)$, поэтому $2q = \xi_1 - \xi_2 = 2(q + 1)$, что невозможно.

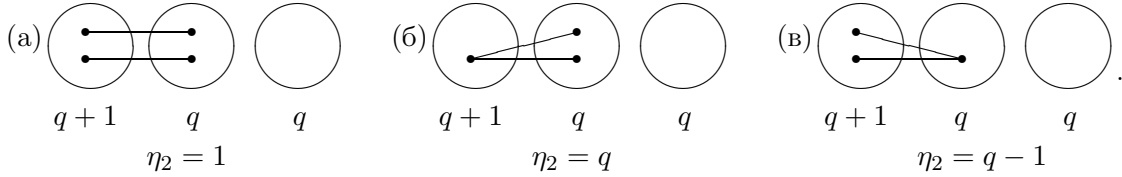
2.2. Пусть $e_{12} = e_{23} = 1$ и $e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = q + (q + 1) = 2q + 1$, поэтому $2q + 1 - \xi_2 = 2q$, т. е. $\xi_2 = 1$. Следовательно, ребра из E имеют вид



Тогда $\eta = \binom{q - 1}{2} + \binom{q}{2} = (q - 1)^2$, $\eta_1 = q(q - 1) + (q - 1)^2$, $\eta_2 = 0$, откуда получаем $-(q - 1) = \eta - \eta_1 + \eta_2 = (q - 1)^2 - (q - 1)(2q - 1)$. Сокращая на $q - 1$, выводим $q = 1$, что противоречиво.

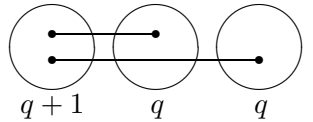
2.3. Пусть $e_{12} = 2$ и $e_{23} = e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2q$. Тогда $\eta = 2\binom{q}{2} = q(q-1)$, $\eta_1 = 2q(q-1)$ и $\eta_2 = -(q-1) - \eta + \eta_1 = -(q-1) - q(q-1) + 2q(q-1) = (q-1)^2$.

Рассмотрим три возможных подслучая и в каждом подсчитаем η_2 :



В любом из подслучаев выполняется $\eta_2 < q+1$. Поэтому $q^2 - 2q + 1 < q+1$, $q^2 - 3q < 0$, т. е. $0 < q < 3$, что противоречиво.

2.4. Пусть $e_{12} = e_{31} = 1$ и $e_{23} = 0$. В этом случае $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = q+q = 2q$, поэтому $2q - \xi_2 = 2q$, т. е. $\xi_2 = 0$. Следовательно, ребра из E имеют вид



Тогда $\eta = 2\binom{q}{2} = q(q-1)$, $\eta_1 = 2q(q-1)$, $\eta_2 = 0$, откуда получаем $-(q-1) = \eta - \eta_1 + \eta_2 = q(q-1) - 2q(q-1)$. Сокращая на $q-1$, выводим $q = 1$, что противоречиво. \square

Предложение 3. Граф $G = K(q+2, q+1, q-2)$ является χ -определяемым при $q \geq 4$.

Доказательство. Для графа H в данном случае разбиение v может совпадать с одним из следующих разбиений: $(q+2, q, q-1)$, $(q+1, q+1, q-1)$, $(q+1, q, q)$.

1-й случай. Пусть $v = (q+2, q, q-1)$. Тогда $e = 2$, $\xi_2 \leq 1$ и $\xi_3 = 0$. Поэтому $\xi_1 - \xi_2 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 2(q+2)$ в силу леммы 2 [2]. Воспользуемся также тем, что $\xi_1 = e_{12}(q-1) + e_{23}(q+2) + e_{31}q$.

Кроме того, поскольку $\eta_3 = \eta_4 = 0$, имеем $\eta - \eta_1 + \eta_2 = I_4(u) - I_4(v) = 5q+2$.

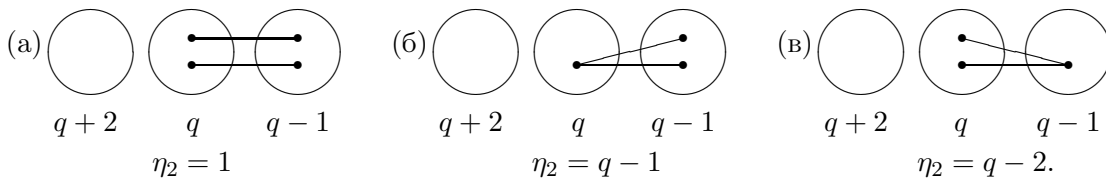
В табл. 2 укажем классификацию возможных случаев.

Т а б л и ц а 2

Случаи	e_{12}	e_{23}	e_{31}	$\xi_1 - \xi_2 = 2(q+2)$
1	2	0	0	$2(q-1) - 0 = 2(q+2)$
2	1	1	0	$(q-1) + (q+2) - \xi_2 = 2(q+2)$
3	1	0	1	$(q-1) + q - \xi_2 = 2(q+2)$
4	0	2	0	$2(q+2) - 0 = 2(q+2)$
5	0	1	1	$(q+2) + q - \xi_2 = 2(q+2)$
6	0	0	2	$2q - 0 = 2(q+2)$

Во всех случаях кроме 4 пришли к противоречию. Получаем $e_{12} = 0$, $e_{23} = 2$, $e_{31} = 0$ и $\xi_2 = 0$. Тогда $\eta = 2\binom{q+2}{2} = (q+2)(q+1)$, $\eta_1 = 2(q-1)(q-2)$ и $\eta_2 = 5q+2 - \eta + \eta_1 = 5q+2 - (q+2)(q+1) + 2(q-1)(q-2) = q^2 - 4q + 4$.

Рассмотрим три возможных подслучая и в каждом подсчитаем η_2 :



В любом из подслучаев выполняется $\eta_2 < q$. Поэтому $q^2 - 4q + 4 < q$, $q^2 - 5q + 4 < 0$, т. е. $1 < q < 4$, что противоречиво.

2-й случай. Пусть $v = (q + 1, q + 1, q - 1)$. Тогда $e = 2 + 1 = 3$, $\xi_2 \leq 2$, $\xi_3 \leq 1$ и в силу леммы 2 [2] получаем $\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = -(-2(q + 2) - 1(q - 1)) = 3(q + 1)$.

Кроме того, поскольку $\eta_4 = 0$, имеем $\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 = I_4(u) - I_4(v) = (5q + 2) + (-2q + 1) = 3(q + 1)$.

Заметим, что сейчас e_{23} и e_{31} играют симметричные роли. Поэтому проведем классификацию возможных случаев по e_{12} (см. табл. 3). Воспользуемся также тем, что $\xi_1 = e_{12}(q - 1) + e_{23}(q + 1) + e_{31}(q + 1)$.

Т а б л и ц а 3

Случай	e_{12}	e_{23}	e_{31}
1	3	0	0
2	2	1	0
3	1	2	0
4	1	1	1
5	0	3	0
6	0	2	1

2.1. Пусть $e_{12} = 3$ и $e_{23} = e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 3(q - 1)$, поэтому $3(q + 1) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 3(q - 1)$, что невозможно.

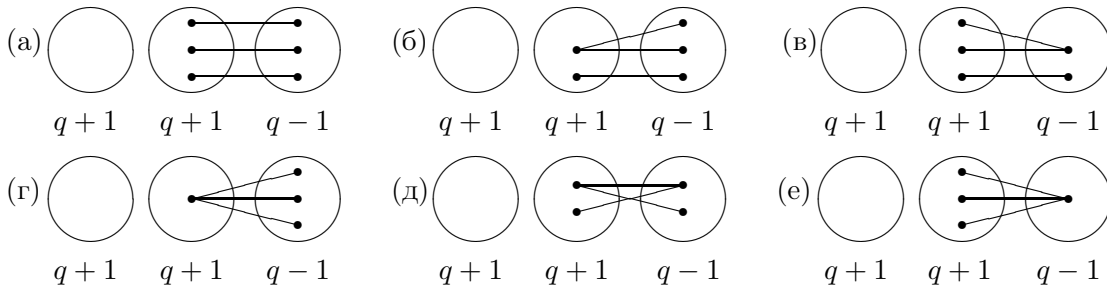
2.2. Пусть $e_{12} = 2$, $e_{23} = 1$ и $e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2(q - 1) + (q + 1) = 3q - 1$, поэтому $3(q + 1) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 3q - 1 - \xi_2$, что невозможно.

2.3. Пусть $e_{12} = 1$, $e_{23} = 2$ и $e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = (q - 1) + 2(q + 1) = 3q + 1$, поэтому $3(q + 1) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 3q + 1 - \xi_2$, что невозможно.

2.4. Пусть $e_{12} = e_{23} = e_{31} = 1$. В этом случае $\xi_1 = (q - 1) + (q + 1) + (q + 1) = 3q + 1$, поэтому $3(q + 1) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 3q + 1 - \xi_2 - 2\xi_3$, что невозможно.

2.5. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = 3$ и $e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 3(q + 1)$. Тогда $\eta = 3 \binom{q+1}{2} = \frac{3}{2}(q+1)q$, $\eta_1 = 3q(q-2)$ и $\eta_4 = 0$. Следовательно, $\eta_2 + 2\eta_3 = 3q + 3 - \eta + \eta_1 = 3q + 3 - \frac{3}{2}(q+1)q + 3q(q-2) = \frac{1}{2}(3q^2 - 9q + 6)$ или $2\eta_2 + 4\eta_3 = 3q^2 - 9q + 6$.

Рассмотрим шесть возможных подслучаев и в каждом подсчитаем $2\eta_2 + 4\eta_3 = x$:



$$(a) \quad x = 2 \binom{3}{2} + 4 \cdot 0 = 6,$$

$$(б) \quad x = 2(q + 2) + 4 \cdot 0 = 2(q + 2),$$

$$(в) \quad x = 2(q - 2 + 2) + 4 \cdot 0 = 2q,$$

$$(г) \quad x = 2 \binom{3}{2} q + 4 \cdot 0 = 6q,$$

$$(д) \quad x = 2(q - 1 + q - 3) + 4 \cdot 1 = 4(q - 1),$$

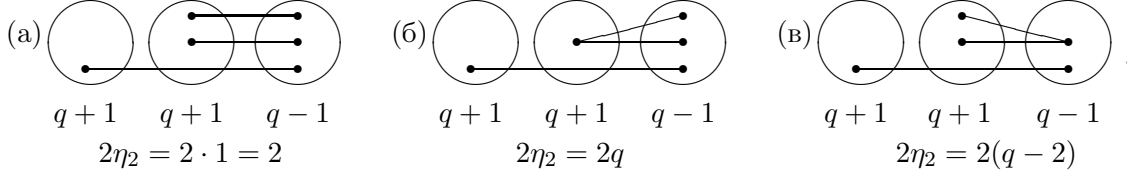
$$(е) \quad x = 2 \binom{3}{2} (q - 2) + 4 \cdot 0 = 6(q - 2).$$

В подслучае (г) имеем $3q^2 - 9q + 6 = 6q$, т. е. $q^2 - 5q + 2 = 0$ и поэтому $q = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$, что невозможно, так как q — целое число.

В остальных подслучаях всегда выполняется $2\eta_2 + 4\eta_3 < 6(q-1)$, так как $q \geq 4$. Отсюда следует $3q^2 - 9q + 6 < 6(q-1)$, т. е. $q^2 - 5q + 4 < 0$ и поэтому $1 < q < 4$, что противоречиво.

2.6. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = 2$ и $e_{31} = 1$. В этом случае $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2(q+1) + (q+1) = 3(q+1)$, поэтому $3(q+1) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 3(q+1) - \xi_2$ и $\xi_2 = 0$. Тогда $\eta = 2\binom{q+1}{2} + \binom{q+1}{2} = \frac{3}{2}(q+1)q$, $\eta_1 = 2q(q-2) + q(q-2) = 3q(q-2)$ и $\eta_3 = \eta_4 = 0$. Следовательно, $\eta_2 = 3q + 3 - \eta + \eta_1 = 3q + 3 - \frac{3}{2}(q+1)q + 3q(q-2) = \frac{1}{2}(3q^2 - 9q + 6)$ или $2\eta_2 = 3q^2 - 9q + 6$.

Рассмотрим три возможных подслучая и в каждом подсчитаем $2\eta_2$:

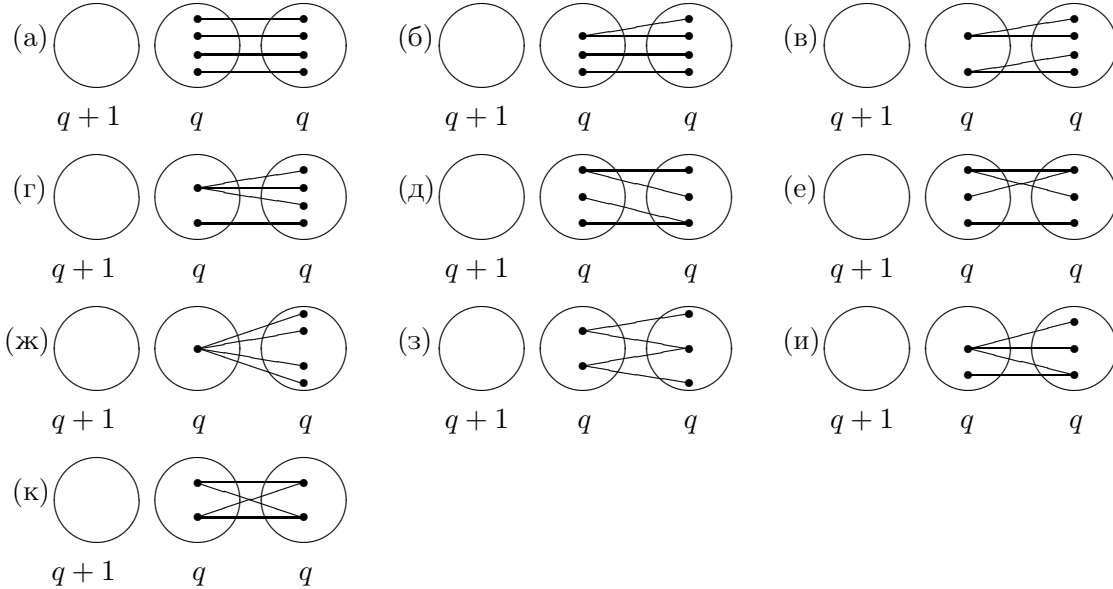


Во всех подслучаях имеем $2\eta_2 < 3(q-1)$. Поэтому $3q^2 - 9q + 6 < 3q - 3$, $q^2 - 4q + 3 < 0$, т. е. $1 < q < 3$, что противоречиво.

3-й случай. Пусть $v = (q+1, q, q)$. Тогда $e = 2 + 1 + 1 = 4$ и по лемме 2 [2] имеем $\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = -(-2(q+2) - 1(q-1) - 1(q+1)) = 4(q+1)$. Очевидно, $\xi_1 = e_{12}q + e_{23}(q+1) + e_{31}q$ и $4 = e_{12} + e_{23} + e_{31}$. Отсюда легко следует, что $e_{12} = e_{31} = 0$ и $e_{23} = 4$.

Теперь ясно, что $\eta = 4\binom{q+1}{2} = 2(q+1)q$, $\eta_1 = 4(q-1)^2$ и $\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = I_4(u) - I_4(v) - \eta + \eta_1 = (5q+2) + (-2q+1) + q - 2(q+1)q + 4(q-1)^2 = 2q^2 - 6q + 7$.

Рассмотрим следующие десять возможных случаев и в каждом из них подсчитаем $\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = x$:



$$(a) x = \binom{4}{2} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6,$$

$$(б) x = (q-1) + 5 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = q + 4,$$

$$(в) x = 2(q-1) + 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2q + 2,$$

$$(г) x = \binom{3}{2}(q-1) + 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 3q,$$

$$(д) x = 2(q-1) + 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2q + 2,$$

$$(е) x = 2(q-2) + 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2q + 1,$$

$$(ж) x = \binom{4}{2}(q-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6q - 6,$$

$$(з) x = 2(q-2) + (q-3) + 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 3q - 2,$$

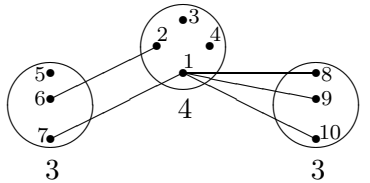
$$(и) x = (q-1) + 2(q-2) + (q-3) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4q - 4,$$

$$(к) x = 4(q-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 4q - 5.$$

В случае (ж) имеем $2q^2 - 6q + 7 = 6(q-1)$, т. е. $2q^2 - 12q + 13 = 0$ и поэтому $q = \frac{6 \pm \sqrt{10}}{2}$, что невозможно, так как q — целое число.

В остальных случаях всегда выполняется $x < 4q - 1$, так как $q \geq 4$. Следовательно, $2q^2 - 6q + 7 < 4q - 1$, т. е. $q^2 - 5q + 4 < 0$ и поэтому $1 < q < 4$, что противоречиво. \square

Лемма 5. *Граф $G = K(6, 2, 2)$ не является хроматически эквивалентным графу H , полученному из $K(4, 3, 3)$ отбрасыванием пяти ребер следующего вида:*



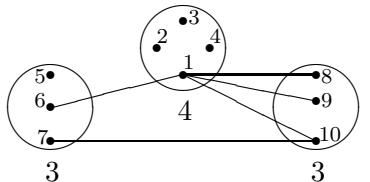
Доказательство. Очевидно (см. [2]), $pt(G, 4) = 2^5 + 2^1 + 2^1 - 3 = 33$.

Подсчитаем $pt(H, 4)$. Число разбиений на 4 коклики, одна из которых есть $\{1, 7\}$, равно 1. Число разбиений на 4 коклики, одна из которых содержит 1, строго содержится в множестве $\{1, 8, 9, 10\}$ и содержит не менее двух элементов, равно $2^3 - 2 = 6$. Число разбиений на 4 коклики, одна из которых есть $\{1, 8, 9, 10\}$ и элементы 6 и 2 лежат в разных кокликах, равно $pt(K(3, 3), 3) = 2^2 + 2^2 - 2 = 6$. Число разбиений на 4 коклики, одна из которых есть $\{2, 6\}$, равно 2. Они имеют следующий вид:

$$\{5, 7\}, \{6, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 8, 9, 10\} \quad \text{и} \quad \{5, 7\}, \{6, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{8, 9, 10\}.$$

Таким образом, $pt(H, 4) = pt(K(4, 3, 3), 4) + 1 + 6 + 6 + 2 = 2^3 + 2^2 + 2^2 - 3 + 15 = 28$. Итак, $pt(G, 4) \neq pt(H, 4)$. Отсюда следует заключение леммы. \square

Лемма 6. *Граф $G = K(6, 2, 2)$ не является хроматически эквивалентным графу H , полученному из $K(4, 3, 3)$ отбрасыванием пяти ребер следующего вида:*



Доказательство. Как замечено ранее, $pt(G, 4) = 33$.

Подсчитаем $pt(H, 4)$. Число разбиений на 4 коклики, одна из которых есть $\{1, 6\}$, равно 1. Число разбиений на 4 коклики, одна из которых содержит 1, строго содержится в множестве $\{1, 8, 9, 10\}$ и содержит не менее двух элементов, а элементы 7 и 10 лежат в разных кокликах, равно $2^3 - 2 = 6$. Число разбиений на 4 коклики, одна из которых есть $\{1, 8, 9, 10\}$, равно $pt(K(3, 3), 3) = 2^2 + 2^2 - 2 = 6$. Число разбиений на 4 коклики, одна из которых есть $\{7, 10\}$, равно 2. Они имеют следующий вид:

$$\{5, 6\}, \{7, 10\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 8, 9\} \quad \text{и} \quad \{5, 6\}, \{7, 10\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{8, 9\}.$$

Таким образом, $pt(H, 4) = pt(K(4, 3, 3), 4) + 1 + 6 + 6 + 2 = 2^3 + 2^2 + 2^2 - 3 + 15 = 28$. Итак, $pt(G, 4) \neq pt(H, 4)$. Отсюда следует заключение леммы. \square

Предложение 4. Граф $G = K(q+3, q-1, q-1)$ является χ -определяемым при $q \geq 3$.

Доказательство. Для графа H в данном случае разбиение v может совпадать с одним из следующих разбиений: $(q+2, q+1, q-2)$, $(q+2, q, q-1)$, $(q+1, q+1, q-1)$, $(q+1, q, q)$.

1-й случай. Пусть $v = (q+2, q+1, q-2)$. Тогда $e = 3 - 2 = 1$ и $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Поэтому в силу леммы 2 [2] имеем $\xi_1 = -(I_3(u) - I_3(v)) = -(I_3(q+3, q-1, q-1) - I_3(q+2, q, q-1) - (I_3(q+2, q+1, q-2) - I_3(q+2, q, q-1))) = -((-3)(q-1) - (-2)(q+2)) = q-7$. С другой стороны, в силу $e = 1$ число $\xi_1 = e_{12}(q-2) + e_{23}(q+2) + e_{31}(q+1)$ равно одному из чисел $q-2$, $q+2$, $q+1$, что невозможно.

2-й случай. Пусть $v = (q+2, q, q-1)$. Тогда $e = 3$, $\xi_2 \leq 2$, $\xi_3 \leq 1$ и $\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 3(q-1)$. Очевидно, $\xi_1 = e_{12}(q-1) + e_{23}(q+2) + e_{31}q$.

Кроме того, поскольку $\eta_4 = 0$, мы имеем $\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 = I_4(u) - I_4(v) = -6q + 6$.

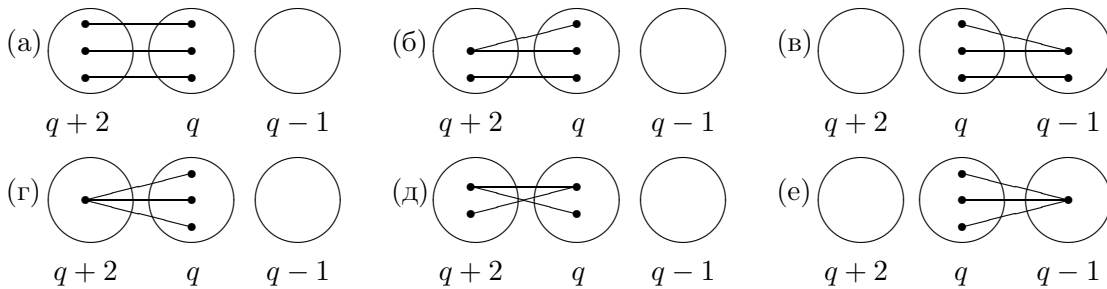
В табл. 4 укажем классификацию возможных случаев.

Т а б л и ц а 4

Случаи	e_{12}	e_{23}	e_{31}
1	3	0	0
2	2	1	0
3	2	0	1
4	1	2	0
5	1	1	1
6	1	0	2
7	0	3	0
8	0	2	1
9	0	1	2
10	0	0	3

2.1. Пусть $e_{12} = 3$ и $e_{23} = e_{31} = 0$. В этом случае $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 3(q-1)$. Тогда $\eta = 3 \binom{q-1}{2} = \frac{3}{2}(q^2 - 3q + 2)$, $\eta_1 = 3(q+1)(q-1)$ и $\eta_2 + 2\eta_3 = -6(q-1) - \eta + \eta_1 = -6(q-1) - \frac{1}{2}(3q^2 - 9q + 6) + (3q^2 - 3)$. Получаем $2\eta_2 + 4\eta_3 = 3q^2 - 3q$.

Рассмотрим шесть возможных подслучаев и в каждом подсчитаем $2\eta_2 + 4\eta_3 = x$:



$$(a) \quad x = 2 \cdot \binom{3}{2} + 4 \cdot 0 = 6,$$

$$(б) \quad x = 2(q+1+2) + 4 \cdot 0 = 2q + 6,$$

$$(в) \quad x = 2(q-1+2) + 4 \cdot 0 = 2q + 2,$$

$$(г) \quad x = 2 \cdot \binom{3}{2}(q+1) + 4 \cdot 0 = 6q + 6,$$

$$(д) \quad x = 2(q+q-2) + 4 \cdot 1 = 4q,$$

$$(е) \quad x = 2 \cdot \binom{3}{2}(q-1) + 4 \cdot 0 = 6q - 6.$$

В подслучае (г) имеем $6(q+1) = 3q^2 - 3q$, поэтому $q^2 - 3q - 2 = 0$ и $q = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, что невозможно, так как q — целое число.

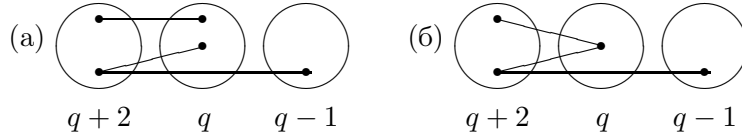
В остальных подслучаях имеем $x < 6q$. Поэтому $3q^2 - 3q < 6q$, откуда следует $q^2 - 3q < 0$, т. е. $0 < q < 3$, что невозможно.

2.2. Пусть $e_{12} = 2, e_{23} = 1, e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2(q-1) + (q+2) = 3q$, поэтому $3q - \xi_2 = 3q - 3$. Следовательно, $\xi_2 = 3$, что невозможно.

2.3. Пусть $e_{12} = 2, e_{23} = 0, e_{31} = 1$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2(q-1) + q = 3q - 2$, поэтому $3q - 2 - \xi_2 = 3q - 3$, т. е. $\xi_2 = 1$.

Кроме того, имеем $\eta_1 = 2(q+1)(q-1) + (q+1)(q-2) = 3q^2 - q - 4, \eta_3 = \eta_4 = 0$ и $\eta + \eta_2 = -6q + 6 + \eta_1 = -6q + 6 + 3q^2 - q - 4 = 3q^2 - 7q + 2$.

Рассмотрим два возможных подслучая и в каждом подсчитаем $\eta + \eta_2 = x$:



$$(a) \quad x = \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(3q^2 - 11q + 12),$$

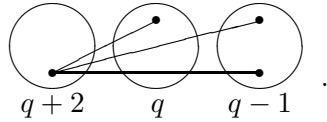
$$(б) \quad x = \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + (q-1) = \frac{1}{2}(3q^2 - 9q + 8).$$

В любом из подслучаев $\eta + \eta_2 < \frac{1}{2}(3q^2 - 8q + 13)$. Следовательно, $3q^2 - 7q + 2 < \frac{1}{2}(3q^2 - 8q + 13)$, т. е. $q^2 - 2q - 3 < 0$. Отсюда получаем $-1 < q < 3$, что невозможно.

2.4. Пусть $e_{12} = 1, e_{23} = 2, e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = (q-1) + 2(q+2) = 3q + 3$, поэтому $3q + 3 - \xi_2 = 3q - 3$. Следовательно, $\xi_2 = 6$, что невозможно.

2.5. Пусть $e_{12} = e_{23} = e_{31} = 1$. Здесь $\xi_1 = (q-1) + (q+2) + q = 3q + 1$, поэтому $3q + 1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 3q - 3$. Следовательно, $\xi_2 + 2\xi_3 = 4$, что, как легко видеть, невозможно.

2.6. Пусть $e_{12} = 1, e_{23} = 0, e_{31} = 2$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = (q-1) + 2q = 3q - 1$, поэтому $3q - 1 - \xi_2 = 3q - 3$, т. е. $\xi_2 = 2$. Тогда ребра из E имеют вид



$$\text{Поэтому } \eta = \binom{q-3}{2} + 2\binom{q-1}{2} = \frac{1}{2}(3q^2 - 13q + 16), \eta_1 = (q+1)(q-1) + 2(q+1)(q-2) = 3q^2 - 2q -$$

$$5, \eta_2 = q+1, \eta_3 = 0, \text{ откуда получаем } -6q + 6 = \eta - \eta_1 + \eta_2 = \frac{1}{2}(3q^2 - 13q + 16) - (3q^2 - 2q - 5) + (q+1).$$

Далее, $-12q + 12 = -3q^2 - 7q + 28, 3q^2 - 5q - 16 = 0$, выводим $q = \frac{5 \pm \sqrt{217}}{6}$, что невозможно, так как q — целое число.

2.7. Пусть $e_{12} = 0, e_{23} = 3, e_{31} = 0$. Здесь $\xi_2 = \xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 3(q+2)$, поэтому $3q + 6 = 3q - 3$, что невозможно.

2.8. Пусть $e_{12} = 0, e_{23} = 2, e_{31} = 1$. Здесь $\xi_3 = 0, \xi_1 = 2(q+2) + q = 3q + 4$, поэтому $3q + 4 - \xi_2 = 3q - 3$. Следовательно, $\xi_2 = 7$, что невозможно.

2.9. Пусть $e_{12} = 0, e_{23} = 1, e_{31} = 2$. Здесь $\xi_3 = 0, \xi_1 = (q+2) + 2q = 3q + 2$, поэтому $3q + 2 - \xi_2 = 3q - 3$. Следовательно, $\xi_2 = 5$, что невозможно.

2.10. Пусть $e_{12} = e_{23} = 0, e_{31} = 3$. Здесь $\xi_2 = \xi_3 = 0, \xi_1 = 3q$, поэтому $3q = 3q - 3$, что невозможно.

3-й случай. Пусть $v = (q+1, q+1, q-1)$. Тогда $e = 3+1 = 4$ и $\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 3(q-1) + (q-1) = 4(q-1)$.

Кроме того, мы имеем $\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = I_4(u) - I_4(v) = (-6q + 6) + (-2q + 1) = -8q + 7$.

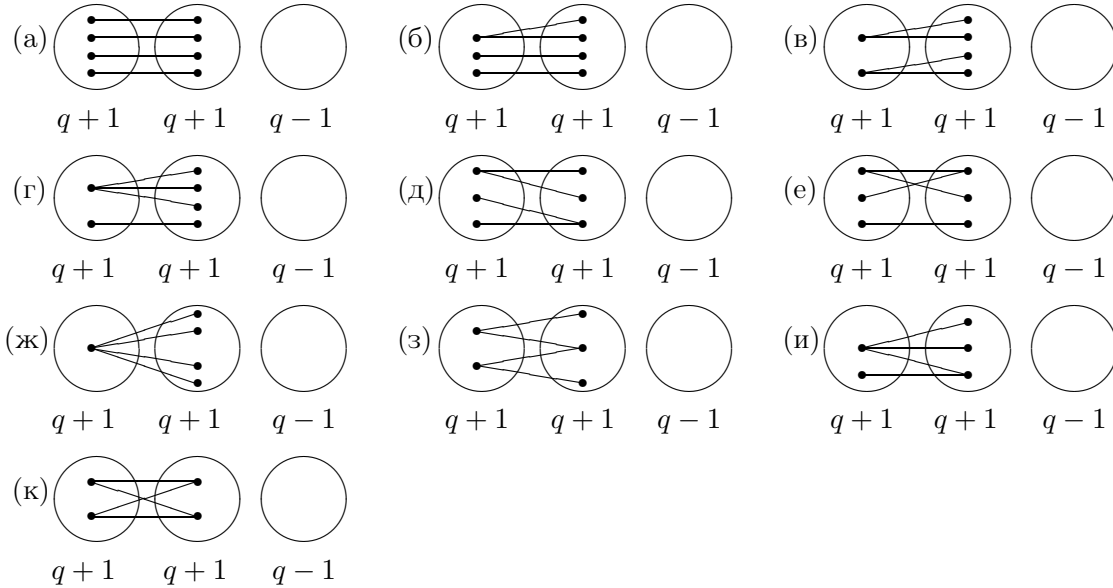
Заметим, что сейчас e_{23} и e_{31} играют симметричные роли. Поэтому проведем классификацию возможных случаев по e_{12} (см. табл. 5). Воспользуемся также тем, что $\xi_1 = e_{12}(q-1) + e_{23}(q+1) + e_{31}(q+1)$, $\xi_2 \leq 4$, $\xi_3 \leq 1$.

Т а б л и ц а 5

Случай	e_{12}	e_{23}	e_{31}
1	4	0	0
2	3	1	0
3	2	2	0
4	2	1	1
5	1	3	0
6	1	2	1
7	0	4	0
8	0	3	1
9	0	2	2

3.1. Пусть $e_{12} = 4$, $e_{23} = e_{31} = 0$. Тогда $\eta = 4 \binom{q-1}{2}$, $\eta_1 = 4q^2$ и $\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = -8q + 7 - \eta + \eta_1 = -8q + 7 - 2(q-1)(q-2) + 4q^2 = 2q^2 - 2q + 3$.

Рассмотрим десять возможных подслучаев и в каждом из них подсчитаем $\eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = x$.



$$(a) x = \binom{4}{2} + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6,$$

$$(б) x = q + 5 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = q + 5,$$

$$(в) x = 2q + 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2q + 4,$$

$$(г) x = \binom{3}{2} q + 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 3q + 3,$$

$$(д) x = 2q + 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2q + 4,$$

$$(е) x = 2(q-1) + 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2q + 3,$$

$$(ж) x = \binom{4}{2} q + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6q,$$

$$(з) x = 2(q-1) + (q-2) + 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 3q + 1,$$

$$(и) x = q + 2(q-1) + (q-2) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4q,$$

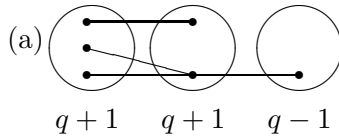
$$(к) x = 4(q-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 4q - 1.$$

В подслучае (ж) получаем $6q = 2q^2 - 2q + 3$, откуда следует $q = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$, что невозможно, так как q — целое число.

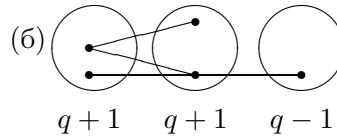
В остальных подслучаях имеем $x < 4q + 3$, т. е. $2q^2 - 2q + 3 < 4q + 3$ и $q^2 - 3q < 0$. Откуда следует $0 < q < 3$, что противоречиво.

3.2. Пусть $e_{12} = 3$, $e_{23} = 1$ и $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 3(q-1) + (q+1) = 4q-2$, откуда вытекает $4q-2 - \xi_2 = 4q-4$, т. е. $\xi_2 = 2$. Тогда $\eta = \binom{q-1}{2} + 2\binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} = (q-1)(q-2) + (q-2)(q-3) = 2q^2 - 8q + 8$, так как в силу $\xi_2 = 2$ одно ребро из E_{23} смежно точно с двумя ребрами из E_{12} , $\eta_1 = 3q^2 + q(q-2) = 4q^2 - 2q$, $\eta_4 = 0$ и $\eta_2 + 2\eta_3 = -8q + 7 - \eta + \eta_1 = -8q + 7 - (2q^2 - 8q + 8) + (4q^2 - 2q) = 2q^2 - 2q - 1$.

Рассмотрим два возможных подслучая и в каждом из них подсчитаем $\eta_2 + 2\eta_3 = x$:



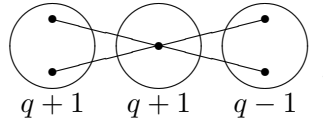
$$x = q + 2 + 2 \cdot 0 = q + 2$$



$$x = 2(q-1) + 2 \cdot 1 = 2q.$$

В обоих подслучаях имеем $x < 4q - 5$, поэтому $2q^2 - 2q - 1 < 4q - 5$, $q^2 - 3q + 2 < 0$. Отсюда следует $1 < q < 2$, что противоречиво.

3.3. Пусть $e_{12} = e_{23} = 2$ и $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2(q-1) + 2(q+1) = 4q$, откуда $4q - \xi_2 = 4q - 4$, т. е. $\xi_2 = 4$. Тогда ребра из E имеют вид



Поэтому $\eta = 2\binom{q-3}{2} + 2\binom{q-1}{2} = (q-3)(q-4) + (q-1)(q-2) = 2q^2 - 10q + 14$, $\eta_1 = 2q^2 + 2q(q-2) = 4q^2 - 4q$, $\eta_2 = 2q$. Следовательно, $-8q + 7 = \eta - \eta_1 + \eta_2 = (2q^2 - 10q + 14) - (4q^2 - 4q) + 2q$, $2q^2 - 4q - 7 = 0$ и $q = \frac{2 \pm 3\sqrt{2}}{2}$, что невозможно, так как q — целое число.

3.4. Пусть $e_{12} = 2$, $e_{23} = e_{31} = 1$. Здесь $\xi_1 = 2(q-1) + (q+1) + (q+1) = 4q$, поэтому $4q - \xi_2 - 2\xi_3 = 4q - 4$. Следовательно, $\xi_2 + 2\xi_3 = 4$, что, как легко видеть, невозможно.

3.5. Пусть $e_{12} = 1$, $e_{23} = 3$, $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = (q-1) + 3(q+1) = 4q + 2$, поэтому $4q + 2 - \xi_2 = 4q - 4$. Следовательно, $\xi_2 = 6$, что невозможно.

3.6. Пусть $e_{12} = 1$, $e_{23} = 2$, $e_{31} = 1$. Здесь $\xi_1 = (q-1) + 2(q+1) + (q+1) = 4q + 2$, поэтому $4q + 2 - \xi_2 - 2\xi_3 = 4q - 4$. Следовательно, $\xi_2 + 2\xi_3 = 6$, что, как легко видеть, невозможно.

3.7. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = 4$, $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_2 = \xi_3 = 0$, $\xi_1 = 4(q+1)$, поэтому $4q + 4 = 4q - 4$, что невозможно.

3.8. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = 3$, $e_{31} = 1$. Здесь $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = 3(q+1) + (q+1) = 4q + 4$, поэтому $4q + 4 - \xi_2 = 4q - 4$. Следовательно, $\xi_2 = 8$, что невозможно.

3.9. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = e_{31} = 2$. Здесь $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = 2(q+1) + 2(q+1) = 4q + 4$, поэтому $4q + 4 - \xi_2 = 4q - 4$. Следовательно, $\xi_2 = 8$, что невозможно.

4-й случай. Пусть $v = (q+1, q, q)$. Тогда $e = 3 + 1 + 1 = 5$ и $\xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 = -(I_3(u) - I_3(v)) = 3(q-1) + (q-1) + (q+1) = 5q - 3$.

Кроме того, мы имеем $\eta - \eta_1 + \eta_2 + 2\eta_3 + 3\eta_4 = I_4(u) - I_4(v) = (-6q + 6) + (-2q + 1) + q = -7q + 7$.

Заметим, что сейчас e_{12} и e_{31} играют симметричные роли. Поэтому проведем классификацию возможных случаев по e_{23} (см. табл. 6). Воспользуемся также тем, что $\xi_1 = e_{12}q + e_{23}(q+1) + e_{31}q$, $\xi_2 \leq 6$, $\xi_3 \leq 2$.

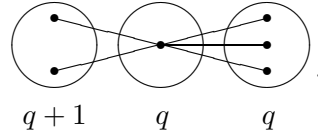
Т а б л и ц а 6

Случаи	e_{12}	e_{23}	e_{31}
1	0	5	0
2	1	4	0
3	2	3	0
4	1	3	1
5	3	2	0
6	2	2	1
7	4	1	0
8	3	1	1
9	2	1	2
10	5	0	0
11	4	0	1
12	3	0	2

4.1. Пусть $e_{12} = 0$, $e_{23} = 5$, $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_2 = \xi_3 = 0$, $\xi_1 = 5(q+1)$, поэтому $5q+5 = 5q-3$, что невозможно.

4.2. Пусть $e_{12} = 1$, $e_{23} = 4$, $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = q + 4(q+1) = 5q+4$, поэтому $5q+4 - \xi_2 = 5q-3$. Следовательно, $\xi_2 = 7$, что невозможно.

4.3. Пусть $e_{12} = 2$, $e_{23} = 3$ и $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$ и $\xi_1 = 2q + 3(q+1) = 5q+3$, откуда $5q+3 - \xi_2 = 5q-3$, т. е. $\xi_2 = 6$. Тогда ребра из E имеют вид



Поэтому $\eta = 2\binom{q-3}{2} + 3\binom{q-1}{2} = (q-3)(q-4) + \frac{3}{2}(q-1)(q-2) = \frac{1}{2}(5q^2 - 23q + 30)$, $\eta_1 = 2q(q-1) + 3(q-1)^2 = 5q^2 - 8q + 3$, $\eta_2 = (q-1) + 3(q-1) = 4q-4$, $\eta_3 = \eta_4 = 0$. Следовательно, $-7q+7 = \eta - \eta_1 + \eta_2 = \frac{1}{2}(5q^2 - 23q + 30) - (5q^2 - 8q + 3) + (4q-4)$, $-14q+14 = -5q^2 + q + 16$, $5q^2 - 15q - 2 = 0$ и $q = \frac{15 \pm \sqrt{265}}{10}$, что невозможно, так как q — целое число.

4.4. Пусть $e_{12} = 1$, $e_{23} = 3$, $e_{31} = 1$. Здесь $\xi_1 = q + 3(q+1) + q = 5q+3$, поэтому $5q+3 - \xi_2 - 2\xi_3 = 5q-3$. Следовательно, $\xi_2 + 2\xi_3 = 6$, что, как легко видеть, невозможно.

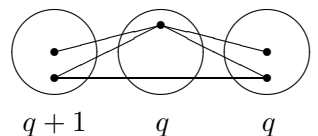
4.5. Пусть $e_{12} = 3$, $e_{23} = 2$, $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = 3q + 2(q+1) = 5q+2$, поэтому $5q+2 - \xi_2 = 5q-3$. Следовательно, $\xi_2 = 5$, что невозможно, так как при таком распределении ребер $\xi_2 = 6$ или $\xi_2 \leq 4$.

4.6. Пусть $e_{12} = e_{23} = 2$, $e_{31} = 1$. Здесь $\xi_1 = 2q + 2(q+1) + q = 5q+2$, поэтому $5q+2 - \xi_2 - 2\xi_3 = 5q-3$. Следовательно, $\xi_2 + 2\xi_3 = 5$. Из последнего равенства следует, что ξ_2 нечетно и либо $\xi_2 = 3$, $\xi_3 = 1$, либо $\xi_2 = 5$, $\xi_3 = 0$. Поскольку, если $\xi_2 = 1$, то $\xi_3 = 2$, что невозможно.

В этом случае $\eta_1 = 2q(q-1) + 2(q-1)^2 + q(q-1) = 5q^2 - 7q + 2$, $\eta_3 = \eta_4 = 0$, поэтому $\eta + \eta_2 = -7q+7 + \eta_1 = -7q+7 + 5q^2 - 7q + 2 = 5q^2 - 14q + 9$.

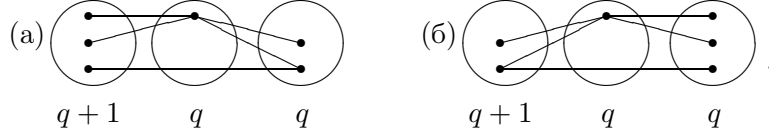
Рассмотрим два подслучая.

4.6.1. Пусть $\xi_2 = 3$ и $\xi_3 = 1$. Тогда ребра из E имеют вид



Поэтому $\eta = 2\binom{q-2}{2} + 2\binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} = (q-2)(q-3) + \frac{3}{2}(q-1)(q-2) = \frac{1}{2}(5q^2 - 19q + 18)$,
 $\eta_2 = (q-1) + (q-1) = 2q - 2$. Получаем $5q^2 - 14q + 9 = \eta + \eta_2 = \frac{1}{2}(5q^2 - 19q + 18) + 2q - 2$,
 $5q^2 - 13q + 4 = 0$ и $q = \frac{13 \pm \sqrt{89}}{10}$, что невозможно, так как q — целое число.

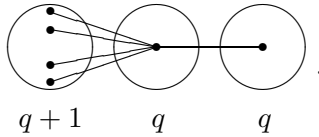
4.6.2. Пусть $\xi_2 = 5$ и $\xi_3 = 0$. Тогда возможны две ситуации по расположению ребер из E :



В случае (а) мы имеем $\eta = 2\binom{q-2}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} = \frac{1}{2}(5q^2 - 21q + 22)$,
 $\eta_2 = (q-1) + (q-1) = 2q - 2$. Отсюда следует $5q^2 - 14q + 9 = \eta + \eta_2 = \frac{1}{2}(5q^2 - 21q + 22) + 2q - 2$,
 $5q^2 - 11q = 0$ и $q = 0$ или $q = \frac{11}{5} < 3$, что невозможно.

В случае (б) мы имеем $\eta = \binom{q-2}{2} + \binom{q-3}{2} + 2\binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} = \frac{1}{2}(5q^2 - 21q + 24)$,
 $\eta_2 = (q-1) + (q-1) = 2q - 2$. Получаем $5q^2 - 14q + 9 = \eta + \eta_2 = \frac{1}{2}(5q^2 - 21q + 24) + 2q - 2$,
 $5q^2 - 11q - 2 = 0$ и $q = \frac{11 \pm \sqrt{161}}{10}$, что невозможно, так как q — целое число.

4.7. Пусть $e_{12} = 4$, $e_{23} = 1$, $e_{31} = 0$. Здесь $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = 4q + (q+1) = 5q + 1$, поэтому $5q + 1 - \xi_2 = 5q - 3$. Следовательно, $\xi_2 = 4$. Тогда ребра из E имеют вид



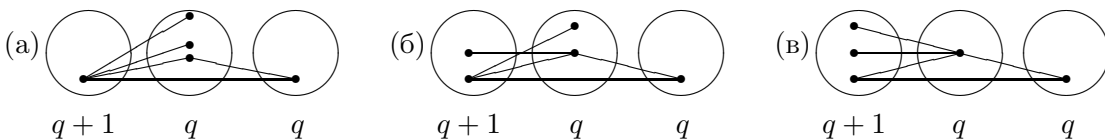
Поэтому $\eta = 4\binom{q-1}{2} + \binom{q-3}{2} = 2(q-1)(q-2) + \frac{1}{2}(q-3)(q-4) = \frac{1}{2}(5q^2 - 19q + 20)$,
 $\eta_1 = 4q(q-1) + (q-1)^2 = 5q^2 - 6q + 1$, $\eta_2 = \binom{4}{2}(q-1) = 6q - 6$. Учитывая, что $\eta_3 = \eta_4 = 0$,
получаем $-7q + 7 = \eta - \eta_1 + \eta_2 = \frac{1}{2}(5q^2 - 19q + 20) - (5q^2 - 6q + 1) + 6q - 6$, $5q^2 - 19q + 8 = 0$
и $q = \frac{19 \pm \sqrt{201}}{10}$, что невозможно, так как q — целое число.

4.8. Пусть $e_{12} = 3$, $e_{23} = e_{31} = 1$. Здесь $\xi_1 = 3q + (q+1) + q = 5q + 1$, поэтому $5q + 1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 5q - 3$. Следовательно, $\xi_2 + 2\xi_3 = 4$. Из последнего равенства следует, что ξ_2 четно и либо $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 1$, либо $\xi_2 = 4$, $\xi_3 = 0$ (ясно, что $\xi_3 < 2$).

В этом случае $\eta_1 = 3q(q-1) + (q-1)^2 + q(q-1) = 5q^2 - 6q + 1$, $\eta_4 = 0$, поэтому $\eta + \eta_2 + 2\eta_3 = -7q + 7 + \eta_1 = -7q + 7 + 5q^2 - 6q + 1 = 5q^2 - 13q + 8$.

Рассмотрим два подслучая.

4.8.1. Пусть $\xi_2 = 2$ и $\xi_3 = 1$. Рассмотрим три возможных случая и в каждом подсчитаем $\eta + \eta_2 + 2\eta_3 = x$:



$$(a) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} + \binom{q-3}{2} + \binom{3}{2} q + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 11q + 18),$$

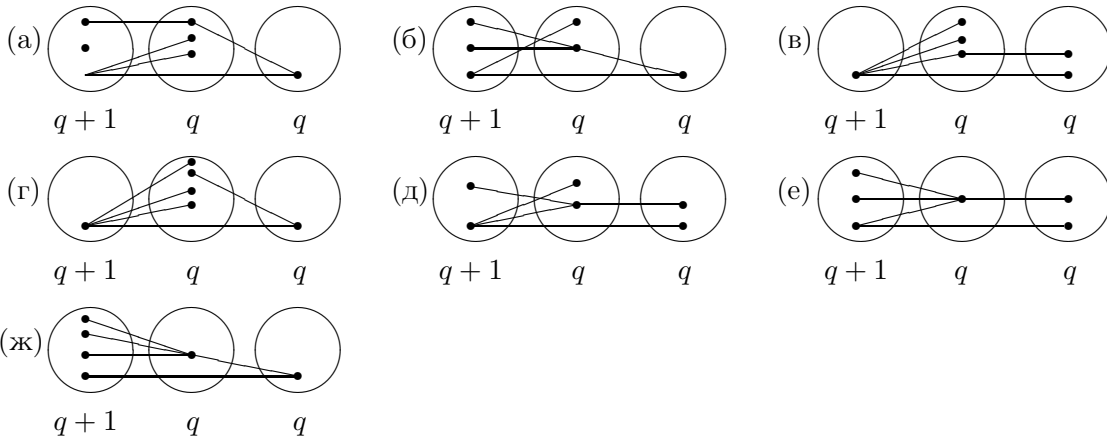
$$(б) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + (q-2) + (q-1) + 2 \cdot 1 = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 12),$$

$$(в) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + 3(q-1) + 2 \cdot 1 = \frac{1}{2}(5q^2 - 11q + 8).$$

В случае (а) получаем $5q^2 - 13q + 8 = \frac{1}{2}(5q^2 - 11q + 18)$, откуда следует $5q^2 - 15q - 2 = 0$ и $q = \frac{15 \pm \sqrt{265}}{10}$, что невозможно, так как q — целое число.

В остальных случаях имеем $\eta + \eta_2 + 2\eta_3 < \frac{1}{2}(5q^2 - 11q + 16)$, $5q^2 - 13q + 8 < \frac{1}{2}(5q^2 - 11q + 16)$, $q^2 - 3q < 0$. Откуда следует $0 < q < 3$, что противоречиво.

4.8.2. Пусть $\xi_2 = 4$ и $\xi_3 = 0$. Рассмотрим семь возможных случаев и в каждом подсчитаем $\eta + \eta_2 + 2\eta_3 = x$:



$$(a) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-3}{2} + (q+2) + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 17q + 24),$$

$$(б) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-2}{2} + (q-1) + 2 + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 17q + 20),$$

$$(в) x = 2 \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q}{2} + \binom{q-3}{2} + \binom{3}{2} q + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 22),$$

$$(г) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q}{2} + \binom{q-4}{2} + \binom{3}{2} q + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 26),$$

$$(д) x = 2 \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + (q-1 + q-2) + 2 \cdot 1 = \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 16),$$

$$(е) x = 2 \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{3}{2} (q-1) + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 12),$$

$$(ж) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-3}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{3}{2} (q-1) + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 14).$$

В случае (в) $5q^2 - 13q + 8 = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 22)$, откуда получаем $q = 3$ и приходим к противоречию в силу леммы 6.

В случае (г) получаем $5q^2 - 13q + 8 = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 26)$, откуда следует $5q^2 - 13q - 10 = 0$ и $q = \frac{13 \pm \sqrt{369}}{10}$, что невозможно, так как q — целое число.

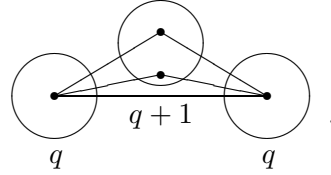
В остальных случаях имеем $\eta + \eta_2 + 2\eta_3 < \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 16)$, $5q^2 - 13q + 8 < \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 16)$, $5q^2 - 13q < 0$. Откуда следует $0 < q < \frac{13}{5} < 3$, что противоречиво.

4.9. Пусть $e_{12} = 2$, $e_{23} = 1$, $e_{31} = 2$. Здесь $\xi_1 = 2q + (q + 1) + 2q = 5q + 1$, поэтому $5q + 1 - \xi_2 - 2\xi_3 = 5q - 3$. Следовательно, $\xi_2 + 2\xi_3 = 4$. Из последнего равенства следует, что ξ_2 четно, откуда либо $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 2$, либо $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 1$, либо $\xi_2 = 4$, $\xi_3 = 0$.

В этом случае $\eta_1 = 2q(q - 1) + (q - 1)^2 + 2q(q - 1) = 5q^2 - 6q + 1$, $\eta_3 = \eta_4 = 0$, поэтому $\eta + \eta_2 = -7q + 7 + \eta_1 = -7q + 7 + 5q^2 - 6q + 1 = 5q^2 - 13q + 8$.

Рассмотрим три подслучая.

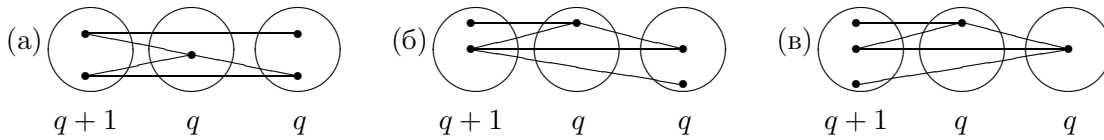
4.9.1. Пусть $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 2$. Тогда ребра из E имеют вид



Поэтому $\eta = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + 2\binom{q-1}{2} = \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 10)$, $\eta_2 = 2(q - 1) = 2q - 2$.

Получаем $5q^2 - 13q + 8 = \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 10) + 2q - 2$, $q^2 - 3q + 2 = 0$, откуда $q = 1$ и $q = 2$, что противоречиво.

4.9.2. Пусть $\xi_2 = 2$ и $\xi_3 = 1$. Рассмотрим три возможных случая и в каждом подсчитаем $\eta + \eta_2 = x$:



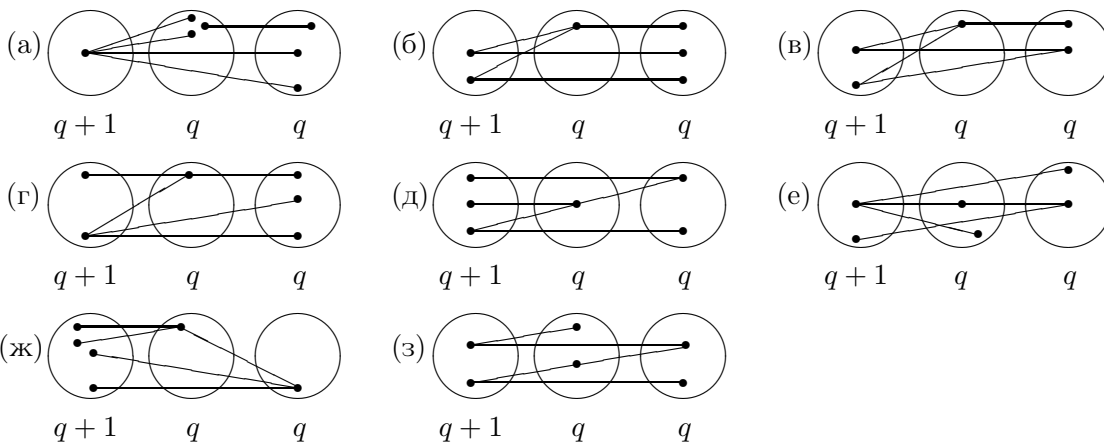
$$(a) \quad x = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + 1 + (q - 1) = \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 14),$$

$$(б) \quad x = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + q + (q - 1) = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 12),$$

$$(в) \quad x = 2\binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + 2\binom{q-1}{2} + 2(q - 1) = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 10).$$

Во всех случаях имеем $\eta + \eta_2 < \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 16)$, $5q^2 - 13q + 8 < \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 16)$, $5q^2 - 13q < 0$. Откуда следует $0 < q < \frac{13}{5} < 3$, что противоречиво.

4.9.3. Пусть $\xi_2 = 4$ и $\xi_3 = 0$. Рассмотрим восемь возможных случаев и в каждом подсчитаем $\eta + \eta_2 = x$:



$$(a) \quad x = 2\binom{q-2}{2} + \binom{q+1}{2} + 2\binom{q-2}{2} + 2q = \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 24),$$

$$(б) x = 2 \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + 2 \binom{q-1}{2} + (q-1) + 1 = \frac{1}{2}(5q^2 - 17q + 18),$$

$$(в) x = 2 \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + 2 \binom{q-1}{2} + 2(q-1) = \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 14),$$

$$(г) x = \binom{q-1}{2} + \binom{q-3}{2} + \binom{q-1}{2} + 2 \binom{q-1}{2} + (q-1) + q = \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 18),$$

$$(д) x = \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-2}{2} + 2 \binom{q-1}{2} + (q-1) + 1 = \frac{1}{2}(5q^2 - 17q + 18),$$

$$(е) x = \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + q + 1 = \frac{1}{2}(5q^2 - 17q + 20),$$

$$(ж) x = 2 \binom{q-1}{2} + \binom{q-3}{2} + 2 \binom{q-1}{2} + 2(q-1) = \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 16),$$

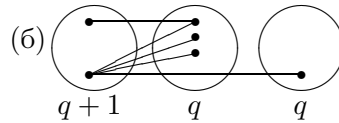
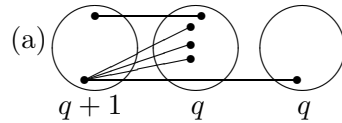
$$(з) x = \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + 2 = \frac{1}{2}(5q^2 - 19q + 22).$$

Во всех случаях имеем $\eta + \eta_2 < \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 28)$, $5q^2 - 13q + 8 < \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 28)$, $5q^2 - 11q - 12 < 0$. Откуда следует $-\frac{4}{5} < q < 3$, что противоречиво.

4.10. Пусть $e_{12} = 5$, $e_{23} = e_{31} = 0$. Здесь $\xi_2 = \xi_3 = 0$, $\xi_1 = 5q$, поэтому $5q = 5q - 3$, что невозможно.

4.11. Пусть $e_{12} = 4$, $e_{23} = 0$, $e_{31} = 1$. Здесь $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = 4q + q = 5q$, поэтому $5q - \xi_2 = 5q - 3$. Следовательно, $\xi_2 = 3$. Тогда $\eta = \binom{q}{2} + 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-3}{2} = \frac{1}{2}(5q^2 - 17q + 18)$, так как в силу условия $\xi_2 = 3$ одно ребро из E_{31} смежно с тремя ребрами из E_{12} , $\eta_1 = 4q(q-1) + q(q-1) = 5q^2 - 5q$, $\eta_4 = 0$ и $\eta_2 + 2\eta_3 = -7q + 7 - \eta + \eta_1 = -7q + 7 - \frac{1}{2}(5q^2 - 17q + 18) + (5q^2 - 5q) = \frac{1}{2}(5q^2 - 7q - 4)$.

Рассмотрим два возможных случая и в каждом подсчитаем $\eta_2 + 2\eta_3 = x$:



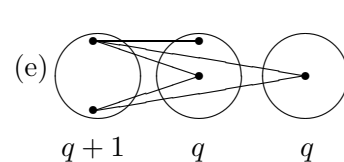
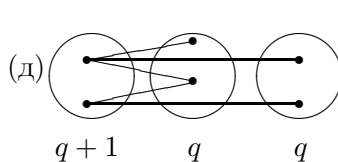
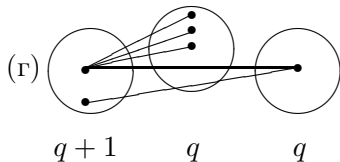
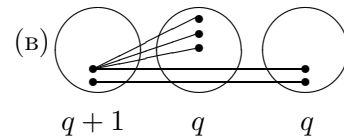
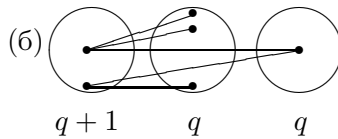
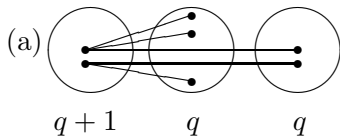
$$x = \binom{3}{2}q + 3 + 2 \cdot 0 = 3q + 3 \quad x = q + 2(q-1) + (q-3) + 2 \cdot 2 = 4q - 1.$$

В случае (а) получаем $\frac{1}{2}(5q^2 - 7q - 4) = 3q + 3$, откуда следует $5q^2 - 13q - 10 = 0$ и $q = \frac{13 \pm \sqrt{369}}{10}$, что невозможно, так как q — целое число.

В случае (б) получаем $\frac{1}{2}(5q^2 - 7q - 4) = 4q - 1$, откуда следует $5q^2 - 15q - 2 = 0$ и $q = \frac{15 \pm \sqrt{265}}{10}$, что невозможно, так как q — целое число.

4.12. Пусть $e_{12} = 3$, $e_{23} = 0$, $e_{31} = 2$. Здесь $\xi_3 = 0$, $\xi_1 = 3q + 2q = 5q$, поэтому $5q - \xi_2 = 5q - 3$. Следовательно, $\xi_2 = 3$. Тогда $\eta_1 = 3q(q-1) + 2q(q-1) = 5q^2 - 5q$, $\eta_4 = 0$ и $\eta + \eta_2 + 2\eta_3 = -7q + 7 + \eta_1 = -7q + 7 + (5q^2 - 5q) = 5q^2 - 12q + 7$.

Рассмотрим шесть возможных случаев и в каждом подсчитаем $\eta + \eta_2 + 2\eta_3 = x$:



$$(a) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + (1+q+2) + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 15q + 20),$$

$$(б) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + (q-1) + q + 2 + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 16),$$

$$(в) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-3}{2} + \binom{q}{2} + \binom{3}{2}q + 1 + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 11q + 20),$$

$$(г) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-3}{2} + \binom{q}{2} + \binom{3}{2}q + (q-1) + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 9q + 16),$$

$$(д) x = 3 \binom{q-1}{2} + \binom{q-2}{2} + \binom{q-1}{2} + (q-1) + (q-2) + 1 + 2 \cdot 0 = \frac{1}{2}(5q^2 - 13q + 14),$$

$$(e) x = \binom{q-2}{2} + 4 \binom{q-1}{2} + (q-1) + (q-2) + (q-1) + 2 \cdot 1 = \frac{1}{2}(5q^2 - 11q + 10).$$

В случае (в) $5q^2 - 12q + 7 = \frac{1}{2}(5q^2 - 11q + 20)$, откуда получаем $5q^2 - 13q - 6 = 0$ и $q = 3$ и приходим к противоречию в силу леммы 5.

В случае (г) получаем $5q^2 - 12q + 7 = \frac{1}{2}(5q^2 - 9q + 16)$, откуда следует $5q^2 - 15q - 2 = 0$ и $q = \frac{15 \pm \sqrt{265}}{10}$, что невозможно, так как q — целое число.

В остальных случаях имеем $\eta + \eta_2 + 2\eta_3 < \frac{1}{2}(5q^2 - 11q + 14)$, $5q^2 - 12q + 7 < \frac{1}{2}(5q^2 - 11q + 14)$, $5q^2 - 13q < 0$. Откуда следует $0 < q < \frac{13}{5} < 3$, что противоречиво.

Предложение 4 доказано.

Теперь из теоремы и предложения 1 работы [2], а также предложений 2–4 данной работы, вытекает наша теорема ввиду строения $NPL(n, 3)$ при $r = 1$.

Высотой элемента в конечной решетке будем, как обычно, называть длину кратчайшей цепи (т. е. число ее звеньев) от данного элемента до наименьшего элемента решетки. Нашу теорему можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1. Пусть n — натуральное число такое, что $n \equiv 1 \pmod{3}$ и h — неотрицательное целое число ≤ 3 . Тогда любой полный трехдольный n -граф с неоднородными долями, имеющий высоту h в решетке $NPL(n, 3)$, является хроматически определяемым.

Иными словами, теорема утверждает, что при $r = 1$ графы, имеющие неоднородные доли и лежащие на четырех “нижних слоях” решетки $NPL(n, 3)$, хроматически определяются.

Отметим, что аналогичные утверждения при $r = 0$ и $r = 2$ будут рассмотрены в других работах автора.

Поступила 05.10.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
2. **Баранский В.А., Королева Т.А.** Хроматическая определяемость атомов в решетках полных многодольных графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 3. С. 22–29.
3. **Zhao H.** Chromaticity and adjoint polynomials of graphs. Zutphen: Wöhrmann Print Service, 2005.

УДК 514.17

ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕРЫ НЕВЫПУКЛОСТИ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ¹**П. Д. Лебедев**

Исследуется геометрия невыпуклых множеств. Рассматривается мера невыпуклости замкнутого множества, имеющая смысл угла. Приводятся алгоритмы вычисления меры невыпуклости для широкого класса множеств.

Введение

С помощью методов выпуклого анализа [1–3] и дифференциальной геометрии [4] исследуются свойства невыпуклых множеств и порожденных ими волновых фронтов. Изучаются свойства числовой характеристики α — меры невыпуклости [5] плоского множества. Вводится понятие α -множества, обобщающее понятие выпуклого множества (которое получает меру невыпуклости, равную нулю). Показаны различные подходы для аналитического и численного нахождения меры невыпуклости множества [6]. Установлена связь между характером невыпуклости множества и геометрией порожденных им волновых фронтов [7]. В работе использованы конструкции теории особенностей дифференцируемых отображений [8–13]. Полученные ранее результаты для множеств с гладкой границей [14] обобщаются на множества с границей, имеющей точки негладкости.

1. Постановка задачи**1.1. Характеристики невыпуклости**

Пусть M — замкнутое множество в евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 и $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$.

О п р е д е л е н и е 1. Под проекцией $\pi_M(z)$ точки z на множество M понимаем ближайшую к ней в евклидовой метрике точку из M .

Полагаем:

$\Omega_M(z) = \{\pi_M(z)\}$ — множество всех проекций точки z на M ,

$\text{conv } \Omega_M(z)$ — выпуклая оболочка множества $\Omega_M(z)$,

$\text{con}(\text{conv } \Omega_M(z) - z) = \{h = \lambda(s - z) : \lambda \geq 0, s \in \text{conv } \Omega_M(z)\}$ — конус в \mathbb{R}^2 , натянутый на $\text{conv } \Omega_M(z) - z$,

$H_M(z)$ — множество всевозможных пар (h_*, h^*) ненулевых векторов h_*, h^* из этого конуса, $\langle h_*, h^* \rangle$ — скалярное произведение векторов h_* и h^* ,

$(h_* \wedge h^*) = \arccos \frac{\langle h_*, h^* \rangle}{\|h_*\| \cdot \|h^*\|}$ — угол между векторами h_*, h^* .

О п р е д е л е н и е 2. Угловой характеристикой точки $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ относительно множества M назовем величину

$$\alpha_M(z) = \sup_{h_*, h^* \in H_M(z)} (h_* \wedge h^*) \in [0, \pi].$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 05-01-00601), гранта поддержки ведущих научных школ (НШ-8512.2006.1) и регионального гранта РФФИ/ПСО (проект 07-0196085).

Пример точки z с угловой характеристикой $\alpha_M(z)$ показан на рис. 1.

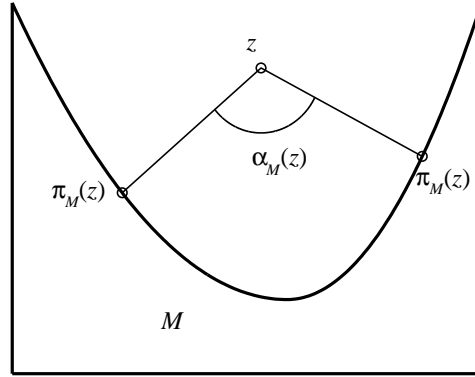


Рис. 1

О п р е д е л е н и е 3. Мерой невыпуклости множества M назовем величину

$$\alpha(M) = \sup_{z \in \mathbb{R}^2 \setminus M} \alpha_M(z).$$

Если найдется точка $z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ такая, что $\alpha_M(z^*) = \alpha(M)$, то будем говорить, что мера невыпуклости множества M достигается в точке z^* .

Замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^2$, которому поставлено в соответствие число $\alpha(M)$, назовем α -множеством. При данном определении все выпуклые множества получают меру невыпуклости, равную нулю, а все не односвязные — равную π .

Известно (см. [5]), что в общем случае $\alpha_M(z)$, $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$, является полунепрерывной сверху функцией, что существенным образом затрудняет вычисление меры невыпуклости множества. Точки z , в которых $\alpha_M(z) \neq 0$, являются точками негладкости волновых фронтов, порожденных множеством M в случае круговой индикатрисы скоростей распространения волны (т. е. волновой фронт совпадает с геометрическим местом точек, лежащих на равном расстоянии от M). Угол излома волнового фронта равен $\alpha_M(z)$. В частности, если точка z имеет ровно две проекции A_1 и A_2 на множество M , то предельное положение касательных к фронту в точке z слева и справа — это перпендикуляры к векторам $z - A_1$ и $z - A_2$ соответственно (см. [7, 11]). Возникающие при этом особенности (бифуркации и катастрофы) подробно изучались в работах [8, 9].

1.2. Биссектриса множества

Введем в рассмотрение понятие биссектрисы замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂M . Здесь и далее под кусочно-гладкой кривой понимаем кривую, непрерывно склеенную из графиков дважды дифференцируемых функций, причем множество точек склейки не имеет точек сгущения.

О п р е д е л е н и е 4. Биссектрисой $L(M)$ множества M называется множество всех точек из его дополнения до плоскости, которые имеют не менее двух проекций на множество M :

$$L(M) = \left\{ z \in (\mathbb{R}^2 \setminus M) : \exists A_1 = \pi_M(z), \exists A_2 = \pi_M(z) (A_1 \neq A_2) \right\}.$$

Данное определение обобщает понятие биссектрисы кривой, предложенное в работе [6]. Биссектриса является частным случаем множества симметрии [11]. Топологические особенности схожих многообразий (называемых “middle point set”, “medial axe”, “conflict set”) исследованы в работах ряда авторов, в частности В.Д. Седых (см. [12, 13]). Отметим, если M —

выпуклое множество, то из теоремы Моцкина (см. [1]) следует $L(M) = \emptyset$. А если M — невыпуклое множество, то $L(M) \neq \emptyset$. Из определения биссектрисы множества следует, что угловая характеристика всех ее точек отлична от нуля, а для всех точек из $\mathbb{R}^2 \setminus (L(M) \cup M)$ равна нулю. Таким образом задача нахождения супремума функции $\alpha_M(z)$ на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus M$ сводится к задаче построения биссектрисы (в общем случае состоящей из объединения одномерных и нульмерных многообразий) и вычислению на ней супремума функции $\alpha_M(z)$. В свою очередь для нахождения точек биссектрисы требуется строить их проекции на множество M . Проекция $\pi_M(z)$ точки $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ всегда лежит на границе множества M , причем вектор $z - \pi_M(z)$ должен содержаться в нормальном конусе множества M в точке $\pi_M(z)$ (см. [15, 16]).

О п р е д е л е н и е 5. Несовпадающие точки A_1 и A_2 границы ∂M множества M , являющиеся проекциями точки B биссектрисы $L(M)$ на это множество, называются α -симметричными точками. При этом B называется точкой, порожденной парой (A_1, A_2) .

Описанные конструкции по вычислению меры невыпуклости плоского множества M и построению связанных с ним линий, характеризующих его невыпуклость, полезны при изучении задач управления и дифференциальных игр [17].

2. Нахождение точек биссектрисы

Расположение α -симметричных точек связано с выпуклой оболочкой множества M .

Лемма 1. Если точки $A_1, A_2 \in \partial M$ являются α -симметричными и порождают точку $B \in L(M)$, то верны следующие утверждения:

1) A_1 и A_2 принадлежат границе дополнения множества M до его выпуклой оболочки:

$$A_1 \in \partial(\text{conv } M \setminus M), \quad A_2 \in \partial(\text{conv } M \setminus M);$$

2) A_1 и A_2 принадлежат замыканию одной компоненты связности дополнения $\text{conv } M \setminus M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $D = \text{conv } M \setminus M$. A_1 и A_2 не являются внутренними точками D . Точка B как равноудаленная от A_1 и A_2 лежит на срединном перпендикуляре к отрезку $[A_1, A_2]$. По условию A_1 и A_2 — ближайшие к B точки в множестве M . Следовательно, точки отрезка $[A_1, A_2]$, кроме A_1 и A_2 , не принадлежат множеству M , так как они лежат ближе к B , чем A_1 и A_2 . Но $[A_1, A_2] \subset \text{conv } M$, так как $A_1, A_2 \in M$. Значит, $([A_1, A_2] \setminus (\{A_1\} \cup \{A_2\})) \subset D$. Отсюда следует, что концы отрезка принадлежат замыканию компоненты связности множества D , а значит, и его границе ∂D .

Приведем формулы для нахождения α -симметричных точек и построения биссектрисы, когда множество M — подграфик нулю $f(x)$ непрерывной кусочно-гладкой функции $y = f(x)$, определенной на замкнутом связном множестве $X \subseteq \mathbb{R}$. Обозначим Γ кривую, совпадающую с границей ∂M множества M . Если $X = \mathbb{R}$, то Γ — это график $\text{gr } f(x)$ функции $y = f(x)$. Если $X \neq \mathbb{R}$, то кривая Γ состоит из $\text{gr } f(x)$ и одной либо двух боковых образующих. Но как следствие из леммы 1 проекции точек биссектрисы $L(M)$ могут лежать только в $\text{gr } f(x)$ (в том числе в точках склейки $\text{gr } f(x)$ и боковых образующих).

Чтобы пара точек $(A_1, A_2) \subset \Gamma$, лежащих на гладком участке $\text{gr } f(x)$, породила точку биссектрисы, необходимо, чтобы отрезки $[A_1, B]$ и $[A_2, B]$, где $B = B(x^*, y^*)$ — точка пересечения нормалей, построенных к Γ в точках $A_1 = A_1(x_1, y_1)$ и $A_2 = A_2(x_2, y_2)$, были равными по длине. Связь между проекциями A_1 и A_2 точки биссектрисы выражается равенством:

$$\arctg y'_1 + \arctg y'_2 - 2 \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь и далее обозначаем: $y_i = f(x_i)$, $y'_i = f'(x_i)$, $y''_i = f''(x_i)$, $i = 0, 1, 2$. Условие (2.1) в общем случае не является достаточным. Если две точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, лежащие на гладких

участках Γ , порождают точку биссектрисы $B = B(x^*, y^*)$, то ее координаты:

$$x^* = \frac{y_2'(x_1 + y_1'y_1) - y_1'(x_2 + y_2'y_2)}{y_2' - y_1'}; \quad (2.2)$$

$$y^* = \frac{x_2 + y_2'y_2 - x_1 - y_1'y_1}{y_2' - y_1'}. \quad (2.3)$$

В формулах (2.2)–(2.3) подразумевается, что нормали к Γ в точках A_1 и A_2 не параллельны друг другу.

Для координат α -симметричных точек, лежащих на участках гладкости Γ , возможен переход от алгебраического уравнения к дифференциальному. Обозначим $G(x_1, x_2)$ левую часть выражения (2.1).

Если $\frac{\partial G(x_1, x_2)}{\partial x_2} \neq 0$, то по теореме о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial G(x_1, x_2)}{\partial x_1} / \frac{\partial G(x_1, x_2)}{\partial x_2}.$$

Стало быть,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{y_1''}{1 + (y_1')^2} - 2\frac{(x_2 - x_1)y_1' - (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\frac{y_2''}{1 + (y_2')^2} + 2\frac{(x_2 - x_1)y_2' - (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}. \quad (2.4)$$

Рассмотрим точку $B(x^*, y^*) \in L(M)$ такую, что одна из ее проекций $A_1(x_1, y_1)$ лежит на гладком участке Γ , а другая проекция $A_0(x_0, y_0)$ является особой точкой, (точкой излома, точкой возврата либо точкой прекращения, см. [4]). В этом случае точка $B(x^*, y^*)$ лежит на пересечении нормали к кривой Γ , построенной в точке $A_1(x_1, y_1)$, и срединного перпендикуляра к отрезку $[A_0, A_1]$, ее координаты:

$$x^* = \frac{2(x_1 + y_1'y_1)(y_1 - y_0) - y_1'(x_1^2 + y_1^2 - x_0^2 - y_0^2)}{2(y_1 - y_0) - 2y_1'(x_1 - x_0)}; \quad (2.5)$$

$$y^* = \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2(x_1 - x_0)(x_1 + y_1y_1')}{2(y_1 - y_0) - 2y_1'(x_1 - x_0)}. \quad (2.6)$$

В формулах (2.5)–(2.6) подразумевается, что нормаль к Γ в точке A_1 не перпендикулярна и не параллельна вектору $A_1 - A_0$.

Возможен случай, когда биссектриса $L(M)$ содержит подмножество L_a , состоящее более чем из одной точки такое, что все его точки порождены одной парой $(A_1, A_2) \subset \partial M$. Тогда L_a лежит на срединном перпендикуляре к отрезку $[A_1, A_2] = [A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)]$. Для точек $B(x^*, y^*) \in L_a$ выполняется равенство

$$(2x^* - x_1 - x_2)(x_2 - x_1) + (2y^* - y_1 - y_2)(y_2 - y_1) = 0. \quad (2.7)$$

3. Процедуры отыскания $\alpha(M)$

3.1. Нахождение максимумов угловой характеристики

Рассматриваем случай, когда множество M — подграфик кусочно-гладкой функции.

Рассмотрим точку $A_1 = A_1(x_1, f(x_1)) \in \Gamma$ такую, что найдется ровно одна точка $B \in L(M)$ биссектрисы $L(M)$, для которой A_1 является проекцией. Введем функцию $\gamma(x_1)$, которая ставит в соответствие абсциссе x_1 точки A_1 угловую характеристику точки B биссектрисы:

$$\gamma(x_1) = \alpha_M(B) : (x_1, f(x_1)) = \pi_M(B).$$

Если точка $B \in L(M)$ имеет ровно две гладкие проекции $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ на гипр $f(x)$, то

$$\alpha_M(B) = \arctg y'_2 - \arctg y'_1. \quad (3.1)$$

Здесь и далее без ограничения общности будем полагать, что $x_2 > x_1$.

Для проекций точек гладкой ветви биссектрисы будем считать x_2 функцией от x_1 :

$$\gamma(x_1) = \arctg y'_2 - \arctg y'_1 = \arctg f'(x_2(x_1)) - \arctg f'(x_1). \quad (3.2)$$

Множество значений функций $\alpha_M(B)$ и $\gamma(x_1)$ совпадают, а значит, совпадают и их супремумы. В свою очередь максимумы значения функции $\gamma(x_1)$ достигаются в тех точках, где производная $\gamma'(x_1)$ меняет знак либо не определена.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\gamma}{dx_1} = \frac{\partial\gamma}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dx_1} \frac{\partial\gamma}{\partial x_2}.$$

Из формулы (2.4) и выражения (3.2) для функции $\gamma(x_1)$ имеем:

$$\frac{d\gamma}{dx_1} = -\frac{y''_1}{1+(y'_1)^2} - \frac{y''_2}{1+(y'_2)^2} \frac{\frac{y''_1}{1+(y'_1)^2} - 2\frac{(x_2-x_1)y'_1 - (y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}}{\frac{y''_2}{1+(y'_2)^2} + 2\frac{(x_2-x_1)y'_2 - (y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим случай, когда для всех точек $B \in L$ ветви биссектрисы одна из проекций $A_0(x_0, y_0)$ является общей (A_0 в этом случае точка негладкости Γ). При этом другие проекции, $A_1(x_1, y_1)$, являются дважды гладкими. Согласно формулам (2.5)–(2.6) угловая характеристика точки $B(x, y)$

$$\alpha_M(B) = 2 \left| \arctg \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \arctg y'_1 \right|. \quad (3.4)$$

Функция $\gamma(x_1)$ для абсцисс x_1 гладких проекций $A_1(x_1, y_1)$ точек такой ветви биссектрисы

$$\gamma(x_1) = \pm 2 \left(\arctg \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \arctg y'_1 \right). \quad (3.5)$$

Производная $\gamma'(x_1)$ находится дифференцированием равенства (3.5) по переменной x_1

$$\frac{d\gamma}{dx_1} = \pm 2 \left(\frac{y'_1(x_1 - x_0) - 2(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} - \frac{y''_1}{1+(y'_1)^2} \right). \quad (3.6)$$

Поскольку мы рассматриваем именно подграфик функции $y = f(x)$, то знак в выражениях (3.5) и (3.6) совпадает со знаком разности $(x_0 - x_1)$.

Точки, в которых производная $\gamma'(x_1)$, определенная по формуле (3.3) либо (3.6), меняет знак, а также точки, в которых она не определена, являются подозрительными на локальный максимум. Возможны ситуации, когда $\gamma'(x_1)$ является монотонной и угловая характеристика точек биссектрисы при движении по ней монотонно возрастает (либо убывает). Отдельно нужно рассматривать точки биссектрисы $L(M)$, имеющие три и более проекции на множество M .

3.2. Аналитическое выражение для меры невыпуклости

Для одного класса множеств получено аналитическое выражение для $\alpha(M)$.

Теорема 1. *Если M — подграфик дифференцируемой выпуклой функции $f(x)$ с областью определения $X = \mathbb{R}$, то мера невыпуклости множества M равна*

$$\alpha(M) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg f'(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg f'(x). \quad (3.7)$$

Доказательство. Если $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (т. е. Γ — прямая), то M — выпуклое множество и $\alpha(M) = 0$. В этом случае равенство (3.7) выполняется, так как

$$\arctg f'(x) \equiv \text{const.}$$

Если график $f(x)$ не является прямой, то без ограничения общности полагаем, что для $f(x)$ выполняются условия:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(0) = 0, \tag{3.8}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \tag{3.9}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \tag{3.10}$$

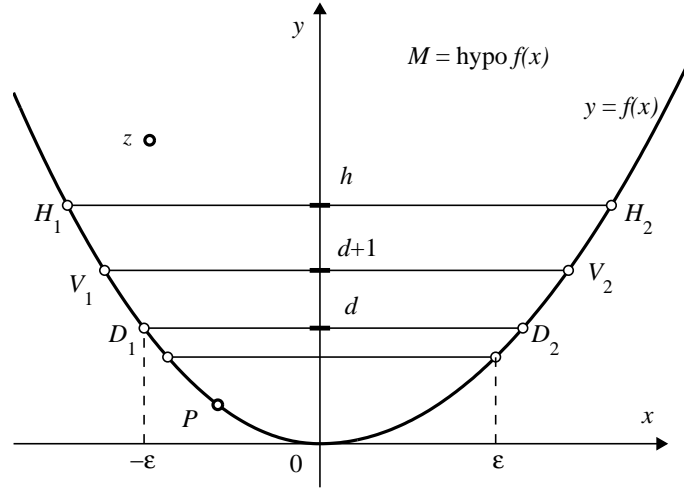


Рис. 2

Это допущение может быть сделано, потому что для графика Γ любой выпуклой функции $f(x)$ найдется прямоугольная система координат, в которой для $f(x)$ выполняются условия (3.8)–(3.10), кроме случая, когда Γ — график линейной функции (см. [3]). В то же время величина (3.7) имеет смысл угла между предельными положениями касательной и поэтому является инвариантом относительно поворота и сдвига системы координат. Заметим, что оба предела в выражении (3.7) существуют, так как для выпуклой дифференцируемой функции ее производная первого порядка $f'(x)$ — монотонная (неубывающая) функция. А арктангенс монотонной функции всегда имеет односторонние пределы в бесконечности. Обозначим

$$\beta_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg f'(x), \quad \beta_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg f'(x).$$

Поскольку граница Γ множества M — график дифференцируемой функции, то в каждой точке Γ к ней определена нормаль. Она образует с положительным направлением оси ординат угол, равный $\pi/2 + \arctg f'(x)$. Из выпуклости функции следует

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \beta_1 \leq \arctg f'(x) \leq \beta_2,$$

значит, $\forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus M, \forall h_*, h^* \in \text{con}(\text{conv } \Omega_M(z) - z)$ выполняется $(h_* \wedge h^*) \leq (\beta_2 - \beta_1)$. Таким образом (см. определение 2)

$$\forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus M \quad (\alpha_M(z) \leq \beta_2 - \beta_1). \tag{3.11}$$

Покажем, что существует последовательность $\{B_k\} \in L(M)$ точек биссектрисы $L(M)$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_M(B_k) = \beta_2 - \beta_1.$$

Для этого сначала покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $h > 0$, что если точка $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ имеет ординату больше h , то ее проекции на M имеют абсциссу по модулю, большую ε :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists h > 0 : \left(\forall z = z(x, y) : x > h, \quad \forall P = P(x_0, y_0) = \pi_M(z) \right) (y > h \Rightarrow |x_0| > \varepsilon). \quad (3.12)$$

Пусть

$$d = \max(f(\varepsilon), f(-\varepsilon)). \quad (3.13)$$

Проведем прямую $y = d$. По условиям (3.8)–(3.10) она имеет ровно две точки пересечения с графиком $\Gamma - D_1 = D_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ и $D_2 = D_2(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$ (см. рис. 2). Из (3.13) следует, что

$$\tilde{x}_1 \leq -\varepsilon, \quad \tilde{x}_2 \geq \varepsilon.$$

Проведем прямую $y = d + 1$ и найдем ее точки пересечения с графиком $\Gamma - V_1 = V_1(x_1, y_1)$ и $V_2 = V_2(x_2, y_2)$. Из выпуклости функции $f(x)$ следует, что

$$x_1 < \tilde{x}_1, \quad x_2 > \tilde{x}_2.$$

Обозначим $V = \|V_2 - V_1\| = x_2 - x_1$. Покажем, что если $h = V^2 + d + 1$, то

$$\left(\forall z = z(x, y) : \forall P = P(x_0, y_0) = \pi_M(z) \right) (x > h \Rightarrow |x_0| > \varepsilon).$$

Действительно, пусть $z = z(x, y)$, $y > h$, $x_1 \leq x \leq x_2$. Обозначим $P = P(x_0, y_0) = \pi_M(z)$. Допустим при этом $|x| \leq \varepsilon$ Тогда (см. рис. 2)

$$\|z - P\| \geq \rho(\{z\}, [D_1, D_2]) = h - d. \quad (3.14)$$

Здесь $\rho(M_1, M_2) = \inf_{z_1 \in M_1, z_2 \in M_2} \|z_1 - z_2\|$ — расстояние между двумя множествами. Без ограничения общности полагаем, что $\|z - V_1\| \leq \|z - V_2\|$. Это значит

$$\|z - V_1\| \leq \sqrt{(h - d - 1)^2 + (V/2)^2}. \quad (3.15)$$

Из определения проекции $\|z - V_1\| \geq \|z - P\|$, а отсюда и из неравенств (3.14)–(3.15)

$$h - d \leq \sqrt{(h - d - 1)^2 + (V/2)^2}.$$

Возведем обе части в квадрат (по смыслу они положительные и знак неравенства сохранится)

$$(h - d)^2 \leq (h - d - 1)^2 + (V/2)^2,$$

$$h \leq 2d + 0.125V^2 + 0.5.$$

Но мы взяли $h = V^2 + d + 1$. Получилось противоречие.

Положим теперь, что $|x| > \varepsilon$. Без ограничения общности полагаем, что $x < -\varepsilon$. Обозначим $d_x = -\varepsilon - x$. Получаем, что для расстояния от $z(x, y)$ до P выполняется оценка

$$\|z - P\| \geq \rho(\{z\}, [D_1, D_2]) = \sqrt{(h - d)^2 + d_x^2}. \quad (3.16)$$

С другой стороны,

$$\|z - V_1\| \leq \sqrt{(h - d - 1)^2 + d_x^2}. \quad (3.17)$$

Значит,

$$\begin{aligned} \sqrt{(h - d)^2 + d_x^2} &\leq \sqrt{(h - d - 1)^2 + d_x^2}, \\ (h - d)^2 &\leq (h - d - 1)^2. \end{aligned}$$

По условию $h > d + 1$, значит, данное неравенство не выполняется — опять получили противоречие. Таким образом утверждение (3.12) доказано.

Проведем прямую $y = h$ и найдем ее точки пересечения с $\Gamma - H_1$ и H_2 . Покажем, что на отрезке $[H_1, H_2]$ есть хотя бы одна точка B_h биссектрисы $L(M)$, причем одна из ее проекций $P_1 = P_1(x_1, y_1)$ имеет абсциссу $x_1 < -\varepsilon$, а другая $P_2 = P_2(x_2, y_2)$ имеет абсциссу $x_2 > \varepsilon$.

В силу утверждения (3.12) абсциссы проекций точек из отрезка $[H_1, H_2]$ не могут лежать в интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Из определения проекции следует

$$\lim_{z \rightarrow H_1} \pi_M(z) = H_1, \quad \lim_{z \rightarrow H_2} \pi_M(z) = H_2.$$

Значит, если для всех точек $H \in [H_1, H_2] \setminus (\{H_1\} \cup \{H_2\})$ абсциссы их проекций лежат либо левее $-\varepsilon$, либо правее ε , то существуют два непустых непересекающихся подмножества H^1 и H^2 множества $[H_1, H_2] \setminus (\{H_1\} \cup \{H_2\})$ таких, что

$$\forall z \in H, \forall P = P(x, y) = \pi_M(z) \left((z \in H^1) \Rightarrow (x < -\varepsilon), (z \in H^2) \Rightarrow (x > \varepsilon) \right).$$

Но $[H_1, H_2] \setminus (\{H_1\} \cup \{H_2\})$ — односвязное множество, значит, найдется хотя бы одна граничная точка H_g двух подмножеств H^1 и H^2 , к которой сходятся последовательности точек, имеющих проекции с абсциссами как меньше $-\varepsilon$, так и больше ε . В силу полунепрерывности сверху по включению отображения $z \mapsto \Omega_M(z) = \{\pi_M(z)\}$ (см. [1]) H_g имеет как минимум две проекции на M , причем абсцисса одной из них меньше $-\varepsilon$, а другой больше ε . Получилось противоречие.

Таким образом для каждого ε можно найти точку биссектрисы $B(\varepsilon)$, у которой абсциссы одной проекции лежат левее $-\varepsilon$, а другой правее ε :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists B(\varepsilon) \in L(M) \left(\exists P_1(x_1, y_1) = \pi_M(B), \exists P_2(x_2, y_2) = \pi_M(B), x_1 < -\varepsilon, x_2 > \varepsilon \right). \quad (3.18)$$

Для точки биссектрисы $B(\varepsilon)$ справедлива оценка ее угловой характеристики

$$\alpha_M(B(\varepsilon)) \geq \arctg f'(x_2) - \arctg f'(x_1) \geq \arctg f'(\varepsilon) - \arctg f'(-\varepsilon). \quad (3.19)$$

Значит, для любой последовательности $\{\varepsilon_k\}$ такой, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = +\infty, \quad (3.20)$$

можно найти последовательность $\{B_k\}$ точек биссектрисы $L(M)$ такую, что

$$\forall k \left(\alpha_M(B_k) \geq \arctg f'(\varepsilon_k) - \arctg f'(-\varepsilon_k) \right).$$

В пределе при $k \rightarrow \infty$ получаем из (3.8)–(3.10) и (3.18)–(3.19) оценку

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_M(B_k) \geq \beta_2 - \beta_1. \quad (3.21)$$

Предел в неравенстве (3.21) существует в силу условий (3.8)–(3.10) и (3.20). Таким образом из неравенств (3.11) и (3.21) получаем, что для $\alpha(M)$ справедливо

$$\alpha(M) = \beta_2 - \beta_1,$$

что совпадает с выражением (3.7). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В теореме 1 не говорится о том, достигается ли супремум угловой характеристики только на бесконечности или в какой-либо конечной точке тоже. Но можно показать, что если $f(x)$ — строго выпуклая функция, то неравенство (3.11) становится строгим, а значит, $\forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus M \alpha_M(z) < \alpha(M)$.

4. Примеры вычисления $\alpha(M)$

Приведем результаты численного построения биссектрис по формулам (2.1)–(2.7) и расчета меры невыпуклости по формулам (3.1)–(3.7). Для их реализации использовался пакет MATLAB 6.5 [18], позволяющий проводить визуализацию вычислений.

Пример 1. В качестве множества M возьмем подграфик функции $y = x^4$.

Множество M отвечает условиям теоремы 1. Подставив производную $y'(x) = 4x^3$ функции $y = y(x)$ в формулу (3.7), получаем

$$\alpha(M) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} 4x^3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} 4x^3 = \pi. \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) означает, что мера невыпуклости множества M является наибольшей из всех возможных. Биссектриса и распространение волновых фронтов представлены на рис. 3: здесь и далее граница множества M обозначена Γ , биссектриса — L , волновые фронты — Φ .

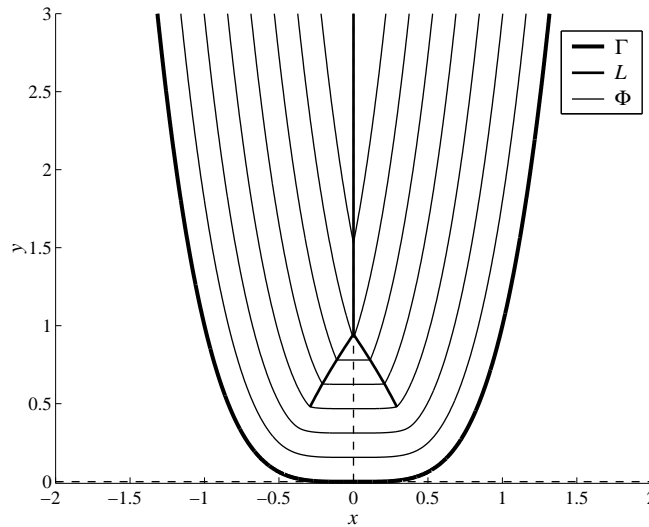


Рис. 3

Пример 2. В качестве множества M возьмем подграфик функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Мера невыпуклости множества достигается в точке $P \approx (-3.56, 4.26)$ и равна $\alpha(M) \approx 0.66$. Биссектриса, распространение волновых фронтов и точка P максимума функции $\alpha_M(z)$ представлены на рис. 4.

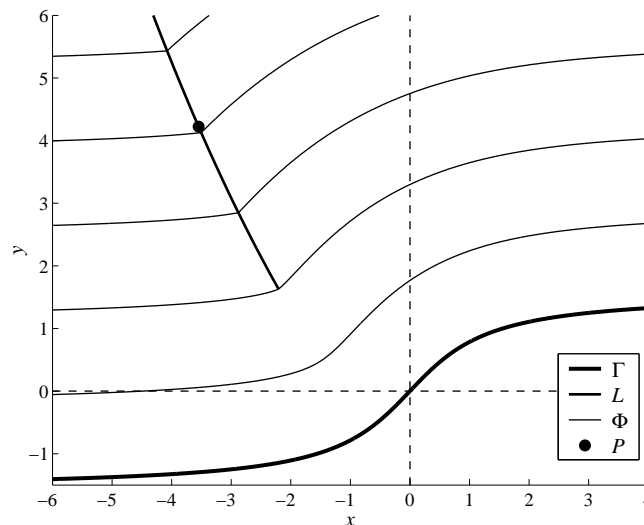


Рис. 4

Пример 3. В качестве множества M возьмем подграфик функции $y = x \sin x$, определенной на отрезке $X = [1.1, 14.3]$.

В двух точках $P_1 \approx (4.78, -0.76)$ и $P_2 \approx (11.00, -0.59)$ функция $\alpha_M(z)$ достигает локальных максимумов: $\alpha_M(P_1) \approx 2.70$ и $\alpha_M(P_2) \approx 2.96$. Таким образом мера невыпуклости множества M равна наибольшему из них: $\alpha(M) \approx 2.96$. Биссектриса, распространение волновых фронтов и точки локальных максимумов функции $\alpha_M(z)$ представлены на рис. 5.

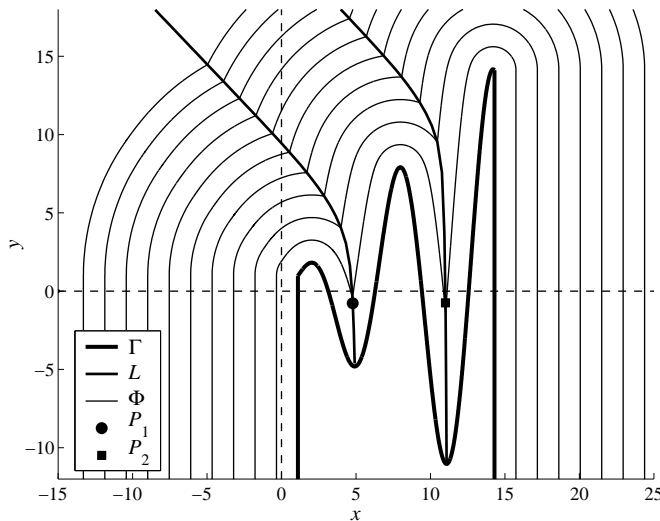


Рис. 5

З а м е ч а н и е. Биссектриса $L(M)$ распадается на две изолированные ветви, поскольку дополнение $\text{conv } M \setminus M$ состоит из двух компонент связности (см. лемму 1).

Пример 4. В качестве множества M возьмем подграфик функции $y = x^2$, определенной на бесконечном полуинтервале $X = (-\infty, 0]$.

Для всех точек биссектрисы одной из проекций является точка $(0, 0)$ излома границы Γ множества M . Уравнение биссектрисы находится аналитически по формулам (2.5)–(2.6)

$$L(M) = \{(x, y) : (2y - 1)^3 = 27x^2, x > 0\}. \tag{4.2}$$

Заметим, что уравнение (4.2) не позволяет в явном виде найти точки максимума функции $\alpha_M(z)$. Мера невыпуклости множества $\alpha(M) \approx 0.68$ достигается в точке $P \approx (0.35, 1.25)$. Биссектриса, распространение волновых фронтов и точка P максимума функции $\alpha_M(z)$ представлены на рис. 6.

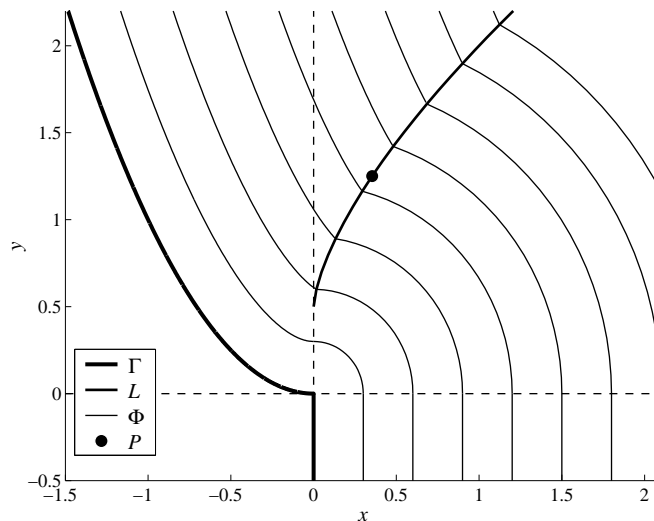


Рис. 6

Заключение

Разработанные аналитические и численные алгоритмы вычисления меры невыпуклости [5] плоских множеств реализованы для подграфиков функций. Показаны особенности геометрии волновых фронтов в окрестностях точек с угловой характеристикой, отличной от нуля [11]. Аналитически величину $\alpha(M)$ относительно легко вычислять по теореме 1 в том случае, когда M — подграфик выпуклой функции. Тогда супремум угловой характеристики достигается на бесконечно удаленной точке биссектрисы (см. пример 1). Если же максимум величины $\alpha_M(z)$ достигается в конечной точке, то требуется находить ее, что реализуется с помощью численных методов (см. примеры 2–4). При этом могут существовать локальные максимумы, не являющиеся глобальными, как точка P_1 в примере 3. Здесь нужна дополнительная обработка результатов вычислений [18].

Автор выражает благодарность члену-корреспонденту РАН В.Н. Ушакову и кандидату физ.-мат. наук А.А. Успенскому за содействие в проведении исследований.

Поступила 04.09.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
2. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
3. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
4. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал УРСС, 2003.
5. Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н. α -множества и их свойства // Ин-т математики и механики УрО РАН. 2004. Деп. в ВИНТИ 02.04.04, № 543-B2004.
6. Успенский А.А. Аналитические методы вычисления меры невыпуклости плоских множеств // Ин-т математики и механики УрО РАН. 2007. Деп. в ВИНТИ 07.02.07, № 104-B2007.
7. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.
8. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С., Афраймович В.С. и др. Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 20.
9. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: МГУ, 1983.
10. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
11. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988.
12. Седых В.Д. Соотношения между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей ко-ранга 1 фронта общего положения // Докл. РАН. 1976. Т. 383, № 6. С. 735–39.
13. Sedykh V.D. On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in \mathbb{R}^k // Advanced studies in pure mathematics. Singularity theory and its applications. 2006. No. 43. P. 401–419.
14. Лебедев П.Д., Успенский А.А. К вопросу о геометрии волновых фронтов // Изв. Ин-та математики и информатики. Ижевск: УдГУ, 2006. Вып. 3 (37). С. 79–80
15. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
16. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
17. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
18. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. СПб.: БХВ–Петербург, 2005.

УДК 51.72, 550.34

СФЕРИЧЕСКАЯ БЛОКОВАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ И СЕЙСМИЧНОСТИ ЛИТОСФЕРЫ: РАЗЛИЧНЫЕ МОДИФИКАЦИИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ¹

Л. А. Мельникова, В. Л. Розенберг

Настоящая статья, продолжающая исследования работ [1–8], в которых описывается подход к построению и распараллеливанию сферической блоковой модели динамики и сейсмичности литосферы, фактически представляет собой обзор разработанных модификаций модели и обсуждение их преимуществ и недостатков. В первой модификации, так называемой “модификации без глубины” [1, 2, 4, 5], считается, что все характеристики точки структуры определяются только ее координатами и не зависят от глубины сферического слоя. Модификация, используемая в [3, 6–8], предполагает однородность литосферы по глубине и одинаковость глубин всех блоков, а также свойств всех частей блока (разлома). В данной работе представлена новая модификация сферической модели, в которой делается попытка учета неоднородности литосферы посредством задания различных значений глубины сферического слоя для различных блоков и реализации возможности изменения свойств разлома в зависимости от глубины. Приводится краткая характеристика общей модели, при этом особое внимание уделяется специфическим особенностям различных модификаций. Выполнен сравнительный анализ результатов моделирования, проведены серии вычислительных экспериментов по изучению пространственного распределения сильнейших событий, смещений плит и характера их взаимодействия вдоль границ. В полученных модельных каталогах землетрясений обнаружены некоторые черты реальной сейсмичности, проанализирована зависимость свойств искусственной сейсмичности от параметров модели. Установлено, что динамика глобальной системы тектонических плит во многих аспектах точнее моделируется с учетом неоднородности литосферы. Описывается подход к распараллеливанию вычислений, обсуждается эффективность соответствующих алгоритмов.

1. Введение

Задача изучения сейсмичности на основе статистического и феноменологического анализа существующих каталогов землетрясений достаточно сложна, поскольку надежные данные наблюдений покрывают относительно небольшой временной интервал (сто лет и меньше) по сравнению с продолжительностью геотектонических процессов, влияющих на сейсмическую активность. Поэтому моделирование сейсмичности, т.е. серий событий, на сколь угодно большом временном интервале играет важную роль в исследовании характера реального сейсмического потока и выявлении или подтверждении закономерностей, предшествующих сильным толчкам [9]. Очевидно, что модель должна быть адекватной в смысле воспроизведения свойств, обнаруженных эмпирическим путем (прежде всего, закона повторяемости Гутенберга — Рихтера, кластеризации, миграции событий, сейсмического цикла и т. д.). Только в этом случае возможно использование искусственного каталога для получения тех или иных оценок реальной сейсмичности. Задача тестирования модели и сравнения результатов моделирования с реальными данными представляет самостоятельный интерес.

Существует множество различных подходов к моделированию процессов, происходящих в литосфере (см., например, [9, 10]). Настоящая статья продолжает исследования работ [1–8], в

¹Работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ ИММ УрО РАН по теме 0120.0.601494 “Неустойчивые задачи реконструкции и управления” в рамках программы научно-исследовательских работ № 15 Президиума РАН “Разработка фундаментальных основ создания научной распределенной информационно-вычислительной среды на основе технологии GRID” при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-07-90120), для второго автора также в рамках программы поддержки ведущих научных школ России НШ 7581.2006.1 и Урало-сибирского междисциплинарного проекта.

которых описывается подход к построению и распараллеливанию сферической блоковой модели, а также рассматриваются различные аспекты применения некоторых ее модификаций для изучения динамики и сейсмичности систем тектонических плит, как относительно небольших, так и глобальной.

В блоковых моделях сейсмоактивный регион представляется в виде системы абсолютно жестких блоков, образующих слой фиксированной глубины между двумя горизонтальными плоскостями или концентрическими сферами. Границы блоков состоят из сегментов тектонических разломов, которые считаются бесконечно тонкими. Система блоков движется под действием внешних сил. Движение может описываться как тремя параметрами (двумерная модель), так и шестью (трехмерная). Предполагается, что в каждый момент времени система находится в состоянии квазистатического равновесия. Поскольку блоки являются абсолютно жесткими, все деформации имеют место на разломах и подошвах блоков. Взаимодействие между блоками полагается вязко-упругим (нормальное состояние) до тех пор, пока отношение напряжения к давлению не превышает значение заданного порога. Если в какой-то момент времени на части разлома достигается критическое значение, то в соответствии с законом сухого трения происходит сброс напряжения, и эта ситуация интерпретируется как землетрясение. Считается, что те части разлома, в которых произошли землетрясения, находятся в состоянии крипа. Такое состояние отличается от нормального более быстрым ростом неупругих смещений и продолжается до тех пор, пока напряжение не уменьшится до определенного уровня. Результатом процесса моделирования является искусственный каталог землетрясений и, дополнительно, информация о смещениях блоков и их взаимодействии вдоль границ. Детальное описание основных принципов построения блоковых моделей динамики литосферы приведено в [10, 11].

Наиболее изученной является двумерная плоская блоковая модель, на основе которой созданы аппроксимации реальных сейсмоактивных регионов [10, 12, 13]. Она активно использовалась для изучения зависимости свойств сейсмического потока от геометрии разломов, специфики движений границ и подстилающей среды, других параметров [10, 14, 15]. В трехмерной плоской модели [16] учитывается вертикальная компонента смещений с помощью трех дополнительных степеней свободы. Сферическая геометрия была введена ввиду невозможности моделирования движения системы глобальных тектонических плит посредством плоских блоковых моделей [4, 5]. Очевидно, сферическая модификация применима к изучению движения системы именно глобальных тектонических плит, поскольку в случае отдельно взятого сейсмоактивного региона из-за относительной малости его размеров влияние сферичности поверхности незначительно.

В данной статье основное внимание уделяется обзору разработанных вариантов сферической модели и обсуждению их преимуществ и недостатков. В первом варианте, так называемой “модификации без глубины” [1, 2, 4, 5], считается, что все характеристики точки структуры определяются только ее координатами и не зависят от глубины сферического слоя. Модификация, используемая в [3, 6–8], предполагает однородность литосферы по глубине и одинаковость глубин всех блоков, а также свойств всех частей блока (разлома). В данной работе, помимо краткой характеристики модели с указанием специфики различных модификаций, представлена новая модификация, в которой делается попытка учета неоднородности литосферы посредством задания различных значений глубины сферического слоя для различных блоков и реализации возможности изменения свойств разлома в зависимости от глубины.

2. Описание модели

Опишем основные конструкции и идеи подхода, используемого для построения сферической блоковой модели динамики и сейсмичности литосферы.

2.1. Геометрия блоковой структуры, движение блоков

Блоковая структура является ограниченной и односвязной частью шарового слоя глубиной H , заключенного между двумя концентрическими сферами, одна из которых (внешняя) интерпретируется как поверхность Земли, другая (внутренняя) — как нижняя граница упругой литосферы (см. рис. 1).

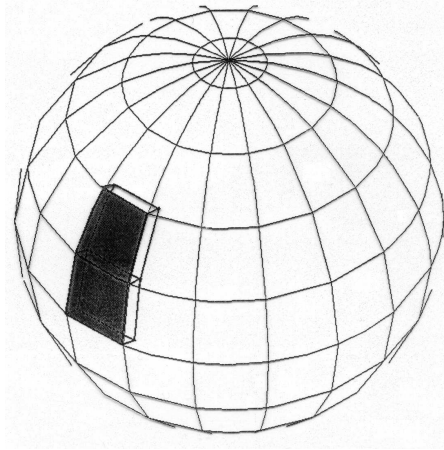


Рис. 1. Пример блоковой структуры на сфере.

Разделение структуры на блоки определяется пересекающими этот слой *разломами*, каждый из которых представляет собой коническую поверхность, характеризующуюся тем, что, во-первых, линией разлома на поверхности Земли является направленная дуга большого круга и, во-вторых, плоскость, касательная к поверхности разлома в точке упомянутой линии, наклонена к поверхности Земли под углом α . В случае такого определения разлома значение угла α (будем называть его *углом наклона* разлома и измерять слева от линии разлома) одно и то же для всех точек линии разлома на поверхности Земли. Тогда геометрия блоковой структуры описывается системой линий пересечения разломов с внешней сферой, ограничивающей слой, и указанием углов наклона разломов. Общие точки двух разломов на внешней и внутренней сферах называются *вершинами*. Участки разломов, ограниченные соответствующими парами соседних вершин, называются *сегментами*. Пересечения блока с ограничивающими сферами представляют собой сферические многоугольники, при этом пересечение с внутренней сферой называется *подошвой*. Предполагается, что вне блоковой структуры могут находиться *граничные блоки*, примыкающие к внешним сегментам. Другая возможность состоит в рассмотрении блоковой структуры, замкнутой на сфере и покрывающей всю поверхность Земли. Такая структура не имеет внешних границ, поэтому для нее не определяются граничные блоки (и, стало быть, законы их движения). Следует отметить, что данная возможность является специфической особенностью сферической модели (по сравнению с плоскими модификациями).

Блоки считаются абсолютно жесткими, все их смещения — бесконечно малыми по сравнению с линейными размерами. Поэтому геометрия блоковой структуры не меняется в процессе моделирования, и структура не движется как единое целое. Гравитационными силами можно пренебречь, так как они слабо зависят от смещений блоков, а блоковая структура в начальный момент времени находится в состоянии квазистатического равновесия.

Все вершины на внешней сфере задаются географическими координатами (широтой φ и долготой ψ) в сферической системе координат, связанной с центром Земли (такую систему, равно как и соответствующую ей декартову, будем называть “система-О”, рис. 2).

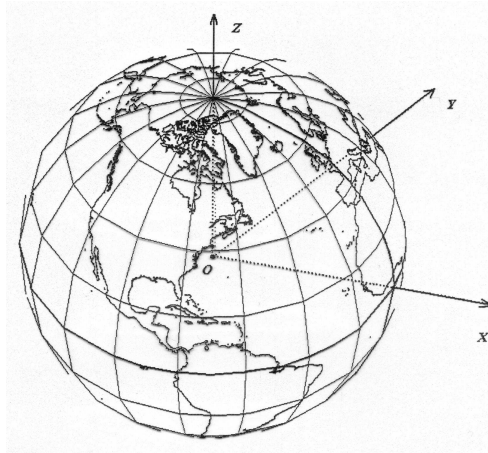


Рис. 2. Система-О.

В сферической модели блоки (в том числе и граничные, если заданы) имеют шесть степеней свободы и могут покидать сферический слой (в случае ненулевой вертикальной компоненты смещения). Смещение каждого блока состоит из поступательной и вращательной компонент. Поступательная компонента описывается вектором сдвига (x, y, z) . Вращательная компонента определяется тремя углами поворота γ, β, λ относительно неподвижной прямоугольной системы координат (X, Y, Z) с началом в центре масс блока, точке C с координатами (φ_C, ψ_C, R_C) , с осью X , направленной по параллели, с осью Y , направленной по меридиану, и с осью Z , направленной вдоль радиуса Земли от центра (такую систему будем называть “система-С”, рис. 3).

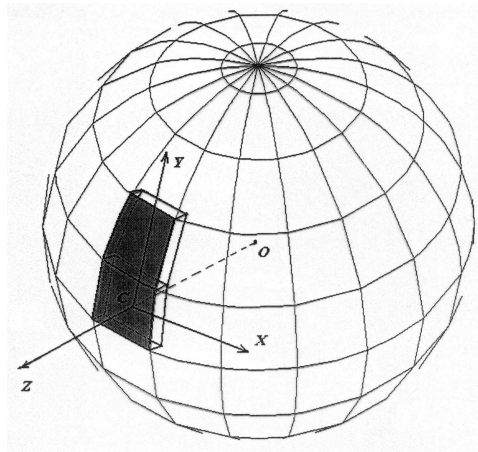


Рис. 3. Система-С.

Предположим, что прямоугольная система координат (X_1, Y_1, Z_1) жестко связана с центром масс блока, т. е. при отсутствии смещений блока она совпадает с неподвижной системой (X, Y, Z) , в которой рассматриваются все движения блока. Схема вращения блока и соответствующей системы (X_1, Y_1, Z_1) относительно (X, Y, Z) представлена на рис. 4.

Угол γ определяется как угол поворота осей Y и Z вокруг оси X , обеспечивающий выполнение следующего условия: если Z_2 есть линия пересечения плоскостей XOZ_1 и YOZ , то ось Z отображается на Z_2 , при этом $Y \rightarrow Y_2$. Угол β — это угол поворота осей X и Z_2 вокруг оси Y_2 , при котором ось Z_2 переходит в Z_1 (что возможно, так как Z_1 принадлежит плоскости

XOZ_2), при этом $X \rightarrow X_2$. Угол λ определяется как угол поворота осей X_2 и Y_2 вокруг оси Z_1 , при котором $X_2 \rightarrow X_1$, $Y_2 \rightarrow Y_1$.

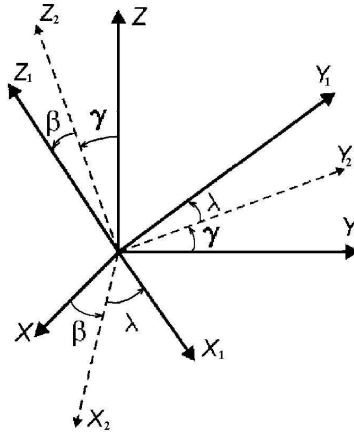


Рис. 4. Определение углов поворота γ , β , λ .

Согласно такому определению углов поворота, формулы для смещения $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$ в некоторой точке со сферическими координатами (φ, ψ, r) , принадлежащей блоку, имеют следующий вид в системе-С:

$$\Delta_x = x - \hat{Y}\lambda + \hat{Z}\beta, \quad \Delta_y = y + \hat{X}\lambda - \hat{Z}\gamma, \quad \Delta_z = z - \hat{X}\beta + \hat{Y}\gamma, \quad (1)$$

где (x, y, z) — сдвиг блока, $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ — координаты вектора, идущего из центра масс блока в точку (φ, ψ, r) в системе-С, углы поворота (γ, β, λ) считаются малыми.

2.2. Вязко-упругое взаимодействие между блоками, уравнения квазистатического равновесия

В каждый момент времени компоненты вектора сдвига и углы поворота блока находятся из условия равенства нулю суммы всех сил, действующих на блок, и суммарного момента этих сил. Силы возникают на внутренней сфере из-за смещения блоков относительно подстилающей среды и на поверхностях ограничивающих их разломов из-за смещений соседних блоков. Предполагается, что законы движения граничных блоков и подстилающей среды известны. Движение описывается как вращение на сфере, т. е. задаются положение оси вращения и угловая скорость. Альтернативная возможность состоит в задании поля скоростей (согласно некоторому закону или поточечно) для точек, принадлежащих граничным блокам и подстилающей среде.

Разработано несколько модификаций модели, зависящих от способа трактовки глубины сферического слоя. Поскольку данная глубина значительно меньше линейных размеров блоковой структуры, имеются основания полагать, что при вычислении числовых характеристик взаимодействия блоков по разломам возможно ограничиться точками, принадлежащими линии разлома на поверхности Земли (таким образом, предполагается, что все характеристики определяются только координатами (φ, ψ) и не зависят от r). Такая версия модели называется “модификацией без глубины”. Ее главное преимущество состоит в значительной экономии времени счета при моделировании, что может быть существенно при большом количестве запусков в эксперименте по вариации того или иного параметра. Недостатки модификации без глубины очевидны: а) фактически учет углов наклона разломов является формальным; б) невозможно изучение механизма распространения землетрясения вдоль разлома и его идентификация;

в) существенно сужается диапазон изменения модельной магнитуды. Эти причины обусловили разработку “модификации с глубиной”. При этом предложено два варианта, именно: а) с одинаковой глубиной сферического слоя для всей структуры (“модификация с глубиной I”) и б) с возможностью задания различных глубин для разных блоков и изменения параметров разлома в зависимости от глубины (“модификация с глубиной II”). В дальнейшем, приводя выкладки, общие для всех модификаций, будем подчеркивать их специфику.

Рассмотрим точку внешней сферы с координатами (φ, ψ) , принадлежащую участку некоторого разлома, который разделяет блоки с номерами i и j (блок i слева, блок j справа от разлома; глубины блоков могут не совпадать). Обозначим через \vec{e}_t единичный вектор, касательный в этой точке к линии разлома и направленный по направлению разлома. Пусть он имеет координаты $\vec{e}_t = (e_1, e_2, 0)$ в прямоугольной системе координат с центром в точке (φ, ψ) и осями, введенными по аналогии с осями системы-С (такую систему будем называть “система-Р”). Определим вектор $\vec{e}_l = (-e_2 \cos \alpha, e_1 \cos \alpha, -\sin \alpha)$, который лежит в плоскости, касательной к поверхности разлома в данной точке, и перпендикулярен вектору \vec{e}_t (здесь α — угол наклона разлома (и, стало быть, касательной плоскости) к поверхности Земли). Введем также вектор $\vec{e}_n = (-e_2 \sin \alpha, e_1 \sin \alpha, \cos \alpha)$, который перпендикулярен упомянутой плоскости. Правая тройка $(\vec{e}_t, \vec{e}_l, \vec{e}_n)$ образует прямоугольную систему координат с центром в точке (φ, ψ) — “систему-Т”, см. рис. 5.

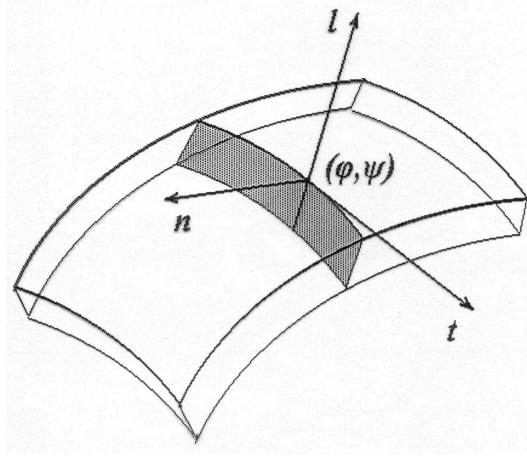


Рис. 5. Система-Т.

Отметим, что в случае модификации с глубиной предполагается, что система-Р и система-Т, описанные выше, используются для всех точек разлома, соответствующих точке внешней сферы с координатами (φ, ψ) . Оказывается, с помощью введенных двух систем координат достаточно просто записываются соотношения для нахождения смещений и упругих сил. Рассмотрим теперь произвольную точку (φ, ψ, r) упомянутого выше разлома, см. рис. 6.

Пусть $(\Delta_x^{rel}, \Delta_y^{rel}, \Delta_z^{rel})$ — вектор относительного смещения блоков (или блока и подстилающей среды соседнего блока) в точке (φ, ψ, r) в системе-Р. Компоненты смещения в плоскости, касательной к поверхности разлома в данной точке, и в направлении, перпендикулярном к ней (т. е. в системе-Т), связаны с $\Delta_x^{rel}, \Delta_y^{rel}, \Delta_z^{rel}$ следующими соотношениями:

$$\Delta_t = \Delta_x^{rel} e_1 + \Delta_y^{rel} e_2, \quad \Delta_l = -\Delta_x^{rel} e_2 \cos \alpha + \Delta_y^{rel} e_1 \cos \alpha - \Delta_z^{rel} \sin \alpha,$$

$$\Delta_n = -\Delta_x^{rel} e_2 \sin \alpha + \Delta_y^{rel} e_1 \sin \alpha + \Delta_z^{rel} \cos \alpha.$$

Упругая сила (f_t, f_l, f_n) , действующая на единицу площади разлома, в точке (φ, ψ, r) определяется из формул

$$f_t = K_t(\Delta_t - \delta_t), \quad f_l = K_l(\Delta_l - \delta_l), \quad f_n = K_n(\Delta_n - \delta_n). \quad (2)$$

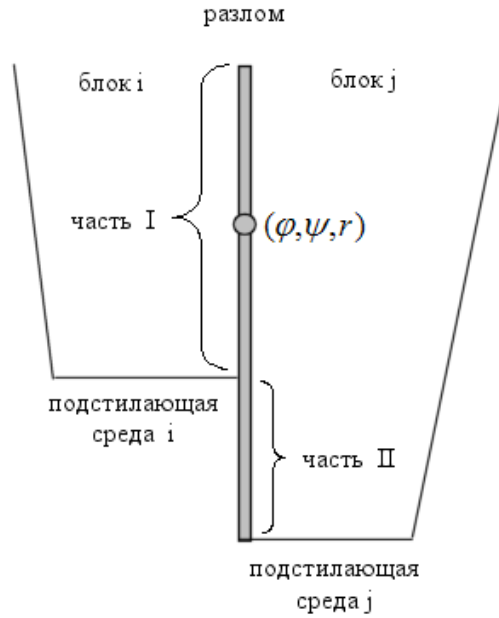


Рис. 6. Специфика разлома, разделяющего блоки разной глубины.

Здесь δ_t , δ_l , δ_n — соответствующие неупругие смещения, зависимость от времени которых описывается уравнениями

$$\frac{d\delta_t}{dt} = W_t f_t, \quad \frac{d\delta_l}{dt} = W_l f_l, \quad \frac{d\delta_n}{dt} = W_n f_n. \quad (3)$$

Коэффициенты K_t , K_l , K_n , W_t , W_l и W_n в (2) и (3) могут быть различными для разных разломов и, кроме того, могут зависеть от глубины (в модификации с глубиной II). Величины K_t , K_l и K_n рассматриваются как модули сдвига в соответствующих направлениях, а величины W_t , W_l и W_n являются обратными к вязкостям [17].

Теперь необходимо вычислить компоненты относительного смещения Δ_x^{rel} , Δ_y^{rel} и Δ_z^{rel} , используя формулы (1). Имеем

$$\Delta_x^{rel} = \Delta_x^i - \Delta_x^j, \quad \Delta_y^{rel} = \Delta_y^i - \Delta_y^j, \quad \Delta_z^{rel} = \Delta_z^i - \Delta_z^j, \quad (4)$$

где $(\Delta_x^i, \Delta_y^i, \Delta_z^i)$ и $(\Delta_x^j, \Delta_y^j, \Delta_z^j)$ — векторы смещения в системе-Р точки (φ, ψ, r) соответственно как точки блоков i и j (в случае, когда точка принадлежит части I разлома, см. рис. 6) или как точки подстилающей среды блока i и блока j (в случае, когда точка принадлежит части II разлома, см. рис. 6).

Теперь, чтобы получить компоненты этих векторов, следует найденные согласно (1) смещения в системах-С точки (φ, ψ, r) как точки блоков i и j (или подстилающей среды) умножить на матрицу перехода от системы-С, соответствующей блоку (или подстилающей среде), к системе-Р. Ввиду громоздкости выкладок эти вычисления в настоящей статье опущены. Отметим лишь, что таким способом могут быть найдены смещения как для точек на любом разломе, так и на подошве блока.

В системе координат, связанной с точкой подошвы (φ, ψ) , т. е. в системе-Р, упругая сила (f_x^u, f_y^u, f_z^u) , действующая на единицу площади, имеет вид

$$f_x^u = K_u(\Delta_x^u - \delta_x^u), \quad f_y^u = K_u(\Delta_y^u - \delta_y^u), \quad f_z^u = K_u^n \Delta_z^u, \quad (5)$$

где δ_x^u, δ_y^u — соответствующие неупругие смещения, зависимость от времени которых описывается уравнениями

$$\frac{d\delta_x^u}{dt} = W_u f_x^u, \quad \frac{d\delta_y^u}{dt} = W_u f_y^u, \quad (6)$$

причем предполагается, что неупругое смещение в вертикальном направлении (в направлении оси z системы-Р) отсутствует. Коэффициенты K_u, K_u^n и W_u в (5) и (6) могут быть различными для разных блоков. Вектор $(\Delta_x^u, \Delta_y^u, \Delta_z^u)$ относительного смещения блока и подстилающей среды в точке (φ, ψ) , взятый в системе-Р, находится, согласно (1) и (4), по аналогии со случаем нахождения смещения точки разлома.

Как сказано выше, смещения блоков и углы их поворотов определяются из условия равенства нулю суммы действующих на блок сил и суммарного их момента, которые выписываются в соответствующей блоку системе-С. Это условие обеспечивает состояние квазистатического равновесия системы и одновременно является условием минимума энергии.

Отметим, что зависимость сил и моментов от смещений и поворотов блоков является линейной, поэтому система уравнений для определения этих величин также линейна:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}. \quad (7)$$

Здесь компонентами неизвестного вектора $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{6n})$ являются смещения и углы поворота внутренних блоков (n — число таких блоков), т.е. $w_{6m-5} = x_m, w_{6m-4} = y_m, w_{6m-3} = z_m, w_{6m-2} = \gamma_m, w_{6m-1} = \beta_m, w_{6m} = \lambda_m$ ($m = 1, 2, \dots, n$). Элементы матрицы \mathbf{A} ($6n \times 6n$) и вектора \mathbf{b} ($6n$) определяются из формул, которые выводятся из (1)–(6) с пересчетом в систему-С сил и моментов. В настоящей статье эти формулы опущены для краткости изложения. Отметим, что поскольку элементы матрицы \mathbf{A} в (7) не зависят от времени, она может быть вычислена один раз в начале процесса. Компоненты вектора \mathbf{b} зависят от времени, во-первых, явно, ввиду движения подстилающей среды и граничных блоков и, во-вторых, неявно, через неупругие смещения.

2.3. Дискретизация

В модели используется безразмерное время, единице которого при интерпретации результатов присваивается выбранное реальное значение (например, 1 год). В вычислительных целях осуществляется дискретизация по времени путем введения шага Δt и дискретных моментов времени $t_i = t_0 + i\Delta t$ ($i = 1, 2, \dots$), в которые рассматривается состояние блоковой структуры (здесь t_0 — начальный момент). Переход структуры от состояния в момент времени t_i к состоянию в момент t_{i+1} происходит по следующей схеме: а) находятся новые значения неупругих смещений из уравнений (3), (6); б) вычисляются векторы сдвига и углы поворота для граничных блоков и подстилающей среды в момент t_{i+1} ; в) определяются компоненты вектора \mathbf{b} в системе (7), после чего она используется для расчета смещений и углов поворота внутренних блоков.

Для вычисления различных криволинейных интегралов выполняется дискретизация (разбиение на ячейки) подошв блоков и сегментов разломов. Предполагается, что значения сил и неупругих смещений совпадают для всех точек ячейки. Подошвы блоков дискретизируются естественным образом по широтно-долготной сетке (см. рис. 7) при этом задаются шаги дискретизации по долготе и широте.

Напомним, что (по допущению) в модификации без глубины дискретизация сегментов по глубине не делается — мы полагаем, что при вычислениях используются характеристики ячейки, принадлежащей линии разлома на поверхности Земли. В модификации с глубиной коническая поверхность разлома, наклоненная под углом α , аппроксимируется семейством плоскостей с тем же углом наклона (рис. 8). Задаются шаги дискретизации вдоль и вглубь сегмента.

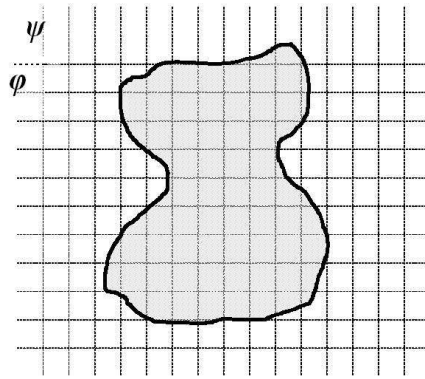


Рис. 7. Дискретизация подошвы блока.

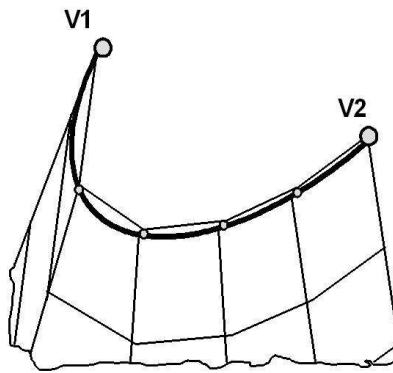


Рис. 8. Дискретизация сегмента разлома с вершинами v1 и v2.

Отметим, что хорошее приближение конической поверхности семейством плоскостей при достаточно мелком шаге разбиения вдоль линии разлома обеспечивает возможность использования системы-Р и системы-Т, описанных выше, для всех точек разлома, соответствующих на разных глубинах точке внешней сферы с координатами (φ, ψ) .

2.4. Землетрясение и крип

В каждый момент времени при вычислении компонент силы, действующей на разломе, определяется также отношение

$$\kappa = \frac{\sqrt{f_t^2 + f_l^2}}{P - f_n}, \quad (8)$$

где P — параметр, который может интерпретироваться как разность между литостатическим и гидростатическим давлением (для всех разломов имеет одинаковую величину). Для каждого разлома задаются значения трех порогов величины κ , именно, $B > H_f \geq H_s$. Предполагается, что начальные условия таковы, что неравенство $\kappa < B$ выполняется во всех ячейках структуры. Если в момент времени t_i в какой-либо ячейке значение отношения κ достигает или превосходит значение порога B для соответствующего разлома, то это интерпретируется как землетрясение. В такой ситуации во всех ячейках, в которых $\kappa \geq B$ (таких ячеек может быть несколько), происходит резкий сброс напряжения посредством изменения значений неупругих смещений $\delta_t, \delta_l, \delta_n$ по формулам

$$\delta_t^e = \delta_t + \gamma^e \xi_t f_t, \quad \delta_l^e = \delta_l + \gamma^e f_l, \quad \delta_n^e = \delta_n + \gamma^e \xi_n f_n, \quad (9)$$

где $\delta_t, \delta_l, \delta_n, f_t, f_l, f_n$ — старые значения неупругих смещений и компонент вектора силы, действующей на единицу площади. Коэффициенты $\xi_t = K_l/K_t$ ($\xi_t = 0$ при $K_t = 0$) и $\xi_n = K_l/K_n$ ($\xi_n = 0$ при $K_n = 0$) отражают предположение о неоднородности смещений в разных направлениях в том смысле, что одно и то же значение упругой силы приводит к различным скоростям изменения различных неупругих смещений. Коэффициент γ^e задается формулой

$$\gamma^e = \frac{\sqrt{f_t^2 + f_l^2} - H_f(P - f_n)}{K_l \left(\sqrt{f_t^2 + f_l^2} + H_f f_n \right)}, \quad (10)$$

при этом для новой величины κ справедливо равенство $\kappa = H_f$, что следует из (2), (8)–(10). Здесь необходимо отметить следующий момент. Новые значения упругих сил, вычисленные по формулам (2) и (9), должны иметь те же знаки, что и значения в момент перед землетрясением. Поэтому случай, когда $(1 - K_l \gamma^e) < 0$ (и все силы могут поменять знак; доказывается, что это возможно только при $f_n < 0$) следует рассматривать отдельно. В этом случае полагаем

$$\delta_n^e = \Delta_n, \quad \gamma^e = \frac{\sqrt{f_t^2 + f_l^2} - H_f P}{K_l \sqrt{f_t^2 + f_l^2}}.$$

После описанных выше пересчетов находится правая часть системы (7), вектор \mathbf{b} , затем определяются векторы сдвига и углы поворота блоков. Если вновь в какой-либо ячейке $\kappa \geq B$, то вся процедура повторяется. Когда во всех ячейках на разломах $\kappa < B$, вычисления продолжаются по обычной схеме, описанной в разделе 2.3. При этом считается, что ячейки, в которых произошли землетрясения, находятся в состоянии крипа. Это означает, что для них в уравнениях (3) для вычисления значений неупругих смещений используются параметры W_t^s ($W_t^s > W_t$), W_l^s ($W_l^s > W_l$) и W_n^s ($W_n^s > W_n$), обеспечивающие более быстрый, по сравнению с нормальным состоянием, рост неупругих смещений. Состояние крипа продолжается до тех пор, пока $\kappa > H_s$, после чего ячейка возвращается в нормальное состояние с использованием W_t, W_l и W_n .

Принадлежащие одному разлому ячейки, в которых произошло землетрясение в момент времени t_i , объединяются в одно событие. Его параметры определяются следующим образом: а) время — t_i ; б) географические координаты эпицентра и глубина (последняя только для модификации с глубиной) — взвешенные суммы соответствующих координат (глубин) ячеек, в которых произошло землетрясение (вес ячейки определяется как отношение ее длины (в модификации без глубины) или площади (в модификации с глубиной) к сумме длин/площадей всех ячеек, в которых произошло землетрясение (отметим, что в модификации без глубины возможно приписать всем событиям одну и ту же глубину)); в) магнитуда — величина, вычисленная в случае модификации без глубины по формуле, предложенной в [18]:

$$M = 1.16 \lg L + 5.08, \quad (11)$$

где L — сумма длин вовлеченных в землетрясение ячеек разлома (в км); а в случае модификации с глубиной по формуле, предложенной в [19]:

$$M = 0.98 \lg S + 3.93, \quad (12)$$

где S — сумма площадей ячеек, вовлеченных в землетрясение (в км²).

В качестве аргумента использования формул (11) и (12) для определения модельной магнитуды приведем тот факт, что энергия, высвобождаемая в результате землетрясения, зависит главным образом от размера (площади) части разлома, которую покрывает рассматриваемое событие.

Таким образом, основным результатом моделирования является искусственный каталог землетрясений.

3. Результаты численного моделирования

Для сравнения различных модификаций сферической блоковой модели будем рассматривать результаты численного моделирования динамики и сейсмичности глобальной системы тектонических плит. При задании этой блоковой структуры возможно выделить некоторые плиты (например, наиболее крупные) в качестве граничных (в таком случае следует полагать, что законы их движения известны). Альтернативным вариантом является спецификация замкнутой структуры, которая не содержит граничных блоков и покрывает всю поверхность Земли. Отметим, что такая возможность — одно из важнейших преимуществ сферической модели по сравнению с плоской. Предыдущий анализ [2, 5] позволил сделать вывод о том, что динамика и сейсмичность глобальной системы тектонических плит точнее моделируется при помощи замкнутой блоковой структуры по сравнению со структурой, для которой определяются граничные блоки. Поэтому сосредоточимся на рассмотрении замкнутой системы тектонических плит. Поскольку в [2] приводится подробное описание вычислительных экспериментов с модификацией сферической модели, в которой при расчетах не учитывается глубина слоя, то в настоящей статье для указанной модификации ограничимся кратким изложением полученных результатов моделирования.

3.1. Модификация без глубины

Блоковая структура, аппроксимирующая глобальную систему тектонических плит, включает 15 блоков, 186 вершин и 199 разломов (и сегментов) [2], см. рис. 9. Углы наклона разломов на границах с явно выраженной субдукцией (Южная Америка/Наска, Индия/Евразия, Кокос/Карибы, вокруг Филиппин; всего в структуре — 26) равны 50° , все прочие разломы имеют наклон 90° . Очевидно, что в модификации без глубины угол наклона является достаточно искусственной характеристикой разлома.

Движение замкнутой структуры обусловлено только движением подстилающей среды, параметры которого взяты из известной модели HS2-NUVEL-1 [20]. Значения коэффициентов в формулах (2), (3), (5) и (6) определялись с использованием опыта предыдущих исследований плоских моделей (см., например, [10, 13]) и с учетом специфики сферической блоковой модели. Коэффициенты K_t , K_l , K_n , K_u , K_u^n измеряются в бар/см, коэффициенты W_t , W_l , W_n , W_u — в см/бар. Во всех описанных ниже экспериментах, если не оговорено иначе, были взяты следующие значения параметров, определяющих взаимодействие блока и подстилающей среды (см. (5), (6)): $K_u = 10$, $W_u = 0.1$, $K_u^n = 20$ и следующие значения порогов величины κ (см. (8)): $B = 0.02$, $H_f = 0.017$, $H_s = 0.014$. Несколько завышенные (по сравнению с плоскими моделями) значения первой группы обеспечивают “лучшую” привязку блока к подстилающей среде (что согласуется с представлениями о тектонике плит), а занижение значений второй группы объясняется желанием получить больше модельных событий на ограниченном интервале времени.

Было проведено несколько серий вычислительных экспериментов по изучению зависимости динамики и сейсмичности структуры от модельных параметров, в частности от характеристик вязко-упругих свойств разломов. Изменение этих параметров основывалось на зарегистрированной сейсмичности: коэффициенты K_t , K_l , K_n уменьшались, а коэффициенты W_t , W_l , W_n увеличивались для разломов с низким уровнем сейсмичности (как правило, такие разломы разделяют крупные структуры); обратная зависимость соответствовала сейсмически активным разломам. Такие зависимости отражают следующие соображения [10]. Во-первых, одна и та же величина относительного смещения соседних блоков за вычетом неупругого смещения должна вызывать на крупных разломах меньшую силу (что достигается уменьшением коэффициентов K_t , K_l , K_n). Во-вторых, скорость роста неупругого смещения при одном и том же значении силы должна быть больше для крупных разломов, представляющих собой более раздробленные и, соответственно, менее упругие и более вязкие зоны, чем разломы, разделяющие

мелкие структуры (что достигается увеличением коэффициентов W_t, W_l, W_n). Эксперименты позволили определить набор параметров, “наилучший” с точки зрения соответствия модельных и реальных данных. Его основные характеристики приведены в табл. 1 (обозначения плит введены на рис. 9).

Т а б л и ц а 1

Параметры базового варианта

Параметры дискретизации	Параметры разломов
Шаг по времени — 0.01. Шаг по пространству: вдоль сегментов — 1 км, для подошв блоков — 0.5° .	Для разломов, формирующих границы NA/SA, запад I/Au, E/NA: $K_t = K_l = K_n = 0.1$, $W_t = W_l = W_n = 1$; восток SA/An, юг SA/Af: $K_t = K_l = K_n = 0.25$, $W_t = W_l = W_n = 0.4$; запад SA/An, Co/N, P/N, An/N, Co/P, Af/NA, юг Au, запад F, юг P: $K_t = K_l = K_n = 0.5$, $W_t = W_l = W_n = 0.2$; SA/N, центр SA/An, север SA/Af, E/Ar, восток I/Au, I/E, север Au, P/NA: $K_t = K_l = K_n = 2$, $W_t = W_l = W_n = 0.05$; вокруг Ca, NA/Co, E/Af, восток и северо-восток Au, E/Au, вокруг Ph: $K_t = K_l = K_n = 5$, $W_t = W_l = W_n = 0.02$. Для прочих разломов: $K_t = K_l = K_n = 1$, $W_t = W_l = W_n = 0.1$.

Результаты вычислительных экспериментов включали пространственное распределение модельных событий, информацию о смещениях плит и о характере их взаимодействия вдоль границ. Приведем некоторые результаты моделирования для варианта из табл. 1. Было исследовано поведение граничных точек, принадлежащих границам плит, для которых четко определяется один из трех типов (дивергентные, конвергентные, трансформные). Рассмотрены такие характерные зоны [21], как, например, границы Южная Америка/Наска, Тихий Океан/Наска, Южная Америка/Африка, Индия/Евразия, вокруг Филиппин и т.д. С помощью двух смещений граничной точки в связанной с ней системе координат (системе-P) (как точки “правого” и “левого” блоков) вычислялось ее относительное смещение. По относительным смещениям граничных точек установлен качественный характер взаимодействия между плитами вдоль их границ, именно, определены модельные дивергентные (зоны растяжения), конвергентные (зоны сжатия) и трансформные (зоны скольжения) границы плит; частично эта информация представлена на рис. 9. Обнаружено принципиальное сходство в расположении упомянутых зон при сравнении модельных и реальных данных.

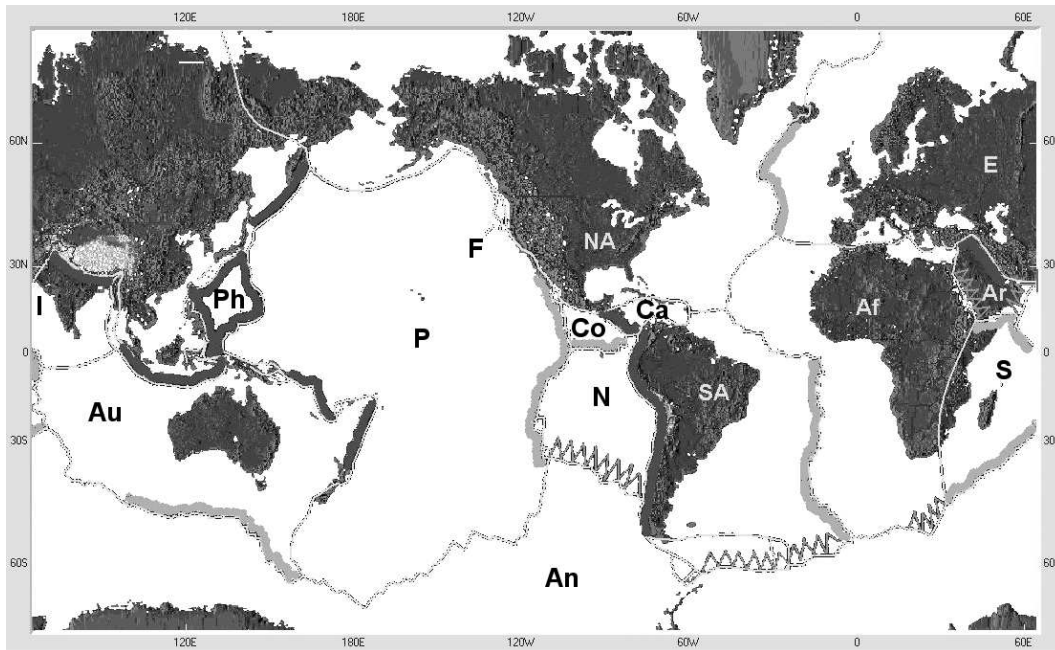


Рис. 9. Результаты моделирования характера межплитовых границ: дивергентные границы плит (растяжение, светлая штриховка), конвергентные границы плит (сжатие, темная штриховка), трансформные границы плит (скольжение, зубчатая штриховка). Обозначения плит: N — Наска, SA — Южноамериканская, Co — Кокос, Ca — Карибская, NA — Североамериканская, P — Тихоокеанская, Af — Африканская, An — Антарктическая, E — Евразийская, Ag — Аравийская, I — Индийская, S — Сомалийская, Ph — Филиппинская, Au — Австралийская, F — Хуан де Фука.

Кроме того, получено пространственное распределение модельных событий. Был проведен сравнительный анализ искусственного каталога землетрясений, который создавался с использованием формулы (11), и реального, извлеченного из глобального каталога NEIC [22] и включающего события с магнитудой не менее 5.0 за период времени с 01.01.1900 по 31.12.2006 без ограничений по глубине и местоположению (ниже NEIC-5). Изучение пространственного распределения эпицентров модельных событий позволило установить соответствие полученных сейсмически активных (границы Кокос/Карибы, Индия/Евразия, Наска/Южная Америка, район Калифорнии, Аравия/Евразия, юго-восток, восток, северо-восток и особенно север Австралийской плиты, вокруг Филиппин) и “спокойных” (юг Тихоокеанской плиты, Наска/Тихий Океан, восток и юго-запад Африки, Индия/Австралия, Северная Америка/Евразия) регионов реальным, что свидетельствует в пользу адекватности модели. Очевидно сходство в расположении эпицентров сильнейших землетрясений в зарегистрированной сейсмичности (рис. 10) и в модельном варианте (рис. 11), хотя и обнаруживаются серьезные отличия (например, на севере Африканской плиты, на границах Южная Америка/Наска, Южная Америка/Африка и др.). Отметим, что магнитуда в сферической блоковой модели, как правило, завышена относительно реальной. В то же время анализ параметров закона Гутенберга — Рихтера, вертикальной составляющей движения блоков в зонах субдукции, некоторых количественных характеристик движений блоков выявил не вполне удовлетворительные результаты. В частности, угол наклона графика повторяемости, характеризующего соотношение количества сильных и слабых событий, далек от реального, а сам график далек от линейного (известно, что график повторяемости для зарегистрированной глобальной сейсмичности близок к линейному с угловым коэффициентом, равным 1). Таким образом, был сделан вывод, что модель нуждается в усовершенствовании. В качестве основных направлений ее развития были выбраны учет глубины сферического слоя и неоднородности литосферы. Вариант из табл. 1 стал базовым для апробации модификации с глубиной.

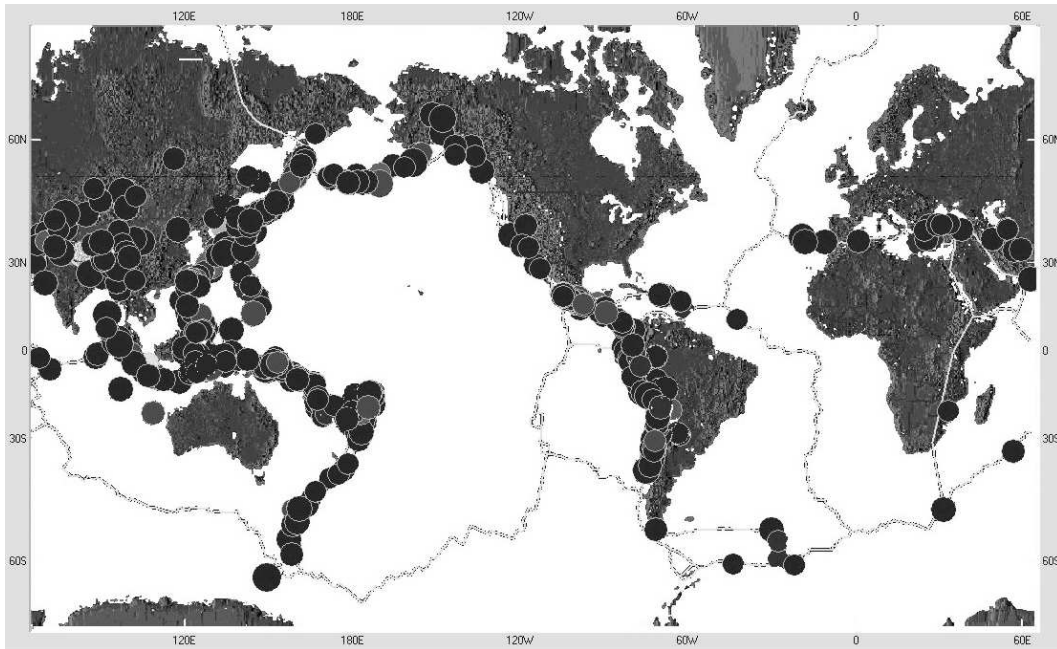


Рис. 10. Эпицентры сильнейших землетрясений с $M \geq 7.5$, каталог NEIC-5.

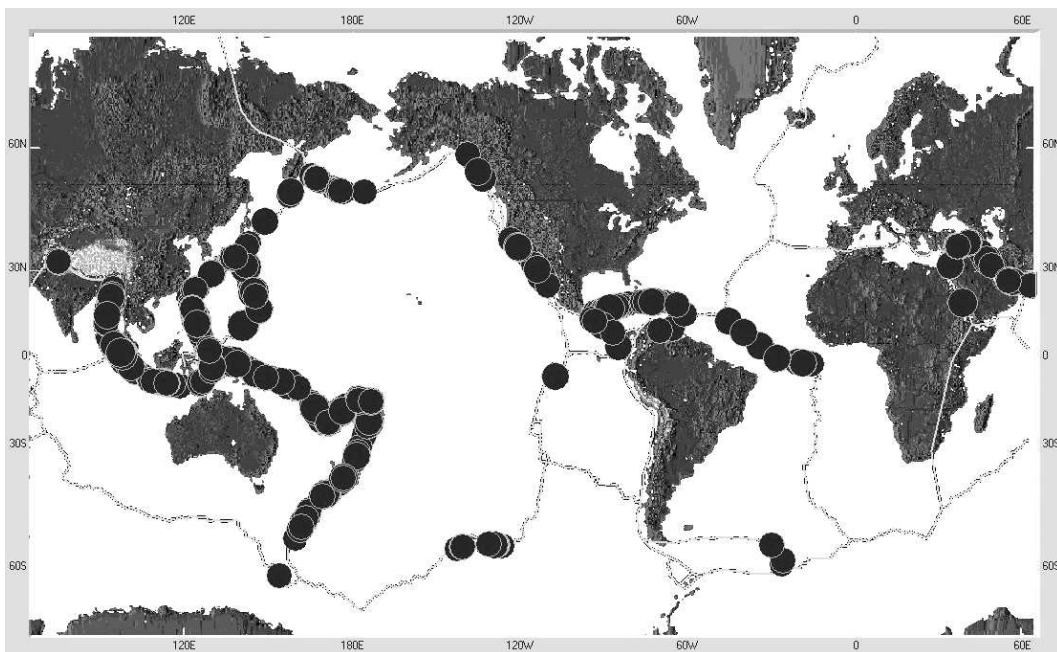


Рис. 11. Эпицентры сильнейших модельных землетрясений с $M \geq 8.0$, модификация без глубины, вариант из табл. 1.

3.2. Модификация с глубиной I: одинаковые глубины блоков

Моделирование динамики блоковой структуры, описанной в предыдущем пункте, проводится на основе варианта из табл. 1. В этом разделе предполагается, что глубина сферического слоя, играющего в модели роль литосферы, одна и та же для всех блоков структуры, именно, 40 км. Параметры разломов, перечисленные в табл. 1, во время экспериментов не менялись.

Опишем некоторые результаты моделирования. Было проведено три серии экспериментов с целью выяснения зависимости параметров соотношения Гутенберга — Рихтера для сейсмичности в глобальном масштабе, интенсивности сейсмического потока и диапазона изменения модельной магнитуды: первая (табл. 2, варианты 1.1–1.4) — от шага дискретизации сегментов по глубине (при этом все прочие параметры, в том числе углы наклона разломов, влияние которых при наличии глубины сферического слоя должно существенно возрасти, не менялись), вторая (табл. 2, варианты 2.1–2.3) — от углов наклона разломов, а третья (табл. 2, варианты 3.1–3.4) идейно повторяет первую, но за базовый принят “лучший” вариант второй серии. В качестве ориентира используется угловой коэффициент графика, полученного по реальным данным для глобальной сейсмичности за последние 100 лет; он приблизительно равен 1. Характеристики взаимодействия плит на границах и пространственное распределение сильнейших модельных событий не имеют принципиальных различий как для разных вариантов, так и по сравнению с результатами, полученными при помощи модификации без глубины. В табл. 2 приведены параметры, динамика которых представляет интерес. Отметим, что магнитуда модельного события в модификации с глубиной вычисляется по формуле (12).

Т а б л и ц а 2

Модификация с глубиной I: результаты моделирования

Вариант	Шаг дискретизации	Число модельных событий	Диапазон изменения магнитуды	Угловой коэффициент графика	Ошибка аппроксимации
1.1	40 км	237 389	[5.4,8.8]	0.804	0.232
1.2	20 км	282 305	[5.2,8.7]	0.848	0.274
1.3	8 км	328 400	[4.5,8.8]	0.876	0.236
1.4	4 км	344 984	[4.3,8.8]	0.886	0.296
2.1 = 1.3	8 км	328 400	[4.5,8.8]	0.876	0.236
2.2	8 км	340 401	[4.5,8.7]	0.883	0.230
2.3	8 км	419 120	[3.9,8.5]	0.841	0.154
3.1	40 км	324 385	[5.3,8.7]	0.828	0.177
3.2	20 км	376 240	[4.7,8.6]	0.844	0.186
3.3 = 2.3	8 км	419 120	[3.9,8.5]	0.841	0.154
3.4	4 км	436 619	[3.6,8.5]	0.845	0.162

Примечания.

1. Все графики повторяемости аппроксимировались линейной регрессией $\lg N = a - bM$, построенной по методу наименьших квадратов. Величина b является оценкой углового коэффициента графика. Под ошибкой аппроксимации понимается среднее расстояние между точками графика и построенной прямой.

2. В вариантах 2.2 и 2.3 углы наклона разломов, равные 90° в базовом варианте (табл. 1), были изменены на 75° и 105° (в зависимости от направления разлома) следующим образом: в варианте 2.2 — на 26 разломах, примыкающих к зонам субдукции, в варианте 2.3 — практически на всех разломах структуры; при этом углы, равные 50° , не менялись.

3. Интервал моделирования во всех вариантах составлял 100 единиц безразмерного времени.

4. Магнитудный интервал для определения углового коэффициента графика во всех вариантах равен [5.5,7.5].

Анализируя данные табл. 2, мы можем отметить следующие факты. Результаты моделирования, полученные в вариантах 1.1–1.4, не позволяют утверждать, что существует определенная зависимость угла наклона графика повторяемости от шага дискретизации сегментов по глубине в случае, когда значительная часть разломов имеет наклон 90° . Хотя угловой коэффициент графика незначительно увеличивается с уменьшением шага дискретизации (что является “хорошей” тенденцией), ошибка аппроксимации, наоборот, растет. Наблюдающееся расширение диапазона изменения магнитуды модельных событий имеет место благодаря уменьшению минимальной площади ячейки сегмента. В вариантах 1.1–1.4 модельные угловые коэффициенты графиков повторяемости меньше 1. Вероятно, причиной перечисленных фактов является то, что ячейки разломов, имеющих угол наклона 90° , одновременно приходят в “критическое” состояние, поэтому преобладают сильные события, график повторяемости более пологий, и влияние шага дискретизации по глубине четко не прослеживается.

В вариантах 2.1–2.3 наблюдается расширение диапазона изменения модельной магнитуды за счет появления событий с малыми магнитудами по причине изменения значений углов наклона разломов. Отметим некоторое “улучшение” ошибки аппроксимации углового коэффициента модельного графика повторяемости. Происходит это прежде всего ввиду того, что на разломе, угол наклона которого отличен от 90° , ячейки доходят до “критического” состояния в разное время, а это увеличивает число слабых событий. По совокупности показателей лучшим вариантом во второй серии следует признать вариант 2.3, для которого в третьей серии (варианты 3.1–3.4) варьировался шаг дискретизации сегментов по глубине. Обнаружено, что в данном случае при уменьшении шага наблюдается существенное (по сравнению с первой серией) расширение диапазона изменения модельной магнитуды и несущественное, но все же “улучшение” линейности модельного графика повторяемости (при этом коэффициент ближе всего к 1 в варианте 3.4), что указывает на различие в свойствах модельной сейсмичности при углах наклона разломов, равных 90° и отличных от этого значения.

Анализ результатов всех трех серий позволяет сделать вывод, что вид графика повторяемости в гораздо большей степени определяется углами наклона разломов по сравнению с величиной шага дискретизации сегментов по глубине. Действительно, уменьшение шага дискретизации влияет на интенсивность потока модельных землетрясений, но не приводит к изменению количества событий в магнитудном интервале, общем для всех модельных каталогов. Суммарное число землетрясений возрастает ввиду появления слабых событий с меньшими магнитудами, которые определяются исходя из минимально возможной площади ячейки (см. (12)). Угловой коэффициент графика изменяется незначительно. Рисунок 12 подтверждает эти выводы. Для сравнения с данными табл. 2 используем полученные ранее результаты моделирования сейсмичности глобальной системы тектонических плит посредством модификации без глубины. Для варианта из табл. 1 число модельных событий равно 79 694, на магнитудном интервале [5.5,7.5] угловой коэффициент графика равен 0.372, ошибка аппроксимации — 0.067. Из рис. 12 видно, что график (5), полученный для варианта без учета глубины слоя, в целом гораздо менее линейен по сравнению с остальными. В нем можно выделить два почти линейных участка с различными углами наклона, при этом промежуточная зона между этими участками наблюдается в окрестности магнитуды 7.0. Такой излом графика повторяемости можно объяснить следующим образом: он отражает переход от землетрясений, в которых полностью задействованы “короткие” сегменты, к землетрясениям, в которые вовлечены “длинные” сегменты. При учете глубины слоя и введении соответствующей дискретизации столь явного излома графика повторяемости не наблюдается, так как новые ячейки позволяют более равномерно заполнить магнитудный интервал модельных событий. Кроме того, график (5) показывает, что для варианта без учета глубины слоя имеет место довольно значительное число событий с аномально большой магнитудой. Подобные отличия позволяют сделать вывод, что,

по крайней мере, по некоторым характеристикам модель, учитывающая глубину, адекватнее описывает сейсмичность по сравнению с моделью без глубины.

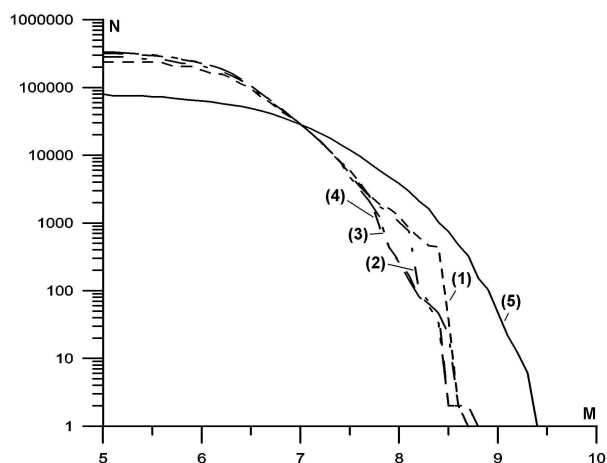


Рис. 12. Графики повторяемости, построенные по модельным каталогам из вариантов 1.1–1.4 (табл. 2, (1)–(4), соответственно) и из варианта, полученного без учета глубины сферического слоя (5); N — аккумулярованное число землетрясений, M — магнитуда.

Для сравнения модельных и реальных данных на рис. 13 приведены график повторяемости для варианта 3.4 и график для реальной сейсмичности, построенный по каталогу NEIC-5.

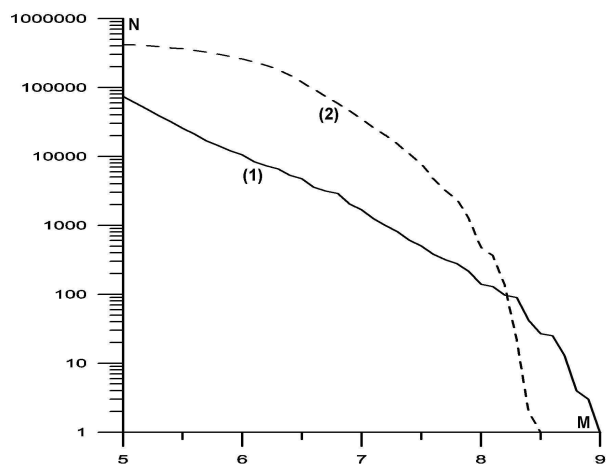


Рис. 13. Графики повторяемости, построенные по реальному (NEIC-5, (1)) и модельному (вариант 3.4, (2)) каталогам; N — аккумулярованное число землетрясений, M — магнитуда.

Для модельного графика на рис. 13 существует магнитудный интервал (область средних магнитуд), на котором график является “достаточно линейным”, однако он существенно отличается от реального, особенно вне области средних магнитуд. Для сглаживания различий следует увеличить число слабых событий в модели и улучшить “линейность” модельных графиков. В этих целях были проведены дополнительные серии вычислительных экспериментов, в которых с целью учета неоднородности литосферы задавались различные значения глубины для различных блоков и изменялись свойства разломов в зависимости от глубины.

Пространственное распределение сильнейших модельных событий в варианте 3.4 (рис. 14) незначительно отличается от распределения в варианте без учета глубины слоя (рис. 11). К плюсам варианта 3.4 отнесем появление сильных событий на известной своей сейсмической активностью границе Южная Америка/Наска.

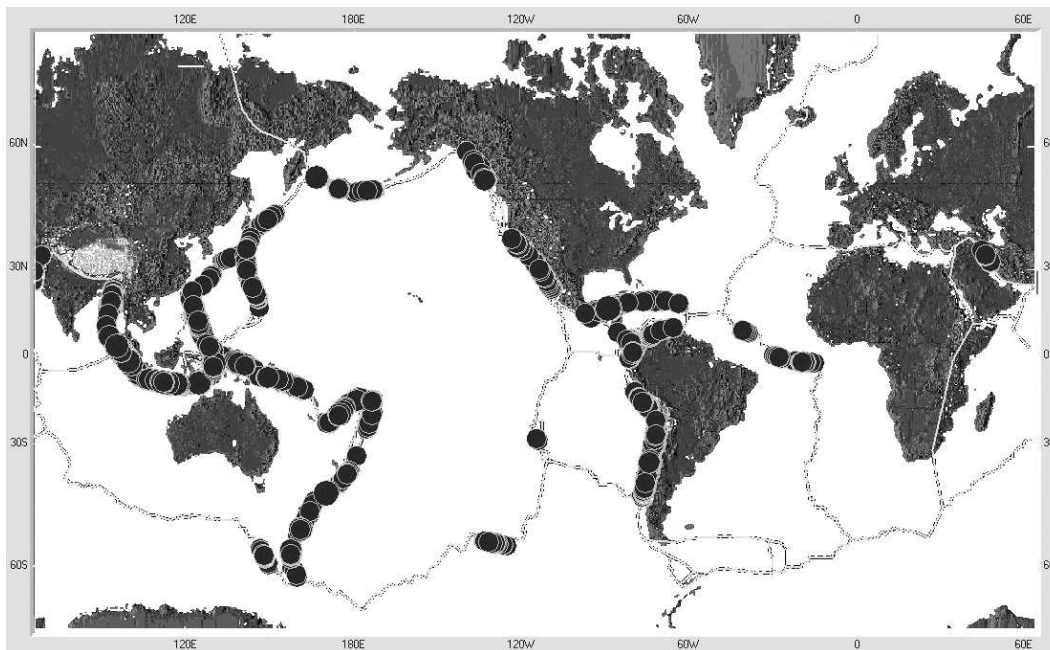


Рис. 14. Эпицентры сильнейших модельных землетрясений с $M \geq 7.0$, модификация с глубиной I, вариант 3.4 из табл. 2.

Отметим, что в некоторых регионах, где зарегистрирована высокая сейсмичность, не удалось получить сильные модельные землетрясения ни в одном варианте (например, в западной части границы Африка/Евразия, см. рис. 10). Возможно, дело в том, что движение глобальных тектонических плит в этих регионах не является основной причиной возникновения сейсмической активности.

3.3. Модификация с глубиной II: разные глубины блоков

В вычислительных экспериментах с модификацией с глубиной II, описываемых в данном разделе, модельные глубины плит рассматриваемой структуры (см. рис. 9) выбирались с учетом: а) распределения по глубине реальных землетрясений из каталога [22]; б) фактического определения глубиной блока диапазона изменения глубины модельных событий на границах этого блока (напомним, что, по сути модели, внутри блока события происходить не могут). Из этих соображений блокам приписаны следующие глубины: Наска — 50 км, Южноамериканская — 10 км, Кокос — 50 км, Карибская — 10 км, Североамериканская — 10 км, Тихоокеанская — 100 км, Африканская — 10 км, Антарктическая — 10 км, Евразийская — 30 км, Аравийская — 50 км, Индийская — 50 км, Сомалийская — 10 км, Филиппинская — 50 км, Австралийская — 50 км, Хуан де Фука — 50 км. Отметим, что при таком задании глубины некоторых блоков (например, Тихоокеанской плиты) существенно отличаются от общепринятых оценок реальных величин [23]. Следующим шагом в развитии данной модификации предполагается провести разбиение модельных плит на блоки с преимущественно континентальной (более глубокой) и преимущественно океанической (менее глубокой) корой. Такая реструктуризация позволит задать глубины блоков в соответствии с их реальными значениями, что невозможно на текущем этапе ввиду существенной неоднородности блоков в том смысле, что один блок может содержать значительные части с корой разных типов (например, Южно- и Североамериканская плиты).

Было проведено две серии экспериментов с шагом дискретизации сегментов по глубине равным 2 км. Первая серия (табл. 3, варианты 4.1–4.3) имела целью выяснение зависимости

некоторых свойств искусственной сейсмичности от закона изменения по глубине коэффициентов из (2) и (3), характеризующих вязко-упругость среды разлома. Отметим, что динамика коэффициентов выбиралась таким образом, чтобы обеспечить приближенное равенство на каждом слое дискретизации сегмента по глубине произведений $K_t W_t$, $K_l W_l$ и $K_n W_n$. Данное ограничение объясняется тем фактом, что величины, обратные перечисленным произведениям, являются важными реологическими характеристиками разлома [17]. В варианте 4.1 все упомянутые коэффициенты не зависели от глубины; в варианте 4.2 коэффициенты K_t , K_l и K_n с глубиной уменьшались из расчета 2% на каждый слой (например, для разломов Филиппинской плиты с 5 бар/см на поверхностном слое до 3 бар/см на глубине 50 км), а коэффициенты W_t , W_l и W_n аналогичным образом увеличивались (например, для разломов Филиппинской плиты с 0.02 см/бар на поверхностном слое до 0.033 см/бар на глубине 50 км); в варианте 4.3, наоборот, коэффициенты K_t , K_l и K_n увеличивались из расчета 2% на каждый слой (для указанных разломов с 5 бар/см до 8.2 бар/см), а коэффициенты W_t , W_l и W_n аналогичным образом уменьшались (для указанных разломов с 0.02 см/бар до 0.012 см/бар). Во второй серии изучалось влияние других модельных величин. В варианте 5.1 были изменены значения параметров, определяющих взаимодействие блока и подстилающей среды (см. (5), (6)): $K_u = 1$, $W_u = 0.025$, $K_u^n = 2$ вместо $K_u = 10$, $W_u = 0.1$, $K_u^n = 20$. В варианте 5.2 были увеличены в пять раз (по сравнению со всеми другими вариантами) значения коэффициентов W_t^s , W_l^s и W_n^s , используемых для расчета неупругих смещений ячеек, находящихся в состоянии крипа. Для сравнительного анализа результатов моделирования дополнительно привлечен вариант 3.4 из табл. 2 (как “лучший” в модификации с глубиной I). Представленная ниже табл. 3 составлена по аналогии с табл. 2.

Т а б л и ц а 3

Модификация с глубиной II: результаты моделирования

Вариант	Число модельных событий	Диапазон изменения магнитуды	Угловой коэффициент графика	Ошибка аппроксимации
3.4	436 619	[3.6,8.5]	0.845	0.162
4.1	506 175	[3.8,8.6]	1.844	0.650
4.2	598 087	[3.5,8.0]	—	—
4.3	831 151	[3.2,8.3]	—	—
5.1	457 558	[3.6,9.0]	1.690	0.349
5.2	404 599	[3.6,8.6]	1.827	0.150

Примечания.

1. Интервал моделирования во всех вариантах составлял 100 единиц безразмерного времени.
2. Магнитудный интервал для графика в вариантах 4.1, 5.1 и 5.2 равен [6.5,8.0], в варианте 3.4 — [5.5,7.5]; в вариантах 4.2 и 4.3 интервалы линейности не определяются.

Для сравнения модельных и реальных данных на рис. 15 приведены графики повторяемости для вариантов 5.1 и 5.2 и график для реальной сейсмичности, построенный по каталогу NEIC-5. Для модельных графиков на рис. 15 увеличился по сравнению с модификацией с глубиной I (см. рис. 13) магнитудный интервал (в области средних магнитуд), на котором графики являются “достаточно линейными”, однако они по-прежнему существенно отличаются от реального графика. Для сглаживания различий в угловых коэффициентах следует увеличить число модельных событий вне области средних магнитуд. В этих целях предполагается провести дополнительные серии вычислительных экспериментов. Изучение формы и наклона модельных графиков повторяемости показывает, что по некоторым признакам результаты,

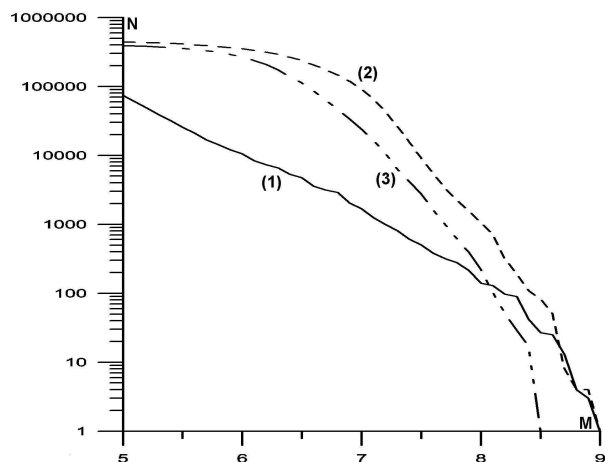


Рис. 15. Графики повторяемости, построенные по реальному (NEIC-5, (1)) и модельным ((2) — вариант 5.1, (3) — вариант 5.2) каталогам; N — аккумулярованное число землетрясений, M — магнитуда.

полученные с разными глубинами блоков, предпочтительнее результатов моделирования при одинаковой глубине и наоборот.

Дополнительный сравнительный анализ двух модификаций сферической модели был проведен с целью установления соотношения между единицей безразмерного модельного времени и реальным интервалом. Проанализированы скорости относительных смещений характерных точек на границах плит для модельной динамики и модели HS2-NUVEL-1 [20]. Результаты приведены в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

Скорости относительного смещения граничных точек

Координаты точки		Блок		$\tan \alpha_1$	$\tan \alpha_2$	$\tan \alpha_3$	$ \vec{v}_1 $	$ \vec{v}_2 $	$ \vec{v}_3 $
широта	долгота	I	II						
-21.71	-71.44	SA	N	0.23	0.22	0.24	8.66	8.06	8.15
-9.63	-13.25	SA	Af	0.22	0.20	0.21	3.28	3.36	3.45
11.19	-89.11	Ca	Co	1.89	1.69	1.54	7.95	7.10	12.16
-18.58	-112.63	P	N	-0.23	-0.23	-0.22	14.68	15.24	15.03
14.18	52.60	S	Ar	3.23	2.94	2.38	1.89	1.70	1.89
28.11	84.84	E	I	4.17	4.17	3.57	5.04	4.78	4.74
-49.85	130.44	An	Au	8.33	9.09	7.69	7.31	7.13	6.96
-7.00	149.62	P	Au	0.32	0.32	0.30	10.65	10.50	10.24
29.15	130.59	E	Ph	-0.80	-0.76	-0.06	5.12	5.17	3.99
36.89	-119.87	NA	P	-1.43	-1.41	-1.56	4.68	4.61	4.52

Примечания.

1. Рассматриваются варианты: (1) — модель движения плит HS2-NUVEL-1 (см в год); (2) — моделирование с одинаковой глубиной блоков (вариант 3.4, табл. 2, см в единицу безразмерного времени); (3) — моделирование с разными глубинами блоков (вариант 5.1, табл. 3, см в единицу безразмерного времени).

2. Все точки взяты на поверхности Земли. Система координат, в которой рассматривается относительное смещение граничной точки, связана с этой точкой (центр с ней совпадает, ось x направлена по касательной к параллели на восток, ось y — по касательной к меридиану на север). Сегмент разлома, которому принадлежит точка, разделяет блоки I и II, при этом блок I считается неподвижным, а блок II — движущимся относительно блока I. Вектор относительной скорости \vec{v}_i ($i = 1, 2, 3$ — номер варианта) характеризуется абсолютной величиной $|\vec{v}_i|$ и

тангенсом угла α_i между \vec{v}_i и осью x .

Ориентируясь на количественные характеристики смещения точек, можно сделать вывод о том, что с большой вероятностью для принятых в модели размерностей переменных и скоростей движения единица безразмерного модельного времени соответствует 1 году для обоих вариантов. Очевидно, данная гипотеза нуждается в тщательной проверке, во-первых, посредством дальнейшего сравнительного анализа свойств модельного и реального каталогов, а во-вторых, посредством изучения влияния модельных параметров на величину периода возврата сильных событий в различных регионах. Кроме того, из табл. 4 следует, что скорости относительных смещений граничных точек при одинаковой глубине блоков ближе к скоростям модели HS2-Nuvel-1, чем при разных глубинах, причем отклонения особенно велики на границах плит с резко отличающимися значениями глубины (Кокос/Карибы, Евразия/Филиппины). Отметим, что в нашем эксперименте рассматривались точки на поверхности Земли, а не на подошве блока, где следует ожидать меньших отклонений от скоростей HS2-Nuvel-1.

Пространственное распределение сильнейших модельных событий в варианте 5.1 (рис. 16), незначительно отличаясь от ранее полученных распределений (рис. 11 и 14), тем не менее обнаруживает дополнительное сходство с реальной сейсмичностью (рис. 10), состоящее в появлении мощных землетрясений на северной границе Индия/Евразия. Следует отметить, что улучшение модельного распределения эпицентров происходит не в результате подбора параметров разломов (которые во всех экспериментах постоянны, см. табл. 1), а вследствие усовершенствования самой модели.

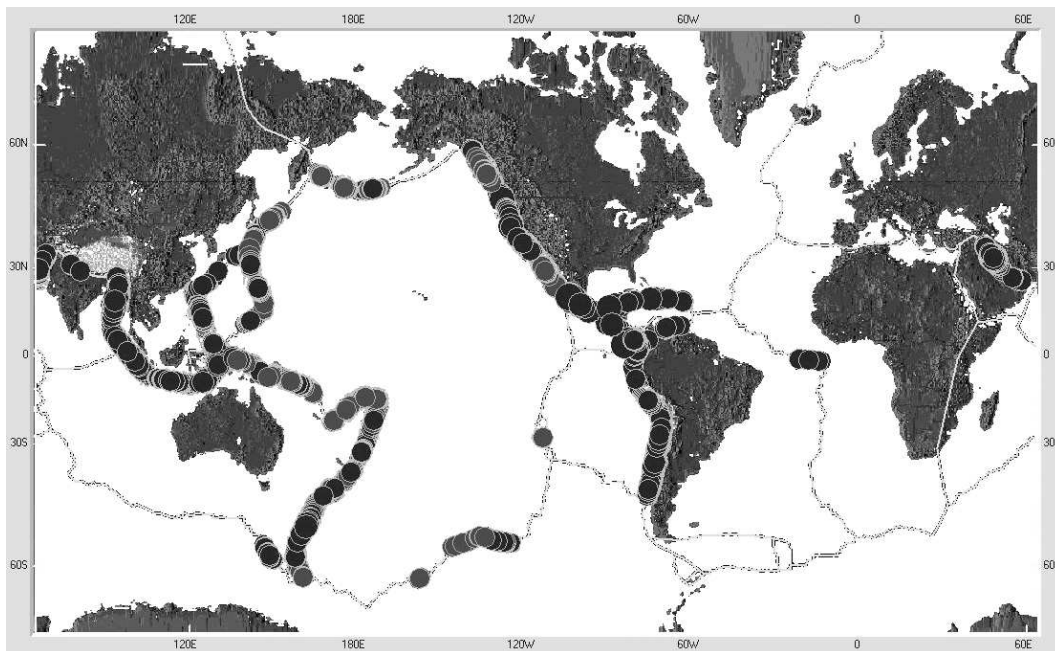


Рис. 16. Эпицентры сильнейших модельных землетрясений с $M \geq 7.0$, модификация с глубиной П, вариант 5.1 из табл. 3.

Касательно пространственного распределения событий, отметим, что в лучших вариантах во всех модификациях отражены важнейшие черты реального распределения глобальной сейсмичности, именно: а) два основных сейсмических пояса, Тихоокеанский и Средиземноморско-Трансзиатский (первый более четко), где происходит большая часть сильных событий; б) протяженная, но менее выраженная сейсмичность срединно-океанических хребтов; и в) увеличение сейсмической активности вблизи точек, где сходятся три и более плит. В то же время практически отсутствуют землетрясения в океанических рифтовых зонах, что объясняется

спецификой выбранного набора параметров. Тщательный количественный анализ реального и модельных распределений представляется на данном этапе преждевременным, поскольку, во-первых, зарегистрированная сейсмичность мала на многих границах плит (по причине недостаточной длины интервала наблюдения), а во-вторых, диапазон изменения модельной магнитуды узок и не соответствует реальному. Задача приведения магнитудных интервалов в соответствие требует дополнительного анализа в том числе и потому, что такое соответствие может зависеть от конкретного сейсмического региона.

Из экспериментов, специфичных для новой модификации модели, выделим исследование распределения модельных событий по глубине. Отметим, что “хорошее” сходство данного распределения с реальным позволило бы перейти к изучению миграции модельных событий и механизма их распространения вдоль разлома. Первые результаты для характерных глубин модельной структуры представлены в табл. 5. Очевидно, необходимо уточнение закона изменения модельных параметров в зависимости от глубины с целью перераспределения событий. Наибольшее сходство с реальным распределением обнаруживает вариант 5.1, в котором изменения коснулись величин, описывающих взаимодействие блоков и подстилающей среды.

Т а б л и ц а 5

Распределение землетрясений по глубине
(в процентах от общего числа событий с магнитудой не менее 5.0)

Глубина	NEIC	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2
до 30 км	35.3	46.4	65.1	31.2	40.9	46.5
[30, 50 км]	32.6	29.4	29.4	20.9	31.6	31.0
свыше 50 км	32.1	24.2	5.5	47.9	27.5	22.5

Примечание.

NEIC — глобальный каталог NEIC-5 (всего событий: 73 891);

4.1 — вариант 4.1 (494 449); 4.2 — вариант 4.2 (556 018); 4.3 — вариант 4.3 (780 006);

5.1 — вариант 5.1 (445 248); 5.2 — вариант 5.2 (392 477).

4. Распараллеливание: схема и эффективность

Численные эксперименты, описанные в предыдущих разделах, показали, что блоковые модели динамики литосферы при расчетах на последовательных ЭВМ требуют существенных затрат памяти и времени работы процессора, что не позволяет моделировать динамику структур с большим количеством блоков и достаточно малым шагом пространственной дискретизации. Отметим, что рассмотрение структуры на сфере существенно усложнило все выкладки и расчеты, а введение в модель глубины и, следовательно, дискретизации сегментов тектонических разломов по глубине, являясь технически сложной задачей (поскольку разломы представляют собой конические поверхности, см. [7]), потребовало дополнительных ресурсов. Однако описанный выше подход к моделированию допускает достаточно эффективное распараллеливание вычислений на многопроцессорной машине [1–3, 24].

Вычислительная часть программы распараллелена по стандартной схеме “мастер — рабочий” и реализована на многопроцессорных системах, установленных в ИММ УрО РАН (UM32, UM64) и Межведомственном суперкомпьютерном центре (MBC-15000M). Для совместимости с другими платформами (в смысле переноса программы посредством простой рекомпиляции) используется библиотека MPI, единый загрузочный модуль запускается на всех процессорах.

Блок-схема основной вычислительной процедуры блоковой модели представлена на рис. 17. Приведем необходимые пояснения. В начале своей работы программа определяет номер процессора, на который она загрузилась; один из процессоров объявляется мастером. Затем счи-

тывается из внешнего файла информация о блоковой структуре, выполняются вспомогательные вычисления (пространственная дискретизация, нахождение матрицы \mathbf{A} системы (7)).

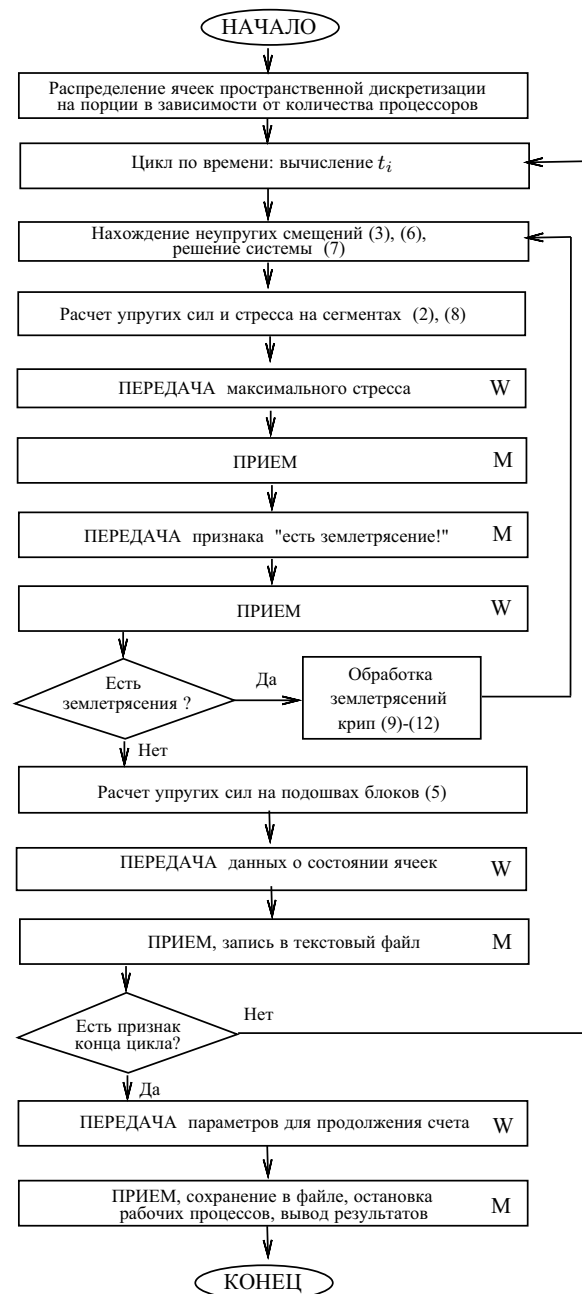


Рис. 17. Схема основной вычислительной процедуры.

Для всех модификаций модели на каждом шаге временной дискретизации наиболее трудоемкой процедурой является вычисление значений сил и неупругих смещений во всех ячейках пространственной дискретизации подошв блоков и сегментов разломов. Поскольку эти вычисления могут быть проведены независимо друг от друга, их можно равномерно разделить между процессорами, каждый из которых будет обрабатывать свою порцию ячеек. Необходимо позаботиться лишь о своевременном обмене информацией между процессорами на каждом шаге. Данный обмен реализован по схеме, приведенной на рис. 17, где операции, выполняемые только мастером, помечены символом “М”, только рабочими — символом “W”. На каждом шаге мастер вычисляет новые значения смещений блоков, граничных блоков и подстилающей

среды (что требует незначительного времени из-за малости размерности системы (7)), после чего необходимые для счета параметры рассылаются на рабочие процессоры. Пересчитанные значения сил, неупругих смещений и вектора \mathbf{b} возвращаются мастеру, происходит переход к следующему шагу. При обработке ситуации, трактуемой как землетрясение, схема несколько усложняется, поскольку в этом случае мастер должен опрашивать все рабочие процессоры до тех пор, пока существуют ячейки сегментов, находящиеся в критическом состоянии (для которых $\kappa \geq B$).

При такой организации время вычислительной работы на каждом рабочем процессоре оказывается значительно больше времени обмена данными с мастером, и за счет этого достигается довольно высокая полезная загрузка отдельного процессора. Отметим, что, поскольку при введении глубины сферического слоя объем вычислений возрос (увеличилось число ячеек сегментов), а обмены по существу остались прежними, время чистого счета увеличилось по сравнению с временем обмена и ожидания, что привело к повышению коэффициента эффективности распараллеливания. Для иллюстрации этого факта и тестирования зависимости времени решения задачи от числа процессоров и сравнения с последовательным алгоритмом был выбран вариант 4.2, рассмотрена единица безразмерного времени (100 итераций, при этом типовой расчетный вариант содержит 20000 шагов), когда большое число ячеек структуры находилось в критическом состоянии (именно такая ситуация требует значительных вычислительных затрат). Эксперимент проводился на UM32 в ИММ УрО РАН (32 процессора Xeon (2.4 ГГц), пиковая производительность 160 Гфлопс) с использованием различного числа процессоров, анализировались коэффициент ускорения, уровень модульности и коэффициенты эффективности. Результаты тестирования представлены в табл. 6. Отметим, что, хотя T_1 и T_p существенно зависят от параметров структуры, их отношение является инвариантной величиной. Интерес к вычислению и анализу уровня модульности G [25] объясняется тем, что знание этой величины позволяет найти границу сверху E_p^2 для классического коэффициента эффективности E_p^1 без запуска последовательного алгоритма, только на основе информации о временах для p процессоров.

Т а б л и ц а 6

**Время счета, коэффициенты ускорения и эффективности
для разного числа процессоров**

p	t сч.	t обм.	t сум.	S_p	E_p^1	G	E_p^2
1	6335.84	—	6335.84	—	—	—	—
2	3256.52	34.60	3291.12	1.92	0.96	94.12	0.99
4	1626.94	38.52	1665.46	3.80	0.95	42.24	0.98
8	814.74	33.98	848.72	7.46	0.93	23.98	0.96
10	654.34	27.93	682.27	9.29	0.93	23.43	0.96
16	417.36	22.26	439.62	14.41	0.90	18.75	0.95
20	331.23	22.33	353.56	17.92	0.90	14.83	0.94
28	237.08	28.53	264.61	23.94	0.86	8.31	0.89

Примечание. Используются следующие обозначения: p — количество процессоров, t сч. — время (в секундах) чистого счета, t обм. — время обмена и ожидания, t сум. — суммарное время счета, обмена и ожидания, $S_p = \frac{T_1}{T_p}$ — коэффициент ускорения, T_1 — время выполнения последовательного алгоритма, T_p — время выполнения параллельного алгоритма на p процессорах, $G = \frac{t \text{ сч.}}{t \text{ обм.}}$ — уровень модульности, $E_p^1 = \frac{S_p}{p}$, $E_p^2 = \frac{G}{G+1}$ — коэффициенты эффективности.

Из табл. 6 следует, что E_p^2 хорошо аппроксимирует E_p^1 , что согласуется с теоретическими выкладками [25]. Для числа рабочих процессоров $p \leq 20$ коэффициент ускорения S_p незначительно меньше p , коэффициенты эффективности E_p^1 и E_p^2 не меньше 0.9. Таким образом, данный алгоритм имеет достаточно высокую эффективность распараллеливания, незначитель-

но уменьшающуюся с ростом числа задействованных процессоров. Сравнение с результатами аналогичного эксперимента для модификации без глубины [2, с. 181, табл. 5], подтверждает теоретически обоснованный вывод о том, что увеличение объема вычислений (в данном случае вследствие введения дискретизации сегментов по глубине) без увеличения времени межпроцессорных обменов приводит к существенному росту эффективности распараллеливания задачи.

5. Заключительные замечания

Упрощения, принятые в сферической блоковой модели, не дают возможности делать какие-либо выводы о качестве аппроксимации реального сейсмического потока модельным в конкретной точке или относительно небольшом регионе. Однако соответствие описанных результатов моделирования реальным данным, безусловно, является позитивным фактом и стимулирует дальнейшее развитие модели.

Установлено, что модель, учитывающая глубину сферического слоя, в целом адекватнее описывает динамику и сейсмичность глобальной системы тектонических плит по сравнению с моделью без глубины. Следует отметить, что данный факт имеет место, несмотря на то что глубина слоя гораздо меньше линейных размеров плит и, казалось бы, при моделировании ей можно пренебречь. Однако в этом случае нивелируется роль углов наклона разломов к земной поверхности, которые, как выяснилось в результате численных экспериментов, играют определяющую роль в свойствах искусственной сейсмичности. Модификация с глубиной II, в которой учтена неоднородность литосферы через задание разных глубин для различных частей структуры и варьирование параметров, характеризующих вязко-упругие свойства разломов, в зависимости от глубины, открывает дополнительные возможности для моделирования.

Перечислим основные характерные черты различных модификаций сферической блоковой модели. Модификация без глубины может использоваться для качественного изучения взаимодействия блоков вдоль границ и таких свойств сейсмического потока, как пространственное распределение эпицентров, сейсмический цикл, миграция событий вдоль тектонических разломов. Главным ее преимуществом является высокая скорость счета; недостатки очевидны. Модификация с глубиной I позволяет начать изучение механизма распространения землетрясения вдоль разлома, классифицировать события, существенно расширить диапазон изменения модельной магнитуды. Наконец, модификация с глубиной II — попытка учета неоднородности литосферы в рамках сферической блоковой модели — дополнительно призвана обеспечить возможность исследования распределения модельных землетрясений по глубине и изучения зависимости искусственной сейсмичности от различных законов изменения с глубиной вязко-упругих свойств среды.

Авторы выражают глубокую признательность А.А. Соловьеву и А.Т. Исмаил-заде за внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 16.06.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мельникова Л. А., Розенберг В. Л. Параллельная реализация сферической модификации блоковой модели // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Вып. 3. Екатеринбург, 1999. С. 186–200.
2. Мельникова Л. А., Розенберг В. Л. Моделирование динамики и сейсмичности глобальной системы тектонических плит на МВС-1000 // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Вып. 7. Екатеринбург, 2003. С. 152–184.
3. Мельникова Л. А., Розенберг В. Л. Моделирование динамики и сейсмичности глобальной системы тектонических плит с учетом глубины сферического слоя // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Вып. 9. Екатеринбург, 2006. С. 150–167.
4. Мельникова Л. А., Розенберг В. Л., Соболев П. О., Соловьев А. А. Численное моделирование динамики системы тектонических плит: сферическая модификация блоковой модели // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. Вычисл. сейсмология. Вып. 31. М.: ГЕОС, 2000. С. 138–153.

5. **Мельникова Л. А., Розенберг В. Л., Соболев П. О., Соловьев А. А.** Сферическая блоковая модель: изучение динамики и сейсмичности глобальной системы тектонических плит // Анализ геодинамических и сейсмических процессов. Вычисл. сейсмология. Вып. 35. М.: ГЕОС, 2004. С. 82–107.
6. **Розенберг В. Л., Мельникова Л. А.** Новая модификация сферической блоковой модели: алгоритмическая и программная реализация на МВС // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ-2007): Тр. междунар. конф. Челябинск, 2007. Т. 1. С.221–226.
7. **Rozenberg V. L., Melnikova L. A., Soloviev A. A., and Sobolev P. O.** The spherical block model: (i) different modifications; (ii) simulation of dynamics and seismicity of the global system of tectonic plates // 8th workshop on non-linear dynamics and earthquake prediction. Trieste, 2005. Preprint, SMR.1676-5.
8. **Rozenberg V. L., Sobolev P. O., Soloviev A. A., and Melnikova L. A.** The spherical block model: dynamics of the global system of tectonic plates and seismicity // Pure Appl. Geophys. 2005. № 162. P. 145–164.
9. **Gabrielov A. M., Newman W. I.** Seismicity modeling and earthquake prediction: a review // Geophysical Monograph 83. IUGG, 1994. Vol. 18. P. 7–13.
10. **Soloviev A. A., Ismail-Zadeh A. T.** Models of dynamics of block-and-fault systems // Nonlinear dynamics of the lithosphere and earthquake prediction / Eds. V. I. Keilis-Borok, A. A. Soloviev. Berlin-Heidelberg: Springer, 2003. P. 71–139.
11. **Габриэлов А. М., Кейлис-Борок В. И., Левшина Т. А., Шапошников В. А.** Блоковая модель динамики литосферы // Математические методы в сейсмологии и геодинамике. Вычисл. сейсмология. Вып. 19. М.: Наука, 1986. С. 168–178.
12. **Panza G. F., Soloviev A. A., Vorobieva I. A.** Numerical modelling of block-structure dynamics: applications to the Vrancea region // Pure Appl. Geophys. 1997. № 149. P. 313–336.
13. **Sobolev P. O., Soloviev A. A., Rotwain I. M.** Modeling of lithosphere dynamics and seismicity for the Near East // Computational seismology and geodynamics / Eds. D. K. Chowdhury. Washington: American Geophysical Union, 1999. Vol. 4. P. 115–123.
14. **Keilis-Borok V. I., Rotwain I. M., Soloviev A. A.** Numerical modelling of block structure dynamics: dependence of a synthetic earthquake flow on the structure separateness and boundary movements // J. of Seismology. 1997. № 1. P. 151–160.
15. **Rundquist D. V., Soloviev A. A.** Numerical modeling of block structure dynamics: an arc subduction zone // Phys. Earth Planet. Int. 1999. Vol. 111, № 3. P. 241–252.
16. **Rozenberg V. L., Soloviev A. A.** Considering 3D movements of blocks in the model of block structure dynamics // 4th workshop on non-linear dynamics and earthquake prediction. Trieste, 1997. Preprint, SMR.1011-3.
17. **Ismail-Zadeh A. T., Le Mouel J.-L., Soloviev A. A., Tapponnier P., and Vorobieva I. A.** Modeling of block-and-fault system dynamics and seismicity: description of the model and application to that Tibet-Himalayan region // 8th workshop on non-linear dynamics and earthquake prediction. Trieste, 2005. Preprint, SMR.1676-4.
18. **Wells D. L., Coppersmith K. L.** New empirical relationships among magnitude, rupture length, rupture width, rupture area, and surface displacement // Bull. Seism. Soc. of America. 1994. Vol. 84, № 4. P. 974–1002.
19. **Utsu T., Seki A.** A relation between the area of aftershock region and the energy of main shock // J. Seism. Soc. Japan. 1954. Vol. 7. P. 233–240.
20. **Gripp A. E., Gordon R. G.** Current plate velocities relative to the hotspots incorporating the NUVEL-1 global plate motion model // Geoph. Res. Lett. 1990. Vol. 17, no. 8. P. 1109–1112.
21. **Mutter J. C.** Seismic images of plate boundaries // Scientific American. 1986. Vol. 254. P. 66–75.
22. **Global Hypocenters Data Base CD-ROM** // NEIC/USGS, Denver, CO, 2006.
23. **McKnight T.** Geographica: The complete illustrated Atlas of the world. New York: Barnes and Noble Books, 2004.
24. **Soloviev A. A., Maksimov V. I., Rozenberg V. L., Ermoliev Y. M.** Block models of lithosphere dynamics: approach and algorithms // Lecture notes in computer science 2328. Volume on parallel processing and applied mathematics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2001. P. 572–579.
25. **Kwiatkowski J.** Evaluation of parallel programs by measurement of its granularity // Lecture notes in computer science 2328. Volume on parallel processing and applied mathematics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2001. P. 145–153.

УДК 517.977

**СТРАТЕГИИ МИНИМАКСНОГО РИСКА (СОЖАЛЕНИЯ)
В СИСТЕМЕ С ПРОСТЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ¹****Д. А. Серков**

Для задачи управления в условиях динамических помех обсуждается возможность использования критерия минимаксного риска (сожаления) Сэвиджа. На примере системы с простыми движениями проводится сравнение соответствующих стратегий с оптимальными позиционными стратегиями.

1. Введение

Рассматривается управляемая система в условиях динамических помех. Динамика системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Управление и помеха стеснены геометрическими ограничениями. Качество управления оценивается терминальным показателем качества. Сторона, формирующая управление, стремится минимизировать величину показателя качества. В отношении способа формирования помехи предполагается лишь, что порождаемые им реализации помехи являются измеримыми функциями времени.

В работах [1–7] и многих других исследованиях, посвященных дифференциальным играм (см. библиографию в [3, 5–7]), главное внимание уделено обеспечению наилучшего значения показателя качества в случаях эффективного противодействия помехи. Это типично для задач, в которых, во-первых, помеха формируется исходя из целей, противоположных целям управления, а во-вторых, способ формирования помехи не исключает ее зависимости от состояния управляемой системы или от действий управляющей стороны. Такое предположение о характере помехи и ее информированности определило конструкцию оценки той или иной стратегии управления, называемой гарантированным результатом [1, 3, 5–7] и отвечающей минимаксному критерию.

Имеются также и задачи, где заведомо известно, что поведение помехи не связано со значениями рассматриваемого показателя качества и не зависит от состояния управляемой системы или действий управляющей стороны. Такая ситуация типична, когда помехой выступают, например, природные силы по отношению к управляемым материальным объектам или производственным процессам (ветер при посадке самолета или при управлении парусным судном, климатические или природные условия в сельскохозяйственной или природопользовательской деятельности), массовое поведение по отношению к действиям индивида (макроэкономические условия при управлении отдельным предприятием или портфельными инвестициями).

При указанных обстоятельствах представляется возможным перейти от минимаксного критерия оценки стратегии управления, реализованного в форме гарантированного результата [3, 6], к оценке, основанной на критерии минимаксного риска (сожаления) Сэвиджа [9]. При этом в качестве неопределенностей рассматривать программные помехи, а в качестве альтернатив — неупреждающие (в частности, позиционные) стратегии.

Поясним подробнее конструкцию этого критерия применительно к задаче управления в условиях неопределенности. Зафиксируем начальную позицию и выберем произвольную допустимую (программную) помеху. Сначала рассмотрим возникающую при этом задачу оптимального управления для заданной управляемой системы и показателя качества. Результат,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00436).

получаемый при решении этой задачи, заведомо не хуже результата для любого способа управления в условиях неопределенности, т.е. когда о реализации именно этой помехи неизвестно. Затем для этой же помехи и для какой-либо стратегии управления вычислим наибольшее значение показателя качества на порожденных ими движениях. Разница между этими двумя величинами характеризует наше сожаление о реализации риска ухудшения результата при выборе данной стратегии управления по сравнению с управлением, оптимальным для данной помехи. Стратегия управления, у которой максимум сожаления по всем допустимым (программным) помехам минимален, считается оптимальной по критерию минимаксного риска (сожаления). Далее (для краткости) такие стратегии будем называть оптимальными по риску, а величину минимакса этого риска — оптимальным риском.

В частности, если величина оптимального риска равна нулю в некоторой начальной позиции, то для этой позиции существует стратегия управления, действующая в отношении любой программной помехи так, как если бы эта помеха была известна заранее на всем промежутке управления.

Понятно, что величина оптимального риска зависит от выбранного класса допустимых стратегий. Главное требование к этому классу состоит в неупреждаемости (физической осуществимости) — независимости управления от будущего поведения системы и будущих значений помехи. Для целей данной работы в качестве класса допустимых стратегий достаточно будет рассмотреть позиционные стратегии [3, 6].

В несколько иной терминологии такая постановка задачи управления рассматривалась в [10, 11]: в [10] приведены примеры и свойства задач, обладающих нулевым оптимальным риском; в [11] для линейных систем сформулированы необходимые и достаточные условия, при которых оптимальный риск равняется нулю, и в этих условиях доказано существование оптимальной по риску стратегии, не зависящей от помехи.

Возникает вопрос, не будут ли решать задачу в предлагаемой постановке уже известные способы синтеза оптимального управления, исходящие из минимизации гарантированного результата, такие как оптимальные позиционные стратегии, смешанные позиционные стратегии или процедуры управления с поводырем [3, 6]. Частичный ответ дается в этой работе: приводится пример задачи управления для системы с простыми движениями, в которой переход от оптимальной позиционной стратегии к стратегии, оптимальной по риску, улучшает достигаемый результат.

2. Определения

Рассмотрим управляемую систему, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = f(\tau, x(\tau), u[\tau], v[\tau]), \tau \in [t_0, \vartheta] \equiv T, \\ x(t_0) = x_0 \in G_0 \subset \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^l, v \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^m, \end{cases} \quad (2.1)$$

где \mathcal{P} , \mathcal{Q} и G_0 суть компактные подмножества соответствующих конечномерных евклидовых пространств, функция $f(\cdot)$ непрерывна по совокупности аргументов, локально липшицева по второй переменной в области $T \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ и допускает продолжение всех решений уравнения (2.1) в смысле Каратеодори на интервал T при любых начальных условиях из множества G_0 и любых допустимых реализациях управления и помехи.

Изменяющиеся во времени параметры u и v будем рассматривать как управление и помеху. Реализации управления $u[\cdot]$ и помехи $v[\cdot]$ предполагаются измеримыми функциями на интервале T со значениями в \mathcal{P} и \mathcal{Q} соответственно. Все реализации управления распадаются на классы эквивалентности, состоящие из функций, отличающихся разве что на множестве меры нуль. Обозначим \mathbf{U}_T множество таких классов эквивалентности. Аналогично, все классы эквивалентности для реализаций помехи обозначим \mathbf{V}_T . Для множеств сужений элементов

из \mathbf{U}_T и \mathbf{V}_T на произвольный интервал $[s_1, s_2] \subseteq T$ используем обозначения $\mathbf{U}_{[s_1, s_2]}$ и $\mathbf{V}_{[s_1, s_2]}$ соответственно.

Всюду далее под элементами \mathbf{U}_T и \mathbf{V}_T подразумеваются эти классы эквивалентности. Пусть $u[\cdot] \in \mathbf{U}_T$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$; обозначим $x(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot], v[\cdot])$ решение уравнения (2.1) на интервале T . В силу сделанных предположений это решение будет единственным. Кроме того, найдется такое компактное подмножество $G \subset T \times \mathbb{R}^n$ пространства состояний системы (2.1), что для его сечения гиперплоскостью $t = t_0$ (обозначаемого далее $G|_{t_0} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t_0, x) \in G\}$) выполнено равенство $G|_{t_0} = G_0$ и при любых $u[\cdot] \in \mathbf{U}_T$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$, $(t, z) \in G$ движение $x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot])$ не покинет G вплоть до момента ϑ .

Качество управления $u[\cdot] \in \mathbf{U}_T$ оценивается терминальным показателем качества:

$$\gamma(x(\cdot, t_0, x_0, u[\cdot], v[\cdot])) = \sigma(x(\vartheta, t_0, x_0, u[\cdot], v[\cdot])), \quad (2.2)$$

который следует минимизировать. Будем предполагать функцию $\sigma(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ липшицевой с константой Липшица L_σ . Обозначим $|x(\cdot)|_C$ норму элемента $x(\cdot)$ пространства $C([t_1, t_2]; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций

$$|x(\cdot)|_C \equiv \max_{\tau \in [t_1, t_2]} |x(\tau)|,$$

где $|x(\tau)|$ означает евклидову норму элемента $x(\tau)$ в пространстве \mathbb{R}^n . Обозначим $X(t, z, v[\cdot])$ замыкание в норме пространства $C([t, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ множества

$$\{x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot]) : u[\cdot] \in \mathbf{U}_T\}. \quad (2.3)$$

Из теоремы Асколи [13, I.5.4] следует, что множество (2.3) предкомпактно в пространстве $C([t, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$, а значит, множество $X(t, z, v[\cdot])$ компактно в $C([t, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ в топологии равномерной сходимости.

Для любого $t \in T$ обозначим $\Delta = \{\tau_0 = t < \tau_1 < \dots < \tau_{n(\Delta)} = \vartheta\}$ разбиение отрезка $[t, \vartheta]$. Множество всех таких разбиений при всевозможных $t \in T$ обозначим $\Delta(T)$. Диаметром разбиения Δ назовем и обозначим величину $d(\Delta) \equiv \max\{\tau_i - \tau_{i-1} \mid i \in \overline{1, n(\Delta)}\}$.

Произвольную функцию

$$U : T \times G \rightarrow \mathbf{U}_T \quad (2.4)$$

назовем *стратегией*. Пару $\{U, \Delta\}$, где U — стратегия, а Δ — разбиение отрезка $[t, \vartheta]$ назовем *законом управления на отрезке $[t, \vartheta]$, отвечающим стратегии U и разбиению Δ* (или кратко — *законом управления*). Для произвольных $(t, z) \in G$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$, определим *пошаговое движение* $x(\cdot) \equiv x(\cdot, t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot]) \in X(t, z, v[\cdot])$, порожденное законом управления $\{U, \Delta\}$ и помехой $v[\cdot]$ из начального положения (t, z) , и реализацию управления $u(\cdot) \equiv u(\cdot, t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot]) \in \mathbf{U}_{[t, \vartheta]}$, случившуюся при построении этого пошагового движения, стандартным образом:

$$x(\tau_0, t, z, \{U, \Delta\}, v[\cdot]) = x(\tau_0) \equiv z.$$

И далее индуктивно строим движение и реализацию управления на всех интервалах разбиения Δ

$$\begin{aligned} u(\tau) &\equiv U(\tau_{i-1}, x(\tau_{i-1})), \\ x(\tau) &\equiv x(\tau, \tau_{i-1}, x(\tau_{i-1}), u(\cdot), v[\cdot]), \quad \tau \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i \in \overline{1, n(\Delta)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Понятно, что любая так определенная стратегия U будет *неупреждающей* в том смысле, что для произвольных $[t_1, t_2] \subseteq T$, Δ — разбиения отрезка $[t_1, \vartheta]$, $(t_1, z) \in G$, $v_i[\cdot] \in \mathbf{V}_T$, $i \in \overline{1, q}$ из равенств

$$v_1[\cdot]|_{[t_1, t_2]} = \dots = v_q[\cdot]|_{[t_1, t_2]} \quad (2.6)$$

следуют равенства

$$u(\cdot, t_1, z, \{U, \Delta\}, v_1[\cdot])|_{[t_1, t_2]} = \dots = u(\cdot, t_1, z, \{U, \Delta\}, v_q[\cdot])|_{[t_1, t_2]}. \quad (2.7)$$

Множество так определенных стратегий обозначим \mathbf{U}_{na} .

Предел в $C([t, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ произвольной последовательности пошаговых движений $x(\cdot, t, z, \{U, \Delta^k\}, v[\cdot])$ при $\lim_{k \rightarrow \infty} d(\Delta^k) = 0$ назовем движением, порожденным стратегией $U \in \mathbf{U}_{na}$ из начального положения (t, z) при помехе $v[\cdot]$, и пучок всех таких движений обозначим $X(t, z, U, v[\cdot])$. Понятно, что при любых $(t, z) \in G$, $U \in \mathbf{U}_{na}$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ выполнены включения

$$X(t, z, U, v[\cdot]) \subseteq X(t, z, v[\cdot]). \quad (2.8)$$

Для произвольной $U \in \mathbf{U}_{na}$ *результатом в позиции* (t, z) *при помехе* $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ назовем и обозначим величину

$$\text{res}(t, z, U, v[\cdot]) \equiv \sup_{x(\cdot) \in X(t, z, U, v[\cdot])} \gamma(x(\cdot)). \quad (2.9)$$

Для произвольных $(t, z) \in G$ и $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ *оптимальным результатом* и *множеством оптимальных траекторий* назовем и обозначим соответственно $\rho(t, z, v[\cdot])$ и $Y(t, z, v[\cdot])$ следующие объекты:

$$\rho(t, z, v[\cdot]) \equiv \min_{x(\cdot) \in X(t, z, v[\cdot])} \gamma(x(\cdot)); \quad (2.10)$$

$$Y(t, z, v[\cdot]) \equiv \operatorname{argmin}_{x(\cdot) \in X(t, z, v[\cdot])} \gamma(x(\cdot)).$$

Из (2.8), (2.9), (2.10) следует, что для всех $(t, z) \in G$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ и $U \in \mathbf{U}_{na}$ результат, доставляемый стратегией U и помехой $v[\cdot]$ в позиции (t, z) , существует, конечен и не меньше оптимального результата

$$\text{res}(t, z, U, v[\cdot]) \geq \rho(t, z, v[\cdot]). \quad (2.11)$$

О п р е д е л е н и е 1. Назовем *оптимальным риском задачи управления* (2.1), (2.2) *в позиции* $(t, z) \in G$ (или *оптимальным риском в позиции* (t, z)) и обозначим $\delta(t, z)$ величину

$$\delta(t, z) \equiv \inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{v[\cdot] \in \mathbf{V}_T} \{\text{res}(t, z, U, v[\cdot]) - \rho(t, z, v[\cdot])\}. \quad (2.12)$$

Из определения $\delta(\cdot)$, свойств системы (2.1) и (2.11) следует, что $\delta(t, z) \in [0, K]$ при всех $(t, z) \in G$ для некоторой $K > 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть задано $\varepsilon \geq 0$. Стратегию \bar{U}_ε назовем ε -*оптимальной по риску в позиции* $(t, z) \in G$, если для всех $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ верно

$$\text{res}(t, z, \bar{U}_\varepsilon, v[\cdot]) \leq \rho(t, z, v[\cdot]) + \delta(t, z) + \varepsilon. \quad (2.13)$$

Как видно из определений, ε -оптимальная по риску стратегия U дает ε аппроксимацию нижней грани в (2.12). Определения 1, 2 следуют критерию минимаксного риска (сожаления) Сэвиджа [9], выделяя, соответственно, минимальный гарантированный риск и множество стратегий, гарантирующих его с точностью до ε .

Если в (2.12) и в (2.13) опустить величину $\rho(t, z, v[\cdot])$, то мы получим минимаксный критерий оценки управления. Применение такого критерия стимулирует оптимальное парирование “наихудшей” с точки зрения целей управления (т.е., максимизирующей критерий качества) программной помехи. Понятно, что среди стратегий, успешно разрешающих задачу с такой оценкой управления, найдутся экземпляры, посредственно реагирующие на помехи нейтрального или содействующего характера.

Приведем еще одно определение свойства ε -оптимальности по риску. Это определение удобно тем, что не использует функцию оптимального риска.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть задано $\varepsilon \geq 0$. Стратегию \bar{U}_ε назовем ε -*равномерной в позиции* $(t, z) \in G$, если для любых $\zeta > \varepsilon$, $U \in \mathbf{U}_{na}$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, \vartheta]}$ найдется $\bar{v}[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, \vartheta]}$ такая, что

$$\text{res}(t, z, \bar{U}_\varepsilon, v[\cdot]) - \rho(t, z, v[\cdot]) \leq \text{res}(t, z, U, \bar{v}[\cdot]) - \rho(t, z, \bar{v}[\cdot]) + \zeta. \quad (2.14)$$

Утверждение 1. *Определения 2 и 3 равносильны.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \geq 0$ и $\bar{U}_\varepsilon \in \mathbf{U}_{na}$ удовлетворяет определению 2. Тогда для всех $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ выполнено (2.13). Из этих соотношений в силу определения $\delta(\cdot)$ при любых $U \in \mathbf{U}_{na}$ и $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$ получим

$$\text{res}(t, z, \bar{U}_\varepsilon, v[\cdot]) - \rho(t, z, v[\cdot]) \leq \sup_{v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}} \{ \text{res}(t, z, U, v'[\cdot]) - \rho(t, z, v'[\cdot]) \} + \varepsilon. \quad (2.15)$$

Значит, каковы бы ни были $\zeta > \varepsilon$, $U \in \mathbf{U}_{na}$ и $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$, найдется $\bar{v}[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$, для которой будет выполнено (2.14). Это означает, что стратегия \bar{U}_ε удовлетворяет определению 3.

Обратно: пусть $\varepsilon \geq 0$ и $\bar{U}_\varepsilon \in \mathbf{U}_{na}$ удовлетворяет определению 3. Из (2.14) следует, что при всех $\zeta > \varepsilon$, $U \in \mathbf{U}_{na}$ и $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$ выполняется

$$\text{res}(t, z, \bar{U}_\varepsilon, v[\cdot]) - \rho(t, z, v[\cdot]) \leq \sup_{v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}} \{ \text{res}(t, z, U, v'[\cdot]) - \rho(t, z, v'[\cdot]) \} + \zeta. \quad (2.16)$$

Перейдем в (2.16) к нижней грани по $U \in \mathbf{U}_{na}$. Получим неравенство

$$\text{res}(t, z, \bar{U}_\varepsilon, v[\cdot]) - \rho(t, z, v[\cdot]) \leq \inf_{U \in \mathbf{U}_{na}} \sup_{v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}} \{ \text{res}(t, z, U, v'[\cdot]) - \rho(t, z, v'[\cdot]) \} + \zeta = \delta(t, z) + \zeta, \quad (2.17)$$

верное при всех $\zeta > \varepsilon$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$. Отсюда следует, что при любой $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$ верно

$$\text{res}(t, z, \bar{U}_\varepsilon, v[\cdot]) \leq \rho(t, z, v[\cdot]) + \delta(t, z) + \varepsilon, \quad (2.18)$$

т.е. \bar{U}_ε удовлетворяет определению 2. \square

Для $\varepsilon \geq 0$ множество всех ε -оптимальных по риску стратегий в позиции (t, z) обозначим $\mathbf{U}_{na}^\varepsilon(t, z)$. Стратегии из множества $\mathbf{U}_{na}^0(t, z)$ будем называть *оптимальными по риску в позиции* (t, z) . Приведем утверждения, непосредственно вытекающие из данных определений.

Утверждение 2. *Пусть для некоторых $\zeta : G \rightarrow [0, +\infty)$ и $\bar{U} \in \mathbf{U}_{na}$ при всех $(t, z) \in G$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$ выполняется неравенство*

$$\text{res}(t, z, \bar{U}, v[\cdot]) \leq \rho(t, z, v[\cdot]) + \zeta(t, z). \quad (2.19)$$

Тогда для произвольных $(t, z) \in G$, $U \in \mathbf{U}_{na}$ и $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$ верны соотношения

$$\delta(t, z) \leq \zeta(t, z), \quad (2.20)$$

$$\bar{U} \in \mathbf{U}_{na}^{\zeta(t,z)}(t, z), \quad (2.21)$$

$$\text{res}(t, z, \bar{U}, v[\cdot]) \leq \text{res}(t, z, U, v[\cdot]) + \zeta(t, z). \quad (2.22)$$

Доказательство. Пусть при $(t, z) \in G$ и $\bar{U} \in \mathbf{U}_{na}$ верно (2.19) для всех $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$. Тогда в силу определения $\delta(\cdot)$ имеем

$$\delta(t, z) \leq \sup_{v'[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}} \{ \text{res}(t, z, \bar{U}, v'[\cdot]) - \rho(t, z, v'[\cdot]) \} \leq \zeta(t, z). \quad (2.23)$$

Включение (2.21) следует из (2.20), (2.19) и неравенства $\delta(t, z) \geq 0$. Неравенство (2.22) получается из неравенства (2.19)

$$\text{res}(t, z, \bar{U}, v[\cdot]) \leq \rho(t, z, v[\cdot]) + \zeta(t, z) \leq \text{res}(t, z, U, v[\cdot]) + \zeta(t, z)$$

с помощью соотношения (2.11), справедливого для произвольных $U \in \mathbf{U}_{na}$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t,\vartheta]}$. \square

Утверждение 3. Для любых $(t, z) \in G$ и $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{U}_{na}^\varepsilon(t, z) \neq \emptyset.$$

Доказательство. Из соотношения (2.12), определяющего функцию $\delta(\cdot)$, следует, что для любых $(t, z) \in G$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\bar{U}_\varepsilon \in \mathbf{U}_{na}$ такая, что неравенство

$$\delta(t, z) \geq \text{res}(t, z, \bar{U}_\varepsilon, v[\cdot]) - \rho(t, z, v[\cdot]) - \varepsilon \quad (2.24)$$

будет выполнено при любом $v[\cdot] \in \mathbf{V}_{[t, \vartheta]}$. Отсюда получаем соотношение (2.13), означающее, что \bar{U}_ε является ε -оптимальной по риску стратегией в позиции (t, z) . \square

Следует отметить, что имеются примеры задач управления, в которых существуют оптимальные по риску стратегии ($\mathbf{U}_{na}^0(t, z) \neq \emptyset$). В [12] приведено семейство управляемых систем, включающее линейные системы, для которого существуют оптимальные по риску стратегии, не зависящие от реализации помехи.

В некоторых случаях оптимальный риск в позиции равен нулю. Эта ситуация интересна тем, что тогда согласно (2.13) оптимальная по риску стратегия достигает такого результата, как если бы помеха была известна заранее. Условия равенства оптимального риска нулю приводятся в [10, 11].

В отличие от стационарного случая, когда элементы множеств альтернатив управления и неопределенностей выбираются независимо, в динамической ситуации допускается та или иная информированность управляющей стороны о реализующейся неопределенности — помехе. Эта информированность, а значит и зависимость, может быть опосредована любой наблюдаемой величиной, зависящей в свою очередь от помехи.

Самым естественным является предположение о зависимости от (осведомленности о) текущего состояния, т.е. о позиционном способе управления. Возможна также зависимость непосредственно от помехи. Каждый из вариантов зависимости, по-видимому, заслуживает рассмотрения за исключением случая, когда управление располагает полной информацией о реализующейся программной помехе: неопределенность по сути отсутствует, оптимальный риск равен нулю и мы оказываемся перед семейством задач оптимального управления.

3. Пример

3.1. Динамика системы и показатель качества

Пусть управляемая система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(\tau) = u_1[\tau] + v_1[\tau], \\ \dot{x}_2(\tau) = u_2[\tau] + v_2[\tau], & \tau \in [t, \vartheta] \subseteq [t_0, \vartheta] \equiv T, \\ x(t) \equiv (x_1(t), x_2(t)) = (z_1, z_2) \equiv z, & (t, z) \in G \subset T \times \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Измеримые реализации управления и помехи при почти всех $\tau \in [t, \vartheta]$ стеснены следующими ограничениями:

$$u[\tau] \equiv (u_1[\tau], u_2[\tau]) \in \mathcal{P} \equiv \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha|u_1| + (\alpha + \beta)|u_2| \leq \alpha(\alpha + \beta)\}, \quad (3.2)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta < 1, \quad (3.3)$$

$$v[\tau] \equiv (v_1[\tau], v_2[\tau]) \in \mathcal{Q} \equiv \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |v_1| + |v_2| \leq 1\}. \quad (3.4)$$

Произвольное компактное множество G начальных позиций системы (3.1), обладающее описанными в пункте 2 свойствами, предполагаем выбранным, и все приводимые ниже построения

и оценки без дальнейших оговорок относятся к позициям и движениям, содержащимся в этом множестве.

Выберем показатель качества вида

$$\gamma(x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot])) = \sigma(x(\vartheta, t, z, u[\cdot], v[\cdot])) \equiv |x_1(\vartheta)| + x_2(\vartheta). \quad (3.5)$$

Для произвольных $u[\cdot] \equiv (u_1[\cdot], u_2[\cdot]) \in \mathbf{U}_T$ и $v[\cdot] \equiv (v_1[\cdot], v_2[\cdot]) \in \mathbf{V}_T$ обозначим

$$\mathbf{u}[t] \equiv (\mathbf{u}_1[t], \mathbf{u}_2[t]) \equiv \left(\int_t^\vartheta u_1[s] ds, \int_t^\vartheta u_2[s] ds \right),$$

$$\mathbf{v}[t] \equiv (\mathbf{v}_1[t], \mathbf{v}_2[t]) \equiv \left(\int_t^\vartheta v_1[s] ds, \int_t^\vartheta v_2[s] ds \right).$$

В этих обозначениях

$$x(\vartheta, t, z, u[\cdot], v[\cdot]) = z + \mathbf{u}[t] + \mathbf{v}[t] \equiv (z_1 + \mathbf{u}_1[t] + \mathbf{v}_1[t], z_2 + \mathbf{u}_2[t] + \mathbf{v}_2[t]). \quad (3.6)$$

3.2. Функция цены игры

Покажем, что в дифференциальной игре [3, §18], [6, гл.I, §6], [7, §11] для системы (3.1) и показателя качества (3.5) существует цена игры [3, §8], [6, гл.I, §6], [7, §11.3] $\rho(\cdot) : G \rightarrow \mathbb{R}$ и она удовлетворяет равенству

$$\rho(t, z) = \begin{cases} |z_1| + z_2 + (1 - \alpha - \beta)(\vartheta - t), & |z_1| \geq (\alpha + \beta)(\vartheta - t), \\ \frac{\alpha}{\alpha + \beta}|z_1| + z_2 + (1 - \alpha)(\vartheta - t), & |z_1| \leq (\alpha + \beta)(\vartheta - t). \end{cases} \quad (3.7)$$

Существование цены дифференциальной игры (3.1), (3.5) сразу следует из вида системы и показателя качества (см. [3, теорема 18.1], [6, теорема 2.7.1], [7, теорема 11.4]). Функция (3.7) выпукла, конечна и глобально липшицева. Значит, эта функция принадлежит классу **LD** локально липшицевых функций, дифференцируемых по любому направлению $(1, y)$ $y \in \mathbb{R}^2$, и для нее справедлива теорема 6.5.1 [6, гл.VI, §5], устанавливающая критерий равенства функции из **LD** цене дифференциальной игры. Приведем формулировку указанной теоремы для рассматриваемого случая. Для произвольного $y \in \mathbb{R}^2$ введем производную по направлению $(1, y)$ функции (3.7) в позиции (t, z) :

$$\frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, y)} \equiv \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\rho(t + \delta, z + \delta y) - \rho(t, z)}{\delta}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы функция (3.7) была ценой дифференциальной игры (3.1), (3.5) необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $z \in \mathbb{R}^2$ выполнялось равенство*

$$\rho(\vartheta, z) = \sigma(z) \quad (3.8)$$

и в каждой позиции $(t, z) \in G$ выполнялись неравенства

$$\max_{v \in \mathcal{Q}} \min_{u \in \mathcal{P}} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} \leq 0, \quad (3.9)$$

$$\min_{u \in \mathcal{P}} \max_{v \in \mathcal{Q}} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} \geq 0. \quad (3.10)$$

Утверждение 4. *Функция (3.7) есть цена дифференциальной игры для системы (3.1) и показателя качества (3.5).*

Доказательство. Так как вопрос существования рассмотрен, достаточно показать, что для функции (3.7) выполняются условия теоремы 1. Краевое условие (3.8), очевидно, выполнено. Проверим справедливость неравенств (3.9), (3.10). Функция (3.7) непрерывно дифференцируема в области $\{(t, z) \in G \mid (|z_1| \neq 0) \& (|z_1| \neq (\alpha + \beta)(\vartheta - t))\}$, и, следовательно, в таких точках

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} &= \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial z_1}(u_1 + v_1) + \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial z_2}(u_2 + v_2) \\ &= \begin{cases} \alpha + \beta - 1 + \text{sign}(z_1)(u_1 + v_1) + u_2 + v_2, & |z_1| > (\alpha + \beta)(\vartheta - t), \\ \alpha - 1 + \text{sign}(z_1) \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(u_1 + v_1) + u_2 + v_2, & |z_1| < (\alpha + \beta)(\vartheta - t). \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда при $|z_1| > (\alpha + \beta)(\vartheta - t)$ получим

$$\begin{aligned} \max_{v \in \mathcal{Q}} \min_{u \in \mathcal{P}} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} &= \min_{u \in \mathcal{P}} \max_{v \in \mathcal{Q}} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} = \alpha + \beta - 1 \\ + \min_{u \in \mathcal{P}} \{ \text{sign}(z_1)u_1 + u_2 \} + \max_{v \in \mathcal{Q}} \{ \text{sign}(z_1)v_1 + v_2 \} &= \alpha + \beta - 1 - \alpha - \beta + 1 = 0. \end{aligned}$$

При $|z_1| < (\alpha + \beta)(\vartheta - t)$ имеем

$$\begin{aligned} \max_{v \in \mathcal{Q}} \min_{u \in \mathcal{P}} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} &= \min_{u \in \mathcal{P}} \max_{v \in \mathcal{Q}} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} = \alpha - 1 \\ + \min_{u \in \mathcal{P}} \left\{ \text{sign}(z_1) \frac{\alpha}{\alpha + \beta} u_1 + u_2 \right\} + \max_{v \in \mathcal{Q}} \left\{ \text{sign}(z_1) \frac{\alpha}{\alpha + \beta} v_1 + v_2 \right\} &= \alpha - 1 - \alpha + 1 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в точках дифференцируемости функции $\rho(\cdot)$ неравенства (3.9), (3.10) выполнены.

Рассмотрим точки $|z_1| = 0$. При этом условии мы находимся в области $|z_1| \leq (\alpha + \beta)(\vartheta - t)$. Для проверки неравенств (3.9), (3.10) в этих “негладких” точках вычислим производную по направлению исследуемой функции:

$$\frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\delta \frac{\alpha}{\alpha + \beta} |u_1 + v_1| + \delta u_2 + \delta v_2 + \delta(\alpha - 1)}{\delta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} |u_1 + v_1| + u_2 + v_2 + \alpha - 1. \quad (3.11)$$

Для оценки (3.9) подставим $u = (0, -\alpha)$ и, используя (3.11), получим

$$\max_{v \in \mathcal{Q}} \min_{u \in \mathcal{P}} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} \leq \max_{v \in \mathcal{Q}} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} |v_1| + v_2 \right\} - 1 = 0.$$

Для оценки (3.10) подставим $v = (0, 1)$ и, используя (3.11), получим

$$\min_{u \in \mathcal{P}} \max_{v \in \mathcal{Q}} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} \geq \min_{u \in \mathcal{P}} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} |u_1| + u_2 \right\} + \alpha = 0.$$

Следовательно, неравенства (3.9), (3.10) выполнены в точках $|z_1| = 0$. Рассмотрим область $|z_1| = (\alpha + \beta)(\vartheta - t)$. В этих точках $\rho(t, z) = z_2 + \vartheta - t$ и, если $|z_1| > 0$, то при достаточно малом δ величина $z_1 + \delta(u_1 + v_1)$ имеет тот же знак, что и величина z_1 . Следовательно, если $|z_1 + \delta(u_1 + v_1)| \geq (\alpha + \beta)(\vartheta - t - \delta)$ для достаточно малых δ , то из (3.7) получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{(\alpha + \beta)(\vartheta - t) + \delta \text{sign}(z_1)(u_1 + v_1) + \delta(u_2 + v_2) - (\alpha + \beta)(\vartheta - t - \delta) - \delta}{\delta} \\ &= \text{sign}(z_1)(u_1 + v_1) + u_2 + v_2 + \alpha + \beta - 1. \end{aligned}$$

При $|z_1 + \delta(u_1 + v_1)| \leq (\alpha + \beta)(\vartheta - t - \delta)$ для достаточно малых δ выражение (3.7) дает

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} \\ = & \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\alpha(\vartheta - t) + \delta \operatorname{sign}(z_1) \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(u_1 + v_1) + \delta(u_2 + v_2) - \alpha(\vartheta - t - \delta) - \delta}{\delta} \\ & = \operatorname{sign}(z_1) \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(u_1 + v_1) + u_2 + v_2 + \alpha - 1. \end{aligned}$$

В обоих случаях получаем

$$\max_{v \in \mathcal{Q}} \min_{u \in \mathcal{P}} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} = \min_{u \in \mathcal{P}} \max_{v \in \mathcal{Q}} \frac{\partial \rho(t, z)}{\partial(1, u + v)} = 0.$$

Таким образом, соотношения (3.9), (3.10) выполняются при всех $(t, z) \in G$. Следовательно, в соответствии с теоремой 1 функция (3.7) есть цена игры для системы (3.1) и показателя качества (3.5). \square

3.3. Оптимальные позиционные стратегии

Оптимальная позиционная стратегия [3, §6], [6, гл. I, §3], [7, §11.2] для дифференциальной игры (3.1)–(3.5) может быть построена в виде экстремального сдвига на сопутствующую точку [5]:

$$U(\tau, x, \varepsilon) \in \operatorname{argmax}_{u \in \mathcal{P}} \langle w(\tau, x, \varepsilon) - x, u \rangle, \quad (3.12)$$

$$w(\tau, x, \varepsilon) \in \operatorname{argmin}_{|w-x| \leq \varepsilon} \rho(\tau, w). \quad (3.13)$$

Из условий (3.12)–(3.13), используя (3.7), получим

$$U(\tau, x, \varepsilon) \in \begin{cases} (-\operatorname{sign}(x_1)(\alpha + \beta), 0), & |x_1| > \varepsilon_{\alpha\beta} + (\alpha + \beta)(\vartheta - \tau), \\ \{(-\operatorname{sign}(x_1)(\alpha + \beta)(1 - \mu), -\mu\alpha) | \mu \in [0, 1]\}, & |x_1| \in [\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta} + (\alpha + \beta)(\vartheta - \tau)], \\ (0, -\alpha), & |x_1| < \varepsilon_{\alpha\beta}, \end{cases}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta} = \alpha\varepsilon / \sqrt{\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2}$, $\varepsilon > 0$.

В частности, этим условиям удовлетворяет позиционная стратегия

$$\hat{U}(\tau, x, \varepsilon) = \begin{cases} (-\operatorname{sign}(x_1)(\alpha + \beta), 0), & |x_1| > \alpha\varepsilon / \sqrt{\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2}, \\ (0, -\alpha), & |x_1| \leq \alpha\varepsilon / \sqrt{\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2}. \end{cases}$$

Кроме того, непосредственно проверяется, что любая из семейства стратегий

$$U_\lambda(\tau, x) = \begin{cases} (-\operatorname{sign}(x_1)(\alpha + \beta), 0), & |x_1| > \lambda(\alpha + \beta)(\vartheta - \tau), \\ (0, -\alpha), & |x_1| \leq \lambda(\alpha + \beta)(\vartheta - \tau), \end{cases} \quad \lambda \in (0, 1] \quad (3.14)$$

является оптимальной позиционной стратегией.

Выписывая условия экстремального сдвига на сопутствующую точку [5] для второго игрока, нетрудно проверить, что стратегия

$$\bar{V}(\tau, x) \equiv (0, 1) \in \mathcal{Q}$$

является оптимальной позиционной стратегией второго игрока в игре, описываемой системой (3.1) и показателем качества (3.5).

3.4. Оптимальный результат и оптимальная по риску стратегия

Можно проверить, что оптимальный результат в начальной позиции $(t, z) \in G$ для помехи $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ в приведенных выше обозначениях имеет величину

$$\rho(t, z, v[\cdot]) = \begin{cases} |z_1 + \mathbf{v}_1[t]| + z_2 + \mathbf{v}_2[t] - (\alpha + \beta)(\vartheta - t), & |z_1 + \mathbf{v}_1[t]| \geq (\alpha + \beta)(\vartheta - t), \\ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} |z_1 + \mathbf{v}_1[t]| + z_2 + \mathbf{v}_2[t] - \alpha(\vartheta - t), & |z_1 + \mathbf{v}_1[t]| \leq (\alpha + \beta)(\vartheta - t). \end{cases} \quad (3.15)$$

Из (3.15), (3.7) получим равенства

$$\max_{v[\cdot] \in \mathbf{V}_T} \min_{u[\cdot] \in \mathbf{U}_T} \gamma(x(\cdot, t, z, u[\cdot], v[\cdot])) = \max_{v[\cdot] \in \mathbf{V}_T} \rho(t, z, v[\cdot]) = \rho(t, z), \quad (t, z) \in G.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере имеет место случай регулярности программного максимина [3, §38], [6, гл. III, §5]: программный максимин совпадает с ценой игры.

Рассмотрим стратегию $\bar{U}(\cdot) : G \rightarrow \mathcal{P}$, определяемую условиями

$$\bar{U}(\tau, x) = \begin{cases} (-\text{sign}(x_1)(\alpha + \beta), 0), & |x_1| > \vartheta - \tau, \\ (0, -\alpha), & |x_1| \leq \vartheta - \tau. \end{cases} \quad (3.16)$$

Утверждение 5. Стратегия $\bar{U}(\cdot)$ не является оптимальной позиционной стратегией в задаче управления (3.1)–(3.5) для начальных позиций из области

$$D = \{(\tau, x) \mid (\alpha + \beta)(\vartheta - \tau) < |x_1| < \vartheta - \tau\} \cap G. \quad (3.17)$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно найти помеху, при которой значение показателя качества будет превосходить цену игры. Вычислим значения показателя качества для движений, порождаемых стратегией (3.16) и программной помехой $\bar{v}[\cdot] \equiv (0, 1)$. При измельчении шага разбиения Δ пошаговые движения $x(\cdot, t, z, \{\bar{U}(\cdot), \Delta\}, \bar{v}[\cdot])$ из начальной позиции (t, z) при $|z_1| < \vartheta - t$ сходятся в $C([t, \vartheta]; \mathbb{R}^n)$ к движениям вида

$$y(\tau, t, z) = \begin{cases} (z_1, z_2 + (1 - \alpha)(\tau - t)), & \tau \in [t, \vartheta - |z_1|], \\ (z_1 - \text{sign}(z_1)(\alpha + \beta)(\tau - \vartheta + |z_1|), z_2 - \alpha(\vartheta - |z_1| - t) + \tau - t), & \tau \in [\vartheta - |z_1|, \vartheta]. \end{cases}$$

А в случае $|z_1| \geq \vartheta - t$ — к движениям

$$y(\tau, t, z) = (z_1 - \text{sign}(z_1)(\alpha + \beta)(\tau - t), z_2 + \tau - t), \quad \tau \in [t, \vartheta].$$

Следовательно, значения показателя качества в зависимости от начальной позиции будут выглядеть следующим образом:

$$\sigma(y(\vartheta, t, z)) = \begin{cases} (1 - \beta)|z_1| + z_2 + (1 - \alpha)(\vartheta - t), & |z_1| < \vartheta - t, \\ |z_1| + z_2 + (1 - \alpha - \beta)(\vartheta - t), & |z_1| \geq \vartheta - t. \end{cases}$$

Сравнивая эти значения со значениями цены игры (3.7), получим положительные величины отклонения:

$$\sigma(y(\vartheta, t, z)) - \rho(t, z) = \begin{cases} 0, & |z_1| \geq \vartheta - t, \\ \beta(\vartheta - t - |z_1|), & (\alpha + \beta)(\vartheta - t) \leq |z_1| \leq \vartheta - t, \\ \beta \left(\frac{1}{\alpha + \beta} - 1 \right) |z_1|, & |z_1| \leq (\alpha + \beta)(\vartheta - t). \end{cases}$$

□

Утверждение 6. Для всех $(t, z) \in G$ и $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ выполнены неравенства

$$\text{res}(t, z, \bar{U}(\cdot), v[\cdot]) \leq \rho(t, z, v[\cdot]) + \beta(\vartheta - t). \quad (3.18)$$

Доказательство. Пусть выбраны произвольные $(t, z) \in G$, $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ и движение $x(\cdot) \in X(t, z, \bar{U}(\cdot), v[\cdot])$, порожденное стратегией \bar{U} . Заметим, что в силу определения $\bar{U}(\cdot)$ и ограничений на управление и помеху (3.2)–(3.4) движение $x(\cdot)$, однажды покинув область $A_0 \equiv \{(\tau, (x_1, x_2)) \mid \tau \in [t, \vartheta], |x_1| < \vartheta - \tau\}$, больше в нее не возвращается. Вплоть до момента ϑ это движение остается в одной из областей

$$A_- \equiv \{(\tau, (x_1, x_2)) \mid \tau \in [t, \vartheta], x_1 \leq -(\vartheta - \tau)\},$$

$$A_+ \equiv \{(\tau, (x_1, x_2)) \mid \tau \in [t, \vartheta], x_1 \geq \vartheta - \tau\},$$

пересекающихся в прямой $\{(\vartheta, (0, x_2)) \mid x_2 \in \mathbb{R}^1\}$. При этом, если для начальной позиции $(t, z) \equiv (t, (z_1, z_2))$ и выбранной помехи $v[\cdot]$ выполняется неравенство $z_1 + \mathbf{v}_1[t] < 0$, то движение остается в области A_- , а в случае $z_1 + \mathbf{v}_1[t] > 0$ — в области A_+ . Таким образом, при $|z_1 + \mathbf{v}_1[t]| > 0$ знак первой координаты управляющего воздействия, применявшегося вне области A_0 и ее границы, определяется знаком числа $z_1 + \mathbf{v}_1[t]$.

При условии $|z_1 + \mathbf{v}_1[t]| = 0$ из ограничений (3.4) следует, что для любого разбиения Δ пошаговое движение $x(\cdot, t, z, \{\bar{U}, \Delta\}, v[\cdot])$ остается в области $\bar{A}_0 \equiv \{(\tau, x) \mid \tau \in [t, \vartheta], |x_1| \leq \vartheta - \tau\}$. А значит, управляющее воздействие стратегии \bar{U} равняется $(0, -\alpha)$ на всем промежутке управления.

Из указанных обстоятельств следует, что конечная позиция нашего движения представима в виде

$$x(\vartheta) = (z_1 + \mathbf{v}_1[t] - \text{sign}(z_1 + \mathbf{v}_1[t])(\alpha + \beta)\Delta t_2, z_2 + \mathbf{v}_2[t] - \alpha\Delta t_1),$$

где

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = \vartheta - t,$$

знак первой компоненты вектора, если она отлична от нуля, совпадает со знаком величины $z_1 + \mathbf{v}_1[t]$, а в случае $|z_1 + \mathbf{v}_1[t]| = 0$ выполняются равенства

$$\Delta t_1 = \vartheta - t, \quad \Delta t_2 = 0. \quad (3.19)$$

Используя свойства приведенного представления, оценим отклонение результата, доставляемого стратегией \bar{U} , от оптимального результата (3.15). При $|z_1 + \mathbf{v}_1[t]| \geq (\alpha + \beta)(\vartheta - t)$ имеем (используем тождество $|x| = x \text{sign}(x)$)

$$\begin{aligned} \sigma(x(\vartheta)) - \rho(t, z, v[\cdot]) &= |z_1 + \mathbf{v}_1[t] - \text{sign}(z_1 + \mathbf{v}_1[t])(\alpha + \beta)\Delta t_2| + z_2 + \mathbf{v}_2[t] - \alpha\Delta t_1 - |z_1 + \mathbf{v}_1[t]| \\ &\quad - z_2 - \mathbf{v}_2[t] + (\alpha + \beta)(\vartheta - t) = \text{sign}(z_1 + \mathbf{v}_1[t])(z_1 + \mathbf{v}_1[t] - \text{sign}(z_1 + \mathbf{v}_1[t])(\alpha + \beta)\Delta t_2) \\ &\quad + z_2 + \mathbf{v}_2[t] - \alpha\Delta t_1 - \text{sign}(z_1 + \mathbf{v}_1[t])(z_1 + \mathbf{v}_1[t]) - z_2 - \mathbf{v}_2[t] + (\alpha + \beta)(\vartheta - t) \\ &\quad - (\alpha + \beta)\Delta t_2 - \alpha\Delta t_1 + (\alpha + \beta)(\vartheta - t) = \beta\Delta t_1 \leq \beta(\vartheta - t). \end{aligned}$$

В случае $|z_1 + \mathbf{v}_1[t]| \leq (\alpha + \beta)(\vartheta - t)$ и $|z_1 + \mathbf{v}_1[t]| > 0$ получим

$$\begin{aligned} \sigma(x(\vartheta)) - \rho(t, z, v[\cdot]) &= |z_1 + \mathbf{v}_1[t] - \text{sign}(z_1 + \mathbf{v}_1[t])(\alpha + \beta)\Delta t_2| + z_2 + \mathbf{v}_2[t] - \alpha\Delta t_1 \\ &\quad - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}|z_1 + \mathbf{v}_1[t]| - z_2 - \mathbf{v}_2[t] + \alpha(\vartheta - t) \\ &= \text{sign}(z_1 + \mathbf{v}_1[t])(z_1 + \mathbf{v}_1[t] - \text{sign}(z_1 + \mathbf{v}_1[t])(\alpha + \beta)\Delta t_2) + z_2 + \mathbf{v}_2[t] - \alpha\Delta t_1 \\ &\quad - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \text{sign}(z_1 + \mathbf{v}_1[t])(z_1 + \mathbf{v}_1[t]) - z_2 - \mathbf{v}_2[t] + \alpha(\vartheta - t) \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) |z_1 + \mathbf{v}_1[t]| - \beta\Delta t_2 = \frac{\beta}{\alpha + \beta} |z_1 + \mathbf{v}_1[t]| - \beta\Delta t_2 \\ &\leq \beta(\vartheta - t - \Delta t_2) = \beta\Delta t_1 \leq \beta(\vartheta - t). \end{aligned}$$

Если верно $|z_1 + \mathbf{v}_1[t]| = 0$, то с учетом (3.19) выполняются соотношения

$$\sigma(x(\vartheta)) - \rho(t, z, v[\cdot]) = z_2 + \mathbf{v}_2[t] - \alpha(\vartheta - t) - z_2 - \mathbf{v}_2[t] + \alpha(\vartheta - t) = 0 \leq \beta(\vartheta - t).$$

Из полученных неравенств следует оценка (3.18). \square

Из оценки (3.18) и леммы 2 следует, что для любых $\varepsilon > 0$, $(t, z) \in G$, $U_\varepsilon \in \mathbf{U}_{na}^\varepsilon(t, z)$ и $v[\cdot] \in \mathbf{V}_T$ будут выполняться соотношения

$$\delta(t, z) \leq \beta(\vartheta - t), \quad (3.20)$$

$$\text{res}(t, z, U_\varepsilon, v[\cdot]) \leq \rho(t, z, v[\cdot]) + \beta(\vartheta - t) + \varepsilon, \quad (3.21)$$

$$\bar{U} \in \mathbf{U}_{na}^{\beta(\vartheta-t)}(t, z). \quad (3.22)$$

3.5. Взаимодействие с “нейтральной” помехой

Зафиксируем конечный момент времени, начальную позицию и помеху:

$$\vartheta = 2, \quad (t, z) = (0, (-1, -1)), \quad \bar{v}[\cdot] \equiv (1, 0) \in \mathcal{Q}. \quad (3.23)$$

Помеху $\bar{v}[\cdot]$ можно назвать “нейтральной”, так как при отсутствии управляющего воздействия ($u \equiv (0, 0)$) значение показателя качества в начальной позиции равно его значению в конечной позиции: $\sigma((-1, -1)) = \sigma((1, -1))$. Таким образом, по отношению к показателю качества вклад данной помехи равняется нулю.

Оценим результаты, доставляемые позиционной стратегией $U_\lambda(\cdot)$ при $\lambda = 1$ и позиционной стратегией $\hat{U}(\cdot, \varepsilon)$ при произвольном ε .

В соответствии с определением (3.14) и выбранным значением параметра

$$U_1(\tau, x) = \begin{cases} (-\text{sign}(x_1)(\alpha + \beta), 0), & |x_1| > (\alpha + \beta)(\vartheta - \tau), \\ (0, -\alpha), & |x_1| \leq (\alpha + \beta)(\vartheta - \tau). \end{cases}$$

Рассмотрим пошаговые движения $x(\cdot, 0, (-1, -1), \{U_1, \Delta\}, \bar{v}[\cdot])$, порожденные законом управления $\{U_1, \Delta\}$ и помехой $\bar{v}[\cdot]$ из начальной позиции $(0, (-1, -1))$. При измельчении шага разбиения Δ интервала $[0, 2]$ эти движения будут сходиться в $C([0, 2]; \mathbb{R}^2)$ к следующему движению

$$y[\tau] \equiv (y_1[\tau], y_2[\tau]) = \begin{cases} (-1 + (1 + \alpha + \beta)\tau, -1), & \tau \in [0, t_1], \\ (y_1(t_1) + \tau - t_1, -1 - \alpha(\tau - t_1)), & \tau \in [t_1, t_2], \\ (y_1(t_2) + (1 - \alpha - \beta)(\tau - t_2), -1 - \alpha(t_2 - t_1)), & \tau \in [t_2, 2], \end{cases}$$

где $t_1 = 1 - 2(\alpha + \beta)$, $\Delta t_2 = \frac{2}{1 + \alpha + \beta} - 2t_1$, $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = \frac{2}{1 + \alpha + \beta} - t_1$, $y_1(t_1) = -1 + (1 + \alpha + \beta)t_1$, $y_1(t_2) = y_1(t_1) + \Delta t_2$. Следовательно, для результата будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \text{res}(0, (-1, -1), U_1, \bar{v}[\cdot]) &= \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(x(\vartheta, t, z, \{U_{0.5}, \Delta\}, \bar{v}[\cdot])) = \sigma(y[2]) \\ &= \left| 1 - 2 \frac{(\alpha + \beta)^2}{1 + \alpha + \beta} \right| - 1 - 2\alpha(\alpha + \beta) \frac{1 + 2(\alpha + \beta)}{1 + \alpha + \beta} = -2(\alpha + \beta) \left(2\alpha + \frac{\beta}{1 + \alpha + \beta} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Если считать параметр β пренебрежимо малым по сравнению с параметром α , то при α , малом в сравнении с единицей, из (3.24) получим

$$\text{res}(0, (-1, -1), U_1, \bar{v}[\cdot]) \approx 0 \quad (3.25)$$

с точностью до величин, имеющих более высокий порядок малости по отношению к α . Например, при $\alpha = 0.1, \beta = 0.001$ из (3.24) получим

$$\text{res}(0, (-1, -1), U_1, \bar{v}[\cdot]) \approx -0.0406.$$

Рассмотрим пошаговые движения $x(\cdot, 0, (-1, -1), \{\hat{U}(\cdot, \varepsilon), \Delta\}, \bar{v}[\cdot])$, порожденные законом управления $\{\hat{U}(\cdot, \varepsilon), \Delta\}$ и помехой $\bar{v}[\cdot]$. При измельчении шага разбиения Δ они будут сходиться в $C([0, 2]; \mathbb{R}^2)$ к движению

$$\hat{y}[\tau, \varepsilon] \equiv (\hat{y}_1[\tau, \varepsilon], \hat{y}_2[\tau, \varepsilon]) = \begin{cases} (-1 + (1 + \alpha + \beta)\tau, -1), & \tau \in [0, t_1], \\ (-\varepsilon_{\alpha\beta} + \tau - t_1, -1 - \alpha(\tau - t_1)), & \tau \in [t_1, t_2], \\ (\varepsilon_{\alpha\beta} + (1 - \alpha - \beta)(\tau - t_2), -1 - 2\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}), & \tau \in [t_2, 2], \end{cases}$$

$$\text{где } t_1 = \frac{1 - \varepsilon_{\alpha\beta}}{1 + \alpha + \beta}, \Delta t_2 = 2\varepsilon_{\alpha\beta}, t_2 = t_1 + \Delta t_2 = \frac{1 + \varepsilon_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}(\alpha + \beta)}{1 + \alpha + \beta}.$$

Следовательно, для результата будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \text{res}(0, (-1, -1), \hat{U}(\cdot, \varepsilon), \bar{v}[\cdot]) &= \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(x(\vartheta, t, z, \{\hat{U}(\cdot, \varepsilon), \Delta\}, \bar{v}[\cdot])) = \sigma(\hat{y}[2, \varepsilon]) \\ &= \left| \varepsilon_{\alpha\beta} + (1 - \alpha - \beta) \left(2 - \frac{1 + \varepsilon_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}(\alpha + \beta)}{1 + \alpha + \beta} \right) \right| - 1 - 2\alpha\varepsilon_{\alpha\beta} \\ &= (1 - \alpha - \beta) \left(1 + \frac{\alpha + \beta - \varepsilon_{\alpha\beta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}(\alpha + \beta)}{1 + \alpha + \beta} \right) - 1 + \varepsilon_{\alpha\beta}(1 - 2\alpha) \\ &= (1 - \varepsilon_{\alpha\beta}) \left(1 + \frac{(1 - \alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{1 + \alpha + \beta} \right) - 1 + \varepsilon_{\alpha\beta}(1 - 2\alpha). \end{aligned} \quad (3.26)$$

При достаточно малом ε , учитывая, что $\alpha + \beta < 1$, получим

$$\text{res}(0, (-1, -1), \hat{U}(\cdot, \varepsilon), \bar{v}[\cdot]) > 0. \quad (3.27)$$

Например, при $\alpha = 0.1, \beta = 0.001, \varepsilon = 0.00001$ из (3.26) получим

$$\text{res}(0, (-1, -1), \hat{U}(\cdot, \varepsilon), \bar{v}[\cdot]) \approx 0.0824.$$

Кроме того, используя необходимые условия для универсальной оптимальной позиционной стратегии [8], можно установить, что для любой чистой универсальной оптимальной позиционной стратегии U и произвольного $\zeta > 0$ найдется помеха $\bar{v}_\zeta[\cdot] \in \mathbf{V}_T$, удовлетворяющая неравенству, аналогичному оценке (3.24):

$$\text{res}(0, (-1, -1), U, \bar{v}_\zeta[\cdot]) \geq -2(\alpha + \beta) \left(2\alpha + \frac{\beta}{1 + \alpha + \beta} \right) - \zeta. \quad (3.28)$$

Следовательно, при β , пренебрежимо малом по сравнению с α , и α , малом в сравнении с единицей, и при $\zeta \rightarrow 0$ также будет выполняться приближение (3.25) с точностью до величин, имеющих более высокий порядок малости по отношению к α .

Так как помеха была выбрана “нейтральной” по отношению к показателю качества, полученный результат оказался существенно меньше цены игры (3.7), имеющей для этой начальной позиции значение

$$\rho(0, (-1, -1)) = |-1| - 1 - (\alpha + \beta - 1)(2 - 0) = 2 - 2(\alpha + \beta). \quad (3.29)$$

При этом значение оптимального результата (3.15) для выбранных начальной позиции и помехи равняется

$$\rho(0, (-1, -1), \bar{v}[\cdot]) = |-1 + 2| - 1 + 0 - (\alpha + \beta)(2 - 0) = -2(\alpha + \beta), \quad (3.30)$$

что значительно меньше гарантированного результата (3.29) и на величину порядка $2(\alpha + \beta)$ меньше значений (3.25), (3.27).

Теперь обратимся к результатам, доставляемым оптимальными по риску стратегиями. В силу (3.20), (3.30) для любого $\varepsilon > 0$ и любой стратегии $U_\varepsilon \in \mathbf{U}_{na}^\varepsilon(0, (-1, -1))$ будет выполняться неравенство

$$\text{res}(0, (-1, -1), U_\varepsilon, \bar{v}[\cdot]) \leq \rho(0, (-1, -1), \bar{v}[\cdot]) + \delta(0, (-1, -1)) + \varepsilon \leq -2\alpha + \varepsilon. \quad (3.31)$$

Для стратегии \bar{U} (3.16) из (2.21) и (3.20) сразу получим

$$\text{res}(0, (-1, -1), \bar{U}, \bar{v}[\cdot]) \leq \rho(0, (-1, -1), \bar{v}[\cdot]) + \delta(0, (-1, -1)) + 2\beta \leq -2\alpha + 2\beta.$$

Кроме того, построив движения $X(0, (-1, -1), \bar{U}, \bar{v}[\cdot])$, можно непосредственно установить неравенство

$$\text{res}(0, (-1, -1), \bar{U}, \bar{v}[\cdot]) \leq -2\alpha. \quad (3.32)$$

И при выбранных значениях параметров $\alpha = 0.1$ и $\beta = 0.001$ из последних оценок следуют неравенства

$$\text{res}(0, (-1, -1), U_\varepsilon, \bar{v}[\cdot]) \leq -0.2 + \varepsilon, \quad \text{res}(0, (-1, -1), \bar{U}, \bar{v}[\cdot]) \leq -0.2,$$

существенно улучшающие аналогичные оценки для рассмотренных оптимальных позиционных стратегий U_1 и \hat{U} .

4. Заключение

Рассмотренная задача оптимального управления (3.1), (3.5) показывает, что ε -оптимальные по риску стратегии в общем случае отличаются от оптимальных позиционных стратегий. А именно, оптимальная по риску стратегия \bar{U} (3.16) не является оптимальной позиционной стратегией (см. Утверждение 5).

Эта стратегия при указанных параметрах α и β начальных условиях и помехе (см.(3.23)) дает результат (см. оценки (3.31), (3.32)), улучшающий аналогичные результаты для рассмотренных оптимальных позиционных стратегий (см. оценки (3.25), (3.27), (3.28)) на величину порядка $\alpha(\vartheta - t)$. Этот же вывод в пределе может быть распространен на произвольную универсальную оптимальную стратегию.

Кроме того, из полученных для стратегии \bar{U} оценок (3.18), (3.21) видно, что при произвольной программной помехе она дает результат, отклоняющийся от оптимального результата (а значит, и от результата для произвольной неупреждающей стратегии, в частности для оптимальной позиционной стратегии) на величину, не превосходящую $\beta(\vartheta - t)$.

Таким образом, если параметр β пренебрежимо мал по сравнению с параметром α , при переходе к стратегии \bar{U} происходит существенное улучшение результата на отдельных помехах при пренебрежимо малом ухудшении на множестве всех остальных помех.

Автор выражает благодарность М. И. Гусеву за существенные замечания, касающиеся постановки и контекста рассматриваемой задачи.

Поступила 09.07.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения. Ч. 1 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 2.
2. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения. Ч. 2 // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 3.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

4. **Красовский Н. Н.** Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. 1978. Т. 107(149), № 4. С. 541–571.
5. **Красовский Н. Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
6. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
7. **Субботин А. И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
8. **Субботина Н. Н.** Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифф. уравнения. 1983. Т. 19, № 11.
9. **Savage L. J.** The theory of statistical decision // J. Amer. Statist. Association. 1951. No. 46. P. 55–67.
10. **Серков Д. А.** Сильно оптимальные стратегии // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 2.
11. **Серков Д. А.** О равномерных стратегиях // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби (CGS'2005): Тр. междунар. семинара. Екатеринбург: Урал. ун-т, 2006. Т. 1. С. 273-284.
12. **Серков Д. А.** Стратегия минимаксного риска (сожаления) для одного класса задач управления в условиях динамических помех (в печати).
13. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
14. **Келли Дж. Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981.

УДК 519.6

О РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ КУРЬЕРА¹

А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов

Рассматривается решение задачи последовательного обхода конечных множеств с ограничениями в виде условий предшествования, именуемой ниже обобщенной задачей курьера (ОЗК), с использованием метода динамического программирования (МДП). Последний реализуется в усеченном варианте с учетом специфики ОЗК: функция Беллмана определяется не для всех позиций, что позволяет экономить память ЭВМ и в принципе повышает эффективность процедуры решения на основе МДП.

1. Постановка задачи

Рассмотрим непустое множество X , именуя его пространством состояний. В этом пространстве будет задано конечное число подмножеств (п/м) X , подлежащих посещению из заданного начального состояния $x^0 \in X$. Процесс посещения осложняется условиями предшествования, типичными для известной задачи курьера; см. [1].

Сводка общих обозначений. Всюду в дальнейшем $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$; $\mathcal{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathcal{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$, при $p \in \mathcal{N}_0$ и $q \in \mathcal{N}_0$, как обычно,

$$\overline{p, q} \triangleq \{i \in \mathcal{N}_0 \mid (p \leq i) \& (i \leq q)\};$$

мы допускаем возможность того, что $\overline{p, q} = \emptyset$ (при $q < p$). Во избежание двусмысленности в традиционных обозначениях постулируем, что элементы \mathcal{N} , т. е. натуральные числа, не являются множествами. Для обозначения промежутков вещественной прямой \mathbb{R} используем только квадратные скобки. Условимся о некоторых общих соглашениях теоретико-множественного характера.

Если x — объект, то через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее x . Если же x и y — два объекта, то $\{x; y\} \triangleq \{x\} \cup \{y\}$ (здесь и ниже \triangleq — равенство по определению); тем самым определена неупорядоченная пара объектов (двоеточие). Как обычно, $(x, y) \triangleq \{\{x\}; \{x; y\}\}$ — упорядоченная пара [2, с. 67] объектов x и y . Иногда оказывается удобным обозначать упорядоченную пару одной буквой; если z — упорядоченная пара, то через $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ обозначаем ее компоненты: $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ — суть объекты (определяемые [2, с. 67] единственным образом), для которых $z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z))$. Мы следуем далее традиционному правилу экономии скобок при обозначении значений функции двух переменных: если A и B — непустые множества, C — непустое п/м декартова произведения $A \times B$, $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in A$, $y \in B$ и при этом $(x, y) \in C$, то

$$f(x, y) \triangleq f((x, y)).$$

Если S — множество, то через $\text{Fin}(S)$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м множества S ; $(\text{FIN})[S] \triangleq \text{Fin}(S) \cup \{\emptyset\}$.

¹Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 03-01-00415 и 04-01-96093).

Мы будем следовать постановке и конструкции решения ОЗК, приведенным в [3, 4]. Напомним, что множество X , $X \neq \emptyset$, полагается фиксированным. Пусть кроме того $x^0 \in X$, $N \in \mathcal{N}$, $N \geq 2$, и задан кортеж

$$(M_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \rightarrow \text{Fin}(X) \quad (1.1)$$

целевых множеств; эти множества подлежат посещению из начального состояния x^0 , речь идет о выборе системы перемещений вида

$$(x_0 = x^0) \rightarrow (x_1 \in M_{\alpha(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (x_N \in M_{\alpha(N)}), \quad (1.2)$$

где α — перестановка в $\overline{1, N}$. Выбор α также находится в нашем распоряжении; имеются, однако, ограничения, которым должен удовлетворять конкретный выбор перестановки α . Что же касается x^0 и кортежа (1.1), используемого в (1.2), то постулируем, как и в [3, с. 181], что

$$\left(x^0 \notin \bigcup_{i=1}^N M_i \right) \& \left(M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i \in \overline{1, N} \quad \forall j \in \overline{1, N} \setminus \{i\} \right). \quad (1.3)$$

Посредством (1.1) и (1.3) определены параметры задачи, не входящие в систему ограничений; к обсуждению этой задачи мы сейчас приступаем. Итак, пусть

$$\mathbf{K} \in (\text{FIN})[\overline{1, N} \times \overline{1, N}]; \quad (1.4)$$

интерпретируем (1.4) как заданное множество индексных пар. Будем предполагать всюду в дальнейшем выполненным следующее

У с л о в и е 1.1. $\forall K \in \text{Fin}(\mathbf{K}) \exists z \in K: \text{pr}_1(z) \neq \text{pr}_2(\tilde{z}) \quad \forall \tilde{z} \in K$.

Условимся через \mathbb{P} обозначать множество всех перестановок в $\overline{1, N}$, т.е. множество всех биекций $\overline{1, N}$ на себя; \mathbb{P} — симметрическая группа множества $\overline{1, N}$. Если $\lambda \in \mathbb{P}$, то через λ^{-1} обозначаем перестановку из \mathbb{P} (т.е. $\lambda^{-1} \in \mathbb{P}$), обратную к λ ;

$$\lambda(\lambda^{-1}(k)) = \lambda^{-1}(\lambda(k)) = k \quad \forall k \in \overline{1, N}. \quad (1.5)$$

В терминах (1.4), (1.5) определяем, следуя [3, 4], множество всех допустимых перестановок, именуемых далее маршрутами; именно, полагаем, что

$$\mathbb{A} \triangleq \{ \alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K} \}. \quad (1.6)$$

В содержательном отношении ограничение, используемое в (1.6), имеет следующий смысл: перестановка (маршрут) $\alpha \in \mathbb{P}$ допустима, если при каждом выборе пары

$$z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z)) \in \mathbf{K}$$

для индексов $i \in \overline{1, N}$ и $j \in \overline{1, N}$, обладающих свойствами

$$(\alpha(i) = \text{pr}_1(z)) \& (\alpha(j) = \text{pr}_2(z)),$$

должно выполняться неравенство $i < j$.

З а м е ч а н и е 1.1. При $\mathbf{K} = \emptyset$ имеем равенство $\mathbb{A} = \mathbb{P}$. Стало быть, в случае $\mathbf{K} = \emptyset$ мы имеем задачу без ограничений. Если же $\mathbf{K} \neq \emptyset$ (а это основной для нас случай), то требования, используемые в (1.6), называем условиями предшествования. \square

Если $k \in \mathcal{N}$, то X^k есть множество всех кортежей в X длины k ; каждый такой кортеж $(x_i)_{i \in \overline{1, k}}$ есть отображение $\overline{1, k}$ в X . Итак, при $k \in \mathcal{N}$, X^k есть, строго говоря, множество всех отображений из $\overline{1, k}$ в X . Если $\alpha \in \mathbb{A}$, то

$$\prod_{i=1}^N M_{\alpha(i)} = \left\{ (x_i)_{i \in \overline{1, N}} \in X^N \mid x_j \in M_{\alpha(j)} \quad \forall j \in \overline{1, N} \right\} \quad (1.7)$$

есть множество всех возможных при выборе α трасс. Мы полагаем, в связи с (1.7), что в нашем распоряжении находится выбор любой пары $(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{1, N}})$, где $\alpha \in \mathbb{A}$, а $(x_i)_{i \in \overline{1, N}}$ — трасса из множества (1.7). Будем именовать $(\alpha, (x_i)_{i \in \overline{1, N}})$ парой маршрут-трасса. Итак, наши решения — суть пары маршрут-трасса.

Фиксируем следующие два отображения:

$$\mathbf{c} : X \times X \rightarrow [0, \infty[, \quad \mathbf{f} : X \rightarrow [0, \infty[. \quad (1.8)$$

Отображения (1.8) используем для оценивания цепочек перемещений (1.2), получая при этом критерий качества. Удобно, однако, ввести более “обширное” отображение

$$\mathfrak{C} : X^N \rightarrow [0, \infty[;$$

именно, мы полагаем, что $\forall (x_i)_{i \in \overline{1, N}} \in X^N$

$$\mathfrak{C}((x_i)_{i \in \overline{1, N}}) = \mathbf{c}(x^0, x_1) + \left(\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x_i, x_{i+1}) \right) + \mathbf{f}(x_N). \quad (1.9)$$

Подробное обсуждение вышеупомянутых элементов постановки приведено в [3, 4]. Заметим, что множество (1.7) определено, конечно, для всех перестановок $\alpha \in \mathbb{P}$, и мы на непустом множестве

$$\mathbf{S}_0 \triangleq \left\{ (\lambda, (x_i)_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathbb{P} \times X^N \mid (x_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\lambda(i)} \right\}$$

определяем отображение $W : \mathbf{S}_0 \rightarrow [0, \infty[$ по следующему правилу: если $z \in \mathbf{S}_0$, то (см. (1.9))

$$W(z) \triangleq \mathfrak{C}((y_i)_{i \in \overline{1, N}}), \quad (1.10)$$

где $(y_i)_{i \in \overline{1, N}} = \text{rg}_2(z)$. В частности, (1.10) применимо к “точкам” z из п/м \mathbf{S}_0 , в котором уже выбор первой (дискретной) компоненты совокупного решения удовлетворяет условиям предшествования. Итак, пусть

$$\mathbf{S} \triangleq \left\{ (\lambda, (x_i)_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathbb{A} \times X^N \mid (x_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\lambda(i)} \right\}; \quad (1.11)$$

тогда \mathbf{S} , где $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}_0$, есть допустимое множество следующей задачи

$$W(z) \rightarrow \min, \quad z \in \mathbf{S}. \quad (1.12)$$

Разумеется, для оценки точек множества \mathbf{S} мы используем правило (1.10).

2. Метод динамического программирования: общие соотношения

При решении задачи (1.12) мы используем вариант МДП [3, 4], предусматривающий предварительное преобразование задачи в духе [5, 6]. Мы совсем кратко охарактеризуем данное преобразование, отсылая к [3, 4] за более подробными сведениями.

Через \mathfrak{N} обозначаем семейство всех непустых п/м $\overline{1, N}$: $\mathfrak{N} \triangleq \text{Fin}(\overline{1, N})$. Тогда

$$\mathbf{N} \triangleq \mathfrak{N} \cup \{\emptyset\} = (\text{FIN})[\overline{1, N}].$$

Если $K \in \mathbf{N}$, то через $|K|$, $|K| \in \overline{0, N}$, обозначаем количество элементов (мощность) K . Если же $K \in \mathfrak{N}$, то через $(\text{bi})[K]$ обозначаем множество всех биекций “отрезка” $\overline{1, |K|}$ на K

(элементы $(\text{bi})[K]$ — взаимно однозначные отображения $\overline{1, |K|}$ на K и только они). В частности, $\mathbb{P} = (\text{bi})[\overline{1, N}]$. Кроме того, введем отображение

$$\mathbf{I} : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N} \quad (2.1)$$

по правилу [3, с. 187], которое сейчас напомним, полагая, что

$$\Sigma[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \in K)\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \quad (2.2)$$

Тогда (см. условие 1.1) оператор \mathbf{I} определяется посредством следующего правила

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\text{pr}_2(z) : z \in \Sigma[K]\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \quad (2.3)$$

Если $K \in \mathfrak{N}$, то через $(\mathbf{I}\text{-bi})[K]$ обозначаем множество всех биекций $\alpha \in (\text{bi})[K]$, для каждой из которых

$$\alpha(m) \in \mathbf{I}(\{\alpha(i) : i \in \overline{m, |K|}\}) \quad \forall m \in \overline{1, |K|}.$$

Кроме того, полагаем для краткости

$$\mathbb{P}_0 \triangleq (\mathbf{I}\text{-bi})[\overline{1, N}]. \quad (2.4)$$

С учетом результатов [3, 4] (при несущественных изменениях в символике) имеем, что

$$(\mathbf{I}\text{-bi})[K] \neq \emptyset \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \quad (2.5)$$

В частности, $\mathbb{P}_0 \neq \emptyset$. Более того, имеем (см. [3, 4]) равенство

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}_0, \quad (2.6)$$

определяющее возможность (эквивалентного) преобразования исходной задачи (1.12), так как в силу (2.6)

$$\mathbf{S} = \left\{ (\lambda, (x_i)_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathbb{P}_0 \times X^N \mid (x_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N M_{\lambda(i)} \right\}, \quad (2.7)$$

причем (см. (2.5) и его следствие) $\mathbf{S} \neq \emptyset$. Комбинируя (1.12) и (2.7), мы приходим к представлению процесса решения ОЗК в виде “выращивания” пары маршрут-трасса с соблюдением ограничений на текущие перемещения с множества на множество. Обсуждение этой интерпретации опустим, отсылая к [3–6].

Итак, напомним, что (см. (2.6)) $\mathbb{A} \neq \emptyset$ и, как следствие, $\mathbf{S} \neq \emptyset$. С учетом (2.5) мы получаем соответствующий локальный аналог этого свойства: при $K \in \mathfrak{N}$

$$\mathbb{S}[K] \triangleq \left\{ (\lambda, (x_i)_{i \in \overline{1, |K|}}) \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K] \times X^{|K|} \mid (x_i)_{i \in \overline{1, |K|}} \in \prod_{i=1}^{|K|} M_{\lambda(i)} \right\} \neq \emptyset. \quad (2.8)$$

Разумеется, при $n \triangleq |K|$ (2.8) есть множество всех таких упорядоченных пар $(\lambda, (x_i)_{i \in \overline{1, n}})$, что $\lambda \in (\mathbf{I}\text{-bi})[K]$ и

$$(x_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \prod_{i=1}^n M_{\lambda(i)}.$$

Из (2.4), (2.7) и (2.8) вытекает очевидное равенство

$$\mathbf{S} = \mathbb{S}[\overline{1, N}]; \quad (2.9)$$

(2.9) позволяет толковать ОЗК как версию “укороченной” задачи. К определению “укороченных” задач мы сейчас и приступаем; для этого напомним некоторые обозначения [3]. Прежде всего введем “укороченные” варианты критерия. Мы полагаем в дальнейшем, что

$$\mathfrak{N}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid |K| = s\} \quad \forall s \in \overline{1, N}. \quad (2.10)$$

Тогда $(\mathfrak{N}_i)_{i \in \overline{1, N}}$ определяет разбиение \mathfrak{N} . При этом $\mathfrak{N}_1 = \{\{k\} : k \in \overline{1, N}\}$.

Полагаем, что при $x \in X$ отображение $\mathfrak{C}_1[x]$, действующее из X в $[0, \infty[$, имеет вид

$$\mathfrak{C}_1[x](y) \triangleq \mathbf{c}(x, y) + \mathbf{f}(y) \quad \forall y \in X. \quad (2.11)$$

Кроме того, при $x \in X$ и $k \in \overline{2, N}$ определяем отображение

$$\mathfrak{C}_k[x] : X^k \rightarrow [0, \infty[$$

посредством следующего правила: $\forall (x_i)_{i \in \overline{1, k}} \in X^k$

$$\mathfrak{C}_k[x]((x_i)_{i \in \overline{1, k}}) \triangleq \mathbf{c}(x, x_1) + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{c}(x_i, x_{i+1}) \right) + \mathbf{f}(x_k). \quad (2.12)$$

Итак, отображение \mathfrak{C}_1 является в некотором смысле особым, а точнее, простейшим. Мы используем (2.11), (2.12) при формировании критериев “укороченных” экстремальных задач маршрутизации.

Проще всего определяется критерий в случае, когда множество оставшихся задач одноэлементно. Итак, при $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}_1$ нам следует рассмотреть все возможные перемещения из x на M_i при таком i , что $K = \{i\}$. Поскольку здесь нет необходимости в какой-либо маршрутизации, сразу введем соответствующий экстремум. Именно, при $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}_1$ полагаем, что

$$v_1(x, K) \triangleq \min_{y \in M_i} \mathfrak{C}_1[x](y), \quad (2.13)$$

где $i \in \overline{1, N}$ таково, что $K = \{i\}$. Разумеется, посредством (2.13) определена функция на $X \times \mathfrak{N}_1$.

Если $s \in \overline{2, N}$, $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}_s$, то

$$\hat{\pi}_s[x; K] : (\text{bi})[K] \times X^s \rightarrow [0, \infty[\quad (2.14)$$

определяется посредством следующего соглашения: если $z \in (\text{bi})[K] \times X^s$, то

$$\hat{\pi}_s[x; K](z) \triangleq \mathfrak{C}_s[x]((x_i)_{i \in \overline{1, s}}), \quad (2.15)$$

где $(x_i)_{i \in \overline{1, s}} = \text{rg}_2(z)$. Напомним, что (2.8) — конечное множество в силу (1.1). Поэтому при $s \in \overline{2, N}$, $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}_s$ корректно определяется число

$$v_s(x, K) = \min_{z \in \mathbf{S}[K]} \hat{\pi}_s[x; K](z). \quad (2.16)$$

Тем самым определяется (см. (2.16)) функция на множестве $X \times \mathfrak{N}_s$. С учетом (2.13), (2.15) и (2.16) мы получаем, что $\forall s \in \overline{1, N} \forall x \in X \forall K \in \mathfrak{N}_s$

$$v_s(x, K) \in [0, \infty[.$$

Напомним, что $\mathfrak{C}_N[x^0] = \mathfrak{C}$. Далее, $\mathbf{S}_0 \subset \mathbb{P} \times X^N = (\text{bi})[\overline{1, N}] \times X^N$, причем, согласно (1.10), (2.15) имеем для $z \in \mathbf{S}_0$

$$W(z) = \mathfrak{C}_N[x^0]((x_i)_{i \in \overline{1, N}}) = \hat{\pi}_N[x^0; \overline{1, N}](z),$$

где $(x_i)_{i \in \overline{1, N}} = \text{pr}_2(z)$. В частности,

$$W(z) = \hat{\pi}_N[x^0; \overline{1, N}](z) \quad \forall z \in \mathbf{S}. \quad (2.17)$$

С учетом (2.9), (2.16) и (2.17) мы получаем цепочку равенств

$$\mathbf{V} \triangleq v_N(x^0, \overline{1, N}) = \min_{z \in \mathbf{S}} W(z); \quad (2.18)$$

итак, (2.18) есть глобальный экстремум задачи (1.12). С другой стороны, согласно (2.13), мы имеем, что

$$v_1(x, \{m\}) = \min_{y \in M_m} \mathfrak{C}_1[x](y) \quad \forall x \in X \quad \forall m \in \overline{1, N}. \quad (2.19)$$

В (2.18) и (2.19) имеем два важных случая. Первый из них — искомый экстремум, а второй — простейший, не требующий какой-либо специальной маршрутизации случай. Тем не менее полезно добавить еще один, фиктивный по сути дела случай, а именно: ввести в рассмотрение ситуацию, когда какие-либо задания вообще отсутствуют.

Если $k \in \overline{0, N}$, то полагаем, что $\mathbf{N}_k \triangleq \{K \in \mathbf{N} \mid |K| = k\}$. Тогда в силу (2.10) имеем:

$$(\mathbf{N}_s = \mathfrak{N}_s \quad \forall s \in \overline{1, N}) \& (\mathbf{N}_0 \triangleq \{\emptyset\}). \quad (2.20)$$

Мы полагаем, что $v_0(x, \emptyset) \triangleq \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in X$. Тем самым определена функция на $X \times \mathbf{N}_0$. В то же время (2.20) позволяет дать единое толкование всем функциям, характеризующим экстремум. Именно, при $s \in \overline{0, N}$ мы определяем (см. (2.20)) функцию

$$V_s : X \times \mathbf{N}_s \rightarrow [0, \infty[\quad (2.21)$$

по следующему единому правилу:

$$V_s(x, K) \triangleq v_s(x, K) \quad \forall x \in X \quad \forall K \in \mathbf{N}_s. \quad (2.22)$$

Тогда, в частности, из (2.18) имеем $\mathbf{V} = V_N(x^0, \overline{1, N})$. Выражение (2.19) полностью определяет V_1 :

$$V_1(x, \{m\}) = \min_{y \in M_m} \mathfrak{C}_1[x](y) = v_1(x, \{m\}) \quad \forall x \in X \quad \forall m \in \overline{1, N}.$$

Далее, $V_0(z) = v_0(\text{pr}_1(z), \emptyset) = \mathbf{f}(\text{pr}_1(z)) \quad \forall z \in X \times \mathbf{N}_0$. Выражение (2.16) определяет остальные слои функции Беллмана:

$$V_s(x, K) = \min_{z \in \mathfrak{S}[K]} \hat{\pi}_s[x; K](z) \quad \forall s \in \overline{2, N} \quad \forall x \in X \quad \forall K \in \mathbf{N}_s.$$

Напомним очевидное свойство (см. (2.3)): если $s \in \overline{1, N}$, $x \in X$, $K \in \mathfrak{N}_s$, $k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$, то

$$(y, K \setminus \{k\}) \in X \times \mathbf{N}_{s-1},$$

а тогда определена следующая величина

$$\mathbf{c}(x, y) + V_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) = \mathbf{c}(x, y) + v_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) \in [0, \infty[.$$

Отметим теперь следующее общее положение (см. [3, 4] для случая $\mathbf{K} \neq \emptyset$; [7, 8]): если $s \in \overline{1, N}$, $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}_s$, то

$$v_s(x, K) = \min_{i \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + v_{s-1}(y, K \setminus \{k\})], \quad (2.23)$$

(2.23) есть вариант уравнения Беллмана для задачи маршрутизации с ограничениями на текущие переходы с множества на множество; в силу (2.6), (2.7) оно применимо к исходной задаче (1.12). Мы можем, конечно, использовать (2.23) для построения всех слоев V_0, V_1, \dots, V_N функции Беллмана, что является, однако, процедурой весьма трудоемкой; это заставляет прибегать к тем или иным ограничениям (сужениям) слоев этой функции; см. [3, § 5]. Мы также используем подобный прием, но будем действовать более радикально. Для этого предварительно выделим в \mathfrak{N} некоторое подсемейство, которое, как будет показано, достаточно для достижения оптимального результата на основе процедуры МДП.

3. Существенные списки заданий: структура и основные свойства

В настоящем разделе мы используем (в случае $\mathbf{K} \neq \emptyset$) ограничения в виде условий предшествования для сокращения множества “укороченных” задач, используемых в конструкции на основе МДП. Полагаем, что

$$\mathcal{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} \quad (\text{pr}_1(z) \notin K) \vee (\text{pr}_2(z) \in K)\}. \quad (3.1)$$

Предложение 3.1. Семейство всех множеств $K \in \mathfrak{N}$, для каждого из которых

$$\{z \in \mathbf{K} \mid (\text{pr}_1(z) \in K) \& (\text{pr}_2(z) \notin K)\} = \emptyset,$$

совпадает с \mathcal{G} (3.1).

Доказательство очевидно. Отметим следующее полезное

З а м е ч а н и е 3.1. Пусть $\mathbf{K} \neq \emptyset$. Тогда можно подобрать $n \in \mathcal{N}$ и (без повторений) занумеровать все упорядоченные пары из \mathbf{K} числами из промежутка $\overline{1, n}$. В результате возникают два кортежа

$$(p_i)_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \rightarrow \overline{1, N}, \quad (q_i)_{i \in \overline{1, n}} : \overline{1, n} \rightarrow \overline{1, N}, \quad (3.2)$$

для которых справедливо равенство

$$\mathbf{K} = \{(p_i, q_i) : i \in \overline{1, n}\} \quad (3.3)$$

(индексы p_1, \dots, p_n — суть первые компоненты занумерованных упорядоченных пар из \mathbf{K} , а индексы q_1, \dots, q_n — вторые компоненты упомянутых упорядоченных пар). Можно, кстати, предполагать, что \mathbf{K} задается посредством (3.2), (3.3) изначально, что и делается в [3, 4]. \square

Предложение 3.2. Если $K \in \mathcal{G}$, $k \in \mathbf{I}(K)$ и $K \setminus \{k\} \in \mathfrak{N}$, то

$$K \setminus \{k\} \in \mathcal{G}. \quad (3.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, фиксируем K и k в соответствии с условиями. Согласно (3.1) $K \in \mathfrak{N}$ и при этом $\forall z \in \mathbf{K}$

$$(\text{pr}_1(z) \notin K) \vee (\text{pr}_2(z) \in K). \quad (3.5)$$

Далее, из (2.3) имеем, в частности, включение $k \in K$; кроме того, согласно (2.3)

$$k \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \Sigma[K]. \quad (3.6)$$

При этом множество $\Sigma[K]$ определено в (2.2). Введем в рассмотрение

$$\mathbb{K} \triangleq K \setminus \{k\}. \quad (3.7)$$

Из (3.7) имеем по предположению свойство $\mathbb{K} \in \mathfrak{N}$. Пусть $z_* \in \mathbf{K}$. Покажем, что

$$(\text{pr}_1(z_*) \notin \mathbb{K}) \vee (\text{pr}_2(z_*) \in \mathbb{K}). \quad (3.8)$$

В самом деле, пусть $\text{pr}_1(z_*) \in \mathbb{K}$. С учетом (3.7) имеем (тем более) свойство $\text{pr}_1(z_*) \in K$, а потому (см. (3.5)) $\text{pr}_2(z_*) \in K$. В итоге имеем из (2.2), что $z_* \in \Sigma[K]$, а тогда согласно (3.6)

$$k \neq \text{pr}_2(z_*).$$

Это означает в силу (3.7), что непременно

$$\text{pr}_2(z_*) \in \mathbb{K}.$$

Итак, истинна следующая импликация

$$(\text{pr}_1(z_*) \in \mathbb{K}) \Rightarrow (\text{pr}_2(z_*) \in \mathbb{K}). \quad (3.9)$$

Соотношение (3.9) эквивалентно следующему

$$(\text{pr}_1(z_*) \notin \mathbb{K}) \vee (\text{pr}_2(z_*) \in \mathbb{K}).$$

Коль скоро выбор z_* был произвольным, установлено, что $\forall z \in \mathbf{K}$:

$$(\text{pr}_1(z) \notin \mathbb{K}) \vee (\text{pr}_2(z) \in \mathbb{K}). \quad (3.10)$$

Поскольку $\mathbb{K} \in \mathfrak{N}$, мы из (3.10) получаем (см. (3.1)), что $\mathbb{K} \in \mathcal{G}$. С учетом (3.7) получаем требуемое свойство (3.4). \square

Введем теперь естественное разбиение семейства (3.1) по мощности множеств, являющихся элементами \mathcal{G} . Пусть

$$\mathcal{G}_k \triangleq \mathcal{G} \cap \mathfrak{N}_k \quad \forall k \in \overline{1, N}. \quad (3.11)$$

С учетом (3.1) и (3.11) получаем, что, при $k \in \overline{1, N}$,

$$\mathcal{G}_k = \{K \in \mathfrak{N}_k \mid \forall z \in \mathbf{K} \ (\text{pr}_1(z) \notin \mathbb{K}) \vee (\text{pr}_2(z) \in \mathbb{K})\}. \quad (3.12)$$

З а м е ч а н и е 3.2. Пусть $n \in \mathcal{N}$, заданы кортежи (3.2) и (при этом) \mathbf{K} определено в (3.3). Предполагаем сейчас, что

$$\forall H \in \text{Fin}(\overline{1, n}) \exists k \in H : p_k \neq q_j \quad \forall j \in H. \quad (3.13)$$

Тогда \mathbf{K} (3.3) удовлетворяет условию 1.1. Точнее, мы имеем в (3.13) переформулировку последнего. В связи с конструкциями [3, 4] обсудим это очевидное свойство подробнее. В самом деле, если $K \in \text{Fin}(\mathbf{K})$, то

$$\tilde{K} \triangleq \{i \in \overline{1, n} \mid (p_i, q_i) \in K\} \in \text{Fin}(\overline{1, n})$$

и, кроме того, $K = \{(p_i, q_i) : i \in \tilde{K}\}$. Используя (3.13) при $H = \tilde{K}$, подбираем $k \in \tilde{K}$ со свойством (3.13), т.е. $p_k \neq q_j \quad \forall j \in \tilde{K}$. Тогда $z \triangleq (p_k, q_k) \in K$ обладает свойством $\text{pr}_1(z) \neq \text{pr}_2(\tilde{z}) \quad \forall \tilde{z} \in K$. Поскольку выбор K был произвольным, справедливость условия 1.1 установлена.

Возвращаясь к (3.12), получаем в силу (3.3) следующую реализацию:

$$\mathcal{G}_k \triangleq \{K \in \mathfrak{N}_k \mid \forall i \in \overline{1, n} \ (p_i \notin K) \vee (q_i \in K)\} \quad \forall k \in \overline{1, N}. \quad (3.14)$$

Теперь для общего случая \mathbf{K} (1.4) мы введем специальные слои в пространстве пар (x, K) , именуемых далее позициями. Эти слои будут обозначаться через D_0, D_1, \dots, D_N . Слои D_0 и D_N определяем особым образом, полагая (см. [3, § 5])

$$\mathbf{M} \triangleq \bigcup_{i \in \overline{1, N} \setminus \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}} M_i. \quad (3.15)$$

Именно, пусть

$$D_0 \triangleq \{(x, \emptyset) : x \in \mathbf{M}\} = \mathbf{M} \times \{\emptyset\} = \mathbf{M} \times \mathbf{N}_0, \quad (3.16)$$

$$D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1, N})\} \quad (3.17)$$

(слой (3.17) является одноэлементным). Регулярные слои D_1, \dots, D_{N-1} конструируем по следующему (новому в сравнении с [3]) правилу.

Для этого сначала условимся о следующем обозначении: если $k \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_k$, то полагаем

$$\mathcal{J}_k(K) \triangleq \{i \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{i\} \cup K \in \mathcal{G}_{k+1}\}. \quad (3.18)$$

С учетом (3.18) полагаем, что $\forall k \in \overline{1, N-1}$

$$D_k \triangleq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_k} \left\{ (x, K) : x \in \bigcup_{i \in \mathcal{J}_k(K)} M_i \right\}. \quad (3.19)$$

Итак, мы построили следующий кортеж множеств:

$$(D_i)_{i \in \overline{0, N}} : \overline{0, N} \rightarrow \mathcal{P}(X \times \mathbf{N}),$$

где $\mathcal{P}(X \times \mathbf{N})$ — семейство всех п/м $X \times \mathbf{N}$.

Отметим некоторые свойства упомянутых множеств. Ясно, что $D_N \neq \emptyset$. Далее, $\mathbf{K} \in (\text{FIN})[\mathbf{K}]$. Если $\mathbf{K} = \emptyset$, то $\mathbf{M} = \bigcup_{i=1}^N M_i$.

Отдельно рассмотрим случай $\mathbf{K} \neq \emptyset$, учитывая, что $\mathbb{A} \neq \emptyset$; см. разд. 2. Пусть $\gamma \in \mathbb{A}$ и $\mathbf{n} \triangleq \gamma(N)$. Ясно, что $\mathbf{n} \in \overline{1, N}$. Покажем, что на самом деле

$$\mathbf{n} \in \overline{1, N} \setminus \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}. \quad (3.20)$$

Пусть $l \in \mathbf{K}$. Тогда по выбору γ имеем (см. (1.6)), что

$$\gamma^{-1}(\text{pr}_1(l)) < \gamma^{-1}(\text{pr}_2(l)). \quad (3.21)$$

При этом числа в левой и правой частях (3.21) — суть индексы из $\overline{1, N}$. Поэтому $\gamma^{-1}(\text{pr}_1(l)) < N$. С учетом (1.5), последнего неравенства и инъективности γ мы получаем, что

$$\text{pr}_1(l) = \gamma(\gamma^{-1}(\text{pr}_1(l))) \neq \gamma(N) = \mathbf{n}.$$

Коль скоро выбор l был произвольным, (3.20) установлено. В итоге, из (3.15) и (3.20) получаем, что

$$M_{\mathbf{n}} \subset \mathbf{M},$$

где (см. (1.1), (3.20)) $M_{\mathbf{n}} \in \text{Fin}(X)$. Мы установили, что во всех возможных случаях $\mathbf{M} \neq \emptyset$. В силу (3.16) $D_0 \neq \emptyset$. Итак, для особых слоев имеем:

$$(D_0 \neq \emptyset) \& (D_N \neq \emptyset). \quad (3.22)$$

Предложение 3.3. *Если $\alpha \in \mathbb{A}$ и $k \in \overline{1, N}$, то*

$$\{\alpha(i) : i \in \overline{k, N}\} \in \mathcal{G}_{N-k+1}.$$

Доказательство. Фиксируем $\alpha \in \mathbb{A}$ и $k \in \overline{1, N}$. Тогда $\alpha \in \mathbb{P}$ удовлетворяет условию, указанному в (1.6). Отметим, что

$$Q \triangleq \{\alpha(i) : i \in \overline{k, N}\} \in \mathfrak{N}_{N-k+1}. \quad (3.23)$$

Действительно, в силу инъективности α , множество

$$Q_1 \triangleq \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\}$$

имеет $k-1$ элементов, т. е. $|Q_1| = k-1$. Далее, снова используя упомянутое свойство α , мы получаем, что $Q_1 \cap Q = \emptyset$; с другой стороны, α — перестановка и, в частности, биекция, а тогда

$$\overline{1, N} = \{\alpha(i) : i \in \overline{1, N}\} = \{\alpha(i) : i \in \overline{1, k-1}\} \cup \{\alpha(i) : i \in \overline{k, N}\} = Q_1 \cup Q,$$

поэтому $|Q_1| + |Q| = N$; в итоге

$$|Q| = N - k + 1.$$

В сочетании с (2.10) и определением в (3.23) мы получаем, что

$$Q \in \mathfrak{N}_{N-k+1}. \quad (3.24)$$

Выберем произвольно $z \in \mathbf{K}$. Пусть $\text{pr}_1(z) \in Q$, что означает для некоторого $j \in \overline{k, N}$ справедливость равенства

$$\text{pr}_1(z) = \alpha(j).$$

Стало быть (см. (1.5)), $\alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) = j$. Вместе с тем из (1.6) имеем теперь

$$j < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)).$$

В частности, $\alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \in \overline{k, N}$. Как следствие мы получаем, что (см. (1.5))

$$\text{pr}_2(z) = \alpha(\alpha^{-1}(\text{pr}_2(z))) \in Q, \quad (3.25)$$

где учтено (3.23). С учетом (3.25) мы получаем импликацию

$$(\text{pr}_1(z) \in Q) \Rightarrow (\text{pr}_2(z) \in Q),$$

т. е. $(\text{pr}_1(z) \notin Q) \vee (\text{pr}_2(z) \in Q)$. Коль скоро выбор z был произвольным, имеем с учетом (3.1), (3.23), что $Q \in \mathcal{G}$. Следовательно, в силу (3.24)

$$Q \in \mathfrak{N}_{N-k+1} \cap \mathcal{G}.$$

С учетом (3.11) получаем включение $Q \in \mathcal{G}_{N-k+1}$. □

Предложение 3.4. $\overline{1, N} \in \mathcal{G}_N$.

Доказательство. Поскольку (см. (1.4)) $\text{pr}_2(z) \in \overline{1, N}$ при $z \in \mathbf{K}$, имеем из (3.1) включение $\overline{1, N} \in \mathcal{G}$. Кроме того, $\overline{1, N} \in \mathfrak{N}_N$ (см. (2.10)). Поэтому в силу (3.11) имеем требуемое утверждение. □

Предложение 3.5. $D_s \neq \emptyset \ \forall s \in \overline{0, N}$.

Доказательство. С учетом (3.22) достаточно показать, что $D_s \neq \emptyset$ при $s \in \overline{1, N-1}$. Пусть (см. (2.6)) $\alpha \in \mathbb{A}$. Воспользуемся предложением 3.3. Фиксируем $t \in \overline{1, N-1}$. Тогда $t+1 \in \overline{2, N}$. Кроме того, из (3.19) вытекает, что

$$D_t = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_t} \left\{ (x, K) : x \in \bigcup_{i \in \mathcal{J}_t(K)} M_i \right\}, \quad (3.26)$$

где $\mathcal{J}_t(K) = \{i \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{i\} \cup K \in \mathcal{G}_{t+1}\} \ \forall K \in \mathcal{G}_t$. В силу предложения 3.3, имеем при $r \stackrel{\Delta}{=} N - t + 1 \in \overline{2, N}$ свойство

$$T_1 \stackrel{\Delta}{=} \{\alpha(i) : i \in \overline{r, N}\} \in \mathcal{G}_t, \quad (3.27)$$

так как $N - r + 1 = N - (N - t + 1) + 1 = t$. Кроме того, $r - 1 \in \overline{1, N - 1}$ и в силу предложения 3.3

$$T_2 \stackrel{\Delta}{=} \{\alpha(i) : i \in \overline{r-1, N}\} \in \mathcal{G}_{t+1} \quad (3.28)$$

(действительно, $N - (r - 1) + 1 = N - r + 2 = (N - r + 1) + 1 = t + 1$), причем

$$T_2 = \{\alpha(r - 1)\} \cup T_1, \quad (3.29)$$

где в силу инъективности α

$$\alpha(r - 1) \in \overline{1, N} \setminus T_1. \quad (3.30)$$

При этом (см. (3.28), (3.29)) $\{\alpha(r-1)\} \cup T_1 \in \mathcal{G}_{t+1}$. Поскольку

$$\mathcal{J}_t(T_1) = \{i \in \overline{1, N} \setminus T_1 \mid \{i\} \cup T_1 \in \mathcal{G}_{t+1}\},$$

то $\alpha(r-1) \in \mathcal{J}_t(T_1)$; см. (3.30). Но в этом случае, согласно (3.26), (3.27)

$$(x, T_1) \in D_t \quad \forall x \in M_{\alpha(r-1)}.$$

С учетом (1.1) и (3.30) мы из последнего соотношения получаем свойство $D_t \neq \emptyset$. Поскольку выбор t был произвольным, установлено, что $D_s \neq \emptyset$ при всех $s \in \overline{1, N-1}$, что (см. (3.22)) достаточно для справедливости доказываемого предложения. \square

Из (2.20), (3.11) и предложения 3.5 следует, в частности, что при всяком выборе $k \in \overline{1, N-1}$ множество D_k есть непустое п/м $X \times \mathbf{N}_k$. Кроме того, в силу (2.20) и (3.16) D_0 есть непустое п/м $X \times \mathbf{N}_0$, а с учетом (3.17)

$$D_N = \{x^0\} \times \overline{1, N}$$

есть непустое п/м $X \times \mathbf{N}_N$. Стало быть, у нас вообще при всяком выборе $s \in \overline{0, N}$ множество D_s есть непустое п/м $X \times \mathbf{N}_s$. С учетом этого свойства введем при $s \in \overline{0, N}$ сужение

$$\mathcal{V}_s \triangleq (V_s(z))_{z \in D_s} \quad (3.31)$$

функции V_s на множество D_s , получая всякий раз неотрицательную вещественнозначную функцию на D_s . Итак,

$$\mathcal{V}_0 : D_0 \rightarrow [0, \infty[, \quad \mathcal{V}_1 : D_1 \rightarrow [0, \infty[, \quad \dots, \quad \mathcal{V}_N : D_N \rightarrow [0, \infty[.$$

Предложение 3.6. *Если $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s$, $k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$, то*

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1}. \quad (3.32)$$

Доказательство. Фиксируем $s \in \overline{1, N}$, $(x, K) \in D_s$, $k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$. Тогда в силу (3.19) имеем при $s \in \overline{1, N-1}$ включение $K \in \mathcal{G}_s$. Далее, при $s = N$ имеем в силу (3.17), что $K = \overline{1, N}$, а потому (предложение 3.4) и в этом случае, т. е. при $s = N$, имеет место $K \in \mathcal{G}_s$. Стало быть, во всех случаях имеем включение

$$K \in \mathcal{G}_s. \quad (3.33)$$

Из (3.11) и (3.33) следует, в частности, что $K \in \mathcal{G}$. Как следствие из предложения 3.2 имеем свойство (3.4), если $s > 1$. Напомним также, что (см. (2.3)) $k \in K$; кроме того, в силу (3.11), (3.33) $K \in \mathfrak{N}_s$, т. е. $|K| = s$; см. (2.10). Но тогда для $K \setminus \{k\} \in \mathbf{N}$ имеем

$$|K \setminus \{k\}| = s - 1.$$

С учетом (2.10) и (2.20) получаем теперь, что $K \setminus \{k\} \in \mathbf{N}_{s-1}$.

Если $s > 1$, т. е. $s - 1 \geq 1$, имеем в силу (2.20) и (3.4), что

$$K \setminus \{k\} \in \mathfrak{N}_{s-1}. \quad (3.34)$$

Поэтому, при $s > 1$ имеем в силу (3.4) и (3.11) включение

$$K \setminus \{k\} \in \mathcal{G}_{s-1}. \quad (3.35)$$

Заметим, что $\{k\} \cup (K \setminus \{k\}) = K$, так как $k \in K$. В итоге, при $s > 1$

$$\{k\} \cup (K \setminus \{k\}) \in \mathcal{G}_s$$

и, поскольку $k \in \overline{1, N} \setminus (K \setminus \{k\})$, из (3.18) и (3.35) получаем, что $k \in \mathcal{J}_{s-1}(K \setminus \{k\})$. Поскольку $y \in M_k$, мы из (3.19) и (3.35) получаем в рассматриваемом случае справедливость (3.32). Итак, установлена импликация

$$(s > 1) \Rightarrow ((y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1}). \quad (3.36)$$

Рассмотрим случай $s = 1$, когда $K \setminus \{k\} = \emptyset$, т. е. $K = \{k\}$. Напомним, что справедливо (3.33), а тогда $\{k\} \in \mathcal{G}$. В силу (3.1) получаем, что $\forall z' \in \mathbf{K}$

$$(\text{pr}_1(z') \neq k) \vee (\text{pr}_2(z') = k). \quad (3.37)$$

Фиксируем $z' \in \mathbf{K}$ и допустим, что $\text{pr}_2(z') = k$. При этом $\{z'\} \in \text{Fin}(\mathbf{K})$, а потому в силу условия 1.1 $\text{pr}_1(z') \neq \text{pr}_2(z')$. Стало быть, имеем $k \neq \text{pr}_1(z')$ во всех возможных случаях. Поскольку выбор z' был произвольным, установлено, что $k \notin \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Но $k \in \overline{1, N}$, а тогда

$$k \in \overline{1, N} \setminus \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$$

и как следствие (см. (3.15)) $M_k \subset \mathbf{M}$. Поэтому имеем с учетом (3.16) включение

$$(y, K \setminus \{k\}) = (y, \emptyset) \in D_0$$

при $s = 1$. Стало быть, истинна импликация

$$(s = 1) \Rightarrow ((y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1}).$$

С учетом (3.36) мы получаем (3.32) во всех возможных случаях. \square

Из (1.1) и предложения 3.6 вытекает, что корректно определяется $\forall s \in \overline{1, N} \forall (x, K) \in D_s$

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\})] \in [0, \infty[. \quad (3.38)$$

С учетом (3.17) имеем по определению \mathcal{V}_N , что

$$\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) = V_N(x^0, \overline{1, N}). \quad (3.39)$$

Предложение 3.7. Если $s \in \overline{1, N}$ и $(x, K) \in D_s$, то

$$\mathcal{V}_s(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\})]. \quad (3.40)$$

Доказательство. Фиксируем s и (x, K) в соответствии с условиями. Тогда (см. (3.31))

$$\mathcal{V}_s(x, K) = V_s(x, K). \quad (3.41)$$

В силу (2.22), (2.23) и (3.41) имеем равенство

$$\mathcal{V}_s(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + V_{s-1}(y, K \setminus \{k\})]. \quad (3.42)$$

Но в силу предложения 3.6 и (3.31) имеем, что при $k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$ корректно определено значение $\mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\})$. Тем самым у нас определена величина (3.38). Кроме того, из (3.31) и предложения 3.6 имеем $\forall k \in \mathbf{I}(K) \forall y \in M_k$

$$\mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\}) = V_{s-1}(y, K \setminus \{k\}).$$

Как следствие получаем следующее равенство:

$$\min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + V_{s-1}(y, K \setminus \{k\})] = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{k\})].$$

Тогда (см. (3.42)) мы получаем требуемое равенство (3.40). \square

4. Построение оптимального решения и определение значения задачи

Сейчас мы рассмотрим построение функций $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_N$, а затем (и только на основании этой информации) — построение оптимальной пары маршрут-трасса.

Итак (см. (3.31)), мы располагаем функцией

$$\mathcal{V}_0 : D_0 \rightarrow [0, \infty[, \quad (4.1)$$

определяемой простейшим правилом: если $z \in D_0$ и $x = \text{pr}_1(z)$, то

$$\mathcal{V}_0(z) = \mathbf{f}(x). \quad (4.2)$$

В отношении (4.1), (4.2) см. определения разд. 2, (3.16) и (3.31). С учетом (3.15) и (3.16) функция (4.1), (4.2) исчерпывающим образом определяется условиями

$$\mathcal{V}_0(x, \emptyset) = \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in \mathbf{M}. \quad (4.3)$$

Пусть вообще $n \in \overline{0, N}$ и функции \mathcal{V}_i , $i \in \overline{0, n}$, уже построены. Если $n = N$, то построение слоев функции Беллмана завершено. Пусть $n \neq N$, т. е. $n < N$. Функция \mathcal{V}_n ,

$$\mathcal{V}_n : D_n \rightarrow [0, \infty[,$$

нам по предположению известна. Отметим, что согласно предложению 3.6, применяемому для случая $s = n + 1 \in \overline{1, N}$, при любом выборе позиции $(x, K) \in D_{n+1}$, индекса $k \in \mathbf{I}(K)$ и точки $y \in M_k$ мы получаем включение

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_n,$$

а тогда значение $\mathcal{V}_n(y, K \setminus \{k\}) \in [0, \infty[$ определено предшествующими построениями. Следовательно, при $s = n + 1$ и $(x, K) \in D_{n+1}$ определено значение (3.38). Наконец, из предложения 3.7 имеем при $(x, K) \in D_{n+1}$ равенство

$$\mathcal{V}_{n+1}(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y) + \mathcal{V}_n(y, K \setminus \{k\})]. \quad (4.4)$$

Посредством (4.4) определена “вся” функция \mathcal{V}_{n+1} . После исполнения конечного числа шагов вида (4.4) мы получим функцию \mathcal{V}_N , определяемую единственным значением (3.39); см. в этой связи (3.17).

Рассмотрим теперь построение оптимальной пары маршрут-трасса на основе кортежа $(\mathcal{V}_i)_{i \in \overline{0, n}}$, который определен ранее.

Мы полагаем, что $\mathbf{x}_0 \triangleq x^0$. Далее, мы располагаем величиной $\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N})$ (3.39) и равенством (3.17). Согласно предложению 3.6 при всяком выборе $k \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $y \in M_k$ имеет место

$$(y, \overline{1, N} \setminus \{k\}) \in D_{N-1}. \quad (4.5)$$

Более того, в силу предложения 3.7 имеем (см. (3.17)), что

$$\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x^0, y) + \mathcal{V}_{N-1}(y, \overline{1, N} \setminus \{k\})]. \quad (4.6)$$

С учетом (4.6) выбираем $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $\mathbf{x}_1 \in M_{\mathbf{i}_1}$, для которых

$$\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) = \mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1) + \mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}). \quad (4.7)$$

В силу (4.5) мы имеем для выбранных таким образом элементов \mathbf{i}_1 и \mathbf{x}_1 следующее включение

$$(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \in D_{N-1}. \quad (4.8)$$

Поясним последующую рекуррентную процедуру обсуждением еще одного (второго) шага. Итак, полагаем, что мы переместились из позиции

$$(\mathbf{x}_0, \overline{1, N}) = (x^0, \overline{1, N})$$

в позицию (4.8). С учетом предложения 3.6 и (4.8) мы получаем, что для любых $k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$ и $y \in M_k$

$$(y, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; k\}) = (y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \setminus \{k\}) \in D_{N-2}. \quad (4.9)$$

Более того, в силу предложения 3.7, (4.8) и (4.9) мы получаем, что

$$\mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, y) + \mathcal{V}_{N-2}(y, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; k\})]. \quad (4.10)$$

С учетом (4.10) выбираем $\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$ и $\mathbf{x}_2 \in M_{\mathbf{i}_2}$ так, что

$$\mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}). \quad (4.11)$$

При этом, как видно из (4.9), непременно

$$(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}) \in D_{N-2}. \quad (4.12)$$

Отметим, кстати, что $\{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\} = \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, 2}\}$. Из (4.7), (4.11) мы получаем равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) &= \mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1) + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}) \\ &= \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

З а м е ч а н и е 4.1. Если $N = 2$, то из (3.31), (4.3) и (4.12) мы получаем, что

$$\mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}) = \mathcal{V}_0(\mathbf{x}_2, \emptyset) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2), \quad (4.14)$$

а тогда из (4.13) и (4.14) мы для этого частного случая имеем:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_2) = \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}). \quad (4.15)$$

Итак, пусть $N = 2$. Из (1.9), (3.39) и (4.15) мы получаем равенство

$$\mathfrak{C}((\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{1, N}}) = \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}). \quad (4.16)$$

Для доказательства оптимальности полученного решения осталось установить тот (весьма очевидный) факт, что

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, 2}} = (\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, N}} \in \mathbb{A}.$$

Для этого воспользуемся равенством (2.6). В нашем частном случае

$$\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, 2}\} = \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\} = \overline{1, 2} = \overline{1, N}. \quad (4.17)$$

Поэтому $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, 2}\})$. Далее, из (4.17) имеем цепочку равенств

$$\overline{1, 2} \setminus \{\mathbf{i}_1\} = \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\} = \{\mathbf{i}_2\},$$

а поэтому $\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_2\})$. Стало быть, в данном частном случае

$$\mathbf{i}_m \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_j : j \in \overline{m, 2}\}) \quad \forall m \in \overline{1, 2}. \quad (4.18)$$

Поскольку $\mathbf{i}_1 \neq \mathbf{i}_2$, то $(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, 2}} \in (\text{bi})[\overline{1, 2}]$; с учетом (4.18) получаем (см. разд. 2), что $(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, 2}} \in (\mathbf{I}\text{-bi})[\overline{1, 2}]$, т. е. в рассматриваемом случае $N = 2$ имеем (см. (2.4)) включение

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, 2}} \in \mathbb{P}_0.$$

Стало быть, у нас (см. (2.6)) выполнено условие $(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, 2}} \in \mathbb{A}$. Кроме того,

$$(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{1,2}} \in \prod_{j=1}^2 M_{\mathbf{i}_j}.$$

В силу (1.11) имеем теперь включение

$$((\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,2}}, (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{1,2}}) \in \mathbf{S}, \quad (4.19)$$

откуда согласно (1.10), (4.16) имеем свойство оптимальности пары маршрут-трасса, определяемой в (4.19), если только $N = 2$. \square

Вернемся к общему случаю N , $N \geq 2$. Пусть вообще для некоторого $r \in \overline{2, N}$ уже построены кортежи

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,r}} : \overline{1,r} \rightarrow \overline{1,N}, \quad (4.20)$$

$$(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{1,r}} \in \prod_{j=1}^r M_{\mathbf{i}_j}, \quad (4.21)$$

обладающие следующими свойствами. Именно, при $\mathbf{x}_0 = x^0$ выполнены условия:

$$1') \forall j \in \overline{1,r} \forall k \in \overline{1,r} \setminus \{j\}$$

$$\mathbf{i}_j \neq \mathbf{i}_k;$$

$$2') (\mathbf{x}_k, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1,k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1,r};$$

$$3') \forall j \in \overline{1,r}$$

$$\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\});$$

$$4') \forall j \in \overline{1,r}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) \\ &= \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) + \mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\}); \end{aligned}$$

$$5') \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1,N}) = \sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathcal{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,r}\}).$$

З а м е ч а н и е 4.2. Покажем, что при $r = 2$ условия 1')–5') выполнены. В самом деле, пусть $r = 2$. Тогда 1') непосредственно следует из самого способа выбора \mathbf{i}_2 , так как в результате этого выбора имеем (см. (2.3)) свойство $\mathbf{i}_2 \in \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}$. Далее, 2') вытекает из (4.8), (4.12). Свойство 3') также справедливо в нашем случае. Действительно, при $j = 1$ имеем $\overline{1,j-1} = \overline{1,0} = \emptyset$, а тогда

$$\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\} = \overline{1,N}.$$

Как следствие имеем при $j = 1$ нужное включение

$$\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}). \quad (4.22)$$

Далее, при $j = 2$ мы имеем по выбору \mathbf{i}_2 включение

$$\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}). \quad (4.23)$$

Но тогда (при $r = 2$) имеем из (4.22), (4.23), что

$$\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1,r}.$$

Итак, 3') установлено (при $r = 2$). Соотношение 4') получаем из (4.7), (4.11). В самом деле, из (4.7) имеем при $j = 1$ цепочку равенств

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) = \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,0}\}) \\ &= \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1,N}) = \mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1) + \mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \\ &= \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) + \mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Затем из (4.11) получаем при $j = 2$, что

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) &= \mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, 1}\}) \\ &= \mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}) \\ &= \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, 2}\}) \\ &= \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) + \mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j}\}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Объединяя (4.24) и (4.25), мы получаем, что

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) \\ &= \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) + \mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j}\}) \quad \forall j \in \overline{1, r}. \end{aligned}$$

Итак, 4') также имеет место в нашем случае $r = 2$. Наконец, из (4.13) мы получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, 2}\}) \\ &= \sum_{k=0}^1 \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathcal{V}_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, 2}\}) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathcal{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r}\}), \end{aligned}$$

т. е. 5') также имеет место при $r = 2$. Итак, 1')–5') справедливы при $r = 2$, где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ конкретизированы в (4.6)–(4.13). \square

Отметим, что из 2') следует, в частности, что

$$(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r}\}) \in D_{N-r}. \quad (4.26)$$

Заметим, кроме того, что возможен один из следующих двух случаев:

$$(r = N) \vee (r < N). \quad (4.27)$$

Эти два случая мы рассмотрим сейчас отдельно.

а) Пусть $r = N$. Тогда согласно (4.20) мы получаем кортеж

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \rightarrow \overline{1, N}. \quad (4.28)$$

Соответственно, в силу (4.21) мы получаем в рассматриваемом случае, что

$$(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{1, N}} \in \prod_{j=1}^N M_{\mathbf{i}_j}. \quad (4.29)$$

Кроме того, как уже отмечалось, $\mathbf{x}_0 = x^0$. Мы покажем сейчас, что (4.28), (4.29) определяют искомого оптимальное решение. Из 1') имеем: $\mathbf{i}_j \neq \mathbf{i}_k$ при $j \in \overline{1, N}, k \in \overline{1, N}, j \neq k$. Стало быть, отображение (4.28) инъективно. Из этого свойства легко следует, что (4.28) — перестановка в $\overline{1, N}$, т. е.

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, N}} \in \mathbb{P}. \quad (4.30)$$

Далее, из 3') имеем в рассматриваемом случае для перестановки (4.30) свойство

$$\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1, N}. \quad (4.31)$$

В силу (4.30) и (4.31) получаем, однако, следующую очевидную систему равенств

$$\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\} = \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{j, N}\} \quad \forall j \in \overline{1, N}.$$

Поэтому согласно (4.31) имеем следующее положение:

$$\mathbf{i}_m \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{m, N}\}) \quad \forall m \in \overline{1, N}.$$

Поскольку $|\overline{1, N}| = N$, реализуется (см. (4.30), разд. 2) свойство

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, N}} \in (\mathbf{I}\text{-bi})[\overline{1, N}].$$

В результате из (2.4), (2.6) получаем важное свойство

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, N}} \in \mathbb{A}. \quad (4.32)$$

При этом из 5') мы получаем (в рассматриваемом сейчас случае $r = N$) цепочку равенств (см. (3.39), (4.30))

$$\begin{aligned} V_N(x^0, \overline{1, N}) &= \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) \\ &+ \mathcal{V}_0(\mathbf{x}_N, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, N}\}) = \mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathcal{V}_0(\mathbf{x}_N, \emptyset) \\ &= \mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + V_0(\mathbf{x}_N, \emptyset). \end{aligned}$$

Тогда (см. разд. 2) имеем, в частности, равенство

$$\mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_N) = V_N(x^0, \overline{1, N}). \quad (4.33)$$

С учетом (1.9) и (4.33) мы получаем окончательное равенство

$$\mathfrak{C}((\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{1, N}}) = V_N(x^0, \overline{1, N}). \quad (4.34)$$

В свою очередь из (4.21) следует в “нашем” случае, что

$$(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{1, N}} \in X^N : (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{1, N}} \in \prod_{j=1}^N M_{i_j}. \quad (4.35)$$

Объединяем (4.32) и (4.35). Тогда

$$\eta \triangleq ((\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, N}}, (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{1, N}}) \in \mathbb{A} \times X^N : (\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{1, N}} \in \prod_{j=1}^N M_{i_j}. \quad (4.36)$$

Из (1.11) и (4.36) получаем, следовательно, включение $\eta \in \mathbf{S}$ и, в частности, $\eta \in \mathbf{S}_0$. Согласно (1.10), (4.34) и (4.36) имеем цепочку равенств

$$W(\eta) = \mathfrak{C}((\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{1, N}}) = V_N(x^0, \overline{1, N}).$$

Итак, $\eta \in \mathbf{S}$ таково, что $W(\eta) = V_N(x^0, \overline{1, N})$. Поэтому (см. (2.18) и определения разд. 2) $\eta \in \mathbf{S}$: $W(\eta) = \mathbf{V}$; стало быть, $\eta \in \mathbf{S}$ есть оптимальное решение задачи (1.12); см. в этой связи (2.18). Итак, при $r = N$ мы располагаем оптимальной парой маршрут-трасса.

б) Пусть $r < N$. Тогда $r + 1 \leq N$. Стало быть, $r \in \overline{2, N-1}$ и $r + 1 \in \overline{3, N}$. При этом в силу 2') имеем включение

$$(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \in D_{N-r}. \quad (4.37)$$

Заметим, что $N-r \in \overline{1, N-2}$. Тогда из (4.37) и предложения 3.6 имеем для $N-(r+1) \in \overline{0, N-3}$ следующие свойства: при $k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\})$ и $y \in M_k$ непременно

$$(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{k\}) \in D_{N-(r+1)}, \quad (4.38)$$

а тогда (см. (3.31)) $\mathcal{V}_{N-(r+1)}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{k\}) \in [0, \infty[$ определено корректно.

Более того, из (4.37) и предложения 3.7 вытекает равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \\ &= \min_{k \in \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(\mathbf{x}_r, y) + \mathcal{V}_{N-(r+1)}(y, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{k\})]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

С учетом (4.39) выбираем индекс

$$\mathbf{i}_{r+1} \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \quad (4.40)$$

и точку

$$\mathbf{x}_{r+1} \in M_{\mathbf{i}_{r+1}} \quad (4.41)$$

так, что при этом выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \\ &= \mathbf{c}(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}) + \mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r+1}\}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Из (2.3), (4.40) имеем, в частности, что

$$\mathbf{i}_{r+1} \in \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}. \quad (4.43)$$

С учетом (4.20), (4.43) мы получаем теперь кортеж

$$(\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1, r+1}} : \overline{1, r+1} \rightarrow \overline{1, N}, \quad (4.44)$$

для которого с учетом свойства 1') верно следующее предложение

$$\begin{aligned} 1'') \quad & \forall j \in \overline{1, r+1} \quad \forall k \in \overline{1, r+1} \setminus \{j\} \\ & \mathbf{i}_j \neq \mathbf{i}_k. \end{aligned}$$

Из (4.21) имеем, что $\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j}$ при $j \in \overline{1, r}$. С учетом (1.1), (4.41) и (4.43) мы получаем, в частности, что

$$(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{1, r+1}} : \overline{1, r+1} \rightarrow X,$$

причем $\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j} \quad \forall j \in \overline{1, r+1}$. Это означает, что

$$(\mathbf{x}_j)_{j \in \overline{1, r+1}} \in \prod_{j=1}^{r+1} M_{\mathbf{i}_j}. \quad (4.45)$$

Проверим теперь для кортежей (4.44), (4.45) свойства, подобные 1')–5'). Одним из таких свойств является 1'').

С учетом (4.40) и (4.41) мы имеем из (4.38) включение

$$(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r+1}\}) = (\mathbf{x}_{r+1}, (\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, r}\}) \setminus \{\mathbf{i}_{r+1}\}) \in D_{N-(r+1)}. \quad (4.46)$$

Из 2') и (4.46) получаем следующее свойство:

$$2'') \quad (\mathbf{x}_k, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_j : j \in \overline{1, k}\}) \in D_{N-k} \quad \forall k \in \overline{1, r+1}.$$

Из 3') и (4.40) вытекает с очевидностью свойство

$$3'') \quad \forall j \in \overline{1, r+1}$$

$$\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}).$$

Рассмотрим теперь комбинацию 4') и (4.42). В итоге имеем, что

$$4'') \quad \forall j \in \overline{1, r+1}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j-1}\}) \\ &= \mathbf{c}(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j) + \mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, j}\}). \end{aligned}$$

Наконец, из 5') и (4.42) мы получаем, что справедливо свойство 5'')

$$\mathcal{V}_N(x^0, \overline{1, N}) = \sum_{k=0}^r \mathbf{c}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) + \mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1}, \overline{1, N} \setminus \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, r+1}\}).$$

Итак, в случае б), т. е. при $r < N$, мы смогли продолжить частичные решения (маршрут и трассу) на один шаг с сохранением всех основных свойств: положения 1')–5') были преобразованы в 1'')–5'').

После выполнения конечного числа регулярных шагов типа б) мы неминуемо придем к финальной ситуации а), для которой, как было показано, процедура реализует оптимальную пару маршрут-трасса.

5. Примеры решения задачи на ЭВМ

Рассмотренный выше алгоритм решения ОЗК был реализован в виде программы для ПЭВМ на языке программирования C++ в его версии Borland C++ Builder 6.0, работающей в операционной системе Windows (начиная с Windows 95). Вычислительная часть реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. В случае решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления подлежащих обходу множеств, а также траектории их посещения; возможно увеличение отдельных участков пути движения по множествам. Используем соглашение (3.2), (3.3).

Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с процессором Intel Pentium 4 HT с частотой 3.0 ГГц и объемом ОЗУ 1 ГБ с установленной операционной системой Windows XP Professional SP2.

Для наглядности будем рассматривать примеры решения обобщенной задачи курьера на плоскости. Будем задавать множества $(M_i)_{i \in \overline{1, N}}$ в виде сеток, получаемых посредством размещения на равных угловых расстояниях 12 точек на окружности, включая точку с нулевой угловой координатой. Таким образом, каждое множество однозначно определяется центром и радиусом окружности, обозначаем их посредством O и R соответственно. Следовательно в нашем частном случае система множеств $(M_i)_{i \in \overline{1, N}}$ определяется двумя кортежами $(O_i)_{i \in \overline{1, N}}$ и $(R_i)_{i \in \overline{1, N}}$.

Пусть начальная точка совпадает с началом координат, \mathbf{c} — функция евклидова расстояния, а \mathbf{f} — евклидова норма; см. (1.8).

Полагаем, что на плоскости задана следующая система из 25 множеств: центры окружностей имеют координаты:

$$\begin{aligned} O_1 &= (15, 0), O_2 = (45, 0), O_3 = (80, 0), O_4 = (0, -20), O_5 = (0, -50), \\ O_6 &= (0, -85), O_7 = (-25, 0), O_8 = (-55, 0), O_9 = (-82, 0), \\ O_{10} &= (0, 22), O_{11} = (0, 48), O_{12} = (0, 82), O_{13} = (30, 35), O_{14} = (50, 80), \\ O_{15} &= (70, 40), O_{16} = (30, -50), O_{17} = (65, -35), O_{18} = (80, -80), \\ O_{19} &= (40, -85), O_{20} = (-40, -50), O_{21} = (-70, -75), O_{22} = (-80, -35), \\ O_{23} &= (-70, -80), O_{24} = (-60, 35), O_{25} = (-30, 55); \end{aligned}$$

радиусы окружностей следующие:

$$\begin{aligned} R_4 &= R_6 = R_8 = R_{10} = 8; \\ R_1 &= R_9 = R_{11} = R_{13} = R_{16} = R_{19} = R_{24} = 10; \\ R_3 &= R_{18} = R_{21} = 11; \\ R_2 &= R_5 = R_{15} = R_{17} = R_{22} = R_{25} = 12; \\ R_7 &= R_{12} = R_{14} = R_{20} = R_{23} = 15. \end{aligned}$$

Для данного примера исследуем работу алгоритма при четырех системах ограничений на порядок посещения множеств. При этом помимо времени счета будем отслеживать, сколько

памяти потребовалось для работы программы (вместе с операционной системой), для этого воспользуемся стандартной программой Windows Task Manager.

Пусть сначала задана система из 10 ограничений в виде условий предшествования (3.2), (3.3):

$$\begin{aligned} p_1 = 20, q_1 = 3; p_2 = 4, q_2 = 8; p_3 = 9, q_3 = 11; p_4 = 15, q_4 = 12; \\ p_5 = 18, q_5 = 22; p_6 = 24, q_6 = 7; p_7 = 10, q_7 = 2; p_8 = 25, q_8 = 16; \\ p_9 = 23, q_9 = 1; p_{10} = 5, q_{10} = 13. \end{aligned}$$

Получены следующие результаты:

Величина затрат: 784.1.

Маршрут и трасса:

$$\begin{aligned} (6.93, -16) \in M_4; (54.61, -41) \in M_{17}; (70.47, -74.50) \in M_{18}; \\ (35, -76.34) \in M_{19}; (4, -78.07) \in M_6; (-6, -60.39) \in M_5; \\ (-32.50, -62.99) \in M_{20}; (-64.50, -65.47) \in M_{21}; (-69.61, -29) \in M_{22}; \\ (-73.34, -5) \in M_9; (-61.93, 4) \in M_8; (-60, 25) \in M_{24}; \\ (-62.50, 67.01) \in M_{23}; (-40.39, 49) \in M_{25}; (-17.50, 12.99) \in M_7; \\ (-4, 15.07) \in M_{10}; (5, 0) \in M_1; (30, -40) \in M_{16}; (55.39, -6) \in M_2; \\ (70.47, 5.50) \in M_3; (59.61, 34) \in M_{15}; (42.50, 67.01) \in M_{14}; \\ (7.50, 69.01) \in M_{12}; (8.66, 53) \in M_{11}; (20, 35) \in M_{13}. \end{aligned}$$

Время вычисления: 1 ч. 3 мин. 17 сек.

Объем занятой памяти: 1.41 гБ.

График маршрута и трассы приведен на рис. 1.

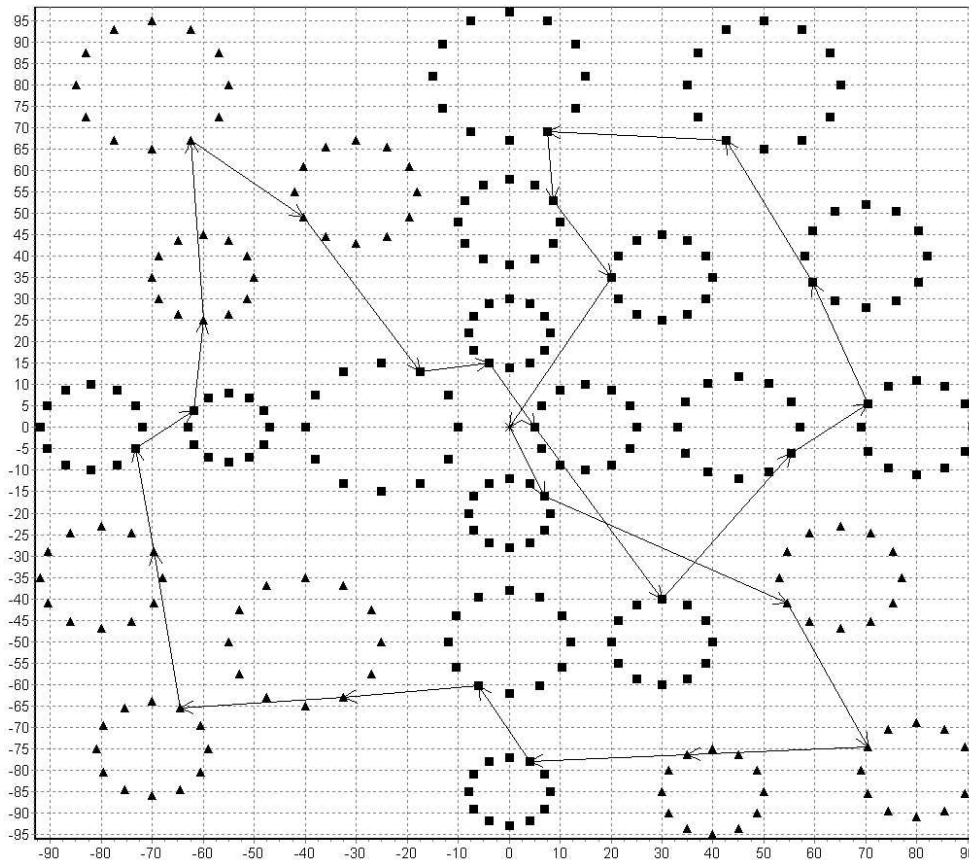


Рис. 1. Маршрут и трасса обхода 25 множеств с 10 ограничениями.

Дополним теперь имеющуюся систему ограничений еще двумя условиями предшествования. Пусть

$$p_{11} = 14, q_{11} = 17; p_{12} = 19, q_{12} = 21.$$

Получены следующие результаты:

Величина затрат: 805.24.

Маршрут и трасса:

$$\begin{aligned}
 &(4, -13.07) \in M_4; (10.39, -44) \in M_5; (69, -80) \in M_{18}; \\
 &(48.66, -80) \in M_{19}; (-0, -77) \in M_6; (-40, -65) \in M_{20}; \\
 &(-64.50, -65.47) \in M_{21}; (-69.61, -29) \in M_{22}; (-73.34, -5) \in M_9; \\
 &(-61.93, 4) \in M_8; (-60, 25) \in M_{24}; (-62.50, 67.01) \in M_{23}; \\
 &(-42, 55) \in M_{25}; (-5, 39.34) \in M_{11}; (4, 28.93) \in M_{10}; \\
 &(59.61, 46) \in M_{15}; (42.50, 67.01) \in M_{14}; (12.99, 74.50) \in M_{12}; \\
 &(30, 45) \in M_{13}; (51, 10.39) \in M_2; (69, 0) \in M_3; (54.61, -29) \in M_{17}; \\
 &(30, -40) \in M_{16}; (10, -8.66) \in M_1; (-10, 0) \in M_7.
 \end{aligned}$$

Время вычисления: 21 мин. 56 сек.

Объем занятой памяти: 0.99 гБ.

График маршрута и трассы приведен на рис. 2.

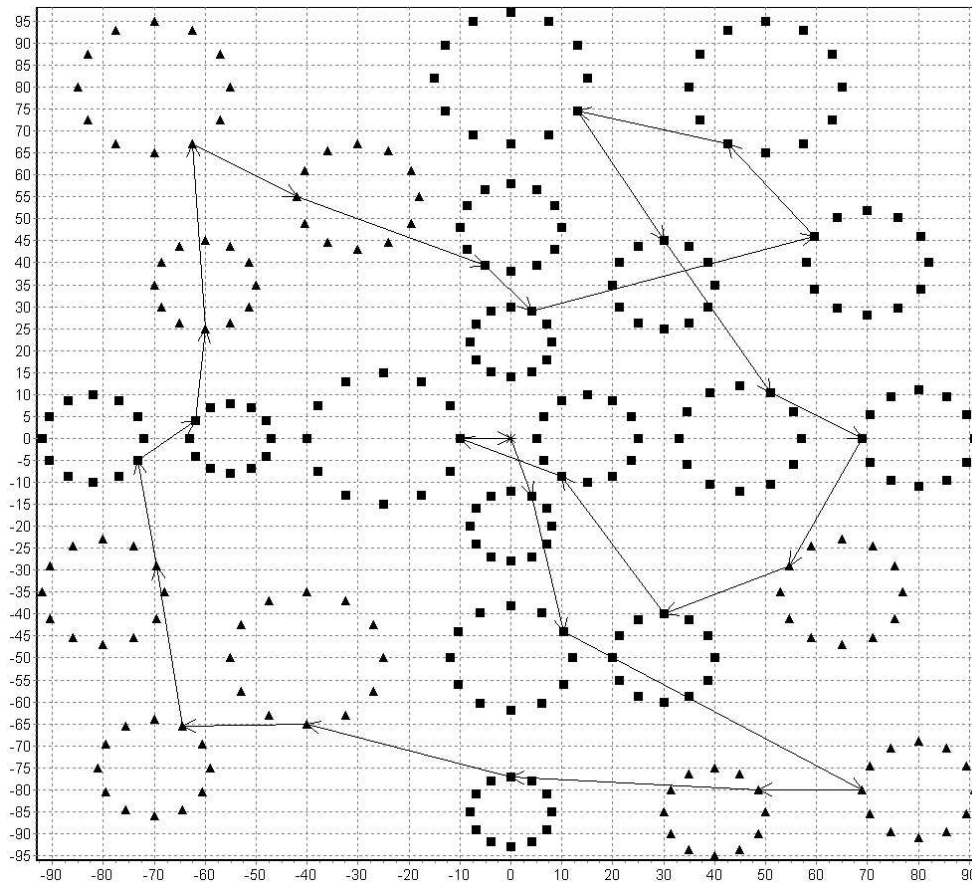


Рис. 2. Маршрут и трасса обхода 25 множеств с 12 ограничениями.

Дополним системы ограничений еще четырьмя условиями предшествования. Пусть

$$\begin{aligned}
 p_{13} &= 16, q_{13} = 17; p_{14} = 21, q_{14} = 22; \\
 p_{15} &= 3, q_{15} = 4; p_{16} = 18, q_{16} = 24.
 \end{aligned}$$

Получены следующие результаты:

Величина затрат: 871.31.

Маршрут и трасса:

$$\begin{aligned}
 &(-6, -39.61) \in M_5; (-27.01, -42.50) \in M_{20} (-8, 22) \in M_{10}; \\
 &(-19.61, 49) \in M_{25}; (25, 43.66) \in M_{13}; (50, 65) \in M_{14}; (58, 40) \in M_{15}; \\
 &(70.47, 5.50) \in M_3; (57, 0) \in M_2; (8, -20) \in M_4; \\
 &(35, -41.34) \in M_{16}; (59, -45.39) \in M_{17}; (70.47, -74.50) \in M_{18}; \\
 &(35, -76.34) \in M_{19}; (-0, -77) \in M_6; (-64.50, -65.47) \in M_{21}; \\
 &(-69.61, -29) \in M_{22}; (-73.34, -5) \in M_9; (-61.93, 4) \in M_8; \\
 &(-60, 25) \in M_{24}; (-62.50, 67.01) \in M_{23}; (-7.50, 69.01) \in M_{12}; \\
 &(-8.66, 53) \in M_{11}; (-12.01, 7.50) \in M_7; (5, 0) \in M_1.
 \end{aligned}$$

Время вычисления: 8 мин. 42 сек.

Объем занятой памяти: 583 мБ.

График маршрута и трассы приведен на рис. 3.

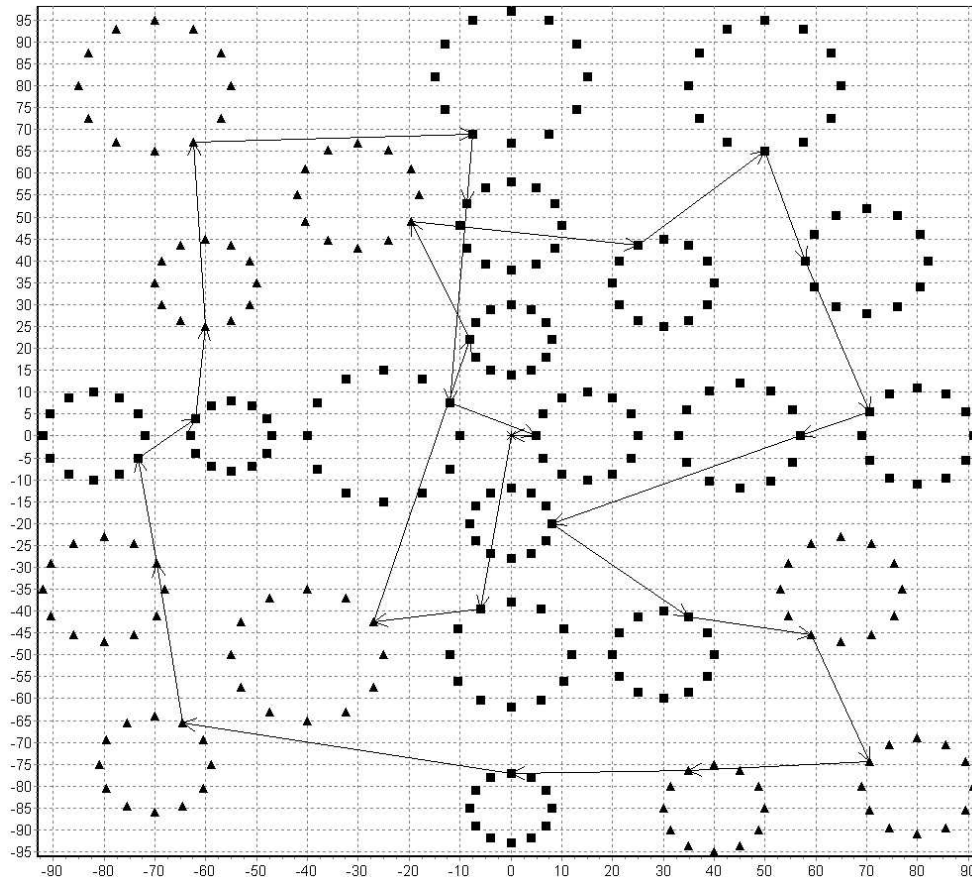


Рис. 3. Маршрут и трасса обхода 25 множеств с 16 ограничениями.

Снова дополним имеющуюся систему ограничений еще четырьмя условиями предшествования. Пусть

$$p_{17} = 25, q_{17} = 24; p_{18} = 2, q_{18} = 16; p_{19} = 8, q_{19} = 9; p_{20} = 20, q_{20} = 10.$$

Получены следующие результаты:

Величина затрат: 872.24.

Маршрут и трасса:

$$\begin{aligned}
 &(-6, -39.61) \in M_5; (-27.01, -42.50) \in M_{20}; (-8, 22) \in M_{10}; \\
 &(-19.61, 49) \in M_{25}; (25, 43.66) \in M_{13}; (50, 65) \in M_{14}; \\
 &(58, 40) \in M_{15}; (70.47, 5.50) \in M_3; (57, 0) \in M_2; (8, -20) \in M_4; \\
 &(35, -41.34) \in M_{16}; (59, -45.39) \in M_{17}; (70.47, -74.50) \in M_{18}; \\
 &(35, -76.34) \in M_{19}; (-0, -77) \in M_6; (-64.50, -65.47) \in M_{21}; \\
 &(-68, -35) \in M_{22}; (-61.93, -4) \in M_8; (-73.34, 5) \in M_9; \\
 &(-68.66, 30) \in M_{24}; (-62.50, 67.01) \in M_{23}; (-7.50, 69.01) \in M_{12}; \\
 &(-8.66, 53) \in M_{11}; (-12.01, 7.50) \in M_7; (5, 0) \in M_1.
 \end{aligned}$$

Время вычисления: 6 мин. 22 сек.

Объем занятой памяти: 478 мБ.

График маршрута и трассы приведен на рис. 4.

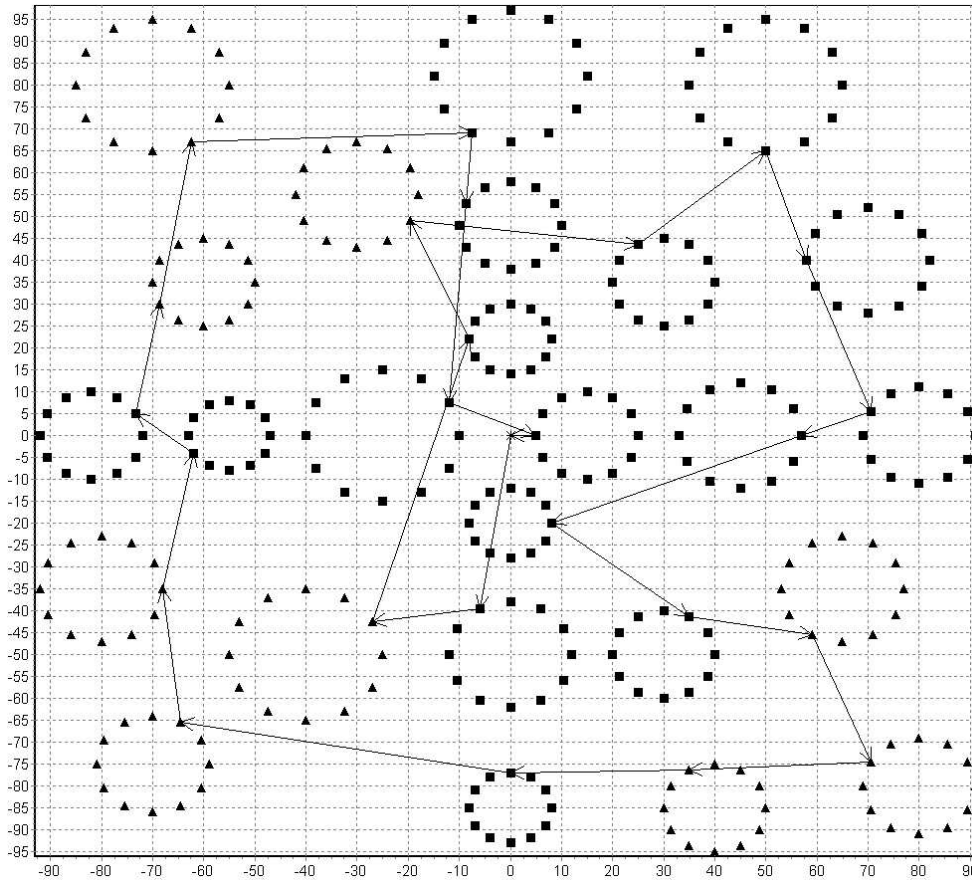


Рис. 4. Маршрут и трасса обхода 25 множеств с 20 ограничениями.

Дополним систему множеств, рассматриваемую выше, еще двумя множествами, пусть их центры имеют координаты $Q_{26} = (-40, -85)$, $O_{27} = (-30, 85)$, а радиусы равны $R_{26} = 10$, $R_{27} = 8$.

Система условий предшествования имеет вид:

$$\begin{aligned}
 &p_1 = 1, q_1 = 10; p_2 = 12, q_2 = 2; p_3 = 2, q_3 = 13; p_4 = 13, q_4 = 15; \\
 &p_5 = 6, q_5 = 16; p_6 = 15, q_6 = 16; p_7 = 18, q_7 = 27; p_8 = 9, q_8 = 27; \\
 &p_9 = 10, q_9 = 9; p_{10} = 11, q_{10} = 19; p_{11} = 20, q_{11} = 19; \\
 &p_{12} = 25, q_{12} = 26; p_{13} = 23, q_{13} = 22; p_{14} = 21, q_{14} = 20; \\
 &p_{15} = 24, q_{15} = 22; p_{16} = 14, q_{16} = 16; p_{17} = 7, q_{17} = 10; \\
 &p_{18} = 8, q_{18} = 2; p_{19} = 1, q_{19} = 9; p_{20} = 14, q_{20} = 26; \\
 &p_{21} = 2, q_{21} = 27; p_{22} = 3, q_{22} = 6; p_{23} = 3, q_{23} = 19; \\
 &p_{24} = 18, q_{24} = 17; p_{25} = 14, q_{25} = 25.
 \end{aligned}$$

Получены следующие результаты:

Величина затрат: 941.75.

Маршрут и трасса:

$$\begin{aligned}
 &(5, 0) \in M_1; (-12.01, 7.50) \in M_7; (-8, 22) \in M_{10}; \\
 &(-8.66, 43) \in M_{11}; (-7.50, 69.01) \in M_{12}; (-72, 0) \in M_9; \\
 &(-59, -6.93) \in M_8; (6, -39.61) \in M_5; (74.50, -70.47) \in M_{18}; \\
 &(71, -24.61) \in M_{17}; (70.47, -5.50) \in M_3; (55.39, 6) \in M_2; \\
 &(38.66, 30) \in M_{13}; (58, 40) \in M_{15}; (42.50, 67.01) \in M_{14}; \\
 &(-26, 78.07) \in M_{27}; (-36, 65.39) \in M_{25}; (-62.50, 67.01) \in M_{23}; \\
 &(-65, 26.34) \in M_{24}; (-68, -35) \in M_{22}; (-64.50, -65.47) \in M_{21}; \\
 &(-47.50, -62.99) \in M_{20}; (-35, -76.34) \in M_{26}; (-4, -78.07) \in M_6; \\
 &(31.34, -80) \in M_{19}; (21.34, -55) \in M_{16}; (8, -20) \in M_4.
 \end{aligned}$$

Время вычисления: 28 мин. 49 сек.

Объем занятой памяти: 1.02 гБ.

График маршрута и трассы приведен на рис. 5.

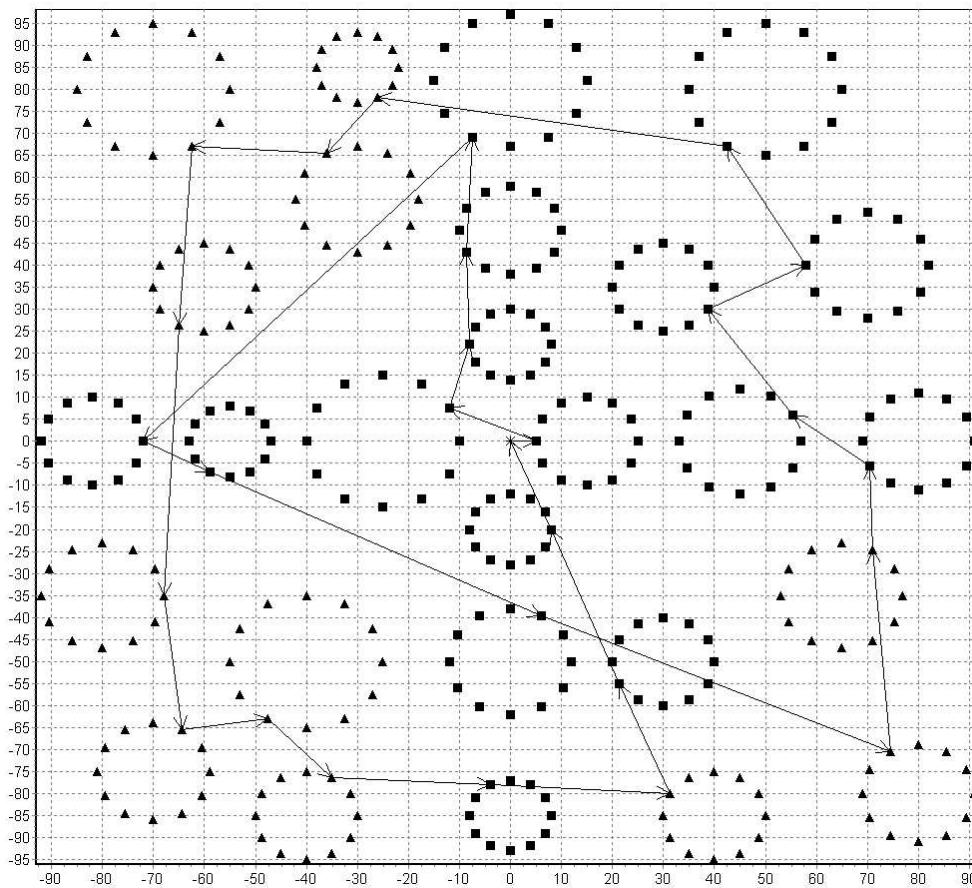


Рис. 5. Маршрут и трасса обхода 27 множеств с 25 ограничениями.

Таким образом, как видно из первого примера, увеличение количества условий предшествования приводит к уменьшению времени счета и сокращению необходимого для работы программы (а точнее, для размещения массива значений функции Беллмана) объема памяти ЭВМ. Оба этих факта вполне закономерны, ведь с ростом числа пар “отправитель-получатель” уменьшается число анализируемых с целью получения экстремума вариантов и сокращаются слои функции Беллмана и, соответственно, размер всего массива ее значений ввиду отбрасывания тех пар маршрут-трасса, которые противоречат условиям предшествования. Данный

подход позволил существенно увеличить размерности решаемых задач (следует отметить, что прежний вариант МДП [4] позволял решать на аналогичной ЭВМ задачу обхода всего 20–21 множества).

Поступила 5.10.2007

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
3. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Об одном обобщении задачи курьера // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. Вып. 8. С. 178–235.
4. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Обобщенная версия задачи курьера // Математический и прикладной анализ: Сб. науч. тр. Тюмень: Тюменский гос. ун-т, 2005. Вып. 2. С. 238–280.
5. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Метод динамического программирования в некоторых версиях задачи коммивояжера с ограничениями // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. Вып. 7. С. 217–234.
6. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация с условиями предшествования (задача курьера): метод динамического программирования // Вестник УГТУ-УПИ. 2004. № 15 (45). С. 148–151.
7. Ченцов А.Г. О структуре одной экстремальной задачи маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. 2006. № 1. С. 127–150.
8. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации с ограничениями // Изв. Удмуртского гос. ун-та. 2006. Вып. 3 (37). С. 163–166.

Научное издание

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Сборник научных трудов

*Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института математики и механики
и НИСО Уральского отделения Российской академии наук*

ЛР № 020764 от 24.04.98

Ответственный за выпуск: О. Н. Ульянов
Литературный редактор: Е. Г. Понизовкина
Технический редактор: Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в ИММ УрО РАН

НИСО УрО РАН № 16(08).
Подписано в печать 07.02.08. Формат 60 × 84¹/₈. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 20, 25. Уч.-изд. л. 16, 25. Тираж 200 экз. Заказ 2385.

Институт математики и механики УрО РАН
620219 г. Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-Методический центр — УПИ”
620002 г. Екатеринбург, ул. Мира, д.17, офис 226